

TARTU ÜLIKOOL
LOODUS- JA TÄPPISTEADUSTE VALDKOND
MATEMAATIKA JA STATISTIKA INSTITUUT

Rait Reitkam
**Kvaasikorrutamise ja konvolutsiooni
algebralistest omadustest**

Matemaatika
Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendaja: PhD Mart Abel

TARTU 2026

KVAASIKORRUTAMISE JA KONVOLUTSIOONI ALGEBRALISTEST OMADUSTEST

Bakalaureusetöö

Rait Reitkam

Lühikokkuvõte

Käesolev lõputöö kuulub abstraktse algebra valdkonda ning selle peamiseks eesmärgiks on uurida kahe tehte – kvaasikorrutamise ja konvolutsiooni – algebralisi omadusi. Töös vaadatakse, millised algebralised struktuurid nende tehete kasutamisel tekivad.

CERCS teaduseriala: P120 Arvuteooria, korpuseteooria, algebraline geometria, algebra, rühmateooria

Märksõnad: Kvaasikorrutamine, konvolutsioon, ring, moodul, algebra, monoid.

ALGEBRAIC PROPERTIES OF QUASI-MULTIPLICATION AND CONVOLUTION

Bachelor's thesis

Rait Reitkam

Abstract This thesis falls within the field of abstract algebra, and its primary objective is to investigate the algebraic properties of two operations: quasi-multiplication and convolution. The study examines which structures are formed using these operations.

CERCS research specialisation: P120 Number theory, field theory, algebraic geometry, algebra, group theory and actuarial mathematics.

Key Words: Quasi-multiplication, convolution, ring, module, algebra, monoid

Sisukord

Sissejuhatus	3
1 Kvaasikorrutamine ja selle omadused	5
2 Jadaruum $\mathcal{U}$	13
2.1 Konvolutsioon jadaruumis $\mathcal{U}$	15
2.2 Kvaasikorrutamine jadaruumis $\mathcal{U}$	20
3 Moodul	23
3.1 Konvolutsioon moodulis $\mathcal{U}$	25
4 Algebra $\mathcal{A}$	26
4.1 Konvolutsioon $\mathcal{A}$	26
4.2 Kvaasikorrutamine algebras $\mathcal{A}$	27
Kokkuvõte	29
Kasutatud kirjandus	30

Sissejuhatus

Käesolev töö on abstraktse algebra valdkonnast, mis uurib erinevaid struktuure ja nendel defineeritud tehete omadusi.

Artiklis [3] vaadeldi ringis R kvaasikorrutamist kujul $a \circ b = a + b + ab$ ja jadaruumis $\mathcal{U} = \{a = (a_0, a_1, \dots) : a_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, \dots\}$ korrutamist $\odot : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ kujul $(a \odot b)_k = \sum_{l=0}^k \binom{n}{k} a_l b_{k-l}$ ning tõestati nende omadusi.

Artiklis [3] vaadeldud kvaasikorrutamist käsitleti eelkõige vanemates teadustöodes, kuid viimasel ajal on hakatud kvaasikorrutamist defineerima veidi teisiti. Seetõttu vaatame antud töös uuemat kvaasikorrutamist, mille defineerime kahekohalise algebralise tehtena kujul

$$\circ : R \times R \rightarrow R, \quad (a, b) \mapsto a + b - a \cdot b \quad \forall a, b \in R \quad \text{korral,}$$

kus R võib olla ring, algebra või moodul. Lisaks vaatame jadaruumis $\mathcal{U}$ konvolutsiooni, mille defineerime komponenthaaval järgmiselt:

$$\odot : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}, \quad (a \odot b)_k = \sum_{l=0}^k a_l b_{k-l} \quad \text{iga } k \in \{0, 1, \dots\}$$

iga $a, b \in \mathcal{U}$ korral.

Esimeses peatükis toome sisse vajalikud definitsioonid ja tõestame kvaasikorrutamisega seotud omadused. Lisaks näitame ära, et ring R koos kvaasikorrutamisega moodustab monoidi ning kvaasipööratavate elementide hulk ringis moodustab rühma.

Teises peatükis toome sisse jadaruumi $\mathcal{U}$, millel vaatame kahte tehet – kvaasikorrutamist ja konvolutsiooni. Esmalt näitame ära, et jadaruum on ring liitmise ja korrutamise suhtes. Seejärel asendame elementide omavahelise korrutamise vastavalt konvolutsiooni ja kvaasikorrutamisega ning kontrollime, kas ringi omadused säilivad. Selgub, et harilikud distributiivsuse omadused saavad kvaasikorrutamise jaoks teistsuguse kuju.

Kolmandas peatükis vaatame esiteks jadaruumi $\mathcal{U}$ üle ringi R ja kontrollime, kas hulk $\mathcal{U}$ osutub mooduliks jadaruumis $\mathcal{U}$ defineeritud liitmise $(+)$, elementide omavahelise korrutamise $(\cdot)$ ja skalaariga korrutamise suhtes. Seejärel vaatame, mis juhtub, kui asendada elementide omavaheline $(\cdot)$ -korrutamine hoopis konvolutsiooniga.

Lõpuks asendame korrutamise $(\cdot)$ kvaasikorrutamisega ja kontrollime samuti, millised mooduli omadused kehtivad tekkinud struktuuri jaoks.

Viimases peatükis vaatleme konvolutsiooni ja kvaasikorrutamist algebras.

1 Kvaasikorrutamise ja selle omadused

Selles peatükis esitatud definitsioonid 1–4 ja 6–8 pärinevad materjalist [1].

Definitsioon 1. ([1], definitsioon 1.26). Öeldakse, et hulk R on ring, kui sellel on defineeritud kaks algebralist tehet $+$ ja $\cdot$ selliselt, et on rahuldatud järgmised omadused:

1. $(a + b) + c = a + (b + c)$ iga $a, b, c \in R$ korral;
2. leidub element $0_R \in R$ nii, et $a + 0_R = a = 0_R + a$ iga $a \in R$ korral;
3. iga $a \in R$ korral leidub element $-a \in R$ nii, et $a + (-a) = 0_R = (-a) + a$;
4. $a + b = b + a$ iga $a, b \in R$ korral;
5. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ iga $a, b, c \in R$ korral;
6. leidub element $1_R \in R$ nii, et $1_R \cdot a = a = a \cdot 1_R$ iga $a \in R$ korral;
7. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ iga $a, b, c \in R$ korral;
8. $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ iga $a, b, c \in R$ korral.

