

TARTU ÜLIKOOL
MATEMAATIKA-INFORMAATIKATEADUSKOND
Matemaatika instituut
Matemaatika eriala

Julia Prost

TÜKITI KONSTANTSE PAKSUSEGA
PLAADI PAINE

Magistritöö

Juhendaja: prof. Jaan Lellep, dr. füüs.-mat.

Autor: " " mai 2010

Juhendaja: " " mai 2010

Tartu 2010

Sisukord

Sissejuhatus	3
1 Elastse plaadi keskpinna võrrand	5
1.1 Seosed plaadi läbipainde, siirete ja deformatsioonide vahel	5
1.2 Seosed plaadi läbipainde ja pingete vahel	7
1.3 Plaadi painde- ja väändemomendid	8
1.4 Tasakaalutingimused. Plaadi lõikejõud ja toereaktsioonid	10
1.5 Rajatingimused	13
2 Navier' meetod	15
2.1 Navier' meetodi kirjeldus	15
2.2 Ühtlase koormusega vabalt toetatud plaat	16
3 Bubnov-Galjorkini meetod	19
3.1 Bubnov-Galjorkini meetodi kirjeldus	19
3.2 Jäigalt kinnitatud plaadi paine	20
3.2.1 Ühtlase koormusega plaat	20
3.2.2 Astmelise koormusega plaat	29
3.2.3 Tükiti konstantse paksusega plaat	35
3.3 Vabalt toetatud plaadi paine	42
3.3.1 Ühtlase koormusega plaat	42
3.3.2 Astmelise koormusega plaat	51
3.3.3 Tükiti konstantse paksusega plaat	55
Summary	61
Lisad	63
Viited	66

Sissejuhatus

Käesoleva töö eesmärgiks on uurida elastse ristikülükukujulise plaadi painet juhul, kui plaadile mõjub ristkoormus.

Plaat on prismaatiline või silindriline keha, mille kõrgus (plaadi paksus) on võrreldes teiste mõõtmetega väike.

Antud töös vaadeldakse ainult õhukeste plaatide painet (see tähendab selliste plaatide painet, mille lühema külje pikkus ületab plaadi kõrguse vähemalt viiekordselt) sõltuvalt plaadi läbipainde ja paksuse suhtest. Vaatluse all on ainult painduvad plaadid (nende arvutamisel loobutakse ahelapingetest, sest need on tunduvalt väiksemad kui paindepinged).

Ristikülükukujulised plaadid leiavad tehnikas laialdast kasutamist paljudes konstruktsioonides, sealhulgas näiteks laevade ja lennukite keredes, majade vahelagedena jne.

Elastsete plaatide paindele on kirjanduses üsna palju tähelepanu pööratud. Esimesed uuringud plaatide painde vallas kuuluvad Sophie Germain'le (1811. – 1816. aastatel) ja Navier'le (1820. aastal), [12].

Püstitatud ülesanne taandub neljandat järku osatuletistega diferentsiaalvõrrandi lahendi otsimisele. Plaadi painde diferentsiaalvõrrandi lahendamiseks tuleb üldjuhul kasutada ligikaudset meetodit.

Aja jooksul on välja töötatud suhteliselt palju erinevaid ligikaudseid meetodeid plaadi painde diferentsiaalvõrrandi lahendamiseks. Tuntuimad neist on Navier' meetod (ajalooliselt vanim meetod), Bubnov-Galjorkini meetod, Kantorovitš-Vlassovi meetod, Maurice Levy meetod, Ritzi meetod, Timošenko meetod, kollokatsiooni-meetod, võrgumeetod jne, [1, 5, 8, 9, 10, 11, 12].

Käesolevas töös on palju tähelepanu pööratud Bubnov-Galjorkini meetodile (peatükk 3). Kuna seda meetodit võib vaadelda ka Navier' meetodi üldistusena, siis on töös vaadeldud ka Navier' meetodit (peatükk 2).

Bubnov-Galjorkini meetodi idee on esitatud Ivan Bubnovi (insener, akadeemik, professor, mehaanika õppejõud) poolt 1913. aastal. Temast sõltumata kasutas sama lahenduskäiku ka Boriss Galjorkin (insener, akadeemik, professor, mehaanika õppejõud) 1915. aastal. Mõlemad mehed on õpetanud mehaanikat Peterburi Polütehnilises instituudis, [13, 14].

Nendenimeline meetod on leidnud laialdast tuntust kogu maailmas. Tänapäeval on see meetod aluseks paljude algoritmide lahendamiseks matemaatilise füüsika, mehaanika, termodünaamika, elektromagnetismi, hüdrodünaamika vallas jne.

Töö koosneb kolmest peatükist, millest esimesed kaks on referatiivsed. Neis kasutatakse raamatutes [1, 5, 8, 9, 10, 11, 12] saadud tulemusi. Kolmas peatükk sisaldab iseseisva töö tulemusi (punktides 3.2.1 ja 3.3.1 on toetunud raamatutes [9, 11, 12] saadule).

Esimesed kaks peatükki käsitlevad ainult ühtlase paksusega isotroopseid plaate (see tähendab plaate, mille elastsusomadused on kõigis suundades ühesugused). Kolmandas peatükis on vaadeldud nii ühtlase kui ka mitteühtlase paksusega isotroopseid plaate.

Esimeses peatükis tutvustatakse ühtlase paksusega õhukeste isotroopsete plaatide paindeteooriat. Vaadeldakse seoseid plaadi läbipainde, siirete ning deformatsioonide vahel. Samuti näidatakse seoseid plaadi läbipainde ja pingete vahel. Käsitletakse painde- ja väändmomentide, lõikejõudude ning toereaktsioonide leidmist. Tuletatakse õhukese elastse plaadi tasakaaluvõrrandit, mille lahendit otsitakse järgmistes peatükkides. Peatüki lõpus esitatakse rajatingimused järgalt kinnitatud ning vabalt toetatud plaadi servade jaoks.

Teises peatükis tutvustatakse Navier' meetodit, mille korral plaadi läbipaine määratakse kahekordsete trigonomeetriliste ridade abil. Meetodi rakendamise näitena on vaadeldud ka kõikidest servadest vabalt toetatud ristkülikukujulist plaati, mis on ühtlaselt koormatud.

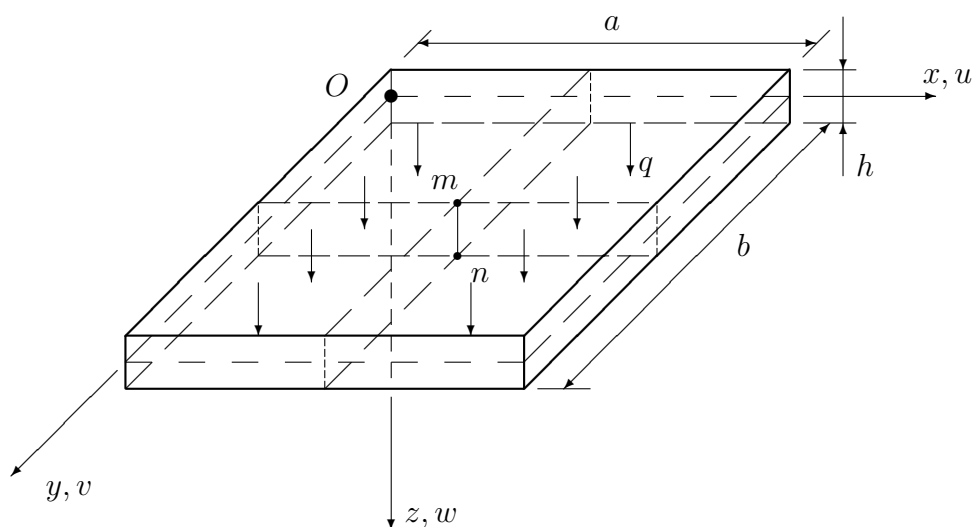
Kolmandas peatükis on esitatud iseseisva uurimistöö tulemused. Põhilise meetodina õhukese elastse plaadi paindeülesande lahendamisel erinevatel rajatingimused on antud töös kasutusel Bubnov-Galjorkini meetod, millest on antud ülevaade peatüki algul. Alguses on vaatluse all järgalt kinnitatud plaadi paine. Vaadeldakse eraldi kolme juhtumit: ühtlase koormusega plaat, astmelise koormusega plaat ning tükiti konstantse paksusega plaat, millele on rakendatud ühtlane koormus. Edasi on võrdluseks vaatluse all ka vabalt toetatud plaadi paine. Sarnaselt järgalt kinnitatud plaadiga vaadeldakse ka siin eraldi analoogset kolme juhtumit: ühtlase koormusega plaat, astmelise koormusega plaat ning tükiti konstantse paksusega plaat, millele on rakendatud ühtlane koormus. Tuletatakse ka valemeid, et leida painde- ja väändmomente, lõikejõudu, toereaktsioone, normaal- ja tangentsiaalpingeid.

Töö lõpus (lisades) on toodud tabelid ühtlaselt jaotatud koormusega ristkülikukujuliste plaatide arvutamiseks, [1].

1 Elastse plaadi keskpinna võrrand

1.1 Seosed plaadi läbipainde, siirete ja deformatsioonide vahel

Vaatleme ristkülikukujulist plaati, mille külgede pikkused on a ja b ning paksus on h . Kui $a < b$, siis loetakse plaat õhukeseks, kui $h < \frac{1}{5}a$. Koordinaatteljestiku O, x, y, z toome sisse järgmiselt (joonis 1):



Joonis 1: Ühtlase koormusega ristkülikukujuline plaat

Teljed x ja y asugu plaadi keskpinnas (pind, mis jagab plaadi paksuse kaheks võrdseks osaks), telg z olgu suunatud vertikaalselt alla. Tähistame siirded nende telgedes suunas vastavalt u, v ja w . Plaadi kesktasandi punktide vertikaalsiiret $w(x, y)$ nimetame läbipaindeks. Eeldame, et ristkoormuse intensiivsuse q positiivne suund langeb kokku z -telje positiivse suunaga. Olgu koormuse intensiivsus nii väike, et läbipainded võime lugeda väikesteks ehk $w \ll h$.

Õhukeste plaatide arvutamisel lähtume järgmistest õhukeste plaatide painde-teooria hüpoteesidest:

1. sirgjoonelised elemendid, mis enne deformatsiooni olid plaadi keskpinnaga risti, jäävad ka pärast deformatsiooni sirgjoonelisteks ja keskpinnaga risti (sirgete normaalide hüpotees),
2. pinged, mis tekivad plaadi keskpinnaga paralleelsete kihtide rõhumisest üksteisele, on hüljatavalt väikesed,

3. plaadi keskpinna punktid siirduvad ainult plaadi keskpinna ristsuunas; keskpinna punktide siirded plaadi pinnas võrduvad nulliga; keskpinna deformeerumisest tekivad pinged on hüljatatavalt väikesed.

Osutub, et plaadi siirded u ja v on võimalik avaldada plaadi keskpinna läbipainde w kaudu. Kuna pikenemine z -telje suunas on teisejärgulise tähtsusega suurus, siis loeme plaadi mingi punkti läbipainde võrdseks plaadi keskpinna vastava punkti läbipaindega ehk $w(x, y, z) = w(x, y)$.

Esiteks leiame siirete u ja w vahelise seose. Selleks vaatleme plaadi keskpinna normaalil mn (joonis 1) asetsevat punkti, mis paikneb xz -tasandil plaadi keskpinnast kaugusel z .

Vastavalt kolmandale õhukeste plaatide paindeteooria hüpoteesile saab aga plaadi keskpinnas asetsev punkt liikuda ainult z -telje sihis, seega tema koordinaadid x ja y ei muutu: $u = v = 0$. Oletame, et plaadi keskpind on antud punktis pööratud nurga α võrra. Sirglõik mn pöörduv sama nurga võrra (vastavalt sirgete normaalide hüpoteesile). Sellest järeldub, et

$$u = -z\alpha.$$

Miinusmärk on tingitud asjaolust, et punkt, mis asub plaadi keskpinnast kaugusel z liigub x -telje negatiivses suunas.

Olgu pöördenurgad väikesed ehk

$$\alpha \approx \tan \alpha = \frac{\partial w}{\partial x},$$

mistõttu saame siirde u avaldiseks

$$u(x, y, z) = -z \frac{\partial w(x, y)}{\partial x}$$

ning siirde v avaldiseks

$$v(x, y, z) = -z \frac{\partial w(x, y)}{\partial y}.$$

Seega siirded u ja v avalduvad plaadi läbipainde w kaudu järgmiselt:

$$\begin{aligned} u &= -z \frac{\partial w}{\partial x}, \\ v &= -z \frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned} \tag{1}$$

Seoste (1) saamiseks kasutasime ära kolmest õhukeste plaatide paindeteooria põhihüpoteesidest kahte hüpoteesi.

Nüüd avaldame läbipainde w kaudu suhtelised deformatsioonid $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ ja γ_{xy} . Asendades avaldised (1) Cauchy võrranditesse, [1, 2, 3, 4, 6, 7, 9]

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},$$

saame otsitavad avaldised

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

$$\varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

$$\gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (2)$$

1.2 Seosed plaadi läbipainde ja pingete vahel

Vastavalt teisele õhukeste plaatide paindeteooria hüpoteesile võrduvad plaadi üksikute kihtide vahel tekkivad normaalpinged nulliga:

$$\sigma_z = 0.$$

Seega keskpinnaga paralleelsed kihid on tasandpinguses ja Hooke'i seadust võime nende kohta kasutada järgmisel kujul:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y),$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x),$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy},$$

kus μ on Poissoni tegur, E on elastsusmoodul, σ_x ja σ_y on normaalpinged, τ_{xy} on tangentsiaalpinged ning

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}.$$

Lahendades need võrrandid pingete suhtes, saame järgmised avaldised:

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \mu^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y),$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \mu^2}(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x),$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1 + \mu)}\gamma_{xy}. \quad (3)$$

Asendame võrranditesse (3) suhteliste deformatsioonide asemele avaldised (2) ning leiame, et pinged väljenduvad plaadi läbipainde kaudu järgmiselt:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{Ez}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \\ \sigma_y &= -\frac{Ez}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), \\ \tau_{xy} &= -\frac{Ez}{1-\mu^2}(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} = -\frac{Ez}{1+\mu}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}.\end{aligned}\quad (4)$$

Seega muutuvad normaalpinged σ_x ja σ_y ja tangentsiaalpinged τ_{xy} plaadi keskpinna normaali sihis lineaarselt. Plaadi keskpinnas võrduvad need nulliga ja maksimaalse väärtusega on plaadi välispindadel.

Pingekomponentide avaldiste (4) tuletamisel kasutasime ära plaatide paindeteooria põhihüpoteese ja lineaarse elastsusteooria põhivõrrandeid. Veel on vaja leida avaldised pingekomponentide σ_z , τ_{yz} ja τ_{zx} jaoks ja seos plaadi elastse pinna w ning koormuse q vahel, [1, 9, 12].

Paindepingete avaldised ning elastse pinna ja koormuse vahelise seose saame tasakaaluvõrrandite integreerimisel järgmistel rajatingimustel:

$$\text{kui } z = h/2, \text{ siis } \sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0,$$

$$\text{kui } z = -h/2, \text{ siis } \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \text{ ja } \sigma_z = -q.$$

1.3 Plaadi painde- ja väändemomendid

Plaatide juures mõistetakse painde- või väändemomendi all sisejõudu ainult plaadi laiuse ühiku kohta, see tähendab, et suurus, mida nimetame momendiks on õigupoolest momendi intensiivsus.

Olgu meil M_x moment, mille annavad pinged σ_x ja M_y moment, mille annavad pinged σ_y . Paindemomendi M_x jaoks saame järgmise avaldise:

$$dyM_x = dy \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\sigma_x dz,$$

kust

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\sigma_x dz.$$

Paigutame σ_x asemele esimese avaldistest (4), saame

$$M_x = - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{Ez^2}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dz,$$

kust pärast integreerimist, pidades silmas, et läbipaine w ei sõltu koordinaadist z , saame

$$M_x = -\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right). \quad (5)$$

Analoogiliselt võime leida ka paindemomendi M_y :

$$M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\sigma_y dz$$

ehk

$$M_y = -\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right).$$

Tangentsiaalpinged $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ annavad väändmomendi M_{xy} :

$$M_{xy} = -M_{yx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\tau_{xy} dz = -\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}.$$

Võttes kasutusele tähistuse

$$\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} = D, \quad (6)$$

võime avaldised painde- ja väändmomentide jaoks välja kirjutada lõplikult järgmisel kujul:

$$\begin{aligned} M_x &= -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \\ M_y &= -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), \\ M_{xy} &= -D(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}, \end{aligned} \quad (7)$$

kus suurust D nimetatakse silindriliseks paindejäikuseks, mis võrdub plaadi reduceeritud elastsusmooduli $E/(1-\mu^2)$ ja ühiklaiuse rislõike inertsmomenti $h^3/12$ korrutisega.

Positiivsete paindemomentide puhul on tõmmatud plaadi alumised kihid.

Maksimaalsed pinged tekivad meil plaadi väliskihtides, kus $z = \pm h/2$. Nii näiteks

$$\max \sigma_x = \frac{Eh}{2(1-\mu^2)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),$$

kust saame avaldist (5) kasutades

$$\max \sigma_x = \frac{6M_x}{h^2}.$$

Analoogiliselt võime kirjutada, et

$$\max \sigma_y = \frac{6M_y}{h^2},$$

$$\max \tau_{xy} = \frac{6M_{xy}}{h^2}.$$

Teisiti võib öelda, et maksimaalsed pinged saame, kui vastava momendi jagame vastupanumomendiga W , mis leitakse valemiga

$$W = \frac{h^2}{6},$$

see tähendab, et opereerime ristlõike vastupanumomendiga, mille laius on 1 ja kõrgus on h , [1, 9, 12].

1.4 Tasakaalutingimused. Plaadi lõikejõud ja toereaktsioonid

Olgu plaadi elemendid eraldatud külgedega dx ja dy ning kõrgusega h (joonis 2). Paneme kirja tasakaalutingimused. Vaadeldavale elemendile mõjuvad järgmised sise- ja välisjõudude komponendid: koormus intensiivsusega q , paindemomendid M_x ja M_y ning väändemomendid M_{xy} ja lõikejõud

$$Q_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} dz,$$

$$Q_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yz} dz.$$

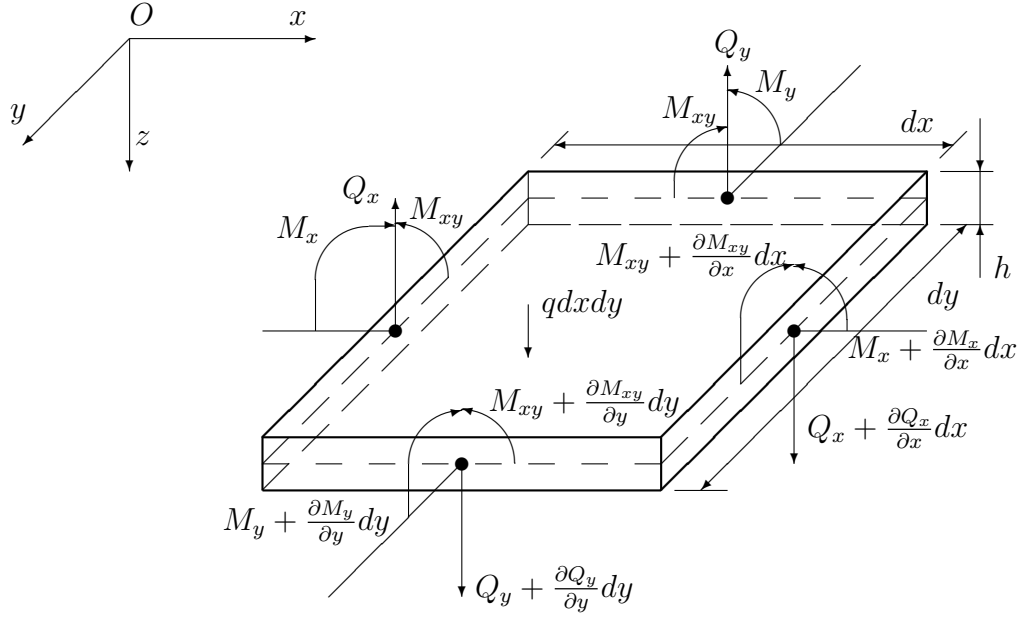
Tasakaaluvõrrandite koostamisel arvestame, et sisejõud on koordinaatide funktsioonid ja erinevad plaadi elemendi vastaskülgedel teineteisest lõpmata väikese suuruse võrra.

