TARTU RIIKLIK ULIKOOL

Matemaatilise statistika
ja programmeerimise kateeder

Lubada kaitsmisele
18.VI 73.

MÔNINGAID KUSIMUSI REGRESSIOONANALUUSIST

D i p l o m i t ö ö

Töö teostaja: Urve Tellas
V k. üliôpil.

Töö juhendaja: A. Parring

Tartu 1973

SISSEJUHATUS

Käesoleva diplomitöö eesmärgiks on leida sobiv meetod mittelineaarse regressioonanalüüsi ülesande lahendamiseks ja koostada leitud meetodit realiseeriv programm arvutile "MINSK-32" algoritmilises keeles MALGOL.

Olgu antud k argumenti $x_1, x_2, \ldots, x_k$ ja neist sõltuv suurus y. Muutujad x_i pole üldiselt juhuslikud, vaid on igas vaatlusseerias täielikult määratud. Suurus y on aga normaaljaotusega juhuslik suurus dispersiooniga σ^2, mis ei sõltu argumentidest ja keskväärtusega Ey, mis avaldub nn. regressioonifunktsioonina

$$Ey = f(x_1, x_2, \ldots, x_k; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m).$$

Olgu tehtud n sõltumatust vaatlusest koosnev katseseeria, millele vastavad suurused y_i, x_{i1}, $x_{i2}, \ldots x_{ik}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Ülesannet, mis seisneb funktsiooni $f(\vec{x}, \vec{\beta})$ kuju määramises nimetatakse regressioonanalüüsi ülesandeks. Meil olgu teada selle funktsiooni üldine kuju ja hinnata tuleb tundmatuid parameetreid β_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$.

Töö I peatükk on pühendatud lineaarsele regressioonanalüüsi ülesandele ja selle lahendamisele vähimruutude meetodil. II peatükis vaadatakse mittelineaarse ülesande lahendamist. On ära toodud gradientmeetod ja funktsiooni Taylori ritta arendamise meetod ning nendel meetoditel põhinev maksimaalse ümbruse meetod. Töö III peatükis on juttu maksimaalse ümbruse meetodi kohta koostatud programmist.

I. LINEAARSE REGRESSIOONANALUUSI ULESANDE LAHENDAMINE

§ 1. Regressiooni üldistatud mudel.

Olgu antud teatud argumentidest ja parameetritest sõltuva juhusliku suuruse y väärtused y_i, kus $i = 1, 2, \dots, n$ ning iga i korral väärtusele y_i vastavad argumentide $x_1, x_2, \dots, x_k$ väärtused $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}$.

Oletame, et y sõltuvus argumentidest ja tundmatutest parameetritest $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ on selline, et

$$E(y) = f(x_1, x_2, \dots, x_k; \beta_1, \beta_2, \dots \beta_m). \quad (1)$$

Seost (1) nimetatakse regressiooniseoseks ehk regressiooni üldistatud mudeliks.

Regressiooni üldistatud mudelit kirjeldab seega võrrand

$$y_i = f(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m) + \varepsilon_i$$

ehk lühemalt

$$\vec{y} = \vec{f}(X, \vec{\beta}) + \vec{\varepsilon}, \quad (2)$$

kus

$$\vec{y} = \begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{Vmatrix}, \quad \vec{\beta} = \begin{Vmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_m \end{Vmatrix},$$

$$X = \begin{Vmatrix} x_{11} & x_{12} \ldots x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} \ldots x_{2k} \\ \ldots & \ldots \\ x_{n1} & x_{n2} \ldots x_{nk} \end{Vmatrix},$$

$$\vec{\varepsilon} = \begin{Vmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \ldots \\ \varepsilon_n \end{Vmatrix}$$ ($\vec{\varepsilon}$ on juhuslike jääkide vektor).

§ 2. Vähimruutude meetod.

Olgu antud lineaarne regressioonanalüüsi ülesanne kujul:

$$E(y_i) = \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_p x_{ip}$$

e. lühemalt

$$E(\vec{y}) = X\vec{\beta}.$$

Tuleb leida kordajate β_j ($j = 1, 2, \ldots, p$) sellised hinnangud, et hinnang suurusele $E(\vec{y})$ erineks võimalikult vähe suurusest $\vec{y}$.

Minimiseerime hälvete ruutude summa:

$$\varphi^2(\vec{\beta}) = \varphi^2(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p) =$$
$$= (\vec{y} - X\vec{\beta})'(\vec{y} - X\vec{\beta}) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_1 x_{i1} - \cdots - \beta_p x_{ip})^2.$$

Võrdsustades funktsiooni $\varphi^2(\vec{\beta})$ tuletised β_j järgi nulliga, saame võrrandisüsteemi:

$$\frac{\partial \varphi^2}{\partial \beta_j} = \sum_{i=1}^{n} [-2x_{ij}(y_i - \beta_1 x_{i1} - \cdots \beta_p x_{ip})] = 0,$$

$$j = 1, 2, \ldots, p.$$

See süsteem on samaväärne järgmisega [3]:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i1} y_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} \beta_k x_{i1} x_{ik}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ip} y_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} \beta_k x_{ip} x_{ik}$$

ehk maatriksikujul:

$$X'X\vec{\beta} = X'\vec{y} \qquad (2')$$

Saadud võrrandisüsteemi (2') nimetatakse normaalvõrrandite süsteemiks.

Normaalvõrrandite süsteemi lahendamisel arvestame asjaolu, et $X'X$ on p - järku ruutmaatriks astakuga p ning tal eksisteerib pöördmaatriks tavalises mõttes.

Tähistades

$$C = (X'X)^{-1}$$

ning korrutades süsteemi (2) mõlemat poolt vasakult maatriksiga C, saamegi normaalvõrrandite süsteemi lahendi $\vec{b}$ kujul

$$\vec{b} = CX'\vec{y}.$$

Et juhusliku suuruse y dispersiooni hinnang avaldub antud juhul: ([1], lk.199):

$$s^2 = \frac{\varphi^2(\vec{b})}{n-p}$$

ja kordajate kovariatsioonimaatriksi hinnang saadakse dispersiooni korrutamisel maatriksiga C ([1], lk.198) s.t.

$$\mathrm{cov}(\vec{b}, \vec{b}) = s^2 C,$$

siis avalduvad kordajate kovariatsioonide hinnangud valemiga

$$\mathrm{cov}(b_i, b_j) = s^2 c_{ij}$$

ning dispersioonide hinnangud:

$$V(b_i) = s^2 c_{ii} ,$$

kus $C = \| c_{ij} \|$ $(i = 1, 2, \ldots, p,$
$j = 1, 2, \ldots, p).$

II. MITTELINEAARSE REGRESSIOONANALÜÜSI ÜLESANDE LAHENDAMINE

Ülesande seade on sama nagu üldisel juhul (vt. I § 1).

Võrrandis

$$\vec{y} = \vec{f}(X, \vec{\beta}) + \vec{\varepsilon} \qquad (1)$$

esinev funktsioon $\vec{f}(X, \vec{\beta})$ on mittelineaarse ülesande korral parameetrite β_j (j = 1, 2, ..., m) suhtes mittelineaarne.

Püüame ka seda ülesannet lahendada vähimruutude meetodil. Selleks arvutame hälvete ruutude summa Q , mis avaldub mitmemuutuja funktsioonina β_j järgi:

$$Q = Q(\vec{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} (f_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2$$

Vähimruutude meetodi põhjal tuleks võrdsustada nulliga funktsiooni Q tuletised β_j järgi. Et funktsioon $Q(\vec{\beta})$ on aga mittelineaarne β_j suhtes, siis on saadud võrrandisüsteemi lahendamine täpsete meetoditega küllalt komplitseeritud.

Q minimiseerimiseks saab kasutada mitmeid ligikaudseid meetodeid, mis jagunevad kahte põhiklassi:

1) gradientmeetodid

2) funktsiooni Taylori ritta arendamise meetodid.

§ 1. Gradientmeetod.

Gradientmeetodi korral lähenetakse samm-sammult otsitavale funktsiooni Q minimiseerivale vektorile $\vec{\beta}$. Kui s -ndal sammul on leitud parameetrite vektor $\vec{\beta}^{(s)}$ ja talle vastab hälvete ruutude summa Q_s, siis tuleb leida uus lähendvektor $\vec{\beta}^{(s+1)}$ nii, et suuruse Q_{s+1} väärtus oleks võimalikult palju väiksem suuruse Q_s väärtusest.

Liikumise suund lähtepunktist $\vec{\beta}^{(s)}$ määratakse nii, et funktsioon $Q(\vec{\beta})$ kahaneks selles suunas kõige kiiremini s.t. vastassuunas funktsiooni $Q(\vec{\beta})$ gradiendile antud punktis:

$$\vec{g}_s = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial Q}{\partial \beta_1} \\ \cdots \\ \frac{\partial Q}{\partial \beta_m} \end{matrix} \right\| .$$

Seega saame uue parameetrite vektori

$$\vec{\beta}^{(s+1)} = \vec{\beta}^{(s)} - \lambda_s \vec{g}_s ,$$

kus $\lambda_s > 0$ ja λ_s-ga on tähistatud sammu pikkus suunas $(-\vec{g}_s)$.