Definitsioon 2. ([1], definitsioon 1.29). Öeldakse, et ring R on kommutatiivne, kui iga $a, b \in R$ korral kehtib ka järgmine omadus:

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

Definitsioon 3. (võrdle [1], definitsioon 1.10). Öeldakse, et ringi R element $1_R \in R$ on ühikelement, kui iga $a \in R$ korral kehtib järgmine tingimus:

$$a \cdot 1_R = a = 1_R \cdot a.$$

Definitsioon 4. ([1], definitsioon 1.14). Öeldakse, et ringi R elemendi $a \in R$ pöördelement on $b \in R$, kui ta rahuldab järgmist võrdust:

$$a \cdot b = 1_R = b \cdot a.$$

Definitsioon 5. Tehet $\circ : R \times R \rightarrow R$, mis on defineeritud seosega

$$a \circ b = a + b - a \cdot b, \quad (1)$$

kus elemendid $a, b \in R$ ja R on ring, nimetatakse ringi R kvaasikorrutamiseks.

Tähistame edaspidi elementide $a, b \in R$ korrutist kirja $a \cdot b$ asemel kirja ab . Näitame, et ringis R suvaliste elementide $a, b, c \in R$ ja $\lambda \in \mathbb{Z}$ korral kehtivad kvaasikorrutamisel järgmised omadused:

1. $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ (assotsiatiivsus);

$$\begin{aligned} a \circ (b \circ c) &= a \circ (b + c - bc) = a + (b + c - bc) - a(b + c - bc) = \\ &= a + (b + c - bc) - ab - ac + abc = a + b - ab + c - bc - ac + abc = \\ &= (a + b - ab) + c - (a + b - ab)c = (a + b - ab) \circ c = (a \circ b) \circ c. \end{aligned}$$

2. $(\lambda a) \circ b = \lambda(a \circ b) + (1_R - \lambda)b$ (skalaariga korrutamine);

$$\begin{aligned} (\lambda a) \circ b &= \lambda a + b - (\lambda a)b = \lambda a + b - \lambda(ab) + \lambda b - \lambda b = \\ &= \lambda a + \lambda b - \lambda(ab) + b - \lambda b = \\ &= \lambda(a + b - ab) + (1_R - \lambda)b = \lambda(a \circ b) + (1_R - \lambda)b. \end{aligned}$$

3. Ringi R nullelement 0_R on kvaasikorrutamise suhtes ühikelement, ehk

$$0_R \circ a = a = a \circ 0_R, \quad \text{iga } a \in R \text{ korral.}$$

Paneme tähele, et

$$0_R \circ a = 0_R + a - 0_R a = a = a + 0_R - a 0_R = a \circ 0_R \quad \text{iga } a \in R \text{ korral.}$$

4. $a \circ (b + c) = a \circ b + a \circ c - a$;

$$\begin{aligned} a \circ (b + c) &= a + b + c - a(b + c) = a + b + c - ab - ac = \\ &= a + b - ab + a - a + c - ac = \\ &= a + b - ab + a + c - ac - a = a \circ b + a \circ c - a. \end{aligned}$$

5. $(a + b) \circ c = a \circ c + b \circ c - c$;

$$\begin{aligned} (a + b) \circ c &= a + b + c - (a + b)c = a + b + c - ac - bc = \\ &= a + c - ac + b + c - bc - c = a \circ c + b \circ c - c. \end{aligned}$$

6. Kvaasiastme omadus $a^{\circ n} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{k+1} a^k$. (2)

Baas: Kui $n = 1$, siis

$$a^{\circ 1} = \sum_{k=1}^1 \binom{1}{k} (-1)^{k+1} a^k = \binom{1}{1} (-1)^2 a^1 = a.$$

Oletame, et võrdus (2) kehtib $n \leq m$ korral. Näitame, et see võrdus

kehtib ka $n = m + 1$ korral.

$$\begin{aligned}
a^{\circ(m+1)} &= a^{\circ m} \circ a^{\circ 1} = \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} (-1)^{k+1} a^k + a - \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} (-1)^{k+1} a^{k+1} = \\
&= \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} (-1)^{k+1} a^k + a - \sum_{k=2}^m \binom{m}{k-1} (-1)^k a^k - (-1)^{m+1} a^{m+1} = \\
&= \sum_{k=2}^m \binom{m}{k} (-1)^{k+1} a^k + \binom{m}{1} a + a + \\
&\quad + \sum_{k=2}^m \binom{m}{k-1} (-1)^{k+1} a^k + (-1)^{m+2} a^{m+1} = \\
&= \sum_{k=2}^m \left[\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1} \right] (-1)^{k+1} a^k + ma + a + (-1)^{m+2} a^{m+1} = \\
&= \sum_{k=2}^m \binom{m+1}{k} (-1)^{k+1} a^k + (m+1)a + (-1)^{m+2} a^{m+1} = \\
&= \sum_{k=2}^m \binom{m+1}{k} (-1)^{k+1} a^k + \binom{m+1}{1} (-1)^2 a + \\
&\quad + \binom{m+1}{m+1} (-1)^{m+2} a^{m+1} = \sum_{k=1}^{m+1} \binom{m+1}{k} (-1)^{k+1} a^k.
\end{aligned}$$

Osutub, et kvaasipööratavate ja pööratavate elementide vahel on kindel seos.

Teoreem 1. *Element $a \in R$ on kvaasipööratav ringis R parajasti siis, kui $a - 1_R$ on pööratav ringis R . Kui element a on kvaasipööratav, siis avaldub tema kvaasipöördelement kujul $(a - 1_R)^{-1} + 1_R$.*

Tõestus. $\Rightarrow$: Eeldame, et element a on kvaasipööratav ringis R . See tähendab, et pöördelemendi definitsiooni kohaselt leidub element $b \in R$, mille korral kehtib

$$a \circ b = 0_R = b \circ a.$$

Kirjutades esimese poole lahti, saame, et $a \circ b = a + b - ab = 0_R$. Korrutades

antud võrduse läbi elemendiga -1_R ja liites mõlemale poolele elemendi 1_R , saame tulemuseks $ab - a - b + 1_R = 1_R$.

