TARTU ÜLIKOOL
MATEMAATIKA-INFORMAATIKATEADUSKOND
MATEMAATIKA INSTITUUT

Vaiki Randala

Isomorfismid Banachi ruumide tensorkorrutistes

Magistritöö

Juhendaja : Eve Oja,
prof., füüs.-mat. kand.

Tartu 2009

Sisukord

1 Sissejuhatus: põhitulemuste tutvustus, mõisteid ja tähistusi

Olgu $X\hat{\otimes}Y$ Banachi ruumide X ja Y projektiivne tensorkorrutis (vt. definitsioon 4.6). On hästi teada, et üldiselt ei säilita projektiivne tensorkorrutis alamruumi struktuuri (vt. näiteks [2, lk. 230–231]). Teisisõnu, kui X ja Y on Banachi ruumid ja Y on isomorfne Banachi ruumi Z alamruumiga, siis ruum $X\hat{\otimes}Y$ ei pruugi olla isomorfne ruumi $X\hat{\otimes}Z$ alamruumiga. Grothendieck on oma kuulsas „Memuaaris" [4, pt. I, lk. 40, laused 1 ja 2] tõestanud järgmised tulemused täiendatavate alamruumide kontekstis (operaatorite tensorkorrutise $S \otimes T$ definitsioon on antud osas 5.1).

Teoreem 1.1 (Grothendieck). *Olgu X, Y, Z ja W Banachi ruumid. Olgu $S : X \to W$ ja $T : Y \to Z$ isomorfsed kujutused. Kui* $\operatorname{ran} S$ *on täiendatav ruumis W ja* $\operatorname{ran} T$ *on täiendatav ruumis Z, siis $S \otimes T : X\hat{\otimes}Y \to W\hat{\otimes}Z$ on isomorfne kujutus.*

Teoreem 1.2 (Grothendieck). *Olgu Z Banachi ruum ja olgu Y ruumi Z niisugune kinnine alamruum, mis on täiendatav oma teises kaasruumis Y^{**}. Olgu I_{Y^*} kaasruumi Y^* ühikoperaator ja tähistagu $j : Y \to Z$ ühiksisestust. Siis loomulik sisestus $I_{Y^*} \otimes j : Y^*\hat{\otimes}Y \to Y^*\hat{\otimes}Z$ on isomorfne kujutus parajasti siis, kui alamruum Y on täiendatav ruumis Z.*

On hästi teada, et $\|S \otimes T\| = \|S\|\|T\|$. Seega, teoreemi 1.1 põhjal leidub $c > 0$ nii, et

$$c\|u\|_\pi \leqslant \|(S \otimes T)u\|_\pi \leqslant \|S\|\|T\|\|u\|_\pi \quad \forall u \in X\hat{\otimes}Y,$$

kus $\|\cdot\|_\pi$ tähistab projektiivset tensornormi (vt. definitsioon 4.4).

Isomorfsete kujutuste „headust" iseloomustab injektsioonimoodul. Tähistagu $\mathcal{L}(X, Y)$ kõigi ruumist X ruumi Y tegutsevate pidevate lineaarsete operaatorite Banachi ruumi.

Kui $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, siis tema injektsioonimoodul $i(T)$ on defineeritud võrdusega

$$i(T) = \sup\{c \geqslant 0 \;:\; c\|x\| \leqslant \|Tx\| \quad \forall x \in X\}.$$

(vt. näiteks [15, lk. 26]). On ilmne, et $i(T) > 0$ parajasti siis, kui T on isomorfne kujutus ehk teisisõnu, ruum X on isomorfne ruumi Y alamruumiga.

Käesoleva magistritöö põhieesmärgiks on tõestada teoreemi 1.1 kvantitatiivne tugevdus ja teoreemi 1.2 kvantitatiivne versioon. Need on vastavalt allpool toodud teoreemid 1.3 ja 1.4.

Edaspidises vajame jätkuoperaatori mõistet. Olgu Y Banachi ruumi Z kinnine alamruum. Operaatorit $\Phi \in \mathcal{L}(Y^*, Z^*)$ nimetatakse *jätkuoperaatoriks*, kui $(\Phi y^*)(y) = y^*(y)$ iga $y^* \in Y^*$ ja iga $y \in Y$ korral. Märgime, et jätkuoperaatori olemasolu on samaväärne tingimusega, et ruumi Y annulaator $Y^\perp = \{y^* \in Y^* \;:\; y^*(y) = 0 \,\forall y \in Y\}$ on täiendatav ruumis Z^*.

Teoreem 1.3. *Olgu X, Y, Z ja W Banachi ruumid. Olgu $S \in \mathcal{L}(X,W)$ ja $T \in \mathcal{L}(Y,Z)$. Kui leiduvad jätkuoperaatorid $\Phi \in \mathcal{L}((\operatorname{ran} S)^*, W^*)$ ja $\Psi \in \mathcal{L}((\operatorname{ran} T)^*, Z^*)$, siis $S \otimes T : X\hat{\otimes}Y \to W\hat{\otimes}Z$ rahuldab võrratusi*

$$\frac{1}{\|\Phi\|\|\Psi\|} i(S)i(T) \leqslant i(S \otimes T) \leqslant i(S)i(T).$$

Banachi ruumide Z ja nende kinniste alamruumide Y paare, mille korral leidub jätkuoperaator $\Psi \in \mathcal{L}(Y^*, Z^*)$ uurisid süstemaatiliselt Fakhoury [3] ja Kalton [7], ning mitmesuguseid näiteid on toodud artiklis [12, osa 5.5].

Selleks, et võrrelda teoreemide 1.1 ja 1.3 väiteid, märgime järgmist. Kui ruum Y on täiendatav ruumis Z projektoriga P ruumist Z ruumile Y, siis $P^* : Y^* \to Z^*$ on jätkuoperaator (vt. täpsemalt lause 6.13). Teiselt poolt, iga Banachi ruumi Y korral on loomulik sisestus $j_{Y^*} : Y^* \to Y^{***}$ jätkuoperaator, aga on hästi teada, et näiteks $Y = c_0$ ei ole täiendatav oma teises kaasruumis $Y^{**} = l_\infty$.

Kui Y on ruumi Z kinnine alamruum, siis *projektsioonikonstant* $\lambda(Y,Z)$ on defineeritud võrdusega

$$\lambda(Y,Z) = \inf\{\|P\| \ : \ P \in \mathcal{L}(Z,Z) \text{ on projektor nii, et } \operatorname{ran} P = Y\},$$

kus $\lambda(Y,Z) = \infty$ siis ja ainult siis, kui Y ei ole täiendatav ruumis Z (vt. näiteks, [19, lk. 112]). Kasutades ka üldlevinud kokkulepet, et $1/\infty = 0$ näeme, et teoreem 1.2 sisaldub teoreemis 1.4.

Teoreem 1.4. *Olgu Y Banachi ruumi Z kinnine alamruum ja olgu $j : Y \to Z$ ühiksisestus. Kui ruum Y on täiendatav oma teises kaasruumis Y^{**}, siis kehtivad järgmised võrratused:*

$$\frac{1}{\lambda(Y,Z)} \leqslant \frac{1}{\lambda_{loc}(Y,Z)} \leqslant i(I_{Y^*} \otimes j) \leqslant \lambda(Y,Y^{**}) \cdot \frac{1}{\lambda(Y,Z)}.$$

Seetõttu on $I_{Y^*} \otimes j$ isomorfne kujutus parajasti siis, kui alamruum Y on täiendatav ruumis Z ning parajasti siis, kui ruum Y on lokaalselt täiendatav ruumis Z.

Lokaalselt täiendatava alamruumi definitsiooni võib leida osast 7, kus on defineeritud ka lokaalse projektsioonikonstandi $\lambda_{loc}(Y,Z)$ mõiste.

Grothendicki teoreemi 1.1 eeldustel järeldub meie teoreemist 1.3 (vt. teoreem 7.2), et

$$i(S \otimes T) \geqslant \frac{i(S)}{\lambda(\operatorname{ran} S, W)} \cdot \frac{i(T)}{\lambda(\operatorname{ran} T, Z)}.$$

Tegelikult annab meie teoreem 7.2 siin parema hinnangu, kus projektsioonikonstantide asemel on hoopis lokaalsed projektsioonikonstandid. Hoolimata sellest on ülaltoodud hinnang konstandile $i(S \otimes T)$ täpne, sest teoreem 1.4 näitab, et

$$i(I_{Y^*} \otimes j) = \frac{1}{\lambda(Y,Z)}$$

niipea, kui Y on täiendatav oma teises kaasruumis Y^{**} projektoriga, mille norm on 1; näiteks siis, kui ruum Y on refleksiivne.

Magistritöö koosneb seitsmest osast.

Magistritöö põhiteoreemid 1.3 ja 1.4 tõestatakse vastavalt osades 6 ja 7. Tegelikult tõestatakse teoreemi 1.3 asemel tugevam tulemus – teoreem 6.1 (vt. osa 6), mis näitab, et teoreem 1.3 kehtib iga tensornormi α korral. See tulemus on näiteks kasulik Chevet–Saphar'i tensorkorrutiste kontekstis. Teoreemi 6.1 arendatakse edasi ja teoreemis 6.14 tõestatakse, et eksisteerib jätkuoperaator ruumide paari $\operatorname{ran}(S \otimes T) \subset W \hat{\otimes}_\alpha Z$ korral. Teoreeme 6.1 ja 6.14 rakendatakse osas 7 tensorkorrutiste lokaalselt täiendatavatele ja täiendatavatele alamruumidele. Seejuures tõestatakse teoreem 7.2, mida võib pidada käesoleva magistritöö põhitulemuseks. Teoreem 7.2 kujutab endast Grothendiecki teoreemi 1.1 kvantitatiivset tugevdust lokaalselt täiendatavate alamruumide jaoks, mis kehtib iga tensornormi korral. Teoreemi 7.2 kasutatakse teoreemi 1.4 tõestamisel osa 7 lõpus.

Osade 2–5 eesmärgiks on arendada tensorkorrutiste teooriat tasemeni, mille taustal Grothendiecki teoreemid ja magistritöö tulemused mõistetavad oleksid. Nende osade koostamisel on tuginetud raamatule [18] ja artiklile [12], lisaks on kasutatud õpikut [13] ning raamatut [2]. Osas 2 uurime vektorruumide tensorkorrutist puhtalt algebralisest vaatenurgast. Kolmandas osas anname Banachi ruumide algebralise tensorkorrutise üksikasjaliku käsitluse tuginedes raamatus [18] leiduvatele vihjetele. Neljandas osas defineerime Banachi ruumide tensorkorrutisel projektiivse normi ning uurime projektiivse tensorkorrutise $X \hat{\otimes} Y$ kaasruumi. Osutub, et ruumi $X \hat{\otimes} Y$ kaasruumi võib identifitseerida ruumina $\mathcal{L}(X, Y^*)$ (vt. lause 4.7). Viiendas osas vaatleme operaatorite tensorkorrutist ning defineerime tensornormi.

Töös on kasutatud järgmisi tähistusi.

Olgu X ja Y vektorruumid üle korpuse $\mathbb{K}$, kus $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ või $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Ruumist X ruumi Y tegutsevate lineaarsete operaatorite ruumi tähistame $L(X, Y)$. Ruumi X algebraliseks kaasruumiks nimetame lineaarsete funktsionaalide ruumi $L(X, \mathbb{K})$ ning tähistame $X^\sharp$. Kui X ja Y on Banachi ruumid üle korpuse $\mathbb{K}$, siis ruumist X ruumi Y tegutsevate pidevate lineaarsete operaatorite ruumi tähistame $\mathcal{L}(X, Y)$. Ruumi X kaasruumiks nimetame pidevate lineaarsete funktsionaalide ruumi $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ ning tähistame X^*. Ruumi X ühikoperaatorit tähistame I_X. Vaatleme Banachi ruumi X ruumi X^{**} alamruumina, võttes ühiksisestuseks loomuliku sisestuse $j_X : X \to X^{**}$ (vt. definitsioon 6.8). Kui E on ruumi X osahulk, siis ruumi E lineaarset katet tähistame $\operatorname{span} E$.

2 Vektorruumide tensorkorrutis

Käesolevas osas defineerime vektorruumide algebralise tensorkorrutise tuginenedes põhiliselt raamatule [18]. Täiendame raamatu [18] käsitlust, lisades tulemuste üksikasjalikud tõestused.

2.1 Tensorkorrutise mõiste, tensori üldkuju, elementaartensor

Tensorkorrutise elemendid – tensorid – defineeritakse kui teatavad lineaarsed funktsionaalid, mis tegutsevad bilineaarsete vormide vektorruumil.

Olgu X, Y ja Z vektorruumid.

Definitsioon 2.1. Kujutust B otsekorrutisest $X \times Y$ vektorruumi Z nimetatakse *bilineaarseks*, kui
(*i*) $B(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 B(x_1, y) + \lambda_2 B(x_2, y_2)$,
(*ii*) $B(x, \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2) = \mu_1 B(x, y_1) + \mu_2 B(x, y_2)$
iga $x_i, x \in X,\ y_i, y \in Y,\ \lambda_i, \mu_i \in \mathbb{K},\ i = 1, 2$ korral.

Bilineaarset kujutust $B : X \times Y \to \mathbb{K}$ nimetatakse *bilineaarseks vormiks*.

Bilineaarsete kujutuste (otsekorrutisest $X \times Y$ ruumi Z) vektorruumi tähistame $B(X \times Y, Z)$. Bilineaarsete vormide ruumi $B(X \times Y, \mathbb{K})$ tähistame $B(X \times Y)$.

Olgu $x \in X$ ja $y \in Y$. Vaatleme lineaarseid funktsionaale $x \otimes y : B(X \times Y) \to \mathbb{K}$, mis on defineeritud järgneval viisil:

$$(x \otimes y)(B) = B(x, y)$$

iga bilineaarse vormi $B \in B(X \times Y)$ korral.

Definitsioon 2.2. Vektorruumide X ja Y *tensorkorrutiseks* nimetatakse hulka

$$X \otimes Y = \operatorname{span}\{x \otimes y : x \in X,\ y \in Y\} \subset (B(X \times Y))^\sharp,$$

kus

$$(x \otimes y)(B) = B(x, y).$$

Tensorkorrutis $X \otimes Y$ on ruumi $(B(X \times Y))^\sharp$ alamruum, seega on $X \otimes Y$ vektorruum.

Lause 2.3. *Kehtivad järgmised võrdused:*
(*i*) $(x_1 + x_2) \otimes y = x_1 \otimes y + x_2 \otimes y$,
(*ii*) $x \otimes (y_1 + y_2) = x \otimes y_1 + x \otimes y_2$,
(*iii*) $\lambda(x \otimes y) = (\lambda x) \otimes y = x \otimes (\lambda y)$,
(*iv*) $0 \otimes y = x \otimes 0 = 0$.

Tõestus. (i) Olgu B bilineaarne vorm. Siis

$$((x_1+x_2)\otimes y)(B) = B(x_1+x_2,y) = B(x_1,y)+B(x_2,y) = (x_1\otimes y)(B)+(x_2\otimes y)(B),$$

seega $(x_1+x_2)\otimes y = x_1\otimes y + x_2\otimes y$.

(ii) Olgu B bilineaarne vorm. Siis

$$(x\otimes(y_1+y_2))(B) = B(x,y_1+y_2) = B(x,y_1)+B(x,y_2) = (x\otimes y_1)(B)+(x\otimes y_2)(B),$$

seega $x\otimes(y_1+y_2) = x\otimes y_1 + x\otimes y_2$.

(iii) Olgu B bilineaarne vorm. Siis

$$(\lambda(x\otimes y))(B) = \lambda((x\otimes y)(B)) = \lambda(B(x,y)) = \lambda B(x,y) = B(\lambda x,y) = (\lambda x\otimes y)(B).$$

Samas

$$\lambda B(x,y) = B(x,\lambda y) = (x\otimes\lambda y)(B).$$

Seega $\lambda(x\otimes y) = \lambda x\otimes y = x\otimes\lambda y$.

(iv) Olgu B bilineaarne vorm. Siis

$$0 = 0(x\otimes y)(B) = (0x\otimes y)(B) = (x\otimes 0y)(B),$$

seega $0\otimes y = x\otimes 0 = 0$. □

Kuna $X\otimes Y = \operatorname{span}\{x\otimes y : x\in X,\ y\in Y\}$, siis tüüpiline tensor ruumis $X\otimes Y$ on kujul

$$u = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\otimes y_i,$$

kus n on naturaalarv, $\lambda_i\in\mathbb{K},\ x_i\in X$ ja $y_i\in Y$. Oluline on panna tähele, et selline u esitus ei ole ühene $-$ üldiselt on mitmeid erinevaid viise antud tensori kirjutamiseks ülaltoodud kujul. See on selge lausest 2.3. Muuhulgas saab elemendi $u\in X\otimes Y$ esitada (kasutades tingimust (iii)) kujul

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i\otimes y_i.$$

Selline *tensori üldkuju* on traditsiooniline ning edaspidises kasutamegi viimast elemendi u esitust.

Iga nullist erineva tensori $u\in X\otimes Y$ korral leidub väikseim naturaalarv n, mille korral on olemas u esitus, mis sisaldab n liiget. Olgu $\sum_{i=1}^{n} x_i\otimes y_i$ selline esitus.

