Theorie der Parallellinien,

zuerst

geometrisch begründet

von

P. C. M. Sokolowski,

Oberlehrer der mathematischen Wissenschaften und der Physik am Gymnasium zu Dorpat, und Inhaber des Ehrenzeichens für untadeligen Dienst.

Mit einer Kupfertafel.

Dorpat, 1830.

Gedruckt, bei J. G. Schünmann.

Ist unter den gesetzlichen Bedingungen zu drucken erlaubt.
Dorpat, den 31. Dec. 1829.

Dr. Friedr. Erdmann,
Censor.

Seiner

Excellenz

dem Herren

Dr. Johann Philipp Gust. Ewers,

wirklichem Russ. Kaiserl. Staatsrath, Rector magnif. und Vice-Präsident der Censur-Commission der Kaiserl. Universität zu Dorpat, Ritter der Orden des heil. Wladimir dritter Classe und der heiligen Anna zweiter Classe, ordentl. Professor des positiven Staats- und Völker-Rechts und der Politik, Ehrenmitglied der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften und der Universität zu St. Petersburg, wie auch der Kaiserl. Universität zu Moskau, Mitglied der Gesellschaft für die Geschichte und Alterthumskunde Rufsland's zu Moskau, wie auch der Curländischen und vieler ausländischen gelehrten Gesellschaften,

in

Ehrerbietung und Hochachtung

gewidmet

von dem Verfasser.

Vorwort.

Bei einem systematischen Unterrichte in der Geometrie begegnet der Lehrer sehr bald den Parallellinien, er bedarf ihrer zur Begründung des Folgenden, und sieht sich doch noch immer vergeblich nach einer befriedigenden Theorie derselben um. Von dieser Behauptung werden sich diejenigen, zu deren Beruf das Studium der Geschichte der Mathematik weniger gehört, leicht durch den ersten Theil dieser Abhandlung überzeugen.

Das Geständnifs von den Mängeln einer Lehre, welches ich eben so oft als diese Lehre selbst von Amts wegen wiederholen mufste, wurde mir lästig. Mit Aufopferung der wenigen Augenblicke, die mein Beruf mir übrig liefs, entschlofs ich mich die Lehre von den Parallellinien auf eine mir eigene Weise zu untersuchen. Ich wandte auf sie das Hauptprincip der ganzen Geometrie an, die Congruenz, und bin überzeugt, einen geometrisch begründeten Begriff von Parallellinien aufgestellt zu haben, aus welchem sich die übrigen Wahrheiten in Beziehung auf diese Linien einfach und elegant ableiten lassen. — Möge nun auch dieses Licht nach dem Willen des Herrn leuchten vor den Leuten.

Eines besonderen Umstandes wegen bemerke ich hier nur noch, daſs sich die erste Idee zu meiner Theorie der Parallellinien in einem Werke befindet, welches ich am 20sten Juli 1819 Sr. Durchlaucht dem Herren Minister der Aufklärung Fürst Lieven, dem damaligen Curator der Kaiserlichen Universität zu Dorpat, darzubringen wagte. Es enthält unter dem Titel, Orthogrammetrie, ein ausführliches System über die gerade Linie und deren Verbindungen, auf eine mir eigenthümliche Weise behandelt, und wurde mir durch den Herrn Staatsrath Professor Neumann aus St. Petersburg zurückgesandt, begleitet von einem gnädigen Schreiben Sr. Durchlaucht vom 23sten August 1819. — Diese Orthogrammetrie diente mir seitdem bei meinem Unterrichte in der Mathematik, den bereits mehre von meinen bisherigen Schülern mit Auszeichnung zum Dienst des Staates anwenden.

Dorpat, den 1sten Januar 1830.

Oberlehrer P. Sokolowski.

I.

Bisherige Theorien der Parallellinien.