Paneme tähele, et saame võrduse vasakut poolt tegurdada järgmiselt:

$$\begin{aligned} ab - a - b + 1_R &= a(b - 1_R) - b + 1_R = \\ &= a(b - 1_R) - (b - 1_R) = (a - 1_R)(b - 1_R) = 1_R. \end{aligned}$$

Analoogiliselt saame ka võrdusest $b \circ a = 0_R$ kätte, et

$$(b - 1_R)(a - 1_R) = 1_R.$$

Kuna mõlemal juhul saame korrutiseks ühikelemendi, siis definitsiooni kohaselt on element $a - 1_R$ pööratav ja tema pöördelement on $b - 1_R$.
 $\Leftarrow$: Eeldame, et element $a - 1_R$ on pööratav ringis R . Definitsiooni kohaselt leidub elemendi $a - 1_R$ pöördelement $(a - 1_R)^{-1}$. Olgu meil element b selline, et kehtiks $b = (a - 1_R)^{-1} + 1_R$. Näitame nüüd, et b on elemendi a kvaasipöördelement.

$$\begin{aligned} a \circ b &= a \circ ((a - 1_R)^{-1} + 1_R) = a + (a - 1_R)^{-1} + 1_R - a(a - 1_R)^{-1} - a = \\ &= (a - 1_R)^{-1} - a(a - 1_R)^{-1} + 1_R = (a - 1_R)^{-1}(1_R - a) + 1_R = -1_R + 1_R = 0_R \\ b \circ a &= ((a - 1_R)^{-1} + 1_R) \circ a = (a - 1_R)^{-1} + 1_R + a - (a - 1_R)^{-1}a - a = \\ &= (a - 1_R)^{-1} - (a - 1_R)^{-1}a + 1_R = (a - 1_R)^{-1}(1_R - a) + 1_R = -1_R + 1_R = 0_R. \end{aligned}$$

Seega on element a kvaasipööratav.

Tõestuse teise osa põhjal nägime, et kui element a on kvaasipööratav, siis avaldub tema kvaasipöördelement kujul $(a - 1_R)^{-1} + 1_R$. $\square$

Eeldame nüüd lisaks, et ring R on kommutatiivne. Sel juhul kehtib ka järgmine omadus.

7. $a \circ b = b \circ a$ iga $a, b \in R$ korral (kommutatiivsus);

$$a \circ b = a + b - ab = b + a - ba = b \circ a.$$

Definitsioon 6. ([1], definitsioon 1.12). Hulka M , millel on defineeritud kahekohaline algebraline tehe $*$, nimetatakse monoidiks, kui $*$ rahuldab järgmisi tingimusi:

1. $(a * b) * c = a * (b * c)$ iga $a, b, c \in M$ korral;
2. leidub ühikelement $1_M \in M$ selliselt, et $a * 1_M = a = 1_M * a$ iga $a \in M$ korral.

Definitsioon 7. ([1], definitsioon 1.18). Rühm on hulk G koos kahekohalise algebralise tehaga $*$, mis rahuldab järgmisi tingimusi:

1. $(a * b) * c = a * (b * c)$ iga $a, b, c \in G$ korral;
2. leidub element $e \in G$ nii, et $a * e = e * a$ iga $a \in G$ korral;
3. iga $a \in G$ korral leidub element $b \in G$ nii, et $a * b = e = b * a$.

Definitsioon 8. ([1], definitsioon 1.21). Rühm G on Abeli rühm, kui tema tehe on kommutatiivne.

Teoreem 2. Ring R moodustab kvaasikorrutamise suhtes monoidi.

Tõestus. Kvaasikorrutamise definitsiooni põhjal on selge, et kvaasikorrutamine on kahekohaline algebraline tehe. Näitame, et kvaasikorrutamine rahuldab monoidi definitsiooni tingimusi.

1. Assotsiatiivsus: kvaasikorrutamise omaduse 1 juures oleme näidanud, et kvaasikorrutamine on assotsiatiivne tehe.
2. Ühikelemendi leidumine: kvaasikorrutamise omaduse 3 juures oleme näidanud, et leidub ühikelement, milleks on ringi R nullelement.

Seega on definitsiooni kõik tingimused täidetud ja ring R moodustab kvaasikorrutamise suhtes monoidi. $\square$

Teoreem 3. *Kvaasipööratavate elementide hulk (kommutatiivses) ringis R moodustab (Abeli) rühma.*

Tõestus. Olgu R ring ning kvaasikorrutamine defineertiud valemi (1) järgi ja olgu P ringi R kvaasipööratavate elementide hulk. Seega $a \in P$ parajasti siis, kui talle leidub ringis R kvaasipöördelement a_P , mille korral

$$a \circ a_P = 0_R = a_P \circ a.$$

Näitame, et sellised elemendid rahuldavad rühma definitsioonis olevaid tingimusi ja et hulk on kinnine kvaasikorrutamise suhtes. Olgu $a, b, c \in P$.

1. Assotsiatiivsus;
Varasemalt näitasime, et ringis R on kvaasikorrutamine assotsiatiivne. Kuna P on ringi R alamhulk, siis kehtib assotsiatiivsus ka hulgas P .
2. Ühikelemendi leidumine;
Varasemalt näitasime, et ringi R nullelement on kvaasikorrutamise suhtes ühikelement. Seega peame näitama, et $0_R \in P$, ehk talle leidub ringis R kvaasipöördelement. Selleks elemendiks sobib ta ise, sest $0_R \circ 0_R = 0_R + 0_R - 0_R 0_R = 0_R$. Seega $0_R \in P$.

3. Pöördelemendi olemasolu;

Oleme hulga P defineerinud nii, et ta koosneb ringi R kvaasipööratavatest elementidest, st. et iga $a \in P$ jaoks leidub $a_P \in R$ selliselt, et $a \circ a_P = a_P \circ a = 0_R$.

See aga tähendab, et ka elemendil a_P peab leiduma kvaasipöördelement, milleks on a . Seetõttu peab a_P kuuluma hulka P .

4. Kinnisus;

Kui $a, b \in P$, siis peame näitama, et $a \circ b \in P$. Hulga P definitsiooni kohaselt peab elemendile $a \circ b$ leiduma kvaasipöördelement ringist R . Kuna $a, b \in P$, siis leidub kummalegi elemendile ringist R kvaasipöördelement. Olgu nendeks vastavalt $a_P \in R$ ja $b_P \in R$. Kuna ring R on kinnine oma tehete suhtes, siis ka $b_P \circ a_P \in R$. Tuleb välja, et see sobibki $a \circ b$ pöördelemendiks, sest

$$\begin{aligned}(a \circ b) \circ (b_P \circ a_P) &= ((a \circ b) \circ b_P) \circ a_P = (a \circ (b \circ b_P)) \circ a_P = \\ &= (a \circ 0_R) \circ a_P = a \circ a_P = 0_R, \\ (b_P \circ a_P) \circ (a \circ b) &= b_P \circ (a_P \circ (a \circ b)) = b_P \circ ((a_P \circ a) \circ b) = \\ &= b_P \circ (0_R \circ b) = b_P \circ b = 0_R.\end{aligned}$$

Seega on pöördelemendi tingimus täidetud ja $a \circ b \in P$.

