Niedere Grössenrechnung.

Vom

Professor Dr. *M. G. von Paucker.*

In acht Abtheilungen.

Mitau, 1846.

Druck von J. F. Steffenhagen und Sohn.

Preis 75 Kop. S.

ESTICA
A-5757

Niedere Grössenrechnung.

Vom

Professor Dr. *M. G. von Paucker.*

In acht Abtheilungen.

Mitau, 1846.

Druck von J. F. Steffenhagen und Sohn.

Preis 75 Kop. S.

Der Druck dieser Schrift wird hiemit gestattet.

Riga, am 29. Jan. 1846.

Dr. *C. E. Napiersky*,
Censor.



ПРЕДИСЛОВІЕ.

Чѣмъ болѣе наука расширяется, чѣмъ болѣе отдѣльныя ея части, въ обширномъ своемъ объемѣ, строятся въ огромное исполинское зданіе, тѣмъ менѣе остается училищу возможности быть посторонним зрителемъ ея произведеній, тѣмъ болѣе обязаны имѣющіе въ рукахъ средства способствовать къ облегченію уразумѣнія.

Въ послѣднія сорокъ лѣтъ наука и преподаваніе ея совершенно измѣнились въ своемъ видѣ. Ученикъ обязанъ теперь учить такъ много и столько разнородныхъ предметовъ, что занятія его нельзя мѣрять по прежней мѣркѣ, недопустивъ умственнаго насилія, которое необходимо влечетъ за собою разслабленіе тѣлесныхъ силъ.

Еще за сорокъ лѣтъ могли мы преподавать Науку знанія (Математику) въ томъ смыслѣ, который составляетъ главную ея заслугу и даетъ ей особенную прелесть, именно: какъ науку изобрѣтенія. Для этого достаточно было нѣсколько размышленій и задачъ. При всемъ томъ наибольшія усилія учителя всегда доставались на пользу только не многимъ, болѣе способнымъ ученикамъ. Для прочихъ же они служили большею частію только полезнымъ препровожденіемъ времени.

Теперь совсѣмъ иначе. Разсмотримъ ближе только учебники о Наукѣ знанія (математическіе) первостепенныхъ наставниковъ нашего времени. Даже по устраненіи всѣхъ излишнихъ прибавленій, которыми они изъ такъ называемой »основательности« считали необходимымъ украшать свое преподаваніе, все еще остается столько, что, право, нельзя винить начинающаго, если онъ съ ужасомъ отступаетъ отъ нихъ.

Наука знанія всѣ свои силы обратила на приложеніе. Весь свой вѣсъ она полагаетъ въ интегральномъ исчисленіи. Весь объемъ Образословія (Геометріи) и Науки о величинахъ (Алгебры) она почитаетъ только нужными мало цѣнимыми первыми ступенями, почти какъ искусный счетчикъ таблицу умноженія.

Итакъ чего въ настоящее время должно требовать отъ наставника? Послѣ тридцатишестилѣтняго преподаванія мнѣ будетъ позволено сказать свое мнѣніе. Ни мало не нарушая основательности, напротивъ того въ смыслѣ этой-то самой основательности наставникъ и долженъ устранять все то, что отвлекаетъ отъ главной цѣли, отъ легкости въ приложеніи. Основныя истины онъ долженъ изложить въ существенной ихъ связи, въ такой оболочкѣ, чтобы онѣ были легко доступны самому обыкновенному дарованію. Эти основныя истины онъ долженъ сократить въ возможно меньшее число, такъ чтобы можно было пройти ихъ въ

половину всего назначеннаго для преподаванія времени, а остальную половину употребить на повтореніе опыхъ.

Эта мысль руководила меня при составленіи Образословія (Геометріи), которое недавно напечатано было у Брокгауза. Я желаю, чтобы съ этой самой точки смотрѣли и на предлагаемую здѣсь книгу Науку о величинахъ (Алгебру). Мнѣ остается еще только объяснить содержаніе и способъ употребленія оной.

Третій разрядъ (классъ) имѣетъ 2 часа въ недѣлю для *перваго отдѣленія* »Степень«. Оно содержитъ 22 статьи до 19 стр. Я надѣюсь, что эти основныя размышленія я изложилъ какъ почти съ Эвклидовскою строгостію, такъ и въ самой возможной простотѣ; 100 примѣровъ стр. 23—27 представляютъ достаточное упражненіе.

Отысканіе наивысшаго общаго дѣлителя 23 изложено отступающимъ отъ обыкновеннаго, но надѣюсь болѣе основательнымъ образомъ. Задача весьма важная для приложенія. Но если время не позволитъ, то она можетъ быть предоставлена только болѣе даровитымъ ученикамъ.

Третій разрядъ имѣетъ еще 3 часа въ недѣлю для *втораго отдѣленія* »низшее уравненіе«, т. е. уравненія первой и второй степени, которыя въ 18 статьяхъ стр. 23—40 изложены въ совершеннѣйшей простотѣ. Для упражненія стр. 41—46 сто примѣровъ.

Второй разрядъ (классъ) имѣетъ 2 часа въ недѣлю въ первомъ полугодіи. Для этого назначено *третье отдѣленіе* »строка«. Первыя пять статей 32—36 о Показателяхъ степени (Логариѳмахъ), выводимыхъ непосредственно изъ степени. Для болѣе опытныхъ учениковъ присоединены и строгія доказательства, показывающія, что эти предложенія имѣютъ силу какъ для измѣримыхъ, такъ и для неизмѣримыхъ чиселъ, обстоятельство опускаемое въ обыкновенныхъ учебникахъ.

Въ двухъ статьяхъ 37, 38 излагаются разностная (ариѳметическая) строка перваго разряда и краткая (геометрическая) строка; въ 39 перестановленіе (Permutation), въ 40 сочетаніе (Variation), въ 41 соединеніе (Combination), въ 42 двучленъ (биномъ) для цѣлыхъ показателей. Важность этого предложенія вполнѣ выказывается въ его общности. Это строгое общее доказательство представлено въ 43, 44 въ такой простотѣ и такъ наглядно, какъ не встрѣчается въ обыкновенныхъ учебникахъ. Не смотря на то лучше предоставить его способнѣйшимъ ученикамъ. Со всѣми же можно пройти упражненія, относящіяся къ общему предложенію стр. 91—94.

Теперь слѣдуетъ 45 важное и удобопонятно доказанное предложеніе о высшей разностной строкѣ, съ приложеніемъ ея къ вставленію (Interpolation) 46, при чемъ можно обойтись безъ всѣхъ искуственныхъ спосо-

бовъ, которые встрѣчаются въ сочиненіяхъ новѣйшихъ изслѣдователей знанія.

Статьи 47, 48 объясняютъ умноженіе двухъ или многихъ разностныхъ строкъ и тѣмъ ведутъ удобопонятнѣйшимъ образомъ въ 49 къ числамъ поверхности и пространства, въ 50 къ числу слоевъ, въ 51, 52 къ итогу (суммѣ) степеней простыхъ чиселъ съ цѣлыми показателями. Эта послѣдняя задача, важная для примѣненія, можетъ быть однако же предоставлена только болѣе даровитымъ ученикамъ.

Второй разрядъ имѣетъ еще часъ въ недѣлю во второмъ полугодіи. Для этого я назначаю три короткія, но важныя отдѣленія, а именно:

Четвертое отдѣленіе »равномѣріе« 53 до 63, т. е. рѣшеніе неопредѣленныхъ уравненій первой степени. Дальнѣйшій разборъ этого, въ новѣйшее время столь развитаго предмета, именно переходъ къ высшимъ степенямъ, я оставляю для другой книги. Но даже въ немногихъ здѣсь предлагаемыхъ статьяхъ знатокъ найдетъ кое-что новое.

Пятое отдѣленіе »приложеніе Показателей степени (логариѳмовъ) къ торговымъ вычисленіямъ« даетъ въ 64 приложеніе къ цѣпному правилу купеческихъ вычисленій, въ 65, 66 вычисленіе сложнаго роста; все это по возможности облегчено для выполненія.

Шестое отдѣленіе »Многочленное уравненіе первой степени« содержитъ весьма упрощенное и

во многихъ отношеніяхъ обогащенное новыми взглядами рѣшеніе задачи, весьма важной для приложенія. Именно на ней основывается наше знаніе важнѣйшихъ данныхъ Звѣздословія (Астрономіи) и Науки о явленіяхъ (Физики).

До сихъ поръ было предуготовленіе. Не достаетъ еще только заключенія цѣлаго. За нѣсколько лѣтъ предъ симъ мы не могли бы имѣть его во всей полнотѣ, но теперь къ щастію обладаемъ онымъ. Для этого Первый разрядъ (классъ) имѣетъ одинъ часъ въ недѣлю. Такая краткость времени требуетъ существеннаго сокращенія преподаванія, что, какъ знатокъ можетъ замѣтить, достигнуто не въ ущербъ основательности, именно:

Седьмое отдѣленіе »Уравненіе высшихъ степеней«. Въ 72 статьѣ необходимыя объясненія, въ 73 рѣшеніе уравненія второй степени съ дѣйствительными корнями посредствомъ чиселъ угловъ (тригонометрическихъ), въ 74 уравненіе второй степени съ мнимыми корнями, и примѣчательное его свойство, въ 75 рѣшеніе уравненія третей степени, въ 76 доказательство онаго, въ 77 рѣшеніе уравненія четвертой степени по новому способу, въ 78 обыкновенное рѣшеніе онаго новымъ образомъ изложенное, въ 79, 80 весьма упрощенный, для начинающаго доступный способъ Грефе къ рѣшенію уравненія всякой высшей степени.

Къ этому присоединены многіе, подробно изложенные примѣры, какихъ нельзя найти ни въ одномъ учебникѣ объ этомъ важномъ способѣ. Въ 81 дальнѣйшее вычисленіе каждаго отдѣльнаго приближеннаго корня, въ 82 приложеніе къ мнимому корню, въ 83 точнѣйшее вычисленіе всѣхъ корней вмѣстѣ. Эти оба послѣдніе способа новы.

Здѣсь приложены болѣе 100 упражненій для уравненія третей степени, сверхъ 50 для уравненія четвертой степени и наконецъ нѣсколько для уравненій высшихъ степеней.

Итакъ ученикъ въ этихъ немногихъ листкахъ седьмаго отдѣленія получаетъ все, что было изобрѣтено замѣчательнѣйшими изслѣдователями знанія (математиками) всѣхъ временъ для рѣшенія главной задачи Науки о величинахъ, и при томъ такъ, что все производство будетъ для него не труднѣе всякого обыкновеннаго вычисленія треугольниковъ.

По сему все прочее, находящееся въ сочиненіяхъ Ньютона, Декарта, Эйлера, Лагранжа, Фурье, Бауера, Грефе, Штурма, Абеля и др. о предѣлахъ корней и преобразованіи ихъ, имѣетъ почти еще только историческую цѣну.

Въ заключеніе нельзя умолчать о вопросѣ, который обыкновенно уже занимаетъ любопытство начинающаго. Итакъ въ послѣднемъ *осьмомъ отдѣленіи* я говорю о »вычисленіи Показателей степени (Лога-

ріемовъ)«. Оно основывается въ 84 на развитой посредствомъ двучлена строкѣ, выражающей показателя числа посредствомъ этого числа. Въ 85 изложено возвращеніе этой строки, которое очень важно для дальнѣйшихъ примѣненій. Въ 86 показано, какъ строка 84 служитъ къ вычисленію Показателей степени, и какъ изъ нея съ величайшею легкостію можно найти на пр. Показателей степени первыхъ 12 цѣлыхъ чиселъ до 9 членовъ.

Митава, 21. Апрѣля 1846. года.

Zuvor.

Je mehr sich die Wissenschaft erweitert, je mehr sich ihre einzelnen Gliederungen im Selbstbewufstsein des ungeheuern Umfangs zum gewaltigen Riesenbau aufthürmen, desto weniger bleibt es der Schule möglich ihre Ergebnisse ganz von sich fern zu halten, desto mehr wird es Pflicht derjenigen die das Werkzeug handhaben, zur Erleichterung des Verständnisses mitzuwirken.

Seit vierzig Jahren haben die Wissenschaft und ihr Unterricht ihre Gestalt völlig verändert. Der Jüngling hat jetzt so vieles und namentlich so *vielerlei* pflichtgemäfs zu lernen, dafs der frühere Maafsstab an seine Arbeiten nicht mehr angelegt werden darf ohne eine geistige Gewaltthätigkeit zu begehen, welche sich nur zu bald durch ein Untergraben der leiblichen Kräfte rächt.

Noch vor vierzig Jahren konnten wir die *Wissenslehre* (Mathematik) in dem Sinne vortragen der ihr Hauptverdienst ausmacht und ihr den eigenthümlichsten Reiz verleihet, nämlich als die *Kunst des Erfindens*. Dazu war ein geringer Umfang von Betrachtungen und Aufgaben ausreichend. Dennoch kamen die besten Anstrengungen des Lehrers immer nur wenigen begabtern Zöglingen zu Gute, bei den übrigen wirkten sie meist nur als nützliche Ausfüllung der Zeit.

Nicht so jetzt. Man fasse nur die wissensmäfsigen (mathematischen) Unterrichtsschriften der hochgestelltesten Schulmänner unsrer Zeit etwas näher ins Auge. Selbst nach Wegräumung alles überflüssigen Beiwerks, womit sie aus sogenannter »Gründlichkeit« ihren Vor-

trag verzieren zu müssen meinen, bleibt immerhin soviel übrig dafs es dem Anfänger wahrlich nicht zu verdenken ist wenn er davor zurückbebt.

Die Wissensforschung hat ihre ganze Kraft der Ausübung zugewandt. Ihr Hauptgewicht ruht in der Rückleitungslehre (Integralrechnung). Den ganzen Umfang der Bildlehre (Geometrie) und Gröfsenrechnung (Algebra) sieht sie nur als nothwendige etwas geringschätzig betrachtete erste Stufen an, etwa wie der fertige Rechner das Einmaleins.

Was darf nun in dem gegenwärtigen Augenblick von dem Lehrer erwartet werden? Nach 36jährigem Unterricht wird es mir verstattet sein meine Meinung abzugeben. Ohne im Geringsten etwas von der Gründlichkeit aufzuopfern, ja eben im Sinne derselben beseitige der Lehrer alles was von dem einen Hauptziele, von der Geschmeidigkeit in der Ausübung abführt. Die grundlegenden Wahrheiten stelle er in ihrem wesenhaften Zusammenhange auf, in einem Gewande in welchem sie auch der gewöhnlichsten Fassungskraft leicht zugänglich sind. Diese Grundwahrheiten führe er auf die möglich kleinste Anzahl zurück, so dafs sie etwa in der halben für den Unterricht bestimmten Zeit vorgetragen in der andern wiederholt werden können.

Dieses war der Gedanke der mich bei der »Bildlehre« leitete welche so eben bei Brockhaus gedruckt worden ist. Dieselbe Stellung ist es auch aus welcher ich das hier gegebene Buch »die Gröfsenrechnung« betrachtet zu sehen wünsche.

Es bleibt mir nun noch übrig den Inhalt desselben und seine Benutzungsart anzugeben.

Die *Mittelstelle* (Tertia) hat 2 Wochenstunden für die *erste Abtheilung* »Die Höhe«. Diese enthält 22 Sätze bis S. 19. Ich hoffe diese grundlegenden

Betrachtungen eben so mit fast euklidischer Strenge als in möglichster Einfachheit dargestellt zu haben; 100 Beispiele S. 23 — 27 gewähren hinlängliche Uebung.

Die Bestimmung des höchsten Gemeintheilers 23 ist auf eine von der gewöhnlichen abweichende ich hoffe gründlichere Art gegeben. Die Aufgabe ist für die Ausübung sehr wichtig; jedoch wenn es an Zeit gebricht mag sie den begabtern Zöglingen überlassen bleiben.

Die Mittelstelle hat noch 3 Wochenstunden für die *zweite Abtheilung* »Die niedere Gleichung« d. h. die Gleichungen der ersten und zweiten Stufe, welche in 18 Sätzen S. 29 — 40 in völligster Anfänglichkeit gegeben sind. Zur Uebung S. 41 — 46 hundert Beispiele.

Die *Vorstelle* (Secunda) hat 2 Wochenstunden im ersten Halbjahre. Hiezu ist die *dritte Abtheilung* »Die Reihe« bestimmt. Zuerst fünf Sätze 32. bis 36. von den Höhennamen (Logarithmen) in ihrer unmittelbaren Ableitung von der »Höhe«. Für geübtere Zöglinge sind auch die völlig strengen Beweise beigefügt welche zeigen dafs diese Sätze eben so für maafshafte als für unmaafshafte Zahlen gelten, ein Umstand welcher in den gewöhnlichen Lehrbüchern übergangen wird.

In zwei Sätzen 37. und 38. werden die gleichgemessene Reihe ersten Orts (die arithmetische) und die gleichgebundene Reihe (die geometrische) gegeben, in 39. die Wechselung (Permutation) in 40. die Wandlung (Variation) in 41. die Gliederung (Combination) in 42. der Stufensatz (Binomialsatz) für ganze Namen. Die volle Wichtigkeit dieses Satzes zeigt sich erst in seiner Allgemeinheit. Dieser strenge allgemeine Beweis ist hier in 43. u. 44. und zwar so anfänglich und anschaulich wie er gewöhnlich nicht in den Lehrbüchern

vorkommt. Dessen ungeachtet wird man wohl thun ihn nur den begabteren Zöglingen zu überlassen. Mit allen Zöglingen aber kann man die auf den allgemeinen Satz sich beziehenden Uebungen S. 91 — 94 durchgehen.

Nun folgt 45. der wichtige und allgemein fafslich bewiesene Satz von der obern gleichgemessenen Reihe nebst dessen Anwendung auf die Einschaltung 46., wobei man alle künstlichen Verfahrungsarten entbehren kann die in den Schriften der neuern Wissensforscher vorkommen.

Die Sätze 47. 48. begründen die Bindung zweier oder mehrerer gleichgemessenen Reihen und führen dadurch in einer fafslichern Art als dieses gewöhnlich der Fall ist in 49. zu den Eben- und Raumzahlen, in 50. zur Haufenzahl, in 51. 52. zur Anlage der ganznamigen Höhen der schlichten Zahlen. Diese letztere Aufgabe ist zwar für die Ausübung wichtig, mag aber ohne Nachtheil den begabtern Zöglingen überlassen bleiben.

Die Vorstelle hat im zweiten Halbjahre noch eine Wochenstunde. Hiezu bestimme ich drei kurze aber wichtige Abtheilungen und zwar:

Die *vierte Abtheilung* »Die Mefsgleichung« 53—63. nämlich die Auflösung der unbestimmten Gleichungen erster Stufe. Die weitere Ausführung dieser in neuerer Zeit so sehr ausgebildeten Betrachtung, namentlich der Uebergang zu den höhern Stufen, bleibt einem andern Buche vorbehalten. Aber auch selbst in den wenigen hier gegebenen Sätzen wird der Kenner einiges Neue finden.

Die *fünfte Abtheilung* »Anwendung der Höhennamen auf Handelsrechnungen« giebt in 64. die Anwendung auf den Kettensatz für kaufmännische Rechnungen, in 65. die höhere Zinsrechnung, in 66. die Steuerrechnung,

alles für die Ausübung so geschmeidig als möglich eingerichtet.

Die *sechste Abtheilung* »Die mehrstellige Einstufung« enthält eine sehr vereinfachte und in mehrerer Hinsicht durch neue Betrachtungen bereicherte Auflösung einer Aufgabe welche für die Ausübung von höchster Wichtigkeit ist. Namentlich gründet sich auf sie unsre Kenntnifs der wichtigsten Thatsachen der Sternkunde und Erscheinungslehre (Physik).

Bis hieher die Vorübung. Es fehlt noch der Schlufsstein des Ganzen. Dieser hätte einige Jahre zurück noch nicht in seiner Vollständigkeit gegeben werden können. Jetzt sind wir glücklicher Weise in seinem Besitz. Hiezu hat die *Oberstelle* (Prima) eine Wochenstunde. Diese Kürze der Zeit erfordert eine wesentliche Zusammenziehung des Vortrags, welche wie der Kenner finden wird, unbeschadet der Gründlichkeit, erlangt worden ist, nämlich:

Siebente Abtheilung »Die obere Stufung«. In 72. die nothwendigen Erklärungen, in 73. die Auflösung der wirkhaften Zweistufung durch Neigungszahlen, in 74. die Sinnstufung mit ihren bemerkenswerthen Eigenschaften, in 75. die Auflösung der Dreistufung, in 76. deren Beweise, in 77. die Auflösung der Vierstufung auf eine neue Art, in 78. die gewöhnliche Auflösung derselben neu aufgefafst, in 79. u. 80. das sehr vereinfachte und auch dem Anfänger zugänglich gemachte Verfahren Gräffes zur Auflösung jeder obern Stufung.

Hiezu zahlreiche ganz durchgeführte Beispiele, wie sie noch in keinem Lehrbuche von diesem wichtigen Verfahren angetroffen werden. In 81. die weitere Berechnung jeder einzelnen genäherten Wurzel, in 82. die Anwendung auf die Sinnwurzel, in 83. die Ver-

besserung sämmtlicher Wurzeln. Diese beiden letztern Verfahrungsarten sind neu.

Beigegeben sind über 100 Uebungen für die Dreistufung, über 50 für die Vierstufung, sodann mehrere für die obern Stufungen.

Der Zögling erhält also in diesen wenigen Blättern der siebenten Abtheilung das was die bedeutendsten Wissensforscher aller Zeiten zur Auflösung der Hauptaufgabe der Gröfsenrechnung erfunden haben. Er erhält es in dem Maafse für die Ausübung zurecht gelegt, dafs die Ausführung nicht mehr Mühe macht als jede gewöhnliche Dreiecksberechnung.

Alles übrige was in den Schriften von Newton, Descartes, Euler, Lagrange, Fourier, Bauer, Gräffe, Sturm, Abel u. a. über die Wurzelgrenzen und ihre Umbildung vorkommt hat sonach fast nur noch geschichtlichen Werth.

Zum Schlufs konnte eine Frage nicht übergangen werden welche gewöhnlich schon die Wifsbegierde des Anfängers zu beschäftigen pflegt. Ich zeige also in der letzten *achten Abtheilung* »Die Berechnung der Höhennamen«. Diese gründet sich in 84. auf die mittelst des Stufensatzes entwickelte Reihe welche den Höhennamen einer Zahl durch diese Zahl darstellt. In 85. wird die Umkehrung dieser Reihe gezeigt, welche für spätere Anwendung Wichtigkeit hat. In 86. wird gezeigt wie die Reihe 84 zur Berechnung der Höhennamen dient und wie aus ihr z. B. die Höhennamen der ersten 12 ganzen Zahlen mit der gröfsten Leichtigkeit auf 9 Stellen gefunden werden.

Mitau, 21. April 1846.

G. v. Paucker.

Verzeichnifs der Schriften des Verfassers aufser den in verschiedenen Flugblättern zerstreuten Aufsätzen.

1) *Ueber den Sehungsbogen der Fixsterne.* In Pfaff astron. Beiträgen. Dorpat 1806. *No.* II. 55 — 79.

Aus der beobachteten Zeit des Verschwindens eines Sterns in der Morgendämmerung wird der Sehungsbogen berechnet, d. h. die Sonnentiefe bei welcher der im Horizont befindliche Stern verschwindet.

2) *Nova explicatio phänomeni elasticitatis corporum rigidorum.* Dorpati 1813. 4° 76.

Zur Erlangung der Gelehrtenwürde. Die erste strenge Erklärung der Federung. Die Körper ab ziehen den Körper c an welcher mit ihnen ein gleichschenkliges Dreieck bildet. Es sei d die Mitte von ab, und $ad = 1$, $cd = x$, $1+x^2 = y^2$, $m+1 = n$, so ist die Kraft mit welcher c nach cd gezogen wird gleich $k \cdot \frac{x}{yn}$. Sie wird ein Gröstes für $x = \frac{1}{\sqrt{m}}$.

3) *Die Theorie der Derivationen.* Mitau 1813. 4° 43.

4) *Astronomische Beobachtungen; neue Methoden zur Prüfung des Ganges der Uhren und zur Berechnung der Parallaxen.* Im Berliner astr. Jahrbuch 1818.

5) *Die geographische Länge und Breite des Cap Domesnäfs von Kurland.* In Lindenau und Bohnenberger Zeitschrift für Astronomie. 1816. Bd. 3. 361.

6) *Rede über Astronomie.* Mitau 1816. 4° 16 S.

Gedanken über die Fortschritte der Astronomie, über die Entstehung des Planeten- und Kometensystems u. s. w.

7) *Ueber astronomisch-trigonometrische Landesvermessungen.* Mitau 1817. 27.

Enthält unter andern ein einfaches Verfahren zur Mittagsverbesserung, und die Breite von Domesnäfs.

8) *Bestimmung der Phasen einer Sonnenfinsternifs* und Anwendung auf die S. F. vom 7. Sept. 1820. In den »Jahresverhandlungen« der kurl. Ges. f. L. u. K. Mitau 1818. I. 4° 23.

Durch drei gegebene scheinbare Mondörter wird ein Kreisbogen gelegt und dieser als scheinbare Mondbahn angenommen.

9) *Neuer und allgemeiner Beweis des Binomialsatzes.* Ebendaselbst. 21.

10) *Neuer geometrisch-statischer Beweis des Parallelogramms der Kräfte.* Ebendaselbst 11.

11) *Anwendung der Methode der kleinsten Quadratsumme auf physicalische Beobachtungen.* Mitau, 1819. 4° 32. Ausdrücke für die Ausdehnung der Flüssigkeiten bei verschiedenen Temperaturen, für die Dichtigkeit des Wassers und die Federkraft des Wasserdampfs u. s.w.

Diese kleine Schrift fand damals vielen Beifall bei den Physikern. Siehe neues physicalisches Wörterbuch I. 1825. 608. 901. Mathemat. Wörterbuch. 5. 1026. Sie ist vergriffen

12) *Geometrische Verzeichnung des regelmäfsigen 17- und 257-Ecks in den Kreis.* In den »Jahresverhandlungen« d. k. G. f. L. u. K. II. 1820. 4° 60. Darin ein Schreiben von Gaufs mit dessen Berechnung des 257-Ecks.

13) *Mathematische Gedankentafel.* Mitau 1820. 8° 55.

Abrifs der Geometrie, Arithmetik, Trigonometrie, Stereometrie, Algebra, math. Geographie, Optik, Katoptrik, Dioptrik, Mechanik, Astronomie.

14) *Geometrische Auflösung kubischer Gleichungen.* Mitau 1821. 4° 16.

15) *Mémoire sur la résolution géométrique des équations du troisième degré* et sur les propriétés principales de ces équations demontrées par la géométrie élémentaire. Presenté à la Conférence le 15 Janv. 1823. In den »Mém. de l'Acad. des Sciences de St. Pétersbourg« X. 1826. 158 — 260. 12 pl.

Enthält erschöpfende Betrachtungen über diesen Gegenstand, die Verzeichnung des 7-Ecks, 13-Ecks u. s. w.

16) *Die ebene Geometrie* der graden Linie und des Kreises. Königsberg 1823. 298. 8°

Enthält in möglichster Vollständigkeit alle von den ältesten Zeiten bis auf die damalige Zeit aufgefundenen Sätze. Eine ausführliche Beurtheilung dieses Buchs in der Leipziger Literaturzeitung 1826. *No.* 23.

17) *Ostertafel* des julianischen Kalenders für immerwährende Zeiten der Zukunft uud Vergangenheit. Nach einer neuen Einrichtung berechnet. Anhang zum mit. Kalender v. 1823.

18) *Authentische Bestimmungen inländischer Maafse und Gewichte.* In Raupach N. dörpt. Museum. II. 1824.

19) *Ueber das Mittagsfernrohr auf der Sternwarte zu Mitau; Resultate der Aberrationstheorie u. s. w.* Im Berliner astron. Jahrb. 1825. 12.

20) *Mémoire sur une question de Géométrie relative aux tactions des cercles.* Lue 2 Mai 1827. In den »Mém. des Savans étrangers de St. Petersbourg«. T. I. 1831. 4° 84. 5 pl.

Enthält eine erschöpfende Untersuchung der Malfattischen Aufgabe welche die Einschreibung dreier Berührungskreise in ein Dreieck verlangt. Der Verf. wurde für diese Arbeit von der kön. Academie der Wissensch. zu *Neapel* mit einem anerkennenden Schreiben und der Zusendung ihrer Schriften beehrt. Gleichzeitig (1826) gab *Steiner* eine andre Auflösung; dann *Zornow* (1833) und *Adams* (1846).

21) *Ueber verschiedene Fragen welche sich auf den Auf- und Untergang der Sonne beziehen, nebst Beiträgen zur mathematischen Geographie Kurlands.*
Anhang zum Mit. Kalender von 1828.

22) *Die Polhöhe von Mitau nach einem Reichenbachschen Kreise.* Refractionstafeln, Zenithdistanzreductionen u. s. w. In Schumacher astr. Nachr. Bd. 7. *No.* 162 u. 165. Die Polhöhe ist hienach 56° 39′ 4″,508, mittl. Fehler 0″,145

23) *Practisches Rechenbuch für inländische Verhältnisse.*
I. Allgemeine Regeln. 1ste Aufl. 1834. 120. 2te Aufl. 1840. 205.
II. Handels- und Finanzrechnungen. 1836. 334.
III. Administrative und ökonomische Rechnungen. 1837. 122.
IV. Uebungsbeispiele. 1841. 110.

24) *Ueber L. Pansners »Versuch einer tabellarischen Uebersicht der russischen Münzen«.*
In Dorp. Jahrb. 1835. Bd. 4. St. 5. S. 420 — 452.

25) *Metrologie der alten Römer und Griechen.*
Vergleichung ihrer Maafse, Gewichte und Münzen mit den russischen. In Dorp. Jahrb. 1835. Bd. 5. St. 3. S. 177 — 217.
Die Ergebnisse dieser Schrift sind von dem berühmten Böckh anerkannt und an verschiedenen Stellen seiner »metrologischen Untersuchungen 1838« angeführt worden.

26) *Valvationstabelle römischer Denarien* nach russischem Gewicht und russ. Münze. In Dorp. Jahrb. 1835. Bd. 5. St. 4.

27) *Auszug aus der neuen Bearbeitung des ersten Theils der russischen Metrologie.* In dem Bericht der Acad. d. Wissensch. über die vierte Zuerkennung. St. Petersburg 1835. 37.
Die in mehrern Quartbänden nur handschriftlich vorhandene »*russische Metrologie*« des Verf. erhielt den ersten Demidowschen Preis 1831.

28) *Die Maafse und Gewichte Rufslands und seiner Provinzen.* In Schumachers Jahrbuch für 1836 und ein Nachtrag in dem für 1837.

29) *Geometrische Analysis.* Apollonius von Pergä Sectio rationis, spatii und determinata. Nebst einem Anhange zu der letztern. Neu bearbeitet. Leipzig 1837. 8° 164. 9 Kpf.

30) *Die Osterrechnung.* Vorschlag zur Einführung eines kirchlichen Kalenders und Osterkanons welche mit den Satzungen des nicänischen Conciliums besser als die bisherigen übereinstimmen. Leipzig 1837. 4° 96. XXXV Taf.

31) *Der Enkesche Komet bei seiner Wiedererscheinung im Jahre* 1838. In den »Sendungen« der Kurl. Ges. f. L. u. K. I. 1840. 26 — 32.

32) *Ueber die Grenzen der Sicherheit in den Thatsachen der neuern Astronomie.* Ebendaselbst 73 — 77.

33) *Weitere Berechnung verschiedener auf das Kreisverhältnifs begründeten Zahlen.* In Grunert Archiv für Mathematik. I. 1841.

34) *Fundamente der Geometrie.* Leipzig 1842. 8° 441 S. Mit 540 in den Text gedruckten Holzschnitten. Siehe Gr. Archiv. III. II. 154. III. 180.

Erster Theil. I. Congruenz.
II. Parallellinien und Aehnlichkeit.
III. Flächeninhalt gradliniger Figuren, einfache Eigenschaften des Kreises.
IV. Elemente der Geometrie des Raums.

Zweiter Theil. V. Metrik.
VI. Trigonometrie.
VII. Stereometrie.
VIII. Analysiometrie. (Steindruck, Vergriffen.)

35) *Coordinatenlehre.* IX. Cursus der Fundamente. Mitau 1842. 96. Siehe Gr. Archiv. IV. I. 195.

36) *Geometrisches A B C buch.* Hundert Hauptsätze aus den Fundamenten der Geometrie, Trigonometrie, Metrik und Stereometrie in ihrer Begründung. Leipzig 1842. 68. 4 Taf.

37) *Das A B C der Arithmetik.* Eine Zugabe zum praktischen Rechenbuch. Mitau 1842. 87.

38) *Die Gaufsischen Gleichungen der Bogendreiecke und zwei merkwürdige Sätze vom Raum.* Mitau 1844. 38. Siehe Gr. Archiv. VI. II. 337.

39) *Fünf berühmte Fragen aus der Bildlehre.* Mitau 1845. 16. Siehe Gr. Archiv. VIII. II. 451.

40) *Die Bildlehre.* Leipz. 1846. 8° 265. 100 S. Fügungen.
I. Stab und Ecke.
II. Doppelbildung.
III. Kreis und Abkreis.
IV. Maafsgleichungen.

Dieses Werk bezweckt eine gänzliche Umgestaltung der Bildlehre mit Inbegriff der Kegelschnitte. Die Bildlehre wird von der Maafsgleichung und dem Verhältnifsbegriff befreit. In diesem Sinne werden alle Haupteigenschaften der Kegelschnitte entwickelt.

41) *Die niedere Gröfsenrechnung.* Mitau 1846. 8° 216.
I. Die Höhe.
II. Die niedere Gleichung.
III. Die Reihe.
IV. Die Mefsgleichung.
V. Die Anwendung der Höhennamen auf Handelsrechnungen.
VI. Die mehrstellige Einstufung.
VII. Die Stufungen. Anhang: Von den Wurzelgrenzen.
VIII. Die Berechnung der Höhennamen.

Verbesserungen.

S. 23	Zeile 2 v. o.	statt $\sqrt[2]{a}$	lies $\sqrt[4]{a}$
- 52	- 3 - -	- die Kennzahl u.s.w. -	die niedrigste Stelle von 10, die übrigen von 9
- 95	- 16 - -	- $5 . 16 - 22$ . . . -	$5 . 20 - 22$
-187	letzte Zeile	- $x^2 - 6x + 3$ . . -	$x^2 - 6x + 13$

Zu 20* S. 199

Der Satz läfst sich auch also beweisen:

$$x^2 - 2rx + l^2 = (x - r)^2 + (l^2 - r^2)$$

Bei der Sinnstufung ist $l^2 - r^2$ setzhaft.

Also ist sie für jeden Werth von x setzhaft.

Erste Abtheilung.

Die Höhe.

1.

Eine Zahl der man jeden beliebigen Werth beilegt heifst eine ***allgemeine Zahl*** oder ***Gröfse.*** Eine Zusammensetzung von Gröfsen heifst ein ***Ausdruck*** (Formel). Ein Ausdruck läfst den Einflufs erkennen welchen jede einzelne Gröfse auf das Ergebnifs hat. Die Gröfsen werden durch Buchstaben bezeichnet.

Die Vereinigung mehrerer Gröfsen zu einer Gesammtgröfse durch Zuzählen heifst die ***Anlegung*** (Addition). Sie wird durch eine Lothung (+) bezeichnet. Die angelegten Gröfsen heifsen ***Beisätze*** (Summanden). Das Ergebnifs der Anlegung heifst die ***Anlage*** (Summe). Das Zeichen der Gleichheit ist ein Doppelband (=). Z. B.

a mit b giebt c

wird bezeichnet $a + b = c$

Die Wegnahme einer Gröfse von einer andern heifst die ***Abziehung*** (Subtraction). Die Gröfse von welcher weggenommen wird heifst der ***Ueberzug*** (Minuendus). Die abgezogene Gröfse heifst der ***Abzug*** (Subtractor). Das Zeichen der Abziehung ist ein Band (—) links vom Abzug. Das Ergebnifs der Abziehung heifst der ***Unterschied*** (Subtractionsrest, Differenz). Z. B.

a ab b giebt c

wird bezeichnet: $a - b = c$

Die Abziehung heifst nichts anderes als dafs die Anlage des Abzuges und Unterschiedes dem Ueberzug gleich sein soll:

also $a - b = c$

heifst so viel als $a = b + c$

Die Anlegung gleicher Beisätze heifst *die Bindung* (Multiplication). Jeder dieser gleichen Beisätze heifst *das Gebundene* (Multiplicandus). Die Anzahl der gleichen Beisätze heifst *das Bindende* (Multiplicator). Wenn das Bindende ein Bruch ist, so wird eine Bindung durch den Zähler des Bruchs und eine Theilung durch den Nenner des Bruchs verstanden. Das Zeichen der Bindung ist eine Neigung ($\asymp$) oder die Ecke der Neigung (.) oder blofse Nebenstellung. Z. B.

a mal b

wird bezeichnet: $a \asymp b$ oder $a \,.\, b$ oder ab .

Das Ergebnifs der Bindung heifst *das Gebinde* (Product). Das Gebundene und das Bindende haben die gemeinsame Benennung *Bindeglieder* oder schlechthin *Glieder* (Factoren). In dem Gebinde zweier Glieder von denen das erste eine bestimmte Zahl das andere eine Gröfse, oder das erste eine gegebene Gröfse das andere eine unbekannte Gröfse ist, heifst das erste die *Nebenzahl* (Coefficient). Z. B.

von $\frac{3}{4}a$ ist die Nebenzahl $\frac{3}{4}$
von ax ist die Nebenzahl a

Bei der *Theilung* (Division) heifst die Gröfse welche getheilt wird *der Inhalt* (Dividendus), die Gröfse durch welche getheilt wird *der Theiler* (Divisor), die aus der Theilung sich ergebende Gröfse *der Schnitt* (Quotient), die bei der Theilung übrig bleibende Gröfse *der Zuschufs* (Divisionsrest). Das Zeichen der Theilung ist die Bruchgestalt oder die Verhältnifsgestalt. Z. B.

a getheilt durch b giebt c

wird bezeichnet: $\frac{a}{b} = c$ oder $a : b = c$

Unter Theilung wird nichts anderes verstanden als dafs das um den Zuschufs vermehrte Gebinde des Schnitts mit dem Theiler dem Inhalt gleich sein soll. Der Zuschufs sei d, so ist

$$a = bc + d$$

Das Zeichen der zusammengesetzten Gröfse oder des gemeinsamen Verfahrens ist eine *Klammer* ( ) oder [ ].

Z. B. $a : (b + c + d)$ ist soviel als $\frac{a}{b + c + d}$

$a - (b + c + d)$ ist soviel als $a - b - c - d$

$a\,(b + c + d)$ ist soviel als $ab + ac + ad$

Der *Einsatz* (Monom) ist ein Ausdruck welcher durch Bindung oder Theilung einfacher Gröfsen entsteht.

Z. B. ab oder $\frac{a}{b}$ oder $3aab$ u. s. w.

Der *Zweisatz* (Binom) ist ein Ausdruck welcher aus zwei Einsätzen besteht die durch Anlegung oder Abziehung verbunden sind. Z. B.

$1 + a$, oder $a + b$, oder $a - b$, u. s. w.

Der *Vielsatz* (Polynom) ist ein aus mehreren durch Anlegung oder Abziehung verbundenen Einsätzen bestehender Ausdruck. Z. B.

$a + b + c$ oder $a + b - c + d$

oder $1 + a_1 x + a_2 xx + a_3 xxx \ldots .$

2.

Aus der *Zahlenrechnung* (Arithmetik) ergeben sich folgende Grundlagen, von denen die *Gröfsenrechnung* (Algebra) ausgeht.

1) Die verschiedene Folge der Rechnung ändert das Ergebnifs nicht. Z. B.

$$a + b = b + a$$

$$a + b + c = a + c + b = b + a + c \text{ u. s. w.}$$

$$a + b - c = a - c + b = b + a - c \text{ u. s. w.}$$

$$ab = ba$$

$$abc = acb = bac = bca = cab = cba$$

$$a \cdot \frac{b}{c} = b \cdot \frac{a}{c} = \frac{ab}{c} = \frac{ba}{c}$$

$$\frac{b}{c} : a = \frac{b}{a} : c = \frac{b}{ac} = \frac{b}{ca}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} = \frac{ac}{db} = \frac{a}{d} \cdot \frac{c}{b}$$

2) Anlegung und Abziehung sind einander entgegengesetzt. Z. B.

$a - b = c$ ist $a = b + c$

3) Bindung und Theilung sind gegen einander umgekehrt. Z. B.

$$a : \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b} = \frac{ac}{b} = \frac{ca}{b} = c : \frac{b}{a}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc} = \frac{da}{bc} = \frac{d}{c} : \frac{b}{a}$$

4) Entgegengesetzte oder umgekehrte Rechnungen heben einander auf. Z. B.

$$a + b - b = a - b + b = a$$

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}, \quad \frac{a:c}{b:c} = \frac{a}{b}$$

5) Die Bindung oder Theilung eines Vielsatzes durch einen Einsatz geschieht indem jeder einzelne Beisatz durch den Einsatz gebunden oder getheilt wird. Z. B.

$$(a + b + c)\, d = ad + bd + cd$$

$$(a - b + c)\, d = ad - bd + cd$$

$$\frac{a + b + c}{d} = \frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d}$$

$$\frac{a - b + c}{d} = \frac{a}{d} - \frac{b}{d} + \frac{c}{d}$$

6) Der Unterschied zweier gleichen Gröfsen heifst *ein Nichtiges* (Null) und wird durch ein Rund (0) bezeichnet. Z. B.

$a = a$ heifst soviel als $a - a = 0$

Hieraus folgt zweierlei. Nämlich:

7) Die Anlegung oder Abziehung des Nichtigen ändert die Gröfse nicht.

Denn da $a + (b - b) = a + b - b = a$

und $a - (b - b) = a - b + b = a$

so ist $a + 0 = a$ und $a - 0 = a$

8) Die Bindung oder Theilung des Nichtigen durch eine Gröfse giebt ein Nichtiges.

Denn da $a\,(b - b) = ab - ab = 0$

und $\frac{b - b}{a} = \frac{b}{a} - \frac{b}{a} = 0$

so ist $a \,.\, 0 = 0$ und $\frac{0}{a} = 0$

3.

Die Anlage einer setzhaften und gegenhaften Gröfse ist nichtig, wenn beide von gleichem Anwerth sind.

Eine sich auf bestimmte Dinge beziehende ganze Zahl oder Bruchzahl heifst ein *Anwerth* (absoluter Werth) oder eine *setzhafte* (positive) Zahl. Ein Ausdruck bestehe aus setzhaften Gröfsen welche durch Anlegung oder

Abziehung verbunden sind, z. B. $P = b - a + c$. Wenn man nun zur Vereinfachung die Abzüge unter die Fassung (Form) der Beisätze bringen will, so mufs man sich eine Gröfse denken, deren Anlegung eben soviel bewirkt als der Abzug der setzhaften Gröfse. Eine solche heifst eine *gegenhafte* (negative) Gröfse. Sie wird durch ein über ihren Anwerth gezogenes Band bezeichnet.

Wenn also $b - a + c = b + \overline{a} + c$ sein soll,
so mufs $b - a + c + a = b + \overline{a} + c + a$ sein,
also $b + c = b + c + \overline{a} + a$ sein,
also mufs $a + \overline{a} = 0$ sein.

Hier ist a eine setzhafte Gröfse, $\overline{a}$ ihre gegenhafte Gröfse, beide von gleichem Anwerth. Nun kann aber auch a eine gegenhafte Gröfse bedeuten, und dann mufs $\overline{a}$ eine setzhafte Gröfse seyn.

4.

Die Anlegung oder Abziehung einer gegenhaften Gröfse ist gleichbedeutend mit der Abziehung oder Anlegung ihres setzhaften Anwerths.

Nämlich es ist:

$$a + \overline{c} = a + \overline{c} + c - c = a - c + (c + \overline{c})$$
$$a - \overline{c} = a - \overline{c} + c - c = a + c - (c + \overline{c})$$

aber nach dem Satze (3.) $c + \overline{c} = 0$

also $a + \overline{c} = a - c$
und $a - \overline{c} = a + c$

Aus diesem allgemeinen Satze ergeben sich folgende besondere:

1) Wenn von einer setzhaften Gröfse eine gröfsere setzhafte Gröfse abgezogen wird, so ist der Unterschied eine gegenhafte Gröfse, d. h. $a - c$ ist setzhaft oder gegenhaft je nachdem a gröfser oder kleiner als c ist.

2) Wenn zu einer setzhaften Gröfse eine gegenhafte Gröfse von kleinerem Anwerth gelegt wird so ist die Anlage setzhaft. Nämlich $a + \overline{c}$ ist setzhaft wenn a gröfser als c ist.

3) Wenn zu einer setzhaften Gröfse eine gegenhafte Gröfse von gröfserem Anwerth gelegt wird, so ist die Anlage gegenhaft. Nämlich $a + \overline{c}$ ist gegenhaft wenn c gröfser als a ist.

4) Wenn von einer gegenhaften Gröfse eine gegenhafte Gröfse von gröfserem Anwerth abgezogen wird, so ist der Unterschied setzhaft. Nämlich $\overline{a} - \overline{c}$ ist setzhaft wenn c gröfser als a ist.

5) Wenn von einer gegenhaften Gröfse eine gegenhafte Gröfse von kleinerem Anwerth abgezogen wird, so ist der Unterschied gegenhaft. Nämlich $\overline{a} - \overline{c}$ gegenhaft, wenn c kleiner als a ist.

6) Wenn von einer setzhaften Gröfse eine gegenhafte Gröfse abgezogen wird, so ist der Unterschied setzhaft. Nämlich $a - \overline{c}$ ist setzhaft.

7) Wenn von einer gegenhaften Gröfse eine setzhafte Gröfse abgezogen wird, so ist der Unterschied gegenhaft. Nämlich $\overline{a} - c$ ist gegenhaft.

8) Wenn zu einer gegenhaften Gröfse eine gegenhafte Gröfse gelegt wird, so ist die Anlage gegenhaft. Nämlich $\overline{a} + \overline{c}$ ist gegenhaft.

5.

Die Bindung oder Theilung einer setzhaften Gröfse mit einer gegenhaften, oder einer gegenhaften Gröfse mit einer setzhaften, giebt eine gegenhafte Gröfse.

Die Bindung oder Theilung einer gegenhaften Gröfse mit einer gegenhaften giebt eine setzhafte Gröfse.

Es seien a, c, setzhafte Gröfsen, also auch $ac = n$ eine setzhafte Gröfse. Nun ist (3.)

$$\text{I.} \quad a + \overline{a} = 0$$

$$\text{II.} \quad c + \overline{c} = 0$$

Man binde die Gleichung I. zu beiden Seiten mit c, und die Gleichung II. zu beiden Seiten mit a, so ist:

$$n + \overline{a} \,.\, c = 0$$

$$n + \overline{c} \,.\, a = 0$$

Aber (3.) $\quad n + \overline{n} = 0$

Also $\quad \overline{a} \,.\, c = \overline{n} \quad$ und $\quad \overline{c} \,.\, a = \overline{n}$

Wenn also das eine Bindeglied setzhaft das andere gegenhaft ist, so ist das Gebinde gegenhaft.

Da nun $\quad \overline{a} \,.\, c = \overline{n}$

so ist $\quad \overline{a} = \dfrac{\overline{n}}{c} \quad$ und $\quad c = \dfrac{\overline{n}}{\overline{a}}$

Also: Die Theilung einer gegenhaften Gröfse durch eine setzhafte giebt einen gegenhaften Schnitt; und

Die Theilung einer gegenhaften Gröfse durch eine gegenhafte giebt einen setzhaften Schnitt.

Man binde die Gleichung I. zu beiden Seiten mit $\overline{c}$, und die Gleichung II. zu beiden Seiten mit $\overline{a}$, so ist

$$\overline{n} + \overline{a} \,.\, \overline{c} = 0$$

und $$\overline{n} + \overline{c} \,.\, \overline{a} = 0$$

Aber (3.) $$\overline{n} + n = 0$$

also $$\overline{a} \,.\, \overline{c} = n \quad \text{und} \quad \overline{c} \,.\, \overline{a} = n$$

also $$\overline{a} = \frac{n}{\overline{c}} \quad \text{und} \quad \overline{c} = \frac{n}{\overline{a}}$$

Also: Die Bindung zweier gegenhaften Gröfsen giebt ein setzhaftes Gebinde.

Die Theilung einer setzhaften Gröfse durch eine gegenhafte Gröfse giebt einen gegenhaften Schnitt.

Jede Gröfse erhält also einen gegenhaften Werth wenn sie mit der Gegeneinheit gebunden wird. Nämlich

wenn $$P = a + b - c + d$$

so ist $$\overline{P} = \overline{1} \,.\, (a + b - c + d)$$

oder $$\overline{P} = \overline{a} + \overline{b} - \overline{c} + \overline{d}$$

oder $$\overline{P} = c - a - b - d$$

Die Bindung oder Theilung der Gegeneinheit mit sich selbst giebt die setzhafte Einheit. Nämlich:

$$\overline{1} \,.\, \overline{1} = 1 \qquad \frac{\overline{1}}{\overline{1}} = 1$$

6.

Um einen Vielsatz anzulegen bringt man die angelegten Beisätze setzhaft, die abgezogenen gegenhaft an.

Um einen Vielsatz abzuziehen bringt man die angelegten Beisätze gegenhaft, die abgezogenen setzhaft an.

Oder bei der Anlegung behält man die Vorzeichen bei, bei der Abziehung nimmt man die Gegenzeichen.

Es seien z. B.

$$\begin{cases} M = 4a + 5b - 3c \\ N = 2a - 7b - 8c \end{cases}$$

so ist

$$\begin{cases} M = 4a + 5b + \overline{3}c \\ N = 2a + \overline{7}b + \overline{8}c \end{cases}$$

also

$$\begin{cases} M+N = (4+2)a + (5+\overline{7})b + (\overline{3}+\overline{8})c \\ M-N = (4-2)a + (5-\overline{7})b + (\overline{3}-\overline{8})c \end{cases}$$

also

$$\begin{cases} M+N = 6a + \overline{2}b + \overline{11}c \\ \qquad\quad = 6a - 2b - 11c \\ M-N = 2a + 12b + 5c \end{cases}$$

7.

Bei der Bindung zweier Vielsätze wird jeder Beisatz des einen mit jedem Beisatz des andern gebunden. Bei gleichartigen Vorzeichen ist das Gebinde setzhaft, bei ungleichartigen gegenhaft.

Es sey z. B. $\begin{cases} M = 4a + 5b - 3c \\ N = 2a - 7b - 8c \end{cases}$

oder $\begin{cases} M = 4a + 5b + \overline{3}c \\ N = 2a + \overline{7}b + \overline{8}c \end{cases}$

so giebt die Bindung:

$$\begin{array}{rl} MN = & 8aa + 10ab + \overline{6}ac \\ & + \overline{28}ab + \overline{35}bb + 21bc \\ & + \overline{32}ac + \overline{40}bc + 24cc \\ \hline MN = & 8aa - 18ab - 38ac - 19bc + 24cc \\ & - 35bb \end{array}$$

8.

Das Gebinde mehrerer gleichen Glieder heifst eine ganznamige Höhe (Potenz). Die Anzahl dieser gleichen Bindeglieder heifst der Name (Exponent) der Höhe. Jedes dieser gleichen Bindeglieder heifst die Grundzahl der Höhe.

Hienach ist

$a^1 = a$ die erste Höhe von a

$a^2 = aa$ die Zweithöhe oder Rahmen (Quadrat)

$a^3 = aaa$ die Dritthöhe oder Würfel (Cubus)

$a^4 = aaaa$ die vierte Höhe (Biquadrat)

u. s. w.

Wenn $a^n = b$, so ist a die Grundzahl, n der Name, b die Höhe.

Jede ganznamige Höhe einer setzhaften Grundzahl ist setzhaft.

Jede gradnamige Höhe einer gegenhaften Grundzahl ist setzhaft. Z. B.

$$(\overline{a})^2 = a^2 , \quad (\overline{a})^4 = a^4 , \quad (\overline{a})^6 = a^6$$

Jede ungradnamige Höhe einer gegenhaften Grundzahl ist gegenhaft. Z. B.

$$(\overline{a})^1 = \overline{1} \,.\, a^1 , \quad (\overline{a})^3 = \overline{1} \,.\, a^3 , \quad (\overline{a})^5 = \overline{1} \,.\, a^5$$

9.

Das Gebinde oder der Schnitt ganznamiger Höhen ist bei gleichen Namen und verschiedenen Grundzahlen, die gleichnamige Höhe des Gebindes oder Schnittes der Grundzahlen.

Es ist $a^2 = aa$, $b^2 = bb$, $c^2 = cc$

also $a^2 . b^2 . c^2 = (aa)(bb)(cc) = (abc)(abc) = (abc)^2$

Eben so ist $a^3 = aaa$, $b^3 = bbb$, $c^3 = ccc$

$a^3 b^3 c^3 = (aaa)(bbb)(ccc) = (abc)(abc)(abc) = (abc)^3$

$a^4 b^4 c^4 = (aaaa)(bbbb)(cccc) = (abc)(abc)(abc)(abc) = (abc)^4$

u. s. f. für alle ganznamigen Höhen.

Wenn also n eine setzhafte Zahl ist, so ist

$$a^n . b^n . c^n = (abc)^n$$

$$a^n . b^n . c^n . d^n = (abcd)^n \text{ u. s. f.}$$

Eben so bei der Theilung

$$\frac{a^2}{c^2} = \frac{aa}{cc} = \frac{a}{c} \cdot \frac{a}{c} = \left(\frac{a}{c}\right)^2$$

$$\frac{a^3}{c^3} = \frac{aaa}{ccc} = \frac{a}{c} \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{a}{c} = \left(\frac{a}{c}\right)^3$$

$$\frac{a^4}{c^4} = \frac{aaaa}{cccc} = \frac{a}{c} \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{a}{c} = \left(\frac{a}{c}\right)^4$$

u. s. f.

Wenn also n eine setzhafte ganze Zahl so ist

$$\frac{a^n}{c^n} = \left(\frac{a}{c}\right)^n$$

Beispiele.

$2^2 . 5^2 = 10^2$, $2^3 . 5^3 = 10^3$, $2^4 . 5^4 = 10^4$ . . .

$3^2 . 4^2 . 6^2 = 72^2$, $\frac{3^4}{5^4} = \left(\frac{3}{5}\right)^4$,

$(3\frac{1}{2})^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{7^2}{2^2} = \frac{49}{4} = 12\frac{1}{4}$

$\frac{34^3}{17^3} = \left(\frac{34}{17}\right)^3 = 2^3 = 8$

10.

Das Gebinde oder der Schnitt ganznamiger Höhen ist bei gleichen Grundzahlen und verschiedenen Namen diejenige Höhe derselben Grundzahl deren Name die Anlage oder der Unterschied jener Namen ist.

Es ist z. B. $a^3 = aaa$

$a^7 = aaaaaaa$

also $a^3 . a^7 = (aaa)(aaaaaaa) = a^{10}$

$$\frac{a^7}{a^3} = \frac{aaaaaaa}{aaa} = a^4$$

$$\frac{a^3}{a^7} = \frac{aaa}{aaaaaaa} = \frac{1}{a^4}$$

Eben so wird der Satz für alle übrigen ganzen Namen bewiesen. Es seien also m, n, r, s u. s. w. setzhafte ganze Zahlen, so ist

$a^m . a^n = a^{m+n}$

$a^m . a^n . a^r = a^{m+n+r}$

$a^m . a^n . a^r . a^s = a^{m+n+r+s}$

Und wenn m gröfser als n ist, so ist

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad \frac{a^n}{a^m} = \frac{1}{a^{m-n}}$$

Beispiel. Es sei 15^{13} zu bilden.

15^3 . . . . . $= \ldots\ldots\ldots 3375$

$15^4 = 15^3 . 15$ . . . $= \ldots\ldots\ldots 50625$

$15^6 = 15^3 . 15^3$ . . . $= \ldots\ldots 11'390625$

$15^{13} = 15^3 . 15^4 . 15^6 = 1946'195068'359375$

11.

Die ganznamige Höhe einer ganznamigen Höhe hat zum Namen das Gebinde jener Namen.

Es ist z. B.

$(a^3)^5 = (aaa)(aaa)(aaa)(aaa)(aaa) = a^{15}$

$(a^5)^3 = (aaaaa)(aaaaa)(aaaaa) = a^{15}$

$(a^6)^4 = (aaaaaa)(aaaaaa)(aaaaaa)(aaaaaa) = a^{24}$

$(a^4)^6 = (aaaa)(aaaa)(aaaa)(aaaa)(aaaa)(aaaa) = a^{24}$

Eben so wird der Satz für alle übrigen ganzen Namen bewiesen. Wenn also m und n setzhafte Zahlen sind, so sind

$$(a^m)^n = (a^n)^m = a^{mn}$$

Beispiel.

$2^{24} = 2^{6 \cdot 4} = (2^6)^4 = (64)^4 = 16'777216$

$2^4 = 4^2 \ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots 16$

$2^8 = 16^2 \ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots 256$

$2^{16} = (256)^2 \ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots 65536$

$2^{32} = (65536)^2 \ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots 4294'967296$

$2^{64} = (4294967269)^2 = 18'446744'073709'551616$

12.

Wenn die ganznamige Höhe einer zu bestimmenden Grundzahl der ganznamigen Höhe einer gegebenen Grundzahl gleich sein soll, so heifst die zu bestimmende Grundzahl die Bruchhöhe oder Wurzel der gegebenen Grundzahl. Der Name ist ein Bruch, dessen Zähler der Name der gegebenen Grundzahl, dessen Nenner der Name der zu bestimmenden Grundzahl ist.

Z. B. Wenn $x^2 = a$ sein soll, so heifst x die Zweitwurzel (Quadratwurzel) von a und wird bezeichnet durch

$$x = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$$

Wenn $x^3 = a$ sein soll, so heifst x die Drittwurzel (Cubikwurzel) von a und wird bezeichnet durch

$$x = a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$$

Wenn $x^3 = a^2$ sein soll, so heifst x die Drittwurzel von a^2 und wird bezeichnet durch

$$x = a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$$

Wenn $x^4 = a$ sein soll, so heifst x die vierte Wurzel (Biquadratwurzel) von a und wird bezeichnet durch

$$x = a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a}$$

Wenn $x^4 = a^3$ sein soll, so heifst x die vierte Wurzel aus a^3 und wird bezeichnet durch

$$x = a^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{a^3}$$

Allgemein, wenn bei setzhaften ganzen Zahlen m, n, $x^n = a^m$ sein soll, so heifst x die $n$te Wurzel aus a^m und wird bezeichnet durch

$$x = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

13.

Das Gebinde oder der Schnitt von Bruchhöhen ist bei gleichen Namen und verschiedenen Grundzahlen die gleichnamige Bruchhöhe des Gebindes oder Schnitts der Grundzahlen.

Oder der Satz 9. gilt auch bei Bruchhöhen.

Die Wurzel eines Bruchs läfst sich auf die Wurzel einer ganzen Zahl zurückführen.

Es seien m und n setzhafte ganze Zahlen.

Wenn nun $x = a^{\frac{m}{n}}$, $y = b^{\frac{m}{n}}$

so ist (12.) $x^n = a^m$, $y^n = b^m$

also (9.) $(xy)^n = (ab)^m$, $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

also (12.) $xy = (ab)^{\frac{m}{n}}$, $\frac{x}{y} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}$

also $a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}} = (ab)^{\frac{m}{n}}$, $\frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}$

Beispiele.

$$\sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = \sqrt{9}\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

$$\sqrt[3]{243} = \sqrt[3]{27 \cdot 9} = \sqrt[3]{27}\sqrt[3]{9} = 3\sqrt[3]{9}$$

$$\sqrt{\frac{3}{7}} = \sqrt{\frac{21}{49}} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{21}}{7} = \frac{4{,}5825756}{7} = 0{,}6546536$$

$$\sqrt[3]{\frac{3}{7}} = \sqrt[3]{\frac{147}{343}} = \frac{\sqrt[3]{147}}{\sqrt[3]{343}} = \frac{\sqrt[3]{147}}{7} = \frac{5{,}2776320}{7} = 0{,}7539474$$

14.

Das Gebinde oder der Schnitt von Bruchhöhen ist bei gleichen Grundzahlen und verschiedenen Namen diejenige Höhe derselben Grundzahl deren Name die Anlage oder der Unterschied jener Namen ist.

Oder der Satz 10. gilt auch bei Bruchhöhen.

Es seien m, n, r, s setzhafte ganze Zahlen und

$$x = a^{\frac{m}{n}}, \qquad y = a^{\frac{r}{s}}$$

so ist (12.) $x^n = a^m, \qquad y^s = a^r$

also (11.) $x^{ns} = a^{ms}, \qquad y^{ns} = a^{nr}$

also (9,10.) $(xy)^{ns} = a^{ms+nr}$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{ns} = a^{ms-nr}$$

also (12.) $xy = a^{\frac{ms+nr}{ns}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{r}{s}}$

$$\frac{x}{y} = a^{\frac{ms-nr}{ns}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{r}{s}}$$

Beispiele.

$\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$, $a^{\frac{5}{6}} = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}}$ oder $\sqrt[6]{a^5} = \sqrt{a}\sqrt[3]{a}$

$\frac{7}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$, $a^{\frac{7}{8}} = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{1}{8}}$

oder $\sqrt[8]{a^7} = \sqrt{a} \cdot \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[8]{a}$

$\frac{1}{6} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2}$, also ist

$$\sqrt[6]{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1{,}4142135}{1{,}2599210} = 1{,}122462$$

$$\sqrt[6]{2} = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} = \frac{1{,}5874010}{1{,}4142135} = 1{,}122462$$

15.

Die Bruchhöhe einer Bruchhöhe hat zum Namen das Gebinde der Namen.