Võrdsustame nulliga momentide summa y -telje suhtes ja, hüljates kõrgemat järku väikesed suurused, saame

$$-M_x dy + (M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx) dy - M_{xy} dx + (M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} dy) dx - Q_x dy dx = 0.$$

Momentide summa x -telje suhtes annab meile võrduse

$$-M_y dx + (M_y + \frac{\partial M_y}{\partial y} dy) dx - M_{xy} dy + (M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx) dy - Q_y dx dy = 0.$$



Joonis 2: Plaadi elemendile mõjuvad sisejõud ja momendid

Kuna jõudude projektsioonide summa z -teljele võrdub nulliga, saame

$$-Q_y dx + (Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy) dx - Q_x dy + (Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx) dy + q dx dy = 0.$$

Ülejäänud kolm tasakaalutingimust on rahuldatud samaselt.

Pärast ühesuguste liikmete koondamist ning jagamist suurusega $dx dy$ saame järgmise diferentsiaalvõrrandite süsteemi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x &= 0, \\ \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y &= 0, \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Võrranditest (8) võime elimineerida lõikejõu. Selleks diferentseerime esimest võrrandit x järgi, teist võrrandit y järgi ja liidame kolmanda võrrandiga. Saame

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q = 0.$$

Kui asetame saadud võrrandisse M_x , M_y ja M_{xy} avaldised võrranditest (7), saame

$$-D \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 2(1 - \mu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] + q = 0,$$

kust pärast taandamisi leiame plaadi keskpinna diferentsiaalvõrrandi lõplikul kujul järgmiselt:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}. \quad (9)$$

See on Sophie Germain-Lagrange'i võrrand, kus q on koormus ja D on paindejäikus, mille saame avaldada valemiga (6).

Saadud võrrandi võib lühidalt kirjutada järgmiselt:

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{q}{D}$$

ehk

$$\nabla^4 w = \frac{q}{D}.$$

Seega ülesanne plaadi paindest viib diferentsiaalvõrrandi (9) lahendi otsimisele. Kui meil juba on olemas avaldis w jaoks, mis rahuldab võrrandit (9) ja rajatingimusi, võime võrranditest (7) leida painde- ja väändemomendid. Jagades need vastupanumomendiga saame maksimaalsed pinged mingis plaadi punktis, mis on määratud koordinaatidega x ja y , [1].

Lõikejõud Q_x ja Q_y leiame tasakaaluvõrranditest (8):

$$Q_x = \frac{\partial M_y}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -D \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + (1 - \mu) \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right],$$

millest pärast taandamist

$$Q_x = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w. \quad (10)$$

Analoogiliselt saame

$$Q_y = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w. \quad (11)$$

Lõikejõudude Q_x ja Q_y vastavate tangentsiaalpingete τ_{xz} ja τ_{yz} jaotus on paraboolne:

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= \frac{3}{2} \frac{Q_x}{h} \left(1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right) = -\frac{3D}{2h} \left(1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right) \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w, \\ \tau_{yz} &= \frac{3}{2} \frac{Q_y}{h} \left(1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right) = -\frac{3D}{2h} \left(1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right) \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w. \end{aligned}$$

Need pinged on maksimaalsed plaadi keskpinnas, kus $z = 0$.

Normaalpingete σ_z avaldiseks kujuneb

$$\sigma_z = -D \left(\frac{1}{2} - \frac{3z}{2h} + 2 \frac{z^3}{h^3} \right) \nabla^2 w.$$

Plaadi serval tekkivad toereaktsioonid võrduvad põhilise ja täiendava löikejõu summaga

$$R_x = Q_x + Q'_x = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}.$$

Kasutades avaldisi (7), (10) ja (11), saame toereaktsioonid avaldada siirde w kaudu järgmiselt:

$$R_x = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]. \quad (12)$$

Analoogiliselt saame

$$R_y = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right]. \quad (13)$$

Plaadi nurkades mõjuvad veel koondatud reaktsioonjõud

$$P_R = 2M_{xy} = -2D(1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

1.5 Rajatingimused

Diferentsiaalvõrrandi (9) lahendamiseks on vaja teada rajatingimusi. Selle võrrandi järk on mõlema koordinaadi x ja y järgi neli, järelikult vajame mõlema koordinaadi järgi ka nelja rajatingimust (iga plaadi serva jaoks kaks rajatingimust).

Vaatleme rajatingimusi ristkülikukujulise plaadi jaoks. Oletame, et koordinaatteljed x ja y on paralleelsed plaadi servadega. Kirjutame välja rajatingimused kahe toetusviisi jaoks, [1, 8, 12].

1. Jäigalt kinnitatud serv

Serva läbipaindumine võrdub nulliga, samuti võrdub nulliga tema pööre. Need tingimused on

$$(w)_{\substack{x=a \\ x=0}} = 0, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{\substack{x=a \\ x=0}} = 0 \quad (14)$$

ja

$$(w)_{\substack{y=b \\ y=0}} = 0, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{\substack{y=b \\ y=0}} = 0. \quad (15)$$

2. Vabalt toetatud serv

Kui plaadi serv toetub vabalt jäigale kontuurile, siis plaadi kõigil servadel läbipainded ja paindemomendid võrduvad nulliga. Samuti võrduvad nulliga pinged σ_x , seega peab paindemoment M_x serval võrduma nulliga. Kirjutame paindemomendi M_x

asemele tema avaldise (7) ja taandame konstantse kordajaga D , siis saame vabalt toetatud serva jaoks järgmised rajatingimused:

$$(w)_{\substack{x=a \\ x=0}} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{\substack{x=a \\ x=0}} = 0.$$

Kuna plaadi serv on sirge, siis tuleb $\partial^2 w / \partial y^2$ võrdub nulliga, ja rajatingimused on

$$(w)_{\substack{x=a \\ x=0}} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{\substack{x=a \\ x=0}} = 0. \quad (16)$$

Analoogiliselt

$$(w)_{\substack{y=b \\ y=0}} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{\substack{y=b \\ y=0}} = 0. \quad (17)$$

Järelikult võib vabalt toetatud plaadi rajatingimused esitada järgmisel kujul:

$$\text{kui } x = 0 \text{ või } x = a, \text{ siis } w = 0 \text{ ja } \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0,$$

$$\text{kui } y = 0 \text{ või } y = b, \text{ siis } w = 0 \text{ ja } \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

Kõik rajatingimused on rahuldatud kui võrrandi (9) lahendit otsida Fourier rea kujul

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

2 Navier' meetod

2.1 Navier' meetodi kirjeldus

Olgu plaat kõigil servadel vabalt toetatud ja koormatud suvalise koormusega $q(x, y)$, [1]. Elastse pinna võrrandit otsime järgmise kahekordse trigonomeetrilise rea kujul:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (18)$$

Rea (18) iga liige rahuldab homogeenseid rajatingimusi (16) ja (17)

$$(w)_{x=0,a} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad (w)_{y=0,b} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0,$$

seega rahuldab neid ka rida tervikuna.

Arendame plaadi koormuse q x ja y järgi Fourier' ritta

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (19)$$

kus tegurid B_{mn} leiame valemist

$$B_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy. \quad (20)$$

Paigutame avaldised (18) ja (19) plaadi painde diferentsiaalvõrrandisse (9), siis saame

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = \\ = \frac{1}{D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \end{aligned} \quad (21)$$

Et võrrand (21) peab olema rahuldatud suvalise m ja n korral, siis

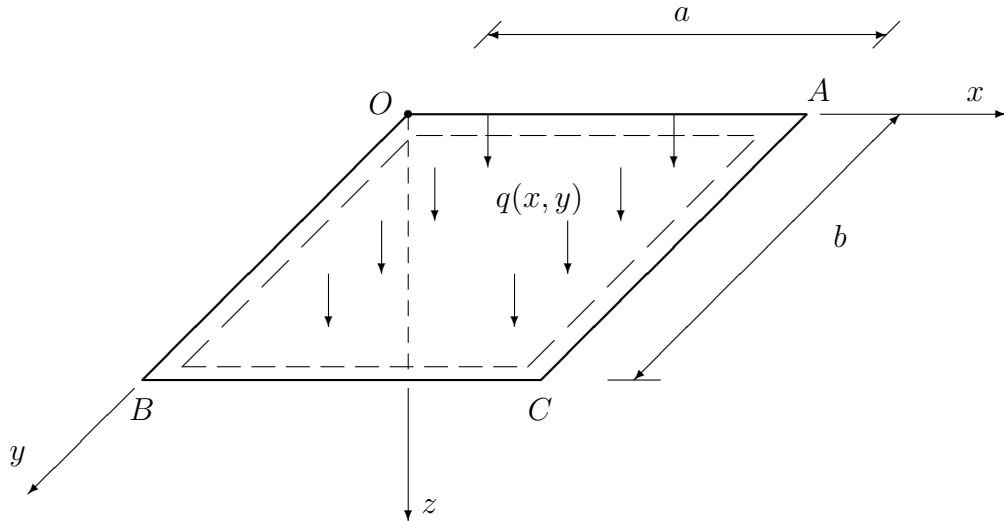
$$A_{mn} = \frac{B_{mn}}{\pi^4 D \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2}. \quad (22)$$

Asendame (22) avaldisse (18), saame plaadi elastse pinna võrrandiks

$$w(x, y) = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{mn}}{\left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (23)$$

2.2 Ühtlase koormusega vabalt toetatud plaat

Vaatleme kõikidest servadest vabalt toetatud ristkülikukujulist plaati, mis on koormatud ühtlase ristkoormusega $q(x, y)$ (joonis 3).



Joonis 3: Ühtlase koormusega vabalt toetatud plaat

Valemist (20) saame

$$B_{mn} = \frac{4q}{ab} \int_0^a \int_0^b \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy.$$

Kuna

$$\begin{aligned} \int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} dx &= \frac{a}{m\pi} \left[-\cos \frac{m\pi x}{a} \right]_0^a = \frac{a}{m\pi} (1 - \cos m\pi) = \\ &= \begin{cases} 2a/m\pi, & \text{kui } m = 1, 3, 5, \dots, \\ 0, & \text{kui } m = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

Analoogiliselt

$$\begin{aligned} \int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} dy &= \frac{b}{n\pi} \left[-\cos \frac{n\pi y}{b} \right]_0^b = \frac{b}{n\pi} (1 - \cos n\pi) = \\ &= \begin{cases} 2b/n\pi, & \text{kui } n = 1, 3, 5, \dots, \\ 0, & \text{kui } n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

siis

$$B_{mn} = \frac{4q}{ab} \frac{2a}{m\pi} \frac{2b}{n\pi} = \frac{16q}{\pi^2 mn}, \quad (24)$$

kus m ja n on paaritud arvud.

Asendame (24) avaldisse (23), saame

$$w(x, y) = \frac{16q}{\pi^6 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right]^2}. \quad (25)$$

Tähistame plaadi külgede suhte $b/a = \beta$, siis võime avaldisele (25) anda arvutuseks käepärasema kuju

$$w(x, y) = \frac{16qa^4}{\pi^6 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left[m^2 + \left(\frac{n}{\beta}\right)^2 \right]^2}. \quad (26)$$

Plaadi elastse pinna võrrandist võime edasi leida juba kõik muud vajalikud suurused – painde- ja väändemomendid, löikejõud, toereaktsioonid jne.

Paindemomentide avaldised kujunevad vastavalt avaldistele (7) järgmisteks:

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{16qa^2}{\pi^4} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{m^2 + \mu \left(\frac{n}{\beta}\right)^2}{mn \left[m^2 + \left(\frac{n}{\beta}\right)^2 \right]^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \\ M_y &= \frac{16qa^2}{\pi^4} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\mu m^2 + \left(\frac{n}{\beta}\right)^2}{mn \left[m^2 + \left(\frac{n}{\beta}\right)^2 \right]^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \end{aligned} \quad (27)$$

ja väändemomendid on

$$M_{xy} = -\frac{16(1-\mu)qa^2}{\pi^4 \beta} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}}{\left[m^2 + \left(\frac{n}{\beta}\right)^2 \right]^2}. \quad (28)$$

Löikejõud vastavalt avaldistele (10) ja (11) on esitatud järgmisel kujul:

$$\begin{aligned} Q_x &= \frac{16qa}{\pi^3} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{n \left[m^2 + \left(\frac{n}{\beta}\right)^2 \right]^2}, \\ Q_y &= \frac{16qa}{\pi^3 \beta} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}}{m \left[m^2 + \left(\frac{n}{\beta}\right)^2 \right]^2}. \end{aligned} \quad (29)$$

Toereaktsioonid R_x küljel $x = 0$ vastavalt avaldisele (12) on

$$R_x = \frac{16qa}{\pi^3} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{m^2 + (2 - \mu) \left(\frac{n}{\beta}\right)^2}{n \left[m^2 + \left(\frac{n}{\beta}\right)^2 \right]^2} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (30)$$

Kõige suurem läbipaine on plaadi keskel, kus $x = a/2$, $y = b/2$:

$$W_{\max} = \frac{16q}{\pi^6 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}-1}}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}.$$

Nagu avaldistest (26) kuni (30) näha, koondub läbipainde määramiseks kasutatav rida väga hästi. Momentide jaoks on koonduvus juba aeglasem, veel halvemaks muutub ta lõikejõudude ja toereaktsioonide jaoks, [1, 9, 12].

3 Bubnov-Galjorkini meetod

3.1 Bubnov-Galjorkini meetodi kirjeldus

Bubnov-Galjorkini meetod kujutab endast ühte diferentsiaalvõrrandite integreerimise ligikaudset meetodit. See meetod põhineb ortogonaalsete funktsioonide omadusel.

Näiteks, kui on olemas sellised pidevad funktsioonid

$$\psi_0(x), \psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_k(x), \psi_l(x), \dots, \psi_n(x) \quad (31)$$

ja integraal kahe suvalise funktsiooni korrutisest sellest hulgast lõigus $[a, b]$ võrdub nulliga, see on

$$\int_a^b \psi_k(x)\psi_l(x)dx = 0, \quad (32)$$

siis funktsioonid (31) moodustavad selles lõigus ortogonaalse süsteemi.

Kui üks funktsioonidest on samaselt võrdne nulliga, näiteks $\psi_k(x) \equiv 0$, siis see funktsioon on ortogonaalne kõikide teiste funktsioonidega, sest sellisel juhul on täidetud tingimus (32).

Plaadi elastse pinna diferentsiaalvõrrandi

$$D\nabla^2\nabla^2w - q = 0$$

lahendit otsime selle meetodi järgi kujul

$$w_n(x, y) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl}\varphi_{kl}(x, y), \quad (33)$$

kus funktsioonid φ_{kl} valime nii, et nad rahuldaksid rajatingimusi.

Eeldame, et plaadi elastse pinna diferentsiaalvõrrand on ortogonaalne etteantud funktsioonidega φ_{kl} :

$$\int_S (D\nabla^2\nabla^2w - q)\varphi_{kl}ds = 0.$$

Et lahendada ülesannet plaadi läbipaindest võtame võrrandi kujul

$$\int_S \int (D\nabla^4w_n - q)\varphi_{kl}dxdy = 0 \quad (k = 1, \dots, n; l = 1, \dots, n), \quad (34)$$

kus vaatleme piirkonda S , mis on piiratud plaadi servadega ja funktsioonid w_n saame leida avaldisest (33).

Niisiis, integraalilune funktsioon võrrandites (34) kujutab endast plaadi keskpinna tasakaaluvõrrandit ja ta on ortogonaalne kõikide funktsioonidega φ_{kl} reas (33) piirkonnas S .

Bubnov-Galjorkini meetodit võib esitada ka järgmiselt:

Olgu meil antud diferentsiaalvõrrand kujul $\Phi(x, y, y', \dots) = 0$. Ligikaudse lahendi leiame siis rea

$$\bar{y} = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x)$$

abil, kus funktsioonid $\varphi_k(x)$ rahuldavad kõiki ülesande rajatingimusi ja a_k on tundmatud parameetrid, mis rahuldavad tingimusi

$$\int_{x_1}^{x_2} \Phi(x, y, y', \dots) \delta \bar{y} dx = 0, \quad (35)$$

kus

$$\delta \bar{y} = \sum_{k=1}^n \varphi_k(x) \delta a_k.$$

Kuna variatsioonid δa_k on vabalt valitud, siis võrrandile (35) saame anda kuju

$$\int_{x_1}^{x_2} \Phi(x, y, y', \dots) \varphi_k(x) dx = 0,$$

kust saame leida parameetrid a_k . Võrrandite arv võrdub parameetrite a_k arvuga.

Reas olevate liikmete arvu suurendamisel läheneb lahend $\bar{y}(x)$ järjest enam täpsele lahendile $y(x)$.

Kasutame ainult selliseid läbipainde funktsioone, mis rahuldavad kõiki geomeetrisilisi ($w = 0$ kui $x = 0, a$ ja $y = 0, b$) ja ka staatilisi ($\partial^2 w / \partial x^2 = 0$ kui $x = 0, a$ ja $\partial^2 w / \partial y^2 = 0$ kui $y = 0, b$) tingimusi.

