TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

S.Baron, E.Jürimäe, E.Reimers

MATEMAATILISE ANALÜÜSI PRAKTIKUM

II

TARTU 1972

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

Matemaatilise analüüsi kateeder

S. Baron, E. Jürimäe, E. Reimers

MATEMAATILISE ANALÜÜSI PRAKTIKUM

II

TARTU 1972

УДК 517(07)

ПРАКТИКУМ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ II

С.Барон, Э.Юримяэ, Э.Реймерс

Настоящее издание является руководством для проведения практикума математического анализа по следующим разделам: I - Неопределенный интеграл; II-Определенный интеграл; III-Несобственные интегралы; IV-Приложения интегрального исчисления; V-Ряды. В каждой главе даны необходимые определения, методические указания и примеры решения задач. Издание содержит 1392 задач. Для некоторых задач, отмеченных звездочкой (*), даны также полные решения или вспомогательные указания.

26 чертежа.

ПРАКТИКУМ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ
II
На эстонском языке
Тартуский государственный университет
ЭССР, г. Тарту, ул. Юликооли, 18
Vastutav toimetaja E. Reimers

TRÜ rotaprint 1971. Paljundamisele antud 21. XII 1971. Trükipoognaid 16,5. Tingtrükipoognaid 13,35. Arvestuspoognaid 12,0. Trükiarv 1000. Paber 30x42. 1/4. MB 07669. Tell. nr. 1099.
Hind 80 kop.

S I S U K O R D

V. READ

E E S S Õ N A

Ülesannete kogu sisaldab näiteid ja ülesandeid matemaatilise analüüsi alalt integraalarvutuse ja ridade teooria ulatuses ja on mõeldud matemaatilise analüüsi praktikumi läbiviimiseks prof. G.Kangro õpiku "Matemaatiline analüüs"I ja II osa järgi Tartu Riiklikus Ülikoolis. Ülesannete kogu on sobiv kasutamiseks ka teistes ENSV kõrgemates koolides.

Ülesannete kogu igas osas on antud lühike teoreetiline sissejuhatus, kus on ära toodud põhilised mõisted, valemid ja teoreemid, mida läheb vaja vastava osa ülesannete lahendamisel. Samuti on toodud rohkesti näiteid tüüpiliste lahendusvõtete rakendamise kohta.

Ülesannete kogu üksikud peatükid on koostanud järgmised autorid: I, II, III ja V peatükk - S.Baron ja E.Reimers, IV peatükk - E.Jürimäe ja E.Reimers.

Kõigile arvutusülesannetele on antud vastused. Tärnikesega (*) märgitud ülesannetele on vastuses antud kas lahendust põhjendav märkus, juhised lahendamiseks või on ära toodud kogu lahendus.

Käsikirja asjaliku retsenseerimise eest on autorid väga tänulikud oma endisele õpetajale dotsent Jakob Gabovitšile. Samuti avaldavad autorid tänu matemaatilise analüüsi kateedri vanemlaborandile I.Rääbisele ning laborant K.Kolgile hoolika töö eest käsikirja vormistamisel ja sama kateedri assistendile A.Limakile vastuste ja näidete kontrollimise eest.

I. MÄÄRAMATA INTEGRAAL

§ 1. Vahetu integreerimine

Funktsiooni $F(x)$ nimetatakse funktsiooni $f(x)$ algfunktsiooniks piirkonnas X, kui piirkonnas X

$$F'(x) = f(x)$$

ehk, mis on sama,

$$dF(x) = f(x)dx.$$

Igal lõigus pideval funktsioonil on olemas algfunktsioon selles lõigus.

Avaldist $F(x) + C$, kus $F(x)$ on funktsiooni $f(x)$ mingi algfunktsioon ja C suvaline konstant, nimetatakse funktsiooni $f(x)$ määramata integraaliks ja märgitakse sümboliga

$$\int f(x)dx = F(x) + C. \tag{1}$$

Valemis (1) nimetatakse funktsiooni $f(x)$ integraalialuseks funktsiooniks ja arvu C integreerimiskonstandiks.

Funktsiooni $f(x)$ määramata integraali leidmist nimetatakse funktsiooni $f(x)$ integreerimiseks.

Määramata integraali definitsioonist järeldub, et kehtivad valemid

$$d\int f(x)dx = f(x)dx$$

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

Seega, lähtudes diferentseerimise põhivalemitest (osa I, lk. 115), saame järgmised integreerimise põhivalemid.

1) $\int 0\,dx = C.$

2) $\int dx = x + C.$

3) $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C.$

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C.$

5) $\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, kui $\alpha \neq -1$.

6) $\int \alpha^x dx = \frac{\alpha^x}{\ln \alpha} + C.$

7) $\int e^x dx = e^x + C.$

8) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

9) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$

10) $\int \cos x\,dx = \sin x + C.$

11) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C.$

12) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C.$

13) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C_1.$

14) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C = -\operatorname{arccot} x + C_1.$

15) $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C.$

16) $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C.$

17) $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$

18) $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$

Algfunktsiooni definitsiooni järgi loetakse algfunktsiooni $F(x)$ määramispiirkonnaks integraalialuse funktsiooni $f(x)$ määramispiirkonda X. Näiteks valemis 4) algfunktsiooni $2\sqrt{x}$ määramispiirkonnaks X osutub vahemik $(0, \infty)$, mitte aga funktsiooni $y = 2\sqrt{x}$ määramispiirkond $[0, \infty)$. Valemis 13) on $X = (-1,1)$, mitte aga funktsiooni $y = \arcsin x$ määramispiirkond $[-1,1]$.

Integreerimisel kasutatakse järgmisi tehetega seotud reegleid:

1° $\int cu(x)dx = c\int u(x)dx$, kus $c = \text{const}$,

2° $\int [u(x) + v(x)]dx = \int u(x)dx + \int v(x)dx$,

3° $\int [u(x) - v(x)]dx = \int u(x)dx - \int v(x)dx$,

kus integraalide olemasolust paremal järeldub integraalide olemasolu vasakul.

Määramata integraali leidmist integreerimise põhivalemite 1) - 18) ja reeglite 1° - 3° abil nimetatakse <u>vahetuks integreerimiseks</u>.

<u>Näide 1.</u> Leiame integraali

$$J = \int \frac{(1 + 2x^2)dx}{x^2(1 + x^2)} .$$

<u>Lahendus.</u> Et $1 + 2x^2 = (1 + x^2) + x^2$, siis reegli 2° ning valemite 3 ja 14 alusel saame

$$J = \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{1 + x^2}\right)dx = -\frac{1}{x} + \arctan x + C.$$

<u>Näide 2.</u> Leiame integraali

$$J = \int (\tan^2 x + \sin^2 \frac{x}{2})dx.$$

<u>Lahendus.</u> Et $1 + \tan^2 x = \cos^{-2} x$ ja $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$ siis reeglite 1° ja 3° ning valemite 12, 2 ja 10 põhjal leiame

$$J = \int (\frac{1}{\cos^2 x} - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos x)dx =$$

$$= \int (\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos x)dx = \tan x - \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin x + C =$$

$$= -\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin x + \tan x + C.$$

Ülesanded.

Vahetu integreerimise teel leida järgmised määramata integraalid:

1. $\int x^4\,dx$
2. $\int (\sqrt{x} + 4)dx$
3. $\int x\sqrt{x}\,dx$
4. $\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,dx$
5. $\int \left(\frac{1}{3x^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx$
6. $\int (x^3 - 1)^2 dx$
7. $\int \left(3{,}4x^{-0{,}17} + \frac{1{,}2}{x\sqrt{x}}\right)dx$
8. $\int \left[\left(\frac{1-x}{x}\right)^2 + \sqrt[5]{x^2}\right]dx$
9. $\int \left[\frac{(1+x)^2}{x} + \sqrt[m]{x^n}\right]dx$
10. $\int (\arcsin x + \arccos x)dx$
11. $\int \sqrt[3]{x}(\operatorname{arccot} x + \arctan x)dx$
12. $\int \frac{x^2(x^2 - 1)}{\sqrt[5]{x}}\,dx$
13*. $\int (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1)dx$
14. $\int (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^3 dx$
15. $\int 10^x\,dx$
16. $\int 5^x e^x\,dx$
17. $\int \frac{\sqrt{x} + x^3 e^x - x^2}{x^3}\,dx$
18. $\int \frac{5\cdot 3^x - 3\cdot 5^x}{3^x}\,dx$
19. $\int (e^{5x} + \ln 2)dx$
20. $\int (1 + e^x)^2 dx$
21. $\int (2^x - 3^x)^2 dx$
22. $\int (\cos x - 3\sin x)dx$
23. $\int \sin(\frac{\pi}{4} + x)dx$
24. $\int \cos(\frac{\pi}{4} + x)dx$
25. $\int (3 - \cos^2 \frac{x}{2})dx$
26. $\int (3\sin^2 \frac{x}{2} - 2\sin^2 \frac{3}{2})dx$
27. $\int (\cos \alpha - \cos x)dx$

28. $\int \frac{dx}{\cos 2x + \sin^2 x}$

29. $\int \frac{1 + \cos^2 x}{1 + \cos 2x}\, dx$

30. $\int \frac{\cos 2x\, dx}{\cos^2 x \sin^2 x}$

31. $\int \cot^2 x\, dx$

32. $\int (\exp \tan 2 - 2\tan^2 x)dx$

33. $\int (\tan x - \cot x)^2 dx$

34. $\int \frac{dx}{\sqrt{5 - 5x^2}}$

35. $\int (2 - \frac{\sin 3}{\sqrt{2 - 2x^2}})dx$

36. $\int \frac{x^2\, dx}{x^2 + 1}$

37. $\int \frac{(1 + x)^2\, dx}{x(1 + x^2)}$

38. $\int \frac{x^4\, dx}{x^2 + 1}$

39. $\int \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\, dx$

40. $\int (\mathrm{sh}\ 2 - \mathrm{sh}\ x)dx$

41. $\int \sqrt{1 + \mathrm{sh}^2 x}\, dx$

42*. $\int 3\mathrm{ch}^2 \frac{x}{2}\, dx$

43*. $\int (2 - \mathrm{sh}^2 \frac{x}{2})dx$

44*. $\int \mathrm{th}^2 x\, dx$

45*. $\int \mathrm{cth}^2 x\, dx$

46. $\int \frac{dx}{\mathrm{ch}\ 2x - \mathrm{sh}^2 x}$

47. $\int \frac{1 + \mathrm{ch}^2 x}{1 + \mathrm{ch}\ 2x}\, dx$

48. $\int \frac{\mathrm{ch}\ 2x\, dx}{\mathrm{ch}^2 x\ \mathrm{sh}^2 x}$

49. $\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x\ \mathrm{sh}^2 x}$

§ 2. Muutujate vahetus

Kui funktsioonil $f(u)$ on olemas algfunktsioon $F(u)$ piirkonnas U ja $u = u(x)$ on piirkonnas X diferentseeruv funktsioon, mille väärtused kuuluvad piirkonda U, siis kehtib valem

$$\int f\left[u(x)\right] u'(x)dx = \int f(u)du. \tag{2}$$

Valemit (2) nimetatakse määramata integraali muutujate vahetuse valemiks.

Seega nimetatud eeldustel, kuna

$$\int f(u)du = F(u) + C,$$

on

$$\int f\left[u(x)\right] u'(x)dx = F\left[u(x)\right] + C. \tag{3}$$

Et $u'(x)dx = du(x)$, siis

$$\int f\left[u(x)\right] u'(x)dx = \int f\left[u(x)\right] du(x)$$

ja valemi (3) võib esitada kujul

$$\int f\left[u(x)\right] du(x) = F\left[u(x)\right] + C. \tag{3'}$$

Integraali leidmist valemi (3') järgi nimetatakse integreerimiseks diferentsiaali märgi alla viimise teel. Nagu näha valemist (3'), ei ole uuel muutujal $u(x)$ omaette tähistust u erinevalt valemist (2).

Erijuhul, kui $u = ax + b$, kus $a \neq 0$, saame valemist (3) või (3'), et

$$\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a}F(ax + b) + C. \tag{4}$$

Mõnikord on võimalik ja otstarbekohane kasutada valemit (2) teisiti, võttes funktsiooni $u = u(x)$ asemele tema pöördfunktsiooni $x = x(u)$. Siis

$$\int f(x)dx = \int f\left[x(u)\right] x'(u)du, \tag{5}$$

eeldusel, et $x = x(u)$ on diferentseeruv vaadeldavas piirkonnas.

Näide 3. Leiame integraali

$$J = \int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{3 + 2\tan x}}$$

diferentsiaali märgi alla viimise teel.

Lahendus. Et

$$\frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{1}{2} d(2\tan x) = \frac{1}{2} d(3 + 2\tan x),$$

siis valemi (3') põhjal saame

$$J = \int \frac{d(3 + 2\tan x)}{2\sqrt{3 + 2\tan x}} = \sqrt{3 + 2\tan x} + C.$$

Ülesanded

Kasutades valemit (3'), leida järgmised integraalid.

50. $\int \cos x \, d\cos x$

51. $\int \tan^4 x \, d\tan x$

52. $\int \frac{d(1 + x^3)}{\sqrt{1 + x^3}}$

53. $\int \frac{d(2 + \ln x)}{\sin^2(2 + \ln x)}$

54. $\int e^{\sin x} \, d\sin x$

55. $\int \frac{d\arcsin x}{\arcsin^2 x}$

Leida järgmised integraalid diferentsiaali märgi alla viimise teel.

56. $\int \frac{2x \, dx}{(x^2 + 2)^2}$

57. $\int \frac{(2x - 5)dx}{x^2 - 5x + 3}$

58. $\int \frac{x^3 \, dx}{\sqrt[5]{x^4 + 1}}$

59. $\int x\sqrt{1 - x^2} \, dx$

60. $\int \frac{(6x - 5)dx}{\sqrt{3x^2 - 5x + 6}}$

61. $\int \frac{e^x \, dx}{e^x + \ln 3}$

62. $\int \frac{e^{2x} \, dx}{e^{2x} + 4}$

63. $\int \frac{\sin 2x \, dx}{2 - \cos^2 x}$

64. $\int \frac{dx}{x \ln x}$

65. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2} \arcsin^3 x}$

66. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$

67. $\int \cos^3 x \sin 2x \, dx$

68. $\int e^x \cos e^x \, dx$

69. $\int \frac{\sin 2x \, dx}{\sqrt{\cos^2 1 + \cos^2 x}}$

70. $\int x^2 \exp x^3 \, dx$

71. $\int \frac{\ln^m x}{x} dx$

72. $\int \frac{3^x \, dx}{\sqrt{1 - 9^x}}$

73. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} - e^{-x^2}\right) x \, dx$

74. $\int \frac{\arctan^3 x}{1 + x^2} dx$

75. $\int \frac{dx}{(1 + x^2) \operatorname{arccot}^2 x}$

76. $\int \tan x \, dx$

77. $\int \cot x \, dx$

78. $\int \frac{2x - \sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1 - x^2}} dx$

79. $\int \frac{1 + x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$

80. $\int \frac{e^x \, dx}{1 + e^{2x}}$

81. $\int \frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{7 + \operatorname{ch} x}} dx$

82. $\int \frac{(1 + \operatorname{th} x)^3}{\operatorname{ch}^2 x} dx$

Näide 4. Leida integraal

$$J = \int \frac{dx}{\sqrt{2 - 9(x + 2)^2}} .$$

Lahendus. Valemi (4) kasutamiseks teisendame integraali sobivale kujule:

$$J = \int \frac{dx}{\sqrt{2 - [3(x + 2)]^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2 - (3x + 6)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{3x + 6}{\sqrt{2}}\right)^2}}.$$

Seega $a = 3/\sqrt{2}$. Nüüd põhivalemist (3) ja valemist (4) saame

$$J = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{\sqrt{2}}{3}\arcsin\frac{3x + 6}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{3}\arcsin\frac{3(x + 2)}{\sqrt{2}} + C.$$

Ülesanded.

Kasutades valemit (4), leida järgmised integraalid.

83. $\int (x - 3)^{12}\, dx$

84. $\int \frac{dx}{(2x - 3)^5}$

85. $\int \sqrt[3]{7 - x}\, dx$

86. $\int \frac{dx}{\sqrt{5 - 9x}}$

87. $\int \frac{dx}{2x - 7}$

88. $\int \frac{dx}{ax + b}$; $b \neq 0$

89. $\int \cos 3x\, dx$

90. $\int \sin(x - 4)dx$

91. $\int \cos(1 - 2x)dx$

92. $\int \frac{dx}{\sin^2(2x - 5)}$

93. $\int \frac{dx}{\cos^2(2 - 5x)}$

94. $\int \cos^{-2}(3x - \frac{\pi}{4})dx$

95. $\int e^{-2x+3}\, dx$

96. $\int 5^{3x+\ln 2}\, dx$

97. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 16x^2}}$

98. $\int \frac{dx}{\sqrt{3 - x^2}}$

99. $\int \frac{dx}{\sqrt{4 - 9x^2}}$

100. $\int \frac{dx}{1 + 9x^2}$

101. $\int \frac{dx}{2x^2 + 9}$

102. $\int \frac{dx}{1 + (5x + 1)^2}$

103. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - (2x - 3)^2}}$

104*. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x - 3 - x^2}}$

105. $\int \frac{dx}{\sqrt{8 + 6x - 9x^2}}$

106. $\int \frac{dx}{\sqrt{2 - 6x - 9x^2}}$

107. $\int \cos^2 x \, dx$

108. $\int \sin^2 x \, dx$

109. $\int \frac{dx}{1 - \cos x}$

110. $\int \frac{dx}{1 + \cos x}$

111. $\int \frac{dx}{1 + \sin x}$

112. $\int \frac{dx}{1 - \sin x}$

Leida järgmised integraalid, kasutades diferentsiaali märgi alla viimist ja valemit (4).

113. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1 - \ln^2 x}}$

114. $\int \frac{\sqrt[3]{(\tan x - 3)^2}}{\cos^2 x} dx$

115. $\int \frac{3 - 7x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$

116. $\int \frac{dx}{x \ln x \ln\ln x}$

117. $\int \frac{3 - 2\sin^3 x + \cos x}{\sin^2 x} dx$

118. $\int \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} dx$

119. $\int \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} dx$

120. $\int (\tan^2 x + \tan^4 x) dx$

121. $\int \frac{\cos 2x \, dx}{1 + \sin x \cos x}$

122. $\int \frac{\sin^3 x \, dx}{\cos x}$

123. $\int \frac{\cos^3 x \, dx}{\sin^4 x}$

124. $\int \frac{\sin^3 x \, dx}{\sqrt{\cos x}}$

125*. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$

126. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$

127. $\int \tan^3 x\, dx$

128. $\int \tan^4 x\, dx$

129. $\int \frac{1 + x}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$

130. $\int \frac{3x - 1}{x^2 + 9}\, dx$

131. $\int \frac{\arctan 2x}{1 + 4x^2}\, dx$

132. $\int (e^{-x} + e^{-2x})dx$

133. $\int \frac{x^2\, dx}{(8x^3 + 27)^{2/3}}$

134*. $\int \frac{dx}{(1 + x)\sqrt{x}}$

135. $\int \sin \frac{1}{x} \frac{dx}{x^2}$

136. $\int \frac{2x - \sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$

137. $\int \frac{x + (\arccos 3x)^2}{\sqrt{1 - 9x^2}}\, dx$

138. $\int \frac{1 + x - x^2}{(1 - x^2)^{3/2}}\, dx$

139. $\int \frac{(1 + x)^2}{1 + x^2}\, dx$

140*. $\int \frac{x^2\, dx}{(1 - x)^{100}}$

141*. $\int x\sqrt{1 - 3x}\, dx$

142. $\int \frac{dx}{x\sqrt{3 - \ln^2 x}}$

143. $\int x \cos x^2\, dx$

144. $\int (1 + e^{3x})^2 e^{3x}\, dx$

145. $\int \frac{dx}{\sin^2 9x}$

146. $\int \frac{dx}{\cos^2 7x}$

147. $\int \frac{(\sin\sqrt{x} + \exp\sqrt{x})\, dx}{\sqrt{x}}$

Näide 5. Leiame integraali

$$J = \int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}.$$

Lahendus. Teeme muutuja vahetuse $\sqrt{e^x - 1} = z$, kust $e^x - 1 = z^2$. Diferentseerides mõlemaid pooli, saame $e^x\, dx = 2z\, dz$ ehk $dx = \frac{2z\, dz}{e^x}$. Seega

$$J = \int \frac{2z\,dz}{e^x\sqrt{z^2}} = 2\int \frac{dz}{z^2+1} = 2 \arctan z + C.$$

Asendades tagasi endise muutuja x, saamegi vastuseks

$$J = 2 \arctan\sqrt{e^x - 1} + C.$$

Arvutuste läbiviimisel on mõnikord sobiv jagada leht pooleks ja lisaarvutused teha lehe ühel poolel ning integraali leidmine teisel poolel. Kui lisaarvutusi on vähe, siis võib nad märkida võrdusmärgi või integraali alla, näiteks

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}} \underset{e^x-1=z^2}{=} \int_{e^x dx = 2z dz} \frac{2z\,dz}{e^x\sqrt{z^2}} = 2\int \frac{dz}{z^2+1} =$$

$$= 2\arctan z + C \underset{z=\sqrt{e^x-1}}{=} 2\arctan\sqrt{e^x - 1} + C.$$

<u>Näide 6</u>. Leida integraal

$$J = \int \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)^3}}.$$

Integraalialune funktsioon on määratud piirkonnas $X = (-1,1)$. Teeme muutuja vahetuse $x = \sin u$. Et oleks $x \in X$, võtame $u \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Seetõttu $dx = \cos u\, du$, kus $\cos u > 0$, ja valemi (3) järgi, arvestades, et nüüd $|\cos u| = \cos u$, saame

$$J = \int \frac{\cos u\, du}{\sqrt{(1 - \sin^2 u)^3}} = \int \frac{\cos u\, du}{\sqrt{\cos^6 u}} = \int \frac{\cos u\, du}{|\cos^3 u|} = \int \frac{du}{\cos^2 u} =$$

$$= \tan u + C = \frac{\sin u}{\cos u} + C = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} + C.$$

Kui näiteks võtta $u \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, siis ka $x \in (-1, 1)$, kuid sel korral $|\cos u| = -\cos u$ ja

$$\cos u = -\sqrt{1 - x^2}$$

ja jälle

$$J = \int \frac{\cos u \, du}{|\cos^2 u|} = -\int \frac{du}{\cos^2 u} = -\tan u + C =$$

$$= \frac{\sin u}{-\cos u} + C = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} + C.$$

Näide 7. Leida integraal

$$J = \int \frac{dx}{\sin 2x} .$$

Lahendus. Muutuja vahetusega $\tan x = t$ saame, $\cos^{-2} x \, dx = dt$ ehk $dx = \cos^2 x \, dt$. Seega

$$J = \int \frac{\cos^2 x \, dt}{2\sin x \cos x} = \frac{1}{2} \int \frac{\cos x \, dt}{\sin x} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\tan x} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} =$$

$$= \frac{1}{2} \ln|t| + C = \frac{1}{2} \ln|\tan x| + C.$$

Näide 8. Leida muutuja vahetusega $u = x + \frac{1}{x}$ integraal

$$J = \int \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x^4 + 1}}.$$

Lahendus. Saame $du = (1 - \frac{1}{x^2})dx = \frac{x^2 - 1}{x^2} dx$ ehk $(x^2 - 1)\, dx = x^2 du$. Seega

$$J = \int \frac{x^2 \, du}{(x^2 + 1)\sqrt{x^4 + 1}} = \int \frac{du}{(x + \frac{1}{x})\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}} =$$

$$= \int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - 2}}.$$

Tehes veel kord muutuja vahetuse $u = \frac{1}{z}$, kust $du = \frac{dz}{-z^2}$.

Saame

$$J = -\int \frac{dz}{z^2 u \sqrt{\frac{1 - 2z^2}{z^2}}} = -\int \frac{dz}{\sqrt{1 - 2z^2}} = -\int \frac{dz}{\sqrt{1 - (\sqrt{2}\, z)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arccos \sqrt{2}\, z + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \arccos \frac{\sqrt{2}}{u} + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arccos \frac{x\sqrt{2}}{x^2 + 1} + C .$$

Ülesanded.

Leida järgmised integraalid (sulgudes on märgitud sobiv muutujavahetus).

148. $\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ $(x = a \sin v)$

149. $\int \frac{dx}{\sqrt{x - x^2}}$ $(x = \sin^2 u)$

150. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}}$ $(x = \frac{1}{u},\ x = \frac{a}{\cos v}$ või $x = a \operatorname{ch} w)$

151. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2 + x^2}}$ $(x = \sqrt{2} \tan z$ või $x = \frac{\sqrt{2}}{\operatorname{sh} z})$

152. $\int x^3 \sqrt{a - x^2}\, dx$ $(\sqrt{a - x^2} = y)$

153. $\int x\sqrt{a - x}\, dx$ $(\sqrt{a - x} = s)$

154. $\int \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \frac{dx}{\sqrt{x^4 + 1}}$ $(t = x - \frac{1}{x})$

Leida sobiva muutujavahetusega järgmised integraalid.

155. $\int \frac{\exp\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$

156. $\int \sqrt{e^x - 1}\, dx$

157. $\int \frac{dx}{e^x - 1}$

163. $\int \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x} dx$

158. $\int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt[4]{e^x - 1}}$

164. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 + a^2}}$

159. $\int \frac{\arcsin x^{-1}}{|x|\sqrt{x^2-1}} dx$

165. $\int x^2\sqrt{4 - x^2}\, dx$

160. $\int \frac{\sqrt{x}\, dx}{1 + \sqrt[4]{x^3}}$

166. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 - 9}}$

161. $\int x\sqrt[3]{x - 1}\, dx$

167. $\int \frac{\ln \tan x}{\sin x \cos x} dx$

162. $\int \sqrt{1 - x^2}\, dx$

§ 3. Ositi integreerimine

Kui piirkonnas X funktsioonid $u = u(x)$ ja $v = v(x)$ on diferentseeruvad ja on olemas integraal $\int v\, du$, siis on olemas ka integraal $\int u\, dv$ ja kehtib võrdus

$$\int u\, dv = u\, v - \int v\, du. \qquad (6)$$

Valemit (6) nimetatakse <u>määramata integraali ositi integreerimise valemiks</u>. Valem (6) taandab integraali $\int u\, dv$ leidmise uue integraali $\int v\, du$ leidmisele.

Seepärast on valemit (6) otstarbekohane kasutada sel juhul, kui uus integraal $\int v\, du$ on lihtsamalt leitav. Integraali $\int v\, du$ leidmiseks võib jälle kasutada valemit (6).

<u>Näide 9</u>. Leida integraal

$$J = \int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1 - x}} dx.$$

Lahendus. Märkides

$$u = \mathrm{arcain}\sqrt{x}, \quad dv = \frac{dx}{\sqrt{1 - x}},$$

saame, kasutades valemit (4) ja põhivalemit 4),

$$du = \frac{1}{\sqrt{1 - x}} \frac{dx}{2\sqrt{x}}, \qquad v = - 2\sqrt{1 - x}.$$

Seega valemi (6) põhjal

$$J = - 2\sqrt{1 - x} \arcsin\sqrt{x} + \int \frac{dx}{\sqrt{x}} =$$

$$= - 2\sqrt{1 - x} \arcsin\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C =$$

$$= 2(\sqrt{x} - \sqrt{1 - x} \arcsin\sqrt{x}) + C.$$

Näide 10. Leida integraal

$$J = \int \arctan\sqrt{x}\, dx.$$

Lahendus. Märkides

$$u = \arctan\sqrt{x}, \quad dv = dx,$$

saame

$$du = \frac{1}{1 + x} \frac{dx}{2\sqrt{x}}, \quad v = x.$$

Seega põhivalemite 4 ja 14 ning valemi (2') põhjal

$$J = x \arctan\sqrt{x} - \int \frac{x\, dx}{(1 + x)2\sqrt{x}} =$$

$$= x \arctan\sqrt{x} - \int \frac{(x + 1) - 1}{(1 + x)2\sqrt{x}} dx =$$

$$= x \arctan\sqrt{x} - \int \frac{dx}{2\sqrt{x}} + \int \frac{d\sqrt{x}}{1 + x} =$$

$$= x \arctan\sqrt{x} - \sqrt{x} + \arctan\sqrt{x} + C =$$

$$= -\sqrt{x} + (x + 1) \arctan\sqrt{x} + C.$$

Integraalide

$$\int P_n(x)f(x)dx$$

leidmisel, kus $P_n(x)$ on n-astme polünoom ja $f(x)$ on üks funktsioonidest $a^{\alpha x}$, $\sin\alpha x$, $\cos\alpha x$, $\operatorname{sh}\alpha x$ või $\operatorname{ch}\alpha x$, tuleb valemis (6) võtta

$$u = P_n(x), \quad dv = f(x)dx.$$

Tulemuseks saame uue integraali

$$\int P_{n-1}(x)f(x)dx,$$

kus $P_{n-1}(x)$ on juba (n-1)-astme polünoom. Kui $P_{n-1}(x) \neq$ $\neq$ const, siis tuleb veel kord rakendada valemit (6). Seega esialgse integraali leidmiseks on vaja valemit (6) järjest rakendada n korda. Niisugustel juhtudel on sobiv kasutada nn. <u>üldistatud ositi integreerimise valemit</u>

$$\int uv^{(n)}dx = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k u^{(k)} v^{(n-1-k)} + (-1)^n \int u^{(n)} v dx,$$

mis kehtib, näiteks, kui funktsioonidel $u = u(x)$ ja $v = v(x)$ on olemas pidevad n-järku tuletised $u^{(n)} = u^{(n)}(x)$ ja $v^{(n)} = v^{(n)}(x)$.

Ülesanded.

Leida järgmised integraalid.

168. $\int x \sin x \, dx$
169. $\int x \cos x \, dx$
170. $\int (x^2 - 1)\sin 2x \, dx$
171. $\int (x^3-2x+1)\cos 3x \, dx$
172. $\int x^2 \sin 2x \, dx$
173. $\int x \operatorname{sh} x \, dx$
174. $\int x^2 \operatorname{ch} 3x \, dx$
175. $\int x^3 \cos \frac{x}{2} \, dx$
176. $\int x e^{-x} \, dx$
177. $\int x^2 e^{-3x} \, dx$

178. $\int (x^2 - 3x + 2)e^{-\frac{x}{2}}\,dx$ 179. $\int x^2 a^x\,dx$

Integraalide

$$\int R(x)g(x)\,dx$$

leidmisele, kus $R(x)$ on ratsionaalne funktsioon ja $g(x)$ on üks funktsioonidest $\ln P_n(x)$, $\arctan \alpha x$, $\operatorname{arccot} \alpha x$, $\arcsin \alpha x$ või $\arccos \alpha x$, tuleb valemis (6) võtta $u = g(x)$ ja $dv = R(x)dx$ (uues integraalis esinev $g'(x)$ pole enam transtsendentne, vaid algebraline funktsioon).

Ülesanded.

Leida järgmised integraalid.

180. $\int \ln x\,dx$

181. $\int \frac{\ln x}{x^3}\,dx$

182. $\int \ln^2 x\,dx$

183. $\int x \ln(x - 1)\,dx$

184. $\int (x^2 + 3)\ln 2x\,dx$

185. $\int x^2 \ln(x + 1)\,dx$

186. $\int x^\alpha \ln x\,dx \quad (\alpha \neq -1)$

187. $\int \ln(x^2 + 1)\,dx$

188. $\int \arctan x\,dx$

189. $\int x \arctan x\,dx$

190. $\int x^3 \operatorname{arccot} x\,dx$

191. $\int \arcsin x\,dx$

192. $\int \ln(x + \sqrt{1 + x^2})\,dx$

193. $\int x \ln \frac{1 + x}{1 - x}\,dx$

194. $\int \sqrt{x} \ln^2 x\,dx$

195. $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$

196*. $\int \frac{x e^x}{(1 + x)^2}\,dx$

Integraalide

$$\int e^{\alpha x} \sin \beta x\,dx, \qquad \int e^{\alpha x} \cos \beta x\,dx$$

leidmiseks tuleb valemit (6) rakendada kaks korda järjest. Tulemuseks saame võrrandi otsitava integraali jaoks.

Ülesanded.

Leida järgmised integraalid.

197. $\int e^x \sin 2x\, dx$

198. $\int e^x \cos 2x\, dx$

199. $\int e^{-2x} \sin 3x\, dx$

200. $\int e^{-2x} \cos 3x\, dx$

201. $\int e^{-x} \cos \frac{x}{2}\, dx$

202. $\int e^{-x} \sin \frac{x}{2}\, dx$

203. $\int e^{3x}(\sin 2x - \cos 2x) dx$

Kasutades muutuja vahetust ja ositi integreerimist, leida integraalid.

204. $\int \frac{x\, dx}{\sin^2 x}$

205. $\int \frac{x \sin x}{\cos^3 x}\, dx$

206. $\int \sin \ln x\, dx$

207. $\int \cos \ln x\, dx$

208. $\int x \tan^2 x\, dx$

209. $\int x \cos^2 x\, dx$

210. $\int (x - 3)\sin^2 x\, dx$

211. $\int (x + 2)\cot^2 x\, dx$

212. $\int x^2 \cos^2 x\, dx$

213. $\int \arcsin^2 x\, dx$

214. $\int x \arctan^2 x\, dx$

215. $\int \frac{x \arctan x}{\sqrt{1 + x^2}}\, dx$

216. $\int \frac{x\, dx}{\tan^2 x}$

217. $\int e^{3x} \sin^2 x\, dx$

218. $\int e^{2x} \cos^2 x\, dx$

219. $\int x \sin \sqrt{x}\, dx$

220. $\int \sin \sqrt[3]{x}\, dx$

221. $\int e^{\sqrt{x}}\, dx$

222. $\int \cos\sqrt{x}\, dx$

223. $\int \ln(1 + \sqrt{x})\, dx$

224. $\int x^5 \exp x^3 dx$

225. $\int x^2 \arctan x\, dx$

226. $\int (x^2 + 1)\operatorname{arccot} x\, dx$

227*. $\int \frac{\arctan x}{x^2(1 + x^2)}\, dx$

228. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{(1 - x^2)^3}}\, dx$

229. $\int \frac{x \exp \arctan x}{\sqrt{(1 + x^2)^3}}\, dx$

230. $\int \frac{\exp \arctan x}{\sqrt{(1 + x^2)^3}}\, dx$

231. $\int x^2 \exp\sqrt{x}\, dx$

232. $\int x^7 \exp(-x^2)\, dx$

233. $\int \cos^2\sqrt{x}\, dx$

234. $\int \sin^2\sqrt{x + 2}\, dx$

235. $\int \frac{x \arccos x}{\sqrt{(1 - x^2)^3}}\, dx$

236. $\int \frac{x \ln x}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}}\, dx$

§ 4. Ratsionaalfunktsiooni integreerimine

1. Ratsionaalfunktsiooni lahutamine osamurdude summaks.
Ratsionaalfunkteiooniks nimetatakse funktsiooni

$$\frac{f(x)}{g(x)}, \tag{7}$$

kus f(x) ja g(x) on reaalarvuliste kordajatega polünoomid, s.o.

$$f(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m,$$

$$g(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n.$$

Kui $m<n$, siis ratsionaalfunktsiooni (7) nimetatakse lihtmur-

ruks, kui aga $m \geq n$, siis liigmurruks.

Kui (7) kujutab liigmurdu, siis võime polünoomi $f(x)$ jagamisel polünoomiga $g(x)$ eraldada täisosa polünoomi $q(x)$ ja leida jäägi polünoomi $r(x)$, nii et kehtib

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}, \tag{8}$$

kus $r(x)/g(x)$ on juba lihtmurd.

Võrduse (8) põhjal võime kirjutada

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx = \int q(x)dx + \int \frac{r(x)}{g(x)}\,dx,$$

kus paremal esimene integraal on leitav põhivalemi 5) alusel. Sellega taandub ratsionaalfunktsiooni integreerimine lihtmurru integreerimisele. Seepärast eeldame järgnevas, et ratsionaalfunktsioon (7) on lihtmurd.

Lihtmurru (7) integreerimiseks lahutatakse ta osamurdude summaks järgmiselt.

a) Kui nimetaja $g(x)$ kõik nullkohad $a, b, \ldots, h$ on erinevad ja reaalsed, see on

$$g(x) = a_0(x - a)(x - b)\ldots(x - h),$$

siis kehtib võrdus

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \ldots + \frac{H}{x-h}, \tag{9}$$

kus kordajad $A, B, \ldots, H$ on üheselt leitavad reaalarvud.

b) Kui nimetaja $g(x)$ kõik nullkohad $a, b, \ldots, h$ on võrdsed ja reaalsed, see on

$$g(x) = a_0(x - a)^n,$$

siis kehtib võrdus

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{x - a} + \frac{B}{(x - a)^2} + \ldots + \frac{H}{(x - a)^n}, \tag{10}$$

kus kordajad $A, B, \ldots, H$ on üheselt leitavad reaalarvud.

c) Kui nimetaja $g(x)$ kõik nullkohad on imaginaarsed ja erinevad, see on

$$g(x) = a_o(x^2 + px + q)\ldots(x^2 + rx + s),$$

kus ruutpolünoomide kordajad on reaalarvud ja diskriminandid $p^2 - 4q<0, \ldots, r^2 - 4s<0$, siis kehtib võrdus

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{Px + Q}{x^2 + px + q} + \ldots + \frac{Rx + S}{x^2 + rx + s}, \qquad (11)$$

kus kordajad $P, Q, \ldots, R, S$ on üheselt leitavad reaalarvud.

d) Kui nimetaja $g(x)$ kõik nullkohad on $k = n/2$ kordsed kaaskompleksarvud, see on

$$g(x) = a_o(x^2 + px + q)^k,$$

kus p ja q on reaalarvud ning $p^2 - 4q<0$, siis kehtib võrdus

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{Mx+N}{x^2+px+q} + \frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^2} + \ldots + \frac{Sx+T}{(x^2+px+q)^k}, \qquad (12)$$

kus kordajad $M, N, P, Q, \ldots, S, T$ on üheselt leitavad reaalarvud.

e) Kui nimetaja $g(x)$ erinevad reaalsed nullkohad $a, b, \ldots$ on vastavalt $k, l, \ldots$ kordsusega ja erinevad imaginaarsed nullkohad vastavalt $\varkappa$, λ , ... kordsusega kaaskompleksarvud, see on

$$g(x) = a_o(x-a)^k(x-b)^l\ldots(x^2+px+q)^{\varkappa}(x^2+rx+s)^{\lambda}\ldots,$$

kus ruutpolünoomide kordajad on reaalarvud ja $p^2 - 4q<0$, $r^2 - 4s<0, \ldots$, siis on üheselt leitavad sellised reaalarvud $A_j, B_j, \ldots, P_j, Q_j, R_j, S_j, \ldots$, et kehtib võrdus

$$
\begin{aligned}
\frac{f(x)}{g(x)} = & \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \\
& + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \dots + \frac{B_l}{(x-b)^l} + \\
& + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + \\
& + \frac{P_1x+Q_1}{x^2+px+q} + \frac{P_2x+Q_2}{(x^2+px+q)^2} + \dots + \frac{P_\varkappa x+Q_\varkappa}{(x^2+px+q)^\varkappa} + \\
& + \frac{R_1x+S_1}{x^2+rx+s} + \frac{R_2x+S_2}{(x^2+rx+s)^2} + \dots + \frac{R_\lambda x+S_\lambda}{(x^2+rx+s)^\lambda} + \\
& + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots . \qquad (13)
\end{aligned}
$$

Valemeid (9) - (13) nimetatakse lihtmurru (7) osamurdudeks lahutamise valemiteks.

Valemites (9) - (13) leitakse tundmatud kordajad lugejates määramata kordajate meetodiga, nagu esitatud allpool näidetes.

2. Osamurdude integreerimine. Nagu valemitest (9) - (13) näeme, taandub ratsionaalfunktsiooni (7) integreerimine järgmist tüüpi integraalide leidmisele:

$$
I = \int \frac{dx}{x-a}, \qquad II = \int \frac{dx}{(x-a)^k} \quad (k>1),
$$

$$
III = \int \frac{Px+Q}{x^2+px+q}\,dx, \quad IV = \int \frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^\varkappa}\,dx \quad (\varkappa > 1).
$$

Integraalid I - II on vahetult arvutatavad.

$$
\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C,
$$

$$
\int \frac{dx}{(x-a)^k} = -\frac{1}{k-1}\,\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C.
$$

Integraali III arvutamiseks eraldame polünoomist $x^2 + px + q$ täisruudu $(x + p/2)^2$:

$$x^2 + px + q = (x^2 + 2\frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4}) + q - \frac{p^2}{4} =$$

$$= (x + \frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}.$$

Nüüd teeme muutuja vahetuse $z = x + p/2$ ja tähistame $b^2 = q - \frac{p^2}{4}$, siis

$$x^2 + px + q = z^2 + b^2$$

ja seega

$$\int \frac{Px + Q}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{Pz + R}{z^2+b^2}\,dx \qquad (R = Q - P\,p/2),$$

kus

$$\int \frac{z\,dz}{z^2+b^2} = \frac{1}{2}\ln(z^2 + b^2) + C = \frac{1}{2}\ln(x^2 + px + q) + C,$$

$$\int \frac{dz}{z^2+b^2} = \frac{1}{b}\arctan\frac{z}{b} = \frac{1}{b}\arctan\frac{x + p/2}{b} + C.$$

Ka integraali IV korral teeme muutuja vahetuse $x + p/2 = z$, siis

$$\int \frac{Px + Q}{(x^2 + px + q)^{\varkappa}}\,dx = \int \frac{Pz + R}{(z^2 + b^2)^{\varkappa}}\,dx,$$

kus

$$\int \frac{z\,dx}{(z^2 + b^2)^{\varkappa}} = -\frac{1}{2\varkappa - 2}\,\frac{1}{(z^2 + b^2)^{\varkappa-1}} + C.$$

Jääb leida integraal

$$J = \int \frac{dz}{(z^2 + b^2)^{\varkappa}} = \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^{\varkappa}},$$

mille jaoks kehtib rekurrentne valem

$$J_{\varkappa} = \frac{1}{b^2(2\varkappa-2)} \frac{z}{(z^2+b^2)^{\varkappa-1}} + \frac{2\varkappa-3}{b^2(2\varkappa-2)} J_{\varkappa-1} =$$

$$= \frac{1}{b^2(2\varkappa-2)} \frac{x+p/2}{(x^2+px+q)^{\varkappa-1}} + \frac{2\varkappa-3}{b^2(2\varkappa-2)} J_{\varkappa-1}. \quad (14)$$

Valemit (14) rakendame järk-järgult nii mitu korda, kuni jõuame integraalini

$$J_1 = \int \frac{dz}{x^2+b^2},$$

mis oli arvutatud eespool.

Näide 11. Leida integraal

$$J = \int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} dx.$$

Lahendus. Et integraalialune funktsioon on liigmurd, siis eraldame täisosa ja saame

$$\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} = x^2+x+4+\frac{4x^2+16x-8}{x(x+2)(x-2)}.$$

Nimetaja nullkohad on kõik reaalsed ja erinevad, valemi (9) põhjal saame siis

$$\frac{4x^2+16x-8}{x(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-2}.$$

Korrutades võrduse mõlemat poolt nimetajaga $x(x+2)(x-2)$, saame võrduse

$$4x^2+16x-8 = A(x-2)(x+2) + Bx(x-2) + Cx(x+2).$$

Võttes viimases võrduses $x=0$, $x=2$, $x=-2$, leiame kordajad A, B ja C. Arvutuse võime paigutada järgmiselt:

$x = 0$	$-8 = A(-4)$	$A = 2$
$x = 2$	$40 = 0\cdot 2\cdot 4$	$C = 5$
$x = -2$	$-24 = B(-2)(-4)$	$B = -3$

Seega

$$J = \int \left(x^2 + x + 4 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x+2} + \frac{5}{x-2}\right) dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 2\ln|x| - 3\ln|x+2| + 5\ln|x-2| + C =$$

$$= \frac{1}{6}(2x^3 + 3x^2 + 24x) + \ln\frac{x^2|x-2|^5}{|x+2|^3} + C.$$

Näide 12. Leida integraal

$$J = \int \frac{64\,x\,dx}{(2x-1)^2(4x^2-16x+15)}.$$

Lahendus. Et lugeja aste on väiksem nimetaja astmest, siis valemi (10) põhjal võime kirjutada

$$\frac{64x}{(2x-1)^2(4x^2-16x+15)} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{(2x-1)^2} + \frac{C}{2x-3} + \frac{D}{2x-5}.$$

Nimetajates kirjutasime $x - 1/2$, $x - 3/2$ ja $x - 5/2$ asemel $2x - 1$, $2x - 3$ ja $2x - 5$, sest see mõjustab vaid kordajaid A, B, C ja D, mis on veel määramata. Korrutades nüüd võrduse mõlemat poolt nimetajaga

$$(2x-1)^2(4x^2-16x+15) = (2x-1)^2(2x-3)(2x-5),$$

saame

$$64x = A(2x-1)(2x-3)(2x-5) + B(2x-3)(2x-5) +$$
$$+ C(2x-1)^2(2x-5) + D(2x-1)^2(2x-3).$$

Võttes $x = 1/2$, $x = 3/2$ ja $x = 5/2$ leiame kordajad B, C ja D. Kordaja A saamiseks võrdsustame x^3 kordajad. Arvutused võime paigutada järgmise tabelina:

$$
\begin{array}{r|l}
x = \frac{1}{2} & 32 = B(-2)(-4) \qquad B = 4 \\
x = \frac{3}{2} & 96 = C\, 4(-2) \qquad C = -12 \\
x = \frac{5}{2} & 160 = D\, 16\cdot 2 \qquad D = 5 \\
x^3 & 0 = 8A + 8C + 8D \\
 & 0 = A + C + D = A - 12 + 5 = A - 7 \\
 & A = 7
\end{array}
$$

Seega

$$J = \int \left(\frac{7}{2x-1} + \frac{4}{(2x-1)^2} - \frac{12}{2x-3} + \frac{5}{2x-5} \right) dx =$$

$$= - \frac{2}{2x-1} + \frac{7}{2} \ln|2x-1| - 6 \ln|2x-3| + \frac{5}{2} \ln|2x-5| + C.$$

Näido 13. Leida integraal

$$J = \int \frac{x^3 + 4x - 12}{x^2(x^2 + 4)} dx.$$

Lahendus. Arvestades, et nimetaja nullkoht $x = 0$ on kahekordne ja polünoomi x^2+4 nullkohad on imaginaarsed (nimelt arvud $\pm 2i$), siis valemi (13) põhjal

$$\frac{x^3 + 4x - 12}{x^2(x^2 + 4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4},$$

kust saame võrduse

$$x^3 + 4x - 12 = Ax(x^2 + 4) + B(x^2 + 4) + (Cx + D)x^2.$$

Võttes $x = 0$, saame kordaja B määrata. Võttes $x = 2i$ ja võrdsustades saadud võrduses reaal- ja imaginaarosad, saame leida kordajad C ja D. Lõpuks võrdsustades veel astme x^3 kordajad, leiame ka kordaja A. Arvutused võime paigutada järgmiselt:

$$
\begin{array}{c|ll}
x = 0 & -12 = B\,4, & B = -3 \\
x = 2i & -12 = (2Ci+D)(-4) = -8Ci-4D & \\
 & 0 = -8C, & 0 = 0 \\
 & -12 = -4D & D = 3 \\
x^3 & 1 = A+C = A & A = 1
\end{array}
$$

Seega

$$J = \int\left(-\frac{3}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2+4}\right)dx =$$

$$= \frac{3}{x} + \ln|x| + \frac{3}{2}\operatorname{arctan}\frac{x}{2} + C.$$

<u>Näide 14.</u> Leida integraal

$$J = \int \frac{(5x^2 - 12)dx}{(x^2 - 6x + 13)^2}.$$

<u>Lahendus.</u> Arvestades, et nimetaja nullkohad on kahekordsed ja imaginaarsed, siis valemi (12) põhjal

$$\frac{5x^2 - 12}{(x^2 - 6x + 13)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 - 6x + 13} + \frac{Cx + D}{(x^2 - 6x + 13)^2},$$

kust

$$5x^2 - 12 = (Ax + B)(x^2 - 6x + 13) + Cx + D.$$

Kordajad A ja B saame määrata astmete x^3 ja x^2 kordajate võrdlemisel. Kordajate C ja D määramiseks võime kasutada polünoomi $x^2 - 6x + 13$ nullkohti $x = 3 + 2i$ või $x = 3 - 2i$. Samuti saame need kordajad leida, kui võtta $x = 0$ ja $x = 1$. Arvutused viimase juhu jaoks on esitatud järgmises tabelis:

$$
\begin{array}{c|l}
x^3 & 0 = A \\
x^2 & 5 = B-6A = B
\end{array}
$$

$$\begin{array}{l|l} x = 0 & -12 = 13B + D = 65 + D, \; D = -77 \\ x = 1 & -7 = 8(A + B) + C + D = 40 + C - 77, \; C = 30 \end{array}$$

Seega

$$J = \int \left[\frac{5}{x^2 - 6x + 13} + \frac{30x - 77}{(x^2 - 6x + 13)^2} \right] dx.$$

Teeme muutuja vahetuse $z = x - 3$, siis

$$J = \int \left[\frac{5}{z^2+4} + \frac{30z+13}{(z^2+4)^2} \right] dz = \frac{5}{2} \arctan \frac{z}{2} - \frac{15}{z^2+4} + 13J_2.$$

Kasutades rekurrentsat valemit (võttes $\varkappa = 2$ ja $b = 2$), saame

$$J_2 = \frac{1}{4 \cdot 2} \, \frac{z}{z^2 + 4} + \frac{1}{4 \cdot 2} J_1 =$$

$$= \frac{z}{8(z^2 + 4)} + \frac{1}{16} \arctan \frac{z}{2} + C.$$

Seega

$$J = \frac{13z - 120}{8(z^2 + 4)} + \left(\frac{13}{16} + \frac{5}{2} \right) \arctan \frac{z}{2} + C =$$

$$= \frac{13x - 159}{8(x^2 - 6x + 13)} + \frac{53}{16} \arctan \frac{x - 3}{2} + C.$$

Kui lihtmurru $f(x)/g(x)$ nimetajal $g(x)$ on kordseid (eriti kordseid imaginaarseid) lahendeid, siis integraali arvutamine rekurrentse valemi (14) abil on tülikas. Sel korral kasutatakse Ostrogradski meetodit. Selleks esitame murru $f(x)/g(x)$ nimetaja $g(x)$ kujul $g(x) = g_1(x)g_2(x)$, kus $g_2(x)$ on polünoomi $g(x)$ kõikide erinevate lineaarsete ja taandumatute ruuttegurite (võetuna esimeses astmes) korrutis. Siis kehtib Ostrogradski valem

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx = \frac{f_1(x)}{g_1(x)} + \int \frac{f_2(x)}{g_2(x)}\,dx, \qquad (15)$$

kus lugejad $f_1(x)$ ja $f_2(x)$ on määramata kordajatega polünoomid, mille astmed on ühe võrra väiksemad vastavate nimetajate $g_1(x)$ ja $g_2(x)$ astmetest. Polünoomide $f_1(x)$ ja $f_2(x)$ kordajate leidmiseks diferentseerime samasust (15) ja kasutame seejärel määramata kordajate meetodit. Praktiliselt otsida lugeja $f_2(x)$ kordajaid pole otstarbekohane, vaid sobivam on kohe integraali märgi all valemis (15) murd $f_2(x)/g_2(x)$ esitada osamurdude summana.

Näide 15. Ostrogradski meetodiga leida integraal

$$J = \int \frac{(5x^2 - 12)dx}{(x^2 - 6x + 13)^2}.$$

Lahendus. Siin integraali all on lihtmurd ning $g_1(x) = g_2(x) = x^2 - 6x + 13$. Seega antud juhul Ostrogradski valem (15) annab

$$\int \frac{(5x^2 - 12)dx}{(x^2 - 6x + 13)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 - 6x + 13} + \int \frac{Cx + D}{x^2 - 6x + 13}\,dx,$$

kus A, B, C ja D on määramata kordajad. Nende leidmiseks diferentseerime viimast võrdust muutuja x järgi, saame võrduse

$$\frac{5x^2 - 12}{(x^2 - 6x + 13)^2} = \frac{A(x^2-6x+13) - (Ax+B)(2x-6)}{(x^2-6x+13)^2} +$$

$$+ \frac{Cx+D}{x^2-6x+13},$$

kust

$$5x^2-12 = A(x^2-6x+13) - (Ax+B)(2x-6) + (Cx+D)(x^2-6x+13).$$

Kasutades määramata kordajate meetodit, saame järgmise tabeli:

$$
\begin{array}{r|l}
x^3 & 0 = C \\
x^2 & 5 = A-2A-6C+D = -A + D \\
x = 0 & -12 = 13A+6B+13D \\
x = 1 & -7 = 8A+4A+4B+8C+8D = 12A+4B+8D
\end{array}
$$

Seega $C = 0$ ja $D = 5 + A$. Arvestades seda, saame tabeli kahest viimasest reast

$$-7 = 12A + 4B + 40 + 8A = 20A + 4B + 40 = 4(5A + B + 10)$$

$$-12 = 13A + 6B + 65 + 13A = 26A + 6B + 65,$$

kust

$$5A + B + 10 = -\frac{7}{4}$$

$$26A + 6B + 65 = -12.$$

Viimase süsteemi lahendamine annab $A = \frac{13}{8}$ ja $B = -\frac{159}{8}$. Järelikult $D = 5 + \frac{13}{8} = \frac{53}{8}$.