Oder der Satz 11. gilt auch bei Bruchhöhen.

Es seien m, n, r, s, setzhafte ganze Zahlen

und $z = (a^{\frac{m}{n}})^{\frac{r}{s}}$ $x = a^{\frac{m}{n}}$

so ist (12.) $z^s = x^r$ $x^n = a^m$

also (11.) $z^{ns} = x^{nr}$ $x^{nr} = a^{mr}$

also $z^{ns} = a^{mr}$

also (12.) $z = a^{\frac{mr}{ns}}$

also $(a^{\frac{m}{n}})^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{mr}{ns}}$

Beispiele.

$$3^{\frac{1}{24}} = 3^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = (((3^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}$$

$\sqrt{3} = 1{,}73205 = a$, $\sqrt{a} = 1{,}31607 = b$, $\sqrt{b} = 1{,}14720 = c$

also $\sqrt[24]{3} = \sqrt{c} = 1{,}04683$

$\sqrt{2} = 1{,}41421 = a$, $\sqrt{a} = 1{,}18920 = b$, $\sqrt{b} = 1{,}09050 = c$

$\sqrt{c} = 1{,}04427 = d$, $\sqrt{d} = 1{,}02189 = e$

$\sqrt[64]{2} = \sqrt{e} = 1{,}01089$

16.

Das Umgekehrte einer Höhe von setzhaften Namen heifst eine gegennamige Höhe.

Der Schnitt welcher aus der Theilung der Einheit durch eine Zahl entsteht heifst nämlich ***das Umgekehrte*** dieser Zahl. Z. B. das Umgekehrte von 2 ist $\frac{1}{2}$, das Umgekehrte von $2\frac{1}{2}$ ist $\frac{2}{5}$ u. s. w.

Es sei also n eine setzhafte ganze oder gebrochene Zahl, so ist das Umgekehrte der Höhe a^n gleich $\frac{1}{a^n}$. Der Bequemlichkeit wegen wird diese Umkehrung so bezeichnet $\frac{1}{a^n} = \overline{a^n}$. Daher heifst $\frac{1}{a^n}$ oder $\overline{a^n}$ eine ***gegennamige Höhe.*** Die gegennamige Höhe kann also auch durch Umkehrung der Grundzahl ausgedrückt werden, wobei der Name setzhaft genommen wird.

$$\frac{1}{a^n} = \overline{a^n}, \quad \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

$$\text{also} \quad \overline{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

Beispiele.

$$2^{\overline{4}} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^4 = \tfrac{1}{16} \qquad \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\overline{4}} = 2^4 = 16$$

$$3^{\overline{2}} = \left(\tfrac{1}{3}\right)^2 = \tfrac{1}{9} \qquad \left(\tfrac{1}{3}\right)^{\overline{2}} = 3^2 = 9$$

$$5^{\overline{3}} = \left(\tfrac{1}{5}\right)^3 = \tfrac{1}{125} \qquad \left(\tfrac{1}{5}\right)^{\overline{3}} = 5^3 = 125$$

$$5^{\overline{1:4}} = \left(\tfrac{1}{5}\right)^{1:4} = \tfrac{1}{5}\sqrt{5} \qquad \left(\tfrac{1}{5}\right)^{\overline{1:4}} = (5)^{1:4} = \sqrt{5}$$

17.

Das Gebinde oder der Schnitt gegennamiger Höhen ist bei gleichen Namen und verschiedenen Grundzahlen die gleichnamige Höhe des Gebindes oder Schnitts der Grundzahlen.

Oder die Sätze 9, 13. gelten auch bei gegennamigen Höhen.

Es sei n eine setzhafte ganze oder gebrochene Zahl, so ist

$$a^{\overline{n}} = \left(\frac{1}{a}\right)^n, \qquad b^{\overline{n}} = \left(\frac{1}{b}\right)^n, \qquad c^{\overline{n}} = \left(\frac{1}{c}\right)^n$$

also (9,13.) $a^{\overline{n}}.b^{\overline{n}}.c^{\overline{n}} = \left(\frac{1}{a}\right)^n.\left(\frac{1}{b}\right)^n.\left(\frac{1}{c}\right)^n = \left(\frac{1}{abc}\right)^n = (abc)^{\overline{n}}$

$$\frac{a^{\overline{n}}}{b^{\overline{n}}} = \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^n}{\left(\frac{1}{b}\right)^n} = \left(\frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}}\right)^n = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{\overline{n}}$$

18.

Das Gebinde oder der Schnitt der Höhen ist bei gleichen Grundzahlen und verschiedenen maafshaften Namen diejenige Höhe der Grundzahl deren Name die Anlage oder der Unterschied jener Namen ist.

Oder die Sätze 10, 14. gelten auch bei gegennamigen Höhen.

Eine setzhafte oder gegenhafte ganze oder gebrochene Zahl heifst *maafshaft* (rational) wenn ihr Anwerth bestimmt ist. Sie heifst *unmaafshaft* (irrational) wenn ihr Anwerth nicht völlig genau sondern nur annäherungsweise durch bestimmte Zahlen ausgedrückt werden kann.

Es seien m und n setzhafte und maafshafte Zahlen, so ist (16.) $a^{\bar{m}} = (\frac{1}{a})^{m}$, $a^{\bar{n}} = (\frac{1}{a})^{n}$.

Hieraus folgt

$$a^{m} \cdot a^{\bar{n}} = \frac{a^{m}}{a^{n}} = a^{m-n} = a^{m+\bar{n}}$$

$$a^{\bar{m}} \cdot a^{n} = \frac{a^{n}}{a^{m}} = a^{n-m} = a^{\bar{m}+n}$$

$$a^{\bar{m}} \cdot a^{\bar{n}} = \frac{1}{a^{m} \cdot a^{n}} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{\bar{m}+\bar{n}}$$

$$\frac{a^{m}}{a^{n}} = \frac{a^{m}}{(\frac{1}{a})^{n}} = a^{m} \cdot a^{n} = a^{m+n} = a^{m-\bar{n}}$$

$$\frac{a^{\bar{m}}}{a^{n}} = \frac{a^{\bar{n}}}{a^{m}} = a^{\bar{n}-m} = a^{\bar{n}+\bar{m}} = a^{\bar{m}-n}$$

$$\frac{a^{\bar{m}}}{a^{\bar{n}}} = \frac{a^{n}}{a^{m}} = a^{n-m} = a^{n+\bar{m}} = a^{\bar{m}-\bar{n}}$$

19.

Die Höhe einer Höhe hat zum Namen das Gebinde der Namen.

Oder die Sätze 11, 15. gelten auch bei gegennamigen Höhen.

Es seien m, n, setzhafte und maafshafte Zahlen, so ist:

$$(a^{m})^{\bar{n}} = \frac{1}{(a^{m})^{n}} = \frac{1}{a^{mn}} = a^{\bar{1} \cdot mn} = a^{m \cdot \bar{n}}$$

$$(a^{\bar{m}})^{n} = (\frac{1}{a^{m}})^{n} = \frac{1}{a^{mn}} = a^{\bar{1} \cdot mn} = a^{\bar{m} \cdot n}$$

$$(a^{\bar{m}})^{\bar{n}} = \frac{1}{(a^{\bar{m}})^{n}} = \frac{1}{(\frac{1}{a^{m}})^{n}} = a^{mn} = a^{\bar{m} \cdot \bar{n}}$$

20.

Die nichtnamige Höhe jeder setzhaften Grundzahl ist der Einheit gleich.

Diejenige ***Grenze*** der sich die Höhe a^r desto mehr annähert, je kleiner der Name r ist, heifst die ***nichtnamige Höhe*** und wird bezeichnet durch a^0.

Es sei n eine setzhafte ganze Zahl, und es sei $nr = 1$, so ist r ein desto kleinerer Bruch je gröfser n ist.

Die Grundzahl a sei setzhaft.

Wenn a gröfser als 1 ist, so ist jede ganznamige Wurzel aus a kleiner als a, d. h. $a^r < a$. Auch ist jede Wurzel aus a^n gröfser als 1, d. h. $a^{nr} > 1$, also wenn zu beiden Seiten die $n$te Wurzel genommen wird $a^r > 1$.

Wenn a kleiner als 1 ist, so ist jede ganznamige Wurzel aus a gröfser als a, d. h. $a^r > a$. Auch ist jede Wurzel aus a^n kleiner als 1, d. h. $a^{nr} < 1$, also $a^r < 1$.

Wenn also r immer kleiner wird, so nimmt die $r$te Höhe der ganzen Zahlen und unächten Brüche beständig ab mit Annäherung zur Einheit, und die $r$te Höhe der ächten Brüche nimmt beständig zu mit Annäherung zur Einheit. Also ist für jedes a, $a^0 = 1$ als Grenze.

Beispiel.

n	$a = 2$	$a = \frac{1}{2}$
1	2	0,500000
2	1,41421	0,707106
4	1,18920	0,840896
8	1,09050	0,917004
16	1,04427	0,957603
32	1,02189	0,978572
64	1,01089	0,989228
128	1,00543	0,994599
256	1,00271	0,997296
512	1,00135	0,998647
1024	1,00067	0,999323
2048	1,00033	0,999664
4096	1,00016	0,999831
8192	1,00008	0,999915
16384	1,00004	0,999957
32768	1,00002	0,999978
65536	1,00001	0,999989
131072	1,00000	0,999994
262144	1,00000	0,999997

21.

Bei der Bindung zweier Vielsätze wird bei den Vorzeichen der Satz 7., bei den Höhen der Satz 18. befolgt.

Beispiel.

$$\begin{cases} M = 13\frac{b}{a^5} + 10\frac{b^2}{a^2} - 4ab^3 \\ N = 6\frac{b^2}{a^3} - 18b^3 - 7a^3b^4 \end{cases}$$

oder

$$\begin{cases} M = 13a^5b + 10a^2b^2 - 4ab^3 \\ N = 6a^3b^2 - 18b^3 - 7a^3b^4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} MN = {} & 78a^8b^3 + 60a^5b^4 - 24a^2b^5 \\ & - 234a^5b^4 - 180a^2b^5 + 72ab^6 \\ & - 91a^2b^5 - 70ab^6 + 28a^4b^7 \end{aligned}$$

$$MN = 78a^8b^3 - 174a^5b^4 - 295a^2b^5 + 2ab^6 + 28a^4b^7$$

22.

Theilung eines Vielsatzes durch einen Vielsatz.

Man reihet in beiden Vielsätzen die einzelnen Beisätze nach den Höhen einer Grundzahl, so dafs die Namen dieser Höhen gleichmäfsig steigen oder fallen. Wenn zwei Grundzahlen diese Bedingung befriedigen, so ersetzt man sie durch eine einzige. Die fehlenden Beisätze bezeichnet man als nichtig. Durch entsprechende Bindung kann man nicht allein die Brüche aus den Nebenzahlen wegschaffen sondern auch bewirken dafs die Nebenzahl des ersten Beisatzes des Inhalts ein Vielfaches von derjenigen des Theilers sei. Wenn alsdann die Nebenzahl des letzten Beisatzes des Inhalts ein Vielfaches von derjenigen des Theilers, und die Anlage der Nebenzahlen der Beisätze des Inhalts ein Vielfaches von derjenigen des Theilers ist, so *kann* die Theilung in der Art gelingen, dafs kein Zuschufs übrig bleibt.

Man theile nun den ersten Beisatz des Inhalts mit demjenigen des Theilers, so ergiebt sich der erste Beisatz des Schnitts. Mit diesem binde man den Theiler und ziehe die Beisätze dieses Gebindes von den entsprechenden Beisätzen des Inhalts ab. Alsdann hebt sich der erste Beisatz auf und die Beisätze des Unterschiedes bilden

einen neuen Inhalt mit welchem man auf gleiche Weise verfährt. Auf diese Weise werden der Reihe nach alle Beisätze des Schnitts bestimmt.

Beispiel.

Inhalt $M = 3\frac{\sqrt{a}}{b^2} + 3\frac{5}{8} \cdot \frac{a^2}{b^6} + 33\frac{7}{8} \cdot \frac{a^2\sqrt{a}}{b^{10}} - 7\frac{a^3}{b^{12}}$

Theiler $T = a - 2\frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{a}}{b^2} + 3\frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{b^4}$

Man setze $\frac{\sqrt{a}}{b^2} = c$, $\frac{8b^2}{\sqrt{a}} \cdot M = M'$, $\frac{2}{a} T = T'$

$$
\begin{array}{lrrrrrrr}
S' & 12 & +\ 30c & +\ 33c^2 & -\ 8c^3 & & & \\
T' & 2 & -\ 5c & +\ 7c^2 & & & & \\
\hline
M' & 24 & +\ 0 & +\ 0 & +\ 29c^3 & +\ 271c^4 & -\ 56c^5 & \\
 & 24 & -\ 60c & +\ 84c^2 & & & & \\
\hline
 & & 60c & -\ 84c^2 & +\ 29c^3 & +\ 271c^4 & -\ 56c^5 & \\
 & & 60c & -\ 150c^2 & +\ 210c^3 & & & \\
\hline
 & & & 66c^2 & -\ 181c^3 & +\ 271c^4 & -\ 56c^5 & \\
 & & & 66c^2 & -\ 165c^3 & +\ 231c^4 & & \\
\hline
 & & & & \overline{16}c^3 & +\ 40c^4 & -\ 56c^5 & \\
 & & & & \overline{16}c^3 & +\ 40c^4 & -\ 56c^5 & \\
\hline
\end{array}
$$

Die Anlage der Nebenzahlen ist

in M' . . . $24 + 29 + 271 - 56 = 268$

in T' . . . $2 - 5 + 7 = 4$

Nun ist 24 ein Vielfaches von 2
56 - - - - 7
268 - - - - 4

Also konnte die Theilung gelingen.

Es ist $\frac{8b^2}{\sqrt{a}} M = M'$, $\frac{2}{a} T = T'$

also $4b^2\sqrt{a} \cdot \frac{M}{T} = \frac{M'}{T'} = S'$

also $\frac{M}{T} = S = \frac{S'}{4b^2\sqrt{a}}$

also $S = \frac{3}{\sqrt{a} \cdot b^2} + \frac{7\frac{1}{2}}{b^4} + 8\frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{a}}{b^6} - 2 \cdot \frac{a}{b^8}$

23.

Bestimmung des höchsten Gemeintheilers zweier Vielsätze.

Man läfst in jedem Vielsatze diejenigen Gröfsen oder Zahlen weg, welche Gemeintheiler aller einzelnen Beisätze sind. Man reihet dann beide Vielsätze nach aufsteigenden oder absteigenden ganznamigen Höhen einer gemeinsamen Grundzahl. Der gröfste Name dieser Grundzahl heifst *die Stufe* des Vielsatzes.

Es seien A und B die beiden Vielsätze und es sei A derjenige welcher die höhere Stufe hat. Man binde A und B mit solchen Gröfsen dafs bei der Anlegung oder Abziehung entweder der erste oder der letzte Beisatz in beiden einander aufheben. Dadurch erhält man einen neuen Beisatz von niederer Stufe als A. Bei Fortsetzung dieses Verfahrens gelangt man zu einem Vielsatze C von gleicher Stufe mit B. Die bei dieser Abstufung sich ergebenden Nebenzahlen seien m und n, so ist

$$A = mB + nC$$

Also ist jeder Gemeintheiler von B und C ein Gemeintheiler von A und B. Der höchste Gemeintheiler ist derjenige dessen Stufe die gröfste ist. ***Also ist der höchste Gemeintheiler von B und C der höchste Gemeintheiler von A und B.***

Aus den Vielsätzen B und C schafft man durch neue Nebenzahlen einmal den ersten dann den letzten Beisatz weg. Dadurch erlangt man zwei neue Vielsätze D und E welche um eine Stufe niedriger als B und C sind. Die Nebenzahlen dieser Abstufung seien p, q, r, s, so ist

$$B = pD + qE$$
$$C = rD + sE$$

Der höchste Gemeintheiler von D und E ist der höchste Gemeintheiler von B und C, also der höchste Gemeintheiler von A und B.

Diese Abstufung setzt man fort bis man auf zwei gleiche Vielsätze T gelangt. Dieser Vielsatz T ist der höchste Gemeintheiler je zweier vorangehenden Vielsätze also auch der Vielsätze A und B. Wenn man aber bei dieser Abstufung ***auf zwei verschiedene Zweisätze*** gelangt, so haben A und B keinen Gemeintheiler von der ersten oder einer höhern Stufe.

Beispiel.

$A \ldots \quad c^8 - 6c^7 + 14c^6 - 13c^5 - 7c^4 + 16c^3 - 9c^2 - 2c + 6$

$B \ldots \quad 2c^5 - 7c^4 + 1.c^3 + 10c^2 - 2c - 4$

$2A \ldots \quad 2c^8 - 12c^7 + 28c^6 - 26c^5 - 14c^4 + 32c^3 - 18c^2 - 4c + 12$

$3B \ldots \quad 6c^5 - 21c^4 + 3c^3 + 30c^2 - 6c - 12$

Anlage $2c^8 - 12c^7 + 28c^6 - 20c^5 - 35c^4 + 35c^3 + 12c^2 - 10c$

mit $c \ldots \quad 2c^7 - 12c^6 + 28c^5 - 20c^4 - 35c^3 + 35c^2 + 12c - 10$

mit $2 \ldots \quad 4c^7 - 24c^6 + 56c^5 - 40c^4 - 70c^3 + 70c^2 + 24c - 20$

$5B \ldots \quad 10c^5 - 35c^4 + 5c^3 + 50c^2 - 10c - 20$

Unterschied $4c^7 - 24c^6 + 46c^5 - 5c^4 - 75c^3 + 20c^2 + 34c$

mit $c \ldots \quad 4c^6 - 24c^5 + 46c^4 - 5c^3 - 75c^2 + 20c + 34$

$2cB \ldots \quad 4c^6 - 14c^5 + 2c^4 + 20c^3 - 4c^2 - 8c$

Unterschied $C \ldots \quad 10c^5 - 44c^4 + 25c^3 + 71c^2 - 28c - 34$

$5B \ldots \quad 10c^5 - 35c^4 + 5c^3 + 50c^2 - 10c - 20$

Unterschied $D \ldots \quad 9c^4 - 20c^3 - 21c^2 + 18c + 14$

$2cD \ldots \quad 18c^5 - 40c^4 - 42c^3 + 36c^2 + 28c$

$9B \ldots \quad 18c^5 - 63c^4 + 9c^3 + 90c^2 - 18c - 36$

Unterschied $E \ldots \quad 23c^4 - 51c^3 - 54c^2 + 46c + 36$

$18D \ldots \quad 162c^4 - 360c^3 - 378c^2 + 324c + 252$

$7E \ldots \quad 161c^4 - 357c^3 - 378c^2 + 322c + 252$

Unterschied $c.F \ldots \quad 1.c^4 - 3c^3 + 0 + 2c$

$F \ldots \quad 1c^3 - 3c^2 + 0 + 2$

$18F \ldots \quad 18c^3 - 54c^2 + 0 + 36$

$E \ldots \quad 23c^4 - 51c^3 - 54c^2 + 46c + 36$

Unterschied $23cG \ldots \quad 23c^4 - 69c^3 + 0 + 46c$

$G \ldots \quad 1.c^3 - 3c^2 + 0 + 2$

Da $F = G$, so ist jeder von ihnen $= T$ der höchste Gemeintheiler von A und B. Die wirkliche Theilung giebt

$$A = T.(c^5 - 3c^4 + 5c^3 - c + 3) = T.A'$$

$$B = T.(2c^2 - c - 2) \ldots = T.B'$$

Um sich zu überzeugen, dafs A' und B' keinen Gemeintheiler haben, untersuche man sie auf dieselbe Art:

$2A'$	$2c^5$	—	$6c^4$	+	$10c^3$	+	0	—	$2c$ + 6
c^3B'	$2c^5$	—	$1.c^4$	—	$2c^3$				
Unterschied	$5c^4$	—	$12c^3$	+	0	+	$2c$	—	6
mit 2	$10c^4$	—	$24c^3$	+	0	+	$4c$	—	12
$5c^2B'$	$10c^4$	—	$5c^3$	—	$10c^2$				
Unterschied			$19c^3$	—	$10c^2$	—	$4c$	+	12
mit 2			$38c^3$	—	$20c^2$	—	$8c$	+	24
$19cB'$			$38c^3$	—	$19c^2$	—	$38c$		
Unterschied C'					$1.c^2$	—	30c	—	24
$2C'$					$2c^2$	—	60c	—	48
B'					$2c^2$	—	$1.c$	—	2
Unterschied D'							59c	+	46
C'					$1c^2$	—	30c	—	24
$12B'$					$24c^2$	—	$12c$	—	24
Unterschied $c.E'$					$23c^2$	+	$18c$		
E'							$23c$	+	18

Hier sind D', E' ungleiche Zweisätze, also haben A', B', keinen Gemeintheiler.

Beispiele zur Höhe.

1) $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{5}{6}} = a^2 \sqrt[12]{a}$

2) $a^{\frac{3}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{4}} = a^2 \sqrt[12]{a}$

3) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{648000}$

4) $a^{\frac{5}{7}} : a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[21]{a}$

5) $256^{\frac{5}{12}} = 8 \cdot \sqrt[3]{2}$

6) $243^{\frac{3}{4}} = 27 \cdot \sqrt[4]{27}$

7) $(\frac{2}{3})^{\overline{1} \cdot \frac{2}{3}} = \frac{1}{2} \sqrt[3]{18}$

8) $a^{\overline{1} \cdot \frac{2}{3}} : a^{\overline{1} \cdot \frac{5}{6}} = \sqrt[6]{a}$

9) $(a^{\frac{2}{3}})^8 = a^5 \cdot \sqrt[3]{a}$

10) $(\sqrt[3]{a^2})^7 = a^4 \cdot \sqrt[3]{a^2}$

11) $\sqrt{1690} + \sqrt{2890} + \sqrt{2250} = \sqrt{20250}$

12) $\sqrt{2028} + \sqrt{2700} - \sqrt{3468} = \sqrt{1452}$

13) $\sqrt{32} + \sqrt{1800} - \sqrt{882} - \sqrt{50} = \sqrt{128}$

14) $\sqrt{3888} - \sqrt{675} - \sqrt{108} - \sqrt{12} = \sqrt{507}$

15) $\sqrt{48} + \sqrt{432} - \sqrt{3} - \sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{630\frac{3}{4}}$

16) $\sqrt{60} + \sqrt{6\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{3}{5}} - \sqrt{15} = \sqrt{52\frac{4}{15}}$

17) $\sqrt{405} + \sqrt{39{,}2} + \sqrt{1{,}8} - \sqrt{245} = \sqrt{145{,}8}$

18) $\sqrt{72} + \sqrt{1\frac{1}{8}} - \sqrt{50} - \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{3\frac{1}{8}}$

19) $(2 + \sqrt{3})^2 = 7 + \sqrt{48}$

20) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 5 + \sqrt{24}$

21) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^3 = \sqrt{242} + \sqrt{243}$

22) $(3 + \sqrt{5})^2 = 14 + \sqrt{180}$

23) $(7 + 2\sqrt{6})^2 = 73 + \sqrt{4704}$

24) $(\sqrt{5} + 1)^2 = 6 + \sqrt{20}$

25) $(5 + \sqrt{20})^2 = 45 + \sqrt{2000}$

26) $(\sqrt{28} + \sqrt{150})^2 = 178 + \sqrt{16800}$

27) $(\sqrt{5} + 3)(\sqrt{5} - 2) = \sqrt{5} - 1$

28) $(8 + 3\sqrt{6})(5 - 2\sqrt{6}) = 4 - \sqrt{6}$

29) $(31 + 8\sqrt{13})(8 - 2\sqrt{13}) = 40 + \sqrt{52}$

30) $(12\sqrt{7} + 6)(5\sqrt{7} - 3) = 402 - \sqrt{252}$

31) $(4 - \sqrt{5})(3 + 2\sqrt{5}) = 2 + \sqrt{125}$

32) $(2\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + 2\sqrt{3}) = 4 + \sqrt{135}$

33) $(10 + 2\sqrt{5})(5 - \sqrt{5}) = 40$

34) $(15 + 3\sqrt{5})(\sqrt{5} - 1) = \sqrt{720}$

35) $\frac{1}{\sqrt{2} \pm 1} = \sqrt{2} \mp 1$

36) $\frac{1}{2 \pm \sqrt{3}} = 2 \mp \sqrt{3}$

37) $\frac{1}{\sqrt{8} \pm 2} = \frac{1}{4}\sqrt{8} \mp \frac{1}{2}$

38) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} \pm 1} = \frac{1}{2}\sqrt{6} \mp \frac{1}{2}\sqrt{2}$

39) $\frac{1}{5 \pm \sqrt{5}} = \frac{1}{4} \mp \frac{1}{20}\sqrt{5}$

40) $\frac{1}{10 \pm 2\sqrt{5}} = \frac{1}{8} \mp \frac{1}{40}\sqrt{5}$

41) $\frac{10 \mp 2\sqrt{5}}{10 \pm 2\sqrt{5}} = \frac{3}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{5}$

42) $\frac{\sqrt{2} \mp 1}{2 \pm \sqrt{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{2} \mp 2$

43) $\frac{3\sqrt{3} \pm 2}{2 \pm \sqrt{3}} = 4\sqrt{3} \mp 5$

44) $\frac{3\sqrt{5} \pm 2\sqrt{2}}{2\sqrt{5} \mp 3\sqrt{2}} = 21 \pm \frac{13}{2}\sqrt{10}$

45) $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} \pm \sqrt{5}} = \frac{1}{6}\sqrt{3} + \frac{1}{4}\sqrt{2} \mp \frac{1}{12}\sqrt{30}$

Es sei $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{1}{2}(a+x)} \pm \sqrt{\frac{1}{2}(a-x)}$

so ist $a \pm \sqrt{b} = (\sqrt{\frac{1}{2}(a+x)} \pm \sqrt{\frac{1}{2}(a-x)})^2$

oder $a \pm \sqrt{b} = a \pm \sqrt{a^2 - x^2}$

also $x^2 = a^2 - b$

46) $\sqrt{2 \pm \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$

47) $\sqrt{3 \pm \sqrt{8}} = \sqrt{2} \pm 1$

48) $\sqrt{3 \pm \sqrt{5}} = \sqrt{\frac{5}{2}} \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$

49) $\sqrt{4 \pm \sqrt{7}} = \sqrt{\frac{7}{2}} \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$

50) $\sqrt{6 \pm \sqrt{11}} = \sqrt{\frac{11}{2}} \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$

51) $\sqrt{5 \pm \sqrt{24}} = \sqrt{3} \pm \sqrt{2}$

52) $\sqrt{7 \pm \sqrt{48}} = 2 \pm \sqrt{3}$

53) $\sqrt{30 \pm \sqrt{500}} = 5 \pm \sqrt{5}$

54) $\sqrt{11 \pm \sqrt{72}} = 3 \pm \sqrt{2}$

55) $\sqrt{28 \pm \sqrt{300}} = 5 \pm \sqrt{3}$

56) $\sqrt{31 \pm \sqrt{600}} = 5 \pm \sqrt{6}$

57) $\sqrt{43 \pm \sqrt{1800}} = 5 \pm \sqrt{18}$

58) $\sqrt{87 \pm \sqrt{6048}} = \sqrt{63} \pm \sqrt{24}$

Bindung und Theilung.

1) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

2) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$

3) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

4) $(a^2+b^2)^2 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4$

5) $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$

6) $(a-b)(a^2+b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 - b^3$

7) $(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3) = a^4 - b^4$

8) $(a^2-1)(a^6+a^4+a^2) = a^8 - a^2$

9) $(a+2)(a^4-2a^3+4a^2-8a+16) = a^5+32$

10) $(2a^4-3a^3b+5a^2b^2)(4a^3-2a^2b+5ab^2-3b^3)$
$= 8a^7 - 16a^6b + 36a^5b^2 - 31a^4b^3 + 34a^3b^4 - 15a^2b^5$

11) $(7a^3 - 5a^2 + 6a - 2)(3a^4 - 4a^3 + 16a^2 + 2a - 1)$
$= 21a^7 - 43a^6 + 150a^5 - 96a^4 + 87a^3 - 15a^2 - 10a + 2$

12) $(\frac{3}{2}a^2 + 5a - \frac{2}{3})(5a^2 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{4})$
$= 7\frac{1}{2} \cdot a^4 + 24\frac{1}{4} \cdot a^3 - 5\frac{11}{24} \cdot a^2 + 1\frac{7}{12}a - \frac{1}{6}$

13) $(2a^{\frac{1}{2}} + 4a - 5a^{\frac{1}{2}})(3a^{\frac{1}{2}} - 2a + 7a^{\frac{1}{2}})$
$= 6a^3 - 9a^2 - 35a + \sqrt{a}\,(8a^2 + 38a)$

14) $(3a^{\frac{1}{6}}b^2 - 4a^{\frac{1}{3}}b^3 + 5a^{\frac{1}{2}}b^4)(2a^8b + a^9b^2 - 4a^{10}b^3)$
$= 6a^2b^3 - 5a^3b^4 - 6a^4b^5 + 21a^5b^6 - 20a^6b^7$

15) $(a^{\frac{1}{3}} - 4a^{\frac{1}{2}} - 2)(a^{\frac{1}{2}} - 1) = a^{\frac{1}{3}} - 4a^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{1}{3}} + 2a^{\frac{1}{2}} + 2$

16) $(a - 2a^2 + a^3)(\frac{4}{3}a^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}a^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{6}a^{\frac{1}{1}})$
$= \frac{4}{3}a^{\frac{1}{2}} - 2\frac{1}{6}a^{\frac{1}{1}} + 2\frac{5}{24}a^0 + \frac{3}{4}a^1 - \frac{1}{8}a^2$

17) $(2a + 3)(2a - 3)(4a^2 + 6a + 9)(4a^2 - 6a + 9)$
$= 64a^6 - 729$

18) $(5a - 4)(4a^2 - 7a - 8) = 20a^3 - 51a^2 - 12a + 32$

19) $(3a^2 - 9a - 8)(7a^2 - 5a - 2)$
$= 21a^4 - 78a^3 - 17a^2 + 58a + 16$

20) $(3 - a - 11a^2)(9 - 7a + 5a^2)$
$= 27 - 30a - 77a^2 + 72a^3 - 55a^4$

21) $(10a - 1)(2a^2 + 5a - 1) = 20a^3 + 48a^2 - 15a + 1$

22) $(a - 2)(a^3 + 2a^2 + 4a + 8) = a^4 - 16$

23) $(a^2 - 5a + 6)(2a^2 - 3a + 4)$
$= 2a^4 - 13a^3 + 31a^2 - 38a + 24$

24) $(2 - 3a + a^2)(2 + 3a - a^2) = 4 - 9a^2 + 6a^3 - a^4$

25) $(1 - a + a^2)(1 + a + a^3 + a^4) = 1 + 2a^3 + a^6$

26) $(3a - 2)(8a^2 + 7a - 1) = 24a^3 + 5a^2 - 17a + 2$

27) $(9a^2 - 6a + 1)(3a^2 + 2a + \frac{1}{3}) = 27a^4 - 6a^2 + \frac{1}{3}$

28) $(a^2 - 4a + 4)(a^4 + 4a^3 + 12a^2 + 16a + 16)$
$= a^6 - 16a^3 + 64$

29) $(1 - 7a)(1 + 3a - 6a^2) = 1 - 4a - 27a^2 + 42a^3$

30) $(2a - 3)(2a^2 + 5a - 7) = 4a^3 + 4a^2 - 29a + 21$

31) $(\frac{1}{2}a - 1)(3a^2 + \frac{3}{2}a - 9) = \frac{3}{2}a^3 - \frac{5}{4}a^2 - 8a + 9$

32) $(12 - 5a)(3 - 4a) = 36 - 63a + 20a^2$

33) $(6 - 4a - a^2)(12 - 5a - 3a^2)$
$= 72 - 78a - 10a^2 + 17a^3 + 3a^4$

34) $(\frac{1}{2}a^2 - \frac{3}{4}a + 6)(\frac{2}{3}a^2 - \frac{5}{6}a + 1)$
$= \frac{1}{3}a^4 - 1\frac{1}{2}a^3 + 5\frac{1}{8} \cdot a^2 - 5\frac{3}{4} \cdot a + 6$

35) $(2a + b)(16a^4 - 8a^3b + 4a^2b^2 - 2ab^3 + b^4) = 32a^5 + b^5$

36) $(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}a - \frac{1}{7}a^2)\ (\frac{1}{4} - \frac{1}{6}a - \frac{1}{8}a^2)$
$= \frac{1}{12} - \frac{19}{180}a - \frac{37}{840}a^2 + \frac{41}{840}a^3 + \frac{1}{56}a^4$

37) $(2a - 3)(32a^5 + 48a^4 + 72a^3 + 108a^2 + 162a + 243)$
$= 64a^6 - 729$

38) $(\frac{2}{3}a - \frac{3}{4})\ (\frac{3}{4})^6\ (c^6 + c^5 + c^4 + c^3 + c^2 + c + 1)$
$= \frac{128}{21187}a^7 - \frac{21187}{163384}$, wo $c = \frac{8}{9}a$

39) $(\frac{1}{3}a^2 - \frac{1}{5}a + \frac{1}{7}) \cdot (\frac{143}{1287}a^2 - \frac{117}{1287}a + \frac{99}{1287})$
$= \frac{1}{27}a^4 - \frac{26}{495}a^3 + \frac{2089}{45045}a^2 - \frac{142}{5005}a + \frac{1}{91}$

40) $(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}a) \cdot \frac{1}{8}(1 + c + c^2 + c^3) = \frac{1}{16} - \frac{1}{81}a^4$, $c = \frac{2}{3}a$

41) $(\frac{2}{5} - \frac{3}{7}a) \cdot \frac{8}{125}(1 + c + c^2 + c^3) = \frac{16}{625} - \frac{81}{2401}a^4$,
$c = \frac{15}{14}a$

42) $(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}a)\ (\frac{1}{6} + \frac{1}{7}a)\ (\frac{1}{8} - \frac{1}{9}a)\ (\frac{1}{4} - \frac{1}{5}a)$
$= \frac{1}{384} - \frac{13}{30240}a - \frac{305}{90720}a^2 + \frac{1}{3240}a^3 + \frac{1}{945}a^4$

Der höchste Gemeintheiler $= T$.

1) $\dfrac{a^3 - a^2 + 3a - 3}{a^2 - 5a + 4}$ $\qquad T = a - 1$

2) $\dfrac{5 + 18a + 14a^2 - 7a^3 - 11a^4 - 3a^5}{3 + 7a - 3a^2 - 8a^3 + a^4 + 2a^5}$
$T = 1 + 3a + a^2 - 2a^3 - a^4$

3) $\dfrac{8 - 14a + 15a^2 - 16a^3 - 3a^4}{10 - 9a + 10a^2 - 8a^3 + 3a^4}$ $\qquad T = 2 - 3a$

4) $\dfrac{12a^2 + 5a - 3}{6a^2 + a - 1}$ $\qquad T = 3a - 1$

5) $\dfrac{6a^3 + 13a^2 + 15a - 25}{2a^3 + 4a^2 + 4a - 10}$ $\qquad T = a^2 + 3a + 5$

6) $\dfrac{3a^5 - a^4 \ldots - 3a + 1}{3a^4 + a^3 + a^2 + a - 2}$ $\qquad T = a^3 + a^2 + a + 1$

7) $\dfrac{a^6 \ldots - 3a^3 - 4a^2 - 3a - 1}{a^6 \ldots - a^4 - 2a^3 - 3a^2 - 2a - 1}$ $T = a^3 - a^2 - a - 1$

8) $\dfrac{2a^5 + 2a^4 - 3a^3 - 5a^2 - 14a - 7}{2a^5 + 2a^4 - 5a^3 - 5a^2 - 7a - 7}$ $\qquad T = 2a^2 - 7$

9) $\dfrac{2a^5 - a^4 \ldots - 5a^2 - 5a - 1}{2a^5 - a^4 - 2a^3 - 2a^2 - 4a - 1}$ $\qquad T = 2a^2 - 3a - 1$

10) $\dfrac{a^3 - a^2 - a + 1}{a^3 - a^2 + a - 1}$ $T = a - 1$

11) $\dfrac{a^4 \ . \ . \ . \ - 16}{a^3 \ . \ . \ . \ + 8}$ $T = a + 2$

12) $\dfrac{a^2 + 2a - 3}{a^2 + 5a + 6}$ $T = a + 3$

13) $\dfrac{9a^3 + 53a^2 - 9a - 18}{a^2 + 11a + 30}$ $T = a + 6$

14) $\dfrac{2a^3 + a^2 - 8a + 5}{7a^2 - 12a + 5}$ $T = a - 1$

15) $\dfrac{2a^2 + 3a + 1}{a^2 - a - 2}$ $T = a + 1$

16) $\dfrac{120a^3 + 17a^2 - 36a + 4}{21a^2 - a - 10}$ $T = 3a + 2$

Zweite Abtheilung.
Die niedere Gleichung.

24.

Eintheilung der Gleichungen.

Die Anzeige dafs zwei verschieden zusammengesetzte Ausdrücke ihrem Werthe nach gleich sind, heifst *eine Gleichung.*

Die Gleichung heifst eine *Entwickelungsgleichung* (analytische Gl.) wenn sie eine Entwickelung Umbildung oder Vereinfachung anzeigt. Z. B.

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2 = 8 + \sqrt{60}$

Die Gleichung heifst eine *Lösungsgleichung* wenn sie die Bestimmung unbekannter Gröfsen aus bekannten Gröfsen zum Zwecke hat.

Die Lösungsgleichung heifst *grundhaft* (algebraisch) wenn sich die unbekannte Gröfse in der Grundzahl der Höhen befindet; z. B.

$$x^3 + 5x^2 = 100$$

Die Lösungsgleichung heifst *zeigerhaft* (exponential) wenn sich die unbekannte Gröfse im Namen oder Zeiger (Exponent) der Höhe befindet. Z. B. $a^x = b$

Die Lösungsgleichung heifst *bestimmt* wenn sich in ihr aufser gegebenen Gröfsen nur eine einzige unbekannte Gröfse befindet. Diese unbekannte Gröfse heifst die *Gleichungswurzel.*

Die Gleichung heifst *unbestimmt* wenn sie mehrere Wurzeln enthält. Z. B. $ax + by + cz = d$.

Die unbestimmte Gleichung heifst *zweistellig dreistellig vierstellig* u. s. w. je nachdem sie zwei, drei, vier u. s. w. Gleichungswurzeln enthält.

Die bestimmte grundhafte Gleichung heifst *eingerichtet*, wenn die Gleichungswurzel aus den Theilern der einzelnen Beisätze weggeschafft worden ist.

Die bestimmte grundhafte eingerichtete Gleichung heifst *einstufig zweistufig dreistufig vierstufig* u. s. w. (vom 1sten 2ten 3ten 4ten Grade oder linear, quadratisch, cubisch, biquadratisch u. s. w.) je nachdem der gröfste Name der Gleichungswurzel 1, 2, 3, 4 u. s. w. ist.

Z. B. einstufige Gleichung $ax = b$
zweistufige Gleichung $cx^2 + dx = f$
dreistufige Gleichung $4x^3 + 7x = 129$
vierstufige Gleichung $6x^4 + 11x = 519$

Wenn in einer bestimmten grundhaften eingerichteten Gleichung alle Beisätze welche die Gleichungswurzel enthalten auf einer Seite des Gleichheitszeichens stehen so heifst die auf der andern Seite stehende gegebene Gröfse der *Gleichungswerth.*

Die bestimmte grundhafte eingerichtete Gleichung heifst *gröfsenhaft* (literal) wenn die in ihr enthaltenen Nebenzahlen und Gleichungswerthe Gröfsen sind. Z. B.

$$ax = b \qquad cx^2 + dx = f$$

Die bestimmte grundhafte eingerichtete Gleichung heifst *zahlenhaft* (numerisch) wenn die in ihr enthaltenen Nebenzahlen und Gleichungswerthe bestimmte Zahlen sind.

Eine bestimmte Gleichung *auflösen* heifst eine oder mehrere Gröfsen finden welche an die Stelle der Gleichungswurzel gesetzt die Gleichung befriedigen.

25.

Auflösung der einstufigen bestimmten Gleichung.

1) Um die Gleichung einzurichten bindet man die einzelnen Beisätze mit demjenigen Theiler in welchem sich die Gleichungswurzel befindet.

Z. B. In . . . . $c - \frac{5 + 4x}{9 + 10x} = \frac{280 + 3x}{9 + 10x}$

werden alle Beisätze mit dem Theiler $9 + 10 . x$ gebunden, woraus entsteht:

$$c(9 + 10x) - (5 + 4x) = 280 + 3x$$

2) Man bringt alle Beisätze welche die Gleichungswurzel enthalten, auf eine Seite des Gleichheitszeichens. Was auf der einen Seite angelegt oder abgezogen wird mufs auch auf der andern Seite angelegt oder abgezogen werden. Hieraus folgt dafs jeder Beisatz beim Uebertritt von der einen Seite zur andern sein Vorzeichen verändert.

Z. B. Aus $c(9 + 10x) - (5 + 4x) = 280 + 3x$
wird $10cx - 4x - 3x = 280 + 5 - 9c$

3) Man vereinigt alle Nebenzahlen der Gleichungswurzel in eine zusammengesetzte Gröfse, welche man durch die Klammer begrenzt.

Z. B. Aus $10cx - 4x - 3x = 280 + 5 - 9c$
wird $(10c - 4 - 3)x = 280 + 5 - 9c$

4) Man theilt die Gleichung zu beiden Seiten mit der in der Klammer enthaltenen zusammengesetzten Gröfse.

Z. B. Aus $(10c - 4 - 3)x = 280 + 5 - 9c$

wird $$x = \frac{280 + 5 - 9c}{10c - 4 - 3}$$

5) Man bringt die gehörigen Vereinfachungen an.

Z. B. Aus $$x = \frac{280 + 5 - 9c}{10c - 4 - 3}$$

wird $$x = \frac{285 - 9c}{10c - 7}$$

Die Auflösung der einstufigen bestimmten Gleichung besteht also darin, dafs sie durch die angezeigten Ausführungen auf die Fassung

$$ax = b$$

und $$x = \frac{b}{a}$$

gebracht wird.

Diese Ausführungen gaben Veranlassung zu der arabischen Benennung der Gröfsenrechnung (Algebra). Diejenige Darstellung nämlich, wo alle Beisätze zu beiden Seiten setzhaft sind, nannten die Araber die ***Herstellung*** (al Dschebr).

Z. B. $10cx + 9c = 285 + 7x$

Die Abziehung der kleinern Beisätze von den gröfsern nannten sie ***Vergleichung*** (al Mokàbalah).

Z. B. Aus $10cx + 9c = 285 + 7x$
wird $10cx - 7x = 285 - 9c$

Siehe Nesselmann »Algebra der Griechen« 1842. 49.

Eine Aufgabe welche auf einstufige Gleichungen führt enthält gewöhnlich aufser der Hauptwurzel x noch mehrere Hülfswurzeln y, z, u u. s. w. welche von der Hauptwurzel x durch einstufige Ausdrücke abhängen, z. B.

$y = ax + b$, $z = cx + d$, $u = fx + g$

Dann mufs die Aufgabe noch eine einstufige Gleichung der Wurzeln $x, y, z, u \ldots$ enthalten, z. B.

$$hx + ky + lz + mu = n$$

Diese giebt dann durch *Einsetzung* (Substitution) der obigen Ausdrücke eine einstufige bestimmte Gleichung für die Hauptwurzel x, nämlich:

$$hx + k(ax + b) + l(cx + d) + m(fx + g) = n$$

woraus nach den obigen Vorschriften die Hauptwurzel x geschlossen wird.

26.

Wenn die Anzahl der einstufigen Gleichungen der Anzahl der Gleichungswurzeln gleich ist, so ergiebt sich für jede Gleichungswurzel eine bestimmte Gleichung.

Das hiebei anzuwendende Verfahren heifst die Ausscheidung (Elimination).

Die Ausscheidung kann durch Bindung, Theilung oder Einsetzung bewirkt werden.

1) Bei der ersten Art wird jede Gleichung mit derjenigen Nebenzahl gebunden, welche die auszuscheidende Gleichungswurzel in der andern Gleichung hat.

Z. B.
$$\begin{aligned} \tfrac{2}{5}x - \tfrac{3}{8}y &= \overline{1}.0{,}675 \\ 7x + 8y &= 61 \end{aligned}$$

Um y auszuscheiden bindet man die erste Gleichung mit 8, die andere mit $\frac{3}{8}$. Dadurch ergiebt sich:

$$\begin{aligned} 1\tfrac{6}{5}x - 3y &= \overline{1}.5{,}4 \\ 2\tfrac{1}{8}x + 3y &= 22\tfrac{7}{8} \end{aligned}$$

hieraus $(1\frac{6}{5} + 2\frac{1}{8})x = 17\frac{19}{40}$ $\qquad x = 3$

2) Bei der zweiten Art theilt man jede Gleichung durch diejenige Nebenzahl welche die auszuscheidende Wurzel in dieser Gleichung hat. Z. B.

$$\begin{aligned} \tfrac{2}{5}x - \tfrac{3}{8}y &= \overline{1}.0{,}675 \\ 7x + 8y &= 61 \end{aligned}$$

Um y auszuscheiden theilt man die erste Gleichung mit $\frac{3}{8}$, die andere mit 8. Dadurch ergiebt sich

$$\begin{aligned} 1\tfrac{6}{3}x - y &= \overline{1}.1{,}8 \\ \tfrac{7}{8}x + y &= 7\tfrac{5}{8} \end{aligned}$$

hieraus $(1\frac{6}{3} + \frac{7}{8})x = 5\frac{33}{40}$ $\qquad x = 3$

3) Bei der dritten Art drückt man die auszuscheidende Wurzel durch die zu bestimmende Wurzel aus, und setzt diesen Werth in die andre Gleichung ein.

Z. B. $\frac{2}{5}x - \frac{3}{8}y = \overline{1}.0{,}675$

$7x + 8y = 61$

Um y auszuscheiden schliefst man aus der ersten Gleichung

$y = 1\frac{6}{15}x + 1{,}8$

Diesen Werth von y setzt man in die andre Gleichung ein, so ist

$7x + 8(1\frac{6}{15}x + 1{,}8) = 61$

hieraus $(7 + 1\frac{28}{15})x = 46{,}6 \qquad x = 3$

Den gefundenen Werth von x setzt man in jede der gegebenen Gleichungen. Beide müssen dann für y einerlei Werth geben.

Z. B. Die Gleichungen seien

$\frac{2}{5}x - \frac{3}{8}y = \overline{1}.0{,}675$

$7x + 8y = 61$

Wenn $x = 3$ ist, so werden diese Gleichungen

$1{,}2 - \frac{3}{8}y = \overline{1}.0{,}675$

$21 + 8y = 61$

aus beiden folgt $y = 5$.

Zweites Beispiel.

A	$8x$	$+ 5y$	$=$	230
B	$3y$	$+ 2z$	$=$	138
C	$8z$	$+ 3u$	$=$	276
D	$15u$	$+ 4x$	$=$	460
$5\,C$	$40z$	$+ 15u$	$=$	1380
D	$15u$	$+ 4x$	$=$	460
$4\,E$	$40z$	$- 4x$	$=$	920
E	$10z$	$- x$	$=$	230
$3\,A$	$24x$	$+ 15y$	$=$	690
$5\,B$	$15y$	$+ 10z$	$=$	690
F		$10z$	$=$	$24x$
E u. F	$24x$	$- x$	$=$	230

hieraus

$x = 10$

$z = 24$

$u = 28$

$y = 30$

Drittes Beispiel.

A	$2x$	$-$	$4y$	$+$	$9z$	$=$	28
B	$7x$	$+$	$3y$	$-$	$5z$	$=$	3
C	$9x$	$+$	$10y$	$-$	$11z$	$=$	4
$5\,A$	$10x$	$-$	$20y$	$+$	$45z$	$=$	140
$9\,B$	$63x$	$+$	$27y$	$-$	$45z$	$=$	27
C'	$73x$	$+$	$7y$			$=$	167
$11\,A$	$22x$	$-$	$44y$	$+$	$99z$	$=$	308
$9\,C$	$81x$	$+$	$90y$	$-$	$99z$	$=$	36
B'	$103x$	$+$	$46y$			$=$	344
$11\,B$	$77x$	$+$	$33y$	$-$	$55z$	$=$	33
$5\,C$	$45x$	$+$	$50y$	$-$	$55z$	$=$	20
A'	$32x$	$-$	$17y$			$=$	13

Die Gleichungen A', B', C', heifsen gemeinwurzelig, weil die Wurzeln, welche zweien derselben gemeinsam sind, die dritte befriedigen. Sie entsprechen in der *Bildlehre* (Geometrie) den drei Stralen einer Ecke.

A'	$32x$	$-$	$17y$			$=$	13
C'	$73x$	$+$	$7y$			$=$	167
$7\,A'$	$224x$	$-$	$119y$			$=$	91
$17\,C'$	$1241x$	$+$	$119y$			$=$	2839
	$1465x$					$=$	2930
hieraus	x					$=$	2
A'	64	$-$	$17y$			$=$	13
B'	206	$+$	$46y$			$=$	344
C'	146	$+$	$7y$			$=$	167
hieraus			y			$=$	3
A . . .	4	$-$	12	$+$	$9z$	$=$	28
B . .	14	$+$	9	$-$	$5z$	$=$	3
C . .	18	$+$	30	$-$	$11z$	$=$	4
hieraus					z	$=$	4

27.

Auflösung der zweistufigen bestimmten Gleichung in ihrer einfachsten Fassung.

Die zweistufige Gleichung wird so eingerichtet, dafs die Zweithöhe der Gleichungswurzel setzhaft ohne Nebenzahl sei. Z. B.

$$x^2 + ax = b$$

Hier heifst a die Nebenzahl des zweiten Gliedes und b der Gleichungswerth welcher auch gegenhaft sein kann.

Man ergänzt die Wurzelseite der Gleichung zu einer vollständigen Zweithöhe, indem man zu beiden Seiten die Zweithöhe der halben Nebenzahl, nämlich $\frac{1}{4}a^2$, anlegt:

$$x^2 + ax + \tfrac{1}{4}a^2 = \tfrac{1}{4}a^2 + b$$

Nun ist $x^2 + ax + \frac{1}{4}a^2 = (x + \frac{1}{2}a)^2$

also $(x + \frac{1}{2}a)^2 = \frac{1}{4}a^2 + b$

Man setze $\frac{1}{4}a^2 + b = g$

so ist $(x + \frac{1}{2}a)^2 = g$

also $x + \frac{1}{2}a = \pm \sqrt{g}$

also $x = \pm \sqrt{g} - \frac{1}{2}a$

Das doppelte Vorzeichen zeigt an, dafs die Zweitwurzel von g *entweder* setzhaft *oder* gegenhaft genommen werden kann. Die Gröfse $\frac{1}{4}a^2 + b = g$ heifst die *Fläche* (Determinante) der Gleichung. Da aus der Fläche g die Zweitwurzel gezogen wird, so darf g nicht gegenhaft sein. Wenn also b gegenhaft ist, so darf der Anwerth von b nicht gröfser als $\frac{1}{4}a^2$ sein.

Die obige Auflösung zeigt, dafs die zweistufige Gleichung zwei Wurzeln hat, die beide die Gleichung befriedigen, obwohl sie nicht gleichzeitig stattfinden sondern entweder die eine oder die andere. Es ist nämlich

entweder $x + \frac{1}{2}a - \sqrt{g} = 0$

oder $x + \frac{1}{2}a + \sqrt{g} = 0$

Das Gebinde dieser einstufigen Bindeglieder giebt wieder die vorgelegte Gleichung.

Nämlich aus $(x + \frac{1}{2}a - \sqrt{g})(x + \frac{1}{2}a + \sqrt{g}) = 0$

wird $x^2 + ax + \frac{1}{4}a^2 - g = 0$

oder $x^2 + ax - b = 0$

28.

Auflösung der zweistufigen bestimmten Gleichung in ihrer allgemeinsten Fassung.

Die allgemeinste Fassung der zweistufigen bestimmten Gleichung ist $cx^2 + dx = f$

Man binde die Gleichung zu beiden Seiten mit $4c$

so ist $4c^2x^2 + 4cdx = 4cf$

also $4c^2x^2 + 4cdx + d^2 = d^2 + 4cf$

aber $4c^2x^2 + 4cdx + d^2 = (2cx + d)^2$

also $(2cx + d)^2 = d^2 + 4cf$

Es sei die Fläche $d^2 + 4cf = g$

so ist $(2cx + d)^2 = g$

also $2cx + d = \pm \sqrt{g}$

Die beiden einstufigen Bindeglieder welche die zweistufige Gleichung auflösen sind also

$$2cx + d - \sqrt{g} = 0$$
$$2cx + d + \sqrt{g} = 0$$

Das Gebinde derselben mit $4c$ getheilt giebt wieder die vorgelegte zweistufige Gleichung.

Da die Nebenzahl c immer setzhaft genommen werden kann, so hat die zweistufige bestimmte Gleichung drei Fälle.

Im ersten Falle wo die Fläche g setzhaft und gröfser als d^2 ist, ist eine der Gleichungswurzeln setzhaft die andere gegenhaft.

Im andern Falle wo die Fläche g setzhaft und kleiner als d^2 ist, sind entweder beide Gleichungswurzeln setzhaft oder beide gegenhaft.

In diesen beiden Fällen sind die Gleichungswurzeln *wirklich* (reell).

Im dritten Fall wo die Fläche g gegenhaft ist, sei ihr setzhafter Anwerth $= G$.

Dann ist $g = \overline{1} \cdot G$

Es sei also $i^2 = \overline{1}$ oder $i^2 + 1 = 0$

so ist $\sqrt{g} = i \cdot \sqrt{G}$

Die beiden einstufigen Bindeglieder welche die zweistufige Gleichung auflösen sind alsdann

$$2cx + d - i\sqrt{G} = 0$$
$$2cx + d + i\sqrt{G} = 0$$

Die Gröfse i ist die Zweitwurzel der Gegeneinheit und heifst die *Sinngröfse* (imaginaire Gr.). Sie ist an sich selbst keine wirkliche Gröfse aber man kann sich ihrer in allen Rechnungen als einer wirklichen Gröfse bedienen, wofern sie nur nach beendigter Rechnung von selbst herausfällt. Die Gleichungswurzeln heifsen daher in diesem dritten Fall *Sinnwurzeln*.

1. *Beispiel.*

$$14x^2 - 405x = 450$$
$$d^2 = 164025$$
$$4cf = 25200$$
$$g = 189225$$
$$\sqrt{g} = 435$$
$$(x - 30)(14x + 15) = 0$$

2. *Beispiel.*

$$x^2 - 13x = \overline{1}.40$$
$$d^2 = 169$$
$$4cf = \overline{1}.160$$
$$g = 9$$
$$\sqrt{g} = 3$$
$$(x - 5)(x - 8) = 0$$

3. *Beispiel.*

$$x^2 + 3x = 40$$
$$d^2 = 9$$
$$4cf = 160$$
$$g = 169$$
$$\sqrt{g} = 13$$
$$(x - 5)(x + 8) = 0$$

4. *Beispiel.*

$$2x^2 - 3x = 6$$
$$d^2 = 9$$
$$4cf = 48$$
$$g = 57$$
$$\sqrt{g} = 7{,}5498344$$
$$(x - 2{,}6374586)(x + 1{,}1374586) = 0$$

Prüfung

$$x^2 = 6{,}9561879 \ldots \quad 1{,}2938121$$
$$2x^2 = 13{,}9123758 \ldots \quad 2{,}5876242$$
$$3x = 7{,}9123758 \ldots \quad \overline{3}{,}4123758$$
$$2x^2 - 3x = 6, \qquad 6,$$

5. *Beispiel.*

$$x^2 + x + 1 = 0$$
$$d^2 = 1$$
$$4cf = \overline{4}$$
$$g = \overline{3}$$
$$G = 3$$
$$(x + \tfrac{1}{2} - i\sqrt{\tfrac{3}{4}})(x + \tfrac{1}{2} + i\sqrt{\tfrac{3}{4}}) = 0$$

Dieses Beispiel ist bemerkenswerth weil es zeigt, dafs die Einheit *drei Drittwurzeln* hat. Es sei nämlich $x^3 = 1$, so ist

$$x^3 - 1 = 0$$

also

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

Das zweite Bindeglied ist die obige zweistufige Gleichung. Ihre Gleichungswurzeln sind also die beiden aufser 1 stattfindenden Drittwurzeln der Einheit, nämlich

$$\overline{1} \cdot \tfrac{1}{2} + i\sqrt{\tfrac{3}{4}} \quad \text{und} \quad \overline{1} \cdot \tfrac{1}{2} - i\sqrt{\tfrac{3}{4}}$$

29.

Die zweistufige bestimmte Gleichung hat nicht mehr als zwei Gleichungswurzeln.

Die vorgelegte Gleichung sei

$$cx^2 + dx = f$$

Ihre Gleichungswurzeln seien m und n, so ist

$$cm^2 + dm = f \qquad cn^2 + dn = f$$

also $\quad c(m^2 - n^2) + d(m - n) = 0$

also $\quad c(m - n)(m + n) + d(m - n) = 0$

also $\quad$ I. $\quad (m - n)(cm + cn + d) = 0$

Es sei noch eine dritte Gleichungswurzel p möglich, so ist

$$\text{II.} \quad (m - p)(cm + cp + d) = 0$$

Eines der Bindeglieder in I., und eines der Bindeglieder in II., müssen nichtig sein. Es können aber nicht $m - n$ und $m - p$ nichtig sein da vermöge der Voraussetzung m, n, p, verschieden sind. Also müssen die beiden andern Bindeglieder in I. und II. nichtig sein. Also

$$cm + cn + d = 0 \quad \text{und} \quad cm + cp + d = 0$$

Also ist $\quad p = n$.

30.

In der eingerichteten zweistufigen bestimmten Gleichung ist die Nebenzahl gleich der Anlage der gegenhaft genommenen Wurzeln und der Gleichungswerth gleich dem gegenhaft genommenen Gebinde der Wurzeln.

Es sei die Gleichung zu bestimmen deren Wurzeln m und n sein sollen, so mufs

entweder $\quad x - m = 0$

oder $\quad x - n = 0$

also mufs sein $\quad (x - m)(x - n) = 0$

also $\quad x^2 - (m + n)x + mn = 0$

also $\quad x^2 + (\overline{m} + \overline{n})x = \overline{1} \cdot mn$

Z. B. $\quad m = 3 , \quad n = 5$ giebt die Gleichung

$$x^2 - 8x = \overline{15}$$

31.

Die Ausscheidung zweier zweistelligen Gleichungen von denen die eine einstufig die andere zweistufig ist, giebt zwei bestimmte zweistufige Gleichungen.

Es sei . . . . I. $x + y = a$

II. $xy = b$

I. mit x giebt $x^2 + xy = ax$

I. mit y giebt $y^2 + xy = ay$

Die beiden zweistufigen bestimmten Gleichungen sind also

$$x^2 - ax + b = 0$$
$$y^2 - ay + b = 0$$

Es seien die gegebenen Gleichungen

I. $x - y = a$

II. $xy = b$

I. mit x . . . . . $x^2 - xy = ax$

I. mit y . . . . . $xy - y^2 = ay$

Die beiden zweistufigen bestimmten Gleichungen sind also

$$x^2 - ax = b$$
$$y^2 + ay = b$$

Es seien die gegebenen Gleichungen

A . . . $x + y = a$

B . . . $x^2 + y^2 = c$

$A^2 = C$ . . . . . $x^2 + 2xy + y^2 = a^2$

$C - B = E$ . . . $2xy = a^2 - c$

$2E$ . . . . . $4xy = 2a^2 - 2c$

$C - 2E = D^2$ . . $x^2 - 2xy + y^2 = 2c - a^2$

D . . . . . $x - y = \sqrt{2c - a^2}$

$A + D$ . . . . $2x = a + \sqrt{2c - a^2}$

$A - D$ . . . . $2y = a - \sqrt{2c - a^2}$

Im Allgemeinen wird die Ausscheidung dadurch bewirkt, dafs der Werth der einen Wurzel der einstufigen Gleichung in die zweistufige Gleichung gesetzt wird.

Beispiel.

$A \ldots\ldots\ldots 5x - 7y = 5$

$B \ldots\ldots 3x^2 - 7xy + 2y^2 = \overline{38}$

aus $A \ldots y = \frac{5}{7}(x - 1) \qquad x = \frac{7}{5}y + 1$

dieſs in B gesetzt

$C \ldots\ldots 3x^2 - 5(x-1)\,x + \frac{50}{49}(x-1)^2 = \overline{38}$

$D \ldots\ldots 2y^2 - (\frac{49}{5}y + 7)\,y + 3(\frac{7}{5}y + 1)^2 = \overline{38}$

oder $C \ldots\ldots 48x^2 - 145x = 1912$

$D \ldots\ldots 48y^2 - 35y = 1025$

oder $C \ldots (x - 8)(48x + 239) = 0$

$D \ldots (y - 5)(48y + 205) = 0$

Setzt man $x - 8 = 0$ und $y - 5 = 0$ so befriedigen diese Werthe von x und y die Gleichung A. Also befriedigen sie auch die Gleichung B.

Setzt man $48x + 239 = 0$ und $48y + 205 = 0$ so befriedigen diese Werthe die Gleichung A. Also befriedigen sie auch die Gleichung B.

Einstufige zahlhafte Gleichungen.