Die Mängel der Euklidischen Theorie der Parallellinien sind allgemein bekannt, ihre Wahrzeichen sind die 35ste Erklärung des ersten Buches und der 11te Grundsatz seiner Elemente. Die 28 Beweisarten und die 17 Systeme, welche die Herren Professoren Klügel und Hoffmann über die Parallellinien gesammelt haben, sind schon längst nicht genügend befunden worden, obgleich dieselben von ausgezeichneten Mathematikern, als von Clavius, Proclus, Hauff, Bossut, Kästner, Simson, Lacroix, Lorenz, Segner, von dem Perser Nassareddin, von Kircher, Schmidt, Legendre, Schwab, Tacquet, Hindenburg und von Hoffmann, aufgestellt worden sind. Der Beweis, welchen der Bürger Bertrand für den 11ten Grundsatz Euklid's anführt, ist dem des Hofpredigers Schulz zu Königsberg sehr ähnlich; beide verlieren sich ins Unendliche, der Letzte mehr auf dem analytischen, der Erste auf dem synthetischen Wege. Eben dadurch verlieren sie aber ihren Werth, da der Raum zwischen den Winkelseiten und Parallellinien, welcher in diesen Beweisen verglichen werden soll, durch keine Construction bestimmt werden kann. Die in der Vorrede zur mathematischen Bibliothek des Herren Professor Müller, Nürnberg 1820, enthaltene Theorie der Parallelen, beruht auf Exhaustionen, die nur eine Annäherung zu dem, was behauptet werden soll, zur Folge haben. In der vollständigen Theorie der Parallellinien von dem Herren Privatdocent Hegenberg, Berlin 1825, findet man eine Wiederholung dessen, was darüber schon früher in der 11ten Ausgabe der Elemente von Legendre vorkommt; diese Theorie befriedigt aber nicht. Denn der 83ste Paragraph derselben ist den Beweis schuldig geblieben, dafs die Senkrechten auf einer Winkelseite, genugsam verlängert, auch die andere Seite dieses Winkels nach demselben Verhältnisse schneiden, welches freilich von Legendre im 20sten Satze des ersten Buches seiner Elemente auch nur in Beziehung auf eine sorgfältig gezeichnete Figur angedeutet wird.

Um nicht die Grenzen dieser Schrift gegen meine Absicht zu erweitern, will ich hier nur noch der Theorie der Parallellinien erwähnen, wie sie in zwei Lehrbüchern vorkommt, deren ich mich gegenwärtig bei mehren Schulanstalten bediene, ich meine die Elemente von Dr. Paucker, Königsberg 1823, und die Vorschule der Mathematik von Dr. Tellkampf, Berlin 1829. Beide Schriftsteller behandeln die Parallellinien im Sinne Euklid's, Statt dessen

11ten Grundsatzes der Herr Dr. Paucker den Satz, dafs mit einer Geraden aus einem bestimmten Punkte nur eine Parallellinie möglich sei, im 20sten Satze des ersten Abschnittes seiner Elemente wörtlich also beweiset. „Nimm auf ab (Fig. 1) den Punkt b willkührlich, ziehe cb. Es sei cd $\overset{\frown}{\frown}$ ab, und zugleich ce $\overset{\frown}{\frown}$ ab. Nimm $\angle$ fce = ecd, so ist aus demselben Grunde auch cf $\overset{\frown}{\frown}$ ab. Nimm $\angle$ gcf = fce = ecd, so ist auch cg $\overset{\frown}{\frown}$ ab. Fährt man so mit dem Ansatz des Winkels ecd fort, so gelangt man zuletz unfehlbar auf eine Grade cm, welche näher als cb an a liegt, mithin die ab schneidet; sie müfste ihr aber parallel sein, wenn die Voraussetzung statthaft wäre. Also wenn cd $\overset{\frown}{\frown}$ ab, so kann nicht zugleich ce $\overset{\frown}{\frown}$ ab sein, wäre $\angle$ ecd auch noch so klein.“ Dieser Beweis enthält aber schwache Stellen; denn schon die Annahme, dafs cf aus d e m s e l b e n G r u n d e wie ce parallel ab sein müsse, ist unrichtig, eben weil cf nicht wie ce mit cd einen Winkel = dce macht, welches doch die Bedingung war, sondern den Winkel dcf bildet, der = 2 dce ist. Auch kommt es hier nicht nur auf die Gröfse des Winkels dce, sondern zugleich auf die in der Bedingung angenommene Lage seiner Seiten cd, ce an, welche bei cf, cg u. s. f. übersehen wird. — Die Leipziger Literatur-Zeitung von 1826 Nr. 23 ist auch diesem meinem bescheidenen Urtheile nicht entgegen, da sie von diesem Satze nur anführt, dafs er die folgenden begründe, nicht aber, dafs er selbst begründet sei, welches auch bei dem 11ten Grundsatze Euklid's der Fall ist.

