ТАРТУСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

И. ПИЙР

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

ТАРТУ 1960

ТАРТУСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

И. ПИЙР

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

ТАРТУ 1960

Настоящее учебное пособие предназначено студентам-физикам III курса. Оно охватывает примерно половину из всего курса "Методы математической физики". От студентов при изучении этого материала требуется только знакомство с высшей математикой в пределах программы I и II курсов. Сравнительно большое место уделено задачам, большинство из которых снабжено короткими указаниями.

Ответственный редактор Р. Лиас
Корректор Л. Брафман

Ротапринт ТГУ 1960. Объем в печ. л. 12,75.
Тираж 250 экз. МВ 01683. Заказ № 346.

Цена 3 руб. 85 коп.

Г Л А В А   1

ВВЕДЕНИЕ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ.

Предметом теории уравнений математической физики является изучение дифференциальных, интегральных и функциональных уравнений, с которыми встречаемся при изучении различных физических явлений. Указать точные рамки этой обширной дисциплины довольно трудно. Наш курс посвящен изучению дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка и одной неизвестной функцией.

В отличие от общей теории дифференциальных уравнений в частных производных, которая изучает вопросы существования решений и свойства решений наиболее общих классов таких уравнений, мы ставим перед собой задачу совершенно иного характера. Нас интересуют только те уравнения, которые часто встречаются в физике, и методы нахождения тех их решений, которые удовлетворяют типичным для физических задач дополнительным условиям.

Введем теперь некоторую терминологию.

1. Уравнение с частными производными от неизвестных функций u_1 , u_2 , ... , u_N называется уравнением n-ого порядка, если оно содержит хотя бы одну производную n-ого порядка и не содержит производных высшего порядка. Порядком системы уравнений с частными производными называется наибольший из порядков, входящих в нее уравнений.

2. Уравнение с частными производными называется линейным, если оно линейно относительно всех неизвестных функций и их производных. Уравнение с частными производными называется квазилинейным, если оно линейно относительно всех высших производных от неизвестных функций.

Например, уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + a(x,y)\,\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = b(x,y)\; u(x,y)$$

является линейным уравнением второго порядка относительно неизвестной функции u. А уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u^2 = 0$$

и

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = 0$$

являются квазилинейными уравнениями второго порядка относительно неизвестной функции $u(x,y)$. Уравнение

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = u(x,y)$$

уже будет нелинейным уравнением.

3. Решением уравнения с частными производными называется всякая система, которая, будучи подставлена в уравнение вместо неизвестных функций, обращает это уравнение в тождество по независимым переменным. Аналогично определяется решение системы уравнений.

В дальнейшем мы уделяем главное внимание линейным уравнениям второго порядка с одной неизвестной функцией.

§ 1. Некоторые важнейшие уравнения математической физики.

1°. Уравнение малых поперечных колебаний струны.

Под струной мы понимаем тонкую нить, которая может свободно изгибаться / гибкая упругая нить /. Допустим, что она находится под действием сильного натяжения T и в состоянии равновесия без внешних сил расположена по оси x. Каждую точку струны можно охарактеризовать значением ее абсциссы x в состоянии равновесия. Чтобы описать процесс колебания струны, мы должны знать компоненты вектора смещения $\vec{u}$ любой точки x в любой момент t, т.е. $\vec{u}=\vec{u}(x,t)$, или $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)=(u_1(x,t),u_2(x,t),u_3(x,t))$.

Будем предполагать, что смещения струны лежат в одной плоскости xu, и что вектор смещения $\vec{u}$ перпендикулярен в любой момент к оси x. Тогда процесс колебания можно описать одной функцией $u(x,t)$, которая характеризует вертикальное перемещение точек струны.

Натяжения, которые возникают в струне, всегда направлены по касательным к ее мгновенному профилю / так как струна не сопротивляется изгибу/./ См. рис. 1/. Рассматривая только малые колебания струны, можно пренебрегать квадратом производной $\frac{\partial u}{\partial x}$ по сравнению с единицей. Отсюда следует, что линейный элемент струны в процессе колебания не меняется:

$$ds=\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\cong dx$$

По закону Гука также величина натяжения T в каждой точке не меняется со временем. Покажем, что натяжение не зависит и от x т.е. $T = T_0 = const$

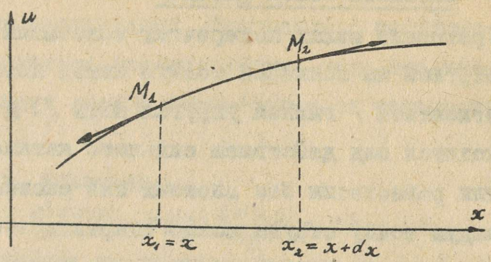


Рис.1

Напишем проекции силы натяжения на оси x и u :

$$T_x(x) = T(x)\cos\alpha = \frac{T(x)}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}} \cong T(x),$$

$$T_u(x) = T(x)\sin\alpha = T(x)\tan\alpha \cong T(x)\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Так как мы рассматриваем только поперечные колебания, то сумма проекций сил действующих на участок M_1M_2 на ось x должна быть равна нулю, т.е.

$T_x(x_2) - T_x(x_1)$, или $T(x_2) - T(x_1)$

Отсюда, ввиду произвольности x_1 и x_2 , следует, что $T = T_0$.

Элементарная сила dF , которая действует на элемент dx , состоит из двух частей:

1/ силы натяжения

$$T_0 \sin\alpha_2 - T_0\sin\alpha_1 = T_0\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x_2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x_1}\right]$$

и

2/ внешней силы $f\,dx$, где f линейная плотность внешней силы / внешняя сила действует на струну перпендикулярно к оси x /.

Итак,

$$dF = T_0\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x_2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x_1}\right] + f\,dx$$

Учитывая, что ускорение элемента струны равно $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, масса – ρdx, где ρ линейная плотность струны, получаем по закону Ньютона следующее уравнение движения:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx = T_0 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x_2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x_1} \right] + f dx . \qquad /1.1/$$

Разность, стоящая в квадратных скобках, выражает приращение функции $\frac{\partial u}{\partial x}$, вызванное изменением x на dx. Учитывая, что

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+dx} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_x dx , \qquad ^{x/}$$

из выражения /1.1. после сокращения на dx получим уравнение малых поперечных колебаний струны:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f ,$$

или, обозначая $\frac{T_0}{\rho} = a^2$ и $\frac{f}{\rho} = \varphi$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varphi(x,t) . \qquad /1.2/$$

2^o. Уравнение продольных колебаний стержня /пружины или струны/.

Рассмотрим стержень, расположенный по оси x. Процесс продольных колебаний может быть описан одной функцией $u(x,t)$, представляющей в момент t смещение точки, имевшей в положении равновесия абсциссу x. будем предполагать, что натяжения, возникающие в процессе колебания, следуют закону Гука (Hooke):

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{T}{K} = \frac{F}{KS}$$

---

x/ Здесь предположено, что функция $u(x,t)$ двухкратно дифференцируема по x.

/ k - модуль Юнга (Young), T - натяжение, F - сила, S - площадь поперечного сечения стержня, $\frac{\Delta l}{l}$ - относительное удлинение стержня/. Применяем закон Гука к элементу dx, учитывая при этом, что относительное удлинение равно:

$$\frac{x+dx+u(x+dx,t)-[x+u(x,t)]-[x+dx-x]}{x+dx-x} =$$

$$= \frac{u(x+dx,t)-u(x,t)}{dx} \approx \frac{\partial u(x,t)}{\partial x},$$

тогда

$$T(x,t) = k(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$

По закону Ньютона:

$$S(x)\rho(x)dx\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = S(x+dx)T(x+dx,t) - S(x)T(x,t) + f(x,t)S(x)dx$$

или

$$S(x)\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{d}{dx}[S(x)T(x)] + f(x,t)S(x)$$

/ ρ - плотность стержня, f - плотность внешней силы, которая направлена по оси x, $S(x)T(x)$ - сила натяжения, действующая на сечение $S(x)$ /. Выражая $T(x,t)$ по закону Гука, получаем / после деления на $S(x)\rho(x)$/:

$$\frac{1}{\rho(x)S(x)}\frac{\partial}{\partial x}\left[S(x)k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right] + \frac{f(x,t)}{\rho(x)} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \qquad / 1.3 /$$

Если стержень однороден, то $k(x) = k_0 = const$, и $S(x) = S_0 = const$, тогда, обозначая

$$\frac{k_0}{\rho} = a^2 \quad \text{и} \quad \frac{f}{\rho} = \varphi$$

получим уравнение, аналогичное уравнению / 1.2 /.

3°. Двух и трехмерные уравнения колебаний. Волновое уравнение.

В уравнении колебания струны /1.2/ зависит от времени t и от пространственной координаты x. Примером двухмерных уравнений колебаний является уравнение малых поперечных колебаний мембраны. Мембраной называется пленка, не сопротивляющаяся изгибу и натянутая на плоский контур C. Если мембрана находится под действием равномерного натяжения T_0 и в состоянии равновесия лежит на плоскости xy, и если ограничиться лишь поперечными колебаниями, то смещение u точки (x,y) мембраны будет функцией от x, y, t, которая удовлетворяет уравнению аналогичному / 1.2/:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \varphi(x,y,t), \qquad / 1.4 /$$

где $a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$ / ρ - поверхностная плотность мембраны, T_0 поверхностная плотность внешней силы или нагрузки/.

Волновое уравнение из электродинамики

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + 4\pi\rho \qquad / 1.5 /$$

является трехмерным обобщением уравнения колебания. Это уравнение, как и уравнение свободных колебаний

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \qquad / 1.6 /$$

играет важную роль не только в электродинамике, но и в акустике. Если процесс распространения звука является адиабатическим, то плотность газа ρ, давление газа p, удовлетворяют уравнению типа /1.5/ или /1.6/, в зависимости от наличия или отсуствия внешних сил.

4°. Уравнение теплопроводности.

По закону Фурье (Fourier) количество тепла dQ, проходящее за время dt через элемент поверхности dS, принимается равным

$$dQ = -k\,dt\,dS\,\frac{\partial u}{\partial n} = -k\,dt\,d\vec{S}\,\mathrm{grad}\,u$$

/ 1.7 /

/ k - коэффициент теплопроводности, u - температура, n - направление нормали к dS /. Рассмотрим замкнутую поверхность S, ограничивающую объем V. Полное количество тепла, проходящее через S / $\vec{n}$ - единичный вектор внешней нормали/,

$$Q_1 = -dt \oint_S k\,\mathrm{grad}\,u\,\vec{n}\,dS$$

Для увеличения температуры объёма dV на du за промежуток времени dt нужно затратить количество тепла

$$\gamma du \rho dV = \gamma\rho \frac{\partial u}{\partial t}\,dV dt$$

/ γ - теплоёмкость вещества, ρ - плотность /. Таким образом отдаваемое объёмом V тепло:

$$Q_2 = -dt \iiint_V \gamma\rho \frac{\partial u}{\partial t}\,dV$$

Если находящиеся в объёме V источники тепла характеризуются плотностью $F(x,y,z,t)$, тогда за время dt в объёме V выделится тепло: $Q_3 = dt \iiint_V F(x,y,z,t)\,dV$

Баланс тепла $Q_1 = Q_2 + Q_3$ можно теперь переписать в виде

$$-\iint_S k\,\mathrm{grad}\,u\,d\vec{S} = -\iiint_V \gamma\rho \frac{\partial u}{\partial t}\,dV + \iiint_V F(x,y,z,t)\,dV.$$

По теореме Гаусса - Остроградского

$$\iint_S k\,\mathrm{grad}\,u\,d\vec{S} = \iiint_V \mathrm{div}(k\,\mathrm{grad}\,u)\,dV$$

предыдущее выражение можно переписать в виде

$$\iiint_V \left[\gamma\rho\frac{\partial u}{\partial t} - \mathrm{div}(k\,\mathrm{grad}\,u) - F\right] dV = 0$$

или, ввиду произвольности объёма V:

$$\gamma\rho\frac{\partial u}{\partial t} - \mathrm{div}(k\,\mathrm{grad}\,u) - F = 0.$$

Если тело однородное / $k = const$ /, получаем: / 1.8/

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \frac{F}{\gamma\rho}, \qquad / 1.9 /$$

где $a^2 = \frac{k}{\gamma\rho}$. Это т.н. уравнение теплопроводности.

5°. Уравнения Лапласа и Пуассона.

К уравнениям Лапласа и Пуассона приводит изучение многих стационарных процессов. Например, стационарное тепловое поле удовлетворяет уравнению Пуассона:

$$\Delta u = -\frac{F}{a^2\gamma\rho} \quad \text{или} \quad \Delta u = -\frac{F}{k} \qquad / 1.10 /$$

/ Δ - оператор Лапласа $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ /, так как в уравнении / 1.9 / $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ / распределение температуры не меняется со временем/.

Таково и уравнение для электростатического потенциала

$$\Delta \varphi = 4\pi\rho \qquad / 1.10' /$$

/ ρ - объёмная плотность зарядов /.

В качестве третьего примера можно рассмотреть и потенциальное течение несжимаемой жидкости ($\rho = const$) без источников. Исходим из уравнения непрерывности

$$div(\vec{v}\rho) = -\frac{\partial\rho}{\partial t},$$

которое в случае стационарного течения дает $div\,\vec{v} = 0$.

Так как течение потенцианальное, то скорость $\vec{v}$ является градиентом потенциала φ :

$$\vec{v} = -grad\,\varphi .$$

Отсюда уравнение для потенциала:

$$div\,grad\,\varphi = 0, \qquad / 1.10'' /$$

или

$$\Delta\varphi = 0 .$$

Это - однородное уравнение Пуассона, или уравнение Лапласа.

Задачи к § 1.

1. В точке x_0 к струне приложена сосредоточенная сила $F(t)$. Показать, что в точке x_0 дифференциальное уравнение /1.2/ теряет смысл, так как первые производные претерпевают разрыв $\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_+ - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_-\right] = -\frac{F_0(t)}{T}$ (a) $\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_\pm = \lim_{\delta \to 0} \frac{\partial u(x_0 \pm \delta, t)}{\partial x}, \quad \delta > 0\right]$.

Указание: Рассматривать сосредоточенную силу как предельный случай $\delta \to 0$ следующего распределения для силы:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < x_0 < -\delta; \\ F/2\delta & x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, \\ 0 & x > x_0 + \delta. \end{cases}$$

К малому элементу струны $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ применима теперь формула /1.1/. Переход к пределу $\delta \to 0$, учитывая, что ускорение $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ ограничено, приводит к выражению (a).

2. Найти уравнение электрических колебаний в проводах с равномерно распределёнными параметрами.

Указание: Электрическое состояние провода характеризуется силой тока $i(x,t)$ и напряжением $v(x,t)$, а физические свойства: рассчитанными на единицу длины омическим сопротивлением R, самоиндукцией L, ёмкостью C и утечкой изоляции A. Падение напряжения на элементе $(x, x+dx)$: $v(x,t) - v(x+dx,t) = -\frac{\partial v}{\partial x}dx$, которое складывается из омического $R dx$ и индуктивного $L dx \frac{\partial i}{\partial t}$, даёт первое, а разность между токами, входящим и выходящим из элемента dx, которая складывается из токов зарядки $C dx \frac{\partial v}{\partial t}$ и утечки $A dx\, v$, даёт второе уравнение системы телеграфных уравнений. Продифференцировав первое из этих уравнений /R, C, L, A - постоянные/ по x и второе по t и исключив i, получим так называемое телеграфное уравнение второго порядка для напряжения

$$v_{xx} = CL\, v_{tt} + (CR + GL)v_t + GR\, v = 0 \,. \quad (a)$$

Аналогично получается такое же уравнение для тока $i = i(x,t)$

Наконец, вводя новую неизвестную w, так, что $v = \frac{\partial w}{\partial x}$, можно заменить систему телеграфных уравнений лишь одним уравнением, типа a) для функции w, при этом $i = r\, C \frac{\partial w}{\partial t} - A\, w$.

3. Вывести уравнение свободных крутильных колебаний круглого вала:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \qquad (a)$$

/ $\theta(x,t)$ - угол закручивания сечения x относительно положения равновесия, $a^2 = \frac{G}{\rho}$, ρ - плотность, G - модуль сдвига/.

Указание: Крутящий момент в сечении x дается выражением $M = GJ\frac{\partial \theta}{\partial x}$, где J - момент инерции поперечного сечения вала относительно оси вала.

4. Вывести уравнение для температуры тонкой проволоки, нагреваемой постоянным электрическим током, если на её поверхности происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона с окружающим воздухом, имеющим определённую температуру:

$$u_t = \frac{\lambda}{c\rho} u_{xx} - \frac{\alpha p}{c\rho\sigma}(u - u_0) + \frac{\beta J^2 R}{c\rho\sigma} \qquad (a)$$

/ p - периметр, σ - площадь поперечного сечения, c - удельная теплоёмкость, λ - коэффициент теплопроводности, ρ - плотность массы проволоки, u_0 - температура среды, R - сопротивление единицы длины провода, J - сила тока, α - коэффициент теплообмена, β - - коэффициент пропорциональности в формуле $q = \beta J^2 R dx$, выражающей количество тепла, выделяемого током J в единицу времени в элементе $(x, x+dx)$ провода/.

Рассмотреть и случай тонкой проволоки с переменным поперечным сечением.

<u>Указание:</u> Рассматривая элемент стержня $(x, dx+x)$, учесть в тепловом балансе и потоки тепла через боковую поверхность по закону Ньютона:

$$q = S\alpha(u - u_0) \qquad (\delta)$$

/ q - количество тепла, протекающее в единицу времени через площадку S поверхности тела в окружающую среду, u - температура поверхности тела и u_0 - температура среды/.

5. Вывести уравнение диффузии в неподвижной среде, предполагая, что поверхностями равной концентрации в каждый момент времени t являются плоскости, перпендикулярные к оси x.

$$u_t = D u_{xx} \qquad (a)$$

/ D - коэффициент диффузии, u - концентрация/.

<u>Указание</u>: По закону Нернста

$$dm = -d\vec{S}\, D \operatorname{grad} u \qquad (\delta)$$

/ dm - количество вещества, диффундирующее в единицу времени через площадку dS /.

6. Вывести уравнение диффузии при условиях задачи 5 для вещества, частицы которого распадаются, причём скорость распада диффундирующего вещества в каждой точке пространства пропорциональна концентрации.

7. Вывести уравнение диффузии в среде, движущейся с

постоянной скоростью в направлении оси x, если поверхностями равной концентрации в каждый момент времени являются плоскости, перпендикулярные к оси x:

$$u_t = D u_{xx} - V u_x .$$

8. Показать, исходя из уравнений Максвелла, что потенциал электростатического поля удовлетворяет уравнению Пуассона /1.10'/.

Указание: Уравнения Максвелла для электромагнитного поля в однородной изотропной среде

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{J}, \quad (а) \qquad \operatorname{div} \vec{E} = \frac{4\pi\rho}{\varepsilon}, \quad (г)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad (б) \qquad \operatorname{div} \vec{H} = 0 . \quad (д)$$

В случае электростатического поля $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$, отсюда

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi , \quad (е)$$

подставив это выражение в уравнение (г), получается уравнение /1.10'/.

9. Показать, что потенциал стационарного магнитного поля в части пространства, свободной от источников, удовлетворяет уравнению Лапласа.

Указание: Уравнение (а) в задаче 8 принимает вид $\operatorname{rot} \vec{H} = 0$, отсюда $\vec{H} = -\operatorname{grad} \psi$ / ψ - потенциал магнитного поля/.

10. Показать, что компоненты векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в случае свободного электромагнитного поля $(\vec{J} = 0, \rho = 0)$ удовлетворяют волновому уравнению:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \quad (а)$$

где $a^2 = \dfrac{c^2}{\mu\varepsilon}$.

§ 2. Классификация уравнений с частными производными второго порядка.

1°. Упрощение дифференциальных уравнений с двумя независимыми переменными.

Рассмотрим квазилинейное уравнение типа

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+F(x,y,u,u_x,u_y)=0, \quad \text{x/} \tag{2.1}$$

где a_{11}, a_{12} и a_{22} являются функциями от (x,y). В частности, если уравнение /2.1/ линейное, то

$$F(x,y,u,u_x,u_y)=b_1u_x+b_2u_y+cu+f, \tag{2.2}$$

где b_1, b_2, c и f – функции от x,y. Если $f(x,y)=0$, то линейное уравнение является однородным. С помощью преобразования переменных

$$\xi=\varphi(x,y), \quad \eta=\psi(x,y) \tag{2.3}$$

можно получить новое уравнение, эквивалентное исходному. Преобразование /2.3/ осуществляет переход от прямоугольной координатной системы xy к криволинейной $\xi\eta$, при этом уравнения $\varphi(x,y)=const$ и $\psi(x,y)=const$ определяют два семейства новых координатных линий. Ясно, что через любую точку P может пройти только две новые координатные кривые, одна из первого семейства $[\varphi(x,y)=\xi_0]$ и другая из второго $[\psi(x,y)=\eta_0]$ /ξ_0 и η_0 – новые координаты точки P /, для этого функции φ и ψ должны 1/ быть однозначными и 2/допускать обратный переход от переменных ξ,η к переменным x,y. Это имеет место, если функции φ и ψ и частные производные этих функций непрерывны и якобиан $\frac{D(\varphi,\psi)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}\varphi_x & \varphi_y\\ \psi_x & \psi_y\end{vmatrix}$ отличается от нуля.

---

x/ Пользуемся обозначениями: $u_x=\frac{\partial u}{\partial x}, \dots, u_{xx}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dots$

Вопрос состоит в том, чтобы выбрать новые переменные ξ и η таким образом, чтобы уравнение /2.1/ в этих переменных имело наиболее простую форму.

Учитывая, что

$$
\begin{aligned}
&u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x, \qquad u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y,\\
&u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx},\\
&u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi\xi_{xy} + u_\eta\eta_{xy},\\
&u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi\xi_{yy} + u_\eta\eta_{yy},
\end{aligned}
\qquad /2.4/
$$

можно уравнение /2.1/ переписать в виде:

$$\bar{a}_{11}u_{\xi\xi} + 2\bar{a}_{12}u_{\xi\eta} + \bar{a}_{22}u_{\eta\eta} + \bar{\mathcal{F}}(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta), \qquad /2.5/$$

где

$$
\begin{aligned}
&\bar{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2,\\
&\bar{a}_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y,\\
&\bar{a}_{22} = a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2.
\end{aligned}
\qquad /2.6/
$$

Если уравнение /2.1/ линейное, т.е. $\mathcal{F}$ имеет вид /2.2/, тогда:

$$\bar{\mathcal{F}} = \bar{b}_1 u_\xi + \bar{b}_2 u_\eta + cu + f, \qquad /2.7/$$

где

$$
\begin{aligned}
&\bar{b}_1 = a_{11}\xi_{xx} + 2a_{12}\xi_{xy} + a_{22}\xi_{yy} + b_1\xi_x + b_2\xi_y,\\
&\bar{b}_2 = a_{11}\eta_{xx} + 2a_{12}\eta_{xy} + a_{22}\eta_{yy} + b_1\eta_x + b_2\eta_y,
\end{aligned}
\qquad /2.8/
$$

т.е. линейное уравнение остается линейным, квазилинейное квазилинейным.

Выберем переменные ξ и η так, чтобы коэффициент $\bar{a}_{11}$ стал равным нулю. Для этого $\varphi(x,y)$ должно быть решением уравнения

$$a_{11}\varphi_x^2 + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}\varphi_y^2 = 0. \qquad /2.9/$$

Учитывая, что для новой координатной кривой $\varphi(x,y) = \xi$ / ξ - фиксированное/: $\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y}$, можно заменить уравнение /2.9/ следующим обыкновенным дифференциальным уравнением:

$$a_{11}\,dy^2 - 2a_{12}\,dx\,dy + a_{22}\,dx^2 = 0\,, \qquad /2.10/$$

которое называется характеристическим уравнением, а его интегралы - характеристиками.

Если $\varphi(x,y)=const$ есть общий интеграл характеристического уравнения /2.10/, тогда, полагая $\xi=\varphi(x,y)$, мы обращаем в нуль коэффициент при $u_{\xi\xi}$.

2°. Классификация и канонические формы уравнений.

Характеристическое уравнение / 2.10/ распадается на два уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12}+\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}}\,,\quad \frac{dy}{dx} = \frac{a_{12}-\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}} \qquad /2.10/$$

Знак подкоренного выражения- декремента Δ - определяет тип уравнения /2.1/. Будем называть уравнение в точке $M=(x,y)$ уравнением 1/ гиперболического типа, если в точке M $\Delta=a_{12}^2-a_{11}a_{22}>0$, 2/ эллиптического типа, если в точке M $\Delta=a_{12}^2-a_{11}a_{22}<0$, 3/ параболического типа, если в точке M $\Delta=a_{12}^2-a_{11}a_{22}=0$.

Нетрудно убедиться, что знак декремента, или тип уравнения, при преобразовании переменных не меняется. Действительно:

$$\bar{a}_{12}^2-\bar{a}_{11}\bar{a}_{22}=(a_{12}^2-a_{11}a_{22})(\xi_x\eta_y-\xi_y\eta_x)^2$$

/ напомним,что $\xi_x\eta_y-\xi_y\eta_x=\frac{D(\varphi,\psi)}{D(x,y)}\neq 0$/.

Рассмотрим область G, во всех точках которой уравнение имеет один и тот же тип.

Пусть уравнение /2.1/ в области G гиперболического типа, т.е. $\Delta>0$. Общие интегралы характеристических уравнений /2.11/ определяют два семейства действительных характеристик $\varphi(x,y)=const$ и $\psi(x,y)=const$.

Полагая $\xi = \varphi(x,y)$, $\eta = \psi(x,y)$,

получим, что $\bar{a}_{11} = \bar{a}_{22} = 0$ и уравнение /2.1/ приводится к такому виду / первая каноническая форма уравнения гиперболического типа /:

$$u_{\xi\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) , \qquad / 2.12/$$

где $\Phi = -\frac{\bar{F}}{2\bar{a}_{12}}$.

Часто пользуются второй канонической формой. Возьмем новые переменные α и β так, что

$$\xi = \alpha + \beta \quad , \eta = \alpha - \beta ,$$

тогда

$$u_\xi = \frac{1}{2}(u_\alpha + u_\beta) , \quad u_\eta = \frac{1}{2}(u_\alpha - u_\beta) ,$$

$$u_{\xi\eta} = \frac{1}{4}(u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta}) .$$

В результате уравнение / 2.12/ примет вид

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \Phi(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta) \qquad / 2.13/$$

/ вторая каноническая форма гиперболического уравнения/.

В случае уравнения эллиптического типа / $\Delta < 0$ / интегралы уравнений / 2.11/ комплексные и сопряжённые, т.е. если $\varphi(x,y) = C_1$ - общее решение первого уравнения /2.11/, то $\bar{\varphi}(x,y) = C_2$ - общее решение второго уравнения /2.11/. Перейдя к комплексным переменным

$$\xi = \varphi(x,y) \quad , \eta = \bar{\varphi}(x,y)$$

можно привести эллиптисеккие уравнение к такому же виду, что и гиперболическое /2.12/.

Чтобы иметь дело только с вещественными переменными, введём новые переменные

$$\alpha = \frac{\varphi + \bar{\varphi}}{2} = \frac{\xi + \eta}{2} \quad , \beta = \frac{\varphi - \bar{\varphi}}{2i} = \frac{\xi - \eta}{2i} .$$

Тогда уравнение /2.12/ примет вид:

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \Phi(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta) \qquad / 2.14/$$

/ каноническая форма уравнения эллиптического типа/.

Если уравнение /2.1/ параболического типа /$\Delta=0$/, то оба уравнения / 2.11/ совпадают и характеристическое уравнение имеет лишь одно семейство интегралов $\varphi(x,y)=C$. Возьмем новые переменные в таком виде:

$$\xi=\varphi(x,y)\ ,\ \eta=\psi(x,y)$$

где ψ - любая функция, независимая от φ / только тогда $\frac{D(\varphi,\psi)}{D(x,y)}\neq 0$ /. Обычно можно принять $\eta=x$ или $\eta=y$. При таком выборе переменных

$$\bar{a}_{11}=(\sqrt{a_{11}}\,\varphi_x+\sqrt{a_{22}}\,\varphi_y)^2=0$$

/ так как $a_{12}^2=a_{11}a_{22}$ / и

$$\bar{a}_{12}=a_{11}\xi_x\eta_x+a_{12}(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+a_{22}\xi_y\eta_y=$$
$$=(\sqrt{a_{11}}\,\xi_x+\sqrt{a_{22}}\,\xi_y)(\sqrt{a_{11}}\,\eta_x+\sqrt{a_{22}}\,\eta_y)=0.$$

Таким образом мы получим следующее выражение для канонического уравнения параболического типа:

$$u_{\eta\eta}=\Phi(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta). \qquad /2.15/$$

3°. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами.

В данном случае все коэффициенты уравнения

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+b_1u_x+b_2u_y+cu+f(x,y)=0 \qquad /2.1'/$$

постоянны и характеристики будут прямыми линиями

$$y=\frac{a_{12}+\sqrt{\Delta}}{a_{11}}x+C\ ,\quad y=\frac{a_{12}-\sqrt{\Delta}}{a_{11}}x+C.$$

С помощью соответствующего преобразования переменных можно привести уравнение /2.1'/ к одной из канонических форм:

$$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+b_1u_\xi+b_2u_\eta+cu+f=0 \quad \text{/ эллиптический тип /,}$$

$$\left.\begin{array}{l} u_{\xi\eta}+b_1u_\xi+b_2u_\eta+cu+f=0 \\ u_{\xi\xi}-u_{\eta\eta}+b_1u_\xi+b_2u_\eta+cu+f=0 \end{array}\right\} \quad \text{/ гиперболический тип/,} \qquad /2.16/$$

$$u_{\eta\eta}+b_1u_\xi+b_2u_\eta+cu+f=0 \quad \text{/ параболический тип /.}$$

Эти уравнения можно еще упростить. Введем вместо u новую неизвестную функцию v :

$$u(\xi,\eta)=e^{\lambda\xi+\mu\eta}v(\xi,\eta), \qquad /2.17/$$

тогда

$$\begin{aligned} &u_\xi=e^{\lambda\xi+\mu\eta}(v_\xi+\lambda v)\,,\quad u_{\xi\xi}=e^{\lambda\xi+\mu\eta}(v_{\xi\xi}+2\lambda v_\xi+\lambda^2 v),\\ &u_\eta=e^{\lambda\xi+\mu\eta}(v_\eta+\mu v),\quad u_{\eta\eta}=e^{\lambda\xi+\mu\eta}(v_{\eta\eta}+2\mu v_\eta+\mu^2 v), \qquad /2.18/\\ &u_{\xi\eta}=e^{\lambda\xi+\mu\eta}(v_{\xi\eta}+\lambda v_\eta+\mu v_\xi+\lambda\mu v)\,. \end{aligned}$$

Подставляя /2.18/ в уравнения /2.16/, можно соответствующим выбором λ и μ добиться того, чтобы два коэффициента из трех: b_1 , b_2 , c - обратились в нуль. В случае уравнений эллиптического и параболического типа λ и μ обычно выбираются так, чтобы $b_1=b_2=0$.

В результате приходим к следующим каноническим формам для уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned} &v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta}+\gamma v+\bar f(\xi,\eta)=0 && \text{/эллиптическое уравнение/,}\\ &\left.\begin{aligned} &v_{\xi\eta}+\gamma v+\bar f(\xi,\eta)=0\\ &v_{\xi\xi}-v_{\eta\eta}+\gamma v+\bar f(\xi,\eta)=0 \end{aligned}\right\} && \text{/гиперболическое уравнение/,} \qquad /2.16'/\\ &v_{\eta\eta}+\gamma v_\xi+f(\xi,\eta)=0 && \text{/параболическое уравнение/.} \end{aligned}$$

4⁰. Классификация уравнений второго порядка с многими независимыми переменными.

Рассмотрим уравнение

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}a_{ik}(x_1,x_2,\dots x_N)u_{x_ix_k}+f(x_1,x_2,\dots,x_N,\,u_{x_1},\dots,u_{x_N},u)=0. \qquad /2.19/$$

С помощью линейного преобразования

$$\xi_k=\sum_{i=1}^{N}\alpha_{ki}x_i$$

можно привести уравнение /2.19/ в точке $M-(x_1,x_2,\dots x_N)$ к такому виду, что от нуля будут отличаться только коэффициенты $\bar a_{ii}=A_i$, т.е. уравнение /2.19/ примет вид:

$$\sum_{i=1}^{N} A_i u_{\xi_i\xi_i} + f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N, u_{\xi_1}, u_{\xi_2}, \ldots u_{\xi_N}, u) = 0. \quad /2.20/$$

Назовём уравнение /2.19/ : 1/ уравнением эллиптического типа, если все A_i в /2.20/ одного знака и отличны от нуля, 2/ гиперболическим уравнением, если $N-1$ коэффициентов имеют одинаковый знак, а один противоположный знак, 3/ ультрагиперболическим, если среди A_i имеется m коэффициентов одного знака и $N-m$ противоположного знака, 4/ параболическим, если хотя бы один из коэффициентов A_i равен нулю.

Задачи к § 2.

Привести уравнения к каноническому виду в каждой из областей, где тип уравнения сохраняется.

1. $u_{xx} + x u_{yy} = 0$;
2. $y u_{xx} - x u_{yy} + u_x + y u_y = 0$;
3. $4y^2 u_{xx} - e^x u_{yy} - 4y^2 u_x = 0$;
4. $u_{xx} \sin^2 x - 2y u_{xy} \sin x + y^2 u_{yy} = 0$;

Привести к каноническому виду и максимально упростить следующие уравнения:

5. $a u_{xx} + 2a u_{xy} + a u_{yy} + b u_x + c u_y = 0$;
6. $a u_{xx} + 4a u_{xy} + a u_{yy} + b u_x + c u_y + u = 0$;
7. $a^2 u_{xx} + 2ab u_{xy} + 2b^2 u_{yy} + c u_x + d u_y + u = 0$;
8. Упростить максимально телеграфное уравнение / см. задачу 2 к § 1 /.
9. Показать, что $\frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)} \neq 0$, если $\varphi(x,y) = const$ и $\psi(x,y) = const$ являются общими решениями характеристических уравнений / 2.11 / при $\Delta \neq 0$.

Указание: $\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y}$, $\frac{dy}{dx} = -\frac{\psi_x}{\psi_y}$.

§ 3. Постановка задач математической физики.

1°. Вводные замечания.

Из курса обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что решение этих уравнений не определяется однозначно. Решение уравнения

$$\mathcal{F}(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \qquad /3.1/$$

зависит от n произвольных постоянных: $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots C_n)$. Конкретные значения этих постоянных можно определить из начальных условий, напр. из начальных значений функций и ее производных:

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_0^{(1)}, \dots, y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}. \qquad /3.2/$$

Подобно этому для уравнений с частными производными также нет единственного решения. Решение уравнения с частными производными зависит вообще от некоторых произвольных функций. Например, общим решением уравнения $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0$ с двумя независимыми переменными будет $u = f(x)$, где $f(x)$ совершенно произвольная функция.

Для того, чтобы сделать решение определенным, нужно задать некоторые дополнительные условия, например потребовать, чтобы неизвестная функция, а также зачастую ее некоторые производные или некоторые комбинации функции и ее производных принимали заданные значения на границах заданной области. Но нелегко получить из общего решения уравнения с частными производными решение конкретной задачи, ибо вместо системы конечных уравнений /вроде системы /3.2// для нахождения постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$, как это имело место для обыкновенных уравнений, мы получим при решении конкретных задач систему столь сложных функциональных соотношений для определения произвольных функций, что их решение практически невозможно.

Поэтому каждая задача математической физики ставится как задача решения некоторого уравнения при определённых дополнительных условиях, которые диктуются физической постановкой задачи.

2^0. Основные типы дополнительных условий.

Бывают два основных типа дополнительных условий: краевые условия и начальные условия.

Краевые условия фиксируют состояние исследуемой системы на границах. Например, в случае колебания струны, имеющей длину ℓ, нужно определить физические условия на обеих концах $(x=a$ и $x=a+\ell)$. Если в точке $x=a$ струна закреплена, то искомое решение уравнения колебания / 1.2/ должно удовлетворять условию $u(a,t)=0$. Если же конец сам приводится в движение по определённому закону, то соответствующее краевое условие должно иметь вид: $u(a,t)=f(t)$ / $f(t)$ – заданная функция /.

В случае задачи для продольных колебаний пружины, может быть, что один конец / точка подвеса/ закреплён, а другой конец $x=a$ свободен. Краевое условие в точке a определяется из того, что в ней натяжение пружины $-k\frac{\partial u(a,t)}{\partial x}= T(a,t)$ равно нулю. Так что, $u_x(a,t)=0$. Если в точке a приложена внешняя сила $F(t)$, то краевое условие принимает следующий вид:

$$\frac{\partial u(a,t)}{\partial x}=-\frac{T(a,t)}{k}=-\frac{F(a,t)}{kS} \quad \text{или} \quad u_x(a,t)=f(t).$$

Типичным является также условие упругого закрепления:

$$-k u_x(a,t) = -\alpha u(a,t)$$

/ α - характеризует жесткость закрепления/. Если точка, к которой конец $x=a$ упруго закреплен, перемещается так, что ее отклонение от начального положения дается функцией $\theta(t)$, то $k u_x(a,t) = \alpha[u(a,t) - \theta(t)]$.

Итак, имеем три основные типа краевых условий:

1/ $u(a,t) = \mu(t)$ /заданный режим движения/,

2/ $u_x(a,t) = \nu(t)$ /заданная сила/, /3.3/

3/ $u_x(a,t) = h[u(a,t) - \theta(t)]$ /упругое закрепление/.x/

Если $\mu(t)$, $\nu(t)$, $\theta(t)$ равны нулю, то краевые условия называются однородными. Возможны и более сложные краевые условия, нелинейные относительно неизвестной функции u. Например, при упругом закреплении, не подчиняющемся закону Гука $u_x(a,t) = \frac{1}{k}\psi[u(a,t)]$ и т.д.

Краевые условия еще недостаточны для получения однозначного решения задачи о колебании струны. Необходимо знать и положение и скорость всех точек струны в начальный момент $t=t_0$, т.е. начальные условия:

$$u(x,t_0) = \varphi(x), \quad u_t(x,t_0) = \psi(x). \qquad /3.4/$$

Эти условия /3.4/ и краевые условия /типа 3.3./ для обеих концов совместно полностью определяют решение соответствующей задачи.

Задачи такого типа /уравнение с краевыми условиями и начальными/ называются <u>смешанными задачами</u>. В случае ли-

---

x/ $h>0$ в случае начальной точки;

$h<0$ в случае конечной точки, так как там $T(a,t) = k u_x(a,t)$.

4.

нейного однородного дифференциального уравнения смешанные задачи могут быть разделены на две подгруппы 1/ краевые условия однородные, т.е. причиной движения являются начальные возмущения; 2/ начальные условия однородны, а краевые не однородны /не-стационарные задачи/.

В общем случае не всегда обязательно рассматривать физические процессы в пространственно ограниченных системах /колебания бесконечной струны или мембраны и т.д./. Тогда отпадают краевые условия, и решение задачи полностью определяется только начальными условиями; такие задачи называются задачами Коши / Cauchy /.

Наоборот: в случае статических проблем отпадают начальные условия и задача определяется только краевыми условиями - краевая задача.

3°. Корректность поставленной задачи.

От корректно поставленной задачи естественно требовать: 1/ решение должно существовать; 2/ решение должно быть однозначно определенным; 3/ решение должно непрерывно зависеть от дополнительных условий /устойчивость решения/.

Первое и второе требования ясны - от решения не следует требовать слишком много, т.е. противоречивых свойств, а в то же время задача должна быть поставлена с надлежащей полнотой /нельзя ставить задачу так, чтобы для решения оставался недопустимый произвол/.

Устойчивость решения, как выяснил Адамард / Hadamard/, обеспечивает, что процесс и физически определен добавочными условиями. Действительно, если не было бы непрерывной зависимости решения данной задачи от добавочных условий, то практически одинаковым добавочным условиям /различие которых лежит в пределах точности измерений/ может соответствовать два или несколько существенно различных процессов.

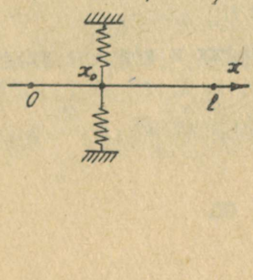
Анализ этих требований приводит к важному результату, что краевые задачи принадлежат естественно эллиптическим дифференциальным уравнениям /описывают статические явления/. Задачи с начальными условиями /задачи Коши/, а также смешанные задачи относятся к гиперболическим и параболическим уравнениям /гиперболические уравнения обычно описывают процессы движения и колебания, параболические уравнения - затухающие процессы/.

<u>Задачи к § 3.</u>

1. Поставить смешанную задачу о продольных колебаниях упругого стержня, имеющего форму усеченного конуса. Стержень расположен вертикально, нижний конец закреплен неподвижно, верхний конец свободен. Стержень выведен из состояния покоя тем, что его точкам в $t=0$ сообщены начальные продольные отклонения и скорости. Длина стержня радиусы оснований R /нижнего/, r /верхнего//$R>r$/ , материал стержня однороден.

2. В точке конечной струны длиной l с закрепленными концами ($x=0$, $x=l$) прикреплена точечная масса M а к ней прижинка с коэффициентом упругости к и осью, перпендикулярной к равновесному положению струны. Поставить смешан-

Рис.2.



ную задачу о поперечных колебаниях струны. Начальная форма струны и начальные скорости заданы. Учитывать и силы тяжести.

Указание. Рассматривать колебания обеих частей струны $0<x<x_0$ $u_1(x,t)$ и $x_0<x<l$ $u_2(x,t)$. Пользуясь результатами задачи 1 /§1/ можно связать u_1 и u_2 в точке x_0 : 1/ $u_1(x_0,t)=u_2(x_0,t)$ – условие непрерывности струны, и 2/ $M u_{1tt}(x_0,t)=M u_{2tt}(x_0,t)=\Phi(t)$, где $\varphi(t)$ – сумма всех сил действующих на точечную массу M.

3. Поставить смешанную задачу для определения силы и напряжения переменного тока, идущего вдоль провода с равномерно распределенными параметрами, если один конец заземлен, а к другому приложена эдс $\mathcal{E}(t)$ и если задан начальный ток $i(x,0)$ и начальное напряжение $V(x,0)$.

4. Поставить краевые условия для задачи об определении температуры стержня $0\le x\le l$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если а/ концы поддерживаются при заданной температуре;

б/ на концах стержня происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона со средой, температура которой задана /см. задача 4 § 1/;

в/ на концы стержня подается извне заданный тепловой поток /$q(t)$/.

5. Доказать, что одномерное уравнение колебаний

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t) \qquad (a)$$

имеет при нижеследующих начальных и краевых условиях

$$\left.\begin{array}{ll} u(x,0)=\varphi(x) & u(0,t)=\mu_1(t) \\ u_t(x,0)=\psi(x) & u(l,t)=\mu_2(t) \end{array}\right\} \qquad (b)$$

единственное решение.

Указание. Пусть задача имеет два решения $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$, тогда разность $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ удовлетворяет однородному уравнению

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} \qquad (в)$$

при однородных дополнительных условиях

$$\left.\begin{aligned} &v(x,0)=0, \quad && v(0,t) = 0, \\ &v_t(x,0)=0, \quad && v(l,t) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (г)$$

Нужно доказать, что $v(x,t)\equiv 0$. Для этого рассмотрим полную энергию свободной струны $E = \frac{1}{2}\int_0^l (Tv_x^2 + \rho v_t^2)dx$.

/ Потенциальная энергия элемента dx: $T(ds-dx) = \frac{1}{2}T\left(\frac{dv}{dx}\right)^2$/.