Lause 2.4. *Kui n on väikseim naturaalarv, mille korral element $u\in X\otimes Y$ esitub kujul $u=\sum_{i=1}^{n} x_i\otimes y_i$, siis hulgad $\{x_1,\dots,x_n\}$ ja $\{y_1,\dots,y_n\}$ on lineaarselt sõltumatud.*

Tõestus. Olgu n väikseim naturaalarv, mille korral element $u \in X \otimes Y$ esitub kujul $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$. Oletame vastuväiteliselt, et näiteks hulk $\{x_1, \dots, x_n\}$ ei ole lineaarselt sõltumatu. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et element x_n on esitatav elementide $x_1, \dots, x_{n-1}$ lineaarse kombinatsioonina:

$$x_n = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_{n-1} x_{n-1}.$$

Siis

$$x_n \otimes y_n = (\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{n-1} x_{n-1}) \otimes y_n = \lambda_1 x_1 \otimes y_n + \dots + \lambda_{n-1} x_{n-1} \otimes y_n =$$

$$= x_1 \otimes \lambda_1 y_n + \dots + x_{n-1} \otimes \lambda_{n-1} y_n.$$

Nüüd saame elemendi u esitada kujul

$$u = \sum_{i=1}^{n-1} (x_i \otimes y_i + x_i \otimes \lambda_i y_n) = \sum_{i=1}^{n-1} x_i \otimes (y_i + \lambda_i y_n).$$

Seega leidub elemendi u esitus, mis sisaldab $n - 1$ elementi, mis on aga vastuolus eeldusega. $\square$

Arvu n lausest 2.2 nimetatakse *tensori järguks*. Tensorit, mille järk on 1, nimetatakse sageli *elementaartensoriks*. Elementaartensori üldkuju on $x \otimes y$, kus $x \neq 0$ ja $y \neq 0$.

2.2 Nulltensor ja lineaarse sõltumatuse ülekandumine komponentruumidelt tensorkorrutisele

Olgu X ja Y vektorruumid ning $X \otimes Y$ nende tensorkorrutis. Küsimus, kuidas aru saada, et kaks tensorit on omavahel võrdsed, taandub küsimusele, millal $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ on nulltensori esitus.

Lause 2.5. *Olgu* $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \in X \otimes Y$. *Järgmised väited on samaväärsed:*
(i) $u = 0$;
(ii) $\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\phi(y_i) = 0$ iga $\varphi \in X^\sharp, \phi \in Y^\sharp$ korral;
(iii) $\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)y_i = 0$ iga $\varphi \in X^\sharp$ korral;
(iv) $\sum_{i=1}^{n} \phi(y_i)x_i = 0$ iga $\phi \in Y^\sharp$ korral.

Tõestus. $(i) \Rightarrow (ii)$. Olgu $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i = 0$. Peame näitama, et

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\phi(y_i) = 0$$

iga $\varphi \in X^\sharp, \phi \in Y^\sharp$ korral. Olgu $\varphi \in X^\sharp, \phi \in Y^\sharp$. Vaatleme bilineaarset vormi, mis on defineeritud järgnevalt: $B(x, y) = \varphi(x)\phi(y)$. Kuna $u = 0$, siis ka $u(B) = 0$ ja seega

$$u(B) = \sum_{i=1}^{n} B(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\phi(y_i) = 0.$$

Järelikult $\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\phi(y_i) = 0$ iga $\varphi \in X^\sharp, \phi \in Y^\sharp$ korral.
$(ii) \Rightarrow (iii)$. Olgu $\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\phi(y_i) = 0$ iga $\varphi \in X^\sharp, \phi \in Y^\sharp$ korral. Siis ϕ lineaarsuse tõttu

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\phi(y_i) = \phi(\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)y_i),$$

millest järeldub, et $\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)y_i = 0$ iga $\varphi \in X^\sharp$ korral.
$(iii) \Rightarrow (iv)$. Olgu $\phi \in Y^\sharp$. Kui $\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)y_i = 0$, siis

$$0 = \phi(\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)y_i) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\phi(y_i) = \varphi(\sum_{i=1}^{n} \phi(y_i)x_i)$$

sest ϕ ja φ on lineaarsed. Seega ka $\sum_{i=1}^{n} \phi(y_i)x_i = 0$, sest viimane võrdus kehtib iga $\varphi \in X^\sharp$ korral.
$(iv) \Rightarrow (i)$. Olgu $\sum_{i=1}^{n} \phi(y_i)x_i = 0$ iga $\phi \in Y^\sharp$ korral. Olgu $A \in B(X \times Y)$. Olgu $E \subset X$ ja $F \subset Y$ järgmised alamruumid:

$$E = \operatorname{span}\{x_1, \ldots x_n\} \text{ ja } F = \operatorname{span}\{y_1, \ldots y_n\}.$$

Olgu B kujutuse A ahend hulgale $E \times F$. Ruumid E ja F on lõplikumõõtmelised, seega saame neile valida lõplikud baasid. Olgu $\{e_1, \ldots, e_l\}$ ruumi E baas ning $\{f_1, \ldots, f_m\}$ ruumi F baas. Leiduvad koordinaatfunktsionaalid

$$\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_l \in E^\sharp \text{ ja } \varphi_1, \ldots, \varphi_m \in F^\sharp$$

nii, et saame iga elemendi $x = \sum_{i=1}^{l} a_i e_i \in E$ ja iga elemendi $y = \sum_{j=1}^{m} b_j f_j \in F$ esitada vastavalt kujul

$$x = \sum_{i=1}^{l} \varepsilon_i(x) e_i \text{ ja } y = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(y) f_j.$$

Nüüd

$$B(x, y) = B(\sum_{i=1}^{l} \varepsilon_i(x) e_i, \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(x) f_j) = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_i(x) \varphi_j(y) B(e_i, f_j).$$

Elemendid $B(e_i, f_j)$ sõltuvad ainult baasidest, seega võime tähistada $a_{ij} := B(e_i, f_j)$. Siis

$$\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_i(x) \varphi_j(y) B(e_i, f_j) = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(y) \sum_{i=1}^{l} a_{ij} \varepsilon_i(x) = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(y) (\sum_{i=1}^{l} a_{ij} \varepsilon_i)(x).$$

Tähistame

$$\theta_j := \sum_{i=1}^{l} a_{ij} \varepsilon_i \in E^{\sharp}.$$

Oleme saanud kujutuse B esituse

$$B(x, y) = \sum_{j=1}^{m} \theta_j(x) \varphi_j(y),$$

kus $\theta_j \in E^{\sharp}$ ja $\varphi_j \in F^{\sharp}$.

Valime ruumidele E ja F algebralised täiendid G ja H nii, et

$$X = E \oplus G \text{ ja } Y = F \oplus H.$$

Laiendame funktsionaale θ_j ja φ_j vastavalt kogu ruumile X ja Y järgneval viisil: kui $x = x_1 + x_2 \in X$, kus $x_1 \in E$ ja $x_2 \in G$, siis defineerime

$$\theta_j(x) = \theta_j(x_1).$$

Laiendame funktsionaali φ_j ruumile Y sarnasel viisil. Nüüd võime vaadelda kujutust B kui bilineaarset vormi ruumil $X \times Y$ kasutades ülaltoodud B esitust. Kujutused A ja B võivad olla erinevad bilineaarsed vormid ruumil $X \times Y$, kuid nad ühtivad ruumil $E \times F$. Seega saame

$$u(A) = \sum_{i=1}^{n} A(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^{n} B(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \theta_j(x_i) \varphi_j(y_i) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \theta_j(\sum_{i=1}^{n} \varphi_j(y_i) x_i) = 0.$$

Viimane võrdus on saadud kasutades eeldust (iv). Seega $u(A) = 0$ iga $A \in B(X \times Y)$ korral. $\square$

Lause 2.6. *Olgu X ja Y vektorruumid.*
(a) Kui $E \subset X$ ja $F \subset Y$ on lineaarselt sõltumatud alamhulgad, siis $\{x \otimes y : x \in E,\ y \in F\}$ on ruumi $X \otimes Y$ lineaarselt sõltumatu alamhulk.

(b) Kui $\{e_i : i \in I\}$ ja $\{f_j : j \in J\}$ on vastavalt ruumide X ja Y baasid, siis $\{e_i \otimes f_j : (i, j) \in I \times J\}$ on ruumi $X \otimes Y$ baas.

Tõestus. (a) Olgu $E \subset X$ ja $F \subset Y$ lineaarselt sõltumatud alamhulgad. Oletame vastuväiteliselt, et hulk $\{x \otimes y : x \in E,\ y \in F\}$ ei ole lineaarselt sõltumatu. Sel juhul leidub element

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \otimes y_i = 0,$$

kus $x_i \in E,\ y_i \in F$ ja näiteks $\lambda_1 \neq 0$. Siis lause 2.5 põhjal

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(x_i) y_i = 0$$

iga $\varphi \in X^\sharp$ korral. Hulk F on lineaarselt sõltumatu, seega

$$\lambda_i \varphi(x_i) = 0,\ i = 1, \ldots, n,$$

iga $\varphi \in X^\sharp$ korral. Kuna $\lambda_1 \neq 0$, siis $\varphi(x_1) = 0$ iga $\varphi \in X^\sharp$ korral. Järelikult $x_1 = 0$, mis on aga vastuolus hulga E lineaarse sõltumatusega.
(b) Olgu hulgad $E = \{e_i, i \in I\}$ ja $F = \{f_j, j \in J\}$ baasid. Siis elemendid

$$e_i, i \in I,\ \text{ja}\ f_j, j \in J,$$

on lineaarselt sõltumatud ning osa (a) põhjal on ka elemendid

$$e_i \otimes f_j, i \in I, j \in J,$$

lineaarselt sõltumatud. Näitame, et iga element $x \otimes y$, $x \in X$, $y \in Y$, avaldub elementide $e_i \otimes f_j$ lineaarse kombinatsioonina, sest siis avalduvad ka kõik tensorkorrutise $X \otimes Y$ elemendid $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ elementide $e_i \otimes f_j$ lineaarsete kombinatsioonidena. Kuna hulgad E ja F on baasid, siis leiduvad lõplikud hulgad $\mathcal{I} \subset I$ ja $\mathcal{J} \subset J$ nii, et

$$x = \sum_{i \in \mathcal{I}} \alpha_i e_i,\ y = \sum_{j \in \mathcal{J}} \beta_j f_j.$$

Seega

$$x \otimes y = \sum_{i \in \mathcal{I}} \alpha_i e_i \otimes \sum_{j \in \mathcal{J}} \beta_j f_j = \sum_{i \in \mathcal{I},\ j \in \mathcal{J}} \alpha_i e_i \otimes \beta_j f_j = \sum_{i \in \mathcal{I},\ j \in \mathcal{J}} \alpha_i \beta_j (e_i \otimes f_j).$$

Järelikult on hulk $\{e_i \otimes f_j : (i, j) \in I \times J\}$ ruumi $X \otimes Y$ baas. $\square$

2.3 Tensorkorrutis $X \otimes Y$ kui ruumi $L(X^\sharp, Y)$ alamruum

Osas 2.1 defineerisime tensorkorrutise $X \otimes Y$ kui lineaarsete funktsionaalide ruumi $(B(X \times Y))^\sharp$ alamruumi. On olemas veel teisi, võrdselt loomulikke lähenemisviise. Käesolevas osas näeme, et tensoreid on võimalik vaadelda ka lineaarsete kujutustena.

Teoreem 2.7. *Tensorkorrutis $X \otimes Y$ on algebraliselt isomorfne ruumi $L(X^\sharp, Y)$ alamruumiga.*

Tõestus. Olgu $u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$. Defineerime kujutuse $T : X \otimes Y \to L(X^\sharp, Y)$ võrdusega

$$(Tu)(\varphi) = \sum_{i=1}^n \varphi(x_i) y_i, \ \ \varphi \in X^\sharp.$$

Olgu

$$u_1 = \sum_{i=1}^n x_i^1 \otimes y_i^1, \ u_2 = \sum_{i=1}^m x_i^2 \otimes y_i^2.$$

Siis iga $\lambda \in \mathbb{K}$ korral

$$u_1 + \lambda u_2 = \sum_{i=1}^n x_i^1 \otimes y_i^1 + \lambda \sum_{i=1}^m x_i^2 \otimes y_i^2 = \sum_{i=1}^{n+m} x_i^3 \otimes y_i^3,$$

kus

$$x_i^3 = \begin{cases} x_i^1, \ i = 1, \dots, n, \\ \lambda x_i^2, \ i = n+1, \dots, n+m, \end{cases}$$

$$y_i^3 = \begin{cases} y_i^1, \ i = 1, \dots, n, \\ y_i^2, \ i = n+1, \dots, n+m. \end{cases}$$

Veendume kõigepealt kujutuse $Tu : X^\sharp \to Y$ definitsiooni korrektsuses. Näitame, et Tu ei sõltu elemendi u esitusest. Kui $u_1 - u_2 = 0$, siis iga $\varphi \in X^\sharp$ korral

$$(Tu_1)(\varphi) - (Tu_2)(\varphi) = \sum_{i=1}^n \varphi(x_i^1) y_i^1 - \sum_{i=1}^m \varphi(x_i^2) y_i^2 = \sum_{i=1}^{n+m} \varphi(x_i^3) y_i^3,$$

kus

$$x_i^3 = \begin{cases} x_i^1, \ i = 1, \dots, n, \\ -x_i^2, \ i = n+1, \dots, n+m, \end{cases}$$

$$y_i^3 = \begin{cases} y_i^1, \ i = 1, \dots, n, \\ y_i^2, \ i = n+1, \dots, n+m. \end{cases}$$

Lause 2.5 põhjal $\sum_{i=1}^{n+m} \varphi(x_i^3) y_i^3 = 0$, seega $(Tu_1)(\varphi) - (Tu_2)(\varphi) = 0$. Järelikult

$$Tu_1 = Tu_2.$$

Näitame, et $Tu \in L(X^\sharp, Y)$. Olgu $\varphi_1, \varphi_2 \in X^\sharp$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Siis

$$(Tu)(\varphi_1 + \lambda\varphi_2) = \sum_{i=1}^{n}(\varphi_1 + \lambda\varphi_2)(x_i)y_i = \sum_{i=1}^{n}(\varphi_1(x_i) + \lambda\varphi_2(x_i))y_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(\varphi_1(x_i)y_i + \lambda\varphi_2(x_i)y_i) = \sum_{i=1}^{n}\varphi_1(x_i)y_i + \sum_{i=1}^{n}\lambda\varphi_2(x_i)y_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\varphi_1(x_i)y_i + \lambda\sum_{i=1}^{n}\varphi_2(x_i)y_i = (Tu)(\varphi_1) + \lambda(Tu)(\varphi_2).$$

Näitame, et T on lineaarne. Olgu $\varphi \in X^\sharp$ ja

$$u_3 = u_1 + \lambda u_2 = \sum_{i=1}^{n+m} x_i^3 \otimes y_i^3.$$

Siis

$$(T(u_1 + \lambda u_2))(\varphi) = (Tu_3)(\varphi) = \sum_{i=1}^{n+m}\varphi(x_i^3)y_i^3 = \sum_{i=1}^{n}\varphi(x_i^3)y_i^3 + \sum_{i=n+1}^{n+m}\varphi(x_i^3)y_i^3 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\varphi(x_i^1)y_i^1 + \lambda\sum_{i=1}^{m}\varphi(x_i^2)y_i^2 = (Tu_1)(\varphi) + \lambda(Tu_2)(\varphi).$$

Näitame, et T on injektiivne. Olgu $Tu = 0$. Siis

$$0 = (Tu)(\varphi) = \sum_{i=1}^{n}\varphi(x_i)y_i \ \forall\varphi \in X^\sharp.$$

Lause 2.5 põhjal $u = 0$.

Järelikult on kujutus T algebraline isomorfism ning seega võime vaadelda tensorkorrutist ruumi $L(X^\sharp, Y)$ alamruumina:

$$X \otimes Y \subset L(X^\sharp, Y).$$

□

Analoogiline tõestus näitab, et tensorkorrutis $X \otimes Y$ on algebraliselt isomorfne ka ruumi $L(Y^\sharp, X)$ alamruumiga.

3 Banachi ruumide algebraline tensorkorrutis

Raamatus [18] on üleminekud vektorruumide tensorkorrutiselt Banachi ruumide tensorkorrutisele tehtud vihjamisi ja ilma üksikasjalike tõestusteta. Näiteks praktikas vaadeldakse Banachi ruumide tensorkorrutist sageli ruumi $(\mathcal{B}(X \times Y))^*$ alamruumina, mitte aga ruumi $(B(X \times Y))^\sharp$ alamruumina. Kuid raamatus [18] ei ole see tulemus antud ilmutatud kujul. Käesolevas osas anname Banachi ruumide algebralise tensorkorrutise üksikasjaliku käsitluse tuginedes raamatus [18] leiduvatele vihjetele.

3.1 Banachi ruumide algebralise tensorkorrutise mõiste ja nulltensor

Olgu X ja Y Banachi ruumid. Kuna X ja Y on vektorruumid, siis on defineeritud nende kui vektorruumide tensorkorrutis (vt. definitsioon 2.2).

