Tartu Ülikool
Loodus- ja täppisteaduste valdkond
Matemaatika ja statistika instituut

Mathilda Rebane

Daugaveti- ja delta-punktide kirjeldused Lipschitzi-vabades Banachi ruumides

Matemaatika eriala
Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendajad: Rainis Haller
Triinu Veeorg

Tartu 2025

Daugaveti- ja delta-punktide kirjeldused Lipschitzi-vabades Banachi ruumides

Bakalaureusetöö
Mathilda Rebane

Lühikokkuvõte. Käesolevas bakalaureusetöös esitatakse üksikasjalikult artikli

> T. Veeorg, *Characterizations of Daugavet points and delta-points in Lipschitz-free spaces*, Studia Math. 268 (2023), 213–233.

põhitulemused. **CERCS teaduseriala:** P140 Jadad, Fourier' analüüs, funktsionaalanalüüs.
Märksõnad: Banachi ruumid, normeeritud ruumid, Lipschitzi funktsioonid.

Characterizations of Daugavet and delta-points in Lipschitz-free spaces

Bachelor's thesis
Mathilda Rebane

Abstract. In this bachelor's thesis, we provide detailed proofs of the main results of the following article:

> T. Veeorg, *Characterizations of Daugavet points and delta-points in Lipschitz-free spaces*, Studia Math. 268 (2023), 213–233.

CERCS research specialisation: P140 Series, Fourier analysis, functional analysis.
Keywords: Banach spaces, normed spaces, Lipschitz functions.

Sisukord

Sissejuhatus

Käesolev bakalaureusetöö on funktsionaalanalüüsi valdkonda kuuluv referatiivne uurimus. Töös uuritakse Daugaveti- ja delta-punkte Lipschitzi-vabades Banachi ruumides, eesmärgiga käsitleda üksikasjalikult artikli [10] põhitulemusi. Viidatud artikkel on oluline jätku-uuring tööle [9], mis oli esimene põhjalik Daugaveti- ja delta-punktide käsitlus Lipschitzi-vabades Banachi ruumides.

Bakalaureusetöö koosneb neljast peatükist. Esimeses peatükis antakse vajalikud definitsioonid ja eeltulemused, mis on põhiosa mõistmiseks tarvilikud. Järgnevad peatükid järgivad aluseks võetud artikli struktuuri ja teemajaotust.

Teises peatükis tõestatakse, et Lipschitzi-vaba ruumi ühiksfääri element on Daugaveti-punkt parajasti siis, kui ta asub kõigist ühikkera hammaspunktidest kaugusel 2. Tulemus, et Daugaveti-punkt on alati kõigist hammaspunktidest kaugusel 2, on teada juba artiklist [9], kus tõestati ka selle pöördväide erijuhul, kui Lipschitzi-vaba ruumi aluseks olev meetriline ruum on kompaktne. Artiklis [10] (ja seega ka käesolevas töös) on see (piisavuse) osa laiendatud kõigile meetrilistele ruumidele.

Kolmandas peatükis antakse näide meetrilisest ruumist, millele vastaval Lipschitzi-vabal ruumil on ühtaegu nii Radon–Nikodými omadus kui ka Daugaveti-punkt. Selline näide on märkimisväärne (ja spetsialistide hinnangul üllatav), kuna Daugaveti omadus (mille korral kõik ühiksfääri elemendid Daugaveti-punktid) on olemuselt diametraalselt erinev Radon–Nikodými omadusest.

Neljandas peatükis keskendume delta-punktidele Lipschitzi-vabades ruumides. Iga Daugaveti-punkt on ühtlasi ka delta-punkt, kuid Lipschitzi-vabas ruumis ei pruugi delta-punkt olla Daugaveti-punkt (vt [9, näide 4.4]). On teada, et molekul m_{xy} on delta-punkt parajasti siis, kui iga $\varepsilon > 0$ ja ühikkera viilu S korral, mis sisaldab molekuli m_{xy}, leiduvad $u, v \in M$ nii, et $u \neq v$, $m_{uv} \in S$ ning $d(u, v) < \varepsilon$ (vt [9, teoreem 4.7]). Kuigi ei ole teada, kas sama kirjeldus kehtib ka kõigi ühiksfääri elementide puhul, on piisavuse osa võimalik sarnaselt tõestada iga ühiksfääri elemendi μ korral. Neljandas peatükis tõestatakse ka tarvilikkuse osa üldistus juhul, kus molekul on asendatud molekulide kumera kombinatsiooniga, mille norm on 1.

Bakalaureusetöös vaatleme ainult reaalseid normeeritud ruume. Kasutame normeeritud ruumide teooria tavalisi tähistusi. Olgu X normeeritud ruum. Tema kinnist ühikkera, ühiksfääri ja kaasruumi tähistame vastavalt B_X, S_X ja X^*. Tähistega $B(x, r)$ märgime kinnist kera keskpunktiga x ja raadiusega r.

1 Vajalikud eelteadmised

1.1 Lipschitzi funktsioonide Banachi ruum $\mathrm{Lip}_0(M)$

Definitsioon 1.1. Olgu (M, d) meetriline ruum ja $f\colon M \to \mathbb{R}$. Funktsioon f rahuldab *Lipschitzi tingimust*, kui leidub $L \geqslant 0$ nii, et mis tahes kahe elemendi $x, y \in M$ korral

$$|f(x) - f(y)| \leqslant L \cdot d(x, y);$$

vähimat sellist arvu L tähistame $\mathrm{Lip}(f)$ ja nimetame f *Lipschitzi konstandiks*.

Lause 1.2 ([12, lause 1.32]). *Mis tahes Lipschitzi funktsioonide $g, h\colon M \to \mathbb{R}$ korral on Lipschitzi funktsioonid ka $M \to \mathbb{R}$, $p \mapsto \min\{g(p), h(p)\}$ ja $p \mapsto \max\{g(p), h(p)\}$ kusjuures nende Lipschitzi konstandid ei ületa arvu $\max\{\mathrm{Lip}(g), \mathrm{Lip}(h)\}$.*

Teoreem 1.3 (McShane'i jätkamisteoreem, vt nt [12, teoreem 1.33]). *Olgu M meetriline ruum, N tema alamruum ja $g\colon N \to \mathbb{R}$ Lipschitzi tingimust rahuldav funktsioon. Leidub funktsiooni g Lipschitzi tingimust rahuldav jätk $f\colon M \to \mathbb{R}$ nii, et $\mathrm{Lip}(f) = \mathrm{Lip}(g)$.*

Definitsioon 1.4. *Nullpunktiga meetriline ruum* on meetriline ruum, milles on fikseeritud üks nullpunktiks nimetatud element, mida tähistame sümboliga 0.

Olgu M nullpunktiga meetriline ruum ja olgu $\mathrm{Lip}_0(M)$ kõigi selliste Lipschitzi tingimust rahuldavate kujutuste $M \to \mathbb{R}$ hulk, mille korral $0 \mapsto 0$. Hulk $\mathrm{Lip}_0(M)$ on Banachi ruum punktiviisi defineeritud vektorruumi tehete ja normi $\|f\|_{\mathrm{Lip}} = \mathrm{Lip}(f)$ suhtes.

Definitsioon 1.5. Banachi ruumi $\mathrm{Lip}_0(M)$ nimetatakse *Lipschitzi funktsioonide (Banachi) ruumiks*.

On teada, et Lipschitzi funktsioonide ruum on kaasruum ja tema loomulikuks eelruumiks on Lipschitzi-vaba ruum.

1.2 Lipschitzi-vaba Banachi ruum $\mathcal{F}(M)$

Olgu (M, d) nullpunktiga meetriline ruum. Tähistame $x \in M$ korral sümboliga δ_x kaasruumi $\mathrm{Lip}_0(M)^*$ elemendi $f \mapsto f(x)$.

Definitsioon 1.6. Kaasruumi $\mathrm{Lip}_0(M)^*$ alamruumi $\overline{\mathrm{span}}\{\delta_x : x \in M\}$ nimetatakse Lipschitzi-vabaks (Banachi) ruumiks (üle M) ja tähistatakse $\mathcal{F}(M)$.

Lipschitzi-vaba ruumi $\mathcal{F}(M)$ elementi $\frac{\delta_x - \delta_y}{d(x,y)}$, kus $x, y \in M$ ja $x \neq y$, nimetatakse *molekuliks* ja tähistatakse m_{xy}.

1.3 Daugaveti-punkti, deltapunkti ja hammaspunkti mõisted

Olgu X mittetriviaalne Banachi ruum üle $\mathbb{R}$.

Definitsioon 1.7. Ühikkera B_X *viil* on X osahulk kujul

$$S(x^*, \alpha) := \{x \in B_X : x^*(x) > 1 - \alpha\},$$

kus $x^* \in S_{X^*}$ ja $\alpha > 0$.

Definitsioon 1.8. Olgu $x \in S_X$. Ütleme, et x on

- B_X *hammaspunkt*, kui ühikkeral B_X leidub kui tahes väikese diameetriga viil, mis sisaldab punkti x; kõigi B_X hammaspunktide hulka tähistame $\mathrm{dent}(B_X)$;
- *Daugaveti-punkt*, kui ühikkera B_X iga viilu S ja iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $y \in S$ nii, et $\|x - y\| \geqslant 2 - \varepsilon$;
- Δ-*punkt* ehk *delta-punkt*, kui iga punkti x sisaldava B_X viilu S ja iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $y \in S$ nii, et $\|x - y\| \geqslant 2 - \varepsilon$.

Märkus. Iga Daugaveti-punkt on Δ-punkt.

Lause 1.9 ([9, lause 3.1]). *Olgu $x \in S_X$ Daugaveti-punkt. Iga $y \in \mathrm{dent}(B_X)$ korral $\|x - y\| = 2$.*

Tõestus. Olgu $y \in \mathrm{dent}(B_X)$. Ilmselt $\|x - y\| \leqslant 2$. Oletame, et $\|x - y\| < 2$ ja näitame, et tekib vastuolu. Olgu $\varepsilon > 0$ selline, et $\|x - y\| < 2 - \varepsilon$. Olgu S selline ühikkera B_X viil, et $y \in S$ ja $\mathrm{diam}(S) < \varepsilon/2$. Kuna x on Daugaveti-punkt, peab leiduma $z \in S$ nii, et $\|x - z\| \geqslant 2 - \varepsilon/2$. Teiselt poolt peab sellise z puhul kehtima $\|y - z\| \leqslant \mathrm{diam}(S) < \varepsilon/2$, seega saame

$$\|x - z\| \leqslant \|x - y\| + \|y - z\| < (2 - \varepsilon) + \varepsilon/2 = 2 - \varepsilon/2,$$

mistõttu $\|x - z\| < 2 - \varepsilon/2$. Jõudsime vastuoluni, järelikult on $\|x - y\| = 2$. □

1.4 Abitulemused

Lemma 1.10 ([10, lemma 1.1]). *Olgu $\mu \in S_{\mathcal{F}(M)}$. Iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $\delta > 0$ nii, et kui $u, v \in M$ ja $0 < d(u, v) < \delta$, siis $\|\mu - m_{uv}\| \geqslant 2 - \varepsilon$.*

Märkus. Artiklis [10] on see lemma esitatud tõestuseta ja märgitud, et see on [9, teoreemi 2.6] ekvivalentne ümbersõnastus. Bakalaureusetöö täielikkuse huvides esitame lemma tõestuse [9, teoreemi 2.6] tõestuse eeskujul.

Tõestus. Lipschitzi-vaba ruumi mõiste kohaselt on $\mu \in \overline{\operatorname{span}}\{\delta_x : x \in M\}$, seega $\mu \in \operatorname{span}\{\delta_x : x \in M\}$ või μ on alamruumi $\operatorname{span}\{\delta_x : x \in M\}$ (normeeritud) elementidega lähendatav. Järelikult piisab vaadelda ainult juhtu $\mu \in \operatorname{span}\{\delta_x : x \in M\}$. Seega eeldamegi, et μ on mingite elementide $\delta_{x_1}, \dots, \delta_{x_n}$ lineaarkombinatsioon, kus $x_1, \dots, x_n \in M$, ning tähistame $N = \{x_1, \dots, x_n\} \cup \{0\}$ ja $\alpha = \min\{d(x,y) : x, y \in N, x \neq y\}$.

Oletame, et leidub $\varepsilon > 0$ nii, et iga $\delta > 0$ korral leiduvad $u, v \in M$ nii, et $0 < d(u,v) < \delta$ ja $\|\mu - m_{uv}\| < 2 - \varepsilon$. Fikseerime ühe sellise arvu $\varepsilon \in (0,1)$. Lemma on tõestatud, kui jõuame vastuoluni.

Tehtud oletuse kohaselt leiduvad $u, v \in M$ nii, et

$$0 < d(u,v) < \frac{1}{2}\varepsilon\alpha \quad \text{ja} \quad \|\mu - m_{uv}\| < 2 - \varepsilon.$$

Kui $x, y \in N$ ja $x \neq y$, siis

$$2d(u,v) < 2\frac{1}{2}\varepsilon\alpha \leqslant \varepsilon d(x,y),$$

mistõttu

$$\begin{aligned} d(x,y) + d(u,v) &\leqslant d(x,u) + d(y,v) + 2d(u,v) \\ &< d(x,u) + d(y,v) + \varepsilon d(x,y), \end{aligned}$$

järelikult

$$(1-\varepsilon)d(x,y) + d(u,v) < d(x,u) + d(y,v).$$

Olgu $f \in S_{\mathrm{Lip}_0(M)}$ selline, et $f(\mu) = 1$ (niisugune f leidub Hahn–Banachi teoreemi põhjal). Vaatleme Lipschitzi funktsiooni $g\colon N \cup \{u,v\} \to \mathbb{R}$, kus $g|_N = f|_N$ ning

$$g(u) = \max_{x \in N} \Big(g(x) - \frac{1}{1-\varepsilon} d(x,u) \Big)$$

ja

$$g(v) = \min_{y \in N \cup \{u\}} \Big(g(y) + \frac{1}{1-\varepsilon} d(y,v) \Big).$$

Vahetult on kontrollitav, et $\mathrm{Lip}(g) \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon}$.