1) $2\frac{3}{4}x - 13 = 3\frac{4}{3}x - 139$ $\quad x = 120$

2) $19 - \frac{7}{x} = 10{,}6$ $\quad x = \frac{5}{6}$

3) $3{,}442 = 37\frac{1}{2}x - 12{,}308$ $\quad x = 0{,}42$

4) $\frac{1}{2}x + \frac{5}{6}x - 1\frac{5}{8}x = 1\frac{1}{12}x - 1\frac{5}{6}x - \frac{1}{3\,5}$ $\quad x = \frac{2\,6\,8\,2}{2\,2\,1\,5}$

5) $5 + \frac{8}{9x} + \frac{11}{12x} = 17 + \frac{2}{3x} + \frac{5}{6x}$ $\quad x = \frac{1\,1}{4\,3\,2}$

6) $\frac{1}{3}x - y = 1$, $\frac{1}{3}y - z = 1$, $\frac{1}{3}z - u = 1$
$\frac{1}{3}u - v = 1$, $\frac{1}{3}v = 1$
$x = 363$

7) $y - x = 2$, $z - \frac{1}{3}y = 4$, $u - \frac{1}{5}z = 6$
$\frac{1}{7}u + 8 = 9$
$x = 1$

8) $x + 8 = y$, $x - 9 = z$, $5 + \frac{1}{4}y = 9 - \frac{1}{4}z$
$x = 13$

9) $x + \frac{2}{3} = y$, $\frac{1}{y} - 1 = 1 - \frac{x+1}{y}$
$x = \frac{2}{3}$

10) $3 - 4x = y$, $2 + \frac{1}{2}x = z$, $91y - 65z = 82$
$x = \frac{2}{3}$

11) $\frac{11 - x}{13 - x} = \frac{x + 1}{x + 7}$ $\quad x = 8$

12) $(5x - 1)^2 + (12x - 168)^2 = (13x - 143)^2$
$x = 24$

13) $\begin{cases} y - 3x = 84, & z - 7x = 420, \quad u + 11x = 756 \\ v + 7x = 420, & \omega + 2x = 252, \quad vy - uz = 14\omega^2 \end{cases}$
$x = 83$

14) $\begin{cases} y + 2x = 3, & z + 4x = 9, \quad u + 6x = 15, \\ v + 8x = 21, & \omega + x^2 = 3, \quad vy - uz = 8\omega \end{cases}$
$x = 2$

15) $y^2 - x = 280$, $(y - 14)^2 = x$ $\quad x = 9$

16) $y + 7 = 3x$, $y^2 = 9x^2 - 43x + 54$ $\quad x = 5$

17) $y^2 = x + 8$, $z^2 = 4x + 4$, $(y - z)^2 = x$
$x = \frac{1}{3}$

18) $11x + 14y = 214$, $16x - 13y = 11$
$x = 8$, $y = 9$

19) $3x - 5y = 460$, $2y + 3z = 548$, $16\frac{1}{2}z - 2\frac{1}{3}x = 810$
$x = 360$, $y = 124$, $z = 100$

20) $30x + 20y + 10z = 79$, $15x + 6y + 12z = 56{,}10$, $10x + 5y + 4z = 26{,}95$ $\Big\}$ $x = 1{,}20$, $y = 0{,}75$, $z = 2{,}80$

21) $12z - x - y = 302$, $y - x - z = 4$, $y + z - x = 64$ $\Big\}$ $x = 12$, $y = 46$, $z = 30$

22) $2x + y + z = 200$, $8y + 5z + 5x = 800$, $4z + 3x + 3y = 400$ $\Big\}$ $x = 70$, $y = 50$, $z = 10$

23) $2x - 4y + 9z = 28$, $7x + 3y - 5z = 3$, $9x + 10y - 11z = 4$ $\Big\}$ $x = 2$, $y = 3$, $z = 4$

24) $12x + 8y + 6z = 7{,}70$, $10x + 6y + 4z = 6{,}10$, $14x + 9y + 5z = 8{,}60$ $\Big\}$ $x = 0{,}40$, $y = 0{,}25$, $z = 0{,}15$

25) $6x + 9y + 12z = 9$, $6y + 9z + 12x = 10\frac{1}{4}$, $6z + 9x + 12y = 10$ $\Big\}$ $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{3}$, $z = \frac{1}{4}$

26) $3(x + 6) = 2(y + 6)$, $11(x + 5) = 7(z + 5)$, $7(y - 36) = 6(z - 36)$ $\Big\}$ $x = 30$, $y = 48$, $z = 50$

Einstufige gröfsenhafte Gleichungen.

27) $x + y = a$ $\quad x - y = b$

28) $x \pm y = a$ $\quad x = by$

29) $x + y = a$ $\quad x - cy = b$

30) $x + y = a$ $\quad cx \pm dy = b$

31) $x \pm y = a$, $\quad x \pm z = b$, $\quad y = cz$

32) $x + y = a$ $\quad x^2 - y^2 = b$

33) $x = ay$ $\quad x^2 + y^2 = b(x \pm y)$

34) $x = ay$ $\quad x^2 - y^2 = b(x \pm y)$

35) $x = ay$ $\quad y^2 = bx$

36) $x = ay$ $\quad y^2 = b(x \pm y)$

37) $y - x = a$, $\quad z - x = b$, $\quad az + by = 2(a+b)x$

38) $y - x = a$, $\quad z - x = b$, $\quad 2by - az = (a+b)x$

39) $y - x = a$, $\quad z - x = b$, $\quad 2az - by = (a+b)x$

40) $y + z = a$, $\quad z + x = b$, $\quad x + y = c$

41) $x+y+z=a \qquad y+z+\omega=b$
$z+\omega+x=c \qquad \omega+x+y=d$

42) $y+z-x=a,\quad z+x-y=b,\quad x+y-z=c$

43) $x+y+z-\omega=a,\quad y+z+\omega-x=b$
$z+\omega+x-y=c,\quad \omega+x+y-z=d$

44) $x+y+z=a,\quad x+y=bz,\quad y+z=cx$

45) $z=d(x-y),\quad x=b(y-z),\quad y=c(z-a)$

Auflösung. Es sei $k=\dfrac{bcd-bd-cd-1}{ac}$ so ist

$kx=bd+b,\quad ky=bd+1,\quad kz=bd-d$

46) $bx+hz=a,\quad cy+fx=a,\quad dz+gy=a$

Aufl. Es sei $k=\dfrac{bcd+fgh}{a}$ so ist

$kx=cd+gh-ch,\ ky=db+hf-df,\ kz=bc+fg-bg$

47) $x+y=a,\quad u+v=a,\quad x=bv,\quad u=cy$

Aufl. Es sei $k=bc-1$, so ist $ky=ab-a$
$kv=ac-a,\quad kx=abc-ab,\quad ku=abc-ac$

48) $x+y=a,\quad u+v=a,\quad \omega+z=a$
$x=bv,\quad u=cz,\quad \omega=dy$

Aufl. Es sei $k=bcd+1$, so ist
$kx=abcd-abc+ab,\quad ky=abc-ab+a$
$ku=abcd-acd+ac,\quad kv=acd-ac+a$
$k\omega=abcd-abd+ad,\quad kz=abd-ad+a$

49) $u-x=a,\quad \omega-y=b,\quad u=cv$
$y-v=a,\quad x-z=b,\quad \omega=dz$

Aufl. Es sei $k=cd-1$, so ist
$ku=c(a+b)(d+1) \qquad k\omega=d(a+b)(c+1)$
$kv=(a+b)(d+1) \qquad kz=(a+b)(c+1)$
$kx=bcd+ac+bc+a$
$ky=acd+ad+bd+b$

50) $b\omega+mz=a,\quad cx+g\omega=a$
$dy+hx=a,\quad fz+ly=a$

Aufl. Es sei $k=\dfrac{bcdf-ghlm}{a}$ so ist

$k\omega=cdf+clm-cdm-hlm$
$kx=dfb+dmg-dfg-lmg$
$ky=fbc+fgh-fbh-mgh$
$kz=bcd+bhl-bcl-ghl$

51) $x + by + bz = a$, $y + cz + cx = a$
$z + dx + dy = a$, $x + y + z = s$

Aufl. Es sei $\frac{1}{k} = \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} + \frac{1}{1-d}$ so ist

$s = \frac{a}{1-2k}$, $x = \frac{a-bs}{1-b}$, $y = \frac{a-cs}{1-c}$, $z = \frac{a-ds}{1-d}$

52) $\omega + bx + by + bz = a$, $x + cy + cz + c\omega = a$
$y + dz + d\omega + dx = a$, $z + f\omega + fx + fy = a$
$\omega + x + y + z = s$

Aufl. Es sei $\frac{1}{k} = \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} + \frac{1}{1-d} + \frac{1}{1-f}$

so ist $s = \frac{1}{1-3k}$, $\omega = \frac{a-bs}{1-b}$, $x = \frac{a-cs}{1-c}$

$y = \frac{a-ds}{1-d}$, $z = \frac{a-fs}{1-f}$

Zweistufige Gleichungen.

Anmerkung. Als Auflösung sind die beiden Einstufungen angegeben.

1) $15x - x^2 = 56$	$(x-7)(x-8) = 0$
2) $2x^2 + 3x = 65$	$(x-5)(2x+13) = 0$
3) $9x^2 - x = 140$	$(x-4)(9x+35) = 0$
4) $28x - x^2 = 115$	$(x-5)(x-23) = 0$
5) $5x - 6x^2 = 1$	$(2x-1)(3x-1) = 0$
6) $8x - x^2 = 15$	$(x-3)(x-5) = 0$
7) $16x - x^2 = 60$	$(x-6)(x-10) = 0$
8) $\frac{24}{x} - \frac{24}{x+4} = 1$	$(x-8)(x+12) = 0$
9) $\frac{45}{2x+3} + \frac{116}{4x+5} = 7$	$(x-6)(28x+39) = 0$
10) $x(x+52) = 1725$	$(x-23)(x+75) = 0$
11) $x(x+9) = 136$	$(x-8)(x+17) = 0$
12) $x^2 - 47x = 1704$	$(x-71)(x+24) = 0$
13) $x(x+80) = 1764$	$(x-18)(x+98) = 0$
14) $\frac{1}{x-400} - \frac{1}{x} = \frac{1}{12000}$	$(x-2400)(x+2000) = 0$

15) $x^2 - 26x = 407$ $\quad (x - 37)(x + 11) = 0$

16) $40x - x^2 = 391$ $\quad (x - 17)(x - 23) = 0$

17) $x^2 - 12x = 25245$ $\quad (x - 165)(x + 153) = 0$

18) $x(x + 0{,}7) = 17{,}1$ $\quad (5x - 19)(2x + 9) = 0$

19) $20{,}44x - 1{,}49x^2 = 68{,}16$ $\quad (x - 8)(149x - 852) = 0$

20) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{7}{12}$ $\quad (x - 3)(7x + 4) = 0$

21) $38x - 5x^2 = 21$ $\quad (x - 7)(5x - 3) = 0$

22) $12x^2 + x = 6$ $\quad (3x - 2)(4x + 3) = 0$

23) $(x-7)(x+9) = 960$ $\quad (x - 31)(x + 33) = 0$

24) $(25 - 2x)(25 - 3x) = 91$ $\quad (x - 6)(6x - 89) = 0$

25) $x^2 + 7x = 79878$ $\quad (x - 279{,}1846)(x + 286{,}1846) = 0$

26) $x^2 + 3x = 101$ $\quad (x - 8{,}6612)(x + 11{,}6612) = 0$

27) $\dfrac{x-2}{x-3} + \dfrac{x+4}{x+5} = 2{,}4$ $\quad (x - 5)(x + 7) = 0$

28) $\dfrac{10}{x} - \dfrac{10}{x+1} = \dfrac{3}{x+2}$ $\quad (x - 4)(3x + 5) = 0$

29) $\dfrac{5x-6}{7x-25} - \dfrac{3x+2}{4x-1} = \dfrac{16-x}{28x-193}$

$(x - 8)(534x + 1401) = 0$

30) $6x^3 + 4x^2 + 3x - 205 = (3x - 4)(2x^2 + 3x - 5)$

$(x - 5)(x + 15) = 0$

31) $\dfrac{(3x-20)(x-1)}{(x-12)(x-9)} = 7$ $\quad (x-8)(x-23) = 0$

32) $\dfrac{x^4 - x^3 - 5x^2 - 7x - 24}{(x^2+2x+3)(x^2-3x-4)} = 1$ $\quad (x-1)(x+6) = 0$

33) $(11 - 3x)(6x + 15) = 22x$ $\quad (x-3)(18x+55) = 0$

34) $\sqrt{2x+1} + \sqrt{3x+4} = \sqrt{6x+25}$

$(x - 4)(23x + 96) = 0$

35) $39x(x + 4) = 32(x + 1)(x + 5)$

$(x - 8)(7x + 20) = 0$

36) $104x^2 = 45(x + 2)(2x + 5)$

$(x - 30)(14x + 15) = 0$

37) $2x(x - 3) + 3(x + 2)(x - 2) = 260$

$(x - 8)(5x + 34) = 0$

38) $\dfrac{1200 + (x+2)(x-1)}{1200 + x(x+3)} = \dfrac{307}{310}$

$(x-5)(3x-596) = 0$

39) $\dfrac{2x^2+(x-2)(x-4)}{x-2} = 20 \quad (x-6)(3x-8) = 0$

40) $\dfrac{6912}{x} - \frac{1}{4}x = 208 \quad (x-32)(x+864) = 0$

41) $\dfrac{300+25(x-3)}{8x(x-10)} = 1 \quad (x-15)(8x+15) = 0$

42) $\dfrac{(4x^2-17x+13\frac{1}{3})(x+1)}{x(x+2)(4x-17)} = 1 \quad (x-8)(12x+5) = 0$

43) $201x + \dfrac{201x^2}{8400} = 185724 \quad (x-840)(x+9240) = 0$

44) $(200-x)(300-2x) = 30000$

$(x-50)(x-300) = 0$

45) $3(100+x)^2 - 11(100+x) = 31304$

$(x-4)(3x+601) = 0$

46) $\left.\begin{array}{r} x-y=2 \\ (2x+1)y = 12\frac{3}{4}x \end{array}\right\} \quad (x-8)(8x+1) = 0$

47) $\left.\begin{array}{r} y-x=10 \\ xy = 21000 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}(x-140)(x+150) = 0 \\ (y-150)(y+140) = 0\end{array}$

48) $\left.\begin{array}{r} x+y=420 \\ xy = 11700 \end{array}\right\} \quad (x-30)(x-390) = 0$

49) $\left.\begin{array}{r} x^2+y^2 = 204^2 \\ (x+140)^2+(y-24)^2 = 328^2 \\ \text{oder} \quad 45x-6y = 5724 \end{array}\right\}$

$(x-180)(1261x-173700) = 0$

$(y-96)(1261y+189744) = 0$

50) $\left.\begin{array}{r} x+y=11 \\ x^3+y^3 = 407 \end{array}\right\} \quad (x-4)(x-7) = 0$

51) $\left.\begin{array}{r} y-x=12 \\ (119-x)(19+y) = 119.19 \end{array}\right\} \begin{array}{l}(x-102)(x+14) = 0 \\ (y-114)(y+2) = 0\end{array}$

52) $\left.\begin{array}{r} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y} = a \\ x+y = b \end{array}\right\} \left(\dfrac{a^3-b}{3a}\right)^3 = c\,; \quad b^2-4c = d^2, \quad x-y = d$

53) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{35} \\ \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{y+2} = \dfrac{1}{48} \end{array}\right\} \begin{array}{l}(x-10)(15x+14) = 0 \\ (y-14)(11y+10) = 0\end{array}$

Dritte Abtheilung.
Die Reihe.

32. *)

Der Höhenname (Logarithmus) einer Zahl ist der Name (Exponent) einer festen Grundzahl, deren Höhe (Potenz) der gegebenen Zahl gleich ist.

Die feste Grundzahl der üblichen Höhennamen (Tafellogarithmen) ist 10. Diese üblichen Höhennamen werden durch L bezeichnet.

Beispiele.

$L\,1 = 0$ heifst $10^0 = 1$

$L\,10 = 1$ heifst $10^1 = 10$

$L\,100 = 2$ heifst $10^2 = 100$

$L\,1000 = 3$ heifst $10^3 = 1000$

$L\sqrt{10} = \frac{1}{2}$ heifst $10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$

$L\sqrt[3]{10} = \frac{1}{3}$ heifst $10^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{10}$

$L\sqrt[3]{10^2} = \frac{2}{3}$ heifst $10^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{10^2}$

$L\sqrt[4]{10^3} = \frac{3}{4}$ heifst $10^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{10^3}$

allgemein: $Lb = m$ heifst $10^m = b$

Wenn der Höhenname setzhaft (positiv) ist so entspricht einem gröfsern Höhennamen m eine gröfsere Höhe oder Zahl b. Es seien also m', m'', zwei setzhafte und *maafshafte* (rationale) Zahlen, und es seien

$$10^{m'} = b' \qquad 10^{m''} = b''$$

Wenn nun b zwischen den beiden Werthen b', b'', enthalten ist, so läfst sich immer eine wenn auch nicht

*) *Anm.* Die Höhennamen sind hier vorangestellt weil gleichzeitig die Neigungslehre (Trigonometrie) vorgetragen wird, in welcher die Höhennamen der Neigungszahlen angewendet werden.

maafshafte Zahl m denken welche *die Grenzgleichung* $10^m = b$ befriedigt, und welche zwischen den Werthen m', m'', enthalten ist. Also ist Lb zwischen den Werthen Lb' und Lb''.

Z. B. Es sei $b = 5145$

für $m' = 3{,}71138$ ist $10^{m'} = 5144{,}93..$

für $m'' = 3{,}71139$ ist $10^{m''} = 5145{,}05..$

also $L5145 > 3{,}71138$ und $< 3{,}71139$

Bei fortgesetztem Anrücken der Werthe m', m'', nähert man sich immer mehr dem *unmaafshaften* (irrationalen) Werth des Höhennamens Lb, welchen man als die Grenze der Werthe m', m'', betrachten kann. Wenn also m eine unmaafshafte Zahl ist, so hat *die Grenzgleichung* $10^m = b$ eine *zeichenhafte* (symbolische) Bedeutung.

Die setzhaften und unmaafshaften Höhennamen bestehen aus einer ganzen Zahl und einem genäherten Bruch welcher gewöhnlich in zehntheiliger Fassung ausgedrückt wird. Jene ganze Zahl heifst die *Kennzahl* (Charakteristik) des Höhennamens. Wenn der Höhenname ein ächter Bruch oder kleiner als 1 ist, so ist die Kennzahl *nichtig* (Null) und wird durch ein Rund (0) bezeichnet.

Die setzhafte Kennzahl eines Höhennamens ist um 1 kleiner als die Anzahl der Stellen der ganzen Zahl welche dem Höhennamen entspricht.

Denn es sei n die Kennzahl und x der Bruch des Höhennamens von b, so ist

$$Lb = n + x$$

also $Lb > n$ und $Lb < n + 1$

also $b > 10^n$ und $b < 10^{n+1}$

aber die Höhe 10^n hat $n + 1$ Stellen

die Höhe 10^{n+1} hat $n + 2$ Stellen

also hat die in b enthaltene ganze Zahl $n + 1$ Stellen.

33.

Der Höhenname eines Gebindes (Products) ist gleich der Anlage (Summe) der Höhennamen der einzelnen Bindeglieder (Factoren).

Es seien b, c, setzhafte Zahlen und es sei

$$m = Lb \quad , \quad n = Lc$$

Man nehme zuerst an, dafs m, n, maafshafte Zahlen, d. h. ganze Zahlen oder bestimmte Brüche seien, so ist (14.):

$$10^m \cdot 10^n = 10^{m+n}$$

Aber $10^m = b$, $10^n = c$

also $bc = 10^{m+n}$

also $L(bc) = m + n$

also $L(bc) = Lb + Lc$

Man nehme zweitens an, dafs m, n, oder Lb, Lc, setzhafte unmaafshafte Zahlen seien, in denen also der Bruch nur genähert angegeben werden kann. Es seien alsdann Lb', Lb'', Lc', Lc'', solche maafshafte Zahlen dafs b zwischen b', b'', und c zwischen c', c'', also bc zwischen $b'c'$ und $b''c''$ falle so ist nach dem vorigen Satze (32.)

Lb zwischen Lb', Lb'' und Lc zwischen Lc', Lc''

und $L(bc)$ zwischen $L(b'c')$ und $L(b''c'')$

also $Lb + Lc$ zwischen $Lb' + Lc'$ und Lc'' u. Lc''

Also ist sowohl $Lb + Lc$ zwischen $L(b'c')$ u. $L(b''c'')$ als auch $L(bc)$ zwischen $L(b'c')$ und $L(b''c'')$.

Bei fortgesetztem Anrücken einerseits der Werthe b', b'', andererseits der Werthe c', c'', gelangt man also zur *Grenzgleichung*

$$L(bc) = Lb + Lc$$

Es folgt also aus den Grenzgleichungen oder zeichenhaften Gleichungen $10^m = b$, $10^n = c$ die Grenzgleichung oder zeichenhafte Gleichung

$$10^{m+n} = bc$$

Es ist also sowohl für maafshafte als unmaafshafte Zahlen:

$$L(bc) = Lb + Lc$$

Setzt man cd statt c, so ist

$$L(bcd) = Lb + Lc + Ld$$

Setzt man df statt d, so ist

$$L(bcdf) = Lb + Lc + Ld + Lf$$

u. s. f. für jede beliebige Anzahl von Bindegliedern.

Beispiel.

$$L\,3 = 0{,}47712$$
$$L\,5 = 0{,}69897$$
$$L\,13 = 1{,}11394$$
$$L\,195 = 2{,}29003$$

In der Gleichung $L(bc) = Lb + Lc$
sei $c = 10^n$ oder $Lc = n$
so ist $L(b.10^n) = Lb + n$

Hieraus folgt:

Um eine Zahl b mit einer Höhe von 10 zu binden deren Name oder Zeiger n eine setzhafte ganze Zahl ist, legt man diesen Namen n an die Kennzahl des Höhennamens von b.

Beispiel.

$L\,5145{,}38 = 3{,}71142$
$L\,51453{,}8 = 4{,}71142$
$L\,514538 = 5{,}71142$
$L\,51453800 = 7{,}71142$

34.

Der Höhenname des Inhalts (Dividendus) weniger dem Höhennamen des Theilers (Divisors) giebt den Höhennamen des Schnitts (Quotienten).

Aus dem vorigen Satze (33.) $L(bc) = Lb + Lc$
folgt $L(bc) - Lc = Lb$

Es sei hier $bc = d$ der Inhalt, so ist $b = \frac{d}{c}$ der Schnitt, also $Ld - Lc = L\left(\frac{d}{c}\right)$

Beispiel.

$L\,195 = 2{,}29003$
$L\,3 = 0{,}47712$
$L\,65 = 1{,}81291$

In der Gleichung $L\left(\frac{d}{c}\right) = Ld - Lc$
sei $c = 10^n$ oder $Lc = n$
so ist $L\left(\frac{d}{10^n}\right) = Ld - n$

Hieraus folgt:

Um eine Zahl d mit einer Höhe von 10 zu theilen deren Name oder Zeiger eine setzhafte ganze Zahl n ist, zieht man diesen Namen n von der Kennzahl des Höhennamens von b ab.

Beispiel.

$L\,514538 = 5{,}71142$
$L\,514{,}538 = 2{,}71142$
$L\,5{,}14538 = 0{,}71142$

35.

Der Höhenname eines ächten Bruchs ist gegenhaft (negativ).

Nach dem vorigen Satze (34.) gilt für alle maafshaften und unmaafshaften Höhennamen die Gleichung

$$L\left(\frac{d}{c}\right) = Ld - Lc$$

Es seien hier c, d, setzhafte ganze Zahlen so ist $Lc > 1$, $Ld > 1$, und wenn $d < c$ so ist $Ld < Lc$, also $Ld - Lc$ eine gegenhafte Zahl.

Beispiel.

$$L3 = 0{,}47712$$
$$L4 = 0{,}60206$$
$$L\tfrac{3}{4} = \overline{0}{,}12494$$

Bibl. univ. Turi.

Es ist ferner $L\left(\frac{d}{c}\right) = Ld - Lc$

$$L\left(\frac{c}{d}\right) = Lc - Ld$$

also $L\left(\frac{d}{c}\right) + L\left(\frac{c}{d}\right) = 0$ nichtig.

Hieraus folgt:

Wenn das Gebinde zweier Zahlen gleich 1 ist, so ist die Anlage ihrer Höhennamen nichtig.

Beispiel.

$$L\tfrac{1}{3} = 0{,}12494$$
$$L\tfrac{3}{4} = \overline{0}{,}12494$$
$$L1 = 0,$$

Man kann auch auf folgende Art einen gröfseren Höhennamen von einem kleinern abziehen. Man legt 10 an die Kennzahl des kleinern Höhennamens und zieht dann den gröfsern Höhennamen ab. Man bringt nun an den Unterschied die Zahl 10 mit dem Abzugszeichen an.

Gewöhnlich wird dieser Abzug als von selbst verstanden weggelassen. Der Ueberschufs von 10 über die Kennzahl des Unterschiedes heifst die ***gegenhafte Kennzahl.*** Sie ist gleich der Anzahl der Nichtigkeitszeichen (Nullen) welche vor den Stellen des zehntheiligen Bruchs stehen, der dem Höhennamen entspricht.

Beispiel.

$$L3 = 10{,}47712 - 10$$
$$L4000 = 3{,}60206$$
$$L0{,}00075 = 6{,}87506 - 10$$
$$\text{oder} = 6{,}87506$$

Der Höhenname des Schnitts welcher durch die Theilung der Einheit entsteht wird also gefunden, wenn man bei dem Höhennamen des Theilers die Kennzahl von 10 die Bruchstellen aber von 9 abzieht. Dieser Höhenname heifst die *Ergänzung*.

Beispiel.

$$L\,75 = 1{,}87506$$
$$L\,\tfrac{1}{75} = 8{,}12494$$

Wenn also in einer Rechnung Bindungen und Theilungen vorkommen, so schreibt man alle Höhennamen unter einander, verwandelt aber die Theilungen in Bindungen indem man statt der Höhennamen der Theiler ihre Ergänzungen schreibt, diese aber mit * bezeichnet.

Beispiel.

$$\frac{371\tfrac{1}{2} \,.\, 15\tfrac{1}{2} \,.\, 2{,}45}{3\tfrac{1}{2} \,.\, 4\tfrac{1}{2} \,.\, 0{,}55}$$

371,5	2,56996
15,5	1,19033
2,45	0,38917
3,5 *	9,45593
4,5 *	9,34679
0,55 * . . .	0,25964
1628,6	3,21182

36.

Von einer Zahl wird die ganznamige Höhe gebildet, wenn man den Höhennamen der Zahl mit dem Namen der zu bildenden Höhe bindet.

Aus einer Zahl wird die Wurzel gezogen, wenn man den Höhennamen der Zahl mit dem Namen der Wurzel theilt.

Es sei Lb eine beliebige setzhafte Zahl, welche maafshaft oder unmaafshaft sein mag, so ist nach dem Satze (33.)

$$L(bb) = Lb + Lb = 2\,Lb$$
$$L(bbb) = Lb + Lb + Lb = 3\,Lb$$

u. s. f.

also allgemein für jede setzhafte ganze Zahl n:

$$L(b^n) = n\,Lb$$

und

$$Lb = \frac{L(b^n)}{n}$$

Es sei $b^n = c$, so ist $b = \sqrt[n]{c}$

also

$$L(\sqrt[n]{c}) = \frac{Lc}{n}$$

Beispiel. $L\,0{,}9728 \ldots 9{,}98802 - 10$

$L\,(0{,}9728)^3 \ldots 9{,}96406 - 10$

also $(0{,}9728)^3 = 0{,}92059$

$L\,0{,}9728 \ldots 29{,}98802 - 30$

$L\sqrt[3]{0{,}9728} \ldots 9{,}99601 - 10$

also $\sqrt[3]{0{,}9728} = 0{,}99085$

37.

In der niedern gleichgemessenen (arithmetischen) Reihe ist der Unterschied zweier auf einander folgenden Glieder oder der Zuwuchs unveränderlich.

Die Anlage aller Glieder ist gleich dem Gebinde der Anzahl der Glieder mit dem Mittel, d. h. mit der halben Anlage der äufsern Glieder.

Anzahl der Glieder	1	2	3 . . . . . n
niedere gleichgemessene Reihe	a_1	$a_1 + a$	$a_1 + 2a$ . . . . u

das letzte Glied ist $u = a_1 + (n-1)\,a$

also . . . . . $a_1 + u = 2a_1 + (n-1)\,a$

das Mittel . . . . $m = a_1 + \frac{1}{2}(n-1)\,a$

Je zwei Glieder welche von den äufsern Gliedern gleich weit abstehen haben eine gleiche Anlage. Nämlich

$$(a_1 + a) + (u - a) = a_1 + u$$
$$(a_1 + 2a) + (u - 2a) = a_1 + u$$

Nun ist die Anlage aller Glieder

$$S = a_1 + (a_1 + a) + (a_1 + 2a) \ldots + u$$
$$S = u + (u - a) + (u_1 - 2a) \ldots + a_1$$

also $2\,S = (a_1 + u)\,n$

also $S = m \,.\, n$

Erstes Beispiel.

Glieder	1	2	3	4 21
Reihe	8	11	14	17 68
Zuwuchs		3	3	3 . . . . .

letztes Glied $u = 8 + 20 \,.\, 3 = 68$

Mittel $m = 8 + 10 \,.\, 3 = 38$

Anlage $S = 38 \,.\, 21 = 798$

Zweites Beispiel. Schlichte Zahlen.

Reihe . . . . 1 2 3 4 . . . . . n
Zuwuchs . . 1 1 1 . . . . . .
Mittel $m = \frac{1}{2}(n+1)$
Anlage $S = \frac{n(n+1)}{2}$

Drittes Beispiel. Ungrade Zahlen.

Reihe . . . . 1 3 5 7 . . . . . u
Zuwuchs . . 2 2 2 . . . . . .
letztes Glied $u = 1 + 2(n-1) = 2n-1$
Mittel $m = n$
Anlage $S = nn = n^2$

38.

In der gleichgebundenen (geometrischen) Reihe entsteht jedes Glied durch Bindung des vorangehenden mit einer festen Zahl welche der Reihenfufs (Exponent) heifst.

Anzahl der Glieder 1 2 3 . . . . . n
gleichgebundene Reihe a ac ac^2 . . . . u
der Reihenfufs ist hier $= c$
das letzte Glied $u = ac^{n-1}$
die Anlage der Reihe sei S, so ist

$$S = a + ac + ac^2 \ldots\ldots + u$$
$$Sc = ac + ac^2 \ldots\ldots + u + uc$$

Mit Ausnahme des Anfangsgliedes der ersten Reihe und des Endgliedes der zweiten Reihe sind die Zwischenglieder gleich, und heben einander also bei der Abziehung auf.

Wenn der Reihenfufs $c > 1$ so ist $Sc > S$
also
$$Sc - S = uc - a$$
$$S(c-1) = uc - a$$
$$S = \frac{uc-a}{c-1} = \frac{ac^n}{c-1} - \frac{a}{c-1}$$

oder wenn zur Abkürzung $\frac{a}{c-1} = b$ gesetzt wird,

$$S = bc^n - b$$

Wenn der Reihenfufs $c < 1$, so ist $Sc < S$

also $$S - Sc = a - uc$$
$$S(1-c) = a - uc$$
$$S = \frac{a-uc}{1-c} = \frac{a}{1-c} - \frac{ac^n}{1-c}$$

oder wenn zur Abkürzung $\frac{a}{1-c} = b$ gesetzt wird,

$$S = b - bc^n$$

Bei der fallenden Reihe, wo der Reihenfufs $c < 1$ ist werden die Glieder desto kleiner je weiter sie vom Anfangsgliede entfernt sind. Also nähert sich die Zahl bc^n immer mehr dem Nichtigen, folglich die Anlage S immer mehr der Zahl b, welche daher die *Reihengrenze* heifst.

Erstes Beispiel.

Anzahl der Glieder 1 2 3 4 5 . . . . . n
Steigende Reihe 1 2 4 8 16 . . . . . 2^{n-1}

Hier ist der Reihenfufs $c = 2$, $b = 1$
also die Anlage $S = 2^n - 1$
für $n = 64$ ist $S = 18'446744'073709'551615$

Zweites Beispiel.

Anzahl der Glieder 1 2 3 4 5 . . . . . n
Fallende Reihe 1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{16}$ . . . . . $(\frac{1}{2})^{n-1}$

Hier ist der Reihenfufs $c = \frac{1}{2}$, die Grenze $b = 2$
also $$S = 2 - (\tfrac{1}{2})^{n-1}$$

Drittes Beispiel.

Fallende Reihe $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{64}$ $\frac{1}{256}$ . . . . . $(\frac{1}{4})^{n-1}$

Hier ist $c = \frac{1}{4}$, die Grenze $b = \frac{1}{3}$
$$S = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{4})^n$$

39.

Die Wechselzahl ist gleich dem Gebinde aller schlichten Zahlen von 1 ab bis mit zu der Anzahl der Zeichen.

Eine Anreihung (Complexion) in welcher immer dieselben Zeichen (Elemente) nur in verschiedener Folge vorkommen heifst eine Versetzung oder *Wechselung* (Permutation). Die Anzahl aller möglichen Wechselungen heifst die *Wechselzahl.*

Bei der *einfachen* Wechselung sind alle Zeichen verschieden.

Bei der *wiederholten* Wechselung sind einige Zeichen einander gleich, und die Anzahl dieser gleichen oder wiederholten Zeichen heifst die *Wiederholungszahl.*

Diejenigen Wechselungen in welchen ein bestimmtes Zeichen eine und dieselbe Stelle einnimmt bilden eine Abtheilung (Ordnung).

Einfache Wechselungen.

Zwei Zeichen.

12 21

Drei Zeichen.

Abtheilung:	3	2	1
	123	312	231
	213	132	321

Vier Zeichen.

Abtheilung:	4	3	2	1
	1234	4123	3412	2341
	2134	1423	4312	3241
	3124	2413	1342	4231
	1324	4213	3142	2431
	2314	1243	4132	3421
	3214	2143	1432	4321

Um also die Wechselungen von n Zeichen zu bilden mufs man zuvor die Wechselungen von $n-1$ Zeichen gebildet haben. An jede Anreihung setzt man rechts das Zeichen n. Dadurch erhält man die höchste Abtheilung.

Man erniedrigt jedes Zeichen um eine Stelle indem man statt der Zeichen $1, 2, 3 \ldots n$ die Zeichen $n, 1, 2, \ldots (n-1)$ setzt. Dadurch erhält man die erstniedere Abtheilung.

Aus dieser ergiebt sich durch Herabsetzung um 1 die zweitniedere Abtheilung u. s. f.

Die einfache Wechselzahl ist also

bei 2 Zeichen $= 1.2 \ldots\ldots = 2$
bei 3 Zeichen $= 1.2.3 \ldots\ldots = 6$
bei 4 Zeichen $= 1.2.3.4 \ldots\ldots = 24$
bei n Zeichen $= 1.2.3.4 \ldots n$

Wenn in irgend einer Anreihung von n Zeichen z. B. in 1457263 einige Zeichen z. B. 4567 ihre Stellen behalten und nur die übrigen m Zeichen ihre Stellen wechseln, so ist ihre Wechselzahl $= 1.2.3 \ldots m$. In diesem Beispiel ist sie:

1457263 2457163 3457162
1457362 2457361 3457261

Wenn nun diese m Zeichen einander gleich sind, so sind auch die sämmtlichen $1.2.3 \ldots m$ Anreihungen einander gleich, hier nämlich:

1 4 5 7 1 6 1

Dasselbe gilt für jede Anreihung in welcher die $n - m$ Zeichen ihre Stellen behalten und die übrigen m Zeichen gleich sind.

Man erhält also die Wechselzahl von n Zeichen unter welchen m gleiche sind, indem man die Wechselzahl $1.2.3 \ldots n$ mit der Wechselzahl $1.2.3 \ldots m$ theilt.

Sind unter den n Zeichen m gleiche, p gleiche, r gleiche u. s. w. so mufs man die Wechselzahl $1.2.3 \ldots n$ mit den Wechselzahlen $1.2.3 \ldots m$, $1.2.3 \ldots p$, $1.2.3 \ldots r$ u. s. w. theilen.

Der Kürze wegen setzt man die Wiederholungszahl über das Zeichen, und bezeichnet die Wechselzahl durch P.

$$P(\overset{2}{1}, \overset{2}{2}) = \frac{1.2.3.4}{1.2.1.2} = 6$$

$$P(\overset{3}{1},\overset{2}{2},\overset{1}{3}) = \frac{1.2.3.4.5.6}{1.2.3.1.2.1} = 60$$

$$P(\overset{3}{1},\overset{7}{2},\overset{4}{3},\overset{1}{4}) = \frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15}{1.2.3.1.2.3.4.5.6.7.1.2.3.4.1}$$
$$= 1'801800$$

Die Abtheilung findet man, wenn man von den Zeichen das feste wegläfst, und die Wechselzahl der übrigen bestimmt. Z. B. bei $(\overset{3}{1}\overset{2}{2}\overset{1}{3})$ ist

die Abtheilung 1. . . . $P(\overset{2}{1}\overset{2}{2}\overset{1}{3}) = \frac{1.2.3.4.5}{1.2.1.2.1} = 30$

die Abtheilung 2. . . . $P(\overset{3}{1}\overset{1}{2}\overset{1}{3}) = \frac{1.2.3.4.5}{1.2.3.1.1} = 20$

die Abtheilung 3. . . . $P(\overset{3}{1}\overset{2}{2}) = \frac{1.2.3.4.5}{1.2.3.1.2} = 10$

60

Um die wiederholten Wechselungen zu bilden ist die Wörterbuchfolge die bequemste. In jeder Anreihung sucht man von der Rechten zur Linken gehend dasjenige Zeichen auf welches als ein niederes auf ein höheres folgt. An die Stelle desselben setzt man von den rechts befind-

lichen Zeichen das nächsthöhere, die übrigen nach ihrem Werthe folgen lassend. Die Zeichen links läfst man ungeändert. Z. B. die Anreihung sei 113221. Von der Rechten zur Linken gehend ist zuerst 1 niedriger als 3, man setzt also 2 statt 1. Die übrigen rechts sind nun 3211 welche man nach ihrem Werthe 1123 setzt. Also aus 113221 wird 121123.

Beispiel.

11222	12122	12212	12221	21122
21212	21221	22112	22121	22211

40.

Die Wandelzahl ist die Anzahl der Wandlungen (Variationen) d. h. derjenigen Anreihungen, in welchen einige Zeichen aus mehrern in wechselnder Folge vorkommen.

Die Anzahl der in jeder Wandlung enthaltenen gleichen oder ungleichen Zeichen heifst die *Stellung* (Classe).

Die Wandlung ist einfach, wenn sie lauter ungleiche Zeichen, wiederholt wenn sie auch gleiche Zeichen enthält.

Wenn man jedes Zeichen vor alle wiederholten Wandlungen setzt, so erhält man die wiederholten Wandlungen der nächsthöhern Stellung.

Beispiel bei 4 Zeichen.

Stellung 1:	1	2	3	4
Stellung 2:	11	12	13	14
	21	22	23	24
	31	32	33	34
	41	42	43	44

Hieraus folgt:

Es sei die Anzahl der Zeichen gleich n, so sind die wiederholten Wandelzahlen

zur Stellung 1, gleich n
zur Stellung 2, gleich n^2
zur Stellung 3, gleich n^3
zur Stellung m, gleich n^m

Die wiederholte Wandelzahl ist also unbeschränkt.

Wenn man jedes Zeichen vor alle einfachen Wandlungen setzt welche dieses Zeichen nicht enthalten, so erhält man die einfachen Wandlungen der nächsthöhern Stellung.

Beispiel bei 4 Zeichen.

Stellung 1:	1	2	3	4
Stellung 2:	12	21	31	41
	13	23	32	42
	14	24	34	43
Stellung 3:	123	213	312	412
	124	214	314	413
	132	231	321	421
	134	234	324	423
	142	241	341	431
	143	243	342	432
Stellung 4:	1234	2134	3124	4123
	1243	2143	3142	4132
	1324	2314	3214	4213
	1342	2341	3241	4231
	1423	2413	3412	4312
	1432	2431	3421	4321

Es sei die Zeichenanzahl n, die Stellung gleich m, so ist die nächstniedrigere Stellung gleich $m-1$, die Anzahl der in derselben nicht enthaltenen Zeichen gleich $n-m+1$. Wenn man also die einfache Wandelzahl zur Stellung $m-1$ mit $n-m+1$ bindet, so erhält man die einfache Wandelzahl zur Stellung m. Folglich sind für n Zeichen die einfachen Wandelzahlen

zur Stellung 1 gleich n
zur Stellung 2 gleich $n(n-1)$
zur Stellung 3 gleich $n(n-1)(n-2)$
zur Stellung m gleich $n(n-1) \ldots (n-m+1)$

Die einfache Wandelzahl ist also beschränkt.

41.

Die Gliederungszahl ist die Anzahl der Gliederungen (Combinationen) d. h. derjenigen Anreihungen in welchen einige Zeichen aus mehrern ohne Wechselung vorkommen.

Die Anzahl der in jeder Gliederung enthaltenen gleichen oder ungleichen Zeichen heifst die *Stellung* (Classe). Der Unterschied zwischen der Zeichenanzahl und der Stellung heifst die *ergänzende Stellung*.

Die Gliederung ist einfach wenn sie lauter ungleiche Zeichen, wiederholt wenn sie auch gleiche Zeichen enthält.

Wenn man jedes Zeichen vor alle Gliederungen setzt welche mit einem höhern Zeichen anfangen, so erhält man die einfachen Gliederungen zur nächsthöhern Stellung.

Beispiel bei 5 Zeichen.

Stellung 1:	1		2		3		4		5	
Stellung 2:	12	13	14	15	23	24	25	34	35	45
Stellung 3:	124		124		125	134		135		145
					234	235		245		345
Stellung 4:	1234		1235		1245		1345		2345	
Stellung 5:					12345					

Die einfache Gliederung unterscheidet sich also von der einfachen Wandlung dadurch dafs die verschiedenen Wechselungen nur als ein einziger Fall gelten. Also ergiebt sich aus der Theilung der einfachen Wandelzahl durch die Wechselzahl die einfache Gliederungszahl. Bei n Zeichen sind also die einfachen Gliederungszahlen:

zur Stellung 1 gleich $\frac{n}{1}$

zur Stellung 2 gleich $\frac{n(n-1)}{1.2}$

zur Stellung 3 gleich $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3.}$

zur Stellung m gleich $\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2.\ldots\ldots m}$

oder gleich $\frac{1.2.3.\ldots n}{(1.2.\ldots m)(1.2.\ldots(n-m))}$

Die einfache Gliederungszahl von n Zeichen zur Stellung m ist also gleich derjenigen von n Zeichen zur ergänzenden Stellung $n-m$, und gleich der Wechselzahl von n Zeichen worunter m gleiche und $n-m$ gleiche.

Wenn man jedes Zeichen vor diejenigen Gliederungen setzt, welche mit demselben Zeichen und mit einem höhern anfangen, so erhält man die wiederholten Gliederungen für die nächsthöhere Stellung.

Beispiel bei 3 Zeichen.

Stellung 1:	1			2		3
Stellung 2:	11	12	13	22	23	33
Stellung 3:	111	112	113	122	123	133
			222	223	233	333
Stellung 4:	1111	1112	1113	1122	1123	1133
	1222	1223	1233	1333	2222	2223
				2233	2333	3333

Die wiederholten Gliederungen von n Zeichen zur Stellung m können auch aus den einfachen Gliederungen von $n + m - 1$ Zeichen zur Stellung m gebildet werden. Man läfst in ihnen das Zeichen der ersten Stelle unverändert und setzt das Zeichen der zweiten Stelle um 1, das Zeichen der dritten Stelle um 2 u. s. f. herab. Z. B.

Einfache Gliederungen von 6 Zeichen.

Stellung 4:	1234	1235	1236	1245	1246	1256
	1345	1346	1356	1456	2345	2346
				2356	2456	3456

Wiederholte Gliederungen von 3 Zeichen.

Stellung 4:	1111	1112	1113	1122	1123	1133
	1222	1223	1233	1333	2222	2223
				2233	2333	3333

Also ist die wiederholte Gliederungszahl von n Zeichen zur Stellung m gleich der einfachen Gliederungszahl von $n + m - 1$ Zeichen zur Stellung m,

d. h. gleich $\dfrac{(n+m-1)(n+m-2)\ldots n}{1. \qquad\qquad 2.\ldots\ldots m}$

oder gleich $\dfrac{n(n+1)\ldots\ldots(n+m-1)}{1.2.\ldots\ldots\ldots\qquad m}$

Die wiederholten Gliederungszahlen von n Zeichen sind also

zur Stellung 1 gleich $\dfrac{n}{1}$

zur Stellung 2 gleich $\dfrac{n(n+1)}{1.2}$

zur Stellung 3 gleich $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$

u. s. f.

42.

In der Entwickelung der ganznamigen Höhe eines Zweisatzes (Binoms) ist jede Nebenzahl (Coefficient) eine einfache Gliederungszahl.

Der Zweisatz sei $a + b$. Die durch Bindung mit $a + b$ gefundenen Entwickelungen sind:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

u. s. f.

Es sei allgemein n eine setzhafte ganze Zahl, und es sei die $n$te Höhe des Zweisatzes $a + b$ zu bilden. Jeder einzelne Beisatz hat die Fassung:

$$a^{n-m} \cdot b^m$$

und enthält n Bindeglieder (Factoren) von denen $n - m$ gleich a, und m gleich b sind. Dieser Beisatz mufs also in der Entwickelung so oft vorkommen als Wechselungen möglich sind bei n Zeichen unter denen $n - m$ gleiche und m gleiche. Nach dem Satze (39.) ist diese Wechselzahl gleich

$$\frac{1.2.3.\ldots\ldots n}{(1.2.\ldots.(n-m))(1.2.\ldots.m)}$$

und nach dem Satze (41.) ist sie auch gleich der einfachen Gliederungszahl von n Zeichen zur Stellung $n - m$ oder zur Stellung m. Hieraus folgt also, wenn n eine setzhafte ganze Zahl ist:

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}b^3 \ldots$$

Wenn statt $a + b$ der einfachere Zweisatz $1 + a$ genommen wird, so ist

$$(1+a)^n = 1 + \frac{n}{1}a + \frac{n(n-1)}{1.2}a^2 \ldots$$

Die Nebenzahlen $\frac{n}{1}$, $\frac{n(n-1)}{1.2}$, u. s. f. heifsen ***Stufenzahlen*** (Binomialcoefficienten) vom Namen n, und werden der Kürze wegen bezeichnet durch:

$$\overset{1}{n} = \frac{n}{1}, \quad \overset{2}{n} = \frac{n(n-1)}{1.2}, \quad \overset{3}{n} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$$

so dafs nach dieser Bezeichnung ist:

$$(1+a)^n = 1 + \overset{1}{n}a + \overset{2}{n}a^2 + \overset{3}{n}a^3 + \overset{4}{n}a^4 \ldots$$

Wenn der Name n eine setzhafte ganze Zahl ist, so lassen sich die Stufenzahlen durch fortgesetzte Anlegung finden nämlich

$$\begin{array}{lrrrrrl}
1 \ldots\ldots & 1 & 1 & & & & \\
 & & 1 & 1 & & & \\
\hline
2 \ldots\ldots & 1 & 2 & 1 & & & \\
 & & 1 & 2 & 1 & & \\
\hline
3 \ldots\ldots & 1 & 3 & 3 & 1 & & \\
 & & 1 & 3 & 3 & 1 & \\
\hline
4 \ldots\ldots & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \text{u. s. f.}
\end{array}$$

Hieraus entsteht ihr Verzeichniſs für Namen aus der schlichten Zahlenreihe 1 2 3 4 5 . . . . .

Stelle	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Name	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2	1	2	1	.	.	.	.	.	.	.	.
3	1	3	3	1	.	.	.	.	.	.	.
4	1	4	6	4	1	.	.	.	.	.	.
5	1	5	10	10	5	1	.	.	.	.	.
6	1	6	15	20	15	6	1	.	.	.	.
7	1	7	21	35	35	21	7	1	.	.	.
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	.	.
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	.
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Z. B. $\overset{4}{6} = 15$, $\overset{7}{9} = 36$, $\overset{5}{10} = 252$ u. s. f.

Dieses Verfahren der fortgesetzten Anlegung giebt folgende allgemeine Gleichungen für die Stufenzahlen zweier um 1 verschiedenen Namen n und $n + 1 = r$.

$$\odot \left\{ \begin{array}{l} \overset{1}{r} = \overset{1}{n} + 1 \\ \overset{2}{r} = \overset{2}{n} + \overset{1}{n} \\ \overset{3}{r} = \overset{3}{n} + \overset{2}{n} \quad \text{u. s. f.} \end{array} \right.$$

Diese Gleichungen gelten nicht bloſs für den Fall wo n und r setzhafte ganze Zahlen sind. Denn wenn man je zwei auf einander folgende Stufenzahlen auf gleichen Nenner bringt und die Zähler anlegt, so findet sich:

$$\overset{1}{n} + 1 = \frac{n + 1}{1}$$

$$\overset{2}{n} + \overset{1}{n} = \frac{n(n-1)}{1.2} + \frac{n}{1} = \frac{(n+1)n}{1.2}$$

$$\overset{3}{n} + \overset{2}{n} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \frac{n(n-1)}{1.2} = \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}$$

u. s. f.

Also gelten die Gleichungen ⊙ auch dann wenn der Name n eine beliebige ganze oder gebrochene, setzhafte oder gegenhafte, maafshafte oder unmaafshafte Zahl ist.

Unter derselben allgemeinen Voraussetzung gelten auch die Gleichungen für zwei auf einander folgende Stufenzahlen eines beliebigen Namens n:

$$\mathfrak{D} \begin{cases} 1.\overset{1}{n} = n \\ 2.\overset{2}{n} = (n-1)\overset{1}{n} \\ 3.\overset{3}{n} = (n-2)\overset{2}{n} \\ 4.\overset{4}{n} = (n-3)\overset{3}{n} \end{cases} \quad \text{u. s. f.}$$

43.

Das Gebinde zweier Stufenreihen von gleicher Grundzahl ist eine Stufenreihe derselben Grundzahl deren Name die Anlage der Namen der beiden Stufenreihen ist.

Die ganznamige Höhe einer Stufenreihe ist eine Stufenreihe derselben Grundzahl deren Name das Gebinde der Namen ist.

Oder die Sätze (9.),(11.) ***gelten auch bei Stufenreihen.***

Die Reihen

$$\overset{m}{A} = 1 + \overset{1}{m}a + \overset{2}{m}a^2 + \overset{3}{m}a^3 \ldots$$

$$\overset{n}{A} = 1 + \overset{1}{n}a + \overset{2}{n}a^2 + \overset{3}{n}a^3 \ldots$$

heifsen ***Stufenreihen*** der Grundzahl a. Es wird vorausgesetzt dafs die Namen m, n, beliebige Gröfsen, d. h. ganze oder gebrochene, setzhafte oder gegenhafte, maafshafte oder unmaafshafte Zahlen seien. Wenn das Gebinde $\overset{m}{A}.\overset{n}{A}$ nach den Höhen der Grundzahl a geordnet wird, so sind die Nebenzahlen dieser Höhen der Reihe nach

$$\overset{1}{m} + \overset{1}{n}$$

$$\overset{2}{m} + \overset{1\,1}{mn} + \overset{2}{n}$$

$$\overset{3}{m} + \overset{2\,1}{mn} + \overset{1\,2}{mn} + \overset{3}{n}$$

$$\overset{4}{m} + \overset{3\,1}{mn} + \overset{2\,2}{mn} + \overset{1\,3}{mn} + \overset{4}{n} \quad \text{u. s. f.}$$

Man bezeichne der Kürze wegen $m + n$ durch r so ist $\overset{\text{I}}{m} + \overset{\text{I}}{n} = \overset{\text{I}}{r}$. Ferner ist

$$1.\overset{\text{I}}{m} = m \qquad 1.\overset{\text{I}}{n} = n$$

$$2.\overset{2}{m} = (m-1)\overset{\text{I}}{m} \qquad 2.\overset{2}{n} = (n-1)\overset{\text{I}}{n}$$

also $1.\overset{\text{I I}}{mn} = \overset{\text{I}}{mn} \qquad 1.\overset{\text{I I}}{nm} = \overset{\text{I}}{nm}$

$$2\overset{2}{m} = (m-1)\overset{\text{I}}{m} \qquad 2\overset{2}{n} = (n-1)\overset{\text{I}}{n}$$

also $2(\overset{2}{m} + \overset{\text{I I}}{mn} + \overset{2}{n}) = (m+n-1)(\overset{\text{I}}{m} + \overset{\text{I}}{n})$

also $2(\overset{2}{m} + \overset{\text{I I}}{mn} + \overset{2}{n}) = (r-1)\overset{\text{I}}{r}$

also $\overset{2}{m} + \overset{\text{I I}}{mn} + \overset{2}{n} = \overset{2}{r}$

Wenn man ferner die Gleichungen

$$1.\overset{\text{I}}{m} = m \qquad 1.\overset{\text{I}}{n} = n$$

$$2\overset{2}{m} = (m-1)\overset{\text{I}}{m} \qquad 2\overset{2}{n} = (n-1)\overset{\text{I}}{n}$$

$$3\overset{3}{m} = (m-2)\overset{2}{m} \qquad 3\overset{3}{n} = (n-2)\overset{2}{n}$$

der Folge nach mit $\overset{2}{n}, \overset{\text{I}}{n}$, 1 und $\overset{2}{m}, \overset{\text{I}}{m}$, 1 bindet, so ist

$$1.\overset{\text{I 2}}{mn} = \overset{2}{mn} \qquad 1.\overset{\text{I 2}}{nm} = \overset{2}{nm}$$

$$2\overset{2\text{ I}}{mn} = (m-1)\overset{\text{I I}}{mn} \qquad 2\overset{2\text{ I}}{nm} = (n-1)\overset{\text{I I}}{nm}$$

$$3\overset{3}{m} = (m-2)\overset{2}{m} \qquad 3\overset{3}{n} = (n-2)\overset{2}{n}$$

Deren Anlage:

$$3(\overset{3}{m} + \overset{2\text{ I}}{mn} + \overset{\text{I 2}}{mn} + \overset{3}{n}) = (m+n-2)(\overset{2}{m} + \overset{\text{I I}}{mn} + \overset{2}{n})$$

also $3(\overset{3}{m} + \overset{2\text{ I}}{mn} + \overset{\text{I 2}}{mn} + \overset{3}{n}) = (r-2)\overset{2}{r}$

also $\overset{3}{m} + \overset{2\text{ I}}{mn} + \overset{\text{I 2}}{mn} + \overset{3}{n} = \overset{3}{r}$

Wenn man ferner die Gleichungen

$$1.\overset{\text{I}}{m} = m \qquad 1.\overset{\text{I}}{n} = n$$

$$2\overset{2}{m} = (m-1)\overset{\text{I}}{m} \qquad 2\overset{2}{n} = (n-1)\overset{\text{I}}{n}$$

$$3\overset{3}{m} = (m-2)\overset{2}{m} \qquad 3\overset{3}{n} = (n-2)\overset{2}{n}$$

$$4\overset{4}{m} = (m-3)\overset{3}{m} \qquad 4\overset{4}{n} = (n-3)\overset{3}{n}$$

der Folge nach mit $\overset{3}{n}, \overset{2}{n}, \overset{\text{I}}{n}$, 1 und $\overset{3}{m}, \overset{2}{m}, \overset{\text{I}}{m}$, 1 bindet, so ist

$$1.\overset{1\,3}{mn} = \overset{3}{mn} \qquad 1.\overset{1\,3}{nm} = \overset{3}{nm}$$

$$2\,\overset{2\,2}{mn} = (m-1)\,\overset{1\,2}{mn} \qquad 2\,\overset{2\,2}{nm} = (n-1)\,\overset{1\,2}{nm}$$

$$3\,\overset{3\,1}{mn} = (m-2)\,\overset{2\,1}{mn} \qquad 3\,\overset{3\,1}{nm} = (n-2)\,\overset{2\,1}{nm}$$

$$4\,\overset{4}{m} = (m-3)\,\overset{3}{m} \qquad 4\,\overset{4}{n} = (n-3)\,\overset{3}{n}$$

Deren Anlage:

$$4\,(\overset{4}{m} + \overset{3\,1}{mn} + \overset{2\,2}{mn} + \overset{1\,3}{mn} + \overset{4}{n})$$

$$= (m+n-3)\,(\overset{3}{m} + \overset{2\,1}{mn} + \overset{1\,2}{mn} + \overset{3}{n})$$

$$= (r-3)\,\overset{3}{r}$$

also $$\overset{4}{m} + \overset{3\,1}{mn} + \overset{2\,2}{mn} + \overset{1\,3}{mn} + \overset{4}{m} = \overset{4}{r}$$

Dieser Gang des Beweises bleibt für alle folgenden Nebenzahlen derselbe und es ergiebt sich hieraus

$$\overset{m}{A}.\overset{n}{A} = 1 + \overset{1}{ra} + \overset{2}{ra^2} + \overset{3}{ra^3} \ldots$$

Hier sind $\overset{1}{r}, \overset{2}{r}, \overset{3}{r} \ldots$ die Stufenzahlen des Namens $r = m + n$. Also

$$\overset{m}{A}.\overset{n}{A} = \overset{(m+n)}{A}$$

Diese Gleichung gilt für jeden beliebigen Werth der Gröfsen m, n. In dem Fall wo $m = n$ ist, wird sie

$$(\overset{n}{A})^2 = \overset{2n}{A}$$

hieraus folgt weiter $$(\overset{n}{A})^3 = \overset{3n}{A}$$

$$(\overset{n}{A})^4 = \overset{4n}{A}$$

Wenn also n eine beliebige Gröfse und m eine setzhafte ganze Zahl ist, so ist allgemein

$$(\overset{n}{A})^m = \overset{(mn)}{A}$$

44.

Die Höhe eines Zweisatzes von beliebigem Namen ist einer Stufenreihe von demselben Namen gleich.

Es sei zuerst der Name $n = \frac{c}{m}$ ein Bruch dessen Zähler und Nenner setzhafte ganze Zahlen sind. Man bilde die Stufenreihe

$$\overset{n}{A} = 1 + \overset{1}{na} + \overset{2}{na^2} + \overset{3}{na^3} \ldots$$

so ist nach dem vorigen Satze (43.)

$$(\overset{n}{A})^m = \overset{(mn)}{A}$$

also $$(\overset{n}{A})^m = \overset{c}{A}$$

Aber c ist eine setzhafte ganze Zahl, also ist nach dem Satze (42.)

$$\overset{c}{A} = (1+a)^c$$

also $$(\overset{n}{A})^m = (1+a)^c = (1+a)^{mn}$$

also $$\overset{n}{A} = (1+a)^n$$

Wenn also n ein beliebiger Bruch ist, dessen Zähler und Nenner setzhafte ganze Zahlen sind, so ist

$$(1+a)^n = 1 + \overset{1}{n}a + \overset{2}{n}a^2 + \overset{3}{n}a^3 \ldots$$

Es sei zweitens n eine *gegenhafte* Gröfse, deren setzhafter Anwerth m eine beliebige ganze oder gebrochene Zahl sei. Dann ist $m + n = 0$.

Man bilde die Stufenreihen

$$\overset{m}{A} = 1 + \overset{1}{m}a + \overset{2}{m}a^2 + \overset{3}{m}a^3 \ldots$$

$$\overset{n}{A} = 1 + \overset{1}{n}a + \overset{2}{n}a^2 + \overset{3}{n}a^3 \ldots$$

so ist nach dem vorigen Satze (43.)

$$\overset{m}{A} \cdot \overset{n}{A} = \overset{(m+n)}{A}$$

Aber $m + n = 0$, also $\overset{(m+n)}{A} = 1$

also $$\overset{m}{A} \cdot \overset{n}{A} = 1$$

Da m eine setzhafte ganze oder gebrochene Zahl ist, so ist vermöge des obigen Beweises

$$\overset{m}{A} = (1+a)^m$$

also $$(1+a)^m \cdot \overset{n}{A} = 1$$

also $$\overset{n}{A} = (1+a)^{\overline{m}} = (1+a)^n$$

Wenn also n eine beliebige gegenhafte Gröfse ist, so ist ebenfalls

$$(1+a)^n = 1 + \overset{1}{n}a + \overset{2}{n}a^2 + \overset{3}{n}a^3 \ldots$$

Beispiele.

$$(1+a)^{\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{8}a^2 + \tfrac{1}{16}a^3 \ldots$$
$$(1-a)^{\frac{1}{2}} = 1 - \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{8}a^2 - \tfrac{1}{16}a^3 \ldots$$
$$(1+a)^{\frac{1}{3}} = 1 + \tfrac{1}{3}a - \tfrac{1}{9}a^2 + \tfrac{5}{81}a^3 \ldots$$
$$(1-a)^{\frac{1}{3}} = 1 - \tfrac{1}{3}a - \tfrac{1}{9}a^2 - \tfrac{5}{81}a^3 \ldots$$
$$(1+a)^{\overline{2}} = 1 - 2a + 3a^2 - 4a^3 \ldots$$
$$(1-a)^{\overline{2}} = 1 + 2a + 3a^2 + 4a^3 \ldots$$

Wenn der Name n der Stufenreihe eine setzhafte ganze Zahl ist, so hat diese Reihe nur $n+1$ Glieder und bricht alsdann ab. Denn alle folgenden Stufenzahlen sind nichtig.

Wenn der Name n der Stufenreihe keine setzhafte ganze Zahl ist, so bricht die Stufenreihe niemals ab sondern besteht aus einer unendlichen Anzahl von Gliedern. Wenn die Anlage jeder Abtheilung dieser Reihe desto kleiner ist je weiter das Anfangsglied dieser Abtheilung vom Anfangsgliede der Reihe entfernt ist, so heifst die Reihe *grenzhaft* (convergirend). Denn alsdann nähert sich die Anlage der Glieder je weiter man in der Reihe fortschreitet desto mehr einer bestimmten Grenze welche den Werth der Höhe des Zweisatzes bezeichnet.

