

Tartu Ülikool
Loodus- ja täppisteaduste valdkond
Matemaatika ja statistika instituut

Kristo Väljako

Murrulised tuletised ja Caputo tuletisega lineaarse diferentsiaalvõrrandi lahendamine

Matemaatika eriala
Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendaja: prof. Arvet Pedas

Tartu 2016

Murrulised tuletised ja Caputo tuletisega lineaarse diferentsiaalvõrrandi lahendamine

Bakalaureusetöö
Kristo Väljako

Lühikokkuvõte. Bakalaureusetöös tutvustatakse Riemann–Liouville’i integraali ja Levinumate murruliste tuletiste mõisteid ning nende lihtsamaid omadusi. Täpsemalt käsitletakse Riemann–Liouville’i ja Caputo tuletistega seotud temaatikat. Lisaks tuletatakse lihtne meetod, millega saab numbriliselt lahendada Caputo tuletist sisaldavaid lineaarseid diferentsiaalvõrrandeid, kus Caputo tuletise järk jääb vahemikku $(0, 1)$. Lõpus on ära toodud ka mitu näidet antud meetodi rakendamise kohta. Murruliste tuletiste osa põhineb eeskätt K. Diethelmi raamatule *The Analysis of Fractional Differential Equations* (2010).

CERCS teaduseriala: P130 Funktsioonid, diferentsiaalvõrrandid.

Märksõnad: Murdtuletised, diferentsiaalvõrrandid, kollokatsioonimeetod.

Fractional Derivatives and Solving Linear Differential Equations, That Contain Caputo Derivative

Bachelor’s thesis
Kristo Väljako

Abstract. The objective of this bachelor’s thesis is to present the definitions and simpler properties of the Riemann–Liouville integral and some different fractional derivatives, namely Riemann–Liouville and Caputo fractional derivatives. Also, a simple method for the numerical solution of linear fractional differential equations, with Caputo fractional derivative is given. At the end there are also several examples where the aforementioned method has been applied. The section that concerns fractional derivatives is mostly based on the book *The Analysis of Fractional Differential Equations* (2010) by K. Diethelm.

CERCS research specialisation: P130 Functions, differential equations.

Key words. Fractional derivatives, differential equations, collocation method.

Sisukord

1	Sissejuhatus	4
2	Gamma- ja beetafunktsioon	5
2.1	Gammafunktsioon	5
2.2	Beetafunktsioon	8
3	Riemann–Liouville’i tuletis	12
3.1	Cauchy valem	12
3.2	Riemann–Liouville’i integraal	15
3.3	Riemann–Liouville’i tuletise definitsioon	19
4	Caputo tuletis	23
5	Caputo tuletist sisaldava lineaarse diferentsiaalvõrrandi numbriline lahendamine	29
5.1	Meetodi kirjeldus	29
5.2	Näited	32
6	Kasutatud kirjandus	37
7	Lisad	38

1 Sissejuhatus

Käesoleva bakalaureusetöö eesmärgiks on tutvustada murrulisi tuletisi, eeskätt Riemann¹-Liouville'i² ja Caputo³ tuletist, ning esitada lihtne meetod, kuidas numbriliselt lahendada Caputo murrulist tuletist sisaldavat lineaarset diferentsiaalvõrrandit.

Murruliste tuletiste olemus on matemaatikuid huvitanud juba diferentsiaalarvutuse algusaastatest peale. Kui Gottfried Leibniz 1695. aastal kirjutas oma sõbrale ja kaasmatemaatikule Guillaume de l'Hopitalile kirja, milles tutvustas tuletise mõistet ja tähistust

$$\frac{d^n f}{dx^n}(x),$$

millega ta tähistas funktsiooni f n -indat järku tuletist kohal x , sai ta üllatuslikult vastuseks küsimuse: „Mida tähendab $\frac{d^n f}{dx^n}(x)$, kui $n = \frac{1}{2}$?“ Selle küsimuse saatmist l'Hopitali poolt peetakse murruliste tuletiste teooria alguseks. Kuna algselt küsiti arvu $\frac{1}{2}$ kohta, mis on murd, siis nimetatakse mittenaturaalarvulist järku tuletisi just murrulisteks tuletisteks. Kuigi hiljem on leitud, et tuletise järgu n rollis võib olla iga sugune mittenegatiivne reaalarv.

Leibniz mõtles mitmeid aastaid l'Hopitali intrigeerivale küsimusele, kuid kahjuks ei suutnud anda ammendavat vastust. Esimesena defineerisid murrulise tuletise Joseph Liouville ja Bernhard Riemann. Nende poolt antud definitsiooni on aga küllaltki keeruline kasutada ning kuna puudusid rakendused sellisele tuletisele, jäi murruliste tuletistega tegelemine pea sajaks aastaks vaid väheste matemaatikute hobiks.

XX sajandi keskel leiti murruliste tuletistele mitmeid väga kasulikke rakendusi ja nendega tegelemine muutus küllaltki populaarseks. Lühikese aja jooksul leiti kümneid erinevaid viise, kuidas defineerida murrulist tuletist. Paljud neist olid esialgse Riemann–Liouville'i definitsiooni edasiarendused. Kuid leiti ka täiesti uusi lähemisviise. Selles bakalaureusetöös vaatlen neist vaid levinuimat – Caputo tuletist.

Tänapäeval kasutatakse murrulisi tuletisi näiteks mehaanikas viskoosete materjalide modelleerimisel, füüsikas difusiooni uurimisel ja ultraheli lainete levimise kirjeldamisel. Lisaks on leitud rakendusi biokeemia, informaatika ja finantsmatemaatika vallas ning ka meditsiinis kasutatakse murrulisi tuletisi, et paremini modelleerida inimese kudede ragerimist välistele mõjudele. Isegi psühholoogid uurivad murrulisi tuletisi, et nende abil paremini modelleerida inimeste käitumist.

Kõige selle tõttu on murruliste tuletiste teooria väga aktuaalne ja populaarne matemaatika valdkond, millega tegelemine on väga oluline ja tulus.

¹Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866) – Saksa matemaatik

²Joseph Liouville (1809–1882) – Prantsuse matemaatik

³Michele Caputo (s. 1927) – Itaalia matemaatik

2 Gamma- ja beetafunktsioon

Selles peatükis tutvume gamma- ja beetafunktsiooniga. Esitatav materjal põhineb eeskätt raamatul [2].

2.1 Gammafunktsioon

Definitsioon 2.1. *Gammafunktsiooniks* ehk *teist liiki Euleri*⁴ *integraaliks* nimetatakse parameetrist a sõltuvat integraali $\Gamma(a)$, mis on defineeritud võrdusega

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{a-1} dx. \quad (2.1)$$

Uurime, mis on gammafunktsiooni määremispiirkond, see tähendab, et teeme kindlaks, milliste parameetri a reaalarvuliste väärtuste korral integraal (2.1) koondub. Kasutades integraali aditiivsust, esitame selle integraali kahe liidetava summana:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{a-1} dx = \int_0^1 e^{-x} x^{a-1} dx + \int_1^{\infty} e^{-x} x^{a-1} dx.$$

Edaspidi vaatleme viimase võrduse paremal pool olevaid liidetavaid eraldi. Esiteks vaatleme päratut integraali

$$\int_1^{\infty} e^{-x} x^{a-1} dx. \quad (2.2)$$

Paneme tähele, et iga $a \in \mathbb{R}$ korral

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} x^{a+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{a+1}}{e^x} = 0. \quad (2.3)$$

Tõepoolest, kui $a \leq -1$, siis on võrduse (2.3) kehtivus ilmne. Kui $a > 1$, siis rakendame nii mitu korda l'Hospitali reeglit, kuni murru nimetajas on negatiivne astendaja ning sel juhul on samuti võrduse (2.3) kehtivus ilmne. Võrdusest (2.3) tuleneb, et iga $x \geq 1$ korral leidub parameetrist a sõltuv konstant M nii, et

$$e^{-x} x^{a+1} \leq M.$$

⁴Leonhard Euler (1707–1783) – Šveitsi matemaatik

Seega

$$e^{-x}x^{a-1} \leq \frac{M}{x^2}.$$

Kuna integraal $\int_1^\infty \frac{M}{x^2} dx$ koondub, siis päratute integraalide võrdluslause (Teoreem 6 raamatust [3], lk 430) kohaselt koondub ka integraal (2.2).

Nüüd vaatleme päratut integraali

$$\int_0^1 e^{-x}x^{a-1} dx. \quad (2.4)$$

Kuna $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-x} = 1$, siis integraal (2.4) koondub parajasti siis, kui koondub integraal

$$\int_0^1 x^{a-1} dx = \frac{x^a}{a} \Big|_{x=0}^1. \quad (2.5)$$

Integraal (2.5) koondub parajasti siis, kui $a > 0$. Seega integraal (2.4) koondub, kui $a > 0$.

Kokkuvõttes on valemi (2.1) abil defineeritud gammafunktsiooni määramispiirkonnaks vahemik $(0, \infty)$.

Tõestame nüüd ühe väga olulise gammafunktsiooni omaduse.

Lause 2.1 (gammafunktsiooni taandamisvalem). *Olgu $a > 0$. Siis*

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a).$$

TÕESTUS. Olgu $a > 0$. Gammafunktsiooni definitsiooni põhjal

$$\Gamma(a+1) = \int_0^\infty e^{-x}x^{(a+1)-1} dx = \int_0^\infty e^{-x}x^a dx.$$

Saadud integraali arvutame ositi, võttes $u = x^a$ ja $dv = e^{-x} dx$. Sel juhul $du = ax^{a-1} dx$ ja $v = -e^{-x}$. Seega

$$\int_0^\infty e^{-x}x^a dx = -e^{-x}x^a \Big|_{x=0}^\infty + a \int_0^\infty e^{-x}x^{a-1} dx = 0 + a\Gamma(a) = a\Gamma(x).$$

Sellela on lause tõestatud. ■

Gammafunktsiooni taandamisvalemi põhjal saame iga naturaalarvu n korral

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \dots = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1).$$

Kuna

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_{x=0}^{\infty} = -\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} + 1 = 1,$$

siis oleme nähtavasti saanud gammafunktsiooni ühe tähtsaima omaduse:

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.6)$$

Eelnev omadus ütleb meile, et mitmes mõttes on gammafunktsioon faktoriaali üldistus positiivsetele reaalarvudele.

Kasutades lauset 2.1, saame me jätkata gammafunktsiooni ka osadele negatiivsetele reaalarvudele. Tõepoolest, taandamisvalemist saame võrduse

$$\Gamma(a) = \frac{\Gamma(a+1)}{a}. \quad (2.7)$$

Selle võrduse abil saame me gammafunktsiooni defineerida lisaks vahemikule $(0, \infty)$ ka vahemikus $(-1, 0)$. Vahemikus $(-2, -1)$ saame gammafunktsiooni defineerida analoogiliselt vahemikule $(-1, 0)$. Seda protsessi lõpmatult jätkates saame defineerida gammafunktsiooni väärtused kõikide reaalarvude korral, välja arvatud negatiivsed täisarvud ja null, mille ümbruses on gammafunktsioon tõkestamata.

Siinkohal vaatame ühte näidet gammafunktsiooni väärtuse leidmisest. Järgneva näite lahendamisel on kasutatud materjali [7].