5. Kui eeldada, et R on kommutatiivne ring, siis kehtib $ab=ba$ iga $a, b \in R$ korral ja järelikult ka $a \circ b = a + b - ab = b + a - ba = b \circ a$. Seega $a \circ b = b \circ a$ iga $a, b \in P$ korral.

Seega rahuldab $(P, \circ)$ rühma definitsiooni. Kui lisaks eeldada, et ring R on kommutatiivne, siis isegi Abeli rühma definitsiooni. $\square$

2 Jadaruum $\mathcal{U}$

Olgu meil jadaruum ([3] lk 210) $\mathcal{U} = \{a = (a_0, a_1, \dots) : a_i \in \mathbb{R}, \quad i = 0, 1, \dots\}$, millel on defineeritud liitmine, korrutamine ja skalaariga $\lambda \in \mathbb{R}$ korrutamine järgnevalt:

$$a + b = (a_0, a_1, \dots) + (b_0, b_1, \dots) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots)$$

$$a \cdot b = (a_0, a_1, \dots) \cdot (b_0, b_1, \dots) = (a_0 \cdot b_0, a_1 \cdot b_1, \dots)$$

$$\lambda a = \lambda (a_0, a_1, \dots) = (\lambda a_0, \lambda a_1, \dots),$$

ehk iga $k \in \{0, 1, \dots\}$ korral $(a + b)_k = a_k + b_k$, $(a \cdot b)_k = a_k \cdot b_k$ ja $(\lambda a)_k = \lambda a_k$.

Näitame, et jadaruum $\mathcal{U}$ on ring. Kuna tehted on defineeritud komponentide kaupa, siis piisab näidata, et omadused kehtivad iga $k \in \{0, 1, \dots\}$ korral. Olgu järgnevas $a, b, c \in \mathcal{U}$ suvalised.

1. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (assotsiatiivsus);

$$\begin{aligned} ((a + b) + c)_k &= (a + b)_k + c_k = (a_k + b_k) + c_k = a_k + (b_k + c_k) = \\ &= a_k + (b + c)_k = (a + (b + c))_k. \end{aligned}$$

2. Olgu $0_{\mathcal{U}} = (0, 0, \dots)$. Siis on $0_{\mathcal{U}}$ jadaruumi $\mathcal{U}$ nullelement, s.t $a + 0_{\mathcal{U}} = a = 0_{\mathcal{U}} + a$;

$$(a + 0_{\mathcal{U}})_k = a_k + (0_{\mathcal{U}})_k = a_k + 0 = a_k = 0 + a_k = (0_{\mathcal{U}})_k + a_k = (0_{\mathcal{U}} + a)_k.$$

3. Elemendi $a \in \mathcal{U}$ vastandelement on $-a = (-a_0, -a_1, \dots)$,
s.t. $a + (-a) = 0_{\mathcal{U}} = (-a) + a$.

$$\begin{aligned}(a + (-a))_k &= a_k + (-a)_k = a_k + (-a_k) = 0_k = \\ &= (-a_k) + a_k = (-a)_k + a_k = ((-a) + a)_k.\end{aligned}$$

4. $a + b = b + a$ (kommutatiivsus);

$$(a + b)_k = a_k + b_k = b_k + a_k = (b + a)_k.$$

5. $a(bc) = (ab)c$ (assotsiatiivsus);

$$\begin{aligned}(a(bc))_k &= a_k(bc)_k = a_k(b_k c_k) = \\ &= (a_k b_k) c_k = (ab)_k c_k = ((ab)c)_k.\end{aligned}$$

6. Olgu $1_{\mathcal{U}} = (1, 1, \dots)$. Siis on $1_{\mathcal{U}}$ jadaruumi $\mathcal{U}$ ühikelement,
s.t. $a1_{\mathcal{U}} = a = 1_{\mathcal{U}}a$;

$$(a1_{\mathcal{U}})_k = a_k(1_{\mathcal{U}})_k = a_k 1 = a_k = 1a_k = (1_{\mathcal{U}})_k a_k = (1_{\mathcal{U}}a)_k.$$

7. $a(b + c) = ab + ac$ (distributiivsus);

$$\begin{aligned}(a(b + c))_k &= a_k(b + c)_k = a_k(b_k + c_k) = \\ &= a_k b_k + a_k c_k = (ab)_k + (ac)_k.\end{aligned}$$

8. $(a + b) c = ac + bc$ (distributiivsus);

$$\begin{aligned} ((a + b) c)_k &= (a + b)_k c_k = (a_k + b_k) c_k = \\ &= (a_k c_k + b_k c_k) = (ac)_k + (b + c)_k. \end{aligned}$$

Järelikult osutub hulk $\mathcal{U}$ ringiks liitmise ja korrutamise suhtes.

2.1 Konvolutsioon jadaruumis $\mathcal{U}$

Defineerime selles ruumis ka kolmanda korrutamise $\odot : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$, mida nimetatakse konvolutsiooniks, järgmiselt:

$$(a \odot b)_k = \sum_{l=0}^k a_l b_{k-l} \quad k \in \{0, 1, \dots\}, \quad \text{iga } a, b \in \mathcal{U} \text{ korral.}$$

Kontrollime, kas antud jadaruum moodustab ringi liitmise ja konvolutsiooni suhtes. Kuna korrutamine on defineeritud komponenthaaval, siis piisab vaadata, et omadused kehtivad iga $k \in \{0, 1, \dots\}$ korral. Olgu järgnevas $a, b, c \in \mathcal{U}$ suvalised.

