pd

EUKLIDES.

Der Druck wird unter den gesetzlichen Bedingungen gestattet.

Riga, am 31st Januar 1841.

Dr. C. E. Napiersky

Censor.

Geometrie.

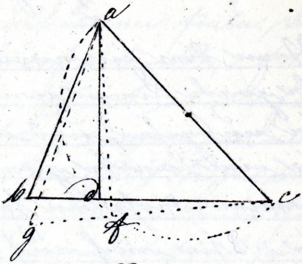
Vierter Cursus

IV

Vom Professor Dr. G. Paucker.

Mitau, $\frac{25 \text{ Decbr } 1840}{6 \text{ Januar } 1841}$.

1.



Wenn die Grundlinie eines Dreiecks durch eine Diagonallinie aus der Spitze in zwei Abschnitte getheilt wird, deren Quadratunterschied gleich dem Quadratunterschied der über ihnen liegenden Seiten ist, so ist die Diagonallinie auf der Grundlinie senkrecht.

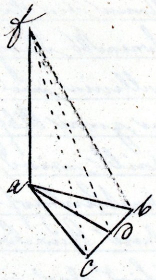
Es sey $cd^2 - bd^2 = ac^2 - ab^2$. Man beschreibe über ac einen Halbkreis, trage darin die Sehne $cf = cd$ und verlängere cf nach g, so daß $fg = db$, also $cg = cb$. Da $\angle f = R$, so ist $ac^2 - ag^2 = cf^2 - fg^2 = cd^2 - bd^2 = ac^2 - ab^2$, also $ag = ab$. Aber auch $cg = cb$, $ac = ac$, also $\Delta\, acg = acb$, also $\angle acf = acd$; aber auch $cf = cd$, $ac = ac$, also $\Delta\, afc = adc$, also $\angle adc = afc = R$

2.

Wenn zwei Ebenen einander durchschneiden, so liegen alle Punkte ihres Durchschnitts, welche die Grenzen der Ebenen heißt, in einer geraden Linie.

Denn sonst müßte es möglich seyn, daß drei Punkte, welche nicht in gerader Linie liegen, in beiden Ebenen zugleich liegen. Da aber durch drei nicht in gerader Linie liegende Punkte nur eine einzige Ebene gelegt werden kann (I. Erklärung der Ebene) so müßten diese Ebene mit den beiden als verschieden angenommenen Ebenen zusammenfalben, was unmöglich ist.

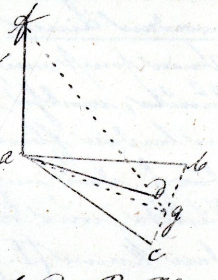
3.



Wenn drei in einer Ebene liegende gerade Linien von einem Punkte ausgehen, und in diesem Punkte eine vierte gerade Linie auf zweien derselben senkrecht ist, so ist sie auch auf der dritten senkrecht.

Es sey ab, ac, ad in einer Ebene und $\angle fab = R$, $\angle fac = R$. Man nehme auf ad einen beliebigen Punkt d an, und errichte in d auf ad in der Ebene bac eine Senkrechte, welche die geraden Linien ab, ac, in b, c schneidet, so ist $fb^2 = fa^2 + ab^2$, $fc^2 = fa^2 + ac^2$, also $fb^2 - fc^2 = ab^2 - ac^2$. Aber $\angle adb = adc = R$, also auch $ab^2 - ac^2 = bd^2 - cd^2$. Also $fb^2 - fc^2 = bd^2 - cd^2$, also (IV.1) $\angle fdb = fdc = R$, also $fb^2 = fd^2 + bd^2$, aber auch $fb^2 = fa^2 + ab^2$, also $fa^2 + ab^2 = fd^2 + bd^2$, also $fa^2 + ab^2 - bd^2 = fd^2$. Aber $ab^2 - bd^2 = ad^2$, also $fa^2 + ad^2 = fd^2$. Also (II.46) $\angle fad = R$.

4.



Wenn drei gerade Linien von einem Punkte ausgehen, und eine vierte auf jeder von ihnen senkrecht ist, so liegen jene drei in einer Ebene.

Es sey $\angle fab = R$, $\angle fac = R$, $\angle fad = R$. Wenn nun ad nicht in der Ebene bac läge, so würden die Ebenen bac, fad, einander in einer geraden Linie ag schneiden (IV.2) welche nicht mit ad zusammen fiele, denn aber würde (IV.3) weil $\angle fab = R$, $\angle fac = R$, auch $\angle fag = R$ seyn. Es ist aber $\angle fad = R$, die Winkel fad, fag, liegen in einer Ebene, also müßte es möglich seyn, daß zwei rechte Winkel von verschiedener Größe wären. Da dieses unmöglich ist (I.7) so fallen die Linien ad, ag, zusammen, d.h. ad liegt in der Ebene bac.

5.

Wenn eine gerade Linie eine Ebene durchschneidet, so schneidet sie sie nur in einem einzigen Punkte.

Denn wenn sie noch einen zweiten Punkt mit der Ebene gemein haben könnte, so müßte sie (I. Erklärung der Ebene) ganz mit der Ebene zusammenfallen.

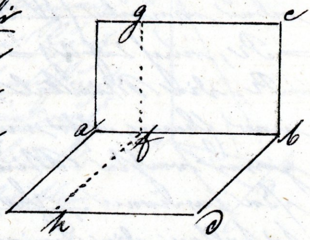
6.

Wenn eine gerade Linie in dem Punkte, wo sie eine Ebene schneidet, auf allen Linien welche durch diesen Punkt in der Ebene gezogen werden können, senkrecht ist, so heißt sie senkrecht auf der Ebene.

Damit also eine gerade Linie auf einer Ebene senkrecht sey, ist es hinreichend, wenn sie (IV. 3) nur auf zwei geraden Linien, welche durch ihren Fußpunkt in der Ebene gezogen werden, senkrecht ist.

7.

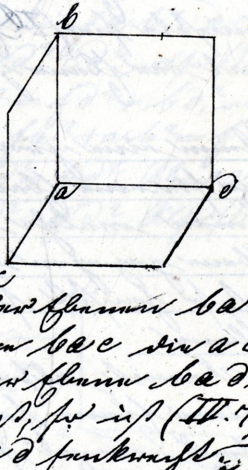
Zwei Ebenen heißen senkrecht auf einander, wenn zwei gerade Linien, welche in den Ebenen aus einem Punkte ihrer Kante auf diese Kante senkrecht gezogen werden, auf einander senkrecht sind.



Es seyen abc, abd die Ebenen, ab ihre Kante, f ein Punkt der Kante, fg in der Ebene abc senkrecht auf ab; fk in der Ebene abd senkrecht auf ab. Wenn nun gfk ein rechter Winkel ist, so heißt die Ebene abc auf abd, oder die Ebene abd auf abc senkrecht.

8.

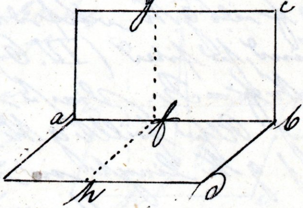
Wenn von einem Punkte drei auf einander senkrechte gerade Linien ausgehen, so sind auch ihre Ebenen auf einander senkrecht.



Es sey ∠ bac = bad = cad = R. Da ab die Kante der Ebenen bac, bad ist, und in der Ebene bac die ac auf ab senkrecht, in der Ebene bad die ad auf ab senkrecht ist, so ist (IV. 7) die Ebene bac auf bad senkrecht. Aus gleichem Grunde ist an der Kante ac die Ebene bac auf cad, und an der Kante ad die Ebene bad auf cad senkrecht.

9.

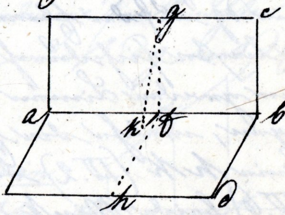
Wenn zwei Ebenen auf einander senkrecht sind, und es wird aus einem Punkte ihrer Kante in der einen Ebene eine Senkrechte auf die Kante gezogen, so ist sie auf der andern Ebene senkrecht.



Die Ebenen abc, abd, stehen auf einander senk„recht, und es sey in der Ebene abc die fg senkrecht auf ab. Man ziehe in der Ebene abd die fh senkrecht auf ab. Da die Ebenen abc, abd, auf einander senkrecht sind, so ist (IV. 7) ∠ gfh = R; aber auch ∠ gfa = R also (IV. 3.6) gf senkrecht auf der Ebene abd.

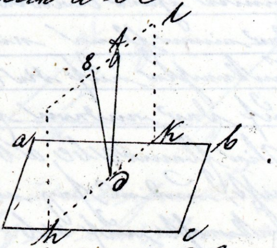
10.

Wenn zwei Ebenen auf einander senkrecht sind, und es wird aus einem Punkte der ersten Ebene eine senkrechte Linie auf die zweite gezogen, so liegt sie in der ersten Ebene.



Die Ebenen abc, abd, stehen auf einander senkrecht, und es sey gk senkrecht auf der Ebene abd. Man fälle gf senkrecht auf die Kante ab, so ist gf (IV. 9) senkrecht auf der Ebene abd. Wenn nun gf, gk, nicht zusammenfielen, so ließe sich durch dieselben eine Ebene legen, welche (IV. 2) die Ebene abd in einer geraden Linie fk schneiden würde. Da sonach gf als gk auf der Ebene abd senkrecht sind, so sind (IV. 6) die Winkel gfk = gkf = R. Dieß ist aber (I. 24) unmöglich. Also fällt gk mit gf zusammen, d. h. gk liegt in der Ebene abc

11.

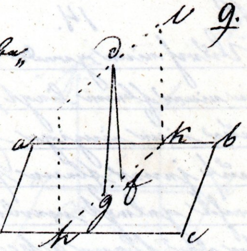


<u>In einem in einer Ebene befindlichen Punkt kann nur eine einzige senkrechte Linie auf die Ebene errichtet werden.</u>

In der Ebene abc befinde sich der Punkt d, und es sey in demselben die gerade Linie df senkrecht auf der Ebene abc. Wenn es nun möglich wäre, in d noch eine zweite Linie dg auf der Ebene abc senkrecht zu ziehen, so ließe sich durch die beiden vorstehenden geraden Linien df, dg eine Ebene hkl legen, welche die Ebene abc in der geraden Linie hk (IV. 2) durchschnitte. Also müßten (IV. 6) beide Winkel ∠ kdf = kdg = R seyn. Da es aber unmöglich ist (I. 17) in einer Ebene auf eine gerade Linie zwei verschiedene senkrechte Linien zu errichten, so müssen df, dg, zusammenfallen.

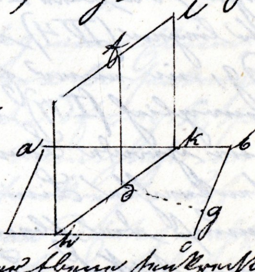
12.

<u>Von einem Punkte, welcher sich außerhalb einer Ebene befindet, läßt sich nur eine einzige senkrechte Linie auf die Ebene fällen.</u>



Außerhalb der Ebene abc befinde sich der Punkt d, und es sey von demselben die gerade Linie df senkrecht auf die Ebene abc gezogen. Wenn es nun möglich wäre, von d noch eine zweite Linie dg senkrecht auf die Ebene abc zu ziehen, so ließe sich durch die beiden verschiedenen geraden Linien df, dg, eine Ebene hkl legen, welche die Ebene abc in der geraden Linie hk durchschnitte. Also müßten (IV. 6.) beide $\angle kfg = kgf = R$ seyn. Da es aber unmöglich ist (I. 24) von einem Punkte auf eine gerade Linie zwei verschiedene senkrechte Linien zu ziehen, so muß dg mit df zusammenfallen.

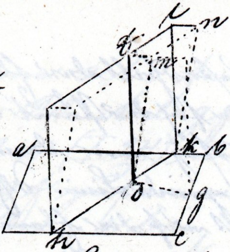
13.



<u>Wenn eine gerade Linie auf einer Ebene senkrecht ist, so ist jede Ebene, welche durch diese gerade Linie gelegt wird, auf jener Ebene senkrecht.</u>

Auf der Ebene abc sey die gerade Linie df senkrecht. Durch df sey eine beliebige Ebene hkl gelegt, welche die Ebene abc in hk schneidet. In der Ebene abc ziehe man dg auf hk senkrecht. Da fd auf der Ebene abc senkrecht ist, so sind (IV. 6) $\angle fdg = \angle fdh = R$. Aber auch $\angle gdh = R$. Also (IV. 7) die Ebene hkl auf der Ebene abc senkrecht.

14.



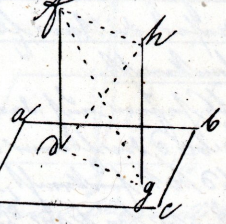
Durch eine gerade Linie, welche in einer Ebene liegt, kann nur eine einzige Ebene auf jener Ebene senkrecht gelegt werden.