Näide 2.1. Leiame gammafunktsiooni väärtuse kohal $\frac{1}{2}$. Alustuseks leiame gammafunktsiooni ruudu kohal $\frac{1}{2}$:

$$\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right)^2 = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \left(2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} du \right) \cdot \left(2 \int_0^{\infty} e^{-v^2} dv \right).$$

Esitame saadud integraali kahekordse integraalina

$$\left(2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} du \right) \cdot \left(2 \int_0^{\infty} e^{-v^2} dv \right) = 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(u^2+v^2)} du dv.$$

Selle kahekordse integraali arvutamiseks läheme asendusega

$$\begin{cases} u = r \cos \theta, \\ v = r \sin \theta, \end{cases}$$

üle polaarkoordinaatidele. Paneme tähele, et punktid (u, v) omandavad väärtusi uv -tasandi I veerandis, seega polaarradius r muutub intervallis $[0, \infty]$ ning polaarnurk θ lõigus $[0, \frac{\pi}{2}]$:

$$\begin{aligned} 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(u^2+v^2)} \, du \, dv &:= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r \, dr \, d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} e^{-r^2} 2r \, dr \, d\theta = \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} e^{-r^2} \, dr^2 \, d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-e^{-r^2} \Big|_{r=0}^{\infty} \right) \, d\theta = \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (0 + 1) \, d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \, d\theta = 2\theta \Big|_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi. \end{aligned}$$

Seega oleme saanud, et

$$\left(\Gamma \left(\frac{1}{2} \right) \right)^2 = \pi.$$

Eelnevas võrrandis mõlemalt poolt ruutjuurt võttes leiame ka otsitava gammafunktsiooni väärtuse

$$\Gamma \left(\frac{1}{2} \right) = \sqrt{\pi}.$$

2.2 Beetafunktsioon

Definitsioon 2.2. Olgu $a > 0$ ja $b > 0$. Siis *beetafunktsiooniks* ehk *esimest liiki Euleri integraaliks* nimetatakse parameetritest a ja b sõltuvat integraali $B(a, b)$, mis on defineeritud võrdusega

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} \, dx. \quad (2.8)$$

Tõestame ühe beetafunktsiooni omaduse.

Lause 2.2. *Beetafunktsioon on sümmeetriline, s.t.*

$$B(a, b) = B(b, a), \quad a > 0, b > 0.$$

TÕESTUS. Olgu $a > 0$ ja $b > 0$. Beetafunktsiooni definitsiooni põhjal

$$\begin{aligned} B(a, b) &= \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx = - \int_1^0 (x-1)^{a-1}x^{b-1} d(1-x) = \\ &= \int_0^1 (x-1)^{a-1}x^{b-1} d(1-x) = B(b, a). \end{aligned}$$

■

Tõestame gamma- ja beetafunktsiooni vahelise seose, mida me hiljem korduvalt kasutame.

Lause 2.3. Olgu $a > 0$ ja $b > 0$. Siis kehtib valem

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

TÕESTUS. Vaatleme kõigepealt juhtu, kus $a > 1$ ja $b > 1$. Teeme beetafunktsiooni definitsioonis (2.8) muutujavahetuse $x = \frac{s}{1+s}$; siis

$$dx = \frac{ds}{(1+x)^2}, \quad 1-x = \frac{1}{1+s}.$$

Seega

$$B(a, b) = \int_0^\infty \frac{s^{a-1}}{(1+s)^{a+b}} ds. \quad (2.9)$$

Gammafunktsiooni definitsioonis (2.1) teeme asenduse $x = ts$, kus t on fikseeritud positiivne reaalarv; sellise asenduse puhul $dx = t ds$. Seega

$$\frac{\Gamma(a)}{t^a} = \int_0^\infty e^{-ts} s^{a-1} ds. \quad (2.10)$$

Viimases võrduses asendame parameetri a parameetriga $a+b$ ning arvu t arvuga $1+t$, siis saame

$$\frac{\Gamma(a+b)}{(1+t)^{a+b}} = \int_0^\infty e^{-(1+t)s} s^{a+b-1} ds.$$

Korrutame eelnevat võrdust mõlemalt poolt teguriga t^{a-1} ja integreerime üle intervalli $[0, \infty)$. Vasak pool omandab kuju

$$\int_0^{\infty} \frac{\Gamma(a+b)t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}} dt = \Gamma(a+b) \int_0^{\infty} \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}} dt = \Gamma(a+b)B(a,b)$$

ning parem pool kuju

$$\int_0^{\infty} t^{a-1} \int_0^{\infty} e^{-(1+t)s} s^{a+b-1} ds dt.$$

Eelnevas integraalis muudame integreerimise järjekorda, mida me võime teha, sest $a > 1$ ja $b > 1$. Siis

$$\begin{aligned} \Gamma(a+b)B(a,b) &= \int_0^{\infty} t^{a-1} \int_0^{\infty} e^{-(1+t)s} s^{a+b-1} ds dt = \int_0^{\infty} e^{-s} s^{a+b-1} \int_0^{\infty} t^{a-1} e^{-ts} dt ds = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-s} s^{a+b-1} \frac{\Gamma(a)}{s^a} ds = \Gamma(a) \int_0^{\infty} e^{-s} s^{b-1} ds = \Gamma(a)\Gamma(b). \end{aligned}$$

Eelnevast saame

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}, \quad a > 1, b > 1. \quad (2.11)$$

Nüüd vaatleme juhtu, kui $0 < a \leq 1$ ja $0 < b \leq 1$. Sel juhul $a+1 > 1$, $b+1 > 1$ ning valemi (2.11) põhjal teame, et kehtib

$$B(a+1, b+1) = \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+2)}. \quad (2.12)$$

Uurime võrduse (2.12) paremat poolt, kasutades lauset 2.1:

$$\frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+2)} = \frac{a\Gamma(a)b\Gamma(b)}{(a+b+1)(a+b)\Gamma(a+b)}.$$

Uurime võrduse (2.12) vasakut poolt beetafunktsiooni definitsiooni abil:

$$B(a+1, b+1) = \int_0^1 x^a (1-x)^b dx.$$

Eelneva integraali arvutamise ositi, võttes $u = (1-x)^b$ ja $dv = x^a dx$, sel juhul $du = -b(1-x)^{b-1} dx$ ja $v = \frac{x^{a+1}}{a+1}$. Siis saame

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^a (1-x)^b dx &= \frac{x^{a+1}}{a+1} (1-x)^b \Big|_{x=0}^1 + \frac{b}{a+1} \int_0^1 x^{a+1} (1-x)^{b-1} dx = \\ &= \frac{b}{a+1} \int_0^1 (x^a - x^a(1-x))(1-x)^{b-1} dx = \\ &= \frac{b}{a+1} \left(\int_0^1 x^a (1-x)^{b-1} dx - \int_0^1 x^a (1-x)^b dx \right) = \\ &= \frac{b}{a+1} (B(a+1, b) - B(a+1, b+1)). \end{aligned}$$

Seega oleme saanud valemi

$$B(a+1, b+1) = \frac{b}{a+b+1} B(a+1, b), \quad a > 1, b > 0. \quad (2.13)$$

Lause 2.2 põhjal teame, et $B(a+1, b) = B(b, a+1)$. Rakendades valemit (2.13) avaldi-sele $B(b, a+1)$ saame

$$\begin{aligned} B(a+1, b+1) &= \frac{b}{a+b+1} B(b, a+1) = \frac{b}{a+b+1} \frac{a}{a+b-1+1} B(a, b) = \\ &= \frac{ab}{(a+b+1)(a+b)} B(a, b). \end{aligned}$$

Nüüd asendame saadud tulemused võrdusesse (2.12), saame

$$\begin{aligned} B(a+1, b+1) &= \frac{ab}{(a+b+1)(a+b)} B(a, b) = \frac{ab\Gamma(a)\Gamma(b)}{(a+b+1)(a+b)\Gamma(a+b)} = \\ &= \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+2)}, \quad a > 0, b > 0. \end{aligned}$$

Seega

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}, \quad a > 0, b > 0.$$

■

3 Riemann–Liouville'i tuletis

Riemann–Liouville'i tuletise definitsiooni mõistlikuks esitamiseks tutvume eelnevalt *Cauchy valemiga*.

3.1 Cauchy valem

See punkt põhineb raamatul [6]. Vaatleme ülesannet, kus on vaja leida diferentsiaalvõrrandi

$$y^{(n)}(x) = f(x) \tag{3.1}$$

lahend $y = y(x)$, mis rahuldab algtingimusi

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0, \\ y'(x_0) &= y_1, \\ &\dots\dots\dots \\ y^{(n-2)}(x_0) &= y_{n-2}, \\ y^{(n-1)}(x_0) &= y_{n-1}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

kus f on mingis vahemikus (a, b) antud funktsioon ja $x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ on etteantud reaalarvud. Sellist ülesannet nimetatakse *algtingimustega ülesandeks* ehk *Cauchy*⁵ *ülesandeks* võrrandi (3.1) jaoks.

Teoreem 3.1 (Cauchy). *Olgu funktsioon f pidev mingis vahemikus (a, b) . Kui $x_0 \in (a, b)$, siis Cauchy ülesandel $\{(3.1), (3.2)\}$ leidub ühene lahend mistahes arvude $y_0, y_1, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$ korral, mis avaldub kujul*

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_k}{k!} (x - x_0)^k + \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-s)^{n-1} f(s) \, ds, \quad x \in (a, b). \tag{3.3}$$

TÕESTUS. Kehtigu teoreemi eeldused. Tulenevalt tuletise ja integraali vahelisest seosest saame võrrandi $y^{(n)} = f(x)$ lahendi leida selle võrrandi mõlema poole n -kordse järjestikuse integreerimise teel. Tõepoolest, võrrandis (3.1) vasaku poole integreerimisel saame tingimuse $y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$ tõttu

$$\int_{x_0}^x y^{(n)}(s) \, ds = y^{(n-1)}(x) - y^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)} - y_{n-1}.$$

⁵Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) – Prantsuse matemaatik

Võrrandi (3.1) parema poole integraal rajades x_0 -st kuni x -ni on

$$\int_{x_0}^x f(s) \, ds.$$

Jätkates analoogiliselt integreerimist, saame

$$y^{(n-2)}(x) = \int_{x_0}^x y^{(n-1)}(s) \, ds = y_{n-2} + y_{n-1}(x - x_0) + \int_{x_0}^x \int_{x_0}^{s_1} f(s) \, ds \, ds_1,$$

$$y^{(n-3)}(x) = \int_{x_0}^x y^{(n-2)}(s) \, ds = y_{n-3} + y_{n-2}(x - x_0) + \frac{y_{n-1}}{2}(x - x_0)^2 + \\ + \int_{x_0}^x \int_{x_0}^{s_2} \int_{x_0}^{s_1} f(s) \, ds \, ds_1 \, ds_2,$$

.....

$$y(x) = \int_{x_0}^x y'(s) \, ds = y_0 + y_1(x - x_0) + \frac{y_2}{2}(x - x_0)^2 + \frac{y_3}{6}(x - x_0)^3 + \dots$$

$$\dots + \frac{y_{n-1}}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \underbrace{\int_{x_0}^x \int_{x_0}^{s_{n-1}} \dots \int_{x_0}^{s_2} \int_{x_0}^{s_1} f(s) \, ds \, ds_1 \dots ds_{n-2} \, ds_{n-1}}_n.$$

