ТАРТУСКИЙ ГОС. УНИВЕРСИТЕТ

# ЗАОЧНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА

## 4

ТАРТУ 1966

ТАРТУСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

# АБСОЛЮТНОЕ ЗНАЧЕНИЕ ВЕЩЕСТВЕННОГО ЧИСЛА

Тарту 1966

# А Б С О Л Ю Т Н О Е   З Н А Ч Е Н И Е
## ВЕЩЕСТВЕННОГО ЧИСЛА

Каждому, по-видимому, известно, что абсолютное значение числа 2 равно 2, а абсолютное значение числа -3 равно 3. Но почему это так, что представляет собой абсолютное значение $|a|$ произвольного вещественного числа $a$ и как оно определяется – на эти вопросы часто отвечают примерно так: "Абсолютное значение числа – это число без знака, ... число со знаком "плюс" или просто "...положительное значение числа". Все эти выражения лишены смысла и у них нет ничего общего с простым и хорошо запоминающимся определением абсолютного значения числа. Правильное определение состоит из двух частей и записывается следующим образом:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{при } a \geqslant 0 \\ -a & \text{при } a < 0 \end{cases}$$

Словесная формулировка этого определения такова:

I) абсолютное значение неотрицательного числа $a$ равно самому этому числу $a$ (в частности, $|0| = 0$);

2) абсолютное значение отрицательного числа $a$ равно противоположному числу $-a$.

Теперь понятно, что $|-3| = 3$, потому что $-3$ – число отрицательное и поэтому $|-3| = -(-3) = 3$.

Нигде в определении абсолютного значения не говорится, что $|a|$ является неотрицательным числом. Это вытекает из определения в качестве следствия и представляет собой хотя и очень простую, но все же теорему:

При любом $a$ выполняется неравенство $|a| \geqslant 0$.

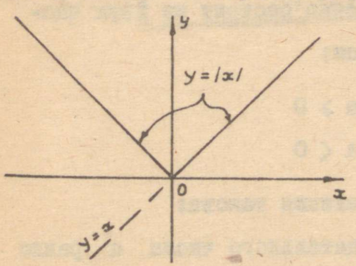
Характерно доказательство этой теоремы, состоящее из двух частей:

1) в случае $a \geqslant 0$ по определению имеем $|a| = a \geqslant 0$, что и требовалось доказать,

2) в случае $a < 0$ имеем $|a| = -a$; но поскольку $-a > 0$, то $|a| > 0$.

Аналогично доказываются многие теоремы, связанные с абсолютными значениями: сначала рассматривается случай, когда применима одна половина определения, а затем случай, когда применима вторая половина определения.

Впрочем, теорему $|a| \geqslant 0$ можно доказать и геометрически. Для этого построим график функции $y = |x|$ (см. черт. 1) и убедимся в том, что он расположен над осью $x$.




Черт. 1.

<u>Упражнение 1</u>. Верны ли следующие определения $|a|$:

1°. $|a| = \begin{cases} a & \text{при } a > 0 \\ -a & \text{при } a \leqslant 0 \end{cases}$

2°. $|a| = \begin{cases} a & \text{при } a \geqslant 0 \\ -a & \text{при } a \leqslant 0 \end{cases}$

3°. $|a| = \begin{cases} a & \text{при } a > 0 \\ 0 & \text{при } a = 0 \\ -a & \text{при } a < 0 \end{cases}$

<u>Упражнение 2</u>. Решить уравнение $|2x-5| = -1$.

Упражнение 3. Доказать теоремы:

$1^0$. $|a|=|-a|$; $2^0$. $|a^2|=|a|^2=a^2$; $3^0$. Если $|a|=0$, то $a=0$.

Упражнение 4. Чему равны выражения $|(-a)^2|$ и $|(-a)^3|$?

Упражнение 5. Построить графики следующих функций:

$1^0$. $y=-|x|$; $2^0$. $y=|x-1|$; $3^0$. $y=|1-2x|$;

$4^0$. $x=|y-1|+|y+3|-5$; $5^0$. $y=|x-3|+|x|+|x+2|-7$;

$6^0$. $y=|x-1|+|x+1|+|2-x|+|x+2|-8$.

Упражнение 6. Доказать, что независимо от того, являются ли числа $a$ и $в$ положительными или отрицательными, число $|a-в|$ равно расстоянию между точками $a$ и $в$ на числовой оси.