Отсюда $\frac{\partial E}{\partial t} = \int_0^l (Tv_x v_{xt} + \rho v_t v_{tt})\,dx = \int_0^l v_t(\rho v_{tt} - Tv_{xx})dx = 0$.

/ $\int_0^l T v_x v_{xx} dx$ – проинтегрирован по частям, учитывая, что из $v(a,t)=0$ следует $v_t(a,t)=0$ /. Таким образом $E(t) = E(0)$.

Из начальных условий следует, что $E(0) = 0$. Таким образом

$$E = \int_0^l (Tv_x^2 + \rho v_t^2)\,dx = 0.$$

Так как подинтегральное выражение не отрицательное, то $v_x = 0$, и $v_t = 0$, откуда $v(x,t) = C_0$ (конст). Из начальных условий видно, что $C_0 = 0$.

6. Доказать единственность решения уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t)$$

при дополнительных условиях

$$\begin{aligned} &u(x,0) = \varphi(x), \quad && u_x(0,t) = \nu_1(t), \\ &u_t(x,0) = \psi(x), \quad && u_x(l,t) = \nu_2(t) \end{aligned}$$

7. Доказать единственность решения уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t)$$

при дополнительных условиях

$$\begin{aligned} &u(x,0) = \varphi(x), \quad && u_x(0,t) = h_1[u(0,t) - \theta_1(t)] \quad (h_1 > 0), \\ &u_t(x,0) = \psi(x), \quad && u_x(l,t) = -h_2[u(l,t) - \theta_2(t)] \quad (h_2 > 0). \end{aligned}$$

Указание. Как в случае задачи 5, рассматривается разность двух решений задачи $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$.

Краевые условия для функции $v(x,t)$ следующие:

$$v_x(0,t) = h_1 v(0,t), \quad v_x(l,t) = -h_2 v(l,t).$$

С помощью этих условий имеем:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \int_0^l v_t(\rho v_{tt} - T v_{xx})\,dx - \frac{k}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[h_2 v^2(l,t) + h_1 v^2(0,t)\right].$$

Отсюда $\quad E(t) = -\frac{k}{2}\left[h_2 v^2(l,t) + h_1 v^2(0,t)\right] \leq 0$,

но с другой стороны,

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^l (k v_x^2 + \rho v_t^2)\,dx \geq 0$$

так что $E(t) \equiv 0$, и следовательно, как и в случае задачи 5: $v(x,t) \equiv 0$.

8. Доказать единственность решения уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t) \qquad (a)$$

при дополнительных условиях:

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad \begin{aligned} u(0,t) &= \mu(t), \\ u(l,t) &= \nu(t). \end{aligned} \qquad (б)$$

Указание. При доказательстве / как и в случае задач 5-7, от противного / нужно применить следующий принцип максимального значения:

Если функция $v(x,t)$, определённая и непрерывная в замкнутой области $0 \leq t \leq T$ и $0 \leq x \leq l$ удовлетворяет уравнению

$$v_t = a^2 v_{xx} \qquad (в)$$

в точках области $0 < x < l$, $0 < t \leq T$, то максимальное и минимальное значение функции $v(x,t)$ достигаются или в начальный момент, или в точках границы $x = 0$ или $x = l$

/ Эта теорема выражает затухающий характер процесса описываемого уравнением $(в)$ /.

Докажем от проитвного. Пусть функция достигает абсолютного максимума в точке (x_0, t_0) $(0 < x < l$ и $0 < t < T)$; $v(x_0, t) = M + \varepsilon$, где относительный максимум функции $v(x,t)$ при $t = 0$ $(0 < x < l)$, или при $x = 0$, или при $x = l$ $(0 < t < T)$. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$w(x,t) = v(x,t) + k(t_0 - t),$$

где k некоторое положительное число. Очивидно $w(x_0, t_0) = v(x_0, t_0) = M + \varepsilon$ и $k(t_0 - t) \leq kT$. Выберём $k > 0$ так, чтобы $kT < \frac{\varepsilon}{2}$, т.е. $k < \frac{\varepsilon}{2k}$; тогда максимальное значение $w(x,t)$ при $t = 0$ или при $x = 0$, $x = l$ не будет превосходить $M + \frac{\varepsilon}{2}$, т.е. $w(x,t) \leq M + \frac{\varepsilon}{2}$ $(г)$

/ при $t = 0$ или $x = 0$, $x = l$ /. В силу непрерывности функции $w(x,t)$ она должна в некоторой точке (x_1, t_1) достигать своего максимального значения. Очивидно, что

$$w(x_1, t_1) \geq w(x_0, t_0) = M + \varepsilon,$$

поэтому $t_1 > 0$, $0 < x_1 < l$ / на границах имеет место неравенство $(г)$ /. В точке (x_1, t_1) получим

$$w_{xx}(x_1, t) = v_{xx}(x_1, t_1) \leq 0$$

и $W_{xx}(x_1, t_1) = v_t(x_1, t_1) - k \geq 0$ или $v_t(x_1, t_1) \geq k > 0$.

Таким образом, в точке x_1, t_1 уравнение $(в)$ не может быть удовлетворено, так как справа и слева стоят величины разных знаков.

ГЛАВА II

УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

§ 4. Метод Даламбера /D'Alembert/.

Этот метод исходит из общего решения уравнения одномерных колебаний. В противоположность общему положению /§1.1°/ это общее решение позволяет легко получать решения конкретных задач.

1°. Формула Даламбера.

Рассмотрим однородное уравнение колебаний / 1.2/:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} . \qquad / 4.1/$$

/ В случае малых поперечных колебаний струны $a^2 = \frac{T_0}{\rho}$ /. Введением новых переменных / новые координатные кривые являются характеристиками уравнения / 4.1/ :

$$\xi = x + at \quad , \eta = x - at$$

уравнение /4.1/ приводится к каноническому виду

$$u_{\xi\eta} = 0 . \qquad / 4.2/$$

Отсюда

$$u_\eta = f(\eta)$$

и дальше

$$u = \int_0^\eta f(\tau)\,d\tau + f_1(\xi) = f_1(\xi) + f_2(\eta) = f_1(x+at) + f_2(x-at) \qquad / 4.3/$$

где f_1 и f , а следовательно и f_2 произвольные функции. Таким образом полученное решение - решение Даламбера - содержит две произвольные функции f_1 и f_2 , конкретный вид которых определяется дополнительными условиями.

Функцию $u(x,t)$ можно геометрически представить в виде поверхности в пространстве x,t,u. Сечение этой поверхности плоскостью $t=t_0$, даваемое формулой $u(x,t_0)$, представляет профиль струны в момент t_0. Сечение же поверхности $u(x,t)$ плоскостью $x=x_0$, даваемое формулой $u=u(x_0,t)$, представляет процесс движения точки x_0.

Формула /4.3/ показывает, что любое колебание струны является суперпозицией двух более простых колебаний $u_1=f_1(x+at)$ и $u_2=f_2(x-at)$. Эти функции описывают т.н. распространяющиеся волны.

Функция $u_1=f_1(x+at)$ описывает постоянное по форме возмущение, которое передвигается со скоростью,а в отрицательном направлении по оси x /обратная волна/. Это видно из того, что,поместив начало подвижной системы в точке $-at$, т.е. полагая $\xi=x+at$, мы будем видеть возмущение постоянным. Аналогично функция $u_2=f_2(x-at)$ описывает постоянное по форме возмущение, которое передвигается со скоростью a в положительном направлении по оси x /прямая волна/, /$x\pm at$ - фаза волны/.

2^{o}. Задача Коши /неограниченная струна/.

Ищем решение уравнения /4.1/, удовлетворяющее следующим начальным условиям:

$$u(x,0)=\varphi(x) \quad , \quad u_t(x,0)=\psi(x) . \qquad 4.4/$$

Подставив в /4.4 общее решение /4.3/, получаем

$$f_1(x)+f_2(x)=\varphi(x) \quad , \quad af_1'(x)-af_2'(x)=\psi(x) . \qquad /4.5/$$

После интегрирования второго равенства

$$a\left(f_1(x)-f_2(x)\right)=\int_0^x\psi(\tau)d\tau+C$$

можно определить f_1 и f_2 :

$$f_1(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a}\int_0^x \psi(\tau)d\tau + \frac{C}{2a},$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a}\int_0^x \psi(\tau)d\tau - \frac{C}{2a}. \qquad /4.6/$$

Таким образом решение задачи Коши принимает вид:

$$u(x,t) = f_1(x+at) + f_2(x-at) = \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\tau)d\tau. \qquad /4.7/$$

Способ вывода формулы /4.7/ доказывает и единственность решения поставленной задачи. Покажем, что решение краевой задачи устойчиво, т.е. непрерывно зависит от начальных условий.

Итак, мы должны показать, что, каков бы не был промежуток времени t_0 и как бы не было мало число ε, найдется такое $\eta(\varepsilon, t_0)$, при котором всякие два решения уравнения / 4.1/ $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ в течение промежутка времени t_0 будут различаться между собой меньше чем на ε :

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| < \varepsilon, \quad 0 < t < t_0,$$

если только начальные значения

$$u_1(x,0) = \varphi_1(x), \quad u_2(x,0) = \varphi_2(x),$$

$$u_{1t}(x,0) = \psi_1(x), \quad u_{2t}(x,0) = \psi_2(x),$$

отличаются друг от друга меньше чем на η :

$$|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| < \eta, \quad \psi_1(x) - \psi_2(x) < \eta.$$

Учитывая, что функции $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ связаны со своими начальными значениями (/4.7/), получаем:

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| \le \left|\frac{\varphi_1(x+at) - \varphi_2(x+at)}{2}\right| + \left|\frac{\varphi_1(x-at) - \varphi_2(x-at)}{2}\right| + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}|\psi_1(\tau) - \psi_2(\tau)|d\tau.$$

Отсюда в силу последних неравенств имеем:

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| < \eta(1-t_0),$$

что и докажет наше утверждение, если положить $\eta=\frac{\varepsilon}{1+t_0}$.

3°. Смешанная задача для ограниченного отрезка.

Найдем решение уравнения /при $t\geqslant 0$ /

$$a^2 u_{xx}=u_{tt}, \qquad /4.1/$$

удовлетворяющее следующим начальным и краевым условиям:

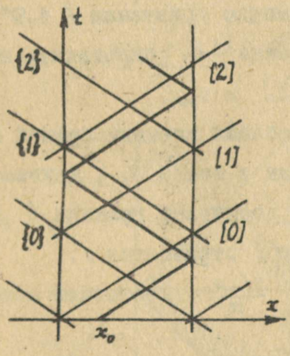
$$u(x,0)=\varphi(x), \quad u_t(x,0)=\psi(x), \quad 0\leq x\leq l, \qquad /4.4/$$

$$\alpha_1 u(0,t)+\beta_1 u_x(0,t)=\mu_1(t),$$

$$\alpha_2 u(l,t)+\beta_2 u_x(l,t)=\mu_2(t). \qquad /4.8/^{x/}$$

Решение Даламбера /4.3/, если функции f_1 и f_2 определены по формулам /4.6/, удовлетворяет начальным условиям. Но так как функции φ и ψ, описывающие начальное возмущение, определяются лишь при $0\leq x\leq l$, то и формулы /4.6/ дают f_1 и f_2 только там, где аргумент $x\pm at$ удовлетворяет неравенству $0\leq x\pm at\leq l$.

Рис.3



Таким образом $f_1(x+at)$ определена в полосе $\{0\}$, а $f_2(x-at)$ в полосе $[0]$ на плоскости xt /см. рис.3/так как нас интересует решение во всей полуполосе $0\leq x\leq l$, $0\leq t\leq\infty$.

Для нахождения требуемого решения мы должны

---

x/ В зависимости от значений постоянных α и β /4.8/ представляют собой краевые условия первого, второго и третьего типа.

использовать краевые условия / 4.8/. Подставляя решение Даламбера / 4.3/ в / 4.8/, получаем:

$$\alpha_1 f_2(-at)+\beta_1 f_2'(-at)+\alpha_1 f_1(at)+\beta_1 f_1'(at)=\mu_1(t),$$
$$\alpha_2 f_2(l-at)+\beta_2 f_2'(l-at)+\alpha_2 f_1(l+at)+\beta_2 f_2(l+at)=\mu_2(t).$$

Первое из этих уравнений можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение для определения f_2 через f_1 и μ_1 :

$$\alpha_1 f_2(z)+\beta_1 f_2'(z)=\mu\left(-\frac{z}{a}\right)-\alpha_1 f_1(-z)-\beta_1 f_1'(-z), \quad / 4.9'/$$

$(z=-at)$. Оно определяет f_2 в интервале аргумента $-l\le z\le 0$, т.е. на плоскости xt в полосе $[1]$.
Аналогично второе уравнение / 4.9/:

$$\alpha_2 f_1(z)+\beta_2 f_1'(z)=\mu_2\left(\frac{z-l}{a}\right)-\alpha_2 f_2(2l-z)-\beta_2 f_2'(2l-z) \quad / 4.9''/$$

$z=l+at$, определяет $f_1(z)$ там, где $0<2l-z<l$, или $l<z<2l$,т.е. в полосе $\{1\}$. Произвольные постоянные интегрирования определяются из условия непрерывности функций $f_2(z)$ и $f_1(z)$ соответственно в точках $z=0$ и $z=l$. Учитывая, что с помощью уравнения / 4.9"/ f_1 определена в полосе $\{1\}$, можно f определить из уравнения / 4.9'/ уже в полосе $[2]$ и т.д.
Таким образом в процессе колебания элемент прямой волны, находящийся в начальный момент в точке x_0 , двигаясь вправо, в момент времени $\frac{l-x}{a}$ достигает границы l и тем превращается в обратную волну / отражается /.
Эта обратная волна в момент $\frac{2l-x_0}{a}$ достигает левой границы и отражается.

Аналогично можно решить задачи с краевыми условиями других типов.

4°. Решение неоднородного уравнения колебания.

Решение неоднородного уравнения колебаний

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + p(x,t) \qquad /\ 4.10/$$

можно также получить методом Даламбера в виде суммы частного решения неоднородного уравнения и решения однородного уравнения. Заменой переменных / см. п.1°/

$$\xi = x + at \quad , \quad \eta = x - at \ .$$

Уравнение / 4.10/ приводится к виду:

$$u_{\xi\eta} = \frac{1}{4} p\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2a}\right) = Q(\xi,\eta) .$$

Найдём одно частное решение $v(\xi,\eta)$ этого уравнения, удовлетворяющее нулевым начальным условиям:

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = \int_{\eta}^{\xi} Q(\alpha,\eta)\,d\alpha$$

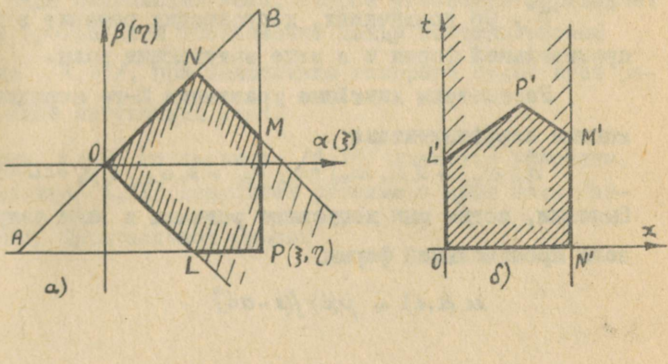
и

$$v = \int_{\xi}^{\eta} \frac{\partial v}{\partial \eta}\, d\beta =$$

$$= \int_{\xi}^{\eta}\left[\int_{\beta}^{\xi} Q(\alpha,\beta)\,d\alpha\right] d\beta =$$

$$= -\int_{\eta}^{\xi}\int_{\beta}^{\xi} Q(\alpha,\beta)\,d\alpha\, d\beta . \qquad /\ 4.11/$$

Рис.4



Отметим, что область изменения переменных ξ и η в случае задачи о колебании конечного отрезка $0<x<l$ / струна или стержень длиной l / будет

$$0<\xi+\eta<2l\ , \quad (\xi+\eta=2x)\ ,$$
$$0<\xi-\eta<\infty\ , \quad (\xi-\eta=2at)\ ,$$

/ заштрихованная полуполоса на рисунке 4 а//, а интеграл / 4.11/ берётся по области $\eta<\beta<\alpha<\xi$, которая представляет собой треугольник APB / см.рис. 4 а//, где координаты точки P будут ξ , η . Будем считать $Q(\alpha,\beta)$ вне своей области определения равным нулю,так что фактическая область интегрирования интеграла /4.11/- площадь $OLPMN$. Если вернуться в интеграле к старым переменным x и t $/d\alpha\, d\beta = \frac{D(\alpha,\beta)}{D(x,t)}\,dx\,dt$ /, мы получим:

$$v(x,t)=\frac{a}{2}\int\limits_{OL'P'M'N'} p(x,t)\,dx\,dt \qquad / 4.12/$$

/ область интегрирования изображена на рисунке 4 б//.

Если найдено частное решение неоднородного уравнения, то можно соотвествующим выбором решения неоднородного уравнения удовлетворить добавочным условиям.

5°. Об уравнениях, допускающих решение в виде волн произвольной формы и в виде затухающих волн.

Рассмотрим линейные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами:

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xt}+a_{22}u_{tt}+b_1u_x+b_2u_t+cu=0. \qquad / 4.13/$$

Выясним, когда они допускают решения в виде затухающих волн произвольной формы

$$u(x,t)=\mu(t)\,f(x-at)\ , \qquad / 4.14/$$

где f произвольная функция, a - постоянная /скорость/, $\mu(t)$ - функция описывающая процесс затухания волн.

Подставив /4.14/ в уравнение /4.13/, получим:

$$\mu(t) f''(x-at)[a_{11}-2a_{12}a+a_{22}a^2]+f(x-at)[2a_{12}\mu'(t)-2aa_{22}\mu'(t)+$$
$$+\mu(t)(b_1-ab_2)+f(x-at)[a_{22}\mu''(t)+b_2\mu'(t)+c\mu(t)]=0 .$$

В силу произвольности функции f коэффициенты всех слагаемых равны нулю. $\mu(t)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами:

$$a_{22}\mu''(t)+b_2\mu'(t)+c\mu(t)=0 ,$$

решение которого можно искать в виде

$$\mu(t)=e^{-kt}. \qquad /4.15/$$

Таким образом, для определения постоянных a и k имеем следующую систему алгебраических уравнений:

$$a_{22}a^2-2a_{12}a+a_{11}=0 ,$$
$$b_1-ab_2+2k(aa_{22}-a_{12})=0 , \qquad /4.16/$$
$$a_{22}k^2-b_2k+c=0 .$$

Первое из этих уравнений определяет a, оно показывает, что только уравнение гиперболического типа допускает решение в виде затухающих волн. Второе уравнение определяет k, а третье дает соотношение между коэффициентами уравнения /4.13/, при выполнении которого существует решение в виде затухающих волн.

Если $k=0$ то система /4.16/ является условием, что уравнение /4.13/ допускает решение в виде волн /незатухающих/ произвольной формы.

Задачи к § 4.

1. В момент $t=0$ неограниченная струна возмущена начальным отлонением

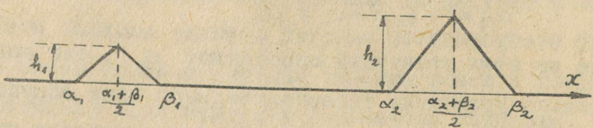
$$u(x,0)=\varphi(x)=\begin{cases} 0 & , -\infty < x < x_1 , \\ \dfrac{2h(x-x_1)}{x_2-x_1} & , x_1 < x < (x_1+x_2)\frac{1}{2} , \\ \dfrac{2h(x_2-x)}{x_2-x_1} & , \dfrac{x_1+x_2}{2} < x < x_2 , \\ 0 & , x_2 < x < \infty , \end{cases}$$

а начальная скорость равна нулю. Начертить профиль струны для моментов времени $t_k=\dfrac{k(x_2-x_1)}{8a}$, $k=0,1,2,3,4,5.$

Указание. В формулах / 4.6/, определяющих формы прямой и обратной волн, можно постоянную C брать равной нулю.

2. В момент $t=0$ неограниченная струна возмущена начальным отклонением, имеющим форму, изображенную на рис. 5.

Рис. 5.



В какой момент времени $t>0$ отклонение струны будет максимальным? Какова величина этого максимального отклонения? Каков профиль струны в этот момент?

3. Неограниченной струне сообщена на отрезке $-c<x<c$ поперечная начальная скорость $v_0 - const$; вне этого отрезка начальная скорость равна нулю. Найти формулы представляющие закон движения точек струны с различными абсциссами при $t>0$, и построить график струны для моментов времени $t_k=\dfrac{kc}{4a}$, $k=0,1,2,3,4,5,6$. Начальные отклонения отсуствуют.

4. В момент $t=0$ начальная форма струны как и в задаче 1. Каковы должны быть начальные скорости, чтобы на струне возникла прямая волна?

5. Полуограниченная струна закреплена в конце   . Показать, что обратная волна отражается от точки закрепления с переменой знака смещения и с сохранением абсолютной величины смещения. Начертить положение струны для моментов времени

$t_k = \frac{kc}{4a}$,

$k = 4, 5, 6, 7, 8,$

$9, 10, 13;$

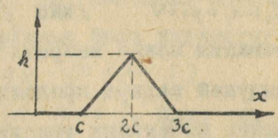


Рис.6

если колебания возбуждены начальным отклонением, изображённым на рисунке 6.

Указание. Краевое условие $u(0,t)=0$ даёт

$f_2(-x) = -f_1(x)$ / или эквивалентное соотношение

$f_1(-x) = -f_2(x)$ /, которое и выражает упомянутый закон отражения. Полезно отметить, что продолжение решения на отрицательные значения аргумента эквивалентно продолжению начальных условий на всю прямую $-\infty, +\infty$. С физической точки зрения это продолжение сводится к определению такого начального возмущения бесконечной струны, чтобы движение участка $x \geq 0$ было то же, как если бы он был закреплён в конце $x=0$, а остальная часть была бы отброшена. С помощью соотношений / 4.5/ получаем, что $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ и $\psi(-x) = -\psi(x)$. Таким образом продолжение на всю прямую начальные условия $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ определяются соотношениями:

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0 \\ -\varphi(-x), & x \leq 0 \end{cases}, \quad \Psi(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \geq 0, \\ -\psi(-x), & x \leq 0. \end{cases} \qquad (a)$$

6. Рассмотрим продольные колебания полуограниченного стержня со свободным концом $x=0$. Показать, что обратная волна отражается от свободного конца с сохранением знака и величины смещения. Построить график $u(x,t_k)$ для моментов времени $t_k=\frac{kc}{4a}$, $k=4,5,6,7,8,9,10,13$, если график отклонений такой же, как и в задаче 5, а начальные скорости равны нулю.

Указание. Краевое условие $u_x(0,t)=0$ дает $f_2(-x)=f_1(x)$ /или $f_1(-x)=f_2(x)$, а постоянную интегрирования можно выбрать равной нулю/. Как и в случае предыдущей задачи продолжение решения эквивалентно продолжению начальных условий на всю прямую $(-\infty,+\infty)$. С помощью соотношений /4.5/ получаем, что обобщенные начальные условия Φ и Ψ определяются следующим образом:

$$\Phi(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\geqslant 0,\\ \varphi(-x), & x<0,\end{cases}\qquad \Psi(x)=\begin{cases}\psi(x), & x\geqslant 0,\\ \psi(-x), & x<0.\end{cases}$$

7. Показать, что в случае струны длиной l с закрепленным концеми / $x=0$ и $x=l$ / функции f_1 и f_2 в решений Даламбера являются периодическими с периодом $2l$! Определить обобщенные начальные условия Φ и Ψ !

8. Показать, что в случае стержня длиной l со свободными концами / $x=0$ и $x=l$ / функции f_1 и f_2 являются периодическими с периодом $2l$! Определить обобщенные начальные условия Φ и Ψ !

9. Решить задачу о продольных колебаниях стержня, один конец которого $(x=0)$ закреплен жестко, а другой

$x=l$ свободен, если стержень был подвергнут начальному растяжению $u(x,0)=Ax$, $0<x<l$ и начальные скорости $u_t(x,0)=0$, $0<x<l$.

<u>Указание</u>. Проблему можно решить методом изложенным в 3^0, но более удобно применить результаты задач 5 и 6, по которым начальные условия продолжаются через точку закрепления нечётно, а через свободный конец чётно.

10. Определить по методу, изложенному в 3^0, состояние пружины / $u(x,t)$ и $u_t(x,t)$ / для моментов времени $t_k=\frac{kl}{2a}$ $(k=1,2,3)$, если пружина была подвергнута начальному растяжению $u(x,0)=Ax$ $(0<x<l)$ и начальные скорости $u_t(x,0)$ $(0<x<l)$. Один конец пружины $x=0$ движется по закону $u(0,t)=A\sin\omega t$, а второй конец $x=l$ свободен.

11. Решить задачу 10 при условии, что в конце $x=l$ находится груз массой M.

12. Показать, что решение однородного уравнения колебаний для полубесконечной струны с нулевыми начальными условиями выражается в виде $u=\mu(t-\frac{x}{a})$ / при краевом условии $u(0,t)=\mu(t)$ / или $u=\int\limits_0^{x-at}\nu(-\frac{\tau}{a})\,d\tau$ / в случае краевого условия $u_x(0,t)=\nu(t)$ /.

13. Решить задачу 10 с учётом силы тяжести / неоднородное уравнение колебаний /.

14. Выяснить, когда телеграфное уравнение

$$w_{xx}-LCw_{tt}-(LA+RC)w_t-RAw=0$$

имеет решение в виде затухающих волн. Найти решение задачи Коши для бесконечного провода.

§5. Метод Фурье (Fourier). /Метод разделения переменных/

Метод Фурье является одним из наиболее общих методов математической физики, применение которого не ограничивается уравнениями какого либо одного типа, а оказывается эффективным при рассмотрении широкого класса задач. В основе метода лежит возможность применения к линейным задачам математической физики принципа суперпозиции, на основании которого любая линейная комбинация решений однородного линейного дифференциального уравнения в частных производных в свою очередь является решением этого уравнения. Принцип метода Фурье состоит в том, что решение определённого класса задач математической физики строится при помощи суперпозиции частных решений рассматриваемого уравнения, имеющих вид произведения множителей, каждый из которых является функцией только одной переменной: $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1) f_2(x_2) \cdots f_n(x_n)$ / полное разделение переменных /, или одной группы переменных от которых остальные сомножители не зависят:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_i(x_1, \dots, x_i) f_k(x_{i+1}, \dots, x_{i+k}) \dots f_s(x_{n-s+1}, \dots, x_n)$$

/ неполное разделение переменных /.

Рассмотрим сначала подробно случай двух независимых переменных.

1°. Разделение переменных в общем двухмерном случае.

Рассмотрим смешанную задачу для следующего уравнения с двумя независимыми переменными:

$$A(x) u_{xx} + B(y) u_{yy} + C(x) u_x + D(y) u_y + (E(x) + F(y)) u = 0. \quad /5.1/$$

Пусть начальные условия неоднородные:

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad , u_y(x,0) = \psi(x) \quad , \qquad / \; 5.2/$$

а краевые условия линейные и однородные:

$$\alpha_1 u(a,y) + \alpha_2 u_x(a,y) = 0 \quad ,$$
$$\beta_1 u(b,y) + \beta_2 u_x(b,y) = 0 \; . \qquad / \; 5.3/$$

Будем искать частное решение уравнения /5.1 /

в виде

$$u = \mathcal{X}(x)\mathcal{Y}(y) \qquad / \; 5.4/$$

Подставив / 5.4/ в / 5.1 /, получаем / после деления на $\mathcal{X}\mathcal{Y}$ /

$$A(x)\frac{\mathcal{X}''}{\mathcal{X}} + C(x)\frac{\mathcal{X}'}{\mathcal{X}} + E(x) = -\left[B(y)\frac{\mathcal{Y}''}{\mathcal{Y}} + D(y)\frac{\mathcal{Y}'}{\mathcal{Y}} + F(y)\right].$$

Так как левая часть этого тождества зависит только от x , а правая часть только от y , то тождество удовлётворяется только в том случае, если и левая, и правая части не зависят ни от x , ни от y ,т.е. представляют собой одну и ту же постоянную λ . Таким образом получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения второрго порядка

$$A(x)\mathcal{X}'' + C(x)\mathcal{X}' + [E(x) - \lambda]\mathcal{X} = 0 \; , \qquad / \; 5.5/$$
$$B(y)\mathcal{Y}'' + D(y)\mathcal{Y}' + [F(y) + \lambda]\mathcal{Y} = 0 \; . \qquad / \; 5.6/$$

2°. Удовлетворение краевых условий.

Подставив / 5.4/ в краевые условия / 5.3/ получаем условия для $\mathcal{X}$:

$$\alpha_1 \mathcal{X}(a) + \alpha_2 \mathcal{X}'(a) = 0,$$
$$\beta_1 \mathcal{X}(b) + \beta_2 \mathcal{X}'(b) = 0 \; . \qquad / \; 5.7/$$

/ Другая возможность $\mathcal{Y}(y) = 0$ даёт тривиальное решение не интересующее нас./. Итак, мы должны найти нетривиальные /не нулевые/ решения уравнения /5.5/ при дополнительных условиях /5.7/. Оказывается, что такая задача имеет нетривиальные решения только при определенных значениях постоянной λ . Эти λ называются собственными значениями задачи и соответствующие им решения - собственными функциями.

Сформулированная задача определения решений уравнения /5.5/, удовлетворяющих однородным краевым условиям /5.7/, известна под названием краевой задачи Штурма - Лиувилля / Sturm-Liouville /.

Общее решение уравнения /5.5/

$$\mathfrak{X}(x,\lambda) = C_1 \mathfrak{X}_I(x,\lambda) + C_2 \mathfrak{X}_{II}(x,\lambda),$$

где $\mathfrak{X}_I$ и $\mathfrak{X}_{II}$ - линейные независимые частные решения и C_1 , C_2 - произвольные постоянные. Последние определяются при помощи условий /5.7/, которые дают:

$$\alpha_1 [C_1 \mathfrak{X}_I(a,\lambda) + C_2 \mathfrak{X}_{II}(a,\lambda)] + \alpha_2 [C_1 \mathfrak{X}'_I(a,\lambda) + C_2 \mathfrak{X}'_{II}(a,\lambda)] = 0,$$

$$\beta_1 [C_1 \mathfrak{X}_I(b,\lambda) + C_2 \mathfrak{X}_{II}(b,\lambda)] + \beta_2 [C_1 \mathfrak{X}'_I(b,\lambda) + C_2 \mathfrak{X}'_{II}(b,\lambda)] = 0 \qquad /5.8/$$

Эта однородная система линейных уравнений имеет нетривиальные /не нулевые/ решения для C_1 , C_2 , если

$$\Delta(\lambda) = 0, \qquad /5.9/$$

где $\Delta(\lambda)$ - детерминант системы /5.8/. Решив уравнение /5.9/, мы получим собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$, а затем и постоянные C_1 и C_2 , т.е. тем самым определены собственные функции $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_2$, ... , $\mathfrak{X}_n$, ...

3°. Ортогональность собственных функций краевой задачи Штурма - Лиувилля.

Докажем, что собственные функции, соответствующие равным собственным значениям ортогональны с весом т.е. удовлетворяют равенству

$$\int_a^b \rho(x)\, X_n(x)\, X_m(x)\, dx = 0. \qquad / 5.10/$$

Покажем прежде всего, что уравнение / 5.5/

$$A(x) X'' + B(x) X' + (E - \lambda) X = 0$$

можно привести к виду

$$[p(x) X']' + q(x) X - \rho(x) \lambda X = 0 \qquad / 5.11 /$$

умножив его на соответствующим образом подобранную функцию от x – $\rho(x)$. Для этого должно быть

$$[\rho(x) A(x)]' = \rho(x) B(x) .$$

Из этого дифференциального уравнения можно определить $\rho(x)$:

$$\rho(x) = e^{\int_{x_0}^{x} \frac{B(x) - A'(x)}{A(x)} dx} > 0 , \qquad / 5.11'/$$

а

$$p(x) = \rho(x) A(x) \qquad \text{и} \qquad q(x) = \rho(x) E(x) .$$

Напишем теперь уравнение / 5.11/ для X_m / уравнение / 5.11/, где $\lambda = \lambda_m$ /, умножим его на X_n и вычтем из уравнения для X_n, умноженного на X_m. В результате получим:

$$[p(x) X_n']' X_m - [p(x) X_m'] X_n - (\lambda_n - \lambda_m) \rho(x) X_n X_m = 0$$

или

$$[p (X_n' X_m - X_m' X_n)]' - (\lambda_n - \lambda_m) \rho X_n X_m = 0 .$$

Интегрирование в пределах от a до b даёт:

$$(\lambda_n - \lambda_m) \int_a^b \rho X_n X_m dx = \{ p (X_n' X_m - X_m' X_n) \} \Big|_a^b .$$

В силу дополнительных условий / 5.7/ правая сторона даёт нуль. Например, если $\alpha_1=0$:

$$\mathcal{X}_n'(a)\mathcal{X}_m(a)-\mathcal{X}_m'(a)\mathcal{X}_n(a)=\frac{1}{\alpha_1}\{[\alpha_1\mathcal{X}_n(a)+\alpha_2\mathcal{X}_n'(a)]\mathcal{X}_m'(a)-$$
$$-[\alpha_1\mathcal{X}_m(a)+\alpha_2\mathcal{X}_m'(a)]\mathcal{X}_n'(a)\}.$$

Если $\alpha_1=0$, то по / 5.7/ $\mathcal{X}'(a)=0$, и результат не изменяется. Таким образом соотношение / 5.10/ доказано.

4°. Удовлетворение начальных условий.

После решения краевой задачи / 5.5/, / 5.7/ можно найти решение уравнения / 5.6/ соотвествующее собственному значению λ_n :

$$\mathcal{Y}_n(y)=A_n\bar{\mathcal{Y}}_n(y)+B_n\bar{\bar{\mathcal{Y}}}(y),$$

где $\bar{\mathcal{Y}}_n(y)$ и $\bar{\bar{\mathcal{Y}}}_n(y)$ линейно независимые частные решения уравнения / 5.6/, A_n и B_n - произвольные постоянные.

Каждое решение уравнения / 5.1/ типа / 5.4/

$$u_n(x,y)=\mathcal{X}_n(x)\,\mathcal{Y}_n(y)$$

удовлетворяет и краевым условиям / 5.3/. Решением уравнения / 6.1/,удовлетворяющим условиям / 5.3/, является тоже сумма:

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}[A_n\bar{\mathcal{Y}}_n(y)+B_n\bar{\bar{\mathcal{Y}}}_n(y)]\mathcal{X}_n(x) \qquad / 5.12/$$

/ суперпозиция частных решений /, если предполагать,что этот ряд, как и ряды, получающиеся из него одно- и двухкратным почленным дифференцированием по x и y , сходится равномерно. Тогда из начальных условий можно определить постоянные A_n и B_n . Подставив / 5.12/ в /5.2/, получаем:

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}[A_n\bar{\mathcal{Y}}_n(0)+B_n\bar{\bar{\mathcal{Y}}}_n(0)]\mathcal{X}_n(x),$$
$$u_y(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}[A_n\bar{\mathcal{Y}}_n'(0)+B_n\bar{\bar{\mathcal{Y}}}_n''(0)]\mathcal{X}_n(x). \qquad / 5.13/$$

Умножаем эти уравнения на $\rho(x) X_m(x)$ и интегрируем от a до b. В силу ортогональности собственных функций X_m / 5.10/ получаем:

$$\int_a^b \rho(x) X_m(x) \varphi(x)\, dx = N_m [A_m \bar{Y}_m(0) + B_m \bar{Y}_m(0)],$$

$$\int_a^b \rho(x) X_m(x) \psi(x)\, dx = N_m [A_m \bar{Y}_m'(0) + B_m \bar{\bar{Y}}'(0)], \qquad /5.13/$$

где

$$N_m = \int_a^b \rho(x) X_m^2(x)\, dx \neq 0 \qquad /5.14/$$

норма собственных функций X_m. x/

/ 5.13/ представляет собой разложение заданных функций / $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ / по собственным функциям. Если такое разложение имеет место для любой кусочно- непрерывной функции $f(x)$, то систему собственных функций $X_1, \dots, X_n; \dots$ мы будем называть полной / точнее полной ортогональной / системой функций.

5°. Колебание струны, закреплённой в обеих концах.

Найдём методом Фурье решение уравнения колебаний:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \qquad / 4.1/$$

удовлетворяющее следующим дополнительным условиям

$$u(0,t) = 0, \qquad u(l,t) = 0, \qquad / 5.15/$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad u_t(x,0) = \psi(x). \qquad / 4.5/$$

Решение будем искать в виде

$$u(x,t) = X(x)\, T(t). \qquad / 5.4'/$$

---

x/ Если норма собственных функций равна единице, тогда собственные функции называются нормированными. Такими являются функции $\frac{1}{\sqrt{N_m}} X_m$.

Разделение переменных приводит нас к следующим уравнениям:

$$X'' + \lambda X = 0 \quad , \qquad /5.5'/$$

$$T'' + \lambda a^2 T = 0 . \qquad /5.6'/$$

Кроме того по / 5.15/ X удовлетворяет ещё дополнительным условиям:

$$X(0) = 0 \quad , \quad X(l) = 0 . \qquad /5.7/$$

Общим решением уравнения / 5.5'/, если , является

$$X = C_1 e^{-\sqrt{-\lambda}\, x} + C_2 e^{\sqrt{-\lambda}\, x} ,$$

а постоянные C_1 и C_2 определяются из системы

$$C_1 + C_2 = 0 \quad ,$$

$$C_1 e^{-\sqrt{-\lambda}\, l} + C_1 e^{\sqrt{-\lambda}\, l} = 0 \quad , \qquad /5.8'/$$

нетривиальные решения этой системы имеем, если

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{-\sqrt{-\lambda}\, l} & e^{\sqrt{-\lambda}\, l} \end{vmatrix} = e^{\sqrt{-\lambda}\, l} - e^{-\sqrt{-\lambda}\, l} = 0 . \qquad /5.9'/$$

При $\lambda < 0$ уравнение / 5.9'/ не имеет решений. При $\lambda > 0$ оно даёт:

$$e^{i\sqrt{\lambda}\, l} - e^{-i\sqrt{\lambda}\, l} = 0 \qquad \text{или} \qquad \sin \sqrt{\lambda}\, l = 0 .$$

Отсюда найдём собственные значения

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \qquad /5.16/$$

При $\lambda = 0$ общим решением уравнения / 5.5'/ является:

$$X(x) = C_1 x + C_2$$

Оно удовлетворяет начальным условиям / 5.7' / лишь в тривиальном случае $C_1 = C_2 = 0$.

Учитывая / 5.16/, найдём нормированные собственные функции

$$X_n = C_1\left(e^{-i\sqrt{\lambda_n}x} - e^{i\sqrt{\lambda_n}x}\right) = C\sin\frac{\pi n}{l}x,$$

где постоянную C определим из условия нормировки:

$$\int_0^l X_n^2(x)\,dx = 1 \qquad / 5.17/$$

/ в данном случае функция $\rho(x)$ в выражении / 5.11/равна единице/.

Получаем

$$C^2\frac{l}{2} = 1$$

и окончательно

$$X_n = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi n}{l}x. \qquad / 5.18/$$

Из общей теории следует также ортогональность собственных функций:

$$\int_0^l X_n X_m\,dx = 0 \qquad \text{при} \qquad n \neq m. \qquad / 5.10'/$$

Собственным значением λ_n / 5.16/ соответствуют следующие решения уравнения / 5.6'/:

$$T_n(t) = A_n\cos\frac{\pi n}{l}at + B_n\sin\frac{\pi n}{l}at.$$

Решение нашей смешанной задачи ищем в виде бесконечного ряда

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{l}}\left(A_n\cos\frac{\pi n}{l}at + B_n\sin\frac{\pi n}{l}at\right)\sin\frac{\pi n x}{l}, \qquad / 5.12'/$$

где постоянные A_n и B_n подобраны так, чтобы удовлетворялись начальные условия / 4.5/. Последние дают:

$$u(x,0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{l}} A_n \sin \frac{\pi n x}{l},$$

$$u_t(x,0) = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sqrt{\frac{2}{l}} \frac{\pi n a}{l} \sin \frac{\pi n x}{l}. \qquad /\ 5.13''/$$

Написанные ряды представляют собою разложение заданных функций по синусам в промежутке $(0, l)$ / ряд Фурье /. В такой ряд можно разлагать произвольную кусочно- непрерывную и кусочно - дифференцируемую функцию $f(x)$, заданную в промежутке $(0,l)$. При помощи условий ортогональности функций X_n / 5.10'/ и нормировки / 5.17/ найдём:

$$\left.\begin{aligned} A_n &= \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi n}{l} x\, dx \\ B_n &= \sqrt{\frac{2}{l}} \frac{l}{\pi n a} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{\pi n}{l} x\, dx. \end{aligned}\right\} \qquad /\ 5.19/$$

6°. Физическая интерпретация решения.

Исследуем какой нибудь член суммы / 5.12'/

$$u_n(x,t) = \left(A_n \cos \frac{\pi a n t}{l} + B_n \sin \frac{\pi a n t}{l}\right) \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

Обозначая

$$\alpha_n = \sqrt{\frac{2}{l}} \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \quad и \quad \varphi = -\operatorname{arctg} \frac{B_n}{A_n} \qquad /\ 5.20/$$

получаем

$$u_n(x,t) = \alpha_n \cos\left(\frac{\pi n}{l} a t + \varphi_n\right) \sin \frac{\pi n}{l} x. \qquad /\ 5.20'/$$

Видим, что каждая точка x_0 струны совершает гармонические колебания с угловой частотой $\omega_n = \frac{\pi n}{l} a$, начальной фазой φ_n и амплитудой $\alpha_n \sin \frac{\pi n x_0}{l}$, а профиль струны в любой момент времени представляет синусоиду. / Стоячие волны /. Неподвижные точки струны $x = \frac{ml}{n}$, $m = 1, 2, \ldots, n-1$ называются узлами. Точки, в которых $\sin \frac{\pi n}{l} x = 0$ / т.е. амплитуда колебаний максимальная/, называются пучностями стоячей волны.

Таким образом решение / 5.12'/ представляет собой суперпозицию стоячих волн. Возможные частоты колебаний

$$\omega_n = \frac{\pi n a}{l} \qquad /5.12/$$

называются собственными частотами. В случае колебаний струны $a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$ и $\omega_n = \frac{\pi n}{l}\sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$.

Колебания струны воспринимаются нами обычно по звуку издаваемому струной. Звук струны является наложением " простых тонов", соответствующих стоячим волнам, на которые разлагается колебание. Высота тона зависит от частоты колебаний, соответствующих этому тону. Сила тона определяется его энергией и, следовательно, его амплитудой / энергия $E \sim \omega_n^2 a_n^2$, см.задачу 2/. Самый низкий тон ω_1 называется основным тоном, остальные тона / в данном случае они соответствуют частотам , кратным ω_1 / называются обертонами. Тембр звука зависит от присуствия, наряду с основным тоном, обертонов и от распределения энергии по отдельным стоячим волнам / гармоникам /, а это, в свою очередь, зависит от способа возбуждения колебаний, ведь через начальные условия определяются коэффициенты A_n и B_n .

7.° Решение неоднородного уравнения.

