

A-16558

POPULAARTEADUSLIK
SARI

G. N. BERMAN
ARV
JA
NUMBER

А Б В Г Д Е Ж З И Й
К Л М Н О П Р С Т У Ф
Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

1919A

A-16558

G. N. BERMAN

ARV JA NUMBER

(KUIDAS INIMESED ARVUTAMA ÕPPISID)



EESTI RIIKLIK KIRJASTUS
TALLINN 1952

Originaali tiitel:

Г. Н. Берман

СЧЕТ и ЧИСЛО

Издание четвертое

Государственное Издательство
Технико-Теоретической Литературы

Москва 1950 Ленинград

Tõlkinud J. Elango

LUGEJALE

Populaarteadusliku kirjanduse toimetus palub hinnangud ja arvamus-
sed teose kohta, samuti teoses ka-
sutatud terminoloogia kohta saata
adressil:

Tallinn,

Pärnu mnt. 10

Eesti Riikliku Kirjastuse
populaarteadusliku kirjanduse
toimetus.

2

Tartu Riikliku Ülikooli
Raamatukogu

19194

SISSEJUHATUS

Mis võib olla lihtsam arvude lugemisest? Igaüks võib lausuda järgemööda: üks, kaks, kolm, neli, viis jne. Arutamine kuulub niivõrd kindlalt meie igapäevasesse ellu ja me oleme sellega nii harjunud, et ei saa kujutleda täiskasvanud inimest, kes ei oska arvutada. Ja siiski oli aeg, millal inimesed arvutada ei osanud. Meie kauged esivanemad, kes asustasid maakera tuhandeid sajandeid tagasi ja kes ei tundnud tuld, ei tundnud ka arutamist.

Vanades muistendites mainitakse prohveteid ja kangelasi, kellele jumalad andsid või kes ise võtsid jumalailt tule ja numbrid. Niisuguseid prohveteid ja kangelasi ei ole muidugi kunagi olnud. Inimesed õppisid arutama ise, järk-järgult sadade sajandite jooksul, andes oma kogemusi ja teadmisi edasi sugupõlvelt sugupõlvele, arendades ja täiustades arutamiskunsti.

Nüüdisaegne arvuteadus on suur ja keerukas teadus. Ta on osa matemaatikast, teadusest, mille «aineks on reaalmaailma ruumivormid ja kvantitatiivsed suhted, s. t. väga reaalne sisu» (F. Engels). Matemaatika ei ole tarkpeade tühipaljas väljamõeldis. Ta tekkis inimeste tegelikust tarvidusest tundma õppidu ümbritsevat loodust ja selle seadusi nende kasutamise eesmärgil inimeste huvides.

Suure panuse töid matemaatikateaduste arengusse XIX sajandi suured vene matemaatikud — N. I. Lobatševski, P. L. Tšebõšev, S. V. Kovalevskaja ja teised.

Hiilgavalt on matemaatika arenenud Nõukogude Liidus. Nõukogude matemaatikud on rikastanud uute suurte uurimustega matemaatika kõige keerukamaid alasid ja lahendanud rea kõige tähtsamaid teaduslikke ülesandeid, mis soodustavad NSV Liidu rahvamajanduse arenemist. Paljude

nõukogude matemaatikute töid on hinnatud Stalini preemiaga. Säärased on näiteks Sotsialistliku Töö Kangelase akadeemik I. M. Vinogradovi väljapaistvad tööd arvude teooria alal (nii nimetatakse aritmeetika kõrgemaid osi).

Kapitalistlikes maades teenivad uurimused matemaatika valdkonnas imperialistide rämpseid taotlusi — uue sõja ettevalmistamist, inimeste massilise hävitamise uute vahendite arendamist. See põhjustab ausate, eesrindlike õpetlaste protesti. Ajakirjanduses oli teade selle kohta, et üks suur inglise õpetlane keeldus tööd jätkamast kõige uuemate arvutusmasinate alal, sest et sääraseid, kõige keerukamaid arvutusi ülikiiresti teostavaid masinaid kavatsetakse kasutada andmete arvutamiseks, mis on vajalikud reaktiivmürskude täpsemaks tabamiseks rahulike asulate pihta.

NSV Liidus on matemaatika nagu kõik teadused täielikult allutatud kommunistliku ühiskonna ehitamise õilsale ülesandele, nõukogude rahva jõukuse kasvule, ja sellega erineb ta teravalt imperialismimaade teadusest.

* * *

Käesolevas raamatukeses jutustame sellest, kuidas inimesed järk-järgult omandasid arvutamiskunsti, ja sellest, kuidas on konstrueeritud arvusüsteem käesoleval ajal.



1. ARVUTAMINE KAUGES MINEVIKUS

Vanadel hausasammastel ja vanadel templivaremetel leitakse mõnikord veidraid, kummalisi kirjamärke. Õpetlased suutsid need dešifreerida ja said teada, kuidas elasid inimesed neljaviie tuhande aasta eest. Nendest raidkirjadest nähtub, et ka siis, tuhandete aastate eest, arvutasid meie esivanemad päris hästi. Aga kuidas arvutasid nad veel varem, kui ei osatud kirjutada? Selle kohta võime teha ainult oletusi.

Kolm teed viivad meid sajandite sügavikku ja aitavad lahti mõtestada seda mõistatust.

E s i m e n e t e e on keele, rahvapärimuste ja -laulude tundmaõppimine. Keeles on säilinud palju jälgi sellest ajast, kui inimesed ei osanud veel kirjutada.

T e i n e t e e on laste vaatlemine, kui nad õpivad kõnelema ja arvutama. Laste arenemist tundma õppides võib saada mõningaid näpunäiteid selle kohta, kuidas inimesed omandasid arvutamisoskuse: laps nagu «kordab» inimsoo arengu mõningaid samme.

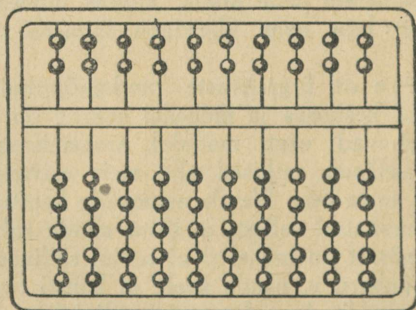
K o l m a s t e e on ürgrahvaste tundmaõppimine. Aafrikas, Lõuna-Ameerika keskosas ja mõnedel saartel on säilinud suguharusid, kes seisavad väga madalal arenemisastmel; nad on praegu umbes sellised, millised olid meie esivanemad viie või kümne tuhande aasta eest. Nende asumaade kapitalistlikud perekonnad ei ole huvitatud sellest, et tõsta nende rahvaste kultuurilist taset. Seepärast on mõnel pool senini säilinud algeline eluviis. Selliste suguharude, nende keele ja kunsti tundmaõppimine võimaldas välja selgitada palju meie endi kõige vanema ajaloo tumedaid kohti ja aitas meid teada saada, kuidas arvutati vanaasti.

Kõrvutades neist kolmest allikast saadud andmeid võime umbkaudselt taastada pildi selle kohta, kuidas arvutasid meie esivanemad enne kirjaoskuse leiutamist.

Sel iidsel ajal, kui inimesed vaevalt olid õppinud kõnelema ja tuld kasutama, tundsid nad ainult kaht arvu: üks ja kaks. Kui loendatavaid esemeid oli enam kui kaks, siis ütlesid inimesed lihtsalt «palju». «Palju» oli tähti taevas, kuid ka sõrmi oli «palju». Praegugi tuntakse terveid suguharusid, kellele arvutamine kolmeni on raskeks tööks. Iga lapse arenemises on samuti teada ajavahemik, millal ta saab aru, mis on «üks» ja «kaks», kuid arvutada kolmeni ei suuda.

Järk-järgult lisandus esimesele kahele arvule uusi ja uusi arve. Inimesed õppisid viieni lugema ja kahte viit kümneks ühendama. Seda soodustas see arvemasin, millega loodus ise varustas inimese: tema kaks kätt kümne sõrmega.

