CONSPECTUS THEORIAE

REFLEXIONIS ET REFRACTIONIS

SIMPLICIS ATQUE DUPLICIS

DISSERTATIO INAUGURALIS

QUAM

CONSENSU ET AUCTORITATE AMPLISSIMI
PHILOSOPHORUM ORDINIS

IN

CAESAREA LITERARUM UNIVERSITATE DORPATENSI,

AD GRADUM

MAGISTRI PHILOSOPHIAE

LEGITIME OBTINENDUM

CONSCRIPSIT ET LOCO CONSUETO PUBLICE
DEFENDET

BASILIUS LAPSCHIN.

DORPATI LIVONORUM,
TYPIS J. C. SCHÜNMANNI, TYPOGRAPHI ACADEMICI.
MDCCCXXXII.

Imprimatur:

haec dissertatio sub conditione, ut simulac typis excusa fuerit, quinque exemplaria collegio ad libros explorandos constituto tradantur.

Dorpati d. XXIII. Sept. MDCCCXXXII.

Dr. Blum,
h. t. Ord. Philos. I et III. Decanus.

. . . . . . que chaçun examine avec indulgence les tentatives de ceux qui l'ont précédé. Au lieu de relever amèrement ce qui a pu se glisser d'incertain dans leurs résultats, ou de trop général dans leurs conséquences il faut plutôt y chercher ce qui s'y trouve de bon, de durable, et en extraire avec fidélité ce qui reste dans la science plus perfectionnée soit en faits, soit en lois, soit en aperçus même.

Biot.

PRAEFATIO.

Theoriae vibrationum aetheris, in quam recentissimis temporibus inquirere coeperunt, celeres progressus, imprimis vero ejus in explicandis inflexionis phaenomenis atque polarisationis vis, ut ei cognoscendae operam strenue darem, fecerunt. Nostrae aetatis Mathematici disquisitiones mathematicas ad naturae phaenomena applicandi studiosi, opticen etiam complexi, phaenomenorum lucis leges explicare conati sunt. Ipse vero in solis periculis haud acquiescendum esse ratus, neque emanationis theoria contentus, et in animo volvens, quae supra commemoravi, reflexionis, simplicis atque duplicis refractionis phaenomena observavi. In quae phaenomena inquirens haec duo mihi proposui: 1) physicam reflexionis atque simplicis refractionis rationem e theoria vibrationum explicare; 2) quaestionem solvere: unde in crystallis radii bifissi existerent?

Post haec omnes leges, quas reflexionis, simplicis atque duplicis refractionis phaenomena sequuntur, mathematica accuratione adhibita, deducere atque demonstrare. Quarum quaestionum priorem cum solverem, propriae mihi succurrebant observationes, quibus physica reflexionis atque simplicis refractionis explicandae ratio declaratur. — Quum mihi secundae quaestionis solutae rationem redderem, rem lucide atque breviter, ut primo aspectu praecipua duplicis refractionis phaenomena perspici atque comprehendi possent, exponere conatus sum.

Reflexionis, refractionis simplicis atque duplicis leges e theoriae vibrationum principiis per analysin deducuntur, et mihi contigit, ut breviore et faciliore via, quam Malus et Biot, ad eas pervenirem.

Quibus omnibus, Lector benevole, judicio tuo subjectis, aut album mihi te calculum adiecturum, aut errorem meum ea, qua par est, aequitate mihi demonstraturum esse spero atque confido. Restat, ut moneam, me propria pericula in crystallis binis praeditis axibus instituere non potuisse, ne id etiam dissertationi meae objiciatur. — Subsidiorum vero penuria mihi imputari non potest; praeterea cum rebus mathematicis imprimis operam darem, ut diligentissime dimetiendo animum meum affigerem atque singulas observationes accurate referrem haud necesse erat; phaenomenorum enim causas physicas atque formulas mathematicas, e quibus leges eorum deducuntur, cognovisse mihi sat erat, ut cui physica res non omnium maxima sit.

DE REFLEXIONE.

1. Secundum opinionem ill. Huigenii materia quaedam tenuissima, quam postea aetherem nominarunt, corporis luminosi momentaneo ictu perculsa, a quovis ictus puncto sphaerice propagatur. Qui motus ad aliam particularum aetheris seriem, ab hoc vero ad sequentem et sic porro ita transfertur, ut majores sensim sensimque sphaerae formentur. Idem vir doctus quamcunque talis sphaerae particulam centrum novarum sphaerarum fieri existimat, quae uno eodemque tempore cum primariis propagentur, earumque tangentes fiant. Ut vero melius intelligatur quid secundum hanc hypothesin radius lucis sit, plano quolibet sub puncto materiae propagandae principali totum sphaerarum systema dissecemus: quo in plano plures tum lineas curvas parallelas, a pluribus etiam curvis lineis secundariis sese invicem intersecantibus tangi videbimus; linea recta, per omnia, in quibus curvae secundariae intersecantur, puncta a puncto illo primitivo inde ducta, radium lucis, ad curvam principalem normalem, referet.

2. Ad evitandas difficultates supervacaneas, si totam undam in superficiem aliquam incidentem observare velimus, unum ejus tantummodo arcum at-

que radium observabimus. Ponamus radium, ad curvam hanc normalem, in superficiem reflectentem perpendiculariter incidere. Quum inferius curvae punctum superficiem reflectentem feriat, cum sequente aetheris particula motum communicare non potest, tradit itaque eum, vi omnibus directionibus aequali, particulis aetheris superficiem circumdantibus. — Obstaculo vero hoc in casu perpendiculariter ad superf. agente, puncti repulsi motus eadem directione perpendiculari perfici debet. Reflectitur igitur radius eadem directione, secundum quam incidit.

3. Incidat radius ex obliquo. Nullo obstaculo occurrente, arcus eadem directione propagantur. Perspicuum etiam est undarum systema, tali modo se propagantium, a quovis obstaculo turbari debere. Si per *acm* (Fig. 1.) radii atque undarum propagationis directionem designabimus, particula arcus *gh* in itinere suo cum superficie *MN* collidente, aequilibrium in toto arcu *hg* dissolvetur; particula enim haec, collisionem propter et obstaculum, e serie particularum arcus *gh* jam egrediatur oportet. Quam ob rem sequens aetheris particularum series commota, praecedenti parallela esse non potest. — Propter majus vero momentum ad latus *hm*, motus a particula *m* ad aliam, quae jam ultra directionem radii designatam invenitur, transferetur; duae enim tum agent vires, altera secundum priorem directionem, altera secundum directionem *ad* (Fig. 2.) ad eam perpendicularem; particula igitur *a* secundum diagonalem agere atque motum particulae *p* (Fig. 3.) tradere debebit, et totus arcus sequens positio-

nem *kpl* accipiet. Hujus undae particula *l* rursus cum superficie *MN* collidente, similis praecedenti actio locum habebit; sequenti aetheris seriei motus secundum *pq* tradetur, arcus vero *mqn* hujus seriei undulationem designabit. Ita radius magis magisque ad *MN* appropinquabit, sed superficiem ipsam attingere non potest; nam quum ultimum radii punctum sphaerae secundariae centrum fiat, hujus sphaerae arcus jam pridem superficiem tanget. — In hoc vero superficiei loco motus non desinit; duae enim vires agunt, altera secundum radii directionem superficiei parallelam, altera secundum directionem ad eam perpendicularem, quam series particularum arcus *rs* exercet; particula itaque *r* sequenti aetheris particulae secundum diagonalem motum tradere debet et arcus undae se propagantis positionem *r's'* accipiet. Haec ultima directio propter majus momentum ad dextrum arcuum latus, qui radium a*rt* deflectere student, neque desinunt, donec binae arcus partes aut momenta aequalia sint, permanere non potest. Aequilibrio vero restituto, nulloque obstaculo occurrente, radius ultimam diagonalem, aut tangentem ad arcum, a radio descriptum, dirigetur.

4. Cum vero et ille arcus, ad quem radius pertinet, et qui ab hoc ad superficiem *MN* descriptus est, admodum parvi sint, hunc negligere possumus; tum vero in uno puncto conjungentur radius incidens et reflexus, cum linea ad superficiem *MN* perpendiculari aequales angulos formantes. *Quae angulorum aequalitas, quorum alter angulus incidentiae, alter reflexionis angulus vocatur, legem*

reflexionis principalem exhibet. Alterius legis haec est norma: *cum radius incidens, tum reflexus in uno eodemque plano ad superficiem reflectentem perpendiculari inveniuntur.*

5. *Demonstratio.* E theoria radiorum collisionis generali constat, absolutam vibrationum aetheris velocitatem in constante esse ratione ad *sin.* temporis, ab initio motus praeteriti, si tempus totius vibrationis circuli peripheriae respondeat; quam ob rem velocitas ea hoc modo exprimitur

$$v = a \sin 2\pi (t - \frac{x}{\lambda})$$

a est quant. const., quadratum cujus intensitatem vibrationum exprimit; x est distantia aetheris particulae ab initio motus; λ est longitudo undae. Designato per $2s$ arcu a radio ad superf. reflectentem descripto, pro radio reflexo eadem conditione habebimus

$$v = -a \sin 2\pi (t - \frac{2s + x}{\lambda}).$$

Est igitur

$$\sin 2\pi (t - \frac{x}{\lambda}) = -\sin 2\pi (t - \frac{2s + x}{\lambda}).$$

Unde

$$1 + \cos \frac{2\pi . 2s}{\lambda} = \cot g\, 2\pi (t - \frac{x}{\lambda}) \sin \frac{2\pi . 2s}{\lambda}$$

$$\cos^2 \frac{2\pi s}{\lambda} = \cot g\, 2\pi (t - \frac{x}{\lambda}) \sin \frac{2\pi s}{\lambda} \cos \frac{2\pi s}{\lambda}$$

$$tg \frac{2\pi s}{\lambda} = tg\, 2\pi (t - \frac{x}{\lambda}) \dots (1)$$

cujus aequationis differentiale exhibet

$$\frac{ds}{\cos^2 \frac{2\pi s}{\lambda}} = -\frac{dx}{\cos^2 2\pi (t - \frac{x}{\lambda})}$$

aut ratione aequ. (1) habita,

$$ds = -dx.$$

Unde tandem

$$s = k - x \ldots\ldots (2)$$

Per quam aequ. *secunda lex reflexionis exprimitur.*

Designatis per θ et θ' angulis incidentiae ac reflexionis, dissolvamus velocitatem v secundum coord. orth. $\dot{x}$ et $\dot{y}$, tum erit

pro radio incidente $\begin{cases} d\dot{x} = a \sin 2\pi(t - \frac{x}{\lambda}) \sin\theta \\ d\dot{y} = a \sin 2\pi(t - \frac{x}{\lambda}) \cos\theta \end{cases}$

pro radio reflexo $\begin{cases} d\dot{x} = -\, a \sin 2\pi(t - \frac{2s + x}{\lambda}) \sin\theta' \\ d\dot{y} = -\, a \sin 2\pi(t - \frac{2s + x}{\lambda}) \cos\theta'. \end{cases}$