Kordaja λ_s määramiseks vaatame skalaarfunktsiooni

$$\Phi(\lambda) = Q[\vec{\beta}^{(s)} - \lambda \vec{g}_s].$$

Funktsioon Φ kujutab endast funktsiooni $Q(\vec{\beta})$ väärtust (s + 1) - sel sammul. Kordaja $\lambda = \lambda_s$ tuleb valida selliselt, et funktsioon $\Phi(\lambda)$ saavutaks miinimumi. Leides $\Phi(\lambda)$ tuletise λ järgi ja võrdsustades selle nulliga, saame võrrandi

$$\Phi'(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} Q[\vec{\beta}^{(s)} - \lambda \vec{g}_s] = 0. \tag{2}$$

võrrandi (2) väikseim positiivne lahend annabki λ_s väärtuse.

Oletame, et λ on küllalt väike selleks, et võib arvestamata jätta ta ruudud ja kõrgemad astmed. Siis võime arendada funktsiooni $f_i(\vec{\beta}^{(s)} - \lambda \vec{g}_s)$ punkti $\vec{\beta}^{(s)}$ ümbruses lineaarliikme täpsusega astmeritta. Saame:

$$\Phi(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} [f_i(\vec{\beta}^{(s)}) - y_i - \lambda \frac{\partial f_i(\vec{\beta}^{(s)})}{\partial \vec{\beta}} \cdot \vec{g}_s]^2 ,$$

kus

$$\frac{\partial f_i}{\partial \vec{\beta}} = \left[\frac{\partial f_i}{\partial \beta_1}, \frac{\partial f_i}{\partial \beta_2}, \ldots, \frac{\partial f_i}{\partial \beta_m} \right].$$

Siit, leides tuletise, saame:

$$\Phi'(\lambda) = -2 \sum_{i=1}^{n} [f_i(\vec{\beta}^{(s)}) - y_i - \lambda \frac{\partial f_i(\vec{\beta}^{(s)})}{\partial \vec{\beta}} \vec{g}_s] \times$$

$$\times \frac{\partial f_i(\vec{\beta}^{(s)})}{\partial \vec{\beta}} \cdot \vec{g}_s = 0.$$

Otsitav kordaja λ_s avaldub seega ([4], lk.487):

$$\lambda_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} (f_i(\vec{\beta}^{(s)}) - y_i) \cdot \frac{\partial f_i(\vec{\beta}^{(s)})}{\partial \vec{\beta}} \vec{g}_s}{\sum_{i=1}^{n} [\frac{\partial f_i(\vec{\beta}^{(s)})}{\partial \vec{\beta}} \cdot \vec{g}_s]^2} =$$

$$\frac{(\vec{f}(\vec{\beta}^{(s)})-\vec{y}\ ,\ P(\vec{\beta}^{(s)})\cdot\vec{g}_s)}{(P(\vec{\beta}^{(s)})\cdot\vec{g}_s\ ,\ P(\vec{\beta}^{(s)})\cdot\vec{g}_s)},$$

kus

$$P(\vec{\beta})=\frac{\partial\vec{f}}{\partial\vec{\beta}}=\begin{Vmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial\beta_1} & \frac{\partial f_1}{\partial\beta_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial\beta_m}\\ \frac{\partial f_2}{\partial\beta_1} & \frac{\partial f_2}{\partial\beta_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial\beta_m}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial f_n}{\partial\beta_1} & \frac{\partial f_n}{\partial\beta_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial\beta_m}\end{Vmatrix}$$

on vektorfunktsiooni $\vec{f}(\vec{\beta})$ jakobiaan.

Kuna

$$\frac{\partial Q}{\partial\beta_j}=\frac{\partial}{\partial\beta_j}\left[\sum_{i=1}^{n}(f_i(\vec{\beta})-y_i)^2\right]=$$

$$=2\sum_{i=1}^{n}[f_i(\vec{\beta})-y_i]\cdot\frac{\partial f_i(\vec{\beta})}{\partial\beta_j},$$

siis

$$\vec{g}=2\cdot\begin{Vmatrix}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i(\vec{\beta})}{\partial\beta_1}\cdot[f_i(\vec{\beta})-y_i]\\ \dots\dots\dots\\ \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i(\vec{\beta})}{\partial\beta_m}\cdot[f_i(\vec{\beta})-y_i]\end{Vmatrix}=$$

$$=2P'(\vec{\beta})\cdot[\vec{f}(\vec{\beta})-\vec{y}].$$

kus $P'(\vec{\beta})$ - ga on tähistatud $P(\vec{\beta})$ transponeeritud maatriks.

Tähistades lühemalt

$$\vec{f}^{(s)} = \vec{f}(\vec{\beta}^{(s)}),$$

$$P_s = P(\vec{\beta}^{(s)}),$$

saame:

$$\lambda_s = \frac{(\vec{f}^{(s)} - \vec{y}\,,\ 2P_s \cdot P_s'(\vec{f}^{(s)} - \vec{y}))}{(2P_s \cdot P_s'(\vec{f}^{(s)} - \vec{y}), 2P_s \cdot P_s'(\vec{f}^{(s)} - \vec{y}))}$$

ehk

$$\mu_s = 2\lambda_s = \frac{(\vec{f}^{(s)} - \vec{y}\,,\ P_s \cdot P_s'(\vec{f}^{(s)} - \vec{y}))}{(P_s \cdot P_s'(\vec{f}^{(s)} - \vec{y}),\ P_s \cdot P_s'(\vec{f}^{(s)} - \vec{y}))}$$

ja

$$\vec{\beta}^{(s+1)} = \vec{\beta}^{(s)} - \mu_s P'(\vec{f}^{(s)} - \vec{y}),$$

$(s = 0, 1, 2, \ldots).$

§ 2. Funktsiooni Taylori ritta arendamise meetod.

Rittaarendamise meetodi puhul teostatakse funktsiooni $f(x, \vec{\beta})$ reaksarendus punkti $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$ ümbruses lineaarliikme täpsusega:

$$f(x,\vec{\beta}) = f(x,\vec{\beta}^{(1)}) + \frac{\partial f}{\partial \beta_1^{(1)}}(\beta_1 - \beta_1^{(1)}) +$$

$$+ \dots + \frac{\partial f}{\partial \beta_m^{(1)}}(\beta_m - \beta_m^{(1)}) =$$

$$= f(x,\vec{\beta}^{(1)}) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial \beta_j^{(1)}} \cdot \delta_j^{(1)},$$

kus

$$\delta_j^{(1)} = \beta_j - \beta_j^{(1)}$$

on parameetri β_j muut.

Regressioonimudeli (1) võib kirjutada nüüd kujul:

$$y_i = f_i(x,\vec{\beta}^{(1)}) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial \beta_j^{(1)}} \delta_j^{(1)} + \varepsilon_i \qquad (3)$$

kus tundmatuteks parameetriteks on suurused $\delta_1^{(1)}$, $\delta_2^{(1)}, \dots, \delta_m^{(1)}$. Nende parameetrite suhtes on võrrand (3) lineaarne. Seetõttu võib siin kasutada I peatükis kirjeldatud vähimruutude meetodit.

Normaalvõrrandite süsteemi saame ülesande (3) jaoks kujul:

$$P'P\vec{\delta}^{(1)} = -P'(\vec{f} - \vec{y}), \qquad (4)$$

kus P-ga on tähistatud $n \times m$ maatriks nagu § 1-s. Võrrandite süsteemist (4) leiame ehk

$$\vec{\delta}^{(s)} = -A^{-1} P'(\vec{f} - \vec{y}), \qquad (5)$$

kus

$$A = \| a_{j_1, j_2} \| = \| \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial \beta_{j_1}} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \beta_{j_2}} \|,$$

$$(j_1, j_2 = 1, 2, \ldots, m)$$

ja

$$P'(\vec{f} - \vec{y}) = \| \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial \beta_j} (f_i - y_i) \| .$$

Kasutades leitud parandusvektorit $\vec{\delta}^{(s)}$, saame:

$$\vec{\beta}^{(s+1)} = \vec{\beta}^{(s)} + \vec{\delta}^{(s)}.$$

Praktikas on protsessi parema koondumise huvides kasulik leida uus parameetrite vektor nii [2] :

$$\vec{\beta}^{(s+1)} = \vec{\beta}^{(s)} + \kappa \cdot \vec{\delta}^{(s)}$$

kus $\kappa > 0$.

Taylori ritta arendamise meetodi põhiliseks puuduseks on asjaolu, et meetod küllalt sageli ei koondu. Selle põhjuseks on, et võrrand (3) ei approksimeeri küllalt hästi võrrandit (1) või pole alglähend küllalt hästi valitud.

§ 3. Maksimaalse ümbruse meetod.

Gradientmeetod on efektiivsem just esimestel sammudel. Taylori ritta arendamise meetod aga küllalt lähedal hälvete ruutude summa otsitavale miinimumile s.t. lôpuosas. Nende meetodite eelised on ära kasutatud nn. maksimaalse ümbruse meetodis, mis algul käitub nagu gradientmeetod, lôpul aga nagu funktsiooni Taylori ritta arendamise meetod. Meetodi pôhimôte on niisiis selline, et liigutakse gradientmeetodi poolt soovitud suunas seni, kuni jôutakse funktsiooni $Q(\vec{\beta})$ miinimumile küllalt lähedale, siis minnakse üle rittaarenduse meetodi poolt soovitatud suunale.