Näitame, et $g(v) - g(u) \geqslant \frac{1}{1-\varepsilon} d(u,v)$. Olgu $x \in N$ ja $y \in N \cup \{u\}$ sellised, et $g(u) = g(x) - \frac{1}{1-\varepsilon} d(x,u)$ ja $g(v) = g(y) + \frac{1}{1-\varepsilon} d(y,v)$. Vaatleme eraldi juhtusid $y = u$ ja $y \in N$. Kui $y = u$, siis

$$g(v) - g(u) = \Big(g(u) + \frac{1}{1-\varepsilon} d(u,v) \Big) - g(u) = \frac{1}{1-\varepsilon} d(u,v).$$

Kui $y \in N$, siis

$$\begin{aligned} g(v) - g(u) &= \big(f(y) - \frac{1}{1-\varepsilon} d(y,v)\big) - \big(f(x) + \frac{1}{1-\varepsilon} d(x,u)\big) \\ &= f(y) - f(x) + \frac{1}{1-\varepsilon}\big(d(x,u) + d(y,v)\big) \\ &> f(x) - f(y) + d(x,y) + \frac{1}{1-\varepsilon} d(u,v) \\ &\geqslant \frac{1}{1-\varepsilon} d(u,v). \end{aligned}$$

Olgu $h\colon M \to \mathbb{R}$ funktsiooni g jätk, mille puhul $\operatorname{Lip}(h) = \operatorname{Lip}(g)$ (selline jätk leidub näiteks teoreemi 1.3 põhjal). Paneme tähele, et

$$\begin{aligned} 2 - \varepsilon > \|\mu - m_{uv}\| &\geqslant \frac{h}{\|h\|}(\mu - m_{uv}) \\ &= \frac{1}{\operatorname{Lip}(g)}\big(g(\mu) - \frac{g(u) - g(v)}{d(u,v)}\big) \\ &\geqslant (1-\varepsilon)\big(1 + \frac{1}{1-\varepsilon}\big) = 2 - \varepsilon, \end{aligned}$$

järelikult $2 - \varepsilon > 2 - \varepsilon$, mis on vastuolu. $\square$

Lemma 1.11 ([10, lemma 1.2]). *Olgu $x, y, u, v \in M$ sellised, et $x \neq y$ ja $u \neq v$ ning olgu $\varepsilon > 0$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) $\|m_{xy} + m_{uv}\| \geqslant 2 - \varepsilon$;

(ii) $d(x,v) + d(u,y) \geqslant d(x,y) + d(u,v) - \varepsilon \max\{d(x,y), d(u,v)\}$.

Tingimustes (i) *ja* (ii) *kehtib võrdus samaaegselt ning sel juhul kehtib võrdus*

$$\|m_{xy} + m_{uv}\| = \frac{|d(x,y) - d(u,v)| + d(x,v) + d(u,y)}{\max\{d(x,y), d(u,v)\}}.$$

Tõestus. Vaatleme ainult juhtu $d(x,y) \geqslant d(u,v)$, sest lemma on sümmeetriline punktipaaride (x,y) ja (u,v) (vahetuse) suhtes.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Eeldame, et $\|m_{xy} + m_{uv}\| \geqslant 2 - \varepsilon$. Siis

$$\begin{aligned}
2 - \varepsilon \leqslant \|m_{xy} + m_{uv}\| &= \left\| \frac{\delta_x - \delta_y}{d(x,y)} + \frac{\delta_u - \delta_v}{d(u,v)} \right\| \\
&= \frac{\left\| d(u,v)\big(\delta_x - \delta_v + \delta_u - \delta_y\big) + \big(d(x,y) - d(u,v)\big)(\delta_u - \delta_v) \right\|}{d(x,y)d(u,v)} \\
&\leqslant \frac{d(u,v)\big(\|\delta_x - \delta_v\| + \|\delta_u - \delta_y\|\big) + \big(d(x,y) - d(u,v)\big)\|\delta_u - \delta_v\|}{d(x,y)d(u,v)} \\
&\leqslant \frac{d(u,v)\big(d(x,v) + d(u,y)\big) + \big(d(x,y) - d(u,v)\big)d(u,v)}{d(x,y)d(u,v)} \\
&= \frac{d(x,v) + d(u,y) + d(x,y) - d(u,v)}{d(x,y)}.
\end{aligned}$$

Järelikult

$$\begin{aligned}
d(x,v) + d(u,y) &\geqslant (1-\varepsilon)d(x,y) + d(u,v) \\
&= d(x,y) + d(u,v) - \varepsilon \max\{d(x,y), d(u,v)\},
\end{aligned}$$

s.t kehtib (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i). Eeldame, et

$$d(x,v) + d(u,y) \geqslant d(x,y) + d(u,v) - \varepsilon \max\{d(x,y), d(u,v)\}$$

ehk

$$d(v,x) + d(y,u) - d(u,v) \geqslant (1-\varepsilon)d(x,y).$$

Vaatleme funktsiooni $f\colon M \to \mathbb{R}$,

$$f(p) = \min\{d(y,p), d(v,p) + d(y,u) - d(u,v)\} + a,$$

kus konstant $a \in \mathbb{R}$ on valitud nii, et $f(0) = 0$.

Lause 1.2 järgi on $f \in \mathrm{Lip}(M)$ ja $\|f\| \leqslant 1$, sest funktsioonid $g\colon p \mapsto d(y,p)$ ja $h\colon p \mapsto d(v,p) + d(y,u) - d(u,v)$ on Lipschitzi funktsioonid, kusjuures $\mathrm{Lip}(g) = \mathrm{Lip}(h) = 1$.

Eelduse põhjal

$$f(x) = \min\{d(y,x), d(v,x) + d(y,u) - d(u,v)\} + a \geqslant (1-\varepsilon)d(x,y) + a.$$

Lisaks märgime, et

$$\begin{aligned}
f(y) &= \min\{0, d(v,y) + d(y,u) - d(u,v)\} + a = a, \\
f(u) &= \min\{d(y,u), d(v,u) + d(y,u) - d(u,v)\} + a = d(y,u) + a, \\
f(v) &= \min\{d(y,v), 0 + d(y,u) - d(u,v)\} + a = d(y,u) - d(u,v) + a.
\end{aligned}$$

Seega

$$
\begin{aligned}
\|m_{xy} + m_{uv}\| \geqslant f(m_{xy} + m_{uv}) &= \frac{f(x) - f(y)}{d(x,y)} + \frac{f(u) - f(v)}{d(u,v)} \\
&\geqslant \frac{\big((1-\varepsilon)d(x,y) + a\big) - a}{d(x,y)} \\
&\qquad + \frac{\big(d(y,u) + a\big) - \big(d(y,u) - d(u,v) + a\big)}{d(u,v)} \\
&= (1-\varepsilon) + 1 = 2 - \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Järelikult kehtib (i).

Sellega on tingimuste (i) ja (ii) samaväärsus tõestatud. Kusjuures tõestuse põhjal kehtivad võrratustes (i) ja (ii) ranged võrratused samaaegselt, järelikult kehtivad neis ka võrdused samaaegselt. Kui mõlemad võrdused kehtivad, siis

$$
\begin{aligned}
\|m_{xy} + m_{uv}\| = 2 - \varepsilon &= 2 - \frac{d(x,y) + d(u,v) - d(x,v) - d(u,y)}{\max\{d(x,y), d(u,v)\}} \\
&= \frac{2d(x,y) - \big(d(x,y) + d(u,v) - d(x,v) - d(u,y)\big)}{\max\{d(x,y), d(u,v)\}} \\
&= \frac{d(x,y) - d(u,v) + d(x,v) + d(u,y)}{\max\{d(x,y), d(u,v)\}} \\
&= \frac{|d(x,y) - d(u,v)| + d(x,v) + d(u,y)}{\max\{d(x,y), d(u,v)\}}. \qquad \square
\end{aligned}
$$

2 Lipschitzi-vaba ruumi Daugaveti-punktide kirjeldus

Käesoleva alapunkti põhieesmärgiks on esitada üksikasjalikult järgmise teoreemi tõestus.

Teoreem 2.1 ([10, teoreem 2.1]). *Olgu $\mu \in S_{\mathcal{F}(M)}$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *μ on Daugaveti-punkt;*

(ii) *iga $\nu \in \operatorname{dent}(B_{\mathcal{F}(M)})$ korral $\|\mu - \nu\| = 2$;*

(iii) *kui $u, v \in M$, kus $u \neq v$, ja $r, s > 0$ jaoks leidub $\delta > 0$ nii, et*

$$[u, v]_\delta \subset B\big(u, rd(u, v)\big) \cup B\big(v, sd(u, v)\big),$$

siis $\|\mu - m_{uv}\| \geqslant 2 - 2r - 2s$.

Teoreemi tingimuses (iii) kasutasime tähistust

$$[u, v]_\delta := \{x \in M : d(u, x) + d(x, v) < d(u, v) + \delta\},$$

kus $u, v \in M$ ja $\delta > 0$. Teoreemi tõestamisel rakendame järgmisi abitulemusi.

Lemma 2.2 ([10, lemma 2.2]). *Olgu $u, v \in M$ ja $\delta > 0$ ning olgu $x \in [u, v]_\delta$. Siis leidub selline $\delta' > 0$, et*

$$[u, x]_{\delta'} \cup [x, v]_{\delta'} \subset [u, v]_\delta.$$

Tõestus. Kuna $x \in [u, v]_\delta$ ehk

$$d(u, x) + d(x, v) < d(u, v) + \delta,$$

siis leidub $\delta' \in (0, \delta)$ nii, et

$$d(u, x) + \delta' + d(x, v) < d(u, v) + \delta.$$

Sellise δ' ja suvalise $y \in [u, x]_{\delta'}$ korral saame

$$\begin{aligned} d(u, y) + d(y, v) &< \big(d(u, x) + \delta' - d(x, y)\big) + d(y, v) \\ &\leqslant d(u, x) + \delta' + d(x, v) \\ &< d(u, v) + \delta, \end{aligned}$$

järelikult $[u, x]_{\delta'} \subset [u, v]_\delta$ ning sümmeetria põhjal ka $[x, v]_{\delta'} \subset [u, v]_\delta$. □

Lemma 2.3 ([10, lemma 2.3]). *Olgu $u, v \in M$ ja $\delta > 0$ ning lisaks olgu $r, s > 0$ sellised, et*

$$[u, v]_\delta \subset B(u, r) \cup B(v, s).$$

Iga $\varepsilon > 0$ korral leiduvad $x \in B(u, r)$, $y \in B(v, s)$ ja $\delta' > 0$ nii, et

(1) $d(u, x) + d(x, y) + d(y, v) + \delta' < d(u, v) + \delta$;

(2) $[x, y]_{\delta'} \subset [u, v]_\delta$;

(3) $d(x, y) \leqslant d(u, v)$;

(4) $[x, y]_{\delta'} \subset B(x, \varepsilon) \cup B(y, \varepsilon)$.

Tõestus. Fikseerime vabalt $\varepsilon > 0$. Vaatleme kõigepealt juhtu, kus $\delta < \varepsilon$. Olgu $\alpha > 0$ selline, et $\delta + \alpha < \varepsilon$. Näitame esmalt, et hulk

$$\{t \geqslant 0 : [u, v]_\delta \subset B(u, t) \cup B(v, s)\}$$

sisaldab oma alumist raja r' ehk

$$[u, v]_\delta \subset B(u, r') \cup B(v, s).$$

Ilmselt on $0 \leqslant r' \leqslant r$ ja iga $t > r'$ puhul

$$[u, v]_\delta \subset B(u, t) \cup B(v, s).$$

Olgu $p \in [u, v]_\delta$. Siis kas $p \in B(v, s)$ või $p \in B(u, t)$ iga $t > r'$ korral. Vaatleme viimast juhtu, kusjuures eeldame, et $p \notin B(v, s)$. Kui $p \notin B(u, r')$ ehk $d(p, u) > r'$, siis $d(p, u) > t$ mingi $t > r'$ korral ehk $p \notin B(u, t)$ ning seega peab kehtima $p \in B(v, s)$, mis on vastuolus eeldusega. Järelikult $p \in B(u, r')$.