Wenn aber die auf einander folgenden Glieder immer gröfser werden, so heifst die Reihe *auslaufend* (divergirend). Sie ist alsdann eine *zeichenhafte Reihe* (symbolische R.) d. h. sie ist zwar zur Berechnung des Zahlwerths der Zweisatzhöhe unbrauchbar, aber man kann sich ihrer eben so wie der *Sinngröfse* $\sqrt{-1} = i$ (28.) in allen Rechnungen als einer wirklichen Gröfse bedienen, wofern sie nur nach beendigter Rechnung von selbst herausfällt.

Beispiele.

Die Zweitwurzel einer Zahl durch die Stufenreihe zu berechnen.

Die Zahl sei b, ein genäherter Werth von $\sqrt{b}$ sei c so dafs $b = c^2 + d = c^2(1+a)$

also $\sqrt{b} = c(1 + \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{8}a^2 + \tfrac{1}{16}a^3 \ldots)$

oder $\sqrt{b} = c + \tfrac{1}{2}ac - \tfrac{1}{8}a^2c + \tfrac{1}{16}a^3c \ldots$

Z. B. $b = 2 \qquad c = 1{,}414213$

$d = c^2 a = 0{,}000001590631$

$c \ldots\ldots 1{,}414213$

$\frac{1}{2} ac \ldots\ldots\ldots 562373206864878$

$\frac{1}{8} a^2 c \ldots\ldots\ldots\ldots - 111816121$

$\frac{1}{16} a^3 c \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 44$

$\sqrt{2} = 1{,}414213562373095048801$

Die Drittwurzel einer Zahl durch die Stufenreihe zu berechnen.

Die Zahl sei b, ein genäherter Werth von $\sqrt[3]{b}$ sei c so dafs $b = c^3 + d = c^3 (1 + a)$

also $\sqrt[3]{b} = c (1 + \frac{1}{3} a - \frac{1}{9} a^2 + \frac{5}{81} a^3 \ldots)$

oder $\sqrt[3]{b} = c + \frac{1}{3} ac - \frac{1}{9} a^2 c + \frac{5}{81} a^3 c \ldots$

Z. B. $b = 6 \qquad c = 1{,}81712$

$c^2 = 3{,}3019250944$

$c^3 = 5{,}999994127536128$

$c^3 a = d = 0{,}000005872463872$

$c \ldots 1{,}81712$

$\frac{1}{3} ac \ldots\ldots 0592832333069334128$

$\frac{1}{9} a^2 c \ldots\ldots\ldots - 193410548083$

$\frac{5}{81} a^3 c \ldots\ldots\ldots\ldots 105166$

$\sqrt[3]{6} = 1{,}817120592832139658891211$

45.

Das allgemeine Glied einer obern gleichgemessenen Reihe besteht aus den Anfangszuwüchsen deren jeder mit einer Stufenzahl gebunden ist. Der Name dieser Stufenzahlen ist die Stelle des allgemeinen Gliedes.

In der obern gleichgemessenen Reihe sieht man jedes Glied als die Anlage des vorangehenden Gliedes und eines Zuwuchses an. Die Abziehung des vorangehenden Gliedes vom folgenden giebt also den Zuwuchs. Auf diese Art bildet man aus der gegebenen Reihe die erste Zuwuchsreihe, aus dieser die zweite Zuwuchsreihe u. s. f. Wenn nun irgend eine Zuwuchsreihe aus lauter gleichen Gliedern besteht, so heifst die gegebene Reihe eine *obere gleichgemessene Reihe*, das erste Glied jeder Zuwuchsreihe heifst der *Anfangszuwuchs*, die gleichen Glieder

der letzten Zuwuchsreihe heifsen der *Endzuwuchs* und werden durch a bezeichnet, die Anfangszuwüchse von unten nach oben hinaufgehend werden durch $a_1\, a_2\, a_3$ u. s. f. bezeichnet. Die obere gleichgemessene Reihe heist vom *ersten*, *zweiten*, *dritten* u. s. f. *Ort*, je nachdem die erste zweite dritte u. s. f. Zuwuchsreihe aus lauter gleichen Gliedern besteht.

Beispiel einer Reihe vom 5ten Ort.

Stelle	0	1	2	3	4	5	6	7
Ort								
5	7	11	20	36	64	118	227	441
4	. . 4	9	16	28	54	109	214	
3	 5	7	12	26	55	105		
2	 2	5	14	29	50			
1	 3	9	15	21				
0	 6	6	6					

Man gehe von der letzten Zuwuchsreihe durch fortgesetzte Anlegung zu den obern Reihen hinauf, so ist:

Ort	0	1	2	3	4	5
Stelle						
0	6	3	2	5	4	7
1	6	9	5	7	9	11
2	6	15	14	12	16	20
3	6	21	29	26	28	36
4	6	27	50	55	54	64
5	6	33	77	105	109	118
6	6	39	110	182	214	227
7	6	45	149	292	396	441
8	6	51	194	441	688	837
	:	:	:	:	:	:

Der Endzuwuchs ist $a = 6$

Die Anfangszuwüchse sind:

$a_1 = 3 \quad a_2 = 2 \quad a_3 = 5 \quad a_4 = 4 \quad a_5 = 7$

Also ist im ersten Ort:

$$9 = a_1 + a$$
$$15 = a_1 + 2a$$
$$21 = a_1 + 3a$$
$$u = a_1 + na$$

Im zweiten Ort:

$$\begin{aligned}
5 &= a_2 + a_1 \\
14 &= a_2 + 2a_1 + a \\
29 &= a_2 + 3a_1 + 3a \\
50 &= a_2 + 4a_1 + 6a \\
77 &= a_2 + 5a_1 + 10a \\
&\vdots \\
u &= a_2 + {}^{1}na_1 + {}^{2}na
\end{aligned}$$

Im dritten Ort:

$$\begin{aligned}
7 &= a_3 + a_2 \\
12 &= a_3 + 2a_2 + a_1 \\
26 &= a_3 + 3a_2 + 3a_1 + a \\
55 &= a_3 + 4a_2 + 6a_1 + 4a \\
105 &= a_3 + 5a_2 + 10a_1 + 10a \\
&\vdots \\
u &= a_3 + {}^{1}na_2 + {}^{2}na_1 + {}^{3}na
\end{aligned}$$

Im vierten Ort:

$$\begin{aligned}
9 &= a_4 + a_3 \\
16 &= a_4 + 2a_3 + a_2 \\
28 &= a_4 + 3a_3 + 3a_2 + a_1 \\
54 &= a_4 + 4a_3 + 6a_2 + 4a_1 + a \\
109 &= a_4 + 5a_3 + 10a_2 + 10a_1 + 5a \\
&\vdots \\
u &= a_4 + {}^{1}na_3 + {}^{2}na_2 + {}^{3}na_1 + {}^{4}na
\end{aligned}$$

Im fünften Ort:

$$\begin{aligned}
11 &= a_5 + a_4 \\
20 &= a_5 + 2a_4 + a_3 \\
36 &= a_5 + 3a_4 + 3a_3 + a_2 \\
64 &= a_5 + 4a_4 + 6a_3 + 4a_2 + a_1 \\
118 &= a_5 + 5a_4 + 10a_3 + 10a_2 + 5a_1 + a \\
&\vdots \\
u &= a_5 + {}^{1}na_4 + {}^{2}na_3 + {}^{3}na_2 + {}^{4}na_1 + {}^{5}na
\end{aligned}$$

Die an den verschiedenen Anfangszuwüchsen haftenden Nebenzahlen sind die durch fortgesetzte Anlegung gemäfs dem Satze (42.) gebildeten Stufenzahlen deren Name die Stelle n des allgemeinen Gliedes u ist. Demnach ist der Ausdruck des allgemeinen Gliedes u in den verschiedenen Oertern:

Ort

$$
\begin{array}{ll}
0 & a \\
1 & a_1 + {}^{1}na \\
2 & a_2 + {}^{1}na_1 + {}^{2}na \\
3 & a_3 + {}^{1}na_2 + {}^{2}na_1 + {}^{3}na \\
4 & a_4 + {}^{1}na_3 + {}^{2}na_2 + {}^{3}na_1 + {}^{4}na \\
5 & a_5 + {}^{1}na_4 + {}^{2}na_3 + {}^{3}na_2 + {}^{4}na_1 + {}^{5}na \\
6 & a_6 + {}^{1}na_5 + {}^{2}na_4 + {}^{3}na_3 + {}^{4}na_2 + {}^{5}na_1 + {}^{6}na
\end{array}
$$

u. s. f.

Im obigen Beispiele ist für die Stelle $n = 8$

$$
\begin{array}{rl}
6 & = 6 \\
51 & = 3 + 8.6 \\
194 & = 2 + 8.3 + 28.6 \\
441 & = 5 + 8.2 + 28.3 + 56.6 \\
688 & = 4 + 8.5 + 28.2 + 56.3 + 70.6 \\
837 & = 7 + 8.4 + 28.5 + 56.2 + 70.3 + 56.6
\end{array}
$$

46.

Die Berechnung eines Gliedes einer obern gleichgemessenen Reihe für eine Stelle deren Werth ein Bruch oder eine gegenhafte Zahl ist, heifst die Einschaltung (Interpolation).

Dieses Verfahren ist von sehr häufiger Anwendung insbesondere beim Gebrauch der Tafeln. Hier ist meistens der niedere Ort ausreichend, doch müssen bisweilen die obern Oerter mit berücksichtigt werden. Alsdann ist es am bequemsten jeden Anfangszuwuchs durch den vorhergehenden zu verbessern. Man bezeichnet nämlich z. B. den Ausdruck

$$u = a_5 + {}^{1}na_4 + {}^{2}na_3 + {}^{3}na_2 + {}^{4}na_1 + {}^{5}na$$

von unten anfangend auf folgende Art:

$$
\begin{aligned}
k_3 &= a_1 + \frac{n-4}{5}a \\
k_2 &= a_2 + \frac{n-3}{4}k_3 \\
k_1 &= a_3 + \frac{n-2}{3}k_2 \\
k &= a_4 + \frac{n-1}{2}k_1 \\
u &= a_5 + nk.
\end{aligned}
$$

Erstes Beispiel.

x	$u = Lx$		
3353	3,52543		
		13	
3354	3,52556		
		13	
3355	3,52569		

a_1 . . . 3,52543
an . . . 5
u . . . 3,52548

$u = a_1 + na$
$a_1 = 3{,}52543$
$a = 13$

Es sei $x = 3353{,}42$
so ist . . . $n = 0{,}42$

Zweites Beispiel.

x	$u = L \sin x$		
0° 8′	7,36682		
		5115	
0° 9	7,41797		$\bar{5}39$
		4576	
0° 10	7,46373		

$u = a_2 + nk$

$k = a_1 + \frac{n-1}{2} a$

Es sei $x = 0° 8′{,}4$, so ist $n = 0{,}4$, $\frac{1}{2}(n-1) = \bar{0}{,}3$

a_1 . . . 5115
$\frac{1}{2}(n-1)a$ . . . 162
k . . . 5277

a_2 . . . 7,36682
nk . . . 2111
u . . . 7,38793

Drittes Beispiel.

x	$u = L \sin x$			
0° 8	7,36682			
		5115		
9	7,41797		$\bar{5}39$	
		4576		102
10	7,46373		$\bar{4}37$	
		4139		
11	7,50512			

$k_1 = a_1 + \frac{n-2}{3} a$

$k = a_2 + \frac{n-1}{2} k_1$

$u = a_3 + nk$

Es sei $x = 0° 8′{,}4$
so ist $n = 0{,}4$, $\frac{1}{3}(n-2) = \bar{0}{,}533\ldots$, $\frac{1}{2}(n-1) = \bar{0}{,}3$

a_1 . . . $\bar{5}39$
$\frac{n-2}{3} a$ . . . $\bar{5}4$
k_1 . . . $\bar{5}93$

a_2 . . . 5115
$\frac{n-1}{2} k_1$ . . . 178
k . . . 5293

a_3 . . . 7,36682
nk . . 2117
u . . . 7,38799

Viertes Beispiel.

1830 April. x	Mondslänge. u							
4. 0 U.	152° 15′ 56,6							
		5° 59 48,9						
4. 12	158 15 45,5			$\overline{108},2$				
		5 58 0,7		$\overline{85},1$	23,1	$\overline{1},2$		
5. 0	164 13 46,2						$\overline{1},3$	
		5 56 35,6		$\overline{63},2$	21,9	$\overline{2},5$		
5. 12	170 10 21,8							
		5 55 32,4		$\overline{43},8$	19,4			
6. 0	176 5 54,2							
		5 54 48,6						
6. 12	182 0 42,8							

Es sei x = April 5. 7 U., so ist $n = 2\frac{7}{12}$

$$\frac{n-1}{2} = \frac{19}{24} \qquad \frac{n-2}{3} = \frac{7}{36} \qquad \frac{n-3}{4} = \overline{1}.\frac{5}{48} \qquad \frac{n-4}{5} = \overline{1}.\frac{17}{60}$$

a_1 . . . $\overline{1},2$	a_2 . . . 23,1	a_3 . . . $\overline{108},2$
$\frac{n-4}{5}a$ . . $\underline{0,37}$	$\frac{n-3}{4}k_3$ . . $\underline{0,09}$	$\frac{n-2}{3}k_2$ . . $\underline{4,51}$
k_3 . . . $\overline{0},83$	k_2 . . . 23,19	k_1 . . . $\overline{103},69$

a_4 . . . 5° 59 48,9	a_5 . . . 152° 15′ 56,60
$\frac{n-1}{2}k_1$ . . . $\overline{8}2,09$	nk . . . 15 25 59,26
k 5 58 26,81	u . . . 167 41 55,86

Siehe Berl. astr. Jahrb. 1830. S. 282. Die dort angestellten zum Theil verwickelten Betrachtungen geben dasselbe was hier auf einfache Weise gefunden worden ist.

47.

Das Gebinde zweier Stufenzahlen ist die Anlage der Vielfachen einer Reihe von Stufenzahlen, deren höchste die Anlage der Namen jener Stufenzahlen zum Namen hat.

Da nach dem Satze (42.)

$$1 \,.\, n^{\underline{1}} = n$$
$$1 \,.\, 2 \,.\, n^{\underline{2}} = n\,(n-1)$$
$$1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, n^{\underline{3}} = n\,(n-1)\,(n-2)$$
$$1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, n^{\underline{4}} = n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)$$

u. s. f.

so ist durch Entwickelung der Bindeglieder

$$\odot \begin{cases} 1.\overset{1}{n} = n \\ 2\overset{2}{n} = n^2 - n \\ 6\overset{3}{n} = n^3 - 3n^2 + 2n \\ 24\overset{4}{n} = n^4 - 6n^3 + 11n^2 - 6n \\ 120\overset{5}{n} = n^5 - 10n^4 + 35n^3 - 50n^2 + 24n \end{cases}$$

u. s. f.

Hieraus folgen die Ausdrücke

$$\mathfrak{D} \begin{cases} n^1 = \overset{1}{n} \\ n^2 = 2\overset{2}{n} + \overset{1}{n} \\ n^3 = 6\overset{3}{n} + 6\overset{2}{n} + \overset{1}{n} \\ n^4 = 24\overset{4}{n} + 36\overset{3}{n} + 14\overset{2}{n} + \overset{1}{n} \\ n^5 = 120\overset{5}{n} + 240\overset{4}{n} + 150\overset{3}{n} + 30\overset{2}{n} + \overset{1}{n} \end{cases}$$

u. s. f.

Man binde nun zwei Stufenzahlen in den Ausdrücken $\odot$, und setze an Stelle der rechts sich ergebenden Höhen von n ihre in den Ausdrücken $\mathfrak{D}$ enthaltenen Werthe, so ist

$$\begin{aligned} \overset{1\,1}{n.n} &= 2\overset{2}{n} + 1.\overset{1}{n} \\ \overset{1\,2}{n\,n} &= 3\overset{3}{n} + 2\overset{2}{n} \\ \overset{1\,3}{n\,n} &= 4\overset{4}{n} + 3\overset{3}{n} \\ \overset{1\,4}{n\,n} &= 5\overset{5}{n} + 4\overset{4}{n} \end{aligned}$$

u. s. f.

$$\begin{aligned} \overset{2\,2}{n\,n} &= 6\overset{4}{n} + 6\overset{3}{n} + 1\overset{2}{n} \\ \overset{2\,3}{n\,n} &= 10\overset{5}{n} + 12\overset{4}{n} + 3\overset{3}{n} \\ \overset{2\,4}{n\,n} &= 15\overset{6}{n} + 20\overset{5}{n} + 6\overset{4}{n} \\ \overset{2\,5}{n\,n} &= 21\overset{7}{n} + 30\overset{6}{n} + 10\overset{5}{n} \end{aligned}$$

u. s. f.

$$\overset{3}{n}\overset{3}{n} = 20\overset{6}{n} + 30\overset{5}{n} + 12\overset{4}{n} + 1\overset{3}{n}$$
$$\overset{3}{n}\overset{4}{n} = 35\overset{7}{n} + 60\overset{6}{n} + 30\overset{5}{n} + 4\overset{4}{n}$$
$$\overset{3}{n}\overset{5}{n} = 56\overset{8}{n} + 105\overset{7}{n} + 60\overset{6}{n} + 10\overset{5}{n}$$
$$\overset{3}{n}\overset{6}{n} = 84\overset{9}{n} + 118\overset{8}{n} + 105\overset{7}{n} + 20\overset{6}{n}$$

u. s. f.

In den Nebenzahlen ist das Gesetz folgendes

1,1	$\overset{1}{2}$,	$\overset{1}{1}$		
1,2	$\overset{1}{3}$,	$\overset{1}{2}$		
1,3	$\overset{1}{4}$,	$\overset{1}{3}$		
1,4	$\overset{1}{5}$,	$\overset{1}{4}$	u. s. f.	
2,2	$\overset{2}{4}$,	$2.\overset{2}{3}$,	$\overset{2}{2}$	
2,3	$\overset{2}{5}$,	$2.\overset{2}{4}$,	$\overset{2}{3}$	
2,4	$\overset{2}{6}$,	$2.\overset{2}{5}$,	$\overset{2}{4}$	
2,5	$\overset{2}{7}$,	$2.\overset{2}{6}$,	$\overset{2}{5}$	u. s. f.
3,3	$\overset{3}{6}$,	$3.\overset{3}{5}$,	$3.\overset{3}{4}$,	$\overset{3}{3}$
3,4	$\overset{3}{7}$,	$3.\overset{3}{6}$,	$3.\overset{3}{5}$,	$\overset{3}{4}$
3,5	$\overset{3}{8}$,	$3.\overset{3}{7}$,	$3.\overset{3}{6}$,	$\overset{3}{5}$
3,6	$\overset{3}{9}$,	$3.\overset{3}{8}$,	$3.\overset{3}{7}$,	$\overset{3}{6}$ u. s. f.

48.

Die Gebinde der gleichstelligen Glieder in mehrern gleichgemessenen Reihen bilden eine gleichgemessene Reihe, deren Ort die Anlage der Oerter jener Reihen und deren Endzuwuchs ein Vielfaches der Endzuwüchse jener Reihen ist.

Es seien in zwei beliebigen gleichgemessenen Reihen je zwei gleichstellige Glieder mit einander gebunden. Es seien z. B. ihre allgemeinen Glieder:

$$u = a_3 + \overset{1}{n}a_2 + \overset{2}{n}a_1 + \overset{3}{n}a$$
$$v = b_2 + \overset{1}{n}b_1 + \overset{2}{n}b$$

Das Gebinde uv enthält aufser den Stufenzahlen $\overset{1}{n}, \overset{2}{n}, \overset{3}{n}$ noch die Gebinde $\overset{11}{nn}, \overset{12}{nn}, \overset{13}{nn}, \overset{22}{nn}, \overset{23}{nn}$. An Stelle derselben setze man ihre Werthe nach den im vorigen Satze (47.) gegebenen Ausdrücken. Alsdann ist

$$uv = c_5 + \overset{1}{n}c_4 + \overset{2}{n}c_3 + \overset{3}{n}c_2 + \overset{4}{n}c_1 + \overset{5}{n}c$$

und man findet:

$$\begin{aligned}
c_5 &= a_3b_2 \\
c_4 &= a_2b_2 + a_3b_1 + a_2b_1 \\
c_3 &= a_1b_2 + a_3b + a_1b + 2(a_2b_1 + a_1b_1 + a_2b) \\
c_2 &= ab_2 + 3(a_1b_1 + a_2b + ab_1 + ab) + 6a_1b \\
c_1 &= 4ab_1 + 6a_1b + 12ab \\
c &= 10ab
\end{aligned}$$

Also giebt eine Reihe vom Ort 2 mit einer Reihe vom Ort 3, eine Reihe vom Ort 5.

Derselbe Beweis gilt für je zwei andere Oerter und so ergiebt sich allgemein:

Eine Reihe vom Ort p giebt mit einer Reihe vom Ort q durch Bindung der gleichstelligen Glieder eine Reihe vom Ort $p + q$.

Hieraus folgt weiter:

Reihen deren Oerter $p, q, r, s \ldots$ sind geben durch Bindung der gleichstelligen Glieder eine Reihe vom Ort $p + q + r + s \ldots$.

Beispiel.

Ort 3 . . .	1	6	18	40	75	126	196
Ort 2 . . .	1	6	15	28	45	66	91
Ort 5 . . .	1	36	270	1120	3375	8316	17836
Zuwuchs	4	35	234	850	2255	4941	9520
„	3		199	616	1405	2686	4579
„	2			417	789	1281	1893
„	1				372	492	612
Endzuwuchs					120	120	

In diesem Beispiel ist:

$a_3 = 1$ $a_2 = 5$ $a_1 = 7$ $a = 3$

$b_2 = 1$ $b_1 = 5$ $b = 4$

$c_5 = 1$ $c_4 = 35$ $c_3 = 199$ $c_2 = 417$ $c_1 = 372$ $c = 120$

49.

Die Eckzahlen zu bestimmen.

Die Eckzahlen (figurirte Z.) sind entweder ***Ebenzahlen*** (Polygonalzahlen) oder ***Raumzahlen*** (Pyramidalzahlen).

Die Ebenzahlen entstehen aus der Bindung der gleichstelligen Glieder zweier schlichten Zahlreihen, wenn die Gebinde mit 2 getheilt werden. Jede Ebenzahl ist die Anlage einer von 1 ausgehenden schlichten Zahlreihe.

Beispiele.

I.	1	2	3	4	5	6	7
II.	2	3	4	5	6	7	8
	2	6	12	20	30	42	56
Dreieck . .	1	3	6	10	15	21	28
		2	3	4	5	6	7
			1	1	1	1	1

$$\text{Ebendreieck} = 1 + 2 + 3 \ldots + n = \frac{n(n+1)}{1.2}$$

I.	1	2	3	4	5	6	7
II.	2	4	6	8	10	12	14
	2	8	18	32	50	72	98
Viereck . .	1	4	9	16	25	36	49
		3	5	7	9	11	13
			2	2	2	2	2

$$\text{Ebenviereck} = 1 + 3 + 5 \ldots 2n - 1 = n^2$$

I.	1	2	3	4	5	6	7
II.	2	5	8	11	14	17	20
	2	10	24	44	70	102	140
Ebenfünfeck	1	5	12	22	35	51	70
		4	7	10	13	16	19
			3	3	3	3	3

$$\text{Ebenfünfeck} = 1 + 4 + 7 \ldots (3n - 2) = \frac{n(3n-1)}{1.2}$$

$$\text{Ebensechseck} = 1 + 5 + 9 \ldots (4n - 3) = \frac{n(4n-2)}{1.2}$$

$$\text{Ebensiebeneck} = 1 + 6 + 11 \ldots (5n - 4) = \frac{n(5n-3)}{1.2}$$

Die Ebenzahlen entstehen auch aus einem Dreieck und einem verschobenen Dreieck wenn das letztere mit den schlichten Zahlen gebunden wird.

Beispiele.

1 Dreieck	1	3	6	10	15	21
1 Dreieck		1	3	6	10	15
Viereck	1	4	9	16	25	36
1 Dreieck	1	3	6	10	15	21
2 Dreiecke		2	6	12	20	30
Fünfeck	1	5	12	22	35	51
1 Dreieck	1	3	6	10	15	21
3 Dreiecke		3	9	18	30	45
Sechseck	1	6	15	28	45	66

Die Raumzahlen entstehen aus der Bindung der gleichstelligen Glieder dreier schlichten Zahlreihen wenn die Gebinde mit 6 getheilt werden. Jede Raumzahl ist die Anlage der von 1 ausgehenden Ebenzahlreihe.

I.	1	2	3	4	5	6	7	8
II.	2	3	4	5	6	7	8	9
III.	3	4	5	6	7	8	9	10
	6	24	60	120	210	336	504	720
Viereck . . .	1	4	10	20	35	56	84	120
		3	6	10	15	21	28	36
			3	4	5	6	7	8
				1	1	1	1	1

$$\text{Raumviereck} = \frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3}$$

I.	1	2	3	4	5	6	7	8
II.	2	3	4	5	6	7	8	9
III.	3	5	7	9	11	13	15	17
	6	30	84	180	330	546	840	1224
Fünfeck . .	1	5	14	30	55	91	140	204
		4	9	16	25	36	49	64
			5	7	9	11	13	15
				2	2	2	2	2

$$\text{Raumfünfeck} = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{1\,.\,2\,.\,3}$$

I.	1	2	3	4	5	6	7	8
II.	2	3	4	5	6	7	8	9
III.	3	6	9	12	15	18	21	24
	6	36	108	240	450	756	1176	1728
Sechseck . .	1	6	18	40	75	126	196	288
		5	12	22	35	51	70	92
			7	10	13	16	19	22
				3	3	3	3	3

$$\text{Raumsechseck} = \frac{n\,(n+1)\,3n}{1\,.\,2\,.\,3}$$

$$\text{Raumsiebeneck} = \frac{n\,(n+1)\,(4n-1)}{1\,.\,2\,.\,3}$$

$$\text{Raumachteck} = \frac{n\,(n+1)\,(5n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}$$

Die Raumzahlen entstehen auch aus einem Raumviereck und einem verschobenen Raumviereck, wenn das letztere mit den schlichten Zahlen gebunden wird.

Beispiele.

1 Viereck	1	4	10	20	35
1 Viereck		1	4	10	20
Fünfeck	1	5	14	30	55
1 Viereck	1	4	10	20	35
2 Vierecke		2	8	20	40
Sechseck	1	6	18	40	75
1 Viereck	1	4	10	20	35
3 Vierecke		3	12	30	60
Siebeneck	1	7	22	50	95

50.

Die Haufenzahl zu bestimmen.

Wenn in zwei schlichten Zahlreihen von beliebigen Gliedern ab die gleichstelligen Glieder gebunden werden, so heifst die Anlage dieser Gebinde eine ***Haufenzahl.*** Sie hängt von dem Raumviereck oder Raumfünfeck ab.

I.	a	$a+1$	$a+2$	$a+3$
II.	b	$b+1$	$b+2$	$b+3$
	ab	$(a+1)(b+1)$	$(a+2)(b+2)$	$(a+3)(b+3)$

Die Endglieder seien A, B, so ist auch

I.	A	$A-1$	$A-2$	$A-3$
II.	B	$B-1$	$B-2$	$B-3$
	AB	$(A-1)(B-1)$	$(A-2)(B-2)$	$(A-3)(B-3)$

Erste Anlage.

ab
$ab + 1(a+b) + 1^2$
$ab + 2(a+b) + 2^2$
$ab + 3(a+b) + 3^2$
$ab + (n-1)(a+b) + (n-1)^2$

Zweite Anlage.

AB
$AB - 1(A+B) + 1^2$
$AB - 2(A+B) + 2^2$
$AB - 3(A+B) + 3^2$
$AB - (n-1)(A+B) + (n-1)^2$

$$S = nab + \frac{n(n-1)}{1.2}(a+b) + \frac{n(n-1)(2n-1)}{1.2.3}$$

$$S = nAB - \frac{n(n-1)}{1.2}(A+B) + \frac{n(n-1)(2n-1)}{1.2.3}$$

aber $A - a = n - 1$ $\quad B - b = n - 1$

also folgt aus beiden Ausdrücken

$$S = \frac{n(ab+AB)}{2} - \frac{n(n-1)}{1.2}(n-1) + \frac{n(n-1)(2n-1)}{1.2.3}$$

oder $$S = \frac{n(ab+AB)}{2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$$

Beispiel.

$a = 20$ $\quad b = 20$ $\quad A = 40$ $\quad B = 40$ $\quad n = 21$

$$S = \frac{21(400+1600)}{2} - \frac{21.20.19}{6} = 19670$$

51.

Die Anlage der ganznamigen Höhen der schlichten Zahlen zu bestimmen.

Es sei $S_1 = 1^1 + 2^1 + 3^1 \ldots + x^1$

$S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 \ldots + x^2$

$S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 \ldots + x^3$

u. s. f.

Aus dem Satze (48.) folgt, dafs diese Höhenreihen gleichgemessene Reihen sind, deren Ort dem Namen der Höhe gleich ist. Man hat also

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & & 1 & & 3 & & 6 & & 10 \ldots S_1 \\ & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & \ldots . x \\ & & 1 & & 1 & & 1 & & \end{array}$$

also (45.) $S_1 = \overset{1}{x} + \overset{2}{x}$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & & 1 & & 5 & & 14 & & 30 \ldots S_2 \\ & 1 & & 4 & & 9 & & 16 & \ldots x^2 \\ & & 3 & & 5 & & 7 & & \\ & & & 2 & & 2 & & & \end{array}$$

$S_2 = \overset{1}{x} + 3\overset{2}{x} + 2\overset{3}{x}$

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & & 1 & & 9 & & 36 & & 100 & & 225 \ldots S_3 \\ & 1 & & 8 & & 27 & & 64 & & 125 & \ldots x^3 \\ & & 7 & & 19 & & 37 & & 61 & & \\ & & & 12 & & 18 & & 24 & & & \\ & & & & 6 & & 6 & & & & \end{array}$$

$S_3 = \overset{1}{x} + 7\overset{2}{x} + 12\overset{3}{x} + 6\overset{4}{x}$

u. s. f.

Die Anfangszuwüchse ergeben sich mittelst des Satzes (48.)

I.	1	2	3	4	$x + 1$
II.	1^n	2^n	3^n	4^n	$(x + 1)^n$
III.	1^{n+1}	2^{n+1}	3^{n+1}	4^{n+1}	$(x + 1)^{n+1}$

II. und III. sind also nach (48.) gleichgemessene Reihen deren Oerter n u. $n + 1$ sind. Es seien die Anfangs-

zuwüchse in II. durch $1, a, b, c \ldots$ in III. durch $1, a_1, b_1, c_1 \ldots$ bezeichnet, so ist

$$u = 1 + \overset{1}{x}a + \overset{2}{x}b + \overset{3}{x}c \ldots$$
$$v = 1 + \overset{1}{x}$$

$$uv = \begin{cases} 1 + \overset{1}{x}a + \overset{2}{x}b + \overset{3}{x}c \\ \quad + \overset{1}{x} + \overset{1\,1}{x}xa + \overset{1\,2}{x}xb \ldots \end{cases}$$

Aber (47.) . . . $\overset{1\,1}{x}x = 2\overset{2}{x} + \overset{1}{x}$

$$\overset{1\,2}{x}x = 3\overset{3}{x} + 2\overset{2}{x}$$
$$\overset{1\,3}{x}x = 4\overset{4}{x} + 3\overset{3}{x} \quad \text{u. s. f.}$$

Setzt man diese Werthe ein, so ist

$$uv = 1 + \overset{1}{x}a_1 + \overset{2}{x}b_1 + \overset{3}{x}c_1 \ldots$$

$$a_1 = 1 + 2a$$
$$b_1 = 2a + 3b$$
$$c_1 = 3b + 4c$$
$$d_1 = 4c + 5d \quad \text{u. s. f.}$$

Dieses giebt folgende Berechnung:

Bindeglieder	1	2	3	4	5	6	7
S_1 . . .	1	1	:	:	:	:	:
	1	2	:	:	:	:	:
		1	2	:	:	:	:
S_2 . . .	1	3	2	:	:	:	:
	1	6	6	:	:	:	:
		1	6	6	:	:	:
S_3 . . .	1	7	12	6	:	:	:
	1	14	36	24	:	:	:
		1	14	36	24	:	:
S_4 . . .	1	15	50	60	24	:	:
	1	30	150	240	120	:	:
		1	30	150	240	120	:
S_5 . . .	1	31	180	390	360	120	:
	1	62	540	1560	1800	720	:
		1	62	540	1560	1800	720
S_6 . . .	1	63	602	2100	3360	2520	720

Demnach ist

$$S_1 = \overset{1}{x} + \overset{2}{x}$$

$$S_2 = \overset{1}{x} + 3\overset{2}{x} + 2\overset{3}{x}$$

$$S_3 = \overset{1}{x} + 7\overset{2}{x} + 12\overset{3}{x} + 6\overset{4}{x}$$

$$S_4 = \overset{1}{x} + 15\overset{2}{x} + 50\overset{3}{x} + 60\overset{4}{x} + 24\overset{5}{x}$$

$$S_5 = \overset{1}{x} + 31\overset{2}{x} + 180\overset{3}{x} + 390\overset{4}{x} + 360\overset{5}{x} + 120\overset{6}{x}$$

$$S_6 = \overset{1}{x} + 63\overset{2}{x} + 602\overset{3}{x} + 2100\overset{4}{x} + 3360\overset{5}{x} + 2520\overset{6}{x} + 720\overset{7}{x}$$

$$\vdots$$

Da aus der gegebenen Stelle x sämmtliche Stufenzahlen $\overset{1}{x}\ \overset{2}{x}\ \overset{3}{x}\ \ldots$ nach (42.) berechnet werden können, so ist durch die obigen Ausdrücke die Aufgabe vollständig gelöset.

Man kann aber noch einen Schritt weiter gehen und die Anlagen $S_1\ S_2\ S_3\ \ldots$ durch die Höhen von x ausdrücken. Man benutzt hiezu die in (47.) gegebenen Ausdrücke der Stufenzahlen von x, nämlich

$$1\overset{1}{x} = x$$

$$2\overset{2}{x} = x^2 - x$$

$$6\overset{3}{x} = x^3 - 3x^2 + 2x$$

$$24\overset{4}{x} = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$$

$$120\overset{5}{x} = x^5 - 10x^4 + 35x^3 - 50x^2 + 24x$$

$$720\overset{6}{x} = x^6 - 15x^5 + 85x^4 - 225x^3 + 274x^2 - 120x$$

$$5040\overset{7}{x} = x^7 - 21x^6 + 175x^5 - 735x^4 + 1624x^3 - 1764x^2 + 720x$$

u. s. f.

Hieraus ergiebt sich:

$$S_1 = \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}x$$

$$S_2 = \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}\cdot\frac{2x}{2}$$

$$S_3 = \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{1}{6}\cdot\frac{3x^2}{2}$$

$$S_4 = \tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{1}{2}x^4 + \tfrac{1}{6}\cdot\frac{4x^3}{2} - \tfrac{1}{30}\cdot\frac{4x}{4}$$

$$S_5 = \tfrac{1}{6}x^6 + \tfrac{1}{2}x^5 + \tfrac{1}{6}\cdot\frac{5x^4}{2} - \tfrac{1}{30}\cdot\frac{10x^2}{4}$$

$$S_6 = \tfrac{1}{7}x^7 + \tfrac{1}{2}x^6 + \tfrac{1}{6}\cdot\frac{6x^5}{2} - \tfrac{1}{30}\cdot\frac{20x^3}{4} + \tfrac{1}{42}\cdot\frac{6x}{6}$$

$$S_7 = \tfrac{1}{8}x^8 + \tfrac{1}{2}x^7 + \tfrac{1}{6}\cdot\frac{7x^6}{2} - \tfrac{1}{30}\cdot\frac{35x^4}{4} + \tfrac{1}{42}\cdot\frac{21x^2}{6}$$

$$S_8 = \tfrac{1}{9}x^9 + \tfrac{1}{2}x^8 + \tfrac{1}{6}\cdot\frac{8x^7}{2} - \tfrac{1}{30}\cdot\frac{56x^5}{4} + \tfrac{1}{42}\cdot\frac{56x^3}{6} - \tfrac{1}{30}\cdot\frac{8x^1}{8}$$

$$S_9 = \tfrac{1}{10}x^{10} + \tfrac{1}{2}x^9 + \tfrac{1}{6}\cdot\frac{9x^8}{2} - \tfrac{1}{30}\cdot\frac{84x^6}{4} + \tfrac{1}{42}\cdot\frac{126x^4}{6} - \tfrac{1}{30}\cdot\frac{36x^2}{8}$$

$$S_{10} = \tfrac{1}{11}x^{11} + \tfrac{1}{2}x^{10} + \tfrac{1}{6}\cdot\frac{10x^9}{2} - \tfrac{1}{30}\cdot\frac{120x^7}{4} + \tfrac{1}{42}\cdot\frac{252x^5}{6} - \tfrac{1}{30}\cdot\frac{120x^3}{8} + \tfrac{5}{66}\cdot\frac{10x}{10}$$

u. s. f.

Diese Ausdrücke sind wegen der Nebenzahlen $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{42}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{5}{66}$ ... bemerkenswerth welche in der höhern Gröfsenlehre wichtig sind, und nach ihrem Erfinder Jacob Bernoulli (Ars conjectandi. 97) die *bernoullischen Zahlen* heifsen.

Die obigen Ausdrücke lassen sich beträchtlich vereinfachfachen wenn man setzt

$$x^2 + x = c \qquad 2x^3 + 3x^2 + x = d$$

Alsdann ist:

$$S_1 = \tfrac{1}{2}c$$
$$S_3 = \tfrac{1}{4}c^2$$
$$S_5 = \tfrac{1}{6}c^3 - \tfrac{1}{12}c^2$$
$$S_7 = \tfrac{1}{8}c^4 - \tfrac{1}{6}c^3 + \tfrac{1}{12}c^2$$
$$S_9 = \tfrac{1}{10}c^5 - \tfrac{1}{4}c^4 + \tfrac{3}{10}c^3 - \tfrac{3}{20}c^2$$
$$\vdots$$
$$S_2 = d(\tfrac{1}{6})$$
$$S_4 = d(\tfrac{1}{10}c - \tfrac{1}{30})$$
$$S_6 = d(\tfrac{1}{14}c^2 - \tfrac{1}{14}c + \tfrac{1}{42})$$
$$S_8 = d(\tfrac{1}{18}c^3 - \tfrac{1}{9}c^2 + \tfrac{1}{10}c - \tfrac{1}{30})$$
$$S_{10} = d(\tfrac{1}{22}c^4 - \tfrac{5}{33}c^3 + \tfrac{17}{66}c^2 - \tfrac{15}{66}c + \tfrac{5}{66})$$
$$\vdots$$

Erstes Beispiel.

$x = 16 \qquad c = 272 \qquad d = 8976$

$S_1 = \frac{1}{2}c$ 136
$S_2 = \frac{1}{6}d$ 1496
$S_3 = \frac{1}{4}c^2$ 18496
$S_4 = \frac{1}{30}d(3c-1)$ 243848
$S_5 = \frac{1}{12}c^2(2c-1)$ 3347776
$S_6 = \frac{1}{42}d(3c^2-3c+1)$ . . 47260136
$S_7 = \frac{1}{24}c^2(3c^2-4c+2)$. 680856256

Zweites Beispiel.

$x = 100 \qquad c = 10100 \qquad d = 2030100$

S_1 5050
S_2 338350
S_3 25502500
S_4 2050333330
S_5 171708332500
S_6 14790714119050
S_7 1300583304167500

52.

Die Gleichungen zu finden welche die gegenseitige Abhängigkeit der Höhenanlagen der schlichten Zahlen angeben.

Durch Anwendung des Stufensatzes (42.) ergiebt sich

$$\text{I.}\quad \begin{cases} 1^n = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1 \\ 2^n = 1^n + \overset{1}{n}1^{n-1} + \overset{2}{n}1^{n-2} \ldots + 1 \\ 3^n = 2^n + \overset{1}{n}2^{n-1} + \overset{2}{n}2^{n-2} \ldots + 1 \\ 4^n = 3^n + \overset{1}{n}3^{n-1} + \overset{2}{n}3^{n-2} \ldots + 1 \\ 5^n = 4^n + \overset{1}{n}4^{n-1} + \overset{2}{n}4^{n-2} \ldots + 1 \\ \qquad\qquad \vdots \quad \vdots \end{cases}$$

$$\text{II.}\quad \begin{cases} 0 = 1^n - \overset{1}{n}1^{n-1} + \overset{2}{n}1^{n-2} \ldots . \pm 1 \\ 1^n = 2^n - \overset{1}{n}2^{n-1} + \overset{2}{n}2^{n-2} \ldots . \pm 1 \\ 2^n = 3^n - \overset{1}{n}3^{n-1} + \overset{2}{n}3^{n-2} \ldots . \pm 1 \\ 3^n = 4^n - \overset{1}{n}4^{n-1} + \overset{2}{n}4^{n-2} \ldots . \pm 1 \end{cases}$$

das obere Vorzeichen wenn n grade
das untere Vorzeichen wenn n ungrade.

Diese Gleichungen werden so weit fortgesetzt bis die Grundzahl des ersten Gliedes rechts gleich x ist. Nach Weglassung der gleichen Höhen links und rechts ergiebt sich dann aus

$$\text{I.}\ldots\ (x+1)^n - (x+1) = \overset{1}{n}S_{n-1} + \overset{2}{n}S_{n-2}\ldots$$

$$\text{II.}\ldots\ x^n \pm x = \overset{1}{n}S_{n-1} - \overset{2}{n}S_{n-2}\ldots$$

Man schreibe nun diese Gleichungen nach ihrer Folge:

$$\text{I.}\quad \begin{cases} (x+1)^2 - (x+1) = \overset{1}{2}S_1 \\ (x+1)^3 - (x+1) = \overset{1}{3}S_2 + \overset{2}{3}S_1 \\ (x+1)^4 - (x+1) = \overset{1}{4}S_3 + \overset{2}{4}S_2 + \overset{3}{4}S_1 \\ \qquad\qquad \vdots \end{cases}$$

$$\text{II.}\quad \begin{cases} x^2 + x = \overset{1}{2}S_1 \\ x^3 - x = \overset{1}{3}S_2 - \overset{2}{3}S_1 \\ x^4 + x = \overset{1}{4}S_3 - \overset{2}{4}S_2 + \overset{3}{4}S_1 \\ x^5 - x = \overset{1}{5}S_4 - \overset{2}{5}S_3 + \overset{3}{5}S_2 - \overset{4}{5}S_1 \end{cases}$$

Durch Anlegung jedes Ausdrucks in I. an den betreffenden in II. heben sich entweder die gradnamigen oder die ungradnamigen Höhenanlagen auf. Hiebei läfst sich noch bemerken: wenn $x(x+1) = x^2 + x = c$ so ist

$$\begin{aligned}
(x+1)^2 - (x+1) &= c \\
(x+1)^3 - (x+1) &= c(x + \overset{1}{2}) \\
(x+1)^4 - (x+1) &= c(x^2 + \overset{1}{3}x + \overset{2}{3}) \\
(x+1)^5 - (x+1) &= c(x^3 + \overset{1}{4}x^2 + \overset{2}{4}x + \overset{3}{4}) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x^2 + x &= c \\
x^3 - x &= c(x-1) \\
x^4 + x &= c(x^2 - x + 1) \\
x^5 - x &= c(x^3 - x^2 + x - 1) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Die oben bezeichnete Anlegung giebt also

$$\begin{aligned}
c \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &= \overset{1}{2}S_1 \\
\tfrac{1}{2}c(2x^2+2x) \ldots\ldots\ldots\ldots &= \overset{1}{4}S_3 \\
\tfrac{1}{2}c(2x^4+4x^3+11x^2+9x) \ldots\ldots &= \overset{1}{6}S_5 + \overset{3}{6}S_5 \\
\tfrac{1}{2}c(2x^6+6x^5+22x^4+34x^3+36x^2+20x) & \\
&= \overset{1}{8}S_7 + \overset{3}{8}S_5 + \overset{5}{8}S_3 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}c(2x+1) \ldots\ldots\ldots\ldots &= \overset{1}{3}S_2 \\
\tfrac{1}{2}c(2x^3+3x^2+7x+3) \ldots\ldots &= \overset{1}{5}S_4 + \overset{3}{5}S_2 \\
\tfrac{1}{2}c(2x^5+5x^4+16x^3+19x^2+16x+5) & \\
&= \overset{1}{7}S_6 + \overset{3}{7}S_4 + \overset{5}{7}S_2 \\
\tfrac{1}{2}c(2x^7+7x^6+29x^5+55x^4+71x^3+55x^2+29x^1+7) & \\
&= \overset{1}{9}S_8 + \overset{3}{9}S_6 + \overset{5}{9}S_4 + \overset{7}{9}S_2
\end{aligned}$$

In der ersten Folge sind die Ausdrücke links durch c theilbar, und man erhält

$$c = \overset{1}{2}S_1$$

$$\tfrac{1}{2}c^2.2 = \overset{1}{4}S_3$$

$$\tfrac{1}{2}c^2(2c+9) = \overset{1}{6}S^5 + \overset{3}{6}S^3$$

$$\tfrac{1}{2}c^2(2c^2+16c+20) = \overset{1}{8}S_7 + \overset{3}{8}S_5 + \overset{5}{8}S_3$$

$$\tfrac{1}{2}c^2(2c^3+25c^2+50c+35) = \overset{1}{10}S_9 + \overset{3}{10}S_7 + \overset{5}{10}S_5 + \overset{7}{10}S_3$$

$$\tfrac{1}{2}c^2(2c^4+36c^3+105c^2+112c+54)$$
$$= \overset{1}{12}S_{11} + \overset{3}{12}S_9 + \overset{5}{12}S_7 + \overset{7}{12}S_5 + \overset{9}{12}S_3$$

$$\tfrac{1}{2}c^2(2c^5+49c^4+196c^3+294c^2+210c^1+77)$$
$$= \overset{1}{14}S_{13} + \overset{3}{14}S_{11} + \overset{5}{14}S_9 + \overset{7}{14}S_7 + \overset{9}{14}S_5 + \overset{11}{14}S_3$$

:

Die Nebenzahlen links sind

$$2\ ,\quad 3^2$$
$$2\ ,\quad 4^2\ ,\quad \tfrac{4}{2}.\overset{2}{5}$$
$$2\ ,\quad 5^2\ ,\quad \tfrac{5}{2}.\overset{3}{6}\ ,\quad \tfrac{5}{3}.\overset{2}{7}$$
$$2\ ,\quad 6^2\ ,\quad \tfrac{6}{2}.\overset{4}{7}\ ,\quad \tfrac{6}{3}.\overset{3}{8}\ ,\quad \tfrac{6}{4}.\overset{2}{9}$$
$$2\ ,\quad 7^2\ ,\quad \tfrac{7}{2}.\overset{5}{8}\ ,\quad \tfrac{7}{3}.\overset{4}{9}\ ,\quad \tfrac{7}{4}.\overset{3}{10}\ ,\quad \tfrac{7}{5}.\overset{2}{11}$$

u. s. f.

In der zweiten Folge sind die Glieder links durch $2x^3 + 3x^2 + x = d$ theilbar und man erhält:

$$\tfrac{1}{2}d = \overset{1}{3}S_2$$

$$\tfrac{1}{2}d(c+3) = \overset{1}{5}S_4 + \overset{3}{5}S_2$$

$$\tfrac{1}{2}d(c^2+6c+5) = \overset{1}{7}S_6 + \overset{3}{7}S_4 + \overset{5}{7}S_2$$

$$\tfrac{1}{2}d(c^3+10c^2+15c+7) = \overset{1}{9}S_8 + \overset{3}{9}S_6 + \overset{5}{9}S_4 + \overset{7}{9}S_2$$

$$\tfrac{1}{2}d(c^4+15c^3+35c^2+28c+9)$$
$$= \overset{1}{11}S_{10} + \overset{3}{11}S_8 + \overset{5}{11}S_6 + \overset{7}{11}S_4 + \overset{9}{11}S_2$$

u. s. f.

Die Nebenzahlen links sind

$$1\quad \overset{1}{3}$$
$$1\quad \overset{2}{4}\quad \overset{1}{5}$$
$$1\quad \overset{3}{5}\quad \overset{2}{6}\quad \overset{1}{7}$$
$$1\quad \overset{4}{6}\quad \overset{3}{7}\quad \overset{2}{8}\quad \overset{1}{9}$$

u. s. f.

Beispiel.

$x = 100$ $c = 10100$ $d = 2030100$

$c \ldots 10100$

$2)\overline{5050 = S_1}$

$c^2 \ldots 102010000$

$4)\overline{25502500 = S_3}$

$2c + 9 \quad 20209$

$\frac{1}{2}c^2 \ldots 51005000$

1030760045000

$20S_3 \ldots -510050000$

1030249995000

$6)\overline{171708332500 = S_5}$

$2c^2 \ldots 204020000$

$16c + 20 \ldots 161620$

204181620

51005000

10414283528100000

$56S_5 \quad -9615666620000$

$56S_3 \quad -1428140000$

10404666433340000

$8)\overline{1300583304167500 = S_7}$

$\frac{1}{2}d \ldots 1015050$

$3)\overline{338350 = S_2}$

$c + 3 \ldots 10103$

1015050

10255050150

$10S_2 \quad -3383500$

10251666650

$5)\overline{2050333330 = S_4}$

$c^2 \ldots 102010000$

$6c + 5 \quad 60605$

102070605

1015050

103606767605250

$35S_4 \quad -71761666550$

$21S_2 \quad -7105350$

103534998833350

$7)\overline{14790714119050 = S_6}$

Uebungen.

Zweisatzhöhen oder Stufenreihen.

1) $(1+a)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}a - \frac{1}{8}a^2 + \frac{1}{16}a^3 - \frac{5}{128}a^4 + \frac{7}{256}a^5 - \frac{21}{1024}a^6 + \frac{33}{2048}a^7 - \frac{429}{32768}a^8 \ldots$

2) $(1+a)^{\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3}{2}a + \frac{3}{8}a^2 - \frac{1}{16}a^3 + \frac{3}{128}a^4 - \frac{3}{256}a^5 + \frac{7}{1024}a^6 - \frac{9}{2048}a^7 + \frac{99}{32768}a^8 \ldots$

3) $(1+a)^{\frac{5}{2}} = 1 + \frac{5}{2}a + \frac{15}{8}a^2 + \frac{5}{16}a^3 - \frac{5}{128}a^4 + \frac{3}{256}a^5 - \frac{5}{1024}a^6 + \frac{5}{2048}a^7 - \frac{45}{32768}a^8 + \frac{55}{65536}a^9 \ldots$

4) $(1+a)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}a - \frac{1}{9}a^2 + \frac{5}{81}a^3 - \frac{10}{243}a^4 + \frac{22}{729}a^5 - \frac{154}{6561}a^6 + \frac{374}{19683}a^7 - \frac{935}{59049}a^8 \ldots$

5) $(1+a)^{\frac{2}{3}} = 1 + \frac{2}{3}a - \frac{1}{9}a^2 + \frac{4}{81}a^3 - \frac{7}{243}a^4 + \frac{14}{729}a^5 - \frac{91}{6561}a^6 + \frac{208}{19683}a^7 - \frac{494}{59049}a^8 \ldots$

6) $(1+a)^{\top} = 1 - a + a^2 - a^3 \ldots$

7) $(1+a)^{\overline{2}} = 1 - 2a + 3a^2 - 4a^3 \ldots$

8) $(1+a)^{\overline{3}} = 1 - 3a + 6a^2 - 10a^3 \ldots$

9) $(1+a)^{\top\cdot\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}a + \frac{3}{8}a^2 - \frac{5}{16}a^3 + \frac{35}{128}a^4 - \frac{63}{256}a^5 \ldots$

10) $(1+a)^{\top\cdot\frac{3}{2}} = 1 - \frac{3}{2}a + \frac{15}{8}a^2 - \frac{35}{16}a^3 + \frac{315}{128}a^4 - \frac{693}{256}a^5 \ldots$

11) $(1+a)^{\top\cdot\frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{3}a + \frac{2}{9}a^2 - \frac{14}{81}a^3 + \frac{35}{243}a^4 - \frac{91}{729}a^5 \ldots$

12) $(1+a)^{\top\cdot\frac{2}{3}} = 1 - \frac{2}{3}a + \frac{5}{9}a^2 - \frac{40}{81}a^3 + \frac{110}{243}a^4 - \frac{308}{729}a^5 \ldots$

Ganznamige Zweisatzhöhen.

13) $(5-4a)^4 = 625 - 2000a + 2400a^2 - 1280a^3 + 256a^4$

14) $(3-2a^2)^6 = 729 - 2916a^2 + 4860a^4 - 4320a^6 + 2160a^8 - 576a^{10} + 64a^{12}$

15) $(3a-7b)^7 = 2187a^7 - 35721a^6b + 250047a^5b^2 - 972405a^4b^3 + 2268945a^3b^4 - 3176523a^2b^5 + 2470629ab^6 - 823543b^7$

16) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^4 = a^2 + 6ab + b^2 + 4(a+b)\sqrt{ab}$

17) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^7 = (a^3 + 21a^2b + 35ab^2 + 7b^3)\sqrt{a} + (b^3 + 21b^2a + 35ba^2 + 7a^3)\sqrt{b}$

18) $(a+ib)^n = A + iB$

$$A = a^n - \overset{2}{n}a^{n-2}b^2 + \overset{4}{n}a^{n-4}b^4 \ldots$$

$$B = \overset{1}{n}a^{n-1}b - \overset{3}{n}a^{n-3}b^3 + \overset{5}{n}a^{n-5}b^5 \ldots$$

also $(a+ib)^n + (a-ib)^n = 2A$

$(a+ib)^n - (a-ib)^n = i.2B$

Ganznamige Höhen eines Vielsatzes.

Es sei $P = a + b + c + d + e + f$ und n eine setzhafte ganze Zahl, so ist die Bildung der Höhe P^n dasselbe was die Bestimmung der möglichen Würfe mit n Würfeln ist, deren Flächen mit $a\,b\,c\,d\,e\,f$ bezeichnet sind. Die Höhe enthält die Theile $A\,B\,C\,D\,E\,F\,\ldots$ deren jeder mit der entsprechenden Wechselzahl gebunden ist. Die Anzahl der Beisätze $a\,b\,c\,d\,e\,f$ sei m, so beruhen die Theile $A\,B\,C\,D\,E\,F\,\ldots$ auf der einfachen Gliederung von m Zeichen zur Stellung 1, 2, 3, 4, 5, 6 u. s. w. und auf der Zerlegung des Namens n. In den folgenden Beispielen sei $m = 6$ angenommen.

Prüfung.

19) $n = 2$ Zerlegung 2, 11 — $6 \ldots . 6$
$P^2 = A + 2B$ — $2 . 15 \ldots 30$
$A = 6$ Glieder wie $a^2 \ldots$ — $2^2 = 36$
$B = 15$ Glieder wie $ab \ldots$

20) $n = 3$ Zerlegung 3, 21, 111 — $6 \ldots . 6$
$P^3 = A + 3B + 6C$ — $3 . 30 \ldots 90$
$A = 6$ Glieder wie a^3 — $6 . 20 \ldots 120$
$B = 2 . 15$ Glieder wie a^2b, $ab^2 \ldots$ — $6^3 = 216$
$C = 20$ Glieder wie $abc \ldots$

21) $n = 4$ Zerl. 4, 31, 22, 211, 1111 — $6 \ldots . 6$
$P^4 = A + 4B + 6C + 12D + 24E$ — $4 . 30 \ldots 120$
$A = 6$ Glieder wie a^4 — $6 . 15 \ldots 90$
$B = 2 . 15$ Glieder wie a^3b, $ab^3 \ldots$ — $12 . 60 \ldots 720$
$C = 15$ Glieder wie $a^2b^2 \ldots$ — $24 . 15 \ldots 360$
$D = 3 . 20$ Glieder wie $a^2bc, ab^2c, abc^2 \ldots$ — $6^4 = 1296$
$E = 15$ Glieder wie $abcd \ldots$

22) $n = 5$ Zerl. 5, 41, 32, 311, 221, 2111, 11111 — $6 \ldots . 6$
$5 . 30 \ldots 150$
$P^5 = A + 5B + 10C + 20D + 30E + 60F + 120G$ — $10 . 30 \ldots 300$
$20 . 60 \ldots 1200$
$30 . 60 \ldots 1800$
$60 . 60 \ldots 3600$
$120 . 6 \ldots 720$
$6^5 = 7776$
$A = 6$ Glieder wie a^5
$B = 2 . 15$ Glieder wie $a^4b, ab^4 \ldots$
$C = 2 . 15$ Glieder wie $a^3b^2, a^2b^3 \ldots$
$D = 3 . 20$ Glieder wie $a^3bc, ab^3c, abc^3 \ldots$
$E = 3 . 20$ Glieder wie $a^2b^2c, a^2bc^2, ab^2c^2 \ldots$
$F = 4 . 15$ Glieder wie $a^2bcd, ab^2cd, abc^2d, abcd^2 \ldots$
$G = 6$ Glieder wie $abcde$

23) $n = 6$ Zerl. 6, 51, 42, 33, 411, 321, 222, 3111, 2211, 21111, 111111

$P^6 = A + 6B + 15C + 20D + 30E + 60F + 90G + 120H + 180I + 360K + 720L$

$A =$ 6 Glieder wie a^6

$B =$ 2.15 Glieder wie a^5b, ab^5 ...

$C =$ 2.15 Glieder wie a^4b^2, a^2b^4 ...

$D =$ 15 Glieder wie a^3b^3 ...

$E =$ 3.20 Glieder wie a^4bc, ab^4c, abc^4 ...

$F =$ 6.20 Glieder wie a^3b^2c, a^3bc^2, a^2b^3c, a^2bc^3, ab^3c^2, ab^2c^3 ...

$G =$ 20 Glieder wie $a^2b^2c^2$ ...

$H =$ 4.15 Glieder wie a^3bcd, ab^3cd, abc^3d, $abcd^3$ ...

$I =$ 6.15 Glieder wie a^2b^2cd, a^2bc^2d, a^2bcd^2, ab^2c^2d, ab^2cd^2, abc^2d^2 ...

$K =$ 5.6 Glieder wie a^2bcde, ab^2cde, abc^2de, $abcd^2e$, $abcde^2$ ...

$L = abcdef$

Prüfung.

6	6
6.30	180
15.30	450
20.15	300
30.60	1800
60.120	7200
90.20	1800
120.60	7200
180.90	16200
360.30	10800
720.1	720
$6^6 =$	46656

Höhe eines nach einer Grundzahl fortschreitenden Vielsatzes.

24) $P = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 \ldots$

$P^n = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + Gx^6 \ldots$

Der Name n sei eine beliebige Gröfse

und $\overset{1}{n} = \frac{n}{1}$, $\overset{2}{n} = \frac{n(n-1)}{1.2}$ die Stufenzahlen von n

$A = a^n$

$B = \overset{1}{n} a^{n-1} b$

$C = \overset{1}{n} a^{n-1} c + \overset{2}{n} a^{n-2} b^2$

$D = \overset{1}{n} a^{n-1} d + \overset{2}{n} . a^{n-2} . 2bc + \overset{3}{n} a^{n-3} b^3$

$E = \overset{1}{n} a^{n-1} e + \overset{2}{n} a^{n-2} (2bd + c^2) + \overset{3}{n} a^{n-3} . 3b^2c + \overset{4}{n} a^{n-4} . b^4$

$F = \overset{1}{n} a^{n-1} f + \overset{2}{n} a^{n-2} (2be + 2cd) + \overset{3}{n} a^{n-3} (3b^2d + 3bc^2) + \overset{4}{n} a^{n-4} . 4b^3c + \overset{5}{n} a^{n-5} . b^5$

$$G = \overset{1}{n}a^{n-1}g + \overset{2}{n}a^{n-2}(2bf + 2ce + d^2) + \overset{3}{n}a^{n-3}(3b^2e + 6bcd + c^3) + \overset{4}{n}a^{n-4}(4b^3d + 6b^2c^2) + \overset{5}{n}a^{n-5}.5b^4c + \overset{6}{n}a^{n-6}.b^6$$

u. s. w.

Als Beispiele hiezu bilde man folgende Vielsatzhöhen:

25) $P = 1 - x + x^2 - x^3 \ldots$ wo $P^1 = 1 - x$

26) $P = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \frac{7}{256}x^5 - \frac{21}{1024}x^6 + \frac{33}{2048}x^7 - \frac{429}{32768}x^8 \ldots$
wo $P^2 = 1 + x$

27) $P = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 - \frac{10}{243}x^4 + \frac{22}{729}x^5 - \frac{154}{6561}x^6 + \frac{374}{19683}x^7 - \frac{935}{59049}x^8 \ldots$
wo $P^3 = 1 + x$

28) $P = 1 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{81}x^3 - \frac{7}{243}x^4 + \frac{14}{729}x^5 - \frac{91}{6561}x^6 + \frac{208}{19683}x^7 - \frac{494}{59049}x^8 \ldots$
wo $P^3 = 1 + 2x + x^2$

29) $P = 1 + \frac{1}{5}x - \frac{2}{25}x^2 + \frac{6}{125}x^3 - \frac{21}{625}x^4 + \frac{399}{15625}x^5 \ldots$ wo $P^5 = 1 + x$

30) $P = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 - \frac{63}{256}x^5 \ldots$
wo $P^2 = 1 + x$

Vierte Abtheilung.

Die Mefsgleichung.

53.

Erklärungen.

In dieser Abtheilung ist nur von *ganzen* setzhaften oder gegenhaften Zahlen die Rede. Der Kürze wegen werden sie schlechthin *Zahlen* genannt.