Ehitame hälvete ruutude summa mittelineaarse regressioonimudeli (1) jaoks:

$$Q(\vec{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} (f_i - y_i)^2 .$$

Selle funktsiooni gradient avaldub kujul:

$$\| g_j \| = \| 2 \sum_{i=1}^{n} (f_i - y_i) \frac{\partial f_i}{\partial \beta_j} \|,$$

$$j = 1, 2, \ldots, m.$$

Tâhistades ümber

$$\vec{g} = -\vec{g},$$

tuleks gradientmeetodi pôhjal minna punktist $\vec{\beta}^{(1)}$ suunas $\vec{g}$, Taylori rea meetodi pôhjal aga suunas $\vec{\delta}$. Avaldise (5) pôhjal

$$\vec{\delta} = \frac{1}{2} A^{-1} \vec{g} .$$

Vajalik suund peaks olema seega $\vec{g}$ ja $A^{-1}\vec{g}$ vahel.

Selline vahepealne suund saadakse maatriksi A diagonaalelementidele mingi positiivse suuruse λ lisamisega.

Lemma. Olgu $\vec{x}$ ja $\vec{y}$ vektorid ning vektor $\vec{z}$ avaldugu nende kaudu järgmiselt:

$$\vec{z} = \vec{y} + \lambda \vec{x}.$$

Siis

1) $$\cos \varphi_1 = \cos (\widehat{\vec{z}, \vec{x}})$$

osutub iga λ korral kasvavaks funktsiooniks,

2) $$\cos \varphi_2 = \cos (\widehat{\vec{z}, \vec{y}})$$

aga $\lambda > 0$ korral kahanevaks ja $\lambda < 0$ korral kasvavaks funktsiooniks.

Tõestus.

1) Kahe vektori vahelise nurga koosinus leitakse järgneva valemi põhjal[1]:

$$\cos \varphi_1 = \cos (\widehat{\vec{z}, \vec{x}}) =$$

$$= \frac{(\vec{z}, \vec{x})}{\|\vec{z}\| \cdot \|\vec{x}\|} = \frac{(\vec{y}, \vec{x}) + \lambda (\vec{x}, \vec{x})}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y} + \lambda \vec{x}\|}.$$

Suurus $\|\vec{x}\|$ on konstantne. Esimese väite tõestamiseks on vaja näidata, et funktsioon

$$f_1(\lambda) = \frac{(\vec{y}, \vec{x}) + \lambda (\vec{x}, \vec{x})}{\|\vec{y} + \lambda \vec{x}\|}$$

on kasvav.

[1] Tähistame vektori $\vec{x}$ normi $\|\vec{x}\|$-ga.

Lühiduse mõttes tähistame:

$$(\vec{y}, \vec{x}) = a,$$

$$\|y\| = c,$$

$$\|\vec{x}\| = b.$$

Vektori pikkuse definitsiooni põhjal:

$$f_1(\lambda) = \frac{a + \lambda b^2}{\sqrt{c^2 + 2\lambda a + \lambda^2 b^2}}$$

ja

$$f_1'(\lambda) = \frac{b^2\sqrt{c^2 + 2\lambda a + \lambda^2 b^2} - \dfrac{(a + \lambda b^2)^2}{\sqrt{c^2 + 2\lambda a + \lambda^2 b^2}}}{c^2 + 2\lambda a + \lambda^2 b^2} =$$

$$= \frac{b^2(c^2 + 2\lambda a + \lambda^2 b^2) - (a^2 + 2\lambda a b^2 + \lambda^2 b^4)}{(c^2 + 2\lambda a + \lambda^2 b^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{b^2 c^2 + 2\lambda a b^2 + \lambda^2 b^4 - a^2 - 2\lambda a b^2 - \lambda^2 b^4}{(c^2 + 2\lambda a + \lambda^2 b^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{b^2 c^2 - a^2}{(c^2 + 2\lambda a + \lambda^2 b^2)^{3/2}}.$$

Viimase murru lugeja

$$b^2 c^2 - a^2$$

on mittenegatiivne Cauchy-Bunjakovski võrratuse põhjal. Nimetaja kujutab endast normi kuupi:

$$(c^2 + 2\lambda a + \lambda^2 b^2)^{3/2} =$$

$$= (\|\vec{y}\|^2 + 2\lambda(\vec{y}, \vec{x}) + \lambda^2 \|\vec{x}\|^2)^{3/2} =$$

$$= \|\vec{y} + \lambda \vec{x}\|^3$$

ning on seega samuti mittenegatiivne.

Järelikult

$$f_1'(\lambda) \geq 0,$$

millega ongi näidatud, et funktsioon $f_1(\lambda)$, ühtlasi aga ka cos φ_1 on kasvav funktsioon iga λ korral.

2) Analoogilist mõttekäiku ning samu tähistusi kasutades saame, et

$$f_2(\lambda) = \frac{\|\vec{y}\|^2 + \lambda(\vec{x}, \vec{y})}{\|\vec{y} + \lambda \vec{x}\|} = \frac{c^2 + \lambda a}{\sqrt{c^2 + 2\lambda a + \lambda^2 b^2}}$$

ja

$$f_2'(\lambda) = \frac{\lambda(a^2 - b^2 c^2)}{(c^2 + 2\lambda a + \lambda^2 b^2)^{3/2}} .$$

Arvestades, et

$$a^2 \leq b^2 c^2,$$

saame, et funktsioon cos φ_2 on kasvav $\lambda < 0$ korral ning kahanev $\lambda > 0$ korral.

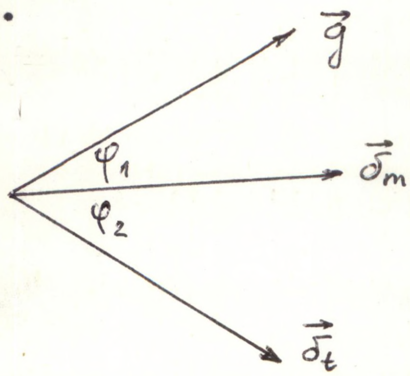
Tähistame gradientmeetodi poolt soovitatud suuna $\vec{g}$ -ga. Taylori ritta arendamise meetodi poolt soovitatud suuna $\vec{d_t}$ -ga,

$$\vec{\delta}_t = A^{-1}\vec{q}$$

ning maksimaalse ümbruse meetodi poolt soovitatud suuna $\vec{\delta}_m$ -ga,

$$\vec{\delta}_m = (A + \lambda I)^{-1}\vec{q}\,.$$

Näitame, et suund $\vec{\delta}_m$ jääb alati suundade $\vec{q}$ ja $\vec{\delta}_t$ vahele, kaldudes rohkem kas $\vec{q}$ vôi $\vec{\delta}_t$ poole, olenevalt λ suurusest.



Teoreem. Positiivse λ korral on

1) $F_1(\lambda) = \cos\varphi_1 = \cos(\widehat{\vec{\delta}_m, \vec{q}})$

λ suhtes kasvav ning

$$F_2(\lambda) = \cos\varphi_2 = \cos(\vec{\delta}_m, \vec{\delta}_t)$$

λ suhtes kahanev funktsioon ning

2) $\lambda \to 0$ korral $\varphi_2 \to 0$ ja

$\lambda \to \infty$ korral $\varphi_1 \to 0$, kusjuures

$$\vec{\delta}_m = (A + \lambda I)^{-1}\vec{q}$$

ja

$$\vec{\delta}_t = A^{-1}\vec{q}.$$

Tôestus:

1) Teoreemi eeldusest järeldub, et

$\vec{g} = (A+\lambda I)\vec{\delta}_m$ Muutes tähistusi:

$$\vec{z} = \vec{g},$$
$$\vec{y} = A\vec{\delta}_m,$$
$$\vec{x} = \vec{\delta}_m,$$

saame lemma põhjal, et $\cos\varphi_1 = \cos(\widehat{\vec{\delta}_m, \vec{g}})$

on kasvav λ suhtes.

Teoreemi eeldusest saame ka, et

$$A\vec{\delta}_t = \vec{g} = (A+\lambda I)\vec{\delta}_m = A\vec{\delta}_m + \lambda\vec{\delta}_m$$

ja

$$\vec{\delta}_t = A^{-1}A\vec{\delta}_m + \lambda A^{-1}\vec{\delta}_m = \vec{\delta}_m + \lambda A^{-1}\vec{\delta}_m.$$

Muutes tähistusi:

$$\vec{z} = \vec{\delta}_t,$$
$$\vec{x} = A^{-1}\vec{\delta}_m,$$
$$\vec{y} = \vec{\delta}_m,$$

saame lemma põhjal, et $\cos\varphi_2 = \cos(\widehat{\vec{\delta}_m, \vec{\delta}_t})$ on positiivse λ korral kahanev funktsioon.