5. $a \odot (b \odot c) = (a \odot b) \odot c$ (assotsiatiivsus);

Selleks toome sisse uued tähistused:

$$v_k = (a \odot b)_k = \sum_{l=0}^k a_l b_{k-l} \quad \text{ja} \quad w_k = (b \odot c)_k = \sum_{l=0}^k b_l c_{k-l},$$

siis

$$(a \odot (b \odot c))_k = \sum_{l=0}^k a_l w_{k-l} = \sum_{l=0}^k a_l \left(\sum_{m=0}^{k-l} b_m c_{k-l-m} \right). \quad (3)$$

Paneme tähele, et indeksid l ja m on piiratud järgmiselt: $0 \leq l \leq k$ ja $0 \leq m \leq k - l$. Viimasest saame järeldada, et $l + m \leq k$. Defineerime nüüd uue indeksi $n = l + m$. Siis $l + m = n \leq k$. Indeks n vähim väärtus, mille ta saavutab, kui $l = m = 0$, on 0 ja suurim väärtus k . Jätkates võrdust (3), saame

$$\sum_{l=0}^k a_l \left(\sum_{m=0}^{k-l} b_m c_{k-l-m} \right) = \sum_{l=0}^k a_l \sum_{m=0}^{k-l} b_m c_{k-(l+m)} = \quad (4)$$

$$= \sum_{l=0}^k \sum_{m=0}^{k-l} a_l b_m c_{k-(l+m)} = \sum_{l=0}^k \sum_{n=l}^k a_l b_{n-l} c_{k-n}. \quad (5)$$

Näeme, et välimise ja sisemise summa summeerimispiirkonad on vastavalt $0 \leq l \leq k$ ja $0 \leq l \leq n \leq k$. Ühendades need kaks piirkonda, saame $0 \leq l \leq n \leq k$, kusjuures iga paar (l, n) , kus $0 \leq l \leq n \leq k$, määrab täpselt ühe liidetava $a_l b_{n-l} c_{k-n}$ sellest kahekordsest summast.

Paneme tähele, et summeeritavad korrutised määravad ära kolm indeksi, millest kaks on muutujad. Teame, et mõlema summa korral summeeritakse kuni indeksini k ja et indeks n sõltub indeksist l . Näeme, et

$$\sum_{l=0}^k \sum_{n=l}^k a_l b_{n-l} c_{k-n} = \sum_{n=0}^k a_0 b_{n-0} c_{k-n} + \sum_{n=1}^k a_1 b_{n-1} c_{k-n} + \dots + \sum_{n=k}^k a_k b_{n-k} c_{k-n}.$$

ja nüüd tekib iga $n = i$ korral igast summast veel omakorda $k + 1 - i$

liidetavat, mis avalduvad kujul

$$\sum_{n=0}^k a_0 b_n c_{k-n} = a_0 b_0 c_k + \dots + a_0 b_k c_0 \quad (6)$$

$$\sum_{n=1}^k a_1 b_{n-1} c_{k-n} = a_1 b_0 c_{k-1} + \dots + a_1 b_{k-1} c_0 \quad (7)$$

...

$$\sum_{n=k}^k a_k b_{n-k} c_{k-n} = a_k b_0 c_0. \quad (8)$$

Meil on nüüd $k+1$ summat, mille summeerimisindeks kasvab lineaarselt nullist k -ni. See tähendab, et iga fikseeritud $n = h$ korral tekib $k-h+1$ liidetavat. Kui $n = 0$, siis tekib $k+1$ liidetavat ja $n = k$ korral 1 liidetav. Tekib aritmeetiline jada, mis kirjeldab liidetavate elementide kogust. Aritmeetilise jada summa avaldub kujul

$$S_k = \frac{1+k+1}{2} \cdot k+1 = \frac{k+2}{2} (k+1).$$

Seega on meil kokku $\frac{k+2}{2} (k+1)$ liidetavat, mille indeksite $l, n-l, k-n$ summa on $l+n-l+k-n=k$.

Sama tulemuse saame ka siis, kui summeerime $n = 0, 1, \dots, k$ korral $\sum_{l=0}^n a_l b_{n-l} c_{k-n}$. Viimasest summast saame vastavalt $n = 0$ korral 1 liidetava ja $n = k$ korral $k+1$ liidetavat. Kokku oleme saanud jällegi $\frac{k+2}{2} (k+1)$ liidetavat, kus on samuti elementide a, b, c indeksite summa võrdne k -ga. Antud summa väljendub kahekordse summana järgmiselt:

$$\sum_{n=0}^k \sum_{l=0}^n a_l b_{n-l} c_{k-n}. \quad (9)$$

Paneme tähele, et selline avaldis summeerib täpselt samad korrutised nagu ka (4).

$$\sum_{n=0}^k \sum_{l=0}^n a_l b_{n-l} c_{k-n} = \sum_{l=0}^0 a_l b_{0-l} c_k + \sum_{l=0}^1 a_l b_{1-l} c_{k-1} + \dots + \sum_{l=0}^k a_l b_{k-l} c_0,$$

kus iga ühekordne summa avaldub järgmiselt:

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^0 a_l b_{0-l} c_k &= a_0 b_0 c_k \\ \sum_{l=0}^1 a_l b_{1-l} c_{k-1} &= a_0 b_1 c_{k-1} + a_1 b_0 c_{k-1} \\ &\dots \\ \sum_{l=0}^k a_l b_{k-l} c_0 &= a_0 b_k c_0 + \dots + a_k b_0 c_0. \end{aligned}$$

Näeme, et saadud summade esimesed liidetavad annavad meile summa (6), summade teised liidetavad annavad summa (7) jne kuni summade $k+1$ liidetav annab summa (8). Seega iga liidetav, mis esineb kahekordses summas (4) esineb ka kahekordses summas (9) täpselt ühe korra. Pannes nüüd (4) ja (9) kokku, olemegi saanud, et

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^k \sum_{n=l}^k a_l b_{n-l} c_{k-n} &= \sum_{n=0}^k \sum_{l=0}^n a_l b_{n-l} c_{k-n} = \sum_{n=0}^k \left(\sum_{l=0}^n a_l b_{n-l} \right) c_{k-n} = \\ &= \sum_{n=0}^k v_n c_{k-n} = ((a \odot b) \odot c)_k. \end{aligned}$$

Olemegi näidanud, et $(a \odot (b \odot c))_k = ((a \odot b) \odot c)_k$.

6. Olgu $e = (1, 0, \dots)$. Näitame, et siis

$$a \odot e = a = e \odot a.$$

Kui vaatame jada elemente indekseid kaupa, siis

$$(a \odot e)_k = \sum_{l=0}^k a_l e_{k-l}$$

ja paneme tähele, et $k = 0$ puhul

$$(a \odot e)_0 = \sum_{l=0}^0 a_l e_{0-l} = a_0 e_0 = a_0 1 = a_0 = 1 a_0 = \sum_{l=0}^0 e_{0-l} a_l = (1 \odot e)_0$$

ning $k > 0$ korral

$$\begin{aligned} (a \odot e)_k &= \sum_{l=0}^k a_l e_{k-l} = \sum_{l=0}^{k-1} a_l e_{k-l} + a_k e_0 = \sum_{l=0}^{k-1} a_l 0 + a_k 1 = \\ &= 0 + a_k = a_k = a_k + 0 = 1 a_k + \sum_{l=0}^k 0 a_l = e_0 a_k + \sum_{l=0}^{k-1} e_{k-l} \cdot a_l = \\ &= \sum_{l=0}^k e_{k-l} \cdot a_l = (e \odot a)_k. \end{aligned}$$

Järelikult rahuldab e ruumis $\mathcal{U}$ ringi ühikelemendi tingimust.