Arvud «viis» ja «kümme» etendasid määratu suurt osa arvutamise arenemise ajaloos. Selle kohta leidub palju viiteid. Enamiku antiikrahvaste keeltes langevad arvude nimetused esimese kümne piires ühte sõrmede nimetustega. Isegi praegu elavate rahvaste keeled on säilitanud selle nähtuse jälgi: näiteks, nüüdisaegses itaalia keeles tähistab sõna *le dita* nii «arvusid kuni kümneni» kui ka «sõrmi». Väljendus «sõrmede peal üles lugema», mis meie keeles on säilinud, näitab, et meie esivanemail oli arvude lugemine lahutamatu seotud sõrmedega. Lõpuks, meie nüüdisaegne numeratsiooni kümnendsüsteem (sellest jutustatakse üksikasjaliselt allpool) on selle tõendiks, kui suur tähtsus oli arvul «kümme» arvutamiskunsti arenemises.



Joon. 1. Hiina arvelaud.

Me ütlesime, et esiotsa arvutasid inimesed viite kaupa ja õppisid alles pärastpoole viielisi paarideks ühendama ning kümnetega arutama. Sellele osutab huvitav arvutamisvahend, mida on tarvitatud meie päevini, nimelt — hiina arvelaud. Selle ehitus selgub juuresolevast joonisest (joon. 1).

Inimühiskond arenes, tekkisid põllutöö, karjakasvatus, kõige lihtsamad käsitööd. Ühes nendega ilmusid ka kõige lihtsamad arvutamismvormid. Sellest ajast on säilinud kirjalikke mälestusmärke ja me teame täpselt, kuidas arvutasid siis meie esivanemad.

Kirjaoskuse koidikul puudusid tähed. Iga eset, iga tegevust kujutati pildikesega. Järk-järgult pildikesed lihtsustusid, kuid nende hulk suurenes: erilised märgid kujutasid mitte ainult esemeid ja tegevusi, vaid ka esemete omadusi ja muid üksikuid sõnu. Kõik need märgid olid väga keerukad (igaüks neist oli terveks, kuigi küll väga lihtsustatud pildiks) ja ei tähendanud mitte üksikuid häälikuid, vaid terveid sõnu. Sääraseid märke nimetatakse hieroglüüfideks. Hieroglüüfe kasutatakse mitte vähem kui viis tuhat aastat. Joonisel 2 näeme hieroglüüfe, mis leiduvad ühel Egiptuse kõige vanemal ehitisel.

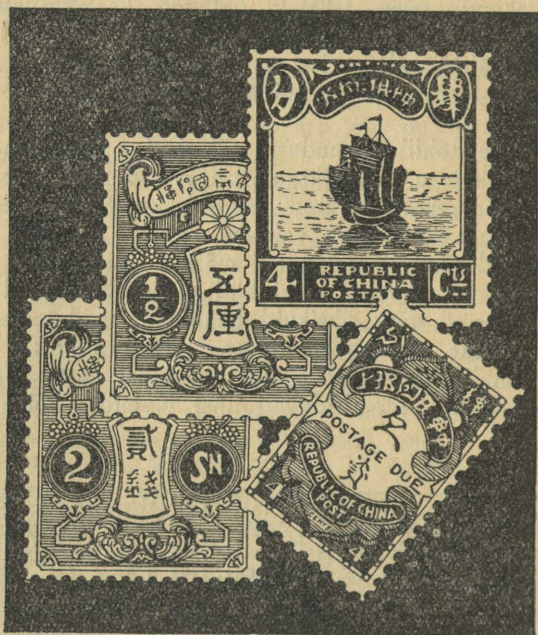


Joon. 2. Egiptuse hieroglüüfid.

Arvude kirjutamiseks ei olnud siis erilisi märke (numbreid); sõnu «üks», «viis», «kaksikümmend» ja teisi arvsõnu kujutati teatud kindlate hieroglüüfidega. Niisuguseid arvude hieroglüüfe oli võrdlemisi vähe, sest et tol ajal ei loetud rohkem kui sajani, harvadel juhtudel — tuhandeni.

Mõnel maal, näiteks Hiinas ja Jaapanis, tarvitatakse praegugi kõrvuti nüüdisaegsete tähtedega hieroglüüfe. Joonisel 3

on kujutatud Hiina ja Jaapani kirjamargid, millel võib kõrvuti harilike numbrite ja ladina tähtedega näha veidraid, kummalisi tähevigureid; need on hieroglüüfid.



Joon. 3. Hiina ja Jaapani kirjamargid.

Vanade egiptlaste hieroglüüfid näitavad, et arvutamiskunst oli neil väga arenenud. Kolme ja poole tuhande aasta eest tundsid egiptlased täis- ja murdarve. Neist aegadest on säilinud nii ajaarvutusi kui ka majapidamisdokumente ja aritmeetiliste ülesannete kogusid, mis olid käsiraamatuks arvutamise õpetamisel. Kuid suuri arve me Egiptuse mälestusmärkides ei kohta.

Arvutamiskunsti edasiseks täiustamiseks oli vaja üks kahest: kas üle minna sobivamale kirjaviisile, s. t. siirduda hieroglüüfidelt tähtedele, või siis leiutada mingisugune uus võte, mis hõlbustaks arvude kirjutamist eriliste märkidega. Ühed rahvad läksid esimest, teised teist teed mööda.

2. KUIDAS HAKATI KASUTAMA TÄHTI ARVUDE KIRJUTAMISEKS

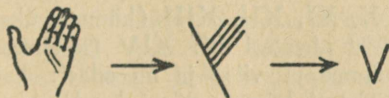
Tähtede leiutamine andis kultuuri arenguks väga palju. See soodustas ka arvutamiskunsti arenemist. Arve hakati nüüd märkima tähtedega. Kuid selle asemel, et tähtede abil kirjutada arvude nimetusi nii, nagu neid hääldatakse, hakati iga arvu kujutama leppeliselt ühe tähega. Siin aga tekkis raskus: tähti on vähe, arve aga väga palju (tähtede leiutamise ajal oskasid inimesed arvutada juba tuhandetega). Tähendab, oli vaja mitte lihtsalt kujutada arve tähtedega, vaid leiutada säärane märkimissüsteem, et väheste tähtede abil saaks üles kirjutada palju mitmesuguseid arve. Märkimissüsteemi, mille juures jätkub vähestest märkidest paljude arvude üleskirjutamiseks, nimetatakse arvusüsteemiks ehk numeratsiooniks.

Meid huvitab eriti rooma ja slaavi numeratsioon. Rooma numeratsioon huvitab sellepärast, et rooma numbreid esineb seniajani kellade numbrilaudadel, vanadel ehitistel, neid tarvitatakse raamatute peatükkide, sajandite jne. märkimiseks; slaavi numeratsioon aga huvitab sellepärast, et seda tarvitati vanas Venes.

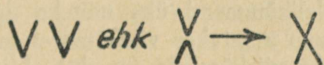
Vanad roomlased kasutasid sadade aastate vältel arvude tähistamiseks muistseid märke, millede päritolu pole veel lõplikult kindlaks tehtud. Need märgid on järgmised:

|(üks) V(viis) X(kümme) ∟(viiskümmend))|(sada)

Võib oletada, et ühe märk on hieroglüüf, mis kujutab üht sõrme, viie märk on viie sõrme kujutis (kämmal eemalehoiduva põidlagi):



kümne märk aga on kahe viie ühendatud kujutis:



Viiekümne ja saja märkide päritolu ei ole nii lihtne seletada.

Selles küsimuses avaldavad õpetlased ainult mitmesuguseid oletusi.

Kuid rooma kultuuri suurima õitsengu ajaks (2000 aastat tagasi) olid need märgid asendatud neile sarnanevate ladina tähtedega.

Niiviisi,

- märgist I (sõrm) kujunes I (ladina täht «i»),
- „ V (kämmal) kujunes V (ladina täht «ve»),
- „ X (kaks kämmalt) kujunes X (ladina täht «iks»),
- „ ↓ kujunes L (ladina täht «el»),
- „)(kujunes C (ladina täht «tse»); sellest viimastest märgist säilis ainult parempoolne kaar.

Peale selle ilmus kaks uut märki: täht D viiesaja ja täht M tuhande märkimiseks. Muide, on võimalik, et tähed C ja M on lihtsalt algtähed sõnadest *centum* ja *mille*, mis ladina keeles tähendavad «sada» ja «tuhat».

Kuidas siis kirjutasiid roomlased mitmesuguseid arve?