Definitsioon 3.1. Banachi ruumide X ja Y *algebraliseks tensorkorrutiseks* nimetatakse hulka

$$X \otimes Y = \operatorname{span}\{x \otimes y : x \in X,\ y \in Y\} \subset (B(X \times Y))^\sharp,$$

kus

$$(x \otimes y)(B) = B(x, y)$$

iga bilineaarse vormi $B \in B(X \times Y)$ korral.

Kaasruumid X^* ja Y^* on üldiselt tunduvalt väiksemad kui algebralised kaasruumid $X^\sharp$ ja $Y^\sharp$. Järgnev lause näitab, et nulltensori tuvastamiseks ei ole tarvis kasutada kõiki algebralise kaasruumi elemente nagu väidab lause 2.5, vaid piisab ka kaasruumi elementidest.

Lause 3.2. *Olgu X ja Y Banachi ruumid, olgu $u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \in X \otimes Y$. Järgmised väited on samaväärsed:*
(i) $u = 0$;
(ii) $\sum_{i=1}^n \varphi(x_i)\phi(y_i) = 0$ iga $\varphi \in X^*, \phi \in Y^*$ korral;
(iii) $\sum_{i=1}^n \varphi(x_i)y_i = 0$ iga $\varphi \in X^*$ korral;
(iv) $\sum_{i=1}^n \phi(y_i)x_i = 0$ iga $\phi \in Y^*$ korral.

Tõestus. (i) $\Rightarrow$ (ii). Kaasruumid X^* ja Y^* on vastavalt ruumide $X^\sharp$ ja $Y^\sharp$ alamruumid. Olgu $u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i = 0$. Lause 2.5 põhjal $\sum_{i=1}^n \varphi(x_i)\phi(y_i) = 0$ iga $\varphi \in X^\sharp, \phi \in Y^\sharp$ korral. Järelikult $\sum_{i=1}^n \varphi(x_i)\phi(y_i) = 0$ iga $\varphi \in X^*, \phi \in Y^*$ korral.
(ii) $\Rightarrow$ (iii). Olgu $\sum_{i=1}^n \varphi(x_i)\phi(y_i) = 0$ iga $\varphi \in X^*, \phi \in Y^*$ korral. Siis ϕ lineaarsuse tõttu

$$0 = \sum_{i=1}^n \varphi(x_i)\phi(y_i) = \phi(\sum_{i=1}^n \varphi(x_i)y_i).$$

Kasutades teoreemi piisavast arvust funktsionaalidest, saame, et $\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)y_i = 0$ iga $\varphi \in X^*$ korral.
$(iii) \Rightarrow (iv)$. Olgu $\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)y_i = 0$ iga $\varphi \in X^*$ korral, siis iga $\phi \in Y^*$ korral

$$0 = \phi(\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)y_i) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\phi(y_i) = \varphi(\sum_{i=1}^{n} \phi(y_i)x_i).$$

Teoreemi piisavast arvust funktsionaalidest põhjal $\sum_{i=1}^{n} \phi(y_i)x_i = 0$ iga $\phi \in Y^*$ korral.
$(iv) \Rightarrow (i)$. Olgu $\sum_{i=1}^{n} \phi(y_i)x_i = 0$ iga $\phi \in Y^*$ korral. Olgu $A \in B(X \times Y)$. Olgu $E \subset X$ ja $F \subset Y$ järgmised alamruumid:

$$E = \text{span}\{x_1, \dots x_n\} \text{ ja } F = \text{span}\{y_1, \dots y_n\}.$$

Olgu B kujutuse A ahend hulgale $E \times F$. Ruumid E ja F on lõplikumõõtmelised, seega saame neile valida baasid. Olgu $\{e_1, \dots, e_l\}$ ruumi E baas ning $\{f_1, \dots, f_m\}$ ruumi F baas. Leiduvad koordinaatfunktsionaalid

$$\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_l \in X^* \text{ ja } \varphi_1, \dots, \varphi_m \in Y^*$$

(vt. [13, lk. 227]) nii, et saame iga elemendi $x = \sum_{i=1}^{l} a_i e_i \in E$ ja iga elemendi $y = \sum_{j=1}^{m} b_j f_j \in F$ esitada vastavalt kujul

$$x = \sum_{i=1}^{l} \varepsilon_i(x)e_i \text{ ja } y = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(y)f_j.$$

Nüüd

$$B(x,y) = B(\sum_{i=1}^{l} \varepsilon_i(x)e_i, \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(x)f_j) = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_i(x)\varphi_j(y)B(e_i, f_j).$$

Elemendid $B(e_i, f_j)$ sõltuvad ainult baasidest, seega võime tähistada $a_{ij} := B(e_i, f_j)$. Siis

$$\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_i(x)\varphi_j(y)B(e_i, f_j) = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(y) \sum_{i=1}^{l} a_{ij}\varepsilon_i(x) = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(y)(\sum_{i=1}^{l} a_{ij}\varepsilon_i)(x).$$

Tähistame

$$\theta_j := \sum_{i=1}^{l} a_{ij}\varepsilon_i \in X^*.$$

Oleme saanud kujutuse B esituse

$$B(x,y) = \sum_{j=1}^{m} \theta_j(x)\varphi_j(y),$$

kus $\theta_j \in X^*$ ja $\varphi_j \in Y^*$. Nüüd võime vaadelda funktsionaali B kui bilineaarset vormi ruumil $X \times Y$ kasutades ülaltoodud B esitust. Bilineaarsed vormid A ja B võivad olla erinevad ruumil $X \times Y$, kuid nad ühtivad ruumil $E \times F$. Seega saame

$$u(A) = \sum_{i=1}^{n} A(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^{n} B(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \theta_j(x_i)\varphi_j(y_i) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \theta_j(\sum_{i=1}^{n} \varphi_j(y_i)x_i) = 0.$$

Viimane võrdus on saadud kasutades eeldust (iv). Seega $u(A) = 0$ iga $A \in B(X \times Y)$ korral. $\square$

Märkus 3.3. Raamatus [18] on lausele 3.2 viidatud järgnevalt: „It is easy to see that, in applying the proposition (lause 2.5 käesolevas töös), the functionals used may be restricted to lie in separating subsets of the relevant duals“ [18, lk. 4].

3.2 Tensorkorrutis $X \otimes Y$ kui ruumi $(\mathcal{B}(X \times Y))^*$ alamruum

Vektorruumide X ja Y tensorkorrutis defineeriti kui ruumi $(B(X \times Y))^\sharp$ alamruum. Seega on ka Banachi ruumide X ja Y algebraline tensorkorrutis ruumi $(B(X \times Y))^\sharp$ alamruum. Selles osas näitame, et Banachi ruumide X ja Y algebralist tensorkorrutist võib vaadelda ka tõkestatud bilineaarsete kujutuste $\mathcal{B}(X \times Y)$ kaasruumi alamruumina.

Olgu X, Y ja Z Banachi ruumid.

Definitsioon 3.4. Öeldakse, et bilineaarne kujutus $B : X \times Y \to Z$ on *tõkestatud*, kui leidub positiivne konstant C nii, et $\|B(x,y)\| \leqslant C\|x\|\|y\|$ iga $x \in X$ ja $y \in Y$ korral.

Defineerime tõkestatud bilineaarsete kujutuste (ruumist $X \times Y$ ruumi Z) ruumis normi järgnevalt:

$$\|B\| = \sup\{\|B(x,y)\| : \|x\| \leqslant 1, \|y\| \leqslant 1\}.$$

Saadud normeeritud ruumi tähistame $\mathcal{B}(X \times Y, Z)$. Osutub, et $\mathcal{B}(X \times Y, Z)$ on Banachi ruum. Kui $Z = \mathbb{K}$, siis tähistame vastavat ruumi $\mathcal{B}(X \times Y)$.

Teoreem 3.5. *Kui X ja Y on Banachi ruumid, siis alamruum*

$$\mathcal{V} := \operatorname{span}\{x \otimes y,\ x \in X,\ y \in Y\} \subset (\mathcal{B}(X \times Y))^*,$$

kus $(x \otimes y)(B) = B(x,y)$, $B \in \mathcal{B}(X \times Y)$, on algebraliselt isomorfne algebralise tensorkorrutisega $X \otimes Y$.

Tõestus. Vaatame operaatorit $T : X \otimes Y \to \mathcal{V}$, kus

$$Tu = u|_{\mathcal{B}(X \times Y)},\ u \in X \otimes Y.$$

Näitame, et T on isomorfism. Märgime, et T on lineaarne, sest ahendamise operatsioon on lineaarne.

Näitame, et T on injektiivne. Olgu $u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \in X \otimes Y$ korral $u|_{\mathcal{B}(X \times Y)} = 0$, st. iga $B \in \mathcal{B}(X \times Y)$ korral

$$u(B) = \sum_{i=1}^n B(x_i, y_i) = 0.$$

Olgu $\varphi \in X^*$ ja $\phi \in Y^*$. Defineerime kujutuse $B : X \times Y \to \mathbb{K}$ võrdusega

$$B(x,y) = \varphi(x)\phi(y),\ x \in X,\ y \in Y.$$

Siis $B \in \mathcal{B}(X \times Y)$. Seega

$$\sum_{i=1}^n \varphi(x_i)\phi(y_i) = 0\ \forall \varphi \in X^*, \phi \in Y^*.$$

Kasutades lauset 3.2 saame, et $u = 0$.

Näitame, et T on sürjektiivne. Vaatleme ruume

$$\mathcal{V} = \operatorname{span}\{x \otimes y, x \in X,\ y \in Y\},\ \text{kus}\ (x \otimes y)(B) = B(x,y),\ B \in \mathcal{B}(X \times Y),$$

$$X \otimes Y = \operatorname{span}\{x \otimes y, x \in X,\ y \in Y\},\ \text{kus}\ (x \otimes y)(B) = B(x,y),\ B \in B(X \times Y).$$

Seega piisab näidata, et iga $v = x \otimes y \in \mathcal{V}$ korral leidub $u \in X \otimes Y$ nii, et $Tu = v$. Olgu $v = x \otimes y \in \mathcal{V}$. Võtame $u = x \otimes y \in X \otimes Y$. Siis ilmselt $Tu = v$.

$\square$

3.3 Tensorkorrutis $X \otimes Y$ kui ruumi $\mathcal{L}(X^*, Y)$ alamruum

Vektoruumide X ja Y tensorkorrutist $X \otimes Y$ vaatlesime osas 2 ruumi $L(X^\sharp, Y)$ alamruumina (vt. teoreem 2.7). Kui X ja Y on Banachi ruumid, siis analoogiline samastamine annab, et

$$X \otimes Y \subset \mathcal{L}(X^*, Y).$$

Seda näitab alljärgnev teoreem.

Teoreem 3.6. *Banachi ruumide X ja Y algebraline tensorkorrutis $X \otimes Y$ on isomorfne ruumi $\mathcal{L}(X^*, Y)$ alamruumiga.*

Tõestus. Olgu $u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$. Teoreemi 2.7 põhjal on kujutus

$$T : X \otimes Y \to L(X^\sharp, Y),\ (Tu)(\varphi) = \sum_{i=1}^n \varphi(x_i)y_i,\ \varphi \in X^\sharp,$$

algebraline isomorfism. Vaatleme kujutuse Tu ahendit

$$\mathcal{T}u := (Tu)|_{X^*} \in L(X^*, Y).$$

Teoreemi 2.7 tõestuse põhjal on kujutus $\mathcal{T}u, u \in X \otimes Y$, korrektselt defineeritud ja lineaarne, st. $\mathcal{T}u \in L(X^*, Y)$.

Kujutus $\mathcal{T}u$ on tõkestatud, sest iga $\varphi \in X^*$ korral

$$\|(\mathcal{T}u)(\varphi)\| = \|\sum_{i=1}^n \varphi(x_i)y_i\| \leqslant \sum_{i=1}^n |\varphi(x_i)|\|y_i\| \leqslant \|\varphi\| \sum_{i=1}^n \|x_i\|\|y_i\|.$$

Seega $\mathcal{T}u \in \mathcal{L}(X^*, Y), u \in X \otimes Y$, ning oleme defineerinud kujutuse

$$\mathcal{T} : X \otimes Y \to \mathcal{L}(X^*, Y)$$

võrdusega

$$(\mathcal{T}u)(\varphi) = \sum_{i=1}^n \varphi(x_i)y_i,\ \varphi \in X^*.$$

Näitame, et kujutus $\mathcal{T}$ on isomorfism. Olgu $u_1, u_2 \in X \otimes Y$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$. Siis teoreemi 2.7 põhjal

$$T(u_1 + \lambda u_2) = Tu_1 + \lambda Tu_2.$$

Kujutus $\mathcal{T}u$ on kujutuse Tu ahend ruumile X^*, järelikult

$$\mathcal{T}(u_1 + \lambda u_2) = \mathcal{T}u_1 + \lambda \mathcal{T}u_2,$$

st. kujutus $\mathcal{T}$ on lineaarne.

Näitame, et $\mathcal{T}$ on injektiivne. Olgu $\mathcal{T}u = 0$. Siis iga $\varphi \in X^*$ korral

$$0 = (\mathcal{T}u)(\varphi) = \sum_{i=1}^n \varphi(x_i)y_i.$$

Lause 3.2 põhjal $u = 0$.

Järelikult on kujutus $\mathcal{T}$ algebraline isomorfism ning seega võime vaadelda tensorkorrutist $X \otimes Y$ ruumi $\mathcal{L}(X^*, Y)$ alamruumina:

$$X \otimes Y \subset \mathcal{L}(X^*, Y).$$

□

Analoogiline tõestus näitab, et tensorkorrutis $X \otimes Y$ on algebraliselt isomorfne ka ruumi $\mathcal{L}(Y^*, X)$ alamruumiga.

Sageli samastatakse operaator $\mathcal{T}u$ tensoriga u ning kasutatakse seda samastamist tensorkorrutise definitsioonina (vt. näiteks [12]).

Definitsioon 3.7. Banachi ruumide X ja Y *algebraliseks tensorkorrutiseks* nimetatakse vektorruumi

$$X \otimes Y = \{\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i,\ n \in \mathbb{N},\ x_i \in X,\ y_i \in Y\} \subset \mathcal{L}(X^*, Y),$$

kus $x \otimes y, x \in X, y \in Y$, on defineeritud võrdusega

$$(x \otimes y)(x^*) = x^*(x)y,\ x^* \in X^*.$$

4 Banachi ruumide tensorkorrutis

4.1 Banachi ruumide tensorkorrutise mõiste, projektiivne tensorkorrutis

Käesolevas osas defineerime Banachi ruumide X ja Y tensorkorrutisel $X \otimes Y$ projektiivse normi ning veendume, tuginedes raamatus [18] toodud tõestusele, et defineeritud norm on ristnorm.

Definitsioon 4.1. Normi $\|\cdot\|_\alpha$ tensorkorrutisel $X \otimes Y$ nimetatakse *ristnormiks* (ehk tensorkorrutisnormiks), kui

$$\|x \otimes y\|_\alpha = \|x\|\|y\| \ \forall x \in X, \ \forall y \in Y.$$

Algebraline tensorkorrutis ristnormiga $\|\cdot\|_\alpha$ on normeeritud ruum. Tähistame

$$X \otimes_\alpha Y := (X \otimes Y, \|\cdot\|_\alpha).$$

Definitsioon 4.2. Normeeritud ruumi X_0 *täieldiks* nimetatakse Banachi ruumi X, kui leidub ruumi X kõikjal tihe alamruum X_1 nii, et ruum X_0 on isomeetriliselt isomorfne ruumiga X_1.

Analoogiliselt sellega, kuidas tõestatakse, et igal meetrilisel ruumil eksisteerib täield (vt. näiteks [13]), saab tõestada, et igal normeeritud ruumil eksisteerib täield.

Definitsioon 4.3. Ruumi $X \otimes_\alpha Y$ täieldit nimetatakse Banachi ruumide X ja Y *tensorkorrutiseks* (normiga $\|\cdot\|_\alpha$) ja tähistatakse $X \hat{\otimes}_\alpha Y$.

Kuna ruum $X \otimes_\alpha Y$ on isomeetriliselt isomorfne tensorkorrutise $X \hat{\otimes}_\alpha Y$ alamruumiga, siis $X \otimes_\alpha Y$ samastatakse selle alamruumiga ning vaadeldakse ruumi $X \otimes_\alpha Y$ tensorkorrutise $X \hat{\otimes}_\alpha Y$ alamruumina:

$$X \otimes_\alpha Y \subset X \hat{\otimes}_\alpha Y.$$

Definitsioon 4.4. *Projektiivne norm* $\|\cdot\|_\pi$ algebralisel tensorkorrutisel $X \otimes Y$ defineeritakse järgmiselt

$$\|u\|_\pi = \inf\{\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|\|y_i\| : u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i\}.$$

Lause 4.5. *Projektiivne norm $\|\cdot\|_\pi$ on ristnorm.*

Tõestus. Veendume kõigepealt, et $\|\cdot\|_\pi$ on norm. Olgu $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \in X \otimes Y$. Siis iga $\varphi \in X^*$ ja $\phi \in Y^*$ korral

$$|\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\phi(y_i)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \|\varphi\|\|x_i\|\|\phi\|\|y_i\| \leqslant \|\varphi\|\|\phi\| \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|\|y_i\|.$$

Kuna võrratus kehtib elemendi u iga esituse korral, siis

$$|\sum_{i=1}^{n}\varphi(x_i)\phi(y_i)| \leqslant \|\varphi\|\|\phi\|\|u\|_\pi. \tag{1}$$

Näitame, et $\|u\|_\pi = 0$ parajasti siis, kui $u = 0$. Olgu $u = 0$. Siis u on esitatav kujul $u = 0 \otimes 0$ ja kehtib võrratus

$$0 \leqslant \|u\|_\pi \leqslant \|0\|\|0\| = 0.$$

Olgu $\|u\|_\pi = 0$. Võrratuse (1) tõttu

$$|\sum_{i=1}^{n}\varphi(x_i)\phi(y_i)| \leqslant \|\varphi\|\|\phi\|\|u\|_\pi = 0$$

iga $\varphi \in X^*$ ja $\phi \in Y^*$ korral. Seega $\sum_{i=1}^{n}\varphi(x_i)\phi(y_i) = 0$ ning lause 3.2 põhjal $u = 0$.