Так как $|a|=|a-0|$, то, согласно последнему утверждению, число $|a|$ равно расстоянию точки $a$ от точки $0$ (расстояние всегда выражается неотрицательным числом!). Этот факт способствует простому геометрическому решению многих задач.

Проследим, например, два способа решения уравнения $|x-2|=1$.

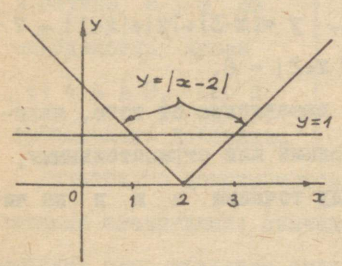
При алгебраическом решении рассматриваются случаи: 1) когда $x-2\geqslant 0$ или $x\geqslant 2$ и 2) когда $x-2<0$ или $x<2$. (Не возникло ли у Вас желание рассмотреть случаи $x\geqslant 0$ и $x<0$? почему это не верно?).

| | |
|---|---|
| 1. В случае $x\geqslant 2$ имеем $|x-2|=x-2$ и уравнение записывается в виде $x-2=1$. Отсюда $x=3$. Это и есть решение данного уравнения, так как $3>2$. | 2. В случае $x<2$ имеем $|x-2|=-(x-2)=2-x$ и уравнение записывается в виде $2-x=1$. Отсюда $x=1$ – это тоже решение данного уравнения, так как $1<2$. |

Следовательно, у уравнения $|x-2| = 1$ два решения: $x=1$ и $x=3$.

Исходя из геометрических соображений можно сказать, что $x$ - это такая точка, расстояние которой от точки $2$ равно единице. Очевидно, что таких точек две (слева и справа от точки 2), а именно $x=1$ и $x=3$.

Геометр мог бы в этом случае поступить и следующим образом: построив график функции $y = |x-2|$ он выяснил бы при каких значениях $x$ имеет место $y = 1$ (см. черт. 2).




Черт. 2.

Решим алгебраическим способом еще уравнение $x^2 - |25-x^2| + 24x + 97 = 0$ и геометрическим способом уравнение $|0,5x^2 + 2x| - 0,5x^2 - 3x - 6 = 0$.

Алгебраическое решение. Так как

$$|25-x^2| = \begin{cases} 25-x^2 & \text{при } 25-x^2 \geqslant 0 \text{ или, что то же, } |x| \leqslant 5 \\ x^2-25 & \text{при } 25-x^2 < 0 \text{ или, что то же, } |x| > 5, \end{cases}$$

то при $|x| \leq 5$ имеем уравнение

$$x^2 - 25 + x^2 + 24x + 97 = 0,$$

что равносильно уравнению $x^2 + 12x + 36 = 0$ или $(x+6)^2 = 0$, откуда $x = -6$, но поскольку $|-6| > 5$, то такое значение $x$ не является решением уравнения; при $|x| > 5$ имеем уравнение

$$x^2 - (x^2-25) + 24x - 97 = 0,$$

что равносильно уравнению $x^2 - x^2 + 25 + 24x + 97 = 0$, или $24x = -122$, откуда $x = -\frac{122}{24} = -5\frac{1}{12}$. Поскольку $\left|-5\frac{1}{12}\right| > 5$, то это и есть единственное решение нашего уравнения.

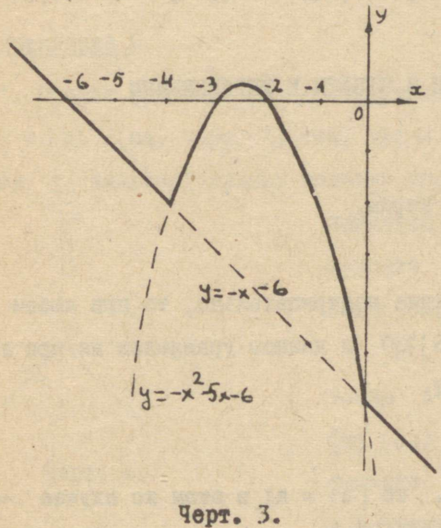
Геометрическое решение. График функции

$$y = |0{,}5x^2 + 2x| - 0{,}5x^2 - 3x - 6$$

совпадает при $-4 \leq x \leq 0$ с графиком функции

$$y = -x^2 - 5x - 6 = -(x+2)(x+3)$$

(с параболой), а при $x \leq -4$ и $x > 0$ с графиком функции $y=-x-6$ (с прямой, см. черт. 3). Весь график изображен на чертеже сплошной линией (заметьте, что при $x = -4$ и $x = 0$ имеем




Черт. 3.