Juhul $r' \leqslant \varepsilon$ võtame $x = u$. Vastasel juhul (s.t juhul $r' > \varepsilon$) fikseerime vabalt

$$x \in [u, v]_\delta \setminus \big(B(u, r' - \alpha) \cup B(v, s)\big),$$

kusjuures paneme tähele, et ilmselt $r' > \varepsilon > \alpha$ ja $[u, v]_\delta \not\subset B(u, r' - \alpha) \cup B(v, s)$, mistõttu $[u, v]_\delta \setminus \big(B(u, r' - \alpha) \cup B(v, s)\big) \neq \varnothing$. Igatahes $x \in B(u, r') \subset B(u, r)$. Kuna $x \in [u, v]_\delta$, siis leidub lemma 2.2 põhjal selline $\gamma > 0$, et

$$[x, v]_\gamma \subset [u, v]_\delta,$$

kusjuures eeldame, et γ on nii väike, et

$$d(u, x) + d(x, v) + \gamma < d(u, v) + \delta \tag{2.1}$$

(kui $\gamma > 0$ on piisavalt väike, siis viimane võrratus kehtib, sest $x \in [u,v]_\delta$ ehk $d(u,x) + d(x,v) < d(u,v) + \delta$).

Kuna $[u,v]_\delta \subset B(u,r') \cup B(v,s)$, siis ka $[x,v]_\gamma \subset B(u,r') \cup B(v,s)$. Tõestuse alguses vaadeldud olukorraga sarnaselt on võimalik näidata, et hulk

$$\{t \geqslant 0 : [x,v]_\gamma \subset B(u,r') \cup B(v,t)\}$$

sisaldab oma alumise raja s'. Ilmselt on $0 \leqslant s' \leqslant s$. Juhul $s' \leqslant \varepsilon$ võtame $y = v$. Vastasel juhul (s.t juhul $s' > \varepsilon$) fikseerime vabalt

$$y \in [x,v]_\gamma \setminus \big(B(u,r') \cup B(v,s'-\alpha)\big)\,,$$

kusjuures paneme tähele, et ilmselt $s' > \varepsilon > \alpha$ ja $[x,v]_\gamma \not\subset B(u,r') \cup B(v,s'-\alpha)$, mistõttu $[x,v]_\gamma \setminus \big(B(u,r') \cup B(v,s'-\alpha)\big) \neq \varnothing$. Igatahes $y \in B(v,s') \subset B(v,s)$. Kuna $y \in [x,v]_\gamma$, siis leidub lemma 2.2 põhjal selline $\delta' > 0$, et

$$[x,y]_{\delta'} \subset [x,v]_\gamma,$$

kusjuures eeldame, et δ' on nii väike, et

$$d(x,y) + d(y,v) + \delta' < d(x,v) + \gamma \tag{2.2}$$

(kui $\delta' > 0$ on piisavalt väike, siis viimane võrratus kehtib, sest $y \in [x,v]_\gamma$ ehk $d(x,y) + d(y,v) < d(x,v) + \gamma$).

Võrratused (2.1) ja (2.2) annavad kokku

$$\begin{aligned} d(u,x) + d(x,y) + d(y,v) + \delta' &< d(u,x) + d(x,v) + \gamma \\ &< d(u,v) + \delta, \end{aligned}$$

järelikult on tingimus (1) täidetud.

Ka tingimus (2) on täidetud, sest

$$[x,y]_{\delta'} \subset [x,v]_\gamma \subset [u,v]_\delta.$$

Kontrollime tingimuse (3) täidetust, s.t veendume, et $d(x,y) \leqslant d(u,v)$. Selleks vaatleme eraldi läbi kolm juhtu: $r', s' \leqslant \varepsilon$, $r' > \varepsilon$ ja $s' > \varepsilon$.

Kui $r', s' \leqslant \varepsilon$, siis $x = u$ ja $y = v$, järelikult $d(x,y) = d(u,v)$.

Kui $r' > \varepsilon$, siis $x \notin B(u, r'-\alpha)$, mistõttu

$$d(u,x) > r' - \alpha > \varepsilon - \alpha > \delta$$

ja seega saame võrratuse (1) põhjal

$$d(x,y) < d(u,v) + \delta - d(u,x) < d(u,v).$$

Kolmas juht on analoogiline teise juhuga. Kui $s' > \varepsilon$, siis $y \notin B(v, s' - \alpha)$, mistõttu

$$d(y, v) > s' - \alpha > \varepsilon - \alpha > \delta$$

ja seega saame võrratuse (1) põhjal

$$d(x, y) < d(u, v) + \delta - d(y, v) < d(u, v).$$

Järelikult on tingimus (3) rahuldatud.

Näitame, et kehtib sisalduvus (4), s.t $[x, y]_{\delta'} \subset B(x, \varepsilon) \cup B(y, \varepsilon)$. Selleks fikseerime vabalt $p \in [x, y]_{\delta'}$. Kuna

$$[x, y]_{\delta'} \subset [x, v]_{\gamma} \subset B(u, r') \cup B(v, s'),$$

siis $p \in B(u, r') \cup B(v, s')$.

Vaatleme ainult juhtu $p \in B(u, r')$ (juht $p \in B(v, s')$ on analoogiline). Kui $r' \leqslant \varepsilon$, siis $x = u$ ja $p \in B(u, r') \subset B(x, \varepsilon)$. Kui aga $r' > \varepsilon$, siis $x \notin B(u, r' - \alpha)$, mistõttu $d(u, x) > r' - \alpha$ ning võrratuse (1) põhjal

$$\begin{aligned} d(x, p) &< d(x, y) + \delta' - d(p, y) \\ &< \delta - d(u, x) + d(u, v) - d(v, y) - d(p, y) \\ &\leqslant \delta - d(u, x) + d(u, p) \\ &< \delta - (r' - \alpha) + r' \\ &= \delta + \alpha < \varepsilon. \end{aligned}$$

Seega $p \in B(x, \varepsilon) \cup B(y, \varepsilon)$ ja järelikult on tingimus (4) täidetud.

Lõpuks vaatleme juhtu $\delta \geqslant \varepsilon$. Olgu $x \in B(u, r)$, $y \in B(v, s)$ ja $\delta' > 0$ sellised, et

(1′) $d(u, x) + d(x, y) + d(y, v) + \delta' < d(u, v) + \varepsilon/2$;

(2′) $[x, y]_{\delta'} \subset [u, v]_{\varepsilon/2}$;

(3′) $d(x, y) \leqslant d(u, v)$;

(4′) $[x, y]_{\delta'} \subset B(x, \varepsilon) \cup B(y, \varepsilon)$.

(Niisugused x, y ja δ' leiduvad tõestuse esimeses pooles käsitletud olukorra erijuhu $\delta = \varepsilon/2$ põhjal.) Paneme tähele, et tingimused (1)–(4) on täidetud. Tingimused (3) ja (3′) on täpselt samad ning (4) ja (4′) samuti. Võrratusest (1′) järeldub võrratus (1), sest $\varepsilon/2 < \delta$. Sisaldumisest (2′) järeldub (2), sest ilmselt $[u, v]_{\varepsilon/2} \subset [u, v]_{\delta}$. Niisiis oleme leidnud sobivad x, y ja δ'. □

Lemma 2.4 ([10, lemma 2.4]). *Olgu $u, v \in M$ ja $\delta > 0$ ning olgu $r, s > 0$ sellised, et $r + s < d(u, v)$ ja*

$$[u, v]_\delta \subset B(u, r) \cup B(v, s).$$

Täieliku M korral leiduvad $x \in B(u, r)$ ja $y \in B(v, s)$ nii, et $m_{xy} \in \mathrm{dent}(B_{\mathcal{F}(M)})$.

Selle lemma tõestamisel kasutame järgmist fakti, mille tõestust bakalaureusetöö piiratud mahtu arvestadades ei esita.

Lemma 2.5 ([2, teoreem 4.1] ja [5, teoreem 2.4]). *Olgu M täielik nullpunktiga meetriline ruum ja olgu $x, y \in M$ erinevad punktid. Siis on $m_{xy} \in \mathrm{dent}(B_{\mathcal{F}(M)})$ parajasti siis, kui iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $\delta > 0$ nii, et*

$$[x, y]_\delta \subset B(x, \varepsilon) \cup B(y, \varepsilon).$$

Lemma 2.4 tõestus. Eeldame, et meetriline ruum M on täielik. Sobivad x ja y leiame kahe jada (x_n) ja (y_n) piirelementidena, kus iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$x_n \in B(u, r) \cap [u, v]_\delta \quad \text{ja} \quad y_n \in B(v, s) \cap [u, v]_\delta.$$

Me defineerime need jadad induktiivselt ning selle protsessi käigus defineerime lisaks kaks abistavat positiivsete reaalarvude jada (δ_n) ja (ε_n).

Olgu $\varepsilon_1 > 0$ selline, et $r + s + 2\varepsilon_1 < d(u, v)$. Rakendame lemmat 2.3 juhul $u = u$, $v = v$, $r = r$, $s = s$, $\delta = \delta$ ja $\varepsilon = \varepsilon_1$, et leida elemendid $x_1 \in B(u, r)$ ja $y_1 \in B(v, s)$ ning $\delta_1 \in (0, \varepsilon_1)$ nii, et

(1_1) $d(u, x_1) + d(x_1, y_1) + d(y_1, v) + \delta_1 < d(u, v) + \delta$;

(2_1) $[x_1, y_1]_{\delta_1} \subset [u, v]_\delta$;

(3_1) $d(x_1, y_1) \leqslant d(u, v)$;

(4_1) $[x_1, y_1]_{\delta_1} \subset B(x_1, \varepsilon_1) \cup B(y_1, \varepsilon_1)$.

Eeldame, et mingi $n \in \mathbb{N}$ korral on leitud x_n, y_n, δ_n ja ε_n. Fikseerime vabalt $\varepsilon_{n+1} \in (0, \delta_n/6)$. Rakendame lemmat 2.3 juhul $u = x_n$, $v = y_n$, $r = s = \varepsilon_n$, $\delta = \varepsilon_{n+1}$ ja $\varepsilon = \varepsilon_{n+1}$, et leida elemendid $x_{n+1} \in B(x_n, \varepsilon_n)$ ja $y_{n+1} \in B(y_n, \varepsilon_n)$ ning $\delta_{n+1} \in (0, \varepsilon_{n+1})$ nii, et

(1_{n+1}) $d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, y_{n+1}) + d(y_{n+1}, y_n) + \delta_{n+1} < d(x_n, y_n) + \varepsilon_{n+1}$;

(2_{n+1}) $[x_{n+1}, y_{n+1}]_{\delta_{n+1}} \subset [x_n, y_n]_{\varepsilon_{n+1}}$;

(3_{n+1}) $d(x_{n+1}, y_{n+1}) \leqslant d(x_n, y_n)$;

(4_{n+1}) $[x_{n+1}, y_{n+1}]_{\delta_{n+1}} \subset B(x_{n+1}, \varepsilon_{n+1}) \cup B(y_{n+1}, \varepsilon_{n+1})$.

Jne. Seega oleme leidnud M elementide jadad (x_n) ja (y_n) ning positiivsete arvude jadad (δ_n) ja (ε_n), kusjuures $\varepsilon_{n+1} < \delta_n/6 < \varepsilon_n/6$ iga $n \in \mathbb{N}$ puhul.

Jada (x_n) on Cauchy jada, sest $m, n \in \mathbb{N}$ ja $m > n$ korral

$$d(x_n, x_m) \leqslant \sum_{i=n}^{m-1} d(x_i, x_{i+1}) \leqslant \sum_{i=n}^{m-1} \varepsilon_i < \frac{6}{5}\varepsilon_n < 2\varepsilon_n \to 0,$$

Ruumi M täielikkuse tõttu koondub Cauchy jada (x_n) mingiks elemendiks $x \in M$. Sümmeetria tõttu on ka (y_n) Cauchy jada ning seega koondub (y_n) mingiks elemendiks $y \in M$.

Iga $n \in \mathbb{N}$ korral $x_n \notin B(v, s)$, sest

$$d(x_n, v) \geqslant d(u, v) - d(u, x_1) - d(x_1, x_n) > d(u, v) - r - 2\varepsilon_1 > s;$$

teisalt

$$x_n \in [x_n, y_n]_{\delta_n} \subset [u, v]_\delta \subset B(u, r) \cup B(v, s).$$

Seega $x_n \in B(u, r)$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral. Järelikult $x \in B(u, r)$ ning analoogiliselt saame, et $y \in B(v, s)$. Muuhulgas järeldub sellest, et $x \neq y$, sest $r + s < d(u, v)$.