Für den eben erwähnten Grundsatz Euklid's, giebt der Herr Dr. Tellkampf in §. 250 Lehrs. 3 seiner Vorschule wörtlich folgenden Beweis. „Wenn man sich (Fig. 2) die Linie AC unbegränzt verlängert und einen Punkt X immer weiter auf derselben fortschreitend denkt, so mufs die Verbindungslinie XB immer gröfsere Winkel mit BA bilden, ohne jedoch jemals in die parallele Lage BE übergehen zu können. Ist nun Winkel GBA < EBA, so ist die Lage GB für die Dreiecksseite XB möglich und die Linie BD, welche in dieses Dreieck fällt, mufs nothwendig die gegenüberstehende Seite AX durchschneiden.“ Abgesehen davon, dafs in dem angeführten Beweise nur von der Möglichkeit eines Dreiecks mittelst BD die Rede ist, Statt die Nothwendigkeit desselben zu erweisen, so wird in demselben noch versteckt der nicht bewiesene Satz vorausgesetzt, dafs durch einen Punkt B mit AC nur eine Parallele BE und keine zweite BG möglich sei. — Der Recensent des Herren Tellkampf hat darum nicht Unrecht, wenn es in der Jenaischen allgemeinen Literatur-Zeitung, Nr. 96, Mai 1829 heifst, dafs diese Vorschule im Leichten, Lichten und daher ganz Verständlichen der Lehrsätze, Aufgaben und Beweise einen besonderen Vorzug unter der Menge der in neueren Zeiten erschienenen Lehrbücher der Anfangsgründe der Mathematik, einnimmt. Denn der zugestandene Vorzug drückt nur eine relative Vollkommenheit aus.

Das bisher Gesagte wird zureichen, den gänzlichen bisherigen Mangel an einer befriedigenden Theorie der Parallellinien, zugleich aber auch die Wichtigkeit derselben anzuerkennen, da sie seit mehr als 2000 Jahren der Gegenstand, obgleich noch unbelohnter Bemühungen der vortrefflichsten Mathematiker in dem Grade gewesen ist, dafs Herr Schweikart sich in seiner Theorie der Parallellinien, Jena und Leipzig 1808, veranlafst sah, die Verbannung der Parallellinien aus der Geometrie vorzuschlagen. Die bedeutende Rolle der Parallellinien wird übrigens leicht durch die Eigenschaft derselben begreiflich, daſs sie besonders zur Vorstellung von übereinstimmenden Lagen gegebener Raumgröſsen in Beziehung auf einander dienen, ohne welche die Vergleichbarkeit derselben unmöglich wird. Gleich die ersten Zeilen der vortrefflichen analytischen Geometrie von Littrow, Wien 1823, von dem Professor Dr. Martin Ohm, Berlin 1826, die erste Seite des ersten Abschnittes der darstellenden Geometrie von Schaffnit, Darmstadt 1828 u. s. w., bedürfen der Parallelinien, um sich im Raume zu orientiren, und rechtfertigen dadurch das unausgesetzte Streben der Mathematiker, im Besitze einer mathematischen Theorie der Parallelen zu sein.

II.

Des Verfassers Theorie der Parallellinien.

§. 1.

Es giebt Linien von der Beschaffenheit und gegenseitigen Lage, dafs sie in eine Linie zusammenfallen müssen, sobald von ihnen angenommen wird, dafs sie einen Punkt gemein haben.