Arvude «kahe» ja «kolme» kirjutamiseks kordasid nad lihtsalt kaks või kolm korda ühe märki: II (kaks), III (kolm). «Neli» kirjutati nii: IV; selles tähistamises arvati viie ette asetatud üks viiest maha. Vastupidi, viie järel kirjutatud ühed arvati sellele juurde; kuus, seitse ja kaheksa kirjutati nii: VI, VII, VIII.

Edasi võeti tarvitusele märk X. «Üheksa» kirjutati järgmiselt: IX (kümne ees asetsev üks arvati jällegi kümnest maha). Edasi järgnesid X, XI, XII, XIII (kümme, üksteist, kaksteist, kolmteist). Neliteist kirjutati nii: XIV (kümme ja neli), viisteist — XV (kümme ja viis) ja nii edasi: kakskümmend ja kolmkümmend kirjutati kümne märgi kordamise teel: XX ja XXX.

Neljakümne, viiekümne jne. jaoks võeti tarvitusele märk L (viiskümmend). Nelikümmend üks näiteks kirjutati nii: XLI (L ees seisev kümme arvatakse viiekümnest maha, kuid L järel seisev üks arvatakse viiekümnele juurde). Viiskümmend, kuuskümmend ja seitsekümmend kirjutati nii: L, LX, LXX. Üheksakümne kirjutamiseks kasutati saja märki C järgmiselt: sajast

arvatakse kümme maha; tähendab, kümne märk asetatakse saja märgi ette: XC.

Kõik arvud esimese saja piirides, kirjutatud rooma numbritega, on järgmised:

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX	XX
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
XXI	XXII	XXIII	XXIV	XXV	XXVI	XXVII	XXVIII	XXIX	XXX
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
XXXI	XXXII	XXXIII	XXXIV	XXXV	XXXVI	XXXVII	XXXVIII	XXXIX	XL
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
XLI	XLII	XLIII	XLIV	XLV	XLVI	XLVII	XLVIII	XLIX	L
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
LI	LII	LIII	LIV	LV	LVI	LVII	LVIII	LIX	LX
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
LXI	LXII	LXIII	LXIV	LXV	LXVI	LXVII	LXVIII	LXIX	LXX
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
LXXI	LXXII	LXXIII	LXXIV	LXXV	LXXVI	LXXVII	LXXVIII	LXXIX	LXXX
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
LXXXI	LXXXII	LXXXIII	LXXXIV	LXXXV	LXXXVI	LXXXVII	LXXXVIII	LXXXIX	XC
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
XCI	XCII	XCIII	XCIV	XCV	XCVI	XCVII	XCVIII	XCIX	C
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Sajale järgnevaid arve kirjutati rooma numbritega täpselt sellesama süsteemi järgi. Arv 102 kirjutati CII, arv 374 — CCCCLXXIV jne. Arvude jaoks neljasajast kuni kaheksasaja üheksakümne üheksani kasutati märki D (500), üheksasada kirjutati CM, tuhat — M. Niisiis kirjutatakse arv 1917 rooma numbritega järgmiselt: MCMXVII. Arv 1951 — MCMLI.

Pole raske rooma numbritega kirjutada ka suuri arve. Näiteks arv 123 849 tuleb kirjutada nii: CXXIII_m DCCCXLIX. Väike täht «m» tähistab siin tuhandeid (sada kaksikümmend kolm tuhat); selle tähega algab sõna *mille*, mis ladina keeles tähendab «tuhat».

Rooma numeratsioon sobib arvude ülestähendamiseks, kuid ei ole kohane arvutamiseks; igasuguseid kirjalikke tehteid (arvutamist «tulpades» ja teisi võtteid, mida meie oskame teha) on rooma numbritega peaaegu võimatu teostada. See on rooma numeratsiooni suur puudus.

Slaavi numeratsioon ei kasuta mitte seitset, vaid kahtkümmend seitset tähte. Kuid see-eest võimaldab ta väga suurte arvude kirjutamist ja tehete teostamist «tulpades», nagu meie teeme seda praegu.

Erinevalt rooma numeratsioonist kasutas slaavi numeratsioon mitte suuri, vaid väikesi tähti. Arve kujutavate tähtede kohale pandi eriline märk — *titlo* (◌); seda märki tarvitati ka harilikus tekstis sõna lühendusmärgina.

Slaavi numbrid on järgmised (nende alla on kirjutatud slaavi tähestiku tähtede nimetused):

Ā	Ḃ	Ɔ	Ḍ	Ě	Š	Ŝ	Ň	Ǧ
<i>az</i>	<i>védi</i>	<i>glagólj</i>	<i>dobrâ</i>	<i>esté</i>	<i>zeló</i>	<i>zempljá</i>	<i>íže</i>	<i>fitá</i>
1	2	3	4	5	6	7	8	9
ĩ	ķ	ā	ṁ	ñ	ṣ̌	ō	ņ	č
<i>i</i>	<i>káko</i>	<i>ljúdi</i>	<i>mōsléte</i>	<i>naš</i>	<i>ksi</i>	<i>on</i>	<i>pokói</i>	<i>tšerv</i>
10	20	30	40	50	60	70	80	90
ř	č	ř	ŷ	ř	ř	ř	ŵ	č
<i>rtsō</i>	<i>slóvo</i>	<i>tvérdo</i>	<i>uk</i>	<i>fert</i>	<i>ha</i>	<i>psi</i>	<i>o</i>	<i>tsō</i>
100	200	300	400	500	600	700	800	900

Näiteks, arvusid üksteist ja kaksteist kirjutati nii: **ĀĪ**, **ḂĪ**, kakkümmend üks ja kakkümmend kaks — **ķĀ**, **ķḂ**, jne. Titlo

XV—XVI sajandist alates tulevad Venemaal tarvitusele ka praegused, «araabia» numbrid. Sellega üheaegselt areneb ka slaavi arvusüsteem; järk-järgult leiutatakse nimetused järjest suurematele ja suurematele arvudele.

XVII sajandil kujuneb slaavi arvusüsteem korrapäraseks «velikoje slovenskoje tšislo» («suur slaavi arv») nimetust kandvaks süsteemiks; seda süsteemi rakendati siis, «kui juhtus suur arvutamine ja ülelugemine», nagu öeldakse ühes vanas juhendis.

XVII sajandi ürikutes esineb see arvusüsteem järgmisena:

Kümmet tuhat ei nimetata nendes ürikutes mitte «tma'ks», vaid nii, nagu praegu, s. t. kümneks tuhandeks. Sõna «tma» aga tähistab tuhat tuhat, s. t. meie miljonit. Peale selle tekivad järgmised nimetused: «tma tem» ehk «leegion» (s. o. praeguses väljenduses — miljon miljonit ehk triljon), «leegion leegione» ehk «leodr» ja lõpuks «leodr leodreid» ehk «voron».

Ühes ürikus mainitakse veel «koloda't», mis võrdub kümne voroniga, ja märgitakse seejuures, et «sellest suuremat arvu ei ole».

3. KUS JA KUIDAS TEKKIS PRAEGUNE (POSITSIOONILINE) ARVUSÜSTEEM

Me nägime, et mõned rahvad ei tarvitanud tähti mitte ainult sõnade, vaid ka arvude kirjutamiseks. Teised rahvad kirjutasiid hieroglüüfi-taoliste märkide abil, kuid mõtlesid see-eest välja, kuidas saab väheste märkidega üles kirjutada suure hulga arvusiid.

Eriti huvitav arvude kirjutamise viis tekkis muistses Babüloonias. Babüloonlased kirjutasiid pulgakestega pehmeile savitahvleile ja põletasiid seejärel oma «käsikirju». Saadi vastupidavad tellisest «dokumendid»; mõned neist on osaliselt säilinud ka meie ajani. Õpetlased leidsid väljakaevamistel palju tellisakte, riigi- ja kaubalepinguid, koguni õpikuid. Seepärast on muistse Babüloonia elu meile hästi tuntud.

Pulgakesega pehmele savile kirjutamise tehnika ise viis selleni, et kõik babüloonlaste pildikesed-hieroglüüfid koosnesid kitsaist vertikaalseist või horisontaalseist kiilukestest — niisugu-

seist: P või niisuguseist <. Sellepärast nimetataksegi muistsete babüloonlaste kirja «kiilkirjaks».