In der Ebene abc sey die gerade Linie hk gezogen, und durch dieselbe eine Ebene hkl gelegt, welche auf der Ebene abc senkrecht sey. In der Ebene abc sey dg senkrecht auf hk, und in der Ebene hkl sey df senkrecht auf hk gezogen, so ist (IV.7) $\angle fdg = R$. Wenn es nun möglich wäre, durch hk noch eine zweite Ebene hkn auf der Ebene abc senkrecht zu legen, so sey in dieser Ebene hkn die gerade Linie dm senkrecht auf hk gezogen. Dann muß auf (IV.7) $\angle mdg = R$ seyn. Da aber $\angle hdf = hdm = hdg = R$, so liegen (IV.4) die geraden Linien df, dm, dg, in einer Ebene. Es ist aber unmöglich (I.17) in einer Ebene auf einer geraden Linie zwei verschiedene senkrechte Linien zu errichten. Also muß die Ebene hkn mit der Ebene hkl zusammenfallen.

15.

Wenn zwei gerade Linien auf einer Ebene senkrecht sind, so sind sie einander parallel.

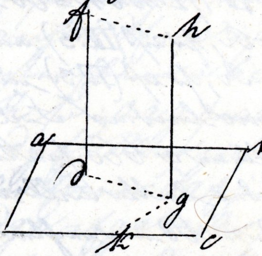
Es seyen die geraden Linien df, gh, auf der Ebene abc senkrecht. Also sind (IV.13) die Ebenen fdg, hdg auf der Ebene abc senkrecht. Da beide senkrechte Ebenen fdg, hdg, durch dieselbe gerade Linie dg gehen, so (IV.14) fallen sie zusammen. Also liegen die geraden Linien df, gh, in einer Ebene.



Da beide auf der Ebene abc senkrecht sind, so (IV.6) ist ∠ fdg = hgd = R. Also (II.4) ist df ∥ gh.

16.

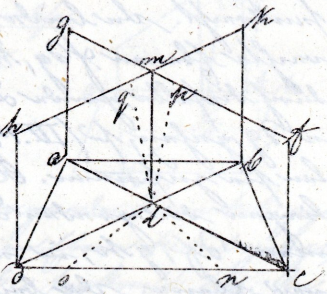
<u>Wenn zwei gerade Linien parallel sind, und eine von ihnen auf einer Ebene senkrecht ist, so ist auch die andere auf derselben Ebene senkrecht.</u>



Es sey df ∥ gh, also dfhg eine Ebene; auch sey df auf der Ebene abc senkrecht, also (IV.6) ∠ fdg = R, und da df ∥ gh, so ist auch (II.3) ∠ dgh = R. Man ziehe in der Ebene abc die gk senkrecht auf der Kante dg. Die Ebene dfhg geht durch eine gerade Linie df, welche auf der Ebene abc senkrecht ist, und ist also (IV.13) auf dieser Ebene abc senkrecht. Also (IV.7) ∠ hgk = R. Aber auch ∠ dgk = R. Also (IV.6) gh auf der Ebene abc senkrecht.

17.

<u>Wenn zwei einander schneidende Ebenen auf einer dritten Ebene senkrecht sind, so ist</u>

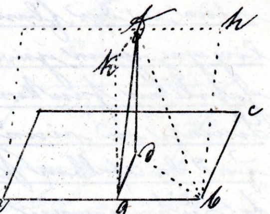


auch ihre Kante auf dieser dritten Ebene senkrecht.

Es seyen auf der Ebene abcd, die Ebenen acfg, bdhk senkrecht, ihre Kante sey lm. In der Ebene abcd ziehe man ln auf bd, und lo auf ac senkrecht. Da die Ebene bdhk auf abcd senkrecht ist, so ist (IV.7) ∠mln = R und ∠mlo = R. Ist ∠mlb = R, so ist (III.3) auch ∠mlc = R; und ist ∠mlc = R, so ist (IV.3.) auch ∠mlb = R; folglich in beiden Fällen (IV.6) lm auf der Ebene abcd senkrecht. Es bleibt also noch der dritte Fall übrig, daß weder ∠mlb noch ∠mlc ein rechter Winkel sey. Alsdann ziehe man in der Ebene acfg die lp auf ac senkrecht, und in der Ebene bdhk die lq auf bd senkrecht, so ist ∠plc = R, und (IV.7) ∠plo = R, also (IV.6) lp auf der Ebene abcd senkrecht. Desgleichen ∠qld = R und (IV.7) ∠qln = R, also (IV.6.) lq auf der Ebene abcd senkrecht. Es ist aber (IV.11.) unmöglich, daß zwei verschiedene Linien lp, lq, auf der Ebene abcd senkrecht seyn können. Also ist der dritte Fall unmöglich. Also ist lm auf der Ebene abcd senkrecht.

18.

In einem Punkte, welcher sich in einer Ebene befindet, eine senkrechte Linie auf diese Ebene zu errichten.

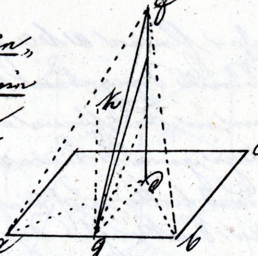


In der Ebene abc sey der Punkt d gegeben. Man nehme in der Ebene eine beliebige gerade Linie ab an, und fälle auf dieselbe die Senkrechte dg.
Man lege durch ab eine andere Ebene abh in beliebiger Richtung und man errichte in dieser Ebene in g auf ab eine Senkrechte gf. Die geraden Linien dg, fg, bilden eine dritte Ebene. In dieser errichte man in d auf dg eine Senkrechte df, so ist sie senkrecht auf der ersten Ebene abc. Denn da $\angle dga = fga = R$ so ist ag senkrecht auf der Ebene dgf. Man ziehe $gk \parallel df$, so ist gk in der Ebene dgf und $\angle kgd = fdg = R$. Da $\angle dga = fga = R$, so ist auch (IV. 3.) $\angle kga = R$. Da $\angle kga = kgd = R$, so ist (IV. 6) kg auf der Ebene abc senkrecht, also auch (IV. 16) df auf der Ebene abc senkrecht.

<u>Anderer Beweis</u>. Man ziehe db, fb. Da $\angle fgb = R$, so ist (II 45) $fb^2 = fg^2 + bg^2$. Da $\angle fdg = R$, so ist $fg^2 = fd^2 + dg^2$, also $fb^2 = fd^2 + dg^2 + bg^2$. Da $\angle dgb = R$, so ist $dg^2 + bg^2 = db^2$, also ist $fb^2 = fd^2 + db^2$, also (II. 46) $\angle fdb = R$. Aber auch $\angle fdg = R$. Also (IV. 36.) fd auf der Ebene abc senkrecht.

19.

<u>Wenn eine gerade Linie auf einer Ebene senkrecht ist, so kommen alle von ihren verschiedenen Punkten auf</u>



einer in der Ebene beliebig gezogenen geraden Linie gefällten senkrechten Linien in einem und demselben Punkte zusammen.

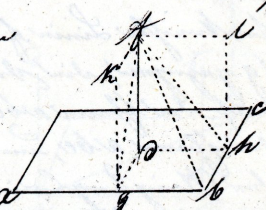
In einem Punkte d der Ebene abc sey die gerade Linie df auf die Ebene abc senkrecht errichtet (IV. 18). Es sey ab eine beliebige gerade Linie in der Ebene abc, und dg senkrecht auf ab. In g sey gk ∥ df gezogen, so ist (IV. 16) gk auf der Ebene abc senkrecht, also ∠ kga = R. Aber auch ∠ dga = R, also (III. 3) ∠ fga = R. Man kann sich aber (I. 24) nur eine einzige senkrechte Linie auf ab fällen, also trifft diese in g. Derselbe Beweis gilt für jeden Punkt der Linie df.

Anderer Beweis. Man mache ga = gb. Da dg = dg, ga = gb, ∠ dga = dgb = R, so ist △ dag = dbg, also da = db. Da fd auf der Ebene abc senkrecht ist, so ist (IV. 3. 6) ∠ fda = fdb = R, fd = fd, da = db, also △ fda = fdb, also fa = fb. Da fa = fb, fg = fg, ga = gb, so ist △ fag = fbg, also ∠ fga = fgb = R.

20.

Von einem Punkte, welcher sich außerhalb einer Ebene befindet, eine senkrechte Linie auf dieselbe zu fällen.

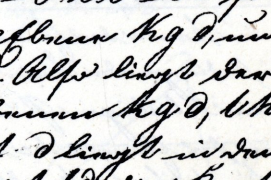
Außerhalb der Ebene abc sey der Punkt f gegeben. Man ziehe in der Ebene



abc zwei beliebige Linien ab, bc, und fälle in den Ebenen fba, fbc, die geraden Linien fg auf ab, und fh auf bc senkrecht. In der Ebene abc errichte man in g auf ab, in h auf bc senkrechte Linien, welche einander in d schneiden. Man verbinde fd, so ist fd auf der Ebene abc senkrecht.

Denn man ziehe gk, hl, senkrecht auf der Ebene abc (IV.18) so sind die Ebenen kgd, lhd. (IV.13) senkrecht auf der Ebene abc. Da $\angle kga = fga = dga = R$ und $\angle lhb = fhb = dhb = R$ so liegen (IV.4) fg in der Ebene kgd, und fh in der Ebene lhd. Also liegt der Punkt f in den Ebenen kgd, lhd. Aber auch der Punkt d liegt in den Ebenen kgd, lhd. Also ist fd die Kante der Ebenen kgd, lhd. Diese Ebenen sind aber auf der Ebene abc senkrecht, also (IV.17) ist auch fd auf der Ebene abc senkrecht.

21.

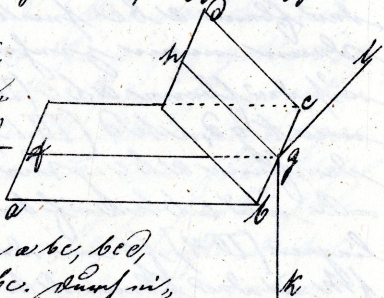


Der Neigungswinkel einer schiefen Linie gegen eine Ebene, ergänzt den Winkel, welchen die schiefe mit der senkrechten bildet, zu einem rechten Winkel.

Vom Punkte f sey nach einer Ebene abc eine senkrechte Linie fd, und eine schiefe Linie fg gezogen, die Durchschnittspunkte derselben auf der Ebene abc, seyen d, g, so liegt dg in der Ebene abc, und der Winkel fgd heißt der Neigungswinkel der schiefen Linie gegen die Ebene abc. Da fd auf der Ebene abc senkrecht ist, so ist die Ebene des Neigungswinkels fgd (IV. 13) senkrecht auf der Ebene abc, und (IV. 6) $\angle fdg = R$, also $\angle fgd + dfg = R$.

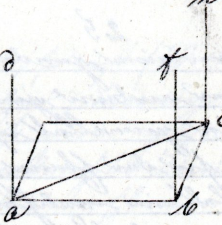
22

<u>Die Ebene des Neigungswinkels oder Kantenwinkels zweier Ebenen ist auf der Kante dieser Ebenen senkrecht.</u>



Die Kante der Ebenen abc, bcd, ist die gerade Linie bc. Durch einen beliebigen Punkt g dieser Kante ziehe man in der Ebene abc die gerade Linie gf auf der Kante bc senkrecht, und in der Ebene bcd die gerade Linie gh auf der Kante bc senkrecht, so heißt der $\angle fgh$ der Neigungswinkel oder Kantenwinkel der Ebenen abc, bcd. Da $\angle bgf = R$, und $\angle bgh = R$, so ist (IV. 3. 6) die Kante bgc auf der Ebene fgh senkrecht. In dem Punkte g errichte man (IV. 18) gk auf der Ebene abc senkrecht, und gl auf der Ebene bcd senkrecht so ist (IV. 6) $\angle bgk = bgl = R$, also liegen (IV. 4) die Linien gk, gl, in der Ebene fgh, und der Winkel kgl, den diese senkrechten Linien mit einander bilden, ergänzt den Kantenwinkel fgh zu zwei rechten Winkeln.

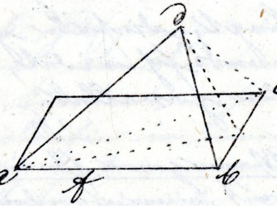
23.



Zwei gerade Linien, welche einer dritten nicht in ihrer Ebene liegenden geraden Linie parallel sind, sind einander parallel.

Die Linie ad sey den Linien bf, ck, parallel, und liege nicht in ihrer Ebene. Von einem beliebigen Punkte a der Linie ad fälle man auf bf die Senkrechte ab, auf ck die Senkrechte ac, so ist $\angle abf = ack = R$. Da $ad \parallel bf$, so ist auch $\angle dab = R$. Da $ad \parallel ck$, so ist auch $\angle dac = R$. Da $\angle dab = dac = R$, so ist (IV. 3. 6) ad auf der Ebene abc senkrecht. Da $ad \parallel bf$ und $ad \parallel ck$, so sind auch (IV. 16) bf, und ck auf der Ebene abc senkrecht, also (IV. 15) $bf \parallel ck$.