Es seien z. B. (Fig. 3) die geraden Linien ab, cd 1) in einer Ebene und 2) von einer Geraden ef so geschnitten, dafs die dadurch auf einerlei Seite der schneidenden und geschnittenen Linien entstehenden Winkel bae, dce oder baf, dcf gleich seien. Man denke sich ab und cd mit Beibehaltung dieser zwei Bedingungen in beliebigen Punkten der ef, und zwar a) in einem Punkte derselben, etwa in g, so dafs gh die ab, gi die cd vorstellt, so müssen gh, gi in eine Linie zusammenfallen, weil aus einem Punkte g der ef nur eine Linie möglich ist, die auf derselben Seite der ef einen und denselben Winkel mit eg bildet. Man nehme b) an, dafs ab, cd von verschiedenen Punkten der ef, etwa von k, l aus, einen Punkt m gemein haben, wobei km die ab, ln die cd vorstellt, so mufs km mit lm zusammenfallen, weil sonst ein Aufsenwinkel mke des Dreiecks klm entstehen würde, der gegen die Annahme $>$ mle ist. Nimmt man k in a, l in c an, so wird eben so bewiesen, dafs ab, cd auch aus a, c keinen Punkt gemein haben können, ohne in eine Linie zusammen zu fallen. Daher sind ab, cd unter den obigen Bedingungen Linien von solcher Beschaffenheit und gegenseitigen Lage, dafs es weder einen Punkt g auf ef, noch einen Punkt m aufserhalb ef, also keinen Punkt giebt, von dem man annehmen könnte, dafs ihn ab, cd gemein haben, ohne in eine Linie zusammenfallen zu müssen.

Der umgekehrte Satz, dafs gerade Linien ab, cd auf einer Ebene (Fig. 3), welche mit der sie schneidenden ef nach einerlei Seite der schneidenden und geschnittenen Linien ungleiche Winkel bilden, nicht in eine Linie zusammenfallen können, wenn von ihnen auch angenommen wird, dafs sie einen Punkt g oder m gemein haben, wird auf eine dem vorstehenden Beweise ähnliche Art gezeigt, da hg, ig mit eg, oder km, lm mit el nur dann nach einerlei Seite ungleiche Winkel bilden können, wenn hg nicht mit ig, und km nicht mit lm zusammenfällt.

§. 2.

Parallellinien sind Linien von der Beschaffenheit und gegenseitigen Lage, dafs sie in eine Linie zusammenfallen müssen, sobald von ihnen angenommen wird, dafs sie einen Punkt gemein haben.

Die vorstehende, von der unendlichen Verlängerung gegebener Linien unabhängige Erklärung von Parallellinien, ist nicht willkührlich; die Realität ihres Gegenstandes ist in §. 1 bewiesen worden. Wegen ihrer Allgemeinheit in Beziehung auf gerade und krumme Linien, vergleiche man §. 1, §. 4 und §. 15 Anmerkung 1.

§. 3.

Der Beschaffenheit nach müssen sich Parallellinien decken können.

Denn im Gegentheile wäre es unter keiner Bedingung möglich, dafs sie in eine Linie zusammenfielen (§. 2).

In dem Ausdrucke: die Linie A ist der Linie B parallel oder nicht parallel, welche beide Fälle nach der Ordnung so bezeichnet werden mögen: $A \| B$ und $A \wedge B$, wird daher stets angenommen werden, dafs A und B Linien sind, die sich decken können. Der Unterschied der beiden Fälle $A \| B$ und $A \wedge B$, besteht also nach §. 2 in dem Zusammenfallen oder Nichtzusammenfallen congruenter oder der Congruenz fähiger Linien A, B, sobald von ihnen angenommen wird, dafs sie einen Punkt gemein haben. — Demnach sind Kreise, die aus einem Mittelpunkte mit verschiedenen

Halbmessern beschrieben werden, nicht parallel, weil sie sich als nicht congruente Linien nicht decken können, wie man auch einen gemeinen Punkt für dieselben annehmen mag (§. 2). Vergl. §. 15 Anmerk. 1.

§. 4.

Linien, die sich ihrer Beschaffenheit nach decken können, sind nicht in jeder beliebigen Lage parallel.