точки пересечения параболы с прямой). Там, где сплошная линия пересекает ось $x$, рассматриваемая функция обращается в нуль - это происходит в трех точках: $x = -6$, $x = -3$ и $x = -2$ (это и есть решения уравнения).

Предлагаем читателям самостоятельно исследовать уравнения $|0{,}5x^2 + 2x| - 0{,}5x^2 - 3x - 3 = 0$ и

$$|0{,}5x^2 + 2x| - 0{,}5x^2 - 3x - 4 = 0.$$

Сколько решений они имеют?

Упражнение 7. Решить двумя способами уравнение

$$|x-2| - 1 = |x-3|.$$

Упражнение 8. Где на плоскости располагаются точки, координаты которых удовлетворяют равенствам

а) $|y| = x$;  в) $|y| = x-1$;  с) $|y| = |x|$;  d) $|y| = |x-1|$.

Упражнение 9. Построить графики следующих функций:

а) $y = \frac{-x}{|x|}$;  в) $y = x|x|$;  с) $y = x^2 + 4|x| + 4$.

## РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ К УПРАЖНЕНИЯМ

Упражнение 1.

Все определения верны.

Упражнение 2.

Так как $|a|$ всегда неотрицательно, то при любом значении $x$ имеем $|2x-5| \geqslant 0$ и данное уравнение ни при каком $x$ не удовлетворяется.

Упражнение 3.

$1^0$. Если $a \geqslant 0$, то $|a| = a$; в этом же случае $-a \leqslant 0$ и поэтому $|-a| = -(-a) = a$. Если же $a < 0$, то $|a| = -a$; в этом случае $-a > 0$ и $|-a| = -a$.

$2^0$. Так как $a^2 \geqslant 0$, то $|a^2| = a^2$; с другой стороны, каково бы ни было $a$ (положительное, отрицательное или нуль) и его абсолютное значение $|a|$ (соответственно $a$ или $-a$), имеет место равенство $|a|^2 = a^2$; следовательно, $|a^2| = |a|^2 = a^2$.

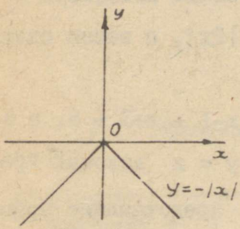
$3^0$. Если $a > 0$, то $|a| = a \neq 0$; если же $a < 0$, то $|a| = -a \neq 0$; поэтому равенство $|a| = 0$ может иметь место только при $a = 0$.

Упражнение 4.

Из $(-a)^2 = a^2 \geqslant 0$ следует $|(-a)^2| = a^2$. Далее, очевидно, что $(-a)^3 = -a^3$; если $a \geqslant 0$ и, следовательно, $a^3 \geqslant 0$, то имеем $|(-a)^3| = -(-a^3) = a^3$; если же $a < 0$ и, следовательно, $a^3 < 0$, то $-a^3 > 0$ и $|(-a)^3| = -a^3$.

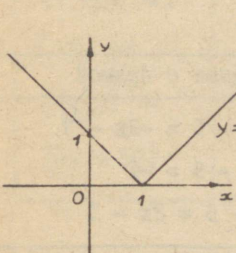
Упражнение 5.

$1^0$. График функции $y = -|x|$ отличается от графика функции $y = |x|$ (см. черт. 1) тем, что в данном случае все значения $y$ неположительны; поэтому график данной функции является симметричным графику функции $y = |x|$ относительно оси $x$ (см. черт. 4).




Черт. 4.

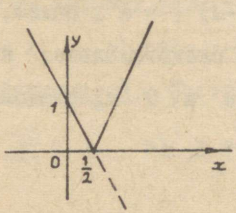
$2^0$. Заметим, что если точка A с координатами $(a; |a|)$ лежит на графике функции $y = |x|$, то точка B с координатами $(a+1; |a|)$ лежит на графике функции $y = |x-1|$, другими словами функции $y = |x|$ и $y = |x-1|$ принимают одинаковые значения для аргументов $x = a$ и $x = a + 1$ соответственно ($a$ – произвольное число).




Черт. 5.

Поэтому график функции $y = |x|$ сдвигается вправо на единицу (см. черт. 5).