Umbes nelja tuhande aasta eest tulid Mesopotaamiasse — Tigriise ja Eufrati jõe vahelisse orgu praeguse Iraagi territooriumile — kaks rändrahvast: sumerid ja akadlased. Need olid oma aja kohta väga arenenud rahvad: nad oskasid künda, karja kasvatada, tundsid käsitööd ja kaubandust. Kahe sajandi möödumisel liitusid nad üheks võimsaks Babüloonia riigiks.

Liitumise ajal olid kummalgi rahval — sumeritel ja akadlastel — oma kaalu- ja rahaühikud. Sumeritel oli kaalu põhiühikuks «miin» — meie kaalu järgi ligikaudu pool kilogrammi. Rahaühikuks oli neil hõbemiin. Akadlastel olid ühikud väiksemad. Nende kaaluühik — «seekel» — oli kuuskümmend korda väiksem sumerite miinist (muidugi mitte täpselt, vaid ligikaudu kuuskümmend korda, kuid tolle aja ebatäpne kaal ei tabanud vahet). Pärast liitumist «olid käibel» mõlemad kaaluühikud, nagu Venemaal esiotsa pärast Oktoobrirevolutsiooni kasutati nii naela kui ka kilogrammi.

Rahakäibes etendasid hõbemiinid ja -seeklid meie rublade ja kopikate osa, ainult seekel oli suurema ühiku — miini mitte sajandik, vaid kümnendik osa.

Kaubandus ja majandus arenesid, käive kasvas. Nagu meie vajame peale grammide ja kilogrammide tonne, nii tekkis ka Babüloonias vajadus suurema kaaluühiku järele.

Oli loomulik, et uus tarvitusele võetud kaaluühik määrati miinist kuuskümmend korda suurem: arvuga «kuuskümmend» oldi majanduslikes arveldustes juba harjutud. Ut ühikut nimetati «talendiks».

Tekkis ka uus rahaühik — hõbetalent, mis võrdus 60 hõbemiiniga.

Kolme ühiku olemasolu (kaalu ja raha alal), millest igaüks võrdus kuuekümne väiksemaga, viis selleni, et babüloonlastel ei olnud vajadust nimetada ja üles kirjutada suuremaid arve kui kuuskümmend. Nagu meie ei ütle «kakssada viiesteist kopikat» või «tuhat kolmkümmend seitse grammi», vaid ütleme «kaks viiesteist» või «kilo kolmkümmend seitse grammi», nii ütlesid ka babüloonlased: «kaks miini nelikümmend seeklit» selle asemel, et ütelda «sada kuuskümmend seeklit». Seepärast vajasid nad arvude tähistamiseks ainult viitkümmend üheksat märki.

Me mainisime juba, et babüloonlaste kiri koosnes kiilukestest.

Üht tähistati ühe, kaht — kahe vertikaalse kiilukesega jne. kuni üheksa kiilukeseni. Babüloonia märgid esimese üheksa arvu jaoks on järgmised:

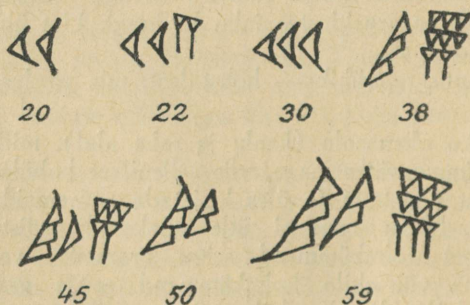


Kiilukesed on nendes kujutistes asetatud nii arukalt, et lugemisel ei tule neid loendada: nende hulk torkab otsekohe silma.

Kümne tähistamiseks oli eriline lai põiki asetsev kiiluke. Teise kümne arve kirjutati järgmiselt:



Sellelaoliselt kirjutati ka suuremaid arve. Toome mõned näited:



Esiialgu tähistati miine suuremamõõteliste märkidega kui seekleid.

Hiljemini hakati kõiki ühikuid kirjutama ühtemoodi, ainult

märgi asetuse näitas, missuguseid ühikuid ta tähistab. Näiteks 2 talenti 13 miini 41 seeklit kirjutati nii:

PP ◀PPP ▲▲P

Babüloonia rahvas arenes, põlluharijad vajasisid kalendrit, kaupmehed õppisid merel sõitma. Kalender ja meresõit nõudsid aga taevakehade liikumise tundmist. Tekkis astronoomia. Selle arenemine nõudis omakorda arvutamise täiustamist. Tuli üles tähendada järjest suuremaid ja suuremaid arvusid, kusjuures need arvud ei tähendanud nüüd mitte kaalu ja raha, vaid kõige mitmesugusemaid suurusi. Tekkis huvi arvude kui niisuguste vastu, mis pole seotud loendatavate või mõõdetavate esemetega. Sääraseid arvusid nimetatakse «abstraktseteks arvudeks».

Abstraktsete arvude kirjutamiseks ei hakatud välja mõtlemata uusi märke, vaid kasutati olemasolevaid. Üleskirjutis

◀◀P ◀◀◀P

hakkas tähistama mitte kahtkümme üht miini kolmekümme kaht seeklit nagu varemalt, vaid kolmekümme kaht ühikut, ja veel kaks kümme üks korda kuuskümme säärast ühikut (s. o. meie moodi arv 1292). Teiste sõnadega, märkide vasakpoolne rühm tähistab kahtkümme üht teise järgu ühikut, ning parempoolne rühm — kolmekümme kaht lihtühikut. Teise järgu ühik on kuuskümme korda suurem lihtühikut, nagu miin oli 60 korda suurem seeklist. Üleskirjutis

◀PPP ▲PPP


tähendab «kolmteist teise järgu ühikut ja kolmteist lihtühikut», s. t. meie moodi arv 793. Täpselt samuti tähistab ka meil näiteks arvus 33 vasakpoolne 3 kolme kümme, s. o. kolme teise järgu ühikut, parempoolne 3 aga — kolme lihtühikut.

Säärast arvude üleskirjutamise süsteemi, kus märgi tähendus muutub olenevalt selle asendist, nimetatakse positsiooniliseks arvusüsteemiks ehk positsiooniliseks numeraatsiooniaks (ladinakeelsest sõnast *positio*, mis tähendab «asend».)

Positsiooniline arvusüsteem on, nagu me nägime, leiutatud juba ammu. Ka meie tarvitame praegu positsioonilist numeratsiooni, kuid vasakpoolne märk (number) tähistab meil arvu, mis on 10 korda suurem samasugusest parempoolsest kõrvuti seisvast arvust, mitte aga 60 korda, nagu oli babüloomlastel. See pärast öeldakse, et meil on numeratsiooni kümnendsüsteem, kuna Babüloomias oli numeratsiooni kuuekümnendsüsteem.


Positsiooniline süsteem võimaldas babüloomlastel väga suurte arvude üleskirjutamist.


Kauemat aega puudus babüloomlastel meie nullile vastav märk. Arvu 65, mis koosneb ühest teise järgu ühikust (60) ja


viiest lihtühikust, kirjutasi nad nii:  , kuid arvus 3605,

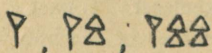
mis sisaldab ühe kolmanda järgu ühiku ($3600 = 60 \times 60$), (teise järgu ühikuid ei ole), ja viis lihtühikut, jäeti tühi koht keskele ja see arv kirjutati järgmiselt:



Käsitsi kirjutades, eriti savile, nagu seda tegid babüloomlased, ei tulnud vahed alati ühesuurused. See tekitas segadust arvutustes ja dokumentides. Teatavast ajast alates ilmub Babüloomia tellistahvlikestele uus, vahekohamärk  . See vastab meie nullile ja näitab, et arvus puuduvad selle järgu ühikud, mille kohal see märk seisab. Nii näiteks kirjutati arvud 3605 ja 65 järgmiselt:


3605 65

Kuid on huvitav, et võttes tarvitusele vahekohamärgi arvude vahel, ei jõudnud babüloomlased siiski mõtlemisega nii kaugele, et seda ka arvu lõpus tarvitada. Arvusi 1, 60 ja 3600 kirjutasi babüloomlased ühtemoodi:  Kirjutada aga



nagu meie seda oleksime teinud, nad ei taibanud. Seepärast püsis mõnesugune vassing babüloonlaste dokumentatsioonis ka pärast vahekohamärgi tarvituselevõtmist.