Igitur

$$a \sin 2\pi(t - \frac{x}{\lambda}) \sin\theta = -\, a \sin 2\pi(t - \frac{2s + x}{\lambda}) \sin\theta'.$$

Ratione vero aequ. $\frac{s}{\lambda} = t - \frac{x}{\lambda}$ habita, exinde sequitur

$$\sin\theta = \sin\theta'$$

$$\cos\theta = \cos\theta'$$

Unde denique $\theta = \theta'$.

Reflectitur igitur radius sub angulo, incidentiae angulo aequali.

DE REFRACTIONE.

6. Si arcus undulationis et radius, qui ad eum pertinet, perpendiculariter in superficiem, duo media

dirimentem, incidunt, motus cum particulis aetheris in corpore perlucido inclusi eadem perpendiculari directione communicare debet; nam momentis in utraque arcus parte aequalibus, nulla est ratio cur radius in hanc vel illam partem deflectat.

7. Incidat radius ex obliquo. Ubi medium in utramque arcus partem, ad radium pertinentis, actionem aequalem exercet, nullaque existit ratio, quae hanc actionem turbet, perspicuum est arcus directione radii designata propagari. Si vero directione aliqua cis aut ultra radii directionem obstaculum aliquod obviam fiat, facile intelligitur, radium se porro propagantem in eam partem deflectere, in qua perturbatum est aequilibrium. — Quarum altera conditio locum habet, si lux in uno eodemque medio propagetur; altera vero, quum in itinere radii eadem directione aliud medium, sit densius licet, obviam fiat.

Repraesentet linea *ac* (Fig. 4.) primariam radii directionem, quae eadem esse non desinit, donec arcus, ex. gr. *egf*, densioris medii superficiem *MN* attingat. Quum particula *f* in medium hoc intret, majorique, quam prius, obstaculo, directione *fz* vim suam exercenti, occurrat, in hac arcus parte aequilibrium turbatur. Particulae undae, aequilibrium appetentes, novam exercent vim, quae particulam *g* secundum tangentem ad undam *egf* trahere conatur. Quae itaque vires: altera directione primaria *ac* (Fig. 5.), altera directione *gn* in particulam *g* agunt, ita, ut motus a particula *g* ad particulam *h* transferatur, et arcus *egf* motum suum seriei *ihk*, ad quam gh normalis erit, tradat. — Particulae k, in medium MN intrantis, similis erit conditio et particula h duabus viribus hm' et hn' subjecta motum particulae l tradet, et arcus positionem olp accipiet. Ex his omnibus elucet postremum radii ac punctum, curvo itinere superf. MN attingens, in ipso etiam medio ad aliquam a superf. MN distantiam curvam lineam sequi. Perspicuum enim est nullum aequilibrium restitui posse, si totus arcus qr non intret in medium. Post ea propagatio undae utw una eademque directione, nempe directione tangentis ad curvam in ultimo ejus puncto t perficietur; aequali enim utrique parti obstaculo occurrente, nulla adest ratio, cur in hanc aut illam partem ab ultima directione deflectat. In aliqua itaque, quamvis parva admodum, a superf. MN distantia radius recte se in medio densiori movere incipiet, huncque motum continuabit, donec rursus arcus inferiorem medii superficiem, medium densius a rariore, eodem nimirum, ex quo radius incidebat, dirimentem attigerit. Analogia duce conjicere jam possumus radium ad exitum e densiore medio in rarius lineam curvam, praecedenti similem, sed quoad curvaturae directionem ei oppositam, describere. — Post ea, quae supra commemoravi, hanc rem explicare supervacaneum esse censeo; sed potius totum radii et arcus systema tanquam vectem observemus. Quum radius et arcus undae in uno eodemque medio inveniantur et utraque pars arcus aequaliter intendatur, haec aequalis intensio vires in vecti aequales, aequaliter a hypomochlio distantes, repraesentabit; in diversis vero duobus mediis intensionem utriusque arcus partis, ita differre perspicuum est, ut intensio in densiore medio intensionem in rariore medio praeponderet. Si itaque binae arcus partes in diversis mediis invenientur, majus momentum majoris vis partem sequetur, vectis igitur, aut unda positionem $b'cd'$ (Fig. 6.) et radius directionem $a'c$ accipiet. Unde perspicitur radium a dextra ad sinistram deflectere debere. Eadem est conditio sequentis arcus, in rarius medium intrantis, etc. etc., et donec totius arcus particulae vim suam exercere non desinent, curvam lineam $t'c'$, ad sinistram superf. dirimentis partem concavam radius describet, et recte denique iter suum continuabit.

8. Haec est norma utriusque refractionis legis:

1) *Radius incidens et refractus in uno eodemque plano ad superf. duo media dirimentem perpendiculari inveniuntur.*

2) *Sinus anguli incidentiae ad sin. anguli refractionis constans est ratio.*

9. E physica simplicis refractionis explicatione haec geometrica constructio ipsa per se consequitur. Secundum directionem radii incidentis ducamus planum perpendiculare ad superficiem duo media dirimentem; sit angulus ω inter hoc planum et planum coord. zx. Ad superficiem sphaerae, sub forma cujus aether in medio refringente propagatur, planum tangens in puncto radii refracti ducamus; planum hoc dissecabit in puncto x, y lineam ck, quae est intersectio plani coord. zx et plani, per radium

incidentem ducti. Vice versa situs radii refracti facile determinari potest, si punctum $\dot{x}$, $\dot{y}$ notum est. Sit ang. incidentiae $= \theta$, ang. refr. $= \theta'$; sit ω' ang. inter planum coord. zx et planum perpendiculariter ad superficiem, duo media dirimentem, per radium refractum ductum. Sint x', y', z' coord. radii refracti r'. Tum habebimus

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= ck\cos\omega = \frac{r'\cos\omega}{\sin\theta'} \\ \dot{y} &= ck\sin\omega = \frac{r'\sin\omega}{\sin\theta'}. \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

Aequ. plani per puncta $\dot{x}$, $\dot{y}$ et x', y', z' ducti erit

$$\xi(\dot{x} - x') + \eta(\dot{y} - y') - \zeta z' = o, \qquad (b)$$

ubi ξ, η, ζ sunt valores, positionem plani tang. determinantes. Ope aequationum

$$\begin{aligned} x' &= r'\cos\omega'\sin\theta' \\ y' &= r'\sin\omega'\sin\theta' \\ z' &= r'\cos\theta' \end{aligned}$$

aequ. (b) transmutatur in

$$(\dot{x} - x')\cos\omega'\sin\theta' + (\dot{y} - y')\sin\omega'\sin\theta' + z'\cos\theta' = o.$$

Substitutis in hac aequ. loco $\dot{x}$, $\dot{y}$; x', y', z' valoribus eorum, obtinebimus

$$\cos(\omega - \omega') = 1 \qquad \text{unde}$$
$$\omega = \omega'$$

i. e. *rad. refr. in uno eodemque plano cum radio incidente, quod etiam perpendiculare est ad superficiem medii refringentis, invenitur.*

E puncto $\dot{x}$, $\dot{y}$ et e puncto c (Fig. 8.) duas lineas in plano incidentiae ita ducamus, ut ang. rectum inter se forment; linea, e puncto $\dot{x}$, $\dot{y}$ ducta designata per N, habebimus

$$\dot{x} = ck \cos\omega = \frac{N \cos\omega}{\sin\theta}$$

$$\dot{y} = ck \sin\omega = \frac{N \sin\omega}{\sin\theta}.$$

His expressionibus cum (a) comparatis facile sequitur

$$\frac{\sin\theta'}{\sin\theta} = \frac{r'}{N} = \text{const.}$$

constantem esse rationem sin. ang. incidentiae ad sin. aug. refractionis.

DE DUPLICI REFRACTIONE.

10. Tria sunt, quae in rebus naturae considerari solent: phaenomena, leges eorum atque causae. His animo nostro informatis, duplicis refractionis mirabilia phaenomena consideremus.