Eelnevast näeme, et Cauchy ülesande $\{(3.1), (3.2)\}$ lahend avaldub kujul

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_k}{k!} (x - x_0)^k + \underbrace{\int_{x_0}^x \int_{x_0}^{s_{n-1}} \dots \int_{x_0}^{s_2} \int_{x_0}^{s_1} f(s) \, ds \, ds_1 \dots ds_{n-2} \, ds_{n-1}}_n. \quad (3.4)$$

Teoreemi tõestamiseks peame veel vaid veenduma, et kehtib

$$\underbrace{\int_{x_0}^x \int_{x_0}^{s_{n-1}} \dots \int_{x_0}^{s_2} \int_{x_0}^{s_1} f(s) \, ds \, ds_1 \dots ds_{n-2} \, ds_{n-1}}_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-s)^{n-1} f(s) \, ds. \quad (3.5)$$

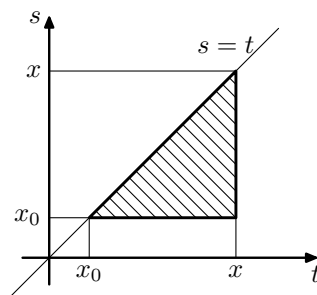
Tõestame selle võrduse matemaatilise induktsiooni abil. Näeme, et võrdus (3.5) kehtib $n = 1$ korral

$$\int_{x_0}^x f(s) \, ds = \frac{1}{(1-1)!} \int_{x_0}^x (x-s)^{1-1} f(s) \, ds = \int_{x_0}^x f(s) \, ds.$$

Induktsiooni lõpetamiseks on vaja veenduda, et võrduse (3.5) kehtivusest juhu $n = k$ korral, järeldeb võrduse (3.5) kehtivus juhu $n = k + 1$ korral. Oletame, et võrdus (3.5) kehtib $n = k$ korral ning arvutame

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\int_{x_0}^x \int_{x_0}^{s_k} \dots \int_{x_0}^{s_2} \int_{x_0}^{s_1}}_{k+1} f(s) \, ds \, ds_1 \dots ds_{k-1} \, ds_k &= \int_{x_0}^x \underbrace{\int_{x_0}^{s_k} \dots \int_{x_0}^{s_2} \int_{x_0}^{s_1}}_k f(s) \, ds \, ds_1 \dots ds_{k-1} \, ds_k = \\
 &= \int_{x_0}^x \left(\underbrace{\int_{x_0}^{s_k} \dots \int_{x_0}^{s_2} \int_{x_0}^{s_1}}_k f(s) \, ds \, ds_1 \dots ds_{k-1} \right) ds_k = \\
 &= \int_{x_0}^x \left(\frac{1}{(k-1)!} \int_{x_0}^{s_k} (s_k - s)^{k-1} f(s) \, ds \right) ds_k = \\
 &= \frac{1}{(k-1)!} \int_{x_0}^x \int_{x_0}^t (t - s)^{k-1} f(s) \, ds \, dt.
 \end{aligned}$$

Viimasel sammul tähistasime $t = s_k$. Saime kahekordse integraali üle joonisel 3.1.1 kujutatud kolmnurga. Viime selles integraalis läbi integreerimise järjekorra muutmise:



Joonis 3.1.1: Integreerimispiirkond

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{(k-1)!} \int_{x_0}^x \int_{x_0}^t (t - s)^{k-1} f(s) \, ds \, dt &= \frac{1}{(k-1)!} \int_{x_0}^x f(s) \int_s^x (t - s)^{k-1} \, dt \, ds = \\
 &= \frac{1}{(k-1)!} \int_{x_0}^x f(s) \left(\frac{(t - s)^k}{k} \Big|_{t=s}^x \right) ds = \frac{1}{k!} \int_{x_0}^x f(s) (x - s)^k \, ds.
 \end{aligned}$$

Kokkuvõttes saime, et

$$\underbrace{\int_{x_0}^x \int_{x_0}^{s_k} \dots \int_{x_0}^{s_2} \int_{x_0}^{s_1} f(s) \, ds \, ds_1 \dots ds_{k-1} \, ds_k}_{k+1} = \frac{1}{k!} \int_{x_0}^x f(s)(x-s)^k \, ds.$$

Sellega on induktsioon läbi ja seega valem (3.5) kehtib. ■

Valemit (3.3) nimetatakse *Cauchy valemiks*.

Järgmised kaks punkti põhinevad raamatul [1] ja magistritööl [4].

3.2 Riemann–Liouville'i integraal

Edaspidi on meie jaoks väga olulise tähtsusega eespool tõestatud võrdus

$$\underbrace{\int_{x_0}^x \int_{x_0}^{s_{n-1}} \dots \int_{x_0}^{s_2} \int_{x_0}^{s_1} f(s) \, ds \, ds_1 \dots ds_{n-2} \, ds_{n-1}}_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-s)^{n-1} f(s) \, ds. \quad (3.5)$$

See võrdus annab meile valemi, kuidas arvutada n -kordset Riemanni integraali ühekordse Riemanni integraali abil. Kuna meie suurem eesmärk on defineerida funktsiooni f reaalarvulist järku tuletist, siis võiksime alustada reaalarvulist järku integraali defineerimisest. Paneme tähele, et võrduse (3.5) paremal pool esineb integraali kordsus n kahes kohas: avaldise $(x-s)^{n-1}$ astendajas ning faktoriaali argumentina $(n-1)!$. Kui tahta lubada olukorda $n \in \mathbb{R}$, siis astendamisega $(x-s)^{n-1}$ meil probleeme ei teki, kuna me teame, kuidas arvutada reaalarvulist astet. Küll aga tekib probleem faktoriaaliga, mis on määratud ainult naturaalarvuliste argumentide korral. Siinkohal kasutame eelnevalt tõestatud seost (2.6), mis seob faktoriaali ja gamma-funktsiooni:

$$(n-1)! = \Gamma(n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nüüd võime valemi (3.5) abil defineerida n -järku integraali, kus $n \in \mathbb{R}$. Seda integraali hakkame nimetama *Riemann–Liouville'i integraaliks*.

Edaspidi tähistame sümboliga $\mathcal{C}[a, b]$ kõigi lõigus $[a, b]$ pidevate funktsioonide hulka.

Definitsioon 3.1. Olgu $r > 0$ ja $[a, b]$ mingi lõik hulgas \mathbb{R} . Funktsiooni $f \in \mathcal{C}[a, b]$ Riemann–Liouville'i r -järku integraaliks alusel a nimetatakse avaldist, mis on defineeri-

tud võrdusega

$$({}_{RL}J_a^r f)(x) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_a^x (x-s)^{r-1} f(s) \, ds, \quad x \in [a, b]. \quad (3.6)$$

Kui $r = 0$, siis defineerime $({}_{RL}J_a^0 f)(x) = f(x)$, kus $x \in [a, b]$.

Kui $r \in \mathbb{N}$, siis Riemann–Liouville’i integraal ühtib tavalise r -kordse Riemanni integraaliga

$$({}_{RL}J_{x_0}^r f)(x) = \underbrace{\int_{x_0}^x \int_{x_0}^{s_{r-1}} \dots \int_{x_0}^{s_2} \int_{x_0}^{s_1}}_r f(s) \, ds \, ds_1 \dots ds_{r-2} \, ds_{r-1}, \quad r \in \mathbb{N}.$$

Iga $r \geq 0$ korral on Riemann–Liouville’i integraalil mitmed tavalise Riemanni integraali omadused, nagu lineaarsus ja monotoonsus.

Lause 3.2. Olgu $r \geq 0$. Riemann–Liouville’i integraal on lineaarne, s.t.

$$({}_{RL}J_a^r (\alpha f + \beta g))(x) = \alpha ({}_{RL}J_a^r f)(x) + \beta ({}_{RL}J_a^r g)(x), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

TÕESTUS. Olgu $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ning $g, f \in \mathcal{C}[a, b]$. Definiitsiooni järgi arvutades saame

$$\begin{aligned} ({}_{RL}J_a^r (\alpha f + \beta g))(x) &= \frac{1}{\Gamma(r)} \int_a^x (x-s)^{r-1} (\alpha f + \beta g)(s) \, ds = \\ &= \frac{1}{\Gamma(r)} \int_a^x (\alpha (x-s)^{r-1} f(s) + \beta (x-s)^{r-1} g(s)) \, ds = \\ &= \frac{\alpha}{\Gamma(r)} \int_a^x (x-s)^{r-1} f(s) \, ds + \frac{\beta}{\Gamma(r)} \int_a^x (x-s)^{r-1} g(s) \, ds = \\ &= \alpha ({}_{RL}J_a^r f)(x) + \beta ({}_{RL}J_a^r g)(x). \end{aligned}$$

Eelnev kehtib, kuna Riemanni integraal on lineaarne. ■

Lause 3.3. Olgu $r \geq 0$. Riemann–Liouville’i integraal on monotoonne, s.t.

$$\forall x \in [a, b] : g(x) \leq f(x) \implies ({}_{RL}J_a^r g)(x) \leq ({}_{RL}J_a^r f)(x).$$

TÕESTUS. Olgu $g, f \in \mathcal{C}[a, b]$ sellised funktsioonid, et iga $x \in [a, b]$ korral $g(x) \leq f(x)$. Siis iga $s \in [a, x]$ kehtib

$$(x-s)^{r-1}g(s) \leq (x-s)^{r-1}f(s).$$

Seega kehtib ka

$$\int_a^x (x-s)^{r-1}g(s) \, ds \leq \int_a^x (x-s)^{r-1}f(s) \, ds,$$

kuna Riemanni integraal on monotoonne. Järelikult

$$({}_{RL}J_a^r g)(x) \leq ({}_{RL}J_a^r f)(x).$$

■

Tõestame veel ühe Riemann–Liouville integraali omaduse, mida läheb vaja järgmises punktis.