$3^0$. Поступаем следующим образом. Построим прямую $y = 1-2x$. Там, где эта прямая проходит выше оси $x$, т.е. при $x \leqslant \frac{1}{2}$, она совпадает с графиком $y = |1-2x|$, а ту часть прямой, которая проходит ниже оси $x$ (при $x > \frac{1}{2}$), следует "повернуть" симметрично относительно оси $x$ так, как показано на чертеже 6.



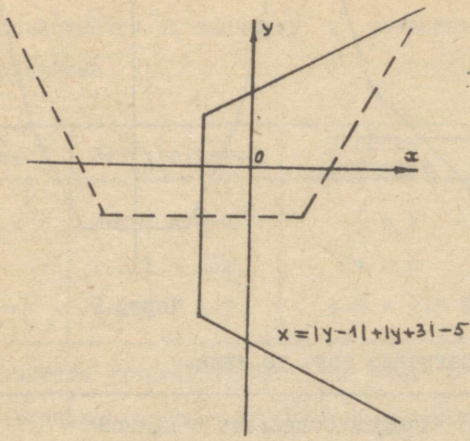

Черт. 6.

В силу равенства $|1-2x| = |2x-1|$ можно поступить и следующим образом: построить график $y = |2x|$, а затем сдвинуть его вправо на единицу.

$4^0$. Сначала построим график $y = x-1 + x+3 - 5$, а затем симметричный ему относительно прямой $y = x$ искомый график. График функции $y = |x-1| + |x+3| - 5$ представляет собой ломаную, отдельные части которой приведены в следующей таблице:

| значения x | график совпадает с прямой |
|---|---|
| $(-\infty, -3]$ | $y = -(x-1) - (x+3) - 5 = -2x - 7$ |
| $[-3, 1]$ | $y = -(x-1) + (x+3) - 5 = -1$ |
| $[1, +\infty)$ | $y = (x-1) + (x+3) - 5 = 2x - 3$ |

Эта ломаная изображена на чертеже 7 пунктиром. Сплошная линия представляет искомый график.

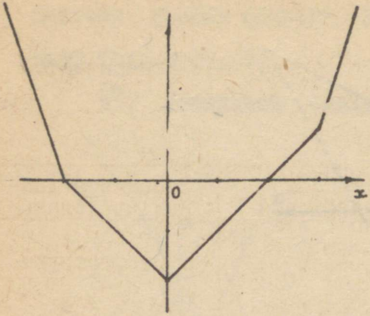



Черт. 7.

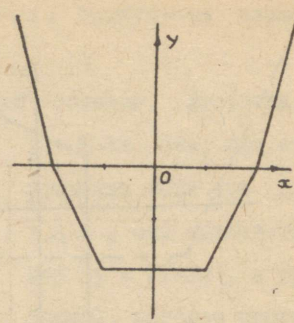
$5^0$. Решение аналогично предыдущему.

| Значения x | График совпадает с прямой |
|---|---|
| $(-\infty, -2]$ | $y = -(x-3) - x - (x+2) - 7 = -3x - 6$ |
| $[-2, 0]$ | $y = -(x-3) - x + (x+2) - 7 = -x - 2$ |
| $[0, 3]$ | $y = -(x-3) + x + (x+2) - 7 = x - 2$ |
| $[3, +\infty)$ | $y = x - 3 + x + x + 2 - 7 = 3x - 8$ |

График приведен на чертеже 8.




Черт. 8




Черт. 9

$6^0$. Это упражнение того же типа.

| Значения x | График совпадает с прямой |
|---|---|
| $(-\infty, -2]$ | $y = -(x-1)-(x+1)+(2-x)-(x+2)-8 = -4x-8$ |
| $[-2, -1]$ | $y = -(x-1)-(x+1)+(2-x)+(x+2)-8 = -2x-4$ |
| $[-1, 1]$ | $y = -(x-1)+(x+1)+(2-x)+(x+2)-8 = -2$ |
| $[1, 2]$ | $y = (x-1)+(x+1)+(2-x)+(x+2)-8 = 2x-4$ |
| $[2, +\infty)$ | $y = (x-1)+(x+1)-(2-x)+(x+2)-8 = 4x-6$ |

График приведен на чертеже 9.

Упражнение 6.