Seega

$$J = \frac{13x - 159}{8(x^2 - 6x + 13)} + \int \frac{53\,dx}{8(x^2 - 6x + 13)} =$$

$$= \frac{13x - 159}{8(x^2 - 6x + 13)} + \frac{53}{16} \operatorname{arctan} \frac{x - 3}{2} + C$$

nagu näiteski 14.

Vaadeldava integraali J leidmiseks võib enne teha muutuja vahetuse $z = x - 3$. Siis $x = z + 3$ ja

$$J = \int \frac{5z^2 + 30z + 33}{(z^2 + 4)^2}\,dz,$$

ning Ostrogradski valemi (15) järgi

$$\int \frac{5z^2 + 30z + 33}{(z^2 + 4)^2}\,dz = \frac{Az + B}{z^2 + 4} + \int \frac{Cz + D}{z^2 + 4}\,dz\,.$$

Diferentseerides viimast samasust saame

$$5z^2+30z+33 = A(z^2+4) - 2z(Az+B) + (Cz+D)(z^2+4).$$

Edasi leiame kordajad, nagu näidatud järgmises tabelis.

$z = 2i$	$13 + 60i = -4i(2Ai + B) = 8A - 4Bi$		
	$A = 13/8$		$B = -15$
z^3	$0 = C$		
$z = 0$	$33 = 4A + 4D = 13/2 + 4D$		$D = \frac{53}{8}$

Seega

$$J = \frac{13z - 120}{8(z^2 + 4)} + \frac{53}{8}\int \frac{dz}{z^2 + 4} =$$

$$= \frac{13x - 159}{8(x^2 - 6x + 13)} + \frac{53}{16} \arctan \frac{x - 3}{2} + C.$$

Näide 16. Ostrogradski meetodiga leida integraal

$$J = \int \frac{(x^2 - 1)^2 \, dx}{(x + 1)(x^2 + 1)^3}.$$

Lahendus. Integraali all on siin lihtmurd ning Ostrogradski valemi (15) põhjal saame

$$\int \frac{(x^2-1)^2\,dx}{(x+1)(x^2+1)^3} = \frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{(x^2+1)^2} + \int\left(\frac{E}{x+1} + \frac{Fx+G}{x^2+1}\right) dx,$$

kus paremal integraali märgi all murru esitasime kohe osamurdude summana. Diferentseerides saame

$$\frac{(x^2-1)^2}{(x+1)(x^2+1)^3} = \frac{(3Ax^2+2Bx+C)(x^2+1)^2-(Ax^3+Bx^2+Cx+D)2(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4} +$$

$$+ \frac{E}{x+1} + \frac{Fx+G}{x^2+1},$$

kust

$$(x^2-1)^2 = (3Ax^2+2Bx+C)(x^2+1)(x+1)-4x(Ax^3+Bx^2+Cx+D)(x+1)+$$

$$+ E(x^2+1)^3+(Fx+G)(x+1)(x^2+1)^2.$$

Edasi määrame kordajad vastavalt järgmisele tabelile.

$x = -1$	$0 = E\,8, \quad E = 0$
$x = i$	$4 = -4i(-Ai-B+Ci+D)(i+1) = -4(-Ai-B+Ci+D)(-1+i) =$
	$= -4(A+B-C-D)-4i(A-B-C+D)$
	$\begin{cases} A+B-C-D = -1 \\ A-B-C+D = 0 \end{cases}$
	$2A-2C = -1, \quad C = A + \frac{1}{2}$
x^6	$0 = E+F = F, \ F = 0$
x^5	$0 = 3A-4A+G+F = -A+G, \quad A = G$
$x = 0$	$1 = C+E+G = C+G, \quad G = A = 1-C = \frac{1}{2} - A, \quad A = \frac{1}{4}$
	$G = \frac{1}{4}, \quad C = \frac{3}{4}, \quad B-D = -\frac{1}{2}$
$x = 1$	$0 = (3A+2B+C)4-8(A+B+C+D)+8E+8(F+G) =$
	$= 8+8B-8-8B-8D+2 = -8D$

Seega $D = 0, \quad B = -\frac{1}{2}$.

$$J = \frac{\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{4}x}{(x^2+1)^2} + \int \frac{\frac{1}{4}dx}{x^2+1} = \frac{x^3-2x^2+3x}{4(x^2+1)^2} + \frac{1}{4}\arctan x + C.$$

Ülesanded.

Leida integraalid, kus nimetaja juured on erinevad ja reaalsed.

237. $\int \frac{x\,dx}{(x+1)(2x+1)}$

238. $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}$

239. $\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

240. $\int \frac{x\,dx}{2x^2-3x-2}$

241. $\int \frac{2x^2 + 41x - 91}{(x - 1)(x + 3)(x - 4)}\, dx$

242. $\int \frac{x^3 + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x}\, dx$

243. $\int \frac{32x\, dx}{(2x - 1)(4x^2 - 16x + 15)}$

244. $\int \frac{x^6 - 2x^4 + 3x^3 - 9x^2 + 4}{x^5 - 5x^3 + 4x}\, dx$

245. $\int \frac{dx}{6x^3 - 7x^2 - 3x}$

246. $\int \frac{x^4\, dx}{x^2 + x - 2}$

247. $\int \frac{x^3 - 1}{4x^3 - x}\, dx$

248. $\int \frac{(2x^2 - 5)dx}{x^4 - 5x^2 + 6}$

Leida integraalid, kus nimetaja juured on reaalsed.

249. $\int \frac{(x^2 + 1)\, dx}{(x + 1)^2(x - 1)}$

250. $\int \left(\frac{x + 2}{x - 1}\right)^2 \frac{dx}{x}$

251. $\int \frac{x^3 + 1}{x^3 - x^2}\, dx$

252. $\int \frac{x^2 - 3x + 2}{x(x^2 + 2x + 1)}\, dx$

253. $\int \frac{dx}{x^4 - x^2}$

254. $\int \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 5}{(x - 2)^4}\, dx$

255. $\int \frac{x^2\, dx}{(x + 2)^2(x + 4)^2}$

256. $\int \frac{(7x^3 - 9)dx}{x^4 - 5x^3 + 6x^2}$

257. $\int \left(\frac{x}{x^2 - 3x + 2}\right)^2 dx$

258. $\int \frac{x^2\, dx}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}$

259. $\int \frac{(x^2 - 2x + 3)dx}{(x - 1)(x^3 - 4x^2 + 3x)}$

260*. $\int \frac{dx}{(x + 1)(x^2 + 2x - 2)}$

261. $\int \frac{x\, dx}{x^3 - 3x + 2}$

Leida integraalid, kus nimetajas esinevad ka imaginaarsed erinevad juured.

262. $\int \frac{dx}{(x + 1)(x^2 + 1)}$

263. $\int \frac{dx}{x^4 - 1}$

264. $\int \frac{dx}{x(x^2 + 1)}$

271. $\int \frac{dx}{(x + 1)^2(x^2 + 1)}$

265. $\int \frac{dx}{x^3 + 1}$

272. $\int \frac{(x^3 - 6)dx}{x^4 + 6x^2 + 8}$

266. $\int \frac{x\,dx}{x^3 - 1}$

273. $\int \frac{x^5 + 2x^3 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2}\,dx$

267. $\int \frac{(x^2 - x - 4)dx}{(x - 1)(x^2 - 2x + 5)}$

274*. $\int \frac{dx}{x^4 + x^2 + 1}$

268. $\int \frac{(x^4 + 1)dx}{x^3 - x^2 + x - 1}$

275*. $\int \frac{dx}{x^4 + 1}$.

269. $\int \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + x)}$

276*. $\int \frac{dx}{x^5 + 1}$

270. $\int \frac{dx}{(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 4x + 5)}$

Leida integraalid, kasutades rekurrentset valemit (14).

277. $\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^3}$

283. $\int \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^3}$

278. $\int \frac{dx}{(x^2 + 9)^2}$

284. $\int \frac{(x + 2)\,dx}{(x^2 + 2x + 2)^3}$

279. $\int \frac{dx}{(x^2 + 9)^3}$

285. $\int \frac{(x + 1)^4 dx}{(x^2 + 2x + 2)^3}$

280. $\int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 2)^2}$

286. $\int \frac{dx}{x(x^2 + 1)(x^2 + 4)^2}$

281. $\int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 10)^3}$

287. $\int \frac{4x\,dx}{(x^2 + 1)^2(x + 1)}$

282. $\int \frac{dx}{(x^2 + 2)^2}$

Ostrogradski meetodiga leida integraalid.

288. $\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$

289. $\int \frac{dx}{(x^2+9)^3}$

290. $\int \frac{x\,dx}{(x+1)^3(x-1)^2}$

291. $\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+2x+2)^2}$

292. $\int \frac{(x^2-2x)dx}{(x-1)^2(x^2+1)^2}$

293. $\int \frac{(x^2+x+1)dx}{x^5-2x^4+x^3}$

294. $\int \frac{x^6+x^4-4x^2-2}{x^3(x^2+1)^2}dx$

295. $\int \frac{(x^2-1)^2\,dx}{(x+1)(x^2+1)^3}$

296. $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}\,dx$

297. $\int \frac{3x^4+4}{x^2(x^2+1)^3}\,dx$

298. $\int \frac{dx}{(x^3+1)^2}$

299. $\int \frac{dx}{(x^4+1)^2}$

300. $\int \frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2}\,dx$

301. $\int \frac{x^5-x^4-26x^2-24x-25}{(x^2+4x+5)^2(x^2+4)^2}\,dx$

Leida tingimused, mille korral järgmised integraalid kujutavad ratsionaalseid funktsioone.

302. $\int \frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}\,dx$

303. $\int \frac{ax^2+2bx+c}{(px^2+2qx+r)^2}\,dx$

304*. Olgu m ja n naturaalarvud ning

$$J = \int \frac{dx}{(x+a)^m(x+b)^n}.$$

Näidata, et J on kergesti leitav, kui teha asendus

$$u = \frac{x+a}{x+b}.$$

Leida järgmised integraalid, kasutades asendust ülesandest 304.

305. $\int \frac{dx}{(x+1)^3(x+4)^5}$

306. $\int \frac{dx}{(x-2)^2(x+3)^3}$

307. $\int \frac{dx}{(x^2-5x+6)^4}$

§ 5. Mõnede mitteratsionaalsete funktsioonide integreerimine. Integraalide ratsionaliseerimine

Üheks põhiliseks meetodiks mitteratsionaalsete funktsioonide integreerimisel on integraali ratsionaliseerimine, s.t. sobiva muutujavahetusega integraal teisendatakse ratsionaalfunktsiooni integraaliks.

Olgu $R(x,y)$ ratsionaalne avaldis muutujatest x ja y. Integraali

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right) dx$$

ratsionaliseerimiseks tehakse muutuja vahetus

$$\sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}} = u \quad \text{või} \quad \sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}} = u^{-1}.$$

Näide 17. Leida integraal

$$J = \int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$$

ratsionaliseerimise teel.

Lahendus. Muutuja vahetusega

$$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = u$$

saame $1 - x = u^2(1 + x)$, millest

$$x = -\frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}, \qquad dx = \frac{-4u\,du}{(u^2 + 1)^2}$$

ja seega

$$J = \int \frac{4u^2\,du}{(u^2 - 1)(u^2 + 1)} = \int \frac{4u^2\,du}{u^4 - 1}.$$

Saadud ratsionaalfunktsiooni integraali leidmiseks kasutame osamurdudeks lahutamise võtet. Selle põhjal

$$\frac{4u^2}{u^4 - 1} = \frac{A}{u + 1} + \frac{B}{u - 1} + \frac{Cu + D}{u^2 + 1},$$

kust

$$4u^2 = A(u-1)(u^2+1) + B(u+1)(u^2+1) + (Cu+D)(u^2-1).$$

Leiame kordajad A, B, C ja D.

$$\begin{array}{l|l}
u = 1 & 4 = B\cdot 2\cdot 2, \qquad B = 1; \\
u = -1 & 4 = A(-2)\cdot 2, \qquad A = -1; \\
u = i & -4 = (Ci + D)(-2), \quad 2 = Ci + D, \; C = 0, \; D = 2.
\end{array}$$

Järelikult

$$J = \int \left(\frac{-1}{u + 1} + \frac{1}{u - 1} + \frac{2}{u^2 + 1} \right) du = \ln \left| \frac{u - 1}{u + 1} \right| + 2\arctan u + C.$$

Asendades tagasi esialgse muutuja x ja arvestades, et integraalialuse funktsiooni määramispiirkond on $X = \{(-1,0),(0,1)\}$, saame

$$J = \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}} - 1}{\sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}} + 1} \right| + 2\arctan \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}} + C =$$

$$= \ln \left| \frac{\sqrt{1 - x} - \sqrt{1 + x}}{\sqrt{1 - x} + \sqrt{1 + x}} \right| + 2\arctan \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}} + C =$$

$$= \ln \frac{|x|}{1 + \sqrt{1 - x^2}} + 2\arctan \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}} + C.$$

Antud integraali saab ratsionaliseerida ka asendusega

$$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = u^{-1},$$

s.t. asendusega

$$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = u.$$

Sel korral

$$x = \frac{u^2-1}{u^2+1}, \quad dx = \frac{4u\,du}{(u^2+1)^2}$$

ning nagu ennegi

$$J = \int \frac{4\,du}{u^4-1} = \int \left(\frac{-1}{u+1} + \frac{1}{u-1} - \frac{2}{u^2+1} \right) du =$$

$$= \ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| - 2 \arctan u + C_1 =$$

$$= \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - 1}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + 1} \right| - 2 \arctan\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C_1 =$$

$$= \ln \frac{|x|}{1+\sqrt{1-x^2}} + 2 \arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C_1.$$

Näide 18. Ratsionaliseerimismeetodiga leida integraal

$$J = \int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}+1}\,dx.$$

Lahendus. See integraal on sama tüüpi mis näites 17, sest võime kirjutada

$$J = \int \frac{\sqrt[6]{(x+1)^3}-1}{\sqrt[6]{(x+1)^2}+1}\,dx.$$

Sellepärast saame integraali ratsionaliseerida asendusega

$$\sqrt[6]{x+1} = u,$$

kust

$$x + 1 = u^6, \quad dx = 6u^5\,dx.$$

Seega

$$J = \int \frac{u^3 - 1}{u^2 + 1}\, 6u^5\,du = 6\int \left(u^6 - u^4 - u^3 + u^2 + u - 1 - \frac{u-1}{u^2+1}\right) =$$

$$= \frac{6}{7}u^7 - \frac{6}{5}u^5 - \frac{3}{2}u^4 + 2u^3 + 3u^2 - 6u - 3\ln(u^2 + 1) +$$

$$+ 6 \operatorname{arctan} u + C,$$

kus $u = \sqrt[6]{x + 1}$.

Ülesanded.

Leida integraalid.

308. $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$

309. $\int \frac{x - \sqrt[3]{x + 2}}{x + \sqrt[3]{x + 2}}\,dx$

310. $\int \sqrt[4]{\frac{x - 1}{x + 2}}\,\frac{dx}{(x - 1)(x + 2)}$

311. $\int \sqrt[3]{\frac{x - 1}{x + 1}}\,\frac{dx}{x}$

312. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x + 1)^2(x - 1)^4}}$

313. $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{(x + a)^{n-1}(x + b)^{n+1}}}$ $(n = 1, 2, \ldots)$

314. $\int \frac{dx}{x(\sqrt{x} + \sqrt[5]{x^2})}$

315. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + 2\sqrt[4]{x}}$

316. $\int \frac{dx}{x(1 + 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})}$

317. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1 + \sqrt[4]{x})^3}$

318. $\int \sqrt[3]{\frac{2x + 1}{(2x - 1)^4}}\,dx$

319. $\int \frac{dx}{\sqrt{x + 1} + \sqrt[3]{x + 1}}$

320. $\int \frac{x + 2}{x^2\sqrt{2x + 1}}\,dx$

321. $\int x^2\sqrt{\frac{x}{1 - x}}\,dx$

322. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(x - 1)}}$

323. $\int \frac{x+3}{x^2\sqrt{2x+3}}\,dx$ 325. $\int \sqrt[3]{\frac{(x+1)^5}{(x-1)^2}}\,dx$

324. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[3]{2x-1}}$ 326. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^7(x+1)^2}}$

Integraali

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$$

ratsionaliseerimiseks kasutatakse nn. Euleri asendusi.

Juhul $a>0$ kasutatakse Euleri esimest asendust

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}\,x$$

või

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t + \sqrt{a}\,x,$$

millega minnakse integraalis üle uuele muutujale t.

Juhul $a<0$ peab olema $b^2 - 4ac \geqslant 0$ ja $\alpha \neq \beta$, kus α ja β on polünoomi (reaalsed) nullkohad. Seega

$$ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)$$

ning sel korral kasutatakse Euleri teist asendust

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\alpha)$$

või

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\beta).$$

Juhul $c \geqslant 0$ võib kasutada ka Euleri kolmandat asendust

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = tx + \sqrt{c}$$

või

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = tx - \sqrt{c}.$$

Juhul $c = 0$ langevad Euleri teine ja kolmas asendus ühte.

Näide 19. Leida integraal

$$J = \int \frac{dx}{1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}}.$$

Lahendus. Teostades Euleri esimese asenduse

$$\sqrt{x^2 + 2x + 2} = t - x,$$

saame $x^2 + 2x + 2 = t^2 - 2tx + x^2$, kust

$$x = \frac{t^2 - 2}{2(t+1)}, \quad dx = \frac{t^2 + 2t + 2}{2(t + 1)^2}\, dt, \quad 1 + t - x = \frac{(t + 2)^2}{2(t + 1)}$$

ja saega

$$J = \int \frac{(t^2 + 2t + 2)2(t + 1)}{2(t + 1)^2(t + 2)^2}\, dt = \int \frac{t^2 + 2t + 2}{(t + 1)(t + 2)^2}\, dt.$$

Lahutades integraali märgi all ratsionaalfunktsiooni osamurdude summaks, saame

$$J = \int \left[\frac{1}{t + 1} - \frac{2}{(t + 2)^2}\right] dt = \ln|t + 1| + \frac{2}{t + 2} + C.$$

Et $t = x + \sqrt{x^2 + 2x + 2}$, siis

$$J = \frac{2}{x + 2 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}} + \ln\left|x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}\right| + C =$$

$$= \frac{x + 2 - \sqrt{x^2 + 2x + 2}}{x + 1} + \ln\left|x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}\right| + C =$$

$$= \frac{1 - \sqrt{x^2 + 2x + 2}}{x + 1} + \ln\left|x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}\right| + C_1,$$

kus $C_1 = C + 1$.

Näide 20. Ratsionaliseerida integraal

$$J = \int \frac{dx}{x - \sqrt{x^2 - x + 1}}.$$

Lahendus. Siin on sobiv teha Euleri esimene asendus kujul

$$\sqrt{x^2 - x + 1} = t + x,$$

sest siis integraalis nimetaja on $-t$ ning saame

$$x = -\frac{t^2 - 1}{2t + 1}, \quad dx = -\frac{2t^2 + 2t + 2}{(2t + 1)^2}\,dt = -\frac{2(t^2 + t + 1)}{(2t + 1)^2}\,dt$$

ja seega

$$J = 2\int \frac{(t^2 + t + 1)dt}{t(2t + 1)^2}.$$

Näide 21. Leida integraal

$$J = \int \frac{dx}{x\sqrt{2 + x - x^2}}.$$

Lahendus. Et $2 + x - x^2 = -(x + 1)(x - 2)$, siis tehes Euleri teise asenduse, näiteks

$$\sqrt{2 + x - x^2} = t(x + 1),$$

saame $-(x - 2) = t^2(x + 1)$, kust

$$x = -\frac{t^2-2}{t^2+1} = -(1 - \frac{3}{t^2+1}), \quad dx = -\frac{6t\,dt}{(t^2+1)^2}, \quad t(x+1) = \frac{3t}{t^2+1},$$

ja seega

$$J = \int \frac{(t^2+1)^2 6t\,dt}{(t^2-2)3t(t^2+1)^2} = 2\int \frac{dt}{t^2-2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int (\frac{1}{t-\sqrt{2}} - \frac{1}{t+\sqrt{2}})dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right| + C.$$

Et antud juhul $x \in \{(-1,0),(0,2)\}$, siis

$$t = \sqrt{2 + x - x^2}/(x + 1) = \sqrt{2 - x}/\sqrt{x + 1}$$

ning

$$J = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left|\frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{2x+2}}{\sqrt{2-x} + \sqrt{2x+2}}\right| + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\frac{(\sqrt{2-x} - \sqrt{2x+2})^2}{-3x}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|x + 4 - 2\sqrt{2(2 + x - x^2)}\right| - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln|x| + C_1 .$$

Näide 22. Leida integraal

$$J = \int \frac{x\,dx}{2 + \sqrt{4 + x - x^2}}.$$

Lahendus. Et siin Euleri esimest asendust teha ei saa ning teist asendust teha pole otstarbekohane (kuna ruutpolünoomi juured on irratsionaalsed), siis teeme Euleri kolmanda asenduse (teise kuju)

$$\sqrt{4 + x - x^2} = tx - 2,$$

mis annab

$$x = \frac{4t + 1}{t^2 + 1}, \quad dx = -2\,\frac{2t^2 + t - 2}{(t^2 + 1)^2}\,dt, \quad tx = \frac{(4t + 1)t}{t^2 + 1}$$

ja seega

$$J = -2\int \frac{(2t^2 + t - 2)(t^2 + 1)(4t + 1)}{(t^2 + 1)^2(4t + 1)t(t^2 + 1)}\,dt =$$

$$= -2\int \frac{2t^2 + t - 2}{t(t^2 + 1)^2}\,dt.$$

Edasi kasutame Ostrogradski meetodit ja saame

$$J = \frac{4 - t}{t^2 + 1} + \int\left(\frac{4}{t} - \frac{4t + 1}{t^2 + 1}\right)dt =$$

$$= \frac{4 - t}{t^2 + 1} + 4\ln|t| - 2\ln(t^2 + 1) - \arctan t + C,$$

kus $t = (2 + \sqrt{4 + x - x^2})/x$.

Ülesanded

Kasutades Euleri asendusi, leida järgmised integraalid.

327. $\int \frac{dx}{x^2(x+\sqrt{1+x^2})}$

332. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{2+x^2}\,dx$

328. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$

333. $\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}\,dx$

329. $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}}$

334. $\int \frac{(2x+3)dx}{(x^2+2x+3)\sqrt{x^2+2x+4}}$

330. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$

335. $\int \frac{dx}{\left[1+\sqrt{x(1+x)}\right]^2}$

331. $\int \frac{x\,dx}{x-\sqrt{x^2-1}}$

336. $\int \frac{x+\sqrt{x^2+x+1}}{x+1+\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$

Rakendades sulgudes märgitud Euleri asendusi integraalile

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

tõestada järgmised valemid ja leida nende määramispiirkonnad X.

337. $\arcsin x = 2\arctan \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$ $(\sqrt{1-x^2} = tx + 1)$

338. $\arccos x = 2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ $(\sqrt{1-x^2} = t(x+1))$

339. $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - 2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ $(\sqrt{1-x^2} = t(x+1))$

340. $\arccos x = 2\arctan\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ $(\sqrt{1-x^2} = t(x-1))$

341. $\arcsin x = 2\operatorname{arccot} \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$ $(\sqrt{1-x^2} = tx - 1)$

342. Näidata, et integraali

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

saab asendusega $u = x + \frac{b}{2a}$ teisendada integraaliks

$$\frac{1}{|a|}\int \frac{du}{\sqrt{A \pm u^2}}.$$

Näidata, et kehtivad valemid

$$\int \frac{du}{\sqrt{A - u^2}} = \arcsin \frac{u}{\sqrt{A}} + C,$$
$$\int \frac{du}{\sqrt{A + u^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 + A}\right| + C, \tag{16}$$

Leida integraalid, kasutades ülesandes 342 tuletatud valemeid.

343. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x - 1}}$

344. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x - x^2}}$

345. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 4x - 3}}$

346. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 - 6x + 5}}$

347. $\int \frac{dx}{\sqrt{- x^2 + 3x - 2}}$

348. $\int \frac{dx}{\sqrt{5 - 2x - 3x^2}}$

349*. Tõestada, et iga n-astme polünoomi $P(x)$ korral leiduvad ülimalt $(n-1)$-astme polünoom $Q(x)$ ja konstant λ, nii et kehtib võrdus

$$\int \frac{P(x)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = Q(x)\sqrt{ax^2 + bx + c} + \int \frac{\lambda\, dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \tag{17}$$

Näide 23. Leida integraal

$$J = \int \sqrt{1 - 4x - x^2}\, dx,$$

kasutades ülesannetes 349 ja 342 tuletatud valemeid.

Lahendus. Et

$$J = \int \frac{1 - 4x - x^2}{\sqrt{1 - 4x - x^2}}\,dx,$$

siis valemi (17) tõttu võime kirjutada

$$J = (Ax + B)\sqrt{1 - 4x - x^2} + \int \frac{D\,dx}{\sqrt{1 - 4x - x^2}}.$$

Tundmatute kordajate määramiseks diferentseerime saadud võrduse mõlemaid pooli, saame

$$\frac{1 - 4x - x^2}{\sqrt{1 - 4x - x^2}} = A\sqrt{1 - 4x - x^2} + \frac{(Ax + B)(-4 - 2x)}{2\sqrt{1 - 4x - x^2}} +$$

$$+ \frac{D}{\sqrt{1 - 4x - x^2}},$$

kust

$$1 - 4x - x^2 = A(1 - 4x - x^2) - (Ax + B)(2 + x) + D.$$

Edasi määrame kordajad A, B, ja C, paigutades arvutused järgmiselt:

$$\begin{array}{r|l} x^2 & -1 = -A - A, \quad A = 1/2; \\ x & -4 = -4A - 2A - B, \; -B = -4 + 6A = -1, \; B = 1; \\ x = 0 & 1 = A - 2B + D = 1/2 - 2 + D, \; D = 5/2. \end{array}$$

Seega esimese valemitest (16) tõttu

$$J = (\tfrac{1}{2}x + 1)\sqrt{1 - 4x - x^2} + \frac{5}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 4x - x^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}(x + 2)\sqrt{1 - 4x - x^2} + \frac{5}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{5 - (x + 2)^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}(x + 2)\sqrt{1 - 4x - x^2} + \frac{5}{2}\arcsin\frac{x + 2}{\sqrt{5}} + C =$$

$$= \frac{1}{2}\left[(x + 2)\sqrt{1 - 4x - x^2} + 5\arcsin\frac{x + 2}{\sqrt{5}}\right] + C.$$

Ülesanded.

Kasutades ülesannetes 349 ja 342 tuletatud valemeid, leida integraalid.

350. $\int \frac{(2x^2 - 3x)\,dx}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}$

351. $\int \frac{(3x^2 - 5x)\,dx}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}$

352. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1 + 2x - x^2}}$

353. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}}$

354. $\int \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}}\,dx$

355. $\int \sqrt{x^2 - 2x - 1}\,dx$

356. $\int \frac{x^3 - x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}\,dx$

357. $\int \sqrt{3x^2 - 3x + 1}\,dx$

358. $\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$

359. $\int \frac{3x^3 - 8x + 5}{\sqrt{x^2 - 4x - 7}}\,dx$

360. $\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}}$

361. Olgu $P(x)$-ülimalt n-astme polünoom. Näidata, et asendusega $px + q = 1/u$ saab integraali

$$\int \frac{P(x)\,dx}{(px + q)^{n+1}\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

teisendada kujule

$$\int \frac{Q(u)\,du}{\sqrt{\alpha u^2 + \beta u + \gamma}},$$

kus α, β ja γ on konstandid, $Q(u)$ - ülimalt n-astme polünoom.

Leida järgmised integraalid, kasutades ülesandeis

361, 349 ja 342 antud seoseid.

362. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + x + 1}}$

363. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 2x - 1}}$

364. $\int \frac{dx}{(x - 1)\sqrt{x^2 + x + 1}}$

365. $\int \frac{dx}{(2x - 3)\sqrt{4x - x^2}}$

366. $\int \frac{dx}{(x + 1)^3\sqrt{x^2 + 2x - 3}}$

367. $\int \frac{(x - 1)\, dx}{x^2\sqrt{2x^2 - 2x + 1}}$

368. $\int \frac{x\, dx}{(x - 1)^2\sqrt{1 + 2x - x^2}}$

369. $\int \frac{(x^3 + x - 1)\, dx}{(x - 1)\sqrt{x^2 + 2x - 1}}$

370. $\int \frac{x^3\, dx}{(x - 1)^2\sqrt{x^2 + 2x - 4}}$

371. $\int \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 4}}{(x - 1)^2}\, dx$

372. Olgu $a \neq 0$. Leida tingimus, mille korral integraal

$$\int \frac{px^2 + qx + r}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\, dx$$

on algebraline funktsioon.

Leida järgmised integraalid, kasutades asendusi (vt. näide 8).

$$x + \frac{1}{x} = u \quad \text{või} \quad x - \frac{1}{x} = v.$$

373. $\int \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \frac{dx}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}$

374. $\int \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \frac{dx}{\sqrt{x^4 + 1}}$

375. $\int \frac{x^2 - 1}{x\sqrt{x^4 + 3x^2 + 1}}$

376. $\int \frac{(x^2 + 1)dx}{x\sqrt{x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 3x + 1}}$

377. $\int \frac{\sqrt{1 + x^4}}{1 - x^4}\, dx$

378. $\int \frac{x - 1}{x + 1} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$

379. $\int \frac{x^2 - 1}{x^2} \frac{\sqrt{x}\, dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$

§ 6. Diferentsiaalbinoomi integreerimine

Diferentsiaalbinoomi integraal

$$\int x^{\alpha}(ax^{\beta} + b)^{\gamma}\, dx$$

kujutab elementaarfunktsiooni kolmel juhul, nimelt kui

$$\gamma, \quad \frac{\alpha + 1}{\beta} \quad \text{või} \quad \frac{\alpha + 1}{\beta} + \gamma$$

on täisarv. Nendel kolmel juhul saab diferentsiaalbinoomi integraali ratsionaliseerida.

1) Kui γ on täisarv, siis saab integraali ratsionaliseerida asendusega

$$\sqrt[n]{x} = u,$$

kus n on murdude α ja β ühine nimetaja.

2) Kui $(\alpha + 1)/\beta$ on täisarv, siis saab integraali ratsionaliseerida asendusega

$$ax^{\beta} + b = u^{m},$$

kus m on murru γ nimetaja.

3) Kui $\gamma + (\alpha + 1)/\beta$ on täisarv, siis saab integraali ratsionaliseerida asendusega

$$\frac{ax^{\beta} + b}{x^{\beta}} = a + bx^{-\beta} = u^{m},$$

kus m on murru γ nimetaja.

Kui ükski arvudest γ, $(\alpha + 1)/\beta$ või $\gamma + (\alpha + 1)/\beta$ ei ole täisarv, siis Tsebõsovi teoreemi kohaselt diferentsiaalbinoomi integraal ei kujuta elementaarfunktsiooni.

Näide 24. Ratsionaliseerida integraal

$$J = \int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^5 + 1}}.$$

Lahendus. Siin $\alpha = -1$, $\beta = 5$ ning $\gamma = -1/3$. Et $(\alpha + 1)/\beta = 0$, siis integraali J saab ratsionaliseerida asendusega

$$x^5 + 1 = u^3.$$

Seega

$$5x^4\,dx = 3u^2\,du, \quad dx = \frac{3}{5}x^{-4}\,u^2\,du,$$

ning

$$J = \frac{3}{5}\int \frac{u^2\,du}{x^4\,x\,\sqrt[3]{u^3}} = \frac{3}{5}\int \frac{u\,du}{x^5} = \frac{3}{5}\int \frac{u\,du}{u^3 - 1}.$$

Näide 25. Leida integraal

$$J = \int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{x^4 + 1}}.$$

Lahendus. Siin $\alpha = -11$, $\beta = 4$ ning $\gamma = -1/2$.

Et

$$\frac{\alpha + 1}{\beta} = -\frac{5}{2}, \quad \frac{\alpha + 1}{\beta} + \gamma = -3,$$

siis integraali J saab ratsionaliseerida asendusega

$$\frac{x^4 + 1}{x^4} = 1 + x^{-4} = u^2.$$

Seega

$$-4x^{-5}\,dx = 2u\,du, \quad dx = -\frac{1}{2}\,x^5\,u\,du,$$
$$x^4 + 1 = x^4\,u^2,$$

ning

$$J = -\frac{1}{2}\int \frac{x^5\, u\, du}{x^{11}\sqrt{x^4\, u^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{x^8}.$$

Et $x^{-4} = u^2 - 1$, siis

$$J = -\frac{1}{2}\int (u^2 - 1)^2 du = -\frac{1}{2}\int (u^4 - 2u^2 + 1)du =$$

$$= -\frac{1}{2}\, u\left(\frac{u^4}{5} - \frac{2u^2}{3} + 1\right) + C.$$

Ning lõpuks, asendades tagasi

$$u = \sqrt{\frac{x^4 + 1}{x^4}} = \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x^2},$$

saame

$$J = -\frac{\sqrt{x^4 + 1}}{2x^2}\left[\frac{(x^4 + 1)^2}{5x^8} - \frac{2(x^4 + 1)}{3x^4} + 1\right] + C.$$

<u>Näide 26</u>. Leida integraal

$$J = \int \frac{dx}{\sqrt{x^3}\,\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x^3}}}.$$

<u>Lahendus.</u> Siin $\alpha = -3/2$, $\beta = 3/4$, $\gamma = -1/3$. Et

$$\frac{\alpha + 1}{\beta} = -\frac{2}{3}, \quad \frac{\alpha + 1}{\beta} + \gamma = -1,$$

siis integraali J saab ratsionaliseerida asendusega

$$\frac{1 + \sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[4]{x^3}} = \sqrt[4]{x^{-3}} + 1 = u^3.$$

Seega

$$-\frac{3}{4}\, x^{-\frac{7}{4}}\, dx = 3u^2\, du, \quad dx = -4x^{\frac{7}{4}}\, u^2\, du,$$

$$1 + \sqrt[4]{x^3} = u^3\, \sqrt[4]{x^3},$$

ning

$$J = -4 \int \frac{x^{7/4}\,u^2\,du}{x^{3/2}\sqrt[3]{u^3x^{3/4}}} = -4 \int \frac{x^{7/4}\,u^2\,du}{u\,x^{7/4}} = -4 \int u\,du =$$

$$= -2u^2 + C.$$

Asendades $u = \sqrt[3]{x^{-3/4} + 1}$ saame

$$J = -2\left(\sqrt[3]{x^{-3/4} + 1}\right)^2 + C.$$

Ülesanded.

Leida integraalid.

380. $\int \sqrt{x}\,(1 + \sqrt[3]{x})^4\,dx$

381. $\int \frac{dx}{x(1 + \sqrt[3]{x})^3}$

382. $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2 + 1}}$

383. $\int x^5\sqrt[3]{(x^3 + 1)^2}\,dx$

384. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3 + 1}}$

385. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^4 + 1}}$

386. $\int x^3(1 + 2x^2)^{-\frac{3}{2}}\,dx$

387. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt[4]{x^4 + 1}}$

388. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2 + 1}}$

389. $\int \frac{dx}{x^2\,(x^3 + 2)^{5/3}}$

390. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x} + 1)^2}$

391. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}(\sqrt[3]{x} + 1)^3}$

392. $\int \frac{\sqrt[3]{x}\,dx}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x}}}$

393. $\int \frac{x^7\,dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$

394. $\int \frac{dx}{x^6\sqrt{x^2 - 1}}$

395. $\int x^7\sqrt{x^2 + 1}\,dx$

396. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^6 - 1}}$

397. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$

398. $\int \frac{x^8\,dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$

399. $\int \frac{dx}{x^7\sqrt{x^4 + 1}}$

400. $\int \frac{x^9\,dx}{\sqrt[3]{x^3+1}}$

401. $\int \frac{\sqrt{1-x^4}}{x^5}dx$

402. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

403. $\int \frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x^2}\,dx$

404. $\int \sqrt[3]{x(1-x^2)}\,dx$

405. $\int \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\,dx$

406. $\int \sqrt{x^3+x^4}\,dx$

407. $\int \sqrt[3]{3x-x^3}\,dx$

408. $\int x^3\sqrt[4]{x^4+1}\,dx$

409. $\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$

410. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{(x+1)^3}}$

411. $\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x^2}\,dx$

412. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$

413. $\int \frac{dx}{x\sqrt[6]{x^6+1}}$

414. $\int \frac{\sqrt[3]{x}\,dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}$

415. $\int \frac{\sqrt[3]{x}\,dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$

416. $\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}$

417. $\int \frac{\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}}}{\sqrt{x}}\,dx$

418. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1+2x^2}}$

419. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{(1+\sqrt[3]{x})^2}$

420. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$

421. $\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$

422. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}}$

Leida integraalid, kasutades diferentsiaalbinoomi ja (juhtum 3) analoogilisi asendusi.

423. $\int \frac{dx}{(x^4+1)\sqrt[4]{2x^4+1}}$

424. $\int \frac{dx}{(5x^3+3)\sqrt[3]{4x^3+3}}$

Näidata, et järgmised integraalid ei kujuta endast elementaarfunktsioone.

425. $\int \sqrt{x^3 + 1}\, dx$

426. $\int \sqrt{x^4 + 3}\, dx$

427. $\int \sqrt{x^5 + 2}\, dx$

428. $\int x\sqrt{x^3 + 4}\, dx$

429. $\int \frac{\sqrt[3]{x^2 + 1}}{x^2}\, dx$

430. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{x^3 - 1}}$

431. $\int \frac{x^2 + \ln 2}{\sqrt{x^3 + 5}}\, dx$

432. $\int \frac{x^4 - \sin 2}{\sqrt{x^5 + \tan 8}}\, dx$

Milliseid tingimusi peavad täitma ratsionaalarvud r, et järgmised integraalid kujutaksid endast elementaarfunktsioone?

433. $\int \sqrt{x^r + 1}\, dx$

434. $\int x^r \sqrt[3]{x^2 + x}\, dx$

435. $\int x^r (x - 2)dx$

436. $\int x^r\sqrt{x + 5}\, dx$

437. $\int x^r\sqrt{x^2 - 3}\, dx$

438. $\int x\sqrt{x^r + 1}\, dx$

439. $\int x^2\sqrt{x^r + 6}\, dx$

440. $\int x^2(x^4 - 2)^r\, dx$

441. $\int \frac{x\, dx}{(x^3 + 1)^r}$

§ 7. Trigonomeetriliste funktsioonide integreerimine

Integraali

$$\int R(\sin x, \cos x)dx,$$

kus $R(x,y)$ on ratsionaalne avaldis muutujate x ja y suhtes, saab vahemikus $x \in (-\pi, \pi)$ alati ratsionaliseerida asendusega

$$\tan \frac{x}{2} = u.$$

Sel korral

$$dx = \frac{2\,du}{1 + u^2}, \quad \sin x = \frac{2u}{1 + u^2}, \quad \cos x = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}.$$

Et selline asendus viib sageli väga komplitseeritud arvutustele, siis praktikas kasutatakse võimaluse korral ka järgmisi asendusi.

1) Kui R on paaritu sin x suhtes, s.t. kui

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

siis kasutatakse asendust

$$\cos x = u.$$

2) Kui R on paaritu cos x suhtes, s.t. kui

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

siis kasutatakse asendust

$$\sin x = u.$$

3) Kui R on paaris sin x ja cos x suhtes, s.t. kui

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x),$$

siis kasutatakse asendust

$$\tan x = u$$

või

$$\cot x = u.$$

Trigonomeetriliste avaldiste teisendamisel on eriti olulised järgmised valemid

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \cos x \tan x = \sin x$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} \qquad 1 + \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x \qquad 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$$

$$2\sin x \cos x = \sin 2x$$

<u>Näide 27</u>. Leida integraal

$$J = \int \frac{dx}{5 - 4\sin x + 3\cos x}.$$

<u>Lahendus.</u> Siin on võimalik integraali ratsionaliseerida ainult üldise asendusega

$$u = \tan\frac{x}{2}.$$

Saame

$$J = -\int \frac{2\,du}{(1+u^2)\left(5 - 4\frac{2u}{1+u^2} + 3\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)} =$$

$$= \int \frac{2\,du}{5 + 5u^2 - 8u + 3 - 3u^2} = \int \frac{du}{u^2 - 4u + 4} =$$

$$= \int \frac{du}{(u-2)^2} = -\frac{1}{u-2} + C = \frac{1}{2 - \tan\frac{x}{2}} + C.$$

<u>Näide 28</u>. Leida integraal

$$J = \int \frac{\cos^2 x}{\sin x}\,dx.$$

<u>Lahendus.</u> Siin integraalialune funktsioon on paaritu $\sin x$ suhtes. Seepärast teeme asenduse

$$\cos x = u,$$

kust

$$-\sin x\,dx = du,$$

$$dx = -\frac{du}{\sin x}.$$

Saega

$$J = -\int \frac{u^2}{\sin^2 x}\, du = \int \frac{u^2\, du}{u^2 - 1} = \int \left(1 + \frac{1}{u^2 - 1}\right) du =$$

$$= u + \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{u - 1} - \frac{1}{u + 1}\right) du =$$

$$= u + \frac{1}{2} \ln\left|\frac{u - 1}{u + 1}\right| + C =$$

$$= \cos x + \frac{1}{2} \ln \left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| + C =$$

$$= \cos x + \frac{1}{2} \ln \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} + C =$$

$$= \cos x + \ln\left|\tan \frac{x}{2}\right| + C.$$

<u>Näide 29</u>. Leida integraal

$$J = \int \frac{\cos^3 \frac{x}{2}}{1 + \sin^2 \frac{x}{2}}\, dx .$$

<u>Lahendus</u>. Siin integraslialune funktsioon on paaritu $\cos \frac{x}{2}$ suhtes. Seepärast teeme asenduse

$$\sin \frac{x}{2} = u,$$

kust

$$dx = \frac{2\, du}{\cos \frac{x}{2}} .$$

Seega

$$J = \int \frac{2\cos^2 \frac{x}{2}\, du}{1 + u^2} = 2\int \frac{1 - u^2}{1 + u^2}\, du = -2\int \left(1 - \frac{2}{1 + u^2}\right) du =$$

$$= -2(u - 2 \arctan u) + C =$$

$$= -2 \sin \frac{x}{2} + 4 \arctan \sin \frac{x}{2} + C.$$

Näide 30. Leida integraal

$$J = \int \frac{dx}{4 - 3\cos^2 x + 5\sin^2 x}.$$

Lahendus. Siin integraalialune funktsioon on paaris $\sin x$ ja $\cos x$ suhtes. Seepärast teeme asenduse

$$\tan x = u,$$

kust

$$dx = \cos^2 x \, du.$$

Seega seose $1 + u^2 = 1/\cos^2 x$ tõttu

$$J = \int \frac{\cos^2 x \, du}{4 - 3\cos^2 x + 5\sin^2 x} = \int \frac{du}{\frac{4}{\cos^2 x} - 3 + 5u^2} =$$

$$= \int \frac{du}{4(1 + u^2) - 3 + 5u^2} = \int \frac{du}{9u^2 + 1} = \int \frac{du}{1 + (3u)^2} =$$

$$= \arctan 3u + C = \arctan(3\tan x) + C.$$

Näide 31. Leida integraal

$$J = \int \frac{dx}{1 + \tan x}$$

Lahendus. Siin integraalialune funktsioon on paaris $\sin x$ ja $\cos x$ suhtes. Seepärast teeme asenduse

$$\tan x = u.$$

Seega

$$J = \int \frac{\cos^2 x \, du}{1 + u} = \int \frac{du}{(u + 1)(u^2 + 1)}.$$

Lahutades murru osamurdude summaks, saame

$$J = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{u + 1} - \frac{u - 1}{u^2 + 1}\right) du =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln|u + 1| - \frac{1}{2}\ln(u^2 + 1) + \arctan u\right] + C =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln|1 + \tan x| - \frac{1}{2}\ln(1 + \tan^2 x) + x\right] + C =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln|1 + \tan x| + \ln|\cos x| + x\right] + C =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x + \ln|\cos x + \sin x|\right) + C .$$

Ülesanded.

Leida integraalid.

442. $\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx$

443. $\int \cos^3 2x \sin 2x \, dx$

444. $\int \sin^3 2x \, dx$

445. $\int \frac{dx}{\cos x}$

446. $\int \frac{dx}{\sin x}$

447. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} \, dx$

448. $\int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x}$

449. $\int \frac{dx}{\cos^3 x \sin^3 x}$

450. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} \, dx$

451. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$

452. $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$

453. $\int \frac{dx}{\cos^5 x}$

454. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$

455. $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x} \, dx$

456. $\int \frac{\cos^3 x \, dx}{\sin^5 x}$

457. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x}$

458. $\int \cot^4 x \, dx$

459. $\int \tan^5 x \, dx$

460. $\int \cot^8 x \, dx$

461. $\int \frac{\sin x \, dx}{(1 - \cos x)^2}$

462. $\int \frac{dx}{(2 + \cos x)\sin x}$

463. $\int \frac{\cos x \, dx}{(1 - \cos x)^2}$

464. $\int \frac{dx}{(3 + \sin x)\cos x}$

465. $\int \frac{\cos x \, dx}{\sin^2 x - 6\sin x + 5}$

466. $\int \frac{dx}{\tan x \cos 2x}$

467. $\int \frac{\cos^4 x + \sin^4 x}{\cos 2x} dx$

468. $\int \frac{dx}{5 - 3\cos x}$

469. $\int \frac{1 + \tan x}{\sin 2x} dx$

470. $\int \frac{dx}{5 + 4\sin x}$

471. $\int \frac{dx}{\sin 2x - 2\sin x}$

472. $\int \frac{\sin^2 x \, dx}{1 - \tan x}$

473. $\int \frac{\cos x \, dx}{\sin^3 x - \cos^3 x}$

474. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + \tan^2 x}$

475. $\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$

476. $\int \frac{dx}{4 + \tan x + 4\cot x}$

477. $\int \frac{\tan x \, dx}{1 + \tan x + \tan^2 x}$

478. $\int \frac{\cos x + \sin x}{\sin 2x} dx$

479. $\int \frac{dx}{1 + 3\cos^2 x}$

480. $\int \frac{dx}{2\sin x + \cos x + 3}$

481. $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}$

482. $\int \frac{dx}{1 - \sin^4 x}$

483. $\int \frac{dx}{1 - \cos^4 x}$

484. $\int \frac{dx}{\cos x + \sin x}$

485. $\int \frac{dx}{7\cos x - 4\sin x + 8}$

486. $\int \frac{dx}{5\cos^2 x + 3\sin^2 x}$

487. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3\sin x\cos x - \cos^2 x}$

488. $\int \frac{dx}{\sin^2 x - 3\sin x \cos x}$

489. $\int \frac{\cos 2x \, dx}{\cos^4 x + \sin^4 x}$

490. $\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$

491. $\int \frac{\cos x - 3\sin x}{1 - \cos x + 3 \sin x} dx$

492. $\int \frac{dx}{4 + \tan x}$

493. $\int \frac{\sin 2x \, dx}{\cos^4 x + \sin^4 x}$

Integraalide

$$\int \sin mx \sin nx \, dx, \quad \int \cos mx \cos nx \, dx, \quad \int \sin mx \sin nx \, dx$$

leidmisel kasutatakse valemeid

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a - b) - \cos(a + b)\right],$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a - b) + \cos(a + b)\right],$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a - b) + \sin(a + b)\right],$$

või

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a + b}{2} \cos \frac{a - b}{2},$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a + b}{2} \cos \frac{a - b}{2},$$

$$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a + b}{2} \sin \frac{a - b}{2}.$$

Näide 32. Leida integraal

$$J = \int \cos x \cos^2 3x \, dx.$$

Lahendus.

$$J = \frac{1}{2}\int \cos x \, (1 + \cos 6x) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2}\int \cos x \cos 6x \, dx.$$

Määrame a ja b nii, et oleks

$$\frac{a + b}{2} = 6x,$$

$$\frac{a - b}{2} = x.$$

Liites ja lahutades neid võrdusi, saame vastavalt

$$a = 7x \quad \text{ja} \quad b = 5x.$$

Seega

$$J = \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{4}\int(\cos 7x + \cos 5x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{28}\sin 7x + \frac{1}{20}\sin 5x + C =$$

$$= \frac{\sin x}{2} + \frac{\sin 5x}{20} + \frac{\sin 7x}{28} + C.$$

Ülesanded.

Leida integraalid.

494. $\int \cos x \sin 3x\,dx$

495. $\int \sin 5x \cos x\,dx$

496. $\int \cos 2x \cos 3x\,dx$

497. $\int \sin 2x \sin 5x\,dx$

498. $\int \sin 3x \cos 5x\,dx$

499. $\int \sin 10x \sin 15x\,dx$

500. $\int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}\,dx$

501. $\int \sin\frac{x}{3}\cos\frac{2x}{3}\,dx$

502. $\int \cos(ax+b)\cos(ax-b)\,dx$

503. $\int \sin\omega t \sin(\omega t + \varphi)\,dt$

504. $\int \cos x \cos 2x \cos 3x\,dx$

505. $\int \sin x \sin^2 3x\,dx$

506. $\int \sin x \sin 2x \sin 3x\,dx$

507. $\int \cos 2x \sin^2 5x\,dx$

508. $\int \sin x \sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3}\,dx$

509. $\int \sin 3x \cos^2 4x\,dx$

510. $\int \cos^2 2x \cos^2 3x\,dx$

511. $\int \sin^3 2x \cos^2 3x\,dx$

512. Tõestada, et juhul $a^2 + b^2 \neq 0$ võib leida sellised konstandid A ja B, et kehtib valem

$$\frac{p\cos x + q\sin x}{u} = A + \frac{Bu'}{u},$$

kue $u = a\cos x + b\sin x$.

Leida integraalid.

513. $\displaystyle\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2\cos x}\,dx$

514. $\displaystyle\int \frac{dx}{3 + 5\tan x}$

515. $\displaystyle\int \frac{3\cos x + 7\sin x}{5\cos x + 2\sin x}\,dx$

516. $\displaystyle\int \frac{2\cos x + 3\sin x}{3\cos x + 2\sin x}\,dx$

517. Tõestada, et juhul $a^2 + b^2 \neq 0$ võib leida konstandid A, B ja C nii, et kehtib valem

$$\frac{p\cos x + q\sin x + r}{u} = A + \frac{Bu'}{u} + \frac{C}{u},$$

kus $u = a\cos x + b\sin x + C$.

Leida integraalid.

518. $\displaystyle\int \frac{2 - \sin x}{2 + \cos x}\,dx$

519. $\displaystyle\int \frac{5 + \cos x}{3 + 2\sin x}\,dx$

520. $\displaystyle\int \frac{\cos x\,dx}{1 + \cos x}$

521. $\displaystyle\int \frac{\sin x\,dx}{\cos x + \sin x + \sqrt{2}}$

522. $\displaystyle\int \frac{\sin x\,dx}{1 - \sin x}$

523. $\displaystyle\int \frac{\cos x + 2\sin x}{4\cos x + 3\sin x - 2}\,dx$

524. $\displaystyle\int \frac{\sin x + 2\cos x - 3}{\sin x - 2\cos x + 3}\,dx$

525. $\displaystyle\int \frac{(\cos x + 5)\,dx}{2\cos x - 3\sin x + 4}$

II. MÄÄRATUD INTEGRAAL

§ 1. Määratud integraali mõiste ja olemasolu

Olgu funktsioon f(x) antud lõigus [a,b], kus $a<b$. Jaotame lõigu [a,b] mingil viisil n osaks punktidega

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

ning igas tekkinud osalõigus

$$e_k = [x_{k-1}, x_k] \qquad (k = 1,2,\dots,n)$$

valime vabalt punkti $\xi_k \in e_k$ ja moodustame summa

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k,$$

kus

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}.$$

Summat σ nimetatakse funktsiooni f(x) (Riemanni) integraalsummaks lõigus [a,b]. Olgu

$$\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k.$$

Arvu J nimetatakse integraalsumma σ piirväärtuseks protsessis $\lambda \to 0$, kui iga arvu $\varepsilon > 0$ korral leidub arv $\delta > 0$, et kehtib

$$|J - \sigma| < \varepsilon$$

niipea kui $\lambda < \delta$, sõltumata lõigu [a,b] jaotamisviisist ja punktide ξ_k valikust, ja kirjutatakse

$$J = \lim_{\lambda \to 0} \sigma .$$

Kui on olemas piirväärtus J, siis funktsiooni $f(x)$ nimetatakse integreeruvaks lõigus $[a,b]$ ja piirväärtust J nimetatakse funktsiooni $f(x)$ määratud integraaliks (ehk Riemanni integraaliks) lõigus $[a,b]$ ja kirjutatakse

$$J = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Seejuures arvu a nimetatakse integraali alumiseks rajaks ja arvu b ülemiseks rajaks. Lõiku $[a,b]$ nimetatakse integreerimislõiguks.

Funktsiooni $f(x)$ integreeruvuseks lõigus $[a,b]$ on tarvilik funktsiooni $f(x)$ tõkestatus selles lõigus.