Рассмотрим неоднородное уравнение / 5.1/

$$A(x)u_{xx} + B(y)u_{yy} + C(x)u_x + D(y)u_y + [E(x)+F(y)]u = \Phi(x,y) \qquad 5.22/$$

с однородными дополнительными условиями:

$$u(x,0)=0 \quad , \quad u_y(x,0)=0 \ , \qquad x/ \qquad /5.23/$$

$$\alpha_1 u(a,y)+\beta_1 u_x(a,y)=0 \ ,$$
$$\alpha_2 u(b,y)+\beta_2 u_x(b,y)=0 \ . \qquad / \ 5.3 \ /$$

Разлагаем функцию $\Phi(x,y)$ в ряд по собственным функциям задачи Штурма- Лиувилля, соответствующей однородному уравнению / 5.1 /

$$\Phi(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(y) X_n(x), \qquad / \ 5.24/$$

коэффициенты разложения, зависящие от параметра y, определяем как и в 4°.

$$\int_a^b \rho\,\Phi(x,y) X_n(x)\,dx = N_n f_n(y),$$
$$N_n=\int_a^b \rho(x) X_n^2(x)\,dx . \qquad / \ 5.24/$$

Решение задачи будем искать в виде

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y) X_n(x) \qquad / \ 5.25/$$

Подставив / 5.24/ и / 5.25/ в уравнение / 5.22/, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big\{ \big[A(x) X_n'' + C(x) X_n' + E(x) X_n \big] Y_n(y) +$$
$$+ \big[B(y) Y_n'' + D(y) Y_n' + F(y) Y_n \big] X_n(x) - f_n(y) X_n(x) \Big\} = 0 .$$

Учитывая,что X_n является решением уравнения / 5.5/, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big[B(y) Y'' + D(y) Y_n' + (F(y)+\lambda_n) Y_n(y) - f_n(y) \big] X_n(x) = 0 .$$

---

x/ В случае неоднородных начальных условий /5.2/ можно искать решение в виде сумму $u(x,y)=v(x,y)+w(x,y)$ где $v(x,y)$ - уже найденное нами решение однородного уравнения /5.1/ с неоднородными начальными условиями, а $w(x,y)$ - решение поставленной сейчас задачи.

Это уравнение будет удовлетворено, если все коэффициенты будут равны нулю, т.е.

$$B(y)Y_n''(y)+D(y)Y_n'(y)+[\lambda_n+F(y)]Y_n(y)=f_n(y). \qquad /5.26/$$

Это неоднородное уравнение соответствует однородному уравнению /5.6/. Начальные условия /5.23/ дают для $Y_n(y)$ следующие дополнительные условия:

$$Y_n(0)=0 \quad , \quad Y_n'(0)=0, \qquad /5.27/$$

которые вместе с уравнением /5.26/ определяют Y_n однозначно.

Применим полученные результаты к уравнению вынужденных колебаний

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+F(x,t)$$

с добавочными условиями

$$u(x,0)=0 \quad , \quad u_t(x,0)=0 , \qquad /5.23'/$$

$$u(0,t)=0 \quad , \quad u(l,t)=0. \qquad /5.15/$$

Решение ищем в виде

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)X_n(x).$$

Уравнение и дополнительные условия для определения $T_n(t)$ следующие:

$$T_n''(t)+\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2T_n(t)=f_n(t), \qquad /5.26'/$$

$$T_n(0)=0 \quad , \quad T_n'(0)=0, \qquad /5.27'/$$

где

$$f_n(t)=\sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l F(x,t)\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx . \qquad /5.25'/$$

Решением задачи /5.26'/ /5.27'/ является

$$T_n(t)=\frac{l}{\pi n a}\int_0^t \sin\frac{\pi n}{l}a(t-\tau)f_n(\tau)d\tau=\frac{\sqrt{2l}}{\pi n a}\int_0^t\int_0^l \Phi(x,\tau)\sin\frac{\pi n}{l}x\sin\frac{\pi n}{l}a(t-\tau)dx\,dt \qquad /5.28/$$

8°. Случай неоднородных краевых условий.

Рассмотрим неоднородное уравнение /5.22/ с неоднородными начальными и краевыми условиями:

$$u(x,0)=\varphi(x)\quad,\quad u_y(x,0)=\psi(x), \qquad /5.2/$$

и

$$\alpha_1 u(a,y)+\beta_1 u_x(a,y)=\theta_1(y), \qquad /5.29/$$

$$\alpha_2 u(b,y)+\beta_2 u_x(b,y)=\theta_2(y).$$

Введём новую неизвестную функцию $v(x,y)$, полагая:

$$u(x,y)=v(x,y)+w(x,y), \qquad /5.30/$$

где $w(x,y)$ – некоторая известная функция.

Функция $v(x,y)$ определяется как решение уравнения:

$$Av_{xx}+Bv_{yy}+Cv_x+Dv_y+(E(x)+F(y))v=\bar{F}(x,y), \qquad /5.22'/$$

где

$$\bar{F}(x,y)=F(x,y)-[Aw_{xx}+Bw_{yy}+Cw_x+Dw_y+(E+F)w], \qquad /5.22''/$$

с дополнительными условиями

$$v(x,0)=\bar{\varphi}(x)\quad,\quad \bar{\varphi}(x)=\varphi(x)-w(x,0),$$

$$v_y(x,0)=\bar{\psi}(x)\quad,\quad \bar{\psi}(x)=\psi(x)-w_y(x,0), \qquad /5.2'/$$

$$\alpha_1 v(a,y)+\beta_1 v_x(a,y)=\bar{\theta}_1(y),\quad \bar{\theta}_1(y)=\theta_1(y)-\alpha_1 w(a,y)-\beta_1 w_x(a,y),$$

$$\alpha_2 v(b,y)+\beta_2 v_x(b,y)=\bar{\theta}_2(y),\quad \bar{\theta}_2(y)=\theta_2(y)-\alpha_2 w(b,y)-\beta_2 w_x(b,y). \qquad /5.29'/$$

Выберем вспомогательную функцию $w(x,y)$ таким образом, чтобы

$$\bar{\theta}_1(y)=0 \quad \text{и} \quad \bar{\theta}_2(y)=0. \qquad /5.31/$$

тем самым общая задача с неоднородными краевыми условиями сведена к задаче для функции $v(x,y)$ с однородными краевыми условиями.

Функцию $w(x,y)$ можно искать, например, в виде

$$w(x,y)=g_1(x)\theta_1(y)+g_2(x)\theta_2(y),$$

где $g_1(x)$ и $g_2(x)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\alpha_1 g_1(a)+\beta_1 g_1'(a)=1\ ,\quad g_1(b)=0\quad ,\quad g_1'(b)=0\quad ,$$
$$\alpha_2 g_2(b)+\beta_2 g_2'(b)=1\ ,\quad g_2(a)=0\quad ,\quad g_2'(a)=0\quad .$$

Одной такой функцией является:

$$w(x,y)=\frac{(x-b)^2}{\alpha_1(a-b)^2+2\beta_1(a-b)}\theta_1(y)+\frac{(x-a)^2}{\alpha_2(b-a)^2+2\beta_2(b-a)}\theta_2(y)\ .$$

Задачи к § 5.

1. Доказать, что собственные значения задачи Штурма-Лиувилля

$$[p(x)X'(x)]'+[q(x)-\lambda\rho(x)]X=0,$$
$$\alpha_1 X(a)+\beta_1 X'(a)=0,$$
$$\alpha_2 X(b)+\beta_2 X'(b)=0$$

отрицательные, если $p(x)>0$ и $q(x)<0$, а α_1 и α_2 противоположного знака и α_2 и β_2 одного знака.

Справедлива ли теорема, если α_1 или β_1, и α_2 или β_2 равны нулю?

Указание. Умножение уравнения для X_n на X_n и интегрирование от a до b дает

$$\lambda_n=\frac{1}{\int_a^b\rho(x)X_n^2(x)\,dx}\left\{\int_a^b[p(x)X_n'(x)]'X_n(x)\,dx+\int_a^b q(x)X_n^2(x)\,dx\right\}.$$

Показать, что выражение в квадратных скобках отрицательное. /Интеграл в знаменателе положительный, так как

$\rho(x) > 0$ / см. /5.11'/ /.

2. Определить полную энергию стоячей волны /см. 5° и 6°/.

3. Найти колебания струны с жестко закреплёнными концами $x=0$ и $x=l$, возбуждённой начальным отклонением, изображённым на рисунке 7, и вычислить энергию отдельных гармоник.

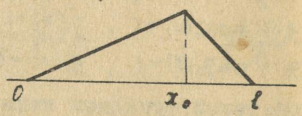


Рис.7.

4. Струна с жестко закреплёнными концами возбуждается ударом жесткого плоского молоточка, сообщающего ей следующее начальное распределение скоростей

$$u_t(x,0) = \psi(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < x_0 - \delta, \\ v_0, & x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, \\ 0, & x_0 + \delta < x < l. \end{cases}$$

Найти колебания струны если начальное отклонение равно нулю. Вычислить энергию отдельных гармоник.

5. Струна с жестко закреплёнными концами возбуждается ударом острого молоточка, сообщающего ей импульс J в точке x_0. Найти колебания струны, если начальное отклонение равно нулю. Вычислить энергию отдельных гармоник.

<u>Указание</u>. Сначала считать импульс J равномерно распределённым по отрезку $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ струны /см. предыдущую задачу/, в конечном выражении для $u(x,t)$ перейти к пределу при $\delta \to 0$.

6. Найти продольные колебания упругого стержня, один

конец которого закреплён жестко, а другой свободен, а/ при произвольных начальных условиях и б/ при начальных условиях: $u(x,0)=Ax$, $u_t(x,0)=0$.

7. Найти продольные колебания упругого стержня со свободными концами, а/ если начальные смещения и скорости в продольном направлении произвольны и б/ если ему сообщен в начальный момент продольный импульс / на одном из концов /.

Указание. Сначала считать, как и в случае задачи 5, что начальный импульс распределён по отрезку $l-\delta<x<l$, а затем перейти к пределу $\delta\to 0$.

8. Один конец стержня закреплён упруго, а другой свободен. Найти продольные колебания стержня при произвольных начальных условиях. Исследовать решение при $h\ll 1$ / мягкое закрепление / и $h\gg 1$ /жесткое закрепление/ / h - коэффициент упругости закрепления /. Вычислить соответствующие поправки к собственным значениям для стержня со свободным и закреплённым концами.

9. Изолированный электрический провод длиной l с равномерно распределёнными параметрами $R, L, C\ (A=0)$ заряжён до некоторого постоянного потенциала v_0 . В начальный момент один конец провода заземляется, а второй остаётся все время изолированным. Найти распределение напряжения в проводе.

Ответ: $v(x,t)=e^{-\frac{Rt}{2L}}\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\sin\frac{2n+1}{l}\pi x\sin(\omega_n t+\varphi_n)$,

$$\omega_n=\frac{2n+1}{2l}\sqrt{\frac{\pi}{LC}}\sqrt{1-\frac{CR^2l^2}{L\pi^2(2n+1)^2}}\ ,\quad \tan\varphi_n=2\omega_n\frac{L}{R}\ ,$$

$$a_n = \frac{4v_0}{\pi(2n+1)\sin\varphi_n}.$$

10. Упругий стержень $0<x<l$ расположен вертикально и верхним концом жестко прикреплён к свободно падающему лифту, который, достигнув скорости v_0, мгновенно останавливается. Найти продольные колебания стержня, если его нижний конец $x=l$ свободен.

Ответ:

$$u(x,t) = \frac{gx}{a^2}\left(l - \frac{x}{a}\right) + \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{gl^2}{(2n+1)^3\pi^3}\cos\frac{2n+1}{2l}\pi a t + \right.$$
$$\left. + \frac{2v_0 l}{(2n+1)^2\pi^2 a}\sin\frac{2n+1}{2l}\pi a t\right\}\sin\frac{2n+1}{2l}\pi x.$$

11. Найти колебания струны $0\le x\le l$ с жестко закреплёнными концами, если в точке $x=x_0$ этой струны с момента $t=0$ приложена поперечная сила $F(t)=A\sin\omega t$, ограничиться случаем, когда частота вынуждающей силы не совпадает ни с одной из собственных частот.

Указание. Сначала рассматривать случай равномерного распределения внешней силы в интервале $x_0-\delta<x<x_0+\delta$, а затем перейти к пределу $\delta\to 0$.

Ответ:
$$u(x,t) = \mathcal{U}(x,t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n x}{l}\sin\frac{\pi n a t}{l},$$

где
$$b_n = -\frac{2}{n\pi a}\int_0^l u_t(z,0)\sin\frac{\pi n z}{l}\,dz,$$

$$\mathcal{U}(x,t) = \begin{cases} \dfrac{Aa}{T_0\omega}\,\dfrac{\sin\frac{\omega(l-x_0)}{a}}{\sin\frac{\omega l}{a}}\sin\dfrac{\omega x}{a}\sin\omega t, & 0\le x\le x_0, \\[2ex] \dfrac{Aa}{T_0\omega}\,\dfrac{\sin\frac{\omega x_0}{a}}{\sin\frac{\omega l}{a}}\sin\dfrac{\omega(l-x)}{a}\sin\omega t, & x_0\le x\le l. \end{cases}$$

12. Найти продольные колебания стержня $0 \le x \le \ell$, если конец $x=0$ закреплён жестко, а к концу $x=\ell$ с момента $t=0$ приложена сила $F(t)=A\sin\omega t$.

13. Найти продольные колебания усеченного конического стержня при нулевых начальных условиях, если конец $x=0$ закреплён жестко, а конец $x=\ell$ свободен.

§ 6. Колебания мембраны. Цилиндрические функции.

1°. Формулировка задачи.

Рассмотрим свободные колебания мембраны, натянутой на плоский контур C. Проблема сводится к решению уравнения

$$u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}) \qquad /6.1/$$

со следующими дополнительными условиями:

$$\left.\begin{aligned} u(x,y,0)&=\varphi(x,y),\\ u_t(x,y,0)&=\psi(x,y),\end{aligned}\right\} \qquad /6.2/$$

$$u(x,y,t)\big|_{\text{на } C}=0 \qquad /6.3/$$

/ мембрана закреплена на границах /.

Будем искать решение задачи методом Фурье, т.е. в виде:

$$u(x,y,t)=T(t)\,v(x,y). \qquad /6.4/$$

По общей схеме, изложенной в предыдущем параграфе, найдём дифференциальные уравнения для функций $T(t)$ и $v(x,y)$

$$T''+a^2\lambda T=0, \qquad /6.5/$$

$$v_{xx}+v_{yy}+\lambda v=0 \qquad /6.6/$$

и дополнительное условие для $v(x,y)$:

$$v(x,y)\big|_{нас}=0 . \qquad /6.7/$$

Уравнение /6.6/ имеет нетривиальные решения, удовлетворяющие краевому условию /6.7/, лишь при определённых значениях постоянной λ . Таким образом, вся проблема состоит в нахождении собственных значений λ_n и собственных функций v_n уравнения /6.6/ при условии /6.7/. Однако мы можем получить решения этой задачи в явно аналитическом виде только для случаев областей наиболее простой формы, как, например, для прямоугольной мембраны / см. задачу 1 / и круглой мембраны. В случае произвольных областей для получения собственных функций и собственных значений обычно применяются различные приближённые методы. В данном параграфе исследуем колебания круглой мембраны.

2°. Круглая мембрана.

При изучении колебаний круглой мембраны полезно перейти к полярным координатам. Тогда уравнение колебаний запишется в виде:

$$u_{tt}=a^2\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2}\right] . \qquad /6.1'/$$

Будем искать решение этого уравнения при заданных начальных условиях

$$u(r,\vartheta,0)=\varphi(r,\vartheta) ,$$
$$u_t(r,\vartheta,0)=\psi(r,\vartheta) \qquad /6.2'/$$

и граничном условии

$$u(r_0, \vartheta, t) = 0 \qquad /6.3'/$$

/ закреплённая по краям мембрана радиуса r_0 /.

Положив

$$u(r, \vartheta, t) = T(t)\, v(r, \vartheta), \qquad /6.4'/$$

мы получим для $T(t)$ уравнение /6.5/, а для определения $v(r, \vartheta)$ — следующую задачу для собственных значений и собственных функций

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \vartheta^2} + \lambda v, \qquad /6.6'/$$

$$v(r_0, \vartheta) = 0 . \qquad /6.7'/$$

Кроме того, на функцию $v(r, \vartheta)$ мы должны ещё налагать условие периодичности

$$v(r, \vartheta + 2\pi) = v(r, \vartheta) \qquad /6.8/$$

и условие ограниченности в особой точке уравнения /6.6'/ т.е. в точке $r = 0$,

$$|v(0, \vartheta)| < \infty \qquad /6.9/$$

Поставленную задачу для определения $v(r, \vartheta)$ /6.6'/, /6.7'/,/6.8/, /6.9/ можно снова решить методом Фурье, т.е. исходная проблема /6.1'/, /6.2'/, /6.3'/ допускает полное разделение переменных.

Положим

$$v(r, \vartheta) = R(r)\,\Theta(\vartheta), \qquad /6.10/$$

тогда получим для определения $\Theta(\vartheta)$ уравнение

$$\Theta'' + \mu\Theta = 0 \qquad /6.11/$$

с условием периодичности

$$\Theta(\vartheta)=\Theta(\vartheta+2\pi), \qquad /6.8'/$$

а для $R(r)$ – уравнение

$$r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)+(\lambda r^2-\mu)R=0 \qquad /6.12/$$

с однородными граничными условиями:

$$R(r_0)=0\ , \quad |R(0)|<\infty\ . \qquad /6.13/$$

Нетривиальные периодические решения для $\Theta(\vartheta)$ существуют лишь при $\mu=n^2$ / n – целое число / и имеют вид:

$$\Theta(\vartheta)=A_{1n}e^{in\vartheta}+A_2e^{-in\vartheta}, \text{ или } \Theta_n(\vartheta)=B_{1n}\cos n\vartheta+B_{2n}\sin n\vartheta. \qquad /6.14/$$

Но решение уравнения /6.12/ не выражается через элементарные функции, а требует введения одного класса специальных функций. Вводя новую переменную $z=\sqrt{\lambda}\,r$ и обозначая $R(r)=R\left(\frac{z}{\sqrt{\lambda}}\right)=Z(z)$, получим для функции $Z(z)$ уравнение цилиндрических функций n – ого порядка

$$Z''+\frac{1}{z}Z'+\left(1-\frac{n^2}{z^2}\right)Z=0 \qquad /6.15/$$

с дополнительными граничными условиями

$$Z(z_0)=0\ , \quad (z_0=\sqrt{\lambda}\,r_0)\ ; \quad |Z(0)|<\infty\ . \qquad /6.16/$$

Уравнение /6.15/ называют часто также уравнением Бесселя (Bessel) n – ого порядка. Выясним коротко важнейшие свойства этого уравнения.

3°. Решение уравнения Бесселя в виде степенного ряда.

Рассмотрим уравнение Бесселя ν – ого порядка

$$Z''(z)+\frac{1}{z}Z'(z)+\left(1-\frac{\nu^2}{z^2}\right)Z(z)=0\ . \qquad /6.17/$$

В общем случае ν и z могут быть комплексными числами / для определённости нужно считать, что $Re\,\nu>0$ /, но в дальнейшем будем обычно считать ν и z действительными.

Решение $Z(z)$ уравнения /6.17/ будем искать в виде степенного ряда:

$$Z(z)=z^{\sigma}(a_0+a_1 z+a_2 z^2+\cdots)\,. \qquad /6.18/$$

Подставляя /6.18/ в уравнение Бесселя /6.17/ и приравнивая нулю коэффициенты при $z^{\sigma-2}, z^{\sigma-1},\ldots$, получим уравнение для определения σ и систему уравнений для определения коэффициентов a_k :

$$\begin{aligned}
&a_0(\sigma^2-\nu^2)=0\,,\\
&a_1[(\sigma+1)^2-\nu^2]=0\,,\\
&a_2[(\sigma+2)^2-\nu^2]+a_0=0\,, \qquad /6.19/\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&a_k[(\sigma+k)^2-\nu^2]+a_{k-2}=0\,.
\end{aligned}$$

Так как $a_0\neq 0$, то первое из уравнений /6.19/ даёт:

$$\sigma^2-\nu^2=0\,, \quad \text{или} \quad \sigma=\pm\nu\,. \qquad /6.20/$$

Если $\sigma\pm\nu\neq -k\,,\ (k=1,2,\ldots)$, т.е. $\pm 2\nu\neq -k$, то из второго и k-го уравнений /6.19/ получаем:

$$a_1=0\ ; \quad a_k=-\frac{a_{k-2}}{(\sigma+\nu+k)(\sigma-\nu+k)}\,. \qquad /6.21/$$

Отсюда видно, что все нечётные коэффициенты разложения /6.18/ равны нулю. Кроме того, если ν действительное, то при $\sigma=-\nu$ решение обращается в бесконечность в точке z_0.

Таким образом, если $\nu\neq\pm k\ (k=1,2,\ldots)$, уравнение /6.17/ имеет два линейно независимых решения, соответствующих двум возможным значениям параметра σ . С помощью /6.20/ и /6.21/ можно их записать следующим образом:

$$Z_\nu(z)=z^\nu a_0\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\frac{z^{2p}}{2^{2p}p!\,(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+p)}\quad (\text{при } \sigma=\nu),$$

$$Z_{-\nu}(z)=z^{-\nu}a_0\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\frac{z^{2p}}{2^{2p}p!\,(1-\nu)(2-\nu)\cdots(p-\nu)}\quad (\text{при } \sigma=-\nu). \qquad /6.22/$$

Оба - бесконечные суммы, сходятся при любых конечных z , в чем нетрудно убедиться на основании признака Деламбера.

Положим теперь, что $\nu=n$ / n - целое положительное число/, то первое из решений /6.22/ сохранит свою силу, а второе потеряет, так как, начиная с некоторого члена, один из множителей в знаменателе равен нулю. Полученные разложения /6.22/ с точностью до постоянного множителя определяют так называемые функции Бесселя первого рода ν - порядка J_ν . Если $\nu=n$, то a_0 берётся равным $\frac{1}{2^n n!}$
Таким образом

$$J_n(z)=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{p!\,(p+n)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2p} \qquad /6.23/$$

С помощью гамма - функции, которая является обобщением факториала, можно аналогично формуле /6.23/ определить функции Бесселя произвольного порядка.

4° . Определение и основные свойства гамма-функции Эйлера.

Определяем гамма-функцию $\Gamma(z)$, как решение функционального уравнения

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z), \qquad /6.24/$$

при условии $\Gamma(1)=1$, для всех целых положительных z

$(z=n)$ очевидно:

$$\Gamma(n+1)=n! \qquad /6.25/$$

Таким образом гамма - функция служит для интерполирования факториала за областью натуральных чисел. Она может быть представлена в виде следующего интеграла

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-x}x^{z-1}\,dx, \qquad /6.26/$$

который сходится абсолютно на правой полуплоскости $Re\, z>0$, и представляет собой аналитическую функцию. Действительно, по /2.26/, интегрируя по частям, имеем

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-x}x^{z-1}dz=-e^{-x}x^{z}\Big|_0^\infty+z\int_0^\infty e^{-x}x^{z-2}dx=z\Gamma(z-1).$$

По формуле /2.26/

$$\Gamma(\tfrac{1}{2})=\int_0^\infty e^{-x}x^{-\frac{1}{2}}dx=2\int_0^\infty e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}. \qquad /6.27/$$

Хотя формула /2.26/ позволяет определить $\Gamma(z)$ лишь в области $Re\, z>0$, можно с помощью функционального соотношения /2.24/ найти и значения для $\Gamma(z)$ при $Re\, z<0$. При этом оказывается, что в точках $z=-n$ $(n=0,1,2,\ldots)$ гамма-функция имеет полюсы первого порядка.

5°. Функции $J_\nu(z)$ $(\nu\neq n)$

Полагая в формулах /6.22/ a_0 равным $\frac{1}{2^{\sigma}\Gamma(\sigma+1)}$, $\sigma=\pm\nu$ и учитывая соотношения /6.24/ и /6.25/, получаем следующие разложения для функций Бесселя $J_\nu(z)$:

$$J_\nu(z)=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{\Gamma(p+1)\,\Gamma(p+\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2p+\nu}. \qquad /6.28/$$

Эта формула имеет смысл при любых ν, как положительных, так и отрицательных. При $\nu = n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ она совпадает с формулой /6.23/. В отличие от исходных формул /6.22/ формула /6.28/ имеет смысл и при $\nu = -n$, но ничего нового не дает. Поскольку $\Gamma(p-n+1) = \infty$ для $0 \leq p \leq n-1$, то фактически в этом случае суммирование начинается со значений $p = n$, следовательно:

$$J_{-n}(z) = \sum_{p=n}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(p+1)\,\Gamma(p-n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2p-n} =$$

$$= \sum_{p'=0}^{\infty} \frac{(-1)^{p'+n}}{\Gamma(p'+n+1)\,\Gamma(p'+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2p'+n} = (-1)^n J_n(z)$$

$$(p = p'+n) \quad . \qquad /2.28'/$$

Как уже отмечено для нецелых значений ν функции $J_\nu(z)$ и $J_{-\nu}(z)$ линейно независимы / $J_\nu(z)$ имеет нуль, а $J_{-\nu}(z)$ полюс ν-го порядка в точке $z = 0$ /, и всякое решение $Z_\nu(z)$ уравнения Бесселя ν-ого порядка может быть представлено в виде линейной комбинации функций $J_\nu(z)$ и $J_{-\nu}(z)$

$$Z_\nu(z) = C_1 J_\nu(z) + C_2 J_{-\nu}(z) .$$

Для целых ν мы имеем пока лишь ограниченное в точке $z = 0$ частное решение $J_n(z)$.

Интересно отметить, что функции полуцелого порядка выражаются через тригонометрические функции. Например:

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+p\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{2}+2p} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} z^{2p+1} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z . \qquad /6.29'/$$

Так как по /6.24/ $\Gamma\left(\frac{1}{2}+p\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2p+1)}{2^{p+1}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, а по /6.27/

окончательно $\Gamma\left(\frac{3}{2}+p\right)=\frac{1\cdot 3\cdots(2p+1)}{2^{p+1}}\sqrt{\pi}$.

Аналогично

$$J_{-\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z \qquad /6.29''/$$

6°. Рекуррентные формулы.

Непосредственным дифференцированием рядов бесселевых функций можно доказать следующие соотношения между функциями Бесселя первого рода различных порядков:

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{J_\nu(z)}{z^\nu}\right)=-\frac{J_{\nu+1}(z)}{z^\nu}, \qquad /6.30/$$

$$\frac{d}{dz}\left(J_\nu(z)z^\nu\right)=z^\nu J_{\nu-1}(z). \qquad /6.31/$$

Важны следующие частные случаи этих формул: при $\nu=0$ /6.30/ даёт

$$J_0'(z)=-J(z), \qquad /6.30'/$$

при $\nu=1$ /6.31/ даёт

$$\left[zJ_1(z)\right]'=J_0(z). \qquad /6.31'/$$

Дифференцируя /6.30/ и /6.31/, получаем

$$\nu\frac{J_\nu(z)}{z}-J_\nu'(z)=J_{\nu+1}(z),$$

$$\frac{\nu J_\nu(z)}{z}+J_\nu'(z)=J_{\nu-1}(z).$$

Складывая и вычитая эти уравнения, находим рекуррентные формулы:

$$\left.\begin{aligned}J_{\nu+1}(z)+J_{\nu-1}(z)&=\frac{2\nu}{z}J_\nu(z)\\ J_{\nu+1}(z)-J_{\nu-1}(z)&=-J_\nu'(z)\end{aligned}\right\} \qquad /6.32/$$

7°. Бесселевы функции второго и третьего рода.

Как указано в 5° функции J_n и J_{-n} / n - натуральное число / не являются независимыми решениями уравнения Бесселя. Второе решение можно искать в виде

$$Z_n = \beta J_n(z) \ln z + z^{-n} \sum_{p=0}^{\infty} \beta_p z^p , \qquad /6.33/$$

которое приводит к функциям Бесселя второго рода. Характерным свойством этих функций является наличие особенности типа полюса в начале координат. Обычно эти функции берутся в следующем виде:

$$N_\nu = \frac{1}{\sin \pi\nu} \left[J_\nu(z) \cos \pi\nu - J_{-\nu}(z) \right] \qquad / 6.34/$$

и называются функциями Неймана /*Neuman*/. Решение /6.34/ является независимым от $J_\nu(z)$ для всех значений ν, но правая часть принимает неопределённый вид $0/0$ при целых ν. Однако значение $N_n(z)$ можно найти по правилу Лопиталя:

$$N_n(z) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial J_n}{\partial n} - (-1)^n \frac{\partial J_{-n}}{\partial n} \right]. \qquad /6.35/$$

Таким образом, при всех значениях ν общее решение уравнения Бесселя можно записать в виде:

$$Z_\nu = C_1 J_\nu(z) + C_2 N_\nu(z) \qquad /6.36/$$

При достаточно больших значениях аргумента имеют место следующие простые асимптотические выражения для бесселевых функций:

$$J_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{2\nu+1}{4}\pi\right)\left(1+O(|z|^{-\frac{3}{2}})\right), \quad \text{x/}$$
$$N_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z - \frac{2\nu+1}{4}\pi\right)\left(1+O(|z|^{-\frac{3}{2}})\right). \qquad /6.37/$$

Таким образом цилиндрические функции первого и второго рода относятся друг к другу как косинус и синус, но затухают с ростом z благодаря множителю $\frac{1}{\sqrt{z}}$. Как и тригономические функции, функции Бесселя и Неймана имеют бесконечно много нулей на оси x.

По аналогии с показательными функциями можно построить линейную комбинацию решений $J_\nu(z)$ и $N_\nu(z)$, являющуюся решением уравнения Бесселя. Эти функции называются функциями Бесселя третьего порядка или функциями Ганкеля /Hankel/:

$$H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + i N_\nu(z),$$
$$H_\nu^{(2)}(z) = J_\nu(z) - i N_\nu(z). \qquad /6.38/$$

Они имеют следующие асимптотические выражения:

$$H_\nu^{(1)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{i\left(z - \frac{2\nu+1}{4}\pi\right)}\left(1+O(|z|^{-1})\right),$$
$$H_\nu^{(2)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{-i\left(z - \frac{2\nu+1}{4}\pi\right)}\left(1+O(|z|^{-1})\right). \qquad /6.39/$$

8°. Производящая функция и интегральное представление.

Рассмотрим бесселевы функции с целыми индексами.

---

x/ Равенство $f(x) = O(\varphi(x))$ означает, что отношение $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ остаётся ограниченным при $x \to \infty$.

Покажем, что имеет место следующее разложение:

$$e^{\frac{1}{2}z\left(t-\frac{1}{t}\right)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)t^n ,\tag{6.40}$$

функция $e^{\frac{1}{2}z\left(t-\frac{1}{t}\right)}$ называется производящей функцией для бесселевых функций целого порядка. Докажем равенство /6.40/

$$e^{\frac{zt}{2}}e^{-\frac{z}{2t}}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\left(\frac{z}{2}\right)^m t^m\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^k t^{-k}=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{m!\,k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{m+k}t^{m-k}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{p!\,(n+p)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2p}\right]t^n+ \quad \text{x/}$$

$$+\sum_{n=\infty}^{1}\left[\sum_{p=n}^{\infty}\frac{(-1)^p}{p!\,(n-p)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2p-n}t^{-n}\right]=$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(z)t^n .$$

Полагая в формуле /6.40/ $t=e^{i\varphi}$, получим

$$e^{iz\sin\varphi}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(z)e^{in\varphi}\tag{6.40'}$$

или, разделяя вещественную и мнимую части, причём считая z и φ вещественными, и учитывая соотношения /6.28'/:

$$\begin{aligned}\cos(z\sin\varphi)&=J_0(z)+2\sum_{n=1}^{\infty}J_{2n}(z)\cos 2n\varphi ,\\ \sin(z\sin\varphi)&=2\sum_{n=1}^{\infty}J_{2n-1}(z)\sin(2n-1)\varphi .\end{aligned}\tag{6.41}$$

Выражения /6.41/ представляют собою разложения функций в ряды Фурье; применяя обычный способ определения коэффициентов, получаем следующие интегральные представления для функций Бесселя:

---

x/ Оба разложения сходятся абсолютно.

$$J_{2n}(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(z\sin\varphi)\cos 2n\varphi\, d\varphi \qquad (n=1,2,\ldots) \qquad /6.42/$$

$$J_{2n-1}(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(z\sin\varphi)\sin(2n-1)\varphi\, d\varphi \qquad (n=1,2,\ldots),$$

кроме того

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(z\sin\varphi)\cos(2n+1)\varphi\, d\varphi=0,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(z\sin\varphi)\sin 2n\varphi\, d\varphi=0. \qquad /6.43/$$

С учётом соотношений /6.43/ можно объединить формулы /6.42/ в одну формулу:

$$J_n(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\varphi-z\sin\varphi)\,d\varphi, \qquad /6.44/$$

или, с учётом чётности подинтегральной функции

$$J_n(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n\varphi-z\sin\varphi)\,d\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(n\varphi-z\sin\varphi)}d\varphi \qquad /6.44'/$$

Отметим, что в силу принципа аналитического продолжения можно утверждать, что полученные соотношения /6.42/-/6.44'/ справедливы и при любом комплексном z.

9°. Колебания круглой мембраны.

Разделение переменных приводит нас к следующей задаче: найти собственные функций и собственные значения уравнения Бесселя

$$Z''(z)+\frac{1}{z}Z'(z)+\left(1-\frac{n^2}{z^2}\right)Z(z) \qquad /6.15/$$

при добавочных условиях

$$Z(z_0)=0 \qquad (z_0=\sqrt{\lambda}\, r_0); \qquad |Z(0)|<\infty. \qquad /6.16/$$

Общее решение уравнения /6.15/ имеет вид

$$Z_n(z) = C_1 J_n(z) + C_2 N_n(z),$$

из второго условия /6.16/ следует, что $C_2 = 0$, а первое условие дает $J_n(\sqrt{\lambda}\, r_0) = 0$. Если $\mu_m^{(n)}$ m-ой корень уравнения $J_n(\mu) = 0$, то

$$\lambda_{n,m} = \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}\right)^2. \qquad /6.45/$$

Этому собственному значению принадлежит собственная функция

$$R_{n,m} = Z(\sqrt{\lambda}\, r) = J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r\right) \qquad /6.46/$$

Из общей теории /см. §5, 3^0 / следует ортогональность собственных функций $R_{n,m}(r)$ с весом r:

$$\int_0^{r_0} J_n\left(\frac{\mu_{m_1}^{(n)}}{r_0} r\right) J_n\left(\frac{\mu_{m_2}^{(n)}}{r_0} r\right) r\, dr = 0 \qquad \text{при } m_1 \neq m_2, \qquad /6.47/$$

а норма этих функций равна /см. задачу 8/

$$\int_0^{r_0} r\, J_n^2\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r\right) dr = \frac{r_0^2}{2}\left[J_n'\left(\mu_m^{(n)}\right)\right]^2. \qquad /6.48/$$

По /6.10/ и /6.14/ получаем двухмерные собственные функции соответствующие собственному значению $\lambda_{n,m}$:

$$v_{n,m}^{(1)}(r,\vartheta) = J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r\right)\cos n\vartheta, \quad v_{n,m}^{(2)}(r,\vartheta) = J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r\right)\sin n\vartheta, \qquad /6.49/$$

или

$$\bar{v}_{n,m}^{(1)}(r,\vartheta) = J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r\right) e^{in\vartheta}, \quad \bar{v}_{n,m}^{(2)}(r,\vartheta) = J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r\right) e^{-in\vartheta}. \qquad /6.49'/$$

Собственные функции $v_{n\,m}^{i}$ обладают следующим свойством ортогональности $(i = 1,2)$:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{r} v_{n_1 m_1}^{i_1}\, v_{n_2 m_2}^{i_2}\, r\, dr\, d\vartheta = N_{n_1 m_1}^{i_1}\,\delta_{n_1 n_2}\delta_{m_1 m_2}\delta_{i_1 i_2}. \qquad /6.50/$$

Зависимость решения нашей проблемы /6.1'/ - /6.3'/ от времени t определяется функцией $T_\lambda(t)$, которая удовлетворяет уравнению /6.5/:

$$T_{n,m}(t)=A_{nm}\cos a\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}t+B_{nm}\sin a\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}t. \qquad /6.52/$$

Полное решение исходной задачи будем искать в виде суммы:

$$u(r,\vartheta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\Big[v_{nm}^{(1)}(r,\vartheta)\Big(A_{nm}^{(1)}\cos\frac{a\mu_m^{(n)}}{r_0}t+$$

$$+B_{nm}^{(1)}\sin\frac{a\mu_m^{(n)}}{r_0}t+v_{nm}^{(2)}(r,\vartheta)\Big(A_{nm}^{(2)}\cos\frac{a\mu_m^{(n)}}{r_0}t+B_{nm}^{(2)}\sin\frac{a\mu_m^{(n)}}{r_0}A\Big),$$

/6.53/

где постоянные $A_{nm}^{(i)}$, $B_{nm}^{(i)}$ определяются из начальных условий /6.2'/ с учётом ортогональности собственных функций /6.50//см. § 5, 4^0 /.

Как и в случае струны решение /6.53/ представляет собой суперпозицию стоячих волн. Собственные частоты — $\omega_{nm}=a\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}$, частота основного тона $\omega_{1,0}=\frac{a}{r_0}\mu_1(0)=$ $=2,404\frac{a}{r_0}$. Ниже приводятся первые корни некоторых бесселевых функций

J_0	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5
2,404	3,832	5,135	6,379	7,586	8,78
5,520	7,016	8,417	9,760	11,064	12,339
8,654	10,173	11,620	13,017	14,373	15,700
11,792	13,323	14,796	16,224	17,616	18,982

Однако случай мембраны отличается от случая струны тем, что для последней каждой частоте собственных колебаний соответствует своя форма струны, которая просто разделяется узлами на несколько равных частей. В случае мембраны для определённой частоты соответствует несколько колебательных состояний мембраны с различными положениями узловых линий, т.е. таких линий, на которых амплитуда колебаний равна нулю. Это связано с тем, что каждому собственному значению соответствует несколько линейно независимых собственных функций / в случае круглой мембраны $v^{(1)}_{n,m}$ и $v^{(2)}_{n,m}$ / и каждой линейной комбинации этих функций соответствуют различные положения узловых линий. На рисунке 8 изображены некоторые случаи расположения узловых линий с указанием соответствующей частоты, причём за единицу приняты частоты основного тона / радиусы узловых линий, имеющих вид окружностей, выражены в долях радиуса мембраны/.

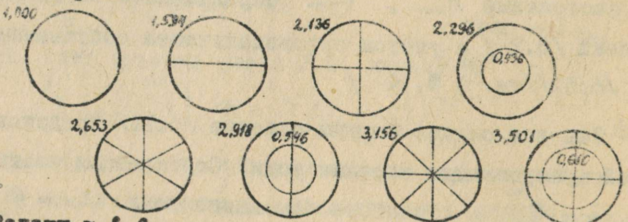


Рис.8.

Задачи к § 6.

1. Найти собственные частоты и собственные функции прямоугольной мембраны с закреплёнными границами.

Ответ: Собственным значением $\lambda_{nm} = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2$ соответствуют нормированные собственные функции $v_{nm}(x,y) = \sqrt{\frac{\pi}{ab}} \sin\frac{n\pi}{a}x \cdot \sin\frac{m\pi}{a}y$ / a, b - стороны мембраны /.

2. Найти поперечные колебания прямоугольной мембраны $0 < x < a$, $0 < y < b$ с закреплённым краем, вызванные

начальным отклонением

$$u(x, y, 0) = A\,xy(a-x)(b-y).$$

<u>Ответ</u>:

$$u(x,y,t) = \frac{16 A^2 a^2 b^2}{\pi^6} \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\frac{2m+1}{a}\pi x \cdot \sin\frac{2n+1}{a}\pi y}{(2m+1)^3\,(2n+1)^3} \times$$
$$\times \cos\left[\pi a t \sqrt{\left(\frac{2m+1}{a}\right)^2 + \left(\frac{2n+1}{b}\right)^2}\right].$$

3. В случае квадратичной мембраны стороной a, собственному значению $\lambda_{nm} = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 (n^2+m^2)$ соответствует собственная функция

$$v_{nm} = \frac{2}{a} \sin\frac{\pi n}{a} x \sin\frac{\pi m}{a} y$$ /см. задачу 1/.

Найти узловые линии в случае собственных значений а/ $\lambda_{11} = 2\left(\frac{\pi}{a}\right)^2$, б/ $\lambda_{12} = 5\left(\frac{\pi}{a}\right)^2$, если профиль определяется функциями v_{12}, v_{21}, $v_{12} \pm v_{21}$, в/ $\lambda_{13} = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 10$ если профиль определяется функциями v_{13}, v_{31}, $v_{31} \pm v_{13}$.

4. Показать, что бесселевы функции $J_{n+\frac{1}{2}}$ могут быть представлены в виде:

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\sin\left(x - \frac{\pi n}{2}\right) P_n\left(\frac{1}{x}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi n}{2}\right) Q_n\left(\frac{1}{x}\right)\right],$$

где $P_n\left(\frac{1}{x}\right)$ - многочлен n-ой степени относительно $\frac{1}{x}$, а $Q_n\left(\frac{1}{x}\right)$ - многочлен $(n-1)$-ой степени. Вычислить $J_{3/2}$, $J_{5/2}$, $J_{7/2}$, $J_{-3/2}$, $J_{-\frac{5}{2}}$!

5. Показать, что функция Бесселя мнимого аргумента является решением уравнения $Z''(x) + \frac{1}{x} Z'(x) - \left(1 + \frac{n^2}{x^2}\right) Z(x) = 0$

Найти разложения функции $I_n(x) = (-i)^n J(ix)$.

6. Показать, что

$$(\lambda^2 - \mu^2) \int_0^{\infty} J_n(\lambda x)\, J_n(\mu x)\, dx =$$
$$= x\left[\mu J(\lambda x) J_n'(\mu x) - \lambda J(\mu x) J_n'(\lambda x)\right],$$

где $J_n'(x) = \frac{d}{dx} J_n(x)$ / I интеграл Ломмеля/Lommel //.

Указание. Написать дифференциальные уравнения для $J_n(\lambda x)$ и $J_n(\mu x)$, вычесть из первого уравнения второе, предварительно умножив первое на $J_n(\mu x)$, второе на $J_n(\lambda x)$.

7. Доказать, что

$$\int_0^x \tau J_n^2(\mu\tau)d\tau = \frac{x^2}{2}\left\{[J_n'(\mu x)]^2 - \left(1-\frac{n^2}{\mu^2 x^2}\right)[J_n(\mu x)]^2\right\}, \quad n\geq 0.$$

/ II интеграл Ломмеля /.

Указание. I интеграл Ломмеля /см.предыдущую задачу/ при переходе к пределу $\lambda\to\mu$ дает:

$$\int_0^x \tau[J_n(\mu\tau)]^2 dx = \frac{x}{2}\left\{x[J_n'(\mu x)]^2 - \frac{1}{\mu}J_n(\mu x)J_n'(\mu x) - xJ_n(\mu x)J_n''(\mu x)\right\}.$$

Предварительно к первой части прибавляется и вычитывается $\mu J_n(\mu x)J_n(\mu x)$, затем обе стороны делятся на $\lambda-\mu$. С помощью дифференциального уравнения Бесселя исключается $J_n''(\mu x)$.

8. Пользуясь результатами 6-ой и 7-ой задач, показать, что собственные функции $J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}r\right)$ ортогональны /6.47/, и вычислить норму /6.48/.

9. Вывести из интегрального представления /6.44'/ для функции J_n представление Гансена / Hansen /

$$J_n(x) = \frac{i^{-n}}{\pi}\int_0^\pi e^{ix\cos\varphi}\cos n\varphi\, d\varphi.$$

10. Из /6.40'/ и представления Гансена вывести равенство

$$J_0(x-y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)J_n(y) = J_0(x)J_0(y) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_n(x)Y_n(y).$$

11. Найти поперечные колебания круглой мембраны с закреплённым краем, вызываемые радиально симметричным начальным распределением отклонений и скоростей.

12. Найти собственные функции и собственные значения мембраны, имеющей форму кругового сектора / границы мембраны закреплены/.

13. Найти функцию $u(\rho,\varphi,t)$, характеризующую колебания мембраны под действием начального импульса K, сосредоточенного в центре круглой мембраны.