6. Если $a \geqslant в$, то $a-в \geqslant 0$ и $|a-в| = a-в$; если же $a < в$, то $a-в < 0$ и $|a-в| = в-a$. Следовательно, вычисляя $|a-в|$, мы всегда вычитаем из большего числа меньшее. Такая разность всегда положительна и, как видно, равна расстоянию между точками, обозначающими на числовой оси числа a и в (рассмотрите все возможные случаи расположения точек a и в на прямой).

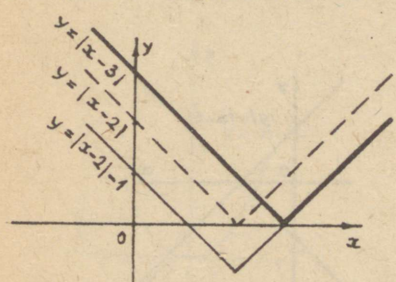
Упражнение 7.

В зависимости от значений $x$ уравнение записывается тремя способами

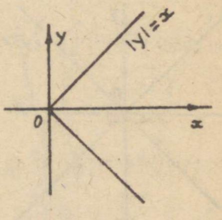
| Значения X | Вид уравнения | После упрощения | Решения в данных пределах |
|---|---|---|---|
| $(-\infty, 2]$ | $2-x-1 = 3-x$ | $1 = 3$ | Отсутствуют |
| $[2, 3]$ | $x-2-1 = 3-x$ | $2x = 6$ | $x = 3$ |
| $[3, +\infty)$ | $x-2-1 = x-3$ | $x-3 = x-3$ | все $x \geqslant 3$ |

Уравнение удовлетворяется при всех $x \geqslant 3$.

Графическое решение изображено на чертеже 10, на котором хорошо видно, что графики функций $y = |x-2| - 1$ и $y = |x-3|$ совпадают при $x > 3$.



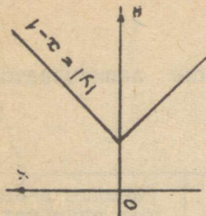

Черт. 10.




Черт. 11.

Упражнение 8.

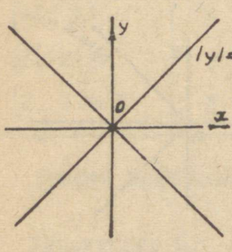
Для того, чтобы найти местоположение точек, удовлетворяющих равенствам а) и в), построим графики функций $y = |x|$ и $y-1 = |x|$ (или $y = |x|+1$), а затем зеркально отразим их относительно прямой $y = x$ (см. черт. 11 и 12). Эти же ломаные можно получить, рассуждая аналогично случаям с) и $d$),



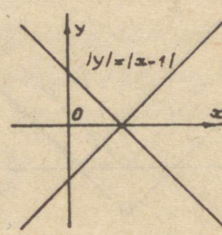
Черт. 12.

которые рассматриваются ниже (следует лишь учесть то, что $x$ в случае а) и $x-1$ в случае в) неотрицательны.

Рассмотрим случаи c) и $d$). Если $y \geqslant 0$, то $|y| = y$ и равенства c) и $d$) переписываются в виде $y = |x|$ и $y = |x-1|$ (графики нам уже известны). Если же $y < 0$, то $|y| = -y$ и равенства c) и $d$) переписываются в виде $y = -|x|$ и $y = -|x-1|$ (графики симметричны предыдущим графикам относительно оси $x$). Точки, удовлетворяющие равенствам c) и $d$), располагаются на двух взаимно перпендикулярных прямых, изображенных на чертежах 13 и 14.



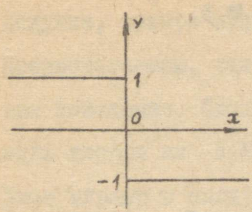

Черт. 13.




Черт. 14.

Упражнение 9.

а) В точке 0 эта функция не определена, в остальных же точках она принимает значения или 1 или $-1$. Именно при $x > 0$ имеем $|x| = x$ и $y = -1$, а при $x < 0$, наоборот, $|x| = -x$ и $y = 1$. В результате получаем две параллельные оси $x$

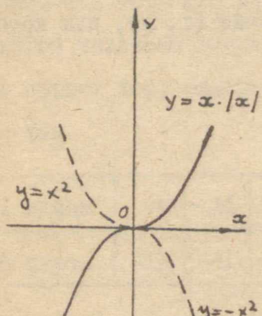



Черт. 15.

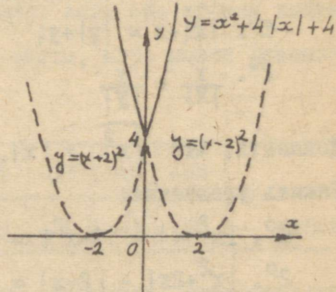
полупрямые (см. черт. 15).