Es sind z. B. zwei gleiche Halbkreise (Fig. 4) auf einer Ebene, deren erhabene Seiten nach einerlei Richtung liegen, parallel, wenn die Mittelpunkte derselben sich stets in einer auf ihren Durchmessern senkrechten Linie bc befinden. Denn so ist cd = ab = ef = gh; sobald nun z. B. c mit d zusammenfällt, so liegt f in e, h in g, es decken sich die Halbkreise ecg, fdh, und sind parallel (§. 2). Zwei gleiche Halbkreise auf einer Ebene (Fig. 5), deren erhabene Seiten entgegengesetzt liegen, sind dagegen nicht parallel (§. 2). Zwei gleiche sich schneidende oder sich aufserhalb berührende Kreise sind nicht parallel, berührt aber der eine den anderen innerhalb, so sind sie parallel (§. 2. Vergl. §. 7). — Von geraden Linien ist der Satz dieses §'s in der Anmerkung zu §. 1 bewiesen worden.

§. 5.

Zwei gerade Linien auf einer Ebene, welche von einer dritten so geschnitten werden, dafs 1) die auf einerlei Seite der schneidenden und geschnittenen Linien liegenden Winkel, 2) dafs die inneren oder äufseren Wechselwinkel gleich sind, 3) dafs die inneren oder äufseren nach derselben Seite der schneidenden Linie liegenden Winkel zusammen 2 Rechte betragen, sind parallel.

Die erste Behauptung folgt aus §. 2 und §. 1, die zweite und dritte wird aus der ersten durch eine leichte Substitution gleicher Winkel hergeleitet.

§. 6.

Durch einen gegebenen Punkt läfst sich mit einer gegebenen Linie nur eine Parallellinie annehmen.

Denn gesetzt, es liefsen sich durch den gegebenen Punkt g (Fig. 3) zwei Parallelen gh, gi mit der gegebenen ab annehmen, so fällt gh mit ab zusammen, sobald angenommen wird, dafs gh und ab einen Punkt gemein haben (§. 2). Da der Punkt g der gh und der gi gemein ist, so mufs auch gi als der ab parallel mit ab zusammenfallen, sobald g, also gh mit ab zusammenfällt (§. 2). Also müssen gh und gi zugleich mit ab zusammenfallen, und daher eine Linie sein. — Dieser Beweis bleibt derselbe, wenn ab keine Gerade wäre.

§. 7.

Jede Linie ist mit sich selbst parallel.

Denn gesetzt, der Punkt g (Fig. 3), von welchem in §. 6 die Rede war, befinde sich auf ab, z. B. in a, so mufs die der ab Parallele mit ab zusammenfallen (§. 2).

§. 8.

Gerade Parallellinien liegen in Beziehung auf einander in einer Ebene.

Gesetzt cd (Fig. 6), welche nur den Punkt c mit der Ebene gh gemein hat, liege übrigens aufserhalb derselben. Fälle cf senkrecht auf ab, ziehe ce in der Ebene gh senkrecht auf cf, so ist ce der ab parallel (§. 5. Nr. 3), und aufser ce keine zweite (§. 6). Soll also cd der ab parallel sein, so mufs cd mit ce zusammenfallen, welche in der Ebene gh liegt. — Uebrigens können ab, ce, jede für sich in einer besonderen Ebene liegen, wie z. B. die Durchschnittslinien zweier parallelen Ebenen mittelst einer Ebene.

> Die im vorstehenden Satze bewiesene Bedingung zu geraden Parallellinien, ist nach Euklid ein willkührlich angenommenes Merkmal derselben, welches vielen Parallellinien nicht zukommt, die verschiedene Linien sein sollen. Vergl. §. 15. Anmerk. 2.

§. 9.

Wenn zwei gerade Parallellinien von einer geraden Linie geschnitten werden, so sind 1) die Winkel auf einerlei Seite der schneidenden und geschnittenen Linien gleich, 2) die inneren oder äufseren Wechselwinkel sind gleich, 3) die inneren oder äufseren nach derselben Seite der schneidenden Linie liegenden Winkel betragen zusammen 2 Rechte.

Denn gesetzt gh sei || ab (Fig. 3), und der Winkel hgf sei $>$ baf. Mache den Winkel igf $=$ baf, so ist ig || ab (§. 5. Nr. 1), welches unmöglich ist (§. 6). Eben so wird bewiesen, dafs der Winkel baf nicht $>$ hgf sein kann; daher ist der Winkel hgf $=$ baf. — Die beiden übrigen Behauptungen werden aus der ersten durch eine leichte Substitution gleicher Winkel hergeleitet.