Lause 3.4. Olgu $p, r \geq 0$ ja $f \in \mathcal{C}[a, b]$, siis kehtib

$$({}_{RL}J_a^p ({}_{RL}J_a^r f))(x) = ({}_{RL}J_a^{p+r} f)(x), \quad x \in [a, b].$$

TÕESTUS. Olgu $r, p > 0$. Kasutades Riemann–Liouville'i integraali definitsiooni, saame

$$\begin{aligned} ({}_{RL}J_a^p ({}_{RL}J_a^r f))(x) &= \left({}_{RL}J_a^p \left(\frac{1}{\Gamma(r)} \int_a^t (t-s)^{r-1} f(s) \, ds \right) \right) (x) = \\ &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^x (x-t)^{p-1} \left(\frac{1}{\Gamma(r)} \int_a^t (t-s)^{r-1} f(s) \, ds \right) \, dt = \\ &= \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(r)} \int_a^x (x-t)^{p-1} \left(\int_a^t (t-s)^{r-1} f(s) \, ds \right) \, dt = \\ &= \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(r)} \int_a^x \int_a^t (x-t)^{p-1} (t-s)^{r-1} f(s) \, ds \, dt. \end{aligned}$$

Vahetame saadud kahekordses integraalis integreerimise järjekorda:

$$\begin{aligned} \int_a^x \int_a^t (x-t)^{p-1} (t-s)^{r-1} f(s) \, ds \, dt &= \int_a^x \int_s^x (x-t)^{p-1} (t-s)^{r-1} f(s) \, dt \, ds = \\ &= \int_a^x f(s) \int_s^x (x-t)^{p-1} (t-s)^{r-1} \, dt \, ds. \end{aligned}$$

Teeme integraalis

$$\int_a^x f(s) \int_s^x (x-t)^{p-1} (t-s)^{r-1} \, dt \, ds$$

muutujavahetuse $t = s + q(x-s)$. Siis $dt = (x-s) \, dq$ ja

$$\begin{aligned} \int_a^x f(s) \int_s^x (x-t)^{p-1} (t-s)^{r-1} \, dt \, ds &= \\ &= \int_a^x f(s) \int_s^x (x - (s + q(x-s)))^{p-1} ((s + q(x-s)) - s)^{r-1} (x-s) \, dq \, ds = \\ &= \int_a^x f(s) \int_0^1 (x-s + q(x-s))^{p-1} (q(x-s))^{r-1} (x-s) \, dq \, ds = \\ &= \int_a^x f(s) \int_0^1 ((1-q)(x-s))^{p-1} q^{r-1} (x-s)^r \, dq \, ds = \\ &= \int_a^x f(s) (x-s)^{p+r-1} \int_0^1 (1-q)^{p-1} q^{r-1} \, dq \, ds. \end{aligned}$$

Nüüd kasutame beetafunktsiooni definitsiooni ning lauset 2.3. Eelneva põhjal saame

$$\begin{aligned} ({}_{RL}J_a^p ({}_{RL}J_a^r f))(x) &= \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(r)} \int_a^x f(s) (x-s)^{p+r-1} B(p,r) \, ds = \\ &= \frac{B(p,r)}{\Gamma(p)\Gamma(r)} \int_a^x f(s) (x-s)^{p+r-1} \, ds = \\ &= \frac{1}{\Gamma(p+r)} \int_a^x f(s) (x-s)^{p+r-1} \, ds = \\ &= ({}_{RL}J_a^{p+r} f)(x). \end{aligned}$$

Sellega on lause tõestanud. ■

3.3 Riemann–Liouville'i tuletise definitsioon

Selles punktis defineerime Riemann–Liouville'i tuletise, kasutades Riemann–Liouville'i integraali mõistet.

Definitsioon 3.2. Reaalarvu r ülemiseks täisosaks nimetatakse täisarvu $\lceil r \rceil$, mis rahuldab tingimust

$$\lceil r \rceil = \min_{n \in \mathbb{Z}} \{n \mid n \geq r\},$$

kus \mathbb{Z} on kõigi täisarvude hulk.

Definitsioon 3.3. Olgu $r > 0$, $m = \lceil r \rceil$ ning f selline funktsioon, et ${}_{RL}J_a^{m-r}f$ on m korda pidevalt diferentseeruv. Siis funktsiooni f r -järku Riemann–Liouville'i tuletiseks alusel a nimetatakse avaldist

$$({}_{RL}D_a^r f)(x) = \left(\frac{d^m}{dx^m} ({}_{RL}J_a^{m-r} f) \right) (x), \quad x \in [a, b]. \quad (3.7)$$

Kui $r = 0$, siis defineerime $({}_{RL}D_a^0 f)(x) = f(x)$.

Kui $r \in \mathbb{N}$, siis Riemann–Liouville'i tuletis ühtib tavalise r -inda tuletisega $\frac{d^r}{dx^r}$. Sel juhul $r = \lceil r \rceil$ ning saame

$$({}_{RL}D_a^r f)(x) = \left(\frac{d^r}{dx^r} ({}_{RL}J_a^{r-r} f) \right) (x) = \left(\frac{d^r}{dx^r} ({}_{RL}J_a^0 f) \right) (x) = \frac{d^r f}{dx^r}(x), \quad x \in [a, b].$$

Järgnev lause näitab, et Riemann–Liouville'i integraali leidmine on Riemann–Liouville'i tuletise võtmise parempoolne pöördoperatsioon.

Lause 3.5. Olgu $r \geq 0$ ja $m = \lceil r \rceil$ ja funktsioon $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ selline, et Riemann–Liouville tuletis eksisteerib, siis kehtib

$$({}_{RL}D_a^r ({}_{RL}J_a^r f))(x) = f(x), \quad x \in [a, b].$$

TÕESTUS. Kehtigu lause eeldused ning olgu $x \in [a, b]$. Lauset 3.4 tõttu

$$\begin{aligned} ({}_{RL}D_a^r ({}_{RL}J_a^r f))(x) &= \left(\frac{d^m}{dx^m} ({}_{RL}J_a^{m-r} ({}_{RL}J_a^r f)) \right) (x) = \left(\frac{d^m}{dx^m} ({}_{RL}J_a^{m-r+r} f) \right) (x) = \\ &= \left(\frac{d^m}{dx^m} ({}_{RL}J_a^m f) \right) (x) = f(x). \end{aligned}$$

Võrduse

$$\left(\frac{d^m}{dx^m} ({}_{RL}J_a^m f) \right) (x) = f(x) \quad (3.8)$$

kehtivust tõestame induktsiooni abil. Võtame induktsioonibaasiks $m = 1$. Sel juhul

$$\left(\frac{d}{dx} ({}_{RL}J_a^1 f) \right) (x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(s) ds = f(x).$$

Seega võrdus (3.8) kehtib $m = 1$ korral.

Nüüd näitame, et oletades võrduse (3.8) kehtivust $m = k$ korral, näitame selle kehtivust $m = k + 1$ korral. Tõepoolest

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} ({}_{RL}J_a^{m+1} f) \right) (x) &= \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{d^m}{dx^m} ({}_{RL}J_a^m ({}_{RL}J_a^1 f)) \right) \right) (x) = \\ &= \left(\frac{d}{dx} ({}_{RL}J_a^1 f) \right) (x) = f(x). \end{aligned}$$

Sellega on vvõrdus (3.8). ■

Lause 3.6. Riemann–Liouville’i tuletis on lineaarne, s.t.

$${}_{RL}D_a^r(\alpha f + \beta g) = \alpha {}_{RL}D_a^r f + \beta {}_{RL}D_a^r g, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

TÕESTUS. Olgu $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $r \geq 0$, $m = [r]$ ning funktsioonid f ja g sellised, et leiduvad tuletised ${}_{RL}D_a^r f$, ${}_{RL}D_a^r g$ ja ${}_{RL}D_a^r(f + g)$. Arvutame, kasutades Riemann–Liouville’i tuletise definitsiooni ja lauset 3.2.

$${}_{RL}D_a^r(\alpha f + \beta g) = \frac{d^m}{dx^m} (J_a^{m-r}(\alpha f + \beta g)) = \frac{d^m}{dx^m} (\alpha J_a^{m-r} f + \beta J_a^{m-r} g)$$

Matemaatilisest analüüsist teame, et tavaline m järku tuletis on lineaarne. Seega

$$\frac{d^m}{dx^m} (\alpha J_a^{m-r} f + \beta J_a^{m-r} g) = \alpha \frac{d^m}{dx^m} (J_a^{m-r} f) + \beta \frac{d^m}{dx^m} (J_a^{m-r} g) = \alpha {}_{RL}D_a^r f + \beta {}_{RL}D_a^r g.$$

Sellega oleme selle lause tõestanud. ■

Näide 3.1. Leiame konstantse funktsiooni $f(x) = c$ ($c \in \mathbb{R}$, $x \in [0, b]$, $b > 0$) Riemann–Liouville’i $\frac{1}{2}$ -järku tuletise (alusel 0). Paneme tähele, et $\left[\frac{1}{2} \right] = 1$ ning näi-

test 2.1 teame, et $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. Siis

$$\begin{aligned} ({}_{RL}D_0^{\frac{1}{2}}f)(x) &= {}_{RL}D_0^{\frac{1}{2}}c = \frac{d^1}{dx^1} \left({}_{RL}J_0^{\frac{1}{2}}c \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^x (x-s)^{\frac{1}{2}-1} c \, ds \right) = \\ &= \frac{d}{dx} \left(\frac{-c}{\sqrt{\pi}} \int_x^0 (x-s)^{-\frac{1}{2}} d(x-s) \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{c}{\sqrt{\pi}} \frac{(x-s)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \Big|_{x=0}^x \right) = \\ &= \frac{d}{dx} \left(\frac{2c\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} - 0 \right) = \frac{2c}{\sqrt{\pi}2\sqrt{x}} = \frac{c}{\sqrt{\pi x}}. \end{aligned}$$

Seega on konstantse funktsiooni Riemann–Liouville'i $\frac{1}{2}$ -järku tuletis võrdne avaldisega $\frac{c}{\sqrt{\pi x}}$.

Leiame nüüd konstantsest funktsioonist Riemann–Liouville'i tuletise ka üldisemal juhul.

Näide 3.2. Leiame konstantse funktsiooni $f(x) = c$ ($c \in \mathbb{R}$, $x \in [a, b]$, $b > a$) Riemann–Liouville'i r -järku tuletise alusel a . Kui $r \in \mathbb{N}$, siis Riemann–Liouville'i tuletis ühtib tavalise tuletisega ning ${}_{RL}D_a^r c = 0$.

Kui $r \notin \mathbb{N}$, siis arvutame Riemann–Liouville'i tuletise definitsiooni järgi:

$$\begin{aligned} {}_{RL}D_a^r c &= \frac{d^m}{dx^m} ({}_{RL}J_a^{m-r} c) = \frac{d^m}{dx^m} \left(\frac{1}{\Gamma(m-r)} \int_a^x (x-s)^{m-r-1} c \, ds \right) = \\ &= \frac{d^m}{dx^m} \left(\frac{-c}{\Gamma(m-r)} \cdot \frac{(x-s)^{m-r}}{m-r} \Big|_{s=a}^x \right) = \\ &= \frac{c}{(m-r)\Gamma(m-r)} \frac{d^m}{dx^m} (x-a)^{m-r}, \quad x \in [a, b]. \end{aligned}$$

Leiame eelnevalt saadud m -kordse tuletise $\frac{d^m}{dx^m} (x-a)^{m-r}$:

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{dx^m} (x-a)^{m-r} &= \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} (m-r)(x-a)^{m-r-1} = \\ &= \frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}} (m-r)(m-r-1)(x-a)^{m-r-2} = \\ &= \dots = \\ &= (m-r)(m-r-1) \dots (m-r-(m-1))(x-a)^{m-r-m} = \\ &= (m-r)(m-r-1) \dots (1-r)(x-a)^{-r}, \quad x \in [a, b]. \end{aligned}$$

Kasutades lauset 2.1, arvutame

$$\begin{aligned}\Gamma(m-r) &= (m-r-1)\Gamma(m-r-1) = (m-r-1)(m-r-2)\Gamma(m-r-2) = \dots = \\ &= (m-r-1)(m-r-2)\dots(1-r)\Gamma(1-r).\end{aligned}$$

Seega

$${}_{RL}D_a^r c = \frac{c(m-r)(m-r-1)\dots(1-r)(x-a)^{-r}}{(m-r)(m-r-1)\dots(1-r)\Gamma(1-r)} = \frac{c(x-a)^{-r}}{\Gamma(1-r)}, \quad x \in [a, b].$$

Kokkuvõttes avaldub konstantse funktsiooni $f(x) = c$ Riemann–Liouville’i tuletis

$$({}_{RL}D_a^r f)(x) = \begin{cases} 0, & r \in \mathbb{N}; \\ \frac{c(x-a)^{-r}}{\Gamma(1-r)}, & r \notin \mathbb{N}. \end{cases} \quad (3.9)$$

Eelnevast näitest tuleb välja üks Riemann–Liouville’i tuletise suurimaid puudujä-äke. Nimelt ei ole nullist erineva konstantse funktsiooni Riemann–Liouville’i tuletis mittenaturaalarvulise järgu korral võrdne nulliga. See on üks põhjuseid, miks mate-maatikud ka peale Riemann–Liouville’i tuletise defineerimist otsisid veel teisigi viise, kuidas murrulist tuletist defineerida.