2) $F_1(\lambda)$ ja $F_2(\lambda)$ on λ suhtes pidevad funktsioonid ning neil on üheselt määratud piirväärtused:

$$\lim_{\lambda\to 0} \cos\varphi_2 = F_2(0) = \frac{(A^{-1}\vec{g}, A^{-1}\vec{g})}{\|A^{-1}\vec{g}\| \cdot \|A^{-1}\vec{g}\|} = 1,$$

$$\lim_{\lambda\to\infty} \cos\varphi_1 = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{(\vec{g}, (A+\lambda I)^{-1}\vec{g})}{\|\vec{g}\|\cdot\|(A+\lambda I)^{-1}\vec{g}\|} =$$

$$= \frac{(\vec{g}, [\lim_{\lambda\to\infty}(A+\lambda I)]^{-1}\vec{g})}{\|\vec{g}\|\cdot\|[\lim_{\lambda\to\infty}(A+\lambda I)]^{-1}\|\cdot\|\vec{g}\|} =$$

$$\frac{[\lim_{\lambda\to\infty}(A+\lambda I)]^{-1}(\vec{g},\vec{g})}{[\lim_{\lambda\to\infty}(A+\lambda I)]^{-1}\cdot\|\vec{g}\|\cdot\|\vec{g}\|} = 1$$

Saime, et

$$\lim_{\lambda\to 0} \cos\varphi_1 = 1 \quad \text{s.t.} \quad \lim_{\lambda\to 0} \varphi_1 = 0$$

ja

$$\lim_{\lambda\to\infty} \cos\varphi_2 = 1 \quad \text{s.t.} \quad \lim_{\lambda\to\infty} \varphi_2 = 0$$

m. o. t. t.

Teoreemist järeldub, et muutes λ suurust, saab valida suuna $\vec{\delta}_m = (A+\lambda I)^{-1}\vec{g}$ kas küllalt lähedale gradientmeetodil leitud suunale $\vec{g}$ või suunale $\vec{\delta}_t = A^{-1}\cdot\vec{g}$, mis leitakse funktsiooni Taylori ritta arendamise meetodil. Kui vähendame λ -t, siis läheneme suunale $\vec{\delta}_t$ ja kui suurendame λ -t, siis läheneme suunale $\vec{g}$. Piiril, kui $\lambda = 0$, saame $\vec{\delta}_m = \vec{\delta}_t$ ja kui $\lambda = \infty$, siis $\vec{\delta}_m = \vec{g}$.

Praktikas korrigeeritakse maatriksit A siiski mitte λ abil, vaid suuruse $\lambda\cdot a_{jj}$ abil, kus a_{jj} on maatriksi A diagonaalelement.

Lahendusalgoritm on järgmine:

1. Mingitel kaalutlustel on eksperimenteerija valinud otsitavate parameetrite vektorile $\vec{\beta}$ alglähendi $\vec{\beta}^{(0)}$. Suurusele λ antakse samuti mingi algväärtus, järgnevalt toodud programmis on võetud $\lambda = 0,01$. Suurendades λ väärtust, lähenetakse gradientmeetodi poolt soovitatud suunale. Alguses pole meil teada, kas me oleme otsitavale funktsiooni $Q(\lambda)$ miinimumile juba küllalt lähedal või ei, sellepärast on sobiv võtta λ algväärtus küllalt väike, et juhul, kui oleme miinimumile lähedal, ei eemalduks sealt enam.

2. s-ndal iteratsioonisammul leitakse parandusvektor $\vec{\delta}_m^{(s)}$ võrrandist:

$$(A + \lambda_s \cdot a_{jj}) \cdot \vec{\delta}_m^{(s)} = \vec{g}$$

s.t.

$$\vec{\delta}_m^{(s)} = (A + \lambda_s \cdot a_{jj})^{-1} \cdot \vec{g} .$$

3. Saadud parandusvektori abil leitakse uus parameetrite vektori lähend:

$$\vec{\beta}^{(s+1)} = \vec{\beta}^{(s)} + \vec{\delta}_m^{(s)}$$

4. $\vec{\beta}^{(s+1)}$ väärtust arvestades leitakse suurus Q_{s+1}.

5. Nüüd võrreldakse omavahel suurusi Q_s ja Q_{s+1}. Kui $Q_{s+1} < Q_s$, siis see tähendab, et parameetrite ruumis punkti $\vec{\beta}^{(s+1)}$ liikudes jõuame otsitavale $Q(\vec{\beta})$ miinimumile lähemale. Sellisel juhul võetakse järgmisel sammul $\lambda_{s+1} = \lambda_s$ ja minnakse edasi punktist $\vec{\beta}^{(s+1)}$.

Kui aga $Q_{s+1} > Q$, siis see tähendab, et punkti $\vec{\beta}^{(s+1)}$ viiv suund pole sobiv (viib kaugemale otsitavast $Q(\vec{\beta})$ miinimumist) ja tuleb leida λ_{s+1} selliselt, et $Q_{s+1} < Q_s$.

Selleks, et oleks parem leida uut suurust λ_{s+1} , on otstarbekas võrrelda igal sammul mitut Q väärtust, leides suuruse $Q_1 = Q(\lambda_s)$ kõrval ka suuruse $Q(\lambda_s/10)$.

6. Protsessi võime lõpetada siis, kui parandusvektor $\vec{\delta}$ on selline, et $\max\limits_{1 \le i \le m} |\delta_i|$ ei ületa lubatud viga ε .

Suurust λ võib valida näiteks nii [2] :

Igal sammul võrreldakse omavahel kahte või isegi kolme Q väärtust:

$Q(\lambda_s)$, $Q(\lambda_s/10)$ ja vajaduse korral veel ka $Q(\lambda_s \cdot 10^r)$.

a) Kui

$$Q(\lambda_{s-1}/10) \le Q(\lambda_s),$$

siis

$$\lambda_s = \lambda_{s-1}/10.$$

b) Kui

$$Q(\lambda_{s-1}/10) > Q(\lambda_s)$$

ja

$$Q(\lambda_{s-1}) \le Q(\lambda_s),$$

siis

$$\lambda_s = \lambda_{s-1}.$$

c) Kui

$$Q(\lambda_{s-1}/10) > Q(\lambda_s),$$

$$Q(\lambda_{s-1}) > Q(\lambda_s),$$

siis tuleb λ-t suurendada 10-ga korrutamisel kuni mingi r korral

$$Q(10^r \cdot \lambda_{s-1}) \leq Q(\lambda_s)$$

ja

$$\lambda_s = 10^r \cdot \lambda_{s-1} .$$

III. MAKSIMAALSE ÜMBRUSE MEETODIT REALISEERIV PROGRAMM

Maksimaalse ümbruse meetodi rakendamine on seotud suure arvutustööde mahuga, mistõttu on otstarbekas koostada selle meetodi kohta programm arvutusmasinale. Käesoleval juhul on kirjutatud programm arvutile "MINSK-32" algoritmilises keeles MALGOL.

§ 1. Probleemi seade.

Eeldame, et regressioonifunktsioon $\vec{f}(\vec{x},\vec{\beta})$ omab kuju:

$$f(\vec{x},\vec{\beta}) = \prod_{l=1}^{s} R_l(\vec{x},\vec{\beta}_l)$$

kus $R_l(\vec{x},\vec{\beta}_l)$ kujutab endast teatud summat:

$$R_l(\vec{x},\vec{\beta}_l) = \beta_{l0} + \beta_{l1}x_1 + \dots + \beta_{lp}x_p \, .$$

Olgu meil antud väljavõte sõltumatute argumentide väärtustest.

$$\begin{Vmatrix} x_{10} & x_{11} & \dots & x_{1p} \\ x_{20} & x_{21} & \dots & x_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n0} & x_{n1} & \dots & x_{np} \end{Vmatrix} = X$$

(siin $x_{i0} = 1$; $i = 1, 2, \dots, n$)

ja vastavatest sõltuva juhusliku suuruse väärtustest

$$\begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{Vmatrix} = \vec{y}.$$

Tundmatud parameetrid moodustagu maatriksi:

$$\begin{Vmatrix} \beta_{10} & \beta_{11} \cdots & \beta_{1p} \\ \beta_{20} & \beta_{21} \cdots & \beta_{2p} \\ & & \\ \beta_{s0} & \beta_{s1} \cdots & \beta_{sp} \end{Vmatrix} = B.$$

Praktikas on huvipakkuvaks juht, kus osa parameetreid võrduvad nulliga (olgu ette teada, millised nimelt). Edaspidi opereerime vaid nullist erinevate parameetritega, arvestades nende asukohta maatriksis B. Olgu nullist erinevate parameetrite arv maatriksi B esimeses reas k_1, teises reas k_2 jne. kuni s-ndas reas k_s. Olgu $k_1 + k_2 + \ldots + k_s = k$, kusjuures $k < n$. Tähistame nullist erinevad parameetrid edaspidi nii:

$$(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k) = \vec{\beta}.$$

Lähtudes väljavõtetest X ja $\vec{y}$ ning avaldisest

$$E(y_i) = f_i(X, B) = \prod_{l=1}^{s} \sum_{j=0}^{p} \beta_{lj} x_{ij},$$

kus $x_{i0} = 1$, tuleb leida tundmatute parameetrite β_j ($j = 1, 2, \ldots, k$) hinnangud, nii et suurus $E(y_i)$ oleks küllalt lähedane suurusele y_i.

§ 2. Lahendusalgoritm.