Näitame, et $\|\lambda u\|_\pi = |\lambda|\|u\|_\pi$. Kui $\lambda = 0$, siis on võrduse kehtimine ilmne. Vaatleme juhtu, kus $\lambda \neq 0$. Kui $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ on elemendi u esitus, siis

$$\lambda u = \sum_{i=1}^{n}(\lambda x_i) \otimes y_i$$

ja seega

$$\|\lambda u\|_\pi \leqslant \sum_{i=1}^{n}\|(\lambda x_i)\|\|y_i\| = |\lambda|\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|\|y_i\|.$$

Võrratus kehtib iga u esituse korral, seega $\|\lambda u\|_\pi \leqslant |\lambda|\|u\|_\pi$. Sellest järeldub ka, et

$$\|u\|_\pi = \|\lambda^{-1}\lambda u\|_\pi \leqslant |\lambda^{-1}|\|\lambda u\|_\pi$$

ehk $|\lambda|\|u\|_\pi \leqslant \|\lambda u\|_\pi$. Kokkuvõttes $|\lambda|\|u\|_\pi = \|\lambda u\|_\pi$.

Olgu $u_1, u_2 \in X \otimes Y$ ja olgu $\varepsilon > 0$. Valime elementide u_1 ja u_2 esitused

$$u_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i^1 \otimes y_i^1,\ u_2 = \sum_{i=1}^{m} x_i^2 \otimes y_i^2$$

selliselt, et

$$\sum_{i=1}^{n}\|x_i^1\|\|y_i^1\| \leqslant \|u_1\|_\pi + \frac{\varepsilon}{2},\ \sum_{i=1}^{m}\|x_i^2\|\|y_i^2\| \leqslant \|u_2\|_\pi + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Siis

$$u_1 + u_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^1 \otimes y_i^1 + \sum_{i=1}^{m} x_i^2 \otimes y_i^2,$$

mistõttu

$$\|u_1+u_2\|_\pi \leqslant \sum_{i=1}^{n} \|x_i^1\|\|y_i^1\| + \sum_{i=1}^{m} \|x_i^2\|\|y_i^2\| \leqslant \|u_1\|_\pi + \|u_2\|_\pi + \varepsilon.$$

Võrratus kehtib iga $\varepsilon > 0$ korral, seega $\|u_1+u_2\|_\pi \leqslant \|u_1\|_\pi + \|u_2\|_\pi$.

Lõpetuseks näitame, et $\|\cdot\|_\pi$ rahuldab ristnormi tingimust. Vastavalt projektiivse normi definitsioonile kehtib võrratus $\|x\otimes y\|_\pi \leqslant \|x\|\|y\|$. Olgu funktsionaalid $\varphi \in X^*$ ja $\phi \in Y^*$ sellised, et $\|\varphi\| = \|\phi\| = 1$ ja $\varphi(x) = \|x\|, \phi(y) = \|y\|$. Kasutades võrratust (1) saame, et

$$\|x\otimes y\|_\pi = \|x\otimes y\|_\pi \|\varphi\|\|\phi\| \geqslant |\varphi(x)\phi(y)| = \|x\|\|y\|.$$

Kokkuvõttes kehtib võrdus

$$\|x\otimes y\|_\pi = \|x\|\|y\|,$$

ning $\|\cdot\|_\pi$ on ristnorm.

□

Definitsioon 4.6. *Projektiivseks tensorkorrutiseks* nimetatakse tensorkorrutist

$$X\hat{\otimes}Y := X\hat{\otimes}_\pi Y.$$

Projektiivsel tensorkorrutisel on lihtne kirjeldus tänu Grothendieckile [4] (tõestust võib vaadata näiteks [18, lk. 21–22]): iga $u \in X\hat{\otimes}Y$ esitub kujul

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \otimes y_i, \text{ kus } \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|\|y_i\| < \infty,$$

kusjuures rida $\sum_{i=1}^{\infty} x_i \otimes y_i$ koondub absoluutselt normi $\|\cdot\|_\pi$ järgi. Veelgi enam,

$$\|u\|_\pi = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|\|y_i\| : u = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \otimes y_i\}.$$

Edaspidi, kui me kirjutame

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \otimes y_i \in X\hat{\otimes}Y,$$

siis eeldamegi, et $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|\|y_i\| < \infty$.

4.2 Projektiivse tensorkorrutise kaasruum

Olgu X ja Y Banachi ruumid ja $X\hat{\otimes}Y$ nende projektiivne tensorkorrutis. Käesolevas osas kirjeldame projektiivse tensorkorrutise $X\hat{\otimes}Y$ kaasruumi $(X\hat{\otimes}Y)^*$ – näitame, et teda võib identifitseerida ruumina $\mathcal{L}(X,Y^*)$.

Siinkohal läheb meie käsitlus oluliselt lahku raamatu [18] käsitlusest. Raamatus [18] antud tõestuse skeem projektiivse tensorkorrutise kaasruumi kirjeldamiseks on suhteliselt raskepärane – tõestus on läbi viidud bilineaarsete vormide terminoloogias ning soovitud tulemuse saavutamiseks on kasutatud operaatorite pidevat jätkamist. Alljärgnevas anname alternatiivse tõestuse projektiivse tensorkorrutise kaasruumi kirjeldamiseks, tuginedes Grothendiecki projektiivse tensorkorrutise kirjeldusele.

Lause 4.7. *Kehtib võrdus $(X\hat{\otimes}Y)^* = \mathcal{L}(X,Y^*)$, mis tähendab, et kujutus*

$$T : \mathcal{L}(X,Y^*) \to (X\hat{\otimes}Y)^*,$$

kus

$$(T(A))(u) = \sum_{i=1}^{\infty}(Ax_i)(y_i),\ A \in \mathcal{L}(X,Y^*),\ u = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \otimes y_i \in X\hat{\otimes}Y, \tag{2}$$

on isomeetriline isomorfism ruumide $\mathcal{L}(X,Y^*)$ ja $(X\hat{\otimes}Y)^*$ vahel.

Tõestus. Veendume kõigepealt funktsionaali $T(A) : X\hat{\otimes}Y \to \mathbb{K}$ definitsiooni korrektsuses.

Olgu $u = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \otimes y_i \in X\hat{\otimes}Y$. Siis

$$\sum_{i=1}^{\infty} |(Ax_i)(y_i)| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \|Ax_i\|\|y_i\| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \|A\|\|x_i\|\|y_i\| = \|A\| \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|\|y_i\|.$$

Rida $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|\|y_i\|$ koondub, seega rida $\sum_{i=1}^{\infty}(Ax_i)(y_i)$ koondub absoluutselt. Järelikult $(T(A))(u) \in \mathbb{K}$ ning

$$|(T(A))(u)| = |\sum_{i=1}^{\infty}(Ax_i)(y_i)| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |(Ax_i)(y_i)| \leqslant \|A\| \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|\|y_i\|. \tag{3}$$

Kuna võrratus (3) kehtib elemendi u iga esituse $u = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \otimes y_i$ korral, siis

$$|(T(A))(u)| \leqslant \|A\| \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|\|y_i\| : u = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \otimes y_i\} = \|A\|\|u\|_\pi, \tag{4}$$

kus võrratuse vasakul pool olev arv on defineeritud võrdusega (2) (sõltuvana elemendi u esitusest).

Olgu $u_1, u_2 \in X\hat{\otimes}Y$,

$$u_1 = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^1 \otimes y_i^1,\ u_2 = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \otimes y_i^2.$$

Näitame, et

$$(T(A))(u_1 - u_2) = (T(A))(u_1) - (T(A))(u_2) \tag{5}$$

Vaatleme vahet

$$u_1 - u_2 = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^1 \otimes y_i^1 - \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \otimes y_i^2 = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i^1 \otimes y_i^1 - x_i^2 \otimes y_i^2) =$$

$$= x_1^1 \otimes y_1^1 - x_1^2 \otimes y_1^2 + x_2^1 \otimes y_2^1 - x_2^2 \otimes y_2^2 + \dots .$$

Siis

$$(T(A))(u_1 - u_2) = (Ax_1^1)(y_1^1) - (Ax_1^2)(y_1^2) + (Ax_2^1)(y_2^1) - (Ax_2^2)(y_2^2) + \dots =$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} [(Ax_i^1)(y_i^1) - (Ax_i^2)(y_i^2)] = \sum_{i=1}^{\infty} (Ax_i^1)(y_i^1) - \sum_{i=1}^{\infty} (Ax_i^2)(y_i^2) =$$

$$= (T(A))(u_1) - (T(A))(u_2).$$

Näitame, et arv $(T(A))(u)$ ei sõltu elmendi u esitusest. Olgu $u_1 = u_2$, st.

$$\|u_1 - u_2\|_\pi = 0.$$

Siis võrduse (5) ja võrratuse (4) põhjal

$$|(T(A))(u_1) - (T(A))(u_2)| = |(T(A))(u_1 - u_2)| \leqslant \|A\| \|u_1 - u_2\|_\pi = 0.$$

Järelikult

$$(T(A))(u_1) = (T(A))(u_2).$$

Kontrollime funktsionaali $T(A)$ lineaarsust. Kõigepealt näitame, et

$$(T(A))(\lambda u) = \lambda (T(A))(u).$$

Olgu $u = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \otimes y_i \in X \hat{\otimes} Y$. Siis

$$((T(A))(\lambda u) = (T(A))(\lambda \sum_{i=1}^{\infty} x_i \otimes y_i) = (T(A))(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda (x_i \otimes y_i)) =$$

$$= (T(A))(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda x_i \otimes y_i) = \sum_{i=1}^{\infty} (A(\lambda x_i))(y_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda (A(x_i))(y_i) =$$

$$= \lambda \sum_{i=1}^{\infty} (A(x_i))(y_i) = \lambda (T(A))(u).$$

Veel jääb näidata funktsionaali $T(A)$ aditiivsus. Olgu $u_1, u_2 \in X \hat{\otimes} Y$. Siis võrduse (5) tõttu

$$(T(A))(u_1 + u_2) = (T(A))(u_1 - (-u_2)) = (T(A))(u_1) - (T(A))(-u_2) =$$

$$= (T(A))(u_1) + (T(A))(u_2).$$

Funktsionaal $T(A)$ on tõkestatud, sest võrratuse (4) põhjal

$$|(T(A))(u)| \leqslant \|A\|\|u\|_\pi \ \forall u \in X\hat{\otimes}Y.$$

Järelikult on võrdusega (2) defineeritud $T(A) \in (X\hat{\otimes}Y)^*$, kusjuures

$$\|T(A)\| \leqslant \|A\|. \tag{6}$$

Näitame, et kujutus $T : \mathcal{L}(X, Y^*) \to (X\hat{\otimes}Y)^*$ on isomeetriline isomorfism ruumide $\mathcal{L}(X, Y^*)$ ja $(X\hat{\otimes}Y)^*$ vahel.

Kontrollime kujutuse T lineaarsust. Olgu $A, B \in \mathcal{L}(X, Y^*)$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$. Peame näitama, et $T(A + \lambda B) = T(A) + \lambda T(B)$. Olgu $u = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \otimes y_i \in X\hat{\otimes}Y$. Siis

$$T(A + \lambda B)(u) = \sum_{i=1}^{\infty}((A + \lambda B)x_i)(y_i) = \sum_{i=1}^{\infty}(Ax_i + \lambda Bx_i)(y_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}(Ax_i)(y_i) + (\lambda Bx_i)(y_i) = \sum_{i=1}^{\infty}(Ax_i)(y_i) + \sum_{i=1}^{\infty}(\lambda Bx_i)(y_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}(Ax_i)(y_i) + \lambda\sum_{i=1}^{\infty}(Bx_i)(y_i) = T(A)(u) + \lambda T(B)(u).$$

Näitame, et kujutus T on sürjektiivne ehk iga funktsionaali $f \in (X\hat{\otimes}Y)^*$ korral leidub $A \in \mathcal{L}(X, Y^*)$ nii, et $T(A) = f$. Defineerime operaatori $A \in \mathcal{L}(X, Y^*)$ võrdusega

$$(Ax)(y) = f(x \otimes y), \ x \in X, \ y \in Y.$$

Siis iga $u = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \otimes y_i \in X\hat{\otimes}Y$ korral

$$(T(A))(u) = \sum_{i=1}^{\infty}(Ax_i)(y_i) = \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i \otimes y_i) = f(\sum_{i=1}^{\infty} x_i \otimes y_i) = f(u).$$

Tõestuse lõpetuseks veendume, et kujutus T on isomeetriline. Olgu $A \in \mathcal{L}(X, Y^*)$. Võrratuse (6) põhjal on $\|T(A)\| \leqslant \|A\|$. Näitame, et $\|A\| \leqslant \|T(A)\|$:

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1}\|Ax\| = \sup_{\|x\|,\|y\|\leqslant 1}|(Ax)y| = \sup_{\|x\|,\|y\|\leqslant 1}|(T(A))(x \otimes y)| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\|x\|,\|y\|\leqslant 1}\|T(A)\|\|x \otimes y\| = \|T(A)\| \sup_{\|x\|,\|y\|\leqslant 1}\|x\|\|y\| = \|T(A)\|.$$

Kokkuvõttes $\|T(A)\| = \|A\|$.

$\square$

Analoogiline tõestus näitab, et projektiivse tensorkorrutise $X\hat{\otimes}Y$ kaasruumiks on ka ruum $\mathcal{L}(Y,X^*)$ ehk $(X\hat{\otimes}Y)^* = \mathcal{L}(Y,X^*)$, mis tähendab, et kujutus

$$T : \mathcal{L}(Y,X^*) \to (X\hat{\otimes}Y)^*,$$

kus

$$(T(A))(u) = \sum_{i=1}^{\infty}(Ay_i)(x_i),\ \ A \in \mathcal{L}(Y,X^*),\ \ u = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \otimes y_i \in X\hat{\otimes}Y,$$

on isomeetriline isomorfism ruumide $\mathcal{L}(Y,X^*)$ ja $(X\hat{\otimes}Y)^*$ vahel.

5 Operaatorite tensorkorrutis ja tensornormi mõiste

5.1 Operaatorite tensorkorrutis

Olgu X, Y, Z ja W Banachi ruumid ning olgu $X\hat{\otimes}_\alpha Y$ ja $W\hat{\otimes}_\beta Z$ tensorkorrutised.