4 Caputo tuletis

See peatükk põhineb raamatul [1] ja magistritööl [4].

Selles peatükis tutvume Caputo tuletisega. See on üks paljudest Riemann–Liouville'i tuletise edasi arendustest. Caputo tuletisel pole mitmeid Riemann–Liouville'i tuletise puudujääke. Etteruttavalt võib öelda, et näiteks konstantse funktsiooni Caputo tuletis on alati võrdne nulliga.

Alustuseks meenutame Taylori⁶ polünoomi definitsiooni.

Definitsioon 4.1. Olgu funktsioon f n korda diferentseeruv punktis a . Funktsiooni f n -järku Taylori polünoomiks punktis a nimetatakse polünoomi

$$(T_n[f; a])(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k,$$

kus $f^{(0)}(x) = f(x)$ ja $0! = 1$.

Nüüd saame defineerida Caputo tuletise.

Definitsioon 4.2. Olgu $r > 0$, $m = \lceil r \rceil$ ning f selline funktsioon, et leidub ${}_R L D_a^r(f - T_{m-1}[f; a])$. Siis nimetatakse funktsiooni f r -järku Caputo tuletiseks alusel a avaldist

$$({}_C D_a^r f)(x) = ({}_R L D_a^r(f - T_{m-1}[f; a]))(x), \quad x \in [a, b].$$

Kui $r = 0$, siis defineerime $({}_C D_a^0 f)(x) = f(x)$.

Kui $r \in \mathbb{N}$, siis Caputo tuletis ühtib tavalise r -inda tuletisega $\frac{d^r}{dx^r}$. Sel juhul $r = \lceil r \rceil$ ning me saame

$$\begin{aligned} ({}_C D_a^r f)(x) &= ({}_R L D_a^r(f - T_{r-1}[f; a]))(x) = ({}_R L D_a^r f)(x) - ({}_R L D_a^r T_{r-1}[f; a])(x) = \\ &= \frac{d^r f}{dx^r}(x) - \frac{d^r}{dx^r}(T_{r-1}[f; a])(x) = \frac{d^r f}{dx^r}(x), \quad x \in [a, b]. \end{aligned}$$

Eelnevas kasutasime asjaolu, et $(r - 1)$ -järku polünoomi r kordne tuletis on võrdne nulliga.

Tõestame teoreemi, mille väidet esitatakse tihti kui Caputo tuletise definitsiooni.

Teoreem 4.1. Olgu $r \geq 0$, $m = \lceil r \rceil$, $a, b \in \mathbb{R}$ ja funktsioon $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ selline, et Caputo tuletis eksisteerib, siis kehtib

$$({}_C D_a^r f)(x) = \left({}_R L J_a^{m-r} \left(\frac{d^m}{dx^m} f \right) \right) (x), \quad x \in [a, b].$$

⁶Brook Taylor (1685-1731) – Inglise matemaatik

TÕESTUS. Kehtigu teoreemi eeldused. Esialgu vaatleme juhtu, kui $r \in \mathbb{N}$, siis Caputo tuletis ühtib tavalise tuletisega ning $m = \lceil r \rceil = r$. Seega

$$\left({}_{RL}J_a^{m-r} \left(\frac{d^m}{dx^m} f \right) \right) (x) = \left({}_{RL}J_a^0 \left(\frac{d^r}{dx^r} f \right) \right) (x) = \frac{d^r f}{dx^r}(x), \quad x \in [a, b].$$

Nüüd vaalteme juhu, kui $r \notin \mathbb{N}$. Leiame Caputo tuletise definitsiooni järgi.

$$\begin{aligned} ({}_C D_a^\alpha f)(x) &= ({}_{RL} D_a^\alpha (f - T_{m-1}[f; a]))(x) = \\ &= \left(\frac{d^m}{dx^m} ({}_{RL} J_a^{m-\alpha} (f - T_{m-1}[f; a])) \right) (x) = \\ &= \frac{d^m}{dx^m} \left(\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{m-\alpha-1} (f(t) - T_{m-1}[f; a](t)) dt \right) \end{aligned}$$

Leiame viimase integraali ositi, võttes

$$u = f(t) - T_{m-1}[f; a](t), \quad dv = (x-t)^{m-\alpha-1} dt,$$

sel juhul

$$du = \frac{d}{dx} (f(t) - T_{m-1}[f; a](t)) dt, \quad v = -\frac{(x-t)^{m-\alpha}}{m-\alpha}.$$

Siis saame

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{m-\alpha-1} (f(t) - T_{m-1}[f; a](t)) dt &= \\ &= -\frac{(x-t)^{m-\alpha}}{(m-\alpha)\Gamma(m-\alpha)} (f(t) - T_{m-1}[f; a](t)) \Big|_{t=a}^x + \\ &+ \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x \frac{(x-t)^{m-\alpha}}{m-\alpha} \frac{d}{dx} (f(t) - T_{m-1}[f; a](t)) dt = \\ &= -\frac{(x-t)^{m-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha+1)} (f(t) - T_{m-1}[f; a](t)) \Big|_{t=a}^x + \\ &+ \frac{1}{\Gamma(m-\alpha+1)} \int_a^x (x-t)^{m-\alpha} \frac{d}{dx} (f(t) - T_{m-1}[f; a](t)) dt = \\ &= 0 + 0 + \frac{1}{\Gamma(m-\alpha+1)} \int_a^x (x-t)^{m-\alpha} \frac{d}{dx} (f(t) - T_{m-1}[f; a](t)) dt. \end{aligned}$$

Seega

$${}_{RL}J_a^{m-\alpha}(f - T_{m-1}[f; a]) = {}_{RL}J_a^{m-\alpha+1} \left(\frac{d}{dx}(f - T_{m-1}[f; a]) \right).$$

Nüüd, kui integreerime avaldist ${}_{RL}J_a^{m-\alpha}(f - T_{m-1}[f; a])$ ositi m korda, siis saame

$$\begin{aligned} ({}_{RL}J_a^{m-\alpha}(f - T_{m-1}[f; a]))(x) &= \left({}_{RL}J_a^{m-\alpha+m} \left(\frac{d^m}{dx^m}(f - T_{m-1}[f; a]) \right) \right)(x) = \\ &= \left({}_{RL}J_a^m {}_{RL}J_a^{m-\alpha} \left(\frac{d^m}{dx^m}(f - T_{m-1}[f; a]) \right) \right)(x) = \\ &= \left({}_{RL}J_a^m {}_{RL}J_a^{m-\alpha} \left(\frac{d^m f}{dx^m} \right) \right)(x), \quad x \in [a, b]. \end{aligned}$$

Eelnevalt ksutasime lauset 3.4 ning teadmist, et $(m-1)$ -järku polünoomi m -järku tuletis on võrdne nulliga. Nüüd pöördume tagasi esimeses arvutuses oleva m -kordse diferentseerimise juurde.

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{dx^m} \left(\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{m-\alpha-1} (f(t) - T_{m-1}[f; a](t)) dt \right) &= \\ &= \left(\frac{d^m}{dx^m} {}_{RL}J_a^m {}_{RL}J_a^{m-\alpha} \frac{d^m f}{dx^m} \right)(x) = \\ &= ({}_{RL}J_a^{m-\alpha} D^m f)(x), \quad x \in [a, b]. \end{aligned}$$

Eelnevalt kasutasime teadmist, et kui $m \in \mathbb{N}$, siis m -kordne diferentseerimine ja m -järku Riemann–Liouville'i integraali võtmine on üksteise pöördoperatsioonid. ■

Järgneva lausega tõestame, et Riemann–Liouville'i integraali leidmine on ka Caputo tuletise leidmise parempoolne pöördoperatsioon.

Lause 4.2. Olgu $r \geq 0$, $m = [r]$, $a, b \in \mathbb{R}$ ja funktsioon $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ selline, et Caputo tuletis eksisteerib, siis kehtib

$$({}_C D_a^r ({}_{RL}J_a^r f))(x) = f(x), \quad x \in [a, b].$$

TÕESTUS. Kehtigu teoreemi eeldused ja olgu $x \in [a, b]$. Kirjutame lause väite vasaku poole Caputo tuletise defininitsiooni järgi lahti ning rakendame lauset 3.6:

$$\begin{aligned} ({}_C D_a^r ({}_{RL}J_a^r f))(x) &= ({}_{RL}D_a^r ({}_{RL}J_a^r f - T_{m-1}[{}_{RL}J_a^r f; a]))(x) = \\ &= ({}_{RL}D_a^r ({}_{RL}J_a^r f))(x) - ({}_{RL}D_a^r (T_{m-1}[{}_{RL}J_a^r f; a]))(x). \end{aligned}$$

Lause 3.5 põhjal teame, et

$$({}_{RL}D_a^r({}_{RL}J_a^r f))(x) = f(x).$$

Lause tõestuseks jääb meil veel veenduda, et $({}_{RL}D_a^r(T_{m-1}[{}_{RL}J_a^r f; a]))(x) = 0$, $x \in [a, b]$. Uurime, kuidas avaldub Riemann–Liouville’i integraali Taylori polünoom,

$$\begin{aligned} (T_{m-1}[{}_{RL}J_a^r f; a])(x) &= \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(x-a)^k}{k!} \frac{d^k}{dx^k} (({}_{RL}J_a^r f)(a)) = \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(x-a)^k}{k!} \frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{1}{\Gamma(r)} \int_a^a (x-s)^{r-1} f(s) ds \right) = \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(x-a)^k}{k!} \frac{d^k}{dx^k} 0 = 0. \end{aligned}$$

Eelnevas on integraal võrdne nulliga kuna seda peaks arvutama rajades a -st a -ni. Kokkuvõttes

$$\begin{aligned} ({}_CD_a^r({}_{RL}J_a^r f))(x) &= ({}_{RL}D_a^r({}_{RL}J_a^r f))(x) - ({}_{RL}D_a^r(T_{m-1}[{}_{RL}J_a^r f; a]))(x) = \\ &= f(x) - {}_{RL}D_a^r 0 = f(x), \quad x \in [a, b]. \end{aligned}$$

Sellega on see lause tõestatud. ■

Ka Caputo tuletise jaoks tõestame praktiliselt olulise lineaarsuse omaduse.