Babüloomlased oskasid teostada tehteid mitte ainult täisarvudega, vaid ka lihtsamate murdudega. Nad koostasid rea matemaatilisi tabeleid, õpikuid ja ülesannete kogusid — kõike seda, muidugi mõista, tellistahvlikestel.

Kuigi Babüloomia matemaatikud oskasid kirjutada väga suuri arve, ei võinud nad siiski kujutleda, et arvused on lõpmatult palju. Teisest küljest, arvude kirjutamise vorm ise ei olnud babüloomlastel täiuslik; oli vaja, positsioonilist süsteemi säilitades, asendada põhiarv «kuuskümmend» väiksema arvuga ja õppida märki «null» õigesti tarvitama. Seda tegid hindud.

Muistsete kreeklaste juures jõudis matemaatika kõrgele tasemele. Kreeklased oskasid teostada tehteid täis- ja murdarvudega. Üks suuremaid kreeka matemaatikuid Archimedes oli sellise arvusteemi loojaks, mis, esiteks, näitas selgesti, et arvused on lõpmatult palju ja, teiseks, võimaldas nimetada igasugust arvu, kui suur ta ka oleks.

Kreeka kultuur läks edasi muistsetele roomlastele, kes võtsid üle ja säilitasid selle. Kuid viisteist sajandit tagasi lakkas Rooma impeerium olemast. Euroopas toimusid alatised sõjad. Väga raske oli ristiusu-kiriku ike, kes selleks ajaks saavutas suure mõju. See kõik viis kultuuri languseni; paljudel käsitöölaladel lakkas tegutsemine ja teaduse saavutused unustati. Tolle aja Euroopa rahuldus täiesti primitiivse arvutamiseiga kümnete tuhandete piirides ja rooma numbritega.

Kauges Indias aga puhkesid teadus ja kunst sellal õitsengule. Eriti lugupeetud oli matemaatika, sest selle abil oli võimalik arvutada aega, kindlaks määrata aastaaegade algust, ennustada päikese- ja kuuvarjutusi. Suurte arvude kirjutamiseks leiutati Indias arvusteem, milles ühendati harilik kümnekaupa loendamine babüloomlaste positsioonilise kirjutamisviisiga, ja hakati arukalt tarvitama märki «null». Seda arvude kirjutamisprintsipi kasutame tänapäevalgi.

Kuidas siis sattus see süsteem Indiast Euroopasse?

Araabia poolsaarel, mis asub poolel teel Euroopa ja India vahel, toimusid VII sajandil meie ajaarvamise järgi suured sündmused. Araablaste suguharud, kes seda poolsaart asustasid, vallutasid ja organiseerisid ühtseks suurriigiks rea väikesi naaberriike. Araabia riik laienes ja, omandades lääne- ja idanaabrite kultuuri, jõudis kõrgele õitsengule. Läänest, egiptlastelt, võtsid araablased üle selle, mis oli säilinud vanade kreeklaste

kultuurist, idast, hindudelt, laenasid nad aga ehitus- ja arvutamiskunsti.

Võttes hindudelt arvamiskunsti laenasid araablased neilt ka märgid arvude kirjutamiseks — numbrid (ka venekeelne numbrit tähendav sõna «tsifra» on muide araabia päritoluga). Numbrite märgid on araabia kirjas järgmised:

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۰
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

Neid märke kasutati täpselt samuti, nagu meie praegu kasutame oma numbreid. Näiteks mõnede arvude araabiapärane kirjutamisviis:

15 — ۱۵ 804 — ۸۰۴

Numbrite järjekord oli araablattel samasugune nagu meilgi.

Need numbrid on praegugi säilinud araabia kultuuriga rahvastel: türklattel, iraanlattel, afgaanlattel. Joonisel 4 on kujutatud nüüdisaegsed araabia numbritega kirjamargid. Kuni vene eeskujule rajatud tähestiku tarvituselevõtmiseni kasutasid neid



Joon. 4. Araabia numbritega kirjamargid.

numbreid ka mõned Nõukogude Liidu rahvad (tatarlased, aserbaidžanlased, turkmeenid jt.). Äärmine parempoolne mark joonisel 4 on Aserbaidžani NSV kirjamark 1922. aastast.

Märgime, et meie praegusi numbreid nimetatakse harilikult «a r a a b i a» numbriteks, kuigi need erinevad viimastest kaunis tugevasti (peale ühe ja üheksa, mis on araablaster ja meil ühesugused). Oigem oleks siiski ütelda mitte «araabia numbrid», vaid «araabia arvusüsteem», ja koguni mitte «araabia», vaid «india», sest et hindud arendasid selle välja, kuna araablased ainult tõid selle Euroopasse.

4. MEIE NUMERATSIOON, SELLE VÄÄRTUSI JA PUUDUSI

Mida kujutab siis endast meie arvusüsteem, mille rajasid hindud ja mille tõid Euroopasse araablased ning mis on võidukalt levinud üle kogu maailma, tõrjudes välja kõik muud arvude kirjutamise viisid? Mille poolest just on ta hea? Kas on tal puudusi? Kui on, siis kuidas neid parandada? Need on küsimused, mille üle tasub järele mõtelda.

Meie numeratsiooni tunnevad kõik. Meie kasutame arvude kirjutamiseks kümmet märki, mida nimetatakse n u m b r i t e k s. Üheksa neist (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) tähistavad arvsid ühest kuni üheksani. Kümnes märk — null (0) — ei tähista mingisugust arvu. See on lihtsalt lüngamärk või, väljendudes trüki- ladujate keeles, täitematerjal, millega arvude kirjutamise juures täidetakse tühjad kohad.

Kümme lihtühikut moodustavad ühe kümne ehk ühe teise järgu ühiku. Kümme teise järgu ühikut (kümnet) moodustavad kolmanda järgu ühiku (saja). Arv, mis koosneb kahest sajast, kolmest kümnest ja viiest lihtühikust, kirjutatakse järgmiselt: 235. Iga märgi tähendust ei määra mitte ainult märgi kuju, vaid ka tema asukoht. Äärmisel kohal paremalt seisavad lihtühikud, nende kõrval vasakul — kümned, veel enam vasakul — sajad. Kui mingisuguse järgu ühikud puuduvad, siis kirjutatakse vastavale kohale null; näiteks arv «sada kakskümmend», mis koosneb ühest sajast ja kahest kümnest ega sisalda üldsegi lihtühikuid, kirjutatakse järgmiselt: 120.

Täpselt samuti kirjutatakse neljanda (tuhanded), viienda ja teiste kõrgemate järkude ühikud. Igast kolmest järgust moodustub k l a s s. Lihtühikud, kümned ja sajad moodustavad esi-

me e klassi. Tuhanded, kümned tuhanded ja sajad tuhanded — teise klassi jne. Kirjas ja trükis eraldatakse klassid üksteisest sageli väikeste vahedega; näiteks arv «kakkümmend viis tuhat seitsesada viiskümmend» kirjutatakse nii: 25 750. Niisugune kirjutusviis on väga ülevaatlik. Koguni võrdlemisi suuri arve kirjutatakse lühidalt, tehted teostuvad nendega väga lihtsalt.

Kui arvu «kümme» asemel võtta arvusüsteemi aluseks suurem arv (nagu näiteks oli Babülooonias, kus, nagu me juba teame, arvusüsteemi aluseks oli arv 60), siis muutub aritmeetiliste tehete teostamine väga raskeks. Kui aga, vastupidi, arvusüsteemi aluseks võtta väga väike arv (näiteks 2 või 3), siis teostuvad aritmeetilised tehted väga lihtsalt, lihtsamini kui meil, kuid märkimisviis ise muutub kohmakaks. Võib-olla oleks arvude kirjutamine ja tehete teostamine natuke lihtsam, kui mitte arvutada kümnetega, vaid kaheksate või tosinatega, s. t. võtta arvusüsteemi aluseks arv «kaheksa» või «kaksteist». Kuid ülemineku uuele alusele oleks seotud säärase raskustega, säärase harjumuste murdmise ja säärase kuludega (tuleks ju siis uuesti trükida kõik teaduslikud raamatud, ümber teha kõik arvutusaparaadid ja -masinad jne.), et vaevalt küll oleks niisugune asendamine otstarbekohane.