§. 10.

Eine Linie, welche einer von zwei Parallelen parallel ist,

ist es auch der anderen, und umgekehrt, wenn mehre Linien einer parallel sind, so sind sie es Alle.

Gesetzt, es sei ab || gi (Fig. 3). Ist nun cd || gi, so mufs cd mit gi, gi mit ab, also cd mit ab zusammenfallen, wenn ab und cd mit gi einen Punkt z. B. g gemein haben. Also ist cd || ab (§. 2). — Eben so ist der Beweis, dafs die krumme Linie ikl (Fig. 4) || ecg sein mufs, wenn ecg || fdh, und ikl || fdh ist. — Der umgekehrte Fall wird auf eine ähnliche Art bewiesen.

§. 11.

Eine Linie, welche einer von zwei Parallelen nicht parallel ist, ist es auch nicht der anderen.

Gesetzt ab (Fig. 3) sei || gh, und ef sei $\wedge$ ab, d. i. wenn ef mit ab einen Punkt a gemein hat, so fällt ef nicht mit ab zusammen (§. 3 Anmerk.). Wäre nun ef || gh, d. i. wenn ef einen Punkt g mit gh gemein hat, so fällt ef mit gh zusammen (§. 2). Dann müfste aber gh wie ef den Punkt a mit ab gemein haben, ohne mit ab zusammen zu fallen, d. i. gh wäre nicht || ab (§. 2), gegen die Annahme.

§. 12.

Zwei Parallellinen können nicht zusammentreffen.

Gesetzt ab, cd (Fig. 3) oder ecg, fdh (Fig. 4) seien parallel. Träfe nun ab mit cd oder ecg mit fdh in einem Punkte zusammen, so müfste ab mit cd, ecg mit fdh zusammenfallen (§. 2), gegen die Annahme, dafs ab, cd und ecg, fdh zwei verschiedene Linien sind.

Da die Verlängerung einer geraden Linie mit der zugehörigen verlängerten Linie eine Gerade ausmacht, so können gerade Parallellinien nicht zusammentreffen, wie weit man sie auch verlängert annehmen möge. — Auch diese aus dem vorstehenden Satze abgeleitete Bedingung gerader Parallellinien ist nach Euklid ein willkührlich angenommenes Merkmal derselben.

§. 13.

Parallelen zwischen Parallelen sind gleich.

Es sei ac || op (Fig. 3), ao || cp, ziehe ap, so ist das Dreieck aop dem Dreiecke acp gleich, weil sie die Seite ap gemein, und die an derselben liegenden Winkel gleich haben (§. 9. Nr. 1). Also ist ao = cp und ac = op.

§. 14.

Jeder Punkt auf einer von zwei Parallellinien ist von dem ihm entsprechenden Punkte auf der anderen Parallele, d. i. von dem Punkte derselben, mit welchem er zusammenfallen würde, wenn beide Parallelen sich decken, gleich entfernt.

Gesetzt, ef sei || qr (Fig. 3). Aus beliebigen Punkten a, c der ef fälle die Senkrechten ao, cp, so sind ao, cp auch senkrecht auf ef (§. 9. Nr. 3), parallel (§. 5. Nr. 1) und gleich (§. 13). Es sind aber ao, cp als gemeinschaftliche Senkrechte zwischen ef und qr, die Maſse der Entfernungen ihrer entsprechenden Punkte a, o und c, p. — In Fig. 4 sind aus den beliebigen Punkten c, m der ecg, die Senkrechten cb, mp auf fh gefällt worden; nun ist cd = ab, mn = op, da ab = op ist (§. 13), so ist cd = mn.

§. 15.

Wenn jeder Punkt auf einer von zwei Linien A, B, von dem ihm entsprechenden Punkte auf der anderen gleich entfernt ist, so sind diese Linien parallel.

Denn sobald ein Punkt der A mit dem ihm entsprechenden Punkte der B zusammenfällt, d. i. wenn die Entfernung der gedachten Punkte = O wird, so mufs auch die Entfernung der übrigen einander entsprechenden Punkte der A und B, um einander gleich zu bleiben, = O werden. Dann decken sich aber A und B, und sind parallel (§. 2).