Definitsioon 5.1. Operaatorite $A \in \mathcal{L}(X, W)$ ja $B \in \mathcal{L}(Y, Z)$ *algebraliseks tensorkorrutiseks* nimetatakse operaatorit $A \otimes B : X \otimes_\alpha Y \to W\hat{\otimes}_\beta Z$, mis on defineeritud eeskirjaga

$$(A \otimes B)(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i) = \sum_{i=1}^{n} Ax_i \otimes By_i.$$

Lause 5.2. *Operaatorite algebraline tensorkorrutis $A \otimes B$ on lineaarne operaator.*

Tõestus. Olgu

$$u_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i^1 \otimes y_i^1, \; u_2 = \sum_{i=1}^{m} x_i^2 \otimes y_i^2 \in X \otimes Y.$$

Kõigepealt veendume, et operaatorite algebraline tensorkorrutis on korrektselt defineeritud. Olgu $u_1 = u_2$ ehk (vt. lause 3.2)

$$\sum_{i=1}^{n} x^*(x_i^1)y_i^1 = \sum_{i=1}^{m} x^*(x_i^2)y_i^2 \quad \forall\, x^* \in X^*.$$

Paneme tähele, et

$$(A \otimes B)(u_1) = \sum_{i=1}^{n} Ax_i^1 \otimes By_i^1 \;\; \in Z \otimes W,$$

$$(A \otimes B)(u_2) = \sum_{i=1}^{m} Ax_i^2 \otimes By_i^2 \;\; \in Z \otimes W.$$

Nüüd iga funktsionaali $z^* \in Z^*$ korral $A^*z^* \in X^*$ ning seetõttu

$$\sum_{i=1}^{n} z^*(Ax_i^1)By_i^1 = B(\sum_{i=1}^{n} z^*(Ax_i^1)y_i^1) = B(\sum_{i=1}^{n}(A^*z^*)(x_i^1)y_i^1) =$$

$$= B(\sum_{i=1}^{m}(A^*z^*)(x_i^2)y_i^2) = B(\sum_{i=1}^{m} z^*(Ax_i^2)y_i^2) = \sum_{i=1}^{m} z^*(Ax_i^2)By_i^2.$$

Seega (vt. lause 3.2)

$$\sum_{i=1}^{n} Ax_i^1 \otimes By_i^1 = \sum_{i=1}^{m} Ax_i^2 \otimes By_i^2, \text{ kui } \sum_{i=1}^{n} x_i^1 \otimes y_i^1 = \sum_{i=1}^{m} x_i^2 \otimes y_i^2.$$

Kontrollime, et $(A \otimes B)(u_1 + u_2) = (A \otimes B)u_1 + (A \otimes B)u_2$. Vaatleme summat

$$u_1 + u_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^1 \otimes y_i^1 + \sum_{i=1}^{m} x_i^2 \otimes y_i^2 = \sum_{i=1}^{n+m} x_i^3 \otimes y_i^3,$$

kus

$$x_i^3 = \begin{cases} x_i^1, & i = 1, \dots, n, \\ x_i^2, & i = n+1, \dots, n+m, \end{cases}$$

$$y_i^3 = \begin{cases} y_i^1, & i = 1, \dots, n, \\ y_i^2, & i = n+1, \dots, n+m. \end{cases}$$

Nüüd

$$(A \otimes B)(u_1 + u_2) = (A \otimes B)(\sum_{i=1}^{n+m} x_i^3 \otimes y_i^3) = \sum_{i=1}^{n+m} Ax_i^3 \otimes By_i^3 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} Ax_i^3 \otimes By_i^3 + \sum_{i=n+1}^{n+m} Ax_i^3 \otimes By_i^3 = \sum_{i=1}^{n} Ax_i^1 \otimes By_i^1 + \sum_{i=1}^{m} Ax_i^2 \otimes By_i^2 =$$

$$= (A \otimes B)u_1 + (A \otimes B)u_2.$$

Veel jääb näidata, et $(A \otimes B)(\lambda u) = \lambda(A \otimes B)(u)$. Olgu $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$. Siis

$$(A \otimes B)(\lambda u) = (A \otimes B)(\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i) = (A \otimes B)(\sum_{i=1}^{n} \lambda(x_i \otimes y_i)) =$$

$$= (A \otimes B)(\sum_{i=1}^{n} \lambda x_i \otimes y_i) = \sum_{i=1}^{n} A(\lambda x_i) \otimes By_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda Ax_i \otimes By_i =$$

$$= \lambda \sum_{i=1}^{n} Ax_i \otimes By_i = \lambda(A \otimes B)u.$$

□

Märkus 5.3. Lause 5.2 tõestusele on kirjanduses enamasti viidatud ühe lausega – näiteks „Evidently $A \otimes B$ is a well-defined linear operator“ [2, lk. 228]. Raamatus [18] toodud tõestuse skeemis kasutatakse tensorkorrutise lineariseerivat omadust, mida me käesolevas töös ei vaatle.

Lemma 5.4. *Olgu X normeeritud ruum, Y Banachi ruum ja X_0 ruumi X alamruum. Kui X_0 on kõikjal tihe ruumis X, siis igal operaatoril $A_0 \in \mathcal{L}(X_0, Y)$ on olemas ühene jätk $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Seejuures $\|A\| = \|A_0\|$.*

Lemma tõestuse võib leida näiteks õpikust [13, lk. 149–151]. Ühest jätku A lemmast 5.4 nimetatakse operaatori A_0 *pidevaks jätkuks*. Pideva jätku saamiseks laiendatakse operaatorit A_0 järgneval viisil: kui $x \in X$ on suvaline element ja $(x_n) \subset X_0$ on selline jada, mille puhul $x = \lim_n x_n$, siis defineeritakse

$$Ax = \lim_n A_0 x_n.$$

Definitsioon 5.5. Olgu $A \in \mathcal{L}(X, W)$ ja $B \in \mathcal{L}(Y, Z)$. Kui operaatorite algebraline tensorkorrutis $A \otimes B : X \otimes_\alpha Y \to W \hat{\otimes}_\beta Z$ on pidev, siis tema pidevat jätku nimetatakse *operaatorite A ja B tensorkorrutiseks* ja tähistatakse samuti $A \otimes B$. Sel juhul $A \otimes B \in \mathcal{L}(X \hat{\otimes}_\alpha Y, W \hat{\otimes}_\beta Z)$.

Kui operaatorite tensorkorrutis eksisteerib, siis vastavat ristnormi kutsutakse ühtlaseks. Ühtlase ristnormi definitsioon on järgmine:

Definitsioon 5.6. Öeldakse, et $\alpha = \|\cdot\|_\alpha$ on *ühtlane ristnorm*, kui $\|\cdot\|_\alpha$ on ristnorm kõikide Banachi ruumide X ja Y tensorkorrutistel $X \otimes Y$ ning iga $A \in \mathcal{L}(X, W)$ ja $B \in \mathcal{L}(Y, Z)$ korral operaatorite algebraline tensorkorrutis $A \otimes B : X \otimes_\alpha Y \to W \otimes_\alpha Z$ rahuldab tingimust

$$\|A \otimes B\| \leqslant \|A\|\|B\|.$$

Lause 5.7. *Olgu α ühtlane ristnorm. Kui $A \in \mathcal{L}(X, W)$ ja $B \in \mathcal{L}(Y, Z)$, siis eksisteerib $A \otimes B \in \mathcal{L}(X \hat{\otimes}_\alpha Y, W \hat{\otimes}_\alpha Z)$ ja $\|A \otimes B\| = \|A\|\|B\|$.*

Tõestus. Lemmast 5.4 on selge, et eksisteerib $A \otimes B \in \mathcal{L}(X \hat{\otimes}_\alpha Y, W \hat{\otimes}_\alpha Z)$ ja

$$\|A \otimes B\| \leqslant \|A\|\|B\|,$$

sest α on ühtlane ristnorm. Vastupidise võrratuse $\|A \otimes B\| \geqslant \|A\|\|B\|$ tõestamiseks valime $(x_n) \subset B_X$ ja $(y_n) \subset B_Y$ nii, et $\|A\| = \lim_n \|Ax_n\|$ ja $\|B\| = \lim_n \|By_n\|$. Siis

$$\|A\|\|B\| = \lim_n \|Ax_n\| \lim_n \|By_n\| = \lim_n \|Ax_n\|\|By_n\|.$$

Kuna α on ühtlane ristnorm, siis $\|Ax\|\|By\| = \|Ax \otimes By\|$ iga $x \in X$ ja $y \in Y$ korral. Järelikult

$$\begin{aligned}\lim_n \|Ax_n\|\|By_n\| &= \lim_n \|Ax_n \otimes By_n\| = \lim_n \|(A \otimes B)(x_n \otimes y_n)\| \\ &\leqslant \|A \otimes B\| \lim_n \|x_n \otimes y_n\| \leqslant \|A \otimes B\|.\end{aligned}$$

□

Lause 5.7 on üldtuntud tulemus. Oma põhitulemuste tõestamiseks vajame aga allolevat lauset 5.9, mis annab operaatorite tensorkorrutise injektsioonimooduli jaoks hinnangu ülalt. Lause 5.9 tõestus tugineb järgmisele abitulemusele.

Lemma 5.8. *Olgu α ühtlane ristnorm. Kui $A \in \mathcal{L}(X, W)$ ja $B \in \mathcal{L}(Y, Z)$, siis*

$$A \otimes B = (A \otimes I_Z)(I_X \otimes B).$$

Tõestus. Tensorkorrutise definitsiooni arvestades piisab võrdus tõestada elementaartensoritel. Olgu $x \otimes y \in X \otimes Y$. Siis

$$(A \otimes I_Z)(I_X \otimes B)(x \otimes y) = (A \otimes I_Z)(x \otimes By) = Ax \otimes By = (A \otimes B)(x \otimes y).$$

$\square$

Lause 5.9. *Olgu α ühtlane ristnorm. Kui $A \in \mathcal{L}(X, W)$ ja $B \in \mathcal{L}(Y, Z)$, siis operaatorite tensorkorrutis $A \otimes B : X \hat{\otimes}_\alpha Y \to W \hat{\otimes}_\alpha Z$ rahuldab võrratust*

$$i(A \otimes B) \leqslant i(A) i(B).$$

Tõestus. Olgu $c\|u\|_\alpha \leqslant \|(I_X \otimes B)u\|_\alpha$ iga $u \in X \otimes Y$ korral, Valime tensori $u = x \otimes y$ nii, et $\|x\| = 1$. Siis $c\|y\| \leqslant \|By\|$ iga $y \in Y$ korral. Seega $i(I_X \otimes B) \leqslant i(T)$. Sarnase arutelu põhjal saame ka, et $i(A \otimes I_Z) \leqslant i(A)$. Teame, et $A \otimes B = (A \otimes I_Z)(I_X \otimes B)$ (vt. lemma 5.8). Järelikult

$$i(A \otimes B) \leqslant i(A \otimes I_Z) i(I_X \otimes B) \leqslant i(A) i(B).$$

$\square$

Hästituntud näide ühtlase ristnormi kohta on projektiivne norm.

Lause 5.10. *Projektiivne norm on ühtlane ristnorm.*

Tõestus. Definitsioonist 4.4 teame, et projektiivne norm on defineeritud kõikide Banachi ruumide X ja Y tensorkorrutistel $X \otimes Y$ ja lause 4.5 põhjal on projektiivne norm ristnorm.

Olgu $A \in \mathcal{L}(X, W)$ ja $B \in \mathcal{L}(Y, Z)$. Vaatleme operaatorite A ja B algebralist tensorkorrutist $A \otimes B : \ X \otimes_\pi Y \to X \otimes_\pi Z$,

$$(A \otimes B)(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i) = \sum_{i=1}^{n} Ax_i \otimes By_i.$$

Olgu $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \in X \otimes_\pi Y$. Sel juhul kehtib võrratus

$$\begin{aligned} \|(A \otimes B)u\|_\pi &= \| \sum_{i=1}^{n} Ax_i \otimes By_i \|_\pi \leqslant \sum_{i=1}^{n} \|Ax_i \otimes By_i\|_\pi \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \|A\| \|B\| \|x_i \otimes y_i\|_\pi \leqslant \|A\| \|B\| \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \|y_i\|. \end{aligned}$$

Kuna võrratus kehtib elemendi u iga esituse $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ korral, siis

$$\|(A \otimes B)u\|_\pi \leqslant \|A\|\|B\|\|u\|_\pi, \; u \in X \otimes_\pi Y.$$

Järelikult $\|A \otimes B\| \leqslant \|A\|\|B\|$. $\square$

5.2 Tensornorm; näited; tensornormi kaas-operaatorideaal

Tensornormiks nimetame lõplikult genereeritud ühtlast ristnormi (vt. [18, lk. 130]).

Definitsioon 5.11. Öeldakse, et ühtlane ristnorm $\alpha = \|\cdot\|_\alpha$ on *lõplikult genereeritud*, kui

$$\|u\|_{X\otimes_\alpha Y} = \inf\{\|u\|_{E\otimes_\alpha F} \ : \ u \in E \otimes F, \ \dim E < \infty, \ \dim F < \infty\},$$

kus $E \subset X$ ja $F \subset Y$ on alamruumid. Tensornormiks nimetatakse lõplikult genereeritud ühtlast ristnormi.

Me teame (vt. lause 5.10), et projektiivne norm on ühtlane ristnorm. Projektiivse normi definitsioonist (vt. definitsioon 4.4) on selge, et ta on lõplikult genereeritud. Projektiivne tensornorm on vaid üks näide Chevet–Saphari tensornormide hulgas.

Definitsioon 5.12. *Chevet–Saphari tensornormiks* nimetatakse normi $g_p = \|\cdot\|_{g_p}$, mis on defineeritud võrdusega

$$\|u\|_{g_p} = \inf\{\|(x_j)\|_p \|(y_j)\|_q^w \ : \ u = \sum_{j=1}^n x_j \otimes y_j\},$$

kus $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\|(x_j)\|_p$ on vektori $(x_j) = (x_j)_{j=1}^n$ norm ruumis $l_p(X)$, st. $\|(x_j)\|_p = (\sum_{j=1}^n \|x_j\|^p)^{1/p}$ ja $\|(y_j)\|_q^w$ on vektori $(y_j) = (y_j)_{j=1}^n$ norm ruumis $l_q^w(Y)$, st. $\|(y_j)\|_q^w = \sup\{(\sum_{j=1}^n |y^*(y_j)|^q)^{1/q} : y^* \in Y^*, \|y^*\| \leqslant 1\}$.

Lause 5.13 ([18, lk. 135, lause 6.6])**.** *Olgu $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Siis Chevet–Saphari tensornorm $g_p = \|\cdot\|_{g_p}$ on tensornorm ja g_1 ühtib projektiivse normiga $\pi = \|\cdot\|_\pi$.*

Definitsioon 5.14. Kui $u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \in X \otimes Y$, siis tensori u *transponeeritud tensor* u^t on defineeritud võrdusega $u^t = \sum_{i=1}^n y_i \otimes x_i \in Y \otimes X$. Kui α on tensornorm, siis *transponeeritud tensornorm* α^t on tensornorm, mis on defineeritud võrdusega $\|u\|_{\alpha^t} = \|u^t\|_\alpha, u \in X \otimes Y$.

Meil läheb veel tarvis Banachi operaatorideaali mõistet. Märgime, et (Banachi) operaatorideaalide teooria on loodud Pietschi poolt (vt. [15]).

Definitsioon 5.15. Olgu $\mathcal{L}$ kõigi Banachi ruumides tegutsevate pidevate lineaarsete operaatorite hulk. Hulka $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}$ nimetatakse *Banachi operaatorideaaliks*, kui kõikide Banachi ruumide X ja Y korral ruumist X ruumi Y tegutsevate operaatorite hulka $\mathcal{A}$ kuuluvate operaatorite hulk $\mathcal{A}(X,Y)$ on vektorruum, millel on defineeritud norm $\|\cdot\|_\mathcal{A}$, kusjuures on täidetud järgmised tingimused:
(i) $\mathcal{A}$ sisaldab kõik lõplikumõõtmelised operaatorid,
(ii) kui $S \in \mathcal{A}(X,Y)$, $T \in \mathcal{L}(W,X)$ ja $R \in \mathcal{L}(Y,Z)$, siis kompositsioon RST kuulub hulka $\mathcal{A}(W,Z)$ ning $\|RST\|_\mathcal{A} \leqslant \|R\|\|S\|_\mathcal{A}\|T\|$,
(iii) $(\mathcal{A}(X,Y), \|\cdot\|_\mathcal{A})$ on Banachi ruum.

On teada (vt. näiteks [18, lk. 187–190]) et iga tensornormi α korral leidub Banachi operaatorideaal $\mathcal{A}$ nii, et $(X\hat{\otimes}_\alpha Y)^* = \mathcal{A}(X, Y^*)$ iga Banachi ruumi X ja Y korral (kasutades tähistust raamatust [18], $\mathcal{A} = \mathcal{L}_{\alpha'}$). Sel juhul ütleme, et $\mathcal{A}$ on tensornormi α *kaas-operaatorideaal*. Näiteks, kuna $(X\hat{\otimes}Y)^* = \mathcal{L}(X, Y^*)$ (vt. lause 4.7), siis projektiivse tensornormi kaas-operaatorideaal on $\mathcal{L}$.

6 Isomorfsed kujutused ja jätkuoperaatorid

6.1 Teoreem 1.3 üldise tensornormi korral

Olgu X ja Y Banachi ruumid. Tuletame meelde, et $T : X \to Y$ on *isomorfne kujutus*, kui T on isomorfism ruumide X ja $\operatorname{ran} T$ vahel. See tähendab, et operaator T on lineaarne ning leiduvad konstandid $c > 0$ ja $d > 0$ nii, et

$$c\|x\| \leqslant \|Tx\| \leqslant d\|x\| \ \forall x \in X.$$

Tuletame ka meelde (vt. [15, lk. 26]), et operaatori $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ injektsioonimoodul $i(T)$ on defineeritud järgmiselt:

$$i(T) = \sup\{c > 0 \ : \ c\|x\| \leqslant \|Tx\| \ \forall x \in X\}.$$

Seega on T isomorfne kujutus parajasti siis, kui $i(T) > 0$.

Tõestame teoreemi 1.3 (vt. Sissejuhatus) suvaliste tensornormide jaoks järgmiselt.

Teoreem 6.1. *Olgu X, Y, Z ja W Banachi ruumid. Olgu $S \in \mathcal{L}(X, W)$ ja olgu $T \in \mathcal{L}(Y, Z)$. Olgu α tensornorm. Kui leiduvad jätkuoperaatorid $\Phi \in \mathcal{L}((\operatorname{ran} S)^*, W^*)$ ja $\Psi \in \mathcal{L}((\operatorname{ran} T)^*, Z^*)$, siis $S \otimes T : X\hat{\otimes}_\alpha Y \to W\hat{\otimes}_\alpha Z$ rahuldab võrratusi*

$$\frac{1}{\|\Phi\|\|\Psi\|} i(S)i(T) \leqslant i(S \otimes T) \leqslant i(S)i(T).$$

Märkus 6.2. Jätkuoperaatori olemasolu on oluline tingimus selleks, et $S \otimes T$ oleks isomorfne kujutus, ja injektsioonimoodulile $i(S \otimes T)$ antud hinnangud on teoreemides 1.3 ja 6.1 täpsed. Tõepoolest, olgu Y Banachi ruumi Z kinnine alamruum, olgu $j : Y \to Z$ ühiksisestus ja olgu loomulik sisestus $I_{Y^*} \otimes j : Y^*\hat{\otimes} Y \to Y^*\hat{\otimes} Z$ isomorfne kujutus. Siis, nagu tõestatud artiklis [12, teoreem 3.1] (vt. ka teoreem 7.6), leidub jätkuoperaator $\Psi \in \mathcal{L}(Y^*, Z^*)$ nii, et $i(I_{Y^*} \otimes j) = \frac{1}{\|\Psi\|}$.