Mõned meie süsteemi ebasobivused ilmnevad väga suurte arvude kirjutamisel, milledega tuleb tegelda nüüdisaegsel teadusel. Säärase arvude kirjutamine võtab väga palju ruumi ega ole küllalt ülevaatlik. Toome mõned «arvhiiglaste» näited:

Maakera pindala võrdub 509 000 000 ruutkilomeetriga; Maa kaugus Päikesest on 149 500 000 kilomeetrit; maakera mass on 6 000 000 000 000 000 000 000 tonni.

Aga kui me tahaksime üles kirjutada Maa kauguse kaugetest tähtedest (kilomeetrites) või ühes liitris õhus leiduvate molekulide arvu, siis saaksime üsna pikad arvud. Kuid neid suurte arvude kirjutamisel tekkivaid raskusi saab kõrvaldada; veidi allpool näeme, kuidas seda tehakse. Niisiis võib meie arvude kirjutamisprintsipi pidada täiesti sobivaks.

Halvem on asi arvude nimetustega. Kui meie ajal peaaegu kõik rahvad kirjutavad arvusid ühtemoodi, siis nimetab iga rahvas neid (ühest kuni miljonini) omamoodi. Arvude nimetused kuni saja tuhandeni on väga vanad ja nende päritolu on raske kindlaks teha. Sõna «miljon», mis tähendab tuhat tuhat, on võrdlemisi hilise päritoluga. Selle sõna mõtles välja maailmareisija Marco Polo, kes käis XIII sajandil Hiinas. Itaaliakeelne sõna *mille* tähendab «tuhat», kuna sõnalõpp *-one* on

suurendust tähistav lõpp, mis vastab venekeelsele sõnalõpule «-iššē» või «-iššā» (näiteks sõnades «domiššē»*, «rutšiššā»** jm.). Sõna *millione* vastab niisiis olematule vene sõnale «tõsjatšiššā». Marco Polo leiutas selle sõna «Taevapojamaa» (nii nimetati vanasti Hiinat) ebaharilike rikkuste kirjeldamiseks.

Miljonid, kümned miljonid ja sajad miljonid moodustavad arvude kolmanda klassi. Tuhat miljonit moodustab ühe miljardi. Miljardit nimetatakse ka «biljoniks» (ladinakeelsest sõnast *bis*, mis tähendab «kaks korda»); need mõlemad sõnad tähendavad ühte ning sama — arvu 1 000 000 000. Biljonid, kümned ja sajad biljonid moodustavad arvude neljanda klassi.

Toome näiteks järgmise suure arvu, mis sisaldab neli klassi:

305 674 011 316;

seada arvu loetakse järgmiselt: kolmsada viis miljardit (ehk biljonit) kuussada seitsekümmend neli miljonit üheksateist tuhat kolmsada kuusteist. (Tuleb mainida, et mõnel teisel maal on tarvitusel teistsugune arvuklasside nimetamise kord: seal esineb iga uus klassi nimetus mitte kolme, vaid kuue järgu järel. Selle süsteemi kohaselt tuleb kuue esimese järgu järel miljonite klass, sisaldades järgmisi järke: miljonid, kümned miljonid, sajad miljonid, tuhanded miljonid, kümned tuhanded miljonid, sajad tuhanded miljonid. Sellele järgneb samuti kuuest järgust koosnev biljonite klass jne. See süsteem on vähem sobiv ega ole meil tarvitusel.)

Veel suuremate arvude jaoks kasutatakse nimetuste süsteemi, mis on tarvitusele võetud peaaegu kogu maailmas. Kõrgemate üksuste nimetusteks kasutatakse ladinakeelseid arvsõnu.

Viienda klassi ühikut nimetatakse triljoniks:

triljon — 1 000 000 000 000.

Edasi järgneb kuues klass. Selle klassi ühikut nimetatakse kvadriljoniks:

kvadriljon — 1 000 000 000 000 000.

* Domiššē (домище) — kõnekeeles majamürakas. Tõlk.

** Rutšiššā (ручища) — kõnekeeles suur käsi. Tõlk.

Kvadriljonile järgnevad:

kvintiljon	— 1 000 000 000 000 000 000;
seksiljon	— 1 000 000 000 000 000 000 000;
septiljon	— 1 000 000 000 000 000 000 000 000;
oktiljon	— 1 000 000 000 000 000 000 000 000 000;
noniljon	— 1 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000;
detsiljon	— 1 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000;
undetsiljon	— 1 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000;

ja nii edasi.

Niisiis on maakera massi väljendavaks arvuks kuus seksiljonit.

Vahemaa Päikesest lähima täheni on 40 300 000 000 000 kilomeetrit. Seda loetakse nii: nelikümmend triljonit kolmsada biljonit kilomeetrit.

Vahemaa meie ja udukogude vahel, mis vaevalt on nähtavad nüüdisaegsete ülivõimsate teleskoopidega, võrdub umbes järgmise kilomeetrite arvuga: 2 000 000 000 000 000 000 000; seda arvu loetakse nii: kaks seksiljonit kilomeetrit.

See nimetuste süsteem ei ole väga sobiv. Harva kes teab kõiki ladinakeelseid arvsõnu. Pealegi puudusid ladina keeles nimetused väga suurte arvude jaoks; tähendab, need nimetused tuleb nüüd leiutada. Tegelikult aga ei ole selleks tarvidust. Elu ise on teinud kõik vajalikud parandused.

5. KUIDAS LÜHIDALT KIRJUTATAKSE JA NIMETATAKSE «ASTRONOOMILISI» ARVE

Lugejad on arvatavasti pööranud tähelepanu selles raamatukeses esinenud väga suurte («astronoomiliste») arvude huvitavale iseärasusele; need kõik on «ümmargused» arvud; need lõpevad paljude nullidega. See ei ole juhuslik kokkusattumine ja need ei ole erilisel valitud näited. Igasugune väga suur arv, mis on saadud arvutamise või mõõtmise tulemusena, osutub paratamatult «ümmarguseks». Selgitame, miks see on nii.

Kui me ütleme, «minu käel on viis sõrme», siis tähendab see, et neid on täpselt viis, mitte aga kuus ega kolm. Täpselt samu-

ti, kui keegi ütleb, et tema sünnikülas oli nelikümmend seitse talundit, siis tähendab see, et talundeid oli täpselt nelikümmend seitse. Kui me aga ütleme näiteks, et Štšerbakovi linnas oli rahvaloenduse ajal 1939. aastal 55 500 elanikku, siis on siin sõnadel «viiskümmend viis tuhat viissada» natuke teistsugune mõte. Esiteks, rahvaloendamispäeva jooksul sõitsid mõned inimesed Štšerbakovi, teised lahkusid sealt; teiseks, kui hoolikalt ka rahvaloendust toimetati, mõned inimesed võidi üles märkida kaks korda, teised aga võisid hoopis vahele jääda. Linna elanike loendamise juures ei ole eksitusel 20—30 piirides olulist tähtsust.

Seepärast ei tähenda nullid Štšerbakovi linna elanike arvu 55 500 lõpus mitte kümnete ja lihtühikute puudumist, vaid seda, et me ei tea nende arvu.

Täpselt samuti, kui me ütleme, et maakera kõigi elanike arv on 2 100 000 000 (kaks miljardit sada miljonit), siis ei ole see arv täpne. Mitmesugustes riikides teostus rahvaloendus eri ajal ja selle kooskõlastamine on väga raske; on sääraseid maid, mille elanikke pole senini nagu kord ja kohus loendatud. On võimalik, et maakera elanike arv ei ole mitte 2 100 000 000, vaid 2 090 000 000 või 2 137 000 000. Arvus, mis väljendab maakera elanike hulka, me teame täpselt ainult miljardeid ja sadu miljoneid. Kui palju on selles arvus kümneid miljoneid ja üksikuid miljoneid, veel enam, kui palju on väiksemate järkude ühikuid, seda me ei tea. Nullid ei näita mitte nende järkude puudumist, vaid seda, et meile ei ole need teada.

Samuti on lugu taevatähtede ja isegi puude loendamisel met-sas. Igasugune esemete väga suure hulga loendamine osutub alati ligikaudseks. Arvu «ümarus» on siin ainult näiline.