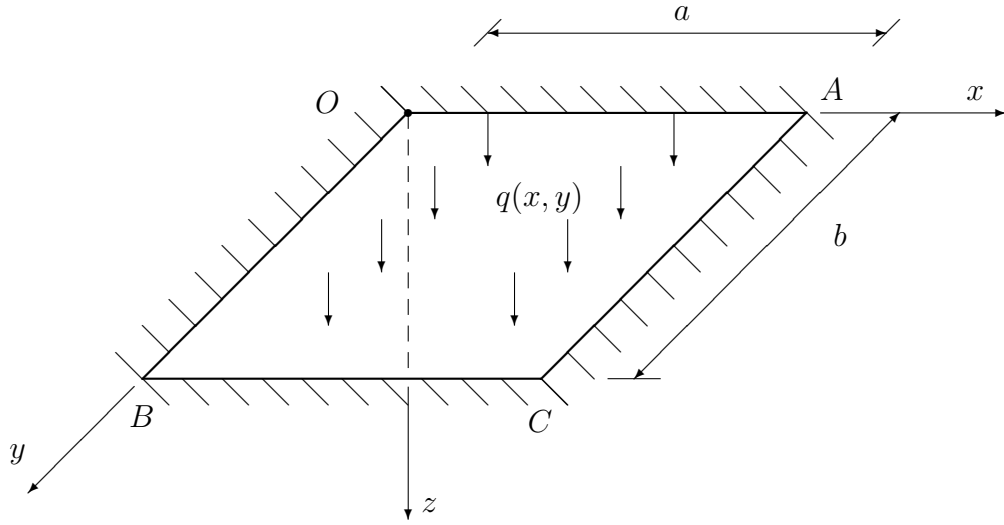
Tegurite määramine kannab juhuslikku iseloomu. Seetõttu saame ühesuguse etteantud funktsioonide arvu juures Bubnov-Galjorkini meetodiga "keskelt läbi" täpsemad tulemused, kui kasutades teisi ligikaudseid meetodeid. Seda meetodit võib kasutada ka juhul, kui koormus ei muutu sujuvalt (näiteks koondatud jõu korral).

Vabalt toetatud plaadi korral ja trigonomeetrisiliste funktsioonide kasutamisel langevad Bubnov-Galjorkini meetodi järgi tehtavad arvutused kokku Navier' meetodiga vastavate arvutustega. Seega võime seda meetodit vaadelda ka Navier' meetodi üldistusena, [1, 12].

3.2 Jäigalt kinnitatud plaadi paine

3.2.1 Ühtlase koormusega plaat

Vaatleme jäigalt kinnitatud ristkülikukujulise plaadi painet. Plaadile olgu rakendatud ühtlane koormus $q(x, y)$ (joonis 4). Leiame sellele paindeülesandele ligikaudse lahendi Bubnov-Galjorkini meetodi abil.



Joonis 4: Järgalt kinnitatud ühtlase koormusega plaat

Kinnituse iseloomust tulenevad järgmised rajatingimused: plaadi servadel OB ja AC kui $x = 0$ ja $x = a$

$$w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0,$$

servadel OA ja BC kui $y = 0$ ja $y = b$

$$w = \frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Võtame ligikaudse läbipainde funktsiooni reana nii, et see funktsioon rahuldaks antud rajatingimusi, näiteks

$$w_n = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl} \left(1 - \cos \frac{2k\pi x}{a}\right) \left(1 - \cos \frac{2l\pi y}{b}\right), \quad (36)$$

kus

$$\varphi_{kl} = \left(1 - \cos \frac{2k\pi x}{a}\right) \left(1 - \cos \frac{2l\pi y}{b}\right).$$

Näitame, et funktsioonid φ_{kl} rahuldavad kõiki rajatingimusi. Valemi (36) abil saame, et serval OB

$$\cos \frac{2k\pi x}{a} \Big|_{x=0} = \cos 0 = 1$$

ja järelikult $w_n = 0$.

Analoogiliselt serval AC :

$$\cos \frac{2k\pi x}{a} \Big|_{x=a} = \cos 2k\pi = 1, \quad w_n = 0,$$

serval OA :

$$\cos \frac{2l\pi y}{b} \Big|_{y=0} = \cos 0 = 1, \quad w_n = 0,$$

serval BC :

$$\cos \frac{2l\pi y}{b} \Big|_{y=b} = \cos 2l\pi = 1, \quad w_n = 0.$$

Selleks, et kontrollida rajatingimusi plaadi servadel, leiame läbipainde funktsiooni (36) osatuletised x ja y järgi

$$\frac{\partial w_n}{\partial x} = \frac{2\pi}{a} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl} k \sin \frac{2k\pi x}{a} \left(1 - \cos \frac{2l\pi y}{b} \right),$$

$$\frac{\partial w_n}{\partial y} = \frac{2\pi}{b} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl} l \left(1 - \cos \frac{2k\pi x}{a} \right) \sin \frac{2l\pi y}{b}.$$

Viimaste seoste abil näeme, et serval OB

$$\sin \frac{2k\pi x}{a} \Big|_{x=0} = \sin 0 = 0,$$

järelikult

$$\frac{\partial w_n}{\partial x} = 0.$$

Analoogiliselt serval AC :

$$\sin \frac{2k\pi x}{a} \Big|_{x=a} = \sin 2k\pi = 0, \quad \frac{\partial w_n}{\partial x} = 0,$$

serval OA :

$$\sin \frac{2l\pi y}{b} \Big|_{y=0} = \sin 0 = 0, \quad \frac{\partial w_n}{\partial y} = 0,$$

serval BC :

$$\sin \frac{2l\pi y}{b} \Big|_{y=b} = \sin 2l\pi = 0, \quad \frac{\partial w_n}{\partial y} = 0.$$

Järelikult läbipainde funktsioon (36) rahuldab kõiki rajatingimusi (14) ja (15).

Tundmatute parameetrite a_{kl} leidmiseks koostame Bubnov-Galjorkini võrrandite süsteemi

$$\iint_S (D\nabla^4 w_n - q) \varphi_{kl} dx dy = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n; l = 1, 2, \dots, n), \quad (37)$$

kus

$$w_n(x, y) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl} \varphi_{kl}(x, y).$$

Kui esimesel sammul piirduda rea (36) ühe liikmega

$$w_1 = a_{11} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b}\right), \quad (38)$$

siis funktsioonid φ_{kl} selle rea jaoks on

$$\varphi_{11} = \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b}\right). \quad (39)$$

Alguses arvutame osatuletised x järgi

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_1}{\partial x} &= \frac{2\pi}{a} a_{11} \sin \frac{2\pi x}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b}\right), \\ \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} &= \frac{4\pi^2}{a^2} a_{11} \cos \frac{2\pi x}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b}\right), \\ \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3} &= -\frac{8\pi^3}{a^3} a_{11} \sin \frac{2\pi x}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b}\right), \\ \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} &= -\frac{16\pi^4}{a^4} a_{11} \cos \frac{2\pi x}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b}\right). \end{aligned}$$

Järgnevalt arvutame osatuletised y järgi

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_1}{\partial y} &= \frac{2\pi}{b} a_{11} \sin \frac{2\pi y}{b} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right), \\ \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} &= \frac{4\pi^2}{b^2} a_{11} \cos \frac{2\pi y}{b} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right), \\ \frac{\partial^3 w_1}{\partial y^3} &= -\frac{8\pi^3}{b^3} a_{11} \sin \frac{2\pi y}{b} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right), \\ \frac{\partial^4 w_1}{\partial y^4} &= -\frac{16\pi^4}{b^4} a_{11} \cos \frac{2\pi y}{b} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \end{aligned}$$

ja segatuletised

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^2 \partial y} &= \frac{8\pi^3}{a^2 b} a_{11} \cos \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b}, \\ \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial y^2} &= \frac{16\pi^4}{a^2 b^2} a_{11} \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{b}. \end{aligned}$$

Asendades vastavad tuletised, saame

$$\nabla^4 w_1 = -16\pi^4 a_{11} \left[\frac{1}{a^4} \cos \frac{2\pi x}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b}\right) - \frac{2}{a^2 b^2} \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{b} + \right.$$

$$+\frac{1}{b^4} \cos \frac{2\pi y}{b} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \Big].$$

Asetame võrrandid (38) ja (39) võrrandite süsteemi (37) sisse:

$$\int_0^a \int_0^b \left(-16\pi^4 a_{11} D \left[\frac{1}{a^4} \cos \frac{2\pi x}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b}\right) - \frac{2}{a^2 b^2} \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{b} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{b^4} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \cos \frac{2\pi y}{b} \right] - q \right) \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b}\right) dx dy = 0.$$

Lihtsustades saame

$$\begin{aligned} & -16\pi^4 a_{11} D \left[\frac{1}{a^4} \int_0^a \int_0^b \cos \frac{2\pi x}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b}\right)^2 dx dy - \right. \\ & - \frac{2}{a^2 b^2} \int_0^a \int_0^b \cos \frac{2\pi x}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \cos \frac{2\pi y}{b} \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b}\right) dx dy + \\ & \left. + \frac{1}{b^2} \int_0^a \int_0^b \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right)^2 \cos \frac{2\pi y}{b} \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b}\right) dx dy \right] - \\ & - q \int_0^a \int_0^b \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b}\right) dx dy = 0. \end{aligned} \quad (40)$$

Integreerides avaldist (40) eraldi osade kaupa, leiame

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^a \int_0^b \cos \frac{2\pi x}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b}\right)^2 dx dy = \\ &= \int_0^a \left(\cos \frac{2\pi x}{a} - \cos^2 \frac{2\pi x}{a} \right) \int_0^b \left(1 - 2 \cos \frac{2\pi y}{b} + \cos^2 \frac{2\pi y}{b}\right) dx dy = \\ &= \frac{a}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos s - \cos^2 s) ds \cdot \frac{b}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - 2 \cos t + \cos^2 t) dt = \\ &= \frac{ab}{4\pi^2} \left[\sin s - \frac{1}{4} \sin 2s - \frac{s}{2} \right]_0^{2\pi} \cdot \left[t - 2 \sin t + \frac{1}{4} \sin 2t + \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} = \\ &= \frac{ab}{4\pi^2} \left(-\frac{2\pi}{2} \cdot \frac{6\pi}{2} \right) = -\frac{3ab}{4}, \end{aligned}$$

kus oli

$$\begin{aligned} s &= \frac{2\pi x}{a}, \quad dx = \frac{a}{2\pi} ds, \quad s \in [0, 2\pi], \\ t &= \frac{2\pi y}{b}, \quad dy = \frac{b}{2\pi} dt, \quad t \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

Samamoodi arvutame teise integraali

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_0^a \int_0^b \cos \frac{2\pi x}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \cos \frac{2\pi y}{b} \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b}\right) dx dy = \\
 &= \frac{a}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos s (1 - \cos s) ds \cdot \frac{b}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos t (1 - \cos t) dt = \\
 &= \frac{ab}{4\pi^2} \left[\sin s - \frac{1}{4} \sin 2s - \frac{s}{2} \right]_0^{2\pi} \left[\sin t - \frac{1}{4} \sin 2t - \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} = \\
 &= \frac{ab}{4\pi^2} \left(-\frac{2\pi}{2} \cdot \left(-\frac{2\pi}{2} \right) \right) = \frac{ab}{4}.
 \end{aligned}$$

Analoogiliselt

$$I_3 = \int_0^a \int_0^b \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right)^2 \cos \frac{2\pi y}{b} \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b}\right) dx dy = -\frac{3ab}{4}$$

ja

$$\begin{aligned}
 I_4 &= \int_0^a \int_0^b \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b}\right) dx dy = \\
 &= \frac{a}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - \cos s) ds \cdot \frac{b}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) dt = \\
 &= \frac{ab}{4\pi^2} \left[s - \sin s \right]_0^{2\pi} \left[t - \sin t \right]_0^{2\pi} = \frac{ab}{4\pi^2} \cdot 4\pi^2 = ab.
 \end{aligned}$$

Peale integreerimist saame avaldise (40) kirja panna järgmisel kujul:

$$-16\pi^4 a_{11} D \left[\frac{1}{a^4} \left(-\frac{3ab}{4} \right) - \frac{2}{a^2 b^2} \cdot \frac{ab}{4} + \frac{1}{b^4} \left(-\frac{3ab}{4} \right) \right] - qab = 0.$$

Lihtsustades leiame

$$16\pi^4 a_{11} D \left(\frac{3b}{4a^3} + \frac{1}{2ab} + \frac{3a}{4b^3} \right) - qab = 0.$$

Avaldame konstandi a_{11} :

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \frac{qab}{16\pi^4 D \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{3b}{a^3} + \frac{2}{ab} + \frac{3a}{b^3} \right)} = \frac{qab}{4\pi^4 D} \cdot \frac{a^3 b^3}{3b^4 + 2a^2 b^2 + 3a^4} = \\
 &= \frac{qa^4 b^4}{4\pi^4 D (3b^4 + 2a^2 b^2 + 3a^4)} = \frac{qa^4}{4\pi^4 D} \cdot \frac{1}{3 + 2\frac{a^2}{b^2} + 3\frac{a^4}{b^4}}. \tag{41}
 \end{aligned}$$

Paigutades saadud tulemuse (41) avaldisse (38), leiame läbipainde, mis vastab reale (36), kui $n = 1$:

$$w_1 = \frac{qa^4}{4\pi^4 D} \frac{(1 - \cos \frac{2\pi x}{a})(1 - \cos \frac{2\pi y}{b})}{3 + 2\frac{a^2}{b^2} + 3\frac{a^4}{b^4}}. \quad (42)$$

Maksimaalne läbipaine tekib plaadi keskel (kui $x = \frac{a}{2}$ ja $y = \frac{b}{2}$).

Ruudukujulise plaadi jaoks ($a = b$) ja kui Poissoni tegur $\mu = 0,3$ saame järgmise maksimaalse läbipainde väärtuse, arvestades valemit (6):

$$\max w_1 = \frac{qa^4}{8\pi^4 D} = \frac{qa^4}{8\pi^4 E h^3} \cdot 12(1 - \mu^2) = \frac{12(1 - 0,3^2)}{8(3,14)^4} = \frac{0,0140qa^4}{E h^3}.$$

Kui on tegemist ruudukujulise jäigalt kinnitatud plaadiga, millele on rakendatud ühtlane koormus, siis maksimaalse läbipainde funktsiooni täpne väärtus (vt. lisa 1) on

$$\max w = \frac{0,0138qa^4}{E h^3}.$$

Järelikult, maksimaalne läbipaine, mille me saime esimesel lähenemisviisil, erineb täpsest väärtusest vähem kui 1,5%. Mõnikord võib see erinevus olla tunduvalt suurem.

Nüüd saame leida vastavad paindemomendid, väändemomendid, löikejõud ja toe-reaktsioonid.

Paindemomentide leidmiseks leiame algul vastavad tuletised.

Kuna meil on

$$w_1 = a_{11} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b}\right).$$

Järelikult

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_1}{\partial x} &= \frac{2\pi}{a} a_{11} \sin \frac{2\pi x}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b}\right), \\ \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} &= \frac{4\pi^2}{a^2} a_{11} \cos \frac{2\pi x}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b}\right). \end{aligned}$$

Analoogiliselt

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} = \frac{4\pi^2}{b^2} a_{11} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \cos \frac{2\pi y}{b}.$$

Paindemomendid on siis

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \right) = \\ &= -D \cdot 4\pi^2 a_{11} \left(\frac{1}{a^2} \cos \frac{2\pi x}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b}\right) + \frac{\mu}{b^2} \cos \frac{2\pi y}{b} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \right), \\ M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right) = \\ &= -D \cdot 4\pi^2 a_{11} \left(\frac{\mu}{a^2} \cos \frac{2\pi x}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b}\right) + \frac{1}{b^2} \cos \frac{2\pi y}{b} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \right). \end{aligned}$$

Väändemomendid on

$$M_{xy} = -D(1 - \mu) \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} = -D(1 - \mu) \frac{4\pi^2}{ab} a_{11} \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b},$$

sest

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} = \frac{4\pi^2}{ab} a_{11} \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b}.$$

Lõikejõudude saamiseks leiame järgmised tuletised:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_x}{\partial x} &= -D \cdot 4\pi^2 a_{11} \left(-\frac{2\pi}{a^3} \sin \frac{2\pi x}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b} \right) + \frac{2\pi\mu}{ab^2} \cos \frac{2\pi y}{b} \sin \frac{2\pi x}{a} \right), \\ \frac{\partial M_y}{\partial y} &= -D \cdot 4\pi^2 a_{11} \left(\frac{2\pi\mu}{a^2 b} \cos \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} - \frac{2\pi}{b^3} \sin \frac{2\pi y}{b} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \right), \\ \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} &= -D(1 - \mu) \frac{8\pi^3}{a^2 b} a_{11} \cos \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b}, \\ \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} &= -D(1 - \mu) \frac{8\pi^3}{ab^2} a_{11} \sin \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{b}. \end{aligned}$$

Võrduste (8) abil võime esitada lõikejõud kujul

$$\begin{aligned} Q_x &= \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -D \cdot 8\pi^3 a_{11} \left[-\frac{1}{a^3} \sin \frac{2\pi x}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu}{ab^2} \cos \frac{2\pi y}{b} \sin \frac{2\pi x}{a} + \frac{1 - \mu}{ab^2} \sin \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{b} \right] = \\ &= -D \cdot 8\pi^3 a_{11} \left[\frac{1}{ab^2} \sin \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{b} - \frac{1}{a^3} \sin \frac{2\pi x}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b} \right) \right], \\ Q_y &= \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = -D \cdot 8\pi^3 a_{11} \left[\frac{\mu}{a^2 b} \cos \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{b^3} \sin \frac{2\pi y}{b} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) + \frac{1 - \mu}{a^2 b} \cos \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} \right] = \\ &= -D \cdot 8\pi^3 a_{11} \left[\frac{1}{a^2 b} \cos \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} - \frac{1}{b^3} \sin \frac{2\pi y}{b} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \right]. \end{aligned}$$

Kuigi koormuse intensiivsust saaks leida avaldisest

$$q = -\frac{\partial Q_x}{\partial x} - \frac{\partial Q_y}{\partial y},$$

kus

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_x}{\partial x} &= -D \cdot 16\pi^4 a_{11} \left[\frac{1}{a^2 b^2} \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{b} - \frac{1}{a^4} \cos \frac{2\pi x}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b} \right) \right], \\ \frac{\partial Q_y}{\partial y} &= -D \cdot 16\pi^4 a_{11} \left[\frac{1}{a^2 b^2} \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{b} - \frac{1}{b^4} \cos \frac{2\pi y}{b} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \right], \end{aligned}$$

seda seost Bubnov-Galjorkini meetodi puhul ei rahuldata. Koormus loetakse siin ette antuks.