Hierbei merke man:

1) dafs die Unbestimmtheit der bisherigen Erklärungen von Parallellinien, worüber unter Anderen das mathematische Wörterbuch von Klügel nachzusehen ist, die Vorstellung von dem Parallellismus concentrischer Kreise veranlafst hat, oder überhaupt solcher Linien, welche durch die stetige Verbindung der Normalen einer Curve oder deren Verlängerungen, entstehen. — Zwei gegebene Parallellinien müssen aber parallel bleiben, wie weit sie auch von einander entfernt sein mögen; sollten nun zwei gegebene concentrische Kreise A, B parallel sein, so müfsten sie parallel bleiben, wie sehr auch A oder B einander in der Richtung eines gemeinschaftlichen Durchmessers derselben genähert werden mögen, also auch im Zustande der Berührung, welcher Fall allen Vorstellungen von dem Parallellismus widerspricht. Dafs zwei Linien ihrer gegebenen Lage nach nicht zusammentreffen können, bestimmt noch nicht den Paral-

lellismus, sonst müſsten die Asymptoten mit den zugehörigen Curven parallel sein, also gerade und krumme, oder ungleichgekrümmte Linien, welches auch concentrische Kreise sind. Ungleichgekrümmte Linien sind aber nicht parallel, welcher aus meiner Theorie unmittelbar folgende Satz in *Saccherii Euclides ab omni naevo vindicatus, sive cet. Mediolani.* 1733, sogar als ein Grundsatz aufgestellt worden ist. Aus dem angeführten Grunde können auch die sogenannten Parallelen mittelst Evoluten nicht parallel sein. Da es endlich gleichgekrümmte Parallelen giebt, die mit den geraden Parallelen zu einem allgemeinen Begriffe gehören (§. 2, 4, 6, 7, 10, 11, 12, 14, 15), und zwei entgegengesetzte Fälle nicht zugleich Statt finden können, so ist die Annahme von dem Parallellismus concentrischer Curven gegen die Forderungen einer Wissenschaft.

2) Daſs einige Linien, z. B. verschiedene gleiche Kreise nicht in einer Ebene parallel sein können (§. 4), wohl aber, wenn sie sich in verschiedenen Ebenen befinden, wie z. B. die Umfänge der beiden Kreisflächen eines Cylinders, wie aus diesem Paragraphe selbst erhellet.

3) Daſs diese Theorie der Parallellinien von dem 11ten Grundsatze Euklid's, dessen Möglichkeit aus §. 11 erhellet, nicht nur ganz unabhängig ist, sondern vielmehr zu einem strengen Beweise desselben führt. Zuerst wird nämlich gezeigt, daſs eine Linie qr (Fig. 4), welche eine von 2 Parallelen hb und lu, z. B. die hb in v schneidet, genugsam verlängert auch die anderen lu schneiden muſs. Zu diesem Zwecke

ziehe man aus einem beliebigen Punkte r der qr eine Linie rs beliebig zwischen hb und lu, und aus einem beliebigen Punkte w der rs an lu die Linie wt so, dafs W. wxu = W. hvr wird. — Aus v ziehe man eine Parallellinie mit wt (§. 5), so ist diese entweder rv oder eine andere Linie. Sobald aber im ersten Falle wt mit dem Punkte w in r trifft, welches ein Mal nothwendig ist, weil wt aus allen Punkten der rs angenommen werden kann, so mufs qr mit wt zusammenfallen (§. 2). Dann ist aber wt in der Lage rz die Verlängerung von qr, welche die lu in x' schneiden mufs, wie wt in x. — Wäre im anderen Falle vy || wt, so müfste vy mit wt zusammenfallen, wenn wt mit w in y angenommen wird (§. 2), also mufs vy verlängert die lu in x'' schneiden, wie wt in x. Dann ist aber W. vx''u (= wxu = hvr) = W. hvx'' (§. 9. Nr. 1), also W. hvr = W. hvy, also fällt wiederum vr mit der die lu schneidenden Linie vx'' zusammen. Betragen nun (Fig. 2) die Winkel XAB + DBA weniger als 2 R, so mache W. ABE + BAX = 2 R, d. i. EBF = XAB, dann ist BE || AX (§. 5. Nr. 1). Da nun BD die BE welche parallel AX ist, in B schneidet, so mufs BD dem in dieser Anmerkung eben bewiesenen Satze gemäfs, genugsam verlängert, auch AX schneiden.