Olgu $f(x)$ tõkestatud lõigus $[a,b]$. Tähistame

$$M_k = \sup_{x \in e_k} f(x), \qquad m_k = \inf_{x \in e_k} f(x).$$

Summasid

$$S = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k, \qquad s = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k$$

nimetatakse vastavalt Darboux' ülemsummaks ja alamsummaks.

Lõigu $[a,b]$ sama jaotusviisi puhul kehtivad võrratused

$$s \leqslant \sigma \leqslant S.$$

Arvu J nimetatakse Darboux' ülemsumma S piirväärtuseks protsessis $\lambda \to 0$, kui iga arvu $\varepsilon > 0$ korral leidub arv $\delta > 0$, et kehtib võrratus

$$|J - S| < \varepsilon ,$$

niipea kui $\lambda < \delta$, sõltumata lõigu $[a,b]$ jaotamisviisist, ja kirjutatakse

$$J = \lim_{\lambda \to 0} S.$$

Analoogiliselt defineeritakse Darboux' alamsumma s piirväärtus protsessis $\lambda \to 0$.

Kui funktsioon $f(x)$ on integreeruv lõigus $[a,b]$, siis kehtivad võrdused

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda \to 0} S = \lim_{\lambda \to 0} s.$$

Lõigus $[a,b]$ tõkestatud funktsioon on integreeruv selles lõigus parajasti siis, kui

$$\lim_{\lambda \to 0} (S - s) = 0. \tag{1}$$

Tähistades $\omega_k = M_k - m_k$, võime viimase tingimuse esitada kujul

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k = 0. \tag{1a}$$

Kehtivad järgmised teoreemid:

I. Lõigus $[a,b]$ pidev funktsioon $f(x)$ on integreeruv selles lõigus.

II. Lõigus $[a,b]$ tõkestatud monotoonne funktsioon $f(x)$ on integreeruv selles lõigus.

III. Kui lõigus $[a,b]$ tõkestatud funktsioonil $f(x)$ on lõplik arv katkevuspunkte selles lõigus, siis $f(x)$ on integreeruv selles lõigus $[a,b]$.

Määratud integraali mõiste laiendatakse ka juhtudele $a \geq b$ järgmiste võrdustega:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx,$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

__Näide 1__. Kasutades määratud integraali definitsiooni arvutada integraal

$$J = \int_{-1}^{4} (2 + x)\,dx.$$

__Lahendus.__ Et funktsioon $f(x) = 2 + x$ on pidev lõigus $[-1,4]$, siis teoreemi I tõttu on $f(x)$ integreeruv selles lõigus. Et antud juhul on ette teada piirväärtuse J olemasolu, siis tema arvutamist võime taandada jada piirväärtuse leidmisele, valides sobivalt punktid x_k ja ξ_k. Seepärast jaotame integreerimislõigu $[-1,4]$ võrdseks n osaks punktidega

$$x_k = x_0 + k\Delta x_k = -1 + k\Delta x_k,$$

kus

$$\Delta x_k = \frac{4-(-1)}{n} = \frac{5}{n},$$

ning valime

$$\xi_k = x_k = -1 + \frac{5k}{n}.$$

Siis

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} (2 + \xi_k)\Delta x_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (2 - 1 + \frac{5k}{n})\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k + (\frac{5}{n})^2 \sum_{k=1}^{n} k =$$

$$= 5 + (\frac{5}{n})^2 \frac{1+n}{2} n = 5 + \frac{25}{2} (\frac{1}{n} + 1).$$

Seega

$$\int_{-1}^{4} (2 + x)\, dx = \lim_{n\to\infty}\left[5 + \frac{25}{2}\left(\frac{1}{n} + 1\right)\right] = 5 + \frac{25}{2} = 17{,}5$$

Näide 2. Lähtudes määratud integraali definitsiooniet, arvutada integraal

$$J = \int_{1/4}^{2} \frac{dx}{x^2}.$$

Lahendus. Et $f(x) = 1/x^2$ on pidev lõigus $[1/4,2]$, siis teoreemi I järgi integraal J on olemas. Jaotades selle lõigu osadeks e_k suvaliste punktidega

$$1/4 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = 2,$$

võime valida $\xi_k = \sqrt{x_{k-1}x_k} \in e_k$, sest $x_{k-1}^2 \leq x_{k-1}\, x_k \leq x_k^2$.

Siis

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta x_k}{x_{k-1}x_k} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{x_{k-1}} - \frac{1}{x_k}\right) =$$

$$= \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_n} = 4 - \frac{1}{2} = 3{,}5 = J.$$

Näide 3. Veenduda, et funktsioon

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{k+2}, & \text{kui } x \in \left[\dfrac{k-1}{k}, \dfrac{k}{k+1}\right), \\ 1, & \text{kui } x = 1, \end{cases}$$

kus $k = 1,2,\ldots$, on integreeruv lõigus $[0,1]$ ja arvutada

$$J = \int_0^1 f(x)\, dx.$$

Lahendus. Vaadeldaval funktsioonil f(x) on küll lõpmatu hulk katkevuspunkte, kuid ta on tõkestatud ja monotoonselt kasvav lõigus $[0,1]$. Seega teoreemi II põhjal on ta integreeruv selles lõigus.

Integraali J arvutamiseks jaotame integreerimislõigu n osaks, valides jaotuspunktideks järgmised f(x) katkevuspunktid:

$$0,\ \frac{1}{2},\dots,\ \frac{k-1}{k},\dots,\ \frac{n-1}{n},\ 1.$$

Saame osalõigud

$$e_1 = \left[0,\frac{1}{2}\right],\dots,\ e_k = \left[\frac{k-1}{k},\ \frac{k}{k+1}\right],\dots,$$

$$e_{n-1} = \left[\frac{n-2}{n-1},\ \frac{n-1}{n}\right],\ e_n = \left[\frac{n-1}{n},\ 1\right].$$

Moodustame integraalsumma suvaliste punktide $\xi_k \in e_k$ korral

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n-1} f(\xi_k)\left(\frac{k}{k+1} - \frac{k-1}{k}\right) +$$

$$+ f(\xi_n)\left(1 - \frac{n-1}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{k+2}\,\frac{1}{(k+1)k} + O(1)\,\frac{1}{n} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)(k+2)} + o(1) = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) + o(1) =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + o(1).$$

Seega

$$J = \lim_{n\to\infty} \sigma = \frac{1}{2}.$$

<u>Näide 4.</u> Näidata, et funktsioon

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kui } x \text{ on ratsionaalne,} \\ -1, & \text{kui } x \text{ on irratsionaalne} \end{cases}$$

ei ole integreeruv üheski lõigus $[a,b]$.

<u>Lahendus.</u> Jaotame lõigu $[a,b]$ osadeks e_k ratsionaalsete punktidega

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < \dots < x_n = b.$$

Et igas osalõigus e_k leidub nii ratsionaalseid kui ka irratsionaalseid punkte, siis $m_k = -1$ ja $M_k = \max\{x_{k-1}^2, x_k^2\}$ ning $\omega_k = M_k - m_k = M_k + 1 > 1$. Järelikult

$$S - s = \sum_{k=1}^{n} (M_k + 1)\Delta x_k > \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = b - a,$$

seega vaadeldaval juhul tingimus (1) ei ole täidetud, mis ütleb, et f(x) pole integreeruv lõigus $[a,b]$.

Ülesanded.

Lähtudes Riemanni integraali definitsioonist arvutada järgmised integraalid.

526. $\int_a^b x\,dx.$

527. $\int_2^3 x^2 dx.$

528. $\int_0^3 e^x dx.$

529. $\int_1^{10} 2^x dx.$

530*. $\int_1^4 x^3 dx.$

531*. $\int_0^1 x^\alpha\,dx, \quad \alpha \neq -1.$

532. $\int_1^2 \frac{dx}{x}.$

533*. $\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx.$

534. $\int_0^{\pi} \sin x\,dx.$

Näidata, et järgmised funktsioonid on integreeruvad lõigus $[0,1]$.

535. $f(x) = \left[\frac{1}{x + 0{,}1}\right].$

536. $f(x) = \left[\frac{1}{x^2 + 0{,}2}\right].$

537. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{k+1}, & \text{kui } x \in \left[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right), \ k = 1,2,\dots, \\ 21, & \text{kui } x = 1 \end{cases}$

538*. $f(x) = \operatorname{sgn}\left(\sin \frac{\pi}{x}\right)$

539*. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right], & \text{kui } x \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x = 0 \end{cases}$

Tõestada, et järgmised funktsioonid ei ole integreeruvad lõigus $[0,1]$.

540. $f(x) = \begin{cases} 2, & \text{kui } x \text{ on ratsionaalne,} \\ -1, & \text{kui } x \text{ on irratsionaalne.} \end{cases}$

541. $f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{kui } x \text{ on ratsionaalne,} \\ 2, & \text{kui } x \text{ on irratsionaalne.} \end{cases}$

542*. $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kui } x \text{ on ratsionaalne,} \\ x, & \text{kui } x \text{ on irratsionaalne.} \end{cases}$

543. $f(x) = \begin{cases} 1/2, & \text{kui } x \text{ on ratsionaalne,} \\ 2x, & \text{kui } x \text{ on irratsionaalne.} \end{cases}$

Näide 5. Lähtudes määratud integraali definitsioonist arvutada piirväärtus

$$\lim_{n \to \infty} A_n, \quad \text{kus } A_n = \sqrt[n]{n!}\,/\,n,$$

lugedes, et

$$\int_0^1 \ln x \, dx = -1.$$

Lahendus.

$\ln A_n = \frac{1}{n} \ln n! - \ln n =$

$$= \frac{1}{n}(\ln 1 + \ln 2 + \ldots + \ln n) - \ln n$$

Jaotame lõigu $[0,1]$ punktidega

$$x_k = \frac{k}{n} \quad (k = 1,2,\ldots,n)$$

n võrdseks osaks. Siis $\Delta x_k = 1/n$, ning valides $\xi_k = x_k$, saame

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} \ln \xi_k \,\Delta x_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln \frac{k}{n} = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} \ln k - n \ln n\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln k - \ln n = \ln A_n.$$

Seega

$$\lim_{n\to\infty} \ln A_n = \lim_{n\to\infty} \sigma = \int_0^1 \ln x \, dx = -1.$$

Et logaritmfunktsioon on pidev oma määramispiirkonnas, siis

$$\lim_{n\to\infty} \ln A_n = \ln \lim_{n\to\infty} A_n$$

ja seega

$$\lim_{n\to\infty} A_n = e^{-1}.$$

Ülesanded.

Esitada järgmiste jadade $\{A_n\}$ piirväärtused määratud integraali abil, vaadeldes A_n sobivalt valitud funktsiooni integraalsummana lõigus $[0,1]$.

544. $A_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1 + \frac{k}{n}}$

545. $A_n = n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2 + k^2}$

546. $A_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4n^2 - k^2}}$

547. $A_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\cos^2 \frac{\pi k}{n}}$

Arvutada järgmiste jadade $\{A_n\}$ piirväärtused määratud integraali abil, kasutades ülesannete 527-532 vastuseid ning vaadeldes A_n sobivalt valitud funktsiooni integraalsummana mingis lõigus.

548. $A_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \exp \frac{3k}{n}$ 550. $A_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$

549. $A_n = \frac{1}{n^{\alpha+1}} \sum_{k=1}^{n} k^{\alpha}$ 551. $A_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{k\pi}{n}$

§ 2. Integreeruvate funktsioonide omadused

I. **Aditiivsus.** Kehtib võrdus

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b g(x)\,dx,$$

kusjuures integraalide olemasolust paremal järeldub integraali olemasolu vasakul, ja vastupidi, kui $c \in [a,b]$, siis integraali olemasolust vasakul järeldub mõlema integraali olemasolu paremal.

Järeldus. Kui $f(x)$ on integreeruv lõigus $[a,b]$ siis on ta integreeruv ka igas osalõigus $[c,d] \subset [a,b]$.

II. Lineaarsus. Kui funktsioonid $f(x)$ ja $g(x)$ on integreeruvad lõigus $[a,b]$, siis mistahes konstantide α ja β korral funktsioon $\alpha f(x) + \beta g(x)$ on samuti integreeruv lõigus $[a,b]$ ja kehtib võrdus

$$\int_a^b \left[\alpha f(x) + \beta g(x)\right] dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

Järeldused: 1) Kui funktsioon $f(x)$ on integreeruv lõigus $[a,b]$ ning $\alpha = \text{const}$, siis

$$\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx,$$

s.t. konstantse teguri võib tuua integraali märgi alt integraali märgi ette;

2) kui funktsioonid f(x) ja g(x) on integreeruvad lõigus $[a,b]$ siis

$$\int_a^b \left[f(x) \pm g(x)\right] dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx,$$

s.t. summa (vahe) integraal võrdub liidetavate integraalide summaga (vastavalt vahega).

III. <u>Korrutise integreeruvus</u>. Lõigus $[a,b]$ integreeruvate funktsioonide f(x) ja g(x) korrutis f(x)g(x) on integreeruv lõigus $[a,b]$.

IV. <u>Monotoonsus</u>. Kui lõigus $[a,b]$, kus $a<b$, integreeruvad funktsioonid f(x) ja g(x) rahuldavad võrratust

$$f(x) \leqslant g(x),$$

siis

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

<u>Järeldus</u>: kui $f(x) \geqslant 0$ (vastavalt $f(x) \leqslant 0$) ning $a<b$, siis

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0 \quad \text{(vastavalt } \int_a^b f(x)\,dx \leqslant 0\text{)}.$$

V. <u>Absoluutne integreeruvus</u>. Lõigus $[a,b]$ integreeruva funktsiooni f(x) absoluutväärtus $|f(x)|$ on integreeruv lõigus $[a,b]$, kusjuures juhul $a<b$ kehtib võrratus

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

VI. <u>Määratud integraali esimene keskväärtusteoreem</u>.
Olgu funktsioonid f(x) ja g(x) integreeruvad lõigus
$X = [a,b]$ ning

$$m = \inf_{x \in X} f(x), \qquad M = \sup_{x \in X} f(x).$$

Kui g(x) säilitab märki lõigus X, siis leidub arv μ, mis rahuldab võrratust

$$m \leq \mu \leq M, \tag{2}$$

et kehtib võrdus

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx.$$

<u>Järeldused</u>: 1. Kui funktsioon f(x) on integreeruv lõigus $[a,b]$, siis leidub arv μ, mis rahuldab võrratust (2), et kehtib võrdus

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a).$$

2. Kui lõigus $[a,b]$ funktsioon f(x) on pidev, funktsioon g(x) aga integreeruv ja säilitab märki, siis leidub arv $\xi \in [a,b]$, et

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx.$$

3. Kui funktsioon on pidev lõigus $[a,b]$, siis leidub arv $\xi \in [a,b]$, et

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a). \qquad (3)$$

Ülesanded.

552. Olgu $f(x) \leqslant g(x)$ pidevad funktsioonid lõigus $[a,b]$, kus $a<b$. Tõestada, et kui $f(x)<g(x)$ mingis vahemikus $(c,d) \subset [a,b]$, siis

$$\int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b g(x)\,dx.$$

Järgmisi integraale arvutamata otsustada, kas nad on positiivsed või negatiivsed.

553. $\int_1^2 x^3 e^{-x} dx.$

554. $\int_3^0 x^2 e^x dx.$

555. $\int_2^4 x \cos x\,dx.$

556. $\int_{-1}^{9} x \cos x\,dx.$

557. $\int_{-8}^{-1} \frac{\arctan x}{x}\,dx.$

558. $\int_{-1/2}^{0} \frac{\arccos x}{x}\,dx.$

Järgmisi integraale arvutamata teha kindlaks millist märki nad on ja kumb kahest integraalist on suurem.

559. $\int_0^1 x\,dx, \quad \int_0^1 x^2 dx$

560. $\int_1^2 x\,dx, \quad \int_1^2 x^2 dx$

561. $\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx, \quad \int_0^{\pi/2} x\,dx$

562. $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx, \quad \int_0^{\pi/2} \sin^3 x\,dx$

563. $\int_0^1 e^x\,dx, \quad \int_0^1 e^{x^2}\,dx$

564. $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \cos x\,dx$, $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \cos^3 x\,dx$

565. $\int\limits_{-3}^{-1} 2^{-x}\,dx$, $\int\limits_{-3}^{-1} 2^{x}\,dx$

566. $\int\limits_{0}^{1} 2^{x}\,dx$, $\int\limits_{0}^{1} 2\sin x\,dx$

567. $\int\limits_{1}^{2} \ln x\,dx$, $\int\limits_{1}^{2} \ln^2 x\,dx$

568. $\int\limits_{3}^{4} \ln x\,dx$, $\int\limits_{3}^{4} \ln^2 x\,dx$

569. $\int\limits_{1/e}^{1} \ln x\,dx$, $\int\limits_{1/e}^{1} \ln^3 x\,dx$

570. $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{1+x^2}\,dx$, $\int\limits_{0}^{1} x\,dx$

571. $\int\limits_{0}^{1} x^2\sin^2 x\,dx$, $\int\limits_{0}^{1} x\sin^2 x\,dx$

572. $\int\limits_{0}^{\pi} e^{-x}\cos^2 x\,dx$, $\int\limits_{0}^{2\pi} e^{-x}\cos^2 x\,dx$

573. $\int\limits_{0}^{\pi} x\sin x\,dx$, $\int\limits_{0}^{2\pi} x\sin x\,dx$

Näide 6. Keskväärtusteoreemi abil hinnata integraal

$$J = \int\limits_{2}^{4} \frac{x\,dx}{\ln x}.$$

Lahendus. Leiame integreeritava funktsiooni

$$f(x) = \frac{x}{\ln x}$$

rajad m ja M, mille vahel asub arv μ võrratuses (2). Et f(x) on pidev integreerimislõigus $X = [2,4]$, siis m ja M on funktsiooni f(x) globaalsed ekstreemumid. Viimaste leidmiseks arvutame tuletise

$$f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x},$$

kust saame f(x) ainukese kriitilise punkti x = e. Seega f(x) globaalsed ekstreemumid võivad olla vaid punktides x = e, x = 2 ja x = 4. Et

$$f(e) = e = 2{,}718\ldots, \quad f(2) = f(4) = \frac{2}{\ln 2} = 2{,}88\ldots,$$

siis

$$m = \min_{x \in X} f(x) = e, \qquad M = \max_{x \in X} f(x) = \frac{2}{\ln 2}.$$

Arvestades võrratust (2), võime järelduse 1 põhjal kirjutada

$$e(4 - 2) \leq J \leq \frac{2}{\ln 2}(4 - 2)$$

ehk

$$5{,}43 < J < 5{,}78.$$

Ülesandes 552 antud väite põhjal kehtib range võrratus tegelikult mõlemas viimases avaldises.

Näide 7. Hinnata integraal

$$J = \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} x \arctan x \, dx.$$

Lahendus. Integreeritav funktsioon

$$\varphi(x) = x \arctan x$$

on kahe kasvava funktsiooni korrutis. Seega on $\varphi(x)$ kasvav ning

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6} \leq \varphi(x) \leq \sqrt{3}\frac{\pi}{3},$$

kust keskväärtusteoreemi järelduse 1 põhjal saame

$$\frac{\pi}{6\sqrt{3}}\frac{2}{\sqrt{3}} \leq J \leq \frac{\sqrt{3}\pi}{3}\frac{2}{\sqrt{3}},$$

ehk

$$\frac{\pi}{9} \leq J \leq \frac{2\pi}{3}.$$

Vahetult keskväärtusteoreemist saame käesoleval juhul parema hinnangu. Võtame $f(x) = \arctan x$ ja $g(x) = x$. Siis (vt. ülesanne 525)

$$\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} g(x)\,dx = \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} x\,dx = \frac{4}{3}.$$

Seega võrratuse

$$\frac{\pi}{6} \leq f(x) \leq \frac{\pi}{3}$$

tõttu saame keskväärtusteoreemist, et

$$\frac{4}{3}\frac{\pi}{6} \leq J \leq \frac{4}{3}\frac{\pi}{3}.$$

Siin alumine tõke on suurem eelmisest ja ülemine tõke väiksem eelmisest. Kokkuvõttes saame seega

$$\frac{2\pi}{9} \leq J \leq \frac{4\pi}{9}.$$

Ülesanded.

Kasutades keskväärtusteoreemi järeldusi hinnata integraalid.

574. $\int_0^2 \exp(x^2 - x)\,dx$

579. $\int_0^1 \sqrt{1 + x^4}\,dx$

575. $\int_{1/e}^{e} x^2\exp(-x^2)\,dx$

580. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\,dx$

576. $\int_{\pi/6}^{\pi/4} x\sqrt{\tan x}\,dx$

581. $\int_0^{100} \frac{e^{-x}\,dx}{x + 100}$

577. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{2 + \sin^2 x}\,dx$

582. $\int_{\sqrt{\frac{3\pi}{2}}}^{\sqrt{2\pi}} \cos x^2\,dx$

578. $\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} x \operatorname{arccot} x\,dx$

Arvestades ülesannete 526 - 533 vastuseid, leida arv ξ nii, et antud määratud integraali puhul kehtiks valem(3).

583. $\int_a^b x\,dx$

586. $\int_1^4 x^3\,dx$

584. $\int_2^3 x^2\,dx$

587. $\int_1^2 \frac{dx}{x}$

585. $\int_0^3 e^x dx$

588. $\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx$

§ 3. Määratud integraal raja funktsioonina

Kui funktsioon $f(t)$ on integreeruv lõigus $[a,b]$, siis funktsioon

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

on pidev selles lõigus.

Kui lõigus $[a,b]$ integreeruv funktsioon $f(t)$ on pidev kohal $t = x$, siis funktsioon $G(x)$ on diferentseeruv kohal x, kusjuures

$$\frac{d}{dx} G(x) = f(x).$$

Näide 8. Arvutada funktsiooni

$$y = \int_{x^2}^{\exp x^3} \frac{t\,dt}{\ln t}$$

tuletis vahemikus $X = (1, \infty)$.

Lahendus. Funktsioon $t/\ln t$ on kõikjal vahemikus X pidev. Määratud integraali aditiivsuse omaduse põhjal on mistahes arvu $a \in X$ puhul

$$y = \int_{x^2}^{a} \frac{t\,dt}{\ln t} + \int_a^{\exp x^3} \frac{t\,dt}{\ln t} = \int_a^{\exp x^3} \frac{t\,dt}{\ln t} - \int_a^{x^2} \frac{t\,dt}{\ln t}.$$

Liitfunktsiooni diferentseerimise reegli kohaselt on

$$y' = \frac{\exp x^3}{\ln \exp x^3} \frac{d}{dx} e^{x^3} - \frac{x^2}{\ln x^2} \frac{d}{dx} x^2 =$$

$$= \frac{(\exp x^3)^2}{x^3} 3x^2 - \frac{x^2\, 2x}{2 \ln|x|} = \frac{3\exp(2x^3)}{x} - \frac{x^3}{\ln x}.$$

Ülesanded.

Leida järgmiste funktsioonide tuletised kohal x.

589. $y = \int_0^x \frac{1 - t + t^2}{\sqrt{1 + t + t^2}}\,dt$

594. $y = \int_x^{2x} \ln^2 t\,dt$

590. $y = \int_0^{2x} \frac{\sin t}{t}\,dt$

595. $y = \int_{-5}^{\sqrt{x}} \sin t^2 dt$

591. $y = \int_x^3 \sqrt{1 + t^2}\,dt$

596. $y = \int_{x^2}^{10} \cos t^2\,dt$

592. $y = \int_{x^2}^1 \frac{dt}{\ln t}$

597. $y = \int_{\sin x}^{\cos x} \cos(\pi t^2)dt$

593. $y = \int_2^{e^x} \frac{\ln t}{t^2}\,dt$

598. $y = \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1 + t^4}}$

599. Leida tuletis ilmutamata funktsioonist

$$\int_1^y \exp t^2 dt + \int_1^x \cos t^2 dt = 3.$$

Leida parameetrilisel kujul antud funktsioonide tuletised.

600. $\begin{cases} x = \int_2^t \frac{z^2}{\ln z}\,dz \\ y = \int_3^t e^{z^2} dz \end{cases}$

601. $\begin{cases} x = \int_1^{t^2} z \ln z\,dz \\ y = \int_{t^2}^1 z^2 \ln z\,dz \end{cases}$

Leida funktsiooni H(x) tuletis märgitud punktides $x = a$ ja $x = b$.

602. $H(x) = \int_x^0 \sqrt{1 + t^3}\, dt, \quad a = 2, \quad b = \sqrt[3]{24}$

603. $H(x) = \int_x^{x^2} e^{-t^2} dt, \quad a = 0, \quad b = \sqrt{3}$

604. $H(x) = \int_{1/x}^{\sqrt{x}} \cos t^2 dt, \quad a = 1, \quad b = \pi/2$

Leida funktsioonide teist järku tuletised.

605*. $y = \int_2^x \sqrt{\frac{t(t-1)(t^2+2)}{t^2+7}}\, dt$

606. $y = \int_{x^2}^{1} \sqrt[5]{\frac{(t+2)(t^4-3)}{\arccos t}}\, dt$

607. $y = \int_x^{20} \frac{(t-1)\sqrt{t^5-42}}{\operatorname{arccot} t} \sin^2 t\, dt$

608. $y = \int_{1/2}^{x} z^{\sin z}\, dz$

609. $y = \int_1^{x^2} z^{\sqrt{z}}\, dz$

610. $y = \int_0^x (t^2+1)^{\sin t}\, dt$

Leida funktsioonide lokaalsed ekstreemumid.

611. $y = \int_{1,5}^{x} \left(\frac{1}{\ln u} - \frac{1}{\ln^2 u}\right) du$

612. $y = \int_0^x \frac{\sin z}{z}\, dz$

613. $y = \int_{-3}^{x} t(2-t)\exp(t^4 - t)\, dt$

614. $y = \int_{-1}^{x} e^t\left(\frac{\pi}{4} - \arctan t\right) dt$

615. $y = \int_{0,1}^{x} (1 + \ln u) u^{\pi+u}\, du$

616. $y = \int_0^x e^{x^2}(4x^3 - 5)\, dx$

Leida funktsioonide kumerus- ja nõgususpiirkonnad ning käänupunktid.

617. $\int_2^x \frac{z\,dz}{\ln z}$

619. $\int_{-1}^x \sqrt[3]{t^3 - 3t^2 + 8}\,dt$

618. $\int_1^{x^2} u^{\frac{1}{2\sqrt{u}}}\,du$

620. $\int_{0,5}^{e^x} \sqrt[3]{(1 - \ln^2 z)^2}\,dz$

621. Olgu $f(x) > 0$ ja pidev hulgal $X = [0, \infty)$. Tõestada, et funktsioon

$$H(x) = \frac{\int_x^0 tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$$

on kasvav hulgal X.

Leida järgmised piirväärtused.

622. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} \int_0^x \cos t^2 dt$

624. $\lim\limits_{u \to 0} \frac{1}{u} \int_0^u \frac{\sin x}{x}\,dx$

623. $\lim\limits_{z \to 0} \frac{1}{\sin z} \int_0^z e^{-x^2} dx$

625. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^3} \int_0^x \sin t^2 dt$

626. $\lim\limits_{x \to 0+} \int_0^{\sin x} \sqrt{\tan t}\,dt \Big/ \int_0^{\tan x} \sqrt{\sin t}\,dt$

§ 4. Määratud integraali arvutamine

Kui lõigus $[a,b]$ integreeruval funktsioonil $f(x)$ on olemas algfunktsioon $F(x)$ lõigus $[a,b]$, siis kehtib Newton-Leibnizi valem

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Arvutustes on otstarbekohane tähistada viimases valemis

$$F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b ,$$

siis saab Newton - Leibnizi valem kuju

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b . \qquad (4)$$

Kui lõigus $[a,b]$, kus $a < b$ integreeruval funktsioonil on olemas algfunktsioon $F(x)$ vaid vahemikus (a,b), siis

$$\int_a^b f(x)dx = F(b-) - F(a+)$$

ehk lühidalt

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_{a+}^{b-} . \qquad (5)$$

<u>Näide 9</u>. Arvutada

$$J = \int_{-\pi}^{\pi/2} (|x - \tfrac{\pi}{4}| + \sin x)dx.$$

<u>Lahendus.</u> Määratud integraali lineaarsuse omaduse põhjal võime kirjutada

$$J = \int_{-\pi}^{\pi/2} |x - \tfrac{\pi}{4}| dx + \int_{-\pi}^{\pi/2} \sin x \, dx .$$

Et avaldis $|x - \pi/4|$ on vahemikus $(-\pi, \pi/4)$ negatiivne, vahemikus $(\pi/4, \pi/2)$ aga positiivne, siis

$$|x - \tfrac{\pi}{4}| = \begin{cases} x - \pi/4, & \text{kui } x \in (\pi/4, \pi/2), \\ \tfrac{\pi}{4} - x, & \text{kui } x \in (-\pi, \pi/4). \end{cases}$$

Seega aditiivsuse omaduse põhjal

$$J = \int_{-\pi}^{\pi/4} \left(\frac{\pi}{4} - x\right) dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) dx + \int_{-\pi}^{\pi/2} \sin x \, dx.$$

Kasutades Newton - Leibnizi valemit (4), saame iga integraali korral

$$J = \left(\frac{\pi}{4}x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi/4} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{\pi}{4}x\right)\Bigg|_{\pi/4}^{\pi/2} - \cos x \Bigg|_{-\pi}^{\pi/2} =$$

$$= \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi^2}{32} - \left(-\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{2}\right) + \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{8} - \left(\frac{\pi^2}{32} - \frac{\pi^2}{16}\right) -$$

$$- \cos\frac{\pi}{2} + \cos(-\pi) = \frac{13\pi^2}{16} - 1.$$

<u>Näide 10</u>. Arvutada integraal

$$J = \int_{1/\pi}^{1/2} \left[\frac{2}{x}\right] dx.$$

<u>Lahendus</u>. Funktsioon $[2/x]$ on tõkestatud lõigus $[1/\pi, 1/2]$ ja on katkev vaid punktides $x = 1/3$ ja $x = 2/5$. Järelikult teoreemi III § 1 põhjal integraal J eksisteerib. Aditiivsuse omaduse põhjal võime kirjutada

$$J = \int_{1/\pi}^{1/3} \left[\frac{2}{x}\right] dx + \int_{1/3}^{2/5} \left[\frac{2}{x}\right] dx + \int_{2/5}^{1/2} \left[\frac{2}{x}\right] dx.$$

Et vahemikes $[1/\pi, 1/3]$, $(1/3, 2/5]$ ja $(2/5, 1/2]$ funktsioon $[2/x]$ on võrdne vastavalt arvudega 6,5 ja 4, siis nendes poollõikudes funktsiooni $[2/x]$ algfunktsioonid on vastavalt 6x, 5x ja 4x. Valemi (5) põhjal saame siis

$$J = 6x\Big|_{1/\pi}^{1/3} + 5x\Big|_{1/3+}^{2/5} + 4x\Big|_{2/5+}^{1/2} =$$

$$= 6\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\pi}\right) + 5\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{3}\right) + 4\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{5}\right) = 2\frac{11}{15} - \frac{6}{\pi}.$$

Ülesanded.

Kasutades valemeid (4) ja (5), arvutada järgmised integraalid.

627. $\int_1^2 (x^2 - 2x + 3)dx$

628. $\int_0^8 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x})dx$

629. $\int_1^4 \frac{1 + x}{x^2} dx$

630. $\int_{-2}^{-3} \frac{dx}{x^2 - 1}$

631. $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x}$

632. $\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

633. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (2 + \tan x)dx$

634. $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x}$

635. $\int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2}$

636. $\int_{-5}^{-1} \frac{dx}{x}$

637. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \frac{x}{2} dx$

638. $\int_{-\pi/4}^{0} \frac{3x^4 + 3x^2 + 1}{x^2 + 1} dx$

639. $\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx$

640. $\int_1^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$

641. $\int_0^{\pi/4} \frac{x^2 dx}{x^2 + 1}$

642. $\int_2^3 \frac{2x^4 - 5x^2 + 3}{x^2 - 1} dx$

643. $\int_{-1}^{1} \operatorname{ch} x \, dx$

Kui integreerimislõik on sümmeetriline nullpunkti suhtes, näiteks lõik $[-a, a]$, siis

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0,$$

kui f(x) on paaritu, ning

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx,$$

kui f(x) on paarisfunktsioon.

Näide 11. Arvutada

$$J = \int_{-\pi}^{\pi} (\sin^2 x + \tan x)dx.$$

Lahendus. Et tan x on paaritu, $\sin^2 x$ on paarisfunktsioon, siis

$$J = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x\, dx + \int_{-\pi}^{\pi} \tan x\, dx = 2\int_{0}^{\pi} \sin^2 x\, dx =$$

$$= \int_{0}^{\pi} (1 - \cos 2x)dx = \pi - \frac{1}{2}\sin 2x \Big|_{0}^{\pi} = \pi \,.$$

Ülesanded.

Arvutada integraalid

644. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1 + x^2}$

645. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \frac{x}{2}\, dx$

646. $\int_{-2}^{2} \sin^3 x\, dx$

647. $\int_{-e}^{e} \ln(x + \sqrt{1 + x^2})dx$

648. $\int_{-2}^{2} (x^5 + x^4 + 15x^3 + 4)dx$

649. $\int_{-1/2}^{1/2} \ln \frac{1 + x}{1 - x}\, dx$

Kui funktsioonidel $u = u(x)$ ja $v = v(x)$ on lõigus $[a,b]$ olemas integreeruvad tuletised, siis kehtib <u>määratud integraali ositi integreerimise valem</u>

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du. \tag{6}$$

<u>Näide 12</u>. Arvutada integraal

$$J = \int_0^1 x^2e^x\,dx .$$

<u>Lahendus.</u> Ositi integreerimise valemi (6) rakendamiseks võtame $u = x^2$, $dv = e^x dx$, siis $du = 2x\,dx$ ja $v = e^x$. Seega valemi (6) põhjal on

$$J = x^2e^x\Big|_0^1 - \int_0^1 2xe^x dx = e - 2\int_0^1 xe^x dx.$$

Paremal oleva integraali arvutamiseks rakendame veel kord ositi integreerimise valemit (6), võttes $u = x$, $dv = e^x dx$. Siis $du = dx$, $v = e^x$ ja valemi (6) põhjal

$$\int_0^1 xe^x dx = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - e^x\Big|_0^1 = 1.$$

Seega

$$J = e - 2.$$

Kui vähemalt üks funktsioonidest u või v pole määratud integreerimislõigu otspunktides a ja b, kus $a < b$, siis määratud integraali ositi integreerimise valem (6) esitub kujul

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_{a+}^{b-} - \int_a^b v\,du. \tag{7}$$

Integraalide

$$J = \int_a^b P_n(x)\, f(x)dx$$

arvutamisel, kus $P_n(x)$ on n-astme polünoom ja $f(x)$ on üks funktsioonidest $a^{\alpha x}$, $\sin\alpha x$, $\cos\alpha x$, $\operatorname{sh}\alpha x$ või $\operatorname{ch}\alpha x$ tuleb valemis (6) võtta

$$u = P_n(x), \quad dv = f(x)dx$$

Tulemuseks saame uue integraali

$$\int_a^b P_{n-1}(x)f(x)dx,$$

kus $P_{n-1}(x)$ on juba (n-1)-astme polünoom. Kui $P_{n-1}(x) \neq$ $\neq$ const, siis tuleb veel kord rakendada valemit (6). Seega integraali J arvutamiseks on vaja valemit (6) järjest rakendada n korda. Niisugustel juhtudel on sobiv kasutada nn. <u>üldistatud</u> <u>ositi</u> <u>integreerimise</u> <u>valemit</u>

$$\int_a^b uv^{(n)}dx = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k u^{(k)} v^{(n-1-k)} \Bigg|_a^b +$$

$$+ (-1)^n \int_a^b u^{(n)} v dx,$$

mis kehtib, näiteks, kui funktsioonidel $u = u(x)$ ja $v = v(x)$ on lõigus $[a,b]$ olemas pidevad n-järku tuletised $u^{(n)} = u^{(n)}(x)$ ja $v^{(n)} = v^{(n)}(x)$.

<u>Ülesanded</u>.

Arvutada integraalid, kasutades ositi integreerimist.

650. $\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x \, dx$

651. $\int_{0}^{1/2} \arcsin x \, dx$

652. $\int_{0}^{3} \ln(x + 3)dx$

653. $\int_{0}^{1} x \arctan x \, dx$

654. $\int_{0}^{1} x e^{-x}dx$

655*. $\int_{0}^{1} x \ln x \, dx$

656. $\int_{0}^{\pi} x^2\cos x \, dx$

657*. $\int_{0}^{\pi/2} e^x\sin x \, dx$

Kui funktsioonil $f(x)$ on olemas algfunktsioon lõigus $[a,b]$ ja $x = \varphi(u)$ on mingis lõigus $[\alpha,\beta]$ diferentseeruv funktsioon, mille väärtused kuuluvad lõiku $[a,b]$, kusjuures $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, siis kehtib valem

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(u)]\, \varphi'(u)du, \tag{8}$$

eeldusel, et integraalid mõlemal pool eksisteerivad.

Näide 13. Arvutada

$$J = \int_{2}^{4} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x^4}\, dx.$$

Lahendus. Teeme muutuja vahetuse

$$x = 2/\sin u.$$

Vana muutuja x rajade $a = 2$ ja $b = 4$ asemel saame võrranditest $2 = 2/\sin u$ ja $4 = 2/\sin u$ vastavalt muutuja u uuteks rajadeks arvud $\alpha = \pi/2$ ja $\beta = \pi/6$. Et lõigus $[\pi/2, \pi/6]$ on funktsioon $x = 2/\sin u$ pidevalt diferentseeruv ja tema väärtused x kuuluvad lõiku $[2,4]$, siis on see muutuja vahetus lubatud. Seega

$$dx = \frac{-2\cos u}{\sin^2 u}\,du, \quad \sqrt{x^2-4} = \sqrt{\frac{4}{\sin^2 u} - 4} =$$

$$= \frac{2}{|\sin u|}|\cos u| = 2|\cot u|$$

ja

$$J = -\int_{\pi/2}^{\pi/6} 2|\cot u| \frac{\sin^4 u}{16} \frac{2\cos u}{\sin^2 u}\,du = \frac{1}{4}\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos^2 u \sin u\,du =$$

$$= \frac{1}{4}\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos^2 u\, d\cos u = \frac{1}{4}\frac{\cos^3 u}{3}\Bigg|_{\pi/6}^{\pi/2} = \frac{1}{12}\left(0 - \frac{3\sqrt{3}}{8}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{32}$$

Võrreldes valemit (8) määramata integraali muutujate vahetuse valemiga, näeme, et määratud integraali arvutamisel pole vaja tagasi minna vanale muutujale x pärast funktsiooni $f[\varphi(u)]\varphi'(u)$ algfunktsiooni $F[\varphi(u)]$ leidmist lõigus $[\alpha, \beta]$, kus F(x) on funktsiooni f(x) algfunktsioon lõigus $[a,b]$. Kui valemis (8) paremal oleva integraali arvutamisel Newton - Leibnizi valemi abil on raske leida rajasid α ja β, siis võib leitud algfunktsioonis $F[\varphi(u)]$ minna tagasi vanale muutujale x asendusega $x = \varphi(u)$. Tulemuseks saame funktsiooni f(x) algfunktsiooni F(x) lõigus $[a,b]$ ja võime kasutada otseselt valemit (4).

Näide 14. Arvutada integraal

$$J = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx.$$

Lahendus. Teeme muutuja vahetuse

$$x = \operatorname{sh} u,$$

siis

$$dx = \text{ch } u \, du$$

$$\sqrt{1 + x^2} = \sqrt{1 + \text{sh}^2 u} = \text{ch } u,$$

sest ch $u > 0$. Tähistades $\beta = \text{arsh } 1$, saame

$$J = \int_0^{\beta} \text{ch}^2 u \, du = \frac{1}{2} \int_0^{\beta} (1 + \text{ch } 2u) du = \frac{1}{2} u \Big|_0^{\beta} + \frac{1}{4} \text{ sh } 2u \Big|_0^{\beta}.$$

Et sh 2β arvutamine on ebamugav, siis läheme vanale muutujale tagasi ja saame

$$\text{sh } 2u = 2\text{sh } u \text{ ch } u = 2x\sqrt{1 + x^2}.$$

Seega

$$J = \frac{1}{2} u \Big|_0^{\beta} + \frac{1}{2} x\sqrt{1 + x^2} \Big|_0^{1} =$$

$$= \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\sqrt{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2} \ln (1 + \sqrt{2}),$$

sest $\text{arsh } x = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$.

Määratud integraali arvutamisel kasutatakse ka diferentsiaali märgi alla viimise võtet. Et sel korral me uue muutuja jaoks uut tähistust sisse ei too, siis ei tule integraalis rajasid muuta.

Näiteks.

$$\int_a^b f(\alpha x + \beta) \, dx = \frac{1}{\alpha} \int_a^b f(\alpha x + \beta) \, d(\alpha x + \beta).$$

Seega, kui F(x) on funktsiooni f(x) algfunktsioon lõigus $[a,b]$, siis

$$\int_a^b f(\alpha x + \beta)dx = \frac{1}{\alpha} F(\alpha x + \beta)\Big|_a^b . \qquad (9)$$

<u>Näide 15</u>. Arvutada integraal

$$J = \int_{1/2}^{3/4} \frac{\arcsin^3 \sqrt{x}}{\sqrt{x - x^2}}\, dx.$$

<u>Lahendus</u>. Kasutades diferentsiaali märgi alla viimise võtet, saame

$$J = \int_{1/2}^{3/4} \frac{\arcsin^3 \sqrt{x}}{\sqrt{1 - x}\sqrt{x}}\, dx = 2\int_{1/2}^{3/4} \arcsin^3 \sqrt{x}\, d \arcsin\sqrt{x} =$$

$$= \frac{1}{2} \arcsin^4 \sqrt{x}\Big|_{1/2}^{3/4} = \frac{1}{2}\left(\arcsin^4 \frac{\sqrt{3}}{2} - \arcsin^4 \frac{1}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\pi}{3}\right)^4 - \left(\frac{\pi}{4}\right)^4\right] = \frac{175}{41472}\pi^4.$$

Ülesanded.

Kasutades valemit (9) arvutada järgmised integraalid.

658. $\int_2^6 \sqrt{x - 2}\, dx$

659. $\int_0^{-3} \frac{dx}{\sqrt{3x + 25}}$

660. $\int_0^{\pi/4} \cos^2 x\, dx$

661. $\int_0^{\pi} \operatorname{sh}^2 x\, dx$

662. $\int_0^{\pi/w} \sin^2(wx + \varphi_0)dx$

663. $\int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt{x + 9}}$

664. $\int_0^{2/3} \frac{dx}{4 + 9x^2}$

665. $\int_0^{1/10} \frac{dx}{\sqrt{1 - 25x^2}}$

Kasutades diferentsiaali märgi alla viimise võtet, arvutada järgmised integraalid.

666. $\int_{e}^{e^2} \frac{du}{u \ln u}$

667. $\int_{1}^{e} \frac{\sin \ln z}{z} dz$

668. $\int_{0}^{\pi/2} \sin^3 u \, du$

669. $\int_{0}^{\pi/2} \cos x \sin^2 x \, dx$

670. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\operatorname{ch} x}$

671. $\int_{0}^{\pi/4} \frac{1 + \tan^2 x}{1 + \tan x} dx$

672. $\int_{0}^{4} x\sqrt{x^2 + 9} \, dx$

673. $\int_{0}^{1} (e^x - 1)^4 e^x \, dx$

674. $\int_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{1 - \ln^2 x}}$

675. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} \, dx$

676. $\int_{0}^{\pi/2} \cos^5 x \sin 2x \, dx$

677. $\int_{0}^{\pi/2} \frac{\sin 2x \, dx}{2\cos^2 x + 7\sin^2 x}$

Kasutades muutuja vahetust, arvutada järgmised integraalid.

678. $\int_{0}^{4} \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$

679. $\int_{1}^{9} \frac{\sqrt{x} \, dx}{1 + \sqrt{x}}$

680. $\int_{-1}^{1} \frac{x^5 \, dx}{x + 2}$

681. $\int_{0}^{1} \frac{x \, dx}{x^2 + 3x + 12}$

682. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$

683. $\int_{2}^{5} \frac{dx}{\sqrt{5 + 4x - x^2}}$

684. $\int_{0}^{4} \frac{dx}{1 + \sqrt{1 + 2x}}$

685. $\int_{0}^{\sqrt{2}} \sqrt{2 - x^2} \, dx$

686. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3 + 2\cos x}$

687. $\int_{-0,5}^{1} \frac{dx}{\sqrt{8 + 2x - x^2}}$

Arvutada järgmised integraalid.

688. $\int_3^4 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$

689. $\int_0^1 \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}\, dx$

690. $\int_0^{\pi} \sin^4 \frac{x}{2}\, dx$

691. $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\, dx$

692. $\int_0^1 \sqrt{4 - x^2}\, dx$

693. $\int_0^4 x^3\sqrt{x^2 + 9}\, dx$

694. $\int_{-2,5}^{-1} \frac{dx}{8 - 2x - x^2}$

695. $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^6 + 4}}$

696. $\int_0^1 \frac{x^3 dx}{x^8 + 1}$

697. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \cot^4 t\, dt$

698. $\int_0^1 \frac{e^x dx}{1 + e^x}$

699. $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{4x^2 - 9}$

700. $\int_0^{\pi/4} \frac{\tan x}{\cos^2 x}\, dx$

701. $\int_1^a \frac{\log_a x}{x}\, dx$

702. $\int_0^1 \frac{x\, dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

703. $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{1 + x}}$

704. $\int_1^5 \frac{x\, dx}{\sqrt{5 + 4x}}$

705. $\int_0^{\ln 3} \frac{1 - e^x}{1 + e^x}\, dx$

706. $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x\sqrt{\cos x}\, dx$

707. $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{7}} \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{(x^2 + 1)^2}}$

708. $\int_{1}^{2} x^2 \ln x \, dx$

714. $\int_{0}^{\pi/2} \sin x \cos^2 x \, dx$

709. $\int_{0}^{1} \sqrt{2x + x^2} \, dx$

715*. $\int_{0}^{\pi/4} \frac{\tan x \, dx}{1 + 2\tan^2 x}$

710. $\int_{0}^{\pi/4} \frac{x \sin x}{\cos^3 x} dx$

716. $\int_{-1}^{4} \sqrt{|x|} \, dx$

711. $\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x^2} dx$

717. $\int_{0}^{\pi} |\cos^3 x| \sin x \, dx$

712. $\int_{1/\sqrt{2}}^{1} \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x^6} dx$

718. $\int_{0}^{\pi} |1 - 2\sin x| dx$

713. $\int_{-2}^{2} \frac{\arctan(x/5)}{25 + x^2} dx$

719. $\int_{-\pi/4}^{\pi/3} (\pi^{-2}|x| + |\tan x|) dx$

Järgmistes ülesannetes arvutada integraal

$$\int_{a}^{b} f(x) \, dx$$

antud funktsioonist f(x), võttes integreerimislõiguks $[a,b]$ funktsiooni f(x) määramispiirkonna.

720. $f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{kui } -1 \le x \le 0 \\ x^2, & \text{kui } 0 < x \le 1. \end{cases}$

721. $f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{kui } -\frac{\pi}{2} \le x < 0 \\ 1 - x^2, & \text{kui } 0 \le x < 1, \\ \ln x, & \text{kui } 1 \le x \le e. \end{cases}$

722. $f(x) = \begin{cases} \arcsin x, & \text{kui } |x| \le 1, \\ \arctan x, & \text{kui } 1 < |x| \le \sqrt{3}. \end{cases}$

723. $f(x) = \begin{cases} \arcsin|x|, & \text{kui } |x| \le 1, \\ \arctan x, & \text{kui } 1 < |x| \le \sqrt{3}. \end{cases}$

724. $f(x) = \begin{cases} \arcsin x, & \text{kui } |x| \leqslant 1, \\ \arctan x, & \text{kui } 1 < x \leqslant \sqrt{3}. \end{cases}$

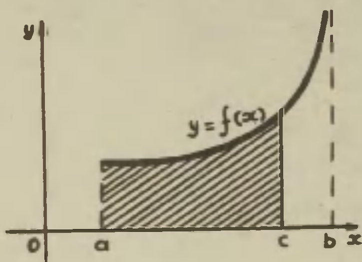
725. $f(x) = \sqrt{1 - |x|} + \mathrm{arcain}(x - \frac{1}{2}).$

726. $f(x) = \ln(1 + x) + \mathrm{arccos}(x - 0{,}1).$

III PÄRATUD INTEGRAALID

§ 1. Tõkestamata funktsiooni integraal

I. Kui funktsioon $f(x)$ on integreeruv lõigu $[a,b]$ $(a<b)$ igas osalõigus $[a,c]$ $(c<b)$ ja on tõkestamata punkti b ümbruses (joon. 1), siis funktsiooni $f(x)$ integraal lõigus $[a,b]$ defineeritakse võrdusega

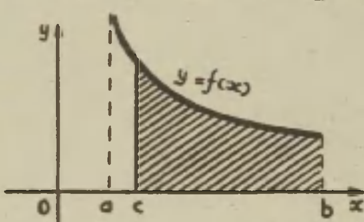


Joon. 1

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to b-} \int_a^c f(x)dx, \quad (1)$$

eeldusel, et piirväärtus paremal eksisteerib ja on lõplik.

II. Kui funktsioon $f(x)$ on integreeruv lõigu $[a,b]$ $(a<b)$ igas osalõigus $[c,b]$ $(a<c)$ ja on tõkestamata punkti a ümbruses (joon. 2), siis funktsiooni $f(x)$ integraal lõigus $[a,b]$ defineeritakse võrdusega



Joom. 2

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to a+} \int_c^b f(x)dx, \quad (2)$$

eeldusel, et piirväärtus paremal eksisteerib ja on lõplik.

III. Kui funktsioon $f(x)$ on tõkestamata lõigu $[a,b]$

sisemise punkti l ümbruses, siis defineeritakse

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^l f(x)dx + \int_l^b f(x)dx, \qquad (3)$$

kus integraalid paremal on määratud vastavalt definitsioonidega I ja II.

IV. Kui funktsioon f(x) on tõkestamata lõigu $[a,b]$ punktide $l_1, l_2, \ldots, l_k$ ümbruses, kusjuures

$$a \leq l_1 < l_2 < \ldots < l_k \leq b,$$

siis jaotatakse lõik $[a,b]$ suvaliselt osalõikudeks punktidega $c_1, c_2, \ldots, c_{k-1}$ nii, et igasse osalõiku

$$[a,c_1], [c_1,c_2], \ldots, [c_{k-1},b]$$

jääks vaid üks punkt l_i $(1 \leq i \leq k)$, ja defineeritakse

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \ldots + \int_{c_{k-1}}^b f(x)dx,$$

kus integraalid paremal on määratud definitsioonidega I, II ja III.

Kui näiteks funktsioon f(x) on tõkestamata vaid lõigu $[a,b]$ mõlema otspunkti a ja b ümbruses, siis integraal

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \qquad (4)$$

kus c on mingi väärtus a ja b vahel, aga integraalid paremal on määratud vastavalt definitsioonidega II ja I.

Valemitega (1) ja (2) defineeritud integraale nimetatakse <u>päratuteks integraalideks</u> ehk <u>tõkestamata funktsiooni integraalideks</u>. Kui piirväärtus võrduse (1) paremal poolel eksisteerib ja on lõplik, siis öeldakse, et päratu integraal (1) <u>koondub</u>, muudel juhtudel öeldakse, et ta <u>hajub</u>. Samasugused mõisted defineeritakse ka integraali (2) kohta.

Integraalide (1) - (3) arvutamisel kasutatakse järgmisi valemeid.

Kui funktsioonil f(x) on olemas algfunktsioon F(x) piirkonnas [a,b), siis päratu integraal (1) arvutatakse valemiga

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^{b-} . \qquad (5)$$

Kui funktsioonil f(x) on olemas algfunktsioon F(x) piirkonnas (a,b], siis päratu integraal (2) arvutatakse valemiga

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_{a+}^{b} . \qquad (6)$$

Kui funktsioonil f(x) on olemas algfunktsioon F(x) piirkonnas $X = \{[a,c), (c,b]\}$, siis päratu integraal (3) arvutatakse valemiga

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^{c-} + F(x)\Big|_{c+}^{b} . \qquad (7)$$

Kui funktsioon F(x) on pidev lõigus [a,b], siis arvutusvalemid (5), (6) ja (7) taanduvad kujule

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b . \qquad (8)$$

Viimane valem (8) laiendab Newton - Leibnizi valemi tõkestamata funktsiooni integraalile.

Päratute integraalide (1), (2) ja (3) korral kehtivad aditiivsuse, lineaarsuse ja monotoonsuse omadused. Päratute integraalide arvutamisel algfunktsiooni $F(x)$ leidmiseks kasutatakse ka ositi integreerimist ja muutuja vahetust.