Teoreemi 6.1 tõestuse põhiosa sisaldub järgmises tulemuses.

Lause 6.3. *Olgu X, Y ja Z Banachi ruumid ja olgu $T : Y \to Z$ isomorfne kujutus. Olgu α tensornorm. Kui leidub jätkuoperaator $\Psi \in \mathcal{L}((\operatorname{ran} T)^*, Z^*)$, siis $I_X \otimes T : X\hat{\otimes}_\alpha Y \to X\hat{\otimes}_\alpha Z$ on isomorfne kujutus, kusjuures*

$$\frac{1}{\|\Psi\|} i(T)\|u\|_\alpha \leqslant \|(I_X \otimes T)u\|_\alpha \quad \forall u \in X\hat{\otimes}_\alpha Y.$$

Tõestus. Olgu $u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \in X \otimes Y$. Piisab näidata, et

$$i(T)\|u\|_\alpha \leqslant \|\Psi\|\|(I_X \otimes T)u\|_\alpha.$$

Kuna T on isomorfne kujutus, siis saame vaadelda isomorfismi $T_0 : Y \to \operatorname{ran} T$ nii, et $T_0 y = Ty$ iga $y \in Y$ korral. Veelgi enam, $\|T_0\| = \|T\|$ ja $i(T) = \|T_0^{-1}\|^{-1}$ (vt. näiteks [15, lk. 26]). Olgu $\mathcal{A}$ tensornormi α kaas-operaatorideaal. Kuna $(X\hat{\otimes}_\alpha Y)^* = \mathcal{A}(X, Y^*)$, siis leidub operaator $A \in \mathcal{A}(X, Y^*)$ normiga $\|A\|_{\mathcal{A}} = 1$ nii, et

$$\begin{aligned}\|u\|_\alpha = \langle A, u\rangle = \sum_{i=1}^n (Ax_i)(y_i) &= \sum_{i=1}^n ((T_0^*)^{-1}Ax_i)(T_0 y_i)\\ &= \sum_{i=1}^n ((T_0^*)^{-1}Ax_i)(Ty_i).\end{aligned}$$

Operaator Ψ on jätkuoperaator, seega

$$\sum_{i=1}^n ((T_0^*)^{-1}Ax_i)(Ty_i) = \sum_{i=1}^n (\Psi(T_0^*)^{-1}Ax_i)(Ty_i).$$

Teiselt poolt, $\Psi(T_0^*)^{-1}A \in \mathcal{A}(X, Z^*) = (X\hat{\otimes}_\alpha Z)^*$. Järelikult

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^n (\Psi(T_0^*)^{-1}Ax_i)(Ty_i) = \langle \Psi(T_0^*)^{-1}A, (I_X \otimes T)u\rangle\\ &\leqslant \|\Psi(T_0^*)^{-1}A\|_{\mathcal{A}}\|(I_X \otimes T)u\|_\alpha \leqslant \|\Psi\|\|(T_0^*)^{-1}\|\|(I_X \otimes T)u\|_\alpha.\end{aligned}$$

Me teame, et

$$\|(T_0^*)^{-1}\| = \|(T_0^{-1})^*\| = \|T_0^{-1}\| = (i(T))^{-1}.$$

Järelikult kehtib võrratus

$$\|u\|_\alpha \leqslant \|\Psi\|(i(T))^{-1}\|(I_X \otimes T)u\|_\alpha.$$

□

Teoreemi 6.1 tõestus. Lemma 5.4 põhjal kehtib võrdus

$$S \otimes T = (S \otimes I_Z)(I_X \otimes T).$$

Lause 6.3 põhjal

$$\frac{1}{\|\Psi\|} i(T)\|u\|_\alpha \leqslant \|(I_X \otimes T)u\|_\alpha \quad \forall u \in X\hat{\otimes}_\alpha Y.$$

Rakendades lauset 6.3 transponeeritud tensornormi α^t korral saame, et

$$\frac{1}{\|\Phi\|} i(S)\|v\|_\alpha \leqslant \|(S \otimes I_Z)v\|_\alpha \quad \forall v \in X\hat{\otimes}_\alpha Z.$$

Seega iga $u \in X\hat{\otimes}_\alpha Y$ korral saame

$$\frac{1}{\|\Psi\|} i(T)\|u\|_\alpha \leqslant \|(I_X \otimes T)u\|_\alpha \leqslant \|\Phi\|\frac{1}{i(S)}\|(S \otimes T)u\|_\alpha.$$

Järelikult vasakpoolne võrratus kehtib. Samas, lause 5.9 põhjal, kehtib ka parempoolne võrratus. □

Märkus 6.4. Lause 6.3 erijuht, kus Y on ruumi Z kinnine alamruum, $T = j : Y \to Z$ on ühiksisestus ja $\alpha = \pi$ on projektiivne norm, tõestati artiklis [12, teoreem 3.1]. Omakorda, selle tulemuse erijuhu, kus $\|\Psi\| = 1$, see tähendab, et Ψ on normi säilitav jätkuoperaator, tõestas Randrianantoanina [16] (vt. ka [1, teoreem 1.6] ja märkus 7.4).

Anname nüüd kaks vahetut järeldust teoreemist 6.1.

Järeldus 6.5. *Teoreemis 6.1 on $S \otimes T$ isomorfne kujutus parajasti siis kui S ja T on isomorfsed kujutused.*

Järeldus 6.6. *Olgu α tensornorm. Olgu W ja Z Banachi ruumid, olgu $X \subset W$ ja $Y \subset Z$ kinnised alamruumid. Olgu $j : X \to W$ ja $k : Y \to Z$ ühiksisestused. Kui leiduvad jätkuoperaatorid $\Phi \in \mathcal{L}(X^*, W^*)$ ja $\Psi \in \mathcal{L}(Y^*, Z^*)$, siis loomulik sisestus*

$$j \otimes k : \ X \hat{\otimes}_\alpha Y \to W \hat{\otimes}_\alpha Z$$

on isomorfne kujutus ja kehtivad järgmised võrratused:

$$\frac{1}{\|\Phi\| \|\Psi\|} \leqslant i(j \otimes k) \leqslant 1.$$

Märgime, et kui jätkuoperaator $\Phi \in \mathcal{L}(Y^*, Z^*)$ säilitab normi, st. $\|\Phi y^*\| = \|y^*\|$ iga $y^* \in Y^*$ korral, siis $\|\Phi\| = 1$. Tõepoolest,

$$\|\Phi\| = \sup_{\|y^*\|=1} \|\Phi y^*\| = \sup_{\|y^*\|=1} \|y^*\| = 1.$$

Seetõttu järeldub järeldusest 6.6 kohe

Järeldus 6.7. *Olgu α tensornorm. Olgu X ja Z Banachi ruumid, olgu $Y \subset Z$ kinnine alamruum ja olgu $j : Y \to Z$ ühiksisestus. Kui leidub normi säilitav jätkuoperaator $\Phi \in \mathcal{L}(Y^*, Z^*)$, siis loomulik sisestus $I_X \otimes j$ on isomeetriline ja tensorkorrutis $X \hat{\otimes}_\alpha Y$ on tensorkorrutise $X \hat{\otimes}_\alpha Z$ alamruum.*

Definitsioon 6.8. Olgu X normeeritud ruum. Operaatorit

$$j_X : X \to X^{**},$$

mis on defineeritud võrdusega

$$(j_X x)(x^*) = x^*(x), \ x \in X, \ x^* \in X^*,$$

nimetatakse ruumi X *loomulikuks sisestuseks* ruumi X^{**}.

Lemma 6.9. *Olgu X normeeritud ruum. Siis loomulik sisestus j_X on isomeetriline isomorfism ruumide X ja* $\operatorname{ran} j_X$ *vahel.*

Lemma 6.9 on hästituntud tulemus, selle tõestuse võib leida näiteks õpikust [13, lk. 172–173].

Tuginedes lemmale 6.9, vaadeldakse ruumi X ruumi X^{**} alamruumina ning kirjutatakse $X \subset X^{**}$, samastades elemendid $x \in X$ nende isomeetriliste kujutistega $j_X x \in X^{**}$.

Erijuhul, kui $Z = Y^{**}$ ja $\Phi = j_{Y^*}$ ning $\alpha = \pi$, saame järeldusest 6.7 Grothendiecki klassikalise tulemuse, mis väidab et loomulik sisestus tensorkorrutisest $X\hat{\otimes}Y$ tensorkorrutisse $X\hat{\otimes}Y^{**}$ on isomeetriline ning ruum $X\hat{\otimes}Y$ on alati ruumi $X\hat{\otimes}Y^{**}$ alamruum (seda tulemust üldistab ja arendab järeldus 6.16 järgmises osas 6.2).

Järeldus 6.10 (vt. [4, pt. I, lk. 41])**.** *Olgu X ja Y Banachi ruumid. Siis loomulik sisestus tensorkorrutisest $X\hat{\otimes}Y$ tensorkorrutisse $X\hat{\otimes}Y^{**}$ on isomeetriline.*

Tõestus. Vaatleme ruumi Y ruumi Y^{**} kinnise alamruumina, samastades elemendid $y \in Y$ nende isomeetriliste kujutistega $j_Y y \in Y^{**}$. Siis järelduse 6.7 põhjal on loomulik sisestus $I_X \otimes j$ tensorkorrutisest $X\hat{\otimes}Y$ tensorkorrutisse $X\hat{\otimes}Y^{**}$ isomeetriline niipea, kui leidub normi säilitav jätkuoperaator $\Phi \in \mathcal{L}(Y^*, Y^{***})$.

Võtame $\Phi = j_{Y^*}$. Siis $\|j_{Y^*}y^*\| = \|y^*\|$ iga $y^* \in Y^*$ korral (vt. lemma 6.9). Ning tegemist on jätkuoperaatoriga, sest

$$j_{Y^*} : Y^* \to Y^{***},\ (j_{Y^*}y^*)(y^{**}) = y^{**}(y^*)\ \forall y^{**} \in Y^{**},\ \forall y^* \in Y^*,$$

mistõttu

$$(j_{Y^*}y^*)(y) = (j_Y y)(y^*) = y^*(y)\ \forall y^* \in Y^*,\ \forall y \in Y.$$

Seega on loomulik sisestus tensorkorrutisest $X\hat{\otimes}Y$ tensorkorrutisse $X\hat{\otimes}Y^{**}$ isomeetriline.

□

Definitsioon 6.11. Olgu W Banachi ruum ja X tema alamruum. Öeldakse, et X on *täiendatav*, kui leidub projektor $P \in \mathcal{L}(W, W)$ nii, et $X = \operatorname{ran} P$.

Teoreemi 6.1 ja tema järelduste 6.5, 6.6 ja 6.7 eeldused on täidetud täiendavate alamruumide korral. Kehtib nimelt järgmine tuntud tulemus.

Lemma 6.12. *Olgu W Banachi ruum ja X tema alamruum. Operaator $P \in \mathcal{L}(W, W)$ on projektor ja* $\operatorname{ran} P = X$ *parajasti siis, kui* $\operatorname{ran} P \subset X$ *ja $Px = x$ iga $x \in X$ korral.*

Lemma 6.12 tõestuse võib leida näiteks õpikust [13, lk. 259].

Lause 6.13. *Kui Banachi ruumi W alamruum X on täiendatav ja $P \in \mathcal{L}(W, W)$ on vastav projektor, siis leidub jätkuoperaator $\Phi \in \mathcal{L}(X^*, W^*)$ nii, et $\|\Phi\| = \|P\|$*

Tõestus. Kuna $\operatorname{ran} P = X$, siis saame vaadelda operaatorit $p \in \mathcal{L}(W, X)$, mis on defineeritud võrdusega

$$pw = Pw, \ w \in W.$$

Operaatori p kaasoperaator $p^* \in \mathcal{L}(X^*, W^*)$ on defineeritud võrdusega

$$(p^*x^*)(w) = x^*(pw), \ x^* \in X^*, \ w \in W.$$

Kuna $px = x$ iga $x \in X$ korral, siis

$$(p^*x^*)(x) = x^*(px) = x^*(x), \ x^* \in X^*, \ x \in X.$$

Seega on operaator p^* jätkuoperaator. Seejuures $\|p^*\| = \|p\| = \|P\|$. $\square$

Lause 6.13 tõttu järeldub Grothendiecki teoreem 1.1 vahetult järeldusest 6.5. Tuletame meelde (vt. Sissejuhatus), et alamruumi täiendatavuse nõue on rangelt tugevam kui jätkuoperaatori olemasolu nõue.

6.2 Jätkuoperaatori olemasolu tensorkorrutiste korral

Me nägime järelduses 6.5, et kui S ja T on isomorfsed kujutused, siis $S \otimes T$ on isomorfne kujutus. Näitame, et sel juhul leidub jätkuoperaator.

Teoreem 6.14. *Olgu X, Y, Z ja W Banachi ruumid. Olgu $S \in \mathcal{L}(X, W)$ ja olgu $T \in \mathcal{L}(Y, Z)$. Olgu α tensornorm. Leidugu jätkuoperaatorid $\Phi \in \mathcal{L}((\operatorname{ran} S)^*, W^*)$ ja $\Psi \in \mathcal{L}((\operatorname{ran} T)^*, Z^*)$. Kui S ja T on isomorfsed kujutused, siis leidub jätkuoperaator $F \in \mathcal{L}((\operatorname{ran}(S \otimes T))^*, (W \hat{\otimes}_\alpha Z)^*)$ nii, et $\|F\| \leqslant \|\Phi\| \|\Psi\|$.*

Tõestus. Olgu $S_0 : X \to \operatorname{ran} S$ ja $T_0 : Y \to \operatorname{ran} T$ sellised isomorfismid, et $S = jS_0$ ja $T = kT_0$ ühiksisestuste $j : \operatorname{ran} S \to W$ ja $k : \operatorname{ran} T \to Z$ korral. Siis

$$S \otimes T = (j \otimes k)(S_0 \otimes T_0)$$

ja järelikult

$$\begin{aligned} \operatorname{ran}(S \otimes T) \subset \operatorname{ran}(j \otimes k) \subset \overline{(j \otimes k)(\operatorname{ran} S \otimes \operatorname{ran} T)} = \overline{\operatorname{ran} S \otimes \operatorname{ran} T} \\ = \overline{(S \otimes T)(X \otimes Y)} \subset \overline{\operatorname{ran}(S \otimes T)} = \operatorname{ran}(S \otimes T), \end{aligned}$$

sest $S \otimes T$ on isomorfne kujutus (vt. järeldus 6.5). Seega

$$\operatorname{ran}(S \otimes T) = \operatorname{ran}(j \otimes k) = \overline{\operatorname{ran} S \otimes \operatorname{ran} T}.$$

Niisiis võime üldisust kitsendamata eeldada, et $S = j$, $\operatorname{ran} S = X$, $T = k$, $\operatorname{ran} T = Y$ ja $\operatorname{ran}(j \otimes k) = \overline{X \otimes Y}$. Peame konstrueerima jätkuoperaatori

$$F \in \mathcal{L}((\operatorname{ran}(j \otimes k))^*, (W \hat{\otimes}_\alpha Z)^*).$$

Olgu J isomorfism ruumist $X \hat{\otimes}_\alpha Y$ ruumile $\operatorname{ran}(j \otimes k)$ nii, et $Ju = (j \otimes k)u$ iga $u \in X \hat{\otimes}_\alpha Y$ korral; siis $\|J\| = \|j \otimes k\| = 1$. Olgu $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{A}^t$ normile α ja tema transponeeritud normile α^t vastavad kaas-operaatorideaalid. Kui $f \in (\operatorname{ran}(j \otimes k))^*$, siis $J^*(f) \in (X \hat{\otimes}_\alpha Y)^* = \mathcal{A}(X, Y^*)$, $\Psi J^*(f) \in \mathcal{A}(X, Z^*)$ ja $(\Psi J^*(f))^* j_Z \in \mathcal{A}^t(Z, X^*)$. Järelikult saame defineerida

$$F : (\operatorname{ran}(j \otimes k))^* \to (W \hat{\otimes}_\alpha Z)^* = \mathcal{A}(W, Z^*)$$

võrdusega

$$\langle Ff, u \rangle = \langle \Phi(\Psi J^*(f)) j_Z, u^t \rangle, \ f \in (\operatorname{ran}(j \otimes k))^*, \ u \in W \otimes Z.$$

Kuna

$$\begin{aligned} |\langle Ff, u \rangle| \leqslant \|\Phi(\Psi J^*(f))^* j_Z\|_{\mathcal{A}^t} \|u^t\|_{\alpha^t} \leqslant \|\Phi\| \|\Psi J^*(f)\|_{\mathcal{A}} \|u\|_\alpha \\ \leqslant \|\Phi\| \|\Psi\| \|J\| \|f\| \|u\|_\alpha = \|\Phi\| \|\Psi\| \|f\| \|u\|_\alpha, \end{aligned}$$

siis $F \in \mathcal{L}((\operatorname{ran}(j \otimes k))^*, (W \hat{\otimes}_\alpha Z)^*)$ ja $\|F\| \leqslant \|\Psi\|\|\Phi\|$. Kuna iga $f \in (\operatorname{ran}(j \otimes k))^*$ ja $x \in X$, $y \in Y$ korral

$$\begin{aligned}\langle Ff, x \otimes y\rangle &= \langle \Phi(\Psi J^*(f))^* j_Z, y \otimes x\rangle = (\Phi((\Psi J^*(f))^* y))(x)\\ &= ((\Psi J^*(f))^* y)(x) = (\Psi J^*(f)x)(y) = (J^*(f)x)(y)\\ &= \langle J^*(f), x \otimes y\rangle = f(J(x \otimes y)) = f(x \otimes y)\end{aligned}$$

ja $\operatorname{ran}(j \otimes k) = \overline{X \otimes Y}$, siis F on jätkuoperaator.