7. $a \odot (b + c) = a \odot b + a \odot c$ (distributiivsus);

$$\begin{aligned} (a \odot (b + c))_k &= \sum_{l=0}^k a_l (b + c)_{k-l} = \sum_{l=0}^k a_l (b_{k-l} + c_{k-l}) = \sum_{l=0}^k (a_l b_{k-l} + a_l c_{k-l}) = \\ &= \sum_{l=0}^k a_l b_{k-l} + \sum_{l=0}^k a_l c_{k-l} = (a \odot b)_k + (a \odot c)_k = (a \odot b + a \odot c)_k. \end{aligned}$$

8. $(a + b) \odot c = a \odot c + b \odot c$ (distributiivsus);

$$\begin{aligned} ((a+b) \odot c)_k &= \sum_{l=0}^k (a+b)_l c_{k-l} = \sum_{l=0}^k (a_l + b_l) c_{k-l} = \sum_{l=0}^k (a_l c_{k-l} + b_l c_{k-l}) = \\ &= \sum_{l=0}^k a_l c_{k-l} + \sum_{l=0}^k b_l c_{k-l} = (a \odot c)_k + (b \odot c)_k = (a \odot c + b \odot c)_k. \end{aligned}$$

Sellega osutub jadaruum ringiks liitmise ja konvolutsiooni suhtes.

2.2 Kvaasikorrutamine jadaruumis $\mathcal{U}$

Defineerime jadaruumis $\mathcal{U}$ kvaasikorrutamise $\circ : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ järgmiselt:

$$a \circ b = a + b - ab \quad \text{iga } a, b \in \mathcal{U} \text{ korral.}$$

Siis iga $k \in \{0, 1, \dots\}$ korral $(a \circ b)_k = a_k + b_k - a_k b_k$. Kontrollime, kas antud jadaruum moodustab ringi liitmise ja kvaasikorrutamise suhtes. Ringi omaduste 1 – 4 kehtivuse oleme juba peatüki 2 alguses ära tõestanud, järele jääb vaid kontrollida omaduste 5 – 8 kehtivust. Olgu järgnevas $a, b, c \in \mathcal{U}$ suvalised.

5. $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ (assotsiatiivsus);

$$\begin{aligned} (a \circ (b \circ c))_k &= a_k + (b \circ c)_k - a_k (b \circ c)_k = \\ &= a_k + (b_k + c_k - b_k c_k) - a_k (b_k + c_k - b_k c_k) = \\ &= a_k + b_k + c_k - b_k c_k - a_k b_k - a_k c_k + a_k (b_k c_k) = \\ &= a_k + b_k - a_k b_k + c_k - a_k c_k - b_k c_k + (a_k b_k) c_k = \\ &= (a_k + b_k - a_k b_k) + c_k - (a_k + b_k - a_k b_k) c_k = \\ &= (a \circ b)_k + c_k - (a \circ b)_k c_k = ((a \circ b) \circ c)_k. \end{aligned}$$

6. Element $e = (1, 0, \dots)$ on jadaruumi $\mathcal{U}$ ühikelement kvaasikorrutamise suhtes, s.t,

$$a \circ e = a = e \circ a.$$

Tõepoolest, kui vaatame jada elemente indeksite kaupa, siis

$$(a \circ b)_k = a_k + b_k - a_k b_k$$

ja paneme tähele, et $k = 0$ korral

$$\begin{aligned} (a \circ e)_0 &= a_0 + e_0 - a_0 e_0 = a_0 + 1 - a_0 = 1 = \\ &= 1 + a_0 - a_0 = 1 + a_0 - e_0 a_0 = (e \circ a)_0, \end{aligned}$$

ja $k \geq 1$ korral

$$\begin{aligned} (a \circ e)_k &= a_k + e_k - a_k e_k = a_k + 0 - 0 = a_k = \\ &= 0 + a_k - 0 = e_k + a_k - e_k a_k = (e \circ a)_k. \end{aligned}$$

Kuid hariliku distributiivsuse, mis on ringi defintisioonis omadused 7 – 8, asemel kehtivad natukene teistsugused omadused.

7. $a \circ (b + c) = a \circ b + a \circ c - a$ (distributiivsus);

$$\begin{aligned} (a \circ (b + c))_k &= a_k + (b + c)_k - a_k (b + c)_k = a_k + b_k + c_k - a_k (b_k + c_k) = \\ &= a_k + b_k + c_k - a_k b_k - a_k c_k = a_k + b_k - a_k b_k + a_k + c_k - a_k c_k - a_k = \\ &= (a \circ b)_k + (a \circ c)_k - a_k = (a \circ b + a \circ c - a)_k. \end{aligned}$$

8. $(a + b) \circ c = a \circ c + b \circ c - c$ (distributiivsus);

$$\begin{aligned} ((a+b) \circ c)_k &= (a+b)_k + c_k - (a+b)_k c_k = a_k + b_k + c_k - (a_k + b_k) c_k = \\ &= a_k + b_k + c_k - a_k c_k - b_k c_k = a_k + c_k - a_k c_k + b_k + c_k - b_k c_k - c_k = \\ &= (a \circ c)_k + (b \circ c)_k - c_k = (a \circ c + b \circ c - c)_k. \end{aligned}$$

Seega ei teki meil ringi.

Lisaks kehtivad veel kaks skalaariga korrutamise omadust:

9. $\lambda a \circ b = \lambda (a \circ b) + (1 - \lambda) b$ (skalaariga korrutamine);

$$\begin{aligned} (\lambda a \circ b)_k &= \lambda a_k + b_k - (\lambda a)_k b_k = \lambda a_k + \lambda b_k - \lambda b_k - \lambda (a_k b_k) + b_k = \\ &= \lambda (a_k + b_k - a_k b_k) + b_k - \lambda b_k = \lambda (a \circ b)_k + (1 - \lambda) b_k = \\ &= \lambda (a \circ b)_k + (1 - \lambda) b_k = (\lambda (a \circ b))_k + ((1 - \lambda) b)_k = \\ &= (\lambda (a \circ b) + (1 - \lambda) b)_k. \end{aligned}$$

10. $a \circ \lambda b = \lambda (a \circ b) + (1 - \lambda) a$ (skalaariga korrutamine);

$$\begin{aligned} (a \circ \lambda b)_k &= a_k + (\lambda b)_k - a_k (\lambda b)_k = a_k + \lambda (b_k) - \lambda (a_k b_k) = \\ &= \lambda (a_k) + \lambda (b_k) - \lambda (a_k b_k) + a_k - \lambda (a_k) = \\ &= \lambda (a_k + b_k - a_k b_k) + (1 - \lambda) a_k = \\ &= \lambda (a \circ b)_k + (1 - \lambda) a_k = (\lambda (a \circ b) + (1 - \lambda) a)_k. \end{aligned}$$

3 Moodul

Selles peatükis on mooduli definitsioon võetud materjalist [2].