24.

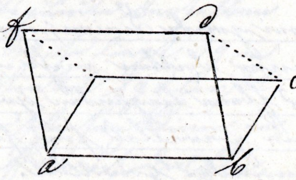


Die Kante zweier Ebenen geht durch den Punkt, wo eine gerade Linie, welche in der einen Ebene liegt, die andere Ebene schneidet.

Die gerade Linie bf sey die Kante zweier Ebenen cbf, dbf und in der Ebene dbf sey eine gerade Linie da gezogen, welche die Ebene cbf in dem Punkte a schneidet. Der Punkt a liegt also zugleich in der geraden Linie da und in der Ebene cbf. Da die gerade Linie da in der Ebene dbf liegt, so liegt der Punkt a zugleich in der Ebene dbf und in der Ebene cbf, also liegt er in ihrer Kante bf.

25.

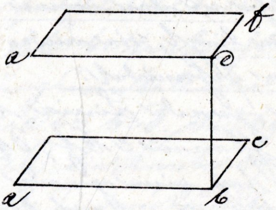
Wenn eine gerade Linie einer andern geraden Linie parallel ist, so ist sie der Ebene parallel, in welcher diese gerade Linie liegt.



Die gerade Linie df sey der geraden Linie ab parallel, welche in der Ebene abc liegt. Die beiden geraden Linien df, ab, liegen also in einer Ebene, dba, und die gerade Linie ab ist die Kante der Ebenen cba, dba. Wenn nun df die Ebene abc schneiden könnte, so müßte dieser Durchschnittspunkt (II. 24) in der Kante ab liegen. Dieß ist aber unmöglich da df ∥ ab. Also schneidet df die Ebene abc nirgends. Wenn aber eine gerade Linie, welche nicht in einer Ebene liegt, dieselbe gehörig verlängert nirgends schneidet, so heißt sie derselben parallel.

26.

Wenn zwei Ebenen auf einer geraden Linie senkrecht sind, so sind sie einander parallel.

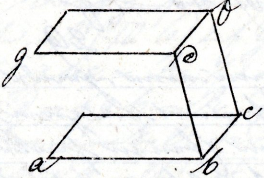


Es sey die gerade Linie bd auf den Ebenen abc, adf, senkrecht. Wenn diese Ebenen einander in einer geraden Linie schneiden würden, so sey a ein beliebiger Punkt dieser geraden Linie, welcher also in beiden Ebenen liegt. Man ziehe ab, ad, so liegt ab in der Ebene abc, und ad in der Ebene adf. Da bd

auf beiden Ebenen senkrecht ist, so ist (IV. 3. 6)
$\angle abd = R$, $\angle adb = R$. Da es aber unmöglich ist, von einem Punkt auf eine gerade Linie zwei verschiedene senkrechte Linien zu ziehen, so können die beiden Ebenen abc, def, keinen Punkt mit einander gemein haben. Solche Ebenen aber, welche gehörig erweitert, einander nirgends durchschneiden, heißen parallel.

27.

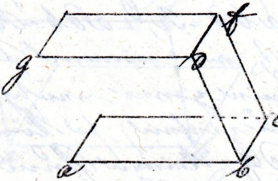
<u>Wenn zwei parallele Ebenen von einer dritten Ebene geschnitten werden, so sind die Kanten parallel.</u>



Die parallelen Ebenen abc, gdf werden von der Ebene bcdf geschnitten. Die Kanten sind bc, df. Wären diese Kanten nicht parallel, so müßten sie, da sie in einer Ebene liegen, einen Punkt mit einander gemein haben. Dieser Punkt würde zugleich in bc und df, also zugleich in den Ebenen abc und gdf liegen. Also würden diese Ebenen einen Punkt gemein haben, was der Voraussetzung, daß sie parallel sind, widerspricht. Also sind die Kanten bc ∥ df.

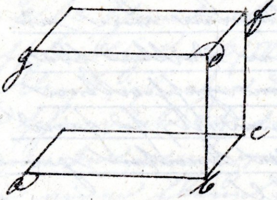
28.

<u>Wenn zwei Ebenen parallel sind, so sind die zwischen ihnen gezogenen Parallellinien einander gleich.</u>



Die Ebenen abc, gdf, seyen parallel, und es seyen zwischen ihnen die Parallellinien bd, cf, gezogen. Diese Parallellinien liegen in einer Ebene, deren Kanten auf den Ebenen abc, gdf, die geraden Linien bc, df, sind. Also (IV. 27) $bc \parallel df$. Aber auch $bd \parallel cf$. Also $bcdf$ ein Parallelogramm. Also (II. 16) $bd = cf$.

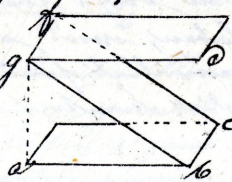
29.



Wenn eine gerade Linie auf einer von zwei parallelen Ebenen senkrecht ist, so ist sie auch auf der andern senkrecht.

Die Ebenen abc, gdf seyen parallel, und es sey db auf der Ebene abc senkrecht. Man ziehe in der Ebene abc zwei beliebige Linien ab, bc, so ist (IV. 6) $\angle dba = R$, und $\angle dbc = R$. Die Ebene gdf, werde von den Ebenen dba, dbc, in dg, df, geschnitten, so ist (IV. 27) $dg \parallel ba$, $df \parallel bc$. Also $\angle bdg = R$, und $\angle bdf = R$, also (IV. 3. 6.) bd senkrecht auf der Ebene gdf.

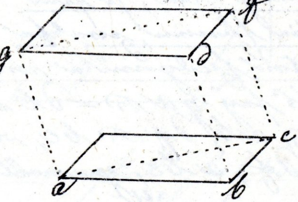
30.



Parallele Ebenen bilden an einer sie durchschneidenden Ebene gleiche Kantenwinkel.

Die Ebenen abc, dgf, werden von der Ebene $bcfg$ durchschnitten. Die Kanten sind bc, fg, also (IV. 27) $bc \parallel fg$. Von einem beliebigen Punkte g der Kante fg fälle man (IV.20) die ga senkrecht auf die Ebene abc, und von a die ab senkrecht auf bc. Man verbinde gb, so ist (IV.19) auch gb senkrecht auf bc, also die Ebene gab (IV.13) senkrecht auf den Ebenen abc, bcfg und (IV.22) ∠gba der Neigungswinkel der Ebenen abc, bcfg. Da bc ∥ fg, und bc senkrecht auf der Ebene gab, so ist auch (IV.16) fg senkrecht auf der Ebene gab. Die Ebene gab durchschneide die Ebene fgd in der geraden Linie gd, so ist (IV.27) gd ∥ ab. Da fg senkrecht auf der Ebene dgab ist, so ist (IV.6) ∠fgd = R. Da fg ∥ bc, und ∠gbc = R, so ist auch ∠fgb = R. Da ∠fgd = fgb = R, so ist (IV.22) ∠dgb der Neigungswinkel der Ebenen dgf, bcfg. Aber gd ∥ ab, also (II.3) ∠gba = dgb. Also bilden die parallelen Ebenen abc, dgf, gleiche Neigungswinkel an der Ebene bcfg.

31

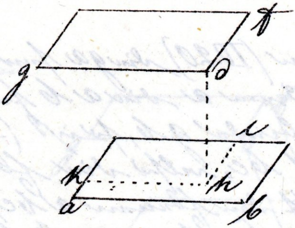


Wenn die Seiten zweier in verschiedenen Ebenen liegenden Winkel parallel sind, so sind die Winkel gleich.

Die Winkel abc, gdf, liegen in verschiedenen Ebenen, und es sei gd ∥ ab, df ∥ bc. Man mache von beliebiger Länge gd = ab, df = bc, so ist (II.19) ga ∥= db, fc ∥= db, also (IV.23) ga ∥= fc, also (II.19) gf ∥= ac, also (I.5) △gdf = abc, also ∠gdf = abc.

32

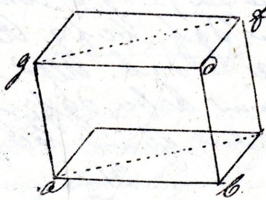
Wenn die Seiten zweier in verschiedenen



Ebenen liegenden Winkel parallel sind so sind die Ebenen parallel.

Die Winkel abc, gdf, liegen in verschiedenen Ebenen, und es sey gd ∥ ab, df ∥ bc. Man ziehe dk senkrecht (IV. 20) auf die Ebene abc, und man k in der Ebene abc die kh ∥ ab, kl ∥ bc, so ist (IV. 23) hk ∥ gd, kl ∥ df. Aber (IV. 6) ∠ dkh = dkl = R, also ∠ kdg = kdf = R, also (IV. 3. 6) dk senkrecht auf der Ebene gdf, also (IV. 26.) die Ebenen abc, gdf parallel.

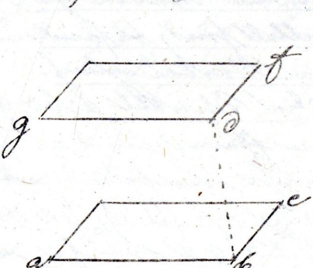
33.



Wenn drei in verschiedenen Ebenen liegende gerade Linien parallel und einander gleich sind, so sind die Ebenen, welche ihre Endpunkte verbinden parallel.

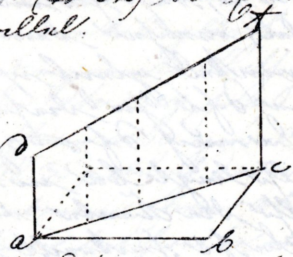
Es sey ga ∥= db ∥= fc so ist (II. 19.) gd ∥ ab, df ∥ bc, also (IV. 32) die Ebenen gdf, abc, parallel.

34.



Durch einen gegebenen Punkt eine Ebene zu legen, welche einer gegebenen Ebene parallel sey.

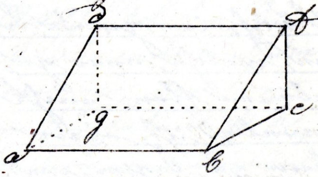
Der gegebene Punkt sey d, die gegebene Ebene sey abc. Man ziehe in derselben zwei beliebige gerade Linien ba, bc; in der Ebene dba ziehe man dg ∥ ba, und in der Ebene dbc ziehe man df ∥ bc, so ist (IV. 32) die Ebene gdf der Ebene abc parallel.



35.

Durch eine gegebene gerade Linie eine Ebene zu legen, welche auf einer gegebenen Ebene senkrecht sey.

Die gegebene gerade Linie sey df, die gegebene Ebene abc. Man wähle in der geraden Linie zwei beliebige Punkte d, f, fälle von denselben (IV. 20) senkrechte Linien da, fc, auf die Ebene abc, so sind sie (IV. 15) parallel und liegen also in einer Ebene, welche durch die gegebene gerade Linie geht, und welche (IV. 13) auf der Ebene abc senkrecht ist.



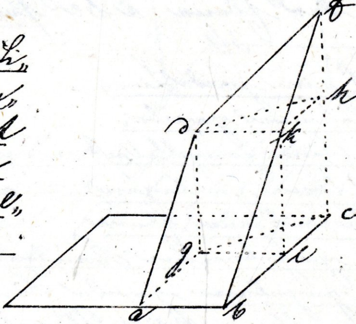
36.

Durch eine gerade Linie, welche einer gegebenen Ebene parallel ist, eine Ebene zu legen, welche mit jener Ebene einen gegebenen Kantenwinkel bildet.

Die gegebene gerade Linie sey df, die gegebene Ebene abc. Man fälle von zwei beliebigen Punkten der geraden Linie df senkrechte Linien dg, fc, auf die Ebene abc, so ist (IV. 35) die Ebene dfcg auf der Ebene abc senkrecht, und cg ihre gemeinschaftliche Kante. Es sey cg ∥ df, so ist df der Ebene abc parallel. In der Ebene abc errichte man in c auf cg die senkrechte Linie cb, so ergiebt sich eine Ebene fcb. In dieser ziehe man die Linie fb so, daß sie mit cb einen Winkel bildet, welcher dem gegebenen Kantenwinkel gleich ist, so ergiebt sich eine Ebene dfb. In dieser ziehe man $ba \parallel df$. Da auch $df \parallel cg$, so ist (IV. 23) $ba \parallel cg$, also liegt ba in der Ebene abc, und ist also die Kante der Ebenen $abcg$, $abfd$. Da fc senkrecht auf der Ebene abc, so ist (IV. 6) $\angle fcb = R$. Aber auch $\angle gcb = R$, also (IV. 3. C.) bc auf der Ebene $dfcg$ senkrecht. Aber $\angle dfc = R$, also (IV. 19) $\angle dfb = R$. Aber $ba \parallel df$, also $\angle abf = dfb = R$. Ferner $ba \parallel cg$, also $\angle abc = gcb = R$. Also (IV. 22) $\angle fbc$ der Kantenwinkel der Ebenen $abcg$, $abfd$.