$\square$

Märkus 6.15. Teoreemi 6.14 erijuht, kus X ja Y on vastavalt ruumide W ja Z kinnised alamruumid, $S = j : X \to W$ ja $T = k : Y \to Z$ on ühiksisestused, $\|\Psi\| = \|\Phi\| = 1$ ja $\alpha = \varepsilon$ on injektiivne tensornorm, tõestati artiklis [9, lause 2.2].

Teoreemidest 6.1 ja 6.14 järeldub vahetult tuntud tulemus, mille esimene väide on tõestatud raamatus [18, lause 6.4] tuginedes lokaalse refleksiivsuse printsiibile ja teine väide järeldub artiklist [8, lause 2.2] (vt. märkus 7.4).

Järeldus 6.16. *Olgu X ja Y Banachi ruumid ja olgu α tensornorm. Siis $j_X \otimes j_Y$ sisestab ruumi $X \hat{\otimes}_\alpha Y$ isomeetriliselt ruumi $X^{**} \hat{\otimes}_\alpha Y^{**}$ ja leidub normi säilitav jätkuoperaator ruumist $(X \hat{\otimes}_\alpha Y)^*$ ruumi $(X^{**} \hat{\otimes}_\alpha Y^{**})^*$.*

7 Lokaalselt täiendatavad ja täiendatavad alamruumid

7.1 Lokaalne täiendatavus tensorkorrutistes

Olgu Z Banachi ruum ja Y tema kinnine alamruum. Sissejuhatuses oli defineeritud projektsioonikonstant $\lambda(Y,Z)$ võrdusega

$$\lambda(Y,Z) = \inf\{\|P\| \;:\; P \in \mathcal{L}(Z,Z) \text{ on projektor nii, et } \operatorname{ran} P = Y\}$$

kus $\lambda(Y,Z) = \infty$ siis ja ainult siis, kui Y ei ole täiendatav ruumis Z.

Definitsioon 7.1. Olgu $\lambda \geqslant 1$. Banachi ruumi Z kinnist alamruumi Y nimetatakse *lokaalselt λ-täiendatavaks* ruumis Z, kui iga lõplikumõõtmelise alamruumi $E \subset Z$ ja iga $\varepsilon > 0$ korral leidub lineaarne operaator $T : E \to Y$ nii, et $Tx = x$ iga $x \in E \cap Y$ korral ja $\|T\| \leqslant \lambda + \varepsilon$. Kui alamruum Y on lokaalselt λ-täiendatav ruumis Z mingi λ korral, siis öeldakse, et alamruum Y on *lokaalselt täiendatav* ruumis Z.

Lokaalselt täiendatava alamruumi korral defineerime *lokaalse projektsioonikonstandi* võrdusega

$$\lambda_{loc}(Y,Z) = \inf\{\lambda \geqslant 1 \;:\; Y \text{ on lokaalselt } \lambda\text{-täiendatav ruumis } Z\}.$$

On lihtne näha, et infiimum saavutatakse. Seega

$$\lambda_{loc}(Y,Z) = \min\{\lambda \geqslant 1 \;:\; Y \text{ on lokaalselt } \lambda\text{-täiendatav ruumis } Z\}.$$

Niisiis, kui alamruum Y on lokaalselt täiendatav ruumis Z, siis Y on lokaalselt $\lambda_{loc}(Y,Z)$-täiendatav. Muuhulgas $\lambda_{loc}(Y,Z) = 1$ tähendab seda, et Y on lokaalselt 1-täiendatav ruumis Z.

Tähistame $\lambda_{loc}(Y,Z) = \infty$, kui alamruum Y ei ole lokaalselt täiendatav ruumis Z.

Kui Y on täiendatav ruumis Z projektoriga P ruumist Z ruumile Y, siis $Py = y$ iga $y \in Y$ korral, mistõttu Y on lokaalselt $\|P\|$-täiendatav ruumis Z. Järelikult

$$\lambda_{loc}(Y,Z) \leqslant \lambda(Y,Z).$$

Need kaks projektsioonikonstanti võivad olla erinevad isegi juhul, kui $\operatorname{codim} Y = 1$. Näiteks, olgu E suvaline Banachi ruum ja olgu $F = c_0$ või l_p, $1 < p < \infty$. Kui $\mathcal{A}(E,F)$ on ruumi $\mathcal{L}(E,F)$ niisugune kinnine alamruum, mis sisaldab kompaktsete operaatorite alamruumi $\mathcal{K}(E,F)$, siis $\lambda_{loc}(\mathcal{K}(E,F), \mathcal{A}(E,F)) = 1$ (see järeldub Johnsoni hästituntud tulemusest [6, lemma 1]). Kui aga seejuures $\operatorname{codim} \mathcal{A}(E,F) = 1$, siis $\lambda((\mathcal{K}(E,F), \mathcal{A}(E,F)) = 2$ (vt. [11, järeldus 8]).

Allolev teoreem 7.2, mida võib pidada käesoleva magistritöö põhitulemuseks, on Grothendiecki teoreemi 1.1 kvantitatiivne tugevdus lokaalselt täiendatavate alamruumide jaoks, mis kehtib iga tensornormi α korral.

Teoreem 7.2. *Olgu X, Y, Z ja W Banachi ruumid. Olgu $S \in \mathcal{L}(X, W)$ ja $T \in \mathcal{L}(Y, Z)$ isomorfsed kujutused. Olgu α tensornorm. Kui $\operatorname{ran} S$ ja $\operatorname{ran} T$ on lokaalselt täiendatavad vastavalt ruumides W ja Z, siis $S \otimes T : X \hat{\otimes}_\alpha Y \to W \hat{\otimes}_\alpha Z$ on isomorfne kujutus, mis rahuldab võrratusi*

$$\frac{i(S)}{\lambda_{loc}(\operatorname{ran} S, W)} \cdot \frac{i(T)}{\lambda_{loc}(\operatorname{ran} T, Z)} \leqslant i(S \otimes T) \leqslant i(S) i(T)$$

ja

$$\lambda_{loc}(\operatorname{ran}(S \otimes T), W \hat{\otimes}_\alpha Z) \leqslant \lambda_{loc}(\operatorname{ran} S, W)\ \lambda_{loc}(\operatorname{ran} T, Z).$$

Tõestus. Meenutame kõigepealt mõningaid teadaolevaid tulemusi. Lokaalse refleksiivsuse printsiip (vt. näiteks [14]) väidab, et iga Banachi ruum on lokaalselt 1-täiendatav oma teises kaasruumis. Fakhoury [3, teoreem 2.14] ja Kalton [7, teoreem 3.5] tõestasid sõltumatult, tuginedes lokaalse refleksiivsuse printsiibile, et Banachi ruumi Z kinnine alamruum Y on lokaalselt täiendatav parajasti siis, kui leidub jätkuoperaator $\Psi \in \mathcal{L}(Y^*, Z^*)$. Sel juhul (vt. [14, lause 3.3]), $\lambda_{loc}(Y, Z) \leqslant \|\Psi\|$. Teiselt poolt, kui Y on lokaalselt λ-täiendatav ruumis Z, siis tuginedes Lindenstraussi tööle [10], saab näidata (vt. [3, teoreem 2.14] või [7, teoreem 3.5]), et leidub jätkuoperaator $\Psi \in \mathcal{L}(Y^*, Z^*)$ nii, et $\|\Psi\| \leqslant \lambda$. Järelikult leidub jätkuoperaator $\Psi \in \mathcal{L}(Y^*, Z^*)$ nii, et $\|\Psi\| \leqslant \lambda_{loc}(Y, Z)$, mistõttu $\|\Psi\| = \lambda_{loc}(Y, Z)$.

Ülalmainitud tulemuste tõttu on teoreemide 6.1 ja 6.14 eeldused täidetud, kusjuures leiduvad jätkuoperaatorid $\Phi \in \mathcal{L}((\operatorname{ran} S)^*, W^*)$ ja $\Psi \in \mathcal{L}((\operatorname{ran} T)^*, Z^*)$ nii, et $\|\Phi\| = \lambda_{loc}(\operatorname{ran} S, W)$ ja $\|\Psi\| = \lambda_{loc}(\operatorname{ran} T, Z)$. Seega on $S \otimes T$ teoreemide 6.1 ja 6.14 põhjal isomorfne kujutus ning soovitud võrratused kehtivad. $\square$

Järeldus 7.3. *Olgu Z ja W Banachi ruumid. Olgu X ja Y vastavalt ruumide W and Z lokaalselt 1-täiendatavad alamruumid. Olgu $j : X \to W$ ja $k : Y \to Z$ ühiksisestused. Olgu α tensornorm. Siis loomulik sisestus $j \otimes k : X \hat{\otimes}_\alpha Y \to W \hat{\otimes}_\alpha Z$ on isomeetriline kujutus ja $X \hat{\otimes}_\alpha Y$ on tensorkorrutise $W \hat{\otimes}_\alpha Z$ lokaalselt 1-täiendatav alamruum.*

Tõestus. Järeldub vahetult teoreemist 7.2, sest

$$i(j) = i(k) = \lambda_{loc}(X, W) = \lambda_{loc}(Y, Z) = 1,$$

teoreemi 7.2 võrratuste põhjal $i(j \otimes k) = 1$ ja $\lambda_{loc}(\operatorname{ran}(j \otimes k), W \hat{\otimes}_\alpha Z) \leqslant 1$ ehk

$$\lambda_{loc}(\operatorname{ran}(j \otimes k), X \hat{\otimes}_\alpha Y) = 1.$$

$\square$

Märkus 7.4. Järelduse 7.3 on tõestanud Lima [8, laused 1.2 ja 2.2] üldise tensornormi α korral ning Rao [17, teoreem 1 ja lemma 2] projektiivse ja injektiivse tensornormi korral.

7.2 Tensorkorrutise $Y^*\hat{\otimes}Y$ loomulik sisestus

Käesoleva osa põhieesmärgiks on tõestada teoreem 1.4 (vt. Sissejuhatus), mis kujutab endast Grothendiecki teoreemi 1.2(vt. Sissejuhatus) kvantitatiivset versiooni.

Olgu Z Banachi ruum, olgu Y ruumi Z kinnine alamruum ja olgu $j : Y \to Z$ ühiksisestus. Vaatleme projektiivse tensorkorrutise $Y^*\hat{\otimes}Y$ loomulikku sisestust $I_{Y^*} \otimes j : Y^*\hat{\otimes}Y \to Y^*\hat{\otimes}Z$. Grothendiecki teoreemis 1.2 eeldatakse, et Y on täiendatav oma teises kaasruumis Y^{**} ning väidetakse, et loomulik sisestus $I_{Y^*} \otimes j$ on isomorfne kujutus parajasti siis, kui alamruum Y on täiendatav ruumis Z.

Kõigepealt anname tarviliku ja piisava tingimuse selleks, et tensorkorrutise $Y^*\hat{\otimes}Y$ loomulik sisestus $I_{Y^*} \otimes j$ tensorkorrutisse $Y^*\hat{\otimes}Z$ oleks isomorfne kujutus Banachi ruumi Z mistahes kinnise alamruumi Y korral. Selleks vajame üldist abitulemust.

Lemma 7.5. *Olgu X ja Y Banachi ruumid. Olgu $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ isomorfne kujutus. Siis iga $x^* \in X^*$ korral leidub $y^* \in Y^*$ nii, et $T^*y^* = x^*$ ja*

$$\frac{1}{\|T\|}\|x^*\| \leqslant \|y^*\| \leqslant \frac{1}{i(T)}\|x^*\|.$$

Lemma tõestuse võib leida näiteks artiklist [5, lk. 109].

Teoreem 7.6 (vt. [12, teoreem 3.1])**.** *Olgu X ja Z Banachi ruumid, olgu $Y \subset Z$ kinnine alamruum ja olgu $j : Y \to Z$ ühiksisestus.*

(a) Kui leidub jätkuoperaator $\Phi \in \mathcal{L}(Y^*, Z^*)$, siis loomulik sisestus

$$I_X \otimes j : \ X\hat{\otimes}Y \to X\hat{\otimes}Z$$

on isomorfne kujutus ning kehtib võrratus

$$\frac{1}{\|\Phi\|} \leqslant i(I_X \otimes j).$$

(b) Kui loomulik sisestus $I_{Y^*} \otimes j : \ Y^*\hat{\otimes}Y \to Y^*\hat{\otimes}Z$ on isomorfne kujutus, siis leidub jätkuoperaator $\Phi \in \mathcal{L}(Y^*, Z^*)$ nii, et

$$\|\Phi\| = \frac{1}{i(I_{Y^*} \otimes j)}.$$

Tõestus. (a) Järelduse 6.6 põhjal on $I_X \otimes j$ isomorfne kujutus ning kehtib võrratus

$$\frac{1}{\|\Phi\|} \leqslant i(I_X \otimes j).$$

(b) Kasutades projektiivse tensorkorrutise kaasruumi kirjeldust, vaatleme operaatori $I_{Y^*} \otimes j$ kaasoperaatorit

$$(I_{Y^*} \otimes j)^* : \mathcal{L}(Y^*, Z^*) \to \mathcal{L}(Y^*, Y^*).$$

Loomulik sisestus $I_{Y^*} \otimes j$ on isomorfne kujutus, seega lemma 7.5 põhjal leidub operaator $\Phi \in \mathcal{L}(Y^*, Z^*) = (Y^* \hat{\otimes} Z)^*$ nii, et $(I_{Y^*} \otimes j)^* \Phi = I_{Y^*}$ ja kehtib võrratus

$$\|\Phi\| \leqslant \frac{1}{i(I_{Y^*} \otimes j)} \|I_{Y^*}\| = \frac{1}{i(I_{Y^*} \otimes j)}.$$

Kuna iga $y^* \in Y^*$ ja $y \in Y$ korral

$$(\Phi y^*)(y) = \langle \Phi, y^* \otimes y \rangle = \langle \Phi, (I_{Y^*} \otimes j)(y^* \otimes y) \rangle = \langle (I_{Y^*} \otimes j)^* \Phi, y^* \otimes y \rangle =$$

$$= \langle I_{Y^*}, y^* \otimes y \rangle = y^*(y),$$

siis Φ on jätkuoperaator. Eelnevalt tõestatud osa (a) põhjal

$$\frac{1}{\|\Phi\|} \leqslant i(I_{Y^*} \otimes j).$$

Seega kehtib ka võrdus

$$\frac{1}{\|\Phi\|} = i(I_{Y^*} \otimes j).$$

□

Teoreemi 7.6 täiendab järgmine tulemus.

Teoreem 7.7 (vt. [12, teoreem 3.4]). *Olgu Z Banachi ruum ja olgu $Y \subset Z$ kinnine alamruum. Siis järgmised väited on samaväärsed.*

(a) Loomulik sisestus tensorkorrutisest $X \hat{\otimes} Y$ tensorkorrutisse $X \hat{\otimes} Z$ on isomorfne kujutus iga Banachi ruumi X korral.

(b) Loomulik sisestus tensorkorrutisest $Y^* \hat{\otimes} Y$ tensorkorrutisse $Y^* \hat{\otimes} Z$ on isomorfne kujutus.

(c) Leidub jätkuoperaator $\Phi \in \mathcal{L}(Y^*, Z^*)$.

Sel juhul

$$i(I_{Y^*} \otimes j) \leqslant i(I_X \otimes j)$$

iga Banachi ruumi X korral ja

$$i(I_{Y^*} \otimes j) = \max\{1/\|\Phi\| : \Phi \in \mathcal{L}(Y^*, Z^*) \text{ on jätkuoperaator}\},$$

kus $j : Y \to Z$ on ühiksisestus.