Näitame, et m_{xy} on $B_{\mathcal{F}(M)}$ hammaspunkt. Selleks on lemma 2.5 põhjal vaja näidata, et iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $\gamma > 0$ nii, et

$$[x, y]_\gamma \subset B(x, \varepsilon) \cup B(y, \varepsilon).$$

Fikseerime vabalt $\varepsilon > 0$. Olgu $n \in \mathbb{N}$ selline, et $d(x_n, x) < \varepsilon/2$, $d(y_n, y) < \varepsilon/2$ ja $\varepsilon_n < \varepsilon/2$. Võrratustest (1) ja (3) saame, et

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m) &\leqslant d(x_n, x_{n+1}) + d(y_n, y_{n+1}) \\ +d(x_{n+1}, x_m) + d(y_{n+1}, y_m) & \\ &< d(x_n, y_n) + \varepsilon_{n+1} - d(x_{n+1}, y_{n+1}) + 2\varepsilon_{n+1} + 2\varepsilon_{n+1} \\ &\leqslant d(x_n, y_n) + 5\varepsilon_{n+1} - d(x, y) \end{aligned}$$

iga $m > n$ puhul, millest

$$d(x_n, x) + d(y_n, y) \leqslant d(x_n, y_n) + 5\varepsilon_{n+1} - d(x, y).$$

Seega saame iga $p \in [x, y]_{\varepsilon_{n+1}}$ korral

$$\begin{aligned} d(x_n, p) + d(y_n, p) &\leqslant d(x_n, x) + d(x, p) + d(y_n, y) + d(y, p) \\ &= d(x_n, x) + d(y_n, y) + d(x, p) + d(y, p) \\ &< d(x_n, y_n) + 5\varepsilon_{n+1} - d(x, y) + d(x, y) + \varepsilon_{n+1} \\ &< d(x_n, y_n) + \delta_n. \end{aligned}$$

Järelikult
$$[x, y]_{\varepsilon_{n+1}} \subset [x_n, y_n]_{\delta_n}.$$
Edasi paneme tähele, et $B(x_n, \varepsilon_n) \subset B(x, \varepsilon)$, kuna
$$\varepsilon_n + d(x_n, x) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$
mistõttu saame iga $p \in B(x_n, \varepsilon_n)$ korral
$$d(p, x) \leqslant d(p, x_n) + d(x_n, x) \leqslant \varepsilon_n + d(x_n, x) < \varepsilon.$$
Analoogiliselt saame $B(y_n, \varepsilon_n) \subset B(y, \varepsilon)$ ning kokkuvõttes
$$[x, y]_{\varepsilon_{n+1}} \subset [x_n, y_n]_{\delta_n} \subset B(x_n, \varepsilon_n) \cup B(y_n, \varepsilon_n) \subset B(x, \varepsilon) \cup B(y, \varepsilon),$$
järelikult $[x, y]_{\varepsilon_{n+1}} \subset B(x, \varepsilon) \cup B(y, \varepsilon)$. Lemma 2.5 põhjal on m_{xy} hammaspunkt. □

Teoreemi 2.1 tõestus. (i) $\Rightarrow$ (ii) kehtivus on selge lause 1.9 põhjal.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Eeldame, et kehtib (ii), s.t $\|\mu - \nu\| = 2$ iga $\nu \in \operatorname{dent}(B_{\mathcal{F}(M)})$ korral ja näitame, et kehtib (iii). Olgu $u, v \in M$, $u \neq v$, ja $r, s > 0$ sellised, et mingi $\delta > 0$ korral
$$[u, v]_\delta \subset B\big(u, rd(u, v)\big) \cup B\big(v, sd(u, v)\big).$$
Vaja on veenduda, et $\|\mu - m_{uv}\| \geqslant 2 - 2r - 2s$. See võrratus kehtib triviaalselt, kui $r + s \geqslant 1$, sest sel juhul on $2 - 2r - 2s \leqslant 0$. Seega eeldame edasises, et $r + s < 1$.

Vaatleme kõigepealt juhtu, kus meetriline ruum M on täielik. Lemma 2.4 põhjal leiduvad $x \in B(u, rd(u, v))$ ja $y \in B(v, sd(u, v))$ nii, et m_{xy} on hammaspunkt. Tingimuse (ii) põhjal kehtib $\|\mu - m_{xy}\| = 2$. Me teame, et
$$d(u, x) + d(v, y) \leqslant rd(u, v) + sd(u, v) = (r + s)d(u, v) < d(u, v),$$
järelikult $d(u, x) + d(v, y) < d(u, v)$. Olgu $d > 0$ selline, et $d(u, x) + d(v, y) = d(u, v) - d$ ja tähistame
$$\varepsilon = \frac{d + d(x, y)}{\max\{d(x, y), d(u, v)\}}.$$
Siis
$$d(u, x) + d(v, y) = d(x, y) + d(u, v) - \varepsilon \max\{d(x, y), d(u, v)\}.$$

Seega saame lemma 1.11 teise osa abil

$$\begin{aligned}\|m_{xy} - m_{uv}\| = \|m_{xy} + m_{vu}\| &= \frac{d(x,u) + d(v,y) + |d(x,y) - d(u,v)|}{\max\{d(x,y), d(u,v)\}} \\ &\leqslant \frac{\big(d(u,x) + d(v,y)\big) + \big(d(u,x) + d(v,y)\big)}{\max\{d(x,y), d(u,v)\}} \\ &\leqslant \frac{2\big(rd(u,v) + sd(u,v)\big)}{\max\{d(x,y), d(u,v)\}} \leqslant 2(r+s).\end{aligned}$$

Järelikult

$$\|\mu - m_{uv}\| \geqslant \|\mu - m_{xy}\| - \|m_{xy} - m_{uv}\| \geqslant 2 - 2(r+s) = 2 - 2r - 2s.$$

Vaatleme nüüd juhtu, kus meetriline ruum M ei ole täielik. Olgu $\widetilde{M}$ tema täield. Siis $\mathcal{F}(M) = \mathcal{F}(\widetilde{M})$ ja seega saame eelduse (ii) kirjutada kujul $\|\mu - \nu\| = 2$ iga $\nu \in \operatorname{dent}(B_{\mathcal{F}(M)})$ korral. Vahetult on kontrollitav, et meetrilises ruumis M kehtiv sisaldus $[u,v]_\delta \subset B(u, rd(u,v)) \cup B(v, sd(u,v))$ jääb kehtima ka vastavate hulkade vahel täieldis $\widetilde{M}$. Seega saame eelnevalt vaadeldud juhu põhjal $\|\mu - m_{uv}\| \geqslant 2 - 2(r+s) = 2 - 2r - 2s$.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Eeldame, et kehtib (iii). Näitame, et kehtib (i), s.t μ on Daugaveti-punkt. Selle jaoks fikseerime $\varepsilon > 0$ ja $B_{\mathcal{F}(M)}$ viilu $S(f, \alpha)$. Tõestame, et mingite $u, v \in M$, $u \neq v$, korral on $m_{uv} \in S(f,\alpha)$ ja $\|\mu - m_{uv}\| \geqslant 2 - \varepsilon$. Sel juhul oleks μ tõepoolest Daugaveti-punkt.

Vaatleme kõigepealt juhtu, kus $\alpha \leqslant 1$. Kuna $\|f\| = 1$, siis leiduvad $u_0, v_0 \in M$ nii, et

$$f(u_0) - f(v_0) > (1-\alpha) d(u_0, v_0).$$

Seega $f(m_{u_0 v_0}) > 1 - \alpha$ ehk $m_{u_0 v_0} \in S(f,\alpha)$.

Lemma 1.10 põhjal leidub $\gamma > 0$ nii, et alati, kui $u, v \in M$ ja $0 < d(u,v) < \gamma$, siis $\|\mu - m_{uv}\| \geqslant 2 - \varepsilon$. Paneme tähele, et leiduvad sellised $n \in \mathbb{N}$ ja $\delta > 0$, et

$$\left(1 + \delta - \frac{\varepsilon}{4}\right)^n d(u_0, v_0) < \gamma \tag{2.3}$$

ja

$$f(u_0) - f(v_0) > (1-\alpha)(1+\delta)^n d(u_0, v_0). \tag{2.4}$$

(Selgitame, miks sellised n ja δ kindlasti leiduvad. Olgu esmalt paaritu $n \in \mathbb{N}$ selline, et $\delta = \varepsilon/8$ korral kehtib (2.3); kuna $\delta = \varepsilon/8$ korral on $1 + \delta - \varepsilon/4 < 1$, siis selline $n \in \mathbb{N}$ muidugi leidub. Ja kui lisaks kehtib ka (2.4), siis oleme sobivad n ja δ leidnud; kui aga mitte, siis sama n korral valime $\delta < \varepsilon/8$ nii, et kehtiks (2.4) ja märgime, et selliste n ja δ korral kehtib ka (2.3).)

Kui $||\mu - m_{u_0v_0}|| \geqslant 2-\varepsilon$, siis võiksime võtta $u = u_0$ ja $v = v_0$ ning sellega oleksime sobivad punktid u ja v leidnud. Eeldame edasises, et

$$||\mu - m_{u_0v_0}|| < 2-\varepsilon. \tag{2.5}$$

Tähistame $\varrho = \delta d(u_0, v_0)$. Kui

$$[u_0, v_0]_\varrho \subset B\big(u_0, \frac{\varepsilon}{4}d(u_0, v_0)\big) \cup B\big(v_0, \frac{\varepsilon}{4}d(u_0, v_0)\big),$$

siis tingimuse (iii) kohaselt peab kehtima $||\mu - m_{u_0v_0}|| \geqslant 2-2\varepsilon/4-2\varepsilon/4 = 2-\varepsilon$, mis aga eelduse (2.5) põhjal ei kehti. Järelikult ei kehti ka viimane sisaldumine, mistõttu leidub

$$p \in [u_0, v_0]_\varrho \setminus \Big(B\big(u_0, \frac{\varepsilon}{4}d(u_0, v_0)\big) \cup B\big(v_0, \frac{\varepsilon}{4}d(u_0, v_0)\big)\Big).$$

Arvestame, et tingimus $p \in [u_0, v_0]_\varrho$ tähendab definitsiooni kohaselt, et

$$d(u_0, p) + d(p, v_0) < d(u_0, v_0) + \delta d(u_0, v_0) = (1+\delta)d(u_0, v_0).$$

Seega saame võrratuse (2.4) (ja $\alpha \leqslant 1$) abil, et

$$\begin{aligned} f(u_0) - f(p) + f(p) - f(v_0) &> (1-\alpha)(1+\delta)^n d(u_0, v_0) \\ &\geqslant (1-\alpha)(1+\delta)^{n-1}\big(d(u_0, p) + d(p, v_0)\big). \end{aligned}$$

Järelikult kas

$$f(u_0) - f(p) > (1-\alpha)(1+\delta)^{n-1} d(u_0, p) \tag{2.6}$$

või

$$f(p) - f(v_0) > (1-\alpha)(1+\delta)^{n-1} d(p, v_0). \tag{2.7}$$

Kuna $p \in [u_0, v_0]_\varrho$ ja $p \notin B\big(v_0, \frac{\varepsilon}{4}d(u_0, v_0)\big)$, saame ka

$$d(u_0, p) < (1+\delta)d(u_0, v_0) - d(v_0, p) < \big(1+\delta-\frac{\varepsilon}{4}\big)d(u_0, v_0).$$

Analoogiliselt saame

$$d(v_0, p) < (1+\delta-\frac{\varepsilon}{4})d(u_0, v_0).$$

Kui kehtib võrratus (2.6), tähistame $u_1 = u_0$ ja $v_1 = p$, vastasel juhul kehtib võrratus (2.7) ja võtame $u_1 = p$ ja $v_1 = v_0$. Nüüd oleme leidnud $u_1, v_1 \in M$ nii, et

$$f(u_1) - f(v_1) > (1-\alpha)(1+\delta)^{n-1} d(u_1, v_1)$$

ja

$$d(u_1, v_1) < (1 + \delta - \frac{\varepsilon}{4})d(u_0, v_0).$$

Vaatleme edasist olukorda üldisemalt. Kui mingi $k \in \{1, \dots, n-1\}$ korral oleme leidnud punktid $u_k, v_k \in M$ nii, et

$$f(u_k) - f(v_k) > (1 - \alpha)(1 + \delta)^{n-k} d(u_k, v_k)$$

ja

$$d(u_k, v_k) < (1 + \delta - \frac{\varepsilon}{4})^k d(u_0, v_0),$$

siis $\|\mu - m_{u_k v_k}\| \geqslant 2 - \varepsilon$ korral võtame $u = u_k$ ja $v = v_k$ ning sellega oleme sobivad punktid u ja v leidnud.

Vastasel korral on $\|\mu - m_{u_k v_k}\| < 2 - \varepsilon$ ning oleme võrratusega (2.5) sarnases olukorras ja jätkame vastavalt ning leiame punktid $u_{k+1}, v_{k+1} \in M$. Jne.

Paneme tähele, et kui vajadusel nii jätkates oleme leidnud $u_n, v_n \in M$ nii, et

$$f(u_n) - f(v_n) > (1 - \alpha)(1 + \delta)^0 d(u_n, v_n)$$

ja

$$d(u_n, v_n) < (1 + \delta - \frac{\varepsilon}{4})^n d(u_0, v_0),$$

siis $0 < d(u_n, v_n) < \gamma$ ning γ tähenduse tõttu saame $\|\mu - m_{u_n v_n}\| \geqslant 2 - \varepsilon$, mistõttu võime võtta $u = u_n$ ja $v = v_n$ ning sellega oleme sobivad punktid u ja v leidnud.

Kui $\alpha > 1$, siis tõestuse vaadeldud juhu põhjal leiduvad $u, v \in M$, $u \neq v$ nii, et $m_{uv} \in S(f, 1)$ ja $\|\mu - m_{uv}\| \geqslant 2 - \varepsilon$. Kuna

$$f(m_{uv}) > 1 - 1 > 1 - \alpha,$$

siis $m_{uv} \in S(f, \alpha)$. Järelikult on μ Daugaveti-punkt ja sellega on teoreem 2.1 tõestatud. □

Erijuhul, kui μ on molekul, s.t $\mu = m_{xy}$, saame lemma 1.11 abil teoreemi 2.1 tingimust (iii) teisendada.