Zwei Zahlen deren Unterschied ein Vielfaches einer dritten ist, heifsen *mefsgleich* (congruent) nach dieser Zahl, und dieselbe heifst ihr *Maafs* (Modulus). Die Aussage dafs zwei Zahlen nach einer dritten mefsgleich sind, heifst eine *Mefsgleichung* (Congruenz) und wird durch eine gewöhnliche Gleichung oder durch ein Dreiband bezeichnet. Das Maafs wird im Einschlufs beigesetzt. Z. B.

$$83 = 45 + 19.2 \text{ oder } 83 \equiv 45 \ (19)$$

$$78 = 5.16 - 22 \text{ oder } 78 \equiv \overline{22} \ (5)$$

Zwei Zahlen welche keinen Gemeintheiler aufser 1 haben, heifsen einander *fremd* (relative Primzahlen). Z. B. 15 und 28

Eine Zahl welche überhaupt keinen Theiler aufser 1 und sich selbst hat, heifst *stammhaft* oder eine *Stammzahl* (Primzahl). Z. B. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 u. s. f.

54.

Die Anlagen, Unterschiede, Gebinde und ganznamigen Höhen mefsgleicher Zahlen sind mefsgleich nach demselben Maafs.

Es seien nach dem Maafse c

$$a \equiv b \qquad a_{,} \equiv b_{,} \qquad a_{,,} \equiv b_{,,,}$$

so ist auch offenbar nach demselben Maafse c

$$a + a_{,} + a_{,,} \equiv b + b_{,} + b_{,,} \qquad a - a_{,} \equiv b - b_{,}$$

aus $a \equiv a$ folgt $aa_{,} \equiv ba_{,}$

aus $a_{,} \equiv b_{,}$ folgt $ba_{,} \equiv bb_{,}$

also ist $aa_{,} \equiv bb_{,}$

eben so $aa_{,}a_{,,} \equiv bb_{,}b_{,,}$ u. s. f.

Also sind als Sonderfälle dieser allgemeinen Mefsgleichung auch die Höhen mefsgleich.

$a^2 \equiv b^2$ $a^3 \equiv b^3$ $a^4 \equiv b^4$ $a^n \equiv b^n$

Z. B. Nach dem Maafse 19 ist

$83 \equiv 45$, also $6889 \equiv 2025$, $571787 \equiv 91125$

55.

Zahlen welche nach fremden Maafsen mefsgleich sind, sind auch nach deren Gebinde mefsgleich.

Es seien c, d fremde Zahlen, und

$a \equiv b \ (c)$ $a \equiv b \ (d)$

oder $a = b + cu$ $a = b + dv$

so ist $cu = dv$

Nun ist vermöge der Voraussetzung c nicht in d enthalten, und $\frac{dv}{c} = u$ eine ganze Zahl, also mufs $\frac{v}{c} = w$ eine ganze Zahl sein,

also ist $a - b = c.d.w$

oder $a \equiv b \ (cd)$

Z. B. $183 \equiv 113 \ (5)$ und $183 \equiv 113 \ (7)$

also $183 \equiv 113 \ (35)$

56.

Die Schnitte mefsgleicher Zahlen sind mefsgleich, wenn einer der Theiler dem Maafse fremd ist.

Es seien $a \equiv b \ (c)$ und $aa_{,} \equiv bb_{,} \ (c)$

so ist auch $ab_{,} \equiv aa_{,} \ (c)$ und $bb_{,} \equiv ba_{,} \ (c)$

also ist $\frac{ab_{,} - aa_{,}}{c}$ eine ganze Zahl. Wenn also ac einander fremd sind, so mufs $b_{,} - a_{,}$ durch c theilbar sein,

also ist $a_{,} \equiv b_{,} \ (c)$

Z. B. $4 \equiv 25 \ (7)$ und $40 \equiv 75 \ (7)$

also $10 \equiv 3 \ (7)$

57.

Jede ganznamige Höhe eines schlichten Bruchs ist ein schlichter Bruch.

Ein Bruch dessen Zähler und Nenner einander fremd sind, heiſst ein *schlichter* Bruch. Z. B. $\frac{15}{11}$ oder $\frac{11}{15}$. Man entwickele zu demselben die auf einander folgenden Näherungsbrüche, welche ebenfalls schlichte Brüche sind, und *Glieder der Bruchkette* heiſsen.

Z. B.

11	15	1
8	11	2
3	4	1
3	3	3
	1	

11	15	1
8	11	2
3	4	1
2	3	2
1	1	1

1	2	1	3	
$\frac{1}{0}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{15}{11}$

1	2	1	2	1	
$\frac{1}{0}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{11}{8}$	$\frac{15}{11}$

Eine solche Bruchkette hat die Eigenschaft daſs der Unterschied der Gebinde des Zählers und Nenners zweier auf einander folgenden Glieder gleich 1 ist, und daſs das letzte Glied dem Urbruche gleich ist.

Der Urbruch sei $\frac{d}{c}$, der vorhergehende $\frac{x}{y}$, so hat man die Meſsgleichung

$$c \,.\, x \equiv \pm 1 \ (d)$$

Hieraus folgen nach (54.) für das Maaſs d die Meſsgleichungen:

$$c^2x^2 \equiv 1 \qquad c^3x^3 \equiv \pm 1$$
$$c^4x^4 \equiv 1 \qquad c^5x^5 \equiv \pm 1 \qquad \text{u. s. f.}$$

Wenn also n eine beliebige ganze Zahl ist, so kann niemals $\frac{c^n x^n}{d}$ eine ganze Zahl sein. Also ist auch $\frac{c^n x^n}{d x^n}$ d. h. $\frac{c^n}{d}$ keine ganze Zahl. Also ist auch $\frac{c^n}{d \,.\, d^{n-1}}$ d. h. $\left(\frac{c}{d}\right)^n$ keine ganze Zahl. Also ist $\left(\frac{c}{d}\right)^n$ ein schlichter Bruch.

In obigem Beispiel ist nach dem Maafse 11

$$15 \cdot 3 \equiv 1 \qquad 15 \cdot 8 \equiv \overline{1}$$
$$15^n \cdot 3^n \equiv 1 \qquad 15^n \cdot 8^n \equiv \pm 1$$

Eben so ist nach dem Maafse 15

$$11 \cdot 11 \equiv 1 \qquad 11 \cdot 4 \equiv \overline{1}$$
$$11^n \cdot 11^n \equiv 1 \qquad 11^n \cdot 4^n \equiv \pm 1$$

58.

Wenn sich eine ganze Zahl nicht in der Reihe der ganznamigen Höhen der schlichten Zahlen befindet, so ist ihre gleichnamige Wurzel unmaafshaft.

Es seien a und n ganze Zahlen, und es sei a nicht in der Reihe der Höhen der schlichten Zahlen 1, 2, 3, 4 ... enthalten, d. h. kein Glied der Reihe

$$1^n \quad 2^n \quad 3^n \quad 4^n \quad \ldots .$$

Wenn nun die Gleichung

$$x^n = a$$

aufzulösen ist, so ist x keine ganze Zahl.

Wäre aber x einem unächten schlichten Bruche $\frac{d}{c}$ gleich, so müfste nach dem Satze (57.) auch x^n ein schlichter Bruch sein, könnte also der ganzen Zahl a nicht gleich sein.

Also ist die $\sqrt[n]{a}$ weder eine ganze Zahl noch ein schlichter Bruch, und heifst daher (18.) ***unmaafshaft.***

Z. B. 375 ist nicht in der Reihe der Dritthöhen

$$1^3 \quad 2^3 \quad 3^3 \quad 4^3 \quad 5^3 \quad 6^3 \quad 7^3 \quad 8^3 \ldots$$

also ist die Drittwurzel aus 375 eine unmaafshafte Zahl.

59.

Bei der einstufigen Mefsgleichung werden die Zuschüsse durch einen Zahlenring dargestellt, dessen Glieder eine gleichgemessene Reihe bilden deren beide Hälften einander ergänzen oder in umgekehrter Folge gleich sind.

Es seien c, d, zwei fremde Zahlen. Man binde c mit den schlichten Zahlen 1 2 3 u. s. f. welche durch x bezeichnet werden und ***Mefswurzeln*** heifsen. Das Gebinde cx theile man durch d. Der ***Schnitt*** sei y, der ***Zuschufs*** r.

Z. B. $c = 13$ $d = 10$

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
y	1	2	3	5	6	7	9	10	11	13	14
r	3	6	9	2	5	8	1	4	7	0	1
r	3	6	9	2	5	$\overline{2}$	$\overline{9}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$	0	
r	3	$\overline{4}$	$\overline{1}$	2	5	$\overline{2}$	1	4	$\overline{3}$	0	

Es seien x x' zwei Mefswurzeln und r r' die entsprechenden Zuschüsse, so ist

$$cx \equiv r \ (d) \qquad \text{und} \qquad cx' \equiv r' \ (d)$$

Wenn nun x und x' beide kleiner als d sind, so können die Zuschüsse r r' einander nicht gleich sein. Denn dann wäre $cx \equiv cx' \ (d)$ also $cx - cx'$ oder $c(x - x')$ theilbar durch d, was unmöglich ist, weil $x - x'$ kleiner als d, und c, d, einander fremd sind. Also kommen in dem Ringe von $x = 1$ bis mit $x = d$ für r alle Zahlen von 1 bis $d - 1$ vor. Diese Zahlen schreiten in gleichgemessener Reihe fort, wobei d so oft als es angeht abgezogen ist.

Es sei $x + x'$ theilbar durch d, so ist auch $cx + cx'$ theilbar durch d, also auch $r + r'$ theilbar durch d. Aber r u. r' sind beide kleiner als d. Also ist $r + r' = d$

Also besteht der Ring der Zuschüsse r aus zwei Hälften deren Glieder in umgekehrter Folge genommen einander zum Maafs d ergänzen.

Nimmt man aber von den Zuschüssen welche gröfser als $\frac{1}{2}d$ sind die gegenhaften Ergänzungen zu d, so sind beide Hälften einander gleich und enthalten nur Zahlen welche gleich oder kleiner als $\frac{1}{2}d$ sind.

Dieser Zahlenring stellt dar die unbestimmte einstufige Gleichung $cx - dy = r$ oder die einstufige Mefsgleichung

$$cx \equiv r \ (d) \qquad \text{und} \qquad dy \equiv \overline{r} \ (c)$$

60.

Die einstufige Mefsgleichung wird durch die beiden letzten Glieder der Bruchkette aufgelöset.

Die Mefsgleichung sei

$$cx \equiv r \ (d)$$

wo die Maafse c, d, und der Zuschufs r gegeben sind. Wenn $r > d$, so theilt man r durch d, und setzt statt r den bei dieser Theilung sich ergebenden Zuschufs.

Man kann nun nach dem vorigen Satze (59.) verfahren, und für x die schlichten Zahlen 1, 2, 3, 4 u. s. w. setzen. Der für r sich ergebende Ring mufs auch den gegebenen Zuschufs enthalten.

Z. B. $7x + 5y = 94$

oder $7x \equiv 94 \quad (5)$

oder $7x \equiv 4 \quad (5)$

x	1	2	3	4
y	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
r	2	4	1	3

Also ist $x = 2$, $7x = 14$, $\frac{94 - 14}{5} = 16$

also $y = 16$

also $7 . 2 + 5 . 16 = 94$

Man hat also allgemein

$x \equiv 2 \quad (5)$ und $y \equiv 16 \quad (7)$

oder $x = 2 + 5u$ und $y = 16 - 7u$

Wenn aber das Maafs d beträchtlich ist so ist dieses Verfahren zu weitläufig. Alsdann entwickelt man zu dem schlichten Bruch $\frac{c}{d}$ die Bruchkette. Das letzte Glied ist $\frac{c}{d}$, das vorhergehende sei $\frac{a}{b}$, so ist

$$cb - da = \pm 1$$

also $cb \equiv \pm 1 \quad (d)$

$br = x$, also $cx \equiv \pm r \quad (d)$

Beispiel. $19858x \equiv \overline{8}95 \quad (6321)$

6321	19858	3
6265	18963	7
56	895	15
55	840	1
1	55	55

3	7	15	1	55	
1	3	22	333	355	19858
0	1	7	106	113	6321

$$19858 . 113 \equiv \overline{1} \quad (6321)$$
$$x = 113 . 895 = 101135$$

oder mit 6321 getheilt $x = \overline{1}$

$$19858 . \overline{1} \equiv \overline{895} \quad (6321)$$
$$19858 . 1 \equiv 895 \quad (6321)$$

Wenn also sein soll

$$19858x - 6321y = 895$$

so ist $x \equiv 1 \ (6321)$ oder $x = 1 + 6321 . u$
$y \equiv 3 \ (19858)$ oder $y = 3 + 19858 . u$

Wenn die beiden letzten Glieder der Kette eine Mefsgleichung geben deren Zuschufs das Gegenhafte des verlangten ist, so ist es nur erforderlich den letzten Schnitt um 1 zu vermindern, und als letzten Schnitt 1 hinzuzufügen.

Z. B. Es soll sein

$$19858x \equiv 895 \quad (6321)$$

3	7	15	1	54	1	
1	3	22	333	355	19503	19858
0	1	7	106	113	6208	6321

$$19858 . 6208 \equiv 1 \quad (6321)$$
$$x = 895 . 6208 = 5556160$$

oder mit 6321 getheilt $x = 1$

also $19858 . 1 \equiv 895 \quad (6321)$

Beispiele.

$cx \equiv r \ (d)$ $\qquad \frac{r - cx}{d} = y$

	c	d	r	x	y
1)	3	2	25	1	11
2)	3	2	32	0	16
3)	5	3	23	1	6
4)	5	3	100	17	5
5)	5	4	43	3	7
6)	7	4	3	1	$\overline{1}$
7)	11	7	100	4	8
8)	11	8	79	5	3

	c	d	r	x	y
9)	13	4	270	2	61
10)	29	17	7	2	$\overline{3}$
11)	19	13	1000	2	74
12)	25	16	1	$\overline{7}$	11
13)	36	25	1	$\overline{9}$	13
14)	45	14	1	$\overline{9}$	29
15)	41	29	1	$\overline{12}$	17
16)	31	22	1	5	$\overline{7}$
17)	71	47	1	2	$\overline{3}$
18)	59	43	1	$\overline{8}$	11
19)	171	97	1	$\overline{38}$	67
20)	74	23	1	$\overline{9}$	29
21)	74	23	17	8	$\overline{25}$
22)	389	271	1	$\overline{62}$	89
23)	793	541	1	$\overline{234}$	343
24)	144	89	1	34	$\overline{55}$
25)	17	9	320	4	28
26)	31	20	7	$\overline{3}$	5
27)	24	13	2373	3	177
28)	55	48	2000	$\overline{16}$	60
29)	31	21	1770	9	71
30)	1533	1102	1421	$\overline{145}$	203
31)	3875	2973	122362	17	19

Die in den obigen Beispielen gegebenen Werthe von x y seien x_1, y_1, so sind die allgemeinen Mefswurzeln

$$x = x_1 + du \qquad y = y_1 - cu$$

wo u eine beliebige setzhafte oder gegenhafte ganze Zahl bezeichnet.

61.

Die dreistellige Mefsgleichung wird durch die zweistellige aufgelöset.

Die aufzulösende Mefsgleichung sei

$$ax + by + cz = r$$

Es sei d der gröfste Gemeintheiler von a b. Man löse die Mefsgleichung

$$cz \equiv r \quad (d)$$

Es sei $z_,$ eine Wurzel dieser Mefsgleichung so dafs $\frac{r - cz_,}{d} = r_,$ eine ganze Zahl sei. Es seien $a = a_,d$ $b = b_,d$ so ist

$$a_,x + b_,y = r_,$$

Man löse die Mefsgleichung

$$a_,x \equiv r_, \quad (b_,)$$

Es sei $x_,$ eine Wurzel dieser Mefsgleichung, so dafs $\frac{r_, - a_,x_,}{b_,} = y_,$ eine ganze Zahl sei.

Aus den Sonderwurzeln $x_,$ $y_,$ $z_,$ erhält man nun die allgemeinen Mefswurzeln

$$\begin{aligned} x &= x_, + bw - cv \\ y &= y_, + cu - aw \\ z &= z_, + av - bu \end{aligned}$$

wo u v w beliebige setzhafte oder gegenhafte ganze Zahlen bezeichnen.

Beispiel. $6x + 10y + 15z = 347$

hier sei $15z \equiv 347 \quad (2)$

eine Sonderwurzel ist $z_, = 1$

also $6x + 10y = 332$

oder $3x + 5y = 166$

hier sei $5y \equiv 166 \quad (3)$

eine Sonderwurzel ist $y_, = 2$

ihr entspricht $x_, = 52$

also

$$\begin{aligned} x &= 52 + 10w - 15v \\ y &= 2 + 15u - 6w \\ z &= 1 + 6v - 10u \end{aligned}$$

Setzt man z. B. $u = 3 \quad v = 7 \quad w = 6$

so ist $x = 7 \quad y = 11 \quad z = 13$ u. s. w.

62.

Zwei dreistellige Mefsgleichungen werden durch Ausscheidung auf eine zweistellige Mefsgleichung gebracht.

Die gegebenen Mefsgleichungen seien

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= r \\ a_,x + b_,y + c_,z &= r_, \end{aligned}$$

Es seien $ac_{,} - a_{,}c = a_{,,} \quad bc_{,} - b_{,}c = b_{,,}$

$$rc_{,} - r_{,}c = r_{,,}$$

so ist $$a_{,,}x + b_{,,}y = r_{,,}$$

Man löse also $a_{,,}x \equiv r_{,,} \ (b_{,,})$

Zwei entsprechende Sonderwurzeln seien $x_{,,}$ und $y_{,,}$ so ist die dritte

$$z_{,,} = \frac{r - ax_{,,} - by_{,,}}{c} = \frac{r_{,} - a_{,}x_{,,} - b_{,}y_{,,}}{c_{,}}$$

Die allgemeinen Mefswurzeln sind nun

$$x = x_{,,} + (bc_{,} - b_{,}c)\,u$$
$$y = y_{,,} + (ca_{,} - c_{,}a)\,u$$
$$z = z_{,,} + (ab_{,} - a_{,}b)\,u$$

Beispiel. $3x + 17y + 12z = \overline{47}$

$$74x + 93y + 41z = \overline{68}$$

hieraus $$123x + 697y + 492z = \overline{1927}$$

$$888x + 1116y + 492z = \overline{816}$$

also $$765x + 419y = 1111$$

also $$765x \equiv 1111 \ (419)$$

Bruchkette.

1	1	4	1	2	1	5	3	
1	1	2	9	11	31	42	241	765
0	1	1	5	6	17	23	132	419

$$765 \,.\, 132 \equiv 1 \ (419)$$

$$x_{,,} = 132 \,.\, 1111 = 146652$$

oder mit 419 getheilt $x_{,,} = 2$

$$y_{,,} = \frac{1111 - 2 \,.\, 765}{419} = \overline{1}$$

$$z_{,,} = \frac{\overline{47} - 3 \,.\, 2 - 17 \,.\, \overline{1}}{12} = \frac{\overline{68} - 74 \,.\, 2 - 93 \,.\, \overline{1}}{41} = \overline{3}$$

also $$x = 2 - 419u$$
$$y = \overline{1} + 765u$$
$$z = \overline{3} - 979u$$

In den folgenden Beispielen ist $a_{,} = b_{,} = c_{,} = 1$

a	b	c	r	$r_,$	x	y	z
9	4	3	107	24	3	17	4
4	7	8	284	52	27	24	1
12	11	10	338	30	9	20	1
16	12	9	330	30	3	13	14
1	3	4	38	15	7	1	7
1	2	3	150	100	74	2	24
8	10	13	288	24	3	3	18
2	5	20	560	100	5	90	5
3	2	1	50	30	9	2	19
21	8	3	600	100	5	42	53
14	11	9	360	30	16	5	9

Hier folgen noch einige:

12) $6x + 7y + 4z = 122 \quad 11x + 8y - 6z = 145$
$x = 9 - 74u \quad y = 8 + 80u \quad z = 3 - 29u$

13) $3x + 5y + 7z = 560 \quad 9x + 25y + 49z = 2920$
$x = 50 - 35u \quad y = 40 + 42u \quad z = 30 - 15u$

14) $x + y = 100 \quad x + 3v = 2 \quad y + 4z = 3$
$v = \overline{1} - 4u \quad x = 5 + 12u$
$y = 95 - 12u \quad z = \overline{23} + 3u$

63.

Mehrere Mefsgleichungen welche eine Gemeinwurzel haben, aufzulösen.

Die aufzulösenden Mefsgleichungen seien

$$cx \equiv r \quad (d)$$
$$c_,x \equiv r_, \quad (d_,)$$
$$c_{,,}x \equiv r_{,,} \quad (d_{,,}) \quad \text{u. s. w.}$$

Die Auflösungen derselben geben nach (60.) die Mefsgleichungen

$$x \equiv k \quad (d)$$
$$x \equiv k_, \quad (d_,)$$
$$x \equiv k_{,,} \quad (d_{,,}) \quad \text{u. s. w.}$$

Diese Mefsgleichungen sind nur dann vereinbar wenn je zwei Sonderwurzeln, wie k und $k_,$, nach dem Gemeintheiler der Maafse d und $d_,$ mefsgleich sind.

Z. B. Wenn $x \equiv k \ (d)$ und $x \equiv k_, \ (d_,)$
so ist $x = k + du$ und $x = k_, + d_,u_,$

also $k_{,} - k = du - d_{,}u_{,} = ev$

also $k \equiv k_{,} \quad (e)$

wo e der Gemeintheiler der Maafse d und $d_{,}$ ist.

Diese Bedingung mufs von je zwei Sonderwurzeln erfüllt sein.

Z. B. Es soll sein

$11x \equiv \overline{1} \quad (4)$ $\qquad$ $17x \equiv 1 \quad (6)$

$22x \equiv 2 \quad (9)$ $\qquad$ $13x \equiv \overline{4} \quad (15)$

so ist $x \equiv 1 \quad (4)$ $\qquad$ $x \equiv 5 \quad (6)$

$x \equiv 5 \quad (9)$ $\qquad$ $x \equiv 2 \quad (15)$

hier ist $1 \equiv 5 \quad (2)$ $\qquad$ $5 \equiv 5 \quad (3)$

$5 \equiv 2 \quad (3)$

also sind die aufzulösenden Mefsgleichungen vereinbar.

Wenn nun diese Bedingung befriedigt ist so sind $\frac{k_{,} - k}{e}$, $\frac{d}{e}$ und $\frac{d_{,}}{e}$ ganze Zahlen, und man hat die Mefsgleichung

$$\frac{d}{e} . u \equiv \frac{k_{,} - k}{e} \quad \left(\frac{d_{,}}{e}\right)$$

aufzulösen. Die nach (60.) gefundene Sonderwurzel sei l

so ist $u \equiv l \quad \left(\frac{d_{,}}{e}\right)$

also $u = l + \frac{d_{,}}{e} u_{,}$

also $x = k + dl + \frac{dd_{,}}{e} . u_{,}$

Hier ist $k + dl = m$ eine Sonderwurzel welche die beiden ersten Mefsgleichungen

$x \equiv k \quad (d)$ $\qquad$ und $\qquad$ $x \equiv k_{,} \quad (d_{,})$

befriedigt, $\frac{dd_{,}}{e} = g$ ist die kleinste durch d und $d_{,}$ theilbare Zahl. Also für die beiden ersten Mefsgleichungen

$$x \equiv m \quad (g)$$

Mit dieser vereinigt man die dritte, mit der Vereinigung der drei ersten die vierte u. s. f.

Also lassen sich die Mefsgleichungen

$$cx \equiv r \quad (d)$$
$$c_{,}x \equiv r_{,} \quad (d_{,})$$
$$c_{,,}x \equiv r_{,,} \quad (d_{,,}) \quad \text{u. s. f.}$$

durch die Mefsgleichung

$$x \equiv n \quad (p)$$

vereinigen, wo p die kleinste durch d $d_{,}$ $d_{,,}$ theilbare Zahl ist.

In dem obigen Beispiele sind:

gegebene Mefsgleichungen	Sonderwurzeln
$11x \equiv 1 \quad (4)$	$x \equiv 1 \quad (4)$
$17x \equiv 1 \quad (6)$	$x \equiv 5 \quad (6)$
$22x \equiv 2 \quad (9)$	$x \equiv 5 \quad (9)$
$13x \equiv \overline{4} \quad (15)$	$x \equiv 2 \quad (15)$

Aus der Gleichheit der zweiten und dritten Mefswurzel folgt ihre Vereinigung

$$x \equiv 5 \quad (18) \qquad k_{,} = 5 \quad d_{,} = 18$$

Hiemit die erste $x \equiv 1 \quad (4) \qquad k = 1 \quad d = 4$

$$e = 2$$

giebt $2u \equiv 2 \quad (9)$

also $u \equiv 1 \quad (9) \qquad l = 1 \quad m = 5$

also aus den drei ersten

$$x \equiv 5 \quad (36) \qquad k_{,} = 5 \quad d_{,} = 36$$

Hiemit die vierte $x \equiv 2 \quad (15) \qquad k = 2 \quad d = 15$

$$e = 3$$

giebt $5u \equiv 1 \quad (12)$

also $u \equiv 5 \quad (12) \qquad l = 5 \quad m = 77$

also $x \equiv 77 \quad (180)$

Also ist 77 eine gemeinsame Mefswurzel der vier gegebenen Mefsgleichungen und allgemein

$$x = 77 + 180 \,.\, u$$

Beispiele.

	c	d	r	x
1)	1	11	0	
	1	17	5	22
2)	1	5	0	
	1	7	3	10

	c	d	b	x
3)	1	6	2	68
	1	13	3	
4)	1	39	16	1147
	1	56	27	
5)	1	11	5	5978
	1	19	12	
	1	29	4	
6)	1	11	3	4128
	1	19	5	
	1	29	10	
7)	3	7	10	211
	11	17	$\overline{8}$	
	16	5	1	
8)	1	2	1	119
	1	3	2	
	1	4	3	
	1	5	4	
	1	6	5	
	1	7	0	
9)	1	2	1	869
	1	3	2	
	1	5	4	
	1	6	5	
	1	9	5	
	1	10	9	
	1	11	0	
10)	1	15	$4-3=1$	1846 *
	1	19	$4-1=3$	
	1	28	$7-9=\overline{2}$	
11)	1	15	4	6559 **
	1	19	4	
	1	28	7	

*10) Wenn an die christliche Jahrzahl die Zahlen 3, 1, 9, gelegt und diese Anlagen durch 15, 19, 28, getheilt werden so heifsen die Zuschüsse der Schatzungskreis, Mondkreis, Sonnenkreis. In welchem Jahre sind diese Zuschüsse 4, 4, 7 ?

**11) Wenn die Jahrzahl des julianischen Zeitrings durch 15, 19, 28, getheilt wird so heifsen die Zuschüsse der Schatzungskreis, Mondkreis, Sonnenkreis. In welchem julianischen Jahre sind diese Zuschüsse 4, 4, 7 ?

Fünfte Abtheilung.

Anwendung der Höhennamen auf Handelsrechnungen.

61.

Anwendung der Höhennamen auf den Kettensatz.

Der Kettensatz ist eine Bindung einfacher Gleichungen. In jeder Gleichung sind zwei Dinge oder Benennungen durch Zahlen welche ihr Verhältnifs angeben verglichen. Diese Benennungen seien z. B. $x\,u\,v\,w\,z\,y$ so sind die Gleichungen

$$\begin{aligned} ax &= mu \\ bu &= nv \\ cv &= ow \\ dw &= pz \\ ez &= qy \end{aligned}$$

also $abcde \,.\, x = mnopq \,.\, y$

Man setze $A = abcde \qquad B = mnopq$

so ist $Ax = By$

Hiedurch ergiebt sich das Verhältnifs der Benennungen x, y.

Die Vergleichung der Maafse, Gewichte, des Geldes, und überhaupt die meisten Handelsrechnungen beruhen auf dem Kettensatz.

Beispiele.

1) In Spanien kostet die Fanega Weizen 70 Realen de Vellon wovon 20 einen Piaster machen. Aus 2 kastil. Mark von der $86\frac{2}{3}$ Probe werden 17 Piaster gemünzt. Diese Mark wiegt 3550,5 engl. Troygran. Die Fanega hält 3447,2 engl. Cubikzoll. Wie viel Kop. S. kostet das Tschetwert von 12809,69 engl. Cbz.? da das engl. Troypfund von 5760 Gran 8399,748 russ. Doli wiegt. In einem Rubel Silber sind 405 Doli fein Silber enthalten.

Höhennamen.			Höhennamen.
	x	12809,69	4,10754
3,53747	3447,2	70	1,84510
1,30103	20	1	0,
1,23045	17	2	0,30103
1,98227	96	$86\frac{2}{3}$	1,93785
0,	1	3550,5	3,55029
3,76042	5760	8399,748	3,92427
2,60746	405	100	2,
14,41910			17,66608
			14,41910
		1 Tschetwert kostet Kop. S. 1766	3,24698

2) Wie viel kostet der Solotnik Silber von der 84 Probe nach dem Londoner Preise von $60\frac{1}{4}$ Pence für die Troyunze Standardsilber von $\frac{37}{40}$ fein Gehalt, wenn der Wechselcours $39\frac{1}{8}$ Pence für 1 R. S. ist?

Höhennamen.			Höhennamen.
	x	84	1,92428
3,92427	8399,748	12	1,07918
1,56820	37	40	1,60206
0,	1	$60\frac{1}{4}$	1,77996
1,59246	$39\frac{1}{8}$	100	2,
7,08493			8,38548
			7,08493
		1 Sol. Silber 84 Pr. kostet Kop. S. 19,98	1,30055

3) Vergleichung der Werst von 3500 russischen oder englischen Fufs mit der geographischen Meile wovon 15 auf den 360sten Theil des Erdmeridians oder auf 57008,715 Toisen gehen. Die Toise hält 76,736639 engl. Zoll.

Höhennamen.			Höhennamen.
	1	3500	3,54407
0,	1	12	1,07918
1,88500	76,736639	1	0,
4,75594	57008,715	15	1,17609
6,64094			5,79934
			6,64094
		eine Werst gleich Meile 0,14401	9,15840
		eine Meile gleich Werst 6,944 ..	0,84160

4) Vergleichung der Defsätine von 2400 Quadratsaschen mit dem preufsischen Morgen von 180 Quadrat-

ruthen. Der preufsische Fufs hat 139,13 par. Linien.

Höhennamen.			Höhennamen.
	1	2400	3,38021
	1	49	1,69020
	1	144	2,15836
1,88500	76,736639	1	0,
1,88500	76,736639	1	0,
0,	1	864	2,93651
0,	1	864	2,93651
2,14342	139,13	1	0,
2,14342	139,13	1	0,
2,15836	144	1	0,
2,25527	180	1	0,
12,47047			13,10179
			12,47047
eine Defsätine gleich Morgen 4,2788			0,63132
ein Morgen gleich Defsätine 0,23371			9,36868

5) Vergleichung des preufsischen Quarts wovon 27 auf einen Cubikfufs gehen mit dem russischen Stoof. Nach der Ausmittelung der St. petersburger Commission (1835) wiegt ein russischer oder engl. Cubikzoll destillirtes Wasser bei 13¾ R. im leeren Raum 368,361 Doli von denen 9216 auf das russ. Münzpfund vom J. 1747 gehen. Solcher Pfunde soll nach dem kais. Befehl v. 11. Oct. 1835 das Stoof 3, der Wedro 30, der Garnez 8, der Tschetwerik 64, das Tschetwert 512 halten.

Höhennamen.			Höhennamen.
	1	3	0,47712
0,	1	9216	3,96454
2,56627	368,361	1	0,
1,88500	76,7366	864	2,93651
1,88500	76,7366	864	2,93651
1,88500	76,7366	864	2,93651
2,14342	139,13	1	0,
2,14342	139,13	1	0,
2,14342	139,13	1	0,
0,	1	27	1,43136
14,65153			14,68255
			14,65153
ein Stoof gleich Quart 1,07405			0,03102
ein Quart gleich Stoof 0,93106			9,96898

6) Vergleichung des preufsischen Scheffels von 3072 preufsischen Cubikzoll mit dem russischen Tschetwert.

Höhennamen.			Höhennamen.
0,	1	512	2,70927
0,	1	9216	3,96454
2,56627	368,361	1	0,
1,88500	76,7366	864	2,93651
1,88500	76,7366	864	2,93651
1,88500	76,7366	864	2,93651
2,14342	139,13	1	0,
2,14342	139,13	1	0,
2,14342	139,13	1	0,
0,	1	1728	3,23754
3,48742	3072	1	0,
18,13895			18,72088
			18,13895
ein Tschetwert gleich Scheffel		3,8188	0,58193
ein Scheffel gleich Tchetwert		0,26186	9,41807

65.

Anwendung der Höhennamen auf die Zinsrechnung.

Ein Geldvermögen welches jährlich oder halbjährlich ein Einkommen bringt heifst ein ***Grundstock*** (Capital). Der jährliche oder halbjährliche Zeitraum heifst die ***Frist***. Die Zahlungszeit heifst der ***Verfall*** (Termin). Die Anzahl von Geldeinheiten welche an jedem Verfall für den Grundstock bezogen werden heifst der ***Zins***. Der von hundert Geldeinheiten bezogene Zins heifst der ***Hundertzins*** (Procent). Die Einheit vermehrt um das Verhältnifs des Hundertzinses zu Hundert giebt eine Zahl welche der ***Zinsfufs*** heifst.

Wenn der nach jeder Frist fällige Zins unvermindert zu dem Grundstock gelegt wird, so wächst der Grundstock zu einem Betrage an welcher der ***Anwuchs*** heifst. Der ursprüngliche Grundstock heifst dann in Bezug auf seinen Anwuchs der ***Baarwerth***.

Der Baarwerth sei b, der Zins desselben in einer Frist sei x, der Hundertzins sei p, so gilt die Verhältnifsgleichung

$$100 : p = b : x$$

also $$100 : 100 + p = b : b + x$$

Es sei der Zinsfufs $\frac{100+p}{100} = c$

so ist $1 : c = b : b + x$

Hier ist $b + x$ der Anwuchs nach Ablauf der ersten Frist oder bei dem ersten Verfall. Also ist der Anwuchs

bei dem 1sten Verfall gleich bc
bei dem 2ten Verfall gleich bc^2
bei dem 3ten Verfall gleich bc^3
u. s. f.
bei dem $n$ten Verfall gleich bc^n

Es sei also der Anwuchs nach n Fristen gleich a, so ist die Grundgleichung der Zinsrechnung

$$a = bc^n$$

Wenn also umgekehrt der Anwuchs a gegeben ist so ist der Baarwerth $b = \frac{a}{c^n}$

Wenn die üblichen Höhennamen genommen werden so ist $La - Lb = nLc$

hieraus $Lc = \frac{La - Lb}{n}$ $\quad n = \frac{La - Lb}{Lc}$

Bei einer beträchtlichen Anzahl von Fristen mufs zur Erzielung genauerer Werthe der Höhenname des Zinsfufses auf mehrere Stellen genommen werden.

L	1,01	= 0,004321373782642
	1,015	0,006466042249231
	1,02	0,008600171761917
	1,025	0,010723865391773
	1,03	0,012837224705172
	1,035	0,014940349792936
	1,04	0,017033339298780
	1,045	0,019116290447072
	1,05	0,021189299069938
	1,055	0,023252459633711
	1,06	0,025305865264770

Beispiele.

1) $b = 13578$
$c = 1{,}03$
$n = 24$
$c \ldots 0{,}01284$
$c^n \ldots 0{,}30809$
$b \ldots 4{,}13284$
$a \ldots 4{,}44093$
$a = 27601$

2) $a = 15000$
$c = 1{,}05$
$n = 12$
$c \ldots 0{,}02119$
$c^n \ldots 0{,}25427$
$a \ldots 4{,}17609$
$b \ldots 3{,}92182$
$b = 8352{,}6$

3) $b = 1 \qquad a = 2 \qquad c = 1{,}02$
$La - Lb \ldots 0{,}30103$
$Lc \ldots\ldots 0{,}00860$
$n = \frac{30103}{860} = 35$

66.

Anwendung der Höhennamen auf die Steuerrechnung.

Am Ende jeder Frist wird eine *Steuer* (Rente) r ausgezahlt. Dieses wird n Fristen hindurch fortgesetzt. Demnach ist der Anwuchs nach n Fristen

von der ersten Steuer gleich rc^{n-1}
von der zweiten Steuer gleich rc^{n-2}
u. s. f.
von der letzten Steuer gleich r.

Diese Anwüchse bilden eine gleichgebundene (geometrische) Reihe und ihre Anlage ist also (38.) nach Ablauf von n Fristen

$$\text{gleich } \frac{r}{c-1}(c^n - 1)$$

Man setze $H = \frac{r}{c-1} = \frac{100r}{p}$

so ist H derjenige Grundstock dessen Zins der Steuer r gleich ist. Die Anlage der n Steueranwüchse ist also nach Ablauf von n Fristen gleich

$$H(c^n - 1) = H\left(1 - \frac{1}{c^n}\right)c^n = Hkc^n = Bc^n$$

wo $\quad k = 1 - \frac{1}{c^n} \quad$ und $\quad B = Hk$

$$g = \frac{p}{k} \quad \text{und} \quad r = \frac{Bg}{100}$$

Dieser Betrag $B = Hk$ heifst der *baare Werth der Steuer* r und ist auch gleich der Anlage der Baarwerthe der einzelnen Steuersätze, nämlich

$$B = \frac{r}{c} + \frac{r}{c^2} + \frac{r}{c^3} \ldots + \frac{r}{c^n}$$

Im Anfange der Fristen sei eine Schuld S gezahlt worden. Der Anwuchs derselben ist nach Ablauf von n Fristen gleich $S \cdot c^n$.

Wenn also der Gläubiger die Schuld S und die Steuer r zahlt so ist der Betrag nach Ablauf von n Fristen gleich

$$A = (S + B)\, c^n$$

Wenn der Gläubiger die Schuld S und dagegen der Schuldner als Ersatz die Steuer r zahlt so ist der Unterschied nach Ablauf von n Fristen gleich

$$U = (S - B)\, c^n$$

Wenn durch die Steuer die Schuld getilgt werden soll so mufs $S = B$ sein. Hieraus folgt für n die Gleichung:

$$S = Hk = H\left(1 - \frac{1}{c^n}\right)$$

Man setze den Schuldzins gleich f, so ist $f = \frac{Sp}{100}$.

Wenn also durch die Steuer die Schuld getilgt werden soll, so ist n so zu bestimmen dafs

$$(H - S)\, c^n = H$$

oder $$(r - f)\, c^n = r$$

oder $$d\, c^n = r$$

Der Ueberschufs der Steuer über den Schuldzins heifst die *Ablösung* (Dotation). ***Die Schuld wird also in soviel Fristen getilgt als erforderlich sind damit die Ablösung zur Steuer anwachse.***

Beispiele.

1.

$c = 1{,}02 \quad f = 2$

$r = 2\frac{1}{4} \quad d = \frac{1}{4}$

$\frac{r}{d}$ . . . 0,95424

c . . . 0,00860

$n = \frac{2}{8}\frac{5}{6}\frac{4}{0}\frac{2}{0}\frac{4}{0} = 111$

2.

$c = 1{,}05 \quad n = 20$

$r = 800 \quad H = 16000$

c . . . 0,02119

c^n . . . 0,42378

$\frac{1}{c^n}$ . . . 9,57622 = 0,37689

k . . . 9,79457 = 0,62311

H . . . 4,20412

B . . . 3,99869 = 9969,8

3.

$c = 1{,}05 \quad n = 12$

$c \ldots 0{,}02119$

$c^n \ldots 0{,}25427$

$\frac{1}{c^n} \ldots 9{,}74573 = 0{,}55684$

$k \ldots 9{,}64656 = 0{,}44316$

$p \ldots 0{,}69897$

$g \ldots 1{,}05241 = 11\frac{1}{4}\%$

4.

$c = 1{,}05 \quad n = 25 \quad r = 7$

$c \ldots 0{,}02119$

$c^n \ldots 0{,}52973$

$\frac{1}{c^n} \ldots 9{,}47027 = 0{,}29531$

$k \ldots 9{,}84799 = 0{,}70469$

$H \ldots 2{,}14613 = 140$

$S \ldots 2{,} \quad = 100$

$Sc^n \ldots 2{,}52973 = 338{,}63$

$Hkc^n \ldots 2{,}52385 = 334{,}08$

$A = 672{,}71$

$U = 4{,}55$

Um aus dem Höhennamen von $\frac{1}{c^n}$ sofort den Höhennamen von k zu erhalten, wendet man die Gaufsischen Tafeln an.

p	n	a	b
4	8	17000	12421,7
4	10	2000	1351,1
4	10	12000	8106,8
4	10	8141,3	5500
4	12	2500	1561,5
4	12	8805,6	5500
4	20	16000	7302
4	25	13329	5000
4	28	4498	1500
4	30	17000	5241,4
4	50	35533	5000
4	50	100000	14071
4	75	28418	1500
5	4	8500	6993
5	5	100000	78352,6
5	5	25842,75	20248,5
5	8	10000	6768,4
5	19	65304	25843
5	30	100000	23137,7
5	30	25842,75	5979,4
5	37	66894	11000
5	50	1000000	87203,7
5	50	114674	10000
5	100	1315012	10000
5	100	3398387	25843

p	n	a	b
6	10	6438	3595
6	12	29177	14500
6	19	43871	14500
6	30	86152	15000
6	30	148429	25843
6	60	494815	15000
6	60	852501	25843
6	100	8768584	25843

p	n	$a:b$ / $r:d$
$1\frac{1}{2}$	46,5	2
2	35,	2
2	55,5	3
2	81,3	5
2	110,96	9
$2\frac{1}{2}$	28,	2
$2\frac{1}{2}$	50,7	$3\frac{1}{2}$
$2\frac{1}{2}$	72,5	6
$2\frac{1}{2}$	97,1	11
3	23,4	2
3	37,2	3
3	46,9	4
3	65,8	7
4	10,3	$1\frac{1}{2}$
4	17,7	2
4	22,3	$2\frac{2}{3}$
4	28,	3
4	41,	5
4	67,8	$14\frac{2}{7}$
$4\frac{1}{2}$	14,3	$1\frac{1}{8}$
5	14,2	2
5	22,5	3
6	23,8	4

p	n	r	B
4	20	800	10872,2
4	24	1000	15247
4	24	983,8	15000
4	30	800	13833,6
4	30	578,3	10000
4	34	11000	202523
4	35	1200	22397,5
4	35	1200,13	22400
4	50	800	17185,7
5	10	1000	7721,7
5	10	1295	10000
5	10	1300	10038,2
5	10	3346,75	25842,75
5	20	800	9969,8
5	20	802,42	10000
5	25	1000	14094
5	30	800	12298
5	30	800,13	12300
5	34	11000	178122
5	37	300	5013,3
6	18	2500	27069
6	34	11000	158050
6	40	600	9027,8
$2\frac{1}{2}$	23	950	16465
$2\frac{1}{2}$	23	715	12392

Zu der letzten Aufgabe folgender wirkliche Fall.
Zwei Pachtgebote waren:

I. auf 24 Halbjahre die Steuer 950 voraus
II. auf 24 Halbjahre die Steuer 715 voraus und 4375 baar. Man rechnet $2\frac{1}{2}$ vom 100 halbj.

950	4375	I.	17415
16465	715	II.	17482
I. 17415	12392		67 mehr
	II. 17482		

Sechste Abtheilung.

Die mehrstellige Einstufung.

67.

Uebliche Ausscheidung bei Einstufungen.

Das gewöhnliche Verfahren ist folgendes:

Jede Gleichung wird durch die Nebenzahl der letzten Ursache getheilt. Die letzte Gleichung wird von jeder vorhergehenden abgezogen. Hiedurch erhält man eine Gleichung weniger als man hatte. Mit diesen verfährt man auf dieselbe Art. Dieses Verfahren setzt man so lange fort bis man zu einer Gleichung gelangt, welche die erste Ursache z durch die *Wirkungen* $a\ b\ c\ d$ ausdrückt. Diesen Ausdruck setzt man in die beiden vorhergehenden Gleichungen. Dadurch erhält man zwei Ausdrücke welche die zweite Ursache y übereinstimmend durch die Wirkungen $a\ b\ c\ d$ ausdrücken. Die Ausdrücke der beiden ersten Ursachen $z\ y$ setzt man in die drei vorhergehenden Gleichungen. Dadurch erhält man drei Ausdrücke welche die dritte Ursache x übereinstimmend durch die Wirkungen $a\ b\ c\ d$ ausdrücken u. s. f.

Beispiel.

$$
\begin{aligned}
9z + 3y + 6x + 8u &= a \\
3z + 5y + 6x + 7u &= b \\
4z + 3y + 8x + 9u &= c \\
5z + 6y + 2x + 4u &= d \\
\tfrac{9}{8}z + \tfrac{3}{8}y + \tfrac{6}{8}x + u &= \tfrac{1}{8}a \\
\tfrac{3}{7}z + \tfrac{5}{7}y + \tfrac{6}{7}x + u &= \tfrac{1}{7}b \\
\tfrac{4}{9}z + \tfrac{3}{9}y + \tfrac{8}{9}x + u &= \tfrac{1}{9}c \\
\tfrac{5}{4}z + \tfrac{6}{4}y + \tfrac{2}{4}x + u &= \tfrac{1}{4}d
\end{aligned}
$$

$$-\tfrac{1}{8}z - \tfrac{9}{8}y + \tfrac{3}{8}x = \tfrac{1}{8}a - \tfrac{1}{4}d$$
$$-\tfrac{23}{28}z - \tfrac{22}{28}y + \tfrac{10}{28}x = \tfrac{1}{7}b - \tfrac{1}{4}d$$
$$-\tfrac{20}{36}z - \tfrac{42}{36}y + \tfrac{14}{36}x = \tfrac{1}{9}c - \tfrac{1}{4}d$$

$$-\tfrac{1}{2}z - \tfrac{9}{2}y + x = \tfrac{1}{2}a - d$$
$$-\tfrac{23}{10}z - \tfrac{22}{10}y + x = \tfrac{4}{10}b - \tfrac{1}{10}d$$
$$-\tfrac{20}{14}z - \tfrac{42}{14}y + x = \tfrac{4}{14}c - \tfrac{9}{14}d$$

$$\tfrac{22}{14}z - \tfrac{21}{14}y = \tfrac{1}{2}a - \tfrac{4}{14}c - \tfrac{5}{14}d$$
$$-\tfrac{16}{70}z + \tfrac{56}{70}y = \tfrac{4}{10}b - \tfrac{4}{14}c - \tfrac{4}{10}d$$
$$-\tfrac{22}{21}z + y = -\tfrac{7}{21}a + \tfrac{4}{21}c + \tfrac{5}{21}d$$
$$-\tfrac{16}{56}z + y = \tfrac{28}{56}b - \tfrac{20}{56}c - \tfrac{4}{56}d$$

$$-\tfrac{128}{186}z = -\tfrac{7}{21}a - \tfrac{28}{56}b + \tfrac{02}{186}c + \tfrac{532}{1668}d$$

Das Entständnifs ist:

$$28a + 42b - 46c - 26d = 64z$$
$$8a + 44b - 36c - 12d = 64y$$
$$82a + 219b - 185c - 131d = 64x$$
$$-88a - 228b + 204c + 132d = 64u$$

Die umgekehrten Nebenzahlen der Wirkungen $a\ b\ c\ d$ heifsen die *Gewichte* der Ursachen $z\ y\ x\ u$. Also

Gew. $z = \frac{64}{28}$ Gew. $y = \frac{64}{44}$

Gew. $x = 1.\frac{64}{185}$ Gew. $u = \frac{64}{132}$

Bei grofsen Nebenzahlen ist die Anwendung der Gaufsischen Namentafeln für Anlage und Unterschied vortheilhaft.

68.

Allgemeine Umwendung durch welche die Ursachen des Urbaues zu Wirkungen des Wendebaues und die Wirkungen des Urbaues zu Ursachen des Wendebaues werden.

In obigem Beispiele war:

der Urbau				der Wendebau			
9	3	6	8	28	42	$\overline{46}$	$\overline{26}$
3	5	6	7	8	44	$\overline{36}$	$\overline{12}$
4	3	8	9	82	219	$\overline{185}$	$\overline{131}$
5	6	2	4	$\overline{88}$	$\overline{228}$	204	132

Allgemein bezeichne man

die Wagereihe durch grofse Zeichen 1 2 3 4

die Lothreihe durch kleine Zeichen 1 2 3 4

Urbau				Wendebau			
1_1	2_1	3_1	4_1	$1'_1$	$2'_1$	$3'_1$	$4'_1$
1_2	2_2	3_2	4_2	$1'_2$	$2'_2$	$3'_2$	$4'_2$
1_3	2_3	3_3	4_3	$1'_3$	$2'_3$	$3'_3$	$4'_3$
1_4	2_4	3_4	4_4	$1'_4$	$2'_4$	$3'_4$	$4'_4$

Um den Zusammenhang beider Baue zu übersehen, dienen folgende Erwägungen:

Auf dieselbe Art wie aus den Zahlen des Urbaues die des Wendebaues entstehen, lassen sich aus den Zahlen des Wendebaues die eines zweiten Wendebaues herleiten. Diese letztern müssen also den Zahlen des Urbaues *verhältlich* sein.

Hieraus folgt: ***Die für den Urbau und Wendebau gültigen Sätze gelten auch bei Vertauschung beider.***

Wenn aber eine Wagereihe des Urbaues mit einer ungleichnamigen Lothreihe des Wendebaues gebunden wird, z. B. die erste mit der zweiten, die erste mit der dritten, die zweite mit der dritten u. s. w. so ist die Anlage der Gebinde nichtig. In obigem Beispiel:

$$9.42 + 3.44 + 6.219 + 8.\overline{228} = 0$$
$$9.\overline{46} + 3.\overline{36} + 6.\overline{185} + 8.204 = 0$$
$$9.\overline{26} + 3.\overline{12} + 6.\overline{131} + 8.132 = 0$$

u. s. w.

Also erhält man auch nichtige Anlagen durch Bindung einer Wagereihe des Wendebaues mit einer Lothreihe des Urbaues. In obigem Beispiel:

$$28.3 + 42.5 + \overline{46}.3 + \overline{26}.6 = 0$$
$$28.6 + 42.6 + \overline{46}.8 + \overline{26}.2 = 0$$
$$28.8 + 42.7 + \overline{46}.9 + \overline{26}.4 = 0$$

u. s. w.

Wenn ferner eine Wagereihe des Urbaues mit der gleichnamigen Lothreihe des Wendebaues gebunden wird, z. B. die erste mit der ersten, die zweite mit der zweiten u. s. w. so ist die Anlage der Gebinde eine feste Zahl welche der *Nenner* der Gleichung heifst.

In obigem Beispiel

$$9 . 28 + 3 . 8 + 6 . 82 + 8 . \overline{88} = 64$$
$$3 . 42 + 5 . 44 + 6 . 219 + 7 . \overline{228} = 64$$
$$4 . \overline{46} + 3 . \overline{36} + 8 . \overline{185} + 9 . 204 = 64$$
$$5 . \overline{26} + 6 . \overline{12} + 2 . \overline{131} + 4 . 132 = 64$$

Wenn also eine Wagereihe des Wendebaues mit der gleichnamigen Lothreihe des Urbaues gebunden wird so ergiebt sich ebenfalls der Nenner. In obigem Beispiel:

$$28 . 9 + 42 . 3 + \overline{46} . 4 + \overline{26} . 5 = 64$$
$$8 . 3 + 44 . 5 + \overline{36} . 3 + \overline{12} . 6 = 64$$
$$82 . 6 + 219 . 6 + \overline{185} . 8 + \overline{131} . 2 = 64$$
$$\overline{88} . 8 + \overline{228} . 7 + 204 . 9 + 132 . 4 = 64$$

Demnach sind:

bei 3 Stellen: 6 Nenneranlagen,
12 nichtige Anlagen.

bei 4 Stellen: 8 Nenneranlagen,
24 nichtige Anlagen.

u. s. w.

Diese Bedingungen werden auf folgende Art befriedigt:

Bei zwei Stellen:

Urbau		Wendebau	
1_1	2_1	2_2	-2_1
1_2	2_2	-1_2	1_1

Nenner $n = 1_1 2_2 - 1_2 2_1$

Bei drei Stellen.

Urbau

1_1	2_1	3_1
1_2	2_2	3_2
1_3	2_3	3_3

Wendebau

$2_2 3_3 - 2_3 3_2$	$2_3 3_1 - 2_1 3_3$	$2_1 3_2 - 2_2 3_1$
$3_2 1_3 - 3_3 1_2$	$3_3 1_1 - 3_1 1_3$	$3_1 1_2 - 3_2 1_1$
$1_2 2_3 - 1_3 2_2$	$1_3 2_1 - 1_1 2_3$	$1_1 2_2 - 1_2 2_1$

$$n = 1_1 (2_2 3_3 - 2_3 3_2) + 1_2 (2_3 3_1 - 2_1 3_3) + 1_3 (2_1 3_2 - 2_2 3_1)$$

Die Zahlen des dreistelligen Wendebaues haben also dieselbe Fassung wie der Nenner des zweistelligen Baues. Diese Fassung läfst sich auf folgende Art herleiten:

Man bilde aus den drei Zeichen 1 2 3 die sechs Wechselungen in zwei Abtheilungen, die eine zur Anlegung die andre zur Abziehung. Bei jeder Wechselung wo nur zwei Zeichen wechseln geht man aus der einen Abtheilung in die andre über.

I.	II.
123	132
231	213
312	321

Bringt man diese Zeichen als Lothzeichen an die Wagezeichen 223 oder 323 an so mufs die Anlage nichtig sein, weil sich immer zwei gleiche Zahlen in entgegengesetzten Abtheilungen befinden. Bringt man sie also an die Wagezeichen 1 2 3 an, so erhält man den Nenner:

$$\begin{aligned} &2_1 2_2 3_3 + 2_2 2_3 3_1 + 2_3 2_1 3_2 \\ -\,&2_1 2_3 3_2 - 2_2 2_1 3_3 - 2_3 2_2 3_1 = 0 \\ &3_1 2_2 3_3 + 3_2 2_3 3_1 + 3_3 2_1 3_2 \\ -\,&3_1 2_3 3_2 - 3_2 2_1 3_3 - 3_3 2_2 3_1 = 0 \\ &1_1 2_2 3_3 + 1_2 2_3 3_1 + 1_3 2_1 3_2 \\ -\,&1_1 2_3 3_2 - 1_2 2_1 3_3 - 1_3 2_2 3_1 = n \end{aligned}$$

Um den vierstelligen Wendebau zu erhalten bildet man aus den vier Zeichen 1 2 3 4 die 24 Wechselungen in zwei Abtheilungen nach demselben Grundsatz wie bei dem dreistelligen Bau.

I.	II.	I.	II.
1234	1243	3124	3142
1342	1324	3241	3214
1423	1432	3412	3421
2431	2413	4321	4312
2314	2341	4213	4231
2143	2134	4132	4123

Aus ähnlicher Betrachtung wie bei dem dreistelligen Bau ergiebt sich dafs jede Zahl des vierstelligen Baues dieselbe Fassung wie der Nenner des dreistelligen Baues hat. Wenn die Anlage des Loth- und Wagezeichens ungrade ist, z. B. bei $2'_1$, $3'_2$ u. s. w. mufs die Wende-

zahl mit dem entgegengesetzten Vorzeichen genommen werden. Z. B.

$$1'_1 = 2_2\,(3_34_4 - 3_44_3) + 2_3\,(3_44_2 - 3_24_4) + 2_4\,(3_24_3 - 3_34_2)$$

$$\overline{2}'_1 = 2_3\,(3_44_1 - 3_14_4) + 2_4\,(3_14_3 - 3_34_1) + 2_1\,(3_34_4 - 3_44_3)$$

u. s. w.

Der Nenner n des vierstelligen Wendebaues ist:

$$n = 1_11'_1 + 1_22'_1 + 1_33'_1 + 1_44'_1$$

oder

$$\begin{aligned} n = {} & (1_12_2 - 1_22_1)\,(3_34_4 - 3_44_3) \\ & + (1_12_3 - 1_32_1)\,(3_44_2 - 3_24_4) \\ & + (1_12_4 - 1_42_1)\,(3_24_3 - 3_34_2) \\ & + (1_22_3 - 1_32_2)\,(3_14_4 - 3_44_1) \\ & + (1_22_4 - 1_42_2)\,(3_34_1 - 3_14_3) \\ & + (1_32_4 - 1_42_3)\,(3_14_2 - 3_24_1) \end{aligned}$$

Eben so hat jede Zahl des fünfstelligen Baues dieselbe Fassung wie der Nenner des vierstelligen Baues u. s. f. für alle obern Einstufungen.

69.

Ausführung dieses Verfahrens durch Einrahmung.

Um bei der Bildung des Wendebaues mit völliger Sicherheit zu verfahren, schreibt man einen Rahmen welcher aus vier gleichen Rahmen besteht, deren jeder die Zahlen des Urbaues in derselben Folge enthält.

Jede Wendezahl hat ihre entsprechende Urzahl welche man durch Vertauschung des Lothzeichens mit dem Wagezeichen erhält. Z. B. der Wendezahl $3'_2$ entspricht die Urzahl 2_3.

Man macht ein verschiebbares Gitter welches bei dem dreistelligen Bau einen zweistelligen, bei dem vierstelligen einen dreistelligen, bei dem fünfstelligen einen vierstelligen u. s. f. in sich fafst.

Man schiebt dieses Gitter jedesmal so dafs die Urzahl welche der zu bildenden Wendezahl entspricht an der obern äufsern linken Ecke des Gitters steht.

Man bestimmt zu dem in dem Gitter enthaltenen Urbau den Nenner des Wendebaues. Dieser Nenner ist die gesuchte Wendezahl.

1. *Beispiel.*

Urbau

10	4	3
5	11	9
8	7	12

Rahmen

10	4	3	10	4	3
5	11	9	5	11	9
8	7	12	8	7	12
10	4	3	10	4	3
5	11	9	5	11	9
8	7	12	8	7	12

Es sei die Wendezahl $2'_3$ zu bestimmen, ihr entspricht die Urzahl $3_2 = 9$, also das in dem Rahmen bezeichnete Gitter. Dieses giebt $2'_3 = 8.4 - 10.7 = \overline{38}$

2. *Beispiel.*

Urbau

9	3	6	8
3	5	6	7
4	3	8	9
5	6	2	4

Rahmen

9	3	6	8	9	3	6	8
3	5	6	7	3	5	6	7
4	3	8	9	4	3	8	9
5	6	2	4	5	6	2	4
9	3	6	8	9.	3	6	8
3	5	6	7	3	5	6	7
4	3	8	9	4	3	8	9
5	6	2	4	5	6	2	4

Es sei die Wendezahl $4'_3$ zu bestimmen. Ihr entspricht die Urzahl $3_4 = 2$. Das bezeichnete Gitter giebt

$$4'_3 = 8(3.3 - 4.5) + 7(4.3 - 9.3) + 9(9.5 - 3.3)$$

also $4'_3 = \overline{131}$

3. *Beispiel.*

Urbau

1	4	3	2	5
3	2	1	6	4
2	8	9	2	1
6	7	2	7	6
5	2	5	3	2

Rahmen

1	4	3	2	5	1	4	3	2	5
3	2	1	6	4	3	2	1	6	4
2	8	9	2	1	2	8	9	2	1
6	7	2	7	6	6	7	2	7	6
5	2	5	3	2	5	2	5	3	2
1	4	3	2	5	1	4	3	2	5
3	2	1	6	4	3	2	1	6	4
2	8	9	2	1	2	8	9	2	1
6	7	2	7	6	6	7	2	7	6
5	2	5	3	2	5	2	5	3	2

Es sei die Wendezahl $3'_4$ zu bestimmen. Ihr entspricht die Urzahl $4_3 = 2$. Das bezeichnete Gitter giebt: $3'_4 =$
$(6.5 - 2.6)(4.1 - 2.3) + (6.1 - 5.6)(2.5 - 2.1)$
$+ (6.3 - 4.6)(2.3 - 4.5) + (2.1 - 5.5)(7.1 - 2.2)$
$+ (2.3 - 4.5)(4.2 - 7.3) + (5.3 - 4.1)(7.5 - 2.2)$
also $3'_4 = 310$

70.

Der Nenner des dreistelligen Wendebaues läfst sich auf den Unterschied zweier Gebinde zurückführen.

Im Satz (68.) wurde gezeigt:

Wenn die Zahlen des Wendebaues bereits gebildet worden sind, so wird aus ihnen der Nenner bestimmt. Er ist bei dem zweistelligen Bau die Anlage zweier Gebinde, bei dem dreistelligen Bau die Anlage dreier Gebinde, beim vierstelligen Bau die Anlage von vier Gebinden u. s. w.

Aber auf dieselbe Art wie aus dem Urbau der Wendebau entsteht, kann aus dem Wendebau ein zweiter Wendebau gebildet werden.

Offenbar verhält sich jede Zahl des zweiten Wendebaues zu der gleichgestellten Zahl des Urbaues, wie der Nenner N des zweiten Wendebaues zu dem Nenner n des ersten Wendebaues.

Dieses Verhältnifs ist bei dem dreistelligen Bau dem Nenner des ersten Wendebaues gleich, bei dem vierstelligen Bau aber der zweiten Höhe des Nenners des ersten Wendebaues gleich.

Es ist aber bei dem dreistelligen Bau jede Zahl des zweiten Wendebaues der Unterschied zweier Gebinde aus den Zahlen des ersten Wendebaues.

Also ist der Nenner des ersten Wendebaues der Unterschied zweier Gebinde dieses Baues getheilt mit der entsprechenden Urzahl.

Beispiel.

Urbau			I. Wendebau			II. Wendebau		
10	4	3	69	$\overline{27}$	3	5790	2316	1737
5	11	9	12	96	$\overline{75}$	2895	6369	5111
8	7	12	$\overline{53}$	$\overline{38}$	90	4632	4053	6948
			$n = 579$			$N = n^2 = 335241$		

$$n = \frac{6948}{12} = \frac{69.96 - 12.\overline{27}}{12}$$

$$n = \frac{1737}{3} = \frac{\overline{27}.\overline{75} - 96.3}{3} \quad \text{u. s. w.}$$

Allgemein $n =$

$$\frac{(2_2 3_3 - 2_3 3_2)(3_3 1_1 - 3_1 1_3) - (3_2 1_3 - 3_3 1_2)(2_3 3_1 - 2_1 3_3)}{3_3}$$

wo die Loth- und Wagezeichen beliebig erhöht werden können.