A. PHAENOMENA.

11. Si objectum, quod prope est, crystallo islandico interposito, contemplamur, duas imagines ejus conspicimus, quarum alteram, crystallo secúndum directionem aliquam verso, circa alteram moveri, intensitatem atque distantiam ejus in variis crystalli positionibus mutari animadvertimus. — Ad rem probe perspiciendam periculo quam simplicissimo atque phaenomenis delineatis utamur. Superponamus crystallum chartulae, ubi angulus rectus, medio puncto, delineetur licet, mox duos angulos atque duo puncta conspiciemus, quae, crystallo ad 45° prorsus verso, quam figura repraesentat positionem

obtinebunt. Primum ita positus est crystallus, ut obtusi ejus anguli in *a* et *b* inveniantur (Fig. 7.). Linea *cd* directionem crystalli versi significat. Phaenomenon et figura utramque imaginem, conditione nostra, semper directionem lineae *ab* obtinere ostendunt. Quae directio ea adhuc proprietate gaudet, quod radius lucis eam secutus neque refringitur, neque bifariam distribuitur; videmus igitur unam tantum imaginem. Quod periculum methodum directionis lineae illae inveniendae indicavit: crystalli anguli obtusi in planis aeque inter se distantibus ita amputantur, ne duplex objectum conspiciatur. Pridem nominabant et nunc etiam physicorum plerique nominant lineam hanc *axem crystalli*; nos vero una cum ill. Fresnelio eam *axem crystalli opticum* appellabimus. Planum vero, quod perpendiculariter ad crystalli naturalis superficiem per hanc lineam transit *planum principalis sectionis crystalli* vocatur.

12. Phaenomena docent: 1) si planum radii incidentis cum plano principalis sectionis congruit, utrumque radium in eo situm et angulos refractionis diversos esse; si radius perpendiculariter in crystallum incidit, alterum eadem directione crystallum transire, alterum vero refrangi. Hoc in plano utriusque radii distantia maxima adspicitur; radii regularis atque irregularis radii diverse refracti nomen ferunt.

3) Radio non in plano principalis sectionis incidente, diversa esse plana utriusque radii refracti.

4) Radium regularem atque irregularem altera vice in uno eodemque plano cum plano radii inci-

dentis inveniri, si hoc planum angulum rectum cum plano principalis sectionis formet. Utriusque radii distantia minima est.

5) In sequente quadrante rursus in diversis planis, radii magis magisque inter se distantes.

13. Observationes in binis crystallis superpositis institutae haec phaenomena referunt.

1) Planis principalium sectionum utriusque crystalli parallelis, imagines duae amplius inter se distantes, quam si unus crystallus observetur, conspiciuntur; uterque radius alterius crystalli nil aliud est, nisi prolongatio utriusque radii alterius.

2) Si quemcunque crystallorum vertere incipiemus, 4 puncta pro duobus conspiciemus, quorum duo nova tenuiori quam cetera lucis intensitate gaudent. crystallo ad 45° verso, omnia 4 puncta aequalis sunt intensitatis.

3) Crystallo eadem directione verso, duo priora puncta minori intensitate fiunt; ad 90° evanescunt. Qua conditione radius irregularis locum regularis, regularis vero irregularis locum obtinet.

4) Crystallum porro vertentes rursus 4 puncta, quorum duo nova intensitate ceteris minori; ad 135° vero aequali gaudere animadvertimus; porro intensitatem eorum crescere, aliorum vero decrescere

5) et ad 180° evanescere; restant tantum duo puncta, quorum minima est distantia.

6) Tali modo, si crystallum ad 45° vertemus rursus 4, 2, 4 et denique duo prima puncta maxime inter se distantia videbimus.

14. In tribus crystallis eadem pericula feci.

Imaginum numerus in diversis crystallorum positionibus per 2, 2^2, 2^3 exprimitur. Nec plus ultra 180° quemque crystallum moventes, *omnium imaginum*, quae conspiciuntur, numerum aequalem esse $5^3 = 125$ inveniemus, e quibus $[2] = 35$; $[2^2] = 60$; $[2^3] = 30$. ($[2]$ — quoties duo puncta, $[2^2]$ — quoties 4, et denique $[2^3]$ — quoties 8 conspici possunt, designantibus.)

15. Magna crystallorum copia adest, in quibus secundum duas directiones radius lucis incidens neque refringitur, neque bifariam distribuitur. Hujus generis crystallos *duobus opticis axibus praeditos* nominarunt. Duplicis refractionis phaenomena in iis eadem sunt atque in crystallo islandico; in eo tantum discrepant, quod uterque radius irregularis est.

16. Dupl. refr. phaenomena sunt polarisationis phaenomena. Ill. Malus primus est, qui nova phaenomena reflexionis, quibus proprietatum singularium causa *polarisationis* nomen dedit, reperit. Eo vero sensu, quo Malus rem sumpsit, aut in genere sensu theoriae emanationis intellecta polarisatio ea est radii conditio, qua omnes ejus particulae similiter, ratione superficierum reflexionis aut refractionis habita, dispositae sunt; quae quidem particularum dispositio, radio ab aliqua superficie reflexo, non aliter fit, nisi sub angulo incidentiae determinato. Sensu vero theoriae vibrationis sub polarisationis nomine eam conditionem intelligimus, qua omnes vibrationes, quae undae aetheris se propaganti paralleliter perficiuntur, sive si dictae vibrationes

transversales una eademque directione fiunt. Ita superflua est radii polarisati determinatio, modo radium simplicem talem esse radium, in quo transversales vibrationes undae in ea, qua fieri potest, directione fiunt, admonendum censeo.

17. Dupl. refr. phaenomena ad polarisationis phaenomena pertinent; uterque enim radius regularis atque irregularis radii polarisati fiunt. — Quae hoc modo probantur. Constat radium a specula vitrea sub ang. 35°. 25′ reflexum et in aliam sub eodemque angulo incidentem, secundum proprietates supra expositas, radium polarisatum nominari; radius crystalli regularis in superficiem reflectentem incidens eodem modo agit atque radius per reflexionem in plano, plano reflexionis primae speculae parallelo, polarisatus; radius vero irregularis totus per massam vitream transit, quasi in plano, ad planum reflexionis primae speculae perpendiculari, polarisatus esset. — Sunt igitur radius regularis atque irregularis radii polarisati et quidem vario modo; alter radio per reflexionem polarisato, planis reflexionis specularum parallelis; alter vero radio polarisato, planis reflexionis specularum perpendicularibus, respondet. — Analogia haec modo inverso facilius stabilitur. Si radius per reflexionem polarisatus in crystallum, cujus planum principalis sectionis plano reflexionis parallelum est, incidit, radius hic regulariter refractus neque bifissus per crystallum transit; qua conditione radius per reflexionem polarisatus nec aliter, nisi regularis crystalli radius agit, qui per alterum crystallum, planis principalium

sectionum parallelis, secundum eandem directionem transit. Si vero radius per reflexionem polarisatus in crystallum, cujus planum principalis sectionis ad planum reflexionis speculae perpendiculare est, incidit, tanquam radius irregularis per crystallum transit.

18. Radius regularis atque irregularis directionibus perpendicularibus polarisantur; id est: qualicunque positione radii incidentis, utriusque radii refracti polarisationis plana semper inter se perpendicularia sunt. Sub plano vero polarisationis planum ad directionem vibrationum particularum undae aethereae in quovis radio polarisato perpendiculare intelligitur. Perpendiculariter etiam polarisantur radii in crystallis binis axibus praeditis refracti.

B. LEGES.

19. Dupl. refractionis phaenomena in crystallis uno axe praeditis his obtemperant legibus.

1) Alter radius simplicis refractionis legem sequitur, quam ob rem regularis vocatur; alter vero una tantum conditione rationem Sin. anguli incidentiae ad Sin. anguli refractionis constantem observat, nempe quum planum radii incidentis ad axem perpendiculare est.

2) Duabus conditionibus radius regularis atque irregularis in uno eodemque plano cum radio incidente inveniuntur, nempe quum planum radii incidentis ad axem crystalli perpendiculare, et ei parallelum est.

3) Constans est radii regularis velocitas, irre-

gularis vero mutatur, itaque exprimitur: differentiae inter quadrata utriusque radii velocitatis ad quadratum Sin. anguli inter radium irregularem et axem crystalli semper constans est ratio.

20. In crystallis binis opticis axibus praeditis uterque radius est irregularis. Differentiae inter quadrata utriusque radii velocitatis ad productum Sin. angulorum inter directionem utrique radio communem et binos crystalli axes opticos constans est ratio.

C. THEORIA DUPLICIS REFRACTIONIS.

21. In mathesi tantum certa responsa dantur ad interrogationem: quam ob rem? in scientiis vero, quae naturam perscrutantur, etiam in physica, rerum ratio investigatur tantummodo longis non raro, incertisque itineribus, frustraque interdum, sicuti fera quaedam, ut ita dicam, quae in profundissimis silvae latebris a venatoribus sese occuluit. Disquisitiones hujus generis theoriam conficiunt, eo magis ad veritatem appropinquantem, quo probabilius atque intellectu facilius omnia phaenomena, quae ad orbem ejus pertinent, explicat. De causis igitur phaenomenorum refractionis duplicis non dicere asserte, sed verisimillimam tantummodo theoriam a Fresnelio inventam exponere possumus.

22. Dupl. refr. theoria duabus praecipue hypothesibus innititur, quarum altera ad peculiares aetheris vibrationes; altera vero ad constitutionem medii, in quo aetheris undae propagari debent, sese refert. Prima suppositio in eo versatur, quod *vi-*

brationes non in directione radii, sed paralleliter undae, ad quam radius pertinet, seu transversaliter fiunt. Secunda in eo consistit, quod *vibrationes particulae medii, duplici refractione praediti, non eandem in omnibus directionibus undis propagandis conditionem repraesentant; et quaeque particula e serie sua egressa diversae elasticitati occurrit.*

23. Observationes in collisione radiorum polarisatorum institutae Fresnelium ad hypothesin de transversalibus vibrationibus adduxerunt, quam rem postea, omni, qua par erat, mathematica accuratione adhibita, periculis atque theoria collisionis radiorum in genere fundamento positis, probavit. — Arago et Fresnelius, observationes in collisione radiorum polarisatorum instituentes, animadverterunt, duos radios polarisatos, quorum plana polarisationis perpendicularia sunt, actionem mutuam nullam prae se ferre, et, qualiscunque itinerum radiorum sit differentia, eadem intensitate radium ex iis ortum gaudere. Discrepant igitur phaenomena haec cum phaenomenis collisionis radiorum simplicium. Ill. Cauchy, duce analysi infinitorum, ad eandem conclusionem pervenit, et in commentariis academicis parisiensibus pro anno MDCCCXXXI conjecturam Fresnelii affirmat. XXXI et XXXII partem *exercices mathematiques par Cauchy,* ubi altiores hujus rei indagationes locum habent, perlegendi occasionem me non habuisse aegerrime fero.