Diferentseerides võrdust (38) leiame vastavad tuletised:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} &= \frac{4\pi^2}{a^2} a_{11} \cos \frac{2\pi x}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b}\right), \\ \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3} &= -\frac{8\pi^3}{a^3} a_{11} \sin \frac{2\pi x}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b}\right), \\ \frac{\partial^3 w_1}{\partial y^3} &= -\frac{8\pi^3}{b^3} a_{11} \sin \frac{2\pi y}{b} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right), \\ \frac{\partial^3 w_1}{\partial x \partial y^2} &= \frac{8\pi^3}{ab^2} a_{11} \sin \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{b}, \\ \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^2 \partial y} &= \frac{8\pi^3}{a^2 b} a_{11} \cos \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b}.\end{aligned}$$

Siis saab toereaktsioonid leida valemitest

$$\begin{aligned}R_x &= -D \left[\frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w_1}{\partial x \partial y^2} \right], \\ R_y &= -D \left[\frac{\partial^3 w_1}{\partial y^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w_1}{\partial y \partial x^2} \right].\end{aligned}$$

Edasi leiame normaalpinged

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{Ez}{1 - \mu^2} \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \right) = \\ &= -\frac{Ez}{1 - \mu^2} \cdot 4\pi^2 \cdot a_{11} \left(\frac{1}{a^2} \cos \frac{2\pi x}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu}{b^2} \cos \frac{2\pi y}{b} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \right) = \\ &= -\frac{12qa^4b^4z}{\pi^2 h^3 (3b^4 + 2a^2b^2 + 3a^4)} \left(\frac{1}{a^2} \cos \frac{2\pi x}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu}{b^2} \cos \frac{2\pi y}{b} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \right)\end{aligned}$$

ning

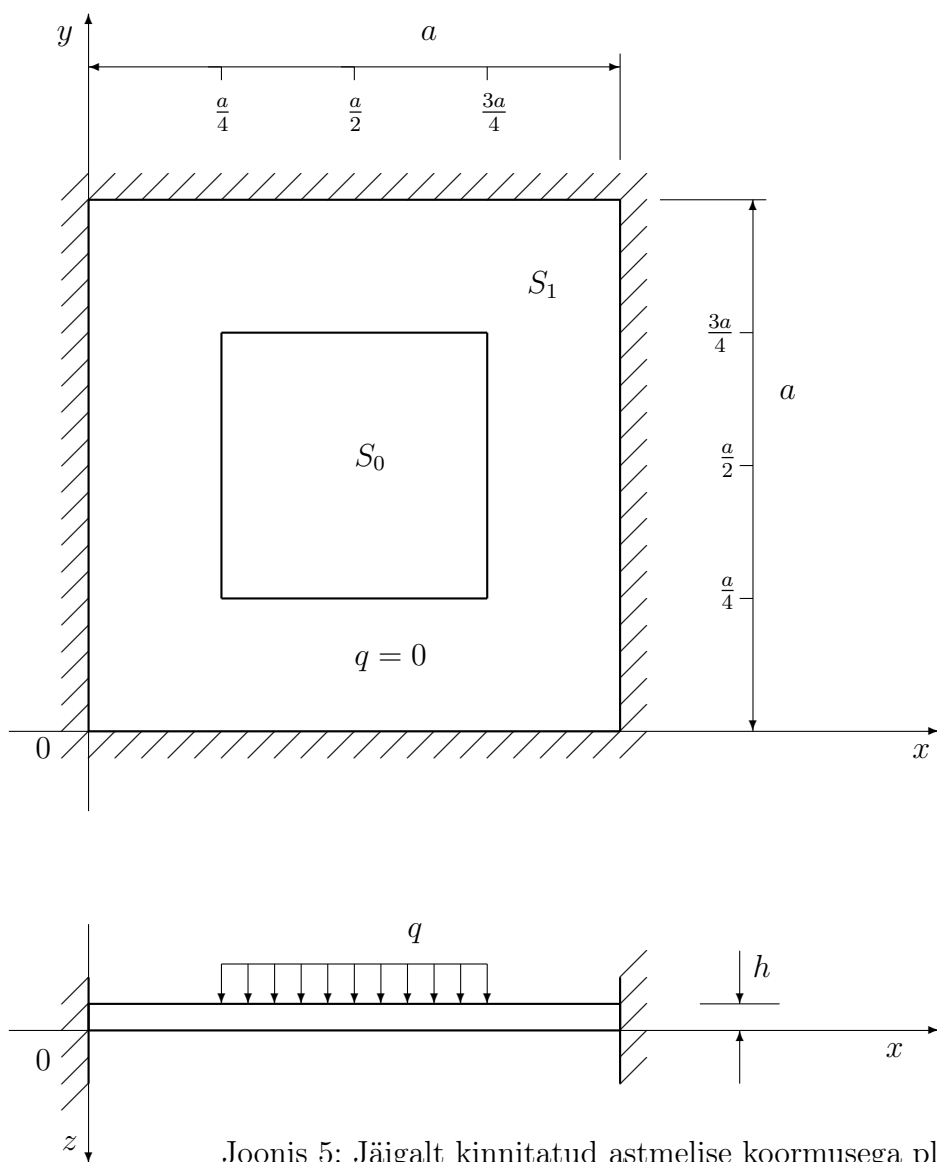
$$\begin{aligned}\sigma_y &= -\frac{Ez}{1 - \mu^2} \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right) = \\ &= -\frac{12qa^4b^4z}{\pi^2 h^3 (3b^4 + 2a^2b^2 + 3a^4)} \left(\frac{\mu}{a^2} \cos \frac{2\pi x}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{b^2} \cos \frac{2\pi y}{b} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \right).\end{aligned}$$

Nüüd leiame tangentsiaalpinged

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= -\frac{Ez}{1+\mu} \cdot \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} = -\frac{Ez}{1+\mu} \cdot \frac{4\pi^2}{ab} a_{11} \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} = \\ &= -\frac{12qa^3b^3z(1-\mu)}{\pi^2h^3(3b^4+2a^2b^2+3a^4)} \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b}.\end{aligned}$$

3.2.2 Astmelise koormusega plaat

Olgu meil tegemist ruudukujulise plaadiga, mille kõrgus h on konstantne (joonis 5) Eeldame, et plaat on jäigalt kinnitatud.



Joonis 5: Jäigalt kinnitatud astmelise koormusega plaat

Koormus q on määratud astmelise jaotusega

$$q = \begin{cases} q, & \text{kui } (x, y) \in S_0, \\ 0, & \text{kui } (x, y) \notin S_0. \end{cases}$$

Piirkonnad on meil määratud järgmiselt:

$$S_0 = \left\{ (x, y) : x \in \left[\frac{a}{4}, \frac{3a}{4} \right], y \in \left[\frac{a}{4}, \frac{3a}{4} \right] \right\},$$

$$S = \left\{ (x, y) : x \in [0, a], y \in [0, a] \right\}$$

ning

$$S_1 = S \setminus S_0.$$

Leiame sellise koormuse jaotuse jaoks läbipainde Bubnov-Galjorkini meetodi abil. Nagu eespoolgi, lähtume võrrandist

$$\iint_S (D\nabla^4 w - q) \varphi dx dy = 0.$$

Meie puhul

$$\iint_S (D\nabla^4 w) \varphi dx dy - \iint_{S_0} q \varphi dx dy = 0.$$

Olgu

$$\varphi = \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{a} \right),$$

siis

$$w = a_1 \varphi = a_1 \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{a} \right). \quad (43)$$

Leiame osatuletised x järgi

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{2\pi}{a} a_1 \sin \frac{2\pi x}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{a} \right), \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \frac{4\pi^2}{a^2} a_1 \cos \frac{2\pi x}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{a} \right), \\ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} &= -\frac{8\pi^3}{a^3} a_1 \sin \frac{2\pi x}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{a} \right), \\ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} &= -\frac{16\pi^4}{a^4} a_1 \cos \frac{2\pi x}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{a} \right), \end{aligned}$$

siis osatuletised y järgi

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{2\pi}{a} a_1 \sin \frac{2\pi y}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right), \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= \frac{4\pi^2}{a^2} a_1 \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \cos \frac{2\pi y}{a}, \\ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} &= -\frac{8\pi^3}{a^3} a_1 \sin \frac{2\pi y}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right), \\ \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} &= -\frac{16\pi^4}{a^4} a_1 \cos \frac{2\pi y}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right)\end{aligned}$$

ja segatuletised

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} &= \frac{8\pi^3}{a^3} a_1 \cos \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{a}, \\ \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} &= \frac{16\pi^4}{a^4} a_1 \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{a}.\end{aligned}$$

Asendades vastavad tuletised, leiame

$$\begin{aligned}\nabla^4 w &= -16\pi^4 a_1 \left[\left(\frac{1}{a^4} \cos \frac{2\pi x}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{a}\right) - \frac{2}{a^4} \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{a} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{a^4} \cos \frac{2\pi y}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \right) \right].\end{aligned}$$

Saame, et

$$\begin{aligned}&\int_0^a \int_0^a \left(-\frac{16\pi^4 a_1 D}{a^4} \left[\cos \frac{2\pi y}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right) - 2 \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{a} + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \cos \frac{2\pi y}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \right] \right) \cdot \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{a}\right) dx dy - \\ &- q \int_{\frac{a}{4}}^{\frac{3a}{4}} \int_{\frac{a}{4}}^{\frac{3a}{4}} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{a}\right) dx dy = 0.\end{aligned}$$

Paneme seda avaldist kirja järgmisel kujul:

$$\begin{aligned}&-\frac{16\pi^4 a_1 D}{a^4} \left[\int_0^a \int_0^a \left(\cos \frac{2\pi x}{a} - \cos^2 \frac{2\pi x}{a} \right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{a}\right)^2 dx dy - \right. \\ &- 2 \int_0^a \int_0^a \left(\cos \frac{2\pi x}{a} - \cos^2 \frac{2\pi x}{a} \right) \left(\cos \frac{2\pi y}{a} - \cos^2 \frac{2\pi y}{a} \right) dx dy + \\ &\left. + \int_0^a \int_0^a \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right)^2 \left(\cos \frac{2\pi y}{a} - \cos^2 \frac{2\pi y}{a} \right) dx dy \right] -\end{aligned}$$

$$-q \int_{\frac{a}{4}}^{\frac{3a}{4}} \int_{\frac{a}{4}}^{\frac{3a}{4}} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{a}\right) dx dy = 0. \quad (44)$$

Integreerime avaldist (44) osade kaupa.

Olgu

$$\begin{aligned} \frac{2\pi x}{a} &= s, & dx &= \frac{a}{2\pi} ds, & s &\in [0, 2\pi], \\ \frac{2\pi y}{a} &= t, & dy &= \frac{a}{2\pi} dt, & t &\in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

Siis saame

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^a \int_0^a \left(\cos \frac{2\pi x}{a} - \cos^2 \frac{2\pi x}{a} \right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{a} \right)^2 dx dy = \\ &= \frac{a}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos s - \cos^2 s) ds \cdot \frac{a}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt = \\ &= \frac{a^2}{4\pi^2} \left[\sin s - \frac{1}{4} \sin 2s - \frac{s}{2} \right]_0^{2\pi} \cdot \left[t - 2\sin t + \frac{1}{4} \sin 2t + \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} = \\ &= \frac{a^2}{4\pi^2} (-\pi)(2\pi + \pi) = -\frac{3a^2}{4} \end{aligned}$$

ning

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^a \int_0^a \left(\cos \frac{2\pi x}{a} - \cos^2 \frac{2\pi x}{a} \right) \left(\cos \frac{2\pi y}{a} - \cos^2 \frac{2\pi y}{a} \right) dx dy = \\ &= \frac{a^2}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} (\cos s - \cos^2 s) ds \cdot \int_0^{2\pi} (\cos t - \cos^2 t) dt = \\ &= \frac{a^2}{4\pi^2} \left[\sin s - \frac{1}{4} \sin 2s - \frac{s}{2} \right]_0^{2\pi} \cdot \left[\sin t - \frac{1}{4} \sin 2t - \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} = \\ &= \frac{a^2}{4\pi^2} (-\pi)(-\pi) = \frac{a^2}{4}. \end{aligned}$$

Analoogiliselt

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^a \int_0^a \left(\cos \frac{2\pi y}{a} - \cos^2 \frac{2\pi y}{a} \right) \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right)^2 dx dy = \\ &= -\frac{3a^2}{4} \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_{\frac{a}{4}}^{\frac{3a}{4}} \int_{\frac{a}{4}}^{\frac{3a}{4}} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{a} \right) dx dy = \\ &= \frac{a}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (1 - \cos s) ds \cdot \frac{a}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (1 - \cos t) dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a^2}{4\pi^2} [s - \sin s]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cdot [t - \sin t]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = \\
&= \frac{a^2}{4\pi^2} \left[\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + 1 + 1 \right] (\pi + 2) = \frac{a^2}{4\pi^2} (\pi + 2)^2.
\end{aligned}$$

Seega avaldis (44) saab kuju

$$-\frac{16\pi^4 a_1 D}{a^4} \left[-\frac{3a^2}{4} - 2 \cdot \frac{a^2}{4} - \frac{3a^2}{4} \right] - q \frac{a^2}{4\pi^2} (\pi + 2)^2 = 0.$$

Lihtsustades saame

$$-\frac{16\pi^4 a_1 D}{a^4} (-2a^2) = \frac{qa^2(\pi + 2)^2}{4\pi^2}.$$

Järelikult

$$\frac{32\pi^4 a_1 D}{a^2} = \frac{qa^2(\pi + 2)^2}{4\pi^2}.$$

Avaldame konstandi a_1 :

$$a_1 = \frac{qa^2(\pi + 2)^2}{4\pi^2} \cdot \frac{a^2}{32\pi^4 D} = \frac{qa^4(\pi + 2)^2}{128\pi^6 D}. \quad (45)$$

Saame, et läbipaine on avaldatud järgmisel kujul:

$$w = \frac{qa^4(\pi + 2)^2}{128\pi^6 D} \cdot \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{a} \right). \quad (46)$$

Vastavalt avaldistele (7) on paindemomentidel ja väändemomentidel järgmine kuju:

$$\begin{aligned}
M_x &= -D \cdot 4\pi^2 a_1 \cdot \frac{1}{a^2} \cdot \left[\cos \frac{2\pi x}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{a} \right) + \mu \cos \frac{2\pi y}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \right] = \\
&= -\frac{qa^2(\pi + 2)^2}{32\pi^4} \left[\cos \frac{2\pi x}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{a} \right) + \mu \cos \frac{2\pi y}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \right],
\end{aligned}$$

$$M_y = -\frac{qa^2(\pi + 2)^2}{32\pi^4} \left[\mu \cos \frac{2\pi x}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{a} \right) + \cos \frac{2\pi y}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \right]$$

ning

$$\begin{aligned}
M_{xy} &= -D(1 - \mu) \cdot 4\pi^2 a_1 \cdot \frac{1}{a^2} \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{a} = \\
&= -\frac{qa^2(\pi + 2)^2}{32\pi^4} \cdot (1 - \mu) \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{a}.
\end{aligned}$$

Toereaktsioonid on vastavalt avaldistele (12) ja (13) kujul

$$\begin{aligned}
R_x &= -D \left[-\frac{8\pi^3}{a^3} a_1 \sin \frac{2\pi x}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{a} \right) + (2 - \mu) \frac{8\pi^3}{a^3} a_1 \sin \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{a} \right] = \\
&= D \frac{8\pi^3}{a^3} a_1 \left[\sin \frac{2\pi x}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{a} \right) - (2 - \mu) \sin \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{a} \right] = \\
&= \frac{qa(\pi + 2)^2}{16\pi^3} \left[\sin \frac{2\pi x}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{a} \right) - (2 - \mu) \sin \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{a} \right]
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
R_y &= -D \left[-\frac{8\pi^3}{a^3} a_1 \sin \frac{2\pi y}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) + (2 - \mu) \frac{8\pi^3}{a^3} a_1 \sin \frac{2\pi y}{a} \cos \frac{2\pi x}{a} \right] = \\
&= \frac{qa(\pi + 2)^2}{16\pi^3} \left[\sin \frac{2\pi y}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) - (2 - \mu) \sin \frac{2\pi y}{a} \cos \frac{2\pi x}{a} \right].
\end{aligned}$$

Lõikejõud on vastavalt avaldistele (10) ja (11) kujul

$$\begin{aligned}
Q_x &= -D \left[-\frac{8\pi^3}{a^3} a_1 \sin \frac{2\pi x}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{a} \right) + \frac{8\pi^3}{a^3} a_1 \sin \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{a} \right] = \\
&= \frac{qa(\pi + 2)^2}{16\pi^3} \sin \frac{2\pi x}{a} \left(1 - 2 \cos \frac{2\pi y}{a} \right)
\end{aligned}$$

ning

$$\begin{aligned}
Q_y &= -D \left[-\frac{8\pi^3}{a^3} a_1 \sin \frac{2\pi y}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) + \frac{8\pi^3}{a^3} a_1 \sin \frac{2\pi y}{a} \cos \frac{2\pi x}{a} \right] = \\
&= \frac{qa(\pi + 2)^2}{16\pi^3} \sin \frac{2\pi y}{a} \left(1 - 2 \cos \frac{2\pi x}{a} \right).
\end{aligned}$$

Normaal- ja tangentsiaalpinged on vastavalt avaldistele (4) kujul

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= -\frac{Ez}{1 - \mu^2} \cdot 4\pi^2 a_1 \cdot \frac{1}{a^2} \times \\
&\times \left[\cos \frac{2\pi x}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{a} \right) + \mu \cos \frac{2\pi y}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \right] = \\
&= -\frac{Ez}{1 - \mu^2} \cdot \frac{qa^2(\pi + 2)^2}{32\pi^4 D} \times \\
&\times \left[\cos \frac{2\pi x}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{a} \right) + \mu \cos \frac{2\pi y}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \right] = \\
&= -\frac{3qa^2(\pi + 2)^2 z}{8\pi^4 h^3} \times \\
&\times \left[\cos \frac{2\pi x}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{a} \right) + \mu \cos \frac{2\pi y}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \right],
\end{aligned}$$

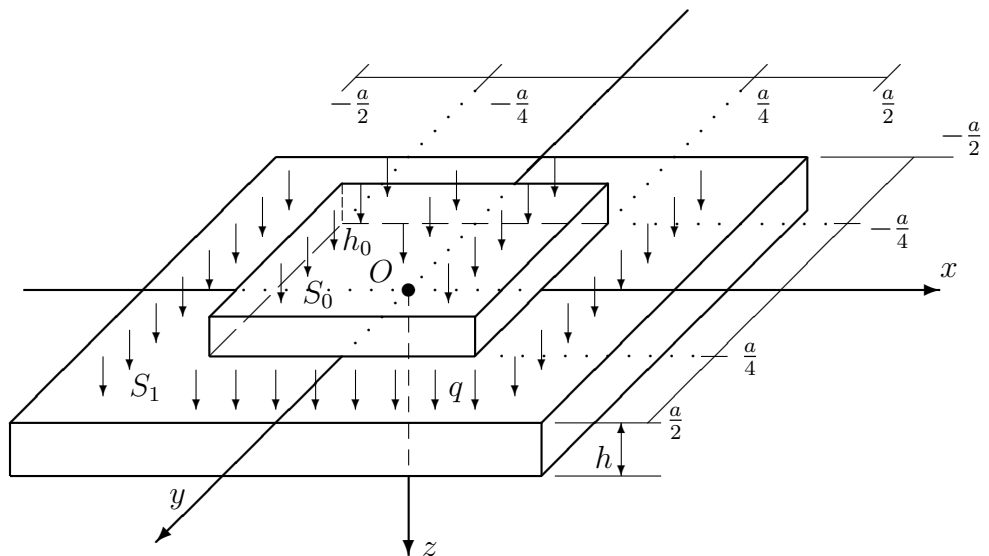
$$\begin{aligned}
\sigma_y &= -\frac{Ez}{1-\mu^2} \cdot 4\pi^2 a_1 \cdot \frac{1}{a^2} \times \\
&\times \left[\mu \cos \frac{2\pi x}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{a} \right) + \cos \frac{2\pi y}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \right] = \\
&= -\frac{3qa^2(\pi+2)^2 z}{8\pi^4 h^3} \times \\
&\times \left[\mu \cos \frac{2\pi x}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{a} \right) + \cos \frac{2\pi y}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \right]
\end{aligned}$$

ja

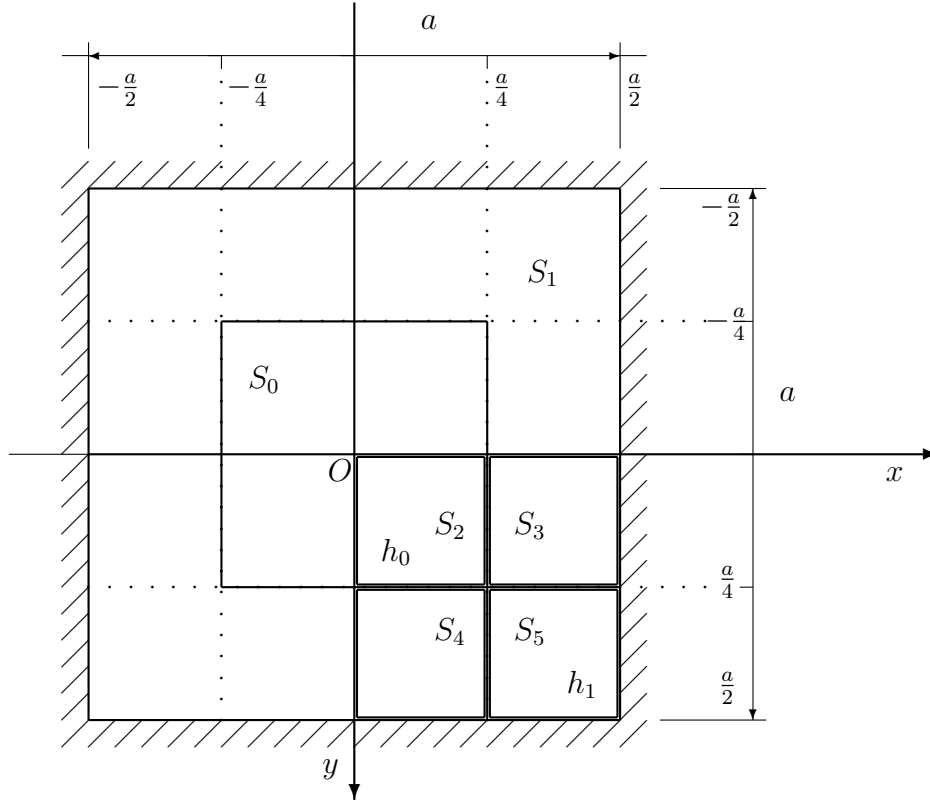
$$\begin{aligned}
\tau_{xy} &= -\frac{Ez}{1+\mu} \cdot 4\pi^2 a_1 \cdot \frac{1}{a^2} \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{a} = \\
&= -\frac{Ez}{1+\mu} \cdot \frac{qa^2(\pi+2)^2}{32\pi^4 D} \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{a} = \\
&= -\frac{3qa^2(\pi+2)^2(1-\mu)z}{8\pi^4 h^3} \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{a}.
\end{aligned}$$

3.2.3 Tükiti konstantse paksusega plaat

Vaatleme jäigalt kinnitatud ruudukujulise plaadi painet, millele on rakendatud ühtlane koormus $q(x, y)$. Plaadi serva pikkus on a (joonised 6 ja 6a).