Herr Geheimerath Bessel hat in den astronomischen Nachrichten Bd. 17. № 404. eine vom Professor Jacobi zu Königsberg gefundene Auflösung der dreistelligen Wahrscheinlichkeitsgleichungen ohne Beweis mitgetheilt. Diese Ausdrücke Jacobi's beruhen auf dem obigen Satze. Doch ist die Rechnung nach diesen Ausdrücken, ungeachtet ihres scheinbaren Ebenmafses, nicht so einfach als nach der hier gegebenen Vorschrift wenn man bei ihr die Gaufsischen Namentafeln anwendet. Um dieses zu zeigen führe ich das Besselsche Beispiel nach meiner Art durch wobei im Laufe der Rechnung keine Aufschlagungen vorkommen. Die Buchstaben *A B C* beziehen sich auf die Gaufsischen Tafeln.

Urbau	186,6383		$\overline{7},7760$		3,3	
Zahlen	$\overline{7},7760$		26,2794		28,4660	
	3,3		28,4660		69,7767	
Urbau	1_1	1,27100	2_1	$\overline{0},89076$	3_1	0,51851
Höhen-	1_2	$\overline{0},89076$	2_2	1,41963	3_2	1,45433
namen	1_3	0,51851	2_3	1,45433	3_3	1,84371
$2_2 3_3$	3,26334	$3_3 1_1$	4,11471	$1_1 2_2$	3,69063	
$2_3 3_2$	2,90866	$3_1 1_3$	1,03702	$1_2 2_1$	1,78152	
C	0,35468	*C*	3,07769	*C*	1,90911	
A	10140	*B*	36.	*B*	539	
$1'_1$	3,01006	$2'_2$	4,11435	$3'_3$	3,68524	
$2_3 3_1$	1,97284	$1_2 2_3$	$\overline{2},34509$	$3_1 1_2$	$\overline{1},40927$	
$2_1 3_3$	$\overline{2},73447$	$1_3 2_2$	1,93814	$3_2 1_1$	3,72533	
A	0,76163	*A*	0,40695	*A*	2,31606	
B	6935	*B*	14357	*B*	209	
$2'_1 = 1'_2$	2,80382	$3'_1 = 1'_3$	$\overline{2},48866$	$3'_2 = 2'_3$	$\overline{3},72742$	

$\frac{2'_2 3'_3}{1_1}$	5,52859	$\frac{3'_3 1'_1}{2_2}$	5,27567	$\frac{1'_1 2'_2}{3_3}$	5,28070
$\frac{2'_3 3'_2}{1_1}$	5,18384	$\frac{3'_1 1'_3}{2_2}$	3,55769	$\frac{1'_2 2'_1}{3_3}$	3,76393
C	0,34475	C	1,71798	C	1,51677
A	8344	B	840	B	1342
n	5,26728	n	5,26727	n	5,26728

Wendebau	$1'_1$ 3,01006	$2'_1$ 2,80382	$3'_1$ $\overline{2}$,48866
Höhennamen ohne n	$1'_2$ 2,80382	$2'_2$ 4,11435	$3'_2$ $\overline{3}$,72742
	$1'_3$ $\overline{2}$,48866	$2'_3$ $\overline{3}$,72742	$3'_3$ 3,68524
Wendebau	7,74278	7,53654	$\overline{7}$,22138
Höhennamen mit n	7,53654	8,84707	$\overline{8}$,46014
	$\overline{7}$,22138	$\overline{8}$,46014	8,41796
Gewicht	2,25722	1,15293	1,58204
Wendebau	0,005531	0,003440	$\overline{0}$,001665
Zahlen	0,003440	0,070320	$\overline{0}$,028850
	$\overline{0}$,001665	$\overline{0}$,028850	0,026180
Gewicht	180,8	14,22	38,20

71.

Die Zweithöhe des Nenners des vierstelligen Wendebaues läfst sich auf den Unterschied zweier Gebinde zurückführen.

Bei dem vierstelligen Bau giebt jede Zahl des zweiten Wendebaues getheilt mit der entsprechenden Urzahl die Zweithöhe des Nenners des ersten Wendebaues.

Aber jede Zahl des zweiten Wendebaues ist der Nenner eines entsprechenden in dem ersten Wendebau enthaltenen dreistelligen Gitters, läfst sich also wenn man dieses Gitter als Urbau behandelt und seinen Wendebau bestimmt, nach dem Satze (70.) auf den Unterschied zweier Gebinde zurückführen. Also ist die Zweithöhe des Nenners des vierstelligen Urbaues gleich dem Unterschied zweier Gebinde aus dem Wendegitter getheilt durch eine Gitterzahl und eine Urzahl.

Beispiel.

Urbau			
9	3	6	8
3	5	6	7
4	3	8	9
5	6	2	4

I. Wendebau

28	42	$\overline{46}$	$\overline{26}$
8	44	$\overline{36}$	$\overline{12}$
82	219	$\overline{185}$	$\overline{131}$
$\overline{88}$	$\overline{228}$	204	132

$n = 64$

II. Wendebau

36864	12288	24576	32768
12288	20480	24576	28672
16384	12288	32768	36864
20480	24576	8192	16384

$$N = n^3 = 262144$$

$$n^2 = 64^2 = \frac{36864}{9} = \frac{12288}{3} \text{ u. s. w.}$$

Man wähle in dem ersten Wendebau eine beliebige Zahl z. B. $3'_2 = \overline{36}$, deren Urzahl $2_3 = 3$ ist. Das der Wendezahl $3'_2$ entsprechende dreistellige

Gitter			giebt das Wendegitter		
$\overline{131}$	82	219	2688	2688	576
132	$\overline{88}$	$\overline{228}$	384	192	$\overline{960}$
$\overline{26}$	28	42	1408	1536	704

Also ist der Nenner des Gitters $12288 =$

$$\frac{192.704 - 1536.\overline{960}}{131} = \frac{1536.576 - 2688.704}{\overline{82}} \text{ u. s. w.}$$

Also ist die Zweithöhe des Nenners des ersten Wendebaues $n^2 =$

$$\frac{192.704 - 1536.\overline{960}}{131.3} = \frac{1536.576 - 2688.704}{\overline{82}.3} \text{ u. s. w.}$$

Uebungsbeispiele.

1. *Beispiel.*

Zweistelliger Urbau.

Zahlen		Höhennamen.	
11,0287	6,0919	1,04253	0,78475
5,3472	8,7604	0,72813	0,94252

Berechnung nach den Gaufsischen Tafeln.

1_1	1,04253	1_2	0,72813
2_2	0,94252	2_1	0,78475
$1_1 2_2$	1,98505	$1_2 2_1$	1,51288
$1_2 2_1$	1,51288		
C	0,47217	Wendebau .	Höhennamen
A	0,29358	9,13606	$\overline{8}$,97829
n	1,80646	$\overline{8}$,92167	9,23607
n^*	8,19354	Gew. 0,86394	0,76393

Urgleichungen
$$11{,}0287\,z + 6{,}0919\,y = a$$
$$5{,}3472\,z + 8{,}7604\,y = b$$

Wendegleichungen
$$0{,}13679\,a - 0{,}095124\,b = z$$
$$-0{,}083497\,a + 0{,}17221\,b = y$$

Gew. $z = 7{,}3103$ Gew. $y = 5{,}8067$

Sonderwerthe.

Zahlen		Höhennamen	
a	69,9923	1,84505	
b	40,0234	1,60232	
$1'_1 a$	0,98111	$1'_2 a$	$\overline{0}$,76672
$2'_1 b$	$\overline{0}$,58061	$2'_2 b$	0,83839
C	0,40050	B	0,07167
A	0,18035	A	0,74613
z	0,76096	y	0,02059
$z = 5{,}7672$		$y = 1{,}0484$	

Um genauere Werthe für die Wurzeln zu finden, bezeichnet man die ermittelten durch z_1 y_1, die Verbesserungen durch ∂z ∂y, und setzt in die Urgleichungen statt z, y die Werthe $z_1 + \partial z$, $y_1 + \partial y$.

Nach gehöriger Abziehung ergiebt sich

$$11{,}0287\,\partial z + 6{,}0919\,\partial y = 0{,}00083340 = \partial a$$
$$5{,}3472\,\partial z + 8{,}7604\,\partial y = 0{,}00062480 = \partial b$$

$L\partial a$ . . . 6,92085 $L\partial b$ . . . 6,79574

$1'_1 \partial a$ . .	6,05691	$1'_2 \partial a$ . .	$\overline{5}$,84252
$2'_1 \partial b$ . .	$\overline{5}$,77403	$2'_2 \partial b$ . .	6,03181
B	0,28288	B	0,18929
A	0,03709	A	0,26257
∂z	5,73694	∂y	5,57995
$z_1 =$	5,7672	$y_1 =$	1,0484
∂z	5457	∂y	3801
$z =$	5,76725457	$y =$	1,04843801

2. *Beispiel.*

Urbau			Wendebau			
2	3	4	$\overline{17}$	17	$\overline{34}$	
4	7	$\overline{2}$	2	$\overline{26}$	20	$n = \overline{136}$
5	2	$\overline{3}$	$\overline{27}$	11	2	

3. *Beispiel.*

Urbau				Wendebau				
2	3	7	8	94	$\overline{108}$	$\overline{24}$	55	
3	5	6	7	$\overline{61}$	71	11	$\overline{27}$	$n = 43$
4	3	5	9	82	$\overline{75}$	$\overline{31}$	37	
5	6	2	4	$\overline{67}$	66	29	$\overline{36}$	

4. *Beispiel.*

Urbau				Wendebau				
9	3	7	8	94	$\overline{108}$	$\overline{24}$	55	
3	5	6	7	$\overline{61}$	85	$\overline{59}$	106	$n = 701$
4	3	5	9	82	219	$\overline{185}$	$\overline{131}$	
5	6	2	4	$\overline{67}$	$\overline{102}$	211	13	

5. *Beispiel. Wahrscheinlichkeit.*

$5z +$	$2y +$	$4x +$	$3u =$	
2	1	6	2	l_2
7	9	11	1	l_3
9	8	2	2	l_4
3	7	5	4	l_5
4	3	7	5	l_6

25	10	20	15	4	8	6	16	12	9
4	2	12	4	1	6	2	36	12	4
49	63	77	7	81	99	91	21	11	1
81	72	18	18	64	16	66	4	4	4
9	21	15	12	49	35	28	25	20	16
16	12	28	20	9	21	15	49	35	25
Anl. 184	180	170	76	208	185	76	251	94	59

Urbau

z	y	x	u	
184	180	170	76	a
180	208	185	76	b
170	185	251	94	c
76	76	94	59	d

Wendebau

	a	b	c	d
z	416613	$\overline{3}05934$	$\overline{8}148$	$\overline{1}29588$
y	$\overline{3}05934$	373116	$\overline{8}7744$	53256
x	$\overline{8}148$	$\overline{8}7744$	161616	$\overline{1}33968$
u	$\overline{1}29588$	53256	$\overline{1}33968$	487272

$$n = 10'354824$$

Gewichte 24,855 27,752 64,072 21,250

$$5l_1 + 2l_2 + 7l_3 + 9l_4 + 3l_5 + 4l_6 = a$$
$$2l_1 + 1.l_2 + 9l_3 + 8l_4 + 7l_5 + 3l_6 = b$$
$$4l_1 + 6l_2 + 11l_3 + 2l_4 + 5l_5 + 7l_6 = c$$
$$3l_1 + 2l_2 + 1.l_3 + 2l_4 + 4l_5 + 5l_6 = d$$

Anmerkung. Man nehme für $z\,y\,x\,u$ beliebige Zahlen, berechne hieraus die verschiedenen l, nehme für die verschiedenen l Werthe welche den berechneten nahe kommen, bestimme hieraus $a\,b\,c\,d$, und aus diesen durch die Zahlen des Wendebaues die wahrscheinlichsten Werthe von $z\,y\,x\,u$. Es sei z. B.

$z = 3$ $y = 1$ $x = 2$ $u = 4$

so ist $l_1 = 37$ $l_2 = 27$ $l_3 = 56$ $l_4 = 47$ $l_5 = 42$ $l_6 = 49$

Man setze

$l_1 = 36$ $l_2 = 28$ $l_3 = 55$ $l_4 = 48$ $l_5 = 40$ $l_6 = 50$

so ist $a = 1373$ $b = 1411$ $c = 1563$ $d = 725$

hieraus

$nz = 33'650151$ $z = 3{,}2498$
$ny = 7'886024$ $y = 0{,}7616$
$nx = 20'485020$ $x = 1{,}9783$
$nu = 41'099708$ $u = 3{,}9692$

6. *Beispiel.*

Urbau

9,1835	3,0723	6,9874	7,9924
3,1127	5,0896	6,1104	6,9907
4,0081	2,9985	4,9971	8,9922
5,0108	6,0903	2,1125	4,0109

Wendebau

0,13452595138	$\overline{0}$,14993991147	$\overline{0}$,03667823745	0,07549870913
$\overline{0}$,08853265838	0,10935827009	$\overline{0}$,07524798773	0,15451457663
0,10993092207	0,31355819309	$\overline{0}$,25609950342	$\overline{0}$,19140472401
$\overline{0}$,09153089348	$\overline{0}$,14388228243	0,29496630003	0,02119061098

7. *Beispiel.* *Fünf Stellen.*

Urbau	1	4	3	2	5
	3	2	1	6	4
	2	8	9	2	1
	6	7	2	7	6
	5	2	5	3	2
Wende-bau	$\overline{2}$35	$\overline{8}$10	$\overline{3}$45	560	700
	$\overline{1}$90	$\overline{4}$61	258	587	$\overline{4}$93
	225	343	211	$\overline{5}$66	344
	$\overline{5}$00	1185	310	$\overline{3}$00	$\overline{3}$75
	965	$\overline{1}$49	$\overline{3}$88	$\overline{1}$22	198

$n = 3505$

Siebente Abtheilung.

Die Stufungen.

72.

Erklärungen.

Eine Gröfse F welche von einer oder mehrern andern x, y, u. s. w. auf irgend eine Art abhängt heifst eine ***Wirkung*** (Funktion) derselben. Die wirkenden Gröfsen x, y, u. s. w. heifsen ***Ursachen*** (Variable). Wenn in den verschiedenen Beisätzen der Wirkung die Ursachen nur als ***Grundzahlen*** von Höhen vorkommen, so heifst die Wirkung ***grundhaft*** (algebraisch). Eine Wirkung welche nur ganznamige Höhen einer Ursache enthält, heifst eine ***Stufung***. Der gröfste Name der Ursache heifst die ***Stufe*** (Grad). Diejenige Gröfse x_1 welche anstatt der Ursache x gesetzt die Wirkung ***vernichtet*** heifst die ***Wurzel*** der Wirkung. Die Wirkung ist durch die ***Einstufung*** $x - x_1$ theilbar.

Wenn in einer Höhe x^n statt der Grundzahl x die um einen Zuwuchs u vermehrte Grundzahl $x + u$ gesetzt wird so verwandelt sich die Höhe x^n nach dem Satze (44.) in den Ausdruck

$$x^n + nx^{n-1}.u + \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}.u^2 \ldots$$

Das Verfahren durch welches aus der Höhe $\ldots x^n$ der Ausdruck $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots nx^{n-1}$ gebildet wird, heifst die ***Zuleitung*** (Differentiation). Das umgekehrte Verfahren durch welches aus dem Ausdruck nx^{n-1} die Höhe x^n gebildet wird, heifst die ***Rückleitung*** (Integration).

Es sei nun eine Stufung gegeben

$$F = x^n - q.x^{n-1} + px^{n-2} \ldots$$

so ist ihr erstes ***Zugeleite*** (Differential)

$$F_1 = nx^{n-1} - q(n-1)x^{n-2} + p(n-2)x^{n-3} \ldots$$

ihr zweites Zugeleite ist:

$$F_2 = n(n-1)x^{n-2} - q(n-1)(n-2)x^{n-3} \ldots$$

Um für einen bestimmten Werth der Ursache x den entsprechenden Werth der Stufung und ihrer Zugeleite zu berechnen, ist es am bequemsten jedes Glied durch die Nebenzahl des folgenden zu verbessern.

Es sei z. B.

$$F = rx^n + qx^{n-1} + px^{n-2} + mx^{n-3}$$

Man berechne $rx + q = k$

hieraus . . . . . $kx + p = k_1$

hieraus . . . . . $k_1x + m = k_2$ u. s. f.

Beispiel.

$$F = x^5 - 7x^4 + 5x^3 + 95x^2 - 326x + 312$$

für $x = 2{,}0005$

x 2,0005

$\overline{7}$

k . . . . . $\overline{4{,}9995}$

x 2,0005

$\overline{10{,}00149975}$

5

k_1 . . . . . $\overline{5{,}00149975}$

x 2,0005

$\overline{10{,}005500249875}$

95

k_2 . . . . . $\overline{84{,}994499750125}$

x 2,0005

$\overline{170{,}031496750125 \ldots}$

$\overline{326}$

k_3 . . . . $\overline{155{,}968503249874 \ldots}$

x 2,0005

$\overline{312{,}01499075 \ldots}$

312

$F = \overline{0{,}01499075 \ldots}$

73.

Die wirkhafte Zweistufung wird durch die Halbung einer Neigung aufgelöset.

Erster Fall.

$$F = x^2 + Dx - l^2$$

Man setze $\frac{2l}{D} = \operatorname{tg} 2p$

so sind die Wurzeln der Stufung

$$x_1 = l \operatorname{tg} p \qquad x_2 = \overline{l} \cot p$$
$$F = (x - x_1)(x - x_2)$$

Denn es ist alsdann

$$x_1 + x_2 = l.(\operatorname{tg} p - \cot p) = l. \frac{\sin^2 p - \cos^2 p}{\sin p \cos p}$$

also $x_1 + x_2 = 2\overline{l}. \cot 2p = \overline{D}$

$$x_1 . x_2 = l . \overline{l} . \operatorname{tg} p \cot p = \overline{1} . l^2$$

Zweiter Fall.

$$F = x^2 - Dx + l^2$$

Man setze $\frac{2l}{D} = \sin 2p$

so sind die Wurzeln der Stufung

$$x_1 = l \operatorname{tg} p \qquad x_2 = l \cot p$$
$$F = (x - x_1)(x - x_2)$$

Denn es ist alsdann:

$$x_1 + x_2 = l(\operatorname{tg} p + \cot p) = l. \frac{\sin^2 p + \cos^2 p}{\sin p \cos p}$$

also $x_1 + x_2 = \frac{2l}{\sin 2p} = D$

$$x_1 x_2 = l . l . \operatorname{tg} p \cot p = l^2$$

1. *Beispiel.*

$$F = x_2 + 1326x - 482120$$

l^2	5,68316	p	23° 9,7
l	2,84158	$\operatorname{tg} p$	9,63125
2	0,30103	l	2,84158
D	3,12254	x_1	2,47283 = 297,05
$\operatorname{tg} 2p$	0,02007	x_2	$\overline{3}$,21033 = $\overline{1}$623,05
$2p$	46° 19,4		

$$F = (x - 297{,}05)(x + 1623{,}05)$$

2. *Beispiel.*

$$F = x^2 - 11x + 19$$

l^2	1,27875	p	26° 12,65	
l	0,63937	tg p	9,69222	
2	0,30103	l	0,63937	
D	1,04139	x_1	0,33159	= 2,1458
sin $2p$	9,89901	x_2	0,94715	= 8,8542
$2p$	52° 25,3			

$$F = (x - 2{,}1458)\ (x - 8{,}8542)$$

Diese Zweistufungen heifsen *wirkhaft* weil ihre Wurzeln $x_1\ x_2$ *wirkliche* (reelle) Gröfsen sind welche maafshaft oder unmaafshaft sein können.

D heifst das *Durchmaafs* der Zweistufung,

l die *Seite* der Zweistufung,

$D^2 \pm 4l^2$ die *Fläche* (Determinante) (28.).

Denn es sei D das Durchmaafs eines Kreises, $x_1\ x_2$ die Abstände einer Ecke dieses Durchmaafses vom Kreise, so ist l im ersten Fall die aus dieser Ecke an den Kreis gezogene Seite (Berührende) im andern Fall das zum Durchmaafs an den Kreis gezogene Loth.

74.

Die Sinnstufung wird durch den Cosinus einer Neigung aufgelöset.

Die Zweistufung $F = x^2 - Dx + l^2$ heifst eine *Sinnstufung* wenn ihre Fläche $D^2 - 4l^2$ gegenhaft ist. D heifst das *Durchmaafs*, l die *Seite* (Modulus) der Sinnstufung. Man setze

$$\frac{D}{2l} = \cos p$$

so ist

$$F = x^2 - 2l\cos p \,.\, x + l^2$$
$$x_1 = l\cos p - il\sin p$$
$$x_2 = l\cos p + il\sin p$$
$$F = (x - x_1)\ (x - x_2)$$

Denn $x_1 + x_2 = 2l\cos p$

$x_1 x_2 = l^2\cos^2 p - i^2 l^2 \sin^2 p = l^2\cos^2 p + l^2\sin^2 p = l^2$

Die Wurzeln der Sinnstufung haben eine sehr bemerkenswerthe Eigenschaft. Es ist nämlich:

$(\cos p + i\sin p)\ (\cos q + i\sin q)$
$= \cos p\cos q - \sin p\sin q) + i\,(\sin p\cos q + \cos p\sin q)$
$= \cos\,(p + q) + i\sin\,(p + q)$

Setzt man also folgweise $q = p$ $q = 2p$ u. s. f.

und $x = l \cos p \pm i\, l \sin p$

so ist $x^2 = l^2 \cos 2p \pm i\, l^2 \sin 2p$

$x^3 = l^3 \cos 3p \pm i\, l^3 \sin 3p$

$x^m = l^m \cos mp \pm i\, l^m \sin mp$

75.

Die Dreistufung hat im ersten Falle drei wirkliche Wurzeln, im zweiten und dritten Falle eine wirkliche Wurzel und eine Sinnstufung.

Sie wird im ersten Falle durch die Drittelung einer Neigung, im zweiten und dritten Falle durch die Drittwurzel der Tangens einer Neigung aufgelöset.

Die Dreistufung sei

$$F = x^3 - cx^2 + bx - a$$

ihre Zugeleite $F_1 = 3x^2 - 2cx + b$

$$F_2 = 6x - 2c$$

Man setze $x = y + \frac{1}{3}c$

es sei $F = y^3 - 3l^2 y - 2D$

ihre Zugeleite $F_1 = 3y^2 - 3l^2$

$$F_2 = 6y$$

Wenn also $y = 0$ oder $x = \frac{1}{3}c$, so ist

$F_2 = 0$ $F_1 = \overline{3}\, l^2$ $F = \overline{2}\, D$

hieraus folgt $l^2 = \frac{1}{9}c^2 - \frac{1}{3}b$

$$D = \frac{1}{2}a - \frac{1}{6}bc + \frac{1}{27}c^3$$

Erster Fall.

Es sei l^2 setzhaft und $l^3 > D$.

Man setze $\frac{D}{l^3} = \cos 3p$

$p_2 = p + 120°$ $p_3 = p + 240°$

so sind die Wurzeln der Dreistufung:

$y_1 = 2l \cos p$ $y_2 = 2l \cos p_2$ $y_3 = 2l \cos p_3$

$x_1 = y_1 + \frac{1}{3}c$ $x_2 = y_2 + \frac{1}{3}c$ $x_3 = y_3 + \frac{1}{3}c$

$$F = (y - y_1)(y - y_2)(y - y_3) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

Zweiter Fall.

Es sei l^2 setzhaft und $l^3 < D$.

Man setze $\frac{l^3}{D} = \sin 2q$ $\qquad \sqrt[3]{\operatorname{tg} q} = \operatorname{tg} p$

so ist die wirkliche Wurzel $y_1 = \frac{2l}{\sin 2p}$

die Sinnstufung $y^2 + \frac{2l}{\sin 2p} y + l^2 \frac{\sin 2p}{\sin 2q}$

also $x_1 = \frac{1}{3}c + \frac{2l}{\sin 2p}$

Dritter Fall.

Es sei l^2 gegenhaft, und D beliebig.

Man setze $\frac{l^3}{D} = \operatorname{tg} 2q$ $\qquad \sqrt[3]{\operatorname{tg} q} = \operatorname{tg} p$

so ist die wirkliche Wurzel $y_1 = \frac{2l}{\operatorname{tg} 2p}$

die Sinnstufung $y^2 + \frac{2l}{\operatorname{tg} 2p} y + l^2 \frac{\operatorname{tg} 2p}{\operatorname{tg} 2q}$

also $x_1 = \frac{1}{3}c + \frac{2l}{\operatorname{tg} 2p}$

Beispiel des ersten Falles.

$$F = x^3 - \overline{4}x^2 + \overline{67}x - \overline{110}$$

$\frac{1}{9}c^2 =$	1,777...	$\frac{1}{2}a =$	$\overline{55}$
$-\frac{1}{3}b =$	22,333...	$-\frac{1}{6}bc =$	$\overline{44},666...$
$l^2 =$	24,111...	$\frac{1}{27}c^3 =$	$\overline{2},370...$
		$D =$	$\overline{102},037...$

l^2	1,38222	$3p$	149	31,5	$2l$ 0,99214
l	0,69111	p	49	50,5	$\cos p$ 9,80950
l_3	2,07333	p_2	169	50,5	$\cos p_2$ $\overline{9},99314$
D	$\overline{2},00876$	p_3	289	50,5	$\cos p_3$ 9,53074
$\cos 3p$	$\overline{9},93543$				

y_1	0,80164 $=$ 6,333...	x_1	$= 5$
y_2	$\overline{0},98528 =$ $\overline{9},666...$	x_2	$= \overline{11}$
y_3	0,52288 $=$ 3,333...	x_3	$= 2$
	$\frac{1}{3}c =$ $\overline{1},333...$		

$$F = (x - 5)(x + 11)(x - 2)$$

Beispiel des zweiten Falles.

$$F = x^3 - \overline{6}x^2 + 8x - 693$$

$$\tfrac{1}{9}c^2 = 4 \qquad \tfrac{1}{2}a = 346{,}5$$
$$-\tfrac{1}{3}b = \overline{2}{,}666\ldots \qquad -\tfrac{1}{6}bc = 8$$
$$l^2 = 1{,}333\ldots \qquad \tfrac{1}{27}c^3 = \overline{8}$$
$$D = 346{,}5$$

l^2	0,12494	q	0° 7′6375
l	0,06247	$\operatorname{tg} q$	7,34668
l^3	0,18741	$\operatorname{tg} p$	9,11556
D	2,53970	p	7° 26,05
$\sin 2q$	7,64771	$2p$	14° 52,1
$2q$	0° 15′,275		

$2l$	0,36350
$\sin 2p$	9,40926
y_1	0,95424
y_1	$= 9$
$\frac{1}{3}c$	$= \overline{2}$
x_1	$= 7$

$$F = (x - 7)(x^2 + 13x + 99)$$

Beispiel des dritten Falles.

$$F = x^3 - 10x^2 + 54x - 231$$

$$\tfrac{1}{9}c^2 = 11{,}111\ldots \qquad \tfrac{1}{2}a = 115{,}5$$
$$-\tfrac{1}{3}b = \overline{18} \qquad -\tfrac{1}{6}bc = \overline{90}$$
$$l^2 = \overline{6}{,}888\ldots \qquad \tfrac{1}{27}c^3 = 37{,}037\ldots$$
$$D = 62{,}537\ldots$$

l^2	0,83815	q	8° 3,77
l	0,41907	$\operatorname{tg} q$	9,15124
l^3	1,25722	$\operatorname{tg} p$	9,71708
D	1,79614	p	27° 32,
$\operatorname{tg} 2q$	9,46108	$2p$	55 4,
$2q$	16° 7,54		

$2l$	0,72010
$\operatorname{tg} 2p$	0,15585
y_1	0,56425
y_1	$= 3{,}666\ldots$
$\frac{1}{3}c$	$= 3{,}333\ldots$
x_1	$= 7$

$$F = (x - 7)(x^2 - 3x + 33)$$

76.

Beweise der obigen Auflösungen.

Beweis des ersten Falles.

$$p_2 = p + 120° \qquad p_3 = p + 240°$$
$$\cos p_2 = -\tfrac{1}{2}\cos p - \sqrt{\tfrac{3}{4}}\sin p$$
$$\cos p_3 = -\tfrac{1}{2}\cos p + \sqrt{\tfrac{3}{4}}\sin p$$
$$\cos p_2 + \cos p_3 = -\cos p$$
$$\cos p_2 \cdot \cos p_3 = \tfrac{1}{4}\cos^2 p - \tfrac{3}{4}\sin^2 p = \cos^2 p - \tfrac{3}{4}$$

$$\cos p\,\cos p_2 + \cos p\,\cos p_3 + \cos p_2\,\cos p_3 = 1 . \tfrac{3}{4}$$

$$\cos p\,\cos p_2\,\cos p_3 = \cos^3 p - \tfrac{3}{4}\cos p$$

aber $\cos 3p = \cos 2p\,\cos p - \sin 2p\,\sin p$

$$\cos 3p = (2\cos^2 p - 1)\cos p - 2\cos p\,.\,\sin^2 p$$

$$\cos 3p = (2\cos^2 p - 1)\cos p - 2\cos p\,(1 - \cos^2 p)$$

$$\cos 3p = 4\cos^3 p - 3\cos p$$

also $\cos p\,\cos p_2\,\cos p_3 = \tfrac{1}{4}\cos 3p$

aber $y_1 = 2l\cos p \quad y_2 = 2l\cos p_2 \quad y_3 = 2l\cos p_3$

also $y_1 + y_2 + y_3 = 0$

$$y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3 = -3 . l^2$$

$$y_1 y_2 y_3 = l^3 . 2\cos 3p = 2D$$

Beweis des zweiten Falles.

$$\frac{l^3}{D} = \sin 2q \qquad 2D = \frac{2l^3}{\sin 2q} = l^3(\cot q + \operatorname{tg} q)$$

$$\operatorname{tg} q = \operatorname{tg}^3 p \qquad \cot q = \cot^3 p$$

also $2D = l^3(\cot^3 p + \operatorname{tg}^3 p)$

$$y_1 = \frac{2l}{\sin 2p} = l(\cot p + \operatorname{tg} p)$$

$$y_1^3 = l^3(\cot^3 p + \operatorname{tg}^3 p) + 3l^3 \cot p \operatorname{tg} p\,(\cot p + \operatorname{tg} p)$$

also $y_1^3 = 2D + 3l^2 . y_1$

also $y_1^3 - 3l^2 y_1 - 2D = 0$

Beweis des dritten Falles.

$$\frac{l^3}{D} = \operatorname{tg} 2q \qquad 2D = 2l^3 \cot 2q = l^3(\cot q - \operatorname{tg} q)$$

$$\operatorname{tg} q = \operatorname{tg}^3 p \qquad \cot q = \cot^3 p$$

also $2D = l^3(\cot^3 p - \operatorname{tg}^3 p)$

$$y_1 = \frac{2l}{\operatorname{tg} 2p} = 2l\cot 2p = l(\cot p - \operatorname{tg} p)$$

$$y_1^3 = l^3(\cot^3 p - \operatorname{tg}^3 p) - 3l^3 \cot p \operatorname{tg} p\,(\cot p - \operatorname{tg} p)$$

also $y_1^3 = 2D - 3l^2 . y_1$

also $y_1^3 + 3l^2 y_1 - 2D = 0$

Beweis der Sinnstufung im zweiten Falle.

$\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\sin^2 2p < 1 \qquad \frac{1}{4} + 3\sin^2 p\cos^2 p < 1$

$\frac{1}{4} + 3\sin^2 p\cos^2 p < (\cos^2 p + \sin^2 p)^2$

$\frac{1}{4} < \cos^4 p - \cos^2 p\sin^2 p + \sin^4 p$

$\frac{1}{4} < (\cos^2 p + \sin^2 p)(\cos^4 p - \cos^2 p\sin^2 p + \sin^4 p)$

$\frac{1}{4} < \cos^6 p + \sin^6 p \qquad \frac{1}{4} < \cos^6 p\,(1 + \operatorname{tg}^6 p)$

$\frac{1}{4} < \cos^6 p\,(1 + \operatorname{tg}^2 q) \qquad \frac{1}{4}\cos^2 q < \cos^6 p$

$\frac{1}{2}\cos q < \cos^3 p \qquad \frac{\sin q}{\cos q} = \frac{\sin^3 p}{\cos^3 p}$

$\frac{1}{2}\sin q < \sin^3 p \qquad \frac{1}{4}\sin q\cos q < \sin^3 p\cos^3 p$

$\sin 2q < \sin^3 2p \qquad \frac{1}{\sin^2 2p} < \frac{\sin 2p}{\sin 2q}$

also $y^2 + \frac{2l}{\sin 2p}y + l^2\frac{\sin 2p}{\sin 2q}$ eine Sinnstufung.

Beweis der Sinnstufung im dritten Falle.

$3(1 + \operatorname{tg}^2 p)^2 > 0$

$4 + 4\operatorname{tg}^2 p + 4\operatorname{tg}^4 p > 1 - 2\operatorname{tg}^2 p + \operatorname{tg}^4 p$

$\frac{1}{2}(1 + \operatorname{tg}^2 p + \operatorname{tg}^4 p) > \frac{1}{8}(1 - \operatorname{tg}^2 p)^2$

$\frac{1}{2}(1 - \operatorname{tg}^6 p) > \frac{1}{8}(1 - \operatorname{tg}^2 p)^3$

$\frac{1}{2}(\cot^3 p - \operatorname{tg}^3 p) > \frac{1}{8}(\cot p - \operatorname{tg} p)^3$

$\frac{1}{2}(\cot q - \operatorname{tg} q) > \frac{1}{8}(\cot p - \operatorname{tg} p)^3 \qquad \cot 2q > \cot^3 2p$

$$\frac{\operatorname{tg} 2p}{\operatorname{tg} 2q} > \frac{1}{\operatorname{tg}^2 2p}$$

also $y^2 + \frac{2l}{\operatorname{tg} 2p}y + l^2\frac{\operatorname{tg} 2p}{\operatorname{tg} 2q}$ eine Sinnstufung.

Zusammenhang der drei Fälle.

$$F = y^3 - 3l^2 y - 2D = 0$$

$$y = u + v$$

$$y^3 = u^3 + v^3 + 3uvy$$

$uv = l^2 \qquad u^3 v^3 = l^6 \qquad u^3 + v^3 = 2D$

$$u^3 = D + \sqrt{D^2 - l^6}$$

$$v^3 = D - \sqrt{D^2 - l^6}$$

Erster Fall. $D = l^3 \cos 3p \qquad D^2 - l^6 = i^2 l^6 \sin^2 3p$

$$u^3 = l^3(\cos 3p + i \sin 3p) = l^3(\cos p + i \sin p)^3$$
$$v^3 = l^3(\cos 3p - i \sin 3p) = l^3(\cos p - i \sin p)^3$$
$$u = l \cos p + i l \sin p$$
$$v = l \cos p - i l \sin p$$
$$y = u + v = 2 l \cos p$$

Zweiter Fall. $D = \frac{l^3}{\sin 2q} \qquad D^2 - l^6 = l^6 . \frac{\cos^2 2q}{\sin^2 2q}$

$$u^3 = l^3 \frac{1 + \cos 2q}{\sin 2q} = l^3 . \cot q = l^3 \cot^3 p$$
$$v^3 = l^3 \frac{1 - \cos 2q}{\sin 2q} = l^3 . \operatorname{tg} q = l^3 \operatorname{tg}^3 p$$
$$u = l \cot p \qquad v = l \operatorname{tg} p$$
$$y = u + v = l(\cot p + \operatorname{tg} p) = \frac{2 l}{\sin 2p}$$

Dritter Fall. $y^3 - 3 l^2 y - 2 D = 0$

$$u^3 = D + \sqrt{D^2 + l^6}$$
$$v^3 = D - \sqrt{D^2 + l^6}$$
$$D = l^3 \frac{1}{\operatorname{tg} 2q} \qquad D^2 + l^6 = l^6 \frac{1}{\sin^2 2q}$$
$$u^3 = l^3 \frac{\cos 2q + 1}{\sin 2q} = l^3 \cot q = l^3 . \cot^3 p$$
$$v^3 = l^3 \frac{\cos 2q - 1}{\sin 2q} = \bar{1} . l^3 \operatorname{tg} q = \bar{1} . l^3 \operatorname{tg}^3 p$$
$$u = l \cot p \qquad v = \bar{1} . l \operatorname{tg} p$$
$$y = u + v = l(\cot p - \operatorname{tg} p) = \frac{2 l}{\operatorname{tg} 2p}$$

Anwendung der Gaufsischen Tafeln bei gröfsern Nebenzahlen.

Beispiel.

$$F = x^3 - 83{,}42 x^2 + 5292{,}4964 x - 335650{,}121688$$

c	1,92127	b	3,72366	a	5,52588
$\frac{1}{3}c$	1,44415	$\frac{1}{2}b$	3,42263	$\frac{1}{2}a$	5,22485
$\frac{1}{9}c^2$	2,88830	$\frac{1}{3}c$	1,44415	r	$\bar{4}$,71669
$\frac{1}{3}b$	$\bar{3}$,24654	$\frac{1}{6}bc$	$\bar{4}$,86678	C	0,50816
C	0,35824	$\frac{1}{27}c^3$	4,33245	A	0,34680
A	0,10775	C	0,53433	D	5,06349
l^2	$\bar{2}$,99605	A	0,38424		
		r	$\bar{4}$,71669		

l^2	2,99605	$2q$	15° 5,0	$2l$	1,79905
l	1,49802	q	7 32,5	tg $2p$	0,13892
l^3	4,49407	tg q	9,12187	y_1	1,66013
D	5,06349	tg p	9,70729	y_1	= 45,722
tg $2q$	9,43058	p	27° 0,39	$\frac{1}{3}c$	= 27,806
		$2p$	54 0,78	x_1	= 73,528

77.

Die Vierstufung läfst sich dreimal in Zweistufungen zerlegen, deren Seite und Durchmaafs durch eine Dreistufung bestimmt werden.

$$F = x^4 - dx^3 + cx^2 - bx + a$$

$$F = (x^2 - Dx + l^2)(x^2 - D_1 x + l_1^2)$$

$$l^2 l_1^2 = a \qquad l^2 D_1 + l_1^2 D = b$$

$$D + D_1 = d \qquad l^2 + l_1^2 + DD_1 = c$$

$$D = \frac{dl^2 - b}{l^2 - l_1^2} \qquad D_1 = \frac{b - dl_1^2}{l^2 - l_1^2}.$$

$$DD_1 = \frac{bd(l^2 + l_1^2) - b^2 - ad^2}{(l^2 - l_1^2)^2}$$

Es sei also $l^2 + l_1^2 = \omega$

so ist $(l^2 - l_1^2)^2 = (l^2 + l_1^2)^2 - 4l^2 l_1^2 = \omega^2 - 4a$

$$c - \omega = \frac{bd.\omega - b^2 - ad^2}{\omega^2 - 4a}$$

hieraus die Dreistufung

$$G = \omega^3 - c\omega^2 + (bd - 4a)\omega - (b^2 + ad^2 - 4ac)$$

Wenn hieraus die Wurzel ω gefunden worden ist so sind die Seiten l^2 u. l_1^2 die beiden Wurzeln der Zweistufung $l^4 - \omega l^2 + a = 0$

oder $l^2 = \frac{1}{2}\omega + \sqrt{\frac{1}{4}\omega^2 - a}$ $l_1^2 = \frac{1}{2}\omega - \sqrt{\frac{1}{4}\omega^2 - a}$

Wenn $\omega = v + \frac{1}{3}c$

so ist $G = v^3 - 3\lambda^2 v - 2\Delta$

$$\lambda^2 = \tfrac{1}{9}c^2 + \tfrac{1}{3}(4a - bd)$$

$$\Delta = \tfrac{1}{2}(b^2 + ad^2) - \tfrac{1}{6}(bcd + 8ac) + \tfrac{1}{27}c^3$$

Es sei $DD_1 = r$, also $\omega = c - r$, so ist

$$\overline{G} = r^3 - 2cr^2 + (bd + c^2 - 4a)r - (bcd - b^2 - ad^2)$$

Wenn hieraus die Wurzel r gefunden worden ist, so sind die Durchmaafse D und D_1 die beiden Wurzeln der Zweistufung

$$D^2 - dD + r = 0$$

oder $D = \frac{1}{2}d - \sqrt{\frac{1}{4}d^2 - r}$ $D_1 = \frac{1}{2}d + \sqrt{\frac{1}{4}d^2 - r}$

Endlich sei $D_1 - D = 2y$

so ist $D = \frac{1}{2}d - y$ $D_1 = \frac{1}{2}d + y$

$$DD_1 = r = \tfrac{1}{4}d^2 - y^2$$

$$\omega = c - r = c - \tfrac{1}{4}d^2 + y^2$$

$$l^2(\tfrac{1}{2}d + y) + l_1^2(\tfrac{1}{2}d - y) = b$$

$$\tfrac{1}{2}\omega d + (l^2 - l_1^2)y = b$$

$$l^2 - l_1^2 = \frac{b - \frac{1}{2}\omega d}{y}$$

$$l^2 = \tfrac{1}{2}\omega + \frac{1}{y}(\tfrac{1}{2}b - \tfrac{1}{4}\omega d)$$

$$l_1^2 = \tfrac{1}{2}\omega - \frac{1}{y}(\tfrac{1}{2}b - \tfrac{1}{4}\omega d)$$

wo $y^2 = \omega + \frac{1}{4}d^2 - c$

Die Beispiele folgen zum nächsten Satz.

Die Dreistufungen für ω und r lassen sich auch auf folgende Art finden:

Die Wurzeln von F seien 1, 2, 3, 4, so ist

$a = 1234$ $b = 123 + 124 + 134 + 234$

$c = 12 + 13 + 14 + 23 + 24 + 34$

$d = 1 + 2 + 3 + 4$

Die Wurzeln von G seien $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, und r_1, r_2, r_3, so ist

$\omega_1 = 12 + 34$ $\omega_2 = 13 + 24$ $\omega_3 = 14 + 23$

$r_1 = (1+2)(3+4)$ $r_2 = (1+3)(2+4)$ $r_3 = (1+4)(2+3)$

oder $r_1 = c - \omega_1$ $r_2 = c - \omega_2$ $r_3 = c - \omega_3$

Hieraus folgt

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = c$$
$$r_1 + r_2 + r_3 = 2c$$
$$\omega_1\omega_2 + \omega_1\omega_3 + \omega_2\omega_3 = bd - 4a$$
$$r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 = bd - 4a + c^2$$
$$\omega_1\omega_2\omega_3 = a(1^2+2^2+3^2+4^2)+(123)^2+(124)^2+(134)^2+(234)^2$$
$$= a(d^2 - 2c) + b^2 - 2ac = b^2 + ad^2 - 4ac$$
$$r_1 r_2 r_3 = bcd - b^2 - ad^2$$

78.

Die Wurzeln einer Vierstufung werden durch Glieder dargestellt, welche den vier eingeschriebenen Kreisen eines Dreiseits entsprechen.

$$F = x^4 - dx^3 + cx^2 - bx + a$$
$$x = u + \tfrac{1}{4}d$$
$$F = u^4 + \tfrac{1}{2}hu^2 + gu + f$$
$$F_1 = 4x^3 - 3dx^2 + 2cx - b = 4u^3 + hu + g$$
$$F_2 = 12x^2 - 6dx + 2c = 12u^2 + h$$
$$F_3 = 24x - 6d = 24u$$

Wenn $u = 0$, $x = \tfrac{1}{4}d$

so ist $F_3 = 0$, $F_2 = h$, $F_1 = g$, $F = f$

also
$$f = -\tfrac{3}{256}d^4 + \tfrac{1}{16}cd^2 - \tfrac{1}{4}bd + a$$
$$g = -\tfrac{1}{8}d^3 + \tfrac{1}{2}cd - b$$
$$h = -\tfrac{3}{4}d^2 + 2c$$

Es sei

$$2x_1 = \tfrac{1}{2}d + 2u_1 = \tfrac{1}{2}d - y_1 - y_2 - y_3$$
$$2x_2 = \tfrac{1}{2}d + 2u_2 = \tfrac{1}{2}d - y_1 + y_2 + y_3$$
$$2x_3 = \tfrac{1}{2}d + 2u_3 = \tfrac{1}{2}d + y_1 - y_2 + y_3$$
$$2x_4 = \tfrac{1}{2}d + 2u_3 = \tfrac{1}{2}d + y_1 + y_2 - y_3$$

so ist
$$D = x_1 + x_2 = \tfrac{1}{2}d - y_1$$
$$D_1 = x_3 + x_4 = \tfrac{1}{2}d + y_1$$

Also ist y_1 dieselbe Gröfse welche in dem vorigen Satze (77.) durch y bezeichnet wurde. Es seien also $\omega_1\ \omega_2\ \omega_3$ die drei Wurzeln der in dem vorigen Satze für ω gefundenen Dreistufung

$$G = \omega^3 - c\omega^2 + (bd - 4a)\omega - (b^2 + ad^2 - 4ac)$$

so ist
$$y_1^2 = \omega_1 + \tfrac{1}{4}d^2 - c$$
$$y_2^2 = \omega_2 + \tfrac{1}{4}d^2 - c$$
$$y_3^2 = \omega_3 + \tfrac{1}{4}d^2 - c$$

Es seien $y_1\ y_2\ y_3$ die drei Seiten eines Dreiseits, $R_1\ R_2\ R_3\ R_4$ die Halbmaafse der vier eingeschriebenen Kreise so sind $u_1\ u_2\ u_3\ u_4$ die Abstände der Berührungsecken von den Ecken des Dreiseits. Der Inhalt des Dreiseits sei A, so ist

$$A = R_1\bar{u}_1 = R_2u_2 = R_3u_3 = R_4u_4$$
$$A^2 = \bar{u}_1\,u_2\,u_3\,u_4 = f$$
$$4\,u_1u_2 = y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - 2\,y_2y_3$$
$$4\,u_3u_4 = y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 + 2\,y_2y_3$$
$$16f = (y_1^2 - y_2^2 - y_3^2)^2 - 4\,y_2^2y_3^2$$
$$16f = y_1^4 + y_2^4 + y_3^4 - 2(y_1^2y_2^2 + y_1^2y_3^2 + y_2^2y_3^2)$$
$$16f = (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)^2 - 4(y_1^2y_2^2 + y_1^2y_3^2 + y_2^2y_3^2)$$
$$g = (\bar{u}_1 + \bar{u}_2)\,u_3u_4 + (\bar{u}_3 + \bar{u}_4)\,u_1u_2$$
$$g = y_1(u_3u_4 - u_1u_2) = y_1y_2y_3$$

Die Vorzeichen von $y_1\ y_2\ y_3$ müssen also mit dem von g übereinstimmen.

$$\tfrac{1}{2}h = u_1u_2 + u_3u_4 + (u_1 + u_2)(u_3 + u_4)$$
$$\tfrac{1}{2}h = \tfrac{1}{2}y_1^2 - \tfrac{1}{2}y_2^2 - \tfrac{1}{2}y_3^2 - y_1^2$$
$$\bar{h} = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$$
$$\tfrac{1}{4}h^2 - 4f = y_1^2y_2^2 + y_1^2y_3^2 + y_2^2y_3^2$$
$$g^2 = y_1^2y_2^2y_3^2$$

Es sind also $y_1^2\,y_2^2\,y_3^2$ die Wurzeln der Dreistufung

$$H = y^6 - \bar{h}y^4 + (\tfrac{1}{4}h^2 - 4f)\,y^2 - g^2$$

Diese Dreistufung ergiebt sich auch wenn in die Dreistufung G für ω der Werth $y^2 + c - \frac{1}{4}d^2$ gesetzt wird; wo dann

$$\tfrac{1}{4}h^2 - 4f = (\tfrac{1}{4}d^2 - c)(\tfrac{3}{4}d^2 - c) + bd - 4a$$

Hier finden drei Fälle statt.

Im *ersten Falle* hat H drei wirkliche setzhafte Wurzeln. Dann sind $y_1\,y_2\,y_3$ wirkliche Gröfsen, und die Vierstufung F hat vier wirkliche Wurzeln.

Im *zweiten Falle* enthält H eine Sinnstufung

$$H = (y^2 - y_1^2)(y^4 - \alpha y^2 + \beta^2)$$
$$(y_2 + y_3)^2 = \alpha + 2\beta$$
$$(y_2 - y_3)^2 = \alpha - 2\beta$$

Folglich ist alsdann $y_2 + y_3$ eine wirkliche Gröfse, $y_2 - y_3$ eine Sinngröfse und die Vierstufung F hat zwei

wirkliche und zwei Sinnwurzeln, oder eine wirkhafte Zweistufung und eine Sinnstufung.

Im *dritten Falle* ist y_1^2 setzhaft, y_2^2 und y_3^2 sind gegenhaft. Dann ist in y_2 und y_3 die Sinngröfse i mit verschiedenen Nebenzahlen gebunden, also i sowohl in $y_2 + y_3$ als in $y_2 - y_3$ enthalten. Alsdann hat also F vier Sinnwurzeln oder zwei Sinnstufungen.

Beispiel zum ersten Fall.

$$F = x^4 - 28x^3 + 236x^2 - 752x + 768$$

$$bd = 21056 \qquad b^2 = 565504$$
$$-4a = \overline{3072} \qquad ad^2 = 602112$$
$$b_1 = \overline{17984} \qquad -4ac = \overline{724992}$$
$$c_1 = 236 \qquad a_1 = \overline{442624}$$

$$G = \omega^3 - 236\omega^2 + 17984\omega - 442624$$

$$\tfrac{1}{9}c_1^2 = 6188{,}444..$$
$$-\tfrac{1}{3}b_1 = \overline{5994{,}666}..$$
$$\lambda^2 = 193{,}777..$$

$$\tfrac{1}{2}a_1 = 221312$$
$$-\tfrac{1}{6}b_1c_1 = \overline{707370{,}666}..$$
$$\tfrac{1}{27}c_1^3 = 486824{,}296..$$
$$\triangle = \overline{765{,}629}..$$

λ^2	2,28730	$3p$	73	30,64	2λ 1,44468
λ	1,14365	p	24	30,21	$\cos p$ 9,95901
λ^3	3,43095	p_2	144	30,21	$\cos p^2$ $\overline{9}$,91071
$\triangle$	2,88402	p_3	264	30,21	$\cos p_3$ $\overline{8}$,98129
$\cos 3p$	9,45307				

$$v_1\ 1{,}40369 = 25{,}33..$$
$$v_2\ \overline{1}{,}35539 = \overline{22}{,}66..$$
$$v_3\ \overline{0}{,}42597 = \overline{2}{,}66..$$
$$\tfrac{1}{3}c = 78{,}66..$$

$$\tfrac{1}{4}d^2 = 196$$
$$c = 236$$
$$\tfrac{1}{4}d^2 - c = \overline{40}$$

ω	y^2	y	$\frac{1}{2}b - \frac{1}{4}\omega d$	D	D_1	l^2	l_1^2
104	64	$\overline{8}$	$\overline{352}$	22	6	96	8
56	16	$\overline{4}$	$\overline{16}$	18	10	32	24
76	36	$\overline{6}$	$\overline{156}$	20	8	64	12

$$x_1 = 7 + 4 + 2 + 3 = 16$$
$$x_2 = 7 + 4 - 2 - 3 = 6$$
$$x_3 = 7 - 4 + 2 - 3 = 2$$
$$x_4 = 7 - 4 - 2 + 3 = 4$$

$$F = (x^2 - 22x + 96)(x^2 - 6x + 8)$$
$$= (x^2 - 18x + 32)(x^2 - 10x + 24)$$
$$= (x^2 - 20x + 64)(x^2 - 8x + 12)$$

Beispiel zum zweiten Fall.

$$F = x^4 - \overline{4}\,x^3 + \overline{100}\,x^2 - \overline{200}\,x + \overline{273}$$

bd	$= 800$	b^2	$= 40000$
$-4a$	$= 1092$	ad^2	$= \overline{4368}$
b_1	$= \overline{1892}$	$-4ac$	$= \overline{109200}$
c_1	$= \overline{100}$	a_1	$= \overline{73568}$

$$G = \omega^3 - \overline{100}\,\omega^2 + 1892\,\omega - \overline{73568}$$

$\frac{1}{9}c_1^2$	$= 1111{,}11\ldots$	$\frac{1}{2}a_1$	$= \overline{36784}$
$-\frac{1}{3}b_1$	$= \overline{630{,}66}\ldots$	$-\frac{1}{6}b_1c_1$	$= 31533{,}333\ldots$
λ^2	$= 480{,}44\ldots$	$\frac{1}{27}c_1^3$	$= \overline{37037{,}037}\ldots$
		$\triangle$	$= \overline{42287{,}703}\ldots$

λ^2	2,68164	q	97 12,6	2λ	1,64185
λ	1,34082	tg q	$\overline{0}$,89789	sin $2p$	$\overline{9}$,90413
λ^3	4,02246	tg p	$\overline{0}$,29930	v	$\overline{1}$,73772
$\triangle$	$\overline{4}$,62621	p	116° 39,4	v	$= \overline{54{,}666}$
sin $2q$	$\overline{9}$,39625	$2p$	233° 18,8	$\frac{1}{3}c$	$= \overline{33{,}333}$
$2q$	194° 25,2				

$$\tfrac{1}{4}d^2 - c = 104$$

ω	y^2	y	$\frac{1}{2}b - \frac{1}{4}\omega d$	D	D_1	l^2	l_1^2
$\overline{88}$	16	4	$\overline{188}$	$\overline{6}$	2	$\overline{91}$	3

$$F = (x^2 + 6x - 91)\,(x^2 - 2x + 3)$$

$x_1 = \overline{13}$ $\quad x_2 = 7$ $\quad x_3 = \overline{1} - i\sqrt{2}$ $\quad x_4 = \overline{1} + i\sqrt{2}$

Beispiel zum dritten Fall.

$$F = x^4 - 8x^3 + 28x^2 - 49x + 40$$

bd	$= 392$	b^2	$= 2401$
$-4a$	$= \overline{160}$	ad^2	$= 2560$
b_1	$= \overline{232}$	$-4ac$	$= \overline{4480}$
c_1	$= 28$	a_1	$= \overline{481}$

$$G = \omega^3 - 28\,\omega^2 + 232\,\omega - 481$$

$\frac{1}{9}c_1^2$	$= 87{,}11\ldots$	$\frac{1}{2}a_1$	$= 240{,}5$
$-\frac{1}{3}b_1$	$= \overline{77{,}33}\ldots$	$-\frac{1}{6}b_1c_1$	$= \overline{1082{,}666}\ldots$
λ^2	$= 9{,}77\ldots$	$\frac{1}{27}c_1^3$	$= 813{,}037\ldots$
		$\triangle$	$= \overline{29{,}1296}\ldots$

λ^2	0,99024	$3p$	162	18,75	2λ	0,79615	
λ	0,49512	p	54	6,25	$\cos p$	9,76813	
λ^3	1,48536	p_2	174	6,25	$\cos p_2$	$\overline{9}$,99769	
$\triangle$	$\overline{1}$,46433	p_3	294	6,25	$\cos p_3$	9,61108	
$\cos 3p$	$\overline{9}$,97897				v_1	0,56428 = 3,6666 . .	
					v_2	$\overline{0}$,79384 = $\overline{6}$,2207 . .	
	$\frac{1}{4}d^2 - c = \overline{12}$				v_3	0,40723 = 2,5541 . .	
						$\frac{1}{3}c$ = 9,3333 . .	

ω	y^2	y	$\frac{1}{2}b - \frac{1}{4}\omega d$	D	D_1	l^2	l_1^2
13	1	$\overline{1}$	$\overline{1\frac{1}{2}}$	5	3	8	5

$$F = (x^2 - 5x + 8)(x^2 - 3x + 5)$$

79.

Jede Stufung läfst sich durch fortgesetzte Einrahmung auflösen. *)

Die Stufung sei als Gleichung dargestellt.

$$F = a - bx + cx^2 \ldots \pm x^m = 0$$

Man vereinige die ungradstelligen und gradstelligen Glieder in zwei besondre Anlagen, bilde von jeder Anlage die Zweithöhe oder den Rahmen, so geben diese wieder eine nichtige Gleichung:

$$G = a + cx^2 + ex^4 \ldots$$

$$G = bx + dx^3 + fx^5 \ldots$$

$$G^2 = a^2 + 2acx^2 + (2ae + c^2)x^4 \ldots$$

$$G^2 = b^2x^2 + 2bdx^4 + (2bf + d^2)x^6 \ldots$$

$$H = a_1 - b_1x^2 + c_1x^4 - d_1x^6 \ldots \pm x^{2m} = 0$$

$$a_1 = a^2$$
$$b_1 = b^2 - 2ac$$
$$c_1 = c^2 - 2bd + 2ae$$
$$d_1 = d^2 - 2ce + 2bf - 2ag$$

u. s. f.

Nach diesen Ausdrücken bildet man also

aus den Nebenzahlen $a\ b\ c\ d \ldots$
die Nebenzahlen $a_1\ b_1\ c_1\ d_1 \ldots$
aus diesen die Nebenzahlen $a_{11}\ b_{11}\ c_{11}\ d_{11} \ldots$

u. s. f.

*) Dieses Verfahren erfand Gräffe in seiner Preisschrift: »Ueber die höhern numerischen Gleichungen. Zürich 1837.«

Bei der Berechnung durch Höhennamen ist die Anwendung der Gaufsischen Tafeln besonders vortheilhaft. Die durch fortgesetzte Einrahmung erlangte Stufung ist alsdann

$$N = a_n - b_n x^n + c_n x^{2n} \ldots . \pm x^{nm} = 0$$

Es ist aber

a das Gebinde aller m Wurzeln von F

b die Anlage der Gebinde aller $m - 1$ Wurzeln von F

c die Anlage der Gebinde aller $m - 2$ Wurzeln von F

u. s. f.

Also ist

a_n das Gebinde der $n$ten Höhen aller m Wurzeln von F

b_n die Anlage der Gebinde der $n$ten Höhen aller $m - 1$ Wurzeln von F

c_n die Anlage der Gebinde der $n$ten Höhen aller $m - 2$ Wurzeln von F

u. s. f.

Wenn aber von mehrern ungleichen Zahlen $u\, u_1\, u_2\, u_3 \ldots . u$ die gröfste ist, so ist

$$u = \sqrt[n]{u^n + u_1^n + u_2^n + u_3^n \ldots}$$

desto genauer je gröfser n ist.

Wenn man also die Einrahmung bis zu dieser Grenze fortsetzt, und wenn $x_1\, x_2\, x_3 \ldots$ die nach ihrem Anwerth gereiheten Wurzeln von F sind, so dafs x_1 die kleinste, x_2 die nächstgröfsere u. s. w., so ist

$$\sqrt[n]{a_n} = a = x_1 x_2 x_3 x_4 \ldots x_m$$

$$\sqrt[n]{b_n} = x_2 x_3 x_4 \ldots x_m$$

$$\sqrt[n]{c_n} = x_3 x_4 \ldots x_m$$

u. s. f.

also ist

$$x_1 = \frac{\sqrt[n]{a_n}}{\sqrt[n]{b_n}} \qquad x_2 = \frac{\sqrt[n]{b_n}}{\sqrt[n]{c_n}} \qquad x_3 = \frac{\sqrt[n]{c_n}}{\sqrt[n]{d_n}}$$

Hiedurch ergeben sich sämmtliche nach ihrem Anwerth gereihete wirkliche Wurzeln von F.

Wenn zwei derselben einander nahezu gleich sind, so ist es nicht nöthig die Einrahmung bis zur Trennungs-

grenze fortzuführen, sondern es ist hinreichend ihr Gebinde zu bestimmen. Z. B.

$$x_1 x_2 = \frac{\sqrt[n]{a_n}}{\sqrt[n]{c_n}} \qquad x_2 x_3 = \frac{\sqrt[n]{b_n}}{\sqrt[n]{d_n}} \qquad \text{u. s. f.}$$

Im nächsten Satze wird gezeigt wie aus dem Gebinde zweier Wurzeln ihre Anlage gefunden werden kann.

Wenn die Stufung Sinnwurzeln enthält, so ist

ihr Gebinde $= l^2$

ihre Anlage $D = 2\,l \cos p$

die Anlage ihrer Höhen $= 2\,l^n \cos np$

Also ist diejenige Nebenzahl von N welche in der Reihe der Wurzeln dem Anwerth von l entspricht, *schwankend*, d. h. sie giebt erst durch Theilung mit $2 \cos np$ den Werth von l^n.

Die gegebene Stufung enthält demnach *soviel Sinnstufungen als sich bei fortgesetzter Einrahmung Schwankungen* zeigen. Man erhält alsdann auf die oben angezeigte Art durch Theilung der nächstvorhergehenden mit der nächstfolgenden Nebenzahl das Gebinde der Sinnwurzeln $= l^2$, und hieraus ihre Anlage oder das Durchmaafs der Sinnstufung D, nach Anleitung des folgenden Satzes.

80.

Aus der Seite der Zweistufung das Durchmaafs oder aus dem Gebinde zweier Wurzeln ihre Anlage zu bestimmen.