24. *Fresnelii vibrationum transversalium demonstratio mathematica.*

Supra jam (5) admonuimus absolutae vibrationum aetheris velocitatis constantem esse rationem ad Sin. temporis ab initio motus praeteriti; quam ob rem iisdem signis, quibus in (5) usi sumus, adhibitis, habebimus

$$v = a \sin 2\pi (t - \frac{x}{\lambda}).$$

Duobus radiis polarisatis observatis, quorum plana polarisationis sunt perpendicularia, utriusque velocitatem secundum 3 directiones dissolvere possumus; sint directiones illae: linea ad superf. undae normalis, aliae vero sint, quae in plano ad normalem hanc perpendiculari inveniuntur. Ut res generaliter consideretur, quamque trium harum vibrationum suo tempore incipi ponamus; designatis per α, β, γ temporis intervallis, quae communi epochae t addendae sunt, has absolutas secundum tres illas directiones velocitates obtinebimus

$$a \sin 2\pi (t + \alpha - \frac{x}{\lambda});\ b \sin 2\pi (t + \beta - \frac{x}{\lambda});\ c \sin 2\pi (t + \gamma - \frac{x}{\lambda}).$$

Simili modo pro altero radio polarisato habebimus

$$a' \sin 2\pi (t + \alpha' - \frac{x'}{\lambda});\ b' \sin 2\pi (t + \beta' - \frac{x'}{\lambda});\ c' \sin 2\pi (t + \gamma' - \frac{x'}{\lambda}).$$

Unde patet velocitates has addendas esse, ut totam velocitatem secundum cujusque axis directionem obtineamus. Tali modo

$$a \sin 2\pi (t + \alpha - \frac{x}{\lambda}) + a' \sin 2\pi (t + \alpha' - \frac{x'}{\lambda}) = A \sin 2\pi (t + P)$$

$$b \sin 2\pi (t + \beta - \frac{x}{\lambda}) + b' \sin 2\pi (t + \beta' - \frac{x'}{\lambda}) = B \sin 2\pi (t + Q)$$

$$c \sin 2\pi (t + \gamma - \frac{x}{\lambda}) + c' \sin 2\pi (t + \gamma' - \frac{x'}{\lambda}) = C \sin 2\pi (t + R)$$

ubi $$A^2 = a^2 + a'^2 + 2aa' \cos 2\pi(\alpha - \alpha' + \frac{x' - x}{\lambda})$$

$$B^2 = b^2 + b'^2 + 2bb' \cos 2\pi(\beta - \beta' + \frac{x' - x}{\lambda})$$

$$C^2 = c^2 + c'^2 + 2cc' \cos 2\pi(\gamma - \gamma' + \frac{x' - x}{\lambda}).$$

A^2, B^2, C^2 intensitates particularum vibrantium respectu trium axium exprimunt. Unde patet intensitatem radii, e collisione radiorum polarisatorum orti, per $A^2 + B^2 + C^2$ exprimi. Sed ex observationibus, in radiis polarisatis, quorum polarisationis plana inter se perpendicularia sunt, institutis, elucet intensitatem illam semper constantem esse, qualibuscunque valoribus quantitatum x et x'. Igitur

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2aa' \cos 2\pi(\alpha - \alpha' + \frac{x' - x}{\lambda})$$
$$+ 2bb' \cos 2\pi(\beta - \beta' + \frac{x' - x}{\lambda})$$
$$+ 2cc' \cos 2\pi(\gamma - \gamma' + \frac{x' - x}{\lambda}) = \text{const.}$$

ubi una tantum variabilis quantitas $x' - x$ adest. Unde patet

$$aa' = o, \quad bb' = o, \quad cc' = o.$$

Quia radii polarisati commemorati tantum azimuthis planorum polarisationis inter se differunt, ceteris vero proprietatibus iisdem gaudent, patet, si in altero vibrationes aliquae locum non habeant, iis et alterum carere. Respondentibus vero a et a', b et c', c et b' perspicuum est

$a = o$ simul et $a' = o$

$b = o$ —— $c' = o$

$c = o$ —— $b' = o$.

Unde sequitur: 1) nullas vibrationes longitudinales existere; 2) transversales tantummodo vibrationes locum habere *).

25. Altera hypothesis originem suam e generali methodo constitutionem materiae considerandi ducit. Nemo negabit aquam, nonnullaque alia corpora, aut in genere media ita compacta esse, ut pressio aliqua, seu quilibet alius motus sit, elasticitatem omnibus directionibus aequalem exerceat. Quid impedit, quominus corporibus, quae per crystallisationem formantur, aliam perticularum constitutionem concedamus, nempe talem, quae diversis directionibus diversas elasticitates exerceat? Infra demonstratum erit in quibusdam crystallis tres principales directiones inaequalis elasticitatis, in aliis duas tantummodo existere. Quas directiones Fresnelius *axes elasticitatis crystallorum* nominat. Quae duplex, aut triplex elasticitatis species aliquo modo ex hac hypothesi explicari potest **). Primum

*) Particularum aetheris vibrationum, penduli motui similium, notionem aliquam habere possumus e sequenti in vulgus notissimo phaenomeno. Omnes animadvertisse puto, ardente candela, concavam ad ellychnium superficiem formari. In quam simul atque particula quaedam ellychnii vel minima ceciderit, hanc penduli adinstar a margine ad centrum moveri, ad ipsum ignem interdum ascendere, inde rursus ad marginem, a margine rursus ad centrum et tali modo regulariter vibrationes suas continuare videbimus.

**) Herschel vom Licht, übersetzt von Schmidt pag. 547. §. 989—990.

in crystallis duplici elasticitate praeditis, Huigenius jam rem ita explicabat: crystallorum hujus generis particulas ellipsoides per revolutionem ortas, regulariter et quasi circa unam lineam dispositas, repraesentare. Talis particulae vibrationes prolatae secundum duas directiones propagari possunt; nam secundum axem et aequatorem particularum actio differre debet; quae diversa particularum actio diversas etiam elasticitates efficit. Simili modo crystallorum triplici elasticitate praeditorum particulae tanquam superficies tres diversos axes habentes repraesentari possunt.

Haud negari potest, has hypotheses Huigenii et Fresnelii haud majori audacia atque ingenio excogitatas esse, magna tamen probabilitate gaudere; quae saltem structuram mechanicam crystallorum non subvertunt et clarissime dupl. refr. phaenomena explicant. Fortasse ulteriores crystallographiae progressus hanc hypothesin comprobabunt. Saltem huius veritatis inventio experimentis ac disquisitionibus obnoxia est et non tam aliena a nobis esse videtur, quam vis polarisationis repulsivae et attractivae, quae in crystallis e crystalli axe ad eum perpendiculariter emanat, aut in speculis ad superf. reflectentem perpendiculariter agit. Qualis sit vis haec? quomodo nobis eam vere existere persuaderi potest? et quomodo ad oculorum veluti sensum ejus actionem revocare possumus? Quam rationem inter se habent simplicis refractionis et reflexionis vis attractiva et repulsiva et vis polarisationis, quarum sedes eadem est superficies? Majori tamen malo minus malum praeferendum esse videtur; igitur intellectu faciliorem de diversa mediorum elasticitate hypothesin ceteris praefero; eo etiam magis, quod omnia reliqua exacte alterum ex altero deducuntur atque demonstrationibus mathematicis innituntur.

26. *Theorema. Particula quaedam medii vibrantis, ab aequilibrio egressa, diverso in crystallis elasticitatis obstaculo occurrit; ut vis ex omnibus viribus, quas in particulam illam ceterae particulae exercent, parallela sit directioni, secundum quam particula illa ab aequilibrio egressa est, non necesse est.*

Repraesentent coordinatae x, y, z, puncti cujusdam, in linea r siti, qua totum particulae M egressum designemus, speciales ejus secundum axes x, y, z, egressus; sint ξ, η, ζ, quantitates directionem r determinantes. Dum mutuarum distantiarum ratione, particularum egressus admodum parvi accipiuntur; patet, qualicunque earum inter se actione, vim, ex hoc egressu pendentem, huius egressus longitudini proportionalem esse, quam ob rem, designante $\varphi(\theta)$ ignotam functionem ξ, η, ζ, formam $r.\varphi(\theta)$ induere.

Propter parvum adhuc particulae egressum, eodem modo ceterae particulae in illam vim suam exercebunt. Ex quo sequitur, expressionem vis, e particulae egressu secundum axem x pendentis, ex $r.\varphi(\theta)$, positis $r = x$, $\varphi(\theta) = a$ [ubi a eadem est functio 1, 0, 0, qualis $\varphi(\theta)$ est $F(\xi, \eta, \zeta)$], inventuram esse. Est igitur a quantitas constans. Vi ax secundum tres axes dissoluta, habebimus Ax, $A'x$,

$A''x$, ubi A, A', A'', e ξ, η, ζ, non pendent. Simili modo designemus per By, $B'y$, $B''y$ vim by; per Cz, $C'z$, $C''z$ vim cz, secundum axium directiones dissolutam. Tum vis, e particulae M egressu, qui secundum r fit, orta, his tribus viribus aequivalens erit

$$f = Ax + By + Cz = r(A\xi + B\eta + C\zeta)$$
$$f' = A'x + B'y + C'z = r(A'\xi + B'\eta + C'\zeta)$$
$$f'' = A''x + B''y + C''z = r(A''\xi + B''\eta + C''\zeta).$$

Quarum unaquaeque secundum directionem r et alteram ad hanc perpendicularem dissolvi potest; primarum summa aequalis est $F = f\xi + f'\eta + f''\zeta$; ceterae vero tres, in uno eodemque plano sitae et in diversis directionibus agentes, in genere non extinguuntur. Ex quo sequitur, vim unicam, ex iis pendentem, una cum vi F novam vim, particulam M in aequilibrii statum reducentem, non in directione r igitur agentem, efficere. *In particulam itaque, e serie sua egressam, agunt elasticitatis vires secundum directionem, quae cum egressus directione angulum quemdam facit.*

Theorema. Dantur ceterum directiones, secundum quas particula e serie sua egressa si fuerit, secundum easdem vires elasticitatis in illam agunt. Tres directiones perpendiculares dantur, hac proprietate gaudentes.