Definitsioon 9. ([2], definitsioon 5.1). Hulka A nimetatakse mooduliks üle ringi R , kui on defineeritud kujutused

$$A \times A \rightarrow A, \quad (a, b) \mapsto a + b,$$

$$R \times A \rightarrow A, \quad (k, a) \mapsto ka,$$

nii et

1. $(a + b) + c = a + (b + c)$ iga $a, b, c \in A$ korral;
2. leidub element $0_A \in A$ nii, et iga $a \in A$ korral $a + 0_A = a = 0_A + a$;
3. iga elemendi $a \in A$ korral leidub element $-a \in A$ nii,
et $a + (-a) = 0_A = (-a) + a$;
4. $a + b = b + a$ iga $a, b \in A$ korral;
5. $k(a + b) = ka + kb$ iga $a, b \in A$ ja $k \in R$ korral;
6. $(k + l)a = ka + la$ iga $a \in A$ ja $k, l \in R$ korral;
7. $(kl)a = k(la)$ iga $a \in A$ ja $k, l \in R$ korral;
8. $1_R a = a$ iga $a \in A$ korral.

Kontrollime, kas peatükis 2 defineeritud jadaruum $\mathcal{U}$ osutub ka mooduliks üle reaalarvude ringi $\mathbb{R}$. Mooduli omaduste 1 – 4 kehtivuse oleme oleme juba peatükis 2 ära tõestanud, järele jääb vaid kontrollida omaduste 5 – 8 kehtivust. Olgu $a, b \in \mathcal{U}$ ja $k, l \in \mathbb{R}$.

5. $k(a+b) = ka + kb$:

$$\begin{aligned} k(a+b) &= k(a_0+b_0, a_1+b_1, \dots) = (k(a_0+b_0), k(a_1+b_1), \dots) = \\ &= (ka_0+kb_0, ka_1+kb_1, \dots) = (ka_0, ka_1, \dots) + (kb_0, kb_1, \dots) = \\ &= k(a_0, a_1, \dots) + k(b_0, b_1, \dots) = ka + kb. \end{aligned}$$

6. $(k+l)a = ka + la$:

$$\begin{aligned} (k+l)a &= (k+l)(a_0, a_1, \dots) = ((k+l)a_0, (k+l)a_1, \dots) = \\ &= (ka_0+la_0, ka_1+la_1, \dots) = (ka_0, ka_1, \dots) + (la_0, la_1, \dots) = \\ &= k(a_0, a_1, \dots) + l(b_0, b_1, \dots) = ka + lb. \end{aligned}$$

7. $(kl)a = k(la)$:

$$\begin{aligned} (kl)a &= (kl)(a_0, a_1, \dots) = ((kl)a_0, (kl)a_1, \dots) = \\ &= (k(la_0), k(la_1), \dots) = k(la_0, la_1, \dots) = k(l(a_0, a_1, \dots)) = k(la). \end{aligned}$$

8. $1a = a$:

$$1a = 1(a_0, a_1, \dots) = (1a_0, 1a_1, \dots) = (a_0, a_1, \dots) = a.$$

Tuleb välja, et hulk $\mathcal{U}$ osutub liitmise ja skalaariga korrutamise suhtes mooduliks üle reaalarvude ringi $\mathbb{R}$.

3.1 Konvolutsioon moodulis $\mathcal{U}$

Defineerime ruumis $\mathcal{U}$ konvolutsiooni nagu alapeatükis 2.1.

Tuleb välja, et hulk $\mathcal{U}$ koos konvolutsiooni ja skalaariga korrutamisega ei ole moodul üle reaalarvude ringi $\mathbb{R}$, kuna võttes $a = (1, 0, 0, \dots) \in \mathcal{U}$, $b = (1, 1, 0, \dots) \in \mathcal{U}$ ja $\mathbb{R} \ni 2 \neq 2^2 = 4$, saame, et

$$\begin{aligned} 2(a \odot b)_1 &= 2 \sum_{l=0}^1 a_l b_{1-l} = 2(a_0 b_1 + a_1 b_0) = 2(1 + 0) = 2, \\ (2a \odot 2b)_1 &= \sum_{l=0}^1 2a_l 2b_{1-l} = 2a_0 2b_1 + 2a_1 2b_0 = \\ &= (2 \cdot 1)(2 \cdot 1) + (2 \cdot 0)(2 \cdot 1) = 2 \cdot 2 = 4 \end{aligned}$$

Järelikult $2(a \odot b)_1 = 2 \neq 4 = (2a \odot 2b)_1$ ning järelikult $2(a \odot b) \neq 2a \odot 2b$. Seega ei ole mooduli omadus 5 rahuldatud ja hulk $\mathcal{U}$ koos konvolutsiooni ja skalaariga korrutamisega ei ole moodul üle ringi $\mathbb{R}$.

4 Algebra $\mathcal{A}$

Definitsioon 10. Algebra $\mathcal{A}$ on moodul üle ringi R , milles on defineeritud kolm algebralist tehet

$$+ : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}, \quad (a, b) \mapsto a + b$$

$$\cdot : R \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}, \quad (k, a) \mapsto ka$$

$$* : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}, \quad (a, b) \mapsto a * b,$$

kus kehtivad iga $a, b, c \in \mathcal{A}$, $k, l \in R$ korral mooduli omadused ning lisaks neile veel kolm järgmist omadust:

$$9. (a * (b + c)) = (a * b) + (a * c) \text{ iga } a, b, c \in \mathcal{A} \text{ korral};$$

$$10. (a + b) * c = (a * c) + (b * c) \text{ iga } a, b, c \in \mathcal{A} \text{ korral};$$

$$11. k(a * b) = (ka) * b = a * (kb) \text{ iga } k \in R \text{ ja } a, b \in \mathcal{A} \text{ korra.}$$