Tõestus. $(a) \Rightarrow (b)$. Banachi ruumi Z kinnine alamruum Y on Banachi ruum. Ruumi Y kaasruum Y^* on Banachi ruum. Kui loomulik sisestus tensorkorrutisest $X \hat{\otimes} Y$ tensorkorrutisse $X \hat{\otimes} Z$ on isomorfne kujutus iga Banachi ruumi X korral, siis on ta isomorfne kujutus ka Y^* korral.
$(b) \Rightarrow (c)$. Olgu loomulik sisestus tensorkorrutisest $Y^* \hat{\otimes} Y$ tensorkorrutisse $Y^* \hat{\otimes} Z$ isomorfne kujutus. Siis teoreemi 7.6 osa (b) põhjal leidub jätkuoperaator $\Phi \in \mathcal{L}(Y^*, Z^*)$.
$(c) \Rightarrow (a)$. Leidugu jätkuoperaator $\Phi \in \mathcal{L}(Y^*, Z^*)$. Siis teoreemi 7.6 osa (a) põhjal

on loomulik sisestus tensorkorrutisest $X\hat{\otimes}Y$ tensorkorrutisse $X\hat{\otimes}Z$ isomorfne kujutus iga Banachi ruumi X korral.

Kehtigu samaväärsused $(a) \Leftrightarrow (b) \Leftrightarrow (c)$. Näitame, et

$$i(I_{Y^*} \otimes j) = \max\{1/\|\Phi\| : \Phi \in \mathcal{L}(Y^*, Z^*) \text{ on jätkuoperaator}\}.$$

Olgu $\Phi \in \mathcal{L}(Y^*, Z^*)$ jätkuoperaator. Siis teoreemi 7.6 osa (a) põhjal on loomulik sisestus $I_X \otimes j$ isomorfne kujutus ning

$$i(I_X \otimes j) \geqslant \frac{1}{\|\Phi\|} \tag{7}$$

iga Banachi ruumi X korral. Siis ka

$$i(I_{Y^*} \otimes j) \geqslant \frac{1}{\|\Phi\|}.$$

Järelikult

$$i(I_{Y^*} \otimes j) \geqslant \sup\{1/\|\Phi\| : \Phi \in \mathcal{L}(Y^*, Z^*) \text{ on jätkuoperaator}\}.$$

Teoreemi 7.6 osa (b) põhjal leidub jätkuoperaator $\Phi_{Y^*} \in \mathcal{L}(Y^*, Z^*)$ nii, et

$$i(I_{Y^*} \otimes j) = \frac{1}{\|\Phi_{Y^*}\|}.$$

Seega saame, et

$$i(I_{Y^*} \otimes j) = \max\{1/\|\Phi\| : \Phi \in \mathcal{L}(Y^*, Z^*) \text{ on jätkuoperaator}\}.$$

Teoreemi tõestuseks jääb veel näidata, et $i(I_{Y^*} \otimes j) \leqslant i(I_X \otimes j)$ iga Banachi ruumi X korral. Veendume selles. Kuna $\Phi_{Y^*} \in \mathcal{L}(Y^*, Z^*)$ on jätkuoperaator ja

$$i(I_{Y^*} \otimes j) = \frac{1}{\|\Phi_{Y^*}\|},$$

siis võrratuse (7) põhjal

$$\frac{1}{\|\Phi_{Y^*}\|} \leqslant i(I_X \otimes j).$$

Seega

$$i(I_{Y^*} \otimes j) \leqslant i(I_X \otimes j)$$

iga Banachi ruumi X korral. □

Lõpetuseks anname teoreemi 1.4 tõestuse.

Teoreemi 1.4 tõestus. Olgu Z Banachi ruum ja $Y \subset Z$ kinnine alamruum ning olgu $j : Y \to Z$ ühiksisestus. Eeldame, et Y on täiendatav oma teises kaasruumis Y^{**}. Tuleb tõestada, et kehtivad järgmised võrratused:

$$\frac{1}{\lambda(Y,Z)} \leqslant \frac{1}{\lambda_{loc}(Y,Z)} \leqslant i(I_{Y^*} \otimes j) \leqslant \lambda(Y,Y^{**}) \cdot \frac{1}{\lambda(Y,Z)}. \tag{8}$$

Kuna Y on täiendatav ruumis Y^{**}, siis $\lambda(Y,Y^{**}) < \infty$. Kui $i(I_{Y^*} \otimes j) = 0$, st. $I_{Y^*} \otimes j$ ei ole isomorfne kujutus, siis teoreemi 7.2 põhjal ei saa ruum Y olla lokaalselt täiendatav ruumis Z, st. $\lambda_{loc}(Y,Z) = \infty$. Seega ka $\lambda(Y,Z) = \infty$, ja vajalikud võrratused kehtivad.

Olgu $i(I_{Y^*} \otimes j) > 0$. Siis projektiivse tensorkorrutise $Y^* \hat{\otimes} Y$ loomulik sisestus $I_{Y^*} \otimes j$ projektiivsesse tensorkorrutisse $Y^* \hat{\otimes} Z$ on isomorfne kujutus, seega teoreemi 7.6 põhjal leidub jätkuoperaator $\Phi \in \mathcal{L}(Y^*, Z^*)$ nii, et

$$\frac{1}{\|\Phi\|} = i(I_{Y^*} \otimes j).$$

Operaatori Φ kaasoperaator rahuldab tingimusi

$$\Phi^* \in \mathcal{L}(Z^{**}, Y^{**}),\ (\Phi^* z^{**})(y^*) = z^{**}(\Phi y^*)\ \forall z^{**} \in Z^{**},\ \forall y^* \in Y^*.$$

Vaatleme operaatorit $\Phi^*|_Y : Y \to Y^{**}$ ehk täpsemalt operaatorit $\Phi^* j_Z j$. Siis

$$(\Phi^* y)(y^*) = (j_Z y)(\Phi y^*) = (\Phi y^*)(y) = y^*(y) = (j_Y y)(y^*)\ \forall y^* \in Y^*,\ \forall y \in Y,$$

sest Φ on jätkuoperaator. Kuna võrdus kehtib iga $y^* \in Y^*$ korral, siis saame, et

$$\Phi^* y = y\ \forall y \in Y.$$

Lisaks paneme tähele, et

$$\|\Phi^*\| = \|\Phi\| = \frac{1}{i(I_{Y^*} \otimes j)}.$$

Olgu $P \in \mathcal{L}(Y^{**}, Y^{**})$ suvaline projektor nii, et $\operatorname{ran} P = Y$. Kuna $\operatorname{ran} P \subset Y \subset Z$, siis saame vaadelda projektoriga P seotud operaatorit $p \in \mathcal{L}(Y^{**}, Z)$, mis on defineeritud võrdusega

$$py^{**} = Py^{**},\ y^{**} \in Y^{**}.$$

Nüüd $p\Phi^*|_Z \in \mathcal{L}(Z,Z)$ on projektor alamruumile Y, sest $\operatorname{ran} p\Phi^*|_Z \subset Y$ ning

$$(p\Phi^*|_Z)y = p\Phi^* y = py = Py = y\ \forall y \in Y.$$

(Kasutasime lemmat 6.12). Vaatleme projektori $p\Phi^*|_Z \in \mathcal{L}(Z,Z)$, $\operatorname{ran} p\Phi^*|_Z = Y$, normi:

$$\|p\Phi^*|_Z\| \leqslant \|p\| \|\Phi^*|_Z\| \leqslant \|P\| \|\Phi^*\| = \frac{\|P\|}{i(I_{Y^*} \otimes j)}.$$

Vastavalt projektsioonikonstandi definitsioonile kehtib seega võrratus

$$\lambda(Y, Z) \leqslant \|p\Phi^*|_Z\| \leqslant \frac{\|P\|}{i(I_{Y^*} \otimes j)},$$

mistõttu

$$\lambda(Y, Z) i(I_{Y^*} \otimes j) \leqslant \|P\|.$$

Kuna viimane võrratus kehtib iga projektori $P \in \mathcal{L}(Y^{**}, Y^{**})$, $\operatorname{ran} P = Y$, korral, siis

$$\lambda(Y, Z) i(I_{Y^*} \otimes j) \leqslant \lambda(Y, Y^{**})$$

ehk

$$i(I_{Y^*} \otimes j) \leqslant \lambda(Y, Y^*) \cdot \frac{1}{\lambda(Y, Z)}.$$

Teoreemi 7.2 põhjal saame ka, et

$$\frac{1}{\lambda(Y, Z)} \leqslant \frac{1}{\lambda_{loc}(Y, Z)} \leqslant i(I_{Y^*} \otimes j).$$

Veendume lõpuks, et võrratustest (8) järeldub, et järgmised väited on samaväärsed:
(a) $I_{Y^*} \otimes j$ on isomorfne kujutus,
(b) Y on täiendatav ruumis Z,
(c) Y on lokaalselt täiendatav ruumis Z.
Tõepoolest, kui kehtib (a), siis $i(I_{Y^*} \otimes j) > 0$, mistõttu $\lambda(Y, Z) \neq \infty$, st. kehtib ($b$). Kuid sel juhul $\lambda_{loc}(Y, Z) \neq \infty$, st. kehtib ($c$), mistõttu $i(I_{Y^*} \otimes j) > 0$, st. kehtib (a).
Teoreem 1.4 on tõestatud.

□

Järeldus 7.8. *Olgu Z Banachi ruum, olgu Y ruumi Z kinnine alamruum ja olgu $j : Y \to Z$ ühiksisestus. Kui Y on refleksiivne, siis järgmised väited on samaväärsed.*

(a) Projektiivse tensorkorrutise $Y^* \hat{\otimes} Y$ loomulik sisestus projektiivsesse tensorkorrutisse $Y^* \hat{\otimes} Z$ on isomorfne kujutus.

(b) Alamruum Y on lokaalselt täiendatav ruumis Z.

(c) Alamruum Y on täiendatav ruumis Z.

Sel juhul kehtivad võrdused

$$i(I_{Y^*} \otimes j) = \frac{1}{\lambda_{loc}(Y, Z)} = \frac{1}{\lambda(Y, Z)}.$$

Tõestus. Teatavasti nimetatakse Banachi ruumi Y refleksiivseks, kui $j_Y(Y) = Y^{**}$ ehk $Y = Y^{**}$. Siis Y on ilmselt täiendatav oma teises kaasruumis $Y^{**} = Y$, kusjuures projektoriks P on ühikoperaator I_Y. Seega $\lambda(Y, Y^{**}) = \lambda(Y, Y) = 1$ ning me saame rakendada teoreemi 1.4. Väidete (a)–(c) samaväärsus kehtib teoreemi 1.4 põhjal. Teoreemi 1.4 võrratused (8) omandavad kuju

$$\frac{1}{\lambda(Y,Z)} \leqslant \frac{1}{\lambda_{loc}(Y,Z)} \leqslant i(I_{Y^*} \otimes j) \leqslant \frac{1}{\lambda(Y,Z)}$$

ehk

$$i(I_{Y^*} \otimes j) = \frac{1}{\lambda_{loc}(Y,Z)} = \frac{1}{\lambda(Y,Z)}.$$

□

Järeldus 7.8 rakendub näiteks juhul, kui $Y = l_p$ või $Y = L_p(a,b)$, kus $1 < p < \infty$. Sel juhul $Y^* = l_q$ või vastavalt $Y^* = L_q(a,b)$, kus $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Summary

Into isomorphisms in tensor products of Banach spaces

Vaiki Randala

Grothendieck proved, in his famous Memoir [4, Chapter I, p. 40, Corollaries 1 and 2], the following two results for complemented subspaces.

Theorem 1.1 (Grothendieck)**.** *Let X, Y, Z, and W be Banach spaces. Let $S : X \to W$ and $T : Y \to Z$ be into isomorphisms. If $\operatorname{ran} S$ is complemented in W and $\operatorname{ran} T$ is complemented in Z, then $S \otimes T : X\hat{\otimes}Y \to W\hat{\otimes}Z$ is an into isomorphism.*

Theorem 1.2 (Grothendieck)**.** *Let Y be a closed subspace of a Banach space Z and let $j : Y \to Z$ denote the identity embedding. Assume that Y is complemented in its bidual Y^{**}. Then the natural inclusion $I_{Y^*} \otimes j : Y^*\hat{\otimes}Y \to Y^*\hat{\otimes}Z$ is an into isomorphism if and only if Y is complemented in Z.*

It is well known that $\|S\otimes T\| = \|S\|\|T\|$. Thus, by Theorem 1.1, there exists $c > 0$ such that

$$c\|u\|_\pi \leqslant \|(S \otimes T)u\|_\pi \leqslant \|S\|\|T\|\|u\|_\pi \quad \forall u \in X\hat{\otimes}Y.$$

Theorem 1.1 does not provide more information about the size of the constant c. In particular, it does not provide any estimate from below of the injection modulus $i(S\otimes T)$ of the into isomorphism $S\otimes T$. Neither Theorem 1.2 gives any estimate from below of $i(I_{Y^*} \otimes j)$.

The main purpose of the present master thesis is to establish a quantitative strengthening of Theorem 1.1 and a quantitative version of Theorem 1.2. This will be done in the following Theorems 1.3 and 1.4, respectively.

Theorem 1.3. *Let X, Y, Z, and W be Banach spaces. Let $S \in \mathcal{L}(X,W)$ and $T \in \mathcal{L}(Y,Z)$. If there exist extension operators $\Phi \in \mathcal{L}((\operatorname{ran} S)^*, W^*)$ and $\Psi \in \mathcal{L}((\operatorname{ran} T)^*, Z^*)$, then $S \otimes T : X\hat{\otimes}Y \to W\hat{\otimes}Z$ satisfies*

$$\frac{1}{\|\Phi\|\|\Psi\|} i(S)i(T) \leqslant i(S \otimes T) \leqslant i(S)i(T).$$

Theorem 1.4. *Let Y be a closed subspace of a Banach space Z and let $j : Y \to Z$ denote the identity embedding. Assume that Y is complemented in its bidual Y^{**}. Then the following inequalities hold:*

$$\frac{1}{\lambda(Y,Z)} \leqslant \frac{1}{\lambda_{loc}(Y,Z)} \leqslant i(I_{Y^*} \otimes j) \leqslant \lambda(Y,Y^{**}) \cdot \frac{1}{\lambda(Y,Z)}.$$

In particular, $I_{Y^*} \otimes j$ is an into isomorphism if and only if Y is complemented in Z if and only if Y is locally complemented in Z.

The master thesis consists of seven sections.

Section 1 is an introduction. The purpose of Sections 2–5 is to develop the treatment of tensor products of Banach spaces to the level where Grothendieck's theorems and the results of the master thesis would be comprehensible. Theorem 1.3 and Theorem 1.4 will be proven in Section 6 and Section 7, respectively. Our Theorem 6.1 (see Section 6) shows that Theorem 1.3 actually holds for any tensor norm α. This is useful in the context of the Chevet–Saphar tensor products, for instance. Theorem 6.1 is developed further to prove, in Theorem 6.14, the existence of an extension operator for the pair $\operatorname{ran}(S \otimes T) \subset W \hat{\otimes}_\alpha Z$. Applications of Theorem 6.1 and Theorem 6.14 to locally complemented and complemented subspaces of tensor products are presented in Section 7.

Kirjandus

[1] J. Diestel, J. Fourie, J. Swart, *The projective tensor product I,* Contemp. Math. **321** (2003), 37–65.

[2] J. Diestel, J.J. Uhl, *Vector Measures,* Mathematical Surveys 15. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1977.

[3] H. Fakhoury, *Sélections linéaires associées au théorème de Hahn-Banach,* J. Funct. Anal. **11** (1972), 436–452.

[4] A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires,* Mem. Amer. Math. Soc. **16** (1955).

[5] R. Haller, E. Oja, E. Plewnia, *Quantitative versions of hereditary results on M-ideals of compact operators,* Math. Nachr. **246–247** (2002), 106–120.

[6] J. Johnson, *Remarks on Banach spaces of compact operators,* J. Funct. Anal. **32** (1979), 304–311.

[7] N.J. Kalton, *Locally complemented subspaces and $\mathcal{L}_p$-spaces for* $0 < p < 1$, Math. Nachr. **115** (1984), 71–97.

[8] V. Lima, *Ideal-structure in tensor products,* preprint, 2006.

[9] Å. Lima and E. Oja, *Ideals of compact operators,* J. Aust. Math. Soc. **77** (2004), 91–110.

[10] J. Lindenstrauss, *Extension of compact operators,* Mem. Amer. Math. Soc. **48** (1964).

[11] J. Lippus, E. Oja, *On the norm of a projection onto the space of compact operators,* Studia Math. **182** (2007), 263–272.

[12] E. Oja, *Operators that are nuclear whenever they are nuclear for a larger range space,* Proc. Edinburgh Math. Soc. **47** (2004), 679–694.

[13] E. Oja, P. Oja, *Funktsionaalanalüüs,* Tartu Ülikool, Tartu, 1991.

[14] E. Oja, M. Põldvere, *Principle of local reflexivity revisited,* Proc. Amer. Math. Soc. **135** (2007), 1081–1088.

[15] A. Pietsch, *Operator Ideals,* North-Holland, Amsterdam, 1980.

[16] N. Randrianantoanina, *Complemented copies of ℓ^1 and Pełczyński's property (V^*) in Bochner function spaces,* Canad. J. Math. **48** (1996), 625–640.

[17] T.S.S.R.K. Rao, *On ideals in Banach spaces,* Rocky Mountain J. Math. **31** (2001), 595–609.

[18] R.A. Ryan, *Introduction to Tensor Products of Banach Spaces,* Springer, London-Berlin-Heidelberg, 2002.

[19] P. Wojtaszczyk, *Banach Spaces for Analysts,* Cambridge Studies in Advanced Mathematics 25, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.