Quod theorema ad hoc problema resolvendum reducitur; determinandi sunt reales valores quantitatum ξ, η, ζ, quae Cos. angulorum inter directionem elasticitatis et axium significant. Quia

$$f : f' : f'' = \xi : \eta : \zeta, \quad \text{patet}$$

$$1)\quad (A'\xi + B'\eta + C'\zeta)\xi = (A\xi + B\eta + C\zeta)\eta$$
$$2)\quad (A''\xi + B''\eta + C''\zeta)\eta = (A'\xi + B'\eta + C'\zeta)\zeta$$
$$3)\quad (A\xi + B\eta + C\zeta)\zeta = (A''\xi + B''\eta + C''\zeta)\xi.$$

Posito $\frac{\xi}{\zeta} = m$, $\frac{\eta}{\zeta} = n$, ex aeq. 2) et 3) invenientur

$$m = \frac{Am + Bn + C}{A''m + B''n + C''} \ldots (1) \quad n = \frac{A'm + B'n + C'}{A''m + B''n + C''} \ldots (2)$$

Valore quantitatis m ex aeq. (2) determinato, eoque in (1) substituto, et denique positis

$$g = A''(AB'' - A''B) + B''(A'B'' - A''B')$$
$$h = A''(C''A - CA'') + B''(A'C'' - A''C')$$
$$\quad - A'B''(A + B' - C'') - A''B'(A - B' + C'') + 2A'A''B$$
$$k = C(A''B' - A'B'') + A'(AB' - A'B)$$
$$\quad - A'C''(A + B' - C'') - A''C'(A - B' + C'') + 2A'A''C$$
$$l = C'(A''C' - A'C'') + A'(CA' - AC'),$$

hanc tertii gradus aequ. obtinebimus

$$gn^3 + hn^2 + kn + l = o.$$

Unde sequitur n, pariter atque m, unum valorem realem habere. Datur igitur una saltem recta linea, quae conditioni satisfacit, ut particula, hujus rectae lineae directione e serie egressa, secundum eandem directionem vim elasticitatis exerceat. Et ceteri duo, qui dantur valores pro n, item reales sunt, nam posito $\xi = o$, obtinebimus

$$B'n^2 - (B' - C'')n - C = o$$

cujus aequ. utraque radix non imaginarios pro n valores exhibet; et exinde patet, utrumque novum axem inter se perpendicularem esse. E $\xi = o$ sequitur, axes hos ad axem x perpendiculares esse.

Quos tres axes Fresnelius *axes elasticitatis* nominat, eosque principales crystalli axes esse putat.

Nota. 9 quantitates constantes illae, quae in praecedentibus aequ. inveniuntur, ad 6, determinatis conditionibus $B = A'$, $C' = B''$, $A'' = C$, reducantur licet; sed, ut haec res, multaeque aliae accuratius pertractentur, nullum in hac angusta dissertatione spatium datur.

27. Brevitatis atque simplicitatis causa, axium coordinatarum et axium elasticitatis directiones inter se congruere sumamus; tum erit

$$\left.\begin{array}{l} A' = A'' = o \\ B'' = B = o \\ C = C' = o \end{array}\right\} \begin{array}{l} f = Ax = Ar\xi \\ f' = B'y = B'r\eta \\ f'' = C''z = C''r\zeta, \end{array}$$ unde

$$F = r(A\xi^2 + B'\eta^2 + C''\zeta^2).$$

Quia elasticitatis vires ad quadratum velocitatis rationem habent, designata per v velocitate undae, in crystallorum refringente medio propagandae, obtinebimus

$$v^2 = \frac{1}{\lambda} F = \frac{1}{\lambda} r(A\xi^2 + B'\eta^2 + C''\zeta^2)$$

quae aequ. superficiem curvam aliquam in genere exprimet.

Designata per λa^2 elasticitatis vi, particulae, directione axis x egressae, respondente, per λb^2 — vi elasticitatis ratione axis y, per λc^2 — ratione axis z habita; egressuum illorum velocitates erunt a, b, c; et valor quantitatis v^2 ad axes x, y, z erit $\frac{1}{\lambda} rA$, $\frac{1}{\lambda} rB'$, $\frac{1}{\lambda} rC''$; igitur

$$\frac{1}{\lambda} rA = a^2; \quad \frac{1}{\lambda} rB' = b^2; \quad \frac{1}{\lambda} rC'' = c^2;$$

his valoribus in aequ. praecedente substitutis, hanc *aequ. superficiei elasticitatis* obtinebimus

$$v^2 = a^2\xi^2 + b^2\eta^2 + c^2\zeta^2,$$

quae, posito $\xi = \cos X$, $\eta = \cos Y$, $\zeta = \cos Z$ in aequ. Fresnelii transmutatur

$$v^2 = a^2 \cos^2 X + b^2 \cos^2 Y + c^2 \cos^2 Z.$$

In locum hujus aequ. polaris aliam sufficere possumus, quae per coord. x, y, z exprimitur, nempe substitutis $\frac{x}{v}$, $\frac{y}{v}$, $\frac{z}{v}$ loco ξ, η, ζ obtinebimus

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2.$$

28. Sectione in hac superficie per planum $z = px + qy$ facta, duabus tantummodo directionibus sectionem hanc circulum esse inveniemus. Ex aeq.

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2$$

$$\text{et} \quad z = px + qy \quad \text{sequitur}$$

$$r^4 = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2(px + qy)^2$$

$$r^4 = r^2(x^2 + y^2 + (px + qy)^2), \quad \text{unde}$$

$$(1 + p^2)r^2 = a^2 + c^2p^2$$

$$(1 + q^2)r^2 = b^2 + c^2q^2$$

$$c^2pq = r^2pq.$$

Si $a > b > c$ est, necesse est, ut $q = o$ sit;

$$\text{tum} \quad r = b \quad \text{et} \quad p = \pm\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}.$$

Quarum ultima aequ. pro angulo inclinationis plani secantis ad planum xy binos valores oppositos haberi indicat: ex altera vero sequitur, quodque planum, cujus sectio circulus est, per medium axem elasticitatis transire. Unde facile intelligitur, radio in crystallum tali directione incidente, ut vibrationes undae in circuli sectione perficiantur, omni itaque directione eodem obstaculo occurrant, radium ad vibrationes illas perpendicularem de via non deflectere. Directio haec ea ipsa est, secundum quam radius neque deflectit, neque bifariam distribuitur. Illam *crystalli axem* in vulgus vocant; Fresnelius vero, secundum opinionem cujus crystalli axis alio munere fungitur, lineam hanc *axem crystalli opticum* nominat. Unde perspicuum est, in crystallis tribus elasticitatis axibus praeditis *duos tantum axes opticos dari*, quorum directionem lineae ad sectiones circuli perpendiculares designant.

Posito $b = c$, est $p = \infty$; hoc sibi vult: bina plana secantia congruere et e binis axibus opticis unum fieri. Unde sequitur, in crystallis uno axe optico praeditis duas elasticitates, vim suam perpendiculariter exercentes, inveniri; perspicuum etiam est in hoc crystallorum genere unam tantum sectionem circuli esse, ad directionem axis perpendicularem.

29. Superf. elasticitatis $v^2 = a^2\xi^2 + b^2\eta^2 + c^2\zeta^2$ sectio per planum $z = px + qy$ curva quaedam linea, in plano sita, erit. Si per $x = \alpha z$, $y = \beta z$ aeq. radii vectoris hujus sectionis designemus, et quia

$$\xi = \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2+\beta^2}}; \quad \eta = \frac{\beta}{\sqrt{1+\alpha^2+\beta^2}}; \quad \zeta = \frac{-1}{\sqrt{1+\alpha^2+\beta^2}},$$

polaris superficiei elasticitatis aequ. in alteram transformabitur

$$v^2(1 + \alpha^2 + \beta^2) = a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2.$$

Maximum, minimumve valoris radii vectoris conditione $dv = o$ exprimitur. Quam ob rem differentiando polarem superf. elasticitatis aequ. obtinebimus

$$v^2(\alpha + \beta \overset{\alpha}{d}\beta) = a^2\,\alpha + b^2\,\beta\,\overset{\alpha}{d}\beta.$$

Aequ. plani, quo rad. vector continetur, transformatur in

$$1 = p\alpha + q\beta, \text{ cujus differentiale erit}$$

$$o = p + q\,\overset{\alpha}{d}\beta, \quad \text{unde}$$

$$\overset{\alpha}{d}\beta = -\frac{p}{q},$$

quo valore in aequ. superf. elast. substituto, erit

$$v^2(\alpha q - \beta p) = a^2\alpha q - b^2\beta p,$$

hujus aequ. et $1 = p\alpha + q\beta$ ope inveniemus

$$\alpha = \frac{(v^2 - b^2)p}{(v^2 - a^2)q^2 + (v^2 - b^2)p^2};\quad \beta = \frac{(v^2 - a^2)q}{(v^2 - a^2)q^2 + (v^2 - b^2)p^2};$$

his valoribus suo loco substitutis, hanc denique aequ. obtinebimus

$$(v^2 - b^2)(v^2 - c^2)p^2 + (v^2 - c^2)(v^2 - a^2)q^2$$
$$+ (v^2 - a^2)(v^2 - b^2) = o$$

cujus aequ. radices maximum minimumque valorem radii vect. aut velocitatis diterminantes, simul étiam indicant duas tantummodo velocitates conditioni maximi mininive satisfacere. Tali modo theoria duce, vibrationes duplici cum velocitate progredi posse, undam in crystallum intrantem in duas sese partes dividere duosque igitur radios apparere debere invenimus. - Sed infra accuratius hanc rem pertractabimus.