Näide 1. Arvutada päratu integraal

$$\int_0^1 \ln x \, dx.$$

Lahendus. Integraalialune funktsioon on pidev piirkonnas $(0,1]$ ja on tõkestamata punkti $a = 0$ ümbruses. Seega vaadeldav funktsioon on integreeruv igas osalõigus $[c,1] \subset [0,1]$. Et funktsioonil $f(x) = \ln x$ on olemas ka algfunktsioon $F(x) = x \ln x - x$ piirkonnas $(0,1]$, siis võime kasutada arvutusvalemit (6). Seega

$$\int_0^1 \ln x \, dx = (x \ln x - x)\Big|_{0+}^{1} = -1 - \lim_{x \to 0+} x \ln x = -1.$$

Näide 2. Arvutada integraal

$$\int_{1/e}^{e} \frac{dx}{x \sqrt[3]{\ln x}} .$$

Lahendus. Tegemist on päratu integraaliga funktsioonist $f(x)$, mis on tõkestamata integreerimislõigu $[1/e,e]$ sisemises punktis $1 = 1$. Ülejäänud punktides, s.o. piirkonnas $X = \{[1/e,1),(1,e]\}$, on $f(x)$ pidev. Valemi (7) põhjal saame

$$\int_{1/e}^{e} \frac{dx}{x \sqrt[3]{\ln x}} = \int_{1/e}^{e} \frac{d \ln x}{\sqrt[3]{\ln x}} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{\ln^2 x}\,\Big|_{1/e}^{1-} + \frac{3}{2} \sqrt[3]{\ln^2 x}\,\Big|_{1+}^{e} =$$

$$= \frac{3}{2} (0 - 1) + \frac{3}{2} (1 - 0) = 0.$$

Et vaadeldaval juhul on algfunktsioon

$$F(x) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\ln^2 x}$$

pidev integreerimislõigus $[1/e, e]$, siis võime valemi (7) asemel kasutada valemit (8), mis otsekohe annab

$$\int_{1/e}^{e} \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\ln^2 x}\,\Bigg|_{1/e}^{e} = \frac{3}{2}(1 - 1) = 0.$$

<u>Näide 3.</u> Arvutada integraal

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2}\exp\left(-\frac{1}{x}\right) dx.$$

<u>Lahendus.</u> Tegemist on päratu integraaliga funktsioonist $f(x)$, mis on pidev piirkonnas $(0,1]$ ja on tõkestamata ülemise raja $b = 0$ ümbruses. Valemi (6) põhjal saame

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2}\exp\left(-\frac{1}{x}\right) dx = \int_{-1}^{0} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) d\left(-\frac{1}{x}\right) = \exp\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{-1}^{0-} =$$

$$= \lim_{x\to 0-} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) - e = \infty.$$

<u>Näide 4.</u> Arvutada integraal

$$J = \int_{0}^{2} f(x)dx,$$

kus

$$f(x) = \begin{cases} 1/\sqrt{1 - x^2}, & \text{kui } x \in [0,1), \\ \pi/2, & \text{kui } x \in [1,2]. \end{cases}$$

<u>Lahendus.</u> Funktsioon $f(x)$ on pidev piirkondades $[0,1)$ ja $[1,2]$, on tõkestamata punkti $l = 1$ ümbruses, kuigi selles punktis $l = 1$ on tal lõplik väärtus. Et funktsiooni $f(x)$ algfunktsioon

$$F(x) = \begin{cases} \arcsin x, & \text{kui} \quad x \in [0,1), \\ \pi x/2, & \text{kui} \quad x \in [1,2] \end{cases}$$

on pidev integreerimislõigus [0,2], siis võime kasutada valemit (8). Saame

$$J = F(x) \Big|_0^2 = \pi - \arcsin 0 = \pi .$$

<u>Ülesanded.</u>

Arvutada järgmised integraalid või veenduda nende hajuvuses.

727. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

728. $\int_{-1}^2 \frac{dx}{x}$

729. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$

730. $\int_0^3 \frac{dx}{(1-x)^2}$

731. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

732. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

733. $\int_0^{1/2} \frac{dx}{x \ln x}$

734. $\int_0^1 \frac{dx}{x \ln x}$

735. $\int_0^{1/2} \frac{dx}{x \ln^2 x}$

736. $\int_0^{\pi/2} \cot x \, dx$

737. $\int_0^1 \frac{\operatorname{arccot} x}{1 + x^2} dx$

Arvutada päratud integraalid järgmistest funktsioonidest, võttes integreerimislõiguks funktsiooni määramispiirkonna.

738. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}, & \text{kui} \quad x \in [0,1), \\ \pi^2/8, & \text{kui} \quad x \in [1,3]. \end{cases}$

739. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1 + x^2)\sqrt[3]{\arctan^2 x}}, & \text{kui} \quad x \in [-1,0), \\ \dfrac{1}{\arctan 8}, & \text{kui} \quad x = 0. \end{cases}$

740. $f(x) = \begin{cases} \tan x, & \text{kui} \quad x \in [0, \pi/2), \\ \tan 1, & \text{kui} \quad x \in [\pi/2, \pi]. \end{cases}$

741. $f(x) = \begin{cases} 1 + x, & \text{kui } x \in [-2, -1], \\ \ln(1 + x), & \text{kui } x \in (-1,0], \\ 2(1 - x) + 1/\sqrt{x}, & \text{kui } x \in (0,1]. \end{cases}$

§ 2. Tõkestamata funktsioonide integraalide koonduvustunnused.

Sageli on vaja ainult kindlaks teha, kas päratu integraal koondub või hajub, kusjuures päratut integraali ennast ei ole tarvis arvutada. Selleks kasutatakse päratute integraalide võrdluslauseid ja koonduvustunnuseid.

Olgu funktsioonid $f(x)$ ja $g(x)$ integreeruvad igas osalõigus $[a,c] \subset [a,b]$, kus $a < b$, ning tõkestamata punkti b ümbruses.

Esimene võrdluslause. Kui raja b ümbruses kehtib võrratus

$$0 \leq f(x) \leq g(x),$$

siis integraali

$$\int_a^b g(x)\,dx \qquad (G)$$

koonduvusest järeldub integraali

$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad (F)$$

koonduvus; teiselt poolt, integraali (F) hajuvusest järeldub integraali (G) hajuvus.

Teine võrdluslause. Kui raja b ümbruses on

$$f(x) \geq 0 \quad \text{ja} \quad g(x) > 0$$

ning on olemas lõplik piirväärtus

$$\lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = M > 0,$$

siis integraalid (F) ja (G) üheaegselt koonduvad või hajuvad.

Analoogilised võrdluslaused kehtivad ka alumise raja a jaoks.

Kui päratu integraal funktsioonist $|f(x)|$ koondub, siis ka päratu integraal funktsioonist $f(x)$ koondub.

Kui päratu integraal funktsioonist $|f(x)|$ koondub, siis öeldakse, et päratu integraal funktsioonist $f(x)$ koondub absoluutselt. Koonduvat integraali, mis ei koondu absoluutselt, nimetatakse tingimisi koonduvaks.

Kui $f(x) \geq 0$, siis kirjutised

$$\int_a^b f(x)\,dx < \infty \quad \text{ja} \quad \int_a^b f(x)\,dx = \infty$$

tähendavad vastavalt, et päratu integraal koondub ja hajub.

15

Näiteks päratu integraal

$$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$$

koondub (vt. näide 2) ning integraalialune funktsioon on lõigus $(1,e]$ positiivne, siis võime kirjutada

$$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}} < \infty .$$

Praktikas teise võrdluslause rakendamisel on küllalt näidata ekvivalentsust

$$f(x) \sim Mg(x)$$

vaadeldavas piirprotsessis.

Sageli on integraali koonduvuse või hajuvuse üle kerge otsustada järgmise koonduvustunnuse abil.

Koonduvustunnus. Olgu $f(x) \geq 0$ ja tõkestamata punkti $l \in [a,b]$ ümbruses. Kui leiduvad arvud k ja M, et protsessis $x \to l$

$$f(x) \sim \frac{M}{|x - l|^k},$$

siis integraal

$$\int_a^b f(x)dx$$

koondub, kui $k < 1$, ja hajub, kui $k \geq 1$.

Näide 5. Näidata integraali

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

koonduvust.

Lahendus. Integraalialune funktsioon on pidev igas osalõigus $[0,c] \subset [0,1]$ ja on tõkestamata punkti $b = 1$ ümbruses. Et kehtib võrratus

$$0 \leqslant \frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ja

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} < \infty,$$

siis esimese võrdluslause põhjal

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx < \infty .$$

Näide 6. Näidata integraali

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}}$$

koonduvust.

Lahendus. Integraalialune funktsioon on tõkestamata punkti $b = 1$ ümbruses. Piirprotsessis $x \to 1-$ aga on

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1-x^4}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(1+x^2)(1+x)(1-x)}} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\ \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}.$$

Seega koonduvustunnuse põhjal

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}} < \infty,$$

sest $k = 1/3 < 1$.

Näide 7. Otsustada, kas integraal

$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}+\frac{\sqrt[5]{\arctan^2 x}}{\sqrt{|x|}}\right)dx$$

koondub või hajub.

Lahendus. Siin integreeritav funktsioon on tõkestamata punkti 1 = 0 ümbruses. Kuna protsessis $x \to 0$ on

$$0 \le \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}+\frac{\sqrt[5]{\arctan^2 x}}{\sqrt{x}} = \frac{2+o(1)}{x^{2/3}}+\frac{x^{2/5}+o(x^{2/5})}{|x|^{1/2}} =$$

$$= \frac{2+o(1)}{x^{2/3}}+\frac{1+o(1)}{|x|^{1/10}} \sim \frac{2}{x^{2/3}},$$

siis koonduvustunnuse põhjal päratu integraal koondub, sest $k = 2/3 < 1$.

Näide 8. Näidata, et integraal

$$\int_{-1}^{1}\frac{\arctan(5x+2)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

absoluutselt koondub.

Lahendus. Integraalialune funktsioon on pidev vahemikus (-1,1) ja tõkestamata rajades a = -1 ja b = 1. Et kehtib võrratus

$$0 \le \frac{|\arctan(5x+2)|}{\sqrt{1-x^2}} < \frac{\pi}{2}\;\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ja

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx < \infty,$$

siis esimese võrdluslause põhjal

$$\int_{-1}^{1}\frac{|\arctan(5x+2)|}{\sqrt{1-x^2}}\,dx < \infty,$$

mis ütleb, et vaadeldav integraal koondub absoluutselt.

Ülesanded.

Näidata järgmiste integraalide koonduvust, absoluutselt koonduvust või hajuvust.

742. $\int_0^2 \frac{dx}{x^2 - 4x + 3}$

743. $\int_1^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{x - 1}}$

744. $\int_0^1 x \ln x \, dx$

745. $\int_2^3 \frac{x\,dx}{\sqrt{(x - 2)(3 - x)}}$

746. $\int_3^4 \frac{dx}{\sqrt{(x - 3)(4 - x)}}$

747. $\int_0^1 \frac{dx}{1 - x^2 + 2\sqrt{1 - x^2}}$

748. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(3 - x)\sqrt{1 - x^2}}$

749. $\int_{-1}^1 \frac{x + 1}{\sqrt[5]{x^3}}$

750. $\int_{-1}^1 \frac{\ln(2 + \sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

751. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{1 - x^4}}$

752. $\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{(1 - x^2)^5}}$

753. $\int_0^3 \frac{\arctan x}{\sqrt{x + x^3}}\,dx$

754. $\int_0^\pi \frac{\operatorname{arccot} x}{\sqrt{\pi - x}}\,dx$

755. $\int_0^1 \frac{dx}{x^3 - 5x^2}$

§ 3. Lõpmatute rajadega integraalid

Kui funktsioon $f(x)$ on integreeruv igas lõigus $[a,c]$, kus $c > a$, ja eksisteerib lõplik piirväärtus

$$\lim_{c \to \infty} \int_a^c f(x)\,dx,$$

siis seda piirväärtust nimetatakse funktsiooni f(x) **päratuks integraaliks rajast a rajani ∞** ning kirjutatakse

$$\int_a^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{c \to \infty} \int_a^{c} f(x)\, dx. \qquad (9)$$

Kui funktsioon f(x) on integreeruv igas lõigus $[c,b]$, kus $c < b$ ja eksisteerib lõplik piirväärtus

$$\lim_{c \to -\infty} \int_c^{b} f(x)\, dx,$$

siis seda piirväärtust nimetatakse funktsiooni f(x) **päratuks integraaliks rajast $-\infty$ rajani b** ning kirjutatakse

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx = \lim_{c \to -\infty} \int_c^{b} f(x)\, dx. \qquad (10)$$

Integraale (9) ja (10) nimetatakse ka **lõpmatute rajadega integraalideks.**

Mõlema lõpmatu rajaga päratu integraal defineeritakse järgmise võrdusega

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{l} f(x)\, dx + \int_{l}^{\infty} f(x)\, dx, \qquad (11)$$

kus l on suvaline arv.

Kui piirväärtus võrduse (9) paremal poolel eksisteerib ja on lõplik, siis öeldakse, et päratu integraal (9) koondub, muudel juhtudel öeldakse, et ta hajub. Samasugused mõisted defineeritakse ka integraali (10) kohta.

Kui funktsioonil f(x) on olemas algfunktsioon F(x) igas lõplikus lõigus $[a,c]$ ja eksisteerib lõplik piirväärtus

$$F(\infty) = \lim_{x \to \infty} F(x), \tag{12}$$

siis päratu integraali (9) arvutamiseks kehtib valem

$$\int_a^{\infty} f(x)\, dx = F(x) \Big|_a^{\infty} . \tag{13}$$

Kui funktsioonil f(x) on olemas algfunktsioon F(x) igas lõplikus lõigus $[c,b]$, ja eksisteerib lõplik piirväärtus

$$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x), \tag{14}$$

siis päratu integraali (10) arvutamiseks kehtib valem

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx = F(x) \Big|_{-\infty}^{b} . \tag{15}$$

Kui funktsioonil f(x) on olemas algfunktsioon F(x) igas lõplikus lõigus, ja eksisteerivad lõplikud piirväärtused (12) ja (14), siis päratu integraali (11) arvutamiseks kehtib valem

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = F(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} . \tag{16}$$

Valemid (13), (15) ja (16) üldistavad Newton - Leibnizi valemi lõpmatute rajadega integraalidele.

Päratute integraalide (9), (10) ja (11) korral kehtivad aditiivsuse, lineaarsuse ja monotoonsuse omadused. Päratute integraalide arvutamisel algfunktsiooni F(x) leidmiseks kasutatakse ka ositi integreerimist ja muutuja vahetust.

<u>Näide 9</u>. Arvutada päratu integraal

$$\int_1^\infty \frac{x^3+1}{x^5}\,dx .$$

<u>Lahendus</u>. Integreeritav funktsioon on pidev ja seega integreeruv igas lõigus $[1, c]$, kus $c > 1$. Seega valemi (13) põhjal

$$\int_1^\infty \frac{x^3+1}{x^5}\,dx = \int_1^\infty \left(\frac{1}{x^2} + x^{-5}\right) dx = \left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{4x^4}\right)\Bigg|_1^\infty =$$

$$= 0 - \left(-\frac{5}{4}\right) = \frac{5}{4}.$$

<u>Näide 10</u>. Arvutada päratu integraal

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+(2x-3)^2} .$$

<u>Lahendus</u>. Integreeritav funktsioon on pidev kõikjal vahemikus $(-\infty, \infty)$ ja seega integreeruv igas lõplikus lõigus. Seega

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+(2x-3)^2} = \frac{1}{2}\arctan(2x-3)\Bigg|_{-\infty}^\infty = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{\pi}{2}.$$

<u>Näide 11</u>. Arvutada päratu integraal

$$\int_1^\infty \left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1+x^2)\operatorname{arccot}^2 x}\right] dx$$

<u>Lahendus</u>. Lineaarsuse omaduse rakendamiseks uurime osade

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}, \qquad \int_1^\infty \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arccot}^2 x}$$

koonduvust.

Esimene integraal koondub, sest

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_1^{\infty} = 1.$$

Valemi (13) põhjal

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)\operatorname{arccot}^2 x} = -\int_1^{\infty} \frac{d \operatorname{arccot} x}{\operatorname{arccot}^2 x} =$$

$$= \frac{1}{\operatorname{arccot} x}\Big|_1^{\infty} = \infty ,$$

sest $\operatorname{arccot} 1 = \frac{\pi}{4}$ ja $\lim\limits_{x \to \infty} \operatorname{arccot} x = 0.$

Seega teine integraal hajub. Järelikult näites antud integraal hajub.

<u>Näide 12</u>. Arvutada päratu integraal

$$J = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(1 + x^2)\operatorname{arccot}^2 x}\right) dx.$$

<u>Lahendus</u>. Arvestades näite 11 lahendust, näeme, et

$$\int_0^{\infty} dx = \infty \quad \text{ja} \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)\operatorname{arccot}^2 x} = \infty .$$

Siin me ei saa kasutada lineaarsuse omadust ja järeldada siit, et näiteks antud integraal hajub. Integraali arvutamiseks leiame algfunktsiooni

$$F(x) = x - \frac{1}{\operatorname{arccot} x}$$

piirväärtuse, kui $x \to \infty$. Teostades muutuja vahetuse $x = 1/u$, saame

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{u\to 0+} \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{\operatorname{arccot}(1/u)}\right) =$$

$$= \lim_{u\to 0+} \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{\arctan u}\right) =$$

$$= \lim_{u\to 0+} \frac{\arctan u - u}{u \arctan u} =$$

$$= \lim_{u\to 0+} \frac{u - \frac{u^3}{3} + o(u^3) - u}{u^2} =$$

$$= \lim_{u\to 0+} \left[- \frac{u}{3} + o(u)\right] = 0,$$

sest protsessis $u \to 0$ on $\arctan u \sim u$ ja Taylori valemi põhjal punkti $u = 0$ ümbruses on $\arctan u = u - \frac{u^3}{3} + o(u^3)$. Seega valemi (13) põhjal

$$J = F(x) \Big|_0^{\infty} = 0 - (0 - \frac{2}{\pi}) = \frac{2}{\pi}.$$

<u>Ülesanded.</u>

Arvutada järgmised integraalid või veenduda nende hajuvuses.

756. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x}$.

757. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^{[illegible]}}$

758. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^{[illegible]}}$

759. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2}$

760. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9}$

761. $\int\limits_1^{\infty} \frac{x^3 + 1}{x^4}\, dx$

762. $\int\limits_0^{\infty} x e^{-x^2} dx$

763. $\int\limits_0^{\infty} e^{-\alpha x} dx, \quad \alpha > 0$

764. $\int_{2}^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$

765. $\int_{e}^{\infty} \frac{dx}{x \ln^{3/2} x}$

766. $\int_{0}^{\infty} \frac{x\,dx}{x^2 + 1}$

767. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{x^2 + 1}$

768. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$

769. $\int_{2}^{\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx$

770. $\int_{c}^{\infty} x \sin x\,dx$

771. $\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha x} \cos \beta x\,dx, \quad \alpha > 0$

772. $\int_{0}^{\infty} e^{-\sqrt{x}}\,dx$

773. $\int_{0}^{\infty} \sin x\,dx$

774. $\int_{0}^{\infty} \frac{\arctan x}{1 + x^2}\,dx$

§4. Lõpmatute rajadega integraalide koonduvustunnused.

Analoogiliselt tõkestamata funktsiooni integraaliga kehtivad järgmised päratute integraalide võrdluslaused ja nendest järelduvad koonduvustunnused.

Olgu funktsioonid $f(x)$ ja $g(x)$ integreeruvad igas lõigus $[a,c]$, kus $c > a$.

Esimene võrdluslause. Kui raja ∞ ümbruses (vahemikus (c,∞), alates teatavast $c > a$) kehtib võrratus

$$0 \leq f(x) \leq g(x),$$

siis integraali

$$\int_a^{\infty} g(x)\,dx \tag{G}$$

koonduvusest järeldub integraali

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx \tag{F}$$

koonduvus; teiselt poolt, integraali (F) hajuvusest järeldub integraali (G) hajuvus.

<u>Teine võrdluslause</u>. Kui raja ∞ ümbruses on

$$f(x) \geq 0 \quad \text{ja} \quad g(x) > 0$$

ning eksisteerib lõplik piirväärtus

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = M > 0,$$

siis integraalid (F) ja (G) üheaegselt koonduvad või hajuvad.

Analoogilised võrdluslaused kehtivad ka integraalide

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx \tag{10}$$

jaoks.

Kui päratu integraal funktsioonist $|f(x)|$ koondub, siis ka päratu integraal funktsioonist $f(x)$ koondub.

Analoogiliselt tõkestamata funktsiooni integraaliga kasutatakse <u>absoluutse</u> ja <u>tingimisi koonduvuse</u> mõisteid ning sümboleid $< \infty$ ja $= \infty$ mittenegatiivse funktsiooni päratu integraali vastavalt koonduvuse ja hajuvuse tähistamiseks.

Praktikas teise võrdluslause rakendamisel on küllalt näidata ekvivalentsust

$$f(x) \sim Mg(x)$$

vaadeldavas piirprotsessis.

Sageli on päratu integraali koonduvuse või hajuvuse üle kerge otsustada järgmise <u>koonduvustunnuse</u> abil.

<u>Koonduvustunnus</u>. Olgu $f(x) \geq 0$ ülemise raja ∞ ümbruses. Kui leiduvad arvud k ja M, et protsessis $x \to \infty$

$$f(x) \sim \frac{M}{x^k},$$

siis integraal (9) koondub, kui $k > 1$, ja hajub, kui $k \leq 1$.

Analoogiline tunnus kehtib ka integraali (10) jaoks.

<u>Näide 13</u>. Otsustada, kas integraal

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} e^{-x} dx$$

koondub või hajub.

<u>Lahendus.</u> Et vahemikus $[1, \infty)$ on integraalialune funktsioon pidev ja kehtib võrratus

$$0 \leq \frac{1}{x} e^{-x} \leq e^{-x}$$

ja

$$\int_1^{\infty} e^{-x} dx = - e^{-x} \Big|_1^{\infty} = \frac{1}{e},$$

siis esimese võrdluslause põhjal

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} e^{-x} dx < \infty .$$

<u>Näide 14</u>. Otsustada integraali

$$\int_1^{\infty} e^{-x} \sin 3x \, dx$$

koonduvuse üle.

Lahendus. Et vahemikus $[1, \infty)$ on integraalialune funktsioon pidev ja kehtib võrratus

$$|e^{-x} \sin 3x| \leqslant e^{-x},$$

siis esimese võrdluslause põhjal näites vaadeldav integraal koondub absoluutselt.

Näide 15. Otsustada, kas integraal

$$\int_0^\infty \frac{x \arctan x}{x^3 + 2x + 3} dx$$

koondub või hajub.

Lahendus. Siin integraalialune funktsioon on vahemikus $[0, \infty)$ mittenegatiivne ja pidev. Kuna protsessis $x \to \infty$ on

$$\frac{x \arctan x}{x^3 + 2x + 3} = \frac{x[\pi/2 + o(1)]}{x^3[1 + o(1)]} \sim \frac{\pi}{2} \frac{1}{x^2},$$

siis koonduvustunnuse põhjal päratu integraal koondub, sest $k = 2 > 1$.

Ülesanded.

Näidata järgmiste integraalide koonduvust, absoluutselt koonduvust või hajuvust.

775. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$

776. $\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{(1 + x)^3}$

777. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1 + x^2}}$

778. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + x^3}$

779. $\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}\,dx}{(1 + x)^3}$

780. $\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{x^3 + 1}$

781. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{13}\,dx}{(x^5 + 2x^3 + 4)^2}$

782. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\arctan x}{x^2}\,dx$

783. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x \arctan x}{\sqrt[3]{1 + x^4}}$

784. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2 - 1 + 2\sqrt{x^2 - 1}}$

Otsustada, kas järgmised integraalid koonduvad absoluutselt või tingimisi.

785*. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{x}}$

786*. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x\,dx}{x}$

787. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x^2\,dx}{1 + x^4}$

788. $\displaystyle\int_0^\infty \sin x^2\,dx$

789. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^2}\,dx$

790. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\arctan x^3}{1 + x^3}\,dx$

IV INTEGRAALARVUTUSE RAKENDUSI

§ 1. Tasandilise kujundi pindala arvutamine

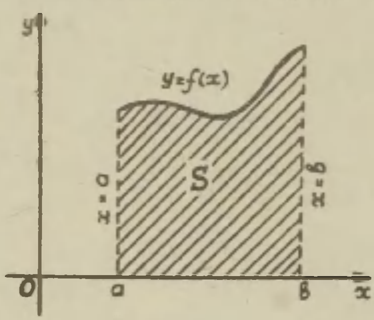
Mõõtuvate tasapinnaliste kujunditepindalade arvutamisel kasutatakse järgmisi pindala omadusi. Olgu kujundite K, K_1 ka K_2 pindalad vastavalt S, S_1 ja S_2.

1° Monotoonsus. Kui $K_1 \subset K_2$, siis $S_1 \leq S_2$.

2° Aditiivsus. Kui kujund K jaotub osadeks K_1 ja K_2, millel pole ühiseid sisepunkte, siis

$$S = S_1 + S_2.$$

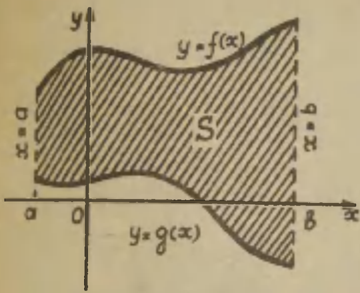
1. Olgu funktsioon $f(x) \geq 0$ pidev lõigus $[a,b]$. Siis kõvertrapets, mis on piiratud (vt. joon. 3) vasakult ja paremalt vastavalt sirgetega $x = a$ ja $x = b$ ning alt x-teljega ja ülalt kõveraga $y = f(x)$, on mõõtuv ja tema pindala S on arvutatav valemiga



Joon.3

$$S = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (1)$$

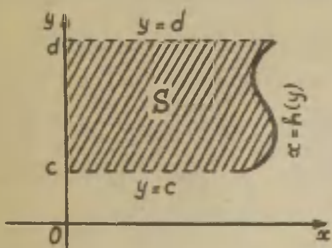
2. Olgu lõigul $[a,b]$ funktsioonid $f(x)$ ja $g(x)$ pidevad ning $g(x) \leq f(x)$. Siis kõvertrapets, mis on piiratud (vt. joon. 4) vasakult ja paremalt vastavalt sirgetega $x = a$ ja $x = b$ ning alt kõveraga $y = g(x)$ ja ülalt kõveraga $y = f(x)$, on mõõtuv ja tema pindala S on arvutatav valemiga



Joon. 4

$$S = \int_a^b \left[f(x) - g(x)\right] dx. \qquad (2)$$

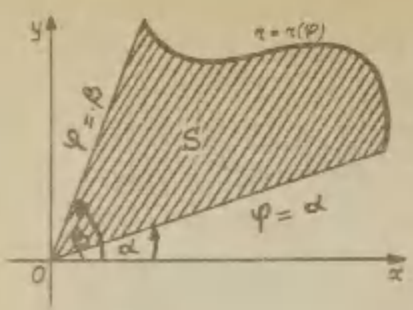
3. Olgu funktsioon $h(y) \geq 0$ pidev lõigus $[c,d]$. Siis kõvertrapets, mis on piiratud (vt. joon. 5) alt ja ülalt vastavalt sirgetega $y = c$ ja $y = d$ ning vasakult y-teljega ja paremalt kõveraga $x = h(y)$, on mõõtuv ja tema pindala S on arvutatav valemiga



Joon. 5

$$S = \int_c^d h(y)\, dy. \qquad (3)$$

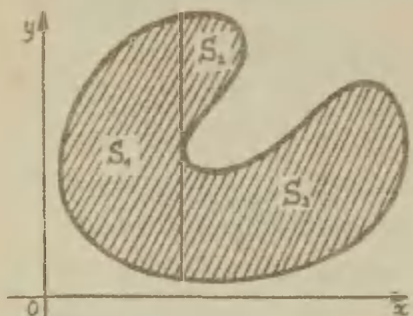
4. Olgu funktsioon $r(\varphi) \geq 0$ pidev lõigus $[\alpha, \beta]$. Siis sektor, mis on piiratud (vt. joon. 6) kiirtega $\varphi = \alpha$ ja $\varphi = \beta$ ning kõveraga $r = r(\varphi)$, on mõõtuv ja tema pindala S on arvutatav valemiga



$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\,d\varphi. \quad (4)$$

Joon. 6

5. Kui tasapinnalist kujundit saab jaotada lõplikuks arvuks kõvertrapetsiteks, siis see kujund on mõõtuv ja

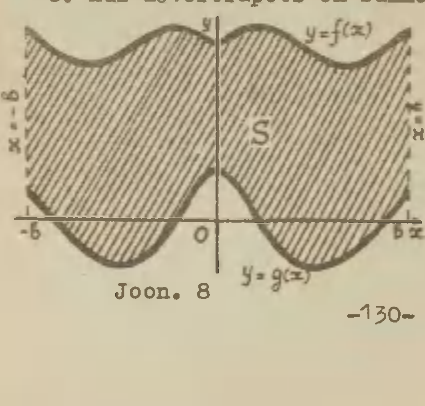


Joon. 7

aditiivsuse omaduse põhjal tema pindala S on võrdne üksikute kõvertrapetsite pindalade summaga. Näiteks joonisel 7 antud kujund on jaotatav kolmeks kõvertrapetsiks, mille pindalad S_1, S_2 ja S_3 on arvutatavad valemiga (2). Seega kujundi pindala

$$S = S_1 + S_2 + S_3.$$

6. Kui kõvertrapets on sümmeetriline y-telje suhtes



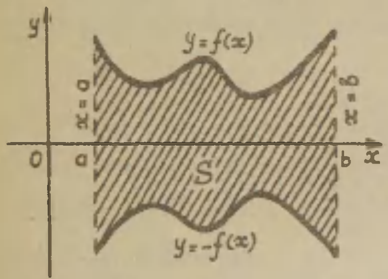
Joon. 8

(vt. joon. 8), s.t. ta on piiratud vasakult ja paremalt vastavalt sirgetega $x = -b$ ja $x = b$ ning ülalt ja alt vastavalt kõveratega $y = f(x)$ ja

$y = g(x)$, kus $f(x)$ ja $g(x)$ pidevad paarisfunktsioonid, siis tema pindala

$$S = 2\int_0^b [f(x) - g(x)]\,dx. \qquad (5)$$

Kui aga kõvertrapets on sümmeetriline x-telje suhtes



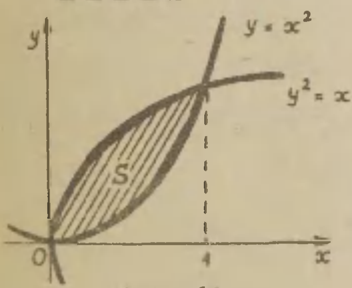
Joon. 9

(vt. joon. 9), s.t. ta on piiratud vasakult ja paremalt vastavalt sirgetega $x = a$ ja $x = b$ ning ülalt ja alt vastavalt kõveratega $y = f(x)$ ja $y = -f(x)$, kus $f(x)$ on pidev, siis tema pindala

$$S = 2\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (6)$$

Näide 1. Leida kujundi pindala, mis on piiratud joontega $y = x^2$ ja $y^2 = x$.

Lahendus. Jooniselt 10 on näha, et vaadeldav kujund on



Joon. 10

kõvertrapets, mis on mõõtuv funktsioonide $y = x^2$ ja $y = \sqrt{x}$ pidevuse tõttu, ja tema pindala S on arvutatav valemiga (2). Integraali ülemise raja määramiseks tuleb leida joonte lõikepunkti P abstsiss, mis osutub võrdseks 1-ga. Antud juhul $f(x) = \sqrt{x}$ ning $g(x) = x^2$. Seega otsitav pindala

$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

<u>Näide 2</u>. Leida joonega

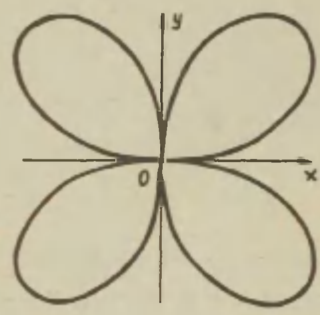
$$(x^2 + y^2)^3 = 27x^2y^2$$

piiratud kujundi pindala.

<u>Lahendus.</u> Minnes üle polaarkoordinaatidele, saame joone võrrandiks

$$r = \frac{3}{2}\sqrt{3} \sin 2\varphi .$$

Seega vaadeldav joon, nn. neljaleheline roos (vt. joon.11), on pidev ja temaga piiratud kujund on seepärast mõõtuv.



Joon. 11

Et kujund on sümmeetriline koordinaattelgede ja koordinaatide alguspunkti suhtes, siis pindala aditiivsuse omaduse tõttu on küllalt arvutada kujundi selle osa pindala, mis asub koordinaatteljestikus esimeses veerandis. Kujundi kogu pindala S on siis neli korda suurem. Seega valemi (4) põhjal

$$S = 4\cdot\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{27}{4} \sin^2 2\varphi \, d\varphi = \frac{27}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1 - \cos 4\varphi)d\varphi =$$

$$= \frac{27}{4}\left[\varphi - \frac{1}{4} \sin 4\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{27}{4}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{27}{8}\pi.$$

Ülesanded.

Leida pindalad, mis on piiratud järgmiste joontega.

791. $y = 2x - x^2, \quad x + y = 0$

792. $y = |\log x|, \quad y = 0, \quad x = 0{,}1, \quad x = 10$

793. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

794. $y^2 = x^2(a^2 - x^2)$

795. $x^2 = 4ay, \quad y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2} \quad (a > 0)$

796. $x^2 + y^2 = 4px, \quad y^2 = 2px$

797. $y = x^2 \ln x, \quad y = 0$

798. $(y - \arcsin x)^2 = x - x^2$

799. $r = a(1 + \cos\varphi)$ (kardioid)

800. $r = a \sin 3\varphi$ (kolmeleheline roos)

801. $r = 2a(2 + \cos\varphi)$

802. $(x^2 + y^2)^2 - a^2x^2 - b^2y^2 = 0$

803. $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ (Bernoulli lemniskaat)

804. $(x^2 + y^2)^5 = 4a^2 xy(x^2 - y^2)$

805. $x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t$

806. $x = 2a \cos t - a \cos 2t, \quad y = 2a \sin t - a \sin 2t$

807. $r = \sqrt{1 - t^2}, \quad \varphi = \arcsin t + \sqrt{1 - t^2}$

Lahendada järgmised ülesanded.

808. Leida selle kujundi pindala, mis on piiratud joonega $x^2y^2 = 4(x - 1)$ ja selle joone käänupunkte läbiva sirgega.

809. Leida selle kujundi pindala, mis on piiratud joonega $y = \sin^3 x + \cos^3 x$ ja x-telje selle lõiguga, mis ühendab selle joone kahte järjestikust lõikepunkti x-teljega.

810. Leida selle kujundi pindala, mis on piiratud tsükloidi

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

ühe kaare ja x-teljega.

Leida kujundite pindalad, mis on piiratud järgmiste joontega ja nende asümptootidega.

811*. $(1 + x^2)y = 1$

812. $y = x \exp(-x^2/2)$

813*. $y = x^2 e^{-x^2}$

814. $xy^2 = 8 - 4x$

815. $y^2 = \dfrac{x^3}{2a - x}$

§ 2. Keha ruumala arvutamine

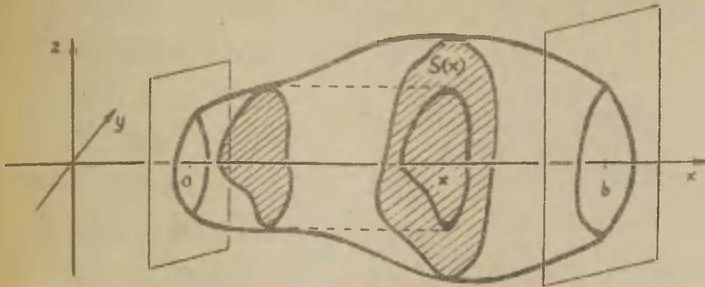
Mõõtuvate kehade ruumalade arvutamisel kasutatakse järgmisi ruumala omadusi. Olgu kehade K, K_1 ja K_2 ruumalad vastavalt V, V_1 ja V_2.

1° Monotoonsus. Kui $K_1 \subset K_2$, siis $V_1 \leq V_2$.

2° Aditiivsus. Kui keha K jaotub osadeks K_1 ja K_2, millel pole ühiseid sisepunkte, siis

$$V = V_1 + V_2$$

1. Olgu keha piiratud tasanditega $x = a$ ja $x = b$ (vt.

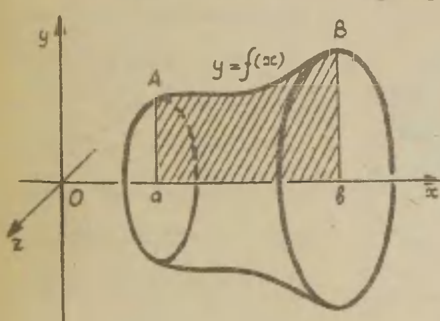


Joon.12

joon. 12). Vaatleme keha lõikeid tasanditega, mis on risti x-teljega. Kohal x võetud lõike pindala tähistame $S(x)$ abil. Eeldame, et iga kahe lõike korral ühe projektsioon teisele asetseb täielikult selle sees (vt. joon. 12). Kui $S(x)$ on pidev funktsioon oma määramispiirkonnas $[a,b]$, siis vaadeldava kujundi ruumala V on arvutatav valemiga

$$V = \int_a^b S(x)dx. \tag{7}$$

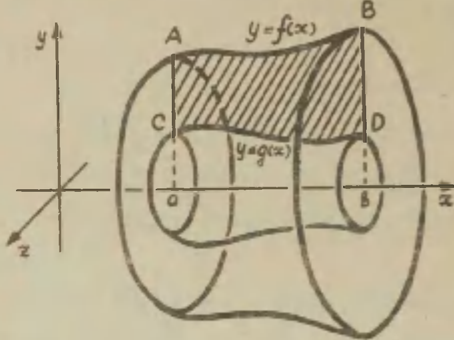
2. Olgu joon AB lõigus $[a,b]$ pideva funktsiooni $f(x)$ graafik. Vaatleme pöördkeha, mis tekib kõvertrapetsi abBA pöörlemisel ümber x-telje (vt. joon. 13). See pöördkeha on mõõtuv ja tema ruumala V on arvutatav valemiga



Joon.13

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx. \tag{8}$$

3. Olgu jooned AB ja CD vastavalt lõigus $[a,b]$ pidevate funktsioonide $f(x)$ ja $g(x)$ graafikud, kus $0 \leqslant g(x) \leqslant f(x)$. Vaatleme pöördkeha mis tekib kõvertrapetsi CDBA pöörlemisel ümber x-telje (vt.joon. 14). See pöördkeha on mõõtuv ja tema ruumala V on arvutatav valemiga

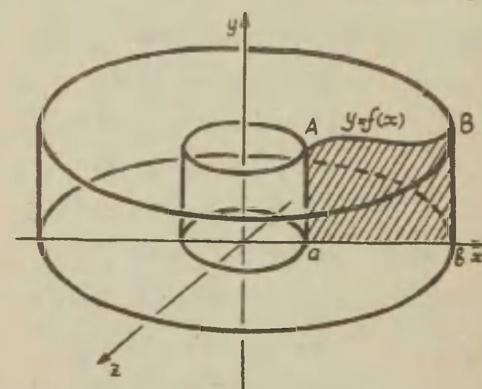


Joon. 14

$$V = \pi \int_a^b \left[f^2(x) - g^2(x)\right] dx. \tag{9}$$

4. Olgu joon. AB lõigus $[a,b]$ pideva funktsiooni $f(x)$ graafik. Vaatleme pöördkeha, mis tekib kõvertrapetsi abBA pöörlemisel ümber y-telje (vt. joon.15). See pöördkeha on mõõtuv ja tema ruumala V on arvutatav valemiga

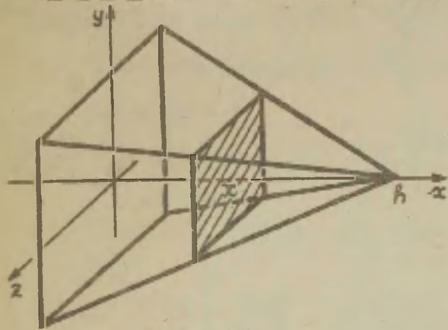
$$V = 2\pi \int_a^b xf(x)dx. \tag{10}$$



Joon.15

<u>Näide 3</u>. Leida püramiidi ruumala V, kui püramiidi põhja pindala on S ja kõrgus h ning püramiidi tipu projektsioon püramiidi põhjale asetseb viimase sees.

<u>Lahendus</u>. Paigutame püramiidi nii, et tema põhi asetseks yz-tasandil ja tipp oleks x-telje positiivsel poolel (vt. joon. 16). Vaatleme püramiidi lõikeid, mis on risti põhjaga. Kohal x võetud lõike pindala tähistame S(x) abil. Vaadeldaval juhul iga kahe lõike korral ühe projektsioon teisele asetseb täielikult selle sees.



Joon. 16

Nagu teada geomeetriast, võrdub püramiidi kahe ristlõike pindala suhe nende kauguste (püramiidi tipust) suhte ruuduga. Seega

$$\frac{S(x)}{S} = \left(\frac{h - x}{h}\right)^2,$$

kust

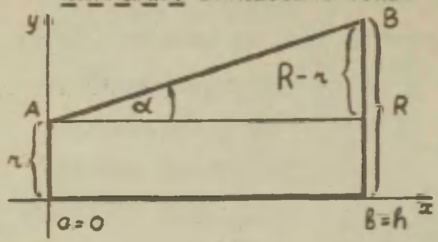
$$S(x) = \frac{S}{h^2}(x - h)^2.$$

Et S(x) on lõigus $[0,h]$ pidev funktsioon, siis valemi (7) põhjal saame

$$V = \frac{S}{h^2}\int_0^h (x - h)^2dx = \frac{S}{3h^2}(x - h)^3\Big|_0^h = \frac{1}{3}Sh.$$

Näide 4. Leida tüvikoonuse ruumala V, kui tüvikoonuse põhjade raadiused on R ja r ning kõrgus on h.

Lahendus. Tüvikoonus tekib harilikú trapetsi abBA pöörlemisel ümber x-telje (vt. joon. 17). Leiame sirge AB võrrandi



Joon. 17

$$y = mx + c.$$

Saame $m = \tan\alpha = \frac{R - r}{h}$,

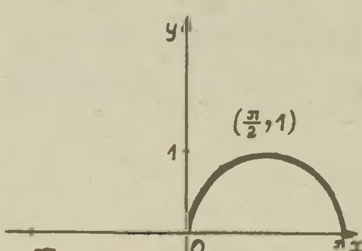
$$c = r.$$

Seega valemi (8) põhjal

$$V = \pi \int_0^h \left(\frac{R - r}{h}x + r\right)^2 dx = \frac{\pi h}{3(R - r)}\left(\frac{R - r}{h}x + r\right)^3 \Bigg|_0^h =$$

$$= \frac{\pi h}{3(R - r)}(R^3 - r^3) = \frac{\pi}{3}(R^2 + Rr + r^2).$$

Näide 5. Leida keha ruumala, mis tekib kõveraga $y = \sin x$, kus $X = [0,\pi]$, ja sirgega $y = 0$ piiratud kujundi pöörlemisel ümber y-telje.



Joon. 18

Lahendus. Et kõver $y = \sin x$ on pidev, siis tekkiv kujund on mõõtuv.

Kasutades valemit (10), saame

$$V = 2\pi \int_0^{\pi} x \sin x \, dx = 2\pi(\sin x - x\cos x) \Big|_0^{\pi} =$$

$$= 2\pi(\pi - 0) = 2\pi^2.$$

Ülesande lahendamiseks võib kasutada ka valemit (9), lugedes integreerimismuutujaks y, kuid lahenduskäik on pikem. Tuleb lahendada $y = \sin x$ muutuja x suhtes, arvestades, et $y \in [0,1]$. Saame lahenditeks (vt. joon. 18)

$$x = g(y) = \arcsin y, \text{ kui } x \in [0, \tfrac{\pi}{2}],$$

$$x = f(y) = \pi - \arcsin y, \text{ kui } x \in [\tfrac{\pi}{2}, \pi].$$

Valemi (9) põhjal

$$V = \pi \int_0^1 \left[f^2(y) - g^2(y)\right] dy =$$

$$= \pi \int_0^1 \left[(\pi - \arcsin y)^2 - \arcsin^2 y\right] dy =$$

$$= \pi^2 \int_0^1 (\pi - 2\arcsin y)dy =$$

$$= \pi^3 - 2\pi^2 (y \arcsin y + \sqrt{1-y^2}) \Big|_0^1 =$$

$$= \pi^3 - 2\pi^2(\tfrac{\pi}{2} - 1) = 2\pi^2.$$

Ülesanded.

Leida nende kehade ruumalad, mis on piiratud järgmiste pindadega.

816. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = \frac{c}{a}x, \quad z = 0$

817. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

818. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad z = c, \quad z = -c$

819. $x^2 + y^2 = a^2, \quad y^2 + z^2 = a^2$

820. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad x^2 + y^2 = ax$

821. $z^2 = b(a - x), \quad x^2 + y^2 = ax$

Laida nende kehade ruumalad, mis tekivad järgmiste joontega piiratud kujundite pöörlemisel ümber x-telje.

822. $y = \sin x \quad (0 \leq x \leq \pi), \quad y = 0$

823. $xy = 4, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 4$

824. $x^2 - xy + y^2 = a^2$

825. $y = b\left(\frac{x}{a}\right)^2, \quad y = b\left|\frac{x}{a}\right|$

826. $y = x^2, \quad y^2 = x$

827. $(x - 4)y^2 = x(x - 3), \quad y = 0$

828. $y = \arcsin x, \; y = 0, \quad x = 1$

829*. $y = e^{-x} \quad (0 \leq x \leq \infty), \quad y = 0$

830. Leida kera ruumala, kui kera raadius on r.

831. Leida kera segmendi ruumala, kui kera raadius on r ja segmendi kõrgus on h.

832. Leida kera sektori ruumala, kui kera raadius on r ja sektorit moodustava koonuse kõrgus on h.

Leida nende kehade ruumalad, mis tekivad järgmiste joontega piiratud kujundite pöörlemisel ümber y-telje.

833. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad y = 0, \quad y = b$

834. $y^2 + x - 4 = 0, \quad x = 0$

835. $y^2 = (x+4)^3, \quad x = 0$

836. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}, \quad x = 0, \quad y = 0$

837. $x = a \sin^3 t, \quad y = b \cos^3 t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$

838. $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi), \quad y = 0$

839*. On antud kujund, mis polaarkoordinaatidea on määratud seostega

$$0 \leq \alpha \leq \varphi \leq \beta \leq \pi$$

$$0 \leq r \leq r(\varphi).$$

Tõestada, et selle kujundi pöörlemisel ümber polaartelje tekkinud keha ruumala on

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} r^3(\varphi) \sin \varphi \, d\varphi .$$

840. Leida selle keha ruumala, mis tekib kujundi $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq a(1 + \cos \varphi)$ pöörlemisel ümber

a) polaartelje,

b) sirge $r \cos \varphi = -\frac{a}{4}$.

841*. Leida joonega $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ piiratud kujundi pöörlemisel ümber

a) x-telje, b) y-telje, c) sirge $x = y$

tekkinud keha ruumala.

§ 3. Joone kaare pikkus

Sirgestuva tasapinnalise joone kaare pikkuse arvutamisel kasutatakse järgmisi kaare pikkuse omadusi. Olgu joone kaarte AB, A_1B_1 ja A_2B_2 pikkused vastavalt s, s_1 ja s_2.

1°. <u>Monotoonsus</u>. Kui kaar A_1B_1 on kaare A_2B_2 osa, siis

$$s_1 \leq s_2.$$

2° <u>Aditiivsus</u>. Kui kaar AB jaotub kaheks kaareks A_1B_1 ja A_2B_2, siis

$$s = s_1 + s_2.$$

1. Olgu funktsioonil $y(x)$ olemas pidev tuletis $y' = y'(x)$ lõigus $[a,b]$. Siis joon

$$y = y(x), \text{ kus } a \leq x \leq b,$$

on sirgestuv ja tema pikkus s on arvutatav valemiga

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx. \tag{11}$$

2. Olgu funktsioonidel $x(t)$ ja $y(t)$ pidevad tuletised $\dot{x} = \dot{x}(t)$ ja $\dot{y} = \dot{y}(t)$ lõigus $[\alpha,\beta]$. Siis joon

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \text{ kus } \alpha \leq t \leq \beta,$$

on sirgestuv ja tema pikkus s on arvutatav valemiga

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt. \tag{12}$$

3. Olgu funktsioonil $r(\varphi)$ olemas pidev tuletis $\dot{r} = \dot{r}(\varphi)$ lõigus $[\alpha,\beta]$. Siis joon, mille võrrand polaarkoordinaatides on

$$r = r(\varphi), \text{ kus } \alpha \leq \varphi \leq \beta,$$

on sirgestuv ja tema pikkus s on arvutatav valemiga

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \dot{r}^2}\, d\varphi. \tag{13}$$

<u>Näide 6</u>. Leida joone (nn. poolkuupparabooli)

$$y^2 = \frac{2}{3}(x - 1)^3$$

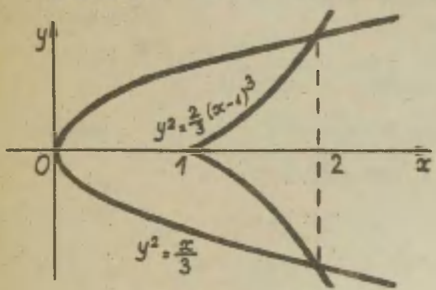
selle osa pikkus, mis asub parabooli $y^2 = \frac{x}{3}$ sees.

<u>Lahendus.</u> Diferentseerides joone võrrandi mõlemat poolt x järgi, saame

$$2yy' = 2(x - 1)^2,$$

kust

$$y' = \frac{(x - 1)^2}{y}.$$



Joon. 19

Joone ja parabooli lõikepunktide (vt. joon. 19) leidmiseks saame võrrandi

$$\frac{2}{3}(x - 1)^3 = \frac{x}{3},$$

kust x = 2.

Arvutades y'^2, saame

$$y'^2 = \frac{(x - 1)^4}{y^2} = \frac{3(x - 1)^4}{2(x - 1)^3} = \frac{3}{2}(x - 1),$$

kust näeme, et tuletis y' on pidev lõigus [1,2]. Seega on vaadeldav joon sirgestuv. Valemi (11) põhjal, kasutades kaare pikkuse aditiivsust, saame

$$s = 2\int_1^2 \sqrt{1 + \frac{3}{2}(x - 1)}\, dx = \frac{8}{9}\left(\frac{5}{2}\sqrt{\frac{5}{2}} - 1\right).$$

Näide 7. Leida kardioidi

$$(x^2 + y^2)^2 - 2ax(x^2 + y^2) = a^2y^2$$

pikkus s.

Lahendus. Valemi (13) rakendamiseks avaldame kardioidi võrrandi polaarkoordinaatides. Seoste $r = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ tõttu

$$r^4 - 2ar^3\cos\varphi = a^2r^2\sin^2\varphi$$

ehk

$$r^2 - 2ar\cos\varphi = a^2\sin^2\varphi.$$

Liites nüüd võrrandi mõlemale poolele $a^2\cos^2\varphi$, saame

$$(r - a\cos\varphi)^2 = a^2,$$

kust

$$r = a(1 + \cos\varphi).$$

Et tuletis

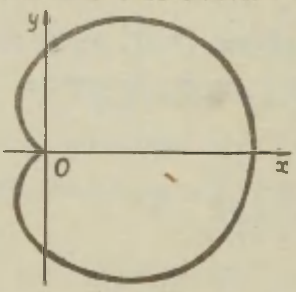
$$\dot{r} = -a\sin\varphi$$

on pidev lõigus $[0,2\pi]$, siis kardioid on sirgestuv. Arvutame

$$\sqrt{r^2 + \dot{r}^2} = a\sqrt{(1 + \cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi} = a\sqrt{2 + 2\cos\varphi} =$$

$$= 2a\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|.$$

Kardioidi võrranditest näeme, et kardioid on sümmeetriline x-telje suhtes (vt. joon. 20). Seega, kasutades kaare pikkuse aditiivsust, saame valemi (13) põhjal



Joon.20

$$s = 2\int_0^{\pi} 2a\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|d\varphi =$$

$$= 4a \int_0^{\pi} \cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 8a \sin\frac{\varphi}{2} \Big|_0^{\pi} = 8a.$$

842*. Leida ringjoone pikkus, mille raadius on r.

843. Leida joone $9y^2 = 4(3 - x)^3$ kaare pikkus selle joone ja y-telje lõikepunktide vahel.

Leida järgmiste joonte puhul kaare pikkused märgitud punktide vahel.

844. $y = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2 - 1} - \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})\right]$, $x_1 = 1$, $x_2 = a + 1$

845. $y = \ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$, $x_1 = a$, $x_2 = b$

846. $y = 1 - \ln \cos x$, $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\pi}{4}$

847. $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y$, $y_1 = 1$, $y_2 = a$

848. $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$, $x_1 = 0$, $x_2 = b$

849. $y^2 = \frac{x^2}{2a - x}$, $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{5}{3}a$

Leida järgmiste joonte pikkused.

850. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ (astroid)

851. $x = \frac{c^2}{a} \cos^3 t$, $y = \frac{c^2}{b} \sin^3 t$, $c^2 = a^2 - b^2$ (ellipsi evoluut)

852. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$

853. $r = a\varphi$ $(0 \leq \varphi \leq 2\pi)$ (Arhimedese spiraal)

854. $8r = 1 + \cos \varphi$ (kardioid)

855. $r = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}$

856. $r = a \operatorname{th} \frac{\varphi}{2}$ $(0 \leq \varphi \leq 2\pi)$

857. $\varphi = \frac{1}{2}(r + \frac{1}{r})$ $(1 \leq r \leq 3)$

858. $y = \sqrt{x - x^2} + \arcsin\sqrt{x}$

859. $(y - \arcsin x)^2 = 1 - x^2$

860*. $y = \int\limits_{-\pi/2}^{x} \sqrt{\cos t}\, dt$

861. Leida hüperboolse spiraali $r\varphi = 1$ kaare pikkus punktide $(2, \frac{1}{2})$ ja $(\frac{1}{2}, 2)$ vahel.

862. Leida kõvera $r\varphi = 2$ suurima kaare pikkus, mis asetseb kiirte $\varphi = \frac{3}{4}$ ja $\varphi = \frac{4}{3}$ vahel.

863. Leida logaritmilise spiraali

$$r = ae^{m\varphi}$$

kaare pikkus, mis asetseb ringis $r = a$.

864. Arvutada joone

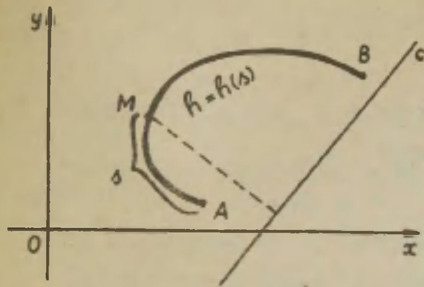
$$x = \int\limits_1^t \frac{\cos z}{z}\, dz, \quad y = \int\limits_1^t \frac{\sin z}{z}\, dz$$

kaare pikkus nullpunkti ja selle lähima punkti vahel, kus puutuja on vertikaalne.

865. Tõestada, et joone $y = \sin x$ ühele perioodile vastava kaare pikkus on võrdne ellipsi pikkusega, kui ellipsi pooltteljed on $\sqrt{2}$ ja 1.

§ 4. Pöördpinna pindala

Asetsegu xy-tasandil sirget c mittelõikav sirgestuv joon. AB. Joone punktid $M = (x,y)$ asetsegu joonest c kau-



Joon. 21

gusel

$h = h(s)$, $s \in [0,L]$ (14),

kus s on muutuva kaare AM pikkus (vt. joon.21) ja L on joone AB pikkus.

Siis joone AB pöörlemisel ümber sirge c tekkinud pöördpinna pindala S on arvutatav valemiga

$$S = 2\pi \int_0^L h\, ds. \qquad (15)$$

1. Kui sirge c on x-telg ja joon AB on antud parameetriliste võrranditega

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha,\beta] \qquad (16)$$

kus punktile A vastab parameetri t väärtus α ja punktile B väärtus β ning funktsioonidel (16) on olemas pidevad tuletised $\dot{x}=\dot{x}(t)$ ja $\dot{y}=\dot{y}(t)$, siis valem (15) esitub kujul

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta y\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt. \qquad (17)$$

2. Kui sirge c on x-telg ja joon AB on antud võrrandiga

$$y = y(x), \quad x \in [a,b], \qquad (18)$$

kus punktile A vastab argumendi x väärtus a ja punktile B väärtus b ning funktsioonil (18) on olemas pidev tuletis $y' = y'(x)$, siis valem (15) esitub kujul

$$S = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\,dx. \tag{19}$$

3. Kui sirge c on polaartelg ja joon AB on antud polaarkoordinaatides võrrandiga

$$r = r(\varphi), \qquad \varphi \in [\alpha, \beta] \tag{20}$$

kus punktile A vastab φ väärtus α ja punktile B väärtus β ning funktsioonil (20) on olemas pidev tuletis $\dot{r} = \dot{r}(\varphi)$, siis valem (15) esitub kujul

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta r \sin\varphi \sqrt{r^2 + \dot{r}^2}\,d\varphi. \tag{21}$$

<u>Näide 8.</u> Leida tsükloidi ühe kaare pöörlemisel ümber x-telje tekkinud pinna pindala.

<u>Lahendus.</u> Tsükloidi ühe kaare võrrandid parameetrilisel kujul on

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Et tuletised

$$\begin{cases} \dot{x} = a(1 - \cos t), \\ \dot{y} = a \sin t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

on pidevad, siis pöördpinna pindala arvutamisel võime kasutada valemit (17). Selleks arvutame

$$\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2\sin^2 t} =$$
$$= a\sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} =$$
$$= a\sqrt{2(1 - \cos t)} = a\sqrt{4\sin^2 \frac{t}{2}} =$$
$$= 2a \sin \frac{t}{2}\,dt,$$

kuna antud juhul $\sin\frac{t}{2}\geq 0$. Seega

$$S = 2\pi\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)2a\sin\frac{t}{2}\,dt =$$

$$= 4\pi a^2\int_0^{2\pi} 2\sin^3\frac{t}{2}\,dt = 8\pi a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos^2\frac{t}{2})\sin\frac{t}{2}dt =$$

$$= 8\pi a^2\left\{\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt + 2\int_0^{2\pi}\cos^2\frac{t}{2}\,d\cos\frac{t}{2}\right\} =$$

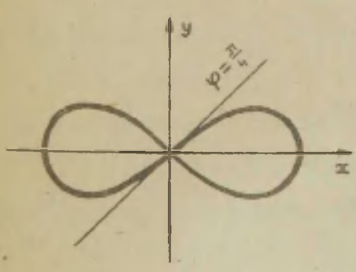
$$= 8\pi a^2\left\{-2\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} + \frac{2}{3}\cos^3\frac{t}{2}\Big|_0^{2}\right\} = \frac{64}{3}\pi a^2.$$

Näide 9. Leida Bernoulli lemniskaadi

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$$

pöörlemisel ümber x-telje tekkinud pinna pindala.

Lahendus. Nagu võrrandist näha, on lemniskaat sümmeetriline koordinaattelgede suhtes (vt. joon. 22). Seepärast võime piirduda lemniskaadi osaga, kus $x,y\geq 0$. Kogu lemniskaadi päärlemisel ümber x-telje tekkinud pöördpinna pindala S on siis kaks korda suurem lemniskaadi vaadeldava osa pöörlemisel tekkinud pinna pindalast. Minnes üle polaarkoordinaatidele, saame lemniskaadi vaadeldava osa



Joon.22

võrrandiks

$$r^2 = a^2\cos 2\varphi,\quad \varphi\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right],$$

sest selles lõigus on $\cos 2\varphi\geq 0$. Diferentseerides võrrandi mõlemat poolt φ järgi, saame

$$2r\dot{r} = -2a^2\sin 2\varphi,$$

kust

$$\dot r = -\frac{a^2}{r}\sin 2\varphi .$$

Et tuletis $\dot r$ on pidev, siis lemniskaat on sirgestuv kõver. Valemi (21) rakendamiseks arvestame, et

$$r^2 + \dot r^2 = r^2 + \frac{a^4}{r^2}\sin^2 2\varphi = \frac{1}{r^2}(r^4 + a^4\sin^2 2\varphi) =$$

$$= \frac{1}{r^2}(a^4\cos^2 2\varphi + a^4\sin^2 2\varphi) = \frac{a^4}{r^2}.$$

Seega

$$\frac{1}{2}S = 2\pi\int_0^{\pi/4} r\sin\varphi\,\frac{a^2}{r}\,d\varphi =$$

$$= 2\pi a^2\int_0^{\pi/4}\sin\varphi\,d\varphi = -2\pi a^2\cos\varphi\Big|_0^{\pi/4} =$$

$$= -2\pi a^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) = \pi a^2(2-\sqrt{2}),$$

kust

$$S = 2\pi a^2(2-\sqrt{2}).$$

Ülesanded.

Leida järgmiste joonte pöörlemisel ümber x-telje tekkinud pindade pindalad.

866. $y^2 = 2x,\quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}$

867. $3y - x^3 = 0,\quad 0 \leqslant x \leqslant a$

868. $y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a},\quad 0 \leqslant x \leqslant a$

869. $y = \tan x,\quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$

870. $x^2 + (y - b)^2 = a^2$, $(b \geq a)$

871. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$

872. $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

Leida järgmiste joonte pöörlemisel ümber y-telje tekkinud pindade pindalad.

873. $3x^2 + 4y^2 = 12$

874. $x = 4 - \frac{t^2}{2}$, $y = \frac{t^3}{3}$ (piirduda osaga, mis jääb koordinaattelgedega lõikepunktide vahele).

875. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$

876. Leida kardioidi $r = a(1 + \cos \varphi)$ pöörlemisel ümber polaartelje tekkinud pöördpinna pindala.

877*. Leida selle pinna pindala, mis tekib joone $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ pöörlemisel

a) ümber polaartelje,

b) ümber telje $\varphi = \frac{\pi}{2}$,

c) ümber telje $\varphi = \frac{\pi}{4}$,

878*. Tsükloidi üks kaar pöörleb ümber oma sümmeetriatelje. Leida tekkinud pöördpinna pindala.

879. Astroid $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ pöörleb ümber sirge $y = x$. Leida tekkinud pöördpinna pindala.

880. Joone $y = e^{-x}$ $(x \geq 0)$ lõpmatu pikkusega kaar pöörleb ümber x-telje. Leida tekkinud lõpmatu pinna pindala.

881*. Joon $x = \cos t + \ln \tan \frac{t}{2}$, $y = \sin t$ pöörleb ümber x-telje. Leida tekkinud lõpmatu pinna pindala.

§ 5. Masskeskme koordinaadid

Olgu funktsioonid $x(s)$, $y(s)$, $f(x)$, $g(x)$ pidevad vaadeldavates piirkondades.

1° Ühtlase joontihedusega materiaalse joone

$$x = x(s),\ y = y(s) \quad (0 \leqslant s \leqslant L),$$

kus parameetriks s on kaare pikkus, masskeskme koordinaadid (ξ, η) avalduvad valemitega

$$\xi = \frac{1}{L}\int_0^L x(s)\,ds, \quad \eta = \frac{1}{L}\int_0^L y(s)\,ds.$$

2° Papp - Guldini I teoreem: joone pöörlemisel teda mittelõikuva telje ümber tekkinud pöördkeha pindala võrdub selle joone pikkuse ja joone masskeskme poolt moodustatud ringjoone pikkuse korrutisega.

3° Ühtlase pindtihedusega materiaalse tasandilise kujundi

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad g(x) \leqslant y \leqslant f(x)$$

masskeskme koordinaadid (ξ, η) avalduvad valemitega

$$\xi = \frac{1}{S}\int_a^b x\left[f(x) - g(x)\right]dx, \quad \eta = \frac{1}{2S}\int_a^b \left[f^2(x) - g^2(x)\right]dx,$$

kus S on kujundi pindala.

4° Papp - Guldini II teoreem: tasandilise kujundi pöörlemisel teda mittelõikava telje ümber tekkinud pöördkeha ruumala võrdub selle kujundi pindala ja kujundi masskeskme poolt moodustatud ringjoone pikkuse korrutisega.

Ülesanded.

Leida järgmiste joonte masskeskmed

882. $x^2 + y^2 = a^2, \quad y \geq 0$

883. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}, \quad y \geq 0$

884. $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ 0 \leq t \leq 2\pi$

885. $x = a \cos^3 t,\ y = a \sin^3 t,\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

886. $\rho = a^{\varphi}, \quad \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi$

887. $\rho = a(1 + \cos \varphi),\ 0 \leq \varphi \leq \pi$

Leida järgmiste joontega piiratud kujundite masskeskmed.

888. $y = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad y = 0$

889. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}, \quad y = 0, \quad x = 0$

890. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad y = 0, \quad x = 0$

891. $y = \sin x \quad (0 \leq x \leq \pi), \quad y = 0$

892. $y^2 = ax^3 - x^4$

893. $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi),$
$y = 0$

894. $x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t, \quad y = 0, \quad x = 0$

895. Korrapärane kuusnurk pöörleb ühe külje ümber. Leida selliselt tekkinud keha ruumala.

896. Astroid pöörleb ümber sirge, mis läbib astroidi kahte naabertippu. Leida tekkinud keha ruumala ja pindala.

897. Ruut pöörleb tippe läbiva sirge ümber, kusjuures ruut ja sirge asuvad ühes tasapinnas. Milline peab olema sirge ja ruudu vastastikune asend, et tekkinud keha ruumala oleks suurim?

898. Eelmise ülesande küsimus kolmnurga kohta.

§ 6. Määratud integraali füüsikalisi rakendusi.

Et mingit suurust Q saaks leida määratud integraali abil lõigus $[a,b]$, peab Q kujutama endast teatavat funktsiooni lõigu $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$ suhtes, s.t.

$$Q = Q(\alpha,\beta),$$

ja olema aditiivne, s.o.

$$Q(a,b) = Q(a,c) + Q(c,b),$$

kus c on suvaline arv lõigust $[a,b]$. Niisugusteks aditiivseteks suurusteks Q on kõvertrapetsi pindala, joone kaare pikkus, pöördpinna pindala, läbitud tee pikkus, mass, jõu toimel tehtud töö jne.

Tähistame

$$\Delta Q = Q(x,x + \Delta x).$$

Kui leidub lõigus $[a,b]$ integreeruv funktsioon $f(x)$, nii et kehtib seos

$$\Delta Q = f(x)\Delta x + \alpha , \tag{22}$$

kus α on protsessis $\Delta x \to 0$ kõrgemat järku lõpmata väike, kui Δx, s.o. $\alpha = o(\Delta x)$, siis

$$Q = \int_a^b f(x)dx. \tag{23}$$

Seoseest (22) on näha, et

$$\Delta Q \approx f(x)\Delta x,$$

kusjuures viga $\alpha = o(\Delta x)$, ja et funktsiooni

$$Q(x) = Q(a,x)$$

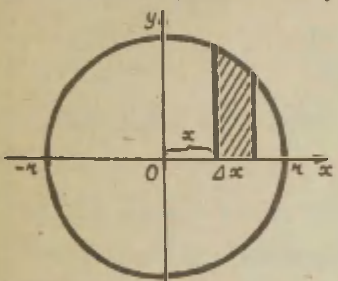
diferentsiaal dQ avaldub kujul

$$dQ = f(x)dx.$$

1° Materiaalse punkti $M = (x,y)$, mille mass on m, staatilised momendid koordinaattelgede suhtes on vastavalt $Q_x = my$ ja $Q_y = mx$, inertsimomendid – vastavalt $I_x = my^2$ ja $I_y = mx^2$.

Näide 10. Leida ringi inertsimoment diameetri suhtes, kui selle ringi pindtihedus $\rho = 1$.

Lahendus. Sümmeetria tõttu on inertsimomendid kõikide diameetrite suhtes võrdsed. Olgu ringi raadius r. Valime y-teljeks vaadeldava diameetri. Seega tuleb meil leida inertsimoment y-telje suhtes. Et ring on sümmeetriline koordinaattelgede suhtes, siis ringi inertsimoment y-telje suhtes võrdub koordinaattasandi esimeses veerandis asuva osa neljakordse inertsimomendiga. Vaatleme üht ribakest laiusega Δx (vt. joon. 23). Selle riba mass on ligikaudu $y \cdot \Delta x$, kusjuures selle ligikaudse võrduse viga on kõrgemat järku lõpmata väike Δx suhtes. Olgu riba kauguseks y-teljest x. Sel juhul vaadeldava riba punktide kaugused y-teljest erinevad suurusest x mitte rohkem



Joon. 23

kui Δx võrra. Seega vaadeldava riba inertsimoment y-telje suhtes on ligikaudu võrdne suurusega

$$x^2 y \Delta x,$$

kusjuures viga siin on kõrgemat järku lõpmata väike, võrreldes suurusega Δx.

Seega saame, et

$$J_y = 4\int_0^r x^2 y\,dx = 4\int_0^r x^2\sqrt{r^2 - x^2}\,dx.$$

Tehes muutuja vahetuse $x = r\sin\varphi$, saame, et

$$J_y = 4\int_0^{\pi/2} r^2\sin^2\varphi\, r\cos\varphi\, r\cos\varphi\, d\varphi =$$

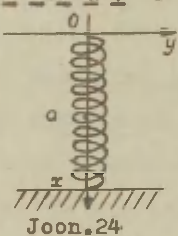
$$= 4r^4\int_0^{\pi/2} \sin^2\varphi\cos^2\varphi\, d\varphi = r^4\int_0^{\pi/2} \sin^2 2\varphi\, d\varphi =$$

$$= r^4\int_0^{\pi/2} \tfrac{1}{2}(1 - \cos 4\varphi)\, d\varphi =$$

$$= \tfrac{1}{2}r^4\left[\varphi - \tfrac{1}{4}\sin 4\varphi\right]_0^{\pi/2} = \tfrac{1}{4}\pi r^4.$$

<u>Näide 11</u>. Leida töö, mida on vaja teha vedru kokkusurumisel a ühiku võrra.

<u>Lahendus.</u> Võtame x-telje vedru kokkusurumise suunas



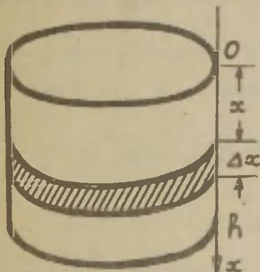
Joon.24

ning koordinaatide alguspunktiks O vedru vaba otsa lähteasendi (vt.joon. 24). Vastavalt Hooke'i seadusele on rakendatav jõud võrdeline kokkusurutud vahemiku pikkusega, s.t. $f = cx$.

Vedru vaba otsa surumiseks punktist x punkti $x + \Delta x$ on tarvis teha tööd ligikaudu $cx\Delta x$, kui Δx on küllalt väike. Kogu töö hulk on seega

$$W = \int_0^a cx\,dx = c\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^a = \frac{ca^2}{2}.$$

Näide 12. Kui suurt tööd on vaja teha silindrikujulise (põhja raadius r ning kõrgus h) paagi veest tühjaks pumpamiseks, kui paak on asetatud ühele põhjale.



Joon.25

Lahendus. Valime x-telje, nagu on näidatud joonisel 25. Veekihi (paksus on Δx ja asub sügavusel x) väljapumpamiseks paagist on teda vaja tõsta kõrgusele x, s,t. teha tööd $(\pi r^2 \Delta x)x$ ühiku võrra. Seega kogu töö hulk

$$W = \int_0^h \pi r^2 x\,dx = \pi r^2 \frac{x^2}{2}\Big|_0^h = \frac{1}{2}\pi r^2 h^2.$$

Ülesanded.

Järgmistes ülesannetes loeme kujundi joon- või pindtiheduse võrdseks ühega.

899. Leida lõigu AB (pikkus on l) inertsimoment telje suhtes, mis asub lõiguga AB ühes tasandis ning mille kaugus punktides A ja B on vastavalt a ja b.

900. Arvutada kesknurgale α vastava ringjoone (raadius on r) kaare inertsimoment selle kaare üht otspunkti läbiva diameetri suhtes. Milline on inertsimoment $\alpha = 2\pi$

korral?

901. Leida ringjoone inertsimoment telje suhtes, mis asub ringjoonega ühes tasandis ning ei lõika seda ringjoont.

902. Leida ellipsi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ esimeses veerandis asuva osa staatiline moment x-telje suhtes.

903. Leida joontega $y = \frac{2}{1 + x^2}$ ja $y = x^2$ piiratud kujundi staatiline moment x-telje suhtes.

904. Sama $y = \sin x$ ja $y = \frac{1}{2}$ korral.

905. Sama $y = x^2$ ja $y = \sqrt{x}$ korral.

906. Leida kolmnurga staatiline ja inertsimoment aluse suhtes.

907. Leida ellipsiga $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ piiratud kujundi staatilised ja inertsimomendid koordinaattelgede suhtes.

908. Keha liigub kiirusega $v = \sqrt{1 + t}\ \frac{m}{sek}$. Leida esimese 10 sek jooksul läbitud tee pikkus.

909. Harmoonilisel võnkumisel mööda x-telge liigub keha kiirusega

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{2\pi}{T} \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi_0\right),$$

kus t on aeg, T võnkeperiood, φ_0 - algfaas. Leida keha asend ajamomendil t_2, kui on teada, et ajamomendil t_1 asub ta punktis $x = x_1$.

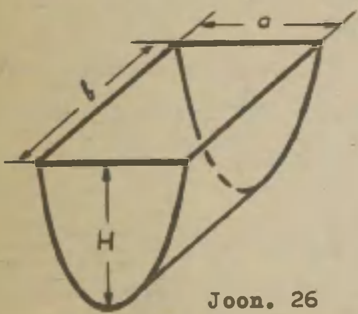
910. Millise jõuga mõjub ühtlase tihedusega materiaalne rõngas (mass - M, raadius - R) materiaalsele punktile C (mass - m), kui see punkt asub rõnga keskpunkti läbival

ning rõnga tasapinnaga ristuval sirgel ning asub rõnga keskpunktist kaugusel a?

911. Millise jõuga mõjub materiaalne joon (joontihedus - ρ) $y = |x| + 1$ materiaalsele punktile massiga m, mis asub koordinaatide alguses?

912. Cheopsi püramiidi mõõtmed on ligikaudu järgmised: kõrgus h = 140 m, põhja (ruut) serv 230 m. Tema ehitamisel kasutatud kivi erikaal on ligikaudu 2,5 $\frac{g}{cm^3}$. Leida töö, mis tehti püramiidi ehitamisel raskusjõu ületamiseks.

913. Leida töö, mida on vaja teha paraboolae reservuaari (vt. joon. 26) tühjakspumpamisel veest. Olgu a = 0,75 m, b = 1,2 m ja H = 1 m.



Joon. 26

914. Ristkülikukujuline plaat (mõõtmed a = 50 cm ja b = 40 cm) pöörleb konstantse nurkkiirusega $\omega = 3\pi$ sek^{-1} ümber külje a. Leida plaadi kineetiline energia, kui plaadi paksus on d = 0,3 cm ja tihedus $\rho = 8 \frac{g}{cm^3}$.

915. Leida jõud, millega vesi surub võrdhaarse trapetsi kujulisele tammile, teades, et ülemine alus a = 6,4 m, alumine b = 4,2 m ning kõrgus H = 3 m.

916. Ristkülikukujuline nõu on täidetud võrdees kogustes vee ja õliga (viimase erikaal on kaks korda kergem vee omast). Tõestada, et rõhk igale seinale väheneb $\frac{1}{5}$ võrra, kui vesi asendada õliga. (Arvestada, et vesi pole segunenud õliga).

917. Kera (erikaal 1) asetseb vees selliselt, et ta puutub veepinda. Leida töö, mis on vaja teha selle kera väljatõmbamiseks veest.

918*. Poolkerakujulise reservuaari (raadius $R = 43$ cm) põhja tekkis auk pindalaga $S = 0,2$ cm^2. Kui kiiresti jookseb see reservuaar veest tühjaks?

919*. Keha temperatuuriga 25° asetatakse termostaati, milles on konstantne temperatuur 0°. Millise aja jooksul jähtub keha 10°-ni, kui teame, et 20°-ni jahtub ta 20 min jooksul?

920. Keha, mille temperatuur oli 30°, jahtus 0°-se temperatuuriga termostaadis 30 min jooksul 22,5°-ni. Milline on keha temperatuur 3 tundi pärast katse algust?

921*. Millise kujuga peaks olema reservuaar, mis kujutab endast pöördkeha, et vedeliku kahanemine temas väljajooksmisel oleks ühtlane?

V R E A D

§ 1. Arvrea koonduvus

1. Rea koonduvus ja summa. Olgu antud rida

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n + \dots \quad . \tag{1}$$

Reast (1) avaldist u_n nimetatakse selle rea üldliikmeks.

Jada $\{S_n\}$, kus

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \quad (n = 0,1,\dots), \tag{2}$$

nimetatakse rea (1) osasummade jadaks.

Osasummade jada (2) abil võime rea (1) liikmed avaldada kujul

$$u_0 = S_0,$$

$$u_n = S_n - S_{n-1} \quad (n = 1,2,\dots).$$

Rida (1) nimetatakse koonduvaks summaks S, kui selle rea osasummade jada (2) koondub arvuks S, s.o.

$$\lim S_n = S. \tag{3}$$

Sel korral kirjutatakse

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = S.$$

Kui rida (1) koondub, siis koondub iga $n = 0,1,\dots$ korral ka rida

21

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k, \tag{4}$$

mida nimetatakse rea (1) jääkliikmeks. Rida (1) koondub parajasti siis, kui mingi n korral koondub tema jääkliige (4).

Kui rida (1) koondub, siis kehtib võrdus

$$S = S_n + R_n$$

ning

$$\lim R_n = 0.$$

Rida (1) nimetatakse hajuvaks, kui tema osasummade jada (2) ei koondu, s.t. kui piirväärtus (3) ei eksisteeri või on lõpmatu.

Rea summa lineaarsus. Kui read $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ ja $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ koonduvad vastavalt summadeks U ja V, siis mis tahes arvude λ ja μ korral koondub ka rida $\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda u_n + \mu v_n)$ summaks $\lambda U + \mu V$, s.t. kehtib võrdus

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{\infty} v_n.$$

Näide 1. Leida rea

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

osasummade jada ja summa.

Lahendus. Esitame rea üldliikme

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

kujul

$$u_n = \frac{A}{n} - \frac{B}{n+1}$$

Saame (näiteks määramata kordajate meetodiga) $A = B = 1$.

Seega osasummad

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1},$$

kust rea summa

$$S = \lim \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Ülesanded.

Leida järgmiste ridade osasummade jadad ja summad.

922. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

923. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$

924. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$

925. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+7)}$

926. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(2n+1)^2}$

927. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(2n+1)^2(2n+3)^2}$

928. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$

929. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n - \sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n(n+1)}}$

930. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$

931. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}$

932. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n$

933. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^2$

Leida read, kui nende osasummade jadad iga $n = 0,1,\ldots$ korral on järgmised.

934. $S_n = \ln(n+2)$

935. $S_n = \sqrt{n+2}$

936. $S_n = \frac{n+3}{n+1}$

940. $S_n = \frac{n^2}{n^2+2}$

937. $S_n = \frac{1}{n+1}$

941. $S_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

938. $S_n = (n+1)$

942. $S_n = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

939. $S_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$

Kasutades rea summa lineaarsust, arvutada:

943. $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{3^n} + \frac{(-1)^n}{n^2}\right] + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\right]$

944. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right)$

946. $\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{3^n}\right]$

945. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n + 2^n}{6^n}$

947*. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cos\frac{2n\pi}{3}$

2. Rea üldised koonduvustunnused. Selleks et rida (1) oleks koonduv, on tarvilik, et

$$\lim u_n = 0. \qquad (5)$$

Seepärast rea (1) koonduvuse uurimisel tuleb kõigepealt kontrollida tingimust (5). Kui tingimus (5) ei ole täidetud, siis rida (1) on hajuv. Kui aga tingimus (5) on täidetud, siis sellest veel ei järeldu, et rida (1) on koonduv. Sel korral tuleb edasi kasutada teisi koonduvustunnuseid.

Cauchy kriteerium. Rida (1) koondub parajasti siis, kui iga arvu $\varepsilon > 0$ korral leidub arv $N = N(\varepsilon)$, et

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}| < \varepsilon ,$$

iga naturaalarvu p puhul, kui $n > N$.

Ülesanded.

Uurida järgmiste ridade koonduvust, kasutades rea koonduvuse tarvilikku tunnust ja Cauchy kriteeriumi.

948. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$

949. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{10^{-10}}$

950. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{9n-1}}$

951. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

952. $\sum_{n=0}^{\infty} (n - \sqrt{n^2 - n + 1})$

953*. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

954. $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \tan \frac{\pi}{2^{n+1}}$

955*. $\sum_{n=0}^{\infty} \tan \frac{\pi}{n+1}$

956. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2n+1}$

957. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{n - \ln n}$

958*. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$

959. $\sum_{n=1}^{\infty} (2n)^{-\frac{1}{n}}$

960. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$

§ 2. Positiivsed arvread

1. Positiivsete ridade võrdlusolaused. Rida (1) nimetatakse positiivseks, kui üldliige $u_n \geq 0$ iga $n = 0, 1, \ldots$ korral. Positiivne rida (1) koondub parajasti siis, kui tema osasummade jada (2) on tõkestatud, s.t. leidub arv $M > 0$, et iga $n = 0, 1, \ldots$ korral

$$\sum_{k=0}^{n} u_k < M < \infty \, .$$

Seepärast, kui positiivne rida (1) on koonduv, siis kirjutatakse

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n < \infty ,$$

kui aga on hajuv, siis kirjutatakse

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \infty .$$

<u>Positiivsete ridade esimene võrdluslause</u>. Kui ridade

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \tag{U}$$

ja

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n \tag{V}$$

korral mingist indeksist alates kehtib võrratus

$$0 \leqslant u_n \leqslant v_n,$$

siis rea (V) koonduvusest järeldub rea (U) koonduvus ning rea (U) hajuvusest järeldub rea (V) hajuvus.

<u>Positiivsete ridade teine võrdluslause</u>. Kui positiivsete ridade (U) ja (V) puhul on

$$u_n \sim Cv_n$$

mingi konstandi $C > 0$ korral, siis need read koonduvad või hajuvad ühteaegu.

Nende võrdluslausete abil saame ühe rea koonduvust või hajuvust kindlaks teha, kui võrrelda seda rida teise positiivse reaga, mille koonduvus või hajuvus on teada. Praktikas võrreldakse uuritavat rida kõige sagedamini geomeetrilise või harmoonilise reaga.

Geomeetriline rida

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

koondub, kui $|q| < 1$, ja hajub, kui $|q| \geq 1$. Harmooniline rida

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^\alpha}$$

koondub, kui $\alpha > 1$, ja hajub, kui $\alpha \leq 1$ (vt. näide 5).

Näide 2. Uurida rea

$$\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{arccot}(\pi + n) \sin \frac{\pi}{2^n}$$

koonduvust.

Lahendus. Vaadeldav rida on koonduv esimese võrdluslause põhjal, sest iga n korral

$$0 < \operatorname{arccot}(\pi + n) \sin \frac{\pi}{2^n} < \pi \frac{\pi}{2^n} = \pi^2 \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

ning geomeetriline rida $\sum_{n=0}^{\infty} (1/2)^n < \infty$.

Näide 3. Uurida rea

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{1+\frac{1}{n}} \frac{\arctan(3 + \pi n)}{\sqrt{n^4 + 2n - \sin n}}$$

koonduvust.

Lahendus. Vaadeldav rida on hajuv teise võrdluslause põhjal, sest

$$n^{1+\frac{1}{n}} \frac{\arctan(3 + \pi n)}{\sqrt{n^4 + 2n - \sin n}} = \sqrt[n]{n} \frac{n\left[\frac{\pi}{2} + o(1)\right]}{n^2\sqrt{1 + o(1)}} =$$

$$= \left[1 + o(1)\right]\left[\frac{\pi}{2} + o(1)\right]\frac{1}{n} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{\pi}{2} \frac{1}{n},$$

ning harmooniline rida $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$.

Ülesanded.

Kasutades võrdluslauseid, teha kindlaks, millised järgmistest ridadest koonduvad või hajuvad.

961. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)3^n}$

962. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)(n-1)}{n^2(n+1)^2}$

963. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2n+\cos(\pi n)}}$

964. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n-1}$

965. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+n^2}{2+n^3}\right)^2$

966. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$

967. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})$

968. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n-1})$

969. $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{3^n}$

970. $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \tan \frac{\pi}{3^n}$

971. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{n}$

972. $\sum_{n=1}^{\infty} (1-\cos \frac{a}{n})$

973. $\sum_{n=0}^{\infty} \tan \frac{\pi}{n+1}$

974. $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n^4+1}}$

975. $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{\pi}{\sqrt{n}}$

976. $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{n\,2^n}$

977. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+\sqrt{\frac{2}{n}})$

978. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^2(1+\sqrt{\frac{2}{n}})$

979. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^3(1+\sqrt{\frac{2}{n}})$

980. $\sum_{n=0}^{\infty} \ln(1+\sin \frac{\pi}{e^n})$

981. $\sum_{n=3}^{\infty} \ln \cos \frac{\pi}{n}$

982. $\sum_{n=0}^{\infty} \log(1+\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ 983. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln(n+1)-\ln n}{n+1}$

984. $\sum_{n=1}^{\infty} (2n)^{1-\frac{1}{n}} \ln(1+\sin\frac{\pi}{n^3})$

985. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(2+\pi n)}{n-\ln n}$ 990. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$

986. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ 991. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-\ln n}$

987. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)^n}{n^{n+1}}$ 992. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n-3}}{n^{\alpha}}$

988. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+e^{-n}}{n^2+\sin\frac{\pi}{n}}$ 993. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{\alpha}}$

989. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arccot} n}{n!}$ 994. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^{\alpha} n}$

995. $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \log(1+\arcsin\frac{\pi}{n^2})$

996. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \arctan \ln(1+\arcsin\frac{\pi}{n})$

2. <u>Cauchy, D'Alembert'i ja Raabe tunnused</u>. Positiivse rea (U) korral tähistame

$$C_n = \sqrt[n]{u_n}, \quad D_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}, \quad R_n = n(1-D_n).$$

<u>Cauchy tunnus</u>. Kui eksisteerib (lõplik või lõpmatu) piirväärtus

$$\lim C_n = C,$$

siis rida (U) koondub, kui $0 \leq C < 1$, ja hajub, kui $C > 1$.

<u>D'Alembert'i tunnus</u>. Kui eksisteerib (lõplik või lõp-

matu) piirväärtus

$$\lim D_n = D,$$

siis rida (U) koondub, kui $0 \leq D < 1$, ja hajub, kui $D > 1$.

Raabe tunnus. Kui eksisteerib (lõplik või lõpmatu) piirväärtus

$$\lim R_n = R,$$

siis rida (U) koondub, kui $R > 1$, ja hajub, kui $R < 1$.

Näide 3. Milliste parameetri $a > 0$ väärtuste puhul koondub ja milliste puhul hajub rida

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{an}{n+1}\right)^n.$$

Lahendus. Rakendades Cauchy tunnust, saame

$$C_n = \frac{an}{n+1} = \frac{a}{1+\frac{1}{n}},$$

kust

$$C = a.$$

Seega vaadeldav rida koondub, kui $a < 1$, ja hajub kui $a > 1$. Kui aga $a = 1$, siis $C = 1$, ja Cauchy tunnus vastust ei anna. Sel korral rida hajub, sest rea üldliige ei rahulda koonduvuse tarvilikku tingimust, kuna

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e} \neq 0.$$

Näide 4. Milliste parameetri $a > 0$ väärtuste puhul koondub ja milliste korral hajub rida

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!} \frac{a^n}{(2n+1)^2},$$

kus $(2n - 1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n - 1)$.

Lahendus. Et rea üldliige sisaldab faktoriaale, siis on loomulik rakendada D'Alembert'i tunnust. Saame

$$D_n = \frac{(2n+1)!!a^{n+1}}{(n+1)!(2n+3)^2}\,\frac{n!(2n+1)^2}{(2n-1)!!a^n} = \frac{2n+1}{n+1}\,\frac{(2n+1)^2}{(2n+3)^2}\,a,$$

kust

$$D = 2a.$$

Seega vaadeldav rida koondub juhul $a<\frac{1}{2}$ ja hajub juhul $a>\frac{1}{2}$. Kui $a = \frac{1}{2}$, siis $D = 1$, ja D'Alembert'i tunnusega ei saa otsustada rea koonduvuse üle. Sel korral aga rea üldliige

$$u_n = \frac{(2n-1)!!}{n!}\,\frac{1}{2^n}\,\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,\frac{1}{(2n+1)^2} =$$

$$= \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n}\,\frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{1}{(n+1)^2}$$

ja seega esimese võrdluslause põhjal rida $\sum u_n$ koondub, eest harmooniline rida $\sum \frac{1}{(n+1)^2} < \infty$.

Viimasel juhul, s.t. juhul $a = \frac{1}{2}$, võime rakendada ka Raabe tunnust. Tõepoolest, sel korral

$$D_n = \frac{2n+1}{n+1}\,\frac{(2n+1)^2}{(2n+3)^2}\,\frac{1}{2} = \frac{2n+1}{2n+2}\left(\frac{2n+1}{2n+3}\right)^2 =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2n+2}\right)\left(1 - \frac{2}{2n+3}\right)^2 =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2n+2}\right)\left[1 - \frac{4}{2n+3} + \frac{4}{(2n+3)^2}\right] =$$

$$= 1 - \frac{1}{2n+2} - \frac{4}{2n+3} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Seega

$$R_n = n(1 - D_n) = \frac{n}{2n + 2} + \frac{4n}{2n + 3} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

ning

$$R = \lim R_n = \frac{1}{2} + 2 > 1.$$

Kokkuvõttes vaadeldav rida koondub, kui $a \leqslant \frac{1}{2}$, ja hajub, kui $a > \frac{1}{2}$.

<u>Ülesanded</u>.

Kasutades Cauchy või D'Alembert'i tunnust otsustada, millised järgmistest ridadest koonduvad ja millised hajuvad.

997. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

998. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n + 1)^n}$

999. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^n n}$

1000. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{3n - 1}\right)^n$

1001. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n + 1)!}$

1002. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n + 1}{2^n}$

1003. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (2 + \frac{1}{n})^{-n}$

1004. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha}{(n + 1)!}$

1005. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n$

1006. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \left(\frac{n + 1}{n}\right)^{n^2}$

1007. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$

1008. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 5^{-n} \left(\frac{n + 1}{n}\right)^{n^2}$

1009. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \left(\frac{n}{n + 1}\right)^{n^2}$

1010. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \alpha^n \arcsin \frac{\pi}{n}$, $\alpha > 0$

1011. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n - 1)!!}{3^n\, n!}$

1012. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n + 1)!}{(2n)!!}$

1013. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \left(\frac{e}{4}\right)^n$ 1015. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{(2n^2+1)^{n/2}}$

1014. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \left(\frac{e}{2}\right)^n$

Kasutades Raabe tunnust otsustada, kas järgmised read koonduvad või hajuvad.

1016. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n!} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{2+\sqrt{k}}$

1017. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\, n^{-a}}{b(b+1)\ldots(b+n)}$ $(b>0)$.

1018*. $\sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{n!} \prod_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+3}-2}$

1019. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^p$ $(p \neq 2)$

Kasutades rea koonduvuse tarvilikku tingimust (5) näidata, et järgmised piirväärtused on võrdsed nulliga.

1020. $\lim \frac{n^2}{n!}$ 1022. $\lim \frac{n^n}{(n!)^2}$

1021. $\lim \frac{a^n}{n!}$ 1023. $\lim \frac{(n+1)!}{(2n)!!}$

3. Integraaltunnus. Kui rea (U) liikmed avalduvad kujul $u_n = f(n)$, kus funktsioon $f(x) > 0$ monotoonselt kahaneb poollõigus $[a, \infty)$, siis rida (U) koondub parajasti siis, kui päratu integraal

$$\int_a^{\infty} f(x)\, dx < \infty .$$

Kui rida (U) koondub integraaltunnuse põhjal, siis rea (u) jääkliikme

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$$

jaoks kehtib hinnang

$$R_n \leqslant \int_{n}^{\infty} f(x)\, dx.$$

<u>Näide 5</u>. Milliste parameetri $\alpha > 0$ väärtuste puhul koondub rida

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{1+\frac{1}{n}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{n}} \frac{1}{n^{\alpha+1}}$$

Hinnata rea jääkliiget.

<u>Lahendus.</u> Et

$$n^{1+\frac{1}{n}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{n}} \frac{1}{n^{\alpha+1}} = \left[1 + o(1)\right]\left[e + o(1)\right] \frac{n}{n^{\alpha+1}} =$$

$$= \frac{e}{n^{\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right) \sim e\, \frac{1}{n^{\alpha}},$$

siis teise võrdluslause põhjal vaadeldav rida koondub parajasti siis, kui harmooniline rida

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

koondub. Viimane rida integraaltunnuse põhjal koondub parajasti siis, kui

$$\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$$

koondub. Teades (vt. peatükk III ülesanne nr. 758), et

$$\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} \begin{cases} < \infty, & \text{kui } \alpha > 1, \\ = \infty, & \text{kui } \alpha \leqslant 1, \end{cases}$$

saamegi, et vaadeldav rida koondub parajasti siis, kui $\alpha > 1$.

Jääb hinnata jääkliiget

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{1+\frac{1}{k}} \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+\frac{1}{k}} \frac{1}{k^{\alpha+1}} =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{\infty} (k+1)^{\frac{1}{k}} \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k} \frac{1}{k^{\alpha}},$$

kui $\alpha > 1$. Et $(k+1)^{\frac{1}{k}} = \exp \frac{\ln(k+1)}{k} < 3$ ja $\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k} < 3$,

siis juhul $\alpha > 1$ on

$$R_n < 9 \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} \leq 9 \int_{n}^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} =$$

$$= \frac{9}{1-\alpha} \frac{1}{x^{\alpha-1}} \Bigg|_{n}^{\infty} = \frac{9}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

<u>Ülesanded</u>.

Kasutades integraaltunnust otsustada, millised järgnevatest ridadest koonduvad ja millised hajuvad. Koonduvuse korral hinnata ka jääkliiget.

1024. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$

1025. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$

1026. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^{\alpha} n}$

1027. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln^{\alpha} \ln n}$

Mitu liiget tuleb võtta järgmistes ridades, et saada rea summa veaga alla 0,001.

1028. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

1029. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^4(n+1)} \sin \frac{\pi}{n}$

1030. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$

1031. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^3(n+1)} \ln(1 + \frac{1}{n})$

Otsustada, millised järgmistest ridadest koonduvad ja millised hajuvad.

1032. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 1}{n^2}$

1033. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3 + (-1)^n}{2^n}$

1034. $\sum_{n=0}^{\infty} n \tan \frac{\pi}{2^n}$

1035. $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 \sin \frac{\pi}{3^n}$

1036. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln^{\alpha} n}{n\sqrt{n}}$

1037. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^3 n} \sin \frac{\pi}{4n}$

1038. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n} \ln(1 + \frac{1}{n})$

1039. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \sin \frac{\pi}{n}$

1040. $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{n + 1}{n^4 + 2}}$

1041. $\sum_{n=2}^{\infty} \ln^{\alpha} \cos^{-1}(\pi/n)$

1042. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \frac{n + 1}{n - 1}$

1043. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 5\cdot \ldots \cdot(3n - 1)}{1\cdot 5\cdot \ldots \cdot(4n - 3)}$

1044. $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{n^2 - 2n + 3 + \cos n}{2n^4 + 3n + 4}}$

1045. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\, e^n}{n^{n+p}}$

1046. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln^{\alpha} n \ln^{\beta} \ln n}$

§ 3. Suvalised arvread

1. Vahelduvate märkidega read. Rida

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n, \quad a_n > 0 \tag{6}$$

nimetatakse vahelduvate märkidega reaks.

1. <u>Leibnizi tunnus</u>. Vahelduvate märkidega rida (6) koondub, kui a_n läheneb monotoonselt nullile.

Kui vahelduvate märkidega reas (6) suurus a_n läheneb monotoonselt nullile, siis tema jääkliikme

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k$$

jaoks kehtib hinnang

$$|R_n| < a_{n+1}. \tag{7}$$

2. <u>Ridade absoluutne ja tingimisi koonduvus</u>. Rida

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \tag{1}$$

nimetatakse <u>absoluutselt koonduvaks</u>, kui rea liikmete absoluutväärtustest moodustatud rida

$$\sum_{n=0}^{\infty} |u_n| \tag{8}$$

on koonduv.

Kui rida (8) koondub, siis ka rida (1) koondub, s.t. iga absoluutselt koonduv rida on koonduv.

Kui rida (1) koondub absoluutselt ja rea (1) summa on U, siis öeldakse, et rida (1) <u>koondub absoluutselt summaks</u> U. Rea (8) summa võib olla erinev arvust U.

Kui rida (1) koondub, aga rida (8) hajub, siis rida (1) nimetatakse <u>tingimisi koonduvaks</u>, s.t. koonduvat rida, mis ei koondu absoluutselt, nimetatakse tingimisi koonduvaks.

Rea (1) absoluutse koonduvuse näitamiseks võime kasutada positiivsete ridade koonduvustunnuseid, sest (8) on positiivne rida. Kui aga rida (8) hajub, siis sellest veel ei järeldu, et rida (1) hajub, sest ta võib osutuda tingimisi koonduvaks. Seepärast rea (1) hajuvuse näitamiseks ei saa kasutada positiivsete ridade koonduvustunnuseid, näiteks Raabe tunnust ja integraaltunnust. Küll aga saame kasutada Cauchy ja D'Alembert'i tunnuseid, kui viimastes C_n ja D_n asemel võtta

$$C_n^* = \sqrt[n]{|u_n|} \text{ ja } D_n^* = \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| .$$

<u>Näide 6.</u> Kas rida

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$$

on absoluutselt või tingimisi koonduv. Hinnata rea jääkliiget.

<u>Lahendus.</u> Kuna vaadeldav rida on vahelduvate märkidega rida, siis tähistades

$$a_n = \left|\frac{(-1)^n}{n \ln n}\right| = \frac{1}{n \ln n}$$

näeme, et

$$a_n \geqslant a_{n+1} \longrightarrow 0.$$

Leibnizi tunnuse põhjal vaadeldav rida koondub. Võrratusest (7) saame tema jääkliikme

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k \ln k}$$

jaoks hinnangu

$$|R_n| < \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} .$$

Vaadeldav rida aga ei koondu absoluutselt, sest integraaltunnuse abil saame, et

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \int_2^{\infty} \frac{d \ln x}{\ln x} = \ln \ln x \Big|_2^{\infty} = \infty .$$

Näide 7. Milliste parameetri a väärtuste puhul koondub absoluutselt rida

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a\sqrt{n})^n}{(n+1)!} .$$

Lahendus. Et rakendada D'Alembert'i tunnust, arvutame

$$D_n^* = \frac{|a|^{n+1}\sqrt{(n+1)^{n+1}}}{(n+2)!} \frac{(n+1)!}{|a|^n\sqrt{n^n}} =$$

$$= \frac{|a|\sqrt{n+1}}{n+2}\sqrt{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{|a|\sqrt{n+1}}{n+2}\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n},$$

kust $D^* = \lim D_n^* = |a| \cdot 0\sqrt{e} = 0 < 1$. Seega vaadeldav rida koondub absoluutselt iga a korral.

Näide 8. Milliste parameetri a väärtuste puhul koondub absoluutselt rida

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a\,n)^n}{n!} .$$

Lahendus. Et

$$D_n^* = \frac{|a|^{n+1}(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{|a|^n n^n} = |a|\left(\frac{n+1}{n}\right)^n =$$

$$= |a| \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to |a|e,$$

siis D'Alembert'i tunnuse põhjal rida (9) koondub absoluutselt, kui $|a| < \frac{1}{e}$, ja hajub, kui $|a| > \frac{1}{e}$. Kui aga $|a| = \frac{1}{e}$, s.t. $a = \frac{1}{e}$ või $a = -\frac{1}{e}$, siis rea (9) üldliige on

$$u_n = (\pm 1)^n \left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{1}{n!} ,$$

kust

$$|u_n| = \left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{1}{n!}$$

Kasutades Stirlingi valemit

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

saame

$$|u_n| \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\left(\frac{n}{e}\right)^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{n}},$$

ning teise võrdluslause põhjal on rida $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |u_n|$ hajuv, sest harmooniline rida $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty$. Seega rida (9) juhul $a = \frac{1}{e}$ on hajuv, sest siis $|u_n| = u_n$. Kuna $|u_n| \to 0$ ja

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = D_n^* = \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant \frac{1}{e}\, e = 1,$$

siis

$$|u_n| \geqslant |u_{n+1}|.$$

Leibnizi tunnuse põhjal on rida $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ juhul $a = -\frac{1}{e}$ koonduv.

Kokkuvõttes saame, et rida (9) on absoluutselt koonduv, kui $|a| < \frac{1}{e}$; on tingimisi koonduv, kui $a = -\frac{1}{e}$; on hajuv, kui $|a| > \frac{1}{e}$ või $a = \frac{1}{e}$.

Ülesanded

Millised järgmistest ridadest absoluutselt koonduvad, millised tingimisi koonduvad ja millised hajuvad?

1047. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1}$

1048. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)^2}$

1049. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{1}{\ln(n+2)}$

1050. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos na}{n\sqrt{n}}$

1051. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$

1052. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$

1053. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n\, 3^{\frac{1}{n}}}$

1054. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^2}{e^n}$

1055. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + a^n}{n!}$

1056. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$

1057. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + a}$, $a \neq 0, -1, -2, \ldots$

1058. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n + 100}{3n + 1}\right)^n$

1059.* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln n}$

1060. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n + 10}$

1061. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{an}{n + 1}\right)^n$

1062.* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$

1063. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n - 1)!!}{n!} \frac{a^n}{(2n + 1)^2}$

1064. $\sum_{n=1}^{\infty} a^n \arcsin \frac{\pi}{4n}$

1065. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\sqrt{n} + (-1)^n\right]^{\alpha}$

1066. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[n^2]{n}}$

1067. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n + 1}{n - 1} \frac{1}{\sqrt[10]{n}}$

3. <u>Ridade korrutamine</u>. Ridade (U) ja (V) Cauchy korrutiseks nimetatakse rida

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n, \tag{10}$$

kus

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k}\, v_k = \sum_{k=0}^{n} u_k\, v_{n-k},$$

ja kirjutatakse

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \sum_{n=0}^{\infty} v_n = \sum_{n=0}^{\infty} w_n .$$

<u>Cauchy teoreem</u>. Kui read (U) ja (V) koonduvad absoluut-

selt vaetavalt summadeks U ja V, siis nende ridade Cauchy korrutis (10) koondub absoluutselt summaks W = UV.

Näide 9. Leida ridade

$$S(a) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{ja} \quad C(a) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^{2n}}{(2n)!}$$

Cauchy korrutis. Milliste parameetri a väärtuste korral Cauchy korrutis koondub absoluutselt?

Lahendus. Mõlema antud rea korral on $D_n^* \to D^* = 0 < 1$ ja D'Alembert'i tunnuse põhjal mõlemad read koonduvad absoluutselt parameetri a iga väärtuse korral. Seega Cauchy teoreemi põhjal nende ridade Cauchy korrutis koondub absoluutselt iga a korral. Leiame Cauchy korrutise. Siin

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{a^{2n-2k+1}}{(2n-2k+1)!} (-1)^k \frac{a^{2k}}{(2k)!} =$$

$$= (-1)^n a^{2n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2n+1-2k)!(2k)!} =$$

$$= (-1)^n \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!} \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n+1)!}{(2n+1-2k)!(2k)!} =$$

$$= (-1)^n \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k}.$$

Arvestades Newtoni binoomvalemit

$$(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{n-k} v^k$$

ja et selles paariskohtadel asuvate kordajate summa võrdub paaritukohtadel asuvate kordajate summaga, siis seosest

$$\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} = (1+1)^{2n+1} = 2^{2n+1}$$

saame

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} = \frac{2^{2n+1}}{2}.$$

Seega on

$$w_n = \frac{(-1)^n}{2} \frac{(2a)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

ning kehtib valem

$$2\,S(a)\,C(a) = S(2a).$$

Ülesanded

Näidata, et kehtivad järgmised võrdused.

1068. $\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)q^n, \quad |q| < 1$

1069. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1$

Näidata, et kehtivad järgmised võrdused parameetrite a ja b iga väärtuse korral, kus C(a) ja S(a) on antud näites 9.

1070. $E(a) \cdot E(b) = E(a+b), \quad$ kus $E(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$

1071. $2\,C^2(a) = 1 + C(2a)$

1072. $2\,S^2(a) = 1 - C(2a)$

1073. $S^2(a) + C^2(a) = 1$

1074. Näidata, et rida

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

on tingimisi koonduv ja tema Cauchy ruut, s.o. rea Cauchy korrutis iseendaga, on hajuv rida.

1075. Näidata, et read

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n \quad \text{ja} \quad 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

hajuvad, aga nende Cauchy korrutis on absoluutselt koonduv rida.

§ 4. Funktsionaaljadad ja funktsionaalread.

Jada

$$\{f_n(x)\}. \tag{11}$$

mille elemendid on mingil hulgal määratud funktsioonid $f_n(x)$, nimetatakse funktsionaaljadaks.

Kui iga $x \in X$ korral eksisteerib

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x),$$

siis funktsiooni $f(x)$ nimetatakse funktsionaaljada (11) piirfunktsiooniks ja hulka X selle jada koonduvuspiirkonnaks. Sel korral hulka X loetakse piirfunktsiooni $f(x)$ määramispiirkonnaks.

Öeldakse, et funktsionaaljada (11) koondub ühtlaselt piirkonnas X funktsiooniks $f(x)$, kui iga arvu $\varepsilon > 0$ korral leidub arv $N = N(\varepsilon)$, et iga $n > N$ korral kehtib võrratus

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

kõikide $x \in X$ puhul, s.t. sõltumata punkti $x \in X$ valikust.

Rida

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x), \tag{12}$$

mille liikmed $u_n(x)$ on mingil hulgal määratud funktsioonid, nimetatakse funktsionaalreaks. Funktsionaaljada $\{S_n(x)\}$, kus

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x),$$

nimetatakse funktsionaalrea (12) osasummade jadaks.

Kui iga $x \in X$ korral funktsionaalrida (12) koondub summaks $S(x)$, s.t.