Lause 4.3. *Caputo tuletis on lineaarne, s.t.*

$${}_CD_a^r(\alpha f + \beta g) = \alpha {}_CD_a^r f + \beta {}_CD_a^r g, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

TÕESTUS. Olgu $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $r \geq 0$, $m = \lceil r \rceil$ ja funktsioonid f, g sellised, et leiduvad tuletised ${}_CD_a^r f$, ${}_CD_a^r g$ ja ${}_CD_a^r(f + g)$. Arvutame, kasutades Caputo tuletise definitsiooni,

$${}_CD_a^r(\alpha f + \beta g) = {}_{RL}D_a^r((\alpha f + \beta g) - T_{m-1}[\alpha f + \beta g; a]). \quad (4.1)$$

Kasutades Taylori polünoomi definitsiooni, leiame funktsiooni $\alpha f + \beta g$ Taylori polünoomi

$$\begin{aligned} T_{m-1}[\alpha f + \beta g; a] &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(\alpha f + \beta g)^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\alpha f^{(k)}(a) + \beta g^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = \\ &= \alpha \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \beta \sum_{k=0}^{m-1} \frac{g^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = \\ &= \alpha T_{m-1}[f; a] + \beta T_{m-1}[g; a]. \end{aligned}$$

Eelneva arvutuse ning lause 3.6 põhjal jätkates võrdust (4.1), saame

$$\begin{aligned} {}_C D_a^r(\alpha f + \beta g) &= {}_{RL} D_a^r((\alpha f - \alpha T_{m-1}[f; a]) + (\beta g - \beta T_{m-1}[f; a])) = \\ &= \alpha {}_{RL} D_a^r(f - T_{m-1}[f; a]) + \beta {}_{RL} D_a^r(g - T_{m-1}[g; a]) = \alpha {}_C D_a^r f + \beta {}_C D_a^r g. \end{aligned}$$

Sellega on see lause tõestatud. ■

Lahendame mõned näited, kus leiame Caputo tuletisi.

Näide 4.1. Leiame konstantse funktsiooni $f(x) = c$ Caputo r -järku tuletise ($r \geq 0$). Paneme tähele, et iga $k \in \mathbb{N}$ korral $f^k(x) = 0$. Seega $T_{m-1}[f; a] = c$, kus $m = \lceil r \rceil$. Nüüd arvutame funktsiooni f Caputo tuletise:

$$\begin{aligned} ({}_C D_a^r f)(x) &= {}_C D_a^r c = ({}_{RL} D_a^r(f - T_{m-1}[f; a]))(x) = {}_{RL} D_a^r(c - c) = {}_{RL} D_a^r 0 = \\ &= \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^0 (x-s)^{\alpha-1} 0 \, ds = 0. \end{aligned}$$

Seega on konstantse funktsiooni Caputo tuletis alati võrdne nulliga. Teeme siinkohal läbi veel ühe näite, mida läheb vaja järgmises peatükis.

Näide 4.2. Leiame funktsiooni $f(x) = x^p$, ($x \in [0, b], p > 0$) $\frac{1}{2}$ -järku Caputo tuletise alusel 0. Paneme tähele, et $\lceil \frac{1}{2} \rceil = 1$ ja kasutame teoreemi 4.1. Siis

$$\begin{aligned} {}_C D_0^{\frac{1}{2}} x^p &= {}_{RL} J_0^{1-\frac{1}{2}} \left(\frac{d}{dx} x^p \right) = {}_{RL} J_0^{\frac{1}{2}} (p x^{p-1}) = \frac{p}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^x (x-s)^{\frac{1}{2}-1} s^{p-1} \, ds = \\ &= \frac{p x^{\frac{1}{2}+p-1}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^x \frac{(x-s)^{-\frac{1}{2}} s^{p-1}}{x^{\frac{1}{2}} x^{p-1}} \, ds. \end{aligned}$$

Teeme muutujavahetuse $t = \frac{s}{x}$, siis $ds = x \, dt$ ja

$${}_C D_0^{\frac{1}{2}} x^p = \frac{p x^{\frac{1}{2}+p-1}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^1 \frac{(x(\frac{s}{x} - t))^{-\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} t^{p-1} x \, dt = \frac{p x^{\frac{1}{2}+p-1}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^1 (1-t)^{-\frac{1}{2}} t^{p-1} \, dt.$$

Kasutame beetafunktsiooni definitsiooni:

$${}_C D_0^{\frac{1}{2}} x^p = \frac{p x^{\frac{1}{2}+p-1}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} B\left(p, \frac{1}{2}\right).$$

Kasutades lauseid 2.3 ja 2.1 saame edasi arvutada

$${}_cD_0^{\frac{1}{2}}x^p = \frac{B\left(p, \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}px^{-\frac{1}{2}+p} = \frac{p\Gamma(p)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+p\right)}x^{p-\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+p\right)}x^{p-\frac{1}{2}}.$$

Seega kokkuvõttes oleme leidnud astmefunktsiooni $\frac{1}{2}$ -järku Caputo tuletise

$${}_cD_0^{\frac{1}{2}}x^p = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+p\right)}x^{p-\frac{1}{2}}, \quad (x \in [0, b], p > 0). \quad (4.2)$$

5 Caputo tuletist sisaldava lineaarse diferentsiaalvõrrandi numbriline lahendamine

Selles peatükis tuletame ühe meetodi, millega saab numbriliselt lahendada algtingimusega Caputo tuletist sisaldavaid lineaarseid diferentsiaalvõrrandeid.

5.1 Meetodi kirjeldus

Vaatleme Cauchy ülesannet

$$\begin{cases} ({}_C D_0^r y)(x) + p(x)y(x) = f(x), & x \in [0, b], \\ y(0) = y_0, \end{cases} \quad (5.1)$$

kus f ja p on lõigul $[0, b]$ määratud pidevad funktsioonid, y_0 on antud reaalarv, r mingi fikseeritud reaalarv vahemikus $(0, 1)$, $y = y(x)$ on otsitav funktsioon ning ${}_C D_0^r y$ on otsitava funktsiooni r -järku Caputo tuletis.

Ülesande (5.1) lahendamiseks tähistame

$$z(x) = ({}_C D_0^r y)(x), \quad x \in [0, b], \quad (5.2)$$

kus $y \in C[0, b]$. Lause 4.2 ja näite 4.1 põhjal saame, et funktsioon y avaldub

$$y(x) = ({}_{RL} J_0^r z)(x) + c, \quad (5.3)$$

kus c on mingi konstant ja ${}_{RL} J_0^r z$ on Riemann-Liouville'i r -järku integraal funktsioonist z . Määrame konstandi c . Vaatleme valemiga (5.3) antud funktsiooni y kohal 0:

$$y(0) = ({}_{RL} J_0^r z)(0) + c = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^0 s^{r-1} z(s) \, ds + c = 0 + c = c.$$

Oletame nüüd, et funktsioon y on Cauchy ülesande (5.1) lahend. Siis teame, et $y(0) = y_0$. Seega $c = y_0$. Kokkuvõttes oleme saanud, et ülesande (5.1) lahend y avaldub kujul

$$y(x) = ({}_{RL} J_0^r z)(x) + y_0, \quad x \in [0, b]. \quad (5.4)$$

Teisest küljest

$$z(x) = f(x) - p(x)y(x), \quad x \in [0, b].$$

Asendame viimasena saadud avaldise võrdusesse (5.4) ning arvutame, Riemann–Liouville’i integraali definitsiooni kasutades,

$$y(x) = ({}_{RL}J_0^r(f - py))(x) + y_0,$$

$$y(x) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^x (x-s)^{r-1} (f(s) - p(s)y(s)) \, ds + y_0,$$

$$y(x) + \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^x (x-s)^{r-1} p(s)y(s) \, ds = y_0 + \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^x (x-s)^{r-1} f(s) \, ds.$$

Tähistame

$$g(x) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^x (x-s)^{r-1} f(s) \, ds, \quad (5.5)$$

$$K(x,s) = \frac{1}{\Gamma(r)} (x-s)^{r-1} p(s). \quad (5.6)$$

Kokkuvõttes oleme saanud Cauchy ülesandega (5.1) samaväärse integraalvõrrandi kujul

$$y(x) + \int_0^x K(x,s)y(s) \, ds = g(x) \quad (5.7)$$

kus funktsioonid g ja K avalduvad vastavalt valemitega (5.5) ja (5.6).

Võrrandi (5.7) ligikaudseks lahendamiseks defineerime lõigis $[0, b]$ võrgu

$$\{x_i \mid 0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b; i = 0, 1, \dots, n-1\}.$$

Lisaks fikseerime veel kaks arvu η_1 ja η_2 nii, et $0 < \eta_1 < \eta_2 < 1$. Nüüd saame defineerida punktid (nn kollokatsioonipunktid)

$$x_{ij} = x_i + \eta_j(x_{i+1} - x_i), \quad (i = 0, 1, \dots, n-1; j = 1, 2).$$

Võrrandi (5.7) ligikaudset lahendit otsime kujul

$$y_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(c_{i1} \frac{x_{i2} - x}{x_{i2} - x_{i1}} + c_{i2} \frac{x - x_{i1}}{x_{i2} - x_{i1}} \right) \chi_{[x_i, x_{i+1})}(x), \quad x \in [0, b], \quad (5.8)$$

kus

$$c_{ij} = y_n(x_{ij}), \quad (i = 0, 1, \dots, n-1; j = 1, 2)$$

on otsitavad konstandid ja $\chi_{[x_i, x_{i+1}]}$ on hulga $[x_i, x_{i+1}]$ karakteristik funktsioon, s.t.

$$\chi_{[x_i, x_{i+1}]}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0, & x \notin [x_i, x_{i+1}]. \end{cases}$$

Asendades valemiga (5.8) määratud suuruse y_n võrrandisse (5.7) otsitava y kohale, saame leida avaldise

$$R_n(x) = y_n(x) + \int_0^x K(x, s)y_n(s) \, ds - g(x), \quad x \in [0, b].$$

Järgnevas nõuame, et $R_n(x_{ij}) = 0$:

$$\left[y_n(x) + \int_0^x K(x, s)y_n(s) \, ds - g(x) \right]_{x=x_{ij}} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n-1; j = 1, 2. \quad (5.9)$$

Sellist neetodit nimetatakse *kollokatsioonimeetodiks* integraalvõrrandi (5.8) lahendamiseks.

Kasutades integraali aditiivsust, saame võrdusest (5.9) võrdused

$$c_{ij} + \sum_{k=0}^{i-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} K(x_{ij}, s)y_n(s) \, ds + \int_{x_i}^{x_{ij}} K(x_{ij}, s)y_n(s) \, ds = g(x_{ij}),$$

mille kirjutame vastavalt valemile (5.8) ümber järgnevalt:

$$c_{ij} + \sum_{k=0}^{i-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} K(x_{ij}, s) \left(c_{k1} \frac{x_{k2} - x}{x_{k2} - x_{k1}} + c_{k2} \frac{x - x_{k1}}{x_{k2} - x_{k1}} \right) \, ds + \\ + \int_{x_i}^{x_{ij}} K(x_{ij}, s) \left(c_{i1} \frac{x_{i2} - x}{x_{i2} - x_{i1}} + c_{i2} \frac{x - x_{i1}}{x_{i2} - x_{i1}} \right) \, ds = g(x_{ij}),$$

kus $i = 0, 1, \dots, n-1; j = 1, 2$. Kasutame veelkord integraali aditiivsust ja viime eelnevad võrdused kujule

$$c_{ij} + \sum_{k=0}^{i-1} \frac{1}{x_{k2} - x_{k1}} \left(c_{k1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} K(x_{ij}, s)(x_{k2} - s) \, ds + c_{k2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} K(x_{ij}, s)(s - x_{k1}) \, ds \right) + \\ + \frac{1}{x_{i2} - x_{i1}} \left(c_{i1} \int_{x_i}^{x_{ij}} K(x_{ij}, s)(x_{i2} - s) \, ds + c_{i2} \int_{x_i}^{x_{ij}} K(x_{ij}, s)(s - x_{i1}) \, ds \right) = g(x_{ij}), \quad (5.10)$$

kus $i = 0, 1, \dots, n - 1; j = 1, 2$.