Järeldus 2.6 ([10, järeldus 2.5]). *Olgu $x, y \in M$ sellised, et $x \neq y$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *m_{xy} on Daugaveti-punkt;*

(iii′) *kui $u, v \in M$, kus $u \neq v$, ja $r, s > 0$ jaoks leidub $\delta > 0$ nii, et*

$$[u, v]_\delta \subset B\big(u, rd(u, v)\big) \cup B\big(v, sd(u, v)\big),$$

siis

$$d(x, u) + d(v, y) \geqslant d(x, y) + d(u, v) - 2(r + s)\max\{d(x, y), d(u, v)\}.$$

3 Näide Radon–Nikodými omadusega Lipschitzi-vabast ruumist, millel leidub Daugaveti-punkt

Selles peatükis esitame näite sellisest loenduvast ja täielikust meetrilisest ruumist M, et Lipschitzi-vabal ruumil $\mathcal{F}(M)$ on nii Radon–Nikodými omadus kui ka Daugaveti-punkt.

Bakalaureusetöös me Radon–Nikodými omadust ei defineeri, sel omadusel on mitmeid samaväärseid tingimusi, millest igaüht võib seega selle omaduse defineerimisel aluseks võtta, näiteks on üks samaväärne tingimus, et vaadeldaval Banachi ruumil leidub mittetühi kinnine tõkestatud osahulk, mis ei sisalda ekstreemumpunkti [7, teoreem 4]. Selles alapunktis antava näite puhul kasutame aga järgmist Radon–Nikodými omaduse kriteeriumit Lipschitzi vabade ruumide jaoks.

Teoreem 3.1 ([1, teoreem 4.6]). *Lipschitzi-vaba ruumi $\mathcal{F}(M)$ puhul on järgmised väited samaväärsed:*

(i) *ruumil $\mathcal{F}(M)$ on Radon–Nikodými omadus;*

(ii) *ruumil $\mathcal{F}(M)$ on Schuri omadus.*

Definitsioon 3.2. Banachi ruumil X on *Schuri omadus*, kui temas iga nõrgalt koonduv jada koondub, s.t $x_n \to x$ alati, kui iga $f \in X^*$ korral $f(x_n) \to f(x)$.

Lemma 3.3 ([3, lemma 2.16]). *Olgu M täielik meetriline ruum. Kui M on loenduv, siis on ruumil $\mathcal{F}(M)$ Schuri omadus.*

Lemma 3.4 ([12, järeldus 3.44], [2, teoreem 4.1]). *Olgu M täielik meetriline ruum. Siis iga $\nu \in \operatorname{dent}(B_{\mathcal{F}(M)})$ on molekul, s.t kujul m_{uv} mingite $u, v \in M$, $u \neq v$ korral. Kusjuures, kui $m_{uv} \in \operatorname{dent}(B_{\mathcal{F}(M)})$, siis iga $\varepsilon > 0$ puhul leidub $\delta > 0$ selline, et*

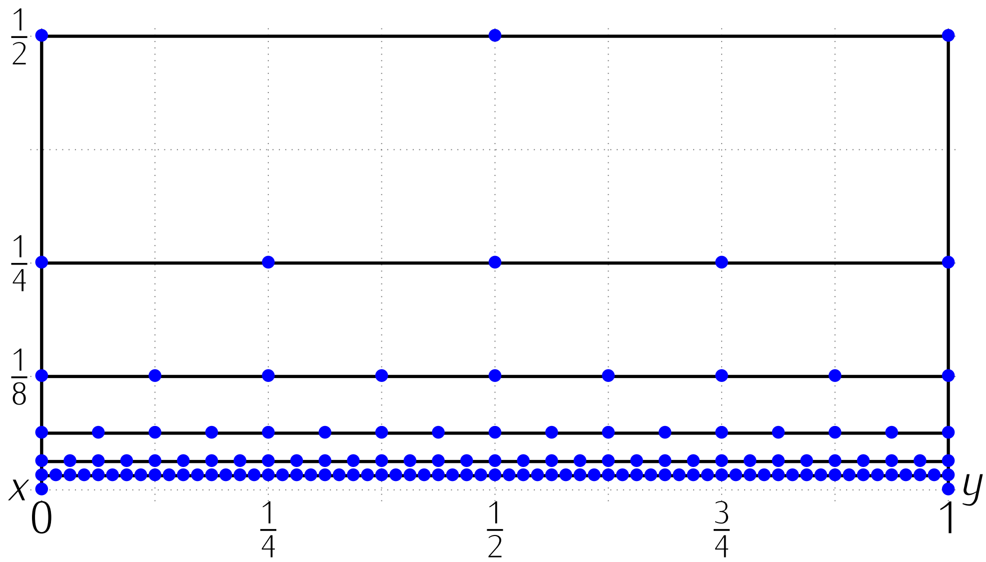
$$[u, v]_\delta \subset B(u, \varepsilon) \cup B(v, \varepsilon).$$

Näide 3.1 ([10, näide 3.1]). Selles näites vaatleme tasandil $\mathbb{R}^2$ loenduvat punktihulka M erilise kaugusega. Olgu $x := (0, 0)$, $y := (1, 0)$ ja $S_0 := \{x, y\}$. Iga $n \in \mathbb{N}$ korral defineerime

$$S_n := \left\{ \left(\frac{k}{2^n}, \frac{1}{2^n} \right) : k \in \{0, 1, \dots, 2^n\} \right\}.$$

Olgu $M := \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n$ (vt joonist 1) ja defineerime hulgal M kauguse seosega

$$d\big((a_1, b_1), (a_2, b_2)\big) := \begin{cases} |a_1 - a_2|, & \text{kui } b_1 = b_2, \\ \min\{a_1 + a_2, 2 - a_1 - a_2\} + |b_1 - b_2|, & \text{kui } b_1 \neq b_2. \end{cases}$$



Joonis 1: Meetriline ruum M, mille puhul on Banachi ruumil $\mathcal{F}(M)$ Radon–Nikodými omadus ja mille puhul m_{xy} on Daugaveti-punkt.

Näitame, et meetriline ruum M on täielik. Olgu (u_n) Cauchy jada ruumis M. Näitame, et (u_n) koondub mingiks ruumi M elemendiks. Vaatleme kahte alternatiivset juhtu.

1. Leidugu selline $m \in \mathbb{N}$, et $u_n \in \bigcup_{n=0}^{m} S_n$ iga n korral. Kuna $\bigcup_{n=0}^{m} S_n$ on lõplik, on (u_n) statsionaarne, seega koonduv.

2. Vaatleme juhtu, kus iga $m \in \mathbb{N}$ puhul leidub $k > m$ ja $n \in \mathbb{N}$ nii, et $u_n \in S_k$. Siis leidub osajada (u_{n_k}) nii, et $u_{n_k} = (a_{n_k}, b_{n_k}) \in S_{m_k}$ ning $m_1 < m_2 < \cdots$. Definitsiooni järgi on selle osajada iga kahe elemendi $u_{n_k} = (a_{n_k}, b_{n_k})$ ja $u_{n_l} = (a_{n_l}, b_{n_l})$ vaheline kaugus

$$\min\{a_{n_k} + a_{n_l}, 2 - a_{n_k} - a_{n_l}\} + |b_{n_k} - b_{n_l}|.$$

Kuna (u_n) on Cauchy jada, siis ka (u_{n_k}) on Cauchy jada ja seega

$$d(u_{n_k}, u_{n_l}) = \min\{a_{n_k} + a_{n_l}, 2 - a_{n_k} - a_{n_l}\} + |b_{n_k} - b_{n_l}| \to 0.$$

Seelest järeldub, et $\min\{a_{n_k} + a_{n_l}, 2 - a_{n_k} - a_{n_l}\} \to 0$ ja $|b_{n_k} - b_{n_l}| \to 0$. Seega kas $a_{n_k} + a_{n_l} \to 0$ või $2 - a_{n_k} - a_{n_l} \to 0$. Esimesel juhul $u_{n_k} \to x$ ja teisel juhul $u_{n_k} \to y$. Kuna Cauchy jada (u_n) osajada koondub, siis koondub ka jada (u_n).

Järelikult on M täielik. Lemma 3.3 järgi on ruumil $\mathcal{F}(M)$ Schuri omadus ja seega ka Radon–Nikodými omadus.

Näitame, et m_{xy} ja m_{yx} ei ole hammaspunktid. Oletame, et vastuväiteliselt, et $m_{xy} \in \operatorname{dent}(B_{\mathcal{F}(M)})$. Siis lemma 3.4 järgi leidub $\delta > 0$ nii, et

$$[x, y]_\delta \subset B(x, \tfrac{1}{2}) \cup B(y, \tfrac{1}{2}).$$

Iga $n \in \mathbb{N}$ korral võtame $z := (\frac{1}{2}, 2^{-(n+2)})$. Siis

$$d(x, z) = \tfrac{1}{2} + 2^{-(n+2)}, \quad d(z, y) = \tfrac{1}{2} + 2^{-(n+2)}, \quad d(x, y) = 1$$

ja seega

$$d(x, z) + d(z, y) - d(x, y) = 2 \cdot 2^{-(n+2)} = 2^{-(n+1)} \leqslant 2^{-n}.$$

Niisiis $z \in [x, y]_{2^{-n}}$. Samal ajal

$$d(x, z) = \tfrac{1}{2} + 2^{-(n+2)} > \tfrac{1}{2} \quad \text{ja} \quad d(y, z) = \tfrac{1}{2} + 2^{-(n+2)} > \tfrac{1}{2},$$

millest saame $z \notin B(x, \frac{1}{2}) \cup B(y, \frac{1}{2})$. Kuna $[x, y]_{\delta'} \subset [x, y]_\delta$ iga $\delta' \leqslant \delta$ korral, valime n nii, et $2^{-n} < \delta$. Siis

$$z \in [x, y]_{2^{-n}} \subset [x, y]_\delta,$$

mis on vastuolus ülaltoodud sisalduvusega. Seega sellist arvu δ ikkagi ei leidu. Järelikult $m_{xy} \notin \operatorname{dent}(B_{\mathcal{F}(M)})$. Analoogiliselt saame $m_{yx} \notin \operatorname{dent}(B_{\mathcal{F}(M)})$.

Veendume nüüd, et m_{xy} on Daugaveti-punkt. Teoreemi 2.1 järgi piisab selleks näidata, et $\|m_{xy} - \nu\| = 2$ iga $\nu \in \operatorname{dent}(B_{\mathcal{F}(M)})$ korral. Fikseerime $\nu \in \operatorname{dent}(B_{\mathcal{F}(M)})$. Lemma 3.4 järgi leiduvad sellised $u, v \in M$, $u \neq v$, et $\nu = m_{uv}$. Olgu $u = (a_1, b_1)$ ja $v = (a_2, b_2)$. Ilmselt $\{u, v\} \subset [u, v]$ ja näitame, et kehtib ka teistpidi sisalduvus.

Võtame suvalise $p \in [u, v]$, s.t $d(u, p) + d(p, v) = d(u, v)$. Oletame vastuväiteliselt, et $p \notin \{u, v\}$. Kuna $m_{uv} \in \operatorname{dent}(B_{\mathcal{F}(M)})$, leidub viil $S(f, \alpha)$ nii, et $m_{uv} \in S(f, \alpha)$ ja $\operatorname{diam} S(f, \alpha) < \varepsilon/2$, kus $\varepsilon := \min\{\|m_{uv} - m_{up}\|, \|m_{uv} - m_{pv}\|\} > 0$. Paneme tähele, et kui $f(m_{up}) \leqslant 1 - \alpha$ ja $f(m_{pv}) \leqslant 1 - \alpha$, siis

$$\begin{aligned} f(m_{uv}) &= \frac{d(u, p)}{d(u, v)} \cdot f(m_{up}) + \frac{d(p, v)}{d(u, v)} \cdot f(m_{pv}) \\ &\leqslant 1 - \alpha, \end{aligned}$$

mis on vastuolus sellega, et $m_{uv} \in S(f, \alpha)$, s.t $f(m_{uv} > 1 - \alpha$. Seega peab kehtima kas $m_{up} \in S(f, \alpha)$ või $m_{pv} \in S(f, \alpha)$. Kuna $m_{uv} \in S(f, \alpha)$ ja vähemalt üks punktidest m_{up}, m_{pv} kuulub samuti viilu $S(f, \alpha)$, saame

$$\operatorname{diam} S(f, \alpha) \geqslant \min\{\|m_{uv} - m_{up}\|, \|m_{uv} - m_{pv}\|\} = \varepsilon > \frac{\varepsilon}{2},$$

mis on vastuolu. Järelikult $p \in \{u, v\}$ ja seega $[u, v] = \{u, v\}$.

Näitame, et $\|m_{xy} - m_{uv}\| = 2$. Hoiame eelnevat koordinaatide tähistust $u = (a_1, b_1)$ ja $v = (a_2, b_2)$. Vaatleme esiteks juhtu $b_1 = b_2$. Oletame vastuväiteliselt, et $|a_1 - a_2| \neq b_1$. Kuna $u, v \in S_n$ mingil n korral, on $a_1, a_2 \in \{k2^{-n} : k \in \{0, 1, \ldots, 2^n\}\}$ ja $b_1 = 2^{-n}$; seega $|a_1 - a_2|$ on b_1 kordne. Niisiis $|a_1 - a_2| > b_1$.

Kui $a_1 \leqslant a_2$, siis punkt $p := (a_1 + b_1, b_1) \in S_n$ ja

$$\begin{aligned} d(u, p) + d(p, v) &= |a_1 - (a_1 + b_1)| + |a_2 - (a_1 + b_1)| \\ &= b_1 + (a_2 - a_1 - b_1) = a_2 - a_1 = d(u, v). \end{aligned}$$

Lisaks $a_1 < a_1 + b_1 < a_2$, seega $p \in [u, v] \setminus \{u, v\}$, mis on vastuolus võrdusega $[u, v] = \{u, v\}$.