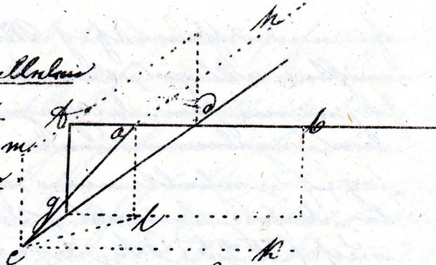
37.

Durch eine gerade Linie, welche einer gegebenen Ebene nicht parallel ist, eine Ebene zu legen, welche mit jener Ebene einen gegebenen Kantenwinkel bildet.



Die gegebene gerade Linie sey df, die gegebene Ebene abc. Man fälle von zwei beliebigen Punkten der geraden Linie df, senkrechte Linien dg, fc, auf die Ebene abc, so ist (IV. 35) die Ebene $dfcg$ auf der Ebene abc senkrecht, und cg ihre gemeinschaftliche Kante, welche der geraden Linie df nicht parallel sey. Man ziehe $dh \parallel cg$ bis an fc in der Ebene dfcg. Man beschreibe ein rechtwinkliges Dreieck über der Kathete fk, in welchem der Gegenwinkel von fk dem gegebenen Kantenwinkel gleich sey, so erhält man die zweite Kathete dieses Dreiecks. Da dk $\parallel$ cg, so ist auch (IV. 25) dk der Ebene abc parallel. Man lege also (IV. 35) durch d oder k eine Ebene der gegebenen Ebene abc parallel, in dieser Ebene beschreibe man ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem dk die Hypotenuse, dhk der rechte Winkel, und die Kathete hk der zweiten Kathete des vorigen rechtwinkligen Dreiecks gleich sey. Man ziehe fh. Da fk auf der Ebene abc senkrecht ist, so ist fk auch auf der parallelen Ebene dhk senkrecht, und da ∠dhk = R, so ist (IV. 19) ∠dhf = R, also (IV. 22) ∠fhk der Kantenwinkel der Ebenen dhf, dhk. Vermöge der Construction durch die Katheten fk, hk, ist aber ∠fhk dem gegebenen Kantenwinkel gleich. Also bilden die Ebenen dhf, dhk, einen Kantenwinkel, welcher dem gegebenen Winkel gleich ist. In der Ebene dhf verlängere man fh bis zur Ebene abc in b, ziehe in der Ebene dhf die da $\parallel$ fb, ba $\parallel$ dh, so liegt (IV. 27) ba in der Ebene abc. Aber die Ebene dhk war der Ebene abc parallel gezogen, also (IV. 30) bildet die Ebene dfba auch mit der gegebenen Ebene abc den gegebenen Kantenwinkel.

38.

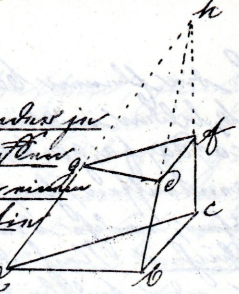


Auf zwei nicht parallelen und nicht in einer Ebene liegenden geraden Linien die Punkte ihres kürzesten Abstandes zu finden.

Die gegebenen geraden Linien seyen ab, cd. Man nehme auf ab einen beliebigen Punkt a, auf cd einen beliebigen Punkt c, in der Ebene acd ziehe man $ak \parallel cd$, in der Ebene cab ziehe man $cl \parallel ab$, so sind (IV. 32) die Ebenen bak, kcd, parallel. Man lege (IV. 33) durch die gerade Linie ab eine Ebene bal senkrecht auf die Ebene kcd, und durch die gerade Linie cd eine Ebene dcm senkrecht auf die Ebene bak, so ist sie auch (IV. 30) senkrecht auf der Ebene kcd. Wenn nun die gerade Linie ab die Ebene dcm in f, und die gerade Linie cd die Ebene bal in g schneidet, so sind f in ab, und g in cd die Punkte des kürzesten Abstandes.

Denn da fg die Kante der Ebenen bal, dcm, ist, und diese Ebenen auf der Ebene kcd senkrecht sind, so ist (IV. 17) auch fg auf der Ebene kcd senkrecht. Aber al ist auf der Ebene kcd senkrecht, also (IV. 15) $al \parallel fg$. Da $ab \parallel ck$, so ist (IV. 25) ab der Ebene kcd parallel, da lg die Kante der Ebenen bal, kcd ist und ab der Ebene kcd parallel, so ist (IV. 25) auch $ab \parallel lg$, also (II. 16) $al = fg$. Aber al auf der Ebene kcd senkrecht, also (IV. 6) $\angle alg = R$, also $ac^2 = al^2 + cl^2$, $al = fg$, also $ac^2 = fg^2 + cl^2$, also fg kleiner als ac, d. h. der kürzeste Abstand.

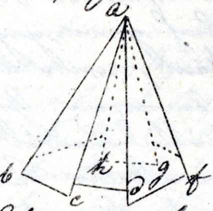
39.



Wenn drei Ebenen einander zu zwei durchschneiden, so treffen ihre Kanten entweder in einem Punkte zusammen, oder sie sind parallel.

Es sey cf die Kante der Ebenen bcfd, acfg, und ag die Kante der Ebenen abdg, acfg, so liegen beide Kanten cf, ag, in der Ebene acfg, wenn sie also nicht parallel sind, so treffen sie gehörig verlängert in einem Punkte k zusammen. Da dieser Punkt k in cf liegt, so liegt er in der Ebene bcfd; da er in ag liegt, so liegt er in der Ebene abdg; da der Punkt k in beiden Ebenen bcfd, abdg, liegt, so liegt er in ihrer Kante bd. Dieser Punkt k ist also der gemeinschaftliche Durchschnitt der drei Kanten ag, bd, cf. Er ist auch (IV. 24) der Durchschnitt jeder Kante mit der gegenüberliegenden Ebene, also von ag mit bcfd, von bd mit acfg, von cf mit abdg. Wenn also zwei Kanten z. B. ag, cf, parallel sind, so muß auch die dritte Kante bd ihnen parallel seyn.

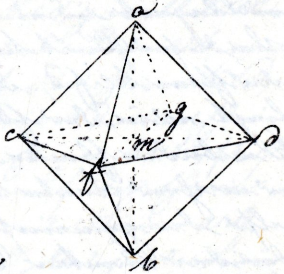
40.



Eine Zusammenstellung von drei oder mehreren Ebenen, welche einen Punkt mit einander gemein haben, in welchem auch ihre Kanten zusammentreffen, heißt eine Ecke oder ein körperlicher (solider) Winkel.

z. B. die Ebenen bac, cad, daf, fag, gah, hab, bilden eine Ecke. Die Kanten, ba, ca, da, fa, ga, ha, welche in der Ecke zusammentreffen, heißen Endkanten, und die Flächen, welche die Ecke bilden, heißen Endflächen. Nach der Anzahl der Endkanten oder Endflächen heißt die Ecke eine dreikantige, vierkantige, fünfkantige u. s. w. oder eine dreiflächige, vierflächige, fünfflächige u. s. w. Eine Ecke schließt keinen Raum ein.

41.

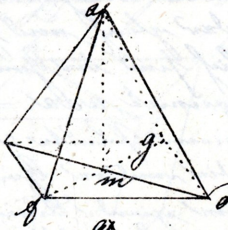


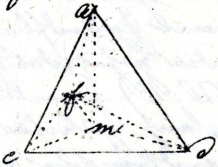
Wenn ein Raum von allen Seiten durch Ebenen begrenzt oder eingeschlossen wird, so heißt er ein Körper, ein Vielflächner oder Polyeder.

Wenn die Ebenen, welche den Körper begrenzen, um gewisse, einander im Mittelpunkte durchschneidende gerade Linien regelmäßig und gleichförmig vertheilt sind, so heißt der Körper ein Krystall, und jene Linien heißen die Axen des Krystalls. Gehen die Axen durch zwei gegenüberstehende gleiche Ecken, wie ab, cd, fg, so heißen sie Eckenaxen. Gehen die Axen durch die Mittelpunkte gegenüberstehender und paralleler Seitenflächen oder Kanten, so heißen sie Flächenaxen oder Kantenaxen. Diejenigen Kanten und Flächen des Krystalls, welche in den Endpunkten einer Haupt=

ecke zusammentreffen, heißen Endkanten und Endflächen. z. B. ca, da, fa, ga, und cb, db, fb, gb, sind Endkanten. Ferner caf, dag, cag, daf und cbf, dbg, cbg, dbf, sind Endflächen, in Bezug auf die Hauptecken ab. Diejenigen Kanten, welche in den Endpunkten der Nebenecken zusammentreffen, heißen Seitenkanten, Randkanten oder Grundkanten. Solche Kanten sind z. B. cf, dg, cg, df in Bezug auf die Nebenecken cd, fg.

42.

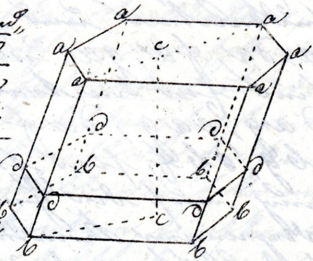




Wenn die Endflächen einer Ecke durch eine Ebene durchschnitten werden, so heißt der Körper eine Pyramide. Die durchschneidende Ebene heißt die Grundfläche der Pyramide. Nach der Anzahl der Ecken an der Grundfläche heißt die Pyramide eine dreiseitige, vierseitige u. s. w. Die Ecke, welche der Grundfläche gegenüber liegt, heißt die Spitze, die von der Spitze auf die Grundfläche gefällte senkrechte Linie am heißt die Höhe der Pyramide. Eine dreiseitige Pyramide wird von vier Dreiecken begrenzt, und heißt deshalb auch Vierflächner oder Tetraeder.

43.

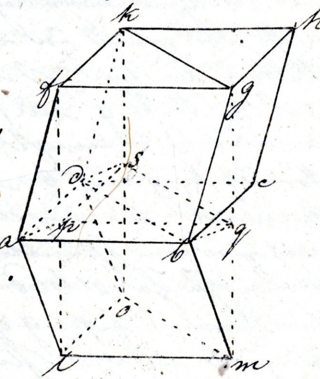
Ein Körper, dessen Grund-
flächen parallel, und des-
sen Seitenkanten parallel
sind, heißt ein Prisma.



Die parallelen Grund-
flächen sind aaa...
und bbb..., die paral-
lelen Seitenkanten sind
ab, ab, u. s. w. Diese parallelen Seitenkanten sind (IV. 28) alle einander gleich, ab = ab u. s. w. daher sind die Seitenflächen des Prisma abab Parallelogramme, und die gegenüberliegenden Randkanten einander gleich und parallel aa = bb. Folglich sind die Grundflächen des Prisma congruent, aaa = bbb die von irgend einem Punkte c der einen Grundfläche auf die andere Grundfläche senkrecht gezogene gerade Linie ist auch (IV 29) auf jener Grundfläche senkrecht, und heißt die Höhe des Prisma. Alle Höhen sind (IV. 15) parallel, und (IV. 28) einander gleich. Daher sind auch die parallelen Seitenkanten ab, ab, unter gleichem Winkel gegen die Grundfläche geneigt (IV. 21. 31). Wenn dieser Winkel ein spitzer oder stumpfer ist, so heißt das Prisma ein schiefes Prisma, wenn aber die Seitenkanten auf der Grundfläche senkrecht, also der Höhe gleich sind, so heißt es ein senkrechtes Prisma, oder eine Säule. Nach der Anzahl der Randkanten oder Seitenkanten

heißt das Prisma ein dreiseitiges, vier-
seitiges, fünfseitiges u. s. w. Da jeder
der Grundfläche parallelen Durchschnitt
ddd.. sind die Kanten des Durchschnitts
(IV. 27) den Randkanten parallel und
gleich dd = bb, daher jeder paral-
lele Durchschnitt der Grundfläche con-
gruent ist.
Wenn die Seitenkanten zwar parallel
aber nicht einander gleich sind, so
daß die Grundflächen zwei gegen
einander geneigte Ebenen sind, so
heißt der Körper ein prismatischer,
oder ein schief abgestumpftes Pris-
ma.

44.