Указание. Рассмотреть распределение импульса плотностью

$$K(r)=\begin{cases}\dfrac{K}{2\pi\rho^2}, & 0<r<\rho,\\ 0, & \rho<r<r_0,\end{cases}$$

а затем перейти к пределу $\rho\to 0$.

§ 7. Распространение волн в пространстве.

Будем рассматривать распространение волн в неограниченном пространстве.

1°. Формула Пуассона.

Будем искать решение уравнения колебаний в пространстве

$$u_{tt}=a^2\Delta u \qquad /7.1/$$

при следующих начальных условиях

$$u(x,y,z,0)=\varphi(x,y,z),$$
$$u_t(x,y,z,0)=\psi(x,y,z). \qquad /7.2/$$

Для определения функции u в некоторой точке $M_0=(x_0,y_0,z_0)$ рассмотрим сначала среднее значение на сфере $S_r^{M_0}$ радиуса r с центром в точке M_0 :

$$\bar{u}(r,t;M_0)=\frac{1}{4\pi r^2}\iint_{S_r^{M_0}} u\,dS=\frac{1}{4\pi}\iint_{S_r^{M_0}} u\,d\Omega,$$ /7.3/

где $d\Omega=\frac{dS}{r^2}$ - элемент телесного угла, соответствующий dS или более детально:

$$\bar{u}(r,t;M_0)=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\Big[\int_0^{\pi} u(x_0+r\sin\vartheta_1,\ y_0+r\sin\vartheta\sin\varphi_1,\ z_0+r\cos\vartheta_1,\ t)\times \sin\vartheta\,d\vartheta\Big]\,d\varphi.$$ /7.3'/

Отсюда видно, что

$$u(M_0,t_0)=\bar{u}(0,t_0;M_0).$$ /7.4/

Среднее значение $\bar{u}$, как функция r и t, удовлетворяет однородному уравнению /7.1/ в случае сферической симметрии, т.е. уравнению

$$\bar{u}_{tt}=a^2\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\frac{\partial\bar{u}}{\partial r}\Big).$$ x/ /7.5/

Чтобы доказать это, интегрируем уравнение /7.1/ по объёму шара $K_r^{M_0}$, ограниченного сферой $S_r^{M_0}$:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\iiint_{K_r^{M_0}} u\,dV=a^2\iiint_{K_r^{M_0}}\Delta u\,dV.$$

По теореме Грина, учитывая, что $\Delta u=\operatorname{div}(\operatorname{grad} u)$,

$$\iiint_{K_r^{M_0}}\Delta u\,dV=\iint_{S_r^{M_0}}\operatorname{grad} u\,d\vec{S}$$ / $d\vec{S}$ направлен по внешней нормали /. Таким образом

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\iiint_{K_r^{M_0}} u\rho^2\,d\Omega\,d\rho=a^2\iint_{S_r^{M_0}}\frac{\partial u}{\partial r}\,dS=a^2r^2\iint_{S_r^{M_0}}\frac{\partial u}{\partial r}\,d\Omega.$$

---

x/ Оператор Лапласа в полярных координатах:

$$\Delta=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\frac{\partial}{\partial r}\Big)+\frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\Big(\sin\vartheta\frac{\partial u}{\partial\vartheta}\Big)+\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}.$$

Если продифференцировать последнее выражение по r и разделить на r^2, то

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\iint_{S_r^{M}} u\,d\Omega = \frac{a^2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\iint_{S_r^{M}}\frac{\partial u}{\partial r}\,d\Omega\right).$$

Учитывая, что $\frac{1}{4\pi}\iint_{S_r^{M}}\frac{\partial u}{\partial r}\,d\Omega = \frac{\partial \bar{u}}{\partial r}$, получаем уравнение /7.5/. Введением новой неизвестной

$$v(r,t) = r\bar{u}(r,t)$$

уравнение /7.5/ переходит в уравнение одномерных колебаний

$$v_{tt} = a^2 v_{xx}, \qquad /4.1/$$

общее решение которого по /4.3/ имеет вид

$$v = r\bar{u} = f_1(r+at) + f_2(r-at),$$

или

$$\bar{u} = \frac{1}{r}\left[f_1(r+at) + f_2(r-at)\right]. \qquad /7.6/$$

Решение /7.6/ является суперпозицией двух сферических волн/ поверхностями постоянного смещения являются сферы/, первая волна $\frac{1}{r}f_1(r+at)$ представляет волны стягивающиеся со скоростью a к началу координат $r=0$, а $\frac{1}{r}f_2(r-at)$ - волны, удаляющиеся со скоростью a от начала координат. Амплитуды этих волн в процессе колебания изменяются ввиду наличия множителя $\frac{1}{r}$.

Так как функция $\bar{u}$ при $r=0$ должна быть ограниченной, то

$$f_1(at) = -f_2(-at) = f(at)$$

или

$$\bar{u} = \frac{1}{r}\left[f(r+at) - f(at-r)\right]. \qquad /7.7/$$

Дифференцирование выражения $\bar{u}r$ /7.7/ соответственно по r и t даёт:

$$\frac{\partial(\bar{u}r)}{\partial r} = r\frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \bar{u} = f'(r+at) + f'(at-r)$$

и

$$\frac{\partial(\bar{u}r)}{\partial t} = a\left[f'(r+at) - f'(at-r)\right].$$

Отсюда

$$\frac{\partial(\bar{u}r)}{\partial r} + \frac{1}{a}\frac{\partial(\bar{u}r)}{\partial t} = 2f'(r+at); \qquad /7.8/$$

но с другой стороны по /7.4/, при $r=0$ и $t=t_0$, выражение для $\frac{\partial(\bar{u}r)}{\partial r}$ даёт:

$$\left.\frac{\partial(\bar{u}r)}{\partial r}\right|_{\substack{r=0\\ t=t_0}} = \bar{u}(0,t_0;M_0) = 2f'(at_0).$$

Таким образом, принимая в /7.8/ $t=0$, а $r=at_0$, получаем:

$$u(M_0,t) = \left[\frac{\partial(\bar{u}r)}{\partial r} + \frac{1}{a}\frac{\partial(\bar{u}r)}{\partial t}\right]_{\substack{r=at_0\\ t=0}}$$

или, по /7.3/,

$$u(M_0,t_0) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\iint_{S_r^{M_0}} u\,d\Omega\right) + \frac{r}{a}\iint_{S_r^{M_0}}\frac{\partial u}{\partial t}\,d\Omega\right]_{\substack{r=at_0\\ t=0}}$$

Подставив сюда начальные данные и опуская индекс при M_0 и t_0, получим т.н. формулу Пуассона:

$$u(M,t) = \frac{1}{4\pi a}\left[\frac{\partial}{\partial t}\iint_{S_{at}^M}\frac{\varphi(P)dS}{r} + \iint_{S_{at}^M}\frac{\psi(P)dS}{r}\right] \qquad /7.9/$$

/ P - точка интегрирования /.

2^0. Процесс распространения волн и принцип Гюйгенса / Huygens /.

Положим, что начальное возмущение сосредоточено в некотором ограниченном объёме V с поверхностью σ. Пусть точка M находится вне σ. Если $t < \frac{d}{a}$, где d

кратчайшее расстояние от M до σ, то поверхность интегрирования S_{at}^{M} в /7.9/ находится вне объёма V, т.е. функции φ и ψ, характеризующие начальные возмущения, на поверхности S_{at}^{M} равны нулю, и $u(M,t)=0$. В момент $t=\frac{d}{a}$ поверхность S_{at}^{M} коснётся σ, и передний фронт волны пройдёт через M. Наконец, при $t>\frac{D}{a}$, где D - наибольшее расстояние от M до точек поверхности σ, сфера S_{at}^{M} опять находится вне V / весь объём V будет внутри S_{at}^{M} /, и формула /7.9/ опять даёт $u(M,t)$.

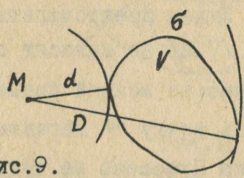


Рис.9.

Моменту $t=\frac{D}{a}$ соответствует прохождение заднего фронта волны через точку M. Таким образом имеет место т.н. принцип Гюйгенса, который утверждает, что возмущение, локализованное в пространстве, вызывает в любой точке M возмущение, локализованное во времени. Для предельного случая, когда начальное состояние сосредоточено в одной точке, его эффект в другой точке концентрируется в определённый момент времени, определяющийся расстоянием между точками.

Общая картина распространения волн является суперпозицией отдельных сферических волн, выходящих из каждой точки пространства, где имеется отличное от нуля начальное возмущение.

Передний фронт волны в данный момент t представляет собою поверхность, отделяющую точки, которые ещё не начали колебаться, от точек, которые уже колеблются.

Все точки этой поверхности имеют одинаковое кратчайшее расстояние от σ, равное at. Эта поверхность будет огибающей для семейства сфер, радиусами at, имеющих центры на поверхности σ. Аналогично - задний фронт волны в момент t образуется совокупностью точек, наибольшее расстояние которых до σ равно at.

3°. Цилиндрические волны.

Будем предполагать, что начальные возмущения φ и ψ /7.2/ не зависят от z, т.е. сохраняют постоянное значение на всякой прямой параллельной оси z. Если передвигать точку M параллельно оси z, то правая часть формулы Пуассона не будет менять своего значения, т.е. функция u также не будет зависеть от z, и формула Пуассона /7.9/ даёт решение уравнения

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) \qquad / 7.10/$$

при начальных условиях:

$$u(x,y,0) = \varphi(x,y), \quad u_t(x,y,0) = \psi(x,y). \qquad /7.11/$$

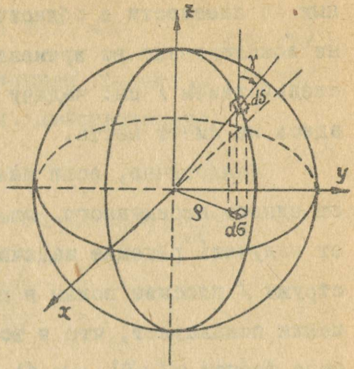
Достаточно рассмотреть всю проблему на плоскости xy. Для этого интегралы формулы /7.9/, которые берутся по сферам, преобразуем в интегралы по кругам на плоскости xy. Так как φ и ψ не зависят от z, надо преобразовать только элементы поверхности. Проекция $d\sigma$ элемента поверхности высшей полусферы dS на поверхность xy выражается следующим образом:

$$d\sigma = dS \cos\gamma,$$

а

$$\cos\gamma = \frac{\sqrt{(at)^2 - \rho^2}}{at} =$$

$$= \frac{\sqrt{(at)^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}}{at}$$



/ $P=(\xi,\eta)$ - переменная точка интегрирования/, то же относится к интегрированию по нижней полусфере. Поэтому интеграл по кругу берётся дважды.

Рис.10

В результате получаем

$$u(M,t) = u(x,y,t) = \frac{1}{2\pi a}\left[\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{\Sigma_{at}^{M}} \frac{\varphi(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{(at)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}} + \iint\limits_{\Sigma_{at}^{M}} \frac{\psi(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{(at)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}\right], \qquad /7.12/$$

где Σ_{at}^{M} – круг радиуса at с центром в точке $M(x,y)$.

Для объяснения физического смысла решения положим, что начальное возмущение сосредоточено в области σ на плоскости xy с контуром l и точка M лежит вне σ. Для моментов времени $t < \frac{d}{a}$, где d - кратчайшее расстояние от M до контура l, круг Σ_{at}^{M} не имеет общих точек с σ, поэтому и $u(x,y,t)=0$. В момент $t=\frac{d}{a}$ в точку M придёт передний фронт волны. Для значений $t > \frac{D}{a}$, где D - наибольшее расстояние от M до l, круг Σ_{at}^{M} будет содержать внутри себя всю область σ и $u(x,y,t)$ не обращается в нуль, но из-за члена $(at)^2$ в знаменателях подинтегральных выражений /7.12/ $u(x,y,t)$ будет стремиться к нулю при беспредельном возрастании t.

Таким образом, влияние начальных возмущений, локализованных на плоскости в области σ, в некоторой точке M, не локализовано во времени и характеризуется длительным последействием / см. задачу 3 /, поэтому и принцип Гюйгенса здесь не имеет места.

Аналогично, если начальные функции зависят только от одного переменного x, то формула Пуассона позволяет получить решение задачи Коши для уравнения колебания струны / плоские волны в пространстве/. Исследование решения показывает, что в точке x после прохождения заднего фронта $(at>D)$ $u(x,t)$ в общем случае не обращается в нуль, а принимает некоторое постоянное значение /см.задачу 4 /.

4°. Решение неоднородного волнового уравнения.

Достаточно рассмотреть неоднородное уравнение

$$u_{tt}=a^2\Delta u+f(x,y,z,t) \qquad /7.13/$$

при нулевых начальных условиях.

Пусть $w(x,y,z,t)$ - решение однородного уравнения

$$w_{tt}=a^2\Delta w \qquad /7.1/$$

при начальных условиях

$$w(x,y,z,t)\big|_{t=\tau}=0,\quad w_t(x,y,z,t)\big|_{t=\tau}=f(x,y,z,\tau), \qquad /7.14/$$

т.е., по /7.9/,

$$w(x,y,z,t;\tau)=\frac{1}{4\pi a}\iint\limits_{S^M_{a(t-\tau)}}\frac{f(\xi,\eta,\zeta,\tau)}{a(t-\tau)}\,dS\,. \qquad /7.9'/$$

Составим функцию

$$u(x,y,z,t)=\int_0^t w(x,y,z,t;\tau)\,d\tau \qquad /7.15/$$

и покажем, что она является решением уравнения /7.13/ при нулевых начальных условиях. Действительно:

$$u(x,y,z,0)=0$$

$$\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial t}=\int_0^t \frac{\partial w(x,y,z,t;\tau)}{\partial t}\,d\tau + w(x,y,z,t;\tau)\Big|_{t=\tau}=$$

$$=\int_0^t \frac{\partial w(x,y,z,t;\tau)}{\partial t}\,d\tau ,$$

отсюда

$$\frac{\partial u(x,y,z,0)}{\partial t}=0$$

$$\frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial t^2}=\int_0^t \frac{\partial^2 w(x,y,z,t;\tau)}{\partial t^2}\,d\tau+\frac{\partial w(x,y,z,t;\tau)}{\partial t}\Big|_{t=\tau}=$$

$$=\int_0^t \frac{\partial^2 w(x,y,z,t;\tau)}{\partial t^2}\,d\tau+f(x,y,z,t)\ , \quad \Delta u=\int_0^t \Delta w(x,y,z,t;\tau)\,d\tau .$$

Следовательно,

$$u_{tt}-a^2\Delta u=\int_0^t (w_{tt}-a^2\Delta w)\,d\tau+f(x,y,z,t)=f(x,y,z,t) .$$

Объединяя формулы /7.9'/ и /7.14/ получаем:

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi a}\int_0^t \Big[\iint_{S^M_{a(t-\tau)}} f(\xi,\eta,\zeta,\tau)\,ds\Big]\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{4\pi a}\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f\left[x+a(t-\tau)\sin\vartheta\cos\varphi,\ y+a(t-\tau)\sin\vartheta\sin\varphi,\ z+a(t-\tau)\cos\vartheta,\ \tau\right]\times$$
$$\times\, a(t-\tau)\,d\varphi\,\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\tau .$$

Вместо τ введём новую переменную интегрирования $r=a(t-\tau)$:

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi a^2}\int_0^{at}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f\left(x+r\sin\vartheta\cos\varphi,\ y+r\sin\vartheta\sin\varphi,\ z+r\cos\vartheta,\ t-\frac{r}{a}\right)\times$$

$$\times\, r\,d\varphi\,\sin\vartheta\, d\vartheta\, dr=\frac{1}{4\pi a^2}\iiint_{K^M_{at}} f\left(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{r}{a}\right)dV . \qquad /7.16/$$

Это выражение называется формулой запаздывающих потенциалов. Характерным является тот факт, что функция, описывающая состояние источников колебаний, берется в момент времени $t-\frac{r}{a}$, предшествующий моменту t, для которого вычисляется u. Разница $\frac{r}{a}$ в моментах времени дает то время, которое нужно для прохождения возмущению из точки источника ξ,η,ζ в точку x,y,z со скоростью a. Отметим, что и формула /7.15/ имеет простой физический смысл, а именно, она показывает, что решение неоднородног уравнения /7.13/ при нулевых начальных условиях является суммой импульсов $w(x,y,z,t,\tau)$ происходящих ввиду наличия свободного члена в /7.14/.

Задачи к § 7.

1. Решить задачу с начальными данными для уравнения колебаний $u_{tt}=a^2\Delta u$ в пространстве, предполагая, что начальная скорость u_t всюду равна нулю, а начальные отклонения $u(x,y,z,0)=\varphi(x,y,z)$ имеют вид

$$\varphi(x,y,z)=\begin{cases}1, & \text{внутри единичной сферы,}\\ 0, & \text{вне единичной сферы.}\end{cases}$$

2. Исходя из формулы Пуассона /7.9/ найти решение уравнения колебаний $u_{tt}=a^2\Delta u$ при центрально-симметричных начальных условиях

$$u(x,y,z,0)=\varphi(r)\ ,\ u_t(x,y,z,0)=\psi(r)$$

/ r - расстояние от центра симметрии/. Определить u как функцию от r и t $[u=u(r,t)]$. Исследовать решение, если начальные возмущения локализованы внутри сферы радиуса R .

<u>Ответ:</u> $\varphi(r,t) = \frac{1}{2R}\left[(r+at)\varphi(r+at) + (r-at)\varphi(r-at) + \right.$

$+\frac{1}{a}\int\limits_{r-at}^{r+at}\psi(x)\,x\,dx$, при $r-at \geq 0$;

$\varphi(r,t) = \frac{1}{2R}\left[(r+at)\varphi(r+at) + (r-at)\varphi(r-at) + \right.$

$+\frac{1}{a}\int\limits_{-r+at}^{at+r}\psi(x)\,x\,dx$, при $r-at \leq 0$.

3. Решить предыдущую задачу как одномерную учитывая, что волновое уравнение в случае центральной симметрии принимает вид

$$u_{tt} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right). \qquad /7.5/$$

<u>Указание</u>. Учесть, что общее решение уравнения /7.5/ имеет вид

$$u = \frac{1}{r}\left[f_1(r+at) + f_2(r-at)\right].$$

Произвольные функции f_1 и f_2 можно определить из начальных условий, и из условия конечности решения при $r=0$.

4. Показать, что если начальные функции φ и ψ зависят только от одного переменного x , то формула Пуассона /7.9/ позволяет найти функцию $u(x,t)$ являющуюся решением уравнения $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ с начальными условиями $u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t(x,0) = \psi(x)$ /см.§ 4, п.2/.

<u>Указание</u>. Ввести сферическую систему координат, направив полярную ось по оси x .

5. Решить неоднородное уравнение $u_{tt} = a^2\Delta u + f(x,y,z,t)$ при нулевых начальных условиях, если в начале координат

находится точечный источник внешней силы $P(t)$, который начинает действовать с момента $t=0$.

<u>Указание</u>: $f(x,y,z,t)=\dfrac{\mathcal{F}(x,y,z,t)}{\rho}$, где $\mathcal{F}(x,y,z,t)$ – плотность внешней силы. В данном случае можно выбрать $\mathcal{F}(x,y,z,t)=\mathcal{F}(r,t)=\begin{cases}0 & r>\varepsilon\\ 3P/4\pi\varepsilon^2 & r<\varepsilon\end{cases}$ $(r^2=x^2+y^2+z^2)$, а затем перейти к пределу $\varepsilon\to 0$.

6. Исходя из формулы запаздывающих потенциалов /7.16/, получить решение уравнения:

$$u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy})+f(x,y,t)$$

при нулевых начальных условиях.

<u>Ответ:</u>

$$u(x,y,t)=\frac{1}{2\pi a}\int_0^t\Big[\iint\limits_{\Sigma^M_{a(t-\tau)}}\frac{f(\xi,\eta,\tau)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-\rho^2}}\,d\xi\,d\eta\Big]d\tau$$

7. Показать, что решение уравнений колебаний

$$u_{tt}=a^2\Delta u,$$

удовлетворяющее начальным условиям $u(x,y,z,0)=\varphi(x,y,z)$, $u_t(x,y,z,0)=\psi(x,y,z)$ $(z\geq 0)$ и граничному условию $u(x,y,0,t)=0$ или $u_z(x,y,0,t)=0$, дается /при $z\geq 0$/ формулой Пуассона /7.9/, если начальные условия продолжить на все пространство нечетно / при $u(x,y,0,t)=0$ /

$$\varphi(x,y,z)=-\varphi(x,y,-z),$$
$$\psi(x,y,z)=-\psi(x,y,-z)$$

или четно /при $u_z(x,y,0,t)=0$ /

$$\varphi(x,y,z)=\varphi(x,y,-z),$$
$$\psi(x,y,z)=\psi(x,y,-z).$$

ГЛАВА III

УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

§ 8. Гармонические функции и интегральные формулы.

1°. Сопряженные дифференциальные выражения.

Рассмотрим дифференциальное выражение второго порядка:

$$L(u) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu \qquad /8.1/$$

где A_{ij}, B_i, C - дважды дифференцируемые функции от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $A_{ij} = A_{ji}$

Назовем дифференциальное выражение

$$M(v) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 (A_{ij} v)}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (B_i v)}{\partial x_i} + Cv \qquad /8.2/$$

сопряженным в выражением $L(u)$.

Непосредственным вычислением можно убедиться, что понятие сопряженности взаимообратное: сопряженным выражением с $M(v)$ будет первоначальное выражение $L(u)$ /см. задачу 1/.

Если

$$M(u) = L(v), \qquad /8.3/$$

то выражение $L(u)$ является самосопряженным. Найдем условия самосопряженности выражения /8.1/. Определение /8.3/ дает:
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \equiv \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 (A_{ij} u)}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (B_i u)}{\partial x_i},$$

или $$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(u\frac{\partial^2 A_{ij}}{\partial x_i\partial x_j}+2\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(u\frac{\partial B_i}{\partial x_i}+2B_i\frac{\partial u}{\partial x_i}\right).$$

Отсюда

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial B_i}{\partial x_i}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 A_{ij}}{\partial x_i\partial x_j},\\&B_i=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j}.\end{aligned}\right\}\qquad /8.4/$$

В математической физике большую роль играет выражение типа $vL(u)-uM(v)$. При помощи формул /5.1/ и /5.2/ найдем

$$vL(u)-uM(v)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[vA_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}-u\frac{\partial^2(A_{ij}v)}{\partial x_i\partial x_j}\right]+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left[vB_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+u\frac{\partial}{\partial x_i}(B_i v)\right]=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[vA_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}+\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial(A_{ij}v)}{\partial x_i}-u\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial(A_{ij}v)}{\partial x_j}\right.$$

$$\left.-\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial(A_{ij}v)}{\partial x_j}\right]+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(B_i vu).$$

Отсюда,

$$vL(u)-uM(v)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}P_i\;, \qquad /8.5/$$

где

$$P_i=v\sum_{j=1}^{n}A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}-u\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial(A_{ij}v)}{\partial x_j}+uvB_i. \qquad /8.5'/$$

2^0. Формула Грина для дифференциальных выражений.

Пусть $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ и $R(x,y,z)$ – функции трех переменных, непрерывные вместе со своими частными производными первого порядка в области V, и на граничной поверхности S, тогда

$$\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV=\iint_S(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS \qquad /8.6/$$

- формула Гаусса-Остроградского / Gauss-Ostrogradski /,
где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ - угловые косинусы внешней нормали кусочно-гладкой поверхности S .

Аналогичная формула имеет место и в общем n-мерном случае:

$$\overbrace{\iiint\cdots\int}^{n}_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial P_i}{\partial x_i}\,dx_1\,dx_2\cdots dx_n=\overbrace{\iint\cdots\int}^{n-1}_{\Gamma}\sum_{i=1}^{n}P_i\cos(nx_i)\,d\Sigma, \qquad /8.7/$$

где Γ - $(n-1)$ -мерная гиперповерхность, ограничивающая n -мерный объем Ω , n - направление внешней нормали к Γ . Конкретно в двухмерном случае:

$$\iint_S\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dS=\int_\sigma(P\cos\alpha+Q\cos\beta)\,d\sigma\ . \qquad /8.8/$$

Или, учитывая, что
$d\vec{\sigma}=d\sigma\left[\cos(\alpha+\frac{\pi}{2}),\ \sin(\alpha+\frac{\pi}{2})\right]=d\sigma(-\sin\alpha,\cos\alpha)=(dx,dy)$.

Применение формул /8.6/ - /8.8/ к дифференциальному выражению $vL(u)-uM(v)$

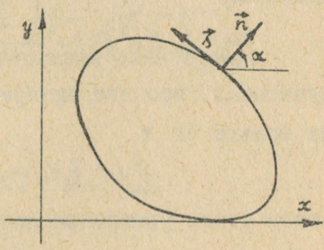


Рис.11.

приводит нас к формуле Грина для дифференциальных выражений. По /8.5/ и /8.7/ получаем:

$$\overbrace{\iiint\cdots\int}^{n}_{\Omega}\left[vL(u)-uM(v)\right]dx_1\,dx_2\cdots dx_n=\overbrace{\iint\cdots\int}^{n-1}_{\Gamma}P_i\cos(nx_i)\,d\Gamma, \qquad /8.9/$$

в двух- и трехмерном случае соответственно:

$$\iint_S\left[vL(u)-uM(v)\right]dS=\int_\sigma\left[P_1\cos(nx)+P_2\cos(ny)\right]d\sigma, \qquad /8.9'/$$

$$\iiint\left[vL(u)-uM(v)\right]dV=\iint_S\left[P_1\cos(nx)+P_2\cos(ny)+P_3\cos(nz)\right]dS \qquad /8.9''/$$

Все P_i должны быть непрерывными вместе со своими частными производными первого порядка - в области Ω вплоть до границы Γ.

3°. Некоторые частные решения уравнения Лапласа.

Большой интерес представляют решения уравнения Лапласа, обладающие сферической или цилиндрической симметрией, т.е. зависящие только от одной переменной r или ρ /r - расстояние от центра симметрии, ρ - от оси симметрии/.

Исходим из уравнения Лапласа $\Delta u=0$ в сферических координатах

$$\Delta u \equiv \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial u}{\partial\vartheta}\right)=0$$

или, учитывая, что нас интересует тот случай, когда u зависит только от r :

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du}{dr}\right)=0.$$

Решением этого уравнения является функция

$$u=u(r)=-\frac{C_1}{r}+C_2.$$

Полагая $C_1=-1$ и $C_2=0$, получаем функцию

$$u_0=\frac{1}{r}, \qquad /8.10/$$

которую называют фундаментальным решением уравнения Лапласа в пространстве. Эта функция удовлетворяет уравнению Лапласа всюду, кроме точки $r=0$. С точностью до постоянного множителя пропорциональности она совпадает с полем точечного заряда q, помещенного в начале координат /в системе $CGSE$ потенциал заряда q : $\frac{q}{r}$, в рациональной системе $\frac{q}{4\pi r}$ /. Рассматривая движение несжимаемой жидкости с потенциалом u_0 и учитывая при этом, что скорость движения $\vec{v} = -\operatorname{grad} u_0 = \frac{\vec{r}}{r^3}$, видим, что в начале координат находится источник силой 4π /в единицах объема/. Действительно, объем жидкости Q, которая вытекает за единицу времени через поверхность сферы произвольного радиуса R с центром в начале координат, равен $\iint\limits_{S_R^0} \frac{\vec{R}}{r^3} d\vec{S} = \frac{1}{R^2} \iint\limits_{S_R^0} dS = 4\pi$. По этой аналогии будем говорить, что фундаментальное решение $u_0 = \frac{1}{r}$ представляет поле точечного источника мощномтью 4π.

Рассматривая уравнение Лапласа в цилиндрических координатах

$$\Delta u \equiv \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

получаем решение, обладающее осевой симметрией:

$$u(\rho) = C_1 \ln \rho + C_2$$

Выбирая

$$C_1 = -1 \quad \text{и} \quad C_2 = 0,$$

будем иметь

$$u_0 = \ln \frac{1}{\rho}. \qquad /8.11/$$

Функция $u_0(\rho)$ называется фундаментальным решением уравнения Лапласа на плоскости. С точностью до постоянной она представляет потенциал равномерно заряженной прямой и удовлетворяет уравнению Лапласа всюду, кроме точек $\rho = 0$.

Аналогично можно получить фундаментальное решение уравнения Лапласа в n -мерном пространстве/см.задачу 3/.

4°. Интегральная формула для уравнения Пуассона в трех- и двухмерном пространстве.

Исходим из формулы Грина /8.9'/. Если $L(u)$ дифференциальное выражение Лапласа Δu, т.е.

$$L(u) = \Delta u$$

то легко проверить, что сопряженное выражение

$$M(v) = \Delta v$$

т.е. дифференциальное выражение Лапласа самосопряженное. По общим формулам /8.5/ и /8.5'/ найдем:

$$v\Delta u - u\Delta v = \frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(v\frac{\partial u}{\partial z} - u\frac{\partial v}{\partial z}\right),$$

и отсюда по формуле Грина /8.9"/

$$\iiint\limits_V (v\Delta u - u\Delta v)\,dV = \iint\limits_S \Big\{ v\Big[\frac{\partial u}{\partial x}\cos(nx) + \frac{\partial u}{\partial y}\cos(ny) + \frac{\partial u}{\partial z}\cos(nz)\Big] -$$
$$- u\Big[\frac{\partial v}{\partial x}\cos(nx) + \frac{\partial v}{\partial y}\cos(ny) + \frac{\partial v}{\partial z}\cos(nz)\Big]\Big\} dS,$$

или

$$\iiint\limits_V (v\Delta u - u\Delta v)\,dV = \iint\limits_S \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right) dS \qquad /8.12/$$

Эта формула применима для всех областей V ограниченных кусочно - гладкими поверхностями S, если в области V и на границе S функции u и v непрерывные вместе со своими первыми и вторыми производными. Пусть функция $u(x,y,z) = u(M)$ удовлетворяет этим требованиям, а v является фундаментальным решением уравнения Лапласа пространстве: $v = \frac{1}{r_{M_0M}}$, где M_0 некоторая фиксированная точка внутри области V. Так как функция $v(M) \to \infty$, если $M \to M_0$, то формула Грина /8.12/ не-применима для всей области V. Поэтому выделим из V небольшую шаровую область $K_\varepsilon^{M_0}$ с центром в M_0, радиусом ε, обозначим оставшую часть области V через V_1. V_1 ограничена кусочно - гладкой поверхностью S_1, которая состоит из S и сферы $S_\varepsilon^{M_0}$. К полученной области V_1 применима формула /8.12/. Таким образом:

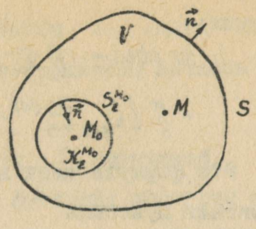


Рис.12.

$$\iiint\limits_{V_1}\left[\frac{1}{r_{M_0M}}\Delta u(M)-u(M)\Delta\frac{1}{r_{M_0M}}\right]dV(M)=$$

$$=\iint\limits_{S}\left[\frac{1}{r_{M_0M}}\frac{\partial u(M)}{\partial n}-u(M)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{M_0M}}\right)\right]dS(M)+\iint\limits_{S_\varepsilon^{M_0}}\left[\frac{1}{r_{M_0M}}\frac{\partial u(M)}{\partial n}-u(M)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{M_0M}}\right)\right]dS(M)$$

Учитывая, что во втором интеграле $\frac{\partial}{\partial n}=-\frac{\partial}{\partial r}$, найдем:

$$-\iint\limits_{S_\varepsilon^{M_0}}u(M)\frac{\partial}{\partial n_1}\left(\frac{1}{r_{M_0M}}\right)dS(M)=-\iint\limits_{S_\varepsilon^{M_0}}\frac{1}{r^2_{M_0M}}u(M)dS(M)=$$

$$=-\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{S_\varepsilon^{M}}u(M)dS(M)=-4\pi\,\overline{u}(M_0,\varepsilon),$$

где $\overline{u}(M_0,\varepsilon)$ - среднее значение u на сфере $S_\varepsilon^{M_0}$, и

$$\iint\limits_{S_\varepsilon^{M_0}}\frac{1}{r_{M_0M}}\frac{\partial u(M)}{\partial n}dS(M)=-\frac{1}{\varepsilon}\iint\frac{\partial u}{\partial r}dS=-4\pi\varepsilon\,\overline{\frac{\partial u(M_0,\varepsilon)}{\partial r}}.$$

Если перейдем к пределу $\varepsilon\to 0$, то

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\overline{u}(M_0,\varepsilon)=u(M_0),\qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\,\overline{\frac{\partial u(M_0,\varepsilon)}{\partial r}}=0,$$ а

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iiint\limits_{V-K_\varepsilon^{M_0}}\frac{1}{r_{MM_0}}\Delta u(M)\,dV(M)=\iiint\limits_{V}\frac{1}{r_{MM_0}}\Delta u(M)\,dV(M)$$

/определение несобственного интеграла, см, § 10 п.2/.

13.

Таким образом, учитывая что в области V, $\Delta v = 0$, получим:

$$4\pi u(M_0) = -\iiint_{V_0} \frac{1}{r_{M_0M}} \Delta u(M)\, dV(M) + $$
$$+ \iint_S \left[\frac{1}{r_{M_0M}} \frac{\partial u(M)}{\partial n} - u(M) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{M_0M}}\right)\right] dS(M). \qquad /8.13/$$

Эта формула дает нам возможность получить решение уравнения Пуассона

$$\Delta u(M) = f(M)$$

или Лапласа

$$\Delta u(M) = 0$$

в любой точке M_0 внутри области V, если известны значения функции и ее нормальной производной на границе S.

Аналогично можно получить интегральную формулу в двухмерном случае, если в формуле Грина

$$\iint_{\sigma} (v\Delta u - u\Delta v)\, dS = \int_{\sigma} \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right) d\sigma \qquad /8.12'/$$

v взять в виде фундаментального решения уравнения Лапласа на плоскости

$$v = \ln \frac{1}{\rho_{M_0M}}$$

/ M_0 - фиксированная точка на плоскости/.

В результате получается

$$2\pi u(M_0) = -\iint_S \ln \frac{1}{r_{M_0M}} \Delta u(M)\, dS(M) + $$
$$+ \int_{\sigma} \left[\ln \frac{1}{r_{M_0M}} \frac{\partial u(M)}{\partial n} - u(M)\frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{r_{M_0M}}\right] d\sigma(M). \qquad /8.14/$$

5°. Основные свойства гармонических функций.

Функция, непрерывная сосвоими производными первого и второго порядка в некоторой области D /двух- или трехмерной/ и удовлетворяющая там уравнению Лапласа

$$\Delta u = 0,$$

называется гармонической в области D функцией.

1-ое свойство гармонических функций: интеграл от нормальной производной гармонической функции по границе области равен нулю.

Применив формулу Грина /8.12/ к гармонической в области V функции u и к гармонической функции $v = 1$, получим:

$$\iint \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0 \qquad /8.15/$$

2-ое свойство: значение гармонической функции в любой точке внутри области выражается через значения этой функции и ее нормальной производной на поверхности области следующей формулой:

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_S \left[\frac{1}{r_{M_0M}} \frac{\partial u(M)}{\partial n} - u(M) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r_{M_0M}}\right] dS(M) \qquad /8.16/$$

/интегральная формула /8.13/ в случае $\Delta u = 0$ /.

3-ье свойство: значение гармонической функции в центре сферы равно среднему арифметическому значению этой функции на поверхности сферы, т.е. равно интегралу от значений функции по поверхности сферы, деленному на площадь этой поверхности:

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint\limits_{S_R^{M_0}} u(M) dS(M) . \qquad /8.17/$$

Для доказательства применим интегральную формулу /8.16/ к сфере с центром в M_0 и радиусом R $(S_R^{M_0})$. В данном случае направление внешней нормали n совпадает с направлением радиуса сферы, так что:

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{M_0M}}\right) = -\frac{1}{r^2_{M_0M}}$$

и по /8.16/:

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_R^{M_0}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} + \frac{1}{r^2}u\right)dS =$$

$$= \frac{1}{4\pi R}\iint\limits_{S_R^{M_0}}\frac{\partial u}{\partial n}\,dS + \frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{S_R^{M_0}}dS\,.$$

По /8.15/ первый интеграл равен нулю.

4-ое свойство: функция, гармоническая внутри области и непрерывная вплоть до границы области, достигает своего наибольшего и наименьшего значения только на границе области, кроме случая, когда эта функция есть постоянная.

Пусть $u(M)$ достигает наибольшего значения в некоторой внутренней точке M_1 той области V, где $u(M)$ - гармоническая функция. Опишем сферу $S_\rho^{M_1}$, принадлежащую V, применим формулу /8.17/ и заменим подинтегральную функцию u ее наибольшим значением $u_\rho^{(max)}$ на сфере $S_\rho^{M_1}$. Таким образом получим:

$$u(M_1) \le u_\rho^{(max)},$$

причем знак равенства имеет место только в том случае, когда u на сфере $S_\rho^{M_1}$ есть постоянная равная $u(M_1)$. Поскольку, по предположению, $u(M_1)$ есть наибольшее значение $u(M)$ в V, то можно утверждать, что имеет место:

$$u(M_1) = u_\rho^{max}.$$

Следовательно, $u(M)$ равна постоянной внутри V на поверхности всякой сферы с центром в M_1, принадлежащей V. Отсюда следует и постоянство $u(M)$ во всей области V.

Пусть N любая точка, лежащая внутри V. Нам надо доказать, что $u(N) = u(M_1)$. Соединим M_1 с N линией l конечной длины, лежащей внутри V, и пусть d - кратчайшее расстояние l от границы S области V $(d>0)$. В силу доказанного $u(M)$ равна постоянной $u(M_1)$ внутри сферы $S_d^{M_1}$. Пусть M_2 - точка пересечения линии l и $S_d^{M_1}$. Так как $u(M_2)=u(M_1)$ то $u(M)=u(M_1)$ и внутри сферы $S_d^{M_2}$. Аналогично, $u(M)=u(M_1)$ и внутри сферы $S_d^{M_3}$, где M_3 - точка пересечения линии l и поверхности $S_d^{M_2}$. Путем построения конечного числа таких сфер мы увидим, что $u(M_1)=u(N)$

Таким образом, гармоническая функция не может иметь внутри V максимума. Аналогично можно показать, что внутри V $u(M)$ не может иметь и минимума.

Совершенно аналогичные свойства имеют место и для гармонических функций на плоскости:

$$\int_l \frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma = 0 \qquad /8.15'/$$

$$u(M_0) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \left[\ln\frac{1}{r_{M_0M}}\frac{\partial u(M)}{\partial n} - u(M)\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{r_{M_0M}}\right]d\sigma(M) \qquad /8.16'/$$

$$u(M_0) = \frac{1}{2\pi R}\int_{R_R^{M_0}} u(M)\, d\sigma(M) \qquad /8.17'/$$

/ $R_R^{M_0}$ - окружность с центром в M_0 и радиусом R

6°. Основные типы краевых задач для уравнения Лапласа.

Как уже отмечено в третьем параграфе типичными для уравнений эллиптического типа являются краевые задачи. Сформулируем важнейшие краевые задачи для уравнения Лапласа:

$$\Delta u = 0$$

Основной задачей в теории потенциала является т.н. задача Дирихле /Dirichlet /, или первая краевая задача, по определению функции, гармонической в области V, при заданных значениях ее на граничной поверхности S:

$$u|_S = f(M) \qquad /8.18/$$

Область V может быть или многосвязаной, или односвязаной. Если область D конечная, то мы имеем внутреннюю задачу Дирихле, если бесконечная /вне поверхности S / - внешнюю задачу Дирихле. В последней задаче ставится еще условие, чтобы решение $u(M)$ стремилось к нулю при беспредельном удалении точки M.

Аналогично формулируется задача Дирихле для плоской области, но в случае внешней задачи на плоскости требуется, чтобы функция $u(M)$ имела конечный предел при беспредельном удалении точки M.

Часто встречается, особенно в гидродинамике, вторая краевая задача, или задача Неймана / Neuman/, когда на граничной поверхности S задается значение нормальной производной

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = f(M) \qquad /8.19/$$

/где по /8.15/ $\iint_S f(M)\,dS = 0$ /. Например, при движении твердого тела в идеальной несжимаемой жидкости предельное условие /8.19/ выражает совпадение нормальной составляющей скорости точки M поверхности (S) тела и жидкой частицы, прилегающей к точке M. Задача Неймана может быть сформулирована и для двухмерного уравнения Лапласа.

Более редкой является третья краевая задача, когда на границе

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = h\left(u\big|_S - f(M)\right) \qquad /8.20/$$

Аналогичные краевые задачи можно сформулировать и для уравнения Пуассона

$$\Delta u = \varphi(x,y,z).$$

Однако, решение таких задач сводится к решению соответствующих краевых задач для уравнения Лапласа. Для этого нужно искать решение уравнения Пуассона в виде:

$$u(x,y,z) = v(x,y,z) + u_0(x,y,z),$$

где $v(x,y,z)$ - некоторое частное решение уравнения Пуассона, а $u_0(x,y,z)$ - уравнения Лапласа, выбранное так, чтобы краевые условия задачи были выполнены. Частное решение v можно получить из интегральной формулы /8.13/

$$v(M_0) = -\iiint_V \frac{1}{r_{M_0M}}\,\varphi(M)\,dV(M) \qquad /8.21'/$$

или в двухмерном случае из формулы /8.14/

$$v(M_0) = -\iint_V \ln\frac{1}{r_{M_0M}}\,\varphi(M)\,dV(M). \qquad /8.21''/$$

7°. Единственность решений задач Дирихле и Неймана.

Рассмотрим сначала внутреннюю задачу Дирихле. Воспользуемся четвертым свойством гармонических функций. Предположим, что существуют две функции $u_1(M)$ и $u_2(M)$, гармонические в области V и принимающие на граничной поверхности S одни и те же значения $\varphi(M)$. Тогда разность $v(M)=u_1(M)-u_2(M)$ будет также удовлетворять внутри V уравнению Лапласа, т.е. будет гармонической функцией и ее предельные значения на поверхности S везде будут равны нулю. Отсюда, в силу четвертого свойства гармонических функций, следует, что $v(M)$ обращается в нуль тождественно во всей области V, ибо в противном случае она должна была бы достигать внутри V положительного наибольшего значения или отрицательного наименьшего значения, что невозможно. Таким образом, два решения $u_1(M)$ и $u_2(M)$ задачи Дирихле должны совпадать во всей области V.

Что касается задачи Неймана, то отметим, что любая постоянная есть гармоническая функция, удовлетворяющая предельному условию:

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S=0,$$

откуда видно, что если к решению задачи Неймана добавить произвольную постоянную, то полученная сумма также будет решением задачи Неймана с теми же предельными значениями $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S$, т.е. решение задачи Неймана определяется с точностью до постоянного слагаемого[x].

[x] Строго говоря, нужно еще доказать, что всякие два решения задачи Неймана могут различаться друг от друга только на постоянное слагаемое.

В случае внешней задачи Дирихле для единственности решения является существенным требование, чтобы $u(M)$ стремилась к нулю в бесконечности $\lim\limits_{M\to\infty} u(M) = 0$.

В этом можно убедиться на следующем простом примере: пусть требуется решить внешнюю краевую задачу для сферы S_R^0 радиуса R с постоянным граничным условием $u|_{S_R^0} = f_0 - const$. Опуская условие в бесконечности, видим, что решениями задачи могут служить функции $u_1 = f_0$ и $u_2 = f_0 \frac{R}{r}$, а также любая функция

$$u = \alpha u_1 + \beta u_2 \quad , \text{ где } \quad \alpha + \beta = 1 .$$

Докажем теперь единственность внешней краевой задачи. Предполагая существование двух решений u_1 и u_2, видим, что их разность $v = u_1 - u_2$ является решением внешней задачи Дирихле при нулевых краевых условиях. Поскольку $\lim\limits_{M\to\infty} v(M) = 0$, то для произвольного $\varepsilon > 0$ можно указать такое R, что $|u(M)| < \varepsilon$ при $r \geq R$. Если точка M' лежит внутри области D' /рис.13/, заключенной между граничной поверхностью S и сферой S_r^0 $(r \geq R)$, то $|v(M')| < \varepsilon$, так как гармоническая функция достигает максимального и минимального значения на границе области.