1. Olgu mingitel kaalutlustel valitud parameetrite vektori alglähend

$$\vec{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_{k_1}, \beta_{k_1+1}, \ldots, \beta_{k_1+k_2}, \ldots, \beta_{k_1+k_2+\ldots+k_{s-1}+1}, \ldots, \beta_{k_1+k_2+\ldots+k_s}),$$

kus

$$\beta_{k_1+k_2+\ldots+k_s} = \beta_k .$$

Vastavalt nendele nullist erinevatele parameetritele olgu antud parameetrite rea- ja veeruindeksite vektorid

$$\vec{R} = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{k_1}, \underbrace{2, \ldots, 2}_{k_2}, \ldots \underbrace{s, \ldots, s}_{k_s})$$

ja

$$\vec{V} = (j_{11}, \ldots, j_{1k_1}, j_{21}, \ldots, j_{2k_2}, \ldots, j_{s1}, \ldots, j_{sk_s})$$

selliselt, et β_1-le vastab element[1] $\beta_{1,(j_{11})}$, β_{k_1}-le $\beta_{1,(j_{1k_1})}$ jne. kuni β_k-le element $\beta_{s,(j_{sk_s})}$ maatriksist B.

Olgu antud ka suuruse λ algväärtus (antud juhul $\lambda = 0,01$).

2. Leiame funktsiooni f_i (i = 1, 2, ..., n) väärtused valemist

$$f_i(x, \vec{\beta}) = \prod_{l=1}^{s} \sum_{m=1}^{k_s} \beta_{l,(j_{lm})} \cdot x_{i,(j_{lm})} .$$

[1] Siin ja järgmistes valemites on mitmekordsed veeruindeksid asetatud sulgudesse.

3. Leiame hälvete ruutude summa Q väärtuse valemist

$$Q = \sum_{i=1}^{n} (f_i - y_i)^2$$

ning trükime välja alglähendi $\vec{\beta}$ elementide ning suuruse Q väärtused.

4. Omistame suurusele $\lambda 1$ väärtuse $\lambda/10$.

5. Funktsiooni f_i (i = 1, 2, ..., n) tuletised $\beta_{\ell j}$ (ℓ = 1, 2, ..., s ; j = 0, 1, ..., p) järgi avalduvad valemiga

$$\frac{\partial f_i}{\partial \beta_{\ell j}} = x_{ij} \prod_{\substack{h=1 \\ h \neq j}}^{s} \sum_{m=0}^{p} \beta_{hm} x_{im} .$$

Arvestades ainult nullist erinevaid parameetreid, leiame tuletised valemist

$$\frac{\partial f_i}{\partial \beta_{\ell,(j_{\ell p})}} = x_{i,(j_{\ell p})} \cdot \prod_{\substack{h=1 \\ h \neq \ell}}^{s} \sum_{m=1}^{k} \beta_{h,(j_{hm})} \cdot x_{i,(j_{hm})} .$$

6. Leiame vektori $\vec{g}$ ning maatriksi A elementide väärtused vastavalt valemitest:

$$g_j = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (y_i - f_i) \frac{\partial f_i}{\partial \beta_j} ,$$

$$a_{j_1, j_2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial \beta_{j_1}} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \beta_{j_2}} ,$$

kus j, j , j_2 = 1, 2, ..., k .

Liites nüüd maatriksi A diagonaalelementidele vastavalt suurused $\lambda \cdot a_{jj}$ ja $\lambda 1 \cdot a_{jj}$, kus a_{jj} on maatriksi A diagonaalelement, saame maatriksid AP ja AP1 .

Parandusvektorid $\vec{\delta}$ ja $\vec{\delta 1}$ leiame järgmiselt:

$$\vec{\delta} = (AP)^{-1}\vec{g},$$

$$\vec{\delta 1} = (AP1)^{-1}\vec{g}.$$

7. Liites parandusvektorid lähendvektorile $\vec{\beta}$, saame uued lähendid $\vec{\beta 0}$ ja $\vec{\beta 1}$, millest lähtudes leiame suuruse Q uued väärtused T ja T1 .

8. Võrdleme Q esialgset väärtust uute väärtustega T ja T1 . Kui

1) Q < T ja Q < T1,

siis suurendame λ-t, korrutades seda 10^r-ga, kuni mingi r = 1, 2, ... korral uue λ abil leitud suuruse Q väärtus TT saab väiksemaks Q esialgsest väärtusest. Kui Q $\leq$ TT, siis võrdleme viimase λ abil leitud lähendvektorit $\vec{\beta\beta}$ eelmise lähendiga $\vec{\beta}$. Kui i = 1, 2, ..., k korral kehtib võrratus

$$\left| \frac{\beta_i}{(\beta\beta)_i} - 1 \right| \leq \varepsilon, \qquad (1)$$

kus ε on lubatud viga, siis trükime välja lahendi $\vec{\beta\beta}$ ja talle vastava hälvete ruutude summa TT väärtuse ning lõpetame protsessi.

Kui võrratus (1) ei kehti, siis võtame uueks lähendvektoriks $\vec{\beta}$ vektori $\vec{\beta\beta}$ ning alustame uuesti punktist 4.

2) $Q \geqslant T$ või $Q \geqslant T1$ ning $T < T1$, siis, kui $i = 1, 2, \ldots, k$ korral kehtib võrratus

$$\left| \frac{\beta_i}{(\beta 0)_i} - 1 \right| \leqslant \varepsilon, \tag{2}$$

trükime välja lahendi $\overrightarrow{\beta 0}$ ja talle vastava hälvete ruutude summa T väärtuse ning lõpetame protsessi.

Kui võrratus (2) ei kehti, siis võtame uueks lähendvektoriks $\vec{\beta}$ vektori $\overrightarrow{\beta 0}$ ning alustame uuesti punktist 4 .

3) $Q \geqslant T$ või $Q \geqslant T1$ ning $T1 \leqslant T$, siis, kui $i = 1, 2, \ldots, k$ korral kehtib võrratus

$$\left| \frac{\beta_i}{(\beta 1)_i} - 1 \right| \leqslant \varepsilon, \tag{3}$$

siis trükime välja lahendi $\overrightarrow{\beta 1}$ ning talle vastava hälvete ruutude summa väärtuse $T1$ ning lõpetame protsessi.

Kui võrratus (3) ei kehti, siis võtame λ uueks väärtuseks $\lambda 1$ endise väärtuse, uueks lähendvektoriks $\vec{\beta}$ võtame vektori $\overrightarrow{\beta 1}$ ning alustame uuesti punktist 4.

§ 3. <u>Programmi kasutamise juhend.</u>

Algandmed tuleb perforeerida 6 massiivina. Nendest esimese moodustavad lihtmuutujad n, p, s, k, ε, kus n on väljavõtete arv, p on maatriksi B veergude ja s maatriksi B ridade arv, k on nullist erinevate parameetrite arv ning ε on lubatud viga.

Teiseks massiiviks perforeeritakse vektori $\vec{y}$ elemendid, kolmandaks maatriks X ridade kaupa, neljandaks parameetrite vektori alglähend $\vec{\beta}^{(0)}$, viiendaks reaindeksite vektor $\vec{R}$ ja kuuendaks veeruindeksite vektor $\vec{V}$. Programm trükib välja alglähendi $\vec{\beta}^{(0)}$ elemendid ja hälvete ruutude summa alglähendi korral Q_0 ning programmi töö tulemusena leitud parameetrite vektori $\vec{\beta}$ elemendid ja neile vastava hälvete ruutude summa Q.

Kui funktsiooni $f(x,\vec{\beta})$ kuju erineb § 1-s kirjeldatust, siis tuleb asendada protseduurid FUNKTS ja TULETIS uutega, arvestades $f(x,\vec{\beta})$ kuju.

KIRJANDUS.

1. Рао С.Р., Линейные статистические методы и их применения. Москва, 1968.

2. Демиденко Е.З., Оценка параметров в нелинейной регрессии. Математические методы в экономике и международных отношениях. Москва, 1972, 75 - 98.

3. Tellas, U., Lisatingimusega regressioonanalüüsi ülesande lahendamine. Kursusetöö. Tartu, 1972.

4. Демидович Б.П., Марон И. А., Основы вычислительной математики. Москва, 1966.

Некоторые вопросы о регрессии.

Теллас У.

Резюме.

Целью данной дипломной работы является нахождение подходящего метода для оценки параметров в нелинейной регрессии и составление программы, реализирующей этот метод.

В первой главе решена линейная задача регрессии по методу наименьших квадратов.

Во второй главе рассматривается нелинейная задача регрессии. Даны три метода решения этой задачи: градиентный метод; разложение функции в ряд Тейлора и метод максимальной окрестности.