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = S(x),$$

ehk

$$\lim_{n \to \infty} S_n(x) = S(x),$$

siis funktsiooni $S(x)$ nimetatakse funktsionaalrea (12) summaks ja hulka X selle rea koonduvuspiirkonnaks. Sel korral hulk X loetakse funktsionaalrea (12) summa $S(x)$ määramispiirkonnaks.

Öeldakse, et funktsionaalrida (12) koondub ühtlaselt piirkonnas X summaks $S(x)$, kui iga arvu $\varepsilon > 0$ korral leidub arv $N = N(\varepsilon)$, et iga $n > N$ korral funktsionaalrea jääkliige

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$$

rahuldab võrratust $|R_n(x)| < \varepsilon$ iga $x \in X$ puhul, s.t. sõltumata punkti $x \in X$ valikust.

Seega funktsionaalrida koondub ühtlaselt piirkonnas X parajasti siis, kui selle rea jääkliige $R_n(x)$ koondub ühtlaselt nulliks piirkonnas X.

Weierstrassi tunnus. Funktsionaalrida (12) koondub ühtlaselt (ja absoluutselt) piirkonnas X, kui leidub positiivne koonduv arvrida

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n,$$

mille puhul kehtib võrratus

$$|u_n(x)| \leq v_n \quad (n=0,1,\dots)$$

iga $x \in X$ korral.

Näide 10. Leida funktsionaalrea

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{(1+x^2)^n}$$

koonduvuspiirkond X ja piirkond A, kus ta koondub absoluutselt, ning rea summa S(x).

Lahendus. Vaadeldav rida on geomeetriline rida teguriga

$$q = \frac{2x}{1+x^2}$$

Seega on see rida absoluutselt koonduv, kui

$$\frac{2|x|}{1+x^2} < 1$$

ehk

$$(1-|x|)^2 > 0,$$

ja hajuv teistes punktides.

Seega $X = A = \{(-\infty,-1),(-1,1),(1,\infty)\}$. Rea summa on

$$S(x) = \frac{\dfrac{2x}{1+x^2}}{1-\dfrac{2x}{1+x^2}} = \frac{2x}{1+x^2-2x} = \frac{2x}{(1-x)^2}$$

Vastavalt definitsioonile on funktsiooni S(x) määramispiirkonnaks hulk $X = \{(-\infty,-1),(-1,1),(1,\infty)\}$.

Ülesanded.

Teha kindlaks, millised järgmistest ridadest on funktsionaalread ja millised mitte.

1076. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln[(-1)^n(1-x)]}{(n+1)!}$

1077. $\sum_{n=0}^{\infty} \arcsin(nx)$

1078. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}\sqrt{\frac{\ln^n \sin x}{1-x^2}}$

1079. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}\sqrt{\frac{\ln^n|\cos x|}{1+x^2}}$

1080. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \ln \frac{\ln^n(x-[x])}{n!}$

Leida järgmiste funktsionaalridade koonduvuspiirkonnad X, piirkonnad A, kus nad koonduvad absoluutselt, ning summad $S(x)$, lugedes $0^0 = 1$.

1081. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}$

1082. $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$

1083. $\sum_{n=0}^{\infty} (-2x)^n$

1084. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{2^{n+1}}$

1085. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^n}$

1086. $\sum_{n=0}^{\infty} \ln^n x$

1087. $\sum_{n=1}^{\infty} \cos^n x$

Leida järgmiste funktsionaalridade koonduvuspiirkonnad X ja piirkonnad A, kus nad koonduvad absoluutselt.

1088. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$

1089. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$

1090. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$

1091. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(x+1)^n}$

1092. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{x}{n}$

1093. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^{3+x} n}$

1094. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + x^2}$

1095. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + x}$

1096. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln^x n}$

1097. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$

1098. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^n$

1099. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \frac{1}{1 + a^{2n}x^2}$

1100. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}$

1101. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1 + x^{2n}}$

1102. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{nx} - \frac{1}{n+1}\right) \frac{1}{x^n}$

<u>Näide 11</u>. Leida piirkond A, kus funktsionaaljada

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} \qquad (n=1,2,\ldots)$$

koondub ühtlaselt.

<u>Lahendus.</u> Antud jada piirfunktsioon on

$$f(x) = \lim_n \sqrt{x^2 + n^{-2}} = |x|.$$

Et iga $x \in (-\infty, \infty)$ puhul

$$f_n(x) - f(x) = \sqrt{x^2 + n^{-2}} - |x| = \frac{n^{-2}}{\sqrt{x^2 + n^{-2}} + |x|} =$$

$$= \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{n^2x^2 + 1} + n|x|} < \frac{1}{n},$$

siis vastavalt igale $\varepsilon > 0$ on

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

niipea, kui $n \geq N = \frac{1}{\varepsilon}$. Et N ei sõltu kohast $x \in (-\infty, \infty)$, siis antud jada koondub ühtlaselt kogu arvteljel $(-\infty, \infty)$.

Näide 12. Kas funktsionaaljada

$$f_n(x) = \frac{2nx}{1 + n^2x^2}$$

koondub ühtlaselt lõigus $X = [0,1]$?

Lahendus. Antud jada piirfunktsioon on

$$f(x) = \lim_{n} \frac{2nx}{1 + n^2x^2} = 0.$$

Et vaadeldav funktsionaaljada koonduks ühtlaselt lõigus X, peab iga $\varepsilon > 0$ korral leiduma indeks $N = N(\varepsilon)$ selline, et kehtiks võrratus

$$|f_n(x)| = |f_n(x) - f(x)| = \frac{2nx}{1 + n^2x^2} < \varepsilon$$

ehk

$$\varepsilon x^2n^2 - 2xn + \varepsilon > 0$$

iga $n \geq N$ korral, sõltumata arvu $x \in X$ valikust. Lahendades viimase võrratuse, saame $\varepsilon \leq 1$ korral

$$n > \frac{x + \sqrt{x^2 - \varepsilon^2x^2}}{\varepsilon x^2} = \frac{1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon x} \quad \text{või} \quad n < \frac{1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon x} < 0.$$

Seega on

$$N = \frac{1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon x}.$$

Saadud $N \neq O(1)$ punkti $x = 0$ ümbruses, sest

$$\lim_{x \to 0+} N = +\infty.$$

Seega vaadeldav funktsionaaljada koondub lõigul X mitte-ühtlaselt.

Sama tulemuse saame ka funktsioonide

$$f_n(x) - f(x) = f_n(x)$$

globaalsete ekstreemumite leidmisega. Et viimased võivad esineda vaid funktsiooni kriitilistes punktides, siis arvutame tuletise

$$\frac{d}{dx} f_n(x) = \frac{2n(1 + n^2x^2) - 2xn\ 2xn^2}{(1 + n^2x^2)^2} = \frac{2n(1 - n^2x^2)}{(1 + n^2x^2)^2} = 0.$$

Seega funktsioonil $f_n(x)$ on olemas vahemikus $(0,1)$ üks kriitiline (statsionaarne) punkt $x = \frac{1}{n}$, kus

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{2n\,\frac{1}{n}}{1 + n^2\,\frac{1}{n^2}} = 1.$$

Järelikult lõigus X

$$|f_n(x) - 0| \not< \varepsilon\ , \quad \text{kui} \quad \varepsilon \leqslant 1.$$

Ülesanded.

Kas järgmised funktsionaaljadad koonduvad ühtlaselt piirkonnas X?

1103. $f_n(x) = x^n$, $X = [0,4/5]$

1104. $f_n(x) = x^n$, $X = [0,1]$

1105. $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$, $X = [0,1]$

1106. $f_n(x) = \frac{1}{x + n}$, $X = (0, \infty)$

1107. $f_n(x) = \frac{nx}{1 + n + x}$, $X = [0,1]$

1108. $f_n(x) = \frac{2nx}{1 + n^2x^2}$, $X = [1,\infty)$

1109. $f_n(x) = n(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x})$, $X = (0,\infty)$

1110. $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$, $X = (-\infty,\infty)$

1111. $f_n(x) = \sin \frac{x}{n}$, $X = (-\infty,\infty)$

1112. $f_n(x) = \sin \frac{x}{n}$, $X = [-10,20)$

<u>Näide 13</u>. Näidata, et funktsionaalrida

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + x^2 + \sin 2x}$$

on ühtlaselt koonduv hulgas $X = (-\infty,\infty)$. Kas see rida koondub absoluutselt?

<u>Lahendus.</u> Antud rida Leibnizi tunnuse põhjal koondub hulgas X, sest üldliikme absoluutväärtus

$$\left|\frac{(-1)^n}{n + x^2 + \sin 2x}\right| = \frac{1}{n + x^2 + \sin 2x} \sim \frac{1}{n}$$

ning läheneb nullile monotoonselt. Et harmooniline rida $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ hajub, siis teise võrdluslause põhjal vaadeldav rida ei koondu absoluutselt ühegi $x \in X$ korral. Seega ei ole ühtlase koonduvuse uurimiseks Weierstrassi tunnus rakendatav. Et vaadeldav funktsionaalrida on iga x korral vahelduvate märkidega, siis võrratuse (7) põhjal

$$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k + x^2 + \sin 2x}\right| < \frac{1}{n + 1 + x^2 + \sin 2x} \leq$$

$$\leqslant \frac{1}{n + x^2} \leqslant \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

kui $n > N = \frac{1}{\varepsilon}$. Et N ei sõltu muutujast $x \in X$, siis vaadeldav rida on ühtlaselt koonduv kogu arvteljel X.

Näide 14. Leida piirkond A, kus funktsionaalrida

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3 + \pi + \arcsin \frac{x}{n}}$$

koondub absoluutselt, ja piirkond G, kus ta koondub ühtlaselt.

Lahendus. Et võrratus

$$\left|\frac{\sin nx}{n^3 + \pi + \arcsin \frac{x}{n}}\right| \leqslant \frac{1}{n^3 + \pi/2} < \frac{1}{n^3}$$

kehtib iga x korral, mil on määratud $\arcsin \frac{x}{n}$, siis Weierstrassi tunnuse põhjal hulk $A = G$ koosneb nendest punktidest x, mille korral

$$\left|\frac{x}{n}\right| \leqslant 1.$$

Et $n \geqslant 3$, siis võrratus kehtib, kui $|x| \leqslant 3$. Seega $A = G = [-3, 3]$.

Ülesanded.

Leida piirkonnad A, kus järgmised funktsionaalread koonduvad absoluutselt, ja piirkonnad G, kus nad koonduvad ühtlaselt.

1113. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!}$

1114. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$

1115. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\arctan nx}{2^n}$

1116. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n + \arccos x}$

1117. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \operatorname{arccot} nx}{3^n}$

1118. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2[1 + (nx)^2]}$

1119. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-n^2x^2)}{n\sqrt{n}}$

1120. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + g^2(x)}$,

kus g määramispiirkond on X

1121. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^2 + n}$

1122. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + \operatorname{arccot} x}$

1123. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + \left|\arcsin \frac{x}{n}\right|}$

1124. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{|x| + n - \ln n}$

1125. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sin^n x}{n^2}$

1126. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4 + x^2}}$

1127. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\arcsin(2x/n)}{n^2 + \sin x} \cos nx$

1128. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + \cos(x/n)}$

1129. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n + x)(n + 1 + x)}$

1130. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{(n + |x|)^2}$

1131. $\sum_{n=0}^{\infty} \arctan \frac{1}{n^2 + x^2 + 1}$

1132. $\sum_{n=2}^{\infty} \ln \left[1 + \frac{1}{n \ln^2 n}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]$

Funktsionaalrea summal on järgmised omadused.

1) Kui funktsionaalrea (12) liikmed $u_n(x)$ on pidevad funktsioonid piirkonnas X ja funktsionaalrida (12) koondub ühtlaselt selles piirkonnas, siis tema piirfunktsioon f(x) on pidev funktsioon piirkonnas X, s.t. iga $a \in X$ korral kehtib võrdus

$$\lim_{x \to a} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x \to a} u_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(a).$$

2) Kui funktsionaalrea (12) liikmed $u_n(x)$ on integreeruvad funktsioonid lõigus $[a,b]$ ja funktsionaalrida (12) koondub ühtlaselt selles lõigus summaks $S(x)$, siis kehtib võrdus

$$\int_a^b S(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx$$

ehk

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx,$$

s.t. ühtlaselt koonduvat funktsionaalrida võib integreerida liikmeti.

3) Kui funktsionaalrida (12) koondub lõigus $[a,b]$ summaks $S(x)$ ja tema liikmetel $u_n(x)$ on olemas pidevad tuletised $u_n'(x)$, kusjuures funktsionaalrida

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n'(x)$$

koondub ühtlaselt lõigus $[a,b]$, siis selles lõigus kehtib võrdus

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n'(x)$$

ehk

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)\right]' = \sum_{n=0}^{\infty} u_n'(x),$$

s.t. koonduvat funktsionaalrida võib liikmeti diferentseerida, kui tulemus on ühtlaselt koonduv.

Analoogilised teoreemid kehtivad ka funktsionaaljada (11) ja tema piirfunktsiooni f(x) kohta.

Ülesanded

Näidata, et järgmised funktsioonid on pidevad oma määramispiirkonnas.

1133. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{5^n}$

1134. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\arctan nx}{n^2 + 1}$

1135. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n + 1)} \arcsin \frac{x}{n}$

1136. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \arccos \frac{x}{n + 1}$

Arvutada järgmised piirväärtused.

1137. $\lim\limits_{x \to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2^n x)}{2^n}$

1138. $\lim\limits_{x \to 0+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^x}$

1139. $\lim\limits_{x \to 0+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n + 1)} \arctan \frac{n}{x}$

1140. $\lim\limits_{x \to 1+} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \arctan \frac{2 + \ln n}{1 - x}$

1141. $\lim\limits_{x \to 2-} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} \operatorname{arccot} \frac{\sin n}{x - 2}$

1142. $\lim\limits_{x \to 3-} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \ln n} \operatorname{arccot} \frac{2^n}{3 - x}$

1143*. $\lim\limits_{x\to 0} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+x}$

1144. Leida funktsiooni

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 + \sin x}$$

maksimaalne väärtus.

1145. Leida funktsiooni

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 3n - 1 + \cos x}$$

minimaalne väärtus.

1146. Leida funktsiooni

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} \arccos^n x$$

globaalsed ekstreemumid.

1147. Leida funktsiooni

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\arcsin|x|}{e}\right)^{n+1}$$

globaalsed ekstreemumid.

Arvutada järgmised integraalid.

1148. $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} \sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}\,dx$

1149. $\int\limits_{0}^{2} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}(1+n)x^n dx$

1150. $\int\limits_{0}^{\pi} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2 + n\cos nx}{5^n}\,dx$

1151. $\int\limits_{1}^{2} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{}{(2x)^{n+1}}\,dx$

1152*. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1-n\sin nx}{2^n}\,dx$

1153. $\int\limits_{0}^{1} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^2}\,dx$

Näidata, et järgmiste funktsioonide tuletised on pidevad kogu määramispiirkonnas.

1154. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \operatorname{arccot} \frac{x}{n}$

1155. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1+|x|}$

1156. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\, x^n} (\frac{1}{n} + \ln x)$

Leida järgmiste funktsioonide tuletised punktis $x = 0$.

1157. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} \arccos \frac{x}{n+1}$

1158. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \arcsin \frac{x}{n}$

§ 5. Astmeread

Funktsionaalrida

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots \quad (13)$$

ehk üldisemalt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots \quad (14)$$

nimetatakse astmereaks. Arve a_n nimetatakse astmerea kordajaiks.

Iga astmerea korral leidub selline R, kus $0 \leqslant R \leqslant \infty$, et astmerida (13) koondub absoluutselt, kui $|x| < R$, ja hajub, kui $|x| > R$; rida (14) aga koondub absoluutselt, kui $|x - a| < R$, ja hajub, kui $|x - a| > R$.

Vahemikke $(-R,R)$ ja $(a - R, a + R)$ nimetatakse vastavalt astmeridade (13) ja (14) koonduvusvahemikeks ja suurust R koonduvusraadiuseks. Koonduvusvahemike otspunktides võib astmerida koonduda tingimisi, koonduda absoluutselt või hajuda.

Kehtib Cauchy - Hadamardi valem

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \tag{15}$$

Astmerea (13) ja (14) koonduvusraadiuse määramiseks võib kasutada järgmisi lihtsamaid valemeid.

1. Kui $a_n \neq 0$, siis koonduvusraadius

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \tag{16}$$

või

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \tag{17}$$

eeldusel, et vaadeldav piirväärtus (lõplik või lõpmatu) on olemas.

Sageli leitakse koonduvusraadiuse määramiseks enne koonduvusvahemik, kasutades positiivsete ridade koonduvustunnuseid.

Näide 15. Leida astmerea

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1} \left(\frac{x}{e}\right)^{2n+1}$$

koonduvusraadius R, koonduvuspiirkond X ja piirkond A, kus ta koondub absoluutselt.

Lahendus. Antud reas esinevad ainult paaritud x astmed, seega paaris astmete kordajad on võrdsed nulliga. Järelikult valemeid (16) ja (17) kasutada ei saa. Koonduvusraadiuse määramiseks kasutame Cauchy - Hadamard'i valemit (15).

Et antud juhul $a_{2n} = 0$, siis

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{|a_{2n+1}|} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{\frac{\ln(n+1)}{n+1}} \frac{1}{e} = \frac{1}{e}$$

ning Cauchy - Hadamard'i valemi põhjal on

$$R = e.$$

Seega vaadeldav astmerida koondub absoluutselt koonduvusvahemikus $(-e,e)$ ja hajub, kui $|x| > e$. Uurime, kuidas vaadeldav astmerida käitub koonduvusvahemiku otspunktides $x = +e$ ja $x = -e$. Kui $x = +e$, siis saame arvrea

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1},$$

mis hajub esimese võrdluslause põhjal, sest

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} > \frac{1}{n+1}, \quad \sum \frac{1}{n+1} = \infty .$$

Kui $x = -e$, siis saame arvrea

$$-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1},$$

mis eelneva põhjal on hajuv. Seega $X = A = (-e,e)$.

Antud astmerea koonduvusraadiuse võime määrata veel teisiti, leides enne koonduvusvahemiku positiivsete ridade koonduvustunnuste abil. Näiteks D'Alembert'i tunnuse abil saame

$$D_n^* = \frac{\ln(n+2)}{n+2}\left|\frac{x}{e}\right|^{2n+3}\frac{n+1}{\ln(n+1)}\left|\frac{e}{x}\right|^{2n+1} =$$

$$= \frac{\ln(n+2)}{\ln(n+1)}\,\frac{n+1}{n+2}\left|\frac{x}{e}\right|^{2} \to \left|\frac{x}{e}\right|^{2}$$

Seega rida koondub, kui $|x| < e$, ja hajub, kui $|x| > e$. Järelikult $R = e$.

Näide 16. Leida astmerea

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{n+1}\left(\frac{x-2}{10}\right)^n$$

koonduvusraadius R, koonduvuspiirkond X ja piirkond A, kus ta koondub absoluutselt.

Lahendus. Vaadeldavas astmereas on kõik kordajad nullist erinevad, seega võime rakendada R leidmiseks valemit (17). Saame

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\ln(n+1)}{n+1}}\;\frac{1}{10} = \frac{1}{10},$$

kust

$$R = 10.$$

Seega vaadeldav astmerida koondub absoluutselt koonduvusvahemikus

$$(2 - R,\ 2 + R) = (-8,12)$$

ja hajub, kui $|x - 2| > 10$. Uurime, kuidas vaadeldav astmerida käitub koonduvusvahemiku otspunktides $x = -8$ ja $x = 12$. Kui $x = 12$, siis saame arvrea

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{n+1} = \infty .$$

Kui aga $x = -8$, siis saame arvrea

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n+1)}{n+1},$$

mis koondub(tingimisi) Leibnizi tunnuse põhjal. Kokkuvõttes oleme saanud, et

$$X = [-8,12), \quad A = (-8,12).$$

Ülesanded

Leida järgmiste astmeridade koonduvusraadius R, koonduvuspiirkond X ja piirkond A, kus nad koonduvad absoluutselt.

1159. $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$

1160. $\sum_{n=0}^{\infty} (-2x)^n$

1161. $\sum_{n=0}^{\infty} 5^{-n} x^n$

1162. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^n$

1163. $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n (x+2)^n$

1164. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^n} (x-3)^n$

1165. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n+1}$

1166. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{4}\right)^n$

1167. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{x}{10}\right)^n$

1168. $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)!\, x^n$

1169. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$

1170. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n-1}\right)^{2n} x^n$

1171. $\sum_{n=0}^{\infty} (nx)^n$

1172. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)^2}$

1173. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^{\alpha}}$

1174. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

1175. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n+1)!}$

1176. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n^{\alpha}}$

1177. $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^{2n}$

1178. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)^n}{n!}$

1179. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} x^n$

1180. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} x^n$

1181. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$

1182. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!}$

1185. $\sum_{n=1}^{\infty} n^n (x-3)^n$

1184. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,4^n} (x+5)^{2n-1}$

1185. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,x^n}{n^n}$

1186. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{2n}}{(n+1)\ln(n+1)}$

1187. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(n+1)\ln^2(n+1)}$

1188. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} (x-2)^n$

1189. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n x^n$

Astmerida (13), mille koonduvusraadius on R, koondub ühtlaselt igas lõigus $[-r,r]$, kus $r<R$.

Astmerea (13) summa f(x) on pidev funktsioon tema koonduvusvahemikus (-R,R).

Astmerida (13) võib igas lõigus $[0,x]$, kus $x \in (-R,R)$, liikmeti integreerida, kusjuures

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \tag{18}$$

Astmerida (13) võib koonduvusvahemiku (-R,R) igas punktis x liikmeti diferentseerida, kusjuures

$$\frac{d}{dx} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, x^{n-1}. \qquad (19)$$

Astmeridade (13), (15) ja (16) koonduvusraadiused on võrdsed.

Sama kehtib ka astmerea (14) korral.

Abeli lemma. Kui astmerida (13) koondub koonduvusvahemiku parempoolses otspunktis $x = R$ (vastavalt vasakpoolses otspunktis $x = -R$), siis selle astmerea summa $f(x)$ on vasakult pidev kohal $x = R$, s.t.

$$f(R-) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

(vastavalt paremalt pidev kohal $x = -R$, s.t.

$$f(-R+) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n R^n \quad).$$

Näide 17. Leida astmerea

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n}}{n(4n-1)}$$

summa $f(x)$.

Lahendus. Kuna

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{x^{4n}}{n(4n-1)}\right] = 4\, \frac{d}{dx}\left(\frac{x^{4n-1}}{4n-1}\right) = 4\, x^{4n-2},$$

siis võime leida $f(x)$ sel teel, et integreerime liikmeti 2 korda geomeetriliselt rida

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{4n-2} = \frac{x^2}{1-x^4}$$

lõigus $[0,x] \subset (-1,1)$, mille tegur $q = x^4$ ja koonduvusraadius R = 1. Kuna astmerea integreerimisel tema koonduvusraadius ei muutu, siis rea integreerimisel saame

$$\int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} x^{4n-2}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x x^{4n-2}dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-1}}{4n-1} = g(x)$$

ja tema summa integreerimisel saame

$$g(x) = \int_0^x \frac{x^2}{1-x^4}\,dx = \int_0^x \left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right) - \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+x^2}\right]dx =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{2}\arctan x.$$

Arvestades, et

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n}}{n(4n-1)} = 4\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x \frac{x^{4n-1}}{4n-1}\,dx = 4\int_0^x \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-1}}{4n-1}dx =$$

$$= 4\int_0^x g(x)\,dx,$$

siis iga $x \in (-1,1)$ korral saame

$$f(x) = \int_0^x \left[\ln(1+x) - \ln(1-x) - 2\arctan x\right]dx =$$

$$= \Big\{\left[(1+x)\ln(1+x) - x\right] - \left[-(1-x)\ln(1-x) - x\right] -$$

$$- 2\left[x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]\Big\}\Big|_0^x =$$

$$= (1+x)\ln(1+x) + (1-x)\ln(1-x) -$$

$$- 2x\arctan x + \ln(1+x^2).$$

Antud astmerida on aga koonduv (absoluutselt) lõigus $X = [-1,1]$. Seepärast on f(x) Abeli lemma põhjal (ühepoolselt) pidev ka koonduvusvahemiku (-1,1) otspunktides $x = -1$ ja $x = 1$, ning kokkuvõttes saame

$$f(x) = \left[(1 + x)\ln(1 + x) + (1 - x)\ln(1 - x)\right] -$$
$$- 2x \arctan x + \ln(1 + x^2)$$

määramispiirkonnaga $X = [-1,1]$.

Näide 18. Leida astmerea

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n + 2)x^{2n+1}$$

summa $f(x)$.

Lahendus. Et vaadeldava astmerea koonduvusraadius $R = 1$, siis iga $x \in (-1,1)$ korral on

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n + 2)x^{2n+1} = 2f(x) - 2 \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1} =$$
$$= 2f(x) - \frac{2x}{1 - x^2},$$

Seega on vaja leida astmerea

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n + 2)x^{2n+1}$$

summa $g(x)$. Seda võime leida geomeetrilise rea

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+2}$$

liikmeti diferentseerimise teel, sest

$$\int_0^x (2n + 2)x^{2n+1} dx = x^{2n+2}.$$

Kuna

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} x^{2n+2} = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+2} = \frac{d}{dx} \frac{x^2}{1 - x^2} =$$
$$= \frac{2x(1 - x^2) - x^2(-2x)}{(1 - x^2)^2} = \frac{2x}{(1 - x^2)^2},$$

siis

$$f(x) = \frac{1}{2} g(x) + \frac{x}{1 - x^2} = \frac{x}{1 - x^2} + \frac{x}{(1 - x^2)^2} = \frac{x(2 - x^2)}{(1 - x^2)^2}$$

määramispiirkonnaga $X = (-1,1)$.

Ülesanded

Leida järgmiste astmeridade summad.

1190. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$

1191. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)x^n$

1192. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$

1193. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n+1}$

1194. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n+1}$

1195. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}$

1196. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n n(n-1)x^n$

1197. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$

1198. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{n(n+1)}$

1199. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

1200. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

Kasutades eelmiste ülesannete vastuseid, leida järgmiste arvridade summad.

1201. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

1202. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2^n}$

1203. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)3^n}$

1204. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n(n-1)}{5^n}$

1205. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}$

1206. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

§ 6. Funktsioonide arendamine astmereaks

Kui iga $x \in X = (a - R, a + R)$ korral on

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n,$$

siis öeldakse, et $f(x)$ on vahemikus X arendatav astmereaks (14). Astmereaks (14) saab arendada ainult niisugust funktsiooni $f(x)$, millel on olemas igat järku tuletised vahemikus X.

Kui funktsioon on arendatav astmereaks (14), siis selle rea kordajad a_n avalduvad $f(x)$ kaudu valemiga (kus $0! = 1$)

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \quad (n = 0, 1, \ldots) \tag{20}$$

Arvu (20) nimetatakse funktsiooni $f(x)$ Taylori kordajateks.

Astmerida, mille kordajad on antud valemiga (20), s.t. astmerida

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n, \tag{21}$$

nimetatakse funktsiooni $f(x)$ Taylori reaks. Kui $a = 0$, siis saame rea

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \tag{22}$$

mida nimetatakse funktsiooni $f(x)$ Maclaurini reaks.

Vahemikus X igat järku diferentseeruv funktsioon $f(x)$ on arendatav Taylori reaks (21) selles vahemikus parajasti siis, kui $f(x)$ Taylori valemi jääkliige $\alpha_n(x)$

rahuldab vahemikus X tingimust

$$\lim_{n \to \infty} \alpha_n(x) = 0.$$

Seega, kui funktsioon f(x) on arendatav astmereaks (14) (vastavalt (13)) vahemikus X, siis see astmerida on f(x) Taylori rida (vastavalt Maclaurini rida). Seepärast funktsiooni arendamiseks astmereaks võime kordajate (20) arvutamise asemel sageli kasutada tuntud astmeridu, millest liitmise, korrutamise, liikmeti diferentseerimise ja integreerimise jne. teel saame vaadeldava funktsiooni astmerea. Näiteks, näidetes 17 ja 18 on selliseks tuntud astmereaks võetud geomeetriline rida.

Tuntuimad astmeread on järgmised:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \tag{23}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \tag{24}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \tag{25}$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \tag{26}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \tag{27}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \tag{28}$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \tag{29}$$

kusjuures astmeridadel (23), (24) ja (25) on koonduvusraadius $R = \infty$, binoomreal (26), geomeetrilisel real (27) ja ridadel (28) ja (29) on $R = 1$.

Näide 19. Arendada funktsioon arcsin x Maclaurini reaks.

Lahendus. Et

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},$$

ja valemi (26) põhjal (võttes $\alpha = -\frac{1}{2}$ ja $x = -t^2$) on

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-0{,}5}{n} (-t^2)^n =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)\ldots(-\frac{1}{2}+1-n)}{n!} t^{2n}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n\, n!} t^{2n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} t^{2n},$$

kus $(-1)!! = 1$. Et astmerea (26) koonduvusraadius $R = 1$, siis iga $x \in (-1,1)$ korral võime saadud astmerea liikmeti integreerida. Seega iga $x \in (-1,1)$ korral on

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \int_0^x t^{2n}dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)} x^{2n+1}$$

Saadud astmerida on aga koonduv (absoluutselt) ka punktides $x = \pm 1$, kuna sel korral on tegemist arvreaga

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)},$$

mille jaoks

$$D_n = \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!(2n+3)} \; \frac{(2n)!!(2n+1)}{(2n-1)!!} = \frac{2n+1}{2n+2}\;\frac{2n+1}{2n+3} =$$

$$= \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)} \longrightarrow 1$$

Et

$$R_n = n(1 - D_n) = n\left[1 - \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)}\right] =$$

$$= \frac{n}{2(n+1)(2n+3)}(4n^2+10n+6-4n^2-4n-1) =$$

$$= \frac{n(6n+5)}{2(n+1)(2n+3)} \to \frac{3}{2} > 1,$$

siis Raabe tunnuse põhjal on rida koonduv. Abeli lemma põhjal jääb saadud reaksarendus kehtima ka punktides $x = \pm 1$. Seega iga $x \in [-1,1]$ on

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)} x^{2n+1}.$$

Näide 20. Arvutada

$$\lim_{x\to 0} \frac{2(\tan x - \sin x) - x^3}{x^5}$$

Lahendus. Arendame lugeja Taylori valemi põhjal kuni astmeni x^5 jääkliikmega Peano kujus. Seda on kerge teha valemite (24) ja (25) põhjal, kust punkti $x = 0$ ümbruses saame

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$

ning jagades leiame

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5).$$

Järelikult

$$\lim_{x\to 0}\frac{2(\tan x - \sin x) - x^5}{x^5} = \lim_{x\to 0}\frac{2\left[\frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{8} + o(x^5)\right] - x^3}{x^5} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^5}{4} + o(x^5)}{x^5} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{4} + o(1)\right] = \frac{1}{4}.$$

<u>Näide 21</u>. Arvutada integraal

$$\int_0^{1/2}\frac{\sin x}{x}\,dx$$

täpsusega kuni 10^{-4}.

<u>Lahendus.</u> Integraalialuse funktsiooni võime asendada funktsiooniga

$$f(x) = \begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & \text{kui } x \neq 0,\\ 1, & \text{kui } x = 0\end{cases}$$

mis on pidev ka punktis $x = 0$. Valemit (24) saame

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Et viimase astmerea koonduvusraadius $R = \infty$, siis võime teda liikmeti integreerida igas vahemikus. Seega

$$\int_0^{1/2} f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^{1/2}\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}\,dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}\Bigg|_0^{1/2} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!(2n+1)2^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n.$$

Saame

$$a_0 = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$a_1 = \frac{1}{3!3\cdot 2^3} = \frac{1}{6\cdot 3\cdot 8} = \frac{1}{144} = 0,00694$$

$$a_2 = \frac{1}{5!5\cdot 2^5} = \frac{1}{120\cdot 5\cdot 32} = \frac{1}{32\cdot 600}$$

Kuna saadud rida on vahelduvate märkidega, siis valemi (7) põhjal näeme, et juba $|R_1| < a_2 < 10^{-4}$. Seega

$$\int_0^{1/2} \frac{\sin x}{x}\,dx = 0,5 - 0,00694 \pm 10^{-4} = 0,49306 \pm 10^{-4}.$$

Arvutatud integraali täpsust võime teisiti hinnata ka Taylori valemi jääkliikme kaudu Lagrange'i või Cauchy kujul.

Ülesanded

Olgu

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp(-x^{-2}), & \text{kui } x \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x = 0. \end{cases}$$

Kas järgmised funktsioonid f(x) on arendatavad Taylori reaks punkti $x = a$ ümbruses?

1207. $f(x) = \varphi(x) + \sin x, \quad a = 0$

1208. $f(x) = \varphi(x) + \ln(1 + x), \quad a = 0$

1209. $f(x) = \varphi(x - 1) + \ln x, \quad a = 1$

1210. $f(x) = \varphi(x - 1) + \ln x, \quad a = 2$

Leida järgmiste funktsioonide f(x) Maclaurini rea (22) osasumma kuni astmeni x^5 kaasa arvatud.

1211. $f(x) = (1 + x)^x$

1212. $f(x) = \ln(1 + e^x)$

1213. $f(x) = \tan x$

1214. $f(x) = \operatorname{th} x$

1215. $f(x) = \dfrac{1}{1 - x - x^2}$

1216. $f(x) = \dfrac{1}{1 + x + x^2}$

1217*. $f(x) = \arctan^2 x$

1218*. $f(x) = \dfrac{\ln(1 + x)}{1 + x}$

1219*. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} - \cot x, & \text{kui } x \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x = 0 \end{cases}$

1220*. $f(x) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n + 1}\right]^{-1}$

Arendada järgmised funktsioonid Taylori reaks punkti $x = a$ ümbruses.

1221. $f(x) = \frac{1}{x}$, $a = 2$

1222. $f(x) = \ln x$, $a = 1$

1223. $f(x) = e^x \sin x$, $a = 0$

1224. $f(x) = \cos x \operatorname{ch} x$, $a = 0$

1225. $f(x) = \sin \frac{\pi x}{4}$, $a = 2$

1226. $f(x) = \log(1 + x)$, $a = 0$

Järgmised funktsioonid $f(x)$ arendada Maclaurini reaks, kasutades valemeid (23) - (29) ja määrata nende koonduvusraadiused R.

1227. $f(x) = e^{2x}$

1228. $f(x) = e^{-x^2}$

1229. $f(x) = \sin \frac{x}{2}$

1230. $f(x) = \cos 2x$

1231. $f(x) = \sin^2 x$

1232. $f(x) = \cos^2 x$

1233. $f(x) = a^x$

1234*. $f(x) = (x - \tan x)\cos x$

1235. $f(x) = \operatorname{sh} x$

1236. $f(x) = \operatorname{ch} x$

1237. $f(x) = \frac{1}{(1 - x)^2}$

1238. $f(x) = \frac{x^9}{1 - x}$

1239. $f(x) = \frac{1 + x}{(1 - x)^3}$

1240. $f(x) = \frac{1}{2 - x}$

1241. $f(x) = \frac{1}{3 - x}$

1242. $f(x) = \frac{5 - 2x}{6 - 5x + x^2}$

1243. $f(x) = \frac{12 - 5x}{6 - 5x + x^2}$

1244. $f(x) = \frac{x}{(1 - x)(1 - x^2)}$

1245. $f(x) = x \ln(1 + x)$

1246. $f(x) = \ln(1 + \frac{x}{2})$

1247. $f(x) = \ln(8 + x)$

1248*. $f(x) = \ln(1+x+x^2+x^3)$

1249. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - 3x}}$

1250. $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$

1251. $f(x) = \sqrt[3]{27 - x^3}$

1252. $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$

1253. $f(x) = \ln\left[(1 + x)^{1+x}\right] + \ln\left[(1 - x)^{1-x}\right]$

1254. $f(x) = (1 + x)e^{-x} - (1 - x)e^{x}$

1255.
$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & \text{kui } x \neq 0, \\ 1, & \text{kui } x = 0 \end{cases}$$

1256.
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sh} x}{x}, & \text{kui } x \neq 0, \\ 1, & \text{kui } x = 0 \end{cases}$$

Järgmised funktsioonid $f(x)$ arendada Maclaurini reaks, integreerides tuletist $f'(x)$, ja määrata nende koonduvusraadius R.

1257. $f(x) = \operatorname{arsh} x$

1258. $f(x) = \operatorname{arth} x$

1259. $f(x) = x \arctan x - \ln(1 + x^2)$

1260. $f(x) = \arccos x$

1261. $f(x) = x \arccos x - \sqrt{1 - x^2}$

1262. $f(x) = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$

1263*. $f(x) = x \operatorname{arsh} x - \sqrt{1 + x^2}$.

Järgmised funktsioonid f(x) arendada Taylori reaks Taylori kordajaid arvutamata ja määrata koonduvusraadius R.

1264. $f(x) = \ln \frac{1 + x}{1 - x} + 2\arctan x$

1265. $f(x) = 2x \arctan x - \ln(1 + x^2)$

1266. $f(x) = \sin \frac{\pi x}{4}$

1267. $f(x) = \ln(2 - x)$

1268. $f(x) = \cos(x - 3)$

1269*. $f(x) = \sin(1 - x^3)$

1270. $f(x) = \arctan(2 - x)$

1271. $f(x) = \frac{3x}{x^2 - 3x + 2}$

1272. $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt$

1273. $f(x) = \ln|x| - \int_1^x \frac{\cos t}{t}\, dt$

1274. $f(x) = x\sqrt{4 - x^2} - 4 \arcsin \frac{x}{2}$

1275. $f(x) = \int_x^1 \frac{e^t}{t}\, dt + \ln|x|$

1276. $f(x) = \int_0^x \exp(-t^2)dt$

1277. $f(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 - t^4}}$

1278. $f(x) = \int_0^x \sqrt{1 + t^3}\, dt$

1279. $f(x) = \int_0^x \frac{\arctan t}{t}\, dt$

1280. $f(x) = \exp x^2 \cdot \int\limits_0^x \exp(-t^2)dt$

Leida järgmiste astmeridade summad.

1281. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$

1282. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}(n - 1)x^n$

1283. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} n(n - 1)x^n$

1284. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n(n + 1)^2x^n$

1285. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n + 1}$

1286. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{n + 1}$

1287. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+2}}{n + 2}$

1288. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n + 1)!}$

1289. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(2n + 3)!}$

1290. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n + 2)!}$

1291. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n - 1)!!}{(2n)!!}x^n$

1292. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(2n - 3)!!}{(2n)!!} x^n$

1293. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n - 1)!!}{(2n)!!}x^{2n+1}$

1294. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n-3)!!\, x^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)}$

1295. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(2n - 1)!!}{(2n)!!} x^{2n}$

1296. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} x^{2n}$

Kasutades valemit (20), arvutada $f^{(n)}(a)$.

1297. $f(x) = \frac{x}{1 + x^2}$, $n = 6$, $a = 0$

1298. $f(x) = \frac{x}{1 + x^2}$, $n = 5$, $a = 0$

1299. $f(x) = x^2 \sqrt[4]{1 + x}$, $n = 4$, $a = 0$

1300. $f(x) = x^2 \sqrt[4]{1 + x}$, $n = 5$, $a = 0$

1301. $f(x) = x^4e^x, \quad n = 10, \quad a = 0$

1302. $f(x) = x^4e^x, \quad n = 10, \quad a = 1$

1303. $f(x) = x^2 \sin x, \quad n = 7, \quad a = 0$

1304. $f(x) = x^2 \sin x, \quad n = 7, \quad a = 3$

Kasutades Taylori rida, arvutada järgmised piirväärtused.

1305. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \ln(1 + x)}{\arcsin x}$

1306. $\lim\limits_{x\to 0-} \ln \frac{\ln(1 + x) - x}{\sin x}$

1307*. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x + \ln(\sqrt{1 + x^2} - x)}{x^2 \sin x}$

1308. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1 + x + x^2) + \ln(1 - x + x^2)}{(e^x - 1)\tan x}$

1309. $\lim\limits_{x\to \infty} \left[x - x^2\ln(1 + \frac{1}{x})\right]$

1310. $\lim\limits_{x\to 0} (\cot^2 x - \frac{1}{x^2})$

1311. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\cot x}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$

1312. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{3}{x^4} - \frac{2+\cos x}{x^3 \sin x}\right)$

Arvutada ligikaudu järgmised integraalid täpsusega α.

1313. $\int_0^1 e^{-x^2}dx, \quad \alpha = 10^{-3}$

1314. $\int_0^{1/4} e^{-x^2}dx, \quad \alpha = 10^{-5}$

1315. $\int_2^4 e^{\frac{1}{x}}\, dx, \quad \alpha = 10^{-3}$

1316. $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, dx, \quad \alpha = 10^{-3}$

1317. $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\cos x}{x}\, dx, \quad \alpha = 10^{-4}$

1318. $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1 + x^4}}, \quad \alpha = 10^{-4}$

1319. $\int_{1/10}^{1} \frac{e^x}{x}\, dx, \quad \alpha = 10^{-3}$

1320. $\int_{0,1}^{0,2} \frac{dx}{x^3e^x}, \quad \alpha = 10^{-3}$

1321. $\int_0^{1/2} e^{\sin x}\, dx, \quad \alpha = 10^{-4}$

1322. $\int_0^{\pi/6} \sqrt{\cos x}\, dx, \quad \alpha = 10^{-3}$

1323. $\int_0^{1/2} \frac{\arctan x}{x}\, dx, \quad \alpha = 10^{-3}$

1324. $\int_0^{1} \cos x^2\, dx, \quad \alpha = 10^{-3}$

1325. $\int_0^{1/4} \ln(1 + \sqrt{x})dx, \quad \alpha = 10^{-3}$

1326. $\int_0^{1} x^x\, dx, \quad \alpha = 10^{-3}$

1327. $\int_0^{1/2} \frac{\arcsin x}{x}\, dx, \quad \alpha = 10^{-3}$

1328. $\int_0^{1} \cos \sqrt{x}\, dx, \quad \alpha = 10^{-4}$

§ 7. Fourier' read

Olgu funktsioon $f(x)$ kas määratud vahemikus $(-\pi, \pi)$ või perioodiline perioodiga 2π.

Funktsionaalrida

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

nimetatakse funktsiooni $f(x)$ trigonomeetriliseks Fourier' reaks vahemikus $(-\pi, \pi)$ ja kirjutatakse

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{30}$$

kui Fourier' kordajad a_n ja b_n on määratud valemitega

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx \quad (n=0,1,\dots), \tag{31}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n=1,2,\dots).$$

Igal absoluutselt integreeruval funktsioonil f(x) on olemas trigonomeetriline Fourier' rida, kusjuures f(x) võib olla ka tõkestamata.

Kui funktsiooni f(x) on vaja esitada Fourier' reana mingis teises vahemikus $(a, a+2\pi)$, siis kordajate jaoks kehtivad samad valemid, kuid integreerimislõik on siis $[a, a+2\pi]$.

Kui f(x) on paarisfunktsioon vahemikus $(-\pi, \pi)$, siis

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \tag{32}$$

kus Fourier' kordajad

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n=0,1,\dots). \tag{33}$$

Kui f(x) on paaritu funktsioon vahemikus $(-\pi, \pi)$, siis

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \tag{34}$$

kus Fourier' kordajad

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n=1,2,\dots). \tag{35}$$

Dirichlet' teoreem. Kui absoluutselt integreeruv funktsioon f(x) on perioodiline perioodiga 2π, siis igas punktis x, kus on olemas lõplikud ühepoolsed tuletised

$f'(x+)$ ja $f'(x-)$, koondub funktsiooni $f(x)$ Fourier' rida summaks

$$S(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

Erijuhul, kui $f(x)$ on pidev punktis x, siis $S(x) = f(x)$.

Teoreem kehtib ka juhul, kui $f(x)$ pole perioodiline, aga on määratud lõigul $[-\pi, \pi]$. Viimasel juhul punktides $x = -\pi$ ja $x = \pi$ on

$$S(\pi) = S(-\pi) = \frac{f(-\pi+) + f(\pi-)}{2}.$$

Kui funktsioon $f(x)$ on määratud vaid lõigus $[0,\pi]$, siis saab funktsiooni $f(x)$ arendada Fourier' reaks sel teel, et arendame Fourier' ritta poollõigus $(-\pi, \pi]$ sellise absoluutselt integreeruva funktsiooni $g(x)$, mille korral $g(x) = f(x)$ lõigus $[0,\pi]$. Valides

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{kui} \quad x \in [0,\pi], \\ f(-x), & \text{kui} \quad x \in [-\pi,0], \end{cases}$$

saame paarisfunktsiooni lõigus $[-\pi, \pi]$ ja tema Fourier' rida tuleb koosinusrida (32), mille kordajad arvutatakse valemiga (33). Valides

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{kui} \quad x \in [0,\pi], \\ -f(-x), & \text{kui} \quad x \in [-\pi,0], \end{cases}$$

saame paaritu funktsiooni lõigus $[-\pi,\pi]$ ja tema Fourier' rida tuleb siinusrida (34), mille kordajad arvutatakse valemiga (35).

Kui $f(x)$ on antud lõigus $[-T,T]$ või on perioodiline perioodiga $2T$, siis tema Fourier' rida tuleb kujul

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{T} + b_n \sin\frac{n\pi x}{T}, \qquad (36)$$

kus

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} f(x) \cos \frac{n\pi x}{T}\, dx \quad (n=0,1,\ldots),$$

$$b_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} f(x) \cos \frac{n\pi x}{T}\, dx \quad (n=1,2,\ldots).$$

Rea (36) koonduvuse uurimisel kasutatakse Dirichlet' teoreemile analoogilist teoreemi.

Funktsiooni $f(x)$ nimetatakse <u>integreeruva ruuduga funktsiooniks lõigus</u> $[a,b]$, kui korraga on olemas (harilikud või päratud) Riemanni integraalid

$$\int_a^b f(x)\, dx \quad \text{ja} \quad \int_a^b f^2(x)\, dx.$$

Kui $f(x)$ on integreeruva ruuduga funktsioon lõigus $[-\pi,\pi]$, siis Fourier' kordajate ruutude rida on koonduv, s.t.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) < \infty,$$

ning kehtib <u>Parsevali võrdus</u>

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx.$$

Kui

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) < \infty,$$

siis Fourier' rida (26) koondub absoluutselt ja ühtlaselt kogu arvteljel $(-\infty, \infty)$.

Järgmine tunnus võimaldab otsustada Fourier' rea ühtlase koonduvuse üle mitte Fourier' kordajate kaudu, vaid funktsiooni $f(x)$ omaduste põhjal.

Ühtlase koonduvuse tunnus. Kui lõigus $[-\pi,\pi]$ pideval funktsioonil on $f(-\pi) = f(\pi)$ ja eksisteerib integreeruva ruuduga tuletis $f'(x)$, siis funktsiooni $f(x)$ Fourier' rida (30) koondub lõigus $[-\pi,\pi]$ absoluutselt ja ühtlaselt funktsiooniks $f(x)$.

Funktsiooni $f(x)$ Fourier' rida (30) võib igas lõigus $[0,x] \subset [-\pi,\pi]$ liikmeti integreerida, kusjuures tulemus on ühtlaselt koonduv rida lõigus $[-\pi,\pi]$ ning kehtib võrdus

$$\int_0^x f(t)dt - \frac{a_0}{2} x = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n} \sin nx - \frac{b_n}{n} \cos nx\right).$$

(siin võrduse parema pool on vasakul oleva funktsiooni Fourier' rida).

Näide 22. Arendada funktsioon

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } 0 \leqslant x < h, \\ x - h, & \text{kui } h \leqslant x \leqslant \pi, \end{cases}$$

Fourier' siinusreaks ja koosinusreaks ning uurida nende koonduvust. Leida arvridade

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)} \quad \text{ja} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

summad.

Lahendus. Et arendada $f(x)$ Fourier' siinusreaks (34), loeme ta lõigus $[-\pi,\pi]$ paarituks funktsiooniks. Siis $a_n = 0$ ja valemit (35) saame

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_h^{\pi} (x - h) \sin nx \, dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-(x-h)\frac{\cos nx}{n}\Big|_h^{\pi} + \frac{1}{n}\int_h^{\pi} \cos nx \, dx \right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-(\pi - h)\frac{\cos n\pi}{n} + \frac{1}{n^2}\sin nx \Big|_h^{\pi} \right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[(-1)^{n+1}\frac{\pi - h}{n} - \frac{\sin nh}{n^2} \right].$$

Et f(x) on pidev lõigus $[0,\pi]$ ja $f'(x) = 0$, kui $0 \leqslant x < h$, $f'(x) = 1$, kui $h < x \leqslant \pi$, ning $f'(h-) = 0$, $f'(h+) = 1$, siis lõigus $[0,\pi]$ on Dirichlet' teoreemi põhjal tema Fourier' rida koonduv ja

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^{n+1}\frac{\pi - h}{n} - \frac{\sin nh}{n^2}\right]\sin nx.$$

Võttes siin $h = 0$, saame funktsiooni $f(x) = x$ jaoks koonduva Fourier' rea

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}.$$

Valides $x = \frac{\pi}{2}$, saame

$$\frac{\pi}{2} = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n} =$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2k-1+1}\frac{\sin(2k-1)\frac{\pi}{2}}{2k-1} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k-1},$$

kust

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k-1} = \frac{\pi}{4}.$$

Kuna $f(x) = x$ on pidev ja järelikult integreeruva ruuduga, siis Parsevali võrduse põhjal

$$4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx=\frac{2x^3}{3\pi}\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{3}\pi^2,$$

kust

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Et arendada funktsioon f(x) Fourier' koosinusreaks (32), loeme ta lõigus $[-\pi,\pi]$ paarisfunktsiooniks. Siis $b_n = 0$ ja valemi (33) põhjal saame $n = 1,2,\ldots$ korral

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_h^{\pi}(x-h)\cos nx\,dx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[(x-h)\frac{\sin nx}{n}\Big|_h^{\pi}-\frac{1}{n}\int_h^{\pi}\sin nx\,dx\right]=$$

$$=\frac{2}{\pi n^2}\cos nx\Big|_h^{\pi}=\frac{2}{\pi n^2}\left[(-1)^n-\cos n\,h\right]$$

ja

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_h^{\pi}(x-h)dx=\frac{(x-h)^2}{\pi}\Big|_h^{\pi}=\frac{(\pi-h)^2}{\pi}.$$

Et f(x) on pidev, $f(-\pi) = f(\pi)$ ja $f'(x)$ on integreeruva ruuduga funktsioon, siis f(x) Fourier' rida koondub funktsiooniks f(x) lõigus $[0,\pi]$ absoluutselt ja ühtlaselt. Seega

$$f(x)=\frac{(\pi-h)^2}{2\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-\cos nh}{n^2}\cos nx.$$

Ülesanded

Arendada järgmised funktsioonid Fourier' reaks ja uurida nende koonduvust.

1329*. $f(x) = \operatorname{sgn} x$, vahemikus $[-\pi, \pi)$

1330. $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kui } -\pi \leq x < 0, \\ 3, & \text{kui } 0 < x < \pi \end{cases}$

1331. $f(x) = \begin{cases} 2, & \text{kui } 0 \leq x < T; \\ 0, & \text{kui } T < x < 2T \end{cases}$

1332. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{kui } -\pi < x < 0, \\ 2, & \text{kui } x = 0, \\ 3x, & \text{kui } 0 < x < \pi \end{cases}$

1333. $f(x) = x$, kui $-\pi < x \leq \pi$

1334. $f(x) = x$, kui $0 \leq x \leq 2\pi$

1335. $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ vahemikus $(0, 2\pi)$

1336. $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ vahemikus $(-\pi, \pi)$

1337*. $f(x) = |x|$ lõigus $[-\pi, \pi]$

1338. $f(x) = |x|$ vahemikus $(-T, T)$

1339. $f(x) = x^2$ lõigus $[-\pi, \pi]$

1340. $f(x) = x^2$ vahemikus $[0, 2\pi)$

1341. $f(x) = x^3$ vahemikus $[-\pi, \pi)$

1342. $f(x) = x^3$ vahemikus $(0, 2\pi)$

1343. $f(x) = e^x - 1$ vahemikus $(0, 2\pi)$

1344. $f(x) = e^x$ vahemikus $(-\pi, \pi)$

1345. $f(x) = e^x$ vahemikus $(-T, T)$

1346. $f(x) = \cos \pi x$ vahemikus $(-\pi, \pi)$

1347. $f(x) = \sin \pi x$ vahemikus $(-\pi, \pi)$

1348. $f(x) = \sin \pi x$ vahemikus $(0, 2\pi)$

1349. $f(x) = \pi^2 - x^2$ vahemikus $(-\pi, \pi)$

1350. $f(x) = x \sin x$ vahemikus $(-\pi, \pi)$

1351. $f(x) = \operatorname{ch} x$ vahemikus $(-\pi, \pi)$

1352. $f(x) = \operatorname{sh} x$ vahemikus $(-\pi, \pi)$

1353. $f(x) = (\pi^2 - x^2)^2$ lõigus $[-\pi, \pi]$

Arendada järgmised perioodilised funktsioonid Fourier' reaks ja uurida nende koonduvust.