4.1 Konvolutsioon $\mathcal{A}$

Olgu meil moodul $\mathcal{U}$ üle ringi $\mathbb{R}$. Defineerime lisaks eelnevatele tehetele uue tehte, mis korrutab omavahel mooduli $\mathcal{A}$ elemente järgmiselt:

$$\odot : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}, \quad (a, b) \mapsto c,$$

kus $c = (c_0, c_1, \dots)$ ja $c_k = \sum_{l=0}^k a_l b_{k-l}$ iga $k = 0, 1, \dots$ korral. Peatükis 2.1 oleme näidanud, et kehtivad omadused 9 – 10. Näitame, et kehtib ka omadus 11.

$$\begin{aligned}\lambda(a \odot b)_k &= \lambda \sum_{l=0}^k a_l b_{k-l} = \sum_{l=0}^k \lambda a_l b_{k-l} = (\lambda a \odot b)_k \\ \lambda(a \odot b)_k &= \lambda \sum_{l=0}^k a_l b_{k-l} = \sum_{l=0}^k \lambda a_l b_{k-l} = \sum_{l=0}^k a_l \lambda b_{k-l} = (a \odot \lambda b)_k.\end{aligned}$$

Seega oleme näidanud, et hulk $\mathcal{U}$ on liitmise, konvolutsiooni ja skalaariga korrutamise suhtes algebra.

4.2 Kvaasikorrutamine algebras $\mathcal{A}$

Olgu meil moodul A üle ringi R . Defineerime veel hulgale kvaasikorrutamise

$$\circ : A \times A \rightarrow A, \quad (a, b) \mapsto a + b - a * b.$$

Kontrollime, kas hulk A moodustab nende kolme tehte suhtes algebra $\mathcal{A}$. Tuletame meelde, et peatükis 1 näitasime, et kvaasikorrutamise suhtes kehtivad teistsugused distributiivsused ja skalaariga korrutamine.

$$9. \quad a \circ (b + c) = a \circ b + a \circ c - a :$$

$$\begin{aligned}a \circ (b + c) &= a + b + c - a * (b + c) = \\ &= a + b - a * b + a + c - a * c - a = a \circ b + a \circ c - a.\end{aligned}$$

10. $(a + b) \circ c = a \circ c + b \circ c - c :$

$$\begin{aligned}(a + b) \circ c &= a + b + c - (a + b) * c = \\ &= a + c - a * c + b + c - b * c - c = a \circ c + b \circ c - c.\end{aligned}$$

11. $(\lambda a) \circ b = \lambda(a \circ b) + (1_R - \lambda)b$ ja $a \circ (kb) = \lambda(a \circ b) + (1_R - \lambda)a$

$$\begin{aligned}(\lambda a) \circ b &= \lambda a + b - \lambda a * b = \lambda a + \lambda b - \lambda a * b + b - \lambda b = \\ &= \lambda(a + b - a * b) + (1_R - \lambda)b = \lambda(a \circ b) + (1_R - \lambda)b \\ a \circ (\lambda b) &= a + \lambda b - a * \lambda b = \lambda a + \lambda b - \lambda(a * b) + a - \lambda a = \\ &= \lambda(a + b - a * b) + (1_R - \lambda)a = \lambda(a \circ b) + (1_R - \lambda)a.\end{aligned}$$

Seega ei ole algebra omadused 9 – 11 rahuldatud ja hulk A koos liitmise, kvaasikorrutamise ja skalaariga korrutamisega ei ole algebra.

Teoreem 4. *Hulk $\mathcal{A}$ on kvaasikorrutamise suhtes monoid.*

Tõestus. Kuna iga algebra on ka ring, siis tõestus jääb täpselt samaks nagu teoreemis 2. □

Teoreem 5. *Kvaasipööratavate elementide hulk algebras $\mathcal{A}$ on kvaasikorrutamise suhtes rühm.*

Tõestus. Kuna rühma omadused sõltuvad ainult kvaasikorrutamisest, mis on defineeritud läbi liitmise ja korrutamise, ning iga algebra on nende tehete suhtes ring, siis tõestus jääb täpselt samaks nagu teoreemis 3. □

Kokkuvõte

Käesoleva töö eesmärk oli uurida kvaasikorrutamise ja konvolutsiooni omadusi ning määrata, millised algebralised struktuurid nende tehete kasutamisel tekivad.

Selgus, et ring R on kvaasikorrutamise suhtes monoid ning kvaasipööratavte elementide hulk selles ringis moodustab rühma. Juhul kui ring R on kommutatiivne, siis osutub see rühm Abeli rühmaks. Jadaruumis $\mathcal{U}$ ei kehti kvaasikorrutamise suhtes ringi distributiivsused, mistõttu ei teki seal ringi. Seega ei saa ka jadaruum $\mathcal{U}$ kvaasikorrutamisega olla moodul ega ka algebra. Sarnaselt ringile osutub algebra $\mathcal{A}$ kvaasikorrutamise suhtes monoidiks ning tema kvaasipööratavate elementide hulk rühmaks.

Teiseks näidati töös, et konvolutsioon rahuldab ringi korrutamise omadusi ning jadaruum $\mathcal{U}$ varustatuna liitmise ja konvolutsiooniga on ring. Lisaks selgus, et hulk $\mathcal{U}$ ei ole konvolutsiooni ja skalaariga korrutamise suhtes moodul üle ringi $\mathbb{R}$, kuna distributiivsuse nõuded pole rahuldatud. See eest on hulk $\mathcal{A}$ liitmise, skalaariga korrutamise ja konvolutsiooni suhtes algebra.

Kasutatud kirjandus

- [1] Valdis Laan. *Algebra I*. Available online. Loengukonspekt, Tartu Ülikool. 2025. URL: https://courses.ms.ut.ee/MTMM.00.038/2025_fall/uploads/Main/kon2025.pdf (vaadatud 24.05.2026).
- [2] Valdis Laan. *Sissejuhatuse algebra struktuuridesse*. Available online. Loengukonspekt, Tartu Ülikool. 2024. URL: https://kodu.ut.ee/~vlaan/konspekt_Sissejuhatuse_algebra_struktuuridesse_2024.pdf (vaadatud 24.05.2026).
- [3] Walter Wyss. “The quasi-multiplication on rings and algebras”. *Letters in Mathematical Physics* 2.3 (1978), lk. 207–217. ISSN: 1573-0530. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00406407>. URL: <https://link.springer.com/article/10.1007/BF00406407#citeas>.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Rait Reitkam,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose "Kvaasikorrutamise ja konvolutsiooni algebralistest omadustest", mille juhendaja on Mart Abel, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commons'i litsentsiga CC BY NC ND 3.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Rait Reitkam

26.05.2026