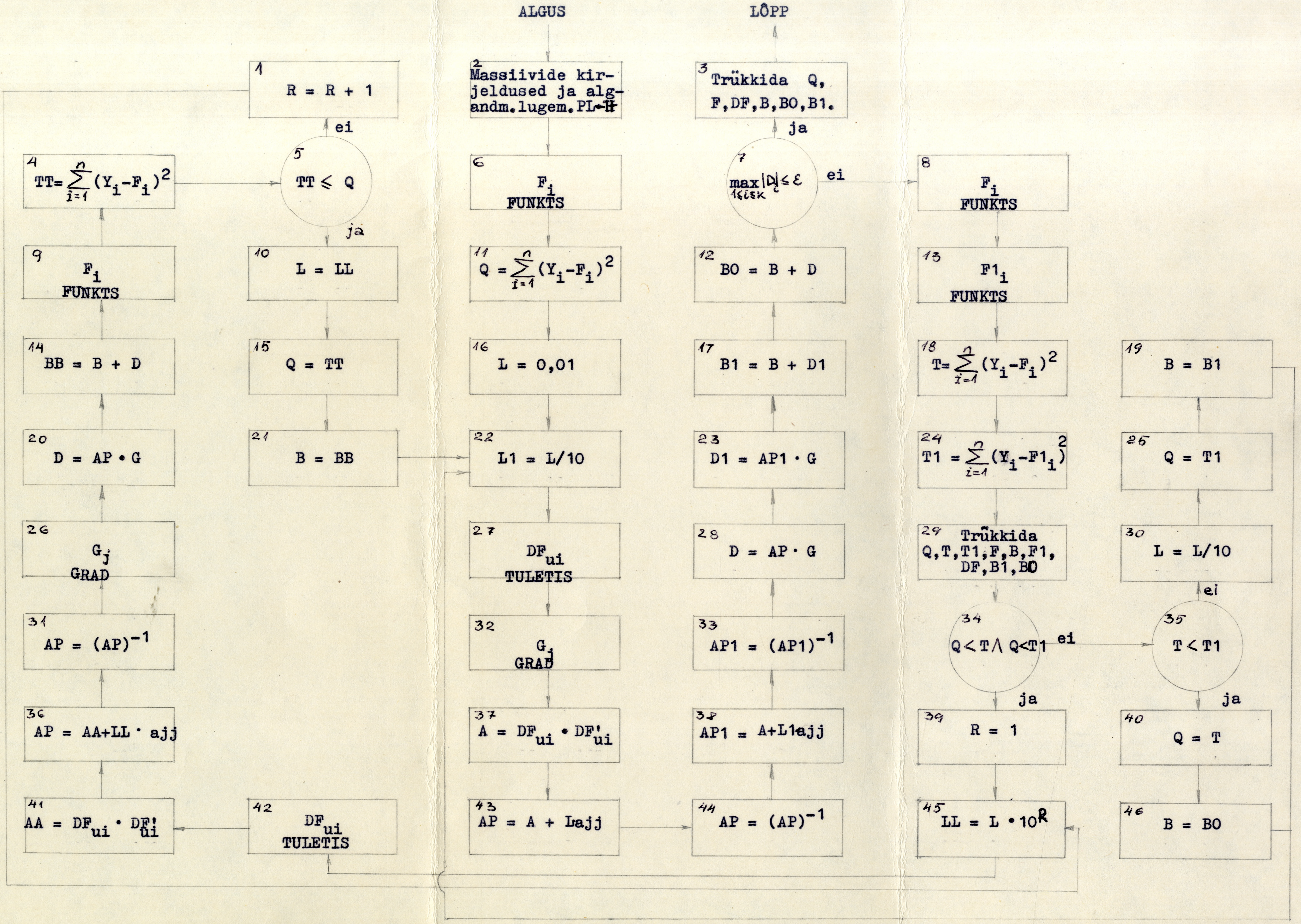
В третьей главе описана на языке MALGOL написанная программа, реализующая метод максимальной окрестности.

В приложении даны программа и блок-схемы программы.

SISUKORD

L I S A D

ÜLDINE BLOKKSKEEM



Märkused üldise blokkskeemi
kohta.

Programmi silumise käigus osutus otstarbekaks teha järgmised parandused.

1. Ära jätta 29. blokk ning asendada 3. blokk blokiga: "trükkida Q, B ". Lisada pärast 11. blokki blokk "trükkida Q, B ".

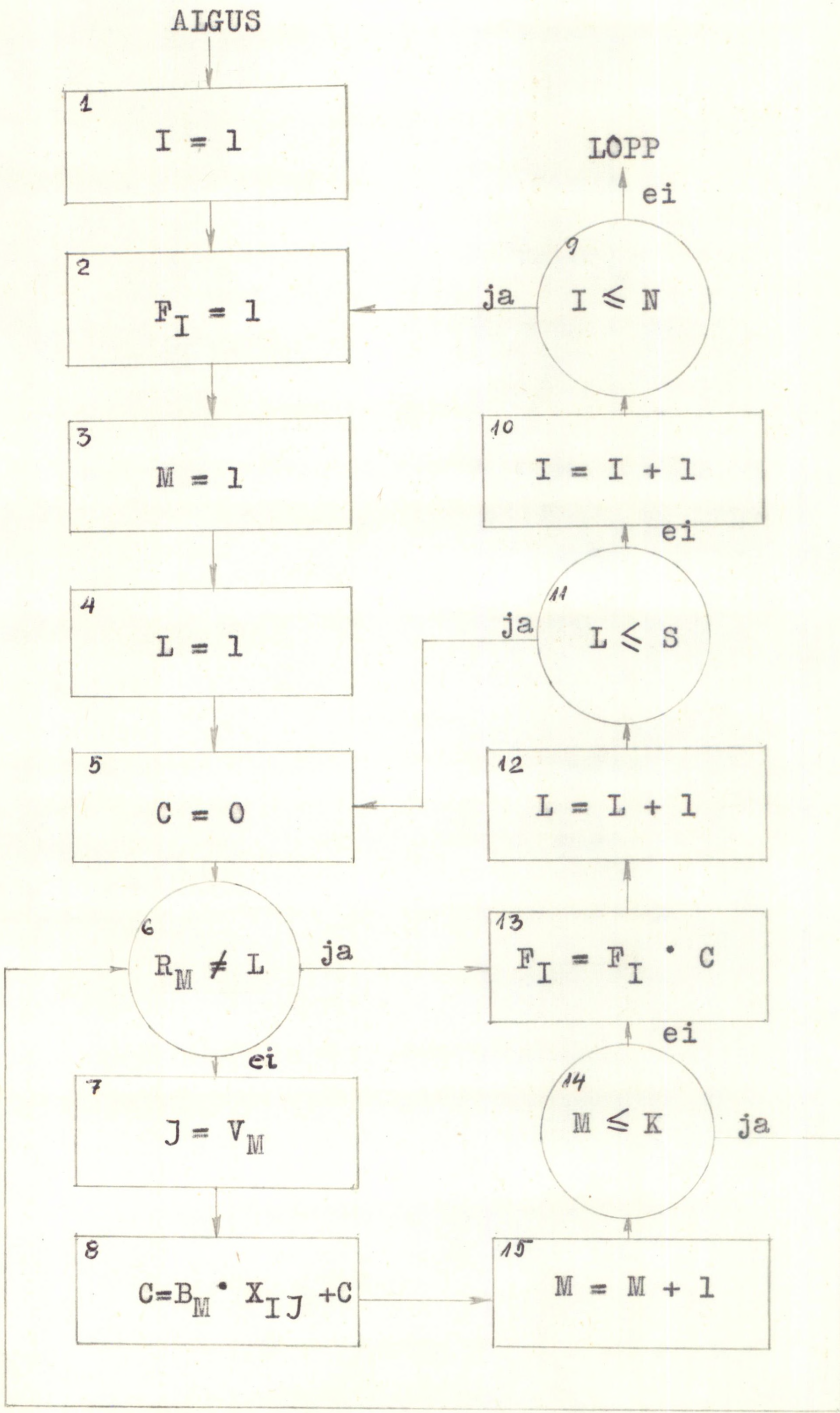
2. Ära jätta blokk 7 , sest selline lõpukriteerium ei õigusta end.
Lõpukriteerium

$$\left| \frac{\beta_i}{\beta(k)_i} - 1 \right| \leq \varepsilon$$

panna pärast 15-ndat, 25-ndat ning 40-ndat blokki, kusjuures antud võrratuses tuleb vektoriks $\vec{\beta}(k)$ võtta vastavalt vektor $\overrightarrow{\beta\beta}$, $\overrightarrow{\beta 1}$ või $\overrightarrow{\beta 0}$.