Joonis 6: Tükiti konstantse paksusega ruudukujuline plaat



Joonis 6a: Jäigalt kinnitatud tükiti konstantse paksusega ruudukujuline plaat

Plaadi paksus on määratud astmelise jaotusega

$$h = \begin{cases} h_0, & \text{kui } (x, y) \in S_0, \\ h_1, & \text{kui } (x, y) \in S_1 \end{cases},$$

kus paindejäikus on määratud järgmiselt:

$$D = \begin{cases} D_0, & \text{kui } (x, y) \in S_0, \\ D_1, & \text{kui } (x, y) \in S_1. \end{cases}$$

Piirkonnad on meil määratud järgmiselt:

$$S_1 = S \setminus S_0,$$

kus

$$S = \left\{ (x, y) : |x| \leq \frac{a}{2}, |y| \leq \frac{a}{2} \right\},$$

$$S_0 = \left\{ (x, y) : |x| \leq \frac{a}{4}, |y| \leq \frac{a}{4} \right\}.$$

Leiame läbipainde Bubnov-Galjorkini meetodi abil.

Teame, et plaadi elastse pinna diferentsiaalvõrrand on esitatud avaldisega (9).

Olgu meil plaadi läbipaine w esitatud kujul

$$w = A \cos^2 \frac{\pi x}{a} \cos^2 \frac{\pi y}{a}, \quad (47)$$

kus A on tundmatu parameeter.

Näitame, et meie läbipainde funktsioon (47) rahuldab järgalt kinnitatud plaadi rajatingimusi. Selleks leiame läbipainde funktsiooni (47) osatuletised x ja y järgi

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= -A \frac{\pi}{a} \sin \frac{2\pi x}{a} \cos^2 \frac{\pi y}{a}, \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= -A \frac{\pi}{a} \cos^2 \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{a}. \end{aligned}$$

Nüüd saame kontrollida rajatingimusi plaadi servadel.

Saame, et

$$\begin{aligned} (w)_{x=\pm \frac{a}{2}} &= A \cos^2 \frac{\pi}{2} \cos^2 \frac{\pi}{2} = 0, \\ (w)_{y=\pm \frac{a}{2}} &= A \cos^2 \frac{\pi}{2} \cos^2 \frac{\pi}{2} = 0, \\ \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=\pm \frac{a}{2}} &= -A \frac{\pi}{a} \sin \pi \cos^2 \frac{\pi}{2} = 0, \\ \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=\pm \frac{a}{2}} &= -A \frac{\pi}{a} \cos^2 \frac{\pi}{2} \sin \pi = 0. \end{aligned}$$

Tõepoolest, järgalt kinnitatud plaadi rajatingimused on täidetud.

Tundmatu parameetri A leidmiseks koostame Bubnov-Galjorkini võrrandite süsteemi

$$\iint_S (D\nabla^4 w - q) \varphi dx dy = 0.$$

Olgu meil

$$\varphi = \cos^2 \frac{\pi x}{a} \cos^2 \frac{\pi y}{a}.$$

Leiame funktsiooni (47) jaoks vajalikud osatuletised x järgi

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= -A \frac{\pi}{a} \sin \frac{2\pi x}{a} \cos^2 \frac{\pi y}{a}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= -2A \frac{\pi^2}{a^2} \cos \frac{2\pi x}{a} \cos^2 \frac{\pi y}{a}, \\ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} &= 4A \frac{\pi^3}{a^3} \sin \frac{2\pi x}{a} \cos^2 \frac{\pi y}{a}, \\ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} &= 8A \frac{\pi^4}{a^4} \cos \frac{2\pi x}{a} \cos^2 \frac{\pi y}{a}. \end{aligned}$$

Järgnevalt leiame vajalikud osatuletised y järgi

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial y} &= -A \frac{\pi}{a} \cos^2 \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{a}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= -2A \frac{\pi^2}{a^2} \cos^2 \frac{\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{a}, \\ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} &= 4A \frac{\pi^3}{a^3} \cos^2 \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{a}, \\ \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} &= 8A \frac{\pi^4}{a^4} \cos^2 \frac{\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{a}.\end{aligned}$$

Nüüd leiame segatuletised

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} &= 2A \frac{\pi^3}{a^3} \cos \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{a}, \\ \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} &= 4A \frac{\pi^4}{a^4} \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{a}.\end{aligned}$$

Kuna

$$D\nabla^4 w - q = 0,$$

siis asendades vastavad tuletised läbipainde avaldisse (9), saame

$$w = 8A \frac{\pi^4}{a^4} \cos \frac{2\pi x}{a} \cos^2 \frac{\pi y}{a} + 8A \frac{\pi^4}{a^4} \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{a} + 8A \frac{\pi^4}{a^4} \cos^2 \frac{\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{a}.$$

Lihtsustades saame

$$w = 8A \frac{\pi^4}{a^4} \left[\frac{1}{2} \cos \frac{2\pi x}{a} + \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi y}{a} + 2 \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{a} \right]. \quad (48)$$

Läbipainde sümmeetria tõttu vaatleme ainult ühte veerandit, kus $x \geq 0$, $y \geq 0$. Siin $h = h_0$, kui $(x, y) \in S_0$ ning $h = h_1$, kui $(x, y) \in S_1$. Seega $h = h_0$, kui $(x, y) \in S_2$ ning $h = h_1$, kui $(x, y) \in S_3$, $(x, y) \in S_4$, $(x, y) \in S_5$.

Bubnov-Galjorkini meetodi korral on meil

$$\iint_{\tilde{S}} X \delta w dx dy = 0,$$

kus piirkond

$$\tilde{S} = S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_5,$$

see tähendab, et piirkond \tilde{S} on määratud järgmiselt:

$$\tilde{S} = \left\{ (x, y) : x \in \left[0, \frac{a}{2} \right], y \in \left[0, \frac{a}{2} \right] \right\}.$$

Võime viimase integraali arvutada üle kõigi piirkondade eraldi ja tulemused liita. Piirkonnad $S_2 - S_5$ on näidatud joonisel 6a.

Piirkonna \tilde{S} jaoks saame

$$\sum_{j=2}^5 \iint_{S_j} \left(8DA \frac{\pi^4}{a^4} \left[\frac{1}{2} \cos \frac{2\pi x}{a} + \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi y}{a} + 2 \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{a} \right] - q \right) \cos^2 \frac{\pi x}{a} \cos^2 \frac{\pi y}{a} dx dy = 0. \quad (49)$$

Integreerides avaldist (49), leiame integraalid igas piirkonnas eraldi.

Tähistame

$$\begin{aligned} I_{1j} &= \frac{1}{2} \iint_{S_j} \cos \frac{2\pi x}{a} \cos^2 \frac{\pi x}{a} \cos^2 \frac{\pi y}{a} dx dy, \\ I_{2j} &= \frac{1}{2} \iint_{S_j} \cos \frac{2\pi y}{a} \cos^2 \frac{\pi x}{a} \cos^2 \frac{\pi y}{a} dx dy, \\ I_{3j} &= 2 \iint_{S_j} \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{a} \cos^2 \frac{\pi x}{a} \cos^2 \frac{\pi y}{a} dx dy, \\ I_{4j} &= \iint_{S_j} \cos^2 \frac{\pi x}{a} \cos^2 \frac{\pi y}{a} dx dy. \end{aligned}$$

Valemi (49) põhjal saame

$$\sum_{j=2}^5 \left[8\tilde{D}_j A \cdot \frac{\pi^4}{a^4} (I_{1j} + I_{2j} + I_{3j}) - I_{4j} q \right] = 0, \quad (50)$$

kus

$$\tilde{D}_j = \begin{cases} D_0, & \text{kui } j = 2, \\ D_1, & \text{kui } j = 3, 4, 5. \end{cases}$$

Piirkonnas S_2 , kus $\left\{ (x, y) : x \in \left[0, \frac{a}{4}\right], y \in \left[0, \frac{a}{4}\right] \right\}$ on $h = h_0$, $D = D_0$ ning

$$D_0 = \frac{Eh_0^3}{12(1 - \mu^2)}.$$

Otseselt arvutades ja lihtsustades leiame

$$\begin{aligned}
I_{12} &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{a}{4}} \int_0^{\frac{a}{4}} \cos \frac{2\pi x}{a} \cos^2 \frac{\pi x}{a} \cos^2 \frac{\pi y}{a} dx dy = \frac{a^2(\pi+4)(\pi+2)}{256\pi^2}, \\
I_{22} &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{a}{4}} \int_0^{\frac{a}{4}} \cos \frac{2\pi y}{a} \cos^2 \frac{\pi x}{a} \cos^2 \frac{\pi y}{a} dx dy = \frac{a^2(\pi+4)(\pi+2)}{256\pi^2}, \\
I_{32} &= 2 \int_0^{\frac{a}{4}} \int_0^{\frac{a}{4}} \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{a} \cos^2 \frac{\pi x}{a} \cos^2 \frac{\pi y}{a} dx dy = \frac{a^2(\pi+4)}{128\pi^2}, \\
I_{42} &= \int_0^{\frac{a}{4}} \int_0^{\frac{a}{4}} \cos^2 \frac{\pi x}{a} \cos^2 \frac{\pi y}{a} dx dy = \frac{a^2(\pi+2)^2}{64\pi^2}.
\end{aligned} \tag{51}$$

Piirkondades S_3, S_4 ja S_5 on $h = h_1$, $D = D_1$, kus

$$D_1 = \frac{Eh_1^3}{12(1-\mu^2)}.$$

Need piirkonnad on määratud järgmiselt:

$$\begin{aligned}
S_3 &= \left\{ (x, y) : x \in \left[\frac{a}{4}, \frac{a}{2} \right], y \in \left[0, \frac{a}{4} \right] \right\}, \\
S_4 &= \left\{ (x, y) : x \in \left[0, \frac{a}{4} \right], y \in \left[\frac{a}{4}, \frac{a}{2} \right] \right\}, \\
S_5 &= \left\{ (x, y) : x \in \left[\frac{a}{4}, \frac{a}{2} \right], y \in \left[\frac{a}{4}, \frac{a}{2} \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Arvutades ja lihtsustades igas piirkonnas eraldi saame, et

$$\begin{aligned}
I_{13} &= \frac{1}{2} \int_{\frac{a}{4}}^{\frac{a}{2}} \int_0^{\frac{a}{4}} \cos \frac{2\pi x}{a} \cos^2 \frac{\pi x}{a} \cos^2 \frac{\pi y}{a} dx dy = \frac{a^2(\pi-4)(\pi+2)}{256\pi^2}, \\
I_{23} &= \frac{1}{2} \int_{\frac{a}{4}}^{\frac{a}{2}} \int_0^{\frac{a}{4}} \cos \frac{2\pi y}{a} \cos^2 \frac{\pi x}{a} \cos^2 \frac{\pi y}{a} dx dy = \frac{a^2(\pi+4)(\pi-2)}{256\pi^2}, \\
I_{33} &= 2 \int_{\frac{a}{4}}^{\frac{a}{2}} \int_0^{\frac{a}{4}} \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{a} \cos^2 \frac{\pi x}{a} \cos^2 \frac{\pi y}{a} dx dy = \frac{a^2(\pi-4)^2}{128\pi^2}, \\
I_{43} &= \int_{\frac{a}{4}}^{\frac{a}{2}} \int_0^{\frac{a}{4}} \cos^2 \frac{\pi x}{a} \cos^2 \frac{\pi y}{a} dx dy = \frac{a^2(\pi-2)(\pi+2)}{64\pi^2}
\end{aligned} \tag{52}$$

ja

$$\begin{aligned}
I_{14} &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{a}{4}} \int_{\frac{a}{4}}^{\frac{a}{2}} \cos \frac{2\pi x}{a} \cos^2 \frac{\pi x}{a} \cos^2 \frac{\pi y}{a} dx dy = \frac{a^2(\pi+4)(\pi-2)}{256\pi^2}, \\
I_{24} &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{a}{4}} \int_{\frac{a}{4}}^{\frac{a}{2}} \cos \frac{2\pi y}{a} \cos^2 \frac{\pi x}{a} \cos^2 \frac{\pi y}{a} dx dy = \frac{a^2(\pi-4)(\pi+2)}{256\pi^2}, \\
I_{34} &= 2 \int_0^{\frac{a}{4}} \int_{\frac{a}{4}}^{\frac{a}{2}} \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{a} \cos^2 \frac{\pi x}{a} \cos^2 \frac{\pi y}{a} dx dy = \frac{a^2(\pi-4)^2}{128\pi^2}, \\
I_{44} &= \int_0^{\frac{a}{4}} \int_{\frac{a}{4}}^{\frac{a}{2}} \cos^2 \frac{\pi x}{a} \cos^2 \frac{\pi y}{a} dx dy = \frac{a^2(\pi-2)(\pi+2)}{64\pi^2}
\end{aligned} \tag{53}$$

ning

$$\begin{aligned}
I_{15} &= \frac{1}{2} \int_{\frac{a}{4}}^{\frac{a}{2}} \int_{\frac{a}{4}}^{\frac{a}{2}} \cos \frac{2\pi x}{a} \cos^2 \frac{\pi x}{a} \cos^2 \frac{\pi y}{a} dx dy = \frac{a^2(\pi-4)(\pi-2)}{256\pi^2}, \\
I_{25} &= \frac{1}{2} \int_{\frac{a}{4}}^{\frac{a}{2}} \int_{\frac{a}{4}}^{\frac{a}{2}} \cos \frac{2\pi y}{a} \cos^2 \frac{\pi x}{a} \cos^2 \frac{\pi y}{a} dx dy = \frac{a^2(\pi-4)(\pi-2)}{256\pi^2}, \\
I_{35} &= 2 \int_{\frac{a}{4}}^{\frac{a}{2}} \int_{\frac{a}{4}}^{\frac{a}{2}} \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{a} \cos^2 \frac{\pi x}{a} \cos^2 \frac{\pi y}{a} dx dy = \frac{a^2(\pi-4)^2}{32\pi^2}, \\
I_{45} &= \int_{\frac{a}{4}}^{\frac{a}{2}} \int_{\frac{a}{4}}^{\frac{a}{2}} \cos^2 \frac{\pi x}{a} \cos^2 \frac{\pi y}{a} dx dy = \frac{a^2(\pi-2)^2}{64\pi^2}.
\end{aligned} \tag{54}$$

Avaldis (50) on nüüd tänu võrdustele (51) – (54) kujul

$$\begin{aligned}
&8D_0A \frac{\pi^4}{a^4} \left[\frac{a^2(\pi+4)(\pi+2)}{128\pi^2} + \frac{a^2(\pi+4)^2}{128\pi^2} \right] + \\
&+8D_1A \frac{\pi^4}{a^4} \left[\frac{a^2(\pi-4)(\pi+2)}{256\pi^2} + \frac{a^2(\pi-2)(\pi+4)}{256\pi^2} + \frac{a^2(\pi-4)^2}{128\pi^2} \right] + \\
&+8D_1A \frac{\pi^4}{a^4} \left[\frac{a^2(\pi+4)(\pi-2)}{256\pi^2} + \frac{a^2(\pi-4)(\pi+2)}{256\pi^2} + \frac{a^2(\pi-4)^2}{128\pi^2} \right] + \\
&+8D_1A \frac{\pi^4}{a^4} \left[\frac{a^2(\pi-4)(\pi-2)}{128\pi^2} + \frac{a^2(\pi-4)^2}{32\pi^2} \right] - \\
&- \frac{a^2(\pi+2)^2}{64\pi^2} q - \frac{a^2(\pi-2)(\pi+2)}{64\pi^2} q - \frac{a^2(\pi-2)(\pi+2)}{64\pi^2} q - \frac{a^2(\pi-2)^2}{64\pi^2} q = 0
\end{aligned}$$

ehk

$$\begin{aligned}
&\frac{D_0A\pi^2[(\pi+4)(\pi+2) + (\pi+4)^2]}{16a^2} + \frac{D_1A\pi^2(\pi-2)^2}{4a^2} + \\
&+ \frac{D_1A\pi^2[(\pi-4)(\pi-2) + 4(\pi-4)^2]}{16a^2} = \frac{a^2}{16} q.
\end{aligned}$$

Siit saame

$$\frac{A\pi^2}{16a^2} \left[D_0(\pi + 4)(5\pi + 18) + 4D_1(\pi - 2)^2 + D_1(\pi - 4)(5\pi - 18) \right] = \frac{a^2}{16}q.$$

Seega konstant A on esitatud järgmiselt:

$$A = \frac{a^4q}{\pi^2 \left[D_0(\pi + 4)(5\pi + 18) + 4D_1(\pi - 2)^2 + D_1(\pi - 4)(5\pi - 18) \right]}. \quad (55)$$

Läbipaine (47) on kujul

$$w = \frac{a^4q}{\pi^2 \left[D_0(\pi + 4)(5\pi + 18) + 4D_1(\pi - 2)^2 + D_1(\pi - 4)(5\pi - 18) \right]} \cos^2 \frac{\pi x}{a} \cos^2 \frac{\pi y}{a}. \quad (56)$$

Kuigi viimane valem on leitud $(x, y) \in \tilde{S}$ jaoks, kehtib see sümmeetria tõttu kogu plaadi ulatuses.