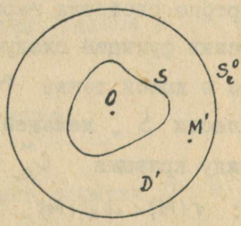


Рис. 13.

В силу произвольности ε, заключаем, что $v \equiv 0$ в области D', а также во всей области D / вне поверхности S /.

Для единственности внешней задачи Дирихле на плоскости является существенным требование, что решение $u(M)$ должно быть ограниченным в бесконечности: $\lim\limits_{M\to\infty} u(M) = N$.

Пусть имеем два решения задачи Дирихле $u_1(M)$ и $u_2(M)$, так что $\lim\limits_{M\to\infty} u_1(M) = N_1$ и $\lim\limits_{M\to\infty} u_2(M) = N_2$. Отсюда, $v = u_1 - u_2$ удовлетворяет на границе l нулевым краевым условиям $v|_l = 0$ и $\lim\limits_{M\to\infty} |v| \le N \le N_1 + N_2$. Возьмем точку M_0 внутри l и окружность $C_R^{M_0}$ радиуса R с центром в точке M_0, лежащую целиком внутри кривой l. Пусть $C_{R_1}^{M_0}$ - окружность радиуса R_1, заключающая целиком контур l /рис. 14/. Функция

$$u_{R_1} = N \frac{\ln \frac{r}{R}}{\ln \frac{R_1}{R}}$$

есть гармоническая функция, равная N на окружности $C_{R_1}^{M_0}$ и положительная на l. Из четвертого свойства гармонических функций следует, что в любой точке M области S, лежащей между кривыми $C_{R_1}^{M}$ и l: $v(M) < u_{R_1}(M)$.

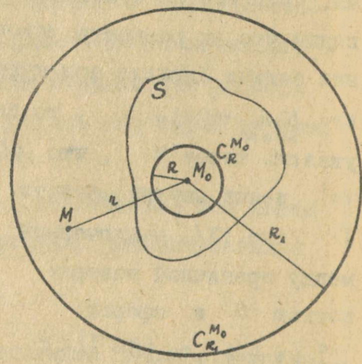


Рис.14.

Фиксируем точку M и будем неограниченно увеличивать R_1. Очевидно, что $\lim\limits_{R_1\to\infty} u_{R_1}(M) = 0$. Отсюда следует, что $v(M) = 0$. Тем самым, ввиду произвольности точки M, доказана единственность поставленной задачи.

Задачи к § 8.

1. Пусть $M(v)$ дифференциальное выражение сопряженное с выражением $L(u)$ [/8.2/]. Доказать, что $L(u)$ – выражение, сопряженное с $M(v)$.

Указание. Выразить $M(v)$ в виде

$$M(v)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\bar{A}_{ij}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}\bar{B}_i\frac{\partial v}{\partial x_i}+Cv,$$

и по /8.2/ найти сопряженное выражение с $M(v)$.

2. Исходя из формулы /8.6/ вывести так называемую первую формулу Грина:

$$\iiint\limits_V u\Delta v\,dV=\iint\limits_S u\frac{\partial v}{\partial n}\,ds-\iiint\limits_V\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)dV$$

Указание. Выбирать $P=u\frac{\partial v}{\partial x}$, $Q=u\frac{\partial v}{\partial y}$, $R=u\frac{\partial v}{\partial z}$.

3. Найти центрально – симметрическое решение n-мерного уравнения Лапласа

$$u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2}+u_{x_3x_3}+\dots+u_{x_nx_n}=0$$

/фундаментальное решение уравнения Лапласа в n-мерном пространстве/.

Указание. Искать решение в виде:
$u=(x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2)^{\alpha}$.

4. Показать, что интегральная формула /8.13/ справедлива и для внешней, относительно поверхности S, области.

Указание. Рассматривать область V_1 между поверхностью S и сферой S_R столь большого радиуса, что поверхность S находится целиком внутри S_R; центр сферы - начало координат. Затем перейти к пределу $R \to \infty$ при этом выяснится, что на сфере радиуса R должны имет[ь] место следующие неравенства:

$$u(M)\Big|_{S_R} \le A \quad , \quad \frac{\partial u(M)}{\partial n}\Big|_{S_R} \le B \ .$$

5. Показать, что решение внутренней задачи Дирихле устойчиво.

Указание. Использовать четвертое свойство гармонических функций.

6. Найти решение внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа при заданных краевых условиях на окружност[и] радиуса а с центром в начале координат:

$$а)\ u\big|_{\rho=a} = A \ ,$$

$$б)\ u\big|_{\rho=a} = A\cos\varphi ,$$

$$в)\ u\big|_{\rho=a} = A\,x\,y$$

7. Решить внутреннюю задачу Неймана для круга C_ρ^a радиуса a с центром в точке $\rho=0$ при следующих частных случаях:

$$а)\ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{C_\rho^a} = A$$

$$б)\ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{C_\rho^a} = Ax$$

$$в)\ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{C_\rho^a} = A\sin\varphi + B\sin^3\varphi \ .$$

Найти неправильно поставленную задачу.

Указание. Должно выполняться условие $\int\limits_{C_\rho^a} \frac{\partial u}{\partial n}\, dS = 0$.

8. Найти решение уравнения Пуассона $\Delta u = 1$ внутри круга радиуса $\rho=a$, если $u_{\rho=a}=0$.

9. Найти решения

а/ уравнения $\Delta u = 1$, б/ уравнения $\Delta u = Ar + B$

внутри сферы S_a^0, если на сфере выполняется граничное условие $u|_{r=a} = 0$.

§ 9. Метод Грина.

1^0. Функция Грина для уравнения Лапласа /трехмерный случай/.

Для всякой функции u, которая непрерывна вместе с первым производным в замкнутой области V ограниченной поверхностью S, имеет место интегральная формула:

$$u(M_0) = -\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_V \frac{\Delta u}{r_{M_0M}}\,dV(M) + \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \left[\frac{1}{r_{M_0M}}\frac{\partial u(M)}{\partial n} - u(M)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{M_0M}}\right)\right]dS(M) \qquad /8.13/$$

Если u гармоническая функция, то объемный интеграл равен нулю; если же $u(M)$ удовлетворяет уравнению Пуассона, то объемный интеграл является известной функцией $\Delta u = f(x,y,z)$. Но интегральная формула недостаточна для получения решений задач Дирихле и Неймана, так как для определения гармонической функции u в точке M_0 нужно знать на поверхности S значение функции u и ее нормальной производной $\frac{\partial u}{\partial n}$. Выведем формулу с помощью которой можно получить решения задач Дирихле и Неймана.

Пусть $\mathcal{H}(M)$ некоторая гармоническая функция, не имеющая особенностей в области V и на границе этой области.

Тогда по формуле Грина /8.12/

$$\iiint\limits_V (u\Delta H - H\Delta u)\,dV = \iint\limits_S \left(u\frac{\partial H}{\partial n} - H\frac{\partial u}{\partial n}\right) dS,$$

и отсюда,

$$u(M_0) = \iint\limits_S \left(G\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial G}{\partial n}\right) dS - \iiint\limits_V \Delta u\, G\, dV, \qquad /9.1/$$

где

$$G(M, M_0) = H + \frac{1}{4\pi r_{M_0M}}. \qquad /9.2/$$

В области V функция Грина удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta G = 0$$

всюду, кроме точки $M = M_0$, где она имеет особенность типа $\frac{1}{4\pi r}$.

Формула /9.1/ дает решение задачи Дирихле, если G на границе S равняется нулю. Для решения задачи Неймана нужно, чтобы второй член поверхностного интеграла/9.1/ отпал. Этого мы можем достичь наложением на H соответствующих граничных условий.

В случае задачи Дирихле нужно определить H как гармоническую функцию в области V и на границе S, т.е.

$$\Delta H = 0,$$

которая на границе S имеет значение

$$H|_S = -\frac{1}{4\pi r_{M_0M}}. \qquad /9.3/$$

В таком случае $G|_S = 0$

и решение задачи Дирихле дается формулой:

$$u(M_0) = -\iiint\limits_V \Delta u(M)\, G(M, M_0)\, dV(M) - \iint\limits_S u(M) \frac{\partial G(M, M_0)}{\partial n} dS(M), \quad /9.4/$$

где $u(M)$ на границе S – заданная граничным условием функция.

В случае Неймана гармоническая функция H должна удовлетворять граничным условиям:

$$\left.\frac{\partial H}{\partial n}\right|_S = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\partial n}\frac{1}{r_{M_0 M}} + A, \quad /9.3'/$$

где постоянная A выбирается так, чтобы /9.1/ давало правильный результат, если $u=1$; тогда $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ и формула /9.1/ дает:

$$1 = -\iint\limits_S A\, dS \quad \text{, т.е.} \quad A = -\frac{1}{S}$$

/ S – площадь поверхности S /. Тогда

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_S = -\frac{1}{S}$$

и решение задачи Неймана имеет вид:

$$u(M_0) = -\iiint\limits_V \Delta u\, G\, dV + \iint\limits_S G \frac{\partial u}{\partial n} dS + \frac{1}{S}\iint\limits_S u\, dS =$$
$$= -\iiint\limits_V \Delta u\, G\, dV + \iint\limits_S G \frac{\partial u}{\partial n} dS + C \quad /9.5/$$

/ C – произвольная постоянная/.

Таким образом функция Грина для уравнения Лапласа является функцией двух точек M и M_0 /M – точка влияния, M_0 – точка источника/, удовлетворяющей следующим условиям: 1/ функция $G(M, M_0)$ есть гармоническая функция точки M во всей области V, исключая точку M_0; 2/ Функция $G(M, M_0)$, как функция точки M, удовлетворяет: а/ для задачи Дирихле – условию

$$\mathcal{G}(M, M_0)\big|_S = 0,$$

б/ для задачи Неймана – условию

$$\frac{\partial \mathcal{G}(M, M_0)}{\partial n}\Big|_S = A = -\frac{1}{S};$$

3/ В области V функция Грина допускает представление

$$\mathcal{G}(M, M_0) = \mathcal{H}(M, M_0) + \frac{1}{4\pi r_{M_0 M}},$$

где $\mathcal{H}(M, M_0)$ – регулярная гармоническая функция в области V.

2°. Функция Грина для уравнения Лапласа /двухмерный случай/.

Исходя из двухмерной интегральной формулы

$$u(M_0) = -\frac{1}{2\pi}\iint_S \frac{\Delta u}{r_{M_0 M}}\, dS(M) +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \left[\ln\frac{1}{r_{M_0 M}}\frac{\partial u(M)}{\partial n} - u(M)\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{r_{M_0 M}}\right], \qquad /8.14/$$

можно аналогично вывести двухмерную функцию Грина $\mathcal{G}(M, M_0)$ как функцию двух точек M и M_0. Она должна удовлетворять следующим условиям:

1/ $\mathcal{G}(M, M_0)$ есть гармоническая функция точки M во всей области, исключая точку M_0.

2/ $\mathcal{G}(M, M_0)$ удовлетворяет краевым условиям:

а/ в случае задачи Дирихле

$$\mathcal{G}(M, M_0)\big|_\sigma = 0,$$

б/ в случае задачи Неймана

$$\frac{\partial \mathcal{G}(M, M_0)}{\partial n}\Big|_\sigma = A = -\frac{1}{l}$$

/ l – длина кривой σ /.

3/ В области S функция Грина выражается суммой:

$$G(M,M_0)=H(M,M_0)+\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_0}, \qquad /9.6/$$

где $H(M,M_0)$ - гармоническая функция точки M, удовлетворяющая на границе σ области S следующим условиям:

$$H(M,M_0)\big|_\sigma=-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{MM_0}} \qquad /9.7/$$

/задача Дирихле/, или

$$\frac{\partial H(M,M_0)}{\partial n}\bigg|_\sigma=-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{r_{MM_0}}-\frac{1}{l} \qquad /9.8/$$

/задача Неймана/.

Если функция Грина найдена, то решение задачи Дирихле и Неймана сводится к вычислению определенных интегралов, зависящих от параметра M.

$$u(M_0)=-\iint\limits_S \Delta u(M)\,G(M,M_0)\,dS(M)-\int\limits_\sigma u(M)\,\frac{\partial G(M,M_0)}{\partial n}\,d\sigma(M) \qquad /9.9/$$

/задача Дирихле/.

$$u(M_0)=-\iint\limits_S \Delta u(M)\,G(M,M_0)\,dS(M)+\int\limits_\sigma \frac{\partial u(M)}{\partial n}\,G(M,M_0)\,d\sigma(M) \qquad /9.10/$$

/задача Неймана/.

Остановимся еще раз на определении функции Грина $G(M,M_0)$. Она определяется как в трехмерном, так и в двухмерном случае при помощи функции $H(M,M_0)$, являющейся решением первой краевой задачи /функция Грина для задачи Дирихле/ или второй краевой задачи /функция Грина для задачи Неймана/ для уравнения $\Delta H=0$ с краевыми условиями /9.3/ или /9.4/ /трехмерная задача/. Может создаться впечатление, что имеет место порочный круг. Для нахождения функций $u(M_0)$, например для решения задачи Дирихле, надо найти функцию $\mathcal{H}$ – решение той же задачи. На самом деле порочного круга нет, так как, зная функцию Грина, можем решить краевую задачу с произвольными граничными значениями, в то время как для нахождения самой функции G достаточно решить краевую задачу для той же области, но со специальными граничными значениями //9.3/, /9.4/, /9.9/, /9.10//, что в ряде случаев значительно проще.

3°. Функция Грина для сферы /задача Дирихле/.

Найдем функцию Грина для внутренней задачи Дирихле.

Исходим из электростатической интерпретации функции Грина. В рациональной системе единиц потенциал единичного точечного заряда $\frac{1}{4\pi r}$, если такой заряд находится внутри заземленной проводящей поверхности S, то он индуцирует на проводящей поверхности поле зарядов, потенциал которого $\mathcal{H}$ является гармонической функцией внутри и вне поверхности S. Таким образом функция Грина для задачи Дирихле

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi r_{MM_0}} + \mathcal{H}(M, M_0)$$

представляет потенциал в точке M точечного заряда, помещенного в точку M_0, внутри заземленной проводящей поверхности S. /Потенциал на S равен нулю: $G(M, M_0)|_S = 0$/. Следовательно, построение функции Грина сводится к определению индуцированного поля.

Наиболее распространенным методом построения функции источника является метод электростатических изображений.

Идея этого метода состоит в том, что при построении функции источника индуцированное поле $\mathcal{H}$ представляется как поле зарядов, расположенных вне поверхности S и выбираемых таким образом, чтобы выполнялось условие

$$\mathcal{H}|_S = -\frac{1}{4\pi r_{MM_0}}.$$

Эти заряды называются электростатическими изображениями единичного заряда, помещенного в точку M_0.

Пусть дана теперь сфера S_R^0 радиуса R с центром в точке O Найдем для нее функцию Грина. Как отмечено, проблема сводится к определению потенциала поля зарядов, индуцированных на заземленной сфере S_R^0 единичным зарядом, помещенным в точку M_0.

Обозначим /см.рис.15/:

$OM_0 = \rho_0$, $PM_0 = r_0$,

$OM_1 = \rho_1$, $PM_1 = r_1$,

где P — произвольная точка на сфере, а M_1 точка, сопряженная с M_0, M_1 находится на радиусе, проходящем через M_0 на расстоянии ρ_1 так что

$$\rho_1 \rho_0 = R^2. \qquad /9.11/$$

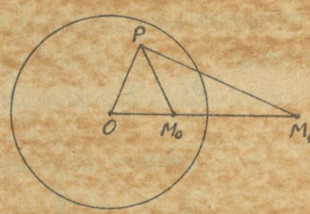


Рис. 15

Рассмотрев подобные треугольники OPM_0 и OPM_1 /угол O общий, а образующее его стороны пропорциональны $\frac{\rho_0}{R} = \frac{R}{\rho_1}$ /, можно написать

$$\frac{r_0}{r_1} = \frac{\rho_0}{R} = \frac{R}{\rho_1}. \qquad /9.12/$$

Из пропорции /9.12/ получаем:

$$r_0 = \frac{\rho_0}{R} r_1 ,$$

т.е. для всех точек P, расположенных на сфере S_R^0, расстояния до M_0 и M_1 пропорциональны. Поэтому гармоническая функция $\frac{R}{\rho_0}\frac{1}{r_1}$ принимает на сфере те же значения, что функция $\frac{1}{r_0}$. Функция $\frac{R}{\rho_0}\frac{1}{r_1}$ представляет потенциал заряда величиной $\frac{R}{\rho_0}$, помещенного в точку M_1.

Таким образом функция

$$\mathcal{G}(M,M_0) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_{M_0M}} - \frac{R}{\rho}\frac{1}{r_{M_1M}}\right) \qquad /9.13/$$

является искомой функцией Грина.

Так как решение задачи Дирихле дается формулой /9.4/

$$u(M_0) = -\iint\limits_S u(M)\frac{\partial \mathcal{G}(M,M_0)}{\partial n}\,dS(M) \quad , \quad u(M)\big|_S = f(M),$$

то нужно еще вычислить нормальную производную от функции Грина

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n} = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{M_0M}}\right) - \frac{R}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{M_1M}}\right)\right]$$

/ n - внешняя нормаль/.

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{M_0M}}\right) = \frac{\partial}{\partial r_0}\left(\frac{1}{r_0}\right)\frac{\partial r_0}{\partial n} = -\frac{1}{r_0^2}\cos(\vec{r}_0,\vec{n}),$$

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{M_1M}}\right) = \frac{\partial}{\partial r_1}\left(\frac{1}{r_1}\right)\frac{\partial r_1}{\partial n} = -\frac{1}{r_1^2}\cos(\vec{r}_1,n),$$

где

$$\cos(\vec{r}_0,\vec{n}) = \frac{R^2 + r_0^2 - \rho_0^2}{2Rr_0},$$

$$\cos(\vec{r}_1,\vec{n}) = \frac{R^2 + r_1^2 - \rho_1^2}{2Rr_1},$$

или с помощью /9.12/

$$\cos(\vec{r},\vec{n}) = \frac{R^2 + \frac{R^2}{\rho_0^2}r_0^2 - \frac{R^4}{\rho_0^2}}{2R\frac{R}{\rho_0}r_0} = \frac{\rho_0^2 + r_0^2 - R^2}{2\rho_0 r_0}.$$

Таким образом

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{S_R^0} = \frac{1}{4\pi}\left[-\frac{1}{r^2}\frac{R^2 + r_0^2 - \rho_0^2}{2Rr_0} + \frac{\rho_0^2}{R^2 r_0^2}\frac{R}{\rho_0}\frac{\rho_0^2 + r_0^2 - R^2}{2\rho_0 r_0}\right] =$$

$$= -\frac{1}{4\pi R}\frac{R^2 - \rho_0^2}{r_0^3},$$

и решение внутренней задачи Дирихле для сферы:

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi R}\iint_{S_R^0} f(P)\frac{R^2 - \rho_0^2}{r^3_{M_0P}}\,dS(P), \qquad /9.14/$$

где

$$u|_S = f(P).$$

Введем сферическую систему координат с началом в центре сферы. Пусть (R, ϑ, φ) – координаты точки P /на сфере/, $\rho_0, \vartheta_0, \varphi_0$ – координаты точки M_0. Тогда формулу /9.14/ можно переписать в виде:

$$u(\rho_0, \vartheta_0, \varphi_0) = \frac{R}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\vartheta, \varphi)\frac{R^2 - \rho_0^2}{(R^2 - 2R\rho_0\cos\gamma + \rho_0^2)^{3/2}}\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi, \qquad /9.15/$$

где

$$\cos\gamma = \cos\vartheta\cos\vartheta_0 + \sin\vartheta\sin\vartheta_0\cos(\varphi - \varphi_0).$$

Эта формула называется формулой Пуассона для сферы.

Таким же методом может быть построена функция Грина для области вне сферы.

$$G(M, M_1) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{R}{\rho}\frac{1}{r_1}\right),$$

где M_1 — фиксированная точка, лежащая вне сферы, M_0 — сопряженная с точкой M_1, а $r_0 = OM_0$, $r_1 = OM_1$, $\rho_1 = OM$ и R — радиус сферы.

Учитывая различие направлений нормалей для внутренней и внешней задачи, получим:

$$u(\rho_1, \vartheta_1, \varphi_1) = \frac{R}{4\pi} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{(\rho_1^2 - R^2) f(\vartheta, \varphi)}{(R^2 - 2\rho_1 R\cos\gamma + \rho_1^2)^{3/2}} \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi, \qquad /9.16/$$

где

$$\cos\gamma = \cos\vartheta \cos\vartheta_1 - \sin\vartheta \sin\vartheta_1 \cos(\varphi - \varphi_1).$$

Аналогичные вычисления в случае круга приводят нас к интегралу Пуассона для круга, выведенному уже в теории функции комплексного переменного:

$$v(\rho_0, \vartheta_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - \rho_0^2}{R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho\cos(\vartheta - \vartheta_0)}; \qquad /9.17/$$

(ρ_0, ϑ_0) — координаты точки M_0, (R, ϑ) — координаты точки P, лежащей на окружности.

Задачи к § 9.

1. Доказать, что трехмерная функция Грина для задачи Дирихле $G(M, M_0)$ есть симметрическая функция своих аргументов, т.е.

$$G(M, M_0) = G(M_0, M).$$

Указание. Применение формулы Грина /8.12/ к функциям $G(M, M_1)$ и $G(M, M_2)$ в области V'', полученной исключением из V обеих сингулярных точек M_1 и M_2 малыми шарами $K_\rho^{M_1}$ и $K_\rho^{M_2}$, дает:

$$\iint\limits_{S+S_\rho^{M_1}+S_\rho^{M_2}} \left[G(M,M_1)\frac{\partial G(M,M_2)}{\partial n} - G(M,M_2)\frac{\partial G(M,M_1)}{\partial n}\right] dS' = 0 .$$

Интеграл по поверхности S равен нулю, так как на ней обращаются в нуль обе функции $G(M,M_1)$ и $G(M,M_2)$. Предел интеграла при $\rho\to 0$ по сфере $S_\rho^{M_1}$ будет равен $G(M_1,M_2)$, а по сфере $S_\rho^{M_2}$ — равен $-G(M_2,M_1)$. Так что, действительно: $G(M_1,M_2)=G(M_2,M_1)$.

2. Доказать симметрию двухмерной функции Грина для задачи Дирихле.

3. Найти функцию Грина для сферы в случае внешней задачи Дирихле, и вывести формулу Пуассона /9.15/.

4. Найти функцию Грина для круга по методу, изложенному в 3°, и вывести двухмерную формулу Пуассона /9.17/. Рассмотреть внешнюю и внутреннюю задачу.

5. Найти для задачи Дирихле функцию Грина для полупространства, и показать, что решение первой краевой задачи дается формулой:

$$u(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{z_0}{\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2\right]^{3/2}}f(x,y)\,dx\,dy ,$$

где $f(x,y)=u(x,y,0)$, а $z_0>0$.

Указание. Электростатическим изображением положительного единичного заряда, помещенного в точке $M_0=(x_0,y_0,z_0)$, является отрицательный единичный заряд в точке $M_1=(x_0,y_0,-z_0)$.

6. Решить задачу 5 для полуплоскости $x>x_0$.

7. Построить функцию Грина для полусферы /задача Дирихле/.

8. Найти решение уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в полуплоскости $y > 0$ с граничным условием

$$u(x,0) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ u_0 & \text{при } x > 0 \end{cases}$$

/ см. задачу 6 /.

9. Дать термическую интерпретацию функции Грина.

10. Построить функцию Грина для области внутри двухгранного угла величиной $\alpha = \frac{\pi}{n}$ / n – натуральное число/ и решить внутреннюю задачу Дирихле для заданных граничных условий на сторонах

$$u|_{\varphi=\alpha} = 0, \qquad u_{\varphi=0} = V .$$

11. Решить первую краевую задачу для круга методом Фурье.

<u>Указание</u>. Ввести полярную систему координат с началом в центре круга. Двухмерное уравнение Лапласа в полярных координатах имеет вид:

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0,$$

а краевое условие:

$$u(r_0, \varphi) = f(\varphi)$$

/ r_0 – радиус круга/ . Решение задачи искать в виде

$$u(r,\varphi) = R(r)\,\Phi(\varphi) .$$

Учитывая условие периодичности для функции $\Phi(\varphi)$ $\Phi(\varphi+2\pi) = \Phi(\varphi)$, можно получить собственные значения $\lambda = n^2$ / n – целое число/, а

$$\Phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi .$$

Общее решение функции $R(r)$:

$$R(r) = C r^{n} + D r^{-n}$$

Для решения внутренней задачи надо положить $R = C r^{n}$, для внешней задачи $R = C r^{-n}$. В первом случае получаем решение задачи в виде:

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^{n} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi).$$

Коэффициенты A_n и B_n определяются с помощью краевого условия. Вычисления дают:

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\psi)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{n}(\cos n\psi \cos n\varphi + \sin n\psi \sin n\varphi)\right\} d\psi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\psi)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{n} \cos n(\varphi - \psi)\right\} d\psi .$$

Если учитывать, что

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} t^{n} \cos n(\varphi-\psi) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[t e^{i(\varphi-\psi)}\right]^{n} + \left[t e^{-i(\varphi-\psi)}\right]^{n}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{t e^{i(\varphi-\psi)}}{1 - t e^{i(\varphi-\psi)}} + \frac{t e^{-i(\varphi-\psi)}}{1 - t e^{-i(\varphi-\psi)}}\right], \quad t = \frac{r}{r_0} < 1 ,$$

то после несложных вычислений можно получить решение в виде интеграла Пуассона /9.17/.

12. Найти решение двухмерной задачи Дирихле методом Фурье для прямоугольной области.

13. Решить методом Фурье двухмерную задачу Дирихле для кольца $r_2 \geqslant r \geqslant r_1$, если на границах начальные данные произвольные /см. задачу 11 /.

§ 10. Основы теории потенциала.

1°. Объемный и поверхностные потенциалы.

В § 8 мы нашли, что решение уравнения Пуассона можно представить в виде

$$u(M_0)=-\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_V \frac{\Delta u}{r_{M_0M}}\,dV(M)+\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S\left[\frac{1}{r_{M_0M}}\frac{\partial u(M)}{\partial n}-u(M)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{M_0M}}\right)\right]d\sigma$$

/интегральная формула/. Будем считать, что известны функции $f(M)=\Delta u$ / в области V /, $\varphi(M)=u(M)$ и $\psi(M)=\frac{\partial}{\partial n}u(M)$ /на поверхности S /. Выясним физический смысл интегралов /8.13/.

Как уже отмечалось, выражение $\frac{1}{4\pi r_{M_0M}}$ представляет собой в рациональной системе единиц потенциал в точке M точечного единичного заряда, помещенного в точке M_0. Отсюда следует, что первый интеграл в формуле /8.13/

$$J_1(M_0)=\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_V \frac{f(M)}{r_{M_0M}}\,dV(M) \qquad /10.1/$$

выражает потенциал в точке M_0 объемных зарядов, распределенных по объему V с плотностью $f(M)$, а второй интеграл

$$J_2(M_0)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \frac{\psi(M)}{r_{M_0M}}\,dS(M) \qquad /10.2/$$

выражает потенциал в точке M_0 поверхностных зарядов, рапределенных по поверхности S с поверхностной плотностью $\psi(M)$ - потенциал простого слоя.

Чтобы выяснить физический смысл третьего интеграла /8.13/, рассмотрим диполь, образованный двумя зарядами $-q$ и

$+q$, расположенных в точках P_1 и P_2. Момент, такого диполя

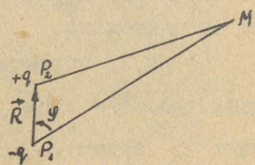
$$\vec{p} = q\vec{R},$$

где $\vec{R}$ - вектор, который приводит от точки P_1 к P_2 точке, т.е. от отрицательного заряда к положительному. Потенциал такого диполя /в рациональной системе единиц/:

$$u_d = \frac{q}{4\pi}\left(\frac{1}{r_{MP_2}} - \frac{1}{r_{MP_1}}\right) = \frac{p}{4\pi R}\left(\frac{1}{r_{MP_2}} - \frac{1}{r_{MP_1}}\right).$$

Если $R \ll r_{MP_1}$ и $R \ll r_{MP_2}$, то можно $\frac{1}{r_{MP_2}}$ написать в виде /первые члены разложения по степеням R /

$$\frac{1}{r_{MP_2}} = \frac{1}{r_{MP_1}} + grad_{P_1}\frac{1}{r_{MP_1}}\vec{R} = \frac{1}{r_{MP_1}} + \frac{\cos\varphi R}{r_{MP}^2}^{x]}.$$



Отсюда,

$$u_d = \frac{p}{4\pi}\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{r_{MP_1}}\right) = \frac{p}{4\pi}\frac{\cos\varphi}{r_{MP_1}^2} \quad (10.3)$$

Рис.16.

/см. рис.16/. Для реального диполя полученная формула /10.3/ приближенна, т.е. дает точное выражение для потенциала лишь на больших расстояниях /по сравнению с размерами диполя/. Формула становится точной при переходе к точечному диполю, т.е. к пределу $R \to 0$, так что момент диполя $p = qR$ остается постоянным $(q \to \infty)$. Поверхность, покрытая точечными диполями, так что в каждой точке направление диполя совпадает с направлением нормали, называется двойным слоем. Любой элемент двойного слоя dS_P является диполем с моментом $dp = \nu(P)\,dS_P$,

---

x/ При вычислении градиента считаются переменными координаты точки P_1 : $\frac{\cos\varphi}{r_{MP_1}^2}R = \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{r_{MP_1}}\right)R$.

где $\nu(P)$ – поверхностная плотность дипольного момента. Такой двойной слой образуют, например, две заряженные поверхности S и S', находящиеся друг от друга на малом расстоянии δ, одна из которых отрицательно заряжена, а другая положительно.

При переходе к пределу $\delta \to 0$ мы получаем поверхность, одна сторона которой заряжена отрицательно, а другая положительно.

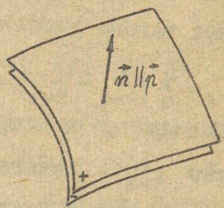


Рис.17.

По /10.3/ потенциал элемента двойного слоя dS в точке M_0 будет:

$$\frac{1}{4\pi}\nu(P)\frac{d}{dn_P}\left(\frac{1}{r_{MP}}\right)dS_P = \frac{1}{4\pi}\nu(P)\frac{\cos\varphi}{r^2_{MP}}\,dS_P,$$

где $\varphi = (\vec{n}, \vec{PM})$, а нормаль $\vec{n}$ направлена от отрицательной стороны двойного слоя к положительной стороне. Таким образом третий интеграл /8.13/

$$J_3(M_0) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \psi(M)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{M_0M}}\right)dS(M) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \frac{\psi(M)\cos\varphi}{r^2_{M_0M}}\,dS(M) \qquad /10.4/$$

представляет собой потенциал двойного слоя, $\psi(M)$ – поверхностная плотность дипольного момента. Так как для замкнутых поверхностей n – направление внешней нормали, то плотность момента считается положительной, если внешняя сторона заряжена положительно.

2^0. Тройные несобственные интегралы.

Интеграл $J_1(M)$ /10.1/, выражающий потенциал объемных зарядов, представляет собой обычный определенный интеграл в том случае, если точка M_0 находится вне области интегрирования V, а если точка M_0 находится внутри области V, то уже в точке $M=M_0$ подинтегральная функция обращается в бесконечность и интеграл /10.1/ называется несобственным. Здесь обычное определение интеграла, как предела интегральной суммы не подходит. Действительно, в этом случае интегральная сумма не имеет предела, так как слагаемое, относящееся к элементарному объему, содержащему особую точку, может сильно менять величину суммы в зависимости от выбора промежуточной точки.

Приводим определение несобственного интеграла. Пусть в области V задана функция $F(M)$, обращающаяся в бесконечность в некоторой точке Q. Исключим из области V некоторую окрестность σ особой точки Q, диаметр /максимальное расстояние между точками окрестности/ окрестности равен D_σ. Если существует предел

$$\lim_{D_\sigma \to 0} \iiint\limits_{V-\sigma} F(M)\,dV(M)$$

/под знаком предела обычный определенный интеграл/, который не зависит от формы области σ, то этот предел J называется несобственным интегралом от функции $F(M)$ по области V и обозначается, как обычно, $\iiint\limits_V F\,dV$

Если же этот предел F существует лишь при области σ определенной формы, например шаровой, а для других областей σ имеет другие значения или вообще не существует, то такой предел $\bar{J}$ называется условно сходящимся несобственным интегралом. В случае условной сходимости нужно всегда указать ту последовательность областей $\bar{\sigma}$, по которой определяется этот интеграл.

Учитывая, что

$$\iiint_{\sigma} F(M)dV(M) + \iiint_{V-\sigma} F(M)dV(M) = \iiint_{V} F(M)dV(M),$$

получаем следующий признак сходимости:

$$\lim_{D_\sigma \to 0} \iiint_{\sigma} F(M)dV(M) = 0. \qquad /10.5/$$

Будем теперь рассматривать несобственные интегралы, зависящие от параметра

$$J(Q) = \iiint_{V} F(M,Q)dV(M), \qquad /10.6/$$

где $F(M,Q)$ - функция, обращающаяся в бесконечность при совпадении аргументов и непрерывная по Q /кроме точки $Q=M$ /. С помощью признака сходимости /10.5/ можно исследовать сходимость интеграла /10.6/ в любой точке Q.

Интеграл /10.6/ называется равномерно сходящимся в точке Q_0, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $\delta(\varepsilon)$, при котором будет иметь место неравенство

$$\left| \iiint_{\sigma} F(M,Q)\,dV(M) \right| < \varepsilon \qquad /10.7/$$

для любой точки Q, расстояние которой от Q_0 меньше $\delta(\varepsilon)$, и для любой области σ, содержащей точку Q_0, диаметр которой $D_\sigma \le \delta(\varepsilon)$.

Ясно, что если интеграл сходится равномерно в точке Q_0, то он сходится в Q_0 и в обычном смысле.

Интеграл $J(Q)=\iiint\limits_V \mathcal{F}(M,Q)\,dV(M)$ /10.6/, равномерно сходящийся в точке Q_0, есть непрерывная функция в этой точке Q_0. Для доказательства нужно показать, что для любого $\varepsilon>0$ можно указать такое $\delta(\varepsilon)$, что

$$|J(Q)-J(Q_0)|<\varepsilon$$

при

$$|\overline{QQ_0}|<\delta(\varepsilon).$$

Выберем внутри V некоторую область σ, содержащую точку Q_0, то

$$|J(Q)-J(Q_0)|\le\Big|\iiint\limits_{V-\sigma}\mathcal{F}(M,Q)\,dV(M)-\iiint\limits_{V-\sigma}\mathcal{F}(M,Q_0)\,dV(M)\Big|+$$

$$+\Big|\iiint\limits_{\sigma}\mathcal{F}(M,Q)\,dV(M)\Big|+\Big|\iiint\limits_{\sigma}\mathcal{F}(M,Q_0)\,dV(M)\Big|.$$

Так как точка Q_0 лежит вне области $V-\sigma$, то интеграл $\iiint\limits_{V-\sigma}\mathcal{F}(M,Q)\,dV$ является непрерывной функцией в этой точке. Отсюда следует существование такого $\delta'(\varepsilon)$, что

$$\Big|\iiint\limits_{V-\sigma}\mathcal{F}(M,Q)\,dV(M)-\iiint\limits_{V-\sigma}\mathcal{F}(M,Q_0)\,dV(M)\Big|<\frac{\varepsilon}{3}$$

при

$$\overline{QQ_0}\le\delta'(\varepsilon).$$

Так как интеграл /10.6/ сходится равномерно в точке Q_0, то существует такое $\delta''(\varepsilon)$, что

$$\Big|\iiint\limits_{\sigma}\mathcal{F}(M,Q)\,dV(M)\Big|<\frac{\varepsilon}{3} \quad \text{и} \quad \Big|\iiint\limits_{\sigma}\mathcal{F}(M,Q_0)\,dV(M)\Big|<\frac{\varepsilon}{3},$$

если $\overline{QQ_0}\le\delta''(\varepsilon)$ и $D_\sigma<\delta''(\varepsilon)$.

Полагая $\delta(\varepsilon)=\min\big(\delta'(\varepsilon),\delta''(\varepsilon)\big)$,

получим: $|J(Q)-J(Q_0)|<\varepsilon$

при $|QQ_0|<\delta(\varepsilon)$.

3°. Несобственные интегралы типа потенциалов объемных зарядов.

Сначала исследуем равномерную сходимость интегралов следующего типа:

$$J(Q)=\iiint\limits_V \frac{1}{r^{\alpha}}\,dV(M), \qquad /10.8/$$

где $\alpha>0$ – некоторая постоянная, а $r=QM$.

Оценим по /10.7/ интеграл $\iiint\limits_{\sigma} \frac{1}{r^{\alpha}}\,dV$. Учитывая, что подинтегральное выражение положительное, получим:

$$\iiint\limits_{\sigma} \frac{1}{r^{\alpha}}\,dV < \iiint\limits_{K_{\rho}^{Q}} \frac{1}{r^{\alpha}}\,dV,$$

где $\rho \geqslant 2D_{\sigma}$. Переход к полярным координатам с центром в точке Q дает:

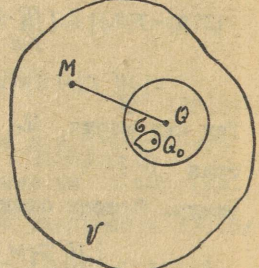


Рис.18.

$$\iiint\limits_{\sigma} \frac{1}{r^{\alpha}}\,dV \leq \int\limits_0^{\rho}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{dr}{r^{\alpha-2}} \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi =$$

$$= 4\pi\int\limits_0^{\rho}\frac{dr}{r^{\alpha-2}} = \begin{cases} \frac{4\pi}{3-\alpha}\, r^{3-\alpha}\Big|_0^{\rho} & (\alpha\neq 3) \\ 4\pi \ln r\Big|_0^{\rho} & (\alpha=3). \end{cases}$$

Видно, что при $\alpha\geqslant 3$ интеграл расходится, но при $0<\alpha<3$:

$$\iiint\limits_{\sigma} \frac{1}{r^{\alpha}}\,dV < 4\pi\frac{\rho^{3-\alpha}}{3-\alpha},$$

или

$$\iiint\limits_{\sigma} \frac{c}{r^{\alpha}}\,dV < \varepsilon,$$

если $QQ_0<\delta(\varepsilon)$ и $D_{\sigma}<\delta(\varepsilon)$,

а

$$\delta(\varepsilon)=\frac{1}{2}\rho=\sqrt[3-\alpha]{\frac{\varepsilon(3-\alpha)}{2}}.$$

Эти неравенства показывают, что интеграл /10.8/ сходится равномерно в любой точке Q, если $0<\alpha<3$.

Полученные результаты можно перенести и на интеграл

$$J(Q)=\iiint\limits_{V}\frac{f(M)}{r^{\alpha}}\,dV(M), \qquad /10.9/$$

который сходится равномерно, если $0<\alpha<3$, во всей области V : $|f(M)|<N$ / N - некоторое положительное число/. Действительно,

$$\left|\iiint\limits_{\sigma}\frac{f(M)}{r^{\alpha}}\,dV(M)\right|\le N\iiint\limits_{\sigma}\frac{1}{r^{\alpha}}\,dV(M)<\varepsilon,$$

если

$$\delta(\varepsilon)=\sqrt{\frac{\varepsilon}{N}\cdot\frac{3-\alpha}{2}}\;.$$

Кроме того, интегралы /10.8/ и /10.9/, как равномерно сходящиеся, являются в области V непрерывными функциями от параметра Q.

4°. Первые производные объемного потенциала.

Докажем, что объемный потенциал /10.1/ можно дифференцировать под знаком интеграла, т.е.

$$\frac{\partial J_1(Q)}{\partial x}=\iiint\limits_{V}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho(M)}{r_{QM}}\right)dV(M)=^{x)}$$

$$=-\iiint\limits_{V}\frac{\rho(M)\,(x-\xi)}{r^{3}_{QM}}\,dV(M), \qquad /10.10/$$

где

$Q=(x,y,z)$, $M=(\xi,\eta,\zeta)$ и $r_{QM}=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}$.

Сначала отметим, что интеграл

$$X(Q)=-\iiint\limits_{V}\frac{\rho(M)(x-\xi)}{r^{3}_{QM}}\,dV(M), \qquad /10.10'/$$

который представляет собой X компоненту силы, дейст-

---

x/ $\rho(M)=\frac{1}{4\pi}f(M)$.

17.

вующей на единичный заряд, расположенный в точке Q, сходится равномерно, если плотность заряда $\rho(M)$ ограничена $\rho(M)<N$. Это следует из неравенства

$$\left|\frac{\rho(M)}{r^2}\frac{(x-\xi)}{r}\right|<\frac{N}{r^2},$$

так как $|x-\xi|<r$.

Для доказательства соотношения /10.10/ нужно показать, что для любого $\varepsilon>0$, можно найти такое $\delta(\varepsilon)$, что

$$\left|\frac{J_1(x+\Delta x, y, z)-J_1(x,y,z)}{\Delta x}-X(x,y,z)\right|<\varepsilon,$$

если $|\Delta x|<\delta(\varepsilon)$.

Выберем внутри V некоторую область σ, содержащую точку Q. Тогда

$$J_1(Q)=\iiint\limits_{\sigma}\frac{\rho(M)}{r_{QM}}dV(M)+\iiint\limits_{V-\sigma}\frac{\rho(M)}{r_{QM}}dV(M)=u_1(Q)+u_2(Q)$$

и

$$X(Q)=\iiint\limits_{\sigma}\frac{\rho(M)(\xi-x)}{r^3_{QM}}dV(M)+\iiint\limits_{V-\sigma}\frac{\rho(M)(\xi-x)}{r^3_{QM}}dV(M)=X_1(Q)+X_2(Q).$$

$u_2(Q)$, как определенный интеграл, зависящий от параметра Q, дифференцируемый под знаком интеграла, т.е.

$$\frac{\partial u_2(Q)}{\partial x}=X_2(Q).$$

Поэтому существует такое $\delta'(\varepsilon)$, что

$$\left|\frac{u_2(x+\Delta x, y, z)-u_2(x,y,z)}{\Delta x}-X_2(x,y,z)\right|<\frac{\varepsilon}{3},$$

если

$$|\Delta x|<\delta'(\varepsilon).$$

Так как интеграл /10.10'/ сходится, то

$$|X_1|=\left|\iiint\limits_{\sigma}\frac{\rho(M)(x-\xi)}{r^3}dV\right|<N\int_0^{\delta''}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{r^2\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, dr}{r^2}=$$

если $D_\sigma<\delta''=\dfrac{\varepsilon}{12\pi C}$, $\qquad =4\pi N\delta''<\dfrac{\varepsilon}{3}$, так как $\left|\frac{x-\xi}{r}\right|$ и $|\rho(M)|<N$.