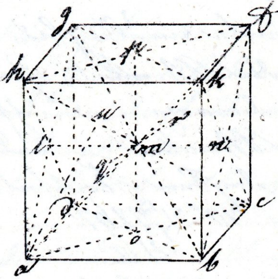
<u>Ein Prisma, dessen Grundflächen Parallelogramme sind, heißt ein Parallelepipedum.</u>

Ein Parallelepipedum abcdfghk wird also von sechs Parallelogrammen begrenzt, von denen je zwei gegenüberliegende congruent sind, nämlich abcd = fghk, bckg = adkf, abgf = dchk. Ein Parallelepipedum hat 12 Kanten, von denen je vier einander gleich und parallel sind. Wenn aber alle 12 Kanten einander gleich sind, so wird das Parallelepipedum von lauter Rhomben begrenzt, und heißt alsdann ein <u>Rhomboëder</u>.

Wenn die Seitenkanten eines Parallelepipe-
dums gegen die Grundfläche unter spitzen
oder stumpfen Winkeln geneigt sind, so
heißt es ein schiefes, sind sie aber senk-
recht auf der Grundfläche, so heißt es
ein senkrechtes Parallelepipedum.
Im schiefen Parallelepipedum sind je zwei
gegenüberliegende Diagonallinien, wie
bd, gk, parallel und einander gleich
und eine durch dieselben gelegte Ebene
bdkg theilt das Parallelepipedum in
zwei dreiseitige Prismen abdfgk, und
bcdghk, welche symmetrische Prismen
heißen, weil sie zwar von congruen-
ten Flächen begrenzt werden, sich aber
nicht das eine in das andere hinein-
stellen lassen. Denn wenn man
das △ hkg auf das congruente
△ abd (I.5) bringt, so fällt h auf a,
k auf b, g auf d, und das △ cdb
kommt in die Lage lmo, so daß
die von den Punkten f, g, k auf die
Grundfläche abcd gefällten senkrech-
ten Linien fl, gg, ks, gehörig ver-
längert in die Punkte l, m, o, tref-
fen. Die beiden Prismen abdfgk,
und hkgcdb = abdlmo, haben
also auf den entgegengesetzten Sei-
ten ihrer gemeinschaftlichen Grund-
fläche abd, gleiche Lage, Richtung
und Größe.

45.

<u>Ein senkrechtes Parallelepipedum,
dessen Grundflächen und Seitenflächen</u>

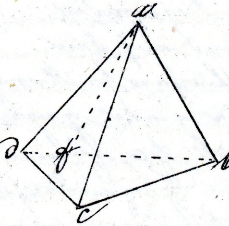


Quadraten sind, heißt ein Würfel Cubus, Hexaeder, Sechsflächner (tessera, tessella).

Alle 12 Kanten des Cubus sind einander gleich, und auf den Seitenflächen senkrecht (IV. 8). Wenn man durch je zwei gegenüberliegende Kanten wie ak, fc, Ebenen legt, so durchschneiden sie die Hexaederflächen abcd, fghk, in ihren Diagonallinien ac, fh, senkrecht. Je zwei solcher Diagonalflächen acfh, bdgk, durchschneiden einander in einer geraden Linie op, welche (IV. 17) auf den Hexaederflächen abcd, fghk, in ihren Mittelpunkten o, p, senkrecht ist. Die sechs Diagonalflächen schneiden einander also in drei geraden Linien op, ln, qr, welche einander in dem Mittelpunkte m des Cubus rechtwinklig durchschneiden und halbiren, und den Kanten des Cubus gleich sind. Sie sind Flächenaxen des Hexaeders, und heißen Octaederaxen.

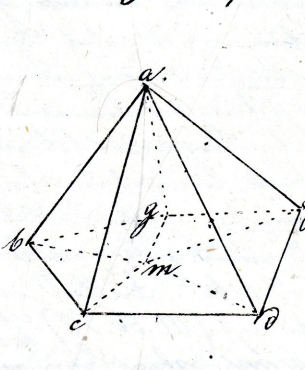
Die Diagonallinien welche je zwei gegenüberliegende Ecken verbinden af, bg, ch, dk, sind einander gleich, und heißen Hexaederaxen. Da $ch^2 = ak^2 + ac^2$, $ac^2 = ab^2 + bc^2$, und $ak = ab = bc$, so ist $ac^2 = 2ak^2$, $ch^2 = 3ak^2$. Fällt man an senkrecht auf ch, so ist (III. 56. 58) $\frac{cn}{hn} = \frac{ac^2}{ak^2} = \frac{2}{1}$, also $mn = \frac{1}{3}\,am$. Die Hexaederaxe ist also gleich der Kante multiplicirt mit $\sqrt{3} = 1{,}7320508075 69$ und die Winkel, unter welchen sich die Tetraederebenen durchschneiden, sind gleich dem Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Kathete $\frac{1}{3}$ der Hypotenuse, also $= 70^\circ 31',7267$

46.



In jeder dreiflächigen Ecke beträgt die Summe der beiden kleineren geradlinigen Winkel mehr als der dritte. Es seyen bac, cad die beiden kleineren, bad der grössere Winkel. In der Ebene des letzteren mache man $\angle baf = bac$, $af = ac$, ziehe bfd und verbinde cd, so ist (I. 1) $\triangle baf = bac$, also $bf = bc$. Aber (I. 27) $bc + cd >$ als bd, also $bc + cd > bc + fd$, also $cd > fd$. Aber $ad = ad$, $af = ac$, also (I. 28) $\angle cad > fad$, also $\angle bac + cad > bac + fad$. Aber $\angle bac = baf$, also $\angle bac + cad > bad$.

47.



In jeder drei- oder mehrflächigen Ecke beträgt die Summe der von den Endkanten gebildeten geradlinigen Winkel weniger als die Summe von vier rechten Winkeln.

Man durchschneide die Ecke a durch eine Grundfläche bcdfg in beliebiger Richtung, und nehme in derselben einen beliebigen Punkt m an. Die Anzahl der Endkanten oder Endflächen oder der Dreiecke um den Punkt m sey $= N$, so ist die Summe aller geradlinigen Winkel in den Endflächen $= N.2R$, und die Summe der Winkel in den Dreiecken, welche um den Punkt m herum liegen, ebenfalls $= N.2R$. Die erste Summe besteht aus den Winkeln an a, $= A$, und aus den Winkeln in den Endflächen an den Randkanten $= B$. Die zweite Summe besteht aus den Winkeln am Umfange der Grundfläche $= G$ und aus den Winkeln um den Punkt m, $= 4R$, also ist $A + B = N.2R$, und $G + 4R = N2R$, also $A + B = G + 4R$. Aber (IV. 46) $B > G$, also $A < 4R$.

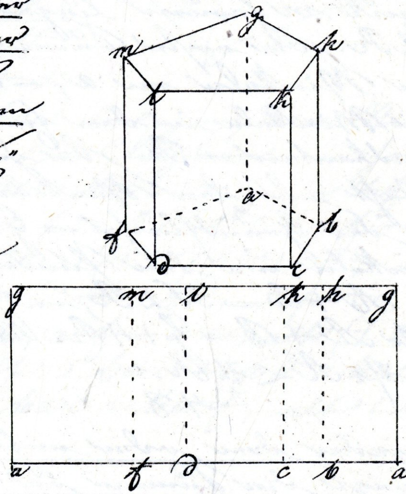
48.

<u>In jeder drei oder mehrflächigen Ecke beträgt die Summe der innern Kantenwinkel mehr als die Summe der innern Umfangswinkel eines ebenen geradlinigen Vielecks von soviel Seiten als die Ecke Endflächen hat.</u>

Man errichte auf jeder Endfläche in dem Eckpunkt eine senkrechte Linie nach außen zu, so macht der geradlinige Winkel zweier nächsten Lothe mit dem Kantenwinkel der Endflächen (IV. 22) zusammen 2 R. Es sey also die Summen der geradlinigen Winkel der Ecke = A, die Summe der Kantenwinkel der Endflächen = C, so ist A + C = N. 2 R. Aber (IV. 47) A < 4 R, also C > N. 2 R − 4 R. Es ist aber (II. 11) N. 2 R − 4 R die Summe der innern Umfangswinkel eines ebenen geradlinigen Vielecks von N Seiten.

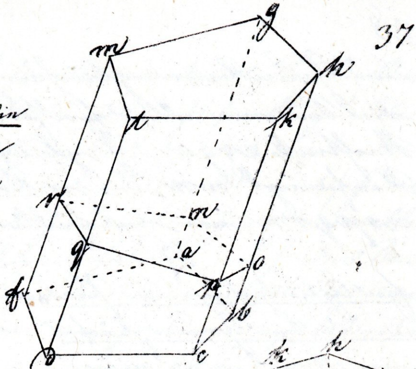
49.

<u>Die Seitenfläche oder die Summen aller Endflächen einer Säule ist gleich dem Produkt des Umfangs mit der Höhe.</u>

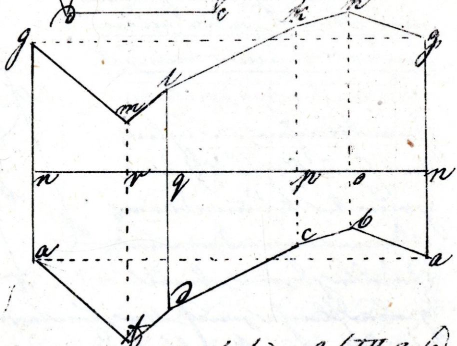


Denn die Endflächen sind (IV. 43) Rechtecke, deren Höhe gleich der Höhe der Säule, deren Grundlinien die Randkanten ab, bc, cd u. s. w. der Säule sind. Trägt man also die Randkanten auf eine gerade Linie auf, und errichtet man in den Theilungspunkten senkrechte Linien, welche der Höhe der Säule gleich sind, so sind die einzelnen Rechtecke den Endflächen der Säule gleich, und das ganze Rechteck hat den Umfang der Säule zur Grundlinie.

50

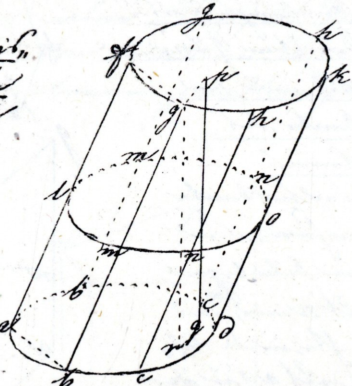


Die Seitenfläche oder die Summe aller Seitenflächen eines schiefen Prisma ist gleich dem Produkt des Umfangs des senkrechten Querschnitts mit der Seitenkante des Prisma.



Zu der Seitenkante ag nehme man einen beliebigen Punkt n an, und errichte in demselben auf ag in den Ebenen aghb, agmf die senkrechten Linien no, nr, so ist (IV. 3. 6) die Seitenkante ag auf der Ebene rno senkrecht. Wenn diese Ebene gehörig erweitert, die übrigen Seitenkanten in o, p, q, durchschneidet, so sind sie (IV. 16) auf dieser Ebene senkrecht, und die Winkel noh, poh, opk, kpq u. s. w. sind rechte Winkel. Man trage also die Randkanten dieses senkrechten Querschnitts no, op u. s. w. auf eine gerade Linie, errichte in den Theilungspunkten senkrechte Linien, und nehme auf denselben die Abschnitte na, ng; ob, oh, u. s. w. gleich den entsprechenden Abschnitten auf den Seitenkanten des Prisma, so sind die entstehenden Parallelogramme abhg, bckh u. s. w. gleich den entsprechenden Seitenflächen des Prisma. Da alle Parallelogramme von gleicher Größe und Grundlinie gleichen Inhalt haben, so ist die Summe aller Kreisflächen gleich dem Rechteck agga, d.h. gleich dem Produkt des Umfangs nn des senkrechten Querschnitts nopqrn in der Seitenkante ag.

51.



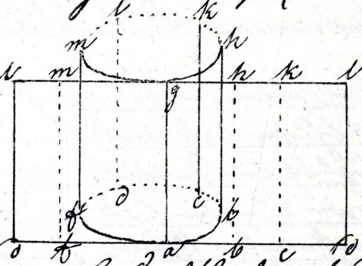
Ein Cylinder ist ein Prisma, dessen Grundfläche ein Kreis oder eine andere krumme Linie ist.

Die beiden parallelen Grundflächen des Cylinders sind also (IV 43) congruente krumme Linien. Die von irgend einem Punkte p der obern Grundfläche auf die untere Grundfläche gefällte senkrechte Linie pq, ist auch auf der obern Grundfläche (IV 29) senkrecht, und heißt die Höhe des Cylinders. Alle Höhen pq, gr u.s.w. sind (IV.15) parallel und (III.28) einander gleich. Die gerade Linie af, bg, ch, dk, welche je zwei entsprechende Punkte der beiden Grundflächen verbindet, liegt ganz in der Seitenfläche des Cylinders, und heißt die Seitenlinie. Alle Seitenlinien sind (IV.43) parallel und einander gleich, die durch je zwei Seitenlinien af, bg gelegte Ebene durchschneidet die Seitenfläche des Cylinders in einem Parallelogramm. Jede andere Ebene, welche die Seitenlinie in einem Punkte durch-

schneidet, muß auch alle andern Seitenlini-
en durchschneiden; diese Durchschnittspunkte
bilden auf der Seitenfläche des Cylinders
eine krumme Linie. Wenn die schnei-
dende Ebene den Grundflächen parallel
ist, so bildet der Querschnitt auf der Sei-
tenfläche eine krumme Linie lmno, und
zu den Grundflächen congruent ist (IV. 43)

52.