Analoogiliselt eelmiste näidetega võib ka siin leida vastavad paindemomendid, väändemomendid, lõikejõud, toereaktsioonid, normaalpinged ja tangentsiaalpinged.

3.3 Vabalt toetatud plaadi paine

3.3.1 Ühtlase koormusega plaat

Vaatleme servadest vabalt toetatud ristkülikukujulist plaati, mis on koormatud ühtlaselt jaotatud koormusega $q(x, y)$. Plaadi mõõtmed x - ja y -telje suhtes võrduvad vastavalt a ja b . Otsime lahendit selle plaadi jaoks (joonis 7) Bubnov-Galjorkini meetodi abil.

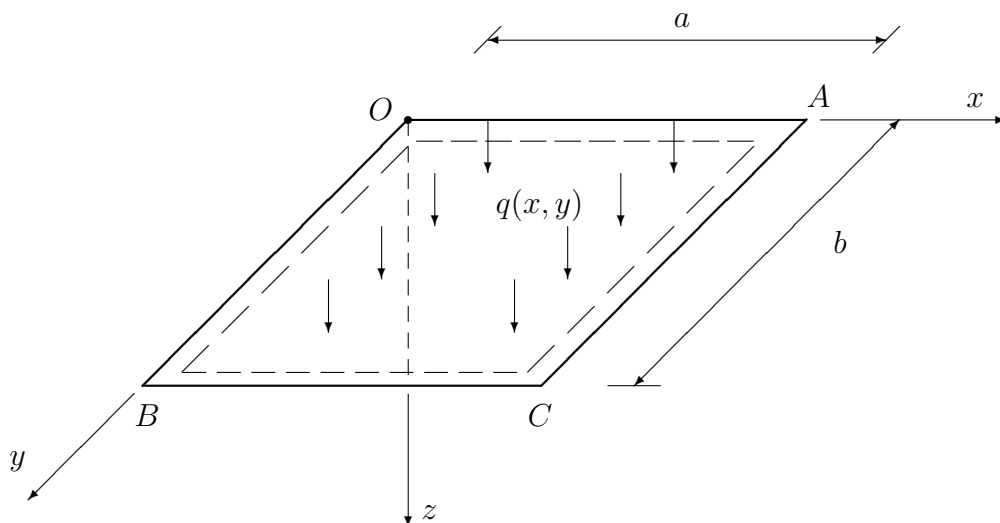
Plaadi keskpinna diferentsiaalvõrrandil on kuju

$$X = D\nabla^2\nabla^2w - q = 0. \quad (57)$$

Bubnov-Galjorkini võrrandile saab anda kuju

$$\int_0^a \int_0^b X \delta w dx dy = 0, \quad (58)$$

kus δw on funktsiooni w variatsioon. Praktilistes arvutustes võetakse δw asemele muut mingi parameetri järgi.



Joonis 7: Vabalt toetatud ühtlase koormusega plaat

Olgu meil plaadi läbipaine w esimesel lähenemisviisil kujul

$$w = a_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (59)$$

Siis läbipainded ja teised tuletised kõigi nelja plaadi serva jaoks võrduvad nulliga. Rajatingimused on rahuldatud, sest

$$\text{kui } x = 0 \text{ või } x = a, \text{ siis } w = 0 \text{ ja } \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0,$$

$$\text{kui } y = 0 \text{ või } y = b, \text{ siis } w = 0 \text{ ja } \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

Leiame funktsiooni (59) osatuletised x järgi

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\pi a_{11}}{a} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= -\frac{\pi^2 a_{11}}{a^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \\ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} &= -\frac{\pi^3 a_{11}}{a^3} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \\ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} &= \frac{\pi^4 a_{11}}{a^4} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \end{aligned}$$

siis leiame osatuletised y järgi

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{\pi a_{11}}{b} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= -\frac{\pi^2 a_{11}}{b^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \\ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} &= -\frac{\pi^3 a_{11}}{b^3} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}, \\ \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} &= \frac{\pi^4 a_{11}}{b^4} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}\end{aligned}$$

ja segatuletised

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} &= -\frac{\pi^3 a_{11}}{a^2 b} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}, \\ \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} &= \frac{\pi^4 a_{11}}{a^2 b^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.\end{aligned}$$

Asendades vastavad tuletised võrrandisse (57) saame

$$\begin{aligned}\nabla^4 w &= \pi^4 a_{11} \left(\frac{1}{a^4} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + \frac{2}{a^2 b^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + \frac{1}{b^4} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \right) = \\ &= \pi^4 a_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \left(\frac{1}{a^4} + \frac{2}{a^2 b^2} + \frac{1}{b^4} \right).\end{aligned}$$

Siis

$$X = D a_{11} \pi^4 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^4} \right)^2 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} - q.$$

Võtame variatsiooni δw valemis (58) kujul

$$\delta w = \delta a_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

Kuna meil a_{11} on tundmatu parameeter, δa_{11} on selle parameetri suvaline variatsioon, siis (58) saab kuju

$$\int_0^a \int_0^b \left[D a_{11} \pi^4 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} - q \right] \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} dx dy = 0.$$

Lihtsustades saame

$$D a_{11} \pi^4 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 \int_0^a \int_0^b \sin^2 \frac{\pi x}{a} \sin^2 \frac{\pi y}{b} dx dy - q \int_0^a \int_0^b \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} dx dy = 0. \quad (60)$$

Nüüd integreerime avaldist (60) osade kaupa.

Olgu

$$\frac{\pi x}{a} = s, \quad dx = \frac{a}{\pi} ds, \quad s \in [0, \pi],$$

$$\frac{\pi y}{b} = t, \quad dy = \frac{b}{\pi} dt, \quad t \in [0, \pi].$$

Siis saame, et

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^a \int_0^b \sin^2 \frac{\pi x}{a} \sin^2 \frac{\pi y}{b} dx dy = \frac{a}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 s ds \cdot \frac{b}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 t dt = \\ &= \frac{ab}{\pi^2} \left[-\frac{1}{4} \sin 2s + \frac{s}{2} \right]_0^\pi \cdot \left[-\frac{1}{4} \sin 2t + \frac{t}{2} \right]_0^\pi = \frac{ab}{\pi^2} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{ab}{4}. \end{aligned}$$

Analoogiliselt

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^a \int_0^b \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} dx dy = \frac{ab}{\pi^2} \int_0^\pi \sin s ds \int_0^\pi \sin t dt = \\ &= \frac{ab}{\pi^2} \left[-\cos s \right]_0^\pi \cdot \left[-\cos t \right]_0^\pi = \frac{ab}{\pi^2} (1 + 1) \cdot 2 = \frac{4ab}{\pi^2}. \end{aligned}$$

Saame, et

$$Da_{11}\pi^4 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 \cdot \frac{ab}{4} - q \frac{4ab}{\pi^2} = 0,$$

kust avaldades konstandi a_{11} , saame

$$a_{11} = \frac{4qab}{\pi^2} \cdot \frac{4a^4b^4}{D\pi^4(b^2 + a^2)^2 \cdot ab} = \frac{16qa^4b^4}{\pi^6 D(b^2 + a^2)^2} = \frac{16qa^4}{\pi^6 D \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2}. \quad (61)$$

Järelikult läbipaindele võime anda kuju

$$w = \frac{16qa^4}{\pi^6 D \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (62)$$

Kui on tegemist ruudukujulise plaadiga ($a = b$), siis

$$a_{11} = \frac{4qa^4}{\pi^6 D} = 0,0454 \frac{qa^4}{Eh^3}.$$

Konstandi a_{11} täpne väärtus (vt. lisa 2) on juhul kui $\mu = 0,3$ ja $a = b$:

$$a_{11} = 0,0443 \frac{qa^4}{Eh^3}.$$

Järelikult ligikaudne lahend erineb täpsest lahendist ainult 2,5%.

Nüüd leiame funktsiooni (59) korral tangentsiaal- ja normaalpinged.

Tangentsiaalpinged τ_{zx} mõjuvad elemendi külgedele, mis on paralleelsed y -teljega ja tangentsiaalpinged τ_{zy} mõjuvad külgedele, mis on paralleelsed x -teljega.

Meil on

$$\tau_{xz} = -\frac{E(h^2 - 4z^2)}{8(1 - \mu^2)} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) = -\frac{E(h^2 - 4z^2)\pi^3}{8(1 - \mu^2)a} a_{11} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b},$$

sest

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} &= -a_{11} \frac{\pi^3}{a^3} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \\ \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} &= -a_{11} \frac{\pi^3}{ab^2} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \end{aligned}$$

Analoogiliselt võime leida ka τ_{zy} .

Normaalpinged on

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{Ez}{1 - \mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{E\pi^2(b^2 + a^2\mu)}{(1 - \mu^2)a^2b^2} wz, \\ \sigma_y &= -\frac{Ez}{1 - \mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \frac{E\pi^2(a^2 + b^2\mu)}{(1 - \mu^2)a^2b^2} wz. \end{aligned}$$

Maksimaalsed väärtused saavad normaalpinged plaadi ülemises ja alumises kihis, kui $z = \pm h/2$.

Leiame tangentsiaalpinged τ_{xy} . Ilmselt

$$\tau_{xy} = -\frac{Ez}{(1 + \mu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\frac{Ez}{(1 + \mu)} a_{11} \frac{\pi^2}{a^2b^2} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b},$$

sest

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = a_{11} \frac{\pi^2}{a^2b^2} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}.$$

Plaadi nurkadel saame

$$\begin{aligned} (\tau_{xy})_{y=0} &= -(\tau_{xy})_{y=b} = -\frac{Ez}{(1 + \mu)} a_{11} \frac{\pi^2}{a^2b^2} \cos \frac{\pi x}{a}, \\ (\tau_{yx})_{x=0} &= -(\tau_{yx})_{x=a} = -\frac{Ez}{(1 + \mu)} a_{11} \frac{\pi^2}{a^2b^2} \cos \frac{\pi y}{b}. \end{aligned}$$

Vastavalt avaldistele (7) saame paindemomendid ja vändemomendid kirja panna järgmisel kujul:

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left(-\frac{\pi^2 a_{11}}{a^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} - \mu \frac{\pi^2 a_{11}}{b^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \right) = \\ &= \frac{16qa^2b^2(b^2 + \mu a^2)}{\pi^4(a^2 + b^2)^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_y &= -D \left(-\frac{\pi^2 a_{11}}{b^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} - \mu \frac{\pi^2 a_{11}}{a^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \right) = \\
&= \frac{16qa^2b^2(a^2 + \mu b^2)}{\pi^4(a^2 + b^2)^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
M_{xy} &= -D(1 - \mu) \frac{\pi^2 a_{11}}{ab} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} = \\
&= -\frac{16qa^3b^3(1 - \mu)}{\pi^4(a^2 + b^2)^2} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}.
\end{aligned}$$

Saame, et lõikejõud vastavalt avaldistele (10) ja (11) on

$$\begin{aligned}
Q_x &= -D \left(-a_{11} \frac{\pi^3}{a^3} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} - a_{11} \frac{\pi^3}{ab^2} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \right) = \\
&= \frac{16qab^2}{\pi^3(a^2 + b^2)} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
Q_y &= -D \left(-a_{11} \frac{\pi^3}{b^3} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} - a_{11} \frac{\pi^3}{a^2b} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} \right) = \\
&= \frac{16qa^2b}{\pi^3(a^2 + b^2)} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}.
\end{aligned}$$

Toereaktsioonid vastavalt avaldistele (12) ja (13) on

$$\begin{aligned}
R_x &= -D \left[-\frac{\pi^3 a_{11}}{a^3} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} - (2 - \mu) \frac{\pi^3 a_{11}}{ab^2} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \right] = \\
&= \frac{16qab^2(b^2 + (2 - \mu)a^2)}{\pi^3(a^2 + b^2)^2} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
R_y &= -D \left[-\frac{\pi^3 a_{11}}{b^3} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} - (2 - \mu) \frac{\pi^3 a_{11}}{a^2b} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} \right] = \\
&= \frac{16qa^2b(a^2 + (2 - \mu)b^2)}{\pi^3(a^2 + b^2)^2} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}.
\end{aligned}$$

Lahendame nüüd sama ülesande teisel viisil võttes reas (33) arvesse kaks liiget.

Olgu

$$w = a_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + a_{13} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b}. \quad (63)$$

Arvutame osatulised x järgi

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\pi}{a} a_{11} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + \frac{\pi}{a} a_{13} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= -\frac{\pi^2}{a^2} a_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} - \frac{\pi^2}{a^2} a_{13} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b}, \\ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} &= -\frac{\pi^3}{a^3} a_{11} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} - \frac{\pi^3}{a^3} a_{13} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b}, \\ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} &= \frac{\pi^4}{a^4} a_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + \frac{\pi^4}{a^4} a_{13} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b}, \end{aligned}$$

siis leiame osatuletised y järgi

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{\pi}{b} a_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} + \frac{3\pi}{b} a_{13} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{3\pi y}{b}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= -\frac{\pi^2}{b^2} a_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} - \frac{9\pi^2}{b^2} a_{13} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b}, \\ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} &= -\frac{\pi^3}{b^3} a_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} - \frac{27\pi^3}{b^3} a_{13} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{3\pi y}{b}, \\ \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} &= \frac{\pi^4}{b^4} a_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + \frac{81\pi^4}{b^4} a_{13} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b} \end{aligned}$$

ja segatuletised

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} &= -\frac{\pi^3}{a^2 b} a_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} - \frac{3\pi^3}{a^2 b} a_{13} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{3\pi y}{b}, \\ \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} &= \frac{\pi^4}{a^2 b^2} a_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + \frac{9\pi^4}{a^2 b^2} a_{13} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b}. \end{aligned}$$

Asendades vastavad tuletised, saame

$$\nabla^4 w = \pi^4 a_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 + \pi^4 a_{13} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{9}{b^2} \right)^2.$$

Siis

$$X = D\pi^4 \left[a_{11} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + a_{13} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{9}{b^2} \right)^2 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b} - q \right] \quad (64)$$

ning

$$\delta w = \delta a_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + \delta a_{13} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b}. \quad (65)$$

Asetades (65) võrrandisse (58), saame

$$\int_0^a \int_0^b X \left(\delta a_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + \delta a_{13} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b} \right) dx dy = 0.$$

Arvestades, et a_{11} ja a_{13} on tundmatud parameetrid, saame

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^b X \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} dx dy &= 0, \\ \int_0^a \int_0^b X \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b} dx dy &= 0. \end{aligned} \quad (66)$$

Paigutades avaldist (64) võrranditesse (66) ja integreerides, saame

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^b \left\{ D\pi^4 \left[a_{11} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + \right. \right. \\ \left. \left. + a_{13} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{9}{b^2} \right)^2 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b} - q \right] \right\} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} dx dy = 0. \end{aligned}$$

Seega

$$\begin{aligned} D\pi^4 \left[a_{11} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 \int_0^a \int_0^b \sin^2 \frac{\pi x}{a} \sin^2 \frac{\pi y}{b} dx dy + \right. \\ \left. + a_{13} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{9}{b^2} \right)^2 \int_0^a \int_0^b \sin^2 \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \sin \frac{3\pi y}{b} dx dy \right] - \\ - q \int_0^a \int_0^b \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} dx dy = 0 \end{aligned} \quad (67)$$

ja

$$\begin{aligned} D\pi^4 \left[a_{11} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 \int_0^a \int_0^b \sin^2 \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \sin \frac{3\pi y}{b} dx dy + \right. \\ \left. + a_{13} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{9}{b^2} \right)^2 \int_0^a \int_0^b \sin^2 \frac{\pi x}{a} \sin^2 \frac{3\pi y}{b} dx dy \right] - \\ - q \int_0^a \int_0^b \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b} dx dy = 0. \end{aligned} \quad (68)$$

Integreerime osade kaupa avaldise (67) ja (68).

Olgu

$$\begin{aligned} \frac{\pi x}{a} = s, \quad dx = \frac{a}{\pi} ds, \quad s \in [0, \pi], \\ \frac{\pi y}{b} = t, \quad dy = \frac{b}{\pi} dt, \quad t \in [0, \pi]. \end{aligned}$$

Saame

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^a \int_0^b \sin^2 \frac{\pi x}{a} \sin^2 \frac{\pi y}{b} dx dy = \frac{a}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 s ds \cdot \frac{b}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 t dt = \\ &= \frac{ab}{\pi^2} \left[-\frac{1}{4} \sin 2s + \frac{s}{2} \right]_0^\pi \cdot \left[-\frac{1}{4} \sin 2t + \frac{t}{2} \right]_0^\pi = \frac{ab}{\pi^2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{ab}{4}. \end{aligned}$$

Analoogiliselt

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^a \int_0^b \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} dx dy = \frac{ab}{\pi^2} \int_0^\pi \sin s ds \int_0^\pi \sin t dt = \\ &= \frac{ab}{\pi^2} \left[-\cos s \right]_0^\pi \cdot \left[-\cos t \right]_0^\pi = \frac{ab}{\pi^2} (1 + 1) \cdot 2 = \frac{4ab}{\pi^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^a \int_0^b \sin^2 \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \sin \frac{3\pi y}{b} dx dy = \frac{a}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 s ds \cdot \frac{b}{\pi} \int_0^\pi \sin t \sin 3t dt = \\ &= \frac{ab}{\pi^2} \left[-\frac{1}{4} \sin 2s + \frac{s}{2} \right]_0^\pi \cdot \frac{1}{2} \left[\sin 2t \cdot \sin 4t \right]_0^\pi = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_0^a \int_0^b \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b} dx dy = \frac{a}{\pi} \int_0^\pi \sin s ds \cdot \frac{b}{\pi} \int_0^\pi \sin 3t dt = \\ &= \frac{ab}{\pi^2} \left[-\cos s \right]_0^\pi \cdot \left[-\frac{1}{3} \cos 3t \right]_0^\pi = \frac{ab}{\pi^2} (1 + 1) \left[\frac{1}{3} (1 + 1) \right] = \frac{4ab}{3\pi^2} \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} I_5 &= \int_0^a \int_0^b \sin^2 \frac{\pi x}{a} \sin^2 \frac{3\pi y}{b} dx dy = \\ &= \frac{ab}{\pi^2} \left[-\frac{1}{4} \sin 2s + \frac{s}{2} \right]_0^\pi \cdot \frac{1}{3} \left[-\frac{1}{4} \sin 6t + \frac{3t}{2} \right]_0^\pi = \frac{ab}{\pi^2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{3\pi}{3 \cdot 2} = \frac{ab}{4}. \end{aligned}$$

Nende teisenduste tulemusel saame võrrandile (67) kuju

$$Da_{11}\pi^4 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 \frac{ab}{4} - q \frac{4ab}{\pi^2} = 0,$$

kust saame konstandi a_{11} avaldada järgmiselt:

$$a_{11} = \frac{16qa^4}{\pi^6 D \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right)^2}. \quad (69)$$

Võrrandi (68) saame kirjutada kujul

$$Da_{13}\pi^4 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{9}{b^2} \right)^2 \frac{ab}{4} - q \frac{4ab}{3\pi^2} = 0,$$

kust saame konstandi a_{13} avaldada järgmiselt:

$$\begin{aligned} a_{13} &= \frac{q \cdot 4ab}{3\pi^2} \cdot \frac{4a^4b^4}{D\pi^4(b^2 + 9a^2)^2 \cdot ab} = \\ &= \frac{16qa^4b^4}{3\pi^6 D(b^2 + 9a^2)^2} = \frac{16qa^4}{3\pi^6 D \left(1 + \frac{9a^2}{b^2}\right)^2}. \end{aligned} \quad (70)$$

Järelikult läbipainde funktsiooni saab esitada järgmisel kujul:

$$w = \frac{16qa^4}{\pi^6 D \left(1 + \frac{9a^2}{b^2}\right)^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + \frac{16qa^4}{3\pi^6 D \left(1 + \frac{9a^2}{b^2}\right)^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b}. \quad (71)$$

Analoogiliselt eelmiste näidetega võib ka siin leida vastavad paindemomendid, väändmomendid, lõikejõud, toereaktsioonid, normaalpinged ja tangentsiaalpinged.