Наконец,

$$|S|=\left|\frac{u_1(x+\Delta x,y,z)-u_1(x,y,z)}{\Delta x}\right|=\frac{1}{\Delta x}\left|\iiint\limits_{\sigma}\rho(M)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)dV\right|\leq$$

$$\leq\frac{1}{\Delta x}\iiint\limits_{\sigma}\left|\rho(M)\right|\frac{r_1-r_2}{r_1 r_2}\left|dV\leq N\iiint\limits_{\sigma}\frac{1}{r_1 r}dV\right..$$

Учитывается, что $|r_1-r|\leq\Delta x$ / r_1, r_0 и Δx - стороны треугольника QQ_1P, где $Q=(x,y,z)$, $Q_1=(x+\Delta x,y,z)$, $P=(\xi,\eta,\zeta)$ /, а $r_1=Q_1P$ и $r=QP$. Так как для любых чисел a и b $ab\leq\frac{1}{2}(a^2+b^2)$, то

$$|S|\leq\frac{N}{2}\left[\iiint\limits_{\sigma}\frac{1}{r_1^2}dV+\iiint\limits_{\sigma}\frac{1}{r^2}dV\right]\leq\frac{N}{2}\left[\iiint\limits_{K^Q_{\delta'''}}\frac{dV}{r^2}+\iiint\limits_{K^Q_{2\delta'''}}\frac{dV}{r^2}\right]\leq 6N\delta'''<\frac{\varepsilon}{3},$$

если $\delta'''<\frac{\varepsilon}{18\pi N}$, а $\Delta x<\delta'''$ и $D_\sigma<\delta'''$.

Таким образом,

$$\left|\frac{J_1(x+\Delta x,y,z)-J_1(x,y,z)}{\Delta x}-X(x,y,z)\right|\leq\left|X_1(x,y,z)\right|+$$

$$+\left|\frac{u_1(x+\Delta x,y,z)-u_1(x,y,z)}{\Delta x}\right|+\left|\frac{u_2(x+\Delta x,y,z)-u_2(x,y,z)}{\Delta x}-X_2\right|<\varepsilon,$$

если $\Delta x<\delta(\varepsilon)$, а $\delta(\varepsilon)=\min(\delta',\delta'',\delta''')=\min(\delta',\delta'')$.

Тем самым доказано соотношение /10.10/.

При доказательстве мы пользовались только ограниченностью плотности заряда $\rho(x,y,z)$, не предполагая ее непрерывности, откуда следует, что потенциал J_1 дифференцируем и в точках границы, т.е. сила определяется везде однозначно.

5°. Вторые производные объемного потенциала.

Несобственный интеграл, который получается двукратным дифференцированием объемного потенциала под знаком интеграла

$$\iiint\limits_{V}\rho(M)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r_{QM}}\right)dV(M)=-\iiint\limits_{V}\rho(M)\left(\frac{1}{r^3}-3\frac{(x-\xi)^2}{r^5}\right)dV(M) \qquad /10.11/$$

в общем не сходится для внутренних точек Q области V. /10.11/ сходится лишь условно, если области, стягивающиеся к точке Q, – шаровые с центром в Q.

Представим потенциал $J_1(Q)$ в виде двух слагаемых

$$J(Q)=\iiint\limits_V \frac{\varrho(M)}{r_{QM}}dV(M)=\iiint\limits_{K_\delta^Q}\frac{\varrho(M)}{r_{QM}}dV(M)+\iiint\limits_{V-K_\delta^Q}\frac{\varrho(M)}{r_{QM}}dV(M)=u_1+u_2 .$$

Вторую производную от u_2 можно вычислить дифференцированием под знаком интеграла, так как сингулярная точка Q лежит вне области интегрирования. Нужно определить производные от u_1 :

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}=\iiint\limits_{K_\delta^Q}\rho\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r_{QM}}\right)dV(M)=-\iiint\limits_{K_\delta^Q}\varrho(M)\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{r_{QM}}\right)dV(M)=$$

$$=-\iiint\limits_{K_\delta^Q}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\varrho(M)\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial\varrho}{\partial\xi}\right]dV(M).$$

Отсюда по теореме Гаусса – Остроградского:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}=\iiint\limits_{K_\delta^Q}\frac{1}{r_{QM}}\frac{\partial\varrho(M)}{\partial\xi}dV(M)-\iint\limits_{S_\delta^Q}\varrho(M)\frac{\cos(nx)}{r_{QM}}dS(M) \qquad /10.12/$$

/ n – направление внешней нормали/.

Первый интеграл в /10.12/ есть объемный потенциал с плотностью заряда $\frac{\partial\varrho(M)}{\partial\xi}$, имеющего непрерывную первую производную /если $\left|\frac{\partial\varrho(M)}{\partial\xi}\right|<N_1$ /, а второй – обычный поверхностный интеграл и имеет внутри сферы производные любого порядка. Следовательно:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}=\iiint\limits_{K_\delta^Q}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial\varrho(M)}{\partial\xi}dV(M)-\iint\limits_{S_\delta^Q}\varrho(M)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r_{QM}}\right)\cos(nx)\,dS.$$

Оценим эти интегралы. Для первого получаем

$$\left|\iiint\limits_{K_\delta^Q}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial\varrho(M)}{\partial\xi}dV(M)\right|\le N_1\iiint\limits_{K_\delta^Q}\left|\frac{x-\xi}{r^3}\right|dV(M)\le 4\pi\delta N_1 ,$$

т.е. этот интеграл стремится к нулю при $\delta\to 0$.Поверхностный интеграл дает по теореме о среднем x/ :

$$\iint_{S_\delta^Q} \rho(M)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r_{QM}}\right)\cos(n,x)\,dS(M) = \iint \rho(M)\frac{\xi - x}{r_{QM}^3}\cos^2(n,x)\,dS =$$

$$= \frac{1}{\delta^2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \rho(M)\cos^2(n,x) = \frac{4\pi}{3}\bar{\rho}\,\Big|_{\text{в } K_\delta^Q}$$

и, переходя к пределу $\delta \to 0$:

$$\lim_{\delta\to 0}\iint \rho(M)\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r_{QM}}\cos(n,x)\,dS(M) = \frac{4\pi}{3}\rho(M).$$

Таким образом

$$\frac{\partial^2 J}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\iiint \rho(M)\frac{1}{r_{QM}}dV(M) = \lim_{\delta\to 0}\iiint_{V-K_\delta^Q}\rho(M)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{1}{r_{QM}}dV(M) -$$

$$- \frac{4\pi}{3}\rho(Q) = \overline{\iiint_V}\rho(M)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r_{QM}}\right)dV(M) - \frac{4\pi}{3}\rho(Q) .$$

/10.13/

Черта над собственным интегралом означает, что интеграл сходится условно и полученный результат правилен при специальном выборе предельного перехода, когда стягивающиеся к точке Q области являются шарами с общим центром в точке Q .

С помощью /10.13/ видим, что объемный потенциал является решением уравнения Пуассона:

$$\Delta\left[\iiint_V \rho(M)\frac{1}{r_{QM}}dV(M)\right] = \lim_{\delta\to 0}\iiint_{V-K_\delta^Q}\rho(M)\Delta\left(\frac{1}{r_{QM}}\right)dV(M) - 4\pi\rho(Q) =$$

$$= -4\pi\rho(Q),$$

или

$$\Delta\left[\frac{1}{4\pi}\iiint_V f(M)\frac{1}{r_{QM}}dV(M)\right] = -f(Q).$$

Наконец отметим, что, по сравнению с предположениями последнего пункта, здесь требования к функции $\rho(M)$ более строгие – она должна быть не только ограниченной,

---

x/ В одномерном случае обобщенная теорема о среднем дает: $\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(\xi)\int_a^b \varphi(x)dx$, $\varphi(x) \geq 0$, $a < x < b$.

но и непрерывной и дифференцируемой функцией с ограниченными частными производными первого порядка. В частности, полученные результаты не применимы к граничным точкам, где имеет место разрыв плотности.

6°. Поверхностные потенциалы.

Из определений потенциалов простого слоя /10.2/ и двойного слоя /10.4/ видно, что если точка наблюдения $Q(x,y,z)$ находится вне поверхности S, то подинтегральные функции и их производные по x, y, z любого порядка непрерывны по переменным x, y, z. Поэтому можно вычислить производные под знаком интеграла и убедиться, что вне зарядов они удовлетворяют уравнению Лапласа. Однако в точках поверхности S поверхностные потенциалы представляются несобственными двухкратными интегралами следующего типа:

$$J(Q) = \iint\limits_S \frac{f(M)}{r^{\alpha}_{QM}}\, dV(M), \tag{10.14}$$

где $f(M)$ – ограниченная функция $|f(M)| < N$.

Найдем критерии сходимости интегралов типа /10.14/ в точках поверхности S. Однако в данном случае много зависит от формы поверхности S. Будем ограничиваться лишь так называемыми поверхностями Ляпунова.

Поверхность S называется поверхностью Ляпунова, если выполняются следующие условия:

1/ В каждой точке поверхности S существует определенная нормаль и касательная плоскость,

2/ существует такое число $d > 0$ /независимое от точек поверхности/, что вокруг каждой точки поверхности

P можно описать сферу S_d^P радиусом d, внутрь которой попадет лишь участок Σ поверхности S, встречающий прямые параллельные нормали n в точке P не более чем один раз /отсутствуют излишние складки/.

3/ Угол $\gamma=(\vec{n}_P, \vec{n}_{P'})$, образованный нормалями в точках P и P', удовлетворяет следующему условию:

$\gamma < A r^{\beta}$, или $|\vec{n}_P - \vec{n}_{P'}| < \sin\gamma < \gamma < A r^{\beta}$,

где r - расстояние между точками P и P', A и β - некоторые постоянные, притом $0 \le \beta \le 1$.

Чтобы установить критерий равномерной сходимости интеграла /10.14/, при $|f(M)| < N$, нужно выяснить при каких α $\left|\iint\limits_{\sigma} \frac{1}{r_{QM}^{\alpha}} dS(M)\right| < \varepsilon$ для произвольного Q, если только $QQ_0 < \delta(\varepsilon)$ и $D_\sigma \le \delta(\varepsilon)$. σ - часть поверхности S, содержащая особую точку Q_0, $D_{\sigma'}$ - диаметр проекции области σ на касательную плоскость, проходящую через Q_0. По второму условию Ляпунова можно спроектировать Σ - часть поверхности S, которая находится внутри сферы S_d^Q, на касательную плоскость, проходящую через Q, т.е.

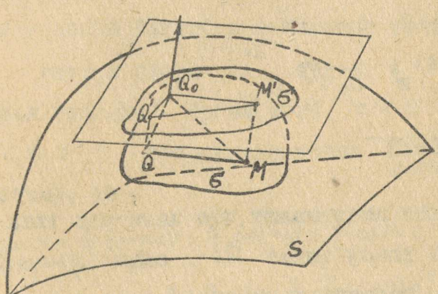


Рис. 19.

представить аналитически в виде $z=f(x,y)$, где x, y декартовы координаты на касательной плоскости. Ясно, что и σ должна целиком лежать внутри сферы S_d^a, т.е. $D_{\sigma'} \le \delta < d$.

$$\iint_{\sigma} \frac{1}{r_{QM}^{\alpha}} dS(M) = \iint_{\sigma'} \frac{1}{r_{QM}^{\alpha}} \frac{dS'(M)}{\cos\gamma},$$

γ - угол между нормалями к S в точках Q_0 и M. По третьему условию Ляпунова можно оценить $\cos\gamma$:

$$\cos\gamma \ge 1-\frac{\gamma^2}{2} \ge 1-\frac{1}{2}A^2 r_0^{2\beta} \ge 1-\frac{1}{2}A^2\delta^2\beta = \frac{1}{\lambda}$$

$$[\, r_0 = Q_0M < \delta,\ r = QM < 2\delta,\ Q_0Q < \delta,$$
$$r_0' = Q_0M' < \delta,\ r' = Q'M' < r < 2\delta,\ Q_0Q' < \delta\,].$$

Отсюда,

$$\iint_{\sigma} \frac{1}{r_{QM}^{\alpha}} dS(M) = \iint_{\sigma'} \frac{1}{r_{QM}^{\alpha}} \frac{dS(M)}{\cos\gamma} < \lambda \iint_{\sigma} \frac{dS'(M)}{r'^{\alpha}} < \lambda \int_0^{2\delta}\int_0^{2\pi} \frac{1}{r'^{\alpha}} r' dr' d\varphi =$$

$$= 2\pi\lambda \int_0^{2\delta} \frac{1}{r'^{\alpha-1}} dr' = \begin{cases} 2\pi\lambda \dfrac{r'^{2-\alpha}}{2-\alpha}\Big|_0^{2\delta}, & \alpha \ne 2, \\ 2\pi\lambda \ln r' \Big|_0^{2\delta}, & \alpha = 2. \end{cases}$$

Видно, что при $\alpha \ge 2$ последний интеграл расходится, но при $0<\alpha<2$

$$\left| \iint_{\sigma} \frac{1}{r_{QM}^{\alpha}} dS(M) \right| < \frac{2\pi\lambda}{2-\alpha}(2\delta)^{2-\alpha},$$

или $\iint_{\sigma} \frac{1}{r_{QM}^{\alpha}} dS(M) < \varepsilon$,

если $QQ_0 < \delta(\varepsilon)$ и $D_{\sigma} < \delta(\varepsilon)$,

а

$$\delta(\varepsilon) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(2-\alpha)\varepsilon}{2\pi\lambda}}.$$

Полученные неравенства показывают, что интеграл типа /10.14/ сходится равномерно в любой точке Q_0, если $0<\alpha<2$.

Отсюда ясно, что потенциал простого слоя действительно сходится и на поверхности S. Однако на первый взгляд кажется, что потенциал двойного слоя расходится на поверхности S.

Рассмотрим этот вопрос более подробно. Нужно оценить интеграл:

$$\iint_{\sigma} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{QM}}\right) dS(M) = \iint_{\sigma} \frac{\cos\varphi}{r^2_{QM}}\, dS(M),$$

где σ - некоторая окрестность точки Q_0 на поверхности S, φ — угол между Q_0M и нормалью k поверхности S. Аналогично предыдущему будем считать, что σ находится целиком внутри сферы S_δ^Q $(\delta < d)$, тогда

$$\iint_{\sigma} \frac{\cos\varphi}{r_{Q_0M}}\, dS(M) = \iint_{\sigma'} \frac{\cos\varphi}{r_0^2}\, \frac{dS'(M)}{\cos\gamma} < \lambda \iint_{\sigma} \frac{\cos\varphi}{r_0^2}\, dS(M). \qquad /10.15/$$

Оценим $\cos\varphi$. Для этого введем в окрестности точки Q_0 локальную координатную систему с началом в точке Q_0, определенную с помощью трех ортогональных единичных векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, из которых первые два лежат на касательной плоскости в точке Q_0, а $\vec{k}$ направлен по нормали $\vec{n}_0$ в точке Q_0 - $\vec{k} \uparrow\uparrow \vec{n}_0$. По второму условию Ляпунова локальное уравнение поверхности S внутри сферы $S_d^{Q_0}$ будет $z = z(x, y)$ / z - однозначная функция/. Кроме того, $z(0,0) = \frac{\partial z(0,0)}{\partial x} = \frac{\partial z(0,0)}{\partial y}$.
Если x, y, z - координаты точки M в этой локальной системе, то

$$\cos\varphi = \frac{x}{r}\cos(nx) + \frac{y}{r}\cos(ny) + \frac{z}{r}\cos(nz) \qquad /10.16/$$

$(r = Q_0M)$, а

$$\cos(nx) = (\vec{n} - \vec{n}_0)\vec{i} < |\vec{n} - \vec{n}_0| < Ar^\beta,$$
$$\cos(ny) = (\vec{n} - \vec{n}_0)\vec{j} < |\vec{n} - \vec{n}_0| < Ar^\beta,$$
$$\cos(nz) = (\vec{n} - \vec{n}_0)\vec{k} = (\vec{n} - \vec{n}_0)\vec{k} + \vec{n}_0\vec{k} \geq 1 - Ar^\beta.$$

По теореме о конечных приращениях

$$z(x,y) = x\frac{\partial z}{\partial x}(\xi,\eta) + y\frac{\partial z}{\partial y}(\xi,\eta),$$

где (ξ,η) - некоторая точка, лежащая на отрезке соединяющем начало координат с точкой (x,y). Но с другой стороны

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\cos nx}{\cos nz}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\cos ny}{\cos nz},$$

откуда

$$\left|\frac{\partial z}{\partial x}\right| \le \frac{Ar^\beta}{1-Ar^\beta}, \quad \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right| \le \frac{Ar^\beta}{1-Ar^\beta}.$$

Если выберем δ - радиус сферы $S_\delta^{Q_0}$, внутри которой находится σ, так, что внутри этого шара $Ar^\beta < \frac{1}{3}$, учитывая еще, что $|x| \le \rho$, $|y| < \rho$, где $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, то получим для точек внутри указанного шара:

$$\left|\frac{\partial z}{\partial x}\right| \le \frac{3}{2}Ar^\beta, \quad \left|\frac{\partial y}{\partial z}\right| \le \frac{3}{2}Ar^\beta, \quad |z| \le 3A\rho r^3 < \rho.$$

Для точек внутри шара $Ar^\beta < \frac{1}{3}$ справедливо неравенство

$$\rho \le r \le 2\rho,$$

так как $r = \sqrt{\rho^2+z^2} \le \sqrt{2\rho^2} \le 2\rho$. Поэтому:

$$|z| \le 3A\rho(2\rho)^\beta \le 6A\rho^{1+\beta},$$

$$\cos(nx) \le 2^\beta A\rho^\beta \le 2A\rho^\beta, \quad \cos(ny) \le 2\rho^\beta,$$

$$1 \ge \cos nz \ge 1-2A\rho^\beta.$$

Подставляя эти оценки в выражение /10.16/, получим:

$$|\cos\varphi| < 2A\rho^\beta + 2\rho^\beta + 6A\rho^\beta = 10A\rho^\beta.$$

Поэтому /10.15/ дает:

$$\iint_\sigma \frac{\cos\varphi}{r_{QM}^2}\,dS(M) < \lambda\iint_{\sigma_1}\frac{\cos\varphi}{r_0^2}\,dS(M) \le \iint_\sigma 10A\frac{1}{\rho^{2-\beta}}\,dS < \varepsilon,$$

если только $D_{\sigma'} < \delta(\varepsilon)$, так как $0<2-\rho<2$.

Таким образом и потенциал двойного слоя сходится на поверхности S .

7^0. Разрыв потенциала двойного слоя.

Покажем, что потенциал двойного слоя

$$w(Q)=\iint\limits_S \varphi(M)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{QM}}\right)dS(M)=\iint\limits_S \varphi(M)\frac{\cos\varphi}{r^2_{QM}}\,dS(M) \qquad /10.4'/$$

– разрывная функция, которая претерпевает разрыв непрерывности при переходе через поверхность S . Обозначим через w_0 значение потенциала двойного слоя, вычисленного с помощью формулы /10.4'/, если точка Q_0 находится на S ; через w_e – предел значения w , если Q стремится к Q_0 извне, и через w_i – предел значения w изнутри. Докажем, что имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} w_e &= w_0 + 2\pi\varphi(Q_0), \\ w_i &= w_0 - 2\pi\varphi(Q_0). \end{aligned} \qquad /10.17/$$

Сначала выясним геометрический смысл интеграла

$$\Omega(Q)=\iint\limits_S \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{QM}}\right)dS=\iint\limits_S \frac{\cos\varphi\, dS}{r^2_{QM}} \qquad /10.18/$$

S – некоторая замкнутая или открытая поверхность, одна сторона которой заряжена положительно, а другая отрицательно. Условимся называть положительно заряженную сторону внешней, а отрицательно – внутренней, тем самым будет определено направление внешней нормали для открытой поверхности. $\frac{dS\cos\varphi}{r^2_{QM}}$ дает телесный угол $d\Omega(Q)$, под которым виден в точке Q элемент поверхности dS .

Видно, что $d\Omega$ положи-. тельный, если к точке Q обращена положительно заряженная /внешняя/ сторона поверхности S .

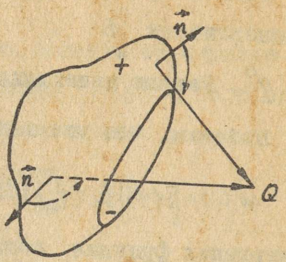


Рис.20.

Поэтому

$$\Omega(Q)=\iint_S d\Omega(Q)=\iint \frac{\cos\varphi}{r^2_{QM}}dS=\iint_S \frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r_{QM}}dS(M)$$

дает телесный угол, под которым видна поверхность из точки Q . В случае поверхностей Ляпунова телесный угол Ω будет всегда ограниченным.

Если точка Q находится вне замкнутой поверхности, то функция $\frac{1}{r_{QM}}$ является гармонической функцией точки M внутри S и на S . Поэтому по первому свойству гармонических функций /§ 8, 5^o/

$$\Omega_e(Q)=\iint_S \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{QM}}\right)dS=0 .$$

Пусть теперь точка Q находится внутри замкнутой поверхности. Выделим ее малой сферой S^Q_ρ , в части пространства между S и S^Q_ρ функция $\frac{1}{r_{QM}}$ гармоническая, поэтому

$$\iint_S \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{QM}}\right)dS(M)+$$

$$+\iint_{S^Q_\rho}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{QM}}\right)dS(M)=0,$$

$$\iint_{S^Q_\rho} -\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{QM}}\right)dS=$$

$$=-\iint_{S^Q_\rho}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS=4\pi.$$

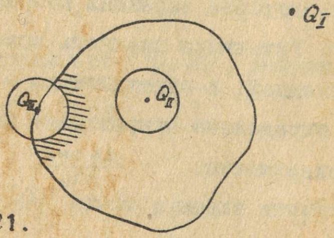


Рис.21.

Отсюда:

$$\Omega_i(Q)=\iint\limits_S \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{QM}}\right)dS(M)=-4\pi$$

Положим наконец, что точка Q находится на поверхности S. Проведем сферу S_ρ^Q $(\rho<\frac{d}{2})$ и заменим участок σ поверхности S, содержащийся внутри S_ρ^Q, частью S' сферы S_ρ^Q так, чтобы точка Q лежала вне полученной поверхности, которая состоит из $(S-\sigma)$ и части S' сферы S_ρ^Q. Тогда:

$$\iint\limits_{S-\sigma} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS+\iint\limits_{S'} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS=0 .$$

Второе слагаемое равно телесному углу, под которым часть S' сферы S_ρ^Q видна из центра сферы Q, при $\rho\to 0$. Этот телесный угол стремится к 2π, а первый, по определению, является несобственным интегралом $\Omega(Q)$. Следовательно:

$$\Omega(Q_0)=\lim_{D_\sigma\to 0}\iint\limits_{S-\sigma} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS=-2\pi .$$

Мы имеем, таким образом,

$$\Omega(Q)=\iint\limits_S \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{QM}}\right)dS(M)=\begin{cases}-4\pi & (Q \text{ внутри } S),\\ -2\pi & (Q \text{ на } S),\\ 0 & (Q \text{ вне } S),\end{cases} \qquad /10.19/$$

т.е., при $\varphi(M)\equiv 1$ потенциал двойного слоя испытывает скачок на -4π при переходе извне во внутрь слоя.

Для доказательства формул /10.17/ перепишем /10.4'/ в виде:

$$w(Q)=\iint\limits_S [\varphi(M)-\varphi(Q_0)]\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{QM}}\right)dS(M)+$$

$$+\iint\limits_S \varphi(Q_0)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{QM}}\right)dS(M)=w_1(Q)+w_2(Q), \qquad /10.20/$$

где Q_0 - какая-нибудь фиксированная точка поверхности. Если $\varphi(M)$ непрерывная в точке Q_0, то $W_1(Q)$ сходится равномерно в точке Q_0, отсюда следует и непрерывность функции $W_1(Q)$ в точке Q_0.

Действительно, окружим точку Q_0 областью $\sigma(\varepsilon)$ столь малой, чтобы иметь

$$|\varphi(M)-\varphi(Q_0)|<\varepsilon,$$

где M - точка, принадлежащая области $\sigma(\varepsilon)$. Тогда для любой точки Q, лежащей в некоторой окрестности $h(\varepsilon)$ точки Q_0, будем иметь:

$$\left|\iint\limits_{\sigma}[\varphi(M)-\varphi(Q_0)]\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{QM}}\right)dS(M)\right| \le \varepsilon\iint\limits_{\sigma}\left|\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{QM}}\right)\right|dS =$$

$$=\varepsilon\iint\limits_{\sigma_1}d\omega-\varepsilon\iint\limits_{\sigma_2}d\omega.$$

Через σ_1 обозначена часть σ, которая видна из точки Q под положительным телесным углом, а через σ_2 - та часть σ, которая видна из точки Q под отрицательным телесным углом. Для поверхности Ляпунова оба интеграла будут ограничены.

Этого достаточно для равномерной сходимости и, следовательно, для непрерывности функции $W_1(Q)$ в точке Q_0. Если учесть еще, что $W_2(Q)=\varphi(Q_0)\Omega(Q)$, то с помощью /6.19/ получим соотношения /10.17/.

8°. Основные свойства потенциала простого слоя.

Как доказано в 6°, потенциал простого слоя

$$V(Q)=\iint\frac{1}{r_{QM}}\varphi(M)dS(M) \qquad /10.2'/$$

сходится равномерно, если $|\varphi(M)|<N$. Следовательно,

является непрерывной функцией и на поверхности S, но нормальная производная потенциала является на поверхности S разрывной функцией такого же типа, как потенциал двойного слоя.

$$\frac{\partial v(Q)}{\partial n} = \iint_S \frac{\partial}{\partial n_Q}\left(\frac{1}{r_{QM}}\right)\rho(M)\,dS(M) = \iint_S \frac{\rho(M)\cos\psi}{r^2_{QM}}\,dS. \qquad /10.21/$$

По сравнению с потенциалом двойного слоя /10.4/ потенциал простого слоя отличается тем, что здесь производная берется по параметру Q, а там - вычисляется по точке интегрирования M, поэтому $\psi = (\vec{n}_Q, \overrightarrow{QM})$, а в /10.4/ $\varphi = (\vec{n}_M, \overrightarrow{MQ})$.

Сначала покажем, что интеграл /10.21/ существует и в случае $Q = Q_0$, где Q_0 — некоторая точка на поверхности S. По второму условию Ляпунова локальное уравнение поверхности S внутри сферы $S_d^{Q_0}$ будет - $z = z(x,y)$, где z - однозначная функция, координаты точки Q - $(0,0,0)$, а точки M - (x,y,z). Нормаль $\vec{n}_{Q_0}$ направлена по оси z. Поэтому $\cos\psi = \frac{z}{r}$. Как показано в 6°, внутри шара $A r^\beta < \frac{1}{2}$, $|z| \le 6A\rho r^\beta \le 3Ar^{1+\beta}$, поэтому

$$\left|\iint_\sigma \rho(M)\frac{\cos\psi}{r^2_{QM}}\,dS\right| < N\iint_\sigma \frac{|z|}{r^3}\,dS < N\iint_\sigma \frac{3A}{r^{2-\beta}}\,dS$$

$|\rho(M)| < N$. По критерию сходимости последний интеграл сходится, т.е. и интеграл /10.21/ сходится на поверхности S.

Теперь рассмотрим сумму интеграла /10.21/ и потенциала двойного слоя /10.4/ с той же плотностью

$$\frac{\partial v(Q)}{\partial n} + w(Q) = \iint_S \rho(M)\frac{\cos\varphi + \cos\psi}{r^2_{QM}}\,dS(M). \qquad /10.22/$$

Докажем, что эта сумма является всюду непрерывной функцией. По определению углов φ и ψ

$$\cos\varphi + \cos\psi = (\vec{n}_Q - \vec{n}_M)\frac{\overrightarrow{QM}}{r} \leq |\vec{n}_Q - \vec{n}_M| < Ar^\beta$$

/по третьему условию Ляпунова/. Поэтому для подинтегральной функции в /10.22/ имеет место следующее неравенство /при $|\nu(M)| < N$ /:

$$\left| \nu(M) \frac{\cos\varphi + \cos\psi}{r^2} \right| < \frac{NA}{r^{2-\beta}} .$$

Так как интеграл $NA \iint \frac{1}{r^{2-\beta}} dS$ сходится всюду равномерно, то равномерно сходится и интеграл /10.22/. Из равномерной сходимости интеграла /10.22/ следует, в свою очередь, его непрерывность.

Используя непрерывность суммы /10.22/ и соотношения /10.17/, найдем:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_e = \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_0 - 2\pi\nu(Q_0),$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_i = \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_0 + 2\pi\nu(Q_0), \qquad /10.23/$$

где $\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_0$ - значение интеграла /10.21/ в точке Q_0 на поверхности S , $\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_e$ - предел $\frac{\partial V(Q)}{\partial n}$, если Q стремится к Q_0 извне, и $\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_i$ - предел $\frac{\partial V(Q)}{\partial n}$ изнутри.

9^0. Основные соотношения теории потенциала в двухмерном случае.

Совершенно аналогично можно найти основные соотношения теории потенциала в двухмерном случае /потенциальное поле на плоскости, или поле в пространстве, не зависящее от координаты z /. Приводим без доказательства важнейшие результаты.

Определения /в обычной системе единиц/:
потенциал „объемных" зарядов:

$$u(Q)=\iint_S f(M)\ln\frac{1}{\rho_{QM}}\,dS(M), \qquad /10.24/$$

потенциал „простого слоя":

$$v(Q)=\int_C f(M)\ln\frac{1}{\rho_{QM}}\,d\sigma(M), \qquad /10.25/$$

потенциал двойного слоя:

$$w(Q)=\int_C f(M)\frac{\partial}{\partial n_M}\left(\ln\frac{1}{\rho_{QM}}\right)d\sigma(M)=$$

$$=\int_C f(M)\frac{\partial}{\partial n_M}\frac{\cos\varphi}{\rho_{QM}}\,d\sigma(M). \qquad /10.26/$$

В рациональной системе единиц, нужно заменить $f(M)$ на $\frac{1}{2\pi}f(M)$.

Потенциалы простого и двойного слоя сходятся, если эти потенциалы берутся для кривых Ляпунова, определяемых условиями аналогичными условиям 1 - 3 для поверхностей Ляпунова /см. 6°/. При этом потенциал двойного слоя испытывает при переходе через кривую C скачок 2π :

$$w_e=w_0+\pi f(Q),$$
$$w_i=w_0-\pi f(Q). \qquad /10.27/$$

Для нормальной производной потенциала простого слоя получаем:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_e=\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_0-\pi f(Q),$$
$$\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_i=\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_0+\pi f(Q). \qquad /10.28/$$

10°. Приведение задачи Дирихле к интегральному уравнению.

В случае внутренней задачи Дирихле нужно определить гармоническую функцию $u(M)$ в области V, удовлетворяющую краевому условию

$$u|_S = f(P).$$

Решение этой задачи можно искать в виде потенциала войного слоя с неизвестной пока плотностью

$$u(M) = w(M) = \iint_S \mu(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{r_{MP}} dS(P) . \qquad /10.4/$$

Как известно, потенциал двойного слоя есть гармоническая функция вне и внутри S. Мы должны подчинить w такому условию, чтобы ее предельное значение изнутри равнялось $f(P)$:

$$w_i = f(P).$$

Из равенств /10.17/ найдем:

$$w_i = -2\pi\mu(P) + w_0 = \iint_S \frac{\mu(P')\cos\varphi}{r^2_{PP'}} dS(P') - 2\pi\mu(P).$$

Таким образом, для $\mu(P)$ получим уравнение

$$\mu(P) = -\frac{f(P)}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\iint_S \mu(P') \frac{\cos\varphi}{r^2_{PP'}} dS(P) . \qquad /10.29/$$

Обычно обозначают $\frac{f(P)}{2\pi}$ через $F(P)$, и $\frac{1}{2\pi}\cos\varphi\frac{1}{r^2}$ – через $K(P,P')$, тогда /10.29/ принимает следующий вид:

$$\mu(P) = F(P) + \iint_S K(P,P')\mu(P') dS(P'). \qquad /10.29'/$$

В случае внешней задачи Дирихле будем налагать на w условия:

$$w_e = f(P),$$

по /10.17/:

$$w_i = w_o + 2\pi\,\mu(P),$$

и отсюда:

$$\mu(P) = \frac{f(P)}{2\pi} - \iint\limits_S \frac{1}{2\pi}\,\frac{\cos\varphi}{r_{PP'}}\,\mu(P')\,dS(P'), \qquad /10.30/$$

или, обозначая $\frac{f(P)}{2\pi}$ через $\mathcal{F}^*(P)$ и $\frac{1}{2\pi}\frac{\cos\varphi}{r_{PP'}}$ через $\mathcal{K}(P,P')$:

$$\mu(P) = \mathcal{F}^*(P) - \iint \mathcal{K}(P,P')\,\mu(P')\,dS(P'). \qquad /10.30'/$$

Полученные уравнения для определения искомой плотности двойного слоя $\mu(P)$ /10.29'/ и /10.30'/ являются интегральными уравнениями типа Фредгольма / Fredholm / 2-го рода.

11°. Приведение задачи Неймана к интегральным уравнениям.

В случае задачи Неймана граничные условия следующие:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_S = f(P).$$

Решение задачи Неймана можно искать в виде потенциала простого слоя:

$$u(M) = v(M) = \iint\limits_S \frac{\nu(P)}{r_{MP}}\,dS(P).$$

В случае внутренней задачи налагаем на потенциал простого слоя $v(P)$ условие:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_i = 2\pi\nu(P) + \left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_o = f(P),$$

Откуда:

$$\nu(P) = \frac{1}{2\pi}f(P) - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_S \frac{\cos\psi}{r_{PP'}}\,\nu(P')\,dS(P'), \qquad /10.31/$$

или, полагая $\frac{1}{2\pi}f(P) = F(P)$ и учитывая, что угол ψ получается из угла ψ заменой положения точки M на P, получим для $\nu(P)$ уравнение

$$\nu(P)=\mathcal{F}(P)-\iint\limits_S \mathcal{K}(P',P)\,\nu(P')\,dS(P'). \qquad /10.31'/$$

Наконец, в случае внешней задачи Неймана нужно выбрать

$$\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_e=-2\pi\nu(P)+\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_0=f(P).$$

Отсюда

$$\nu(P)=-\frac{f(P)}{2\pi}+\iint\frac{1}{2\pi}\,\frac{\cos\psi}{r_{PP'}}\,\nu(P')\,dS(P'), \qquad /10.32/$$

или, полагая $-\frac{f(P)}{2\pi}=\mathcal{F}(P)$:

$$\nu(P)=\mathcal{F}(P)+\iint\limits_S K(P',P)\,\nu(P')\,dS(P'). \qquad /10.32'/$$

<u>Задачи к § 10</u>.

1. Найти прямым вычислением объемного интеграла /10.1/ потенциал шара при постоянной плотности $\rho=\rho_0$.

2. Найти объемный потенциал масс, распределенных с постоянной плотностью в сферическом слое $a<r<b$.

3. Найти объемный потенциал масс, распределенных внутри шара радиуса a с постоянной плотностью ρ и в сферическом слое $a<b<r<c$ с постоянной плотностью ρ_2.

<u>Указание</u>. В силу принципа суперпозиции решений линейного уравнения искомый потенциал представится в виде суммы решений задач 1 и 2.

4. Найти потенциал масс, распределенных внутри среды радиуса $r=a$ с переменной плотностью $\rho=\rho(r)$.

5. Найти потенциал простого слоя постоянной плотности $\nu(P)=\nu_0$, распределенного на сфере.

6. Найти логарифмический потенциал круга с постоянной плотностью заряда.

7. Найти логарифмический потенциал простого слоя отрезка $-a \le x \le a$ с постоянной плотностью.

8. Найти логарифмический потенциал двойного слоя отрезка $-a \le x \le a$ с постоянной плотностью.

9. Написать интегральные уравнения для задачи Дирихле внутри и вне круга.

§ 11. Сферические функции.

1°. Краевая задача для шаровой области.

Будем искать решение уравнения Лапласа

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial u}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0 \qquad /11.1/$$

для шаровой области, т.е. решение уравнения /11.1/, удовлетворяющее на некоторой сфере радиуса r_0 заданному краевому условию

$$u(r_0,\vartheta,\varphi)=f(\vartheta,\varphi) \quad \text{или} \quad \frac{\partial u}{\partial r}(r_0,\vartheta,\varphi)=f_2(\vartheta,\varphi). \qquad /11.2/$$

Уравнение /11.1/ и дополнительные условия /11.2/ допускают разделение переменных. Таким образом можно полагать

$$u(r,\vartheta,\varphi)=R(r)\,Y(\vartheta,\varphi). \qquad /11.3/$$

Для определения $R(r)$ имеем уравнение Эйлера

$$r^2 R'' + 2rR' - \lambda R = 0,$$

/11.4/

а для определения $Y(\vartheta, \varphi)$ – уравнение

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial Y}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + \lambda Y,$$

/11.5/

с дополнительными условиями

$$Y(\vartheta, \varphi + 2\varphi) = Y(\vartheta, \varphi),$$

$$|Y(0,\varphi)| < \infty, \quad |Y(\pi, \varphi)| < \infty.$$

/11.6/

Решения задачи /11.5/ /11.6/, имеющие непрерывные производные второго порядка, называются сферическими функциями. Суперпонируя частные решения /11.3/ уравнения/11.1/, можно найти требуемое решение,удовлетворяющее краевому условию /11.2/.

Сферические функции $Y(\vartheta, \varphi)$ можно, в свою очередь, найти методом разделения переменных, полагая

$$Y(\vartheta, \varphi) = \Theta(\vartheta)\Phi(\varphi).$$

/11.7/

Функция $\Phi(\varphi)$ удовлетворяет уравнению

$$\Phi'' + \mu\Phi = 0$$

и условию периодичности

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi).$$

Эта задача для Φ имеет решение лишь при $\mu = m^2$, $m = 0, 1, 2, \dots$, и линейно независимыми решениями можно брать

$$\Phi_m = e^{im\varphi} \quad \text{и} \quad \Phi_{-m} = e^{-im\varphi}. \qquad /11.8/$$

или

$$\Phi_m^1 = \cos m\varphi \quad \text{и} \quad \Phi_m^2 = \sin m\varphi . \qquad /11.8'/$$

Функция $\theta(\vartheta)$ в /11.7/ определяется из уравнения

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{d\theta}{d\vartheta}\right)+\left(\lambda-\frac{m^2}{\sin^2\vartheta}\right)\theta=0$$

с условиями ограниченности при $\vartheta=0$ и $\vartheta=\pi$.

Вводя переменную $t=\cos\vartheta$ и обозначая $X(t)= =X(\cos\vartheta)=\theta(\vartheta)$, получим для $X(t)$ уравнение т.н. присоединенных функций Лежандра / Legendre /

$$\frac{d}{dt}\left[(1-t^2)\frac{dX}{dt}\right]+\left(\lambda-\frac{m^2}{1-t^2}\right)X=0 \quad , -1\le t\le 1. \qquad /11.9/$$

Нужно найти ограниченные нетривиальные решения уравнения /11.9/. Условие ограниченности решения можно рассматривать как краевые условия о конечности функции $X(t)$ в сингулярных точках $t=\pm 1$ уравнения /11.9/. Однако такие решения возможны только при определенных значений постоянной λ .

2°. Собственные значения уравнения /11.9/.

Выясним, при каких λ уравнение /11.9/ имеет нетривиальные решения, ограниченные в точках $t=\pm 1$. Как увидим в дальнейшем /7°/, достаточно рассмотреть уравнение /11.9/ при $m=0$, т.е. дифференциальное уравнение Лежандра

$$(1-t^2)X''-2tX'+\lambda X=0, \qquad /11.10/$$

из которого видно, что одновременно с $X=f(t)$ удовлетворяет уравнению /11.10/ также и функция $X=f(-t)$, а , следовательно, функции $f(t)+f(-t)$ и $f(t)-f(-t)$, из которых одна – четная, другая – нечетная, и одна, по крайней мере, не исчезает тождественно /рассматриваем нетривиальные решения/. Представив $x(t)$ в виде степенного ряда:

$$x(t)=\sum_{p=1}^{\infty} a_p t^p, \tag{11.11}$$

получим из /11.10/ рекуррентную формулу для коэффициентов a_p

$$a_p=\frac{(p-1)(p-2)-\lambda}{p(p-1)}\cdot a_{p-2} \tag{11.11'}$$

Если x – четная функция, то все a_p с нечетными p – нули, и наоборот. Ряды /11.11/, которые состоят из членов с четными или нечетными индексами, сходятся при $-1<t<1$, однако в точках $t=\pm 1$ они расходятся. Действительно, по признаку Даламбера:

$$\lim_{p\to\infty}\left|\frac{a_{p+2}t^{p+2}}{a_p t^p}\right|=\lim_{p\to\infty}\frac{[p(p+1)-\lambda]\,p(p-1)t^2}{(p+2)(p+1)[(p-1)(p-2)-\lambda]}=t^2$$

Ряд /11.11/ сходится в точках $t=\pm 1$ лишь тогда, когда он обрывается на некотором члене, т.е. представляет собой обычный многочлен. Для этого достаточно /см./11.11'//, чтобы λ было числом вида $n(n+1)$ $(n=0,1,2,\dots)$. Тогда ограниченное в точках $t=\pm 1$ решение уравнения /11.10/ есть полином n-ой степени, который состоит из четных или нечетных степеней t в зависимости от того, четно или нечетно число n. Если налагать на такой многочлен $x_n(t)$ еще условие $x_n(1)=1$, то они называются полиномами Лежандра.

Таким образом полиномы Лежандра $P_n(t)$ являются решениями дифференциального уравнения

$$(1-t^2)P_n'' - 2tP_n' + n(n+1)P_n = 0 \qquad /11.12/$$

с добавочным условием

$$P_n(1) = 1. \qquad /11.12'/$$

3°. Производящая функция полиномов Лежандра.

Полиномы Лежандра тесно связаны с фундаментальным решением уравнения Лапласа $\frac{1}{r_{MM}}$. Возьмем сферическую систему координат с центром в некоторой фиксированной точке O и полярной осью OM_0. Пусть r_0 и r радиусы-векторы точек M_0 и M, а ϑ - угол между ними. Очевидно можно написать

$$\frac{1}{r_{M_0M}} = \frac{1}{\sqrt{r_0^2 + r^2 - 2rr_0\cos\vartheta}} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{r_0\sqrt{1+\rho^2-2\rho t}}, & \text{для } r<r_0 \\ \dfrac{1}{r\sqrt{1+\rho^2-2\rho t}}, & \text{для } r>r_0 \end{cases},$$

где $t=\cos\vartheta$ $(-1\le t\le 1)$ и $\rho = \frac{r}{r_0} < 1$ или $\rho = \frac{r_0}{r} < 1$.

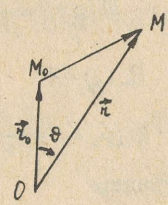


Рис.22.

Функция

$$\psi(\rho, t) = \frac{1}{\sqrt{1+\rho^2-2\rho t}} \qquad /11.13/$$

называется производящей функцией полиномов Лежандра, так как коэффициентами разложения функции /11.13/ в ряд по степеням ρ являются полиномы Лежандра:

$$\psi(\rho,t)=\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)\rho^n=\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\vartheta)\left(\frac{r}{r_0}\right)^n .$$

/11.13'/

Действительно, функция $\frac{1}{r_{M_0M}}$ будет гармонической функцией точки M везде, кроме точки M_0. Поэтому и $\psi(\rho,t)$ гармоническая внутри шара $K^0_{r_0}$ /или $0<\rho<1$ /. Отсюда следует, что каждый член разложения /11.13'/ удовлетворяет уравнению Лапласа. Подставляя $(n+1)$ -й член в уравнение /11,1/, получим после сокращения на общий член $\frac{r^{n-2}}{r_0^n}$:

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\left[\sin\vartheta\,\frac{dP(\cos\vartheta)}{d\vartheta}\right]=0$$

или, учитывая что $\cos\vartheta=t$:

$$\left[(1-t^2)P_n'(t)\right]+n(n+1)P_n(t)$$

/11.9/

Покажем, что и $P(1)=1$. Из формулы /11.13'/ следует:

$$\psi(\rho,+1)=\frac{1}{1-\rho}=\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(1)\rho^n,$$

отсюда $P_n(1)=1$. Аналогично,

$$\psi(\rho,-1)=\frac{1}{1+\rho}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\rho^n=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(-1)\rho^n .$$

Таким образом

$$P_n(\pm1)=(\pm1)^n .$$

/11.14/

4°. Рекуррентные формулы.