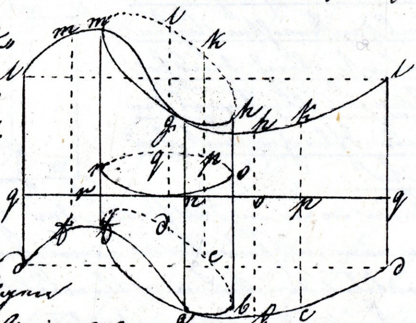
Die Seitenfläche ei-
nes senkrechten Cylin-
ders ist gleich dem Pro-
ducte des Umfanges der
Grundfläche mit der
Höhe.



Wenn man in der Ebene der Grundfläche abcdf
in einem Punkte a eine gerade Linie dad zieht,
welche die krumme Linie berührt, d. h. nur
diesen Punkt a mit ihr gemein hat, in allen
übrigen Punkten aber außerhalb derselben
liegt, so wird eine durch diese Berührungsli-
nie ad und die Seitenlinie ag gelegte Ebene
die krumme Seitenfläche des Cylinders in
der Linie ag berühren. Da alle Seitenlini-
en des Cylinders parallele gerade Linien sind,
so wird sich die Seitenfläche des Cylinders bei
der Umdrehung desselben auf dieser Ebene
abwickeln und bei einer ganzen Umdre-
hung des Cylinders wird die durch die Ab-
wickelung auf der Ebene erzeugte Fi-
gur der ganzen Seitenfläche des Cylinders
gleich sein. Bei einem senkrechten Cylinder

sind alle Seitenlinien auf der Grundfläche senkrecht. Zieht man also in der Berührungs-ebene die geraden Linien d a d, l g l, senkrecht auf a g, so fallen bei der Abwickelung des Cylinders die Punkte der krummen Linien der Grundfläche in die Grundlinie dieses Rechtecks, und die Länge der Grundlinien d d, l l, ist also dem Umfange der krummen Linien der Grundfläche gleich.

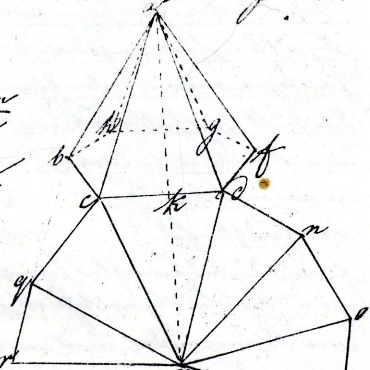
53.



Die Seitenfläche eines schiefen Cylinders ist gleich dem Produkte aus dem Umfange des senkrechten Querschnitts mit der Seitenlinie.

Durch einen beliebigen Punkt n der Seitenlinie a g des schiefen Cylinders lege man eine auf diese Seitenlinie senkrechte Ebene, welche die Seitenfläche des Cylinders in einer krummen Linie n o p q r durchschneidet. In dieser Ebene ziehe man an die krumme Linie eine berührende gerade Linie q n q, und lege durch diese berührende Linie und die Seitenlinie a g eine Ebene, so berührt dieselbe die Seitenfläche des Cylinders in der Linie a g. Bei der Abwickelung des Cylinders wickeln sich die Punkte des senkrechten Querschnitts n o p q r in der geraden auf a g senkrechten Linie q n q ab, die Punkte der sogenannten schiefen Grundflächen a b c d f g h k l m, aber wickeln sich auf der Berührungsebene d d l l in sogenannten krummen Linien ab, so daß die Abwickelung der untern Grundfläche abcdf gegen die untern Grundlinie dd des Rechtecks dieselbe Lage und Entfernung hat, wie die Abwickelung der obern Grundfläche ghklm gegen die obern Grundlinie ll. Folglich ist die auf der Zeichnungsebene bei der Abwickelung des Cylinders erzeugte, zwischen den geraden Linien dl, dl, und den krummen Linien dcbafd, lkhgml, enthaltene der Seitenfläche des schiefen Cylinders gleiche Figur, an Inhalt dem Rechteck ddld gleich, dessen Grundlinien dd = gg = ll, dem Umfange des senkrechten Querschnitts und dessen Höhe der Seitenlinie des Cylinders gleich ist.

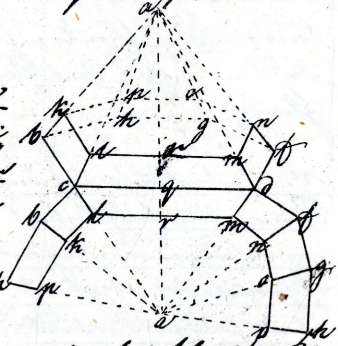
54.



<u>Die Seitenfläche, d. h. die Summe aller Seitenflächen einer regelmäßigen Pyramide, ist gleich dem halben Produkt des Umfangs der Grundfläche mit der Höhe der Seitenfläche.</u>

Wenn man auf einer Ebene Dreiecke mcd, mdn, mno u.s.w. nebeneinander setzt, welche den Seitenflächen der Pyramide acd, adf, afo, u.s.w. gegenseitig congruent sind, so werden diese Dreiecke von den Seitenflächen der Pyramide bei der Abwickelung derselben gedeckt werden. Die Linie rqcdnop ist also der Umfang der Grundfläche hbcdfgk, und der Inhalt der

Figur rqcdnop der Seitenfläche der Pyramide gleich. Bei einer regelmäßigen Pyramide ist die Grundfläche ein regelmäßiges Vieleck, und die Seitenkanten ab, ac, ad u. s. w. sind alle einander gleich. Also sind in der abgewickelten Figur alle Dreiecke mrq, mqc, mcd u. s. w. gleichschenklige Dreiecke, deren Höhe mk gleich der Höhe ak der Seitenfläche ist. Aber (III. 8) $\triangle acd = \frac{1}{2} cd . ak$ oder $\triangle mcd = \frac{1}{2} cd . mk$. Also ist auch die Seitenfläche der regelmäßigen Pyramide gleich dem Produkt der halben Umfangslinie bcdfgh oder rqcdnop mit der Höhe ak oder mk.



55.

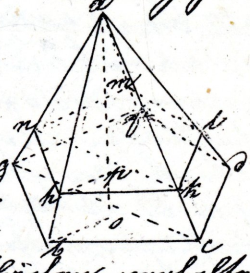
<u>Die Seitenfläche einer abgestumpften regelmäßigen Pyramide ist gleich dem Produkt der halben Summe der Umfangslinien mit der Höhe der Seitenfläche.</u>

Eine abgestumpfte Pyramide heißt der Körper, welcher zwischen der Grundfläche einer Pyramide, und einem ihr parallelen Durchschnitt enthalten ist. Die Seitenflächen bklc, clmd u. s. w. sind also Trapezien, und die Seitenkanten bk, cl, dm, u. s. w. treffen gehörig verlängert in einem Punkte a zusammen. Die in der Ebene der Seitenfläche cdml, zwischen den Randkanten cd, lm, gezogene senkrechte Linie rq, ist die Höhe der Seitenfläche.

Wenn auf einer Ebene Trapezien neben einander beschrieben werden, welche den Endflächen der abgestumpften Pyramide congruent sind, so werden sie bei der Abwickelung der abgestumpften Pyramide von den Endflächen derselben gedeckt, und die Seitenfläche der abgestumpften Pyramide ist daher der Summe der Trapezien in der Ebene gleich. Bei einer regelmäßigen abgestumpften Pyramide sind alle Trapezien congruent, also alle Höhen einander gleich. Aber der Inhalt eines Trapezium ist (III. 10) gleich dem Produkt der halben Summe der beiden Parallelseiten mit der Höhe. Also die Seitenfläche gleich dem Produkt der halben Summe der Umfangslinien bcdfgh, klmnop, oder der Umfangslinie des mittlern Querschnitts mit der Höhe rq.

56

In ähnlichen Pyramiden sind die gleichnamigen Kanten, Diagonallinien und Höhen proportionirt, die Endflächen, Grundflächen, Seitenflächen und Oberflächen verhalten sich wie die Quadrate der gleichnamigen Kanten, Diagonallinien und Höhen.



Wenn eine Pyramide, deren Spitze a, deren Grundfläche bcdfg ist, durch eine der Grundfläche parallele Ebene geschnittten wird, so entsteht eine neue Pyramide, deren Spitze a, deren Grundfläche der Durchschnitt $hklmn$ ist. Diese beiden Pyramiden heißen einander ähnlich, weil alle Kanten und Flächen der einen, unter denselben Winkeln gegen einander geneigt sind, wie die gleichnamigen der andern. (IV. 27. 30) und daher die einzelnen Flächen der einen den gleichnamigen der andern Pyramide ähnlich sind. z. B.

$hk \parallel bc$, $nh \parallel gb$, $kn \parallel cg$, $\triangle ahk \sim abc$, $\triangle ahn \sim abg$, $\triangle akn \sim acg$ u. s. w. daher ist dann auch (II. 59 $\frac{ah}{ab} = \frac{hk}{bc} = \frac{ak}{ac} = \frac{nk}{cg} = \frac{an}{ag} = \frac{nm}{gf}$ u. s. w. $= A$.

Da nun $hk = A.\,bc$, $kl = A.\,cd$, $lm = A.\,df$, $mn = A.\,fg$, $nh = A.\,gb$, so ist $hk + kl + lm + mn + nh = A\,(bc + cd + df + fg + gb$ d. h. die Umfänge der Grundflächen verhalten sich wie die gleichnamigen Seiten.

Nach III. 64. ist $\frac{\triangle ahk}{\triangle abc} = A^2$, $\frac{\triangle akl}{\triangle acd} = A^2$, u. s. w. also $ahk + akl + alm + amn + anh = A^2(abc + acd + adf + afg + agb)$, d. h. die Seitenflächen verhalten sich wie die Quadrate der gleichnamigen Seiten.

Nach III. 67. ist $\frac{hklmn}{bcdfg} = A^2$, d. h. die Grundflächen verhalten sich wie die Quadrate der gleichnamigen Seiten. Die Summe der Seitenfläche und Grundfläche macht die ganze Oberfläche der Pyramide, also verhalten sich auch die Oberflächen wie die Quadrate der gleichnamigen Seiten.

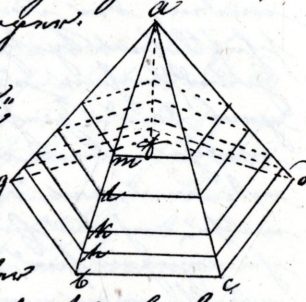
57.

An ähnlichen von Ebenen begrenzten Körpern sind die gleichnamigen Kanten und Diagonallinien proportionirt, die Endflächen und Oberflächen verhalten sich wie die Quadrate der gleichnamigen Kanten und Diagonallinien.

Nimmt man innerhalb oder außerhalb eines von Ebenen begrenzten Körpers einen beliebigen Punkt an, von welchem man nach allen Eckpunkten gerade Linien zieht, so erhält man Pyramiden, die diesen Punkt zur gemeinschaftlichen Spitze haben, und deren Grundflächen die Endflächen des Körpers sind. Zieht man eine Ebene, welche einer der Endflächen parallel ist, und von den geraden Linien, welche nach den Eckpunkten dieser Endfläche gezogen sind, durchschnitten wird, so erhält man eine neue Pyramide, welche denselben angenommenen Punkt zur Spitze hat, und deren Grundfläche der mit der ersten Endfläche parallele Durchschnitt ist. Diese Pyramide ist der ersten Pyramide (IV. 55) ähnlich. Durch die entstehenden Randkanten des parallelen Durchschnitts legt man Ebenen, welche den Endflächen, die der ersten Endfläche angrenzen, parallel sind. Hierdurch erhält man um die erste Pyramide herum eine Reihe von Pyramiden, die den gleichnamigen

Pyramiden des angenommenen Körpers ähnlich sind, und fährt so fort. Auf diese Weise erhält man einen zweiten Körper, welcher aus Pyramiden besteht, die den gleichnamigen Pyramiden des ersten Körpers ähnlich sind, und auf ähnliche Art zusammengestellt sind. Diese beiden Körper sind also einander ähnlich, und da der vorige Satz für die einzelnen Pyramiden, aus denen sie bestehen, wahr ist, so gilt er auch für die ganzen einander ähnlichen Körper.

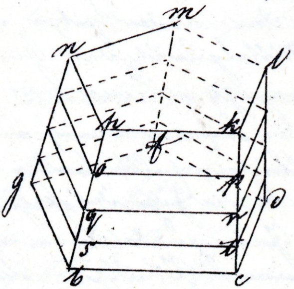
58.