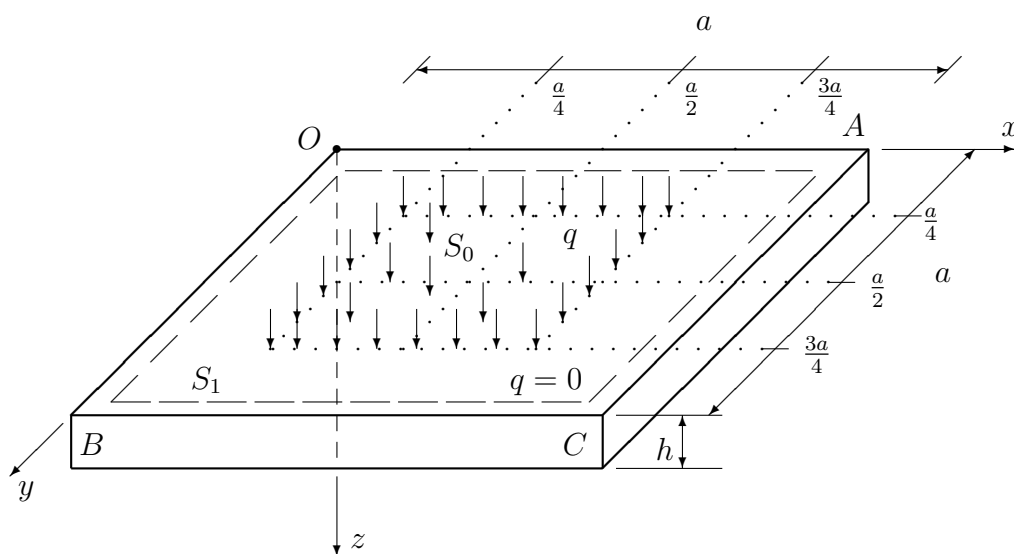
3.3.2 Astmelise koormusega plaat

Olgu meil tegemist ruudukujulise plaadiga, mille kõrgus h on konstantne. Eeldame, et plaat on vabalt toetatud jäigale kontuurile. Koormus q olgu meil määratud astmelise jaotusega

$$q = \begin{cases} q, & \text{kui } (x, y) \in S_0, \\ 0, & \text{kui } (x, y) \notin S_0. \end{cases}$$

Piirkond S_0 on meil määratud järgmiselt:

$$S_0 = \left\{ (x, y) : \frac{a}{4} \leq x \leq \frac{3a}{4}, \frac{a}{4} \leq y \leq \frac{3a}{4} \right\}.$$



Joonis 8: Vabalt toetatud ruudukujuline astmelise koormusega plaat

Leiame sellise koormuse jaotuse jaoks läbipainde Bubnov-Galjorkini meetodi abil. Plaadi elastse pinna diferentsiaalvõrrand on

$$D\nabla^4 w - q = 0.$$

Kuna meie plaadi serv toetub vabalt jäigale kontuurile, siis tema läbipaindumine võrdub nulliga ja pinged σ_x võrduvad nulliga. Järelikult ka paindemoment M_x serval peab võrduma nulliga. Saame, et meie rajatingimused on

$$\begin{aligned} (w)_{x=a} &= 0, & \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{x=a} &= 0, \\ (w)_{y=a} &= 0, & \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{y=a} &= 0. \end{aligned}$$

Lahendit otsitakse Bubnov-Galjorkini meetodi järgi järgmisel kujul:

$$w_n(x, y) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl} \varphi_{kl}(x, y),$$

kus funktsioonid φ_{kl} peavad rahuldama rajatingimusi.

Bubnov-Galjorkini võrrandile saab anda kuju

$$\iint_S (D\nabla^4 w - q) \varphi dx dy = 0.$$

Meie puhul saame

$$\int_0^a \int_0^a (D\nabla^4 w) \varphi dx dy - \int_{\frac{a}{4}}^{\frac{3a}{4}} \int_{\frac{a}{4}}^{\frac{3a}{4}} q \varphi dx dy = 0.$$

Olgu meil

$$\varphi = \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a},$$

siis plaadi läbipaine w esimesel lähenemisviisil on järgmisel kujul:

$$w = a_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a}, \tag{72}$$

kus a_{11} on tundmatu parameeter.

Leiame osatuletised x järgi

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\pi a_{11}}{a} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= -\frac{\pi^2 a_{11}}{a^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a}, \\ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} &= -\frac{\pi^3 a_{11}}{a^3} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a}, \\ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} &= \frac{\pi^4 a_{11}}{a^4} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a}, \end{aligned}$$

leiame osatuletised y järgi

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{\pi a_{11}}{a} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{a}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= -\frac{\pi^2 a_{11}}{a^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a}, \\ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} &= -\frac{\pi^3 a_{11}}{a^3} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{a}, \\ \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} &= \frac{\pi^4 a_{11}}{a^4} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a}\end{aligned}$$

ning segatuletised

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\pi^4 a_{11}}{a^4} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a}.$$

Kuna $D\nabla^4 w - q = 0$, siis saame

$$D\nabla^4 w - q = 4Da_{11}\pi^4 \frac{1}{a^4} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} - q.$$

Meie puhul Bubnov-Galjorkini võrrandile saab anda järgmise kuju:

$$4Da_{11}\pi^4 \frac{1}{a^4} \int_0^a \int_0^a \sin^2 \frac{\pi x}{a} \sin^2 \frac{\pi y}{a} dx dy - q \int_{\frac{a}{4}}^{\frac{3a}{4}} \int_{\frac{a}{4}}^{\frac{3a}{4}} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} dx dy = 0. \quad (73)$$

Integreerime avaldist (73) osade kaupa.

Olgu

$$\begin{aligned}\frac{\pi x}{a} &= s, \quad dx = \frac{a}{\pi} ds, \quad s \in [0, \pi], \\ \frac{\pi y}{a} &= t, \quad dy = \frac{a}{\pi} dt, \quad t \in [0, \pi].\end{aligned}$$

Siis saame

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_0^a \int_0^a \sin^2 \frac{\pi x}{a} \sin^2 \frac{\pi y}{a} dx dy = \frac{a^2}{\pi^2} \int_0^\pi \sin^2 s ds \cdot \int_0^\pi \sin^2 t dt = \\ &= \frac{a^2}{\pi^2} \left[\frac{s}{2} - \frac{1}{4} \sin 2s \right]_0^\pi \cdot \left[\frac{t}{2} - \frac{1}{4} \sin 2t \right]_0^\pi = \frac{a^2}{\pi^2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{a^2}{4}.\end{aligned}$$

Teise integraali jaoks olgu

$$\begin{aligned}\frac{\pi x}{a} &= s, \quad dx = \frac{a}{\pi} ds, \quad s \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right], \\ \frac{\pi y}{a} &= t, \quad dy = \frac{a}{\pi} dt, \quad t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right].\end{aligned}$$

Saame, et

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{a^2}{\pi^2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin s \cdot \sin t \, ds dt = \frac{a^2}{\pi^2} \left[-\cos s \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cdot \left[-\cos t \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \\ &= \frac{a^2}{\pi^2} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \cdot \left[\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right] = \frac{2a^2}{\pi^2}. \end{aligned}$$

Seega

$$4Da_{11}\pi^4 \cdot \frac{1}{a^4} \cdot \frac{a^2}{4} - 2q\frac{a^2}{\pi^2} = 0,$$

kust

$$a_{11} = \frac{2qa^4}{D\pi^6}. \quad (74)$$

Saime, et läbipaindele võib anda kuju

$$w = \frac{2qa^4}{D\pi^6} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a}. \quad (75)$$

Paindemomendid ja väändmomendid vastavalt avaldistele (7) on järgmisel kujul:

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left(-\frac{\pi^2 a_{11}}{a^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} - \mu \frac{\pi^2 a_{11}}{a^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} \right) = \\ &= D \frac{\pi^2 a_{11}}{a^2} (1 + \mu) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} = \frac{2qa^2}{\pi^4} \cdot (1 + \mu) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a}, \end{aligned}$$

analoogiliselt

$$M_y = \frac{2qa^2}{\pi^4} \cdot (1 + \mu) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a}$$

ning

$$M_{xy} = -D(1 - \mu) \cdot \frac{\pi^2 a_{11}}{a^2} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{a} = -\frac{2qa^2}{\pi^4} (1 - \mu) \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{a}.$$

Lõikejõud on vastavalt avaldistele (10) ja (11) kujul

$$\begin{aligned} Q_x &= -D \left(-\frac{\pi^3 a_{11}}{a^3} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} - \frac{\pi^3 a_{11}}{a^3} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} \right) = \\ &= 2D \frac{\pi^3 a_{11}}{a^3} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} = \frac{4qa}{\pi^3} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a}, \end{aligned}$$

analoogiliselt

$$Q_y = \frac{4qa}{\pi^3} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{a}.$$

Toereaktsioonid on vastavalt avaldistele (12) ja (13) kujul

$$\begin{aligned} R_x &= -D \left[-\frac{\pi^3 a_{11}}{a^3} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} - (2 - \mu) \frac{\pi^3 a_{11}}{a^3} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} \right] = \\ &= D \frac{\pi^3 a_{11}}{a^3} (3 - \mu) \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} = \frac{2qa}{\pi^3} \cdot (3 - \mu) \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} \end{aligned}$$

ja analoogiliselt

$$R_y = \frac{2qa}{\pi^3} \cdot (3 - \mu) \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{a}.$$

Normaal- ja tangentsiaalpinged vastavalt avaldistele (4) on kujul

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{Ez}{1 - \mu^2} \left[-\frac{\pi^2 a_{11}}{a^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} - \mu \frac{\pi^2 a_{11}}{a^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} \right] = \\ &= \frac{24qa^2(1 + \mu)z}{\pi^4 h^3} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a}, \end{aligned}$$

analoogiliselt

$$\sigma_y = \frac{24qa^2(1 + \mu)z}{\pi^4 h^3} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a}$$

ning

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= -\frac{Ez}{1 + \mu} \cdot \frac{\pi^2 a_{11}}{a^2} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{a} = \\ &= -\frac{24qa^2(1 - \mu)z}{\pi^4 h^3} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{a}. \end{aligned}$$

3.3.3 Tükiti konstantse paksusega plaat

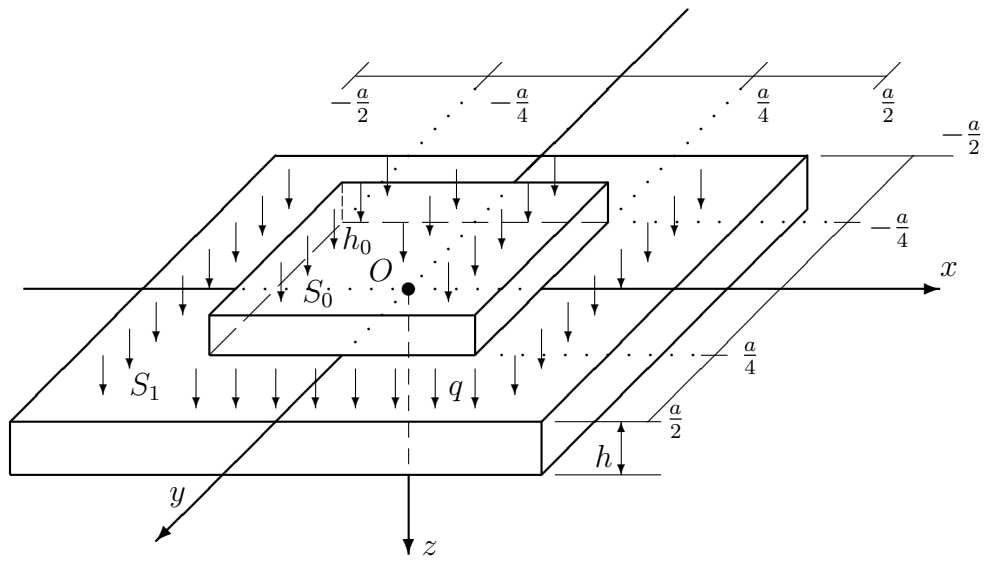
Olgu meil tegemist ruudukujulise plaadiga, millele on rakendatud ühtlane koormus $q(x, y)$. Eeldame, et plaat on vabalt toetatud jäigale kontuurile. Serva pikkus olgu a (joonised 9 ja 9a).

Plaadi paksus on määratud astmelise jaotusega

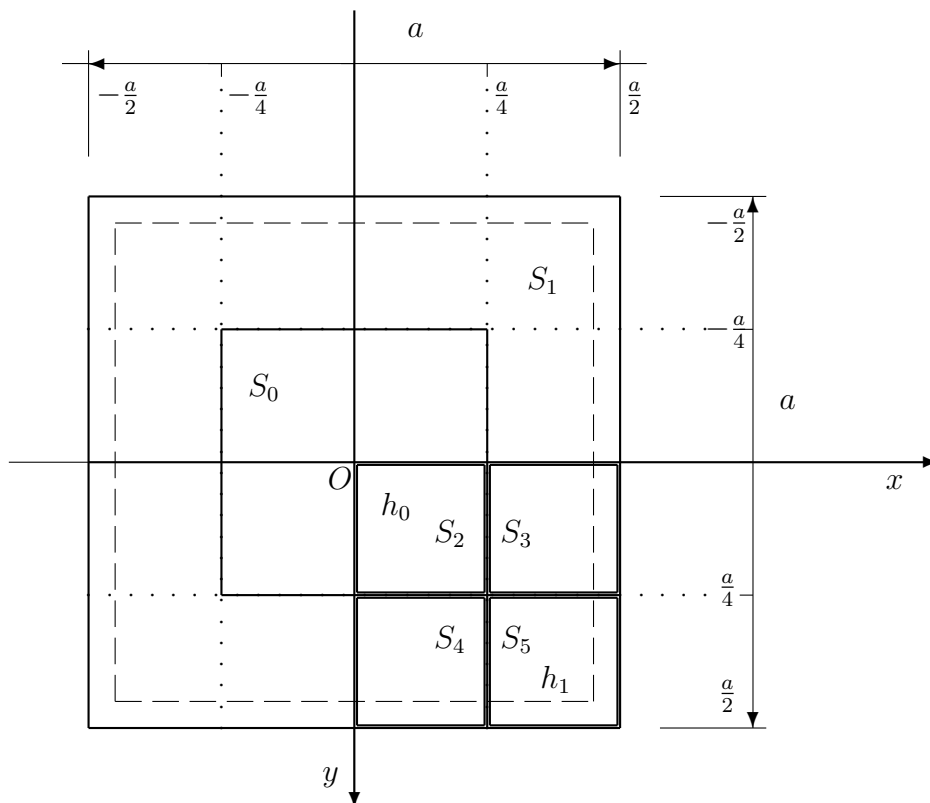
$$h = \begin{cases} h_0, & \text{kui } (x, y) \in S_0, \\ h_1, & \text{kui } (x, y) \in S_1, \end{cases}$$

kus paindejäikus on määratud järgmiselt:

$$D = \begin{cases} D_0, & \text{kui } (x, y) \in S_0, \\ D_1, & \text{kui } (x, y) \in S_1. \end{cases}$$



Joonis 9: Tükiti konstantse paksusega ruudukujuline plaat



Joonis 9a: Vabalt toetatud tükiti konstantse paksusega ruudukujuline plaat

Piirkonnad S_1, S_2 on meil määratud järgmiselt:

$$S = \left\{ (x, y) : |x| \leq \frac{a}{2}, |y| \leq \frac{a}{2} \right\},$$

$$S_0 = \left\{ (x, y) : |x| \leq \frac{a}{4}, |y| \leq \frac{a}{4} \right\}$$

ning

$$S_1 = S \setminus S_0.$$

Leiame läbipainde Bubnov-Galjorkini meetodi abil.

Teame, et plaadi elastse pinna diferentsiaalvõrrand on

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}.$$

Olgu meil plaadi läbipaine w esitatud järgmisel kujul:

$$w = A \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{a}, \quad (76)$$

kus A on tundmatu parameeter.

Kontrollime rajatingimusi plaadi servadel. Selleks arvutame funktsiooni (76) teist järku osatuletised muutujate x ja y järgi

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= -A \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{a}, \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= -A \frac{\pi}{a} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= -A \frac{\pi^2}{a^2} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{a}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= -A \frac{\pi^2}{a^2} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{a}. \end{aligned}$$

Saame, et

$$\text{kui } x = \pm \frac{a}{2}, \text{ siis } w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0,$$

$$\text{kui } y = \pm \frac{a}{2}, \text{ siis } w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

Seega vabalt toetatud plaadi rajatingimused on täidetud.

Leiame funktsiooni(76) jaoks neljandat järku osatuletised muutujate x ja y järgi ning segatuletised

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} &= A \frac{\pi^4}{a^4} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{a}, \\ \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} &= A \frac{\pi^4}{a^4} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{a}, \\ \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} &= A \frac{\pi^4}{a^4} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{a}. \end{aligned}$$

Saame, et elastse pinna diferentsiaalvõrrand on kujul

$$D\nabla^4 w - q = 4DA \frac{\pi^4}{a^4} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{a} - q = 0. \quad (77)$$

Tähistame

$$X = D\nabla^4 w - q = 0.$$

Läbipainde sümmeetria tõttu vaatleme ainult veerandit, kus $x \geq 0$, $y \geq 0$. Olgu piirkonna S_0 kõrgus h_0 ja piirkonna S_1 kõrgus olgu h_1 . Piirkonnad $S_2 - S_5$ on näidatud joonisel 9a. Kehtib

$$h = h_1, \text{ kui } (x, y) \in S_i, \text{ kus } i = 3, 4, 5,$$

$$h = h_0, \text{ kui } (x, y) \in S_2.$$

Olgu

$$\tilde{S} = S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_5,$$

see tähendab, et piirkond \tilde{S} on määratud järgmiselt:

$$\tilde{S} = \left\{ (x, y) : x \in \left[0, \frac{a}{2}\right], y \in \left[0, \frac{a}{2}\right] \right\}.$$

Bubnov-Galjorkini meetodi korral on meil

$$\iint_{\tilde{S}} X \delta w \, dx dy = 0,$$

kus olgu

$$\delta w = \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{a}.$$

Võime viimase integraali arvutada üle kõigi piirkondade eraldi ja tulemused liita.