Дифференцируя $\psi(\rho,t)$ по ρ, получим:

$$(1-2\rho t+\rho^2)\frac{\partial\psi}{\partial\rho}-(t-\rho)\psi=0,$$

и дальше, учитывая /11.13'/:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1-2\rho t+\rho^2)P_n(t)n\rho^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(t-\rho)P_n(t)\rho^n=0$$

В виду тождества /независимо от ρ и t / коэффициент полученного ряда при ρ^n должен равнятся нулю при всех t :

$$(n+1)P_{n+1}(t)-(2n+1)tP_n(t)+nP_{n-1}(t). \qquad /11.15/$$

Эта - первая рекуррентная формула.

Аналогично, дифференцируя $\psi(\rho,t)$ по t , получим:

$$(1-2t\rho+\rho^2)\frac{\partial\psi}{\partial t}-\rho\psi=0.$$

Отсюда, учитывая соотношение /11.13'/, получаем вторую рекуррентную формулу

$$P'_{n+1}(t)-2tP'_n(t)+P'_{n-1}(t). \qquad /11.16/$$

Подставим в /11.16/ P_{n+1} из /11.15/, тогда:

$$tP'_n(t)-P'_{n-1}(t)=nP_n(t) \qquad /11.17/$$

или, исключая из /11.16/ и /11.17/ $tP'_n(t)$, получим:

$$P'_{n+1}(t)-P'_{n-1}(t)=2(n+1)P_n(t) \qquad /11.18/$$

Эта формула остается справедливой и при $n=0$, если положить $P_{-1}(t)=0$.

Из формулы /11.13'/ можно легко найти $P_0(t)=1$, $P_1(t)=t$, а с помощью /11.15/ можно вычислить $P_n(t)$ $(t>2)$.

Наконец, вычисляем коэффициент a_n при высшей степени t^n полинома $P_n(t)$, из /11.15/ видно, что

$$a_{n+1}=\frac{2n+1}{n+1}a_n. \qquad /11.19/$$

Поставляя сюда $a_0=1$, найдем последовательно $a_1=1$, $a_2=\frac{3}{2}$, $a_3=\frac{5}{2}$ и т.д. и, пользуясь методом индукции, находим:

$$a_n=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{n!}=\frac{(2n-1)!!}{n!}$$

/11.19'/

5°. Ортогональность и норма полиномов Лежандра.

Исходя из дифференциального уравнения /11.12/ и учитывая краевые условия /11.14/, методом изложенным в § 5 3°, можно показать, что полиномы Лежандра ортогональны на интервале $(-1, +1)$:

$$\int_{-1}^{1} P_n(t)P_m(t)\,dt=0 \qquad (m\neq n).$$

/11.20/

Вычислим теперь норму

$$N_n=\int_{-1}^{1}P_n^2(t)\,dt.$$

Сначала рассмотрим полином

$$Q(t)=P_n(t)-\frac{a_n}{a_{n-1}}\,t\,P_{n-1}(t),$$

где a_n - коэффициент при t^n полинома $P_n(t)$, a_{n-1} - коэффициент при t^{n-1} полинома $P_{n-1}(t)$. $Q(t)$, как полином степени $n-2$, может быть представлен в виде:

$$Q(t)=\sum_{k=0}^{n-2}A_k P_k(t)$$

Отсюда следует, что $Q(t)$ ортогонально с $P_n(t)$:

$$\int_{-1}^{+1}P_n(t)\,Q_n(t)\,dt=0.$$

Поэтому

$$N_n=\int_{-1}^{1}P_n(t)\left[\frac{a}{a_{n-1}}t\,P_{n-1}(t)+Q(t)\right]dt=$$

$$=\frac{a_n}{a_{n-1}}\int_{-1}^{1}t\,P_n(t)\,P_{n-1}(t)\,dt,$$

или, выражая $tP_n(t)$ из первой рекуррентной формулы /11.15/:

$$N_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \int_{-1}^{1} \left[\frac{n+1}{2n+1} P_{n+1}(t) + \frac{n}{2n+1} P_{n-1}(t) \right] P_{n-1}(t)$$

$$= \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{n}{2n+1} N_{n-1} .$$

В силу /11.19/:

$$N_n = \frac{2n-1}{2n+1} N_{n-1}, \qquad /11.21/$$

учитывая что $P_0(t)=1$, $N_0=2$, найдем последовательно $N_1=\frac{2}{3}$, $N_2=\frac{2}{5}$, и по индукции:

$$N_n = \frac{2}{2n+1} . \qquad /11.21'/$$

Таким образом полиномы Лежандра $P_n(t)$ образуют ортогональную систему с нормой $N_n=\frac{2}{2n+1}$:

$$\int_{-1}^{1} P_m(t) P_n(t)\, dt = \begin{cases} 0 & \text{, если } m \neq n, \\ \frac{2}{2n+1} & \text{, если } m = n \end{cases} \qquad /11.21''/$$

6°. Дифференциальная формула для полиномов Лежандра.

Докажем, что полином Лежандра $P_n(t)$ может быть представлен в виде

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2-1)^n \qquad /11.22/$$

/формула Родрига / Rodrigues //.

Для доказательства формулы /11.22/ достаточно установить, что

1/ функция $\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n$ является решением уравнения Лежандра /11.12/

2/ $$\frac{1}{2^n n!}\,\frac{d^n}{dt^n}\left[(t^2-1)^n\right]\Big|_{t=1} = 1 .$$

Обозначая $u=(t^2-1)^n$ и учитывая, что $u'(t)=2nt(t^2-1)^{n-1}$, будем иметь

$$(t^2-1)u'-2ntu=0 .$$

Продифференцировав это уравнение $m+1$ раз, получим:

$$(-1+t^2)u^{(m+2)}-(2n-2m-2)tu^{(m+1)}+\left[m(m+1)-2n(m+1)\right]u^{(m)}=0. \text{ x/}$$

Полагая $m=n$, получаем

$$(1-t^2)u^{(n+2)}-2tu^{(n+1)}+n(n+1)u^{(n)}=0,$$

т.е. функция $u^{(n)}=\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n$ удовлетворяет уравнению Лежандра /11.12/.

Рассмотрим теперь производную

$$\frac{d^m}{dt^m}(t^2-1)^n=\frac{d^m}{dt^m}\left[(t+1)^n(t-1)^n\right]=c_0(t+1)^{n-m}(t-1)^n+$$
$$+c_1(t+1)^{n-m+1}(t-1)^{n-1}+\dots+c_n(t+1)^n(t-1)^{n-m}. \quad /11.23/$$

Если $m<n$, то в точках $t=\pm 1$ все слагаемые обращаются в нуль:

$$\frac{d^m}{dt^m}(t^2-1)^n\Big|_{t=\pm 1}=0 .$$

Если же $m=n$, то

$$\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n\Big|_{t=1}=2^n n! ,$$

откуда и следует, что

$$\frac{1}{2^n n!}\,\frac{d^n}{dt^n}\left[(t^2-1)^n\right]\Big|_{t=1}=0 .$$

---

x/ Учитывать, что $[uv]^{(m)}=u^{(m)}v+\binom{n}{1}u^{(m-1)}v'+\binom{n}{2}u^{(m-2)}v''+\dots$
$\dots+\binom{n}{n-1}u'v^{(n-1)}+uv^{(m)}$.

С помощью формулы Родрига /11.22/ можно показать, что полином Лежандра имеет n нулей внутри интервала.

Действительно, непрерывная функция $(t^2-1)^n$ обращается в нуль на концах интервала $(-1,+1)$. По теореме Ролля / Rolle / первая производная имеет хотя бы один нуль внутри интервала и по /11.23/ обращается в нуль на концах интервала. Вторая производная имеет, по крайней мере, два нуля в интервале $(-1,+1)$ и обращается в нуль на концах. Продолжая рассуждения, мы придем к заключению, что n-я производная имеет, по крайней мере, n нулей в промежутке $(-1,+1)$, или точнее, ровно n нулей /как полином n-ой степени/, а на концах /по /11.23// значения, отличные от нуля.

7°. Присоединенные функции Лежандра.

Покажем, что решением дифференциального уравнения /11.9/ при $\lambda = n(n+1)$ являются т.н. присоединенные полиномы Лежандра

$$P_n^{(m)}(t) = (1-t^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dt^m} P_n(t). \qquad /11.24/$$

Для доказательства вводим в уравнение /11.9/ новую неизвестную $z(t)$:

$$x(t) = (1-t^2)^{m/2} z(t).$$

После сокращения на $(1-t^2)^{m/2}$, получаем

$$(1-t^2)z'' - 2(m+1)t z' + [n(n+1) - m(m+1)] z. \qquad /11.25/$$

Нужно показать, что решением этого уравнения является $P_n^{(m)}(t)$. Для этого дифференцируем m раз по t уравнение Лежандра /11.12/, что после некоторых упрощений дает:

$$(1-t^2)\frac{d^{m+2}}{dt^{m+2}}P_n-2(m+1)t\frac{d^{m+1}P_n}{dt^{m+1}}+[n(n+1)+m(m+1)]\frac{d^mP}{dt^m}=0 \qquad /11.25'/$$

Таким образом частным решением уравнения /11.25/ является $P_n^{(m)}(t)$, и, следовательно, /11.24/ является частным решением уравнения /11.9/.

Полученное соотношение /11.24/ между решениями уравнения /11.9/ при $m\neq 0$ и при $m=0$ / уравнения /11.10// справедливо и при произвольных λ. Так как /11.10/ имеет конечные решения в точках $t=\pm 1$ лишь при $\lambda=n(n+1)$, то и уравнение /11.9/ может иметь ограниченные решения только при тех же значениях λ x/.

До сих пор мы предполагали индекс m положительным, однако, можно рассматривать и присоединенные функции $P_n^{(-m)}$. Так как дифференциальное уравнение присоединенных функций /11.9/

$$\frac{d}{dt}\left[(1-t^2)\frac{dP_n^{(m)}}{dt}\right]+\left[(n+1)n-\frac{m^2}{1-t^2}\right]P_n^{(m)}(t)=0 \qquad /11.9'/$$

не меняется при замене m на $-m$, то и $P_n^{(-m)}$ и P_n^m могут отличаться друг от друга только постоянным множителем. Оказывается /см.задачу 6/, что

$$P_n^{(-m)}(t)=(-1)^m\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^{(m)}(t). \qquad /11.26/$$

С помощью /11.24/ и формулы Родрига /11.22/ получаем для присоединенных полиномов Лежандра следующую дифференциальную формулу, справедливую и при положительных

x/ Приведенное рассуждение не строгое.

и при отрицательных m :

$$P_n^{(m)}(t) = \frac{(1-t^2)^{\frac{m}{2}}}{2^n n!} \; \frac{d^{n+m}}{dt^{n+m}} \left(t^2-1\right)^n . \qquad /11.27/$$

8°. Норма присоединенных функций Лежандра.

Исходим из уравнения /11.25'/ умноженного на $(1-t^2)^m$. Результат можно представить в виде:

$$\frac{d}{dt}\left[(1-t^2)^{m+1} \frac{d^{m+1}P_n}{dt^{m+1}}\right] = -\left[n(n+1) - m(m+1)\right](1-t^2) \frac{d^m P_n}{dt^m} . \qquad /11.28/$$

Введем обозначение :

$$L_{n,k}^m = \int_{-1}^{1} P_n^{(m)}(t) P_k^{(m)}(t)\,dt = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^m \frac{d^m P_n}{dt^m} \frac{d^m P_k}{dt^m}\,dt .$$

Теперь:

$$L_{n,k}^m = \left[\frac{d^{m-1}P_k(t)}{dt^{m-1}} \frac{d^m P_n(t)}{dt^m} (1-t^2)\right]\Bigg|_{-1}^{1} -$$

$$-\int_{-1}^{1} \frac{d^{m-1}P_n(t)}{dt^{m-1}} \frac{d^{m-1}P_k(t)}{dt^{m-1}}\,dt = \left[n(n+1) - m(m-1)\right] \int_{-1}^{1} \frac{d^{m-1}P_n(t)}{dt^{m-1}} \times$$

$$\times \frac{d^{m-1}P_k(t)}{dt^{m-1}} (1-t^2)^{m-1}\,dt = (m+n)(n-m+1)\, L_{n,k}^{m-1} .$$

/Учтено дифференциальное соотношение /11.28//. Продолжив аналогичные преобразования, приходим к формуле

$$L_{n,k}^m = (n+m)(n+m-1)\cdots(n+1)\,n\,\cdots(n-m+1)\, L_{n,k}^0 =$$

$$= \frac{(n+m)!}{(n-m)!} L_{n,k}^0 .$$

Отсюда, пользуясь равенством /11.21"/,

$$L_{n,k}^0 = \int_{-1}^{1} P_n(t) P_k(t)\,dt = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad k \neq n, \\ \dfrac{2}{2n+1}, & \text{при} \quad k = n, \end{cases}$$

и окончательно:

$$\int_{-1}^{1} P_n^{(m)}(t)\, P_k^{m}(t)\,dt = \begin{cases} 0 & , \text{при} \quad k \neq n \\ \dfrac{2}{2n+1} \dfrac{(n+m)!}{(n-m)!} & , \text{при} \quad k = n . \end{cases} \qquad /11.29/$$

Таким образом присоединенные функции с одинаковыми верхними индексами ортогональны между собой.

9°. Сферические функции.

Пользуясь выведенными выше результатами, получаем целую систему сферических функций $Y(\varphi, \vartheta)$, определенных на поверхности единичной сферы:

$$Y(\vartheta, \varphi) = \Theta(\vartheta)\Phi(\varphi) , \qquad /11.7/$$

обладающих свойствами ограниченности и периодичности /11.6/:

$$Y_{n,m}(\vartheta, \varphi) = e^{im\varphi} P_n^{(m)}(\cos\vartheta), \qquad /11.30/$$

где $n = 0, 1, 2, \ldots$, а $m = -n, -n+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n$, т.е. каждому n соответствует $2n+1$ линейно независимых сферических функций[x/].

---

x/ Некоторые авторы считают верхний индекс присоединенных функций положительным, а зависимость от φ выражают через множители $\cos m\varphi$ и $\sin m\varphi$ /11.8'/. Тогда фиксированному значению n соответствует следующие $2n+1$ линейно независимых сферических функций

$$Y_n^0 = P_n(\cos\vartheta)$$

$$\left.\begin{array}{ll} Y_n^1 = P_n^{(1)}(\cos\vartheta)\cos\varphi, & Y_n^{-1} = P_n^{(1)}(\cos\vartheta)\sin\varphi, \\ Y_n^2 = P_n^{(2)}(\cos\vartheta)\cos 2\varphi, & Y_n^{-2} = P_n^{(2)}(\cos\vartheta)\sin 2\varphi, \\ \text{-----------} & \text{-----------} \\ Y_n^n = P_n^{(n)}(\cos\vartheta)\cos n\varphi, & Y_n^{-n} = P_n^{(n)}(\cos\vartheta)\sin n\varphi. \end{array}\right\} \qquad /11.30'/$$

Конечно, эти отличия не имеют существенного значения.

Функции $Y_{n,0}=P_n(\cos\vartheta)$ не зависят от φ и называются зональными. Так как $P_n(t)$ имеет ровно n нулей внутри промежутка $(-1,+1)$, то сфера разделится на $(n+1)$ широтных зон, внутри которых $P_n(\cos\vartheta)$ сохраняет знак. Функции $Y_{n,m}$ $(m\neq 0)$ называются тессеральными. Нулевые линии для мнимой или действительной частей этих функций делят сферу на криволинейные четырехугольники / tessarae - клетки/, ограниченные меридианами и параллелями, которым соответствуют различные знаки мнимой или действительной частей присоединенных функций.

Сферические функции ортогональны между собой на единичной сфере.

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} Y_{n_1 m_1} Y_{n_2 m_2} \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi = \int_0^{2\pi} e^{i(m_1-m_2)\varphi} d\varphi \int_0^{\pi} P_{n_1}^{(m_1)}(\cos\vartheta) P_{n_2}^{(m_2)}(\cos\vartheta)\times$$

$$\times\sin\vartheta\, d\vartheta = 2\pi\delta_{m_1 m_2}\int_{-1}^{1} P_{n_1}^{(m_1)}(t) P_{n_2}^{(m_1)}(t)\,dt =$$

$$= \frac{4\pi(m+n)!}{(2n+1)(n-m)!}\delta_{m_1 m_2}\delta_{n_1 n_2}. \qquad /11.31/$$

Сферические функции /11.30/ или /11.30'/ образуют полную ортогональную систему функций, т.е. любую непрерывную на единичной сфере функцию с непрерывными первыми производными можно равномерно аппроксимировать сферическими функциями.

10°. Решение краевой задачи для шаровой области.

Закончим рассмотрение сформулированной в 1° краевой задачи для уравнения Лапласа //11.1/, /11.2//.

Зависимость решения от r определяется уравнением Эйлера /11.4/, где $\lambda=n(n+1)$:

$$r^2R''+2rR'-n(n+1)R=0. \qquad /11.4'/$$

Будем искать частные решения этого уравнения в виде $R(r)=r^{\alpha}$. Подставляя искомую форму решения в /11.4'/, получим для определения α следующее характеристическое уравнение:

$$\alpha(\alpha+1)-n(n+1)=0,$$

отсюда $\alpha=n$ и $\alpha=-(n+1)$. Следовательно, имеем два линейно независимых частных решения уравнения /11.4'/:

$$R_1(r)=r^n \quad \text{и} \quad R_2(r)=\frac{1}{r^{n+1}}. \qquad /11.32/$$

Первое из них регулярно в начале координат, второе в бесконечности, поэтому первое соответствует решению внутренних задач, а второе - внешних задач.

Таким образом, решение внутренних задач можно искать в виде:

$$u(r,\vartheta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}A_{nm}r^nY_{nm}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}A_{nm}r^nP_n^{(m)}(\cos\vartheta)e^{im\varphi}, \qquad /11.33/$$

внешних задач:

$$u(r,\vartheta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}A_{nm}\frac{1}{r^{n+1}}Y_{nm}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}A_{nm}\frac{P_n^{(m)}(\cos\vartheta)e^{im\varphi}}{r^{n+1}}, \qquad /11.33'/$$

а постоянные A_{nm} определяются из краевого условия /11.2/ с учетом ортогональности собственных функций Y_{nm} /11.31/. Так например, для внутренней задачи Дирихле краевое условие следующее:

$$u(r_0,\vartheta,\varphi)=f_1(\vartheta,\varphi),$$

подставляя сюда /11.33'/, найдем

$$u(r_0,\vartheta,\varphi)=f_1(\vartheta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}A_{nm}r_0^{m}P_n^{(m)}(\cos\vartheta)e^{im\varphi},$$

умножая обе стороны этого равенства на $\bar{Y}_{k,l} = P_k^{(l)} e^{-ik\varphi}$ и интегрируя по поверхности единичной сферы, учитывая /11.31/, получим:

$$\iint f_1(\vartheta,\varphi)\bar{Y}_{kl}\, d\varphi \sin\vartheta\, d\vartheta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f_1(\vartheta,\varphi) e^{-il\varphi} P_k^{(l)}(\cos\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi =$$

$$= \frac{4\pi}{2k+1}\frac{(k+l)!}{(k-l)!} A_{kl} r_0^k . \qquad /11.34/$$

11°. Гармонические полиномы.

Функции $Y_{nm} = r^n e^{im\varphi} P_n^m(\cos\vartheta)$ – гармонические всюду, кроме бесконечной точки. Покажем, что в декартовых координатах x, y, z они представляют однородные полиномы n-ой степени /гармонические полиномы/.

Действительно по /11.24/ $P_n^m(\cos\vartheta) = \sin^m\vartheta\, Q_{n-m}(\cos\vartheta)$, где Q_{n-m} полином $(n-m)$-ой степени относительно $\cos\vartheta$ /содержит только четные или нечетные степени $\cos\vartheta$ /. Отсюда общий член функции Y_{nm} можно представить в виде:

$$r^n e^{im\varphi} \sin^m\vartheta \cos^{n-m-2q}\vartheta ,$$

где q меняется от 0 до $\frac{n-m}{2}$. Учитывая, что

$$r^m e^{im\varphi}\sin^m\vartheta = r^m(\cos\varphi + i\sin\varphi)^m \sin^m\vartheta =$$

$$= (r\cos\varphi\sin\vartheta + i r\sin\varphi\sin\vartheta)^m = (x+iy)^m ,$$

а

$$r^{n-m}\cos^{n-m-2q} = (r\cos\vartheta)^{n-m-2q} r^{2q} =$$

$$= z^{n-m-2q}(x^2+y^2+z^2)^q ,$$

видим, что $r^n e^{im\varphi} P_n^{(m)}(\cos\vartheta)$ действительно представляет собой однородный полином n -ой степени. Очевидно, число линейно независимых гармонических полиномов n -ой степени - $(2n+1)$.

<u>Задачи к § 11.</u>

1. С помощью производящей функции полиномов Лежандра вычислить пять первых полиномов $(P_0, P_1, P_2, P_3, P_4)$.

2. Исходя из рекуррентных формул и, учитывая что $P_0=1$ и $P_1=1$, вычислить полиномы Лежандра P_2, P_4, P_5.

3. Найти полиномы Лежандра P_8 и P_9 .

<u>Указание.</u> Использовать выражение для коэффициента a_n при t^n полинома $P_n(t)$ /11.19'/ и рекуррентную формулу для коэффициентов полинома /11.11'/.

4. Вычислить все присоединенные полиномы Лежандра при $n=0$, 1, 2, 3, 4.

5. Вывести следующие рекуррентные формулы для присоединенных полиномов Лежандра:

$$(n+1) P_{n+1}^{(m)} - (2n+1) t P_n^{(m)} - m(2n+1)\sqrt{1-t^2} P_n^{(m-1)} + n P_{n-1}^{(m)} = 0,$$

$$P_{n+1}^{(m)} - P_{n-1}^{(m)} = (2n+1)\sqrt{1-t^2} P_n^{(m-1)},$$

$$(n+1-m) P_{n+1}^{(m)} - (2n+1) t P_n^{(m)} + (n+m) P_{n-1}^{(m)} = 0.$$

<u>Указание:</u> Для вывода первой формулы дифференцировать /11.15/ m раз по t и умножить на $(\sqrt{1-t^2})^m$, а для вывода второй формулы дифференцировать /11.15/ $(m-1)$ раз и умножить на $(\sqrt{1-t^2})^m$. Третья формула получается из двух первых после исключения члена с $\sqrt{1-t^2}$.

6. Вывести формулу /11.26/.

<u>Указание</u>. Сравнить коэффициенты высших степеней в выражении /11.26/.

7. Определить через краевые значения коэффициенты A_{nm} в разложениях /11.33/ и /11.33'/ для внешней задачи Дирихле и для внешней и внутренней задач Неймана.

8. Решить внутреннюю и внешнюю задачи Неймана для сферы в случае краевого условия

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = A\cos\vartheta .$$

9. Пусть в электростатическое поле однородной изотропной среды с диэлектрической постоянной ε_1 помещен шар радиуса a из диэлектрика с постоянной ε_2. Определить поле вне и внутри шара, если задана функция u_0, представляющая потенциал невозмущенного поля/в отсутствии диэлектрического шара/.

<u>Указание</u>. Решение задачи искать в виде

$$u = \begin{cases} u_1 = u_0 + v_1 & \text{вне шара} \\ u_2 = u_0 + v_2 & \text{внутри шара.} \end{cases}$$

/ v - возмущение, вызванное шаром/. Потенциал u удовлетворяет уравнению Δu при дополнительных условиях на сфере $u_1 = u_2$ и $\varepsilon_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} = \varepsilon_2 \frac{\partial u_2}{\partial n}$. Так как потенциал невозмущенного поля и его нормальная производная непрерывны всюду, то потенциал v будет определен уравнением $\Delta v = 0$, а на сфере условиями: $v_1 = v_2$ и $\varepsilon_1 \frac{\partial v_1}{\partial n} - \varepsilon_2 \frac{\partial v_2}{\partial n} = -(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\frac{\partial u_0}{\partial n}$.

$\frac{\partial u_0}{\partial n}$ /на сфере/ - некоторая известная функция ϑ и φ, которую можно разлагать по сферическим функциям:

$$\frac{\partial u_0}{\partial n} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} A_{nm} Y_{nm}(\varphi, \vartheta).$$

v_1 и v_2 можно искать в виде

$$v_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \frac{B_{nm}}{r^{n+1}} Y_{nm}(\varphi, \vartheta); \quad v_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} C_{nm} r^n Y_{nm}(\vartheta, \varphi).$$

С помощью граничных условий для v можно выразить B_{nm} и C_{nm} через A_{nm}.

10. Решить задачу о поляризации диэлектрического шара в однородном поле.

11. Решить задачу о поляризации диэлектрического шара в поле точечного заряда.

§ 12. Метод конечных разностей.

1°. Замена дифференциального уравнения уравнением в конечных разностях.

Производная от функции $f(x)$ представляет собою предел отношения

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{или} \quad \frac{f(x) - f(x-\Delta x)}{\Delta x}, \qquad /12.1/$$

при $\Delta x \to 0$. Чем меньше число Δx, тем точнее выражение /12.1/ совпадает со значением производной $f(x)$ в точке x. Следовательно, первая производная от функции $f(x)$ приближенно выражается формулой:

$$f'(x) \approx \frac{1}{\Delta x}\left[f(x+\Delta x) - f(x)\right] \approx \left[f(x) - f(x-\Delta x)\right]. \qquad /12.1'/$$

Отсюда можно получить следующее, приближенное выражение для второй производной:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} \approx \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{df(x+\Delta x)}{dx} - \frac{df(x)}{dx}\right] \approx \frac{1}{(\Delta x)^2}\left[f(x+\Delta x) - 2f(x) + f(x-\Delta x)\right]. \qquad /12.2/$$

Аналогичные соотношения можно получить и в случае нескольких переменных и для производных более высокого порядка. Заменив, например, в обыкновенном дифференциальном уравнении производные приближенными выражениями типа /12.11/ и /12.2/, мы приходим к так называемому разностному уравнению, связывающему значения искомой функции в некоторых точках на оси x, расположенных друг от друга на расстоянии Δx, т.е. в точках $x_k = x + k\Delta x$.

Будем искать методом конечных разностей приближенное решение внутренней задачи Дирихле для двухмерного уравнения Лапласа:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

т.е. гармоническую в некоторой области S функцию, принимающую на границе σ области S заданные значения $u|_\sigma = f(P)$.

По /12.2/

$$u_{xx} \approx \frac{1}{(\Delta x)^2}\left[u(x+\Delta x, y) - 2u(x,y) + u(x-\Delta x, y)\right] = \frac{\Delta_{xx} u}{(\Delta x)^2},$$

$$u_{yy} \approx \frac{1}{(\Delta y)^2}\left[u(x, y+\Delta y) - 2u(x,y) + u(x, y-\Delta y)\right] = \frac{\Delta^2_{yy} u}{(\Delta y)^2}.$$

Положив $\Delta x = \Delta y = h$, можно заменить уравнение Лапласа следующим разностным уравнением:

$$u(x+h, y) + u(x-h, y) + u(x, y+h) + u(x, y-h) - 4u(x,y) = 0. \qquad /12.3/$$

Следовательно, получится система N алгебраических уравнений с N неизвестными / N - число внутренних узловых точек в области S_k /. Для точек M_{ik}^{k}, наименьшее расстояние которых до σ_k не больше, чем h, уравнение /12.3'/ неоднородное, для более внутренних точек M_{ik} - /12.3'/ однородное.

2°. Существование и единственность решения системы разностных уравнений /12.3'/.

Как известно, алгебраическая система N линейных неоднородных уравнений с N неизвестными имеет одно и только одно решение, если детерминант системы отличается от нуля, но, с другой стороны, тогда соответствующая однородная система имеет только тривиальное /нулевое/ решение. Таким образом, достаточно убедиться в том, что система однородных уравнений, соответствующих уравнениям /12.3'/, имеет лишь тривиальное решение. Переход от системы неоднородных уравнений /12.3'/ к соответствующей системе однородных уравнений эквивалентен переходу от неоднородных краевых значений f_k к нулевым значениям f_k. Нужно доказать, что при $f_k = 0$ система разностных уравнений /12.3'/ имеет лишь тривиальное решение, т.е. в области S_k все $u_{i,k}^{(k)}$ равны нулю.

Пусть некоторое $u_{i_1,k_1} \neq 0$; для определенности будем считать, что $u_{i_1,k_1} > 0$. Пусть u_{i_0,k_0} - максимальное значение нашей сетчатой функции, так что

$$u_{i,k} \leq u_{i_0 k_0}.$$

По /12.3'/:

$$u_{i_0,k_0} = \frac{1}{4}\left(u_{i_0-1,k_0} + u_{i_0+1,k_0} + u_{i_0,k_0-1} + u_{i_0,k_0+1}\right).$$

Покроем область S квадратной сеткой с вершинами в точках $x = x_i = ih$, $y = y_k = kh$. Заменим область S многоугольником S_h, состоящим из попавших в S квадратов нашей сетки, причем границу области σ заменим ломанной линией σ_h /см.рис.23/. Будем рассматривать значения функции u только в узловых точках $M_{ik}^{h} = (ih, kh)$ и обозначим $u(M_{ik}) = u_{ik}$. В узловых точках на σ_h определим граничную функцию f_h, полагая ее равной значений функции f в ближайшей точке границы σ. Степень неопределенности в выборе f_h может быть в силу непрерывности функции $f(P)$ сделана сколь угодно малой, если h достаточно мало.

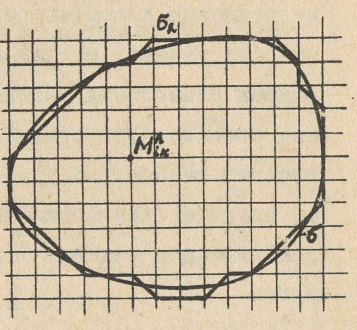


Рис. 23.

Таким образом приближенное решение внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа сводится к нахождению функции, удовлетворяющей в узловых точках M_{ik}^{h} внутри σ_h разностному уравнению Лапласа /12.3/ и принимающей в узловых точках на σ_h значения, равные f_h.

В каждой внутренней узловой точке M_{ik}^{h} имеем свое уравнение /12.3/, или в наших обозначениях:

$$u_{i+1,k}^{(h)} + u_{i,k+1}^{(h)} + u_{i-1,k}^{(h)} + u_{i,k-1}^{(h)} - 4u_{i,k}^{(h)} = 0 . \qquad /12.3'/$$

Это равенство может иметь место только в том случае, если

$$u_{i_0-1,k_0} = u_{i_0,k_0-1} = u_{i_0+1,k_0} = u_{i_0,k_0+1} = u_{i_0,k_0}.$$

Последовательно проводя аналогичные рассуждения для u_{i_0+1,k_0}, u_{i_0+2,k_0} и т.д., мы достигнем граничной точки, что приводит нас к противоречию, так как по условию граничные значения равны нулю. Предположение $u_{i,k}<0$ также приводит к противоречию. Отсюда следует, что $u_{i,k}=0$ во всех узловых точках области S_k, т.е. система однородных разностных уравнений /12.3'/ имеет лишь тривиальное решение. Тем самым доказана единственность решения системы разностных уравнений /12.3'/. Решая эту систему, мы получаем сетчатую функцию, которая представляет собой приближенное решение исходной задачи для уравнения Лапласа.

3°. Некоторые общие замечания.

Здесь мы рассматривали только случай квадратичной сетки, который имеет то преимущество перед прямоугльной сеткой с неравномерными делениями по осям, что соответствующее дифференциальному уравнению разностное уравнение имеет тогда наиболее простую форму. Однако применение только квадратичной сетки имеет один недостаток. При замене краевой σ, ограничивающей область S, на ломанную σ_k необходимо перенести граничные условия для определенного решения тем или иным путем с σ на σ_k. Но при переносе граничных значений u с σ на σ_k, если не все вершины ломанной σ_k лежат на σ, неизбежна некоторая ошибка, величина ее будет тем больше, чем дальше σ_h отходит от σ. Поэтому иногда берется такая сетка, чтобы ломанная $\bar{\sigma}$ построенная на ней, наилучшим образом подходила бы к σ. Если контур σ таков, что для него при квадратной сетке можно указать ломанную σ_h, вершины которой либо точно лежат на σ, либо очень близки к σ, то проще всего употреблять квадратную сетку. Если же этого нет, то, для уменьшения погрешности при переносе граничных значений, более выгодным будет применение прямоугольной неквадратной сетки, в которой можно построить ломанную $\bar{\sigma}$, более близкую к σ, чем при квадратной сетке /см.рис.23 и 24/.

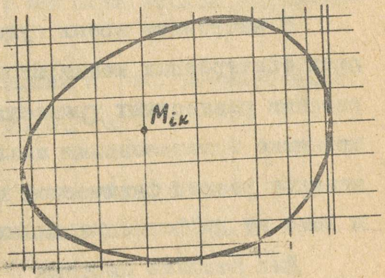


Рис. 24.

Метод конечных разностей применим как для уравнений других типов, так и для интегральных уравнений, но каждый раз нужно специально исследовать имеет ли полученная система алгебраических уравнений решения или нет. Для уравнения теплопроводности и для волнового уравнения весьма существенным является выбор основной сетки. Можно получить для этих уравнений как хорошие, так и плохие результаты /см. задачу 3/. Именно оказывается, что нужно выбирать для пространственных переменных не слишком мелкую сетку.

Наконец отметим, что метод сетки применим не только в случае двух независимых переменных, но и в случае многих переменных.

Если последовательные приближения $\left\{ x_i^{k} \right\}$ сходятся в пределе к x_i

$$\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i ,$$

то эти предельные значения являются искомым решением системы /12.4/.

Хотя метод последовательных приближений применим не для всякой системы уравнений, область применения метода довольно широка, в частности, система разностных уравнений /12.3'/ может быть решена этим методом /см. задачу 5/.

В настоящее время существуют, кроме быстродействующих электронных машин, много математических машин для решения разностных уравнений. Эти машины построены на принципе использования аналогии, существующей между явлениями разной физической природы, описываемыми одними и теми же дифференциальными уравнениями.

Для решения системы уравнений /12.3'/ можно использовать простой электроинтегратор, представляющий сетку одинаковых омических сопротивлений /см.рис.24/. Обозначим v_{ik} потенциал в точке M_{ik}, и через $j_{ik}^{(1)}, j_{ik}^{(2)}, j_{ik}^{(3)}, j_{ik}^{(4)}$ – соответственно токи в звеньях $M_{ik}M_{i-1,k}$, $M_{ik}M_{i,k+1}$, $M_{ik}M_{i+1,k}$, $M_{ik}M_{i,k-1}$. По закону Ома

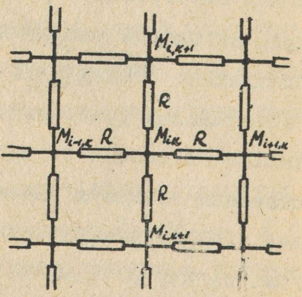


Рис. 25.

$$j_{ik}^{1} = \frac{v_{i-1,k} - v_{i,k}}{R}, \quad j_{ik}^{2} = \frac{v_{i,k+1} - v_{ik}}{R}$$

и т.д.,

4°. Метод последовательных приближений для решения системы разностных уравнений.

Для строгого обоснования метода конечных разностей надо убедиться в том, что при достаточно малом h функция $u_{i,k}^{h}$ сколь угодно мало отличается от точного решения задачи Дирихле. Оставим эту проблему для самостоятельного анализа /см.задачу 4/ и остановимся коротко на одном приближенном методе решения системы разностных уравнений /12.3'/, так как точные методы решения системы алгебраических уравнений с большим числом неизвестных очень трудоемкие.

Пусть дана система уравнений с n неизвестными:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n.$$

Запишем эту систему в виде

$$\begin{aligned} x_1 &= c_{01} - (c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= c_{0n} - (c_{n1}x_1 + \cdots + c_{n,n-1}x_{n-1}), \end{aligned} \qquad /12.4/$$

где каждое уравнение разрешено относительно соответствующей неизвестной. Выбирая в качестве нулевого приближения произвольные числа $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ и подставляя их в правые части уравнений /12.4/, найдем первое приближение $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}$. Продолжая этот процесс, определим $(k+1)$-е приближение по формулам

$$x_1^{(k+1)} = c_{10} - \left[c_{12}x_2^{(k)} + \cdots + c_{1n}x_n^{(k)}\right],$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_n^{(k+1)} = c_{n0} - \left[c_{n1}x_1^{(k)} + \cdots + c_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)}\right].$$

а по закону Кирхгофа

$$j_{ik}^{1} + j_{ik}^{2} + j_{ik}^{3} + j_{ik}^{4} = 0 .$$

Следовательно,

$$V_{ik} = \frac{V_{i,k-1} + V_{i,k+1} + V_{i+1,k} + V_{i-1,k}}{4} .$$

Это соотношение аналогично уравнению /12.3'/ и является основой для электромоделирования уравнения Лапласа.

В узлах границы $б_k$ при помощи специального делительного устройства задаются напряжения, соответствующие краевым значениям f_k функции u. Устанавливающееся распределение напряжений и дает приближенное решение рассматриваемой задачи.

Задачи к § 12.

1. Методом конечных разностей решить задачу Дирихле для уравнения $\Delta u = 0$ внутри прямоугольника $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, подразделяя каждую из его сторон на 8 равных частей, если граничные условия имеют вид:

$$u|_{x=0} = \frac{y}{b}\left(1-\frac{y}{b}\right), \quad u|_{y=b} = \frac{x}{a}\sin\frac{\pi}{a}x, \quad u|_{x=a} = u|_{y=0} = 0 .$$

2. Решить методом конечных разностей задачу Дирихле для уравнения Δu внутри единичного круга, если $u|_{\rho=1} = xy$. Выбрать квадратную сетку $x_i = ih$, $y_k = kh$, где $h = 0,2$. Сравнить приближенное решение с точным /см. задачу 5 к § 8/.

3. Решить методом конечных разностей уравнение $u_t = u_{xx}$, если $u(x,0) = \begin{cases} 0, & x<0, \\ 1, & x>0, \end{cases}$

положив шаг сетки вдоль значений t равным κ, а вдоль значений x равным h. Рассмотреть частные случаи: 1/ $h^2=\kappa$, 2/ $h^2=2\kappa$, 3/ $h^2=4\kappa$, 4/ $h^2=\frac{1}{2}\kappa$ и выяснить, какие приближенные решения лучше отражают затухающий характер процесса теплопроводности.

Указание. Уравнение в конечных разностях, соответствующее дифференциальному уравнению задачи, следующее:

$$u(t+\kappa,x)=\frac{\kappa}{h^2}u(t,x+h)+\left(1-\frac{2\kappa}{h^2}\right)u(t,x)+\frac{\kappa}{h^2}u(t,x-h).$$

4. Доказать, что если шаг сетки h достаточно мал, то функция $u_{ik}^{(h)}$ сколь угодно мало отличается от точного решения u.

Указание. Достаточно показать, что во всех узлах внутри S_h, $|u_h-u|<\varepsilon$, если $h<\delta(\varepsilon)$. Пусть начало координат - внутри области S. Выберем $\delta(\varepsilon)$ так, чтобы $\max|u_h-u|$ в точках σ_h был меньше $\varepsilon/2$. Введем вспомогательную функцию:

$$v_h=u_h-u-\frac{\varepsilon}{2D^2}(D^2-x^2-y^2)-\frac{\varepsilon}{2},$$

D - диаметр области S, т.е. максимальное расстояние между точками области S. В точках на σ_h $v_h>0$, так как $|u_h-u|<\frac{\varepsilon}{2}$ и $D^2>x^2+y^2$. Покажем, что при достаточно малом и во всех узлах в S, $v_h<0$ и, следовательно $u_h-u<\varepsilon$. Применим к функции v_h разностный оператор Лапласа Δ_h: $\Delta_h v_h=\Delta_h u_h-\Delta_h u+\frac{\varepsilon}{2D^2}\Delta_h(x^2+y^2)$ $[\Delta_h\varphi=\varphi(x+h,y)+\varphi(x-h,y)+\varphi(x,y+h)+\varphi(x,y-h)-\varphi(x,y)]$, при этом $\Delta_h u_h=0$, $\Delta_h(x^2+y^2)=4h^2$, $|\Delta_h u|=|\Delta_h u-h^2\Delta u+h^2\Delta u|\le|\Delta_{xx}u-h^2u_{xx}|+|\Delta_{yy}u-h^2u_{xx}|<\frac{Mh^4}{6}$, где M — верхняя граница значений $|u_{xxxx}|$ и $|u_{yyyy}|$ в узловых точках внутри S (использовать разложения Тэйлора для $u(x+h,y)$, $u(x-h,y)$, $u(x,y-h)$, $u(x,y+h)$:

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1!}f'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\frac{h^3}{3!}f'''(x)+\frac{h^4}{4!}f^{(IV)}(x+\theta h)$$
$$(0<\theta<1)).$$

Поэтому

$$\Delta_h v_h > 4h\frac{\varepsilon}{2D^2}-\frac{Mh^4}{6}$$

и при достаточно малом h, $\Delta_h v_h \to 0$. Но тогда легко видеть, что v_h не может принимать наибольшее значение во внутренних узловых точках S_h. Отсюда следует, что во всех внутренних точках $v_h<0$, так как она отрицательна на σ_h.

Рассматривая функцию

$$w_h=u-u_h-\frac{\varepsilon}{2D^2}(D^2-x^2-y^2)-\frac{\varepsilon}{2},$$

можно убедиться, что $(u-u_h)<\varepsilon$. Сопоставляя оба результаты, получаем, что $|u-u_h|<\varepsilon$.

5. Показать, что система разностных уравнений /12.3'/ может быть решена методом последовательных приближений.

Указание. Разделим все внутренние узловые точки области S_h на n групп. $C_h^{(1)}$ — совокупность внутренних узловых точек, отстоящих от σ_h на расстоянии h; $C_h^{(2)}$ — совокупность точек, отстоящих от σ_h на расстоянии $2h$ и т.д.

Нужно доказать, что $\lim\limits_{p\to\infty} v_{ik}^{(p)}=0$, где $v_{ik}^{(p)}=u_{ik}-u_{ik}^{(p)}$, u_{ik} — точное решение си. $u_{ik}^{(p)}$ — p-ое приближение. По /12.3'/

$$v_{ik}^{(p)}=\frac{1}{4}\left(v_{i+1,k}^{(p-1)}+v_{i,k+1}^{(p-1)}+v_{i-1,k}^{(p-1)}+v_{i,k-1}^{(p-1)}\right),$$

а на σ_h $v_{ik}^{(p)}=0$. Положим, что $\max v_{ik}^{(p)}=A_p$, и оценим $(p+1)$-е приближение: $v_{ik}^{(p+1)}\le\frac{3}{4}A_p$ на $C_h^{(1)}$, $v_{ik}^{(p+1)}\le(1-\frac{1}{4^2})A_p$ на $C_h^{(2)},\ldots,$ $v_{ik}^{(p+1)}\le(1-\frac{1}{4^n})A_p$ на $C_h^{(n)}$. Отсюда $A_{p+1}\le\alpha A_p$, где $\alpha=1-\frac{1}{4^n}$, т.е. $\lim\limits_{p\to\infty}A_p=0$. Аналогично можно показать, что $\lim\limits_{p\to\infty}B_p=0$, где $B_p=\min v_{ik}^{p}$.

6. Решить методом Фурье уравнение Лапласа внутри прямоугольника $0\le x\le a$, $0\le y\le b$, если оно на контуре принимает заданные значения

$$u(0,y)=\varphi_0(y),\quad u(a,y)=\varphi_1(y),\quad 0<y<b,$$
$$u(x,0)=\psi_0(x),\quad u(x,b)=\psi(x),\quad 0<x<a,$$

причем $\varphi_0(0)=\psi_0(0)$, $\varphi_0(b)=\psi_1(0)$, $\varphi_1(0)=\psi_1(a)$, $\varphi_1(b)=\psi_1(a)$.