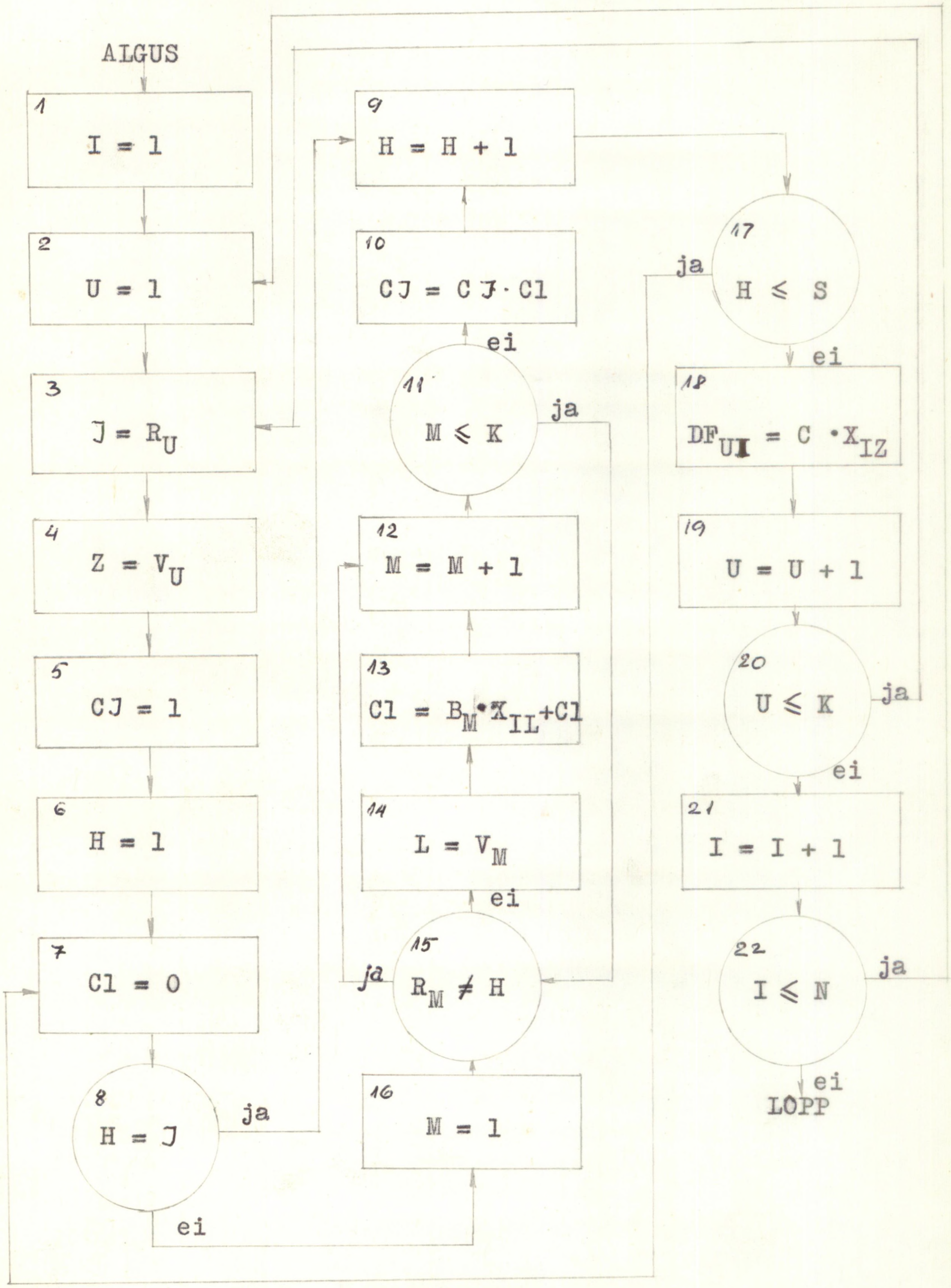
BLOKKSKEEM PROTSEDUURILE

FUNKTS

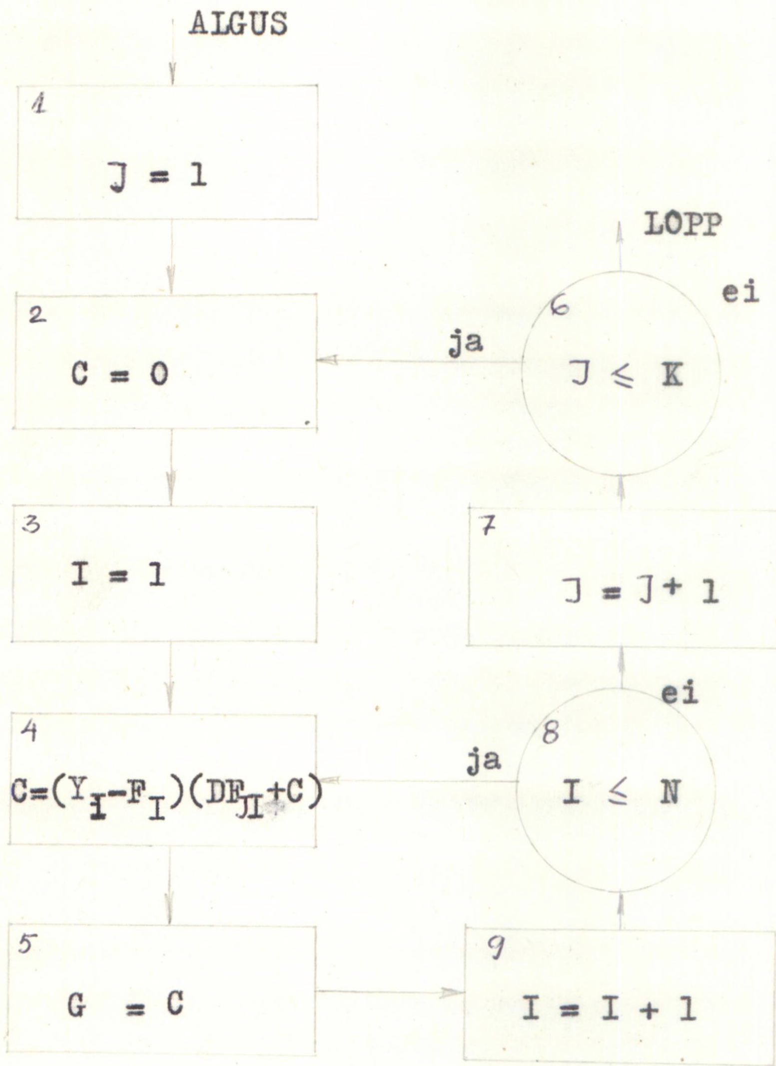


BLOKKSKEEM PROTSEDUURILE

TULETIS



BLOKKSKEEM PROTSEDUURILE GRAD



MALGOL-22(32)   PROGRAM 03

LISA V

```
COMMENT'PARAMEETRID;
A1:READ1'(N,P,S,K,EPS);
ARRAY'Y.(1:N).,X.(1:N,0:P).,
B.(1:K).,R.(1:K).,V.(1:K).;
READAR'(Y.,X.,B.,R.,V.);
ARRAY'F.(1:N).,F1.(1:N).,DF.(1:K,1:N).,
G.(1:K).,A.(1:K,1:K).,AP.(1:K,1:K).,
H.(1:K×(K+1)/2).,
AP1.(1:K,1:K).,AA.(1:K,1:K).,D.(1:K).,
D1.(1:K).,B0.(1:K).,B1.(1:K).,BB.(1:K).;
FUNKTS(F.,N,S,R.,V.,B.,X.,K);
Q:=0;
FOR'I:=1 STEP'1 UNTIL'N DO'

BEGIN'Q:=Q+(Y.(I).-F.(I).)××2 END';
PRINT1'(Q);
PRINTARRAY'(B.);
L:=0.01;
A2:L1:=L/10;
TULETIS(DF.,N,K,S,R.,V.,B.,X.);
GRAD(G.,Y.,F.,DF.,K,N);
MULTR3'(DF.,H.);
ARR3Q'(H.,A.);
TRANS'(A.,AP.);
FOR'I:=1 STEP'1 UNTIL'K DO'
BEGIN'AP.(I,I).:=A.(I,I).×L+A.(I,I). END';
INVERS'(AP.);
TRANS'(A.,AP1.);
FOR'I:=1 STEP'1 UNTIL'K DO'
BEGIN'AP1.(I,I).:=A.(I,I).×L1+A.(I,I). END';
INVERS'(AP1.);
FOR'U:=1 STEP'1 UNTIL'K DO'
BEGIN'D.(U).:=0;
D1.(U).:=0;
FOR'I:=1 STEP'1 UNTIL'K DO'
BEGIN'D.(U).:=D.(U).+AP.(U,I).×G.(I).;
D1.(U).:=D1.(U).+AP1.(U,I).×G.(I). END';
 END';
ADD'(B.,D1.,B1.);
ADD'(B.,D.,B0.);
FUNKTS(F.,N,S,R.,V.,B0.,X.,K);
FUNKTS(F1.,N,S,R.,V.,B1.,X.,K);
T:=0;
T1:=0;
FOR'I:=1 STEP'1 UNTIL'N DO'
BEGIN'T:=T+(Y.(I).-F.(I).)××2;
T1:=T1+(Y.(I).-F1.(I).)××2 END';
IF'Q(:T+Q(:T1 THEN'GOTO'A4;
IF'T(:T1 THEN'GOTO'A3;
L:=L/10;
Q:=T1;
MAX:=ABS'(B.(1)/B1.(1).-1);

FOR'I:=2 STEP'1 UNTIL'K DO'
BEGIN'IF'ABS'(B.(I)./B1.(I).-1):)MAX
THEN'MAX:=ABS'(B.(I)./B1.(I).-1) END';
FOR'I:=1 STEP'1 UNTIL'K DO'
BEGIN'B.(I).:=B1.(I). END';
IF'MAX(=EPS THEN'GOTO'A7;
GOTO'A2;
A3:Q:=T;
MAX:=ABS'(B.(1)./B0.(1).-1);
FOR'I:=2 STEP'1 UNTIL'K DO'
```

```
BEGIN'IF'ABS'(B.(I)./B0.(I).-1)!)MAX
THEN'MAX:=ABS'(B.(I)./B0.(I).-1) END';
FOR'I:=1 STEP'1 UNTIL'K DO'
BEGIN'B.(I).:=B0.(I). END';
IF'MAX(=EPS THEN'GOTO'A7;
GOTO'A2;
A4:R:=1;
A5:LL:=L×10××R;
TULETIS(DF.,N,K,S,R.,V.,B.,X.);
MULTR3'(DF.,H.);
ARR3Q'(H.,AA.);
TRANS'(AA.,AP.);
        FOR'I:=1 STEP'1 UNTIL'K DO'
BEGIN'AP.(I,I).:=AA.(I,I).×LL+AA.(I,I). END';
INVERS'(AP.).;
GRAD(G.,Y.,F.,DF.,K,N);
FOR'U:=1 STEP'1 UNTIL'K DO'
BEGIN'D.(U).:=0;
FOR'I:=1 STEP'1 UNTIL'K DO'
BEGIN'D.(U).:=D.(U).+AP.(U,I).×G.(I). END';
 END';
ADD'(B.,D.,BB.);
FUNKTS(F.,N,S,R.,V.,BB.,X.,K);
TT:=0;
FOR'I:=1 STEP'1 UNTIL'N DO'
BEGIN'TT:=TT+(Y.(I).-F.(I).)××2 END';
IF'TT(=Q THEN'GOTO'A6;
R:=R+1;
GOTO'A5;
A6:L:=LL;
Q:=TT;
MAX:=ABS'(B.(1)./BB.(1).-1);
FOR'I:=2 STEP'1 UNTIL'K DO'
BEGIN'IF'ABS'(B.(I)./BB.(I).-1)!)MAX
THEN'MAX:=ABS'(B.(I)./BB.(I).-1) END';
FOR'I:=1 STEP'1 UNTIL'K DO'
BEGIN'B.(I).:=BB.(I). END';
IF'MAX(=EPS THEN'GOTO'A7;
GOTO'A2;
A7:PRINT1'(Q);
PRINTARRAY'(B.);
STOP';
START'A1;
PROCEDURE'FUNKTS(Q1.,Q2,Q3,Q4.,Q5.,Q6.,Q7.,Q8);
BEGIN'FOR'I:=1 STEP'1 UNTIL'Q2 DO'
BEGIN'Q1.(I).:=1;
M:=1;
FOR'L:=1 STEP'1 UNTIL'Q3 DO'
BEGIN'C:=0;
A1:IF'Q4.(M).=/L THEN'GOTO'A2;
J:=Q5.(M).;
C:=Q6.(M).×Q7.(I,J).+C;
M:=M+1;
IF'M(=Q8 THEN'GOTO'A1;
A2:Q1.(I).:=Q1.(I).×C END';
 END';
 END';
PROCEDURE'TULETIS(Q1.,Q2,Q3,Q4,Q5.,Q6.,Q7.,Q8.);
BEGIN'FOR'I:=1 STEP'1 UNTIL'Q2 DO'
BEGIN'FOR'U:=1 STEP'1 UNTIL'Q3 DO'
BEGIN'J:=Q5.(U).;
Z:=Q6.(U).;
C:=1;
```

```
H:=1;
A1:C1:=0;
IF'H=J THEN'GOTO'A4;
M:=1;
A2:IF'Q5.(M).=/H THEN'GOTO'A3;
L:=Q6.(M).;
C1:=Q7.(M).×Q8.(I,L).+C1;
A3:M:=M+1;
IF'M(=Q3 THEN'GOTO'A2;
CJ:=CJ×C1;
A4:H:=H+1;
IF'H(=Q4 THEN'GOTO'A1;
Q1.(U,I).:=CJ×Q8.(I,Z).
 END';
 END';
 END';
PROCEDURE'GRAD(Q1.,Q2.,Q3.,Q4.,Q5,Q6);
BEGIN'FOR'J:=1 STEP'1 UNTIL'Q5 DO'
BEGIN'C:=0;
FOR'I:=1 STEP'1 UNTIL'Q6 DO'
BEGIN'C:=(Q2.(I).-Q3.(I).)×Q4.(J,I).+C END';
Q1.(J).:=C END';
 END';
FINISH';
```

```
COMMENT'PARAMEETRID;
MEMORY PLAN
     VARIABLES
   2236   N
   2237   P
   2240   S
   2241   K
   2242   EPS
   2244   Q
   2245   I
   2246   L