Die Seitenfläche einer Pyramide durch mit der Grundfläche parallele Ebenen in gleiche Theile zu theilen.

Nach IV. 54 verhalten sich die Seitenflächen ähnlicher Pyramiden wie die Quadrate gleichnamiger Kanten. Soll also die Seitenfläche n gleiche Theile erhalten, so bestimmt man auf einer Seitenkante a b die Theilungspunkte m, l, k, h u. s. w. so wie bei der Theilung der Seitenfläche a b c durch Parallellinien (III. 69) indem man $am = ab\sqrt{\frac{1}{n}}$, $al = ab\sqrt{\frac{2}{n}}$, $ak = ab\sqrt{\frac{3}{n}}$, $ah = ab\sqrt{\frac{4}{n}}$ u. s. w. macht, und durch diese Theilungspunkte parallele Ebenen mit der Grundfläche (IV. 34) zieht.

59.



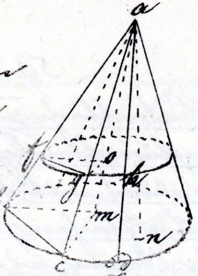
Die Seitenfläche einer abgestumpften Pyramide durch mit den Grundflächen parallele Ebenen in gleiche Theile zu schneiden.

Die Seitenkanten einer abgestumpften Pyramide treffen (IV. 55) gehörig verlängert in einem Punkte zusammen. Die parallelen Ebenen bilden also ähnliche Pyramiden, deren gemeinschaftliche Spitze dieser Durchschnittspunkt ist. Die durch parallele Ebenen auf den Seitenflächen der abgestumpften Pyramide, welche Trapezien sind, abgeschnittenen Stücke verhalten sich also wie die Unterschiede der Quadrate der parallelen Transversallinien. Man verfährt also wie bei der Theilung eines Trapezium (III. 71) indem man auf einer Seitenfläche $bckh$, die parallelen Transversallinien op, qr, st u. s. w. für n gleiche Theile so sucht, daß

$$op^2 = hk^2 + \frac{1}{n}(bc^2 - hk^2)$$
$$qr^2 = hk^2 + \frac{2}{n}(bc^2 - hk^2)$$
$$st^2 = hk^2 + \frac{3}{n}(bc^2 - hk^2) \text{ u. s. w.}$$

60

Ein Kegel ist eine Pyramide, deren Grundfläche ein Kreis oder eine andere krumme Linie ist.



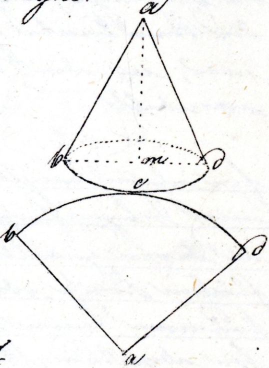
der von der Spitze nach dem Mittelpunkt der Grundfläche gezogene Linie am heißt die Axe, die auf die Grundfläche gefällte senkrechte Linie an die Höhe des Kegels.

Jede gerade Linie welche von der Spitze auf einen Punkt des Umfangs der Grundfläche gezogen wird, heißt die Seitenlinie des Kegels: ab, ac, ad, und liegt ganz in der Seitenfläche desselben. Jede Ebene, abc, abd, welche durch die Spitze des Kegels und zwei Punkte des Umfangs der Grundfläche gelegt wird, durchschneidet die Seitenfläche des Kegels in zwei geraden Linien, welche Seitenlinien sind. Eine Ebene, welche durch eine Seitenlinie, und durch eine Berührungslinie des Umfangs der Grundfläche gelegt wird, berührt die Seitenfläche des Kegels in der Seitenlinie. Eine Ebene, welche nicht durch die Spitze des Kegels geht, durchschneidet die Seitenfläche des Kegels in einer krummen Linie, welche ein Kegelschnitt heißt. Eine Ebene welche der Grundfläche parallel ist, durchschneidet die Seitenfläche des Kegels in einer krummen Linie fgk welche der Grundfläche bcd ähnlich ist. Wenn die Grundfläche des Kegels ein Kreis ist, so ist auch jeder parallele Querschnitt ein Kreis. Denn (III 27) fo ∾ bm, go ∾ cm,

$fg \parallel bc$, also (IV. 31) $\triangle fog \sim \triangle bmc$; nun aber $mb = mc$ so ist auch $of = og$.

Ein Kegel kann angesehen werden als entstanden durch die Bewegung einer geraden Linie ab längs einer nicht in ihrer Ebene liegenden krummen Linie bcd, wobei sie immer durch einen gegebenen festen Punkt a, geht. Wenn die Grundfläche des Kegels ein Kreis ist, und die Axe am senkrecht auf der Ebene des Kreises, also mit der Höhe an zusammenfällt, so sind alle Seitenlinien ab, ac, ad, einander gleich. Alsdann heißt der Kegel ein gleichseitiger, im Gegentheil aber ein ungleichseitiger Kegel.

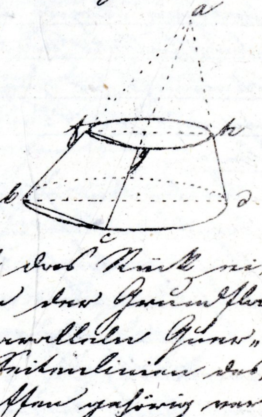
VI.



Die Seitenfläche eines gleichseitigen Kegels ist gleich dem halben Produkt des Umfangs der Grundfläche mit der Seitenlinie.

Da bei dem gleichseitigen Kegel die Axe auf der Grundfläche senkrecht, und die Grundfläche ein Kreis ist, so sind alle Seitenlinien einander gleich $ab = ac = ad$ u. s. w. Bei der Abwickelung des gleichseitigen Kegels auf einer Ebene beschreiben die Punkte des Umfangs der Grundfläche einen Kreisbogen, dessen Halbmesser der Seitenlinie des Kegels gleich ist. Bei einer ganzen Umwälzung des Kegels ist der Bogen dieses Kreises von Länge dem Umfange der Grundfläche des Kegels, und der Inhalt des Kreissektors der Seitenfläche des Kegels gleich. Da der gleichseitige Kegel als eine regelmäßige Pyramide angesehen werden kann, deren Grundfläche ein Kreis ist, und (IV 54) die Seitenfläche einer regelmäßigen Pyramide gleich dem Produkt des halben Umfangs der Grundfläche mit der Höhe der Seitenfläche ist, wie groß auch die Anzahl der Seiten oder Randkanten der Grundfläche sein mag, so gilt dieser Satz auch für den gleichseitigen Kegel, wobei sich die Linie, welche bei der Pyramide die Höhe der Seitenfläche, d. h. die von der Spitze auf die Randkante gezogene senkrechte Linie war, in die Seitenlinie des Kegels verwandelt.

62.

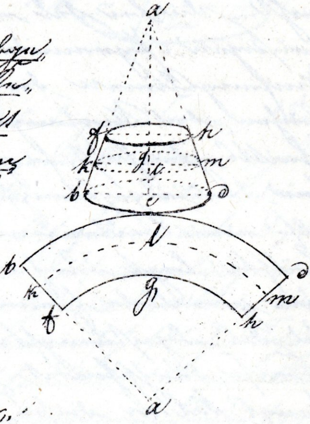


Ein abgestumpfter Kegel ist eine abgestumpfte Pyramide, deren parallele Grundflächen Kreise oder andere krumme Linien sind.

Ein abgestumpfter Kegel ist das Stück eines Kegels, welches zwischen der Grundfläche desselben und einem parallelen Querschnitt enthalten ist. Alle Seitenlinien desselben bf, cg, dh, u. s. w. treffen gehörig verlängert in einem Punkte zusammen. Eine durch je zwei Seitenlinien bf, cg, gelegte Ebene geht durch denselben Punkt, und schneidet die parallelen Grundflächen in geraden Linien bc, fg, welche

(IV. 27) parallel sind. Die Grundflächen sind daher ähnliche krumme Linien, und alle den Grundflächen parallelen Ebenen, schneiden die Seitenfläche des abgestumpften Kegels in ähnlichen krummen Linien. Wenn durch eine Seitenlinie eine Ebene so gelegt wird, daß ihr Durchschnitt mit der einen Grundfläche dieselbe berührt, so berührt auch ihr Durchschnitt mit der andern Grundfläche diese letztere, und die Ebene selbst berührt die Seitenfläche in der Seitenlinie.

63

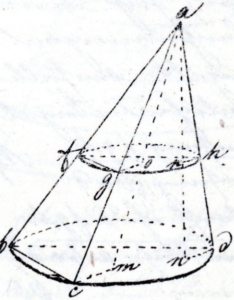


<u>Die Seitenfläche eines abgestumpften gleichseitigen Kegels ist gleich dem Product der halben Summe der Umfangslinien der Grundflächen, mit der Seitenlinie.</u>

Der abgestumpfte gleichseitige Kegel, ist eine abgestumpfte regelmäßige Pyramide, deren Grundflächen bcd, fgh, Kreise sind.

Da die Seitenfläche der abgestumpften regelmäßigen Pyramide (IV. 55) gleich dem Product der halben Summe der Umfangslinien der Grundflächen mit der Höhe der Seitenflächen ist, wie groß auch die Anzahl der Seiten oder Randkanten der Grundflächen sein mag, so gilt dieser Satz auch für den abgestumpften Kegel, welcher sich die Linie, welche bei der abgestumpften Pyramide die Höhe der Endfläche ist, beim abgestumpften gleichseitigen Kegel in die Seitenlinie desselben verwandelt. Beim abgestumpften gleichseitigen Kegel sind alle Seitenlinien einander gleich, unter gleichen Winkeln gegen die Grundflächen geneigt, und treffen gehörig verlängert in einem Punkt zusammen. Die Linie, welche die Mittelpunkte der kreisförmigen Grundflächen verbindet, trifft gehörig verlängert in denselben Punkt, und ist auf den Grundflächen senkrecht. Da bei der abgestumpften vieleckigte Pyramide die halbe Summe der Umfangslinien der beiden parallelen Grundflächen, der Umfangslinie des mittleren Querschnitts gleich ist, so gilt derselbe Satz auch für den abgestumpften Kegel. Man theilt also eine Seitenlinie bf in k in die Hälfte, legt durch k eine den Grundflächen parallele Ebene, welche die Seitenfläche des abgestumpften Kegels in einem Kreise durchschneidet. Das Produkt des Umfangs klm dieses mittleren Querschnitts mit der Seitenlinie bf giebt ebenfalls die Seitenfläche des abgestumpften gleichseitigen Kegels. Bei der Abwickelung derselben auf eine Ebene, beschreiben die Punkte der Umfangs der Grundflächen concentrische Kreisbögen, deren Halbmesser die Entfernung von der Spitze a des ganzen Kegels ist, und die an Länge den Umfangslinien der Grundflächen gleich sind. Der Inhalt des zwischen diesen concentrischen Bögen enthaltenen Flächenstücks ist der Seitenfläche des abgestumpften gleichseitigen Kegels gleich.

64.



Bei ähnlichen Kegeln sind die gleichnamigen Seitenlinien, Durchmesser, Halbmesser, Axen, Höhen, u.s.w. den Verhältnißzahlen der Grundflächen proportionirt, die Seitenflächen und Grundflächen verhalten sich wie die Quadrate derselben.

Wenn ein Kegel von beliebiger Form durch eine der Grundfläche parallelen Ebene geschnitten wird, so entsteht ein zweiter dem vorigen ähnlicher Kegel $afgh \sim abcd$. denn diese beiden Kegel haben zusammenliegende Seitenlinien af u. ab, ag u. ac, ah u. ad u.s.w. Jede durch die gemeinschaftliche Spitze a gelegte Ebene durchschneidet die parallelen Grundflächen fgh, bcd, in parallelen geraden Linien fg u. bc, go u. cm, hp u. dn u.s.w., und bildet also in beiden Kegeln ähnliche Dreiecke $afg \sim abc$ $ago \sim acm$, $ahp \sim adn$, $afh \sim abd$ u.s.w. Bezeichnet man also das Verhältniß der gleichnamigen Seiten durch A, so ist wie bei ähnlichen Pyramiden $A = \frac{af}{ab} = \frac{fg}{bc} = \frac{ag}{ac} = \frac{go}{cm} = \frac{ao}{am} = \frac{ap}{an} = \frac{hp}{dn} = \frac{ah}{ad} = \frac{fh}{bd}$ u.s.w.