Kujust (5.10) on näha, et meil on tegemist lineaarvõrrandsüsteemiga, mille tundmatuteks on kordajad $c_{ij}, i = 0, 1, \dots, n - 1; j = 1, 2$. Lahendades selle süsteemi saame välja kirjutada lähislahendi y_n , kasutades selleks valemit (5.8).

Selles punktis toodud meetodi kood on toodud lisades.

5.2 Näited

Selles punktis vaatleme näiteid lineaarsetest Caputo tuletistega Cauchy ülesannetest, mis on lahendatud eelnevas punktis toodud meetodil. Esimeses näites vaatleme võrrandit, mille lahend on kogu vaadeldavas piirkonnas diferentseeruv.

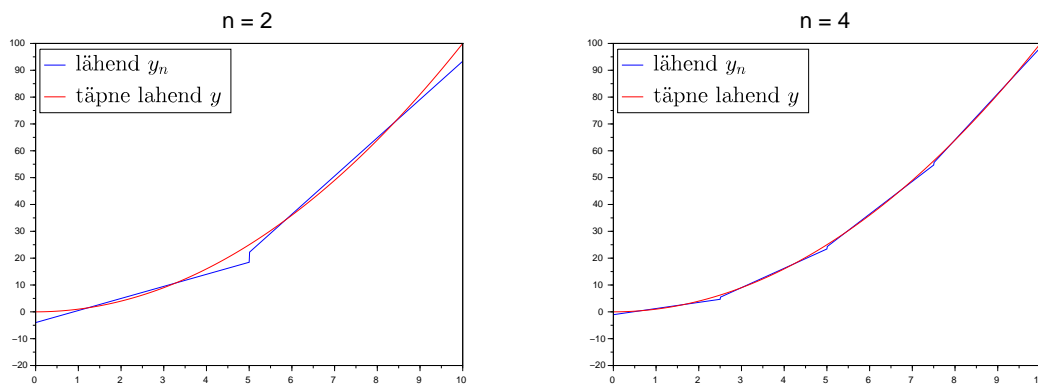
Näide 5.1. Vaatleme Cauchy ülesannet

$$\begin{cases} \left({}_c D_0^{\frac{1}{2}} y \right) (x) + y(x) = x^2 + \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}, & x \in [0, 10], \\ y(0) = 0. \end{cases} \quad (5.11)$$

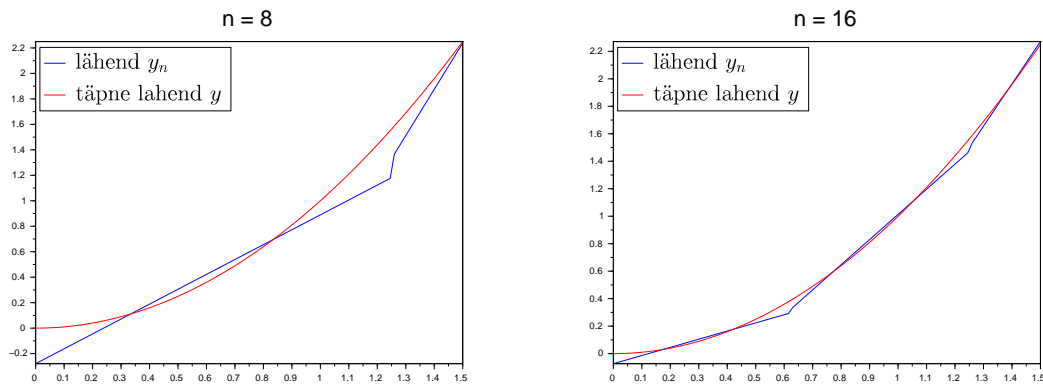
Magistritööst [4] (näide 10.1) on teada, et selle Cauchy ülesande täpne lahend on

$$y(x) = x^2, \quad x \in [0, 10].$$

Järgnevatel joonistel on toodud Cauchy ülesande (5.11) lahend y ning eelmises punktis kirjeldatud meetodil leitud lähend y_n , kui meil on ühtlane võrk ning arvudeks η_1 ja η_2 on vastavalt $\frac{1}{3}$ ja $\frac{2}{3}$.



Sõlmede arvu n suuremate väärtuste korral on Cauchy ülesande (5.11) täpne lahend y ja lähend y_n niivõrd sarnased, et nende erinevust pole jooniselt näha. Seetõttu on järgnevalt toodud vaid graafikute suurendus vahemikus $[0; 1, 5]$.



Uurime lähendi y_n viga

$$\max_{x \in [0,10]} |y(x) - y_n(x)|$$

erinevate sõlmede arvude korra. Järgnevas tabelis on toodud vead ε_n , mis on arvutatud valemi

$$\varepsilon_n = \max_{k=1, \dots, 1000} |y(\zeta_k) - y_n(\zeta_k)| \quad (5.12)$$

järgi, kus arvud ζ_k on arvutatud valemiga

$$\zeta_k = 0,001 \cdot k, \quad k = 0, 1, \dots, 1000.$$

Samuti on toodud jagatised $\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{2n}}$.

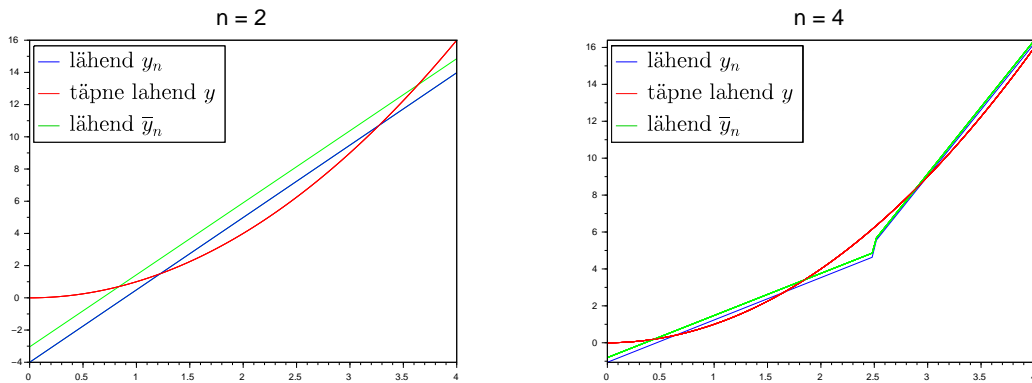
Sõlmede arv n	viga ε_n	jagatis $\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{2n}}$
2	6,63211	4,20191
4	1,57835	4,17431
8	0,37811	4,22611
16	0,08947	4,08539
32	0,02190	4,28571
64	0,00511	4,02362
128	0,00127	

Lisades on ära toodud Scilabi programm, mida kasutati selle näite arvutamisel.

Järgnevalt on ära toodud eelneva tabeliga sarnane tabel, kus on toodud lähendi \bar{y}_n vead. Lähend \bar{y}_n on leitud, võttes arvudeks η_1 ja η_2 nn Gaussi punktid $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$ ja $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$, millede abil leitud lähend sageli on kõige täpsem (vt. [5], lk. 56).

Sõlmede arv n	viga ε_n	jagatis $\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{2n}}$
2	5,81142	4,23873
4	1,37103	4,22388
8	0,32459	4,19801
16	0,07732	4,16595
32	0,01856	4,13363
64	0,00449	4,11927
128	0,00109	

Nagu vigade tabelitest näha võib, siis on lähendite y_n ja \bar{y}_n erinevus väga väike, kusjuures lähend \bar{y}_n on täpsem kui lähend y_n , mida oli ka arvata. Seda illustreerivad järgnevad joonised.



Järgnevalt vaatleme näidet, kus vaatluse all oleva lineaarvõrrandi kordaja on erinev ühest ning mille lahend ei ole punktis null diferentseeruv.

Näide 5.2. Vaatleme Cauchy ülesannet

$$\begin{cases} \left({}_C D_0^{\frac{2}{3}} y \right) (x) + y(x) \sqrt[4]{x} = x + 5 \sqrt[4]{x} + \frac{\Gamma\left(\frac{7}{4}\right) \sqrt[12]{x}}{\Gamma\left(\frac{13}{12}\right)}, & x \in [0, 10], \\ y(0) = 5. \end{cases} \quad (5.13)$$

Selle võrrandi täpne lahend avaldub kujul

$$y(x) = \sqrt[4]{x^3} + 5, \quad x \in [0, 10]. \quad (5.14)$$

Tõepoolest, kasutades näidet 4.1 ja magistritöö [4] näidet 9.5 saame, et

$${}_C D_0^{\frac{2}{3}} \left(\sqrt[4]{x^3} + 5 \right) = {}_C D_0^{\frac{2}{3}} \sqrt[4]{x^3} + {}_C D_0^{\frac{2}{3}} 5 = {}_C D_0^{\frac{2}{3}} \sqrt[4]{x^3} = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4} + 1 - \frac{3}{2}\right)} x^{\frac{3}{4} - \frac{3}{2}} = \frac{\Gamma\left(\frac{7}{4}\right) \sqrt[12]{x}}{\Gamma\left(\frac{13}{12}\right)}.$$

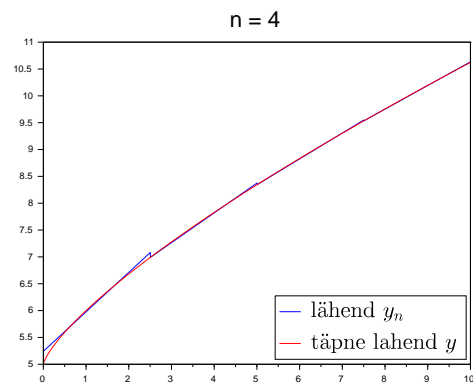
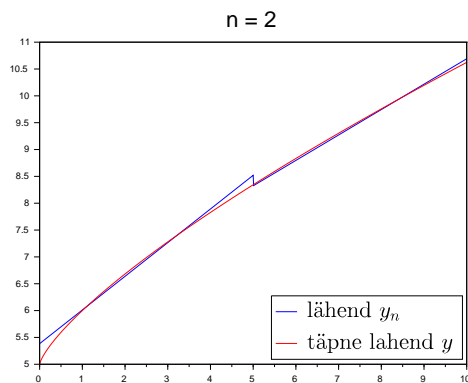
Seega, kui panna funktsioon (5.14) võrrandisse (5.13), siis saame

$${}_C D_0^{\frac{2}{3}}(\sqrt[4]{x^3} + 5) + (\sqrt[4]{x^3} + 5)\sqrt[4]{x} = x + 5\sqrt[4]{x} + \frac{\Gamma\left(\frac{7}{4}\right) \sqrt[12]{x}}{\Gamma\left(\frac{13}{12}\right)},$$