в) При $x \geq 0$ имеем $y = x \cdot x = x^2$, а при $x < 0$ имеем $y = x(-x) = -x^2$. Следовательно, график рассматриваемой функции справа от оси $y$ совпадает с параболой $y = x^2$, а слева от оси $y$ – с параболой $y = x^2$ (см. черт. 16).

с) При $x \geq 0$ имеем параболу $y = x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$, а при $x < 0$ – параболу $y = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$. График рассматриваемой функции изображен на чертеже 17. Интересно отметить, что линия, изображенная на этом чертеже пунктиром, является графиком функции $y = x^2 - 4x + 4$.




Черт. 16.




Черт. 17.

## КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3.

1. Решить уравнения:

   $1^0$. $|2x+1|-|3-x|=|x-4|$;

   $2^0$. $|x+1|-2 = 1$;

   $3^0$. $\left||3-2x|-1\right| = 2|x|-4$.

2. Построить графики следующих функций:

   $1^0$. $y = |2x+1|-|3-x|-|x-4|$;

   $2^0$. $y = \left||x+1|-2\right|-1$;

   $3^0$. $y = \left||3-2x|-1\right|-2|x|$.

3. На плоскости дана точка $(x_0, y_0)$. Где располагаются точки $(x, y)$, для которых $|x-x_0|=1$ и $|y-y_0| \geqslant 2$ ?

4. Решить неравенство

   $\left|3-|x-2|\right| \leq |x-7|$.

5. Где на плоскости располагаются точки $(x, y)$, для которых

   $1^0$. $|x|+x = |y|+y$;

   $2^0$. $\frac{x}{|x|} = \frac{y}{|y|}$

6. Доказать, что $\sqrt{x^2} = |x|$.

7. Решить уравнения:

   $1^0$. $|x^2-4| - |9-x^2| = 5$;

   $2^0$. $|x^2+2x| - |2-x| = |x^2-x|$.

8. Построить графики следующих функций:

   $1^0$. $x = |2-y|\cdot|y+3|$;

   $2^0$. $|y| = 9-x^2+|x-3|$;

   $3^0$. $y = 2^{|x-1|}$.

9. У каждого человека имеется мать и отец, две бабушки и два

дедушки, четыре прабабушки и четыре прадедушки и т.д. Предполагается, что в течение одного века рождаются 4 новых поколения. Сколько людей было на Земле 200 лет назад, если теперь их $3 \cdot 10^9$ ? Сколько их было 2000 лет назад?

10. Двое играют в следующую игру. Сперва первый игрок называет какое-нибудь из чисел 2, 1, -1, -2, -3, -4, -5 или -6. Затем его партнер прибавляет к этому числу еще какое-нибудь из этих чисел. После этого первый игрок вновь выбирает какое-нибудь число и прибавляет его к полученной ранее сумме и т.д. При этом нужно выбирать все время числа или только положительные, или только отрицательные (какие именно числа выбирать - решает каждый из игроков сам, извещая о выборе своим первым ходом). Победителем считается тот, кто первым назовет число, равное по абсолютной величине 50-ти. Например, если оба игрока выбрали на первом ходу отрицательные числа, игра может развиваться так

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I игрок | -6 | -16 | -22 | -29 | -35 | -40 | -45 | |
| II игрок | -12 | -21 | -28 | -33 | -36 | -43 | -50 | - победа |

Существует ли в этой игре стратегия, придерживаясь которой можно всегда победить? Кто победит при такой стратегии - игрок, делающий первый ход, или его партнер? Приведите свои рассуждения.

Тартуский государственный университет
ЭССР, г. Тарту, ул. Юликооли,18

АБСОЛЮТНОЕ ЗНАЧЕНИЕ
ВЕЩЕСТВЕННОГО ЧИСЛА

На русском языке

Составил Е.Габович
Перевод с эстонского и чертежи М.Рахула
Ответственный редактор Х. Тюрнпу

Ротапринт ТГУ 1966. Печ. листов I,25 (условных I,I4).
Учетн.-издат.листов 0,97. Тираж 400 экз.
Бумага 30x42. I/4. Сдано в печать 5/IУ 1966 г.
МВ-03467. Заказ № I50.
Цена 3 коп.

3 коп.