1354*. $f(x) = |\sin x|$

1355. $f(x) = |\cos x|$

1356. $f(x) = \operatorname{sgn} \cos x$

1357. $f(x) = \arcsin(\sin x)$

1358. $f(x) = \arcsin(\cos x)$

1359. $f(x) = x - [x]$

1360. $f(x) = \ln\left|\sin \frac{x}{2}\right|$

1361. $f(x) = \ln\left|\cos \frac{x}{2}\right|$

1362*. $f(x) = \ln\left|\tan \frac{x}{2}\right|$

Arendada järgmised funktsioonid Fourier' koosinusreaks lõigus $[0, \pi]$ ja uurida nende koonduvust.

1363. $f(x) = 1$

1364. $f(x) = \sin x$

1365. $f(x) = x$

1366. $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$

1367. $f(x) = \frac{\pi - 2x}{4}$

1368*. $f(x) = \sin \pi x$

1369. $f(x) = x \cos x$

1370. $f(x) = x(\pi - x)$

1371. $f(x) = -\ln(2 \sin \frac{x}{2})$

1372. $f(x) = -\ln(\sin \frac{x}{2})$

1373. $f(x) = \ln(2 \cos \frac{x}{2})$

1374*. $f(x) = \frac{1}{2} \ln \cot \frac{x}{2}$

Arendada järgmised funktsioonid Fourier' siinusreaks lõigus $[0, \pi]$ ja uurida nende koonduvust.

1375. $f(x) = 1$

1376. $f(x) = \cos x$

1377. $f(x) = \cos \pi x$

1378. $f(x) = \frac{\pi - 2x}{4}$

1379. $f(x) = x^2$

1380. $f(x) = x(\pi - x)$

1381. $f(x) = \operatorname{ch} x$

1382. $f(x) = -x \cos x$

1383.
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\pi}, & \text{kui } 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{3}, \\ \dfrac{1}{3}, & \text{kui } \dfrac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant \dfrac{2\pi}{3}, \\ \dfrac{\pi - x}{\pi}, & \text{kui } \dfrac{2\pi}{3} \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

Leida järgmiste arvridade summad.

1384*. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}$

1385*. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$

1386*. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$

1387*. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^4}$

1388. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

1389. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^6}$

1390. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8}$

1391. Integreerides funktsiooni $f(x) = x$ Fourier' rida (vt. näide 22), leida funktsioonide x^2, x^3 ja x^4 Fourier' read vahemikus $(-\pi, \pi)$.

1392. Koostada Parsevali võrdus funktsiooni
$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kui } |x| < a, \\ 0, & \text{kui } a < |x| < \pi \end{cases}$$
jaoks ning leida arvridade
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 na}{n^2} \quad \text{ja} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 na}{n^2}$$
summad.

V A S T U S E D.

I. peatükk.

§ 1.

1. $\frac{x^5}{5}+C$. 2. $\frac{2}{3}x^{3/2}+4x+C$. 3. $\frac{2}{5}x^{5/2}+C$. 4. $\frac{8}{15}x^{15/8}+C$.
5. $-\left(\frac{1}{3x}+\sqrt{x}\right)+C$. 6. $\frac{x^7}{7}-\frac{x^4}{2}+x+C$. 7. $4{,}10x^{0{,}83}-\frac{2{,}4}{\sqrt{x}}+C$.
8. $x-\frac{1}{x}-2\ln|x|+\frac{5}{7}x^{7/5}+C$. 9. $x-\frac{1}{x}+2\ln|x|+\frac{mx^{n/m+1}}{n+m}+C$. 10. $\frac{\pi}{2}x+C$.
11. $\frac{3\pi}{8}x^{4/3}+C$. 12. $\frac{5}{24}x^{24/5}-\frac{5}{14}x^{14/5}+C$. 13. $\frac{2}{5}x^{5/2}+x+C$. Kasutada valemit $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$.
14. $a^2x-\frac{9}{5}a^{4/3}x^{5/3}+\frac{9}{7}a^{2/3}x^{7/3}-\frac{x^3}{3}+C$. 15. $\frac{10^x}{\ln 10}+C$.
16. $\frac{(5e)^x}{1+\ln 5}+C$. 17. $e^x-\ln|x|-\frac{2}{3x\sqrt{x}}+C$. 18. $5x-\frac{3}{\ln 5-\ln 3}\left(\frac{5}{3}\right)^x+C$. 19. $\frac{1}{5}e^{5x}+\ln 2\cdot x+C$. 20. $x+2e^x+\frac{1}{2}e^{2x}+C$. 21. $\frac{4^x}{\ln 4}-\frac{2\cdot 6^x}{\ln 6}+\frac{9^x}{\ln 9}+C$. 22. $\sin x+3\cos x+C$. 23. $-\cos(\frac{\pi}{4}+x)+C$.
24. $\sin(\frac{\pi}{4}+x)+C$. 23. $\frac{5}{2}x-\frac{1}{2}\sin x+C$. 26. $\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}\sin x-2x\sin^2\frac{x}{2}+C$. 27. $x\cos\alpha-\sin x+C$. 28. $\tan x+C$. 29. $\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}\tan x+C$. 30. $-\tan x-\cot x+C$. 31. $-\cot x-x+C$.
32. $x\exp\tan 2-2\tan x-2x+C$. 33. $\tan x-\cot x-4x+C$.
34. $\frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin x+C$. 35. $2x-\frac{\sin 3}{\sqrt{2}}\arcsin x+C$. 36. $x-\arctan x+C$. 37. $\ln|x|+\arctan x+C$. 38. $\frac{x^3}{3}-x+\arctan x+C$. 39. $x-2\arctan x+C$. 40. $x\,\mathrm{sh}\,2-\mathrm{ch}\,x+C$. 41. $\mathrm{sh}\,x+C$. 42. $\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}\mathrm{sh}\,x+C$. Kasutada valemit $2\mathrm{ch}^2(x/2) = 1+\mathrm{ch}\,x$. 43. $\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}\mathrm{sh}\,x+C$.

Kasutada valemit $2\operatorname{sh}^2(x/2)=\operatorname{ch} x-1$. 44. $x-\operatorname{th} x+C$. Kasutada valemit $1-\operatorname{th}^2x = 1/\operatorname{ch}^2x$. 45. $x-\operatorname{cth} x+C$. Kasutada valemit $\operatorname{cth}^2x-1 = 1/\operatorname{sh}^2x$. 46. $\operatorname{th} x+C$. 47. $\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\operatorname{th} x+C$. 48. $\operatorname{th} x-\operatorname{cth} x+C$. 49. $-2 \operatorname{cth} 2x+C$.

§ 2.

50. $\frac{\cos^2 x}{2} + C$. 51. $\frac{\tan^5 x}{5} + C$. 52. $2\sqrt{1 + x^3} + C$.
53. $-\cot(2 + \ln x) + C$. 54. $e^{\sin x} + C$. 55. $-\frac{1}{\arcsin x} + C$.
56. $-\frac{1}{x^2 + 2} + C$. 57. $\ln|x^2 - 5x + 3| + C$. 58. $\frac{5}{16}(x^4+1)^{4/5} + C$. 59. $-\frac{1}{3}(1 - x^2)^{3/2} + C$. 60. $2\sqrt{3x^2 - 5x + 6} + C$.
61. $\ln(e^x+\ln 3)+C$. 62. $\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+4)+C$. 63. $\ln(2-\cos^2x)+C$.
64. $\ln|\ln x|+C$. 65. $-\frac{1}{2\arcsin^2x}+C$. 66. $-\frac{1}{\sin x}+C$.
67. $-\frac{2}{5}\cos^5x+C$. 68. $\sin e^x+C$. 69. $-2\sqrt{\cos^2 1+\cos^2x}+C$.
70. $\frac{1}{3}\exp x^3+C$. 71. $\frac{\ln^{m+1}x}{m+1}+C$. 72. $\frac{\arcsin 3^x}{\ln 3}+C$. 73. $\frac{1}{2}e^{-x^2}-\sqrt{1-x^2}+C$. 74. $\frac{\arctan^4 x}{4}+C$. 75. $\frac{1}{\operatorname{arccot} x}+C$. 76. $-\ln|\cos x|+C$. 77. $\ln|\sin x|+C$. 78. $-2\sqrt{1-x^2}-\frac{2}{3}\arcsin^{3/2}x+C$.
79. $\arcsin x-\sqrt{1-x^2}+C$. 80. $\arctan e^x+C$. 81. $2\sqrt{7+\operatorname{ch} x}+C$.
82. $\frac{1}{4}(1+\operatorname{th} x)^4+C$. 83. $\frac{(x-3)^{13}}{13}+C$. 84. $-\frac{1}{8}\frac{1}{(2x-3)^4}+C$.
85. $-\frac{3}{4}(7-x)^{4/3}+C$. 86. $-\frac{2}{9}\sqrt{5-9x}+C$. 87. $\frac{1}{2}\ln|2x-7|+C$.
88. $\frac{1}{a}\ln|ax+b|+C$. 89. $\frac{1}{3}\sin 3x+C$. 90. $-\cos(x-4)+C$.
91. $-\frac{1}{2}\sin(1-2x)+C$. 92. $-\frac{1}{2}\cot(2x-5)+C$. 93. $-\frac{1}{5}\tan(2-5x)+C$. 94. $\frac{1}{3}\tan(3x-\frac{\pi}{4})+C$. 95. $-\frac{1}{2}e^{-2x+3}+C$. 96. $\frac{5^{3x+\ln 2}}{3\ln 5}+C$.

$\underline{97}$. $\frac{1}{4}\arcsin 4x+C$. $\underline{98}$. $\arcsin \frac{x}{\sqrt{3}}+C$. $\underline{99}$. $\frac{1}{3}\arcsin \frac{3x}{2}+C$.

$\underline{100}$. $\frac{1}{3}\arctan 3x+C$. $\underline{101}$. $\frac{1}{3\sqrt{2}}\arctan\frac{\sqrt{2}x}{3}+C$. $\underline{102}$. $\frac{1}{5}\arctan(5x+1)+$ $+C$. $\underline{103}$. $\frac{1}{2}\arcsin(2x-3)+C$. $\underline{104}$. $\arcsin(x-2)+C$. Juure all eraldada täisruut. $\underline{105}$. $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x-1}{3}+C$. $\underline{106}$. $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x+1}{\sqrt{3}}+C$

$\underline{107}$. $\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+C$. $\underline{108}$. $\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}+C$. $\underline{109}$. $-\cot\frac{x}{2}+C$.

$\underline{110}$. $\tan\frac{x}{2}+C$. $\underline{111}$. $\tan(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4})+C$. $\underline{112}$. $\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})+C$.

$\underline{113}$. $\arcsin \ln x+C$. $\underline{114}$. $\frac{3}{5}(\tan x-3)^{5/3}+C$. $\underline{115}$. $3\arcsin x+$ $+7\sqrt{1-x^2}+C$. $\underline{116}$. $\ln \ln \ln x+C$. $\underline{117}$. $2\cos x-3\cot x-\frac{1}{\sin x}+C$.

$\underline{118}$. $2\tan\frac{x}{2}-x+C$. $\underline{119}$. $2\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})-x+C$. $\underline{120}$. $\frac{1}{3}\tan^3x+C$.

$\underline{121}$. $\ln(2+\sin 2x)+C$. $\underline{122}$. $\frac{\cos^2 x}{2} - \ln|\cos x|+C$. $\underline{123}$. $\frac{1}{\sin x}-$ $-\frac{1}{3\sin^3 x}+C$. $\underline{124}$. $2\sqrt{\cos x}\left(\frac{\cos^2 x}{5}-1\right)+C$. $\underline{125}$. $\tan x+\frac{1}{3}\tan^3x+$ $+C$. Asendada $1/\cos^2x = 1+\tan^2x$. $\underline{126}$. $-\frac{\cos x}{3\sin^3 x} - \frac{2}{3}\cot x+C$.

$\underline{127}$. $\frac{1}{2}\tan^2x+\ln|\cos x|+C$. $\underline{128}$. $\frac{1}{3}\tan^3x-\tan x+x+C$.

$\underline{129}$. $\arcsin x-\sqrt{1-x^2}+C$. $\underline{130}$. $\frac{3}{2}\ln(x^2+9)-\frac{1}{3}\arctan\frac{x}{3}+C$.

$\underline{131}$. $\frac{1}{4}\arctan^2 2x+C$. $\underline{132}$. $-e^{-x}-\frac{1}{2}e^{-2x}+C$. $\underline{133}$. $\frac{1}{8}(8x^3+27)^{1/3}+$ $+C$. $\underline{134}$. $2\arctan\sqrt{x}+C$. Teisendada, et oleks $d\sqrt{x}$.

$\underline{135}$. $\cos\frac{1}{x}+C$. $\underline{136}$. $-2\sqrt{1-x^2}-\frac{2}{3}(\arcsin x)^{3/2}+C$.

$\underline{137}$. $-\frac{1}{9}\left[\sqrt{1-9x^2}+(\arccos 3x)^2\right]+C$. $\underline{138}$. $\arcsin x+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+C$.

$\underline{139}$. $x+\ln(x^2+1)+C$. $\underline{140}$. $\frac{1}{97(1-x)^{97}} - \frac{1}{49(1-x)^{98}}+\frac{1}{99(1-x)^{99}}+C$.

Kasutada võrdust $x^2 = (1-x)^2-2(1-x)+1$. 141. $\frac{2}{9}\left[\frac{\sqrt{(1-3x)^5}}{5}-\right.$ $\left.-\frac{\sqrt{(1-3x)^3}}{3}\right]+C$. Kasutada võrdust $x = 1/3-(1-3x)/3$.

142. $\arcsin\frac{\ln x}{\sqrt{3}}+C$. 143. $\frac{1}{2}\sin x^2+C$. 144. $\frac{1}{9}(1+e^{3x})^3+C$.

145. $-\frac{1}{9}\cot 9x+C$. 146. $\frac{1}{7}\tan 7x+C$. 147. $2(\exp\sqrt{x}-\cos\sqrt{x})+C$.

148. $\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}-\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C$. 149. $2\arcsin\sqrt{x}+C$.

150. $-\frac{1}{a}\arcsin\frac{a}{x}+C$. 151. $-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2+x^2}}{x}\right|+C$.

152. $\frac{\sqrt{(a-x^2)^5}}{5}-a\frac{\sqrt{(a-x^2)^3}}{3}+C$. 153. $2\left[\frac{\sqrt{(a-x)^5}}{5}-a\frac{\sqrt{(a-x)^3}}{3}\right]+C$.

154. $-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}x+\sqrt{x^4+1}}{x^2-1}\right|+C$. 155. $2e^{\sqrt{x}}+C$. 156. $2\sqrt{e^x-1}-$

$-2\arctan\sqrt{e^x-1}+C$. 157. $\ln\frac{e^x-1}{e^x}+C$. 168. $\frac{4}{21}(3e^x+4)\sqrt[4]{(e^x-1)^3}+C$.

159. $-\frac{1}{2}\arcsin^2\frac{1}{x}+C$. 160. $\frac{4}{3}\left[x^{3/4}-\ln(1+\sqrt[4]{x^3})\right]+C$.

161. $\frac{3}{28}(4x+3)(x-1)^{4/3}+C$. 162. $\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}+\frac{1}{2}\arcsin x+C$.

163 $\sqrt{x^2-4}-2\arccos\left|\frac{2}{x}\right|+C$. 164. $-\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x}+C$. 165. $\frac{x^3-2x}{4}\sqrt{4-x^2}+$

$+2\arcsin\frac{x}{2}+C$. 166. $-\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{x}+C$. 167. $\frac{1}{2}\ln^2\tan x+C$.

§ 3.

168. $\sin x-x\cos x+C$. 169. $x\sin x+\cos x+C$. 170. $\frac{x\sin 2x}{2}-$

$-\frac{2x^2-3}{4}\cos 2x+C$. 171. $\frac{9x^2-8}{27}\cos 3x+\frac{3x^3-8x+3}{9}\sin 3x+C$.

172. $-\frac{2x^2-1}{4}\cos 2x+\frac{x}{2}\sin 2x+C$. 173. $x\,\mathrm{ch}\,x-\mathrm{sh}\,x+C$.

174. $\frac{9x^2+2}{27}\mathrm{sh}\,3x-\frac{2x}{9}\mathrm{ch}\,3x+C$. 175. $(12x^2-96)\cos\frac{x}{2}+$

$+(2x^3-48x)\sin\frac{x}{2}+C$. 176. $-(x+1)e^{-x}+C$. 177. $-\frac{9x^2+6x+2}{27}e^{-3x}+C$.

178. $-2(x^2+x+4)e^{-x/2}+C$. 179. $a^x\left(\frac{x^2}{\ln a}-\frac{2x}{\ln^2 a}+\frac{2}{\ln^3 a}\right)+C$.

180. $x(\ln x-1)+C$. 181. $-\frac{1}{4x^2}(2\ln x+1)+C$. 182. $x(\ln^2 x-$

$-2\ln x+2)+C$. 183. $\frac{x^2-1}{2}\ln(x-1)-\frac{x^2+2x}{4}+C$. 184. $(\frac{x^3}{3}+3x)\ln 2x-$

$-\frac{x^3}{9}-3x+C$. 185. $\frac{(x^3+1)\ln(1+x)}{3}-\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{6}-\frac{x}{3}+C$.

186. $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}(\ln x-\frac{1}{\alpha+1})+C$. 187. $x\ln(x^2+1)+2\arctan x-2x+C$.

188. $x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$. 189. $\frac{x^2+1}{2}\arctan x-\frac{x}{2}+C$.

190. $\frac{1}{4}(x^4-1)\operatorname{arccot} x-\frac{x^3}{12}+\frac{x}{4}+C$. 191. $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$.

192. $x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+C$. 193. $x-\frac{1-x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+C$.

194. $\frac{2}{3}x^{5/2}(\ln^2x-\frac{4}{3}\ln x+\frac{8}{9})+C$. 195. $-\frac{1}{x}(\ln^2x+2\ln x+2)+C$.

196. $\frac{e^x}{1+x}+C$. Integreerida ositi, võttes $u=xe^x$.

197. $\frac{\sin 2x-2\cos 2x}{5}e^x+C$. 198. $\frac{\cos 2x+2\sin 2x}{5}e^x+C$.

199. $\frac{-2\sin 3x-3\cos 3x}{13}e^{-2x}+C$. 200. $\frac{3\sin 3x-2\cos 3x}{13}e^{-2x}+C$.

201. $\frac{2\sin x/2-4\cos x/2}{5}e^{-x}+C$. 202. $\frac{-4\sin x/2-2\cos x/2}{5}e^{-x}+C$.

203. $\frac{e^{5x}}{13}(\sin 2x-5\cos 2x)+C$. 204. $-x\cot x+\ln|\sin x|+C$.

205. $\frac{x}{2\cos^2x}-\frac{1}{2}\tan x+C$. 206. $\frac{x}{2}(\sin\ln x-\cos\ln x)+C$.

207. $x/2(\cos\ln x+\sin\ln x)+C$. 208. $x\tan x-\frac{x^2}{2}+\ln|\cos x|+C$.

209. $\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}x\sin 2x+\frac{1}{8}\cos 2x+C$. 210. $\frac{1}{8}(2x^2-12x-\cos 2x+6\sin 2x-$
$-2x\sin 2x)+C$. 211. $\ln|\sin x|-(x+2)\cot x-\frac{x^2}{2}-2x+C$.

212. $\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{4}x^2\sin 2x+\frac{1}{4}x\cos 2x-\frac{1}{8}\sin 2x+C$. 213. $x\arcsin^2x+$
$+2\arcsin x\sqrt{1-x^2}-2x+C$. 214. $\frac{1+x^2}{2}(\arctan x)^2-x\arctan x+$
$+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$. 215. $\sqrt{1+x^2}\arctan x-\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C$.

216. $\ln|\sin x|-x\cot x-\frac{x^2}{2}+C$. 217. $\frac{e^{3x}}{39}(9\sin^2x-3\sin 2x+2)+C$.

218. $\frac{e^{2x}}{8}(2\cos^2x-\sin 2x+1)+C$. 219. $6(x-2)\sin\sqrt{x}+2\sqrt{x}(6-x)\cos\sqrt{x}+$
$+C$. 220. $3\left[(2-\sqrt[3]{x^2})\cos\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x}\sin\sqrt[3]{x}\right]+C$.

$\underline{221}$. $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C$. $\underline{222}$. $2(\cos\sqrt{x}+\sqrt{x}\sin\sqrt{x})+C$.

$\underline{223}$. $(x-1)\ln(1+\sqrt{x})-\frac{x-2\sqrt{x}}{2}+C$. $\underline{224}$. $\frac{1}{3}(x^3-1)e^{x^3}+C$.

$\underline{225}$. $\frac{x^3}{3}\arctan x-\frac{x^2}{6}+\frac{1}{6}\ln(1+x^2)+C$. $\underline{226}$. $6[\pi x^3+x^2+3\pi x+$
$+2\ln(1+x^2)-6x\arctan x-2x^3\arctan x]+C$. $\underline{227}$. $\ln(|x|/\sqrt{1+x^2})-$
$-\frac{1}{x}\arctan x-\frac{1}{2}\arctan^2 x+C$. Kasutada võrdust $1=(1+x^2)-x^2$.

$\underline{228}$. $\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\ln|1-x^2|+C$. $\underline{229}$. $-\frac{(1-x)\exp\arctan x}{2\sqrt{1+x^2}}+C$.

$\underline{230}$. $\frac{(1+x)\exp\arctan x}{2\sqrt{1+x^2}}+C$. $\underline{231}$. $2e^{\sqrt{x}}(x^2\sqrt{x}-5x^2+20x\sqrt{x}-60x+$
$+120\sqrt{x}+120)+C$. $\underline{232}$. $\frac{e^{-x^2}}{2}(x^6+3x^4+6x^2+6)+C$. $\underline{233}$. $\frac{1}{4}(2x+$
$+2\sqrt{x}\sin 2\sqrt{x}+\cos 2\sqrt{x})+C$. $\underline{234}$. $\frac{1}{4}(2x-2\sqrt{x+2}\sin 2\sqrt{x+2}-$
$-\cos 2\sqrt{x+2})+C$. $\underline{235}$. $\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C$. $\underline{236}$. $\arccos\left|\frac{1}{x}\right|-$
$-\frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}+C$.

§ 4.

$\underline{237}$. $\ln(|x+1|/\sqrt{2x+1})+C$. $\underline{238}$. $\ln|x-2|+\ln|x+5|+C$.

$\underline{239}$. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x+2)^4}{(x+1)(x+3)^3}\right|+C$. $\underline{240}$. $\frac{1}{5}\ln\left[(x-2)^2\sqrt{2x+1}\right]+C$.

$\underline{241}$. $\ln\left|\frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7}\right|+C$. $\underline{242}$. $x+\frac{1}{6}\ln|x|-\frac{9}{2}\ln|x-2|+$
$+\frac{28}{3}\ln|x-3|+C$. $\underline{243}$. $\ln|2x-1|-6\ln|2x-3|+5\ln|2x-5|+C$.

$\underline{244}$. $\frac{x^2}{2}+\ln\left|\frac{x(x-2)\sqrt{(x-1)(x+1)^3}}{x+2}\right|+C$. $\underline{245}$. $\frac{3}{11}\ln|3x+1|+$
$+\frac{8}{33}\ln|2x-3|-\frac{1}{3}\ln|x|+C$. $\underline{246}$. $\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+3x+\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{16}{3}\ln|x+2|+$
$+C$. $\underline{247}$. $\frac{1}{4}x+\ln|x|-\frac{7}{16}\ln|2x-1|-\frac{9}{16}\ln|2x+1|+C$.

248. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|+\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|+C$. 249. $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\ln|x^2-1|+C$.

250. $4\ln|x|-3\ln|x-1|-\frac{9}{x-1}+C$. 251. $x+\frac{1}{x}+\ln\frac{(x-1)^2}{|x|}+C$.

252. $\ln\left|\frac{x^2}{x+1}\right|+\frac{6}{x+1}+C$. 253. $\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$. 254. $\ln|x-2|-$ $-\frac{1}{3(x-2)^3}+\frac{1}{2(x-2)^2}+C$. 255. $2\ln\left|\frac{x+4}{x+2}\right|-\frac{5x+12}{x^2+6x+18}+C$. 256. $\frac{3}{2x}-$ $-\frac{5}{4}\ln|x|+20\ln|x-3|-\frac{47}{4}\ln|x-2|+C$. 257. $4\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|-\frac{5x-6}{x^2-3x+2}+C$.

258. $\frac{4}{x+2}+\ln|x+1|+C$. 259. $\frac{1}{x-1}+\ln\frac{\sqrt{(x-1)(x-3)}}{|x|}+C$.

260. $\frac{1}{6}\ln|x^2+2x-2|-\frac{1}{3}\ln|x+1|+C$. Eelnevalt teha muutuja vahetus $u=x^2+2x-2$. 261. $-\frac{1}{3(x-1)}+\frac{2}{9}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|$. 262. $\frac{1}{2}\arctan x+$ $+\frac{1}{4}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2+1}+C$. 263. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\arctan x+C$.

264. $\ln(|x|/\sqrt{x^2+1})+C$. 265. $\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$.

266. $\frac{1}{3}\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+x+1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$. 267. $\ln\frac{x^2-2x+5}{|x-1|}+$ $+\frac{1}{2}\arctan\frac{x-1}{2}+C$. 268. $\frac{(x+1)^2}{2}+\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+1}}-\arctan x+C$.

269. $\frac{1}{4}\ln\frac{x^4}{(x+1)^2(x^2+1)}-\frac{1}{2}\arctan x+C$. 270. $-\frac{1}{x-2}-\arctan(x-2)+$ $+C$. 271. $\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)-\frac{1}{2(x+1)}+C$. 272. $\ln\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+2}}+$ $+\frac{3}{2}\arctan\frac{x}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}\arctan\frac{x\sqrt{2}}{2}+C$. 273. $\frac{x^2}{2}-2x-\frac{2}{x}+2\ln(x^2+2x+2)-$ $-2\arctan(x+1)+C$. 274. $\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}+C$. Lahutada nimetaja teguriteks, kasutades võrdust $x^4+x^2+1=(x^2+1)^2-x^2$.

275. $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}+C$. Lahutada nimetaja teguriteks, kasutades võrdust $x^4+1=(x^2+1)^2-2x^2$.

278. $\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{1+x\sqrt{3}+x^2}{1-x\sqrt{3}+x^2}+\frac{1}{2}\arctan x+\frac{1}{6}\arctan x^3+C$. Kasutada võrdust $x^6+1=(x^2+1)^3-3x^4-3x^2$. 277. $\frac{x(3x^2+5)}{8(x^2+1)^2}+\frac{3}{8}\arctan x+C$.

278. $\frac{x}{18(9+x^2)}+\frac{1}{54}\arctan\frac{x}{3}+C$. 279. $\frac{x}{216(x^2+9)}+\frac{x}{36(x^2+9)^2}+$ $+\frac{1}{648}\arctan\frac{x}{3}+C$. 280. $\frac{x+1}{2(x^2+2x+2)}+\frac{1}{2}\arctan(x+1)+C$.

281. $\frac{1}{648}\left[\arctan\frac{x+1}{3}+\frac{3(x+1)}{x^2+2x+10}+\frac{18(x+1)}{(x^2+2x+10)^2}\right]+C$. 282. $\frac{x}{4(2+x^2)}+$ $+\frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}+C$. 283. $\frac{2x+1}{6(x^2+x+1)^2}+\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$.

284. $\frac{3}{8}\arctan(x+1)+\frac{3}{8}\,\frac{x+1}{x^2+2x+2}+\frac{x}{4(x^2+2x+2)^2}+C$. 285. $\frac{3}{8}\arctan(x+1)-$ $-\frac{5x^3+15x^2+18x+8}{8(x^2+2x+2)^2}+C$. 286. $\frac{1}{16}\ln|x|-\frac{1}{18}\ln(x^2+1)+\frac{7}{288}\ln(x^2+4)-$ $-\frac{1}{24(x^2+4)}+C$. 287. $\frac{x-1}{x^2+1}-\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$.

288. $\frac{x(3x^2+3)}{8(x^2+1)^2}+\frac{3}{8}\arctan x+C$. 289. $\frac{x^3+15x}{216(x^2+9)^2}+\frac{1}{648}\arctan\frac{x}{3}+C$.

290. $-\frac{x^2+x+2}{8(x-1)(x+1)^2}+\frac{1}{16}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+C$. 291. $\frac{1}{x^2+2x+2}+\arctan(x+1)+C$

292. $\frac{3x^2-x}{4(x-1)(x^2+1)}+\frac{1}{4}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1}+\frac{1}{4}\arctan x+C$. 293. $-\frac{12x^2-5x-1}{2(x^3-x^2)}-$ $-6\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+C$. 294. $\frac{1}{x^2(x^2+1)}+\ln\sqrt{x^2+1}+C$. 295. $\frac{x^3-2x^2+3x}{4(x^2+1)^2}+$ $+\frac{1}{4}\arctan x+C$. 296. $\frac{2-x}{4(x^2+2)}+\ln\frac{(x^2+2)}{2}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}+C$.

297. $-\frac{57x^4+103x^2+32}{8x(x^2+1)^2}-\frac{57}{8}\arctan x+C$. 298. $\frac{x}{3(x^2+1)}+$ $+\frac{1}{9}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{2}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$. 299. $\frac{x}{4(x^4+1)}+\frac{3}{16\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}-$ $-\frac{3}{8\sqrt{2}}\arctan\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}+C$. 300. $\frac{5x+2}{3(x^2+x+1)}+\frac{1}{9}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\frac{8}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$.

301. $-\dfrac{9x^3+24x^2+37x+80}{8(x^2+4)(x^2+4x+5)}-\dfrac{1}{16}\arctan\dfrac{x}{2}-\arctan(x+2)+C.$

302. $a+2b+3c=0.$ 303. $pc+ra=2qb.$ 304. Arvestada, et $u=1+(a-b)/(x+b).$ 305. $\dfrac{1}{2187}\left(-\dfrac{1}{2t^2}+\dfrac{6}{t}+15\ln|t|-20t+\dfrac{15}{2}t^2-2t^3+\dfrac{t^4}{4}\right)+C$, kus $t=\dfrac{x+1}{x+4}.$ 306. $\dfrac{1}{625}\left(-\dfrac{1}{t}+3t-\dfrac{t^2}{2}-3\ln|t|\right)$, kus $t=\dfrac{x-2}{x+3}.$

307. $\left(-\dfrac{1}{3t^3}+\dfrac{3}{t^2}-\dfrac{15}{t}-20\ln|t|+15t-3t^2+\dfrac{t^3}{3}\right)+C$, kus $t=\dfrac{x-3}{x-2}.$

§ 5.

308. $2\sqrt{x}-2\ln(1+\sqrt{x})+C.$ 309. $\dfrac{3}{4}t^4-\dfrac{3}{2}t^2-\dfrac{3}{4}\ln|t-1|+\dfrac{15}{8}\ln(t^2+t+2)-\dfrac{27}{8\sqrt{7}}\arctan\dfrac{2t+1}{\sqrt{7}}+C$, kus $t=\sqrt[3]{2+x}.$ 310. $\dfrac{4}{3}\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+2}}+C.$

311. $-\ln\dfrac{|n^2-1|}{\sqrt{n^4+n^2+1}}+\sqrt{3}\arctan\dfrac{1+2n^2}{\sqrt{3}}+C$, kus $n=\sqrt[3]{\dfrac{1-x}{1+x}}.$

312. $-\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}+C.$ 313. $\dfrac{n}{a+b}\sqrt[n]{\dfrac{x+a}{x+b}}+C.$ 314. $\ln\dfrac{x}{(1+\sqrt[10]{x})^{10}}+\dfrac{10}{\sqrt[10]{x}}-\dfrac{5}{\sqrt[5]{x}}+\dfrac{10}{3\sqrt[10]{x^3}}-\dfrac{5}{2\sqrt[5]{x^2}}+C.$ 315. $2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}-8\sqrt[4]{x}+6\sqrt[6]{x}+48\sqrt[12]{x}+3\ln(1+\sqrt[12]{x})+\dfrac{33}{2}\ln(\sqrt[6]{x}-\sqrt[12]{x}+2)-\dfrac{171}{\sqrt{7}}\arctan\dfrac{2\sqrt[12]{x}-1}{\sqrt{7}}+C.$ 316. $\dfrac{3}{4}\ln\dfrac{x\sqrt[3]{x}}{(1+\sqrt[6]{x})^2(1-\sqrt[6]{x}+2\sqrt[3]{x})^3}-\dfrac{3}{2\sqrt{7}}\arctan\dfrac{4\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{7}}+C.$ 317. $\dfrac{2}{(1+\sqrt[4]{x})^2}-\dfrac{4}{1+\sqrt[4]{x}}+C.$

318. $\dfrac{3}{2}u-\dfrac{1}{2}\ln|u+1|+\dfrac{1}{4}\ln(u^2-u+1)-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\arctan\dfrac{2u-1}{\sqrt{3}}+C$, kus $u=\sqrt[3]{\dfrac{1+2x}{1-2x}}.$ 319. $6\left[\dfrac{1}{9}(x+1)^{3/2}-\dfrac{1}{8}(x+1)^{4/3}+\dfrac{1}{7}(x+1)^{7/6}-\dfrac{1}{6}(x+1)+\dfrac{1}{5}(x+1)^{5/6}-\dfrac{1}{4}(x+1)^{2/3}\right]+C.$ 320. $-\dfrac{4\sqrt{2x+1}}{x}-3\ln\left|\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1}\right|+C.$

321. $-\dfrac{1}{24}(15+10x+8x^2)\sqrt{x(1-x)}+\dfrac{5}{8}\arcsin\sqrt{x}+C$, $(0<x<1).$

$\underline{322}$. $\sqrt{3}\arctan\frac{2z-1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\ln\frac{(1+z)^2}{1-z+z^2}+C$, kus $z=\sqrt[3]{\frac{1-x}{x}}$.

$\underline{323}$. $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}-2\right)\ln\left|\frac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{3}}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{3}}\right|-\frac{\sqrt{2x+3}}{x\sqrt{3}}+C$. $\underline{324}$. $3\left(\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+t+\ln|t-1|\right)+C$, kus $t=\sqrt[6]{2x-1}$. $\underline{325}$. $\frac{3}{32}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{8/3}-\frac{3}{44}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{11/3}+C$. $\underline{326}$. $\frac{3}{4}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{1/3}-\frac{3}{16}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{4/3}+C$. $\underline{327}$. $\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x}\right|-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C$. $\underline{328}$. $\frac{3}{2(2z+1)}+\frac{1}{2}\ln\frac{z^4}{|2z+1|^3}+C$, kus $z=x+\sqrt{x^2+x+1}$. $\underline{329}$. $\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C$. $\underline{330}$. $\ln\left|\frac{z-1}{z}\right|-2\arctan z+C$, kus $z=\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}$.

$\underline{331}$. $\frac{1}{3}\left[x^3+\sqrt{(x^2-1)^3}\right]+C$. $\underline{332}$. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2+2x^2}-x}{\sqrt{2+2x^2}+x}+\ln(x+\sqrt{x^2+1})+C$.

$\underline{333}$. $-\frac{5}{18(z+1)}-\frac{1}{6(z+1)^2}+\frac{3}{4}\ln|z-1|-\frac{16}{27}\ln|z-2|-\frac{17}{108}\ln|z+1|+C$, $z=\frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+1}$. $\underline{334}$. $\ln\frac{u-1}{u+1}-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\sqrt{2}\,u}{x+1}+C$, kus $u=\sqrt{x^2+2x+4}$.

$\underline{335}$. $\frac{2(3-4z)}{5(1-z-z^2)}+\frac{2}{5\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+1+2z}{\sqrt{5}-1-2z}\right|+C$, kus $z=-x+\sqrt{x(1+x)}$.

$\underline{336}$. $\sqrt{1+x+x^2}+\frac{1}{2}\ln\frac{1+2x+2\sqrt{1+x+x^2}}{(2+x+2\sqrt{1+x+x^2})^2}+C$. $\underline{337}$. $X=[-1,1]$.

$\underline{338}$. $X=(-1,1]$. $\underline{339}$. $X=(-1,1]$. $\underline{340}$. $X=[-1,1)$. $\underline{341}$. $X=\{[-1,0),(0,1]\}$. $\underline{343}$. $\ln\left|2x+2+2\sqrt{x^2+2x-1}\right|+C$. $\underline{344}$. $-\arcsin\frac{1-2x}{\sqrt{5}}+C$.

$\underline{345}$. $\frac{1}{2}\ln\left|8x+4+4\sqrt{4x^2+4x-3}\right|+C$. $\underline{346}$. $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|4x-6+2\sqrt{2}\sqrt{2x^2-6x+5}\right|+C$. $\underline{347}$. $-\arcsin(3-2x)+C$. $\underline{348}$. $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{1+3x}{4}+C$. $\underline{349}$. Arvestada, et $(x^{k-1}\sqrt{ax^2+bx+c})'=p_k(x)/\sqrt{ax^2+bx+c}$, kus $p_k(x)$ on k astme polünoom, ja võtta $P(x)=\lambda+\sum_{k=1}^{n}c_kp_k(x)$, kus c_k on mingid kordajad. $\underline{350}$. $x\sqrt{x^2-2x+5}-5\ln(x-1+\sqrt{x^2-2x+5})+C$.

351. $14\arcsin\frac{x+1}{2}-\frac{1}{2}(3x-18)\sqrt{3-2x-x^2}+C$. 352. $-\frac{19+5x+2x^2}{6}\times$ $\times\sqrt{1+2x-x^2}-4\arcsin\frac{1-x}{\sqrt{2}}+C$. 353. $\frac{x^2-5x+20}{3}\sqrt{x^2+4x+5}-5\ln(x+2+$ $+\sqrt{x^2+4x+5})+C$. 354. $(\frac{x^2}{3}-\frac{14x}{3}+37)\sqrt{x^2+4x+3}-66\ln\left|x+2+\right.$ $\left.+\sqrt{x^2+4x+3}\right|+C$. 355. $\frac{1}{2}(x-1)\sqrt{x^2-2x-1}-\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x-1}\right|+C$.

356. $(\frac{x^2}{3}-\frac{5x}{6}+\frac{1}{6})\sqrt{x^2+2x+2}+\frac{5}{2}\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2})+C$.

357. $\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2})\sqrt{3x^2-3x+1}+\frac{1}{8\sqrt{3}}\ln\left|\sqrt{3x^2-3x+1}+\frac{\sqrt{3}}{2}(2x-1)\right|+C$.

358. $(\frac{x^3}{4}-\frac{5x}{8})\sqrt{x^2+1}+\frac{3}{8}\ln(x+\sqrt{x^2+1})+C$. 359. $(x^2+5x+36)\times$ $\times\sqrt{x^2-4x-7}+112\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x-7}\right|+C$. 360. $(\frac{x^3}{4}-\frac{7x^2}{6}+\frac{95x}{24}-$ $-\frac{145}{12})\sqrt{x^2+4x+5}+\frac{35}{8}\ln(x+2+\sqrt{x^2+4x+5})+C$.

362. $\ln\frac{|x|}{2+x+2\sqrt{x^2+x+1}}+C$. 363. $\arcsin\frac{x-1}{x\sqrt{2}}+C$. 364. $-\frac{1}{\sqrt{3}}\times$ $\times\ln\left|\frac{3+3x+2\sqrt{3(x^2+x+1)}}{x-1}\right|+C$. 365. $-\frac{1}{\sqrt{15}}\ln\left|\frac{x+6+\sqrt{60x-15x^2}}{2x-3}\right|+C$.

366. $\frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{8(x+1)^2}-\frac{1}{16}\arcsin\frac{2}{x+1}+C$. 367. $\frac{\sqrt{2x^2-2x+1}}{x}+C$.

368. $\frac{\sqrt{1+2x-x^2}}{2(1-x)}-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+2x-x^2}}{1-x}\right|+C$. 369. $\frac{1}{2}(x+1)\times$ $\times\sqrt{x^2+2x-1}+2\ln\left|2x+2+2\sqrt{x^2+2x-1}\right|-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{4x+2\sqrt{2}\sqrt{x^2+2x-1}}{x-1}\right|+C$.

370. $\frac{x}{x-1}\sqrt{x^2+2x-4}+4\arcsin\frac{2x-3}{\sqrt{5}(x-1)}+\ln\left|2x+2+2\sqrt{x^2+2x-4}\right|+C$.

371. $\ln\left|2x+2+2\sqrt{x^2+2x+4}\right|-\frac{2}{\sqrt{7}}\ln\left|\frac{2(5+2x+\sqrt{x^2+2x+4})}{x-1}\right|-\frac{2}{x-1}\times$ $\times\sqrt{x^2+2x+4}+C$. 372. $4a(cp+bq)=8a^2r+3b^2p\ (a\neq 0)$.

373. $\arccos\frac{x}{x^2+1}+C$. 374. $-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{x+\sqrt{2}+\sqrt{x^4+1}}{x^2-1}+C$.

375. $2\ln\left|2\,\frac{x^2+1+\sqrt{x^4+3x^2+1}}{x}\right|+C.$

376. $\ln\left|\frac{2x^2+3x-2+2\sqrt{x^4+3x^3-2x^2-3x+1}}{x}\right|+C.$ 377. $\frac{\sqrt{2}}{8}\times$
$\times\ln\frac{\sqrt{x^4+1}+x\sqrt{2}}{\sqrt{x^4+1}-x\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\sqrt{\frac{x^4+1}{2x^2}}+C.$ 378. $2\ln\left|\frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right|+$
$+\ln\left|2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}\right|+C.$ 379. $2\sqrt{x^2+x+1}/\sqrt{x}+C.$

§ 6.

380. $\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{24}{11}x\sqrt[6]{x^5}+\frac{36}{13}x^2\sqrt[6]{x}+\frac{8}{5}x^2\sqrt{x}+\frac{6}{17}x^2\sqrt[6]{x^5}+C.$

381. $3\left[\ln\left|\frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\right|+\frac{2\sqrt[3]{x}+3}{2(1+\sqrt[3]{x})^2}\right]+C.$ 382. $\frac{1}{2}\ln(\sqrt[3]{x^2+1}-1)-$
$-\frac{1}{4}\ln\left[\sqrt[3]{(x^2+1)^2}+\sqrt[3]{x^2+1}+1\right]+\frac{3}{2}\arctan\frac{2\sqrt[3]{x^2+1}+1}{\sqrt{3}}+C.$

383. $\frac{1}{8}\sqrt[3]{(1+x^3)^8}-\frac{1}{5}\sqrt[3]{(1+x^3)^5}+C.$ 384. $\frac{1}{6}\ln\frac{u^2+u+1}{(u-1)^2}-$
$-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2u+1}{\sqrt{3}}+C$, kus $u=\frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x}$. 385. $\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x}-$
$-\frac{1}{2}\arctan\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}+C.$ 386. $\frac{1}{2}\cdot\frac{1+x^2}{\sqrt{1+2x^2}}+C.$

387. $\frac{1}{3}x^{-12}(x^4+1)^5+C.$ 388. $\frac{(2x^2-1)\sqrt{1+x^2}}{3x^3}+C.$

389. $-\frac{1}{8}\,\frac{4+3x^3}{x(2+x^3)^{2/3}}+C.$ 390. $\arctan\sqrt[6]{x}-\frac{5\sqrt[6]{x}}{(1+\sqrt[3]{x})}+C.$

391. $-\frac{1}{2}\,\frac{1}{(\sqrt[3]{x}-1)^2}+C.$ 392. $6\left(\frac{t^7}{7}-\frac{3t^5}{5}+t^3-t\right)+C$, kus $t=\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}$.

393. $\frac{t^7}{7}+\frac{3t^5}{5}+t^3+t+C$, kus $t=\sqrt{x^2-1}$. 394. $\frac{t^5}{5}-\frac{2t^3}{3}+t+C$, kus
$t=\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}$. 395. $\frac{t^9}{9}-\frac{3}{7}t^7+\frac{3}{5}t^5+\frac{t^3}{3}+C$, kus $t=\sqrt{x^2+1}$.

396. $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right|+C$, kus $t=\sqrt{\frac{x^6-1}{x^6}}$. 397. $\sqrt{x^2+1}+C.$ 398. $\frac{t}{8(1-t^2)^4}+$
$+\frac{7t}{48(1-t^2)^3}+\frac{35}{192}\,\frac{t}{(1-t^2)^2}+\frac{105}{384}\,\frac{t}{1-t^2}+\frac{105}{768}\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right|+C$, kus $t=\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}$.

399. $\frac{1}{2}(t-\frac{t^3}{3})+C$, kus $t=\sqrt{\frac{x^4+1}{x^4}}$. 400. $\frac{t^2}{9(t^3-1)^3}-\frac{7(7t^2-4t^5)}{162(t^3-1)^2}+\frac{7}{243}\ln\frac{(t-1)^2}{1+t+t^2}+\frac{14}{8+\sqrt{3}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C$, kus $t=\sqrt[3]{\frac{x^3+1}{x^3}}$.

401. $\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{1-x^4}+1}{x^2}-\frac{1}{4}\frac{\sqrt{1-x^4}}{x^4}+C$. 402. $\frac{3}{7}(4\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}-3)\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}+C$.

403. $\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\sqrt[3]{1+x^3}+x}{x\sqrt{3}}-\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}+C$. 404. $\frac{u}{2(u^3+1)}-$
$-\frac{1}{6}\ln\frac{u+1}{\sqrt{u^2-u+1}}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{2u-1}{\sqrt{3}}+C$, kus $u=\sqrt[3]{\frac{1-x^2}{x^2}}$.

405. $12\left[\frac{\sqrt[3]{u^{13}}}{13}-3\frac{\sqrt[3]{u^{10}}}{10}+3\frac{\sqrt[3]{u^7}}{7}-\frac{\sqrt[3]{u^4}}{4}\right]+C$, kus $u=1+\sqrt[4]{x}$.

406. $\frac{1}{3}\sqrt{(x+x^2)^3}-\frac{1+2x}{8}\sqrt{x+x^2}+\frac{1}{8}\ln(\sqrt{x}+\sqrt{1+x})$ kui $x>0$.

407. $\frac{3z}{2(z^3+1)}-\frac{1}{4}\ln\frac{(z+1)^2}{z^2-z+1}-\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\frac{2z-1}{\sqrt{3}}+C$, kus $z=\frac{\sqrt[3]{3x-x^3}}{x}$.

408. $\frac{1}{5}(x^4+1)^{5/4}+C$. 409. $(\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{8}x)\sqrt{x^2+1}+\frac{3}{8}\ln(x+\sqrt{x^2+1})+C$.

410. $\frac{15x^2+5x-2}{4x^2\sqrt{1+x}}+\frac{15}{8}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}\right|+C$. 411. $\ln\left|\frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1}\right|-\frac{\sqrt{2x+1}}{x}+C$.

412. $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+C$. 413. $\frac{1}{6}\ln\frac{z-1}{z+1}+\frac{1}{12}\ln\frac{z^2+z+1}{z^2-z+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{z^2-1}{z\sqrt{3}}+C$, kus
kus $z=\sqrt[6]{1+x^6}$. 414. $6\left[\frac{1}{4}x^{2/3}+\frac{1}{3}x^{1/2}+\frac{1}{2}x^{1/3}+x^{1/6}+\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right|\right]+C$.

415. $\ln\left|\frac{x}{(\sqrt[6]{x}+1)^6}\right|+C$. 416. $\frac{1}{\sqrt{b}}\ln\left|\frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}}\right|+C$.

417. $2(\sqrt[3]{x}-1)^{3/2}+C$. 418. $\frac{1}{4}\left[\frac{1}{5}\sqrt{(1+2x^2)^3}-\sqrt{1+2x^2}\right]+C$.

418. $\frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}\sqrt{(1+2x^2)^3}-\sqrt{1+2x^2}\right]+C$. 419. $\frac{6}{5}x^{5/6}-4x^{1/2}+18x^{1/6}+$
$\frac{3x^{1/6}}{1+x^{1/3}}-21\arctan x^{1/6}+C$. 420. $\frac{3}{5}z^5-2z^3+3z+C$, kus $z=\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}$.

421. $-z+\frac{2}{3}z^3-\frac{z^5}{5}+C$, kus $z=\sqrt{1-x^2}$. 422. $\frac{5}{4}z^4-\frac{5}{9}z^9+C$, kus
$z=\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}$. 423. $-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|-\frac{1}{2}\arctan t+C$, kus $t=\sqrt[4]{\frac{2x^4+1}{x^4}}$.

$\underline{424}$. $-\frac{1}{3}\left[\frac{1}{6}\ln\left|\frac{(1+t)^2}{1-t+t^2}\right|+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right]+C$, kus $t=\sqrt[3]{\frac{4x^3+3}{x^3}}$.

$\underline{433}$. $r=\frac{2}{k}$, kus $k=\pm1,\pm2,\ldots$ $\underline{434}$. $r=2k+1$ või $r=2k-\frac{5}{3}$, $k=0,\pm1,\pm2$, $\underline{435}$. iga r korral. $\underline{436}$. $r=k$ või $r=k+\frac{1}{2}$, $k=0,\pm1,\pm2$, $\underline{437}$. $r=0,\pm1,\pm2$, $\underline{438}$. $r=\frac{2}{k}$, $k=\pm1,\pm2$ või $r=\frac{4}{2k+1}$, $k=0,\pm1,\pm2$, $\underline{439}$. $r=\frac{3}{k}$, $k=\pm1,\pm2$, või $r=\frac{6}{2k-1}$, $k=0,\pm1,\pm2$. $\underline{440}$. $r=k$ või $r=k+\frac{3}{4}$, $k=0,\pm1,\pm2$. $\underline{441}$. $r=k$ või $r=\frac{2}{3}-k$, $k=0,\pm1,\pm2$,

§ 7.

$\underline{442}$. $\frac{1}{15}\cos^3x(3\cos^2x-5)+C$. $\underline{443}$. $-\frac{1}{8}\cos^4 2x+C$. $\underline{444}$. $\frac{\cos^3 2x}{6}-\frac{\cos 2x}{2}+C$. $\underline{445}$. $\ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|+C$. $\underline{446}$. $\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$. $\underline{447}$. $\frac{1}{3\cos^3x}-\frac{1}{\cos x}+C$. $\underline{448}$. $\ln|\tan x|-\frac{1}{2\sin^2x}+C$. $\underline{449}$. $\frac{1}{2}(\tan^2x-\cot^2x)+2\ln\tan|x|+C$. $\underline{450}$. $\tan x+\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{3}{2}x+C$. $\underline{451}$. $\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|-\frac{\cos x}{2\sin^2x}+C$. $\underline{452}$. $\frac{\sin x}{2\cos^2x}+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$. $\underline{453}$. $\frac{\sin x}{4\cos^4x}+\frac{3}{8}\left(\frac{\sin x}{\cos^2x}+\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right)+C$. $\underline{454}$. $\tan x+\frac{1}{3}\tan^3x+C$. $\underline{455}$. $\frac{\sin^2x}{2}-\frac{1}{2\sin^2x}-2\ln|\sin x|+C$. $\underline{456}$. $-\frac{1}{4}\cot^4x+C$. $\underline{457}$. $\frac{(\tan^2x-1)(\tan^4x+10\tan^2x+1)}{3\tan^2x}+C$. $\underline{458}$. $x-\frac{1}{3}\cot^3x+\cot x+C$. $\underline{459}$. $\frac{1}{4}\tan^4x-\frac{1}{2}\tan^2x-\ln|\cos x|+C$. $\underline{460}$. $x-\frac{1}{7}\cot^7x+\frac{1}{5}\cot^5x-\frac{1}{3}\cot^3x+\cot x+C$. $\underline{461}$. $\frac{1}{\cos x-1}+C$. $\underline{462}$. $\frac{1}{6}\ln\frac{1-\cos x}{(1+\cos x)^3}+$

31

$+\frac{1}{3}\ln(2+\cos x)+C$. 463. $\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}-\frac{1}{6}\cot^3\frac{x}{2}+C$. 464. $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{\cos x}{3+\sin x}\right|-$
$-\frac{3}{16}\ln\left|\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right|+C$. 465. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sin x-5}{\sin x-1}\right|+C$. 466. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos 2t}{\cos 2t}\right|+$
$+C$. 467. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\tan x}{1-\tan x}\right|+\frac{1}{2}\sin x\cos x+C$. 468. $\frac{1}{2}\arctan(2\tan\frac{x}{2})+$
$+C$. 469. $\frac{1}{2}\tan x+\frac{1}{2}\ln|\tan x|+C$. 470. $\frac{2}{3}\arctan\frac{5\tan x/2+4}{3}+C$.
471. $\frac{1}{8\sin^2 x/2}-\frac{1}{4}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$. 472. $\frac{\cos x(\cos x-\sin x)}{4}-$
$-\frac{1}{4}\ln|\cos x-\sin x|+C$. 473. $\ln\frac{\sqrt[3]{\tan x-1}}{\sqrt[6]{\tan^2 x+\tan x+1}}-$
$-\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2\tan x+1}{\sqrt{3}}+C$. 474. $-\frac{1}{2}\left[\cot x+\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\frac{\tan x}{\sqrt{2}})\right]+C$.
475. $\ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right|+C$. 476. $\frac{4}{25}x-\frac{3}{25}\ln|\tan x+2|+\frac{2}{5(\tan x+2)}-$
$-\frac{3}{25}\ln|\cos x|+C$. 477. $x-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\tan x+1}{\sqrt{3}}+C$.
478. $\frac{1}{4}\ln\frac{(\cos x-1)(1+\sin x)}{(\cos x+1)(1-\sin x)}+C$. 479. $\frac{1}{2}\arctan(\frac{\tan x}{2})+C$.
480. $\arctan(1+\tan\frac{x}{2})+C$. 481. $\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{3\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}+C$.
482. $\frac{1}{2}\tan x+\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan x)+C$. 483. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{2}}-$
$-\frac{1}{2}\cot x+C$. 484. $\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\tan(\frac{\pi}{8}+\frac{x}{2})\right|+C$. 485. $\ln\left|(\tan\frac{x}{2}-5):\right.$
$\left.:(\tan\frac{x}{2}-3)\right|+C$. 486. $\frac{1}{\sqrt{15}}\arctan\frac{\sqrt{3}\tan x}{\sqrt{5}}+C$. 487. $\frac{1}{\sqrt{13}}\times$
$\times\ln\left|\frac{2\tan x+3-\sqrt{13}}{2\tan x+3+\sqrt{13}}\right|+C$. 488. $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{\tan x-5}{\tan x}\right|+C$. 489. $-\frac{1}{2\sqrt{2}}\times$
$\times\ln\frac{\sqrt{2}-\sin 2x}{\sqrt{2}+\sin 2x}+C$. 490. $\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan x)+C$.
491. $-x-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{3+\tan x/2}{\tan x/2}\right|+C$. 492. $\frac{1}{17}\ln|4\cos x+\sin x|+\frac{4}{17}x$.
493. $\arctan(\tan^2 x)+C$. 494. $-\frac{1}{4}(\frac{\cos 4x}{2}+\cos 2x)+C$.
495. $-\frac{1}{8}\cos 4x-\frac{1}{12}\cos 6x+C$. 496. $\frac{1}{10}\sin 5x+\frac{1}{2}\sin x+C$.