Mis on öeldud loendamise kohta, sedasama võib korrata ka mõõtmise ja kaalumise kohta. Kui meie kaalume kaubakaaluga mitmekilogrammelist raskust, siis on mõnegrammiline või koguni mõnekümnegrammiline viga peaaegu vältimatu. Mõõtes toa pikkust arvestame me meetreid, mõnikord ka sentimeetreid, kuid ei pööra tähelepanu millimeetritele (kui me ka tahaksime, ei suudaks me neid arvestada). Igasuguse mõõduriista tundlikkus on piiratud ja mõõtmise tagajärjel saadakse alati mõõdetava suuruse ligikaudne väärtus.

Arvus 55 500 me arvestasime, et kümned tuhanded, tuhanded ja sajad on meile täpselt teada. Neid numbreid, vastandina nullidele lõpul, nimetatakse ligikaudse arvu usaldatavateks numbriteks. Maakera elanike arvus (2 100 000 000) on ainult kaks usaldatavat numbrit.

Ei tule arvata, nagu ei võiks null olla usaldatavaks numbriks. Väga suure arvu näitena me tõime Maa massi, mis võrdub 6 000 000 000 000 000 000 000 tonniga. Astronoomid vastutavad selles arvus kahe esimese numbriga, s. t. kuue sekstiljoni õigsuse ja sadade kvintiljonite puudumise eest. Tähendab, usaldatavateks numbriteks on siin kuus ja esimene null. Ülejäänud nullid näitavad, et meie ei tea vastavaid järkusid (sellest, kuidas märkimisviisis endas eraldada «usaldatavaid» nulle «mitteusaldatavaist» tuleb juttu veidi hiljem).

Enamikus tehnilistest mõõtmistest õnnestub määrata 2 või 3 usaldatavat numbrit. Vastutavamatel juhtudel läheb korda määrata 4 või 5 usaldatavat numbrit. Kõige täpsemad füüsikalised mõõtmised annavad 6 või 7, väga harva 8 usaldatavat numbrit.

Missuguse järelduse võib sellest teha? Niisuguse, et kõigis arvudes, mis teadus ja elu meile annavad, on esimesed kaks kuni viis (harva rohkem) usaldatavad numbrid, ülejäänud numbrid lõpus on nullid.

Kuid iga nullidega lõppevat arvu võib kirjutada korrutisena, mille üheks teguriks on väike arv ja teiseks teguriks — «üks nullidega». Näiteks arvu 509 000 000 (maakera pindala ruutkilomeetrites) võib kirjutada nii:

$$509 \times 1\,000\,000$$

Maa massi (tonnides) väljendavat arvu võib kirjutada järgmiselt: $60 \times 100\,000\,000\,000\,000\,000\,000$; siin on kuue juurde jäetud null, mis on, nagu me juba ütlesime, usaldatav number, kuna korrutaja juurde on viidud «kahtlased» nullid.

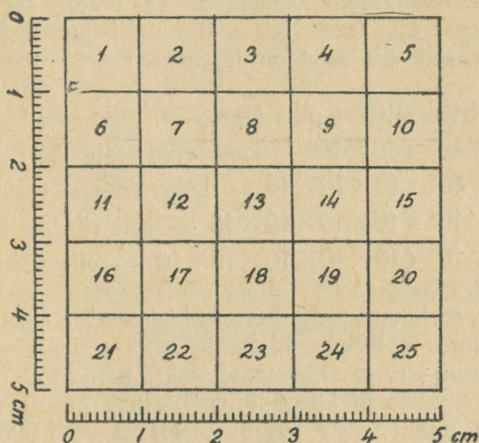
Säärase kirjutamise juures on korrutataval harilikult 2 või 3, harvemini 4 või 5 ja ainult väga harva 6, 7 või 8 numbrit. Säärast arvu on kerge lühidalt kirjutada kui ka nimetada. Tähendab, jääb ainult leiutada selline viis, mis võimaldaks lühidalt kirjutada ja nimetada korrutajat moodustavaid numbreid, s. t. neid numbreid, mis märgitakse «üks nullidega» kujul.

Sääraste arvude lühendatud kirjutamiseks kasutatakse tähistusviisi «a s t e n d a j a» abil. Mis tähistusviis see on?

Enne selle juurde asumist vaatleme mõningaid korrutusi, kus tegurid on ühesugused.

Kahe ühesuguse teguri korrutist — teiste sõnadega, iseen-daga korrutatud arvu korrutist — nimetatakse selle arvu t e i s e k s a s t m e k s ehk r u u d u k s. Näiteks, 64 on 8 korrutis 8-ga; seepärast nimetatakse arvu 64 kaheksa ruuduks (teiseks

astmeks); 100 on korrutis 10×10 ; seepärast on arv sada kümne ruut. Nimetus «ruut» on kahe võrdse teguri korrutise nimetamiseks tarvitusele võetud sellepärast, et ruudu pindala saame ruudu külje korrutamisel selle külje endaga (joon. 5).



Joon. 5. Ruut, mille külje koosneb 5 ühikust, sisaldab $5 \times 5 = 25$ ruutu.

Kolme võrdse teguri korrutist nimetatakse antud arvu kolmandaks astmeks ehk kuubiks. Näiteks 1000 on kümne kuup, sest et $10 \times 10 \times 10 = 1000$.

Korrutise 10×10 asemel on hakatud kirjutama 10^2 ; väike kaks, mis on kirjutatud kümnest kõrgemale paremale poole, näitab, et kümnet korratakse kui tegurit kaks korda. Täpselt samuti kirjutatakse korrutis $10 \times 10 \times 10$ lühemalt nii: 10^3 ; väike kolm, mis on kirjutatud kümnest kõrgemal paremale poole, näitab, et kümme kordub tegurina kolm korda.

Igasugust arvu, näiteks 10, võib korrata tegurina mitte ainult kaks või kolm korda, vaid kui palju tahes korda. Arv 10 000, näiteks, võrdub $10 \times 10 \times 10 \times 10$. Siin on neli võrdset tegurit. Seda korrutist $10 \times 10 \times 10 \times 10$ nimetatakse kümne neljandaks astmeks ja kirjutatakse lühendatult nii: 10^4 .

Samal viisil toimitakse ka edasi. Mitme võrdse teguri korrutist, s. t. mingi arvu iseendaga mitu korda korrutamise tulemust, nimetatakse selle arvu astmeks; arvu ennast nimeta-

takse astmealuseks ja seda arvu, mis näitab, mitu korda alust korratakse tegurina, — astendajaks. Meie näites, $10^4 = 10\,000$, arv 10 on astmealus, arv 4 on astendaja, kuna arv 10 000 on aste. Astendaja kirjutatakse alati väikese kirjaga alusest paremale poole ja kõrgemale.

Kümne mitmesuguseid astmeid on väga kerge arvutada, sest iga korrutamist kümnega võib saada nulli juurdekirjutamisega. Kümne esimesed viis astet on järgmised:

$$10 = 10^1 \text{ (10 — üks tegur)}$$

$$100 = 10^2 \text{ (10} \times \text{10 — kaks võrdset tegurit)}$$

$$1\,000 = 10^3 \text{ (10} \times \text{10} \times \text{10 — kolm võrdset tegurit)}$$

$$10\,000 = 10^4 \text{ (10} \times \text{10} \times \text{10} \times \text{10 — neli võrdset tegurit)}$$

$$100\,000 = 10^5 \text{ (10} \times \text{10} \times \text{10} \times \text{10} \times \text{10 — viis võrdset tegurit)}$$

On selge, et kümne mistahes aste kirjutatakse «üks nullidega» kujul, kusjuures nullide arv võrdub alati astendajaga. Vastupidi, kui antud arv on kirjutatud «üks nullidega» kujul, siis võib seda otsekohe kirjutada kümne astme kujul: selleks tarvitseb vaid nullid «ära lugeda». Näiteks, $1\,000\,000 = 10^6$ (6 nulli); $10\,000\,000\,000 = 10^{10}$ (10 nulli).

Nüüd on kerge lühidalt kirjutada iga «astronoomilist» arvu, eraldades seejuures tema usaldatavad numbrid.

Maakera pindala on 509×10^9 ruutkilomeetrit. Kaugus Maast Päikeseni on 1495×10^5 kilomeetrit. Kaugus lähima täheni on 403×10^{11} kilomeetrit. Maakera mass on 60×10^{20} tonni. (Kirjutatakse 60×10^{20} , aga mitte 6×10^{21} , sest et esimese nulli eest kuue järel astronoomid vastutavad: see null on usaldatav number).