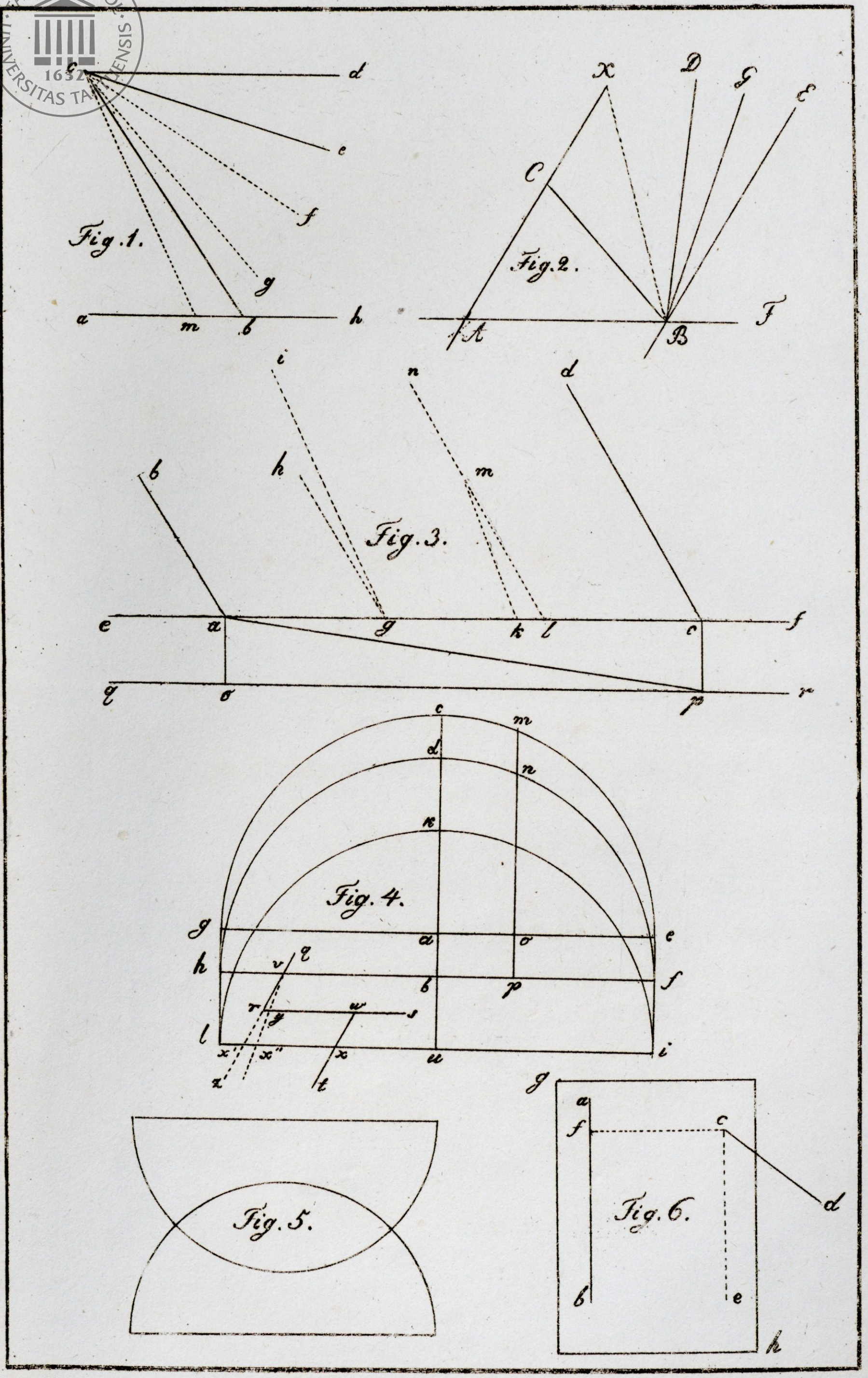
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.