497. $\frac{1}{6}\sin 3x-\frac{1}{14}\sin 7x+C$. 498. $\frac{\cos 2x}{4}-\frac{\cos 8x}{16}+C$.

499. $\frac{\sin 5x}{10}-\frac{\sin 25x}{50}+C$. 500. $\frac{3}{5}\sin\frac{5x}{6}+3\sin\frac{x}{6}+C$.

501. $\frac{3}{2}\cos\frac{x}{3}-\frac{1}{2}\cos x+C$. 502. $\sin\frac{2ax}{4a}+\frac{x\cos 2b}{2}+C$. 503. $\frac{t\cos\varphi}{2}-\frac{\sin(2\omega t+\varphi)}{4\omega}+C$. 504. $\frac{1}{8}(2x+\sin 2x+\frac{1}{2}\sin 4x+\frac{1}{3}\sin 6x)+C$.

505. $\frac{1}{28}\cos 7x-\frac{1}{20}\cos 5x-\cos x+C$. 506. $\frac{1}{24}\cos 6x-\frac{1}{16}\cos 4x-\frac{1}{8}\cos 2x+C$. 507. $\frac{1}{48}\sin 12x+\frac{1}{32}\sin 8x-\frac{1}{4}\sin 2x+C$.

508. $\frac{3}{2}\cos\frac{x}{6}-\frac{3}{10}\cos\frac{5x}{6}-\frac{3}{14}\cos\frac{7x}{6}+\frac{3}{22}\cos\frac{11x}{6}+C$.

509. $-\frac{1}{44}\cos 11x+\frac{1}{20}\cos 5x-\frac{1}{6}\cos 3x+C$. 510. $\frac{x}{4}+\frac{\sin 4x}{16}+\frac{\sin 6x}{24}+\frac{\sin 2x}{16}+\frac{\sin 10x}{80}+C$. 511. $-\frac{3}{16}\cos 2x+\frac{3}{64}\cos 4x+\frac{1}{48}\cos 6x-\frac{3}{128}\cos 8x+\frac{1}{192}\cos 12x+C$. 513. $-\frac{x}{5}-\frac{3}{5}\ln|\sin x+2\cos x|+C$.

514. $\frac{3x}{34}+\frac{5}{34}\ln|5\sin x+3\cos x|+C$. 515. $\frac{41}{20}x+\frac{29}{20}\ln|5\cos x+2\sin x|+C$. 516. $\frac{12}{13}x-\frac{5}{13}\ln|2\sin x+3\cos x|+C$.

518. $\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\tan x/2}{\sqrt{3}}+\ln|2+\cos x|+C$.

519. $\frac{10}{\sqrt{13}}\arctan\frac{3\tan\frac{x}{2}+2}{\sqrt{5}}+\frac{1}{2}\ln|3+2\sin x|+C$. 520. $x-\tan\frac{x}{2}+C$.

521. $\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\tan(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8})-\frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}+\sin x+\cos x)+C$. 522. $-x+\tan x+\frac{1}{\cos x}+C$. 523. $\frac{2}{5}x-\frac{1}{5}\ln|3\sin x+4\cos x-2|+\frac{4}{5\sqrt{21}}\ln\left|\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}(2\tan x/2-1)}{\sqrt{7}-\sqrt{3}(2\tan x/2-1)}\right|+C$. 524. $-\frac{3x}{5}+\frac{4}{5}\ln|\sin x-2\cos x+3|-\frac{6}{5}\arctan\frac{5\tan\frac{x}{2}+1}{2}+C$. 525. $\frac{2}{13}x-\frac{3}{13}\ln|2\cos x-3\sin x+4|+\frac{10}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\tan x/2-3}{\sqrt{3}}+C$.

II peatükk.

§ 1.

526. $\frac{b^2-a^2}{2}$. 527. 19/3. 528. e^3-1. 529. $\frac{1022}{\ln 2}$.

530. 255/4. Kasutada valemit $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$. 531. $\frac{1}{\alpha+1}$.

Valida x_k nii, et nad moodustaksid geomeetrilise progressiooni. 532. ln 2. 533. -1. Kasutada valemit $\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} \sin\frac{nx}{2}$. 534. 2. 538. Kasutada teoreemi: kui tõkestatud funktsioonil on loenduv hulk katkevuspunkte, siis on ta integreeruv (vt. Kangro, Matem. analüüs, I osa, 1965, lk. 363). 539. vt. juhist ülesandele 538. 542. Näidata, et f(x) ei ole integreeruv juba lõigul $[0,1/2]$.

544. $\int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx$. 545. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$. 546. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$. 547. $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x}$.

548. $\frac{e^3-1}{3}$. 549. $\frac{1}{\alpha+1}$. 550. ln 2. 551. $\frac{2}{\pi}$.

§ 2.

553. positiivne. 554. negatiivne. 555. negatiivne. 556. negatiivne. 557. positiivne. 558. negatiivne. 559. positiivsed, esimene. 560. positiivsed, teine. 561. positiivsed, teine. 562. positiivsed, esimene. 563. positiivsed, esimene. 564. negatiivsed, teine. 565. positiivsed, esimene. 566. positiivsed, esimene. 567. positiivsed, esimene. 568. positiivsed, teine. 569. negatiivsed, teine. 570. positiivsed, esimene. 571. positiivsed, teine. 572. positiiv-

sed, teine. 573. esimene positiivne, teine negatiivne; esimene. 574. $2\exp(-\frac{1}{4}) \le J \le 2e^2$. 575. $(e^2-1)\exp(1-e^2) \le J \le$ $\le e^{-2}(e^2-1)$. 576. $\pi^2/72\sqrt[4]{3} \le J \le \pi^2/48$. 577. $\pi\sqrt{2} \le 2J \le \pi\sqrt{3}$.

578. $2\pi \le 9J \le 4\pi$. 579. $1 \le J \le \sqrt{2}$. 580. $\sqrt{2} \le \pi J \le 2\sqrt{2}$.

581. $\frac{1-e^{-100}}{200} \le J \le \frac{1-e^{-100}}{100}$. 582. $0 \le J \le (\sqrt{2\pi} - \sqrt{\frac{3\pi}{2}})$.

583. $\frac{b+a}{2}$. 584. $\sqrt{\frac{19}{3}}$. 585. $\ln\frac{e^3-1}{3}$. 586. $\approx 2,77$. 587. $\frac{1}{\ln 2}$.

588. $\arcsin\frac{2}{\pi}$.

§ 3.

589. $\frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x+x^2}}$. 590. $2\frac{\sin x}{x}$. 591. $-\sqrt{1+x^2}$. 592. $-\frac{x}{\ln x}$.

593. xe^{-x}. 594. $2\ln^2 2+4\ln(2+x)+\ln^2 x$. 595. $\frac{\sin x}{2\sqrt{x}}$.

597. $(\sin x-\cos x)\cos(\pi\sin^2 x)$. 598. $\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}} - \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}$.

599. $y' = -e^{-y^2}\cos x^2$. 600. $y' = \frac{e^t \ln t}{t^2}$. 601. $-2t^3$.

602. -3, -5. 603. -1, $2\sqrt{3}\, e^{-9}-e^{-3}$. 604. $\frac{3}{2}\cos 1$, $\frac{4}{\pi^2}\cos\frac{4}{\pi^2}$.

605. $y'' = \frac{1}{2}y'(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{2x}{x^2+2} - \frac{2x}{x^2+7})$. Teise tuletise leidmisel kasutada logaritmimist. 606. $y'' = \frac{2x}{5}\sqrt[5]{\frac{(x^2+2)(x^3-3)}{\arccos x^2}} \times$ $\times(\frac{2x}{x^2+2}+\frac{8x^7}{x^8-3}+\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}\arccos x^2}+\frac{5}{x})$. 607. $y'' = \frac{(x-1)\sin^2 x\sqrt{x^5-42}}{\arccos x} \times$ $\times(\frac{1}{x-1}+\frac{5x^4}{2(x^5-42)}+2\cot x+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\arccos x})$. 608. $x^{\sin x}(\frac{\sin x}{x}+$ $+\cos x\ln x)$. 609. $2x^{2x}(2x\ln x+2x+1)$. 610. $(x^2+1)^{\sin x} \times$ $\times\left[\cos x\ln(x^2+1)+\frac{2x}{x^2+1}\sin x\right]$. 611. maksimum kohal $x = e$.

612. maksimum kohal $x = (2k+1)\pi$.
miinimum kohal $x = 2k\pi$, $k = 1,2,\ldots$

613. maksimum kohal $x = 2$ miinimum kohal $x = 0$.
614. maksimum kohal $x = 1$.
615. miinimum kohal $x = \frac{1}{e}$. 616. miinimum kohal $x = \sqrt[3]{\frac{5}{4}}$.
617. kumer vahemikus $(2,e)$, nõgus vahemikus (e,∞), kohal $x = e$ on käänupunkt. 618. nõgus vahemikus $(1,\infty)$. 619. kumer vahemikus $(0,2)$, nõgus piirkonnas $\{(-1,0),(2,\infty)\}$, käänupunktid kohtadel $x = 0$, $x = 2$. 620. kumer vahemikus $(\frac{-2+\sqrt{13}}{3},1)$, nõgus piirkonnas $\{(\frac{1}{2}, \frac{-2+\sqrt{13}}{3}), (1,\infty)\}$, käänupunktid kohtadel $x = \frac{-2+\sqrt{13}}{3}$, $x = 1$. 622. 1. 623. 1. 624. 1. 625. 1/3. 626. 1.

§ 4.

627. 7/3. 628. 100/3. 629. $\ln 4+\frac{3}{4}$. 630. $\frac{1}{2}\ln\frac{2}{3}$.
631. $1-\frac{1}{\sqrt{3}}$. 652. $\frac{\pi}{4}$. 633. π. 634. $\operatorname{th}(\ln 3)-\operatorname{th}(\ln 2) = \frac{1}{5}$.
635. $\frac{\pi}{4}$. 636. $-\ln 5$. 637. π. 638. $\frac{\pi^3}{64}+\arctan\frac{\pi}{4}$. 639. 1.
640. 6. 641. $\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}\frac{\pi}{4}$. 642. $9\frac{2}{3}$. 643. $e-\frac{1}{e}$. 644. $\frac{\pi}{2}$.
645. π. 646. 0. 647. $2e\ln(e+\sqrt{1+e^2})$. 648. 28,8. 649. 0.
650. 2π. 651. $\frac{1}{2}(\frac{\pi}{6} - 1)$. 652. $3(\ln 12-1)$. 655. $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.
654. $1-\frac{2}{e}$. 655. $-\frac{1}{4}$. Kasutada valemit (7). 656. -2π.
657. $\frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}}+1)$. Rakendada valemit (6) kaks korda ja lahendada saadud võrrand integraali suhtes. 658. $\frac{16}{3}$. 659. $-\frac{2}{3}$.
660. $\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$. 661. $\frac{1}{4}\operatorname{sh} 2\pi - \frac{\pi}{2}$. 662. $\frac{\pi}{2w}$. 663. -12. 664. $\frac{\pi}{24}$.
665. $\frac{\pi}{30}$. 666. $\ln 2$. 667. $1-\cos 1$. 668. $\frac{2}{3}$. 669. $\frac{1}{3}$.
670. $\arctan\frac{e^2-1}{2e}$. 671. $\ln 2$. 672. $32\frac{2}{3}$. 673. $\frac{(e-1)^5}{5}$.

674. $\frac{\pi}{2}$. 675. $\frac{4}{3}$. 676. $\frac{2}{7}$. 677. $\frac{1}{5}\ln\frac{7}{2}$. 678. $4-2\ln 3$.

679. $2\ln 2-1$. 680. $35\frac{1}{15}-32\ln 3$. 681. $\ln\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{3}{\sqrt{39}}\arctan\frac{\sqrt{39}}{27}$.

682. $\arctan\frac{1}{7}$. 683. $\frac{\pi}{2}$. 684. $2-\ln 2$. 685. $\frac{\pi}{2}$.

686. $\frac{2}{\sqrt{5}}\arctan\frac{1}{\sqrt{5}}$. 687. $\frac{\pi}{6}$. 688. $6\ln\frac{4}{3}$. 689. $\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}$. 690. $3\pi/8$.

691. $2-\pi/2$. 692. $\pi/3+\sqrt{3}/2$. 693. $282\frac{2}{5}$. 694. $-\frac{1}{6}\ln 3$.

695. $\frac{1}{3}\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. 696. $\frac{\pi}{16}$. 697. $\frac{8}{9\sqrt{3}}+\frac{\pi}{6}$. 698. $\ln(1+e)$.

699. $-\frac{1}{12}\ln 5$. 700. $\frac{1}{2}$. 701. $\frac{\ln a}{2}$. 702. 1. 703. $3(\ln 2-\frac{1}{2})$.

704. 17. 705. $\ln\frac{3}{4}$. 706. $\frac{8}{21}$. 707. 6. 708. $-\frac{8}{3}\ln 2-\frac{7}{9}$.

709. $\sqrt{3}-\frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{3})$. 710. $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$. 711. $\sqrt{2}-\frac{2}{\sqrt{3}}+\ln\frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}$.

712. $\frac{8}{15}$. 713. 0. 714. $\frac{1}{3}$. 715. $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$. 716. 6. 717. $\frac{1}{2}$.

718. $4\sqrt{3}-4-\frac{\pi}{3}$. 719. $\frac{25}{288}+\frac{3}{2}\ln 2$. 720. $\frac{1}{12}$. 721. $\frac{8}{3}$. 722. 0.

723. $\pi-2$. 724. $\pi(\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{4})-\frac{1}{2}\ln 2$. 725. $\frac{4}{3}+\sqrt{\frac{3}{4}}+\frac{1}{3\sqrt{2}}-\frac{5\pi}{12}$.

726. $2{,}1\ln 2{,}1-0{,}1\ln 0{,}1-2+\pi$.

III peatükk.

§ 1.

727. 2. 728. $\ln 2$. 729. hajub. 730. hajub. 731. $\pi/2$.

732. π. 733. hajub. 734. hajub. 735. $1/\ln 2$. 736. hajub.

737. $3\pi^2/32$. 738. $3\pi^2/8$. 739. $3\sqrt[3]{\pi}/4$. 740. hajub.

741. $1/2$.

§ 2.

742. koondub absoluutselt. 743. koondub. 744. koondub absoluutselt. 745. koondub. 746. koondub. 747. koondub. 748. koondub. 749. koondub absoluutselt. 750. koondub absoluutselt. 751. koondub. 752. hajub. 753. koondub. 754. koondub. 755. hajub.

§ 3.

756. hajub. 757. 1. 758. $1/(k-1)$ juhul $k > 1$; hajub juhul $k \leq 1$. 759. π. 760. $\pi/\sqrt{5}$. 761. hajub. 762. 1/2. 763. 1/4. 764. 1/ln 2. 765. 2. 766. hajub. 767. 0. 768. π. 769. hajub. 770. hajub. 771. $\alpha/(\alpha^2+\beta^2)$. 772. 2. 773. hajub. 774. $\pi^2/8$.

§ 4.

775. koondub. 776. koondub. 777. koondub. 778. koondub. 779. koondub. 780. koondub. 781. hajub. 782. koondub. 783. hajub. 784. koondub. 785. koondub tingimisi. 786. koondub tingimisi. 787. koondub absoluutselt. 788. koondub tingimisi. 789. koondub absoluutselt. 790. koondub absoluutselt.

IV peatükk.

§ 1.

791. 4,5. 792. 9,9-8,1log e≈6,38. 793. πab.

794. $4a^2/3$. 795. $a^2(2\pi-4/3)$. 796. $2\pi p^2+16p^2/3$ ja $2\pi p^2-$ $-16p^2/3$. 797. 1/9. 798. $\pi/4$. 799. $3\pi a^2/2$. 800. $\pi a^2/4$.

801. $18\pi a^2$. 802. $\pi(a^2+b^2)/2$. 803. a^2. 804. a^2.

805. $3\pi a^2/8$. 806. $6\pi a^2$. 807. $\pi/4$. 808. $8(\sqrt{1+2/\sqrt{3}}-$ $-\arctan\sqrt{1+2/\sqrt{3}})$. 809. $5\sqrt{2}/3$. 810. $3\pi a^2$. 811. π. Et vaadeldav kujund on tõkestamata ja sümmeetriline y-telje suhtes, siis tuleb algul leida kujundi osa pindala, kui $0\leq x\leq h$, ning siis minna piirile $h\to\infty$. Sellega tõkestamata kujundi pindala leidmine taandatakse päratu integraali arvutamisele. 812. 2. 813. $\sqrt{\pi}/2$. Kasutada võrdust $\int_0^\infty \exp(-x^2)dx = \sqrt{\pi}/2$. 814. 4π. 815. $3\pi a^2$.

§ 2.

816. 2abc/3. 817. $4\pi abc/3$. 818. $8\pi abc/3$.

819. $16a^3/3$. 820. $2a^3(3\pi-4)/9$. 821. $16a^2\sqrt{ab}/15$. 822. π^2.

823. 12π. 824. $22\pi a^3/9$. 825. $4\pi ab^2/15$. 826. $3\pi/10$.

827. $\pi(15-16\ln 2)/2$. 828. $\pi(\pi^2-8)/4$. 829. $\pi/2$. Võrdl. märkust ülesandele 811. 830. $4\pi r^3/3$. 831. $\pi b^2(r-h/3)$.

832. $2\pi r^2(r-h)/3$. 833. $4\pi a^2b/3$. 834. $2^7\pi/15$.

835. $117\pi/2$. 836. $\pi a^3/15$. 837. $32\pi a^2b/105$. 838. $6\pi^3a^3$.

839. Kasutada valemit (9), minnes üle polaarkoordinaatidele. 840. a) $8\pi a^3/3$; b) $13\pi^2 a^3/4$. 841. a) $\pi a^3\left[\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})-2/3\right]/4$; b) $\pi^2 a^3\sqrt{2}/8$; c) $\pi^2 a^3/4$. Minna üle polaarkoordinaatidele. Juhul c) võtta uueks polaarteljeke sirge $y=x$.

§ 3.

842. $2\pi r$. Kasutada valemit (12). 843. $28/3$. 844. $a(a+2)/2$. 845. $\ln\left[(e^b-e^{-b})/(e^a-e^{-a})\right]$. 846. $\ln\tan\frac{3\pi}{8}= \ln(\sqrt{2}+1)$. 847. $(e^2+1)/4$. 848. $a \operatorname{sh}\frac{b}{a}$. 849. $4a(1+3\sqrt{3}\ln\frac{3}{2})$. 850. $6a$. 851. $4(a^3-b^3)/(ab)$. 852. $8a$. 853. $\pi a\sqrt{1+4\pi^2}+ \frac{a}{2}\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})$. 854. 1. 855. $3\pi a/2$. 856. $a(2\pi-\operatorname{th}\pi)$. 857. $2+0{,}5\ln 3$. 858. 2. 859. 8. 860. 4. Veenduda, et joon on määratud, kui $-\pi\leq 2x\leq\pi$. 861. $\sqrt{5}/2+\ln(1{,}5+\sqrt{5}/2)$. 862. $5/6+2\ln 1{,}5$. 863. $a\sqrt{1+m^2}/m$. 864. $\ln(\pi/2)$.

§ 4.

866. $14\pi/3$. 867. $\pi(\sqrt{(1+a^4)^3}-1)/9$. 868. $\pi a^2(\operatorname{sh} 2+2)/2$. 869. $\pi\left[(\sqrt{5}-\sqrt{2})+\ln\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{5}-1)}{2}\right]$. 870. $4\pi^2 ab$. 871. $12\pi a^2/5$. 872. $2\pi\sqrt{2}(e^{\pi}-2)/5$. 873. $2\pi(4+3\ln 3)$. 874. $29{,}6\pi$. 875. $16\pi^2 a^2$. 876. $32\pi a^2/5$. 877. a) $2\pi a^2(2-\sqrt{2})$; b) $2\pi a^2\sqrt{2}$; c) $4\pi a^2$; kasutada valemit (15), kus $h=|y-x|/\sqrt{2}=(x-y)/\sqrt{2}$. 878. $8\pi a^2(\pi-4/3)$. 879. $3\pi a^2(4\sqrt{2}-1)/5$. 880. $\pi\left[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})\right]$. Vt. märkus ülesandele 811.

§ 5.

882. $(0, \frac{2a}{\pi})$. 883. $(0, \frac{2}{5}a)$. 884. $(\pi a, \frac{4}{3}a)$. 885. $(\frac{2}{5}a, \frac{2}{5}a)$. 886. $\left(-\frac{a}{5}\,\frac{2e^{2\pi}+e^{\pi}}{e^{\pi}-e^{\pi/2}}, \frac{a}{5}\,\frac{e^{2\pi}-2e^{\pi}}{e^{\pi}-e^{\pi/2}}\right)$. 887. $(\frac{4}{5}a, \frac{4}{5}a)$. 888. $(0, \frac{4a}{3\pi})$. 889. $(\frac{a}{5}, \frac{a}{5})$. 890. $(\frac{4a}{3\pi}, \frac{4b}{3\pi})$. 891. $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8})$. 892. $(\frac{5}{8}a, 0)$. 893. $(\pi a, \frac{5}{6}a)$. 894. $(\frac{256a}{315\pi}, \frac{256a}{315\pi})$. 895. $\frac{9}{2}\pi a^3$. 896. $\frac{3\sqrt{2}}{8}\pi^2 a^3$, $6\sqrt{2}\pi a^2$. 897. Sirge peab olema risti ruudu diagonaaliga. 898. Sirge peab olema risti mediaaniga.

§ 6.

899. $(a^2+ab+b^2)/3$. 900. $0{,}5r^3(\alpha-\sin\alpha\cos\alpha)$; πr^3. 901. $\pi r^3+2\pi rb^2$, kus r on ringjoone raadius ja b on keskpunkti kaugus teljest. 902. $\frac{b^2}{2}+\frac{ab}{2\varepsilon}\arcsin\varepsilon$, kus ε on ellipsi ekstsentrilisus. 903. $\frac{\pi}{2}+\frac{4}{5}$. 904. $\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}$. 905. 3/20. 906. $ah^2/6$, $ah^3/12$, kus a on kolmnurga alus ning h on kõrgus. 907. $Q_x = Q_y = 0$, $J_x = \pi ab^3/4$, $J_y = \pi a^3b/4$. 908. $\approx 23{,}7$ m. 909. $x_2 = x_1+\sin(\frac{2\pi t_2}{T}+\varphi_0)-\sin(\frac{2\pi t_1}{T}+\varphi_0)$. 910. $\frac{km\,Ma}{\sqrt{(R^2+a^2)^3}}$. 911. $2km\varphi$. 912. $\approx 1{,}63\ 10^{11}$ kGm. 913. $\frac{4}{15}ab\,H^2 = 240$ kGm. 914. $\frac{ab^3 d\,\rho\,\omega^2}{6} \approx 1{,}16$ kGm. 915. 22,2 t. 917. $4\pi r^4/3$. 918. ≈ 1 t 6 min 53 sek Torricelli valemi põhjal $v = \sqrt{2gh}$, kus h on vedeliku samba kõrgus, g - raskuskiirendus. 919. ≈ 82 min Newtoni seaduse

põhjal on jahtumise kiirus võrdeline keha ja ümbritseva keskkonna temperatuuride vahega. 920. $\approx 5°$. 921. Nõu peab olema tekkinud joone $y = Cx^4$ pöörlemisel ümber y-telje. Vt. Ülesande 918 juhist.

V. peatükk.

§ 1.

922. $S_n = \frac{1}{3}(1-\frac{1}{3n+1})$, $S = \frac{1}{3}$. 923. $S_n = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+3})$, $S = \frac{1}{2}$. 924. $S_n = \frac{1}{3}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3})$, $S = \frac{11}{18}$.
925. $S_n = \frac{1}{6}(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5} - \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+5} - \frac{1}{2n+7})$, $S = \frac{23}{90}$.
926. $S_n = 1-(n+1)^{-2}$, $S = 1$. 927. $8S_n = 1-(2n+3)^{-2}$, $S = 1/8$.
928. $S_n = \sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}-1$, $S = -1$. 929. $S_n = \frac{n}{\sqrt{n(n+1)}}$, $S = 1$.
930. $S_n = \frac{1-x^n}{1-x}$, $S = \frac{1}{1-x}$, $|x| < 1$. 931. $S_n = \frac{4}{3}\left[1-(-\frac{1}{2})^n\right]$, $S = \frac{4}{3}$. 932. $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$, $S = \infty$. 933. $S_n = n(n+1)(2n+1)/6$, $S = \infty$. 934. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \ln \frac{n+2}{n+1}$. 935. $\sqrt{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})$.
936. $3-\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)}$. 937. $1-\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. 938. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 1$.
939. $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{n(n+1)}$. 940. $2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(n-1)^2+2} - \frac{1}{n^2+2}\right]$.
941. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^2$. 942. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^3$. 943. 2/3. 944. 17/2. 945. 7/2.
946. 11/4. 947. -2/7. Veenduda, et $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\cos \frac{2n\pi}{3} =$
$= \sum\limits_{k=1}^{\infty} (-\frac{1}{2}\frac{1}{2^{3k-2}} - \frac{1}{2}\frac{1}{2^{3k-1}}+\frac{1}{2^{3k}})$. 948. hajub. 949. hajub.
950. hajub. 951. hajub. 952. hajub. 953. hajub. 954. hajub.

955. hajub. Kasutada ülesannet 953 ja võrratust $\tan x > x$, kui $0 < x < \pi/2$. 956. hajub. 957. hajub. 958. hajub. Kasutada ülesannet 953 ja võrratust $\ln n < n$. 959. hajub. 960. hajub.

§ 2.

961. koondub. 962. koondub. 963. hajub. 964. koondub. 965. koondub. 966. hajub. 967. koondub. 968. hajub. 969. koondub. 970. koondub. 971. hajub. 972. koondub. 973. hajub. 974. koondub. 975. hajub. 976. koondub. 977. hajub. 978. hajub. 979. koondub. 980. koondub. 981. koondub. 982. hajub. 983. koondub. 984. koondub. 985. hajub. 986. hajub. 987. hajub. 988. koondub. 989. koondub. 990. koondub. Kasutada seost $\ln n = O(n^{\varepsilon})$ iga $\varepsilon > 0$ korral. 991. koondub. 992. koondub, kui $\alpha > 1/2$. 993. koondub, kui $\alpha > 1$. 994. hajub iga α korral. 995. koondub. 996. hajub. 997. koondub. 998. koondub. 999. koondub. 1000. koondub. 1001. koondub. 1002. koondub. 1003. koondub. 1004. koondub iga α korral. 1005. koondub. 1006. hajub. 1007. koondub. 1008. koondub. 1009. koondub. 1010. koondub $\alpha < 1$ korral, hajub $\alpha \geq 1$ korral. 1011. koondub. 1012. koondub. 1013. koondub. 1014. hajub. 1015. koondub. 1016. koondub. 1017. koondub, kui $a+b > 1$. 1018. hajub, $nD_n = (2+\sqrt{n+4})\sqrt{n+1}$, $R_n = -2\sqrt{n+1} + O(1)$. 1019. koondub, kui $p > 2$. 1024. koondub, $R_n \leq \frac{1}{\ln n}$. 1025. hajub. 1026. koondub $\alpha > 1$ korral, hajub $\alpha \leq 1$ korral, $R_n \leq \frac{1}{(\alpha-1)\ln^{\alpha-1} n}$. 1027. koondub juhul $\alpha > 1$, hajub juhul $\alpha \leq 1$, $R_n \leq \frac{1}{(\alpha-1)\ln^{\alpha-1}\ln n}$. 1028. $N > 1000$.

1029. $N > e^{10}$. 1030. $N > 23$. 1031. $N > e^{23}$. 1032. koondub. 1033. koondub. 1034. koondub. 1035. koondub. 1036. koondub iga α korral. 1037. koondub. 1038. koondub. 1039. koondub, kui $\alpha > 0$. 1040. koondub. 1041. koondub, kui $\alpha > 1/2$. 1042. koondub. 1043. koondub. 1044. hajub. 1045. koondub, kui $2p > 3$. 1046. kui $\alpha > 1$ koondub iga β korral; kui $\alpha = 1$, koondub $\beta > 1$ korral ja hajub $\beta \leq 1$ korral; kui $\alpha < 1$ hajub iga β korral.

§ 3.

1047. koondub tingimisi. 1048. koondub absoluutselt. 1049. koondub tingimisi. 1050. koondub absoluutselt. 1051. koondub tingimisi. 1052. hajub. 1053. koondub absoluutselt. 1054. koondub absoluutselt. 1055. koondub absoluutselt iga a korral. 1056. hajub. 1057. koondub tingimisi iga a korral. 1058. koondub absoluutselt. 1059. koondub tingimisi. Kasutada võrratust $\ln(1+1/n) < 1$. 1060. koondub tingimisi. 1061. koondub absoluutselt, kui $|a| < 1$. 1062. hajub. Kasutada Cauchy kriteeriumi, arvestades rea $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}+1} - \frac{1}{\sqrt{n+2}-1}\right)$ hajuvust. 1063. koondub absoluutselt kui $|a| \leq 1/2$. 1064. koondub absoluutselt, kui $|a| < 1$; koondub tingimisi, kui $a = -1$. 1065. koondub absoluutselt, kui $\alpha < -2$; koondub tingimisi, kui $-2 \leq \alpha < -1$. 1066. hajub. 1067. hajub.

§ 4.

1076. ei. 1077. ja. 1078. ja. 1079. ja. 1080. ja.

1081. $X = A = (-\infty,\infty)$, $S(x) = (1+x^2)/x$. 1082. $X = A = (-1,1)$, $S(x) = 1/(1-x^2)$. 1083. $X = A = (-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $S(x) = 1/(1+2x)$. 1084. $X = A = (1,5)$, $S(x)= 1/(5-x)$. 1085. $X = A =\{(-\infty,-1)(1,\infty)\}$, $S(x) = x/(x-1)$. 1086. $X = A = (\frac{1}{c},c)$, $S(x) = (1-\ln x)^{-1}\ln x$. 1087. $X = A = (k\pi,(k+1)\pi)$, kus $k = 0,\pm1,\pm2,\dots$; $S(x) = 1/(1-\cos x)$. 1088. $X = A =[-1,1]$.
1089. $X = A = (-\infty,\infty)$. 1090. $X = A = (1,\infty)$. 1091. $X = \{(-\infty,-2],(0,\infty)\}$, $A =\{(-\infty,-2),(0,\infty)\}$. 1092. $X = (-\infty,\infty)$, $A = \{0\}$. 1093. $X = A = (-2,\infty)$. 1094. $X = (-\infty,\infty)$, $A = \emptyset$.
1095. $X = (-\infty,\infty)\setminus\{0,-1,-2,\dots\}$; $A = \emptyset$. 1096. $X = A = (-\infty,\infty)$. 1097. $X = A =\{(-\infty,-1),(-\frac{1}{3},\infty)\}$. 1098. $X = \{(-\infty,1),(1,\infty)\}$, $A =\{(-\infty,-1),(-1,1),(1,\infty)\}$. 1099. $X = A=\{(-\infty,0),(0,\infty)\}$, kui $|a|>1$. 1100. $X = A = (1,\infty)$.
1101. $X = A =\{(-\infty,-1),(-1,1)(1,\infty)\}$. 1102. $X = \{(-\infty,-1],[1,\infty)\}$, $A =\{(-\infty,-1),[1,\infty)\}$. 1103. ja.
1104. ei. 1105. ja. 1106. ja. 1107. ja. 1108. ja. 1109. ei.
1110. ja. 1111. ei. 1112. ja. 1113. $A = G = (-\infty,\infty)$.
1114. $A = G = (-\infty,\infty)$. 1115. $A = G = (-\infty,\infty)$. 1116. $A = G =[-1,1]$. 1117. $A = G = (-\infty,\infty)$. 1118. $A = G = (-\infty,\infty)$.
1119. $A = G = (-\infty,\infty)$. 1120. $A = G = X$. 1121. $A = \emptyset$, $G = (-\infty,\infty)$. 1122. $A = \emptyset$, $G = (-\infty,\infty)$. 1123. $A = \emptyset$, $G =[-2,2]$. 1124. $A = \emptyset$, $G = [a,\infty)$ iga $a<0$ korral.
1125. $A = G =[k\pi-\pi/6,\ k\pi+\pi/6]$, kus $k = 0,\pm1,\pm2,\dots$.
1126. $A = G = (-\infty,\infty)$. 1127. $A = G =[-3/2,\ 3/2]$.
1128. $A = \emptyset$ $G = (-\infty,\infty)$. 1129. $A = (-\infty,\infty)\setminus\{-1,-2,\dots\}$; $G =[a,\infty)\setminus\{-1,-2,\dots\}$. iga $a<0$ korral. 1130. $A = G = (-\infty,\infty)$. 1131. $A = G = (-\infty,\infty)$.

1132. $A = \{(-\infty,-1),(0,\infty)\}$, $G = \{(-\infty,-1-\varepsilon], (0,\infty)\}$ iga $\varepsilon > 0$ korral. 1137. 0. 1138. 1. 1139. $\pi/2$. 1140. $-\pi$. 1141. 0. 1142. 0. 1143. $\ln 2$. Kasutada valem (28) lk. 208. 1144. 1/2. 1145. 11/18. 1146. $\max f(x) = f(-1) = \pi/(4-\pi)$, $\min f(x) = f(1) = 0$. 1147. $\max f(x) = f(\pm 1) = \pi/(2e-\pi)$, $\min f(x) = f(0) = 0$. 1148. 1/2. 1149. 6. 1150. $5\pi/2$. 1151. 1/3. 1152. $(5\pi-2)/10$. Arvestada, et $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}\cos\frac{n\pi}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1/4)^k$. 1153. 1. 1157. -1. 1158. 1.

§ 5.

1159. $R = 1/3$, $X = A = (-1/3,1/3)$. 1160. $R = 1/2$, $X = A = (-1/2,1/2)$. 1161. $R = 5$, $X = A = (-5,5)$. 1162. $R = \infty$, $X = A = (-\infty,\infty)$. 1163. $R = 1/2$, $X = A = (-5/2,-3/2)$. 1164. $R = 10$, $X = A = (-7,13)$. 1165. $R = 1$, $X = (-1,1]$, $A = (-1,1)$. 1166. $R = 4$, $X = A = (-4,4)$. 1167. $R = 10$, $X = [-10,10)$, $A = (-10,10)$. 1168. $R = 0$, $X = A = \{0\}$. 1169. $R = 1$, $X = A = [-1,1]$. 1170. $R = 4$, $X = A = (-4,4)$. 1171. $R = 0$, $X = A = \{0\}$. 1172. $R = 1$, $X = A = [-1,1]$. 1173. $R = 1$, kui $\alpha > 1$, siis $X = A = [-1,1]$; kui $0 < \alpha \leq 1$, siis $X = [-1,1)$, $A = (-1,1)$. 1174. $R = \infty$, $X = A = (-\infty,\infty)$. 1175. $R = \infty$, $X = A = (-\infty,\infty)$. 1176. $R = 1$; kui $\alpha > 1$, siis $X = A = [-1,1]$, kui $0 < \alpha \leq 1$, siis $X = (-1,1]$, $A = (-1,1)$. 1177. $R = 1/\sqrt{2}$, $X = A = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. 1178. $R = 1/e$, $X = [-1/e,1/e)$, $A = (-1/e,1/e)$. 1179. $R = 1/e$, $X = A = (-1/e,1/e)$. 1180. $R = e$, $X = A = (-e,e)$. 1181. $R = \infty$, $X = A = (-\infty,\infty)$. 1182. $R = \infty$, $X = A = (-\infty,\infty)$. 1183. $R = 0$, $X = A = \{3\}$.

1184. $R = 2$, $X = A = (-7,-3)$. 1185. $R = e$, $X = A = (-e,e)$. 1186. $R = 1$, $X = A = (-2,0)$. 1187. $R = 1$, $X = A = [-3,-1]$. 1188. $R = 1/e$, $X = A = (2-1/e, 2+1/e)$. 1189. $R = 1$, $X = [-1,1)$, $A = (-1,1)$. 1190. $(1-x)^{-2}$, $X = (-1,1)$. 1191. $(1+x)^{-2}$, $X = (-1,1)$. 1192. $-\ln(1-x)$, $X = [-1,1)$. 1193. $(2-x)^{-1}\ln(3-x)$, $X = [1,3)$. 1194. $x^{-1}\ln(1+x)$, $X = (-1,1]$. 1195. $2(1-x)^{-3}$, $X = (-1,1)$. 1196. $2x^2(1+x)^{-3}$, $X = (-1,1)$. 1197. $(1+x)\ln(1+x)-x$, $X = [-1,1]$. 1198. $x^{-2}(1+x^2)\times \ln(1+x^2)-x^2$, $X = [-1,1]$. 1199. $\operatorname{arctan} x$, $X = [-1,1]$. 1200. $\operatorname{arth} x$, $X = (-1,1)$. 1201. 2. 1202. $-2/9$. 1203. $3\ln\frac{3}{2}$. 1204. $5/32$. 1205. $2\ln 2-1$. 1206. $\pi/4$.

§ 6.

1207. ei. 1208. ei. 1209. ei. 1210. ja. 1211. $1+x^2/2-x^3/2+x^4-3x^5/4$. 1212. $\ln 2+x/2+x^2/8-x^4/192$. 1213. $x+x^3/3+2x^5/15$. 1214. $x-x^3/3+2x^5/15$. 1215. $1+x+x^2+x^3/2+5x^4/24+x^5/15$. 1216. $1-x+x^3/6-x^4/24$. 1217. $x^2-2x^4/3$. Kasutada valemit (29), võttes jääkliikme Peano kujul $o(x^5)$. 1218. $x-(1+1/2)x^2+(1+1/2+1/3)x^3-(1+1/2+1/3+1/4)x^4+(1+1/2+1/3+1/4+1/5)x^5$. Kasutada valemit (28). 1219. $x/3+x^3/45+2x^5/945$. Kasutada valemeid (24) ja (25). 1220. $1-x/2-x^2/12-x^3/24-19x^4/720-3x^5/160$. Arvutada jagatis $1/(1+x/2+x^3/3+x^4/4+x^5/5+\ldots)$. 1221. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^n}{2^{n+1}}$.
1222. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}$. 1223. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}^n \sin n\pi/4}{n!} x^n$.
1224. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{4^{n-1}}{(4n-4)!}x^{4(n-1)}$. 1225. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n} \times (x-2)^{2n}$. 1226. $1/\ln 10 \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^n/n$. 1227. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!}$,

R = ∞. 1228. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$, R = ∞. 1229. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \times$

$\times\frac{x^{2n+1}}{2^{2n+1}(2n+1)!}$, R = ∞. 1230. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}$, R = ∞.

1231. $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}$, R = +∞.

$n=1$

1232. $1+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2x)^{2n}}{(2n)!}$, R = ∞. 1233. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x\ln a)^n}{n!}$,

R = ∞. 1234. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$, R = ∞. Kasutada valemeid (24) ja (25). 1235. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, R = ∞.

1236. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$, R = ∞. 1237. $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$, R = 1.

1238. $\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}$, R = 1. 1239. $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2x^n$, R = 1.

1240. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}}$, R = 2. 1241. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^{n+1}}$, R = 3.

1242. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{3^{n+1}}\right)x^n$, R = 2. 1243. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)x^n$, R = 2.

1244. $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[n+\frac{1-(-1)^n}{2}\right]x^n$, R = 1. 1245. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n}$,

R = 1. 1246. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n\,2^n}$, R = 2. 1247. ln 8+

$+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n\,8^n}$, R = 8. 1248. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n x^n}{n}$, kus $a_n =$

$= (-1)^{n+1}+\left[1+(-1)^n\right](-1)^{\frac{n}{2}+1}$, R = 1. Kasutada aamasust

$1+x+x^2+x^3 = (1+x)(1+x^2)$. 1249. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2n!!}5^{n}x^{n+1}$, R = $\frac{1}{3}$.

1250. $1+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}x^{2n+2}$, R = 1. 1251. 3 +

$+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2\cdot5\cdot\ldots\cdot(3n-4)}{n!\,3^{4n-1}}x^{3n}$, R = 3.

1252. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2n!!} x^{2n+2}$, R = 1. 1253. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n(2n-1)}$, R = 1.

1254. $4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\, x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, R = ∞. 1255. $1+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n}}{(n+1)!}$, R = ∞.

1256. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$, R = ∞. 1257. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{(2n-1)!!\, x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n(2n+1)}$, R = 1. 1258. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, R = 1. 1259. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{(n-1)x^{2n}}{n(2n-1)}$, R = 1, 1260. $\frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)} x^{2n+1}$, R = 1.

1261. $\frac{\pi}{2}x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n}}{2n-1}$, kus $(-1)!! = 1$; R = 1.

1262. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} \frac{x^{2n+2}}{2n+1}$, R = 1. 1263. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} \times \frac{x^{2n+2}}{2n+1}$, R = 1. Kuna $f'(x) = \operatorname{arsh} x$, siis tuleb $f(x)$ saamiseks kaks korda integreerida $f''(t) = (1+t^2)^{-0,5}$ lõigus $[0,x] \subset (-1,1)$, kasutades binoomvalemit (26).

1264. $4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$, R = 1. 1265. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(n+1)}$, R = 1. 1266. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{\pi^{2n+1}}{4^{2n+1}(2n+1)!} x^{2n+1}$, R = ∞.

1267. ln 2 $- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n}}{n\, 2^{n}}$, R = 2. 1268. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{(x-3)^{2n}}{(2n)!}$, R = ∞. 1269. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{\sin(\frac{\pi n}{2}+1)}{n!} x^{3n}$, R = ∞. Kasutada valemit $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$.

1270. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{3n+1} \frac{(x-2)^{2n+1}}{2n+1}$, R = 1. 1271. $3 \sum_{n=0}^{\infty} (1-\frac{1}{2^{n}})x^{n}$, R = 1. 1272. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$, R = ∞.

1273. $\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{1}{(2n)!n} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{(2n)!n}$, R = ∞.

1274. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!(n+1)}{(2n+2)!!(2n+3)2^{2n-1}} x^{2n+3}$, R = 2.

1275. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!n}$, $R = \infty$. 1276. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}$, $R = \infty$. 1277. $x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$, $R = 1$.

1278. $x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!(3n+1)} x^{3n+1}$, $R = 1$.

1279. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$, $R = 1$. 1280. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!} \sum_{k=0} \frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n}{k}$, $R = \infty$. 1281. $\frac{x}{(1-x)^2}$, $X = (-1,1)$. 1282. $-\frac{x^2}{(1+x)^2}$, $X = (-1,1)$.

1283. $\frac{2x^2}{(1-x)^3}$, $X = (-1,1)$. 1284. $\frac{1-x}{(1+x)^3}$, $X = (-1,1)$.

1285. $\frac{\arctan x}{x}$ juhul $x \neq 0$ ja 1 juhul $x = 0$; $X = [-1,1]$.

1286. $\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$ juhul $x \neq 0$ ja 1 juhul $x = 0$; $X = (-1,1]$.

1287. $x - \ln(1+x)$, $X = (-1,1]$. 1288. $\frac{e^x-1}{x}$ juhul $x \neq 0$ ja 1 juhul $x = 0$. 1289. $x^2 - x \sin x$. 1290. $\frac{1-\cos x}{x}$ juhul $x \neq 0$ ja 0 juhul $x = 0$. 1291. $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$, $X = (-1,1]$. 1292. $2-\sqrt{1-x}$, $X = [-1,1]$. 1293. $x/\sqrt{1+x^2}$, $X = [-1,1]$. 1294. $2x - \frac{x\sqrt{1+x^2}}{2} - \frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})$, $X = [-1,1]$. 1295. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. 1296. $2-\sqrt{1+x^2}$, $X = [-1,1]$. 1297. 0. 1298. 1. 1299. $-3/32$. 1300. $7/128$.

1301. $1/6!$ 1302. $8501e/10!$ 1303. $1/5!$ 1304. $\frac{33}{7!} \cos 3 - \frac{\sin 3}{5!}$.

1305. 0. 1306. $-\infty$. 1307. $1/6$. Kasutada seost $\sin x \sim x$, kui $x \to 0$. 1308. 1. 1309. $1/2$. 1310. $-2/3$. 1311. $-1/3$. 1312. ∞.

1313. 0,747. 1314. 0,24488. 1315. 2,835. 1316. 0,946.

1317. 0,3230. 1318. 0,4971. 1319. 3,518. 1320. 32,831.

1321. 0,6449. 1322. 0,511. 1323. 0,488. 1324. 0,905.

1325. 0,072. 1326. 0,783. 1327. 0,507. 1328. 0,764.

§ 7.

1329. $\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$, koondub antud funktsiooniks $f(x)$. Koonduvus järeldub Dirichlet' teoreemist. 1330. $2+\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$, koondub. 1331. $1-\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\times\sin(2n+1)\frac{\pi x}{T}$, koondub. 1332. $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$, koondub. 1333. $2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$, koondub. 1334. $\pi-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$, koondub. 1335. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$, koondub. 1336. $\frac{\pi}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$, koondub. 1337. $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$, koondub absoluutselt ja ühtlaselt. Kasutada ühtlase koonduvuse tunnust. 1338. $\frac{T}{2}-\frac{4T}{\pi^2}\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2n+1)\pi x}{T}}{(2n+1)^2}$, koondub absoluutselt ja ühtlaselt.

1339. $\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}$, koondub absoluutselt ja ühtlaselt. 1340. $\frac{4\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}-4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$, koondub. 1341. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{12}{n^3}-\frac{2\pi^2}{n}\right)\sin nx$, koondub. 1342. $2\pi^3+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\pi}{n^2}\cos nx+\frac{3-2n^2\pi^2}{n^3}\sin nx$, koondub. 1343. $\frac{e^{2\pi}-1}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos nx}{1+n^2}-\frac{n\sin nx}{1+n^2}\right)\right]-1$, koondub. 1344. $\frac{2}{\pi}\operatorname{sh}\pi\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}\cos nx-n\sin nx)\right]$, koondub. 1345. $\operatorname{sh}T\left[\frac{1}{T}+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{T\cos\frac{n\pi x}{T}-\pi n\sin\frac{n\pi x}{T}}{T^2+n^2\pi^2}\right]$, koondub. 1346. $\frac{2\sin\pi^2}{\pi}\times$

$\left[\frac{1}{2\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\pi \cos nx}{\pi^2-n^2}\right]$, koondub absoluutselt ja ühtlaselt. 1347. $\frac{2\sin \pi^2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n \sin nx}{\pi^2-n^2}$, koondub.

1348. $\frac{1-\cos 2\pi^2}{2\pi^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin \pi^2}{\pi^2-n^2}(\sin \pi^2 \cos nx + n\cos \pi^2 \sin nx)$, koondub. 1349. $\frac{2}{3}\pi^2+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx$, koondub absoluutselt ja ühtlaselt. 1350. $1-\frac{1}{2}\cos x+2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1}\cos nx$, koondub absoluutselt ja ühtlaselt. 1351. $\frac{2\,\mathrm{sh}\,\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\right.$ $\left.+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos nx}{1+n^2}\right]$, koondub absoluutselt ja ühtlaselt.

1352. $\frac{2\,\mathrm{sh}\,\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n\sin nx}{1+n^2}$, koondub. 1353. $\frac{8}{15}\pi^4-$ $-48\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos nx}{n^4}$, koondub absoluutselt ja ühtlaselt.

1354. $\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}$, koondub piirkonnas $(-\infty,\infty)$ absoluutselt ja ühtlaselt. Arendada Fourier' reaks (36), arvestades, et $f(x)$ on paarisfunktsioon perioodiga π.

1355. $\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\cos 2nx$, koondub ühtlaselt ja absoluutselt. 1356. $\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos(2n+1)x}{2n+1}$, koondub.

1357. $\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\sin(2n+1)x$, koondub ühtlaselt ja absoluutselt. 1358. $\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$, koondub ühtlaselt ja absolautselt. 1359. $\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\pi x}{n}$, koondub. 1360. $-\ln 2-$ $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$, koondub funktsiooniks $f(x)$ piirkonnas

$\{[-\pi,0),(0,\pi]\}$, hajub kohal $x = 0$. 1361. $-\ln 2+$ $+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cos nx}{n}$, koondub funktsiooniks $f(x)$ vahemikus $(-\pi,\pi)$, hajuv punktides $x = \pm\pi$. 1362. $-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{2n+1}$, koondub funktsiooniks $f(x)$ piirkonnas $\{(-\pi,0),(0,\pi)\}$. Punktides $x = 0$, $x = \pm\pi$ hajub. Kasutada ülesannete 1360 ja 1361 vastuseid. 1363. 1. 1364. $\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{(2n-1)(2n+1)}$, koondub absoluutselt ja ühtlaselt. 1365. $\pi/2 -$ $-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$, koondub absoluutselt ja ühtlaselt.
1366. $\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$, koondub absoluutselt ja ühtlaselt.
1367. $\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$, koondub absoluutselt ja ühtlaselt.
1368. $\frac{2}{\pi^2}\sin^2\frac{\pi^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^2-n^2}\sin^2\frac{n\pi-\pi^2}{2}\cos nx$, koondub absoluutselt ja ühtlaselt. Arvestada, et $\sin^2(n\pi/2+t)=$ $=\sin^2(n\pi/2-t)$. 1369. $-\frac{2+\pi}{\pi}\frac{}{2}\cos x-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2+1}{(4n^2-1)^2}\cos 2nx$, koondub absoluutselt ja ühtlaselt. 1370. $\frac{\pi^2}{6}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{n^2}$, koondub absoluutselt ja ühtlaselt. 1371. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$, koondub vahemikus $(0,\pi]$, hajub punktis $x = 0$. 1372. $\ln 2+$ $+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$, koondub vahemikus $(0,\pi]$, hajub punktis $x=0$.
1373. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n}$, koondub vahemikus $[0,\pi)$, hajuv punktis $x=\pi$. 1374. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{2n+1}$, koondub vahemikus

$(0, \pi)$, hajab punktides $x = 0$ ja $x = \pi$. Kasutada ülesannete 1371 ja 1373 vastuseid. 1375. $\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$, koondub. 1376. $\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n^2-1}\sin 2nx$, koondub. 1377. $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\left[1+(-1)^{n+1}\cos \pi^2\right]}{n^2-\pi^2}\sin nx$, koondub. 1378. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{2n}$, koondub. 1379. $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{(-1)^{n+1}\frac{\pi^2}{n}+\frac{2}{n^3}\left[(-1)^n-1\right]\right\}\sin nx$, koondub. 1380. $\frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^3}$, koondub ühtlaselt ja absoluutselt. 1381. $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n \operatorname{ch}\pi}{1+n^2}\times n\sin nx$, koondub. 1382. $\frac{1}{2}\sin x+2\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2-1}\sin nx$, koondub. 1383. $\frac{2\sqrt{3}}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{\sin(6n+1)x}{(6n+1)^2}-\frac{\sin(6n+5)x}{(6n+5)^2}\right]$, koondub absoluutselt ja ühtlaselt. 1384. $\frac{\pi^2}{12}$. Kasutada ülesande 1339 vastust. 1385. $\frac{\pi^2}{8}$. Kasutada ülesande 1365, 1366, 1337 või 1339 vastust. 1386. $\frac{\pi^3}{32}$. Kasutada ülesande 1380 vastust või ülesannete 1379 ja 1336 vastuseid. 1387. $\frac{7\pi^4}{720}$. Kasutada ülesande 1353 vastust. 1388. $\frac{\pi^4}{96}$. 1389. $\frac{\pi^6}{960}$. 1390. $\frac{\pi^8}{9450}$. 1391. $x^2 = \frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}$; $x^3 = 2\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}+12\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n^3}$; $x^4 = \frac{1}{5}\pi^4+8\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}+48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4}\cos nx$; 1392. $a^2+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 na}{n^2} = \pi a$; $\frac{a(\pi-a)}{2}$; $\frac{\pi^2-3\pi a+3a^2}{6}$.

Hind 80 kop.