Sagedamini tarvitatakse korrutamismärgi — põikristi (\times) asemel punkti (\cdot); siis kirjutatakse toodud arvud nii: $509 \cdot 10^9$, $1495 \cdot 10^5$, $403 \cdot 10^{11}$, $60 \cdot 10^{20}$.

Neid arve loetakse nii: $509 \cdot 10^9$ — «viissada üheksa korda kümme kuuendas» (mõeldakse — kuuendas astmes);

$1495 \cdot 10^5$ — «tuhat nelisada üheksakümmend viis korda kümme viiendas»; ja nii edasi.

Astendaja tarvituselevõtmine võimaldab, nagu me nägime, lühidalt nimetada ja kirjutada iga arvu, olgu see kui suur tahes.

Kirjutame näiteks astendaja abil, milliste arvudeni oskasid lugeda meie esivanemad.

Koopaelanikud lugesid kuni 2.

Inimesed kiviaja lõpul — kuni 10^2 — 10^3 .

Vanad egiptlased, vanad kreeklased, slaavlased enne kirjaoskuse leiutamist — kuni 10^4 .

Babüloonlased — kuni $1\,959\,552 \cdot 10^8$ (see on kõige suurem arv, mille uurijad on leidnud Babüloonia mälestusmärkidelt).

«Velikoje slovenskoje tšislo», millest oli juttu leheküljel 14, annab palju suuremad arvud: 1 leegion = 10^{12} , 1 leodr = 10^{24} , 1 voron = 10^{48} , kuna 1 koloda = 10^{49} .

Kolme tuhande aasta vanustes india mälestusmärkides mainitakse arvusid kuni 10^5 . Kaks tuhat aastat tagasi tundsid hindud arvusid kuni 10^{17} .

6. KUIDAS KIRJUTATAKSE JA NIMETATAKSE «KÄÄBUSARVE»

Teadus, mis tutvustab meid hiiglasuurte, astronoomiliste arvudega, pakub meile samuti ka «k ä ä b u s a r v u d e» näiteid. Neid arvusid, mis väljendavad kõige väiksemaid, tibatillukesi koguseid, kirjutatakse väga suure nimetajaga murdudena. Kuid lugejad ei ole neil väga suured. Need väljenduvad harilikult kahe-kolme, harva nelja-viie numbriga. Ainult kõige erandlikumail juhtudel esineb lugejas kuus, seitse või kaheksa numbrit. Suuremat täpsust ei ole nüüdisaegne teadus veel saavutanud. Vaatleme mõningaid näiteid.

Meie veri koosneb miljarditest kõige pisematest osakestest; kõige tähtsamaid nendest, mis annavad verele punase värvuse, nimetatakse punasteks verelibledeks. Opetlastel õnnestus vaadelda neid liblesid mikroskoobis ja kindlaks määrata nende umbkaudsed mõõted. Selgus, et ühe punase verelible läbimõõt on ligikaudu $\frac{7}{10\,000}$ ehk 0,0007 sentimeetrit.

Veel väiksemad on molekulid, aatomid ja elektronid. Nii kaalub kõige kergem aatomitest — vesiniku aatom — kõigest

165

100 000 000 000 000 000 000 000 000

= 0,000 000 000 000 000 000 000 001 65 grammi.

Sõnadega tuleb seda arvu lugeda nii: «sada kuuskümmend viis sajaseptiljondikku».

Nendes murdudes ei ole lugeja suur, kuid arvu kirjutamine on kohmakas, sest et nimetaja on väga suur.

Selleks, et sääraseid murde lühemalt kirjutada ja lihtsamalt nimetada, kasutatakse — täiesti samuti nagu väga suurte arvude jaoks — astendajat. Meie poolt toodud näiteid võib kirjutada nii:

$$\frac{7}{10\ 000} = \frac{7}{10^4}, \frac{165}{100\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000} = \frac{165}{10^{26}}.$$

Kuid sääraseid murde võib kirjutada veel lihtsamalt. Lepiti kokku: selle asemel, et kirjutada kümne aste nimetajas, kirjutada see tegurina, kuid astendaja ette panna märk «miinus».

Siis kirjutatakse arv $\frac{7}{10^4}$ nii: $7 \cdot 10^{-4}$ ja loetakse nii: «seitse korrutada kümnega miinus neljandas».

Selle kirjutamisviisi juures tähistab 10^{-1} — $\frac{1}{10}$ (üht kümnendikku); 10^{-2} tähistab $\frac{1}{10^2}$ s. t. üht sajandikku; 10^{-3} tähistab üht tuhandikku ($\frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3}$).

Igasugust kümnendmurdu võib kirjutada niisuguses lühendatud vormis. Kirjutame, näiteks, lühemalt murru 0,000 183. Kõigepealt kirjutame selle murru lihtmurruna, seejärel kirjutame nimetaja lühendatult kümne astmena ja, lõpuks, kirjutame selle astme tegurina, pannes astendaja ette «miinuse»:

$$0,000\ 183 = \frac{183}{1\ 000\ 000} = \frac{183}{10^6} = 183 \cdot 10^{-6}.$$

Vaatleme vastupidist näidet: kirjutada harilikus vormis, lihtmurruna, arv $27 \cdot 10^{-9}$. Kirjutame:

$$27 \cdot 10^{-9} = \frac{27}{10^9} = \frac{27}{1\ 000\ 000\ 000};$$

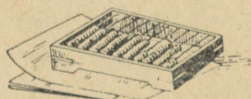
niisuguses vormis on seda kerge nimetada: see on kakskümmend seitse biljondikku. Kuid tegelikult nimetatakse seda lihtsalt: «kakskümmend seitse korda kümme miinus üheksandas».

Niiviisi kirjutatakse ka murde sama lihtsalt nagu täisarvegi.

LÖPPSÕNA

Pikkamisi ja järk-järgult vallutas inimkond üha suuremaid arve. Täienes arvude kirjutamisviis, täienesid tehete reeglid. Peale täisarvude leiutati teised arvude liigid, selleks et väljendada suurusi, millega inimesed elus kokku põrkasid. Nii mõeldi välja murdarvud. Keskkoolide õpilased tutvuvad arvude uute liikidega — negatiivsete ja niinimetatud irratsionaalsete arvudega. Nüüdisaegne teadus puutub mõnikord kokku seevõrra keerulist iseloomu suurustega, et nende tundmaõppimiseks tuleb tarvitusele võtta arvude uusi liike. Nii ilmusid «kompleksarvud», «kvaternioonid», «vektorid», «tensorid». Sellest muidugi ei ole võimalik jututada väikeses raamatukeses.

Arvuteadus areneb samuti, nagu igasugune muu teaduski. See kasvab, täiustub arvutamiskunst, võetakse tarvitusele aina uusi ja uusi arvude liike.



SISUKORD

Sissejuhatus	3
1. Arvutamine kauges minevikus	5
2. Kuidas hakati kasutama tähti arvude kirjutamiseks	9
3. Kus ja kuidas tekkis praegune (positsiooniline) arvusüsteem	14
4. Meie numeratsioon, selle väärtusi ja puudusi	21
5. Kuidas lühidalt kirjutatakse ja nimetatakse „astronoomilisi“ arve	24
6. Kuidas kirjutatakse ja nimetatakse „kääbusarve“	29
Lõppsõna	31

Toimetaja B. Betlem

Kaane kujundaja V. Toots

Tehniline toimetaja K. Einberg

Korrektorid V. Tui ja V. Põlde

Ladumisele antud 18. III 1952. Trükkimisele antud 24. V 1952. Paber 54×84, 1/16. Trükiarv 8000. Trükipoognaid 2. Formaadile 60×92 kohaldatud trükipoognaid 1,64. Arvutuspoognaid 1,57. MB-11739. Trükikoda „Kommunist“, Tallinn, Pikk tn. 2. Tellimise nr. 1650.

На эстонском языке

Hind —.50 kop.

Trükiviga

Lk.	Rida	On trükitud	Peab olema
23	17. ülalt	üheksateist	üksteist

T.M.



50 kop.

A

16558

1919A

TÜ RAAMATUKOGU



1 0300 00347352 9