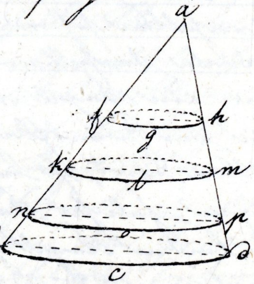
Und da bei ähnlichen Pyramiden welche Form auch die Grundfläche haben mag, (IV. 56) die Umfangslinien der Grundflächen sich wie die gleichnamigen Seiten, die Grundflächen, Seitenflächen, Oberflächen, sich wie die Quadrate der gleichnamigen Seiten verhalten, so gilt derselbe Satz auch für die ähnlichen Kegel, und es ist

$$\frac{\text{Umfang } fgh}{\text{Umfang } bcd} = \lambda, \quad \frac{\text{Inhalt } fgh}{\text{Inhalt } bcd} = \lambda^2$$

$$\frac{\text{Seitenfläche } afgh}{\text{Seitenfläche } abcd} = \lambda^2, \quad \frac{\text{Oberfläche } afgh}{\text{Oberfläche } abcd} = \lambda^2$$

65.

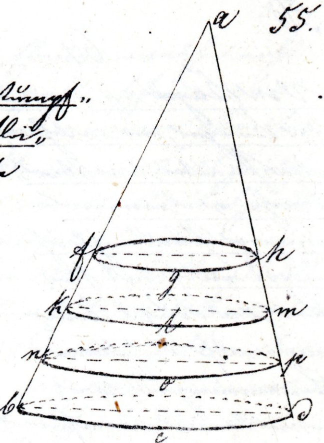
Die Seitenfläche eines Kegels durch mit der Grundfläche parallele Ebenen in gleiche Theile zu theilen.



Man verfährt in Gemäßheit des vorigen Satzes wie bei der Eintheilung eines Dreiecks durch Parallellinien mit der Grundlinie (III. 69). Soll also die Seitenfläche in n gleiche Theile zerfallen, so bestimmt man auf einer beliebigen Seitenlinie ab, die Theilungspunkte f, k u. s. w. so daß $af = ab\sqrt{\frac{1}{n}}$, $ak = ab\sqrt{\frac{2}{n}}$, $an = ab\sqrt{\frac{3}{n}}$ u. s. w. und legt durch diese Theilungspunkte Ebenen, welche der Grundfläche bcd parallel sind.

66.

Die Seitenfläche eines abgestumpften Kegels durch mit der Grundfläche parallele Ebenen in gleiche Theile zu theilen.



Es seyen bf, dh zwei beliebige Seitenlinien, so liegen sie (IV 62) in einer Ebene, welche durch die Spitze a des vollen Kegels geht, und welche die parallelen Grundflächen fgh, bcd, in parallelen geraden Linien fh, bd, durchschneidet (IV 27). Eine durch einen beliebigen Punkt k, welcher in einer Seitenlinie liegt, der Grundfläche parallel gelegte Ebene klm, wird von der Ebene abd in einer geraden Linie km geschnitten, welche ebenfalls den Linien fh, bd parallel ist. Also ist (IV 64)

$$\frac{\text{Seitenfläche } afgh}{\text{Seitenfläche } abcd} = \frac{fh^2}{bd^2}, \quad \frac{\text{Seitenfläche } fghbcd}{\text{Seitenfläche } abcd} = \frac{bd^2 - fh^2}{bd^2}$$

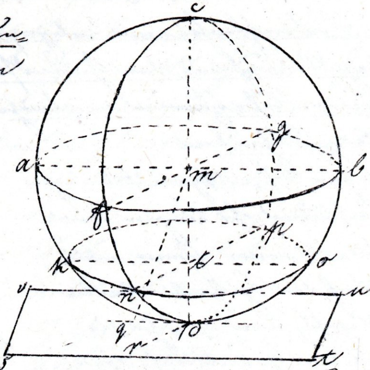
$$\frac{\text{Seitenfläche } aklm}{\text{Seitenfläche } abcd} = \frac{km^2}{bd^2}, \quad \frac{\text{Seitenfläche } fghklm}{\text{Seitenfläche } abcd} = \frac{km^2 - fh^2}{bd^2}$$

Also $\dfrac{\text{Seitenfläche } fghklm}{\text{Seitenfläche } fghbcd} = \dfrac{km^2 - fh^2}{bd^2 - fh^2}$

Man verfährt also wie bei der Theilung eines Trapeziums (III 71). Soll die Anzahl der Theile gleich n seyn, so bestimmt man in dem Trapezium fbdh, die Parallellinien km, np, u. s. w. so daß $km^2 = fh^2 + \frac{1}{n}(bd^2 - fh^2)$, $np^2 = fh^2 + \frac{2}{n}(bd^2 - fh^2)$ u. s. w. und legt durch die Theilungspunkte der Seitenlinie bf parallele Ebenen mit den Grundflächen.

67.

Die Kugel ist ein runder Körper, an welchem alle Punkte der Oberfläche von einem innern Punkte gleich weit entfernt sind. Bei der Kugel kann man also dieselben Benennungen, wie beim Kreise.

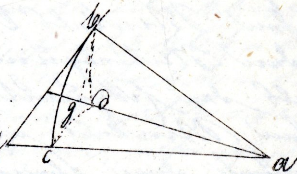


Der innere feste Punkt heißt der Mittelpunkt oder das Centrum, die überall gleiche Entfernung der Punkte der Oberfläche vom Mittelpunkt heißt der Halbmesser oder Radius. Eine gerade Linie welche von einem Punkte der Oberfläche durch den Mittelpunkt zum entgegengesetzten Punkte der Oberfläche gezogen wird, heißt der Durchmesser oder Diameter, und ist dem doppelten Halbmesser gleich. Jede durch den Mittelpunkt gelegte Ebene schneidet die Kugel in einem Kreise, welcher der größte Kreis der Kugel heißt weil der Halbmesser und Durchmesser dieses größten Kreises dem Halbmesser und Durchmesser der Kugel gleich sind. Der Umfang des größten Kreises ist also auch dem Umfange der Kugel gleich. Jeder größte Kreis der Kugel theilt dieselbe in zwei einander gleiche Halbkugeln, deren gemeinschaftliche Grundfläche dieser größte

Kreis ist. Jede andere Ebene, welche nicht durch den Mittelpunkt geht, schneidet die Kugel ebenfalls in einem Kreise knop, welcher ein kleinerer Kreis heißt. Denn wenn man vom Mittelpuncte der Kugel auf diese Ebene eine senkrechte gerade Linie ml fällt (IV. 20) so sind (IV. 36.) die Winkel $mlk = mln = mlo = mlp = R$. Da die Halbmesser der Kugel mk, mn, mo, mp, einander gleich sind, so sind auch (I. 36) die rechtwinkligen Dreiecke mlk, mln, mlo, mlp, congruent, also $lk = ln = lo = lp$ Halbmesser des Kreises knop, dessen Mittelpunkt l ist. Da aber (II. 45) $mk^2 = ml^2 + lk^2$, so ist $lk < mk$, also der Kreis knop kleiner als der größte Kreis afbg. Der kleinere Kreis theilt die Kugel in zwei ungleiche Segmente, welche zusammen die ganze Kugel ausmachen, und diesen Kreis zur gemeinschaftlichen Grundfläche haben. Dieser kleinere Kreis ist auch die Grundfläche eines gleichseitigen Kegels, dessen Spitze der Mittelpunkt der Kugel ist, dessen Seitenlinie dem Halbmesser der Kugel gleich ist, dessen Höhe die vom Mittelpunkte der Kugel auf die Ebene des kleineren Kreises gefällte senkrechte Linie ml ist. Dieser Kegel macht mit dem kleineren Segment

Segment der Kugel zusammen denjenigen Theil der Kugel aus, welcher der Kugelsektor heißt. Ein größter Kreis $afbg$ heißt in Beziehung auf einen kleinern Kreis $knop$, dessen Ebenen der seinigen parallel ist, der Aequator, und der kleinere Kreis heißt sein Parallelkreis, und das Stück der Kugel zwischen dem Aequator und einem Parallelkreise, oder zwischen zwei Parallelkreisen heißt eine Zone. Die größten Kreise $cadb$, $cfdg$, deren Ebenen auf der Ebene des Aequators $afbg$ senkrecht sind, heißen Meridiane. Ihre gemeinschaftliche Kante cd ist ebenfalls (IV. 17) auf dem Aequator senkrecht, und heißt die Axe, ihre beiden Endpunkte c, d, heißen die Pole, und sind von allen Punkten des Aequators gleich weit entfernt, $ca = cf = cb = cg = da = df = db = dg$. Eine Kugel kann also auch durch die Umdrehung eines größten Kreises um einen seiner Durchmesser als Axe, entstehend gedacht werden. Der Kantenwinkel zweier Meridiane oder größten Kreise $cadb$, $cfdg$, ist (IV. 22) der Winkel amf, den die Ebenen derselben auf dem Aequator im Mittelpunkt der Kugel abschneiden, und dessen Maaß der entsprechende Bogen $af = bg$ des Aequators ist. Dieser Winkel ist auch gleich dem Winkel gdr, welhen zwei gerade Linien dq, dr, die einen der Pole d bilden, wenn diese Linien in der Ebene eines jeden dieser größten Kreise an dieselben berührend gezogen werden. Eine Ebene $stuv$ berührt die Kugel, wenn sie in einem ihrer Punkte d auf dem Durchmesser senkrecht gelegt wird. Denn wenn man in derselben irgend einen Punkt q annimmt, und nach demselben vom Mittelpunkt m ~~mi~~= eine gerade Linie mq zieht, so ist mdq ein rechter Winkel, also $mq > md$. Folglich liegen alle Punkte dieser Ebene außerhalb der Kugel, und sie hat nur den Punkt d mit der Kugel gemein.

68.



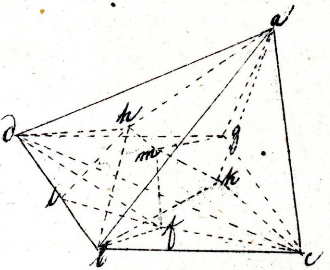
Ein sphärisches Dreieck wird auf der Oberfläche einer Kugel durch drei Bogen größter Kreise gebildet.

Es seien b, c, d, drei Punkte auf der Oberfläche einer Kugel, a der Mittelpunkt der Kugel, so schneiden (IV. 67) die durch abc, abd, acd, gelegten Ebenen die Oberfläche der Kugel in größten Kreisen, deren Bogen bc, bd, cd, die Seiten des sphärischen Dreieckes heißen. Die Winkel des sphärischen

Dreiecks werden durch die Win-
kel der Berührungslinien angege-
ben, welche man an die Sei-
ten des sphärischen Dreiecks zieht.
Ist nämlich in der Ebene abc,
bf senkrecht auf ab, also bf eine
Berührungslinie des Bogens bc und
in der Ebene abd, bg senkrecht
auf ab also eine Berührungsli-
nie des Bogens bd; so ist der
Winkel fbg der Winkel des
sphärischen Dreiecks in b. Man
kann auch in den Ebenen
abc, abd, die Bögen bc, bd,
bis zu dem Aequator verlän-
gern, wovon der Punkt b der
Pol ist, so ist der Bogen des
Aequators das Maaß des sphäri-
schen Winkels b. Man kann auch
den Mittelpunkt a der Kugel
als den Eckpunkt eines körperli-
chen Winkels ansehen, welcher
durch drei Ebenen abc, abd, acd
gebildet wird, deren Kanten die Halb-
messer ab, ac, ad sind, deren gerad-
linige Winkel bac, bad, cad durch
die Seiten bc, bd, cd des sphärischen
Dreiecks, und deren Kantenwin-
kel durch die Winkel des sphäri-
schen Dreiecks gemessen werden.

69.

Um eine dreiseitige Pyramide oder ein Tetraeder eine Kugel zu beschreiben.



Das Tetraeder sey abcd, die vier Seitenflächen sind bcd, acd, abd, abc. Man bestimme in den Ebenen derselben die Mittelpunkte (I 21) der umschriebenen Kreise f, g, h, k, errichte in diesen Punkten auf den Flächen senkrechte Linien, welche in einem Punkte m zusammentreffen, welcher der Mittelpunkt der umschriebenen Kugel ist. Denn man halbire bd in l. Da bf = fd, bl = dl, fl = fl, so ist Δ blf = dlf, also ∠ blf = dlf = R. Da bh = dh, bl = dl, hl = hl, so ist Δ blh = dlh, also ∠ blh = dlh = R, also ist (IV. 3.6) die Kante bld auf der Ebene hlf senkrecht. Also ist die Ebene hlf auf den Ebenen (IV. 17) cbd, abd, senkrecht. Also (IV. 18) liegen die in f auf cbd, in h auf abd errichteten Lothe in der Ebene hlf. Also müssen diese Lothe einander in m schneiden. Da fb = fc = fd, so sind die Δ mfb, mfc, mfd congruent, also mb = mc = md. Da hb = hd = ha, so sind die Δ mhb, mhd, mha congruent, also mb = md = ma. Hieraus folgt, daß die in g auf acd, in k auf abc errichteten Lothe ebenfalls in m zusammentreffen müssen.