30. Maximo minimoque valore velocitatis aut radii vect. invento, ipsam undae superficiem ex eo determinare possumus, ut ea planum, plano $z = px + qy$

parallelum, ab eoque ad v distans, tangere debeat. Inveniamus primum itaque planum tangens, et postea aequ. superficiei. Sit x, y, z, punctum contactus superficiei undae cum plano tangente, cujus a centro superficiei distantiam per v designemus. Positis $p = \overset{x}{d}z$, $q = \overset{y}{d}z$, habebimus

$$v^2 = \frac{(px + qy - z)^2}{1 + p^2 + q^2}$$

$$\text{aut} \quad (px + qy - z)^2 = v^2(1 + p^2 + q^2);$$

quae aequ. una cum aequ.

$$(v^2 - b^2)(v^2 - c^2)p^2 + (v^2 - c^2)(v^2 - a^2)q^2$$
$$+ (v^2 - a^2)(v^2 - b^2) = o$$

exhibet

$$v^4(1 + p^2 + q^2) - v^2((b^2 + c^2)p^2 + (c^2 + a^2)q^2 + (a^2 + b^2))$$
$$+ b^2c^2p^2 + c^2a^2q^2 + a^2b^2 = o$$

unde, positis

$$b^2p^2 + c^2q^2 + a^2 = m; \quad c^2p^2 + a^2q^2 + b^2 = n,$$

$$(px + qy - z)^2 = \frac{(m+n)}{2} \pm$$

$$\frac{\sqrt{\overline{m-n}^2 - 4[((b^2-c^2)p^2 + (c^2-a^2)q^2)(a^2-b^2) + (b^2-c^2)(c^2-a^2)p^2q^2]}}{2}.$$

Hujus aequ. ope, clar. Amperius superficiem undae intra crystallum propagandae tali modo determinat. Ponamus

$$x = x'\sqrt{b^2 - c^2}; \quad y = y\sqrt{c^2 - a^2}; \quad z = z'\sqrt{a^2 - b^2};$$

tum aequ. $dz = pdx + qdy$ et $dz' = p'dx' + q'dy'$ exhibent

$$p = p'\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2}}; \quad q = q'\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{c^2 - a^2}};$$

habemus itaque

1) $px+qy-z=(p'x'+q'y'-z')\sqrt{a^2-b^2}$

2) $m+n=(a^2-b^2)\left(\frac{b^2+c^2}{b^2-c^2}p'^2+\frac{c^2+a^2}{c^2-a^2}q'^2+\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right)$

3) $m-n=(a^2-b^2)(1+p'^2+q'^2)$

4) $((b^2-c^2)p^2+(c^2-a^2)q^2)(a^2-b^2)+(b^2-c^2)(c^2-a^2)p^2q^2$
$$=(a^2-b^2)(p'^2+q'^2+p'^2q'^2).$$

Positis

$$\frac{b^2+c^2}{b^2-c^2}=g;\ \frac{c^2+a^2}{c^2-a^2}=h;\ \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=k;\ \frac{gh+1}{g+h}=-k$$

plani tangentis aequ. haec erit

$$(p'x'+q'y'-z')^2=\tfrac{1}{2}\left\{gp'^2+hq'^2+k\pm\sqrt{(1+p'^2+q'^2)^2-4(p'^2+q'^2+p'^2q'^2)}\right\}$$

aut

$$(p'x'+q'y'-z)^2=\tfrac{1}{2}\left\{gp'^2+hq'^2+k\pm\sqrt{(1-p'^2-q'^2)^2-4p'^2q'^2}\right\}.$$

Ad evitandam assiduam signorum, supra quantitates x, y, z, p, q positorum, repetitionem, utamur x, y, z, p et q loco x', y', z', p' et q': ad finem vero calculi rursus valores eorum substituamus. Tali modo

$$(px+qy-z)^2=\tfrac{1}{2}\left\{gp^2+hq^2+k\pm\sqrt{(1-p^2-q^2)^2-4p^2q^2}\right\},$$

cujus aequ. differentiale sumpto, ratione p et q habita, hi valores pro x et y exhibentur

$$x=\frac{p}{2(px+qy-z)}\left\{g\mp\frac{1-p^2-q^2}{\sqrt{(1-p^2-q^2)^2-4p^2q^2}}\right\}$$

$$y=\frac{q}{2(px+qy-z)}\left\{h\mp\frac{1+p^2-q^2}{\sqrt{(1-p^2-q^2)^2-4p^2q^2}}\right\}.$$

Prima aequ. per p multiplicata, secunda per q, positoque brevitatis causa $\sqrt{(1-p^2-q^2)^2-4p^2q^2}=N$; hanc expressionem obtinebimus

$$z=\frac{1}{2(px+qy-z)}\left\{-k\mp\frac{1-p^2-q^2}{N}\right\}.$$

Ex his aequ. inveniemus

$$\frac{yz}{q}+\frac{zx}{p}-\frac{xy}{pq}=\frac{1}{4(px+qy-z)^2}\Big\{-(gh+k(g+h))\pm$$

$$\frac{2(gp^2+hq^2+k)}{N}+1\Big\}$$

$$=\frac{1}{2(px+qy-z)^2}\left\{1\pm\frac{gp^2+hq^2+k}{N}\right\}=\pm\frac{1}{N}.$$

Ex iisdem tribus aequ. facile deducuntur

$$py+qx=\frac{pq}{2(px+qy-z)}\left(g+h-2\left(\frac{yz}{q}+\frac{zx}{p}-\frac{xy}{pq}\right)\right)$$

unde $\dfrac{x^2+y^2-\frac{1}{2}(g+h)}{xy}=\dfrac{1-p^2-q^2}{pq}$.

Simili modo ex

$$y-qz=\frac{q}{2(px+qy-z)}\left((h+k)-2p^2\left(\frac{yz}{q}+\frac{zx}{p}-\frac{xy}{pq}\right)\right)$$

sequitur $\dfrac{y^2+z^2-\frac{1}{2}(h+k)}{yz}=\dfrac{1-p^2+q^2}{q}$

denique

$$x-pz=\frac{p}{2(px+qy-z)}\left((k+g)-2q^2\left(\frac{yz}{q}+\frac{zx}{p}-\frac{xy}{pq}\right)\right)$$

unde $\dfrac{z^2+x^2-\frac{1}{2}(k+g)}{zx}=\dfrac{1+p^2-q^2}{p}$.

Ponamus $\dfrac{y^2+z^2-\frac{1}{2}(h+k)}{yz}=\dfrac{1-p^2+q^2}{q}=T$

$$\frac{z^2+x^2-\frac{1}{2}(k+g)}{zx}=\frac{1+p^2-q^2}{p}=U$$

$$\frac{x^2+y^2-\frac{1}{2}(g+h)}{xy}=\frac{1-p^2-q^2}{pq}=V$$

et quia $Tq+Up=2$; $T-Vp=2q$; $T-Vq=2p$, erit

$$T^2+U^2+V^2-TUV-4=o, \text{ aut}$$

$$x^2(y^2+z^2-\tfrac{1}{2}(h+k))^2+y^2(z^2+x^2-\tfrac{1}{2}(k+g))^2+ z^2(x^2+y^2-\tfrac{1}{2}(g+h))^2$$
$$-(y^2+z^2-\tfrac{1}{2}(h+k))(z^2+x^2-\tfrac{1}{2}(k+g)) (x^2+y^2-\tfrac{1}{2}(g+h))-4x^2y^2z^2=o.$$

Quae aequ., omnibus reductionibus factis, erit

$$\tfrac{1}{2}(h+k)x^4+\tfrac{1}{2}(k+g)y^4+\tfrac{1}{2}(g+h)z^4-\tfrac{1}{2}(h+k)gx^2 -\tfrac{1}{2}(k+g)hy^2-\tfrac{1}{2}(g+h)kz^2$$
$$-gy^2z^2-hz^2x^2-kx^2y^2+\tfrac{1}{8}(h+k)(k+g)(g+h)=o.$$

Substitutis in hac aequ. $\frac{x^2}{b^2-c^2}$, $\frac{y^2}{c^2-a^2}$, $\frac{z^2}{a^2-b^2}$ loco x^2, y^2, z^2 et quia adhuc

$$\tfrac{1}{2}(g+h)=\frac{-(a^2-b^2)c^2}{(b^2-c^2)(c^2-a^2)};\ \tfrac{1}{2}(h+k)=\frac{-(b^2-c^2)a^2}{(c^2-a^2)(a^2-b^2)};$$
$$\tfrac{1}{2}(k+g)=\frac{-(c^2-a^2)b^2}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}$$

Fresnelii aequ. superficiei undae, se intra crystallum propagantis, obtinebimus

$$(x^2+y^2+z^2)(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)-(b^2+c^2)a^2x^2- (c^2+a^2)b^2y^2-(a^2+b^2)c^2z^2+a^2b^2c^2=o.$$

31. Haec aequ. in duos factores secundi gradus dissolvi non potest. Posito vero $b=c$, aequ. haec in duos factores dissolvitur

$$(a^2x^2+b^2(y^2+z^2)-a^2b^2)(x^2+y^2+z^2-b^2)=o.$$

quorum alter aqu. ellipsoidis per revolutionem ortae, alter vero sphaerae, cujus rad. $=b$ est, repraesentat.

Tali modo comprobata est Huigenii hypothesis de ellipsoidibus per revolutionem ortis, quarum formam superficies undae radii irregularis, in crystallo islandico se propagantis, induit.