Kui $a_1 > a_2$, siis punkt $p := (a_1 - b_1, b_1) \in S_n$ ja

$$\begin{aligned} d(u, p) + d(p, v) &= |a_1 - (a_1 - b_1)| + |a_2 - (a_1 - b_1)| \\ &= b_1 + (a_1 - a_2 - b_1) = a_1 - a_2 = d(u, v), \end{aligned}$$

ning $a_2 < a_1 - b_1 < a_1$, seega $p \in [u, v] \setminus \{u, v\}$. Taas vastuolu!

Järelikult $|a_1 - a_2| = b_1$. Edasi saame

$$\begin{aligned} d(x, u) + d(y, v) &= (a_1 + b_1) + (1 - a_2 + b_2) \\ &= 1 + (a_1 - a_2) + (b_1 + b_2) \\ &\geqslant 1 + |a_1 - a_2|. \end{aligned}$$

Kuna $d(x, y) = 1$ ja $d(u, v) = |a_1 - a_2|$, annab Lemma 1.11 võrduse $\|m_{xy} - m_{uv}\| = 2$.

Vaatleme juhtu $b_1 \neq b_2$. Kui $a_1 + a_2 \leqslant 1$, siis

$$d\big(u, (0, b_1)\big) + d\big((0, b_1), v\big) = a_1 + (a_2 + |b_1 - b_2|) = d(u, v),$$

mistõttu $(0, b_1) \in [u, v]$. Et vältida punkti $[u, v] \setminus \{u, v\}$, peab siis $a_1 = 0$ ning samal põhjusel ka $(0, b_2) \notin [u, v]$ annab $a_2 = 0$. Analoogiliselt jõuame juhul $a_1 + a_2 \geqslant 1$ võrdusteni $a_1 = a_2 = 1$. Niisiis $a_1 = a_2 \in \{0, 1\}$.

Sellest tuleneb $d(u, v) = |b_1 - b_2|$ ning

$$\begin{aligned} d(x, u) + d(y, v) &= (a_1 + b_1) + (1 - a_2 + b_2) = 1 + b_1 + b_2 \\ &\geqslant 1 + |b_1 - b_2| = d(x, y) + d(u, v) \end{aligned}$$

Rakendame taas lemmat 1.11 ja saame $\|m_{xy} - m_{uv}\| = 2$.

Kokkuvõttes $m_{xy} - m_{uv} = 2$ kõigil juhtudel ja järelikult on m_{xy} on Daugaveti-punkt.

4 Lipschitzi-vaba ruumi deltapunktide kirjeldus

Artiklis [9] on toodud järgmine teoreem Lipschitzi-vaba ruumi molekulide kohta.

Teoreem 4.1 ([9, teoreem 4.7]). *Olgu $x \neq y \in M$. Siis m_{xy} on Δ-punkt parajasti siis, kui iga viilu $S := S(f, \alpha)$ korral, kus $m_{xy} \in S$ ja $\alpha \in (0, 1)$, ning iga $\varepsilon > 0$ puhul leiduvad $u, v \in M$ nii, et $0 < d(u, v) < \varepsilon$ ja $m_{uv} \in S$.*

Nagu artiklis [10, alapunkti 4 sissejuhatuses] tõdetakse, kehtib viimases teoreemis ühtpidi implikatsioon üldiselt, kui m_{xy} asendada suvalise elemendiga $\mu \in S_{\mathcal{F}(M)}$, kusjuures selle tõestus on vaadeldud erijuhuga sarnane.

Lause 4.2 ([10, lause 4.1], vrd [9, teoreem 4.7]). *Olgu $\mu \in S_{\mathcal{F}(M)}$ selline, et iga $\varepsilon > 0$ ja $B_{\mathcal{F}(M)}$ viilu S korral, kus $\mu \in S$, leiduvad $u, v \in M$ nii, et $u \neq v$, $m_{uv} \in S$ ja $d(u, v) < \varepsilon$. Siis μ on Δ-punkt.*

Pole teada, kas viimase teoreemi teistpidi implikatsioon kehtib üldiselt, kui m_{xy} asendada suvalise elemendiga $\mu \in S_{\mathcal{F}(M)}$. Käesoleva peatüki põhieesmärk on näidata, et see kehtib juhul, kui μ on suvaline molekulide kumer kombinatsioon.

Olgu $\mu \in S_{\mathcal{F}(M)}$. Defineerime

$$\mathcal{M}(\mu) := \{m_{uv} : \mu = \lambda m_{uv} + (1 - \lambda)\nu \text{ mingite } \lambda \in (0, 1] \text{ ja } \nu \in S_{\mathcal{F}(M)} \text{ korral}\}.$$

Paneme tähele, et kui $f \in S_{\mathrm{Lip}_0(M)}$ ja $f(\mu) = 1$, siis $f(m_{uv}) = 1$ iga $m_{uv} \in \mathcal{M}(\mu)$ korral.

Põhjendus. Tõepoolest, fikseerime $m_{uv} \in \mathcal{M}(\mu)$ ja $f \in S_{\mathrm{Lip}_0(M)}$ selliselt, et $f(\mu) = 1$. Definitsiooni järgi leiduvad $\lambda \in (0, 1]$ ja $\nu \in S_{\mathcal{F}(M)}$ nii, et $\mu = \lambda m_{uv} + (1 - \lambda)\nu$. Kuna $f \in S_{\mathrm{Lip}_0(M)}$ ja $m_{uv}, \nu \in S_{\mathcal{F}(M)}$, siis $f(m_{uv}), f(\nu) \leqslant 1$. Seega

$$\begin{aligned} 1 = f(\mu) &= \lambda f(m_{uv}) + (1 - \lambda) f(\nu) \\ &\leqslant \lambda \cdot 1 + (1 - \lambda) \cdot 1 = 1, \end{aligned}$$

mis annabki $f(m_{uv}) = 1$. □

Olgu $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$ sellised, et $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, ja $m_{x_1 y_1}, \ldots, m_{x_n y_n} \in S_{\mathcal{F}(M)}$ sellised, et

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i m_{x_i y_i} \in S_{\mathcal{F}(M)}.$$

Teoreemi [4, teoreem 2.4] järgi kehtib iga järjendi $k_1, \ldots, k_{m+1} \in \{1, \ldots, n\}$ korral, kus $k_1 = k_{m+1}$, võrratus

$$\sum_{j=1}^{m} d(x_{k_j}, y_{k_{j+1}}) \geqslant \sum_{j=1}^{m} d(x_{k_j}, y_{k_j}). \tag{4.8}$$

Veel enam, kui eelmine võrratus on tegelikult võrdus ehk kehtib

$$\sum_{j=1}^{m} d(x_{k_j}, y_{k_{j+1}}) = \sum_{j=1}^{m} d(x_{k_j}, y_{k_j}), \tag{4.9}$$

siis $m_{x_{k_j} y_{k_{j+1}}} \in \mathcal{M}(\mu)$ iga $j \in \{1, \dots, m\}$ korral, kus $x_{k_j} \neq y_{k_{j+1}}$.

Põhjendus. Eeldame niisiis, et kehtib (4.9).

Erijuht, kus $k_1, \dots, k_m$ on paarikaupa erinevad. Tähistame

$$\lambda_0 := \min_{i \in \{1,\dots,n\}} \frac{\lambda_i}{d(x_i, y_i)}$$

ja

$$l_i := \begin{cases} \lambda_i - \lambda_0 d(x_i, y_i), & \text{kui } i \in \{k_1, \dots, k_m\}, \\ \lambda_i, & \text{kui } i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{k_1, \dots, k_m\}. \end{cases}$$

Ilmselt $l_i \geqslant 0$ iga $i \in \{1, \dots, n\}$ puhul. Arvestame, et

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m} d(x_{k_j}, y_{k_j}) m_{x_{k_j} y_{k_j}} &= \sum_{j=1}^{m} \delta_{x_{k_j}} - \sum_{j=1}^{m} \delta_{y_{k_j}} \\
&= \sum_{\substack{j=1 \\ x_{k_j} = y_{k_{j+1}}}}^{m} \delta_{x_{k_j}} + \sum_{\substack{j=1 \\ x_{k_j} \neq y_{k_{j+1}}}}^{m} \delta_{x_{k_j}} - \sum_{\substack{j=1 \\ x_{k_j} = y_{k_{j+1}}}}^{m} \delta_{y_{k_{j+1}}} - \sum_{\substack{j=1 \\ x_{k_j} \neq y_{k_{j+1}}}}^{m} \delta_{y_{k_{j+1}}} \\
&= \sum_{\substack{j=1 \\ x_{k_j} \neq y_{k_{j+1}}}}^{m} \delta_{x_{k_j}} - \sum_{\substack{j=1 \\ x_{k_j} \neq y_{k_{j+1}}}}^{m} \delta_{y_{k_{j+1}}} \\
&= \sum_{\substack{j=1 \\ x_{k_j} \neq y_{k_{j+1}}}}^{m} d(x_{k_j}, y_{k_{j+1}}) m_{x_{k_j} y_{k_{j+1}}}.
\end{aligned}$$

Seega

$$\begin{aligned}
\mu &= \sum_{\substack{i=1\\ i\in\{k_1,\ldots,k_m\}}}^{n} \lambda_i m_{x_i y_i} + \sum_{\substack{i=1\\ i\notin\{k_1,\ldots,k_m\}}}^{n} \lambda_i m_{x_i y_i} \\
&= \sum_{j=1}^{m} \big(l_{k_j} + \lambda_0 d(x_{k_j}, y_{k_j})\big)\, m_{x_{k_j} y_{k_j}} + \sum_{\substack{i=1\\ i\notin\{k_1,\ldots,k_m\}}}^{n} l_i m_{x_i y_i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} l_i m_{x_i y_i} + \lambda_0 \sum_{j=1}^{m} d(x_{k_j}, y_{k_j}) m_{x_{k_j} y_{k_j}} \\
&= \sum_{i=1}^{n} l_i m_{x_i y_i} + \lambda_0 \sum_{\substack{j=1\\ x_{k_j}\neq y_{k_{j+1}}}}^{m} d(x_{k_j}, y_{k_{j+1}}) m_{x_{k_j} y_{k_{j+1}}}.
\end{aligned}$$

Eeldusest tuleneb, et

$$\sum_{i=1}^{n} l_i + \lambda_0 \sum_{j=1}^{m} d(x_{k_j}, y_{k_{j+1}}) = \sum_{i=1}^{n} l_i + \lambda_0 \sum_{j=1}^{m} d(x_{k_j}, y_{k_j}) = 1.$$

Üldine juht, kus me ei eelda, et $k_1, \ldots, k_m$ on paarikaupa erinevad. Tõestame väite induktsiooniga m järgi.

1. **Baas**. Kui $m = 1$, siis $k_1 = k_2$. Ilmselt $m_{x_{k_1} y_{k_2}} = m_{x_{k_1} y_{k_1}} \in \mathcal{M}(\mu)$.

2. **Samm**. Olgu $m \geqslant 2$ ja eeldame, et iga järjendi $k_1, \ldots, k_{p+1} \in \{1, \ldots, n\}$ korral, kus $k_1 = k_{p+1}$ ja $p < m$, võrdusest

$$\sum_{j=1}^{p} d(x_{k_j}, y_{k_{j+1}}) = \sum_{j=1}^{p} d(x_{k_j}, y_{k_j}),$$

   järeldub, et iga $j \in \{1, \ldots, p\}$ korral, kus $x_{k_j} \neq y_{k_{j+1}}$, kehtib $m_{x_{k_j} y_{k_{j+1}}} \in \mathcal{M}(\mu)$.

   Kui $k_1, \ldots, k_m$ on paarikaupa erinevad, kehtib väide vaadeldud erijuhu põhjal. Kui ei ole, leiduvad $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ nii, et $i < j$ ja $k_i = k_j$. Kuna $k_i = k_j$, siis

$$\sum_{l=i}^{j-1} d(x_{k_l}, y_{k_{l+1}}) \geqslant \sum_{l=i}^{j-1} d(x_{k_l}, y_{k_l}) \tag{4.10}$$

ja

$$\sum_{l=j}^{m} d(x_{k_l}, y_{k_{l+1}}) + \sum_{l=1}^{i-1} d(x_{k_l}, y_{k_{l+1}}) \geqslant \sum_{l=j}^{m} d(x_{k_l}, y_{k_l}) + \sum_{l=1}^{i-1} d(x_{k_l}, y_{k_l}). \quad (4.11)$$

Kui vähemalt ühes võrratustest (4.10) ja (4.11) kehtiks range võrratus, siis

$$\sum_{l=1}^{m} d(x_{k_l}, y_{k_{l+1}}) > \sum_{l=1}^{m} d(x_{k_l}, y_{k_l}),$$

mis on vastuolus eeldusega. Järelikult on mõlemad võrratused (4.10) ja (4.11) tegelikult võrdused ning induktsiooni eelduse põhjal saame

$$m_{x_{k_l} y_{k_{l+1}}} \in \mathcal{M}(\mu)$$

iga $l \in \{i, \ldots, j-1\}$ puhul, ning iga $l \in \{j, \ldots, m, 1, \ldots, i-1\}$ puhul. $\square$

Artiklis [10] on esitatud järgmine lemma koos tõestusega.