<u>Ответ</u>:
$$u=\frac{2}{b}\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\operatorname{sh}\frac{n\pi(a-x)}{b}\int_a^b\varphi_0(y)\sin\frac{\pi ny}{b}dy+$$
$$+\operatorname{sh}\frac{n\pi x}{b}\int_a^b\varphi_1(y)\sin\frac{\pi ny}{b}dy\Big]\frac{\sin\frac{\pi ny}{b}}{\operatorname{sh}\frac{n\pi a}{b}}+$$
$$+\frac{2}{b}\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\operatorname{sh}\frac{n\pi(b-y)}{a}\int_a^b\psi_0(x)\sin\frac{\pi nx}{a}dx$$
$$+\operatorname{sh}\frac{\pi nx}{a}\int_0^a\psi_1(x)\sin\frac{\pi nx}{a}dx\Big]\frac{\sin\frac{\pi nx}{a}}{\operatorname{sh}\frac{\pi nb}{a}}.$$

<u>Указание.</u> Разбить решение задачи на две части:

1/ на нахождение гармонической функции $u(x,y)$, удовлетворяющей граничным условиям:

$$u_1(0,y)=\varphi_0(y),\quad u_1(x,0)=0,\quad u_1(a,y)=\varphi_1(y),\quad u_1(x,b)=0;$$

2/ на нахождение гармонической функции $u_2(x,y)$:

$$u_2(0,y)=0,\quad u_1(x,0)=\psi_0(x),\quad u_1(a,y)=0,\quad u_1(x,b)=\psi_1(x).$$

7. Найти точное решение задачи 1 и сравнить с ее приближенны решением.

Г Л А В А IУ

УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

§ 13. Распространение тепла на прямой.

1°. Смешанная задача с однородными краевыми условиями.

Нужно найти решение однородного уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx}, \tag{13.1}$$

удовлетворяющее следующим дополнительным условиям

$$u(x,0) = \varphi(x), \tag{13.2}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0. \tag{13.3}$$

Эту задачу можно решить методом Фурье, полагая $u = X(x)T(t)$. Для определения функции $X(x)$ получаем уже известную нам задачу Штурма-Лиувилля /см. §5, 5°/ и найти нетривиальное решение уравнения

$$X'' + \lambda X = 0 \tag{5.5'}$$

с дополнительными условиями

$$X(0) = X(l) = 0, \tag{5.7}$$

Собственными значениями которой являются:

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{5.16}$$

нормированными собственными функциями

$$X_n = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{\pi n}{l} x. \tag{5.18}$$

Из уравнения для $T(t)$:

$$T' + \lambda a^2 T = 0$$

/13.4/

найдём $T_n(t)$:

$$T_n(t) = C_n e^{-a^2 \lambda_n t}$$

/13.5/

Решение исходной задачи будем искать в виде суммы:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t} \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n}{l} x ,$$

/13.6/

где коэффициенты C_n можно определить с помощью начального условия /13.2/

$$C_n = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi$$

/13.7/

Ряд /13.6/ с коэффициентами C_n , определяемыми по /13.17/, сходится равномерно и представляет непрерывную функцию при $0 < t < t_0$, $0 < x < l$, если функция $\varphi(x)$ непрерывна, имеет кусочно- непрерывную производную и удовлетворяет условиям $\varphi(0) = 0$, $\varphi(l) = 0$ / см. задачу 1/.

Преобразуем полученное решение /13.6/, заменяя C_n их значениями:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi \right] e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x =$$

$$= \frac{2}{l} \int_0^l \sum_{n=1}^{\infty} \left[\varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi \sin \frac{\pi n}{l} x \, e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t} \right] \varphi(\xi) \, d\xi ,$$

или, обозначая

$$G_l(x,\xi,t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi n}{l} \xi ,$$

/13.8/

$$u(x,t) = \int_0^l G_l(x,\xi,t) \varphi(\xi) \, d\xi .$$

/13.9/

Функция мгновенно точечного источника или функция Грина $G_l(x,\xi,t)$ представляет распределение температуры в стержне в момент времени t, если температура в начальный момент $t=0$ равна нулю и в этот момент в точке $x=\xi$ мгновенно выделяется некоторое количества тепла q. Действительно, в ε окрестности точки ξ $(\xi-\frac{\varepsilon}{2},\xi+\frac{\varepsilon}{2})$ выделяемое тепло q вызывает в начальный момент повышение температуры интервала, так что внутри этого интервала начальная температура $\varphi_\varepsilon(x)\neq 0$. Можно считать, что $\varphi_\varepsilon(x)$ положительная, непрерывная и дифференцируемая функция, для которой

$$c\rho\int_{\xi-\varepsilon/2}^{\xi+\varepsilon/2}\varphi_\varepsilon(\xi)\,d\xi=q$$

Процесс распространения температуры в этом случае описывается функцией

$$u_\varepsilon(x,t)=\int_0^l G_l(x,\xi,t)\varphi_\varepsilon(\xi)\,d\xi=\int_{\xi-\varepsilon/2}^{\xi+\varepsilon/2}G_l(x,\xi,t)\cdot\varphi_\varepsilon(\xi)\,d\xi=$$

$$=G_l(x,\xi^*,t)\int_{\xi-\varepsilon/2}^{\xi+\varepsilon/2}\varphi_\varepsilon(\xi)\,d\xi=\frac{q}{c\rho}G_l(x,\xi^*,t),$$

где ξ^* – некоторая средняя точка нашего интервала, при $\varepsilon\to 0$ получаем:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}u_\varepsilon(x,t)=\frac{q}{c\rho}G_l(x,\xi,t).$$

/13.10/

Следовательно, $G_l(x,\xi,t)$ описывает температурное влияние мгновенного точечного источника мощностью $q=c\rho$ помещенного в момент $t=0$ в точке ξ промежутка $(0,l)$.

2°. Случай неограниченного стержня.

Практически реализуется этот случай, если рассматривать процесс теплопроводности в очень длинном стержне в течение небольшого промежутка времени, так как за это время влияние температурного режима, заданного на границе, в центральной части стержня сказывается слабо, и температура на этом участке определяется в основном начальным распределением температур. В задачах подобного типа обычно считают, что стержень имеет бесконечную длину, поэтому и ставится задача Коши: найти решение уравнения теплопроводности /13.1/ на всей прямой удовлетворяющее условию

$$u(x,0)=\varphi(x) \quad , \quad -\infty < x < \infty \quad . \qquad /13.11/$$

Найдём функцию источника для бесконечной области $G(x,\xi,t)$. Из сказанного выше следует, что искомую функцию Грина можно рассматривать как предел соответствующей функций /13.8/ для конечного отрезка, когда оба его конца удаляются в бесконечность. Для вычисления этого предела преобразуем формулу / 13.8/ так, чтобы концы заданного отрезка имели координаты $-\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}$. Это достигается введением новых переменных $x'=x-\frac{\ell}{2}$, $\xi'=\xi-\frac{\ell}{2}$.

Получаем:

$$G(x',\xi',t)=\frac{2}{\ell}\sum_{p=0}^{\infty} e^{-\left(\frac{2\pi a p}{\ell}\right)^2 t} \sin\frac{2\pi p}{\ell}x' \sin\frac{2\pi p}{\ell}\xi' +$$

$$+\frac{2}{\ell}\sum_{p=0}^{\infty} e^{-\left[\frac{(2p+1)\pi a}{\ell}\right]^2 t} \cos\frac{\pi(2p+1)}{\ell}x' \cos\frac{\pi(2p+1)}{\ell}\xi' \qquad /13.12/$$

Для перехода к пределу $\ell\to\infty$ представим первую сумму /13.12/ в виде

$$\frac{2}{\ell}\sum_{p=0}^{\infty} e^{-(k_p a)^2 t} \sin k_p x' \sin k_p \xi' = \frac{1}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty} f_1(k_p)\Delta k_p ,$$

где $k_p=\frac{2\pi p}{\ell}$, $\Delta k_p=\frac{2\pi}{\ell}$, $f_1(k_p)=\sin k_p x' \sin k_p \xi' e^{-(k_p a)^2 t}$.

При $l \to \infty$, $\Delta x_p \to 0$ сумма переходит в интеграл:

$$\lim_{\Delta k_p \to 0} \frac{1}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} f_1(k_p)\Delta k_p = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-k^2a^2t} \sin kx' \sin k\xi' \, dk.$$

Аналогично получим для второй суммы при $l \to \infty$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-k^2a^2t} \cos kx' \cos k\xi' \, dk.$$

Следовательно, функция Грина для бесконечной прямой:

$$G(x,\xi,t) = \lim_{l\to\infty} G_l(x,\xi,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-k^2a^2t} \sin kx \sin k\xi \, dk +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-k^2a^2t} \cos kx \cos k\xi \, dk = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-k^2a^2t} \cos k(x-\xi)\, dk.$$

/13.13/

Учитывая, что

$$\int_0^\infty e^{-k^2\alpha} \cos k\beta \, dk = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}$$

/ см.задачу 2/, находим

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}.$$

/13.14/

Эту функцию называют и фундаментальным решением уравнения теплопроводности. Она представляет температуру в точке x в момент времени t, если в начальный момент времени в точке ξ выделяется количество тепла $c\rho$. Действительно, непосредственным дифференцированием можно проверить, что $G(x,\xi,t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности, а количество тепла, находящееся на оси x в момент $t>0$, равно

$$c\rho\int_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi,t)\,dx = \frac{c\rho}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \frac{dx}{2a\sqrt{t}} = \frac{c\rho}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2}\, d\alpha = c\rho$$

/13.15/

$\alpha = \dfrac{x-\xi}{2a\sqrt{t}}$. Таким образом, количество тепла на прямой не меняется с течением времени, но если t достаточно мало, то вся теплота практически сосредоточена на некотором малом интервале в окрестности точки ξ .

При $t \to 0$ получим:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{t\to 0} G(x,\xi,t) = 0 \quad (x \neq \xi) \ , \\ &\lim_{t\to 0} G(x,\xi,t) = \infty \quad (x = \xi) \ , \end{aligned}\right\} \qquad /13.16/$$

а по /13.15/

$$\lim_{t\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi,t)\,dx = 1 \ . \qquad /13.16'/$$

Функция, описывающая ход температуры точечного источника в начальный момент $\lim\limits_{t\to 0} G(x,\xi,t)$, называется δ-функцией Дирака /Dirac /. Таким образом:

$$\delta(x-\xi) = \begin{cases} 0 \ , & x \neq \xi \ , \\ \infty \ , & x = \xi \ , \end{cases}$$

$$\int_a^b \delta(x-\xi)\,dx = \begin{cases} 0, & a > \xi \ , \text{ или } b < \xi, \\ 1, & a < \xi < b \ . \end{cases} \qquad /13.17/$$

По теореме о среднем найдём:

$$\int_a^b f(x)\,\delta(x-\xi)\,dx = f(\xi + \alpha\varepsilon) \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} \delta(x-\xi)\,dx \ ,$$

$$|\alpha| \leq 1 \ , \quad \varepsilon > 0$$

или, если $\varepsilon \to 0$,

$$\int_a^b f(x)\,\delta(x-\xi)\,dx = f(\xi) \ , \quad a < \xi < b \ . \qquad /13.18/$$

Кроме того,

$$\int_a^b f(x)\,\delta(x-\xi) = 0 \ , \quad a > \xi \text{ или } b < \xi . \qquad /13.18'/$$

3°. Распространение тепла на бесконечной прямой.

В предыдущем пункте установлено, что функция $u(x,t) = G(x,\xi,t)$ / 13.14/ описывает процесс распространения тепла от мгновенного теплового источника, выделяющего начальный момент в точке ξ количество тепла $c\rho$. В начальный момент распределение температуры описывается δ - функцией, т.е. всюду, кроме точки $x=\xi$, начальная температура равна нулю. Но если рассматривать температуру в точке x, расстояние от которой до точки ξ сколь угодно большое, в момент сколь угодно близкий к начальному, то /13.14/ даёт для $u(x,t)$ некоторое положительное значение, которое может оказаться практически ничтожно малым. Но с принципиальной точки зрения это показывает, что тепло распространяется не с какой либо конечной скоростью, а мгновенно. Объясняется этот факт тем, что феноменологические представления о распространении тепла, использованные при выводе уравнения теплопроводности / закон Фурье /, не отражают достаточно точно механизм процесса / не учитывают инерционность статистического движения молекул/.

С помощью фундаментального решения уравнения теплопроводности можно легко получить решение задачи Коши для уравнения / 13.1/, т.е. решение, удовлетворяющее начальному условию /13.11/:

$$u(x,0)=\varphi(x).$$

Для того, чтобы начальная температура в малом интервале $(\xi-\varepsilon,\ \xi+\varepsilon)$ стала бы равной $\varphi(\xi)$, нужно в начальный момент мгновенно поместить на интервал $(\xi-\varepsilon,\ \xi+\varepsilon)$ количество тепла

$$dq=c\rho\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon}\varphi(x)\,dx=c\rho\,\varphi(\xi')\Delta\xi\,,\quad (2\varepsilon=\Delta\xi,\ \xi-\varepsilon<\xi'<\xi+\varepsilon).$$

Этот мгновенный источник в точке x в момент $t>0$

вызывает температуру

$$du = G(x,\xi,t)\varphi(\xi')\Delta\xi . \qquad / 13.19/$$

Разбивая всю прямую на мелкие промежутки, можно в силу принципа суперпозиции представить $u(x,t)$ как сумму слагаемых типа /13.19/. При $\Delta\xi\to 0$ получим:

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi,t)\varphi(\xi)d\xi = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\varphi(\xi)d\xi . \qquad / 13.20/$$

Так как эти рассуждения не строгие, нужно убедиться, что /13.20/ действительно явряется решением уравнения теплопроводности /13.1/ и удовлетворяет начальному условию /13.11/. Сначала отметим, что интеграл /13.20/ сходится, если $\varphi(x)$ ограничена - $|\varphi(x)|<M$, и представляет ограниченную функцию:

$$|u(x,t)| < \frac{M}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi = M$$

/ см. /13.15/ /. Для доказательства того, что /13.20/ представляет решение уравнения /13.1/, достаточно показать, что /13.20/ можно дифференцировать под знаком интеграла, а это законно, если интегралы, полученные дифференцированием под знаком интеграла, сходятся равномерно.

Интеграл $\int_{-\infty}^{\infty}F(x,t,\xi)d\xi$ сходится равномерно в точке (x_0,t_0), если в некоторой окрестности D точки (x_0,t_0) существует некотроя положительная функция $\Phi(\xi)\geqslant|F(x,t,\xi)|$ / при $x(t)\in D$ /, а интеграл $\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\xi)\,d\xi$ сходится.

Покажем, например, что интеграл $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x}G(x,\xi,t)$ сходится равномерно в некоторой окрестности точки

(x_0, t_0) : $t_1 \le t_0 \le t$, $-\bar{x} < x_0 < \bar{x}$. Действительно:

$$\left|\frac{\partial}{\partial x} G(x,\xi,t)\right| |\varphi(\xi)| = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\xi - x}{2(a^2t)^{3/2}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} |\varphi(\xi)| \le$$

$$\le \frac{M}{2\sqrt{\pi}} \frac{|\xi| + \bar{x}}{2[a^2t_1]^{3/2}} e^{-\frac{(\xi - \bar{x})^2}{4a^2t_2}} = \Phi(\xi) ,$$

а интеграл

$$\int_{x_1}^{\infty} \Phi(\xi) d\xi = \frac{M}{2\sqrt{\pi}} \int_{x_1}^{\infty} \frac{|\xi| + \bar{x}}{(2a^2t_1)^{3/2}} e^{-\frac{(\xi-\bar{x})^2}{4a^2t_2}} d\xi = \frac{M}{2\sqrt{\pi}} \int_{x_1 - \bar{x}}^{\infty} \frac{\tau + 2\bar{x}}{(2a^2t_1)^{3/2}} e^{-\frac{\tau^2}{4a^2t_2}} d\tau$$

сходится $(\tau = |\xi| + \bar{x})$.

Наконец нужно установить, что

$$\lim_{t \to 0} u(x,t) = \varphi(x) . \qquad /13.21/$$

Введём в /13.20/ новую переменную $z^2 = \frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}$, то

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(2az\sqrt{t} + x) e^{-z^2} dz ,$$

а

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-z^2} dz .$$

Тогда

$$|u(x,t) - \varphi(x)| \le \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x + 2az\sqrt{t}) - \varphi(x)| e^{z^2} dz .$$

Так как интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz$ сходится, то можно найти достаточно большое число $N(\varepsilon) > 0$, что

$$\int_N^{\infty} e^{-z^2} dz < \frac{\sqrt{\pi}\varepsilon}{2A} , \quad \int_{-\infty}^{-N} e^{-z^2} dz < \frac{\sqrt{\pi}\varepsilon}{2A} ,$$

где ε - сколь угодно малое положительное число. Учитывая ещё, что функция $\varphi(x)$ ограничена ($|\varphi(x)| < A$, $A > 0$) , найдём:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_N^{\infty} |\varphi(x + 2az\sqrt{t}) - \varphi(x)| e^{-z^2} dz < \frac{2A}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz < \varepsilon .$$

Аналогично

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-N} |\varphi(x + 2az\sqrt{t}) - \varphi(x)| e^{-z^2} dz < \varepsilon$$

Предполагаем, что функция $\varphi(x)$ равномерно непрерывна, тогда:

$$|\varphi(x+2az\sqrt{t})-\varphi(x)|<\varepsilon \quad , \text{ при } \quad t<\delta(\varepsilon)$$

и

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-N}^{N}|\varphi(x+2az\sqrt{t})-\varphi(x)|e^{-z^2}dz<\frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}}\int_{-N}^{N}e^{-z^2}dz<$$

$$<\frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2}dz=\varepsilon .$$

Таким образом,

$$\left|\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}[\varphi(x+2azt)-\varphi(x)]e^{-z^2}dz\right|<3\varepsilon$$

при $t<\delta(\varepsilon)$, или

$$|u(x,t)-\varphi(x)|<\varepsilon_1 \qquad \text{при} \quad t<\delta(\varepsilon_1) ,$$

и соотношение /13.21/ доказано.

4°. Отражение тепловых источников.

Рассмотрим краевую задачу для полубесконечного проводника тепла $x\leq 0$, конец $x=0$ которого поддерживается при постоянной температуре, т.е. нужно найти решение уравнения /13.1/

$$u_t=a^2u_{xx}$$

с дополнительными условиями

$$u(0,t)=0,$$
$$u(x,0)=\varphi(x) , \qquad (0<x<\infty) . \qquad /13.22/$$

Будем искать решение на всей прямой $-\infty<x<\infty$, удовлетворяющее условию $u(0,t)=0$. В начальный момент в точке ξ находится мгновенный тепловой источник силой $\varphi(\xi)\,d\xi$. Температура от этого источника при $t\neq 0$ в точке $x=0$ будет

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}}\varphi(\xi)d\xi=G(0,t,\xi)\varphi(\xi)d\xi .$$

Для компенсации этой температуры достаточно поместить в точку $-\xi$ при $t=0$ мгновенный / фиктивный/ источник силой $-\varphi(\xi)d\xi$. Температура, вызванная источником в точке ξ и его отображением в точке $-\xi$, будет

$$\varphi(\xi)d\xi\, G_1(x,t;\xi)=[G(x,t;\xi)-G(x,t;-\xi)]\varphi(\xi)d\xi.$$

$G_1(x,t,\xi)$ – функция Грина при данном краевом условии :

$$G_1(x,t;\xi)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\right].$$

/13.23/

Искомое решение получаем в виде

$$u(x,t)=\int_0^\infty G_1(x,t;\xi)\varphi(\xi)d\xi.$$

/ 13.23'/

Аналогично можно найти функцию Грина в случае краевых условий второго и третьего типа, а также в случае неоднородных краевых условий / см. задачи 4-9 /.

5°. Решение неоднородного уравнения.

Достаточно рассмотреть решение неоднородного уравнения

$$u_t=a^2u_{xx}+F(x,t)$$

/ 13.24/

$F(x,t)c\rho=Q(x,t)$ – плотность тепловых источников при нулевом начальном условии.

Рассмотрим сначала случай бесконечного проводника тепла. По условиям задачи в точке $x=\xi$ в момент времени $t=\tau$ действует мгновенный источник тепла силой $F(\xi,\tau)c\rho\, d\xi d\tau$, температура от этого при $t>\tau$ в точке x будет:

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2(t-\tau)}}F(\xi,\tau)d\xi d\tau=G(x,t-\tau;\xi)d\xi d\tau F(\xi,\tau).$$

Для получения полной температуры в точке x при $t>0$ нужно суммировать влияние всех мгновенных источников тепла на прямой при $\tau<t$:

$$u(x,t)=\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} G(x,t-\tau;\xi)\,F(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau . \qquad /13.25/$$

Как в 3°, можно убедиться, что /13.25/ действительно является решением неоднородного дифференциального уравнения / 13.24/.

Полученный результат можно обобщить для случая смешанной задачи. Тогда нужно в формуле /13.25/ заменить $G(x,t-\tau;\xi)$ на функцию Грина при данных краевых условиях $\bar{G}(x,t-\tau;\xi)$, в этом случае и $u(x,t)$ удовлетворяет этим краевым условиям.

Задачи к § 13.

1. Показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=u$/ 13.6/ и ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\partial u_n}{\partial t}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}$ сходятся равномерно при $0<t_0\le t$, $0<x<l$, если коэффициенты C_n определяются соотношением /13.7/, а функция $\varphi(x)$ ограничена, т.е. $|\varphi(x)|<M$

Указание. Учитывая, что $|C_n|\le\frac{2\sqrt{2}l}{n\pi}<2M$, найдём $\left|\frac{\partial u_n}{\partial t}\right|<\alpha_n$, $|u_n|<\beta_n$, $\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|<\gamma_n$. По признаку Даламбера числовые ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\beta_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\gamma_n$ сходятся, что и доказывает равномерную сходимость исходных рядов.

Для обеспечения непрерывности функции $u(x,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)$ нужно ещё требовать, чтобы $\varphi(x)$ была непрерывна, имела кусочно- непрерывную производную, и $\varphi(0)=\varphi(l)=0$ / см. напр. Смирнов, Курс высшей математики II /.

2. Показать, что $J(\alpha,\beta)=\int_0^{\infty}e^{-\alpha x^2}\cos\beta x\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}$!

Указание. Фиксируя значение α, найдем:

$$\frac{dJ}{d\beta}=\left(\frac{\partial J}{\partial \beta}\right)_\alpha=-\int_0^\infty e^{-\kappa^2\alpha}\kappa\sin\kappa\beta d\kappa=-\frac{\beta}{2\alpha}J(\beta),$$

/интегрировано по частям/. Таким образом $\frac{J'}{J}=-Ce^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}$, откуда $J(\beta)=Ce^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}$. Полагая $\beta=0$, можно найти C $\left(\int_0^\infty e^{-z^2}dz=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$.

3. Решить задачу об остывании равномерно нагретого однородного стержня длиной l при нулевой температуре на концах, предполагая отсутствие теплообмена на боковой поверхности.

Ответ: $$u(x,t)=\frac{4u_0}{\pi}\sum_{k=1}^\infty\frac{e^{-a^2\frac{(2k-1)^2\pi^2}{l^2}t}}{2k-1}\sin\frac{2k-1}{l}\pi x$$

$(u(x,0)=u_0)$.

4. Решить задачу 3, если на одном конце $x=0$ поддерживается постоянная температура, а второй конец теплоизолирован.

5. Начальная температура стержня известна. На конце стержня $x=0$ поддерживается температура 0°, а на конце l происходит теплообмен с окружающей средой, температура которой считается равной нулю. Определить температуру стержня в момент времени $t>0$.

Ответ: $$u(x,t)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^\infty\frac{p^2+\mu_n^2}{p(p+1)+\mu_n^2}e^{-\frac{\mu_n^2a^2t}{l^2}}\times$$

$$\times\sin\frac{\mu_n x}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{\mu_n x}{l}dx,$$

где $\mu_1,\mu_2,\mu_3,\ldots$ – положительные корни уравнения $\tan\mu=-\frac{\mu}{p}$, $p=hl$, h – коэффициент теплообмена.

6. Найти решение уравнения

$$u_t-uu_x=a^2u_{xx} \qquad /1/$$

при краевых условиях $u(0,t)=0$, $u(l,t)=0$

и начальном условии:

$$u(x,0)=\varphi(x) \quad , \quad 0<x<l .$$

Ответ:

$$u(x,t)=\frac{2a^2\pi}{b}\,\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} n A_n \sin\frac{n\pi x}{l}\, e^{-\frac{a^2n^2\pi^2}{l^2}t}}{A_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi x}{l}\, e^{-\frac{a^2n^2\pi^2}{l^2}t}} ,$$

где $A_0=\frac{1}{l}\int\limits_0^l \theta_0(x)dx \quad , \quad A_n=\frac{2}{l}\int\limits_0^l \theta_0(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx .$

Указание: Решение уравнения /1/ искать в виде $u(x,t)=-2a^2\frac{\theta_x}{\theta}$ /2/, где $\theta(x,t)$ есть решение уравнения теплопроводности $\theta_t=a^2\theta_{xx}$. /3/

Из /2/ имеем $\theta(x,t)=C(t)e^{-\frac{1}{a^2}\int\limits_0^x u(x,t)dx}$,

при $t=0$

$$\theta(x,0)=C(0)e^{-\frac{1}{a^2}\int\limits_0^x u(x,0)dx}=\theta_0(x). \qquad /4/$$

В силу краевых условий задачи и из /2/ найдём

$$\theta_x(0,t)=\theta_x(l,t) . \qquad /5/$$

Таким образом нужно решить уравнение /3/ при условиях /4/ и /5/, потом по формуле /2/ найти искомое решение.

7. Решить уравнение $u_t=a^2u_{xx}$ при следующих дополнительных условиях $u(x,0)=u_0$, $u(0,t)=u_1$.

Указание: Применить метод изложений в § 5,8° .

8. Решить задачу о нагревании тонкой однородной проволоки постоянным электрическим током, если начальная температура, граничная температура, а также температура окружающей среды равны нулю / см. задачу 4 к § 1./

Ответ: $u(x,t)=\frac{d}{b^2}\left[1-\frac{ch\frac{b}{a}\left(x-\frac{l}{2}\right)}{ch\frac{bl}{2a}}\right]-$

$$-\frac{4d}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\left[\frac{(2n+1)\pi b}{l}\right]^2 t}}{(2n+1)\left\{\left[\frac{(2n+1)\pi a}{l}\right]^2+b^2\right\}}\sin\frac{(2n+1)}{l}\pi x,$$

где

$$d=\frac{\beta J^2 R}{c\varrho\sigma}, \quad a^2=\frac{\lambda}{c\varrho}, \quad b^2=\frac{\alpha p}{c\varrho\sigma}.$$

9. Решить задачу при следующих граничных условиях: $u(0,t)=u_0$, $u(l,t)=u_1$.

10. Найти методом Фурье решение неоднородного уравнения теплопроводности

$$u_t=a^2 u_{xx}+F(x,t)$$

при дополнительных условиях

$$u(x,0)=0, \quad u(0,t)=0, \quad u(l,t)=0.$$

Показать, что решение выражается в виде:

$$u(x,t)=\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} G_l(x,\xi,t-\tau)F(\xi,\tau)\,d\tau,$$

где $G_l(x,\xi,t)$ выражается формулой /13.8/.

11. Найти методом отражения функцию Грина уравнения теплопроводности для полубесконечного стержня, конец которого теплоизолирован. Выписать решение смешанной задачи.

<u>Ответ:</u> $$G(x,t,\xi)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}+e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right].$$

12. Найти изображение единичного мгновенного источника тепла в точке ξ при $t=0$, если в конце $x=0$ происходит теплообмен по закону Ньютона $u_x(0,t)+\alpha u(0,t)=0$; выписать выражение функции Грина и решение смешанной задачи с произвольной начальной температурой.

<u>Указание:</u>Изображение искать в виде точечного мгновенного источника в точке $-\xi$ силой A и непрерывно

размещённых мгновенных тепловых источников, заполняющих полупрямую $\eta<-\xi$. Плотность этих источников $-a(\eta)$, так что :

$$\bar{G} = G(x,\xi,t) + A G(x,-\xi,t) + \int_{-\infty}^{-\xi} a(\eta) G(x,\eta,t)\,d\eta .$$

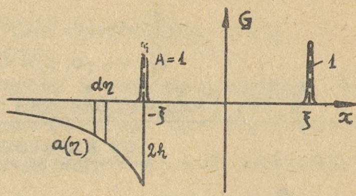


Рис.26.

С помощью краевого условия найдём следующие условия для определения A и $a(\eta)$

$$A-1=0\ ;\quad a(-\xi)+a(1+A)=0\ ;\quad a'(\eta)-\alpha a(\eta)=0 .$$

Отсюда находим:

$$\bar{G}(x,\xi,t) = G(x,\xi,t) + G(x,-\xi,t) - 2\alpha e^{\alpha\xi}\int_{-\infty}^{-\xi} G(x,\eta,t) e^{\alpha\eta}\,d\eta .$$

13. Найти методом отражения функцию Грина и решение смешанной задачи уравнения теплопроводности для полубесконечного стержня при краевом условии $u_x(0,t)=f_1(t)$.

Указание. В начале координат находится в момент $t=\tau$ мгновенный теплоисточник мощностью $f_1(\tau)\,d\tau$.

14. Решить задачу 13 при краевом условии $u(0,t)=f(t)$

Указание. В начале координат в момент $t=\tau$ находится мгновенный теплоисточник мощностью $\alpha(\tau)\,d\tau$. Функция $\alpha(\tau)$ определяется из краевого условия.

15. Решить задачу 13 при краевом условии $u_x(0,t)+\alpha u(0,t)=f_2(t)$.

Указание. Использовать результаты задачи 12 и кроме того поместить в момент $t=\tau$ в начало координат теплоисточник мощностью $\beta(\tau)\,d\tau$, где функция $\beta(\tau)$ определяется из краевого условия.

16. Найти методом отражения функцию Грина для конечного отрезка $0<x<l$ при следующих краевых условиях:

$$а)\ u(0,t)=u(l,t)=0,$$

$$б)\ u(0,t)=u_x(l,t)=0,$$

$$в)\ u_x(0,t)=u_x(l,t)=0.$$

§ 14. Распространение тепла в пространстве и на плоскости.

1^0. Функция влияния теплового источника в трехмерном случае.

Найдём функцию $G(Q,t;M,t_0)$, описывающую тепловое влияние мгновенного точечного источника в точке Q в момент времени t расположенного в точке M и выделяющего в момент t_0 количество тепла ρc.

Сначала определим тепловое поле непрерывно действующего точечного теплового источника мощностью q. Пусть такой источник находится в начале координат O, начальная температура во всём пространстве равна нулю. Ясно, что в однородной среде температура является функцией только r и t, т.е. удовлетворяет всюду, кроме точки $r=0$, однородному уравнению теплопроводности

$$u_t=a^2\Delta u \qquad /\ 14.1\ /$$

в сферически-симметричном случае:

$$u_t=a^2\frac{1}{r}\frac{\partial^2(ru)}{\partial r^2}. \qquad /\ 14.2\ /$$

Вводя новую неизвестную $v=ru$, приходим к уравнению:

$$v_t=a^2v_{rr}. \qquad /14.2'/$$

наличие теплового источника в точке $r=0$ означает, что тепловой поток в единицу времени через сферу S_ε^0 при $\varepsilon\to 0$ равен q, т.е.

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iint\limits_{S_\varepsilon^0}\left(-k\frac{\partial u}{\partial n}\,dS\right)=q\;;\;\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-k4\pi r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)\Big|_{r=\varepsilon}=q.$$

Следовательно, $\frac{\partial u}{\partial r}$ должна иметь в начале координат особенность типа $-\frac{q}{4\pi k r^2}$, а сама функция u - особенность вида $\frac{q}{4\pi k r}$, так что произведение $ru=v$ остаётся ограниченным при $r=0$. Таким образом функция v удовлетворяет следующим начальному и краевому условиям:

$$v(0,t)=\frac{q}{4\pi k}=v_0$$

$$v(r,0)=0 \qquad /14.2''/$$

Введём теперь вместо v новую переменную $w=v-v_0$, очевидно

$$\left.\begin{aligned}&w_t=a^2w_{rr},\\&w(0,t)=0\quad,\ w(r,0)=-v_0.\end{aligned}\right\}\qquad /14.3/$$

По результатам, полученным в § 13, 4°, найдём

$$w(r,t)=\frac{v_0}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{a^2t}}\left(e^{-\frac{(r+\rho)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(r-\rho)^2}{4a^2t}}\right)d\rho.$$

Разбивая интеграл на два слагаемых и вводя переменные

$$\alpha=\frac{r+\rho}{2\sqrt{a^2t}}\quad,\qquad \alpha_1=\frac{\rho-r}{2\sqrt{a^2t}}\ ,$$

получим

$$w(r,t)=\frac{v_0}{\sqrt{\pi}}\left[\int_{\frac{r}{2\sqrt{a^2t}}}^\infty e^{-\alpha^2}d\alpha-\int_{-\frac{r}{2\sqrt{a^2t}}}^\infty e^{-\alpha_1^2}d\alpha_1\right]=$$

$$=-\frac{v_0}{\sqrt{\pi}}\int_{-\frac{r}{2\sqrt{a^2t}}}^{\frac{r}{2\sqrt{a^2t}}}e^{-\alpha^2}d\alpha=-\frac{2v_0}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{r}{2a\sqrt{t}}}e^{-\alpha^2}d\alpha=-v_0\,\Phi\left(\frac{r}{2a\sqrt{t}}\right),$$

где

$$\Phi(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-\alpha^2}d\alpha \qquad /14.4/$$

- интеграл ошибок.

Следовательно, процесс распространения тепла при непрерывно действующем источнике мощности q, помещённом в начале координат $r=0$, описывается функцией

$$u(r,t)=q\,U(r,t)=\frac{q}{4\pi k}\frac{1}{r}\left[1-\Phi\left(\frac{r}{2a\sqrt{t}}\right)\right]=\frac{q}{2\pi r k\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{r}{2a\sqrt{t}}}^{\infty}e^{-\alpha^2}d\alpha,$$

так как
$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\infty}e^{-\alpha^2}d\alpha=1.$$

Для перехода к случаю с мгновенным источником рассмотрим источник мощности q помещённый в точку O и непрерывно действующий в течение промежутка времени τ / от $t=0$ до $t=\tau$ /. Такой источник эквивалентен двум источникам мощности $+q$ и $-q$, первый из них включается при $t=0$, а второй - при $t=\tau$. Распределение температур тогда выражается формулой

$$u_\tau(r,t)=q\left[U(r,t)-U(r,t-\tau)\right].$$

За промежуток времени τ выделяется количество тепла $Q=q\tau$. Переходя к пределу $\tau\to 0$ и считая Q постоянным, находим

$$u_0(r,t)=\lim_{\tau\to 0}u_\tau(r,t)=Q\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\left[u(r,t)-u(r,t-\tau)\right]=$$

$$=Q\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{Q}{2\pi^{3/2}kr}e^{-\frac{r^2}{4a^2t}}\frac{ra^2}{4a^3\sqrt{t^3}}=\frac{Q}{c\rho}G(Q,t;0,0),$$

где функция

$$G(Q,t;0,0)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{r^2}{4a^2t}} \qquad /14.6/$$

представляет собой температуру в точке $Q\,(OQ=r)$ в момент времени t, вызываемую мгновенным точечным источником мощностью $c\rho$, помещённым в момент $t=0$ в начало координат. Если же этот источник помещён в момент $t=t_0$ в точку M, то

$$G(Q,t;M,t_0)=\frac{1}{(2a\sqrt{\pi(t-t_0)})^3}e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2(t-t_0)}}$$

/14.6'/

а $M=(\xi,\eta,\zeta)$, $Q=(x,y,z)$.

2^0. Функция теплового источника в двухмерном случае.

Пусть на прямой, параллельной оси z, проходящей через точку $(\xi,\eta)=M$, расположен в момент $t=t_0$ бесконечный мгновенный линейный источник мощностью Q, отнесённый к единице длины. Температура, вызванная таким источником, не зависит от z и вполне характеризуется своими значениями на плоскости xy и определяется функцией

$$u(x,y,t)=u(M,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Q}{c\rho}\,d\zeta\, G(x,y,z,t;\xi,\eta,\zeta,t_0)=$$

$$=\frac{Q}{c\rho}\frac{1}{(2a\sqrt{\pi(t-t_0)})^2}e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2(t-t_0)}}=\frac{Q}{c\rho}G(x,y,t;\xi,\eta,t_0),$$

так как $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(z-\zeta)^2}{4a^2(t-t_0)}}d\zeta=2a\sqrt{t-t_0}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha^2}d\alpha=2a\sqrt{\pi(t-t_0)}$.

Функция

$$G(x,y,t;\xi,\eta,t_0)=\frac{1}{4\pi a^2(t-t_0)}e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2(t-t_0)}}$$

/14.7/

представляет собой температуру на плоскости в точке (x,y) в момент времени t, вызываемую мгновенным точечным источником мощностью $c\rho$, помещённым в момент t_0 в точку ξ,η / функция теплового источника на плоскости/.

3°. Распространение тепла в неограниченном пространстве.

Будем искать решение неоднородного уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2 \Delta u + \frac{f(x,y,z,t)}{\gamma \rho},$$

/14.1'/

/ f - плотность источника тепла /, удовлетворяющее начальному условию:

$$u(x,y,z,0) = \varphi(x,y,z)$$

/14.8/

Начальное тепловое состояние можно представить как результат суперпозиции действия мгновенных источников, создающих начальную температуру. Для создания начальной температуры $\varphi(M)$ в элементе объёма $dV(M)$ необходимо поместить в объёме $dV(M)$ в начальный момент мгновенно количество тепла $dQ = \gamma \rho \varphi(M)\, dV(M)$. Этот мгновенный источник создаёт в точке $P = (x,y,z)$ в момент t температуру

$$\frac{dQ}{\gamma \rho} G(P,t;M,0) = G(P,t;M,0)\varphi(M)\, dV(M).$$

Таким образом, в силу принципа суперпозиции, влияние начальной температуры учитывается функцией:

$$u_1(P,t) = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} G(P,t;M,0)\varphi(M)\, dV(M).$$

Теперь учитываем влияние непрерывно действующих внешних источников $f(M,t)$. В элементе объёма $dV(M)$ за $d\tau$ выделяется количество тепла $f(M,\tau)\, dV(M)\, d\tau$, которое вызывает в точке $Q = (x,y,z)$ в момент t температуру

$$\frac{f}{c\rho} G(Q,t;M,\tau)\, dV(M)\, d\tau\, f(M,\tau).$$

Пользуясь принципом суперпозиции для определения температуры в точке Q , вызванной внешними источниками,получим:

$$u_2(Q,t)=\int_0^t \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{f(M,\tau)}{c\rho}\, G(Q,t;M,\tau)\,d\tau\,dV .$$

Таким образом решение задачи выражается в виде

$$u(Q,t)=u_1(Q,t)+u_2(Q,t)=\iiint_{-\infty}^{\infty} G(P,t;M,0)\varphi(M)dV(M)+$$

$$+\int_0^t \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{f(M,\tau)}{c\rho}\, G(Q,t;M,\tau)\,d\tau\,dV. \qquad /14.9/$$

Задачи длям полупространства можно решить методом отражения ,а смешанные задачи для ограниченных областей методом Фурье или приближёнными методами.

Задачи к § 14.

1. Доказать, что решением краевой задачи $u_t=a^2\Delta u$, $-\infty<x,y,z<\infty$, $0<t_1<\infty$, $u(x,y,z,0)=f_1(x)f_2(y)f_3(z)$ является произведение решений $u_1(x,t)$, $u_2(y,t)$, $u_3(z,t)$ краевых задач

$$u_{1t}=a^2u_{1xx}\ ,\quad -\infty<x<\infty\ ,\quad 0<t<\infty\ ,\quad u_1(x,0)=f_1(x);$$

$$u_{2t}=a^2u_{2yy}\ ,\quad -\infty<y<\infty\ ,\quad 0<t<\infty\ ,\quad u_2(y,0)=f_2(y);$$

$$u_{3t}=a^2u_{3zz}\ ,\quad -\infty<z<\infty\ ,\quad 0<t<\infty\ ,\quad u_3(z,0)=f_3(z).$$

2. Найти функции влияния мгновенного точечного источника тепла для полупространства $-\infty<x,y<\infty$, $0<z<\infty$, отвечающие граничным условия

а/ $u(x,y,0,t)=0$ б/ $u_z(x,y,0,t)=0$ в/ $u_z(x,y,0,t)-hu(x,y,0,t)=0$

3. С помощью результатов задачи 2 решить смешанные задачи для полупространства $-\infty<x,y<\infty$, $0<z,t<\infty$

а/ $u_t=a^2\Delta u+F(x,y,z,t)$, $u(x,y,0,t)=\Phi(x,y,t)$, $u(x,y,z,0)=f(x,y,$

б/ $u_t = a^2 \Delta u + F(x,y,z,t)$, $u_z(x,y,0) = \varphi(x,y,t)$, $u(x,y,z,0) = f(x,y,z)$;

в/ $u_t = a^2 \Delta u + F(x,y,z,t)$, $(u_z - hu)\big|_{z=0} = h\varphi(x,y,t)$, $u(x,y,z,0) = f(x,y,z)$.

4. Построить функцию влияния мгновенного точечного источника тепла для прямоугольного параллелепипеда $0 \le x \le l_1$, $0 \le x \le l_2$, $0 \le x \le l_3$. Рассмотреть случай, когда поверхности параллелепипеда: а/поддерживаются при нулевой температуре, б/ теплоизолированы.

Ответ: а/

$$G(x,y,z,t;\xi,\eta,\zeta,0) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3} \times$$

$$\times \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(e^{-\frac{(x-\xi+2kl_1)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(x+\xi+2kl_1)^2}{4a^2t}} \right) \times$$

$$\times \left(e^{-\frac{(y-\eta+2nl_2)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(y+\eta+2nl_2)^2}{4a^2t}} \right) \times$$

$$\times \left(e^{-\frac{(z-\zeta+2ml_3)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(z-\zeta+2ml_3)^2}{4a^2t}} \right).$$

5. Решить методом Фурье задачу о нагревании сферы радиуса R_0 , если начальная температура равна нулю, а на границе поддерживается постоянная температура.

6. Решить методом Фурье задачу 4.

7. Найти методом Фурье решение уравнения теплопроводности $u_t = a^2 \Delta u$ внутри бесконечно длинного цилиндра радиуса r_0 при следующих дополнительных условиях:

$$u(r,\varphi,0) = \varphi(r,\varphi) \quad , \quad u(r_0,\varphi,t) = 0 .$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Соболев С.Л., Уравнения математической физики, М.-Л. 1950, ГИТТЛ.

2. Тихонов А.Н. и Самарский А.А., Уравнения математической физики, М. 1953, ГИТТЛ.

3. Смирнов В.И., Курс высшей математики, т.11, Л.-М. 1950, ГИТТЛ,

4. " " " " т.111, ч.2, М.-Л.1950, ГИТТЛ.

5. " " " " т.1У, М.-Л. 1951, ГИТТЛ.

6. Смирнов М.М., Задачи по уравнениям математической физики, М. 1953, ГИТТЛ.

7. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н., Сборник задач по математической физике, М.1956,ГИТТЛ.

8. Лебедев Н.Н.,Скальская И.П.,Уфлянд Я.С., Сборник задач по математической физике, М.1955, ГИТТЛ.

9. Канторович А.В. и Крылов В.И., Приближенные методы высшего анализа, М.-Л. 1952, ГИТТЛ.

10. Зоммерфельд А., Дифференциальные уравнения в частных производных, М. 1957, Изд.Ин.Лит.

О Г Л А В Л Е Н И Е

Цена 3 руб. 85 коп.

1961а.-0.39