32. Rerum igitur, quae ad explicanda dupl. refr. phaenomena necessaria sunt, cognitione per analysin acquisita, ad physicam phaenomenorum explicationem eorumque leges interpretandas accedamus. Incipiamus a crystallis uno optico axe praeditis et spathum islandicum observemus. Quid de hoc dictum erit, ad alios etiam referendum est.

33. *De duplici radio in spatho islandico.*

Ad rem probe perspiciendam observemus crystallum spathi islandici ita factum, ut superficies, in quam radius incidit, axi crystalli optico parallela sit.

1) Incidat radius in plano principalis crystalli sectionis. Ex iis, quae supra commemoravimus (7), unda in densiore medio propaganda, radium a primaria directione sua versus lineam ad crystalli superficiem perpendicularem deflectere facile intelligitur. Vibrationes undae binis diversis elasticitatibus, alteri ex altera non pendentibus, occurrentes, sine omni dubio cum diversa velocitate perfici debent; hoc vero non aliter fieri potest, nisi duae undae formentur, quarum vibrationes particularum duabus, altera ex altera non pendentibus, viribus subjectae erunt. Quum vero duae adsint undae, vibrationes suas secundum diversas directiones perficientes: *duo etiam radii adesse debent*, qui cum diversa velocitate per totum medium transibunt. Unius illarum undae vibrationes aequali per totum crystallum obstaculo (quae conditio in simplici refractione locum habet), secundum directionem ad

axem, aut in genere ad planum principalis sectionis perpendicularem, occurrentes, cum aequali velocitate propagari debent; quam ob rem et radius, ad hanc undam pertinens, constante velocitate gaudere debet. Quia vero vibrationes undae ejus ad planum sectionis principalis perpendiculares sunt, *ipse in hoc plano inveniri atque simplicis refractionis legem sequi debet.* Vibrationes vero undae alterius radii plano sectionis principalis parallelae et *alterum radium in eodem plano inveniri debere* manifestant.

2) Incidat radius in plano ad axem perpendiculari. Radio hoc in crystallum intrante, vibrationes particularum undae, ad hunc radium pertinentis, in duas, propter diversas elasticitatis vires, diversae velocitatis vibrationum species dividi debent; quam ob rem duo etiam radii oriri debent et uterque in plano radii incidentis invenietur; nam vibrationes particularum undae unius radii, elasticitati, vim suam secundum directionem ad axem perpendicularem exercenti, objectae, in plano actionis suae permanere; vibrationes vero alterius in plano, plano principalis sectionis parallelo inveniri debent. Quia vero elasticitas in plano ad axem perpendiculari constans est, quicunque sit angulus incidentiae, patet, *radium irregularem hac conditione simplicis refractionis legem observare, atque directionem ejus una cum directione radii regularis in plano radii incidentis inveniri.*

3) Incidat radius in directione optici axis crystalli. Quia hac conditione elasticitatis vis in omnibus ad

axem perpendicularibus directionibus constans est, nulla est ratio, cur diversae vibrationes locum habeant, atque diversae velocitates oriantur. Nulla igitur est ratio, cur radius in duos alios dividatur.

E considerata a nobis prima duplicis refractionis phaenomenorum conditione facile intelligitur, vibrationum particularum undae regularis radii directionem cum axe optico angulum formare, qui complementum est anguli inter directionem ipsius radii et axis optici. Si vero hujus radii directio cum axe congruit, vibrationes ejus ad eum perpendiculares sunt; perpendicularibus etiam ad axis directionem vibrationibus particularum undae radii regularis, patet, *regularis atque irregularis radii directiones confluere.*

4) Una restat consideranda conditio, nempe quum planum incidentiae quemdam angulum cum plano principalis sectionis crystalli formet. Ne supervacanea repetamus, oramus te, Lector benevole, ut constructionem, quam (9) continet, animo sibi fingas; sit modo pro superficie sphaerae superficies ellipsoidis per revolutionem orta. Punctum intersectionis plani, ad ellipsoidem tangentis, cum linea ck designemus per x, y; angulum incid. per θ; angulum refractionis radii regularis per θ', radii vero irregularis per θ''. Sint x'', y'', z'', coord. extremitatis radii irreg. r'', et angulus ω'' inter planum, per hanc lineam perpendiculariter ad superficiem crystalli ductum, et inter planum cord. zx. Tum habebimus

$$\dot{x} = ck\cos\omega = \frac{r'\cos\omega}{\sin\theta'} = \frac{\cos\omega}{\sin\theta}$$

$$\dot{y} = ck\sin\omega = \frac{r'\sin\omega}{\sin\theta'} = \frac{\sin\omega}{\sin\theta}.$$

Litteris ξ, η, ζ determinantibus planum tangens ad ellipsoidem, per revolutionem ortam, erit

$$(\dot{x} - x'')\xi + (\dot{y} - y'')\eta - \zeta z'' = o.$$

Quae aequ. una cum aequ. ellipsoidis per revol. ortae

$$a^2x^2 + b^2(y^2 + z^2) = a^2b^2 \quad \text{exhibet}$$

$$\frac{dx''}{dz''} = -\frac{\xi}{\zeta} = -\frac{a^2x''}{b^2z''}; \quad \frac{dy''}{dz''} = -\frac{\eta}{\zeta} = -\frac{y''}{z''}.$$

Unde $$\xi = \frac{a^2x''}{\sqrt{a^4x''^2 + b^4(y''^2 + z''^2)}} = \frac{a^2r''\cos\omega''\sin\theta''}{N}$$

$$\eta = \frac{b^2y''}{\sqrt{a^4x''^2 + b^4(y''^2 + z''^2)}} = \frac{b^2r''\sin\omega''\sin\theta''}{N}$$

$$\zeta = \frac{b^2z''}{\sqrt{a^4x''^2 + b^4(y''^2 + z''^2)}} = \frac{b^2r''\cos\theta''}{N}.$$

$$N = \sqrt{a^4x''^2 + b^4(y''^2 + z''^2)}.$$

Substitutis in aequ. plani tangentis valoribus loco $\xi\dot{x} + \eta\dot{y}$ et $\xi x'' + \eta y'' + \zeta z''$, iisque ad formam simplicissimam reductis, obtinebimus

$$r''\sin\theta''(a^2\cos\omega''\cos\omega + b^2\sin\omega''\sin\omega) - a^2b^2\sin\theta = o.$$

Unde

$$\cos(\omega'' - \omega) = -\left(\frac{a^2 - b^2}{b^2}\right)\cos\omega''\cos\omega + \frac{a^2\sin\theta}{r''\sin\theta''} \ldots (1)$$

$$\cos(\omega'' - \omega) = \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right)\sin\omega''\sin\omega + \frac{b^2\sin\theta}{r''\sin\theta''} \ldots (2).$$

Unde facile intelligur, *angulos ω'' et ω inaequales esse; irregularem igitur radium non semper cum radio regulari in plano radii incidentis inveniri.*

34. Valoribus angulorum ω'' et ω e valore angulorum θ et θ' non pendentibus, aequationes (1) et (2) differentiando transformantur in

$$-\sin(\omega''-\omega)\, d(\omega''-\omega) =$$
$$\left(\frac{a^2-b^2}{b^2}\right)(\cos\omega \sin\omega''\, d\omega'' + \cos\omega'' \sin\omega\, d\omega);$$
$$-\sin(\omega''-\omega)\, d(\omega''-\omega) =$$
$$\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)(\sin\omega \cos\omega''\, d\omega'' + \sin\omega'' \cos\omega\, d\omega).$$

Unde $a^2(\cos\omega \sin\omega''\, d\omega'' + \cos\omega'' \sin\omega\, d\omega) =$
$$b^2(\sin\omega \cos\omega''\, d\omega'' + \sin\omega'' \cos\omega\, d\omega).$$

Ex hac aequ. facile intelligi potest, si $\omega = o$ est, etiam $\omega'' = o$ esse; si $\omega = 90°$ est, etiam $\omega'' = 90°$ esse: i. e. *quum planum radii incidentis aut parallelum sit plano principalis sectionis crystalli, aut perpendiculare ad illum: radium irregularem in uno eodemque plano cum radio incidente inveniri.*

35. Substituto in quadam aequ. (1), aut (2) valore $\omega'' = \omega = 90°$, obtinebimus

$$\sin\theta'' = \frac{a^2 \sin\theta}{r''} = a \sin\theta.$$

i. e. *sin. anguli refractionis radii irregularis ad sin. anguli radii incidentis constans est ratio, quum planum radii incidentis perpendiculare sit ad planum principalis sectionis crystalli.*

Si vero plana haec parallela inter se sunt, non est constans ratio Sin. anguli alterius radii ad Sin. anguli alterius; nam substituto valore $\omega'' = \omega = o$ in aequ. (1), aut (2), exhibetur

$$\sin\theta'' = \frac{b^2}{r''} \sin\theta = \frac{b \sin\theta'}{r''}.$$

Sed quia sectio ellipsoidis per revolutionem ortae per planum principalis sectionis crystalli ellipsis est, cujus axes sunt $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$, habebimus

$$b : a = b \cos\theta' : r'' \cos\theta'',$$

$$\text{aut} \quad r'' = \frac{a \cos\theta'}{\cos\theta''}.$$

Substituto hoc valore in aequ. praecedente, obtinebimus

$$tg\,\theta'' = \frac{b}{a}\,tg\,\theta'. \quad *)$$

36. His omnibus de radiis bifissis in uno crystallo praemissis, facilius in binis crystallis phaenomena intelligi possunt.

1) Radius incidens in plano principalis sectionis invenitur, quod in utroque crystallo eandem directionem habere ponamus; exinde patet, elasticitatem per totum crystallorum spatium in vibrationes vim suam una eademque directione exercere; nullam igitur esse rationem, cur radius, e vibrationibus suis pendens, in duobus crystallis diversas directiones sequatur. Hac conditione duo crystalli unum, cuius attitudo altitudini utriusque crystalli aequalis est, repraesentant.