Lemma 4.3 ([10, lemma 4.2]). *Olgu $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$ omadusega $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ ja $m_{x_1 y_1}, \ldots, m_{x_n y_n} \in S_{\mathcal{F}(M)}$ sellised, et $\mu = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i m_{x_i y_i} \in S_{\mathcal{F}(M)}$. Siis leidub selline $f \in S_{\mathrm{Lip}_0(M)}$, et $f(\mu) = 1$ ning kõikide $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ korral, kus $x_i \neq y_j$, on järgmised tingimused samaväärsed:*

(i) $f(m_{x_i y_j}) = 1$;

(ii) $m_{x_i y_j} \in \mathcal{M}(\mu)$.

Tõestame selle lemma tuginedes peamiselt uuemast artiklist pärit [11, lemma 2.1] tõestusele ja vähesel määral [10, lemma 4.2] tõestusele. Ka on lemma 4.3 tõestamiseks vaja järgmist abitulemust.

Lemma 4.4 ([4, lemma 2.3]). *Olgu $n \in \mathbb{N}$ ja iga $k, l \in \{1, \ldots, n\}$ korral $\beta_{kl} \in \mathbb{R}$ valitud nii, et $\beta_{kk} = 0$ iga $k \in \{1, \ldots, n\}$ korral. Kui suvalise järjendi $k_1, \ldots, k_{m+1} \in \{1, \ldots, n\}$ puhul, kus $k_1 = k_{m+1}$, kehtib*

$$\sum_{j=1}^{m} \beta_{k_j k_{j+1}} \geqslant 0,$$

siis leiduvad reaalarvud $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ nii, et

$$\alpha_k \leqslant \alpha_l + \beta_{kl}$$

iga $k, l \in \{1, \ldots, n\}$ korral.

Lemma 4.3 tõestus. Implikatsioon (ii) $\Rightarrow$ (i) kehtib iga $f \in S_{\mathrm{Lip}_0(M)}$ korral, mis rahuldab tingimust $f(\mu) = 1$. Seega piisab leida selline $f \in S_{\mathrm{Lip}_0(M)}$, et $f(\mu) = 1$ ja iga $i, j \in \{1, \dots, n\}$ korral, kus $x_i \neq y_j$, kehtib ka (i) $\Rightarrow$ (ii).

Tähistame iga $k \in \{1, \dots, n\}$ korral $a_{kk} := 1$ ja $\beta_{kk} := 0$, ning mis tahes $k, l \in \{1, \dots, n\}$, $k \neq l$, korral

$$a_{kl} := \max\Bigg\{ \frac{\sum_{j=1}^m d(x_{k_j}, y_{k_j})}{\sum_{j=1}^m d(x_{k_j}, y_{k_{j+1}})} : m \in \mathbb{N}, k_1, \dots, k_{m+1} \in \{1, \dots, n\}$$
$$\text{on paarikaupa erinevad}, k_1 = k_{m+1} = k, k_2 = l \Bigg\}$$

ja

$$\beta_{kl} := a_{kl} d(x_k, y_l) - d(x_k, y_k).$$

Võrratusest (4.8) järeldub, et $a_{kl} \leqslant 1$ iga $k, l \in \{1, \dots, n\}$ korral.

Samm 1: lemma 4.4 rakendamine. Näitamaks, et lemma 4.4 eeldused on täidetud, tuleb tõestada, et mis tahes järjendi $k_1, \dots, k_{m+1} \in \{1, \dots, n\}$, $k_1 = k_{m+1}$, korral kehtib $\sum_{j=1}^m \beta_{k_j k_{j+1}} \geqslant 0$.

- Kui $k_1, \dots, k_m$ on paarikaupa erinevad, siis iga $l \in \{1, \dots, m\}$ korral

  $$a_{k_l k_{l+1}} \geqslant \frac{\sum_{j=1}^m d(x_{k_j}, y_{k_j})}{\sum_{j=1}^m d(x_{k_j}, y_{k_{j+1}})},$$

  ning seega

  $$\sum_{j=1}^m a_{k_j k_{j+1}} d(x_{k_j}, y_{k_{j+1}}) \geqslant \min_{l \in \{1, \dots, m\}} a_{k_l k_{l+1}} \cdot \sum_{j=1}^m d(x_{k_j}, y_{k_{j+1}}) \geqslant \sum_{j=1}^m d(x_{k_j}, y_{k_j}),$$

  millest $\sum_{j=1}^m \beta_{k_j k_{j+1}} \geqslant 0$.

- Kui $k_1, \dots, k_m$ ei ole paarikaupa erinevad, siis kasutame induktsiooni m järgi. Baasjuht $m = 1$ on triviaalne. Induktsioonisammus leiduvad $1 \leqslant p < q \leqslant m$, nii et $k_p = k_q$. Sel juhul jaguneb kogu summa kaheks:

  $$\sum_{j=1}^m \beta_{k_j k_{j+1}} = \sum_{j=p}^{q-1} \beta_{k_j k_{j+1}} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \notin \{p, \dots, q-1\}}}^m \beta_{k_j k_{j+1}}.$$

  Induktsiooni eelduse põhjal on mõlemad osasummad mittenegatiivsed, seega $\sum_{j=1}^m \beta_{k_j k_{j+1}} \geqslant 0$.

Lemma 4.4 põhjal leiduvad sellised $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, et iga $k, l \in \{1, \dots, n\}$ korral kehtib $\alpha_k \leqslant \alpha_l + \beta_{kl}$.

Defineerime funktsiooni f hulgal $\{x_1, y_1, \dots, x_n, y_n\}$ seostega

$$f(x_i) = \alpha_i + d(x_i, y_i), \quad f(y_i) = \alpha_i, \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

Siis iga $i, j \in \{1, \dots, n\}$ korral

$$\begin{aligned}
f(x_i) - f(y_j) &= \alpha_i - \alpha_j + d(x_i, y_i) \leqslant \beta_{ij} + d(x_i, y_i) = a_{ij} d(x_i, y_j),\\
f(y_i) - f(x_j) &= \alpha_i - \alpha_j - d(x_j, y_j) \leqslant \beta_{ij} - d(x_j, y_j)\\
&\leqslant d(x_i, y_j) - d(x_i, y_i) - d(x_j, y_j) \leqslant d(y_i, x_j),\\
f(x_i) - f(x_j) &= \alpha_i - \alpha_j + d(x_i, y_i) - d(x_j, y_j) \leqslant \beta_{ij} + d(x_i, y_i) - d(x_j, y_j)\\
&\leqslant d(x_i, y_j) - d(x_j, y_j) \leqslant d(x_i, x_j),\\
f(y_i) - f(y_j) &= \alpha_i - \alpha_j \leqslant \beta_{ij} \leqslant d(x_i, y_j) - d(x_i, y_i) \leqslant d(y_i, y_j).
\end{aligned}$$

Seega $\mathrm{Lip}(f) \leqslant 1$. Kasutades McShane'i teoreemi 1.3 jätkame funktsiooni f kogu ruumile M ning liidame sellise konstantse funktsiooni, et summa puhul $0 \mapsto 0$; nii saadud funktsiooni tähistame sümboliga f.

Näitame, et kõikide $i, j \in \{1, \dots, n\}$ puhul, eeldades, et $x_i \neq y_j$, järeldub võrdusest $f(m_{x_i y_j}) = 1$ sisaldumine $m_{x_i y_j} \in \mathcal{M}(\mu)$. Juht $i = j$ on siin ilmne. Seepärast fikseerime $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$, ja eeldame, et $x_i \neq y_j$ ning $f(m_{x_i y_j}) = 1$. Siis

$$1 = f(m_{x_i y_j}) = \frac{f(x_i) - f(y_j)}{d(x_i, y_j)} \leqslant a_{ij} \leqslant 1,$$

ehk $a_{ij} = 1$. Seega leiduvad $m \in \mathbb{N}$ ja paarikaupa erinevad $k_1, \dots, k_{m+1} \in \{1, \dots, n\}$ nii, et $k_1 = k_{m+1} = i$, $k_2 = j$ ja $\sum_{j=1}^m d(x_{k_j}, y_{k_j}) = \sum_{j=1}^m d(x_{k_j}, y_{k_{j+1}})$. Enne (vt võrduse (4.9) juures) näitasime, et sellisest võrdusest järeldub, et iga $j \in \{1, \dots, m\}$ korral, kus $x_{k_j} \neq y_{k_{j+1}}$, kehtib $m_{x_{k_j} y_{k_{j+1}}} \in \mathcal{M}(\mu)$. Seega $m_{x_i y_j} = m_{x_{k_1} y_{k_2}} \in \mathcal{M}(\mu)$. □

Lemma 4.5 ([6, lemma 3.6]). *Olgu $x \neq y \in M$, $u \neq v \in M$, $\varepsilon > 0$ ja*

$$\frac{f_{xy}(u) - f_{xy}(v)}{d(u, v)} > 1 - \varepsilon.$$

Siis

$$(1 - \varepsilon) \max\{d(x, v) + d(y, v), d(x, u) + d(y, u)\} < d(x, y).$$

Lemma 4.6 ([10, lemma 4.3], vt ka [11, lemma 2.2]). *Olgu $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ sellised, et $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, ja $m_{x_1 y_1}, \dots, m_{x_n y_n} \in S_{\mathcal{F}(M)}$ sellised, et*

$$\mu = \sum_{i=1}^n \lambda_i m_{x_i y_i} \in S_{\mathcal{F}(M)}.$$

Siis leiduvad $f_\mu \in S_{\mathrm{Lip}_0(M)}$ ja $\delta > 0$ nii, et

(1) $f_\mu(\mu) = 1$;

(2) *iga* $u, v \in M$ *ja* $\alpha \in (0, \delta)$ *korral, kus* $u \neq v$ *ja* $m_{uv} \in S(f_\mu, \alpha)$*, leiduvad* $i, j \in \{1, \dots, n\}$ *nii, et* $x_i \neq y_j$, $m_{x_i y_j} \in \mathcal{M}(\mu)$ *ning*

$$(1-\alpha)\max\{d(x_i, v) + d(y_j, v), d(x_i, u) + d(y_j, u)\} < d(x_i, y_j).$$

Tõestus. Lemma 4.3 põhjal leidub $g \in S_{\mathrm{Lip}_0(M)}$ nii, et $g(\mu) = 1$ ja iga $i, j \in \{1, \dots, n\}$ puhul, mille korral $x_i \neq y_j$, kehtib $g(m_{x_i y_j}) = 1$ parajasti siis, kui $m_{x_i y_j} \in \mathcal{M}(\mu)$. Iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral defineerime funktsiooni $h_i \colon M \to \mathbb{R}$,

$$h_i(p) = \max\left\{\frac{g(x_i) - g(y_j)}{d(x_i, p) + d(y_j, p)} d(x_i, p) : j \in \{1, \dots, n\}, x_i \neq y_j\right\}.$$

Kuna $g(x_i) - g(y_i) > 0$, on h_i iga i korral mittenegatiivne.

Defineerime funktsiooni $f_\mu \colon M \to \mathbb{R}$,

$$f_\mu(p) = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \{g(x_i) - h_i(p)\} + a,$$

kus konstant $a \in \mathbb{R}$ valitakse nii, et $f_\mu(0) = 0$.

Iga $x, y \in M$, $x \neq y$, korral olgu $f_{xy} \colon M \to \mathbb{R}$,

$$f_{xy}(p) = \frac{d(x, y)}{2} \cdot \frac{d(y, p) - d(x, p)}{d(x, p) + d(y, p)}.$$

Lemma [6, lemma 3.6] kohaselt on f_{xy} Lipschitzi funktsioon ja $\|f_{xy}\| \leqslant 1$.

Fikseerime $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ja olgu $f_{ij} \colon M \to \mathbb{R}$,

$$f_{ij}(p) = \big(g(x_i) - g(y_j)\big) \cdot \frac{d(x_i, p)}{d(x_i, p) + d(y_j, p)}.$$

Näitame, et f_{ij} on Lipschitzi funktsioon ja $\mathrm{Lip}(f_{ij}) \leqslant 1$. Fikseerime $p, q \in M$. Tähistame $a \coloneqq d(x_i, p)$, $b \coloneqq d(y_j, p)$, $c \coloneqq d(x_i, q)$ ja $d \coloneqq d(y_j, q)$. Kuna

$$|g(x_i) - g(y_j)| \leqslant d(x_i, y_j)$$

ning

$$\begin{aligned}\left|\frac{a}{a+b} - \frac{c}{c+d}\right| &\leqslant \frac{|a-c| \cdot d + |b-d| \cdot c}{(a+b)(c+d)} \\ &\leqslant \frac{\max\{|a-c|, |b-d|\} \cdot (c+d)}{(a+b)(c+d)} \\ &\leqslant \frac{d(p, q)}{d(x_i, y_j)},\end{aligned}$$

saame $|f_{ij}(p)-f_{ij}(q)| \leqslant d(p,q)$. Järelikult f_{ij} on Lipschitzi funktsioon ja $\mathrm{Lip}(f_{ij}) \leqslant 1$. Järelikult on ka h_i ja f_μ lause 1.2 järgi Lipschitzi funktsioonid ning $\mathrm{Lip}(h_i) \leqslant 1$ ja $f_\mu \leqslant 1$.

Iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral

$$f_\mu(x_i) \geqslant g(x_i) - h_i(x_i) + a = g(x_i) + a.$$

Fikseeritud $j \in \{1, \dots, n\}$ korral valime $i \in \{1, \dots, n\}$ nii, et $f_\mu(y_j) = g(x_i) - h_i(y_j) + a$.