   2247   L1
   2250   U
   2251   T
   2252   T1
   2253   MAX
   2254   R
   2255   LL
   2256   TT
   2257   I
   2260   M
   2261   L
   2262   C
   2263   J
   2264   I
   2265   U
   2266   J
   2267   Z
   2270   CJ
   2271   H
   2272   C1
   2273   M
   2274   L
   2275   J
   2276   C
   2277   I
     TABLE OF ARRAYS
   2314   Y
   2315   X
   2316   B
   2317   R
   2320   V
   2321   F
   2322   F1
   2323   DF
   2324   G
   2325   A
   2326   AP
   2327   H
   2330   AP1
   2331   AA
   2332   D
   2333   D1
   2334   B0
   2335   B1
   2336   BB
     SUBROUTINES
   2566   2602
   2655   2675
   2715   2735
   2752   3037
   2774   3036
   3106   3136
   3203   3234
   3247   3257
   3314   3345
   3360   3370
   3441   3461
   3505   3545
   3523   3544
   3576   3612
   3651   3702
   3715   3725
   3755   4045
   3775   4044
   4062   4201
   4075   4200
   4216   4256
   4232   4251
     LABELS
   2373   A1
   2610   A2
   3267   A3
   3400   A4
   3401   A5
   3623   A6
   3735   A7
   3776   A1
   4034   A2
   4107   A1
   4117   A2
   4145   A3
   4156   A4
     PROCEDURES
   0510   0633   READ1
   0634   0747   ARRAY
   0750   1060   READAR
   1210   1366   PRINT1
   1367   1602   PRINTA
   1603   1716   MULTR3
   1717   2006   ARR3Q
   2007   2044   TRANS
   2045   2155   INVERS
   2156   2220   ADD
   3742   4046   FUNKTS
   4047   4202   TULETI
   4203   4257   GRAD
     FUNCTIONS
   1061 - 1207   ××
     OPERATING VARIABLES
   2300 - 2304
     CONSTANTS
   2305 - 2313
     PROGRAM
   2362 - 4260
     START 0105
```

NÄIDE

Näiteülesanne on koostatud selliselt: on vabalt valitud $x_{ij}(i = 1, 2, \ldots, n; j = 0, 1, \ldots, p)$ ning $\beta_m(m = 1, 2, \ldots, k)$ väärtused ja nende põhjal leitud y_i väärtused valemist

$$y_i = f_i(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in}; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k) + \mu_i,$$

kus μ_i on normaaljaotusega juhuslik suurus, N(0;0,001). Funktsioon f_i on järgmine:

$$f_i = (\beta_{10} x_{i0} + \beta_{11} x_{i1}) \cdot \beta_{21} \cdot x_{i1} \cdot \beta_{32} \cdot x_{i2}.$$

Algandmeteks on väärtused x_{ij}, y_i ja $\beta_m^{(0)}$, kusjuures $\beta_m^{(0)} \neq \beta_m (m = 1, 2, \ldots, k)$ on parameetrite vektori alglähend.

Algandmed: $n = 20$; $p = 2$; $s = 3$; $k = 4$; $\varepsilon = 0,001$,

$$\vec{y} = \begin{Vmatrix} 0,209518 \\ 0,326678 \\ 1,319943 \\ 0,268771 \\ 0,539514 \\ 0,070856 \\ 0,649509 \\ 0,658017 \\ 0,135004 \\ 0,406119 \\ 0,449287 \\ 0,899459 \\ 1,349470 \\ 1,798401 \\ 2,248398 \\ 1,625412 \\ 1,298550 \\ 0,975140 \\ 0,441004 \\ 0,220199 \end{Vmatrix}, \qquad X = \begin{Vmatrix} 1 & 0,2 & 0,3 \\ 1 & 0,5 & 0,1 \\ 1 & 0,4 & 0,6 \\ 1 & 0,3 & 0,2 \\ 1 & 0,3 & 0,4 \\ 1 & 0,2 & 0,1 \\ 1 & 0,5 & 0,2 \\ 1 & 0,4 & 0,3 \\ 1 & 0,3 & 0,1 \\ 1 & 0,3 & 0,3 \\ 1 & 0,6 & 0,1 \\ 1 & 0,6 & 0,2 \\ 1 & 0,6 & 0,3 \\ 1 & 0,6 & 0,4 \\ 1 & 0,6 & 0,5 \\ 1 & 0,5 & 0,5 \\ 1 & 0,5 & 0,4 \\ 1 & 0,5 & 0,3 \\ 1 & 0,4 & 0,2 \\ 1 & 0,4 & 0,1 \end{Vmatrix},$$

$$\vec{\beta}^{(0)} = (0{,}35\ ;\ 2{,}5\ ;\ 5{,}5\ ;\ 1{,}5)\ ,$$

$$\vec{R} = (1\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ )\ ,$$

$$\vec{V} = (0\ ;\ 1\ ;\ 1\ ;\ 2\ )\ .$$

Vektor $\vec{\beta}$, mida on kasutatud $\vec{y}$ elementide leidmisel, on järgmine:

$$\vec{\beta} = (0{,}3\ ;\ 2\ ;\ 5\ ;\ 1\ )\ .$$

Tulemuseks saadakse

$$\vec{\beta} = (0{,}273\ ;\ 1{,}\ 820\ ;\ 4{,}488\ ;\ 1{,}224\ )\ .$$

БПМ	+777777777777	+000000000003	
БПМ	+777777777777	+2126013+02	+1489842-06
БПМ			
БПМ	+000000000000		
БПМ	+000000000003		
БПМ	+000000000000		
БПМ	+000000000003	+3500000+00	+2731285+00
БПМ	+000000000000	+2500000+01	+1820270+01
БПМ	+000000000003	+5500000+01	+4487628+01
БПМ	+000000000000	+1500000+01	+1223992+01