2) Quando unumquemlibet crystallorum vertere incipimus, uterque radius unius crystalli respectu

---

*) Haec ratio deducendi leges dupl. refractionis brevius atque facilius mihi ea, qua Malus et Biot utebantur, videtur.

alterius, in quo alia est elasticitatis virium directio, tanquam radius incidens considerandus erit; quam ob rem post ea omnia, quae superius de radiis bifissis commemoravimus, repetitionem superfluam esse credo. Designatis itaque radiis regulari atque irregulari in uno crystallo per F_o et F_e, et in altero binis, e primo ortis, per F_{oo} et F_{oe}, ex altero per F_{eo}, F_{ee}, hanc cujusque illorum intensitatis expressionem habebimus

$$\left.\begin{array}{l} F_{oo} = F_o \cos^2 i \\ F_{oe} = F_o \sin^2 i \end{array}\right\} \begin{array}{l} F_{eo} = F_e \sin^2 i \\ F_{ee} = F_e \cos^2 i. \end{array}$$

i, est angulus inter plana principalium sectionum utriusque crystalli.

Unde sequitur, ad ang. 45° omnium radiorum intensitates aequales esse; ad ang. 90° duos tantum radios: regularem atque irregularem locum habere. Positionibus radiorum hac conditione in utroque crystallo comparatis, animadvertimus, radium irregularem, ad secundum crystallum pertinentem, locum radii regularis, regularem vero locum irregularis obtinere. Phaenomenon hoc tali modo explicari potest. Vibrationes radii regularis in primo crystallo, ad planum principalis sectionis perpendiculares, elasticitatis vi in plano earum directioni parallelo et minori adhuc obstaculo occurrentes, in hoc plano continuari debent majorique cum velocitate. Quum vero vibrationes radii alicuius in plano polarisationis permaneant, radium hunc radium irregularem esse constat. Simili modo et alter radius e radio irregulari in regularem transmutatur.

37. *De radiis bifissis in crystallis binis opticis axibus praeditis.*

Divisionis radii in his etiam crystallis explicatio nullam difficultatem offert. Incidat radius in crystalli superficiem sub angulo quodam. Vibrationes ejus, tribus diversis elasticitatibus subjectae, secundum tres etiam directiones dissolvi debent. Sed quia jam constat, transversales tantum vibrationes locum habere, patet, nullas esse vibrationes in plano polarisationis, in quo radius invenitur. Velocitate vero utriusque reliquae vibrationis diversa, unda, se in crystallo propagans, in duas partes dividi, *duoque radii oriri debent.*

Si radius secundum cujusdam optici axis directionem in crystallum incidit; vibrationes undae ejus, omnibus directionibus aequali velocitatis vi (28) occurrentes, cum aequali velocitate propagabuntur et radius neque deflexus, neque bifissus axis directionem sequetur.

38. Biot, qui plures in crystallis, binis axibus praeditis, observationes instituit, ad analogiam crystallorum cum uno axe, in illis etiam crystallis alterum radium regularem, alterum irregularem nominavit, atque primum simplicis refractionis leges observare persuasum sibi habuit. Sed serioribus temporibus a Fresnelio institutae observationes utrumque radium irregularem esse docuerunt.

Quadratorum utriusque radii velocitatis differentia constante est ratione ad productum sinuum angulorum inter diametrale superficiei planum, *cujus axes maximas minimasque vibrationum velocitates exprimunt, et utramque circuli sectionem.*

Sit planum diametrale $z = px + qy$, quod cum utraque circuli sectione angulos u et u' format. Quantitates, planum hoc determinantes, respectu axium x, y, z, habito, erunt

$$\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \frac{-1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Quantitates, directionem opticorum axium determinantes sunt (28)

$$-\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}, \quad o, \quad -\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}$$

$$-\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}, \quad o, \quad \sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}.$$

Ex quo sequitur

$$\cos u = \frac{\sqrt{b^2-c^2} - p\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2-c^2}.\sqrt{1+p^2+q^2}};$$

$$\cos u' = -\frac{\sqrt{b^2-c^2} + p\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2-c^2}.\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Unde $(\cos u + \cos u')^2 = \dfrac{4p^2(a^2-b^2)}{(a^2-c^2)(1+p^2+q^2)}$;

$$(\cos u - \cos u')^2 = \frac{4(b^2-c^2)}{(a^2-c^2)(1+p^2+q^2)}$$

$$\frac{1}{p^2} = \frac{(a^2-b^2)(\cos u - \cos u')^2}{(b^2-c^2)(\cos u + \cos u')^2}$$

$$-\frac{q^2}{p^2} = \frac{(b^2-c^2)(c^2-a^2)(\cos u + \cos u')^2}{(b^2-c^2)(c^2-a^2)(\cos u + \cos u')^2}$$

$$+\frac{(c^2-a^2)(a^2-b^2)(\cos u - \cos u')^2 + 4(a^2-b^2)(b^2-c^2)}{(b^2-c^2)(c^2-a^2)(\cos u + \cos u')^2}.$$

Duo valores quantitatis v^2, quorum differentiam invenire volumus, aequatione

$$(v^2-b^2)(v^2-c^2)p^2+(v^2-c^2)(v^2-a^2)q^2+(v^2-a^2)(v^2-b^2)=o$$

continentur. Hac aequ. dissoluta, atque loco $\frac{q^2}{p^2}$ et $\frac{1}{p^2}$ valoribus eorum substitutis in aequ.

$$v^4(1+\frac{q^2}{p^2}+\frac{1}{p^2})-v^2((b^2+c^2)+(c^2+a^2)\frac{q^2}{p^2}+(a^2+b^2)\frac{1}{p^2})$$

$$+b^2c^2+c^2a^2\frac{q^2}{p^2}+a^2b^2\frac{1}{p^2}=o$$

obtinebimus

$$v^4-v^2((c^2+a^2)+(c^2-a^2)\cos u\cos u')+c^2a^2$$
$$\tfrac{1}{4}(c^2-a^2)^2(\cos^2 u+\cos^2 u')+\tfrac{1}{2}(c^4-a^4)\cos u\cos u'=o.$$

Unde

$$v^2=\tfrac{1}{2}((c^2+a^2)+(c^2-a^2)\cos u\cos u')\pm\tfrac{1}{2}(c^2-a^2)\sin u\sin u'.$$

Differentia denique quadratorum velocitatis hoc modo exprimitur

$$(c^2-a^2)\sin u\sin u'.$$

q. e. d.

39. Duobus axibus congruentibus, differentiae quadratorum velocitatis lex in crystallis, uno axe optico praeditis, facile perspicitur, et exprimitur hoc modo: *quadratorum utriusque radii velocitatis differentia constante est ratione ad quadratum sinus anguli inter opticum axem et radium irregularem.*

LIBRI, QUI DUPLICEM REFRACTIONEM PERTRACTANT.

1) *Tractatus de lumine.* Opera reliqua Huigenii. Tom. II.

2) *Mémoire sur les mouvemens de la lumière dans les milieux diaphanes*, par Laplace. Mém. de l'institut. tom. X 1809.

3) *Traité de la double réfraction de la lumière dans les substances cristallisées*, Mém. couronné par l'institut dans la séance publique du 2 janvier 1811, par E. Malus.

4) *Traité de physique*, par Biot. Tom. III et IV.

5) *Observations sur la nature des forces qui partagent les rayons lumineux dans les cristaux doués de la double réfraction*, par Biot. Mém. de l'institut 1813—1815 pag. 221—227 et 228—234.

6) *Détermination d'un théorème du quel on déduit toutes les lois de la réfr. ordinaire et extraordinaire*, par M. Ampère. Mém. de l'institut 1813—1815. pag. 235.

7) *Mémoire sur les lois générales de la double réfraction et de la polarisation dans les corps régulièrement cristallisés*, par Biot. Mém. de l'institut. Tom. III. 1818. pag. 177—384.

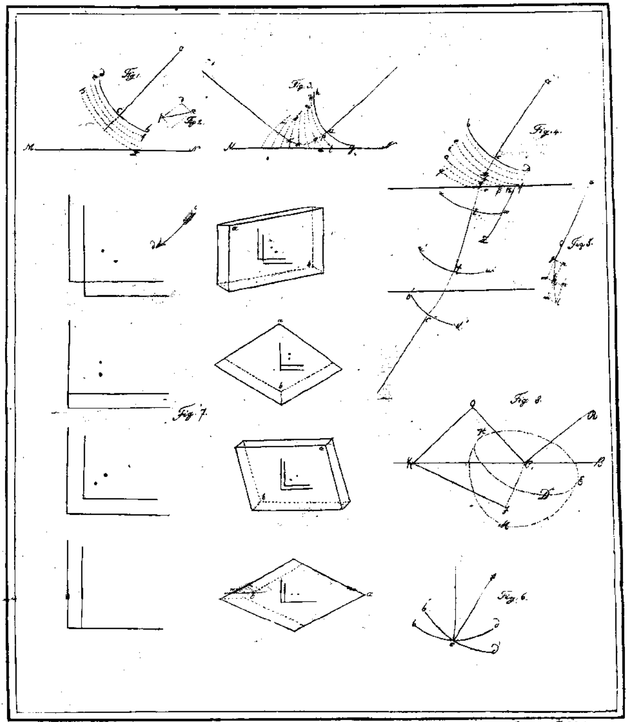
8) *Mémoire sur la double réfraction*, par Fresnel. Mém. de l'acad. royale des sciences de l'institut de France. Tom. VII. pag. 45—176.

9) *Traité de la lumière*, par Herschel, traduit de l'anglais avec notes par MM. Verhust et Quetelet. Paris, 1829.

Vom Licht, bearbeitet von Herschel, aus dem Englischen übersetzt von Schmidt. 1831.

THESES.

1) *Lux non est materia.*
2) *Corpora imponderabilia desunt.*
3) *Pressio aquae in fundum vasis conici non est paradoxon.*



Lith. v. Schlüter