Piirkonnad $S_2 - S_5$ on määratud järgmiselt:

$$S_2 = \left\{ (x, y) : x \in \left[0, \frac{a}{4}\right], y \in \left[0, \frac{a}{4}\right] \right\},$$

$$S_3 = \left\{ (x, y) : x \in \left[\frac{a}{4}, \frac{a}{2}\right], y \in \left[0, \frac{a}{4}\right] \right\},$$

$$S_4 = \left\{ (x, y) : x \in \left[0, \frac{a}{4}\right], y \in \left[\frac{a}{4}, \frac{a}{2}\right] \right\},$$

$$S_5 = \left\{ (x, y) : x \in \left[\frac{a}{4}, \frac{a}{2}\right], y \in \left[\frac{a}{4}, \frac{a}{2}\right] \right\}.$$

Piirkonna \tilde{S} jaoks saame

$$\sum_{j=2}^5 \iint_{S_j} \left[4DA \frac{\pi^4}{a^4} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{a} - q \right] \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{a} dx dy = 0. \quad (78)$$

Integreerides avaldist (78), leiame integraalid igas piirkonnas eraldi.

Tähistame

$$\begin{aligned} I_{1j} &= \iint_{S_j} \cos^2 \frac{\pi x}{a} \cos^2 \frac{\pi y}{a} dx dy \\ I_{2j} &= \iint_{S_j} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{a} dx dy. \end{aligned}$$

Valemi (78) põhjal saame

$$\sum_{j=2}^5 \left[4\tilde{D}_j A \frac{\pi^4}{a^4} I_{1j} - I_{2j} q \right] = 0, \quad (79)$$

kus

$$\tilde{D}_j = \begin{cases} D_0, & \text{kui } j = 2, \\ D_1, & \text{kui } j = 3, 4, 5. \end{cases}$$

Piirkonnas S_2 on $h = h_0$, $D = D_0$ ning

$$D_0 = \frac{Eh_0^3}{12(1 - \mu^2)}.$$

Otseselt arvutades ja lihtsustades leiame

$$\begin{aligned} I_{12} &= \int_0^{\frac{a}{4}} \int_0^{\frac{a}{4}} \cos^2 \frac{\pi x}{a} \cos^2 \frac{\pi y}{a} dx dy = \frac{a^2(\pi + 2)^2}{64\pi^2}, \\ I_{22} &= \int_0^{\frac{a}{4}} \int_0^{\frac{a}{4}} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{a} dx dy = \frac{a^2}{2\pi^2}. \end{aligned} \quad (80)$$

Piirkondades S_3, S_4 ja S_5 on $h = h_1$, $D = D_1$, kus

$$D_1 = \frac{Eh_1^3}{12(1 - \mu^2)}.$$

Arvutades ja lihtsustades iga piirkonna jaoks eraldi saame, et

$$\begin{aligned} I_{13} &= \int_{\frac{a}{4}}^{\frac{a}{2}} \int_0^{\frac{a}{4}} \cos^2 \frac{\pi x}{a} \cos^2 \frac{\pi y}{a} dx dy = \frac{a^2(\pi - 2)(\pi + 2)}{64\pi^2}, \\ I_{23} &= \int_{\frac{a}{4}}^{\frac{a}{2}} \int_0^{\frac{a}{4}} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{a} dx dy = \frac{(2 - \sqrt{2})a^2}{2\sqrt{2}\pi^2} \end{aligned} \quad (81)$$

ja

$$\begin{aligned} I_{14} &= \int_0^{\frac{a}{4}} \int_{\frac{a}{4}}^{\frac{a}{2}} \cos^2 \frac{\pi x}{a} \cos^2 \frac{\pi y}{a} dx dy = \frac{a^2(\pi - 2)(\pi + 2)}{64\pi^2}, \\ I_{24} &= \int_0^{\frac{a}{4}} \int_{\frac{a}{4}}^{\frac{a}{2}} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{a} dx dy = \frac{(2 - \sqrt{2})a^2}{2\sqrt{2}\pi^2} \end{aligned} \quad (82)$$

ning

$$\begin{aligned} I_{15} &= \int_{\frac{a}{4}}^{\frac{a}{2}} \int_{\frac{a}{4}}^{\frac{a}{2}} \cos^2 \frac{\pi x}{a} \cos^2 \frac{\pi y}{a} dx dy = \frac{a^2(\pi - 2)^2}{64\pi^2}, \\ I_{25} &= \int_{\frac{a}{4}}^{\frac{a}{2}} \int_{\frac{a}{4}}^{\frac{a}{2}} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{a} dx dy = \frac{(2 - \sqrt{2})^2 a^2}{4\pi^2}. \end{aligned} \quad (83)$$

Vastavalt valemile (79) saame, paigutades asemele võrdused (80) – (83), et

$$\begin{aligned} 4D_0 A \frac{\pi^4}{a^4} \cdot \frac{a^2(\pi + 2)^2}{64\pi^2} - \frac{a^2}{2\pi^2} q + 4D_1 A \frac{\pi^4}{a^4} \cdot \frac{a^2(\pi - 2)^2}{64\pi^2} - \frac{(2 - \sqrt{2})^2 a^2}{4\pi^2} q + \\ + 8D_1 A \frac{\pi^4}{a^4} \cdot \frac{a^2(\pi - 2)(\pi + 2)}{64\pi^2} - \frac{(2 - \sqrt{2})a^2}{\sqrt{2}\pi^2} q = 0. \end{aligned}$$

Lihtsustades saame

$$\begin{aligned} 4A \frac{\pi^4}{a^4} \cdot \frac{a^2}{64\pi^2} \left(D_0(\pi + 2)^2 + D_1[(\pi - 2)^2 + 2(\pi - 2)(\pi + 2)] \right) = \\ = \frac{a^2}{\pi^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{(2 - \sqrt{2})^2}{4} + \frac{(2 - \sqrt{2})}{\sqrt{2}} \right) q. \end{aligned}$$

Seega konstandil A on kuju

$$A = \frac{16a^4 q}{\pi^4 [D_0(\pi + 2)^2 + D_1(\pi - 2)(3\pi + 2)]} \quad (84)$$

ning plaadi läbipaine (76) on esitatav järgmiselt:

$$w = \frac{16a^4 q}{\pi^4 [D_0(\pi + 2)^2 + D_1(\pi - 2)(3\pi + 2)]} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{a}. \quad (85)$$

Kuigi viimane valem on leitud $(x, y) \in \tilde{S}$ jaoks, kehtib see sümmeetria tõttu kogu plaadi ulatuses.

Analoogiliselt eelmiste näidetega võib ka siin leida vastavad paindemomendid, väändemomendid, lõikejõud, toereaktsioonid, normaalpinged ja tangentsiaalpinged.

Bending of Plates with Piecewise Constant Thickness

Master's thesis

Julia Prost

Summary

The aim of the thesis is to study the bending of an elastic rectangular plate subjected to transverse loading.

The author studies the bending of thin plates only (i.e., the bending of such plates, the shorter side of which is at least five times longer than the height of the plate) depending on the ratio of the deflection and thickness of the plate. The study covers only flexible plates (when membrane stresses are not taken into account because the values of these are significantly lower than those of bending stresses).

Rectangular plates are widely used in the technology in many structures, including, for example, the hulls of ships and airplanes, as floor material in houses, etc.

It is known that a problem regarding plate bending leads to a search for a solution to a differential equation. For solving the differential equation for the bending of a plate, one must generally use some approximate method. Over time, a number of different approximate methods for solving the differential equation for plate bending have been developed.

In this thesis, the author has paid great attention to the Bubnov-Galerkin method (Chapter 3). Since this method could also be viewed as the generalisation of the Navier method, the latter is also studied in this paper (Chapter 2).

This Master's thesis consists of three chapters.

The first two chapters treat only isotropic plates with a constant thickness (i.e., plates which have a uniform thickness and similar elastic properties in all directions). In the third chapter, the author studies isotropic plates of uniform as well as non-uniform thickness.

In the first chapter, the theory of bending isotropic plates with a uniform thickness is introduced. The author studies the relations between the deflection, displacements, and deformations of plates. The relations between the deflection and stresses of plates are also demonstrated. Likewise, the author explains how to determine the bending and torque moment, shear forces, and support reactions. Further on, the author shows how to determine the equation of equilibrium of a thin elastic plate, and this equation also finds wide use in the next chapters. At the end of the chapter, the author provides boundary conditions for the edges of plates which are clamped and simply supported.

The second chapter introduces the Navier method, in the case of which the plate deflection is determined by means of double trigonometric series. As an example of the implementation of this method, the author has also studied a rectangular plate which is subjected to the uniform load and simply supported from all edges.

In the third chapter, the author provides the results of her own research work. As the main method for solving the bending problem of a thin elastic plate in various boundary conditions, the author uses the Bubnov-Galerkin method, an overview of which is also provided at the beginning of the chapter. The author has studied plates with uniform as well as non-uniform thickness. First, the bending of a clamped plate is under observation. The author studies three separate cases: a plate with uniform load, a plate with gradual load, and a stepped plate under uniform load. For comparison, the author then studies the bending of a simply supported plate. Similarly to clamped plates, three analogical cases are again separately studied: a plate with uniform load, a plate with gradual load, and a stepped plate under uniform load.

At the end of the thesis (in the appendices) the author has provided tables for calculating rectangular plates under uniformly distributed load.

Tabelid ühtlaselt jaotatud koormusega elastsete ristkülikukujuliste plaatide arvutamiseks

Lisa 1: Järgalt kinnitatud servadega plaat

$$\mu = 0,3 \text{ ja } a < b$$

$w^{(1)}$ – läbipaine plaadi keskel,

$M_x^{(1)}$ ja $M_y^{(1)}$ – paindemomendid plaadi keskel,

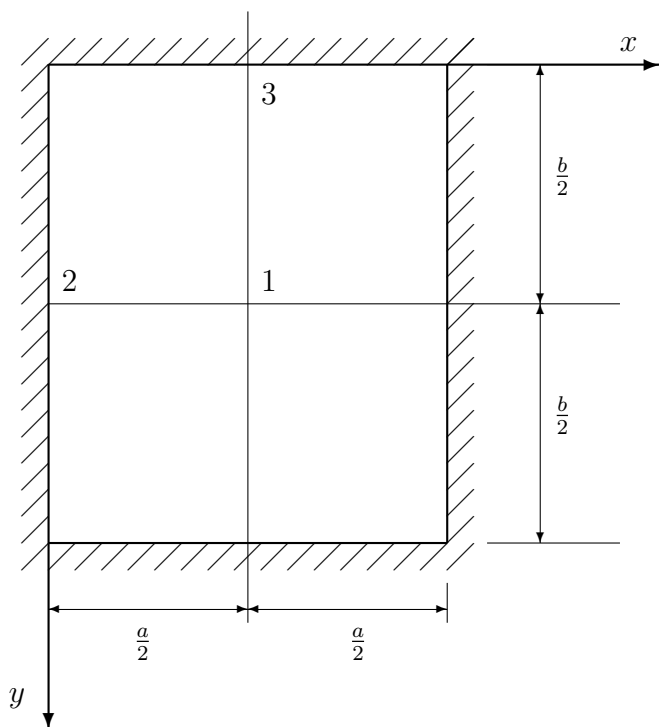
$Q_x^{(2)}$ – lõikejõud pikema külje keskel,

$Q_y^{(3)}$ – lõikejõud lühema külje keskel,

$R_x^{(2)}$ – toereaktsioonid pikema külje keskel,

$R_y^{(3)}$ – toereaktsioonid lühema külje keskel,

P_R – koondatud reaktsioonjõud plaadi nurkades.



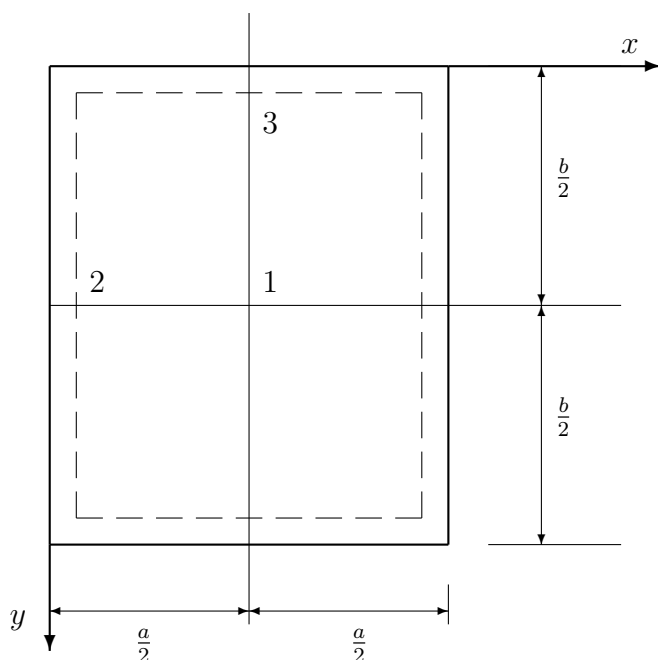
Joonis L1: Järgalt kinnitatud ristkülikukujuline plaat

$$\begin{aligned}
w^{(1)} &= k_1 \frac{qa^4}{Eh^3} & Q_x^{(2)} &= k_6 qa \\
M_x^{(1)} &= k_2 qa^2 & Q_y^{(3)} &= k_7 qa \\
M_y^{(1)} &= k_3 qa^2 & R_x^{(2)} &= k_8 qa \\
M_x^{(2)} &= -k_4 qa^2 & R_y^{(3)} &= k_9 qa \\
M_y^{(3)} &= -k_5 qa^2 & &
\end{aligned}$$

b/a	k₁	k₂	k₃	k₄	k₅	k₆	k₇	k₈	k₉
1, 0	0, 0138	0, 0231	0, 0231	0, 0513	0, 0513	0, 452	0, 452	0, 440	0, 440
1, 1	0, 0165	0, 0264	0, 0231	0, 0581	0, 0538	0, 448	0, 412	0, 473	0, 450
1, 2	0, 0191	0, 0299	0, 0228	0, 0639	0, 0554	0, 471	0, 381	0, 493	0, 457
1, 3	0, 0210	0, 0327	0, 0222	0, 0687	0, 0563	0, 491	0, 352	0, 505	0, 462
1, 4	0, 0227	0, 0349	0, 0212	0, 0726	0, 0568	0, 505	0, 327	0, 510	0, 464
1, 5	0, 0241	0, 0368	0, 0203	0, 0757	0, 0570	0, 517	0, 305	0, 515	0, 465
1, 6	0, 0251	0, 0381	0, 0193	0, 0780	0, 0571	—	—	—	—
1, 7	0, 0260	0, 0392	0, 0182	0, 0799	0, 0571	—	—	—	—
1, 8	0, 0267	0, 0401	0, 0174	0, 0812	0, 0571	—	—	—	—
1, 9	0, 0272	0, 0407	0, 0165	0, 0822	0, 0571	—	—	—	—
2, 0	0, 0276	0, 0412	0, 0158	0, 0829	0, 0571	—	—	—	—
∞	0, 0284	0, 0417	0, 0125	0, 0833	0, 0571	—	—	0, 500	0, 465

Lisa 2: Vabalt toetatud servadega plaat

$$\begin{aligned}
 w^{(1)} &= k_1 \frac{qa^4}{Eh^3} & Q_x^{(2)} &= k_4 qa \\
 M_x^{(1)} &= k_2 qa^2 & Q_y^{(3)} &= k_5 qa \\
 M_y^{(1)} &= k_3 qa^2 & R_x^{(2)} &= k_6 qa \\
 P_R &= k_8 qab & R_y^{(3)} &= k_7 qa
 \end{aligned}$$



Joonis L2: Vabalt toetatud ristkülikukujuline plaat

b/a	k ₁	k ₂	k ₃	k ₄	k ₅	k ₆	k ₇	k ₈
1,0	0,0443	0,0479	0,0479	0,338	0,338	0,420	0,420	0,065
1,1	0,0530	0,0554	0,0493	0,360	0,347	0,440	0,440	0,070
1,2	0,0616	0,0627	0,0501	0,380	0,353	0,455	0,453	0,074
1,3	0,0697	0,0694	0,0503	0,397	0,357	0,468	0,464	0,079
1,4	0,0770	0,0755	0,0502	0,411	0,361	0,478	0,471	0,083
1,5	0,0843	0,0812	0,0498	0,424	0,363	0,486	0,480	0,085
1,6	0,0906	0,0862	0,0492	0,435	0,365	0,491	0,485	0,086
1,7	0,0964	0,0908	0,0486	0,444	0,367	0,496	0,488	0,088
1,8	0,1017	0,0948	0,0479	0,452	0,368	0,499	0,491	0,090
1,9	0,1064	0,0985	0,0471	0,459	0,369	0,502	0,494	0,091
2,0	0,1106	0,1017	0,0464	0,465	0,370	0,503	0,496	0,092
3,0	0,1336	0,1189	0,0406	0,493	0,372	0,505	0,498	0,093
4,0	0,1400	0,1235	0,0384	0,498	0,372	0,502	0,500	0,094
5,0	0,1416	0,1246	0,0375	0,500	0,372	0,501	0,500	0,095
∞	0,1422	0,1250	0,0375	0,500	0,372	0,500	0,500	0,095

Viited

- [1] Eek, R.N., Poverus, L.J. *Ehitusmehaanika II*. Tallinn, Valgus, 1967, 630 lk.
- [2] Eschenauer, H., Olhoff, N., Schnell, W. *Applied Structural Mechanics*. Springer, 1997, 389 p.
- [3] Reddy, J.N. *Theory and Analysis of Elastic Plates*. Taylor & Francis, 1999, 576 p.
- [4] Reddy, J.N. *Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells*. CRC Press, 2007, 547 p.
- [5] Ventsel, E., Krauthammer T. *Thin Plates and Shells: Theory, Analysis and Applications*, New York, Marcel Dekker, 2001, 666 p.
- [6] Vinson, J.R. *The Behavior of Thin Walled Structures*. Kluwer, 1989.
- [7] Vinson, J.R. *Plate and Panel Structures of Isotropic, Composite and Piezoelectric Materials, Including Sandwich Construction*. Springer, 2005, 418 p.
- [8] Александров, В.А., Потапов В.Д. *Основы теории упругости и пластичности*. Москва, Высшая школа, 1990, 399 стр.
- [9] Безухов, Н.И., *Основы теории упругости, пластичности и ползучести*. Москва, Высшая школа, 1968, 512 стр.
- [10] Филоненко-Бородич, М.М. *Теория упругости*. Москва, Высшая школа, 1959, 364 стр.
- [11] Самуль, В.И. *Основы теории упругости и пластичности*. Москва, Высшая школа, 1982, 264 стр.
- [12] Терещушко, О.И. *Основы теории упругости и пластичности*. Москва, Наука, 1984, 320 стр.
- [13] <http://www.teoretmeh.ru/Bubnov.htm>, mai 2010
- [14] <http://www.teoretmeh.ru/Galerkin.htm>, mai 2010