Wenn bei der Dreistufung

$x^3 - cx^2 + bx - a = (x - x_1)(x^2 - Dx + l^2)$

die wirkliche Wurzel x_1 und das Gebinde der beiden andern $= l^2$ gefunden worden ist, so ergiebt sich ihre Anlage oder das Durchmaafs D leicht aus folgenden Gleichungen

$$a = x_1 l^2 \qquad b = x_1 D + l^2 \qquad c = D + x_1$$

Es sei die Vierstufung

$$F = x^4 - dx^3 + cx^2 - bx + a$$
$$= (x^2 - Dx + l^2)(x^2 - D_1 x + l_1^2)$$

so hat man die Gleichungen

$$a = l^2 l_1^2 \qquad b = l_1^2 D + l^2 D_1$$
$$c = DD_1 + l^2 + l_1^2 \qquad d = D + D_1$$

hieraus $D = \frac{dl^2 - b}{l^2 - l_1^2} = \frac{dl^4 - bl^2}{l^4 - a}$

$D_1 = \frac{b - dl_1^2}{l^2 - l_1^2} = \frac{dl_1^4 - bl_1^2}{l_1^4 - a}$

Wenn in der Fünfstufung die wirkliche Wurzel x_1 gefunden ist, so wird sie als Vierstufung behandelt.

Beispiele.

$F = x^4 - 8x^3 + 73x^2 - 208x + 697$

$x_1 x_2 = l^2 = 17 \qquad x_3 x_4 = l_1^2 = 41$

$D = \frac{8.17 - 208}{17 - 41} = 3 \qquad D_1 = \frac{8.41 - 208}{41 - 17} = 5$

$F = (x^2 - 3x + 17)(x^2 - 5x + 41)$

$F = x^5 - 30x^4 + 313x^2 - 2313x^2 + 7118x - 13585$

$l^2 = 11 \qquad l_1^2 = 65 \qquad x_1 = 19$

$30 - x_1 = 11 \qquad \frac{7118 - l^2 l_1^2}{x_1} = 337$

$D = \frac{11.11 - 337}{11 - 65} = 4 \qquad D_1 = \frac{11.65 - 337}{65 - 11} = 7$

$F = (x^2 - 4x + 11)(x^2 - 7x + 65)(x - 19)$

Es sei die Sechsstufung

$F = x^6 - fx^5 + ex^4 - dx^3 + cx^2 - bx + a$

so ist

$a = l^2 . l_1^2 . l_2^2$

$b = l^2 l_1^2 D_2 + l_1^2 l_2^2 D + l_2^2 l^2 D_1$

$c = l^2 D_1 D_2 + l_1^2 D_2 D + l_2^2 D D_1 + l^2 l_1^2 + l_1^2 l_2^2 + l_2^2 l^2$

$d = l^2(D_1 + D_2) + l_1^2(D_2 + D) + l_2^2(D + D_1) + D D_1 D_2$

$e = D D_1 + D_1 D_2 + D_2 D + l^2 + l_1^2 + l_2^2$

$f = D + D_1 + D_2$

Hieraus folgt:

I. $D_1 D_2 = e - (l^2 + l_1^2 + l_2^2) - fD + D^2$

II. $l^2 D_1 D_2 = c - (l^2 l_1^2 + l_1^2 l_2^2 + l_2^2 l^2) + \frac{(b - l_1^2 l_2^2 D)}{l^2} D$

III. $b - f l^2 l_1^2 = (l_2^2 - l^2) l_1^2 D + (l_2^2 - l_1^2) l^2 D_1$

IV. $b - f l^2 l_2^2 = (l_1^2 - l^2) l_2 D + (l_1^2 - l_2^2) l^2 D_2$

V. $l^2 D D_1 D_2 = -b + l^2 d - l^4 f + (l_1^2 - l^2)(l_2^2 - l^2) D$

Hieraus lassen sich mehrere Zweistufungen für D finden. Z. B. aus I. II.

$$(a - l^6) D^2 - (bl^2 - fl^6) D + cl^4 - el^6 - (a - l^6) l^2 = 0$$

Beispiel.

$$F = x^6 + 13x^5 + 238x^4 + 1667x^3 + 8303x^2 + 16448x + 28086$$

$$l^2 = 6 \qquad l_1^2 = 31 \qquad l_2^2 = 151$$

$$a - l^6 = 27870 \qquad - bl^2 + fl^6 = 95880$$

$$- al^2 + cl^4 - el^6 + l^8 = 80280$$

$$27870 D^2 + 95880 D + 80280 = 0$$

Hieraus $D = \overline{2}$

$$720 D_1 = \overline{14}030 - 4495 D \qquad D_1 = \overline{7}$$

$$720 D_2 = 4670 + 3775 D \qquad D_2 = \overline{4}$$

$$F = (x^2 + 2x + 6)(x^2 + 7x + 31)(x^2 + 4x + 151)$$

Wenn in der Siebenstufung die wirkliche Wurzel x_1 gefunden ist, so wird sie als Sechsstufung behandelt.

Durch Anwendung der Neigungszahlen *) können für jede gradnamige Stufung die beiden Gleichungen zwischen dem Durchmaafs und der Seite auf folgende Art gefunden werden.

Es sei die Achtstufung als Beispiel:

$$a - bx + cx^2 - dx^3 + ex^4 - fx^5 + gx^6 - hx^7 + x^8$$

$$x = l \cos p + il \sin p$$

$$x^n = l^n \cos np + i . l^n \sin np$$

Hieraus die beiden Gleichungen:

$$a - bl \cos p + cl^2 \cos 2p - dl^3 \cos 3p + el^4 \cos 4p$$
$$- fl^5 \cos 5p + gl^6 \cos 6p - hl^7 \cos 7p + l^8 \cos 8p = 0$$

$$- bl \sin p + cl^2 \sin 2p - dl^3 \sin 3p + el^4 \sin 4p$$
$$- fl^5 \sin 5p + gl^6 \sin 6p - hl^7 \sin 7p + l^8 \sin 8p = 0$$

Man binde die erste mit $\cos 4p$ und $\sin 4p$
die andere mit $\sin 4p$ und $\cos 4p$
so ergiebt sich durch Anlegung und Abziehung:

*) Dieses Verfahren wurde von Gräffe a. a. O. S. 30 angezeigt, und von Enke in »Berl. astr. Nachrichten 1841 S. 297« weiter ausgebildet.

$$(a + l^8)\cos 4p - (bl + hl^7)\cos 3p + (cl^2 + gl^6)\cos 2p - (dl^3 + fl^5)\cos p + el^4 = 0$$

$$(a - l^8)\sin 4p - (bl - hl^7)\sin 3p + (cl^2 - gl^6)\sin 2p - (dl^3 - fl^5)\sin p = 0$$

Es ist aber

$$\cos 2p = 2\cos^2 p - 1 \qquad \frac{\sin 2p}{\sin p} = 2\cos p$$

$$\cos 3p = 4\cos^3 p - 3\cos p \qquad \frac{\sin 3p}{\sin p} = 4\cos^2 p - 1$$

$$\cos 4p = 8\cos^4 p - 8\cos^2 p + 1 \qquad \frac{\sin 4p}{\sin p} = 8\cos^3 p - 4\cos p$$

$$\cos p = \frac{D}{2l}$$

Diese Werthe eingesetzt geben

$$(a + l^8)(\tfrac{1}{2}\frac{D^4}{l^4} - 2\frac{D^2}{l^2} + 1) - (b + hl^6)(\tfrac{1}{2}\frac{D^3}{l^2} - \tfrac{3}{2}D)$$

$$+ (cl^2 + gl^6)(\tfrac{1}{2}\frac{D^2}{l^2} - 1) - (dl^2 + fl^4)\tfrac{1}{2}D + el^4 = 0$$

$$(a - l^8)\left(\frac{D^3}{l^4} - 2\frac{D}{l^2}\right) - (b - hl^6)\left(\frac{D^2}{l^2} - 1\right)$$

$$+ (cl^2 - gl^6)\frac{D}{l^2} - (dl^2 - fl^4) = 0$$

Diese beiden Gleichungen müssen eine Gemeinwurzel haben, welche also auch ohne Auflösung derselben durch Bestimmung des Gemeintheilers gefunden werden kann.

Beispiel.

$$F = x^8 - 7x^7 + 8x^6 - \overline{5}x^5 + \overline{30}x^4 - \overline{29}x^3 + \overline{11}x^2 - 8x + 6 = 0$$

$$l^2 = 1 \qquad l_1^2 = \overline{1} \qquad l_2^2 = 2 \qquad l_3^2 = \overline{3}$$

Die obigen Ausdrücke geben für

$$l^2 = 1 \ldots \begin{cases} 7D^4 - 15D^3 - 31D^2 + 79D - 40 = 0 \\ 5D^3 - D^2 - 29D + 25 = 0 \end{cases}$$

deren Gemeintheiler $D - 1$ ist.

$l^2 = \overline{1}$ . . $\begin{cases} 7D^4 + D^3 + 25D^2 - 21D - 52 = 0 \\ 5D^3 + 15D^2 - 9D - 19 = 0 \end{cases}$

deren Gemeintheiler $D + 1$ ist.

$l^2 = 2$ . . $\begin{cases} 11D^4 - 64D^3 - 46D^2 + 540D - 560 = 0 \\ 5D^3 - 48D^2 + 66D + 20 = 0 \end{cases}$

deren Gemeintheiler $D - 2$ ist.

$l^2 = \overline{3}$ . . $\begin{cases} 29D^3 - 181D^2 + 531D - 1755 = 0 \\ 25D^3 - 197D^2 + 399D - 195 = 0 \end{cases}$

deren Gemeintheiler $D - 5$ ist.

Also

$$F = (x^2 - x + 1)(x^2 + x - 1)(x^2 - 2x + 2)(x^2 - 5x - 3)$$

Um D aus l zu bestimmen kann man auch auf folgende Art verfahren. *)

Man setze $x = y - 1$, und bilde für y eine neue Stufung welche man auflöset, so ist

$$x = r + lt$$
$$y = r + 1 + l.t$$

aus der ersten ist gegeben $l^2 = r^2 + t^2$

aus der andern . . . . . $\lambda^2 = (r+1)^2 + t^2$

also $D = 2r = \lambda^2 - l^2 - 1$

$\triangle = 2(r+1) = \lambda^2 - l^2 + 1$

Beispiel.

$$F = x^6 - 4x^5 + 11x^4 - 17x^3 + 20x^2 - 13x + 6$$
$$x = y - 1$$
$$G = y^6 - 10y^5 + 46y^4 - 121y^3 + 192y^2 - 174y + 72$$

In F ist . . $l^2 = 1$ $\quad l_1^2 = 2$ $\quad l_2^2 = 3$

In G ist . . $\lambda^2 = 3$ $\quad \lambda_1^2 = 4$ $\quad \lambda_2^2 = 6$

also $D = 1$ $\quad D_1 = 1$ $\quad D_2 = 2$

$\triangle = 3$ $\quad \triangle_1 = 3$ $\quad \triangle_2 = 4$

$$F = (x^2 - x + 1)(x^2 - x + 2)(x^2 - 2x + 3)$$
$$G = (y^2 - 3y + 3)(y^2 - 3y + 4)(y^2 - 4y + 6)$$

---

*) Siehe Gräffe a. a. O. S. 24.

Uebungsbeispiele zu 79., 80.

1) $x^2 - 10x + 21$

n	a	b
1	1,32222	1,
2	2,64444	1,76343
4	5,28888	3,39480
8	10,57776	6,76128
16		13,52158
	1,32222	0,84510

0,84510 = 7
1,32222
0,47712 = 3

$F = (x-3)(x-7)$

2) $x^3 + 4x^2 - 67x + 110$

n	a	b	c
1	$\overline{2}$,04139	$\overline{1}$,82607	$\overline{0}$,60206
2	4,08278	3,55739	2,17609
4	8,16557	6,97289	4,18418
8	16,33114	13,92318	8,33193
16		27,84580	16,66228
	2,04139	1,74036	1,04139

1,04139 = $\overline{11}$
1,74036
0,69897 = 5
1,74036
2,04139
0,30103 = 2

$F = (x-2)(x-5)(x-11)$

3) $x^3 - 4x^2 - 11x - 70$

n	a	b	c
1	1,84510	$\overline{1}$,04139	0,60206
2	3,69020	$\overline{2}$,64246	1,57978
4	7,38039	$\overline{5}$,25450	3,36586
8	14,76078	$\overline{10}$,89882	6,75974
16			13,52155
	1,84510		0,84510

0,84510 = 7
1,84510
1,00000 = 10

$F = (x^2 + 3x + 10)(x-7)$

4) $x^3 - 4x^2 + 79x - 700$

n	a	b	c
1	2,84510	1,89763	0,60206
2	5,69020	2,80686	$\overline{2}$,15229
4	11,38040	8,14479	4,27605
8	22,76080	16,01754	7,88872
16	45,52160	31,99778	$\overline{16}$,17122
32		63,99987	
	2,84510	2,00000	

2,00000 = 100
2,84510
0,84510 = 7

$F = (x-7)(x^2 + 3x + 100)$

5) $x^4 - 14x^3 + 59x^2 - 94x + 48$

n	a	b	c	d
1	1,68124	1,97313	1,77085	1,14613
2	3,36248	3,50133	2,97543	1,89209
4	6,72496	6,75641	5,60509	3,62263
8	13,44993	13,45169	11,05838	7,22489
16		26,89986	22,08404	14,44944
	1,68124	1,68124	1,38025	0,90309
	1,68124	1,38025	0,90309	$= 8$
	0	0,30099	0,47716	
	$= 1$	$= 2$	$= 3$	

$$F = (x-1)(x-2)(x-3)(x-8)$$

6) $x^4 + 6x^3 - 80x^2 + 113x - 390$

n	a	b	c	d
1	$\overline{2}$,59106	$\overline{2}$,05308	$\overline{1}$,90309	$\overline{0}$,77815
2	5,18213	$\overline{4}$,69575	3,62982	2,29226
4	10,36426	9,06673	7,57912	4,47550
8	20,72852	$\overline{17}$,59746	15,13669	8,91245
16			30,27353	17,82311
	2,59106		1,89209	1,11394
	1,89209		1,11394	$= \overline{13}$
	0,69897		0,77815	
	$= 5$		$= 6$	

$$F = (x^2 - x + 5)(x-6)(x+13)$$

7) $x^4 + 4x^3 - 88x^2 + 635x - 1302$

n	a	b	c	d
1	$\overline{3}$,11461	$\overline{2}$,80277	$\overline{1}$,94488	$\overline{0}$,60206
2	6,22922	5,24074	1,77815	2,28330
4	12,45844	10,47855	$\overline{7}$,80222	4,56518
8	24,91688	21,10395	15,25905	9,16936
16		42,19976		18,33800
	3,11461	2,63749		1,14613
	2,63749	1,14613		$= \overline{14}$
	0,47712	1,49136		
	$= 3$	$= 31 = l^2$		

$$F = (x-3)(x^2 - 7x + 31)(x+14)$$

8) $x^4 - 4x^3 + 264x^2 + 1436x - 6657$

n	a	b	c	d
1	$\overline{3},82328$	$\overline{3},15715$	2,42160	0,60206
2	7,64655	6,74640	4,83168	$\overline{2},70927$
4	15,29310	13,39946	10,01733	5,10176
8	30,58620	26,76976	20.00847	$\overline{9},68452$
16		53,53854	40,01718	
	3,82328	3,34616	2,50107	
	3,34616	2,50107	$= 317 = l^2$	
	0,47712	0,84509		
	$= 3$	$= \overline{7}$		

$F = (x - 3)(x + 7)(x^2 - 8x + 317)$

9) $x^4 - 8x^3 + 73x^2 - 208x + 697$

n	a	b	c	d
1	2,84323	2,31806	1,86332	0,90309
2	5,68647	$\overline{4},76714$	3,53084	$\overline{1},91381$
4	11,37293	8,09123	6,46300	$\overline{1},81954$
8	22,74586	$\overline{18},13211$	12,95045	$\overline{6},76367$
16	45,49172	35,92611	25,80601	13,19959
32		71,49781	51,60918	26,08908
	2,84323		1,61278	
	1,23045		$= 41 = l_1^2$	
	$= 17 = l^2$	$F = (x^2 - 3x + 17)(x^2 - 3x + 41)$		

10) $x^5 + 34x^4 - 446x^3 - 2456x^2 + 3613x + 5590$

n	a	b	c	d	e
1	$\overline{3},74741$	3,55787	$\overline{3},39023$	$\overline{2},64933$	$\overline{1},53148$
2	7,49482	7,60758	6,98384	5,57189	3,31133
4	14,98964	15,01665	13,79742	10,99940	6,53757
8	29,97928	29,98100	27,57130	21,97954	13,06778
16		59,95861	55,14203	43,95867	26,13550
	3,74741	3,74741	3,44638	2,74741	1,63347
	3,74741	3,44638	2,74741	1,63347	
	0,	0,30103	0,69897	1,11394	
	$= \overline{1}$	$= 2$	$= \overline{5}$	$= 13$	$= \overline{43}$

$F = (x + 1)(x - 2)(x + 5)(x - 13)(x + 43)$

11) $x^5 - 52x^4 + 774x^3 - 4080x^2 + 8537x - 8060$

n	a	b	c	d	e
1	3,90634	3,93131	3,61066	2,88874	1,71600
2	7,81267	6,85191	6,63037	5,28292	3,06296
4	15,62534	$\overline{14}$,70257	13,19452	10,43044	5,97895
8	31,25068	29,08666	26,43473	20,84267	11,93132
16			52,86846	41,68493	23,86181
	3,90634		3,30428	2,60531	1,49136
	3,30428		2,60531	1,49136	
	0,60206		0,69897	1,11395	
	$= 4 = l^2$		$= 5$	$= 13$	$= 31$

$F = (x^2 - 3x + 4)(x - 5)(x - 13)(x - 31)$

12) $x^5 - 38x^4 + 281x^3 - 627x^2 + 1398x - 1015$

n	a	b	c	d	e
1	3,00647	3,14551	2,79727	2,44871	1,57978
2	6,01293	5,83353	$\overline{5}$,49887	4,53282	2,94547
4	12,02586	12,04707	10,73884	9,23575	5,85109
8	24,05172	24,05143	$\overline{20}$,91927	18,45994	11,69921
16		48,10350		36,92002	23,39841
	3,00647	3,00647		2,30750	1,46240
	3,00647	2,30750		1,46240	
	0,	0,69897		0,84510	
	$= 1$	$= 5 = l^2$		$= 7$	$= 29$

$F = (x - 1)(x^2 - x + 5)(x - 7)(x - 29)$

13) $x^5 + 16x^4 - 40x^3 + 354x^2 + 543x - 874$

n	a	b	c	d	e
1	2,94151	2,73480	$\overline{2}$,54900	$\overline{1}$,60206	$\overline{1}$,20412
2	5,88302	5,96077	5,14856	$\overline{3}$,93661	2,52634
4	11,76604	11,79214	10,55781	$\overline{7}$,25763	5,11454
8	23,53208	23,53377	21,12306	$\overline{15}$,95794	10,23001
16		47,06418	42,24765		
	2,94151	2,94151	2,64048		1,27875
	2,94151	2,64048	1,27875		
	0,	0,30103	1,36173		
	$= 1$	$= \overline{2}$	$= 23 = l^2$		$= \overline{19}$

$F = (x - 1)(x + 2)(x^2 - 4x + 23)(x + 19)$

14) $x^5 + 1.x^4 + 52x^3 + 295x^2 - 467x - 710$

n	a	b	c	d	e
1	2,85126	$\overline{2}$,66932	$\overline{2}$,46982	1,71600	$\overline{0}$,
2	5,70252	5,80414	5,12767	3,07188	$\overline{2}$,01284
4	11,40503	11,43214	10,21472	7,48153	3,91640
8	22,81006	22,81177	20,40212	14,81192	6,87120
16		45,62015	40,80367	29,61993	$\overline{15}$,09405
	2,85126	2,85126	2,55023	1,85126	
	2,85126	2,55023	1,85126		
	0,	0,30103	0,69897		
	$= \overline{1}$	$= 2$	$= \overline{5}$	$= 71 = l^2$	

$F = (x + 1)(x - 2)(x + 5)(x^2 - 3x + 71)$

15) $x^5 - 30x^4 + 313x^3 - 2313x^2 + 7118x - 13585$

n	a	b	c	d	e
1	4,13306	3,85236	3,36418	2,49554	1,47712
2	8,26612	$\overline{7}$,08559	6,23279	$\overline{4}$,42447	2,43775
4	16,53224	$\overline{14}$,68355	12,37567	$\overline{8}$,40614	5,10797
8	33,06448	28,85174	24,73268	$\overline{17}$,73650	10,22920
16			49,46651		20,46005
	4,13306		3,09166		1,27875
	3,09166		1,27875		
	1,04140		1,81291		
	$= 11 = l^2$		$= 65 = l_1{}^2$		$= 19 = x_1$

$F = (x^2 - 4x + 11)(x^2 - 7x + 65)(x - 19)$

16) $x^5 - 1.x^4 + 408x^3 - 5677x^2 + 18713x - 58500$

n	a	b	c	d	e
1	4,76716	4,27214	3,75412	2,61066	0,
2	9,53431	$\overline{8}$,49697	7,23237	5,28451	$\overline{2}$,91116
4	19,06862	$\overline{16}$,26144	14,60950	10,80804	5,44585
8	38,13724	$\overline{33}$,96370	29,22514	21,59152	$\overline{10}$,70515
16			58,45138	43,18353	
	4,76716		3,65321	2,69897	
	3,65321		2,69897		
	1,11395		0,95424		
	$= 13 = l^2$		$= 9 = x_1$	$= 500 = l_1{}^2$	

$F = (x^2 - 3x + 13)(x - 9)(x^2 + 11x + 500)$

17) $x^5 + 12x^4 + 76x^3 + 201x^2 + 382x + 246$

n	a	b	c	d	e
1	$\overline{2}$,39094	2,58206	$\overline{2}$,30320	1,88081	$\overline{1}$,07918
2	4,78187	4,67239	$\overline{4}$,07037	3,23452	$\overline{0}$,90309
4	9,56374	9,56053	$\overline{7}$,38216	6,45493	$\overline{3}$,52737
8	19,12748	19,12683	$\overline{16}$,30467	12,90149	6,75145
16		38,25497		25,80454	
	2,39094	2,39094		1,61278	
	2,39094	1,61278			
	0,	0,77816			
	$= \overline{1} = x_1$	$= 6 = l^2$		$= 41 = l_1^2$	

$F = (x + 1)(x^2 + 2x + 6)(x^2 + 9x + 41)$

18) $x^6 - 482x^5 + 64907x^4 - 3373692x^3$
$+ 72943591x^2 - 628214050x + 1700115725$

n	a	b	c	d	e	f
1	9,23048	8,79811	7,86299	6,52810	4,81229	2,68305
2	^{1}8,46096	^{1}7,16622	^{1}5,11483	^{1}2,40052	9,04398	5,01077
4	^{3}6,92192	^{3}4,14517	^{2}9,98490	^{2}4,54055	^{1}7,85210	9,91882
8	^{7}3,84384	^{6}8,25285	^{5}9,92212	^{4}9,02854	^{3}5,65173	^{1}9,82857
16		^{13}6,50412	^{11}9,84187	^{9}8,05422	^{7}1,30035	^{3}9,65705
	9,23048	8,53151	7,49011	6,12838	4,45627	2,47856
	8,53151	7,49011	6,12838	4,45627	2,47856	
	0,69897	1,04140	1,36173	1,67211	1,97771	
	$= 5$	$= 11$	$= 23$	$= 47$	$= 95$	$= 301$

$F = (x-5)(x-11)(x-23)(x-47)(x-95)(x-301)$

19) $x^6 + 13x^5 + 238x^4 + 1667x^3 + 8303x^2 + 16448x + 28086$

n	a	b	c	d	e	f
1	4,44849	$\overline{4}$,21612	3,91924	$\overline{3}$,22194	2,37658	$\overline{1}$,11394
2	8,89698	$\overline{8}$,29194	7,43888	$\overline{5}$,90410	4,47579	$\overline{2}$,48714
4	17,79396	$\overline{15}$,69725	14,68821	$\overline{11}$,94525	8,66000	4,53698
8	35,58792	$\overline{32}$,76508	29,36117	23,51970	17,43235	8,43370
16			58,72550		34,86364	
	4,44849		3,67034		2,17898	$= 151 = l_2^2$
	3,67034		2,17898			
	0,77815	$= 6 = l^2$	1,49136	$= 31 = l_1^2$		

$F = (x^2 + 2x + 6)(x^2 + 7x + 31)(x^2 + 4x + 151)$

20) $x^7 - 101x^6 - 11362x^5 - 80214x^4 + 3025021x^3 - 3854425x^2 - 33595900x - 26647500$

n	a	b	c	d	e	f	g
1	7,42566	$\overline{7}$,52629	6,58596	6,48073	4,90425	$\overline{4}$,05546	2,00432
2	14,85131	14,96532	14,34711	12,96804	10,88093	8,07533	4,51752
4	29,70262	29,72962	28,51072	25,72199	21,55433	15,96189	8,92745
8	59,40524	59,40690	56,99740	51,40608	43,07471	31,89120	17,84364
16		118,81041	113,99423	102,81058	86,14820	63,78121	35,68714
	7,42566	7,42565	7,12464	6,42566	5,38426	3,98632	2,23045
	7,42565	7,12464	6,42566	5,38426	3,98632	2,23045	
	0,	0,30101	0,69898	1,04140	1,39794	1,75587	
	$= \overline{1}$	$= \overline{2}$	$= 5$	$= 11$	$= \overline{25}$	$= \overline{57}$	$= 170$

$$F = (x+1)(x+2)(x-5)(x-11)(x+25)(x+57)(x-170)$$

81.

Die Verbesserung der genäherten Wurzel einer Stufung ist das Gegenhafte des Schnitts welcher aus der Theilung des Fehlers der Stufung durch das erste Zugeleite entsteht. Das Newtonsche Verfahren.

Die Stufung sei

$$F = x^n - qx^{n-1} + px^{n-2} \ldots$$

Ihr erstes Zugeleite ist (72.)

$$F_1 = nx^{n-1} - q(n-1)x^{n-2} + p(n-2)x^{n-3} \ldots$$

Man setze $x + \partial x$ statt x so ist nach dem Stufensatz (42.)

$$(x + \partial x)^n = x^n + nx^{n-1} \cdot \partial x \ldots$$
$$q(x + \partial x)^{n-1} = qx^{n-1} + q(n-1)x^{n-2} \cdot \partial x \ldots$$
$$p(x + \partial x)^{n-2} = px^{n-2} + p(n-2)x^{n-3} \cdot \partial x \ldots$$

u. s. f.

Also allgemein:

$$F(x + \partial x) = F + F_1 \cdot \partial x \ldots$$

Wenn aber x eine genäherte Wurzel und ∂x ihre Verbesserung ist, so mufs die Stufung vernichtet werden durch Einsetzung von $x + \partial x$ statt x.

Also $F(x + \partial x) = 0$

Also $0 = F + F_1 \cdot \partial x$

also $$\partial x = \frac{F}{F_1}$$

Hier sind F und F_1 diejenigen Werthe welche die Stufung und ihr erstes Zugeleite annehmen wenn man statt x die genäherte Wurzel einsetzt. Je mehr die genäherte Wurzel an die wahre Wurzel rückt, desto kleiner wird F und heifst daher *der Fehler* der Stufung.

Bei der Berechnung ist es vortheilhaft das in (72.) angezeigte Verfahren anzuwenden.

Die gefundene Verbesserung ∂x legt man an die genäherte Wurzel und erlangt dadurch eine zweite genäherte Wurzel. Aus dieser berechnet man auf gleiche Art eine zweite Verbesserung u. s. f.

Jede Verbesserung ist auf eben so viel Stellen genau als die genäherte Wurzel deren enthält.

Die fortgesetzte Berechnung der Höhen wird durch folgende Ausdrücke erleichtert.

Es sei $x + \partial x = x_1$

so ist $x_1^2 = x^2 + (x_1 + x)\,\partial x$

$x_1^3 = x^3 + (x_1^2 + x_1 x + x^2)\,\partial x$

$x_1^4 = x^4 + (x_1^3 + x_1^2 x + x_1 x^2 + x^3)\,\partial x$

u. s. f.

1. *Beispiel.*

$F = x^2 + 1326\,x - 482120$

$F_1 = 2x + 1326$

$x = 297{,}04$

$x^2 = 88232{,}7616$

$F = \overline{12}{,}1984$

$F_1 = 1920{,}08 \qquad \partial x = 0{,}006353\,..$

$x = 297{,}046353$

$x^2 = 88236{,}535830600609$

$F = \overline{0}{,}000091399391$

$F_1 = 1920{,}092706$

$\partial x = 0{,}000000047601551\,..$

$x = 297{,}046353047601551\,....$

2. *Beispiel.*

$F = x^3 - 10\,x^2 + 52\,x - 239$

$F_1 = 3x^2 - 20\,x + 52$

$x = 7{,}3493$

$x^2 = 54{,}01221049$

$x^3 = 396{,}951938554157$

$F = \overline{0}{,}006566345843$

$F_1 = 67{,}05063147$

$\partial x = 0{,}00009792\,..$

$x = 7{,}34939792$

$x^2 = 54{,}0136497865003264$

$x^3 = 396{,}967805392513942923481088$

$F = 0{,}000000632489321076518912$

$F_1 = 67{,}0529909595009792$

$\partial x = 0{,}0000000094326787\,..$

$x = 7{,}3493979294326787\,..$

3. *Beispiel.*

$F = x^4 - 8x^3 - 12x^2 + 200x - 360$
$F_1 = 4x^3 - 24x^2 - 24x + 200$
$x = 3{,}221$
$x^2 = 10{,}374841$
$x^3 = 33{,}417362861$
$x^4 = 107{,}637325775281$
$F = 0{,}000330887281$
$F_1 = 7{,}369267444$
$\partial x = \overline{0}{,}00004490$
I. $x = 3{,}22095510$

$x = 3{,}5093$
$x^2 = 12{,}31518649$
$x^3 = 43{,}217683949357$
$x^4 = 151{,}66381828347852 01$
$F = 0{,}00010880862252 01$
$F_1 = \overline{6}{,}916939962572$
$\partial x = 0{,}00001573$
II. $x = 3{,}50931573$

$x = 6{,}314$
$x^2 = 39{,}866596$
$x^3 = 251{,}717687144$
$x^4 = 1589{,}345476627216$
$F = 0{,}004827475216$
$F_1 = 98{,}536444576$
$\partial x = \overline{0}{,}00004899$
III. $x = 6{,}31395101$

$x = \overline{5}{,}0442$
$x^2 = 25{,}44395364$
$x^3 = \overline{128}{,}344390950888$
$x^4 = 647{,}3947768344692496$
$F = \overline{0}{,}0175392384267504$
$F_1 = \overline{802}{,}971651163552$
$\partial x = \overline{0}{,}00002184$
IV. $x = \overline{5}{,}04422184$

I. . . . 3,22095510
II. . . . 3,50931573
III. . . . 6,31395101
IV. . . . $\overline{5}$,04422184
Anlage . . . 8,

82.

Die Verbesserung der beiden Theile einer Sinuswurzel geschieht ebenfalls nach dem vorstehenden Satze. *)

Es sei $x = r + it = l \cos p + il \sin p$

so ist $x^2 = r_2 + it_2 = l^2 \cos 2p + il^2 \sin 2p$

$x^3 = r_3 + it_3 = l^3 \cos 3p + il^3 \sin 3p$

u. s. f.

wo $r_2 = rr - tt \qquad t_2 = 2rt$

$r_3 = r_2 r - t_2 t \qquad t_3 = r_2 t + t_2 r$

$r_4 = r_3 r - t_3 t \qquad t_4 = r_3 t + t_3 r$

u. s. f.

hieraus $F = f + ig = h \cos q + ih \sin q$

$F_1 = f_1 + ig_1 = h_1 \cos q_1 + ih_1 \sin q_1$

$$\frac{1}{F_1} = \frac{f_1 - ig_1}{f_1^2 + g_1^2} = \frac{\cos q_1 - i \sin q_1}{h_1}$$

Nach dem vorstehenden Satze (81.) ist

$$\partial \overline{x} = \frac{F}{F_1}$$

Es sei also $\partial x = \partial r + i \partial t \qquad f_1^2 + g_1^2 = h_1^2$

so ist $$\partial r = f \frac{f_1}{h_1^2} + g \frac{g_1}{h_1^2} = \frac{h}{h_1} \cos (q_1 - q)$$

$$\partial t = f \frac{g_1}{h_1^2} - g \frac{f_1}{h_1^2} = \frac{h}{h_1} \sin (q_1 - q)$$

1. *Beispiel.*

$F = x^3 - 12x^2 + 57x - 94$

$F_1 = 3x^2 - 24x + 57$

$x = 4{,}3189 + i \,.\, 3{,}0504$

$x^2 = 9{,}34795705 + i \,.\, 26{,}34874512$

$x^3 = \overline{40}{,}001320410803 + i \,.\, 142{,}312603484088$

$F = 0{,}000494989197 + i \,.\, 0{,}000462044088$

$F_1 = \overline{18}{,}60972885 + i \,.\, 5{,}83663536$

---

*) Nach Gräffe geschieht diese Verbesserung durch Anwendung mehrstelliger Höhennamen, nach Enke durch Neigungszahlen. Beide Arten führen die Berechnung ohne Noth auf ein fremdes Feld.

f_1	$\overline{1},26975$	f	6,69461
g_1	0,76616	g	6,66468
f_1^2	2,53950	$\frac{f_1}{h_1^2}$	$\overline{8},68951$
g_1^2	1,53232	$\frac{g_1}{h_1^2}$	8,18592
A	1,00718	$\overline{5},38412$	$= 0,000024216$
B	0,04074	$\overline{4},85060$	07089
h_1^2	2,58024	4,88053	07595
		5,35419	22604

$$x = 4,318917127 + i \,.\, 3,050430199$$
$$x^2 = 9,34792075093 + i \,.\, 26,34911046235$$
$$x^3 = \overline{40},00322723810 + i \,.\, 142,31480421352$$
$$F = \overline{0},00000001026 + i \,.\, 0,00000000832$$
$$x = 4,31891712637\,.\,. + i \,.\, 3,05043019924\,.\,.$$
$$D = 8,63783425274\,.\,.$$
$$x_1 = 3,36216574725\,.\,.$$

2. ***Beispiel.***

$$F = x^4 - 10x + 1000$$
$$F_1 = 4x^3 - 10$$
$$x = 3,9767 + i \,.\, 3,8969$$
$$x^2 = 0,62831328 + i \,.\, 30,99360446$$
$$x^3 = \overline{11}8,28036378 + i \,.\, 125,70074085$$
$$x^4 = \overline{960},20873965 + i \,.\, 38,94738652$$
$$F = 0,02426035 + i \,.\, \overline{0},02161348$$
$$F_1 = \overline{483},12145512 + i \,.\, 502,80296340$$

f_1	$\overline{2},68406$	f	8,38489
g_1	2,70140	g	$\overline{8},33472$
f_1^2	5,36812	$\frac{f_1}{h_1^2}$	$\overline{6},99723$
g_1^2	5,40280	$\frac{g_1}{h_1^2}$	7,01457
A	0,03468	5,38212	$= 0,000024104$
B	0,28403	5,34929	22350
h_1^2	5,68683	$\overline{5},39946$	25087
		$\overline{5},33195$	21476

$$
\begin{aligned}
x &= 3{,}976746454 + i \,.\, 3{,}896903611 \\
x^2 &= 0{,}62865460598 + i \,.\, 30{,}99399523324 \\
x^3 &= \overline{118}{,}28061196862 + i \,.\, 125{,}70506704315 \\
x^4 &= \overline{960}{,}23253390459 + i \,.\, 38{,}96903572188 \\
F &= 0{,}00000155541 + i \,.\, \overline{0}{,}00000038812
\end{aligned}
$$

I. $x = 3{,}9767464559. \pm i \,.\, 3{,}8969036122..$

auf dieselbe Art findet sich ein zweites Wurzelpaar

II. $x = \overline{3}{,}9767464559 \pm i \,.\, 4{,}0550175075..$

aus den Nebenzahlen der Stufung ist die Bedingungsgleichung:

$$l^2 = r^2 \pm \frac{5}{2r}$$

83.

Sämmtliche Wurzeln einer Stufung oder die Seiten und Durchmaafse der in ihr enthaltenen Zweistufungen werden durch einstufige Gleichungen verbessert, welche aus den Nebenzahlen durch Zuleitung entstehen.

Es sei die Dreistufung

$$F = x^3 - cx^2 + bx - a$$

so ist

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= c \\
x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 &= b \\
x_1x_2x_3 &= a
\end{aligned}
$$

Hier bedeuten $x_1 x_2 x_3$ die genauen Wurzeln. Wenn aber $x_1 x_2 x_3$ die genäherten Wurzeln sind, so sind die Fehler der Nebenzahlen

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 - c &= \partial c \\
x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 - b &= \partial b \\
x_1x_2x_3 - a &= \partial a
\end{aligned}
$$

Die genauen Wurzeln seien alsdann

$$x_1 + \partial x_1 \qquad x_2 + \partial x_2 \qquad x_3 + \partial x_3$$

so erhält man für die Fehler $\partial x_1\, \partial x_2\, \partial x_3$ die einstufigen Gleichungen

$$
\begin{aligned}
\partial x_1 + \partial x_2 + \partial x_3 &= \partial \overline{c} \\
(x_2+x_3)\,\partial x_1 + (x_3+x_1)\,\partial x_2 + (x_1+x_2)\,\partial x_3 &= \partial \overline{b} \\
x_2x_3\,\partial x_1 + x_3x_1\,\partial x_2 + x_1x_2\,\partial x_3 &= \partial \overline{a}
\end{aligned}
$$

Wenn die Stufung eine Sinnstufung enthält, so ist

$$x_2 = r + it \qquad x_3 = r - it$$

also $\partial x_2 = \partial r + i\partial t \qquad \partial x_3 = \partial r - i\partial t$

Das Einsetzen dieser Ausdrücke giebt

$$\partial x_1 + 2\partial r = \partial \bar{c}$$
$$2r\partial x_1 + 2(x_1 + r)\partial r + 2t\partial t = \partial \bar{b}$$
$$(r^2 + t^2)\partial x_1 + x_1 2r\partial r + x_1 2t\partial t = \partial \bar{a}$$

Diese Gleichungen gelten eben sowohl für eine sinnhafte als für eine wirkhafte Zweistufung, wenn

$$x_2 + x_3 = D = 2r \qquad x_2 x_3 = l^2 = r^2 + t^2$$

Also hat man:

$$\partial x_1 + \partial D = \partial \bar{c}$$
$$D.\partial x_1 + x_1 \partial D + \partial l^2 = \partial \bar{b}$$
$$l^2 \partial x_1 + x_1 \partial l^2 = \partial \bar{a}$$

Auf ähnliche Art kann man bei allen übrigen obern Stufungen verfahren.

1. *Beispiel.*

$$F = x^3 - 12x^2 + 42x - 42$$

$x_1 = 1{,}7382 \qquad x_2 = 3{,}6601 \qquad x_3 = 6{,}6017$

$x_2 + x_3 = 10{,}2618 \qquad x_3 + x_1 = 8{,}3399 \qquad x_1 + x_2 = 5{,}3983$

$x_1 x_2 = 6{,}36198582$

$x_1 x_3 = 11{,}47507494 \qquad x_1 x_2 x_3 = 41{,}999021787894$

$x_2 x_3 = 24{,}16288217$

$\partial c = 0 \qquad \partial b = \bar{0}{,}00005707 \qquad \partial a = \bar{0}{,}000078212106$

Urbau. Höhennamen.

0	0	0
1,01123	0,92116	0,73225
1,38315	1,05975	0,80359

Wendebau. Höhennamen.

$\bar{0}$,94878	0,70869	$\bar{0}$,46858
1,81393	$\bar{1}$,25044	0,68694
$\bar{1}$,92305	1,10338	$\bar{0}$,28373

$Ln = \bar{1}{,}43927$

$\partial\bar{b}$	5,75641	$\partial\bar{b}$	5,75641	$\partial\bar{b}$	5,75641
	0,70869		$\bar{1}$,25044		1,10338
n	$\bar{1}$,43927	n	$\bar{1}$,43927	n	$\bar{1}$,43927
$\partial\bar{a}$	5,89327	$\partial\bar{a}$	5,89327	$\partial\bar{a}$	5,89327
	0,46858		0,68694		0,28373
n	$\bar{1}$,43927	n	$\bar{1}$,43927	n	$\bar{1}$,43927
	$\bar{5}$,02583		5,56758		$\bar{5}$,42052
	4,92258		$\bar{5}$,14094		4,73773
	$\bar{0}$,000010613		0,000036947		$\bar{0}$,000026334
	8367		$\bar{0}$ 13834		5467
∂x_2	$\bar{0}$,000002246	∂x_2	0,000023113	∂x_3	$\bar{0}$,000020867
	1,7382		3,6601		6,6017

x_1 . . . 1,738197754
x_2 . . . 3,660123113
x_3 . . . 6,601679133

2. *Beispiel.*

$$F = x^3 - \bar{4}\,x^2 + 3x - 1$$

$x = 0{,}24697 \qquad D = \bar{4}{,}24697 \qquad l^2 = 4{,}04891$

$x + D - \bar{4} = \partial c = 0$ · also $\partial D = \partial\bar{x}$

$Dx + l^2 - 3 = \partial b = 0{,}0000358191$

$l^2x - 1 = \partial a = \bar{0}{,}0000406973$

$(D - x)\,\partial x + \partial l^2 = \partial\bar{b}$

$l^2\,\partial x + x\,\partial l^2 = \partial\bar{a}$

Urbau.	Höhennamen.	Wendebau.	Höhennamen.
$\bar{0}$,65262	0	9,39265	$\bar{0}$
0,60734	9,39265	$\bar{0}$,60734	$\bar{0}$,65262

$Ln = \bar{0}{,}71255$

$\partial\bar{b}$	$\bar{5},55412$		$\partial\bar{b}$	$\bar{5},55412$	
	9,39265			$\bar{0},60734$	
n	$\bar{0},71255$		n	$\bar{0},71255$	
$\partial\bar{a}$	5,60956		$\partial\bar{a}$	5,60956	
	$\bar{0}$			$\bar{0},65262$	
n	$\bar{0},71255$		n	$\bar{0},71255$	
	4,23422			$\bar{5},44891$	
	4,89701			5,54963	
	0,0000017148			$\bar{0},0000281115$	
	78888			35451	
∂x	0,0000096037		∂l^2	0,0000073395	
	0,24697			4,04891	

also $x = 0,2469796037$ $\quad D = \bar{4},2469796037$

$l^2 = 4,0489173395$

Eine zweite Annäherung giebt

$x = 0,246979603717467061 05$

$D = \bar{4},246979603717467061 05$

$l^2 = 4,048917339522305313 52$

3. *Beispiel.*

$$F = x^4 + \bar{2}x^2 - \bar{3}x + 10$$

$D = \bar{D}_1 = 2,8997 \quad l^2 = 3,7216 \quad l_1^2 = 2,6870$

$$l^2 + l_1^2 - D^2 - \bar{2} = \partial c = 0,00033991$$

$$-(l^2 - l_1^2)D - \bar{3} = \partial b = \bar{0},00002962$$

$$l^2 l_1^2 - 10 = \partial a = \bar{0},00006080$$

$$\partial l_1^2 = \frac{1}{l^2}\partial\bar{a} - \frac{l_1^2}{l^2}\partial l^2$$

$$\partial l^2 + \partial l_1^2 - 2D.\partial D = \partial\bar{c}$$

$$-D\partial l^2 + D\partial l_1^2 - (l^2 - l_1^2)\partial D = \partial\bar{b}$$

$$(1 - \frac{l_1^2}{l^2})\partial l^2 - 2D.\partial D = \frac{1}{l^2}\partial a + \partial\bar{c} = \partial c_1$$

$$= \bar{0},000356247$$

$$-D(1 + \frac{l_1^2}{l^2})\partial l^2 - (l^2 - l_1^2)\partial D = \frac{D}{l^2}\partial a + \partial\bar{b} = \partial b_1$$

$$= \bar{0},000017752$$

Urbau.	Höhennamen.		Wendebau.	Höhennamen.
9,44404	$\overline{0}$,76338		$\overline{0}$,01477	0,76338
$\overline{0}$,69838	$\overline{0}$,01477		0,69838	9,44404
			Ln =	$\overline{1}$,46606
∂c_1	$\overline{6}$,55175	$\overline{6}$,55175		26026
	$\overline{0}$,01477	0,69838		35202
n	$\overline{1}$,46606	$\overline{1}$,46606	∂l^2 =	$\overline{0}$,0000090824
∂b_1	$\overline{5}$,24925	$\overline{5}$,24925		60823
	0,76338	9,44404		169
n	$\overline{1}$,46606	$\overline{1}$,46606	∂D =	0,000060992
	$\overline{5}$,10046	5,78407		16337
	4,54657	3,22723		6557
			∂l_1^2 =	0,000022895

$D = \overline{D_1} = 2{,}899760992$

$l^2 = 3{,}721590917$ hieraus $\begin{cases} \partial c = 0{,}0000000092 \\ \partial b = 0{,}0000000062 \\ \partial a = \overline{0}{,}0000000002 \end{cases}$

$l_1^2 = 2{,}687022895$

Beispiele der Stufungen.

Es sind nur die Nebenzahlen der Höhen von x angegeben. Z. B. 1 — 0 — 3 — 2

bedeutet $1.x^3 - 0.x^2 - 3.x - 2$

Die Zweistufung welche die Wurzel einer Stufung ist und deren Durchmaafs D und Seithöhe l^2 maafshafte Zahlen sind, ist durch eine Klammer bezeichnet.

Z. B. (1 — 15 — 180) bedeutet $x^2 - 15x - 180$

Die Buchstaben bezeichnen die Schriftsteller denen die Stufungen entnommen sind, und zwar:

B. Bauer numer. Gl. jed. Gr. 2te Aufl. 1825.
E. Enke astron. Jahrbuch. 1841.
F. Fourier analyse des éq. déterm. 1831.
G. Gaufs meth. integ. valor. inven. Comm. Gott. III. 1816.
K. Klügel math. Wörterbuch. II. 1805.
L. Lagrange res. des éq. numér. 3e éd. 1826.
Gr. Gräffe Preisschrift: Höhere num. Gleichungen. 1837.
J. Jahn Aufg. aus der Buchstabenrechnung. 1842.

Das beigesetzte Sternchen * bedeutet dafs die von diesen Schriftstellern angegebenen Wurzeln ohne weitere Prüfung als richtig angenommen worden sind. Alle übrigen unmaafshaften Wurzeln bei denen kein * sind von mir scharf auf 9 und mehr Stellen berechnet worden.

Dreistufung.

1)	1 — 0 — 3 — 2	$\overline{1}$	$\overline{1}$	2
2)	1 — 9 + 26 — 24	2	3	$\overline{4}$
3)	1 — 0 — 19 + 30	2	3	$\overline{5}$
4)	1 — 0 — 39 + 70	2	5	$\overline{7}$
5)	1 + 4 — 67 + 110	2	5	$\overline{11}$
6)	11 — 91 + 0 + 900	$\overline{2}\frac{8}{11}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$
7)	15 + 169 + 0 — 3136	$\overline{3}\frac{11}{13}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$
8)	6 — 23 — 35 + 150	$\overline{2}\frac{1}{2}$	3	$3\frac{1}{3}$
9)	1 — 0 — 6 — 4 B.	$\overline{2}$	(1 — 2 — 2)	
10)	1 — 19 — 120 + 720	4	(1 — 15 — 180)	

11) $1 - 0 - 25 + 36$ B. $\overline{4}$ $(1 + 4 - 9)$

12) $1 + 5 - 15 - 75$ B. $\overline{5}$ $(1 - 0 - 15)$

13) $1 + 24 - 60 - 720$ 6 $(1 + 30 + 120)$

14) $1 - 12 + 36 - 7$ 7 $(1 - 5 + 1)$

15) $1 - 4 - 86 - 120$ 12 $(1 + 8 + 10)$

16) $1 - 14 - 5 + 70$ 14 $(1 - 0 - 5)$

17) $1 + 1000 - 1 - 83023336$ B.
257 $(1 + 1257 + 323048)$

18) $1 - 500 + 100 + 18485163$ B.
333 $(1 - 167 - 55511)$

19) $1 - 10000 - 10 + 2421467425$ B.
505 $(1 - 9495 - 4794985)$

20) $1 - \frac{3}{2} + \frac{3}{5} - \frac{1}{20}$ G.*
0,5
0,1127016653792583
0,8872983346207417 $= (1 - 1 + \frac{1}{10})$

21) $1 - 0 - 6 - 4{,}5$ $\overline{0{,}853694680}$, $\overline{1{,}908405118}$, $2{,}762099798$

22) $1 - 0 - 9 - 2$ $\overline{0{,}223462073}$, $\overline{2{,}882020545}$, $3{,}105482618$

23) $1 - 0 - 100 - 1$ $\overline{0{,}010000010}$, $\overline{9{,}994996245}$, $10{,}004996255$

24) $1 - 0 - 6 - 0{,}1$ $\overline{0{,}016667439}$, $\overline{2{,}441113493}$, $2{,}457780932$

25) $1 - 3 - 9 + 19{,}74176953125$ $1{,}765924279$, $\overline{2{,}782965082}$, $4{,}017040803$

26) $1 - 7 + 2 + 38{,}25$ $\overline{1{,}95778348}$, $3{,}75565547$, $5{,}20212801$

27) $1 + 20{,}32 + 119{,}04 + 184{,}32$ $\left\{\begin{array}{l}\overline{2},4483113\\ \overline{6},7993116\\ \overline{11},0723770\end{array}\right.$

28) $1 - 0 - 2 - 0{,}6$ $\left\{\begin{array}{l}\overline{0},315738043\\ \overline{1},229658317\\ 1{,}545396360\end{array}\right.$

29) $1 + 9 + 0 - 24$ B. $\left\{\begin{array}{l}1{,}51106212\\ \overline{1},82949269\\ \overline{8},68156943\end{array}\right.$

30) $1 - 12 + 42 - 42$ $\left\{\begin{array}{l}1{,}73819775\\ 3{,}66012311\\ 6{,}60167913\end{array}\right.$

31) $1 - 0 - 50 - 120$ B. $\left\{\begin{array}{l}\overline{2},8755424\\ \overline{5},1802678\\ 8{,}0558103\end{array}\right.$

32) $1 - 0 - 7 + 7$ L. B. $\left\{\begin{array}{l}1{,}3568958677\\ 1{,}6920214716\\ 3{,}0489173393\end{array}\right.$

33) $1 - 0 - 2100 + 24000$ K. B. $\left\{\begin{array}{l}12{,}318759145\\ 38{,}407268605\\ \overline{50},726027750\end{array}\right.$

34) $1 - 0 - 200 + 8$ B. $\left\{\begin{array}{l}0{,}0400003200\\ \overline{14},1220930366\\ 14{,}1620933566\end{array}\right.$

35) $1 + 24 + 2 - 100$ B. $\left\{\begin{array}{l}1{,}92577385\\ \overline{2},18748623\\ \overline{23},73828762\end{array}\right.$

36) $1 - 9 - 4 + 100$ K. B. $\left\{\begin{array}{l}\overline{3},051330366\\ 4{,}145226246\\ 7{,}906104120\end{array}\right.$

37) $1 - 4 - 8 + 16$ B. $\left\{\begin{array}{l}1{,}377784364\\ \overline{2},340172973\\ 4{,}962388608\end{array}\right.$

38) $1 - 4 - 7 + 4$ J.* $\left\{\begin{array}{l}\overline{0},46307721\\ \overline{1},66160042\\ 5,19852321\end{array}\right.$

39) $1 - 0 - 1 + 0{,}125$ J.* $\left\{\begin{array}{l}\overline{1},0574538\\ 0,1270508\\ 0,9304029\end{array}\right.$

40) $1 + 4 + 3 - 1$ B. $\left\{\begin{array}{l}\overline{0},246979603\\ \overline{1},445041868\\ 2,801937735\end{array}\right.$

41) $1 - 1 - 2 + 1$
Siebeneck. $\left\{\begin{array}{l}\overline{0},44504186791262\\ \overline{1},24697960371746\\ \overline{1},80193773580483\end{array}\right.$

42) $1 - 0 - 3 - 1$
Neuneck. $\left\{\begin{array}{l}\overline{0},34729635533386\\ \overline{1},53208888623795\\ 1,87938524157181\end{array}\right.$

43) $1 - 1 - 4 - 1$
Dreizehneck. $\left\{\begin{array}{l}\overline{0},2738905549642176\\ \overline{1},3772028539729576\\ 2,6510934089371752\end{array}\right.$

---

44)	$1 - 0 + \frac{9}{64} - \frac{5}{256}$		$\frac{1}{8}$	$(1 + \frac{1}{8} + \frac{5}{32})$
45)	$1 - 0 + \frac{3}{4} - \frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	$(1 + \frac{1}{2} + 1)$
46)	$1 - 6 + 20 - 15$		1	$(1 - 5 + 15)$
47)	$1 - 0 + 1 - 10$		2	$(1 + 2 + 5)$
48)	$1 - 0 + 3 - 14$		2	$(1 + 2 + 7)$
49)	$1 - 0 + 12 - 63$		3	$(1 + 3 + 21)$
50)	$1 - 0 - 6 - 40$	B.	4	$(1 + 4 + 10)$
51)	$1 - 0 - 6 + 40$	B.	4	$(1 - 4 + 10)$
52)	$1 - 0 - 10 - 24$		4	$(1 + 4 + 6)$
53)	$1 - 1{,}5 - 8 - 8$		4	$(1 + 2{,}5 + 2)$
54)	$1 - 0 + 1 - 222$		6	$(1 + 6 + 37)$
55)	$1 + 6 + 8 - 693$		7	$(1 + 13 + 99)$
56)	$1 - 0 - 7{,}5 - 290{,}5$		7	$(1 + 7 + 41{,}5)$
57)	$1 - 0 - 21 - 344$		8	$(1 + 8 + 43)$
58)	$1 - 0 + 2 - 528$		8	$(1 + 8 + 66)$

59) $1 + 16 + 0 - 1536$ — 8 $(1 + 24 + 192)$
60) $1 - 0 - 60 - 189$ — 9 $(1 + 9 + 21)$
61) $1 - 15 + 71 - 297$ — $\underline{11}$ $(1 - 4 + 27)$
62) $1 + 3 - 69 + 209$ — 11 $(1 - 8 + 19)$
63) $1 - 0 - 8 - 1632$ — 12 $(1 + 12 + 136)$
64) $1 + 8 + 0 - 2880$ — 12 $(1 + 20 + 240)$
65) $1 - 0 + 1101 - 14940$ — $\underline{12}$ $(1 + 12 + 1245)$
66) $1 + 2 + 3 + 127602$ B. — 51 $(1 - 49 + 2502)$
67) $1 + 720 + 0 - 429981696$ B.
576 $(1 + 1296 + 746496)$
68) $1 - 4 - 100 - 1872866480$ B.
1234 $(1 + 1230 + 1517720)$
69) $1 + 4 + 100 - 18852955328$ B.
1234 $(1 + 1238 + 1527792)$
70) $1 - 1000 + 50 - 356386604$ B.
1234 $(1 + 234 + 288806)$
71) $1 - 0 + 6 - 2$ — 0,327480002
72) $1 + 2 + 3 - 4$ — 0,77604543502
73) $1 - 0 + 3 - 4,03779$ — 1,006278581787
74) $1 - 36 + 324 + 459$ J. — 1,23995160459
75) $1 - 0 - 2 - 5$ L. F. * page 217
2,0945514815423265914823865405793 0
76) $1 - 0 + 17 - 47$ — 2,1665177195
77) $1 - 0 + 27 - 72$ — 2,2466648878703210
78) $1 - 191 + 9364 - 22800$ — 2,56751042954185
79) $1 - 0 - 6 + 6$ — 2,847322102
80) $1 + 2 - 3 + 2$ F. — 3,152757602010
81) $1 - 12 + 57 - 94$ J. — 3,36216574725
82) $1 - 0 - 12 - 28$ — 4,3021380497
83) $1 - 2 + 12 - 96$ — 4,33696157
84) $1 - 0 - 13,3592 - 24,6377$ K. — 4,36004479029
85) $1 + 9 + 0 - 300$ — 4,6825010394631207
86) $1 - 5 + 10 - 40$ B. — 4,687205756
87) $1 - 3 + 12 - 144$ — 5,53382813
88) $1 - 0 - 27 - 90$ — 6,40683253

89)	$1 - 0 - 9 - 225$	6,5744501259
90)	$1 - 10 + 52 - 239$	7,3493979294
91)	$1 - 0 - 17 + 360$ B.	7,90739999872
92)	$1 - 12 + 54 - 200$	8,4064832225
93)	$1 - 0 + 10 - 1000$ B.	9,6667942323
94)	$1 - 12 + 42 - 200$	9,7967110389
95)	$1 + 10 + 0 + 63$ B.	10,5644749973
96)	$1 - 9 + 0 - 192$	10,6825010394631207
97)	$1 - 9 + 0 - 225$	10,8953847301
98)	$1 + 48 - 384 - 32832$	24,1570820047
99)	$1 - 0 - 39 - 16130$	25,780928666
100)	$1 + 38 - 828 + 18226$ B.	57,786618077
101)	$1 + 1 - 6620 - 329232$	99,19583844850481
102)	$1 - 0 - 9000 - 1200000$	133,9976820415

Vierstufung.

103)	$1 - \frac{41}{8} + \frac{287}{32} - \frac{393}{64} + \frac{45}{32}$	$\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{15}{8}$, 2
104)	$1 - 10 + 35 - 50 + 24$	1 2 3 4
105)	$1 - 14 + 59 - 94 + 48$	1 2 3 8
106)	$1 - 0 - 42 + 64 + 105$	1 3 5 7
107)	$1 - 0 - 58 + 192 - 135$	1 3 5 9
108)	$1 - 0 - 58 - 192 - 135$	1 3 5 9
109)	$1 - 26 + 251 - 1066 + 1680$	5 6 7 8
110)	$1 + 6{,}9977 + 11{,}98390132$ $- 0{,}02759076 + 0{,}00001584$ B.	0,0011 0,0012 3 4
111)	$1 - 0 - 220 + 240 + 8064$	6 8 12 14
112)	$1 + 5 + 8 + 5 + 1$ B.	1 1 (1+3+1)
113)	$1 + 1 - 24 + 43 - 21$	1 3 (1+5−7)
114)	$1 - 18 + 93 - 80 - 300$ K.B.	5 5 (1−8−12)
115)	$1 + 100 + 0 - 10 + 0{,}02309876733242603679$ B.	

0,00231

0,314570219176

0,3178802622777

99,998999956899

116) $1 + 1000 + 1000 - 0 - 1$ B.
$\bar{1}$
$0{,}03114157$
$\bar{0}{,}03214358$
$998{,}99899799$

117) $1 + 8 + 13 - 8 + 1$ B. $(1+3-1)(1+5-1)$

118) $1 - 8 + 14 + 4 - 8$ B. $(1-2-2)(1-6+4)$

119) $1 - 20 + 140 - 400 + 377$
$(1 - 10 + 24{,}7958)$
$(1 - 10 + 15{,}2041)$
$= 5 \pm \sqrt{5 \pm \sqrt{23}}$

120) $1 - 5 - 20 - 0 + 10$ B.
$0{,}6612655$
$\bar{0}{,}8083194$
$\bar{2}{,}4595271$
$7{,}6065809$

121) $1 + 1 - 27 + 7 + 2$ J.*
$\bar{0}{,}1715729$
$0{,}4384472$
$\bar{4}{,}5615528$
$\bar{5}{,}8284271$

122) $1 - 56 + 840 - 3360 + 1680$
$0{,}581214086$
$5{,}356389152$
$15{,}707854005$
$34{,}354542755$

123) $1 - 8 - 12 + 200 - 360$ K.B.
$3{,}22095510$
$\bar{3}{,}50931573$
$\bar{5}{,}04422184$
$6{,}31395101$

124) $1 - 0 - 69{,}0824$
$- 6{,}7522 + 1066{,}0018$ B.
$4{,}6843041$
$\bar{4}{,}9875874$
$\bar{6}{,}6048399$
$6{,}9081228$

125) $1 - 2 + \frac{2}{7} - \frac{3}{7} + \frac{1}{70}$ G.*
$0{,}0694318442029754$ Anlage $= 1$
$0{,}9305681557970246$ Gebinde $= \frac{1}{7} - \frac{1}{7}\sqrt{0{,}3}$
$0{,}3300094782075677$ Anlage $= 1$
$0{,}6699905217924323$ Gebinde $= \frac{1}{7} + \frac{1}{7}\sqrt{0{,}3}$

126) $1-5+13-19+10$ 1 2 $(1-2+5)$

127) $1-0+12-80+96$ 2 2 $(1+4+24)$

128) $1-11+49-101+78$ B. 2 3 $(1-6+13)$

129) $1-0-14+40-75$ 3 5 $(1-2+5)$

130) $1-0-32+16+255$ 3 5 $(1-8+17)$

131) $1+1-53-225+1428$ B. 4 7 $(1+12+51)$

132) $1-10-4+82+315$ B. 5 9 $(1+4+7)$

133) $1-0+10-0-11000$ B. 10 10 $(1-0+110)$

134) $1-0+0-16-12$ B. $(1-2-2)(1+2+6)$

135) $1+6-10+8+8$ B. $(1+8+4)(1-2+2)$

136) $1-4-3-4+1$ B. $(1-5+1)(1+1+1)$

137) $1-10+20-4-140$ K. $(1-6-14)(1-4+10)$

138) $1-6+12-12+4$ B. $(1-4+2)(1-2+2)$

139) $1+100+0-0+90000$ B.
10 99,909755900492

140) $1+1-100-1000+3936$ B.
12 3,0980590945

141) $1-100+20-30+723429$ B.
21 99,0568631358

142) $1-10+50-200-147576$ B.
22 16,9024969730

143) $1+60+8+10+400972$ B.
22 57,7866180777

144) $1-84+1813-16549\frac{3}{4}+459191\frac{1}{4}$ B.
35 51,97163260081

145) $1+20+2-0-21286930,71745296$ B.
63,42 73,526185471

146) $1+1000+5-0+1631904714$ B.
123 998,3550070638

147) $1+5-20-0-245646976$ B.
124 126,5020935502

148) $1-10-1+100-2139991526112$ B.
1212 1206,99998974619

149) $1-0-4-100-2318779621112$ B.
1234 1233,999967164754

150) $1 + 10 + \overline{100} + 1000 - 2337730154176$ B.
$1234 \quad \overline{1239,00020438679}$

151) $1 - 60 + 6 - 0 + 36$
$0,88282771897716 \quad 59,89966498925613$

152) $1 - 1 + 4 + 1 - 4$ F.
$0,8922322744 \quad \overline{0,9232622810}$

153) $1 - 0 - 2 + 4 - 8$ K. B.
$1,6117662986 \quad \overline{2,2942175302}$

154) $1 - 4 + 0 - 3 + 23$ F.
$2,0526627317 \quad 3,7853172532$

155) $1 - \overline{10} + 100 - 0 - 1000$ B.
$\overline{2,724940275460} \quad 3,605014532528$

156) $1 - \overline{5} - 20 - 0 - 10000$ B.
$\overline{9,3544549773} \quad 12,1785101684$

157) $1 - 0 - 100 + 1000 - \overline{987654}$ B.
$32,0751465336 \quad \overline{32,5776295603}$

158) $1 - \overline{0} + 3 + 2 - 5$ Dümas * 1815. B. 65.
$1,277181214374$
$0,910949296951$
$0,183115958711 \pm i \,.\, 2,064955615096$

---

159) $1 - 0 - 24 - 48 + 391$
$(1 - 8 + 17)\,(1 + 8 + 23)$

160) $1 + 4,002 + 14,01801 + 20,03802 + 25,07005$ E.
$(1 + 2 + 5)\,(1 + 2,002 + 5,01401)$

161) $1 - 0 + 0 - 10 + 1000$ B.
$\overline{3,9767464559} \pm i \,.\, 3,8969036122$
$\overline{3,9767464559} \pm i \,.\, 4,0550175075$

162) $1 - 0 - 2 + 3 + 10$
$D = \overline{2,899760992} \quad l^2 = 3,721590917$
$D_1 = \overline{2,899760992} \quad l_1^2 = 2,687022895$

163) $1 - 0 + 0 - 1 + 1$ Gr. *
$D = \overline{1,4542721689823936} \quad l^2 = 1,4012683671398549$
$D_1 = 1,4542721689823936 \quad l_1^2 = 0,71363917353690088$

Fünfstufung.