Kui $x_i = y_j$, siis $f_\mu(y_j) = g(y_j) - h_i(y_j) + a \leqslant g(y_j) + a$. Ja kui $x_i \neq y_j$, siis

$$\begin{aligned} f_\mu(y_j) &= g(x_i) - h_i(y_j) + a \\ &\leqslant g(x_i) - \frac{g(x_i) - g(y_j)}{d(x_i, y_j) + d(y_j, y_j)} d(x_i, y_j) + a = g(y_j) + a. \end{aligned}$$

Seega $f_\mu(x_i) - f_\mu(y_j) \geqslant g(x_i) - g(y_j)$ iga $i, j \in \{1, \dots, n\}$ korral ja järelikult $f_\mu(\mu) \geqslant g(\mu) = 1$. Kuna $\|f_\mu\| \leqslant 1$, siis $f_\mu \in S_{\mathrm{Lip}_0(M)}$ ja $f_\mu(\mu) = 1$.

Valime $\delta > 0$ nii, et kui $g(x_i) - g(y_j) < d(x_i, y_j)$ mingite i, j korral, siis $g(x_i) - g(y_j) < (1-\delta) d(x_i, y_j)$. Näitame, et tingimus (2) on täidetud. Fikseerime $u, v \in M$, $u \neq v$, ja $\alpha \in (0, \delta)$ nii, et $m_{uv} \in S(f_\mu, \alpha)$. Olgu i selline, et $f_\mu(u) = g(x_i) - h_i(u) + a$. Siis $f_\mu(v) \geqslant g(x_i) - h_i(v) + a$, millest

$$(1-\alpha) d(u, v) < f_\mu(u) - f_\mu(v) \leqslant h_i(v) - h_i(u).$$

Leidub $j \in \{1, \dots, n\}$, mille puhul $x_i \neq y_j$ ja

$$h_i(v) = \frac{g(x_i) - g(y_j)}{d(x_i, v) + d(y_j, v)} d(x_i, v).$$

Kuna h_i on mittenegatiivne, siis $g(x_i) - g(y_j) \geqslant 0$. Järelikult saame

$$\begin{aligned} (1-\alpha) d(u, v) &< h_i(v) - h_i(u) \\ &\leqslant \frac{g(x_i) - g(y_j)}{d(x_i, v) + d(y_j, v)} d(x_i, v) - \frac{g(x_i) - g(y_j)}{d(x_i, u) + d(y_j, u)} d(x_i, u) \\ &= \frac{g(x_i) - g(y_j)}{d(x_i, y_j)} \big(f_{x_i y_j}(u) - f_{x_i y_j}(v) \big) \\ &\leqslant \min \Big\{ \frac{g(x_i) - g(y_j)}{d(x_i, y_j)} d(u, v), f_{x_i y_j}(u) - f_{x_i y_j}(v) \Big\}. \end{aligned}$$

Lemma 4.5 kohaselt

$$d(x_i, y_j) > (1-\alpha) \max\{ d(x_i, u) + d(y_j, u), d(x_i, v) + d(y_j, v) \}.$$

Lisaks
$$g(x_i) - g(y_j) > (1-\alpha)d(x_i, y_j) > (1-\delta)d(x_i, y_j).$$
Kui kehtiks $g(x_i) - g(y_j) < d(x_i, y_j)$, siis peaks ka $g(x_i) - g(y_j) < (1-\delta)d(x_i, y_j)$. Seega $g(x_i) - g(y_j) = d(x_i, y_j)$ ja $m_{x_i y_j} \in \mathcal{M}(\mu)$. □

Nüüd oleme valmis põhitulemuse tõestamiseks.

Teoreem 4.7 ([10, teoreem 4.4]). *Olgu $\mu \in \operatorname{conv}(\{m_{xy} : x \neq y \in M\}) \cap S_{\mathcal{F}(M)}$. Siis μ on Δ-punkt parajasti siis, kui suvalise $\varepsilon > 0$ ja hulga $B_{\mathcal{F}(M)}$ suvalise viilu S korral, kus $\mu \in S$, leiduvad $u, v \in M$ nii, et $u \neq v$, $m_{uv} \in S$ ja $d(u, v) < \varepsilon$.*

Tõestus. Piisavuse osa on lause 4.2.

Olgu μ Δ-punkt ja olgu $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$ sellised, et $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, ja $m_{x_1 y_1}, \ldots, m_{x_n y_n} \in S_{\mathcal{F}(M)}$ sellised, et $\mu = \sum_{i=1}^n \lambda_i m_{x_i y_i}$.

Lemma 4.6 järgi leiduvad $f_\mu \in S_{\mathrm{Lip}_0(M)}$ ja $\delta > 0$ nii, et $f_\mu(\mu) = 1$ ning iga $u, v \in M$, $u \neq v$, ja $\alpha \in (0, \delta)$ korral, mille puhul $m_{uv} \in S(f_\mu, \alpha)$, leiduvad $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ nii, et $x_i \neq y_j$, $m_{x_i y_j} \in \mathcal{M}(\mu)$ ja
$$(1-\alpha)\max\{d(x_i, v) + d(y_j, v), d(x_i, u) + d(y_j, u)\} < d(x_i, y_j).$$
Iga $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ korral, mille puhul $m_{x_i y_j} \in \mathcal{M}(\mu)$, olgu $l_{ij} \in (0, 1]$ ja $\nu_{ij} \in S_{\mathcal{F}(M)}$ sellised, et $\mu = l_{ij} m_{x_i y_j} + (1 - l_{ij})\nu_{ij}$.

Fikseerime $\varepsilon > 0$ ja $B_{\mathcal{F}(M)}$ viilu $S = S(f, \alpha)$ nii, et $\mu \in S$. On teada (vt [8, lemma 2.1]), et α võime valida kui tahes väikese. Seega olgu α selline, et $\alpha < \delta$ ja
$$\alpha < 1 - \sqrt{1/\left(\frac{\varepsilon}{\max_{i,j\in\{1,\ldots,n\}} d(x_i, y_j)} + 1\right)}.$$
Siis
$$\left(\frac{1}{(1-\alpha)^2} - 1\right) \max_{i,j\in\{1,\ldots,n\}} d(x_i, y_j) < \varepsilon.$$
Tähistame $g := f + f_\mu$. Siis $g(\mu) = f_\mu(\mu) + f(\mu) > 2 - \alpha$ ja
$$\frac{g}{\|g\|}(\mu) > \frac{2-\alpha}{\|g\|} = 1 - \left(1 - \frac{2-\alpha}{\|g\|}\right),$$
seega $\mu \in S(g/\|g\|, 1 - (2-\alpha)/\|g\|)$. On teada (vt [9, märkus 2.4]), et kui X on Banachi ruum, $A \subset B_X$, $\overline{\operatorname{conv}}(A) = B_X$, x on Δ-punkt ja x kuulub mingisse ühikkera viilu S, siis iga $\eta > 0$ korral leidub $y \in S \cap A$ nii, et $\|x - y\| > 2 - \eta$. Seega leiduvad $u, v \in M$ nii, et $u \neq v$, $g(m_{uv}) > 2 - \alpha$ ja
$$\|\mu - m_{uv}\| \geqslant 2 - \alpha \min\{l_{ij} : i, j \in \{1, \ldots, n\}, m_{x_i y_j} \in \mathcal{M}(\mu)\}.$$

Nüüd $f_\mu(m_{uv}) > 1-\alpha$ ja $f(m_{uv}) = g(m_{uv}) - f_\mu(m_{uv}) > 2-\alpha-1 = 1-\alpha$ ehk $m_{uv} \in S(f,\alpha)$. Näitame nüüd, et $d(u,v) < \varepsilon$.

Kuna $f_\mu(m_{uv}) > 1-\alpha$ ja $\alpha \in (0,\delta)$, leiduvad $i,j \in \{1,\dots,n\}$ nii, et $x_i \neq y_j$, $m_{x_iy_j} \in \mathcal{M}(\mu)$ ja

$$(1-\alpha)\max\{d(x_i,v)+d(y_j,v), d(x_i,u)+d(y_j,u)\} < d(x_i,y_j). \tag{4.12}$$

Siis $\|\mu - m_{uv}\| \geqslant 2-\alpha l_{ij}$ ning võrdusest $\mu = l_{ij}m_{x_iy_j} + (1-l_{ij})\nu_{ij}$ saame

$$\begin{aligned} 2-\alpha l_{ij} &\leqslant \|\mu - m_{uv}\| \leqslant l_{ij}\|m_{x_iy_j} - m_{uv}\| + (1-l_{ij})\|\nu_{ij} - m_{uv}\| \\ &\leqslant l_{ij}\|m_{x_iy_j} - m_{uv}\| + 2 - 2l_{ij}, \end{aligned}$$

seega $\|m_{x_iy_j} - m_{uv}\| \geqslant 2-\alpha$. Kuna $m_{x_iy_j} \in \mathcal{M}(\mu)$, siis $f_\mu(m_{x_iy_j}) = 1$ ja

$$\|m_{x_iy_j} + m_{uv}\| \geqslant f_\mu(m_{x_iy_j}) + f_\mu(m_{uv}) > 2-\alpha.$$

Lemmast 1.11 järeldub

$$\begin{aligned} \min\{d(x_i,v)+&d(y_j,u), d(x_i,u)+d(y_j,v)\} \\ &\geqslant d(x_i,y_j) + d(u,v) - \alpha\max\{d(x_i,y_j), d(u,v)\} \\ &> (1-\alpha)(d(x_i,y_j)+d(u,v)). \end{aligned} \tag{4.13}$$

Kuna $\alpha < 1$, siis võrratus 4.13 annab

$$d(x_i,v)+d(y_j,u)+d(x_i,u)+d(y_j,v) > 2(1-\alpha)\big(d(x_i,y_j)+d(u,v)\big)$$

ja võrratus 4.12 annab

$$d(x_i,v)+d(y_j,u)+d(x_i,u)+d(y_j,v) < \frac{2d(x_i,y_j)}{1-\alpha}.$$

Järelikult

$$\begin{aligned} d(u,v) &< \frac{d(x_i,v)+d(y_j,u)+d(x_i,u)+d(y_j,v)}{2(1-\alpha)} - d(x_i,y_j) \\ &< \frac{2d(x_i,y_j)}{2(1-\alpha)^2} - d(x_i,y_j) \\ &\leqslant \left(\frac{1}{(1-\alpha)^2} - 1\right) \max_{i',j' \in \{1,\dots,n\}} d(x_{i'},y_{j'}) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Seega leidsime $u,v \in M$ nii, et $u \neq v$, $m_{uv} \in S$ ja $d(u,v) < \varepsilon$. $\square$

Kasutatud kirjandus

[1] R. J. Aliaga, C. Gartland, C. Petitjean, and A. Procházka, *Purely 1-unrectifiable metric spaces and locally flat Lipschitz functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **375** (2022), no. 5, 3529–3567. MR 4402669

[2] R. J. Aliaga and A. J. Guirao, *On the preserved extremal structure of Lipschitz-free spaces*, Studia Math. **245** (2019), no. 1, 1–14. MR 3863062

[3] R. J. Aliaga, C. Noûs, C. Petitjean, and A. Procházka, *Compact reduction in Lipschitz-free spaces*, Studia Math. **260** (2021), no. 3, 341–359. MR 4296732

[4] R. J. Aliaga and A. Rueda Zoca, *Points of differentiability of the norm in Lipschitz-free spaces*, J. Math. Anal. Appl. **489** (2020), no. 2, 124171, 17. MR 4095811

[5] L. García-Lirola, C. Petitjean, A. Procházka, and A. Rueda Zoca, *Extremal structure and duality of Lipschitz free spaces*, Mediterr. J. Math. **15** (2018), no. 2, Paper No. 69, 23. MR 3778926

[6] L. García-Lirola, A. Procházka, and A. Rueda Zoca, *A characterisation of the Daugavet property in spaces of Lipschitz functions*, J. Math. Anal. Appl. **464** (2018), no. 1, 473–492. MR 3794100

[7] R. E. Huff and P. D. Morris, *Geometric characterizations of the Radon-Nikodým property in Banach spaces*, Studia Math. **56** (1976), no. 2, 157–164. MR 412776

[8] Y. Ivakhno and V. Kadets, *Unconditional sums of spaces with bad projections*, Visn. Khark. Univ., Ser. Mat. Prykl. Mat. Mekh. **645** (2004), no. 54, 30–35 (English).

[9] M. Jung and A. Rueda Zoca, *Daugavet points and Δ-points in Lipschitz-free spaces*, Studia Math. **265** (2022), no. 1, 37–55. MR 4420901

[10] T. Veeorg, *Characterizations of Daugavet points and delta-points in Lipschitz-free spaces*, Studia Math. **268** (2023), no. 2, 213–233. MR 4516191

[11] ———, *A note on Delta-points in Lipschitz-free spaces*, Acta Comment. Univ. Tartu. Math. **29** (2025), no. 1, 121–129. MR 4915362

[12] N. Weaver, *Lipschitz algebras*, second ed., World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2018. MR 3792558

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Mathilda Rebane,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose

   „Daugaveti- ja delta-punktide kirjeldused
   Lipschitzi-vabades Banachi ruumides",

   mille juhendajad on Rainis Haller ja Triinu Veeorg, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguste kehtivuse lõppemiseni.

2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commonsi litsentsiga CC BY NC ND 3.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni

3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Mathilda Rebane

21.08.2025