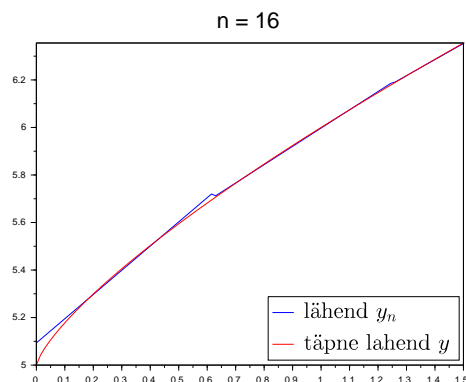
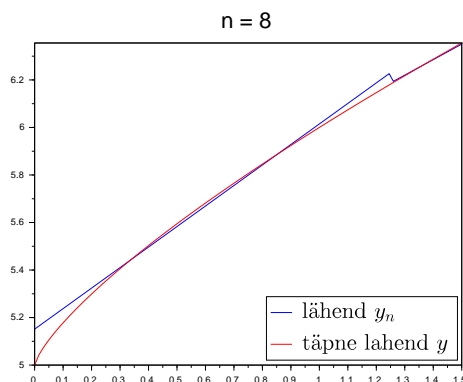
$$\frac{\Gamma\left(\frac{7}{4}\right) \sqrt[12]{x}}{\Gamma\left(\frac{13}{12}\right)} + x + 5\sqrt[4]{x} = x + 5\sqrt[4]{x} + \frac{\Gamma\left(\frac{7}{4}\right) \sqrt[12]{x}}{\Gamma\left(\frac{13}{12}\right)},$$

$$0 = 0.$$

Järgnevalt on jooniste peal toodud Cauchy ülesande (5.13) lahend y ning eelmises punktis kirjeldatud meetodil leitud lähend y_n , kui meil on ühtlane võrk ja arvud η_1 ja η_2 on vastavalt $\frac{1}{3}$ ja $\frac{2}{3}$.



Sõlmede arvu n suuremate väärtuste korral on Cauchy ülesande (5.13) täpne lahend y ja lähend y_n niivõrd sarnased, et nende erinevust pole jooniselt näha. Seetõttu on järgnevalt toodud vaid graafikute suurendus vahemikus $[0; 1, 5]$.



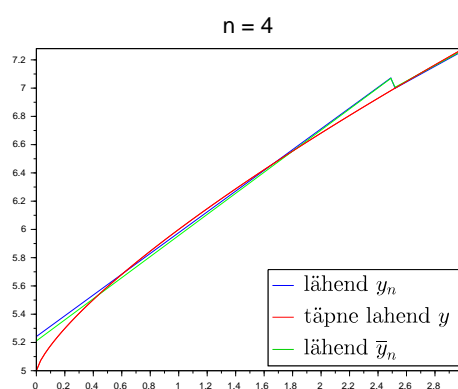
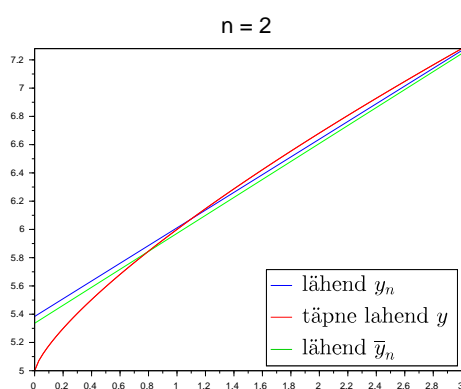
Järgnevas tabelis on ära toodud lähendi y_n vead ε_n , mis on defineeritud võrdusega (5.12) ning jagatised $\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{2n}}$.

Sõlmede arv n	viga ε_n	jagatis $\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{2n}}$
2	0,38402	1,58752
4	0,24190	1,59881
8	0,15130	1,622
16	0,09328	1,64428
32	0,05673	1,66023
64	0,03417	1,67009
128	0,02046	

Järgnevalt on ära toodud eelnevaga sarnane tabel, kus on toodud lähendi \bar{y}_n vead. Lähend \bar{y}_n on leitud, võttes arvudeks η_1 ja η_2 eelmises näites toodud Gaussi punktid.

Sõlmede arv n	viga ε_n	jagatis $\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{2n}}$
2	0,33590	1,59368
4	0,21077	1,60869
8	0,13102	1,63041
16	0,08036	1,64976
32	0,04871	1,66302
64	0,02929	1,6718
128	0,01752	

Nagu näha on ka selle näite korral lähend \bar{y}_n natuke täpsem lähendist y_n . Seda illustreerivad järgnevad joonised.



6 Kasutatud kirjandus

- [1] K. Diethelm, *The Analysis of Fractional Differential Equations*, Springer, Berlin 2010.
- [2] G. Kangro, *Matemaatiline analüüs II*, Valgus, Tallinn 1968.
- [3] G. Kangro, *Matemaatiline analüüs I*, Valgus, Tallinn 1982.
- [4] A. M. Laanemaa, *Laplace'i teisenduse kasutamine diferentsiaalvõrrandite lahendamisel*, Magistritöö, Tartu 2015.
- [5] M. Levin, S. Ulm, *Arvutusmeetodite käsiraamat*, Valgus, Tallinn 1977.
- [6] A. Pedas, G. Vainikko, *Harilikud diferentsiaalvõrrandid*, Tartu Ülikool, Tartu 2011.
- [7] <http://jekyll.math.byuh.edu/courses/m321/handouts/gammahalf.pdf>
(Vaadatud 17. aprill 2016)

7 Lisad

Siin on toodud näites 5.1 kasutatud programm.

```
// Vorrand:  $D^a y + y = t^2 + (2t^{3/2}) / (\Gamma(5/2))$ 
clear;
format(8);

y0=0; // algtingimus

a=0.5;
n=128;
b=10;
h=b/n; // Arvutan ühtlase võrguga

function f=vaba(x)
    f=x^2+(2*x^(3/2))/(gamma(5/2));
endfunction

function p=kordaja(x)
    p=1;
endfunction

//-----

function g=vabauld(x)
    i=integrate('vaba(s)*(x-s)^(a-1)', 's', 0, x);
    g=y0+i/gamma(a);
endfunction

function K=tuum(x,s)
    K=kordaja(s)/(gamma(a)*(x-s)^(1-a));
endfunction

//Nüüd Integraalvorrand:  $y(x) + \int_0^x \text{tuum}(x,s) * y(s) ds =$ 
//vabauld(x)
//Annan ette võrgu

Eta=[1/3,2/3];
vX=zeros(1,n+1); //Võrgu punktid
X=zeros(2,n); //punktid x_ij
```

```

for i=1:n
    vX(i)=(i-1)*h;
    X(1,i)=vX(i)+Eta(1)*h;
    X(2,i)=vX(i)+Eta(2)*h;
end
vX(n+1)=n*h;

A=zeros(2*n,2*n); //Lineaarvõrrandisüsteemi maatriks
B=zeros(2*n,1); //Lineaarvõrrandisüsteemi vabaliige

for v=1:n //veeru nr on 2v-1, kuna veerge on 2x rohkem, kui v läbi käib
    B(2*v-1)=vabauld(X(1,v));
    B(2*v)=vabauld(X(2,v));
    for r=1:n //rea nr on 2r-1
        if v<r then
            A(2*r-1,2*v-1)=(1/(X(2,v)-X(1,v)))*
                integrate('tuum(X(1,r),s)*(X(2,v)-s)', 's', vX(v), vX(v+1));
            A(2*r-1,2*v)=(1/(X(2,v)-X(1,v)))*
                integrate('tuum(X(1,r),s)*(s-X(1,v))', 's', vX(v), vX(v+1));
            A(2*r,2*v-1)=(1/(X(2,v)-X(1,v)))*
                integrate('tuum(X(2,r),s)*(X(2,v)-s)', 's', vX(v), vX(v+1));
            A(2*r,2*v)=(1/(X(2,v)-X(1,v)))*
                integrate('tuum(X(2,r),s)*(s-X(1,v))', 's', vX(v), vX(v+1));
        elseif v==r
            A(2*r-1,2*v-1)=(1/(X(2,v)-X(1,v)))*
                integrate('tuum(X(1,r),s)*(X(2,v)-s)', 's', vX(v), X(1,v));
            A(2*r-1,2*v)=(1/(X(2,v)-X(1,v)))*
                integrate('tuum(X(1,r),s)*(s-X(1,v))', 's', vX(v), X(1,v));
            A(2*r,2*v-1)=(1/(X(2,v)-X(1,v)))*
                integrate('tuum(X(2,r),s)*(X(2,v)-s)', 's', vX(v), X(2,v));
            A(2*r,2*v)=(1/(X(2,v)-X(1,v)))*
                integrate('tuum(X(2,r),s)*(s-X(1,v))', 's', vX(v), X(2,v));
        else ;
        end,
    end;
end;
end
A=A+eye(2*n,2*n);

//Edasi on vaja lahendada Lineaarvõrrandsüsteem A*c=B

```

```

c=linsolve(A,-B);

function y=lahend(x)
    y=0;
    for t=1:n
        if (vX(t)<=x & x < vX(t+1)) then
            y=c(2*t-1)*((X(2,t)-x)/(X(2,t)-X(1,t)))+c(2*t)*
                ((x-X(1,t))/(X(2,t)-X(1,t)));
        else;
        end,
    end
    if x==vX(n+1) then
        y=c(2*n-1)*((X(2,t)-vX(n+1))/(X(2,t)-X(1,t)))+
            c(2*n)*((vX(n+1)-X(1,t))/(X(2,t)-X(1,t)));
    end
endfunction
k=1000;

vahe=b/k;
gr=zeros(1,k*vahe)'; //Teen lahendite vektori
im=zeros(1,k*vahe)'; //Lahenditele vastavate argumentide vektori

i=0; //vahemiku lugeja
j=1; //täisarvud
while i<=b
    gr(j)=lahend(i);
    im(j)=i;
    vea(j)=lahend(i)-i^2;
    i=i+vahe;
    j=j+1;
end

//-----
//Teoreetiline täpne lahend
function y=tlahend(x)
    y=x.^2;
endfunction
//-----

```

```

F=5;
scf(0);
clf;
plot(im,gr); //Joonistab lahendi graafiku
plot(im,tlahend(im),'red'); //Teoreetiline lahend on x^2
legends(['$\text{lähend} \ y_n$','$\text{täpne lahend } y$'],
[2,5],opt=2,font_size=F); // Graafiku legend
title('n = ' + string(n),'fontsize',F); // Graafiku pealkiri

// Vea leidmine -----
viga=max(abs(vea));

```

Lihthitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Kristo Väljako,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihthitsentsi) enda loodud teose, „Murrulised tuletised ja Caputo tuletisega lineaarse diferentsiaalvõrrandi lahendamine“,

mille juhendaja on prof. Arvet Pedas,

- 1.1 reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;
 - 1.2 üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.
2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
 3. kinnitan, et lihthitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus, 10.05.2016