164) $1-4+1+10-4-8$ $\bar{1}\ \bar{1}\ 2\ 2\ 2$

165) $1-4-20+91-76-20$ $2\ 2\ 5\ (1+5+1)$

166) $1+5-10-50+25+118$ B. $\bar{2}$

$\bar{1},871917381$

$\bar{2},443310007$

$\bar{2},589208041$

$\bar{4},982184585$

167) $1-\frac{5}{2}+\frac{20}{9}-\frac{5}{6}+\frac{5}{42}-\frac{1}{252}$ G.*

0,5

0,0469100770306680 } Anlage $= 1$

0,9530899229693320 } Gebinde $= \frac{1}{9} - \frac{1}{9}\sqrt{\frac{5}{14}}$

0,2307653449471585 } Anlage $= 1$

0,7692346550528415 } Gebinde $= \frac{1}{9} + \frac{1}{9}\sqrt{\frac{5}{14}}$

168) $1-0-10-0+6+1$ F. $\bar{0},1756747993$

$\bar{0},6915762806$

$0,8795087084$

$3,0530581626$

$\bar{3},0653157913$

169) $1-7+5+95-326+312$ K. $2\ 3\ \bar{4}\ (1-6+13)$

170) $1+2-1-4-5+2$ $\bar{2}\ (1-1-1)(1+1+1)$

171) $1-3-8+24-9+27$ $3\ 3\ \bar{3}\ (1-0+1)$

172) $1+1000+10-30000-100-1959190357911$ B.

201

$\bar{2}24,219977$

$\bar{9}97,984818$

173) $1-1000+10-30000+100+1305291203889$ B.

201

$\bar{1}82,247\ .\ .$

$998,709\ .\ .$

174) $1-0+0-\frac{2}{70}-\frac{20}{7}-\frac{4}{70}$ B. Fischer.

$\bar{0},0200040027223$

$\bar{1},2907870784537$

$1,3092427365978$

$D = 0,0015483445782$ $l^2 = 1,6903251913665$

175) $1 + \underline{1} + 0 + 1 - 25 - 36$ F.

$\underline{1,430171338}$

$\underline{2,083879067}$

$2,274823380$

$D = 0,239227025 \qquad l^2 = 5,309996506$

176) $1 - \underline{3} - 24 + 95 - 46 - 101$ F.

$\underline{0,76834296820}$

$5,23566238388$

$4,32950931617$

$D = 4,67449603591 \qquad l^2 = 5,79903781161$

---

177) $1 - \underline{0} + 1 + 3 + 16 + 15$

$1 \quad (1 + 2 + 3)\,(1 - 3 + 5)$

178) $1 - 10 + 20 - \underline{30} + 40 - 15359498571$ B.

$111 \qquad D = 172,3630128 \qquad l^2 = 11526,558645$

$D_1 = 71,3630128 \qquad l_1^2 = 12004,785236$

179) $1 + 1 + 1 - 2 + 2 - 1$ F. Gr. *

$0,640746$

$D = \underline{0,634082} \qquad l^2 = 0,5258586$

$D_1 = \underline{2,274828} \qquad l_1^2 = 2,967872$

180) $1 - 0 + 0 - 0 + 2 - 2$ B. $\underline{0,817471026}$

181) $1 - \frac{1}{20} + 0 - 0 + 0 + \frac{1}{2}$ B. $\underline{0,860775131}$

182) $1 + 3 + 2 - 3 - 2 - 2$ F.

$\underline{1,059109003}$

$D = \underline{0,495902945} \qquad l^2 = 0,464225243$

$D_1 = \underline{3,563206057} \qquad l_1^2 = 4,067809264$

183) $1 + 6 + 24 + 9 - 18 + 20$ B. $\underline{1,6321543782}$

184) $1 - 0 + 0 - 0 - 6 - 10$ B. $1,839012511$

185) $1 + 10 + 0 - \underline{0} + 100 + 1244567890$ B.

$\underline{68,0470155}$

186) $1 + 1 + 2 + 3 + 4 - 330699456789$ B.

$\underline{201,118296263}$

Sechsstufung.

187) $1 - 3 + \frac{75}{22} - \frac{20}{11} + \frac{5}{11} - \frac{1}{22} + \frac{1}{924}$ G. *

0,0337652428984240 } Anlage = 1
0,9662347571015760 } Gebinde = y_1

0,1693953067668678 } Anlage = 1
0,8306046932331322 } Gebinde = y_2

0,3806904069584015 } Anlage = 1
0,6193095930415985 } Gebinde = y_3

Es sind $y_1\ y_2\ y_3$ Wurzeln der Dreistufung

$$y^3 - \frac{9}{22}y^2 + \frac{1}{22}y - \frac{1}{924}$$

188) $1 - 0 - 10 + 4 + 5 - 36 + 36$

$1\ \overline{2}\ 3\ \overline{3}$ (1—1+2) Grunert Math. Wört. VIII. 433

189) $1 - 0 - 8 - 5 + \frac{11}{2} + 2 - \frac{3}{2}$ B. Leonhardi.

$\overline{1}\quad 3\quad \overline{0,81877798861598}$

$\overline{2,20102289847449}$

$D = 1,01980088709047 \quad l^2 = 0,277446521780794$

190) $1 + 1 + 2 - 0 + 0 - 0 - 4$ B.

$1 \qquad \overline{1,162648526059}$

191) $1 + 1 + 1 + 1 + 1 - 0 - 1$ B.

$\overline{1} \qquad 0,63688291680186$

192) $1 + 100 + 10 + 10 + 10 + 100 - 3557004588291$ B.

$111 \qquad \overline{148,7598106143}$

193) $1 - 1000 - 10 + 10 + 10 - 100 + 14981671280829$ B.

$111 \qquad 999,99500799469097$

194) $1 + 2 + 0 - 0 + 0 - 0 - 1$ B.

$0,8131336375583 \qquad \overline{2,0290743613303}$

195) $1 - 0 + 0 - 0 + 0 - 10 - 100$ B.

$\overline{2,0726288177454} \qquad 2,2278803521373$

196) $1 - 0 + 0 - 0 - 10 + 100 + 1$ B.

$\overline{0,00999001995} \qquad 2,6303986641882$

197) $1 + 10 + 10 + 10 + 0 - 0 - 1'000000$ B.

$8,70662940653 \qquad \overline{12,51812246935}$

198) $1 - 0 + 0 - 10 + 100 - 1000 - 1'000000$ B.

$\overline{9,9498756399488} \qquad 10,0166532144773$

199) $1 - \frac{11}{4} + 0 + 100 + 0 - \frac{8295}{4} - 2'500000$ B.

$\overline{11,3247884493685} \qquad 12,0399997702395$ Drais.

200) $1 - 12 + 60 - 0 + 123 + 4567 - 89012$ F.

$\bar{5},2017456812406$ $\quad$ $6,7897668232924$

$D = \bar{2},378970344086$ $\quad$ $l^2 = 33,120914585420$

$D_1 = 12,790949202034$ $\quad$ $l_1{}^2 = 76,092571923526$

201) $1 - 1 + 2 - 3 + 2 + 1 + 1$ Gr.*

$D = \bar{0},580186992$ $\quad$ $l^2 = 0,2734645800$

$D_1 = 2,160350024$ $\quad$ $l_1{}^2 = 1,5751496880$

$D_2 = \bar{0},580163032$ $\quad$ $l_2{}^2 = 2,3215448900$

Siebenstufung.

202) $1 - \frac{7}{2} + \frac{63}{13} - \frac{175}{52} + \frac{175}{143} - \frac{63}{286} + \frac{7}{429} - \frac{1}{3432}$ G.*

$0,\dot{5}$

$0,0254460438286202$ } Anlage $= 1$

$0,9745539561713798$ } Gebinde $= y_1$

$0,1292344072003028$ } Anlage $= 1$

$0,8707655927996972$ } Gebinde $= y_2$

$0,2970774243113015$ } Anlage $= 1$

$0,7029225756886985$ } Gebinde $= y_3$

Es sind $y_1\ y_2\ y_3$ Wurzeln der Dreistufung

$$y^3 - \frac{9}{26}y^2 + \frac{9}{286}y - \frac{1}{1716}$$

203) $1 - 0 - 2 - 0 - 3 + 4 - 5 + 6$ F. E.*

$1,1080166$ $\quad$ $1,5378905$ $\quad$ $\bar{1},9624901$

$D = 0,6092132$ $\quad$ $l^2 = 1,0766801$

$D_1 = \bar{1},2926302$ $\quad$ $l_1{}^2 = 1,6664238$

204) $1 - 0 + 0 + 3 + 0 - 0 + 0 + 6$ E.*

$\bar{1},5818592$

$D = 1,4756817$ $\quad$ $l^2 = 1,2044862$

$D_1 = 1,9246556$ $\quad$ $l_1{}^2 = 1,4352554$

$D_2 = 1,1328854$ $\quad$ $l_2{}^2 = 2,1940798$

Anhang zur siebenten Abtheilung.

1*

Derjenige Werth welchen eine Stufung annimmt wenn die Ursache nichtig wird, heifst *das Bleibende* (die Constante). Bei der gradnamigen Stufung ist das Bleibende gleich dem Gebinde aller Wurzeln, bei der ungradnamigen gleich dem gegenhaften Gebinde derselben. Hiebei wird vorausgesetzt dafs die oberste Höhe der Ursache immer setzhaft sei, also

$$F = a + bx + cx^2 \ldots + x^n$$

Das Bleibende ist a.

2*

Die ungradnamige Stufung hat immer eine wirkliche Wurzel, deren Zeichen das entgegengesetzte des Bleibenden ist. In jedem der übrigen Wurzelpaare sind beide Wurzeln zugleich setzhaft oder gegenhaft oder sinnhaft.

Beispiel.

$$F = x^5 - 7x^4 + 5x^3 + 95x^2 - 326x + 312$$

hat die wirkliche Wurzel $= \overline{4}$

ein setzhaftes Wurzelpaar $= 2$ und 3

ein sinnhaftes Wurzelpaar dessen Gebinde $= 13$

3*

Die gradnamige Stufung deren Bleibendes gegenhaft ist, hat zwei wirkliche Wurzeln deren Zeichen einander entgegengesetzt sind. In jedem der übrigen Wurzelpaare sind beide Wurzeln zugleich setzhaft oder gegenhaft oder sinnhaft.

Beispiele.

$$F = x^4 - 8x^3 - 12x^2 + 200x - 360$$

$$3{,}220\ldots \quad 3{,}509\ldots \quad \overline{5}{,}044\ldots \quad 6{,}313\ldots$$

$$F = x^4\ldots - 58x^2 - 192x - 135$$

$$\overline{1} \quad \overline{3} \quad \overline{5} \quad 9$$

4 *

Bei der gradnamigen Stufung deren Bleibendes setzhaft ist, sind in jedem Wurzelpaar beide Wurzeln zugleich setzhaft oder gegenhaft oder sinnhaft.

Beispiele.

$$F = x^4 - 14x^3 + 59x^2 - 94x + 48$$
$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 8$$
$$F = x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 5x + 1$$
$$\overline{0,382..} \quad \overline{1} \quad \overline{1} \quad \overline{2,618..}$$

5 *

Jede obere Stufung ist durch eine Zweistufung

$$x^2 - 2rx + l^2$$

theilbar, in welcher das Durchmaafs $2r$ die Anlage zweier Wurzeln, die Seithöhe l^2 das Gebinde dieser Wurzeln ist. Setzt man $x = y + r$ so verwandelt sich die Stufung von x in eine Abstufung von y, welche aus einer gradnamigen und ungradnamigen Theilstufung besteht, die den Gemeintheiler $y^2 + l^2 - r^2$ haben. Die Zweistufung ist sinnhaft oder wirkhaft je nachdem $l^2 - r^2$ setzhaft oder gegenhaft ist.

1. ***Beispiel.***

$$F = x^3 - 15x^2 + 71x - 297 \qquad x = y + 2$$
$$G = y^3 - 9y^2 + 23y - 207 = H - K$$
$$H = y^2 + 23y = (y^2 + 23)\,y$$
$$K = 9y^2 + 207 = (y^2 + 23)\,9$$
$$l^2 - r^2 = 23 \qquad r^2 = 4 \qquad l^2 = 27$$

also F durch $x^2 - 4x + 27$ theilbar.

2. ***Beispiel.***

$$F = x^4 - 11x^3 + 49x^2 - 101x + 78 \qquad x = y + 3$$
$$G = y^4 + y^3 + 4y^2 + 4y + 0 = H + K$$
$$H = y^4 + 4y^2 = (y^2 + 4)\,y^2$$
$$K = y^3 + 4y = (y^2 + 4)\,y$$
$$l^2 - r^2 = 4 \qquad r^2 = 9 \qquad l^2 = 13$$

also F durch $x^2 - 6x + 3$ theilbar.

6 *

In einer Stufung von x heist jeder *bestimmte* Werth der Ursache x eine *Stimme*. Jeder Stimme entspricht ein Stufungswerth.

Wenn die Stufungswerthe zweier Stimmen entgegengesetzte Vorzeichen haben, so liegen zwischen diesen beiden Stimmen eine oder drei oder fünf u. s. w. Wurzeln.

Wenn die Stufungswerthe zweier Stimmen einerlei Vorzeichen haben, so liegen zwischen diesen beiden Stimmen keine oder zwei oder vier u. s. w. Wurzeln.

Beispiel.

$$F = x^4 - 8x^3 - 12x^2 + 200x - 360$$

Wurzeln	$\bar{5},044..$	$3,220..$	$3,509..$	$6,313..$			
Stimmen	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	0	3	4	7
Stufungswerthe	1032	$\bar{5}84$	$\bar{7}28$	$\bar{3}60$	$\bar{3}$	$\bar{8}$	109

Von den Wurzeln liegen:

keine zwischen	$\bar{4}$ u. $\bar{2}$..	$\bar{4}$ u. 0, $\bar{4}$ u. 3..	$\bar{2}$ u. 0, $\bar{2}$ u. 3..		0 u. 3..
eine zwischen	$\bar{6}$ u. $\bar{4}$..	$\bar{6}$ u. $\bar{2}$..	$\bar{6}$ u. 0..		$\bar{6}$ u. 3..
eine zwischen	4 u. 7				
zwei zwischen	$\bar{4}$ u. 4..	$\bar{2}$ u. 4..	0 u. 4..		3 u. 4..
drei zwischen	$\bar{6}$ u. 4..	$\bar{4}$ u. 7..	$\bar{2}$ u. 7..	0 u. 7..	3 u. 7..
vier zwischen	$\bar{6}$ u. 7				

7 * *Harriot. Descartes.* 1637.

Man fasse in einer Stufung alle auf einander folgenden Glieder von einerlei Vorzeichen in die Gröfsen $m, n, p, q..$ zusammen, also $F = m - n + p - q$

Man binde diese Stufung mit $x - \omega$

$$F \,.\, (x - \omega) = mx - (nx + m\omega) + (px + n\omega) - (qx + p\omega) + q\omega$$

oder $F' = m' - n' + p' - q' + r'$

Jede hinzukommende setzhafte Wurzel vermehrt also die Anzahl der Vorzeichenwechsel um einen. Hieraus folgt:

Eine Stufung hat höchstens soviel setzhafte Wurzeln als Zeichenwechsel.

Nimmt man in ihr das zweite vierte u. ff. Glied mit entgegengesetzten Vorzeichen, *so hat sie höchstens soviel gegenhafte Wurzeln als diese neue Stufung Zeichenwechsel.*

Beispiel.

$F = x^5 + 13x^4 - 44x^3 - 848x^2 - 432x + 6480$
$G = x^5 - 13x^4 - 44x^3 + 848x^2 - 432x - 6480$

Hier hat F zwei und G drei Zeichenwechsel, also hat F höchstens zwei setzhafte und drei gegenhafte Wurzeln.

8*

Eine Stufung mit lauter wirklichen Wurzeln und ohne fehlende Nebenzahlen hat also soviel setzhafte Wurzeln als Zeichenwechsel und soviel gegenhafte Wurzeln als Zeichenfolgen.

Beispiel.

$F = x^5 + 34x^4 - 446x^3 - 2456x^2 + 3613x + 5590$
hat lauter wirkliche Wurzeln $\overline{1}$ 2 $\overline{5}$ 13 $\overline{43}$
darunter sind zwei setzhafte 2 13 wegen der zwei Zeichenwechsel, und drei gegenhafte $\overline{1}$ $\overline{5}$ $\overline{43}$ wegen der drei Zeichenfolgen.

9* *Olivier* 1826.

Man bildet aus einer Stufung durch Einrahmung (79.) eine Abstufung deren Wurzeln die Zweithöhen der Wurzeln der Stufung sind. Die Anzahl der Zeichenwechsel der Abstufung ist (7*) die höchste Anzahl der setzhaften Wurzeln der Abstufung, also die höchste Anzahl der wirklichen Wurzeln der Stufung.

Beispiel.

Stufung $x^5 - 0 \,.\, x^4 + 1 \,.\, x^3 + 3x^2 + 16x + 15$
Abstufung $x^{10} + 2x^8 + 33x^6 + 23x^4 + 166x^2 - 225$

Die Abstufung hat wegen ihres einen Zeichenwechsels höchstens eine setzhafte Wurzel. Also hat die Stufung höchstens eine wirkliche Wurzel. Sie hat aber (nach 2*) wenigstens eine wirkliche Wurzel. Also hat sie zwei Sinnstufungen.

10* *Newton.*

Bei einer beliebigen Reihe von Gröfsen sei

r_1 die Anlage der einzelnen
r_2 die Anlage der Gebinde von je zweien
r_3 die Anlage der Gebinde von je dreien
u. s. f.
s_1 die Anlage der ersten Höhen dieser Gröfsen
s_2 die Anlage der zweiten Höhen derselben
s_3 die Anlage der dritten Höhen derselben
u. s. f.

so ist
$$s_1 = r_1$$
$$s_2 = r_1 s_1 - r_2 . 2$$
$$s_3 = r_1 s_2 - r_2 . s_1 + r_3 . 3$$
$$s_4 = r_1 s_3 - r_2 s_2 + r_3 . s_1 - r_4 . 4$$
u. s. f.

Siehe Math. Wörterbuch I. 465. 495. VII. 423. 424.

Jede *gleichmäfsige Wirkung* (symmetrische Funktion) dieser Gröfsen läfst sich durch die Anlagen $s_1\ s_2\ s_3 \ldots$ also durch die Anlagen $r_1\ r_2\ r_3 \ldots$ ausdrücken. Sieht man diese Gröfsen als Wurzeln einer Stufung an so sind $r_1\ r_2\ r_3 \ldots$ die Nebenzahlen derselben. *Also läfst sich jede gleichmäfsige Wirkung der Wurzeln einer Stufung durch die Nebenzahlen der Stufung ausdrücken.*

11* *Lagrange* 1767.

Bei einer beliebigen Reihe von Gröfsen sei

$n = s_0$ ihre Anzahl
s_1 die Anlage der ersten Höhen
s_2 die Anlage der zweiten Höhen
u. s. f.
u_1 die Anlage der zweiten Höhen der Unterschiede
u_2 die Anlage der vierten Höhen der Unterschiede
u. s. f.

Die Stufenzahlen seien wie in 42. bezeichnet so ist

$$u_1 = n s_2 - \tfrac{1}{2} . \overset{1}{2} s_1 s_1$$
$$u_2 = n s_4 - \overset{1}{4} . s_3 s_1 + \tfrac{1}{2} . \overset{2}{4} s_2 s_2$$
$$u_3 = n s_6 - \overset{1}{6} s_5 s_1 + \overset{2}{6} s_4 s_2 - \tfrac{1}{2} \overset{3}{6} s_3 s_3$$
$$u_4 = n s_8 - \overset{1}{8} s_7 s_1 + \overset{2}{8} s_6 s_2 - \overset{3}{8} s_5 s_3 + \tfrac{1}{2} \overset{4}{8} s_4 s_4$$
u. s. f.

12* *Waring* 1762. *Lagrange* 1767.

Man bilde aus einer Stufung eine Abstufung deren Wurzeln die Zweithöhen der Unterschiede der Wurzeln der Stufung sind.

Dieses geschieht auf folgende Art. Die Nebenzahlen seien in der Stufung $r_1 r_2 r_3 \ldots$ in der Abstufung $t_1 t_2 t_3 \ldots$ Aus $r_1 r_2 r_3 \ldots$ ergeben sich nach (10*) $s_1 s_2 s_3 \ldots$ hieraus nach (11*) $u_1 u_2 u_3 \ldots$ hieraus wieder nach (10*) $t_1 t_2 t_3 \ldots$

Wenn in dieser Unterschiedsabstufung die Zeichenwechsel nach (7*) lauter setzhafte Wurzeln anzeigen, so hat die gegebene Stufung ***lauter wirkliche Wurzeln. Die höchste Anzahl der gegenhaften Wurzeln der Unterschiedsabstufung ist gleich der höchsten Anzahl der Sinnstufungen in der gegebenen Stufung.***

Wenn n die Stufe der gegebenen Stufung ist, so ist $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$ die Stufe der Unterschiedsabstufung. Für die obern Stufungen führt dieses Verfahren auf zusammengesetzte Ausdrücke, welche keine ausübige Brauchbarkeit haben. Für die Dreistufung ergiebt sich folgendes:

Stufung . . . . $x^3 - cx^2 + bx - a$

$\frac{1}{3}c^2 - \frac{1}{3}b = l^2 \qquad \frac{1}{2}a - \frac{1}{6}bc + \frac{1}{27}c^3 = D$

Abstufung . . $y^3 - 18\,l^2 y^2 + 81\,l^4 y - 108\,(l^6 - D^2)$

Wenn also sowohl l^2 als $l^6 - D^2$ setzhaft sind, so hat die Abstufung drei setzhafte also die Stufung drei wirkliche Wurzeln. Wenn eine dieser beiden Bedingungen nicht stattfindet, so hat die Dreistufung eine Sinnstufung.

Beispiel.

$x^3 + 4x^2 - 67x + 110$ Wurzeln $2 \quad 5 \quad \overline{11}$

$l^2 = \frac{217}{9} \qquad D = \frac{2755}{27}$

$y^3 - 434y^2 + 47089y - 389376$ Wurzeln $9 \quad 169 \quad 256$

13* *Tailor* 1715.

Es sei die Stufung:

$$F = a + bx + cx^2 + dx^3 \ldots + x^n$$

so sind ihre Zugeleite:

$$F_1 = b + 2cx + 3dx^2 \ldots$$
$$F_2 = 2c + 6dx \ldots$$
$$F_3 = 6d \ldots$$

u. s. f.

Man setze statt der Ursache x eine andere Ursache y und eine bestimmte Zahl oder *Stimme* r, so dafs $x = y + r$. Man bilde mittelst des Stufensatzes 42 aus der Stufung F eine ihr gleiche nach y gereihete Abstufung G, so ist

$$G = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}y + \mathfrak{C}y^2 + \mathfrak{D}y^3 \ldots + y^n$$

und $\mathfrak{A} = F$, $\mathfrak{B} = \frac{F_1}{1}$, $\mathfrak{C} = \frac{F_2}{1.2}$, $\mathfrak{D} = \frac{F_3}{1.2.3}$

u. s. f. wenn man überall die Ursache x durch die Stimme r ersetzt.

14* *Newton* 1676.

Es sei alles wie im vorigen Satze 13* so giebt jede Wurzel der Abstufung G eine Wurzel der Stufung F durch die Gleichung $x = y + r$. Man nehme die Stimme r sehr grofs an so werden in jeder Nebenzahl $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots$ die übrigen Glieder gegen die höchste Höhe von r unbeträchtlich sein. Alsdann haben also die Nebenzahlen $\mathfrak{A}\ \mathfrak{B}\ \mathfrak{C} \ldots$ entweder abwechselnde oder einerlei Vorzeichen je nachdem die Stimme r gegenhaft oder setzhaft ist. Hieraus folgt:

Es sind zwei Stimmen vorhanden, eine frühere deren Abstufung in Rücksicht auf die Vorzeichen lauter Wechsel, eine spätere deren Abstufung lauter Folgen hat. Zwischen diesen beiden Stimmen liegen alle wirklichen Wurzeln der gegebenen Stufung F.

Die frühere Stimme von der spätern abgezogen giebt eine setzhafte Zahl.

Beispiel.

$$\begin{aligned}
F &= x^4 - 1000x^3 + 5x^2 + 1631904714\\
\mathfrak{A} &= r^4 - 1000r^3 + 5r^2 + 1631904714\\
\mathfrak{B} &= 4r^3 - 3000r^2 + 10r\\
\mathfrak{C} &= 6r^2 - 3000r + 5\\
\mathfrak{D} &= 4r - 1000\\
\mathfrak{E} &= 1
\end{aligned}$$

Abstufung $G = y^4 + \mathfrak{D}y^3 + \mathfrak{C}y^2 + \mathfrak{B}y + \mathfrak{A}$

Stimme r	
1	$y^4 - 1004y^3 + 3011y^2 - 3014y + 1631905720$
999	$y^4 + 2996y^3 + 2991011y^2 + 994018986y + 639891720$

15* *Fourier* 1789 — 1831.

Es sei alles wie in den vorigen Sätzen 13*, 14*, so läfst sich leicht aus dem Satze 81. folgendes beweisen:

Wenn die Stimme r die letzte Nebenzahl $\mathfrak{A}$ vernichtet ohne die übrigen Nebenzahlen $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ u. s. w. zu vernichten, wenn also diese Stimme eine wirkliche Wurzel der Stufung F ist, *so vermindert sie in der Abstufung G die Anzahl der Wechsel um* 1 .

Wenn aber die Stimme r eine der übrigen Nebenzahlen $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ u. s. w. vernichtet, ohne die letzte Nebenzahl $\mathfrak{A}$ zu vernichten, wenn sie also eine wirkliche Wurzel derjenigen Stufung ist die der vernichteten Nebenzahl entspricht, *so vermindert sie in der Abstufung G die Anzahl der Wechsel entweder nicht oder um* 2 .

16* *Fourier.*

Es sei alles wie in 13* 14* so ergiebt sich aus 15* folgendes:

Für zwei beliebige Stimmen r und r' bilde man die Abstufungen G und G'. Es sei $r' - r = u$ eine setzhafte Zahl, so heifst r die frühere r' die spätere Stimme, G die frühere G' die spätere Abstufung. Man wähle r und r' so dafs in G und G' keine Nebenzahl nichtig werde.

Wenn beide Abstufungen eine gleiche Anzahl von Wechseln haben, so liegt zwischen ihren Stimmen *keine wirkliche Wurzel der Stufung F* .

Wenn die Anzahl der Wechsel in der spätern Abstufung um eine *ungrade Zahl kleiner* als in der frühern ist, so liegt zwischen ihren beiden Stimmen eine ungrade Anzahl wirklicher Wurzeln der Stufung F, *wenigstens aber Eine.*

Wenn die Anzahl der Wechsel in der spätern Abstufung um eine *grade Zahl kleiner* als in der frühern ist, so liegt zwischen ihren beiden Stimmen *entweder keine wirkliche Wurzel der Stufung F, oder eine grade Anzahl derselben.*

Wenn die spätere Abstufung *zwei Wechsel weniger* als die frühere hat, zugleich auch sämmtliche Nebenzahlen mit Ausnahme der beiden letzten dieselben Vorzeichen

in der einen Abstufung wie die gleichstelligen in der andern haben, so bilde man nach 81. die Verbesserungen

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} \text{ und } \frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{B}_1}.$$

Wenn dann der Unterschied beider Verbesserungen

$$\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{B}_1} - \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} < u,$$

so liegen zwischen beiden Stimmen r und r' *zwei wirkliche Wurzeln der Stufung* F. Diese können auch einander gleich sein, in welchem Falle diese Wurzel sowohl die Stufung F als ihr erstes Zugeleite F_1 vernichtet. Beide haben alsdann einen Gemeintheiler.

Wenn die spätere Abstufung zwei Wechsel weniger als die frühere hat, und eine Zwischenstimme eine der Nebenzahlen vernichtet ohne die Zeichen der vorhergehenden und folgenden Nebenzahl zu verändern, so entspricht diese Zwischenstimme einer *Sinnstufung*.

1. *Beispiel.*

$F = x^5 + 5x^4 - 10x^3 - 50x^2 + 25x + 118$

Wurzeln: $\bar{4},98\ldots$ $\bar{2},58\ldots$ $\bar{1},87$ 2 $2,44\ldots$

$\mathfrak{A} = r^5 + 5r^4 - 10r^3 - 50r^2 + 25r + 118$

$\mathfrak{B} = 5r^4 + 20r^3 - 30r^2 - 100r + 25$

$\mathfrak{C} = 10r^3 + 30r^2 - 30r - 50$

$\mathfrak{D} = 10r^2 + 20r - 10$

$\mathfrak{E} = 5r + 5$

$\mathfrak{F} = 1$

$G = y^5 + \mathfrak{E}y^4 + \mathfrak{D}y^3 + \mathfrak{C}y^2 + \mathfrak{B}y + \mathfrak{A}$

	Stimme r						Anzahl der Zeichenwechsel
	$\bar{5}\ldots$	1	-20	$+140$	-400	$+400$ -7	5
*	$\bar{4}\ldots$	1	-15	$+70$	-90	-55 $+114$	4
	$\bar{3}\ldots$	1	-10	$+20$	$+40$	-80 $+25$	4
*	$\bar{2}\frac{1}{2}\ldots$	1	$-7\frac{1}{2}$	$+2\frac{1}{2}$	$+56\frac{1}{4}$	$-29\frac{1}{16}$ $-3\frac{3}{32}$	3
	$0\ldots$	1	$+5$	-10	-50	$+25$ $+118$	2
	$1\ldots$	1	$+10$	$+20$	-40	-80 $+89$	2
**	$1\frac{1}{2}\ldots$	1	$+12\frac{1}{2}$	$+42\frac{1}{2}$	$+6\frac{1}{4}$	$-99\frac{1}{16}$ $+42\frac{5}{32}$	2
	$3\ldots$	1	$+20$	$+140$	$+400$	$+400$ $+121$	0

2. *Beispiel.*

$$F = x^7 - 2x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$$

Würzeln $\overline{1},962\ldots$ $1,108\ldots$ $1,537\ldots$

$$\mathfrak{A} = r^7 - 2r^5 - 3r^3 + 4r^2 - 5r + 6$$
$$\mathfrak{B} = 7r^6 - 10r^4 - 9r^2 + 8r - 5$$
$$\mathfrak{C} = 21r^5 - 20r^3 - 9r + 4$$
$$\mathfrak{D} = 35r^4 - 20r^2 - 3$$
$$\mathfrak{E} = 35r^3 - 10r$$
$$\mathfrak{F} = 21r^2 - 2$$
$$\mathfrak{G} = 7r$$
$$\mathfrak{H} = 1$$
$$G = y^7 + \mathfrak{G}y^6 + \mathfrak{F}y^5 + \mathfrak{E}y^4 + \mathfrak{D}y^3 + \mathfrak{C}y^2 + \mathfrak{B}y + \mathfrak{A}$$

Stimme r								Anzahl der Zeichenwechsel
$\overline{2}$	$1 - 14$	$+ 82$	$- 260$	$+ 477$	$- 490$	$+ 231$	$- 8$	7
* $\overline{1}$	$1 - 7$	$+ 19$	$- 25$	$+ 12$	$+ 12$	$- 25$	$+ 19$	6
$\overline{0},5$	$1 - 3\frac{1}{2}$	$+ 3\frac{1}{4}$	$+ 0\frac{5}{8}$	$- 5\frac{13}{16}$	$+ 10\frac{1}{32}$	$- 11\frac{9}{64}$	$+ 9\frac{112}{128}$	6
$\overline{0},1$	$1 - 0,7$	$- 1,79$	$+ 0,96$	$- 3,19$	$+ 4,91$	$- 5,89$	$+ 6,54$	6
0,01	$1 + 0,07$	$- 1,99$	$- 0,099$	$- 3,00$	$+ 3,90$	$- 4,92$	$+ 5,95$	4
0,1	$1 + 0,7$	$- 1,79$	$- 0,96$	$- 3,19$	$+ 3,08$	$- 4,29$	$+ 5,53$	4
0,5	$1 + 3\frac{1}{2}$	$+ 3\frac{1}{4}$	$- 0\frac{5}{8}$	$- 5\frac{13}{16}$	$- 2\frac{1}{32}$	$- 3\frac{9}{64}$	$+ 4\frac{9}{128}$	2
1	$1 + 7$	$+ 19$	$+ 25$	$+ 12$	$- 4$	$- 9$	$+ 1$	2
* 1,5	$1 + 10\frac{1}{2}$	$+ 45\frac{1}{4}$	$+ 103\frac{1}{8}$	$+ 129\frac{3}{16}$	$+ 81\frac{3}{32}$	$+ 15\frac{55}{64}$	$- 0\frac{93}{128}$	1
* 2	$1 + 14$	$+ 82$	$+ 260$	$+ 477$	$+ 498$	$+ 263$	$+ 52$	0

17 * *Fourier.*

Ergänzung des in 81. *angezeigten Verfahrens zur Berechnung genäherter Werthe der Wurzel.*

Es sei der Unterschied der Stimmen $r' - r = u$ und diese Stimmen seien einander soweit genähert, dafs alle Nebenzahlen der frühern Abstufung G mit Ausnahme der letzten Nebenzahl $\mathfrak{A}$ dieselben Zeichen wie in der spätern Abstufung G' haben, dafs also zwischen r und r' eine wirkliche Wurzel der Stufung F liege. Es sind $\mathfrak{A}\ \mathfrak{B}\ \mathfrak{C}$ und $\mathfrak{A}_1\ \mathfrak{B}_1\ \mathfrak{C}_1$ die Werthe welche F, $\frac{F_1}{1}$, $\frac{F_2}{1.2}$ für r und r' annehmen. Alsdann sind zwei engere Grenzen der Wurzel:

für den Fall wo $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ einerlei Zeichen also $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{C}_1$ verschiedene Zeichen haben:

$$r - \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} \quad \text{und} \quad r' - \frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{B}}$$

für den Fall wo $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ verschiedene Zeichen also $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{C}_1$ einerlei Zeichen haben:

$$r - \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}_1} \quad \text{und} \quad r' - \frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{B}_1}$$

Zur fortgesetzten Annäherung geht man von derjenigen Stimme aus, für welche $\mathfrak{A}\ \mathfrak{C}$ oder $\mathfrak{A}_1\ \mathfrak{C}_1$ einerlei Zeichen haben.

Der jedesmalige Fehler ist kleiner als $u^2 \cdot \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}}$ wenn man für $\mathfrak{B}$ das kleinere, für $\mathfrak{C}$ das gröfsere der beiden nimmt. Damit also die Grenzen schnell zusammenrücken mufs folgende Bedingung stattfinden. Es seien m und k ganze Zahlen so dafs 10^m gleich oder kleiner als $\frac{1}{u}$, 10^k gleich oder kleiner als $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}}$. Es mufs $m + k$ gleich oder gröfser als 1 sein.

Beispiel.

$$F = x^3 - 12x^2 + 42x - 42$$
$$\mathfrak{A} = r^3 - 12r^2 + 42r - 42$$
$$\mathfrak{B} = 3r^2 - 24r + 42$$
$$\mathfrak{C} = 3r - 12$$

r	$\mathfrak{C}$	$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{A}$
1,738	$\bar{6},786$	9,349932	$\bar{0},001848728$
1,739	$\bar{6},783$	9,336363	0,007494419

$$1{,}738 - \frac{\bar{0},001848728}{9{,}349932} = 1{,}73819772$$

$$1{,}739 - \frac{0{,}007494419}{9{,}349932} = 1{,}73819845$$

Der Fehler ist kleiner als

$$0{,}000001 \times \frac{6{,}786..}{9{,}336..} \quad \text{oder als } 0{,}00000072$$

also sind die beiden nächsten Grenzen der Wurzel

1,738197
1,738198

18* *Sturm* 1829.

Man setze die gegebene Stufung $F = \mathfrak{a}$, ihr erstes Zugeleite $F_1 = \mathfrak{b}$, und bilde aus ihnen eine Reihe von Abstufungen $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, u. s. f. deren Stufe immer um 1 abnimmt, durch folgende Gleichungen

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{c} = q \,.\, \mathfrak{b}$$
$$\mathfrak{b} + \mathfrak{d} = q_1 \,.\, \mathfrak{c}$$
$$\mathfrak{c} + \mathfrak{e} = q_{11} \,.\, \mathfrak{d}$$
u. s. f.

wo q q_1 q_{11} u. s. f. Einstufungen sind. Die Stufungen $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, können auch mit setzhaften Zahlen getheilt oder gebunden werden.

Die Stufung $F = \mathfrak{a}$ habe lauter ungleiche Wurzeln, so wird eine Stimme r welche eine der Stufungen $\mathfrak{b}$ $\mathfrak{c}$ $\mathfrak{d}$ u. s. f. vernichtet, weder die vorhergehende noch folgende vernichten, aber ihnen entgegengesetzte Zeichen geben. Wenn die Stimme r die Stufung $\mathfrak{a}$ nicht vernichtet, also keine Wurzel von F ist, so ändert sie auch die Anzahl der Zeichenwechsel der Reihe nicht. Wenn also zwischen den beiden Stimmen r und r' keine Wurzel von F enthalten ist, so haben beide Reihen eine gleiche Anzahl von Wechseln und umgekehrt. Wenn zwischen den Stimmen r und r' eine Wurzel von F enthalten ist, so hat die spätere Reihe einen Wechsel weniger als die frühere und umgekehrt. ***Soviel Wechsel die spätere Reihe weniger als die frühere hat, soviel wirkliche Wurzeln von F liegen zwischen diesen beiden Stimmen r und r'.***

1. *Beispiel.*

$$F = x^3 - 12x^2 + 42x - 42$$
$$\mathfrak{a} = r^3 - 12r^2 + 42r - 42$$
$$\mathfrak{b} = r^2 - 8r + 14$$
$$\mathfrak{c} = 2r - 7$$
$$\mathfrak{d} = 1$$

Stimme r	$\mathfrak{d}$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{a}$	Wechsel
0	+ 1	− 7	+ 14	− 42	3
1	+ 1	− 5	+ 7	− 11	3
2	+ 1	− 3	+ 2	+ 2	2
3	+ 1	− 1	− 1	+ 3	2
4	+ 1	+ 1	− 2	− 2	1
5	+ 1	+ 3	− 1	− 7	1
6	+ 1	+ 5	+ 2	− 6	1
7	+ 1	+ 7	+ 7	+ 7	0

Die Stufung hat also drei wirkliche Wurzeln. Sie liegen zwischen 1 u. 2, 3 u. 4, 6 u. 7.

2. *Beispiel.*

$$F = x^3 - 6x^2 + 20x - 15$$
$$\mathfrak{a} = r^3 - 6r^2 + 20r - 15$$
$$\mathfrak{b} = 3r^2 - 12r + 20$$
$$\mathfrak{c} = -16r + 5$$
$$\mathfrak{d} = 1$$

Stimme r	$\mathfrak{d}$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{a}$	Wechsel
∞	− 1	+ ∞	+ ∞	− ∞	2
0	− 1	+ 5	+ 20	− 15	2
2	− 1	− 27	+ 8	+ 9	1
∞	− 1	− ∞	+ ∞	+ ∞	1

Die Stufung hat also nur eine wirkliche Wurzel zwischen 0 und 2.

19* *Hudde.*

Wenn eine Stufung mehrere gleiche Wurzeln hat, so hat ihr erstes Zugeleite dieselben gleichen Wurzeln, jedoch eine weniger.

$F = (x-r)^m \cdot H \qquad F_1 = (x-r)^{m-1} \cdot (mH + (x-r)H_1)$

Beispiel.

$F = x^4 - 26x^3 + 252x^2 - 1078x + 1715 = (x-7)^3(x-5)$
$F_1 = 4x^3 - 78x^2 + 504x - 1078 = (x-7)^2(4x-22)$

20 *

Eine Sinnstufung $x^2 - 2rx + l^2$ *oder ein Gebinde von Sinnstufungen ist für jeden wirklichen Werth der Ursache* x *setzhaft.* Denn wenn dieser Werth von x sehr grofs ist, so verschwinden die beiden andern Glieder gegen das erste, und die Sinnstufung ist also setzhaft. Wenn sie für eine andre Stimme von x gegenhaft werden könnte so müfste (6*) zwischen beiden Stimmen eine wirkliche Wurzel der Sinnstufung liegen. Die Sinnstufung hat aber keine wirkliche Wurzel.

21 * *Rolle* 1690.

Zwischen je zwei wirklichen Wurzeln einer Stufung liegt eine wirkliche Wurzel ihres ersten Zugeleites.

Es sei die Stufung $F = G \,.\, H$, wo G das Gebinde aller wirklichen Einstufungen, H das Gebinde aller Sinnstufungen sei. Es seien $F_1\ G_1\ H_1$ die ersten Zugeleite so ist $F_1 = G_1 H + G H_1$ die Stimmen $r_1\ r_2\ r_3\ r_4 \ldots$ seien sämmtliche wirkliche Wurzeln von F nach ihrer Gröfse gereihet, so verschwindet G für jede derselben, und F_1 nimmt also den Werth von $G_1 \,.\, H$ an.

Die Einstufungen seien $x - r_1 = y_1 \quad x - r_2 = y_2 \ldots$
so ist $G = y_1\ y_2\ y_3\ y_4 \ldots$

Wenn man der Reihe nach eine dieser Einstufungen wegläfst so seien die Gebinde

$$p_1 = y_2 y_3 y_4 \ldots \qquad p_2 = y_1 y_3 y_4 \ldots \quad \text{u. s. f.}$$

also ist $G_1 = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 \ldots$

Für jede Stimme r verschwinden alle p aufser einem. Für die Stimmen $r_1\ r_2\ r_3 \ldots$ nehmen die Gebinde $p_1\ p_2\ p_3 \ldots$ also auch das Zugeleite G_1 die Werthe $\mathfrak{p}_1\ \mathfrak{p}_2\ \mathfrak{p}_3 \ldots$ an. Das Gebinde H der Sinnstufungen nimmt (20*) die setzhaften Werthe $\mathfrak{H}_1\ \mathfrak{H}_2\ \mathfrak{H}_3 \ldots$ an, also nimmt das Zugeleite F_1 die Werthe $\mathfrak{p}_1\mathfrak{H}_1\ \mathfrak{p}_2\mathfrak{H}_2\ \mathfrak{p}_3\mathfrak{H}_3 \ldots$ an. Wenn aber die Stimmen r nach ihrer Gröfse gereihet sind, so sind die entsprechenden Gebinde $\mathfrak{p}$ abwechselnd setzhaft und gegenhaft. Also (6*) hat das Zugeleite F_1 zwischen je zwei Stimmen r, d. h. zwischen je zwei wirklichen Wurzeln von F eine wirkliche Wurzel. Hieraus folgt noch dafs die Anzahl der wirklichen Wurzeln von F höchstens um 1 gröfser ist als die Anzahl der wirklichen Wurzeln des ersten Zugeleites F_1.

Beispiele. (Fink Algebra 1841. 368 u. ff.)

1) $F = x^3 - 8x + 6$ $\quad F_1 = 3x^2 - 8$

$\bar{3},14743023$
$0,81855805 \cdots\cdots\cdots \bar{1},6329931$
$2,32887218 \cdots\cdots\cdots 1,6329931$

2) $F = x^3 - 9x + 2$ $\quad F_1 = 3x^2 - 9$

$\bar{3},1054826165$
$0,2234620716 \cdots\cdots\cdots \bar{1},7320508$
$2,8820205449 \cdots\cdots\cdots 1,7320508$

3) $F = x^4 - 12x^2 + 3x + 2$ $\quad F_1 = 4x^3 - 24x + 3$
$= (x^2 + 3x - 2)(x^2 - 3x - 1)$

$\bar{3},5615528 \cdots\cdots\cdots \bar{2},50974795$
$\bar{0},3708287 \cdots\cdots\cdots 0,12532809$
$0,5615528 \cdots\cdots\cdots 2,38441986$
$3,3708287$

4) $F = x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + 2$ $\quad F_1 = 4x^3 - 12x^2 + 2x + 6$
$= (x^2 - 2x - 1)(x^2 - 2x - 2)$ $\quad = (x - 1)(4x^2 - 8x - 6)$

$\bar{0},7320508 \cdots\cdots\cdots \bar{0},5811388$
$\bar{0},4142136 \cdots\cdots\cdots 1,0$
$2,4142136 \cdots\cdots\cdots 2,5811388$
$2,7320508$

5) $F = x^4 - x^2 - 2x - 3$ $\quad F_1 = 4x^3 - 2x - 2$
$= (x - 1)(4x^2 + 4x + 2)$

$\bar{1},194808781066$
$1,761377828549 \cdots\cdots\cdots 1,0$
eine Sinnstufung.

6) $F = x^4 - 5x^2 + 7x - 2$ $\quad F_1 = 4x^3 - 10x + 7$

$\bar{2},787272418$
$0,392213059 \cdots\cdots\cdots \bar{1},8555620$

7) $F = x^5 - 10x^3 + 50x - 21$ $\quad F_1 = 5x^4 - 30x^2 + 50$

$0,436293721972$ zwei Sinnstufungen.
zwei Sinnstufungen.

Achte Abtheilung.

Berechnung der Höhennamen.

84.

Eine Reihe für den Höhennamen einer Zahl zu finden.

Es sei die Gleichung $b = 10^x$
so heifst (32.) x der übliche Höhenname von b und wird bezeichnet durch $Lb = x$

Es sei n eine beliebige Zahl, so ist (19.)

$$b^n = 10^{nx}$$

Es sei $b = 1 + a$. Aber $10 = 1 + 9$
also $(1 + a)^n = (1 + 9)^{nx}$

Nun folgt aus (44.)

$$(1 + a)^n = 1 + \frac{n}{1} a + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^2 \ldots$$

$$(1 + 9)^{nx} = 1 + \frac{nx}{1} 9 + \frac{nx(nx-1)}{1 \cdot 2} 9^2 \ldots$$

Man ziehe von beiden Reihen rechts 1 ab, und theile den Unterschied durch n, so ist

$$p = a + \frac{n-1}{1 \cdot 2} a^2 + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 \ldots$$

$$q = x \cdot 9 + \frac{x(nx-1)}{1 \cdot 2} 9^2 + \frac{x(nx-1)(nx-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} 9^3 \ldots$$

und $p = q$

Da die Reihen p, q, einander für jeden beliebigen Werth von n gleich sind, so müssen erstens diejenigen Theile derselben, welche die Gröfse n nicht enthalten, und die mit P und Q bezeichnet sein mögen, einander

gleich sein. Zweitens müssen die Nebenzahlen gleicher Höhen von n einander gleich sein. Es ist also

$$P = a - \tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{1}{3}a^3 - \tfrac{1}{4}a^4 \ldots$$
$$Q = x(9 - \tfrac{1}{2}.9^2 + \tfrac{1}{3}9^3 - \tfrac{1}{4}9^4 \ldots)$$
$$\text{und} \quad P = Q$$

Der Werth dieser beiden einander gleichen Reihen heifst der *schlichte* (natürliche) Höhenname der Zahl b und wird durch lb bezeichnet. Demnach ist:

$$lb = a - \tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{1}{3}a^3 - \tfrac{1}{4}a^4 \ldots$$

Da diese Gleichung für jeden beliebigen Werth der Zahl b gilt, so gilt sie auch für $b = 10$, wo denn $a = 9$ ist. Also

$$l10 = 9 - \tfrac{1}{2}9^2 + \tfrac{1}{3}9^3 - \tfrac{1}{4}9^4 \ldots$$

Aus der Gleichung $P = Q$ folgt also:

$$lb = x \,.\, l10 \qquad \text{Aber} \quad x = Lb$$

Also

$$Lb = \frac{lb}{l10}$$

d. h. *die Theilung des schlichten Höhennamens der Zahl b mit dem schlichten Höhennamen der Grundzahl* 10 *giebt den üblichen Höhennamen der Zahl b.*

Es sei ferner $L10 = \frac{1}{k}$

so ist $Lb = k \,.\, lb = x$

Es sei $lb = y$, so ist $x = ky$

Aber $b = 10^x$, also $b = 10^{k\,y}$

Es sei bezeichnet $10^k = e$, so ist $b = e^y$

Die Zahl e heifst daher *die Grundzahl der schlichten Höhennamen.*

85.

Die Reihe zu finden welche eine Zahl durch ihren schlichten Höhennamen ausdrückt.

Es sei y der schlichte Höhenname von b, und e die Grundzahl der schlichten Höhennamen, so ist (84.)

$$b = e^y$$

Es sei n eine beliebige Zahl, so ist (19.)

$$b^n = e^{ny}$$

Man setze $e = 1 + d$, so ist (44.)

$$(1+d)^n = 1 + \frac{n}{1}d + \frac{n(n-1)}{1.2}d^2 \ldots$$

Es sei $d + \frac{n-1}{1.2}d^2 + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2.3}d^3 \ldots = r$

so ist $e^n = (1+d)^n = 1 + nr$

Es sei m eine andre beliebige Zahl so ist (19.)

$$e^{mn} = (1+nr)^m$$

also (44.) $e^{mn} = 1 + \frac{m}{1}nr + \frac{m(m-1)}{1.2}n^2r^2 \ldots$

oder $e^{mn} = 1 + \frac{mn}{1}r + \frac{mn(mn-n)}{1.2}r^2 \ldots$

Man bestimme m und n so dafs $mn = y$

so ist $e^y = 1 + \frac{y}{1}r + \frac{y(y-n)}{1.2}r^2 \ldots$

Da diese Gleichung für jeden beliebigen Werth von n gültig ist, so müssen diejenigen Theile zu beiden Seiten welche die Gröfse n nicht enthalten einander gleich sein, und die Nebenzahlen der verschiedenen Höhen von n müssen nichtig sein. Aus der ersten Bedingung folgt

$$e^y = 1 + \frac{y}{1}R + \frac{y^2}{1.2}R^2 + \frac{y^3}{1.2.3}R^3 \ldots$$

Hier ist R derjenige Theil von r welcher die Gröfse n nicht enthält. Es ist aber

$$d + \frac{n-1}{1.2}d^2 + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2.3}d^3 \ldots = r$$

Derjenige Theil von r welcher die Gröfse n nicht enthält ist also

$$d - \tfrac{1}{2}d^2 + \tfrac{1}{3}d^3 - \tfrac{1}{4}d^4 \ldots = R$$

Also (84.) $l(1+d) = R$

oder $le = R$

also $e^R = e$

also $R = 1$

also $e^y = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^3}{1.2.3} \ldots$

oder $b = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^3}{1.2.3} \ldots$

wo y der schlichte Höhenname von b ist.

86.

Den Höhennamen einer Zahl zu berechnen.

Es sei $b = 1 + a$, so ist (84.)

$$lb = a - \tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{1}{3}a^3 - \tfrac{1}{4}a^4 \ldots$$

Man setze $c = 1 - a$, so ist

$$lc = \overline{1}\,(a + \tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{1}{3}a^3 + \tfrac{1}{4}a^4 \ldots)$$

Es ist aber (35.)

$$Lc + L\frac{1}{c} = 0$$

also $l10 \,.\, Lc + l10 \,.\, L\frac{1}{c} = 0$

also (84.) $$lc + l\frac{1}{c} = 0$$

also $$l\frac{1}{c} = a + \tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{1}{3}a^3 + \tfrac{1}{4}a^4 \ldots$$

Man setze $m = 2a + \frac{2}{3}a^3 + \frac{2}{5}a^5 \ldots$

$$r = \tfrac{2}{2}a^2 + \tfrac{2}{4}a^4 + \tfrac{2}{6}a^6 \ldots$$

so ist $lb = \frac{1}{2}m - \frac{1}{2}r \qquad l\frac{1}{c} = \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}r$

also $lb + l\frac{1}{c} = m \qquad l\frac{1}{c} - lb = r$

aber $$lb + l\frac{1}{c} = l\left(\frac{b}{c}\right) = l\left(\frac{1+a}{1-a}\right)$$

$$l\frac{1}{c} - lb = l\left(\frac{1}{bc}\right) = l\left(\frac{1}{1-a^2}\right)$$

Setzt man also $\frac{1+a}{1-a} = d \qquad \frac{1}{1-a^2} = f$

so ist $ld = m, \qquad lf = r$

Es sei n eine beliebige setzhafte ganze Zahl. Man nehme für a einen ächten Bruch an und bestimme ihn durch n.

Wenn $a = \frac{1}{n}$, so ist $f = \frac{n^2}{n^2-1}$

Wenn $a = \frac{1}{2n^2-1}$, so ist $d = \frac{n^2}{n^2-1}$

Für einerlei Werth von n ist aber offenbar $\frac{1}{2n^2-1}$ kleiner als $\frac{1}{n}$. Also giebt die Reihe m für einen kleinern Werth von a denselben Höhennamen als die Reihe r für einen gröfsern Werth von a. Da nun diese Reihen desto *grenzhafter* (convergirender) sind je kleiner a ist, so benutzt man zur Berechnung der Höhennamen vorzugsweise die Reihe m, wo

$$ld = m \qquad d = \frac{1+a}{1-a} = \frac{n^2}{n^2-1}$$

$$m = 2a + \tfrac{2}{3}a^3 + \tfrac{2}{5}a^5 + \tfrac{2}{7}a^7 \ldots$$

Man setze der Reihe nach

	n gleich	2	3	8	9	11
so ist	a gleich	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{17}$	$\frac{1}{127}$	$\frac{1}{161}$	$\frac{1}{241}$
	d gleich	$\frac{4}{3}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{64}{63}$	$\frac{81}{80}$	$\frac{121}{120}$

Setzt man diese Werthe von a in die Reihe m, so erhält man die schlichten Höhennamen

$$l\tfrac{4}{3} \quad l\tfrac{9}{8} \quad l\tfrac{64}{63} \quad l\tfrac{81}{80} \quad l\tfrac{121}{120}$$

und hieraus die Höhennamen der Stammzahlen 2, 3, 5, 7, 11. Denn es ist

$$l2 = 2l\tfrac{4}{3} + l\tfrac{9}{8}$$
$$l3 = 3l\tfrac{4}{3} + 2l\tfrac{9}{8}$$
$$l5 = 4l3 - 4l2 - l\tfrac{81}{80}$$
$$l7 = 6l2 - 2l3 - l\tfrac{64}{63}$$
$$2l11 = 3l2 + l3 + l5 + l\tfrac{121}{120}$$

Aus den Höhennamen von 2, 3, 5, ergeben sich die Höhennamen von 4, 6, 8, 9, 10, 12.

Auf demselben Wege finden sich die Höhennamen der folgenden Stammzahlen. Denn wenn

$$a = \frac{1}{2n^2-1}, \quad d = \frac{1+a}{1-a} = \frac{n^2}{(n+1)(n-1)}$$

so ist $m = ld = 2ln - l(n+1) - l(n-1)$

also $2ln = m + l(n+1) + l(n-1)$

Wenn hier n eine Stammzahl ist, so sind $n+1$, $n-1$ grade Zahlen, und ihre Höhennamen werden also durch die Höhennamen kleinerer Stammzahlen bestimmt. Z. B.

$n = 13 \quad 2\,l13 = m_{,} + 3\,l2 + l3 + l7 \quad a = \frac{1}{337}$

$n = 17 \quad 2\,l17 = m_{,,} + 5\,l2 + 2\,l3 \quad a = \frac{1}{577}$

$n = 19 \quad 2\,l19 = m_{,,,} + 3\,l2 + 2\,l3 + l5 \quad a = \frac{1}{7201}$

Aus $l10$ ergiebt sich $k = \frac{1}{l10}$. Man setzt statt der Stellen des schlichten Höhennamens einer Zahl die entsprechenden Vielfachen von k, so ergiebt sich der übliche Höhenname dieser Zahl.

$a = \frac{1}{7}$

$2\,a$	0,285714286
$\frac{2}{3}\,a^3$	1943634
$\frac{2}{5}\,a^5$	23799
$\frac{2}{7}\,a^7$	347
$\frac{2}{9}\,a^9$	6
$l\frac{4}{3}$ =	0,287682072

$a = \frac{1}{17}$

$2\,a$	0,117647059
$\frac{2}{3}\,a^3$	135694
$\frac{2}{5}\,a^5$	282
$l\frac{9}{8}$ =	0,117783035

$a = \frac{1}{127}$

$2\,a$	0,015748031
$\frac{2}{3}\,a^3$	326
$l\frac{64}{63}$ =	0,015748357

$a = \frac{1}{161}$

$2\,a$	0,012422360
$\frac{2}{3}\,a^3$	160
$l\frac{81}{80}$ =	0,012422520

$a = \frac{1}{241}$

$2\,a$	0,008298755
$\frac{2}{3}\,a^3$	48
$l\frac{121}{120}$ . .	0,008298803

$2\,l\frac{4}{3}$ . . .	0,575364145
$l\frac{9}{8}$ . . .	0,117783035
$l2$ =	0,693147180
$3\,l\frac{4}{3}$ . . .	0,863046217
$2\,l\frac{9}{8}$ . . .	0,235566071
$l3$ =	1,098612288
$4\,l3$ . . .	4,394449154
$4\,l2$ —	2,772588722
$l\frac{81}{80}$ —	0,012422520
$l5$ =	1,609437912
$6\,l2$ . . .	4,158883083
$2\,l3$ —	2,197224577
$l\frac{64}{63}$ —	0,015748357
$l7$ =	1,945910149
$3\,l2$ . . .	2,079441542
$l3$ . . .	1,098612288
$l5$ . . .	1,609437912
$l\frac{121}{120}$ . .	0,008298803
$2\,l11$ . . .	4,795790545
$l11$ . . .	2,397895272
$l2$ . . .	0,693147180
$l5$ . . .	1,609437912
$l10$ . . .	2,302585092
k	0,4342944819
$2\,k$	0,8685889638
$3\,k$	1,3028834457
$4\,k$	1,7371779276
$5\,k$	2,1714724095
$6\,k$	2,6057668914
$7\,k$	3,0400613733
$8\,k$	3,4743558552
$9\,k$	3,9086503371

6	2605766891
9	390865034
3	13028834
1	434294
4	173718
7	30401
1	434
8	347
$L\,2$ =	0,301029995

1	4342944819
6	2605766891
09	39086503
4	1737178
3	130288
7	30401
9	3908
1	43
2	9
$L\,5$ =	0,698970004

2	8685889638
3	1302883446
9	390865034
7	30400614
8	3474356
9	390865
5	21715
2	868
7	304
2	9
$L\,11$ =	1,041392685

1	4342944819
09	390865034
8	34743558
6	2605767
1	43429
2	8686
2	868
8	347
8	35
$L\,3$ =	0,477121254

1	4342944819
9	3908650337
4	173717793
5	21714724
9	3908650
1	43429
01	434
4	174
9	39
$L\,7$ =	0,845098040

$L\,2$ . . .	0,301029995
$L\,3$ . . .	0,477121254
$L\,4$ . . .	0,602059991
$L\,5$ . . .	0,698970004
$L\,6$ . . .	0,778151250
$L\,7$ . . .	0,845098040
$L\,8$ . . .	0,903089986
$L\,9$ . . .	0,954242509
$L\,10$ . .	1
$L\,11$ . .	1,041392685
$L\,12$ . .	1,079181246

Allgemein:

$$L(1+a) = ka - \tfrac{1}{2}ka^2 + \tfrac{1}{3}ka^3 \ldots$$

$$L\frac{1+a}{1-a} = 2ka + \tfrac{2}{3}ka^3 + \tfrac{2}{5}ka^5 \ldots$$

Beispiel.

$$1373 = 1372\left(\frac{1+a}{1-a}\right)$$

$$a = \frac{1}{2745}$$

$$1372 = 4 \cdot 7^3$$

$3\,L\,7$	2,535294120
$L\,4$	0,602059991
$2\,ka$	316426
$L\,1373$ =	3,137670537