TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

Arvutusmatamaatika kateeder

TÄISARVULISTE RUUTPLANEERIMISE ÜLESANNETE LAHENDAMISEST

Diplomitöö

Teostaja: Rita Kerge
Matemaatikateaduskonna
V kursuse üliõpilane
Juhendaja: dots. L.Kivistik

Lubatud kaitsmisele
20.VI.72.

TARTU 1972

SISSEJUHATUS

Käesolevas diplomitöös vaadeldakse ruutplaneerimise ülesannete lahendamist. Töö koosneb kolmest osast, kusjuures kaks esimest osa on ~~on~~ omavahel tihedalt seotud, kolmas osa aga neist sõltumatu.

Kuna töö üheks eesmärgiks oli kahepoolsete kitsendustega ruutplaneerimise ülesande lahendamine osalise või täieliku täisarvulisuse nõudega, kasutades seejuures Gomory I ja Gomory II meetodi lõikekitsendusi, siis esimeses osas on nimetatud ülesande lahendamise jaoks Beale´i meetod üldistatud kahepoolsete tõkete juhule. Töö teises osas lähtutakse esimeses osas kirjeldatud viisil leitud mittetäisarvulisest optimaalsest lahendist ning kirjeldatakse selle ülesande lahendamiseks meetodit,kus ruutplaneerimise ülesande lahendamine taandatakse lõpliku arvu lineaarse planeerimise ülesannete lahendamisele.

Töö kolmandas osas vaadeldakse täielikult täisarvulise ruutplaneerimise ülesande lahendamist, ning esitatakse üks Gloveri otsese algoritmi võimalikest esitustest ruutplaneerimise ülesannete lahendamiseks. Ka kirjeldatud otsese algoritmi korral tuleb lahendada lõplik arv alamülesandeid, millede optimaalsete lahendite seast leitakse lähteülesande optimaalne lahend. Tõestatud on ka kirjeldatud otsese algoritmi lõplikkus.

§1. BEALE'I MEETOD KAHEPOOLSETE TÕKETE JUHUL

Käesolevas paragrahvis üldistame Beale'i meetodi (vt. [1]) kahepoolsete tõkete juhule. Vaatleme järgmist ruutplaneerimise ülesannet: minimiseerida mittenegatiivselt määratud ruutfunktsionaal

$$Q(X) = c_{oo} + \sum_{j \in M} c_{oj} x_j + \sum_{i \in M} (c_{io} + \sum_{j \in M} c_{ij} x_j) x_i \qquad (1)$$

kitsendustel

$$\alpha_i \leq x_i = a_{io} + \sum_{j \in M} a_{ij} x_j \leq \beta_i \quad , \quad i \in B \cup M \qquad (2)$$

kus $c_{ij} = c_{ji}$ $(i,j \in \{0\} \cup M)$, alumised tõkked $\alpha_j = 0$ $j \in M$ korral ning kus M tähistab baasiväliste indeksite hulka, B baasiindeksite hulka ja $B \cup M = \{1,2,\dots,n\}$.

Ülesande (1)-(2) simplekstabeli võib välja kirjutada järgmiselt

Tabel 1

	1	$x_1 \dots x_j \dots x_m$
1	c_{oo}	$c_{01} \dots c_{oj} \dots c_{om}$
x_1	c_{1o}	$c_{11} \dots c_{1j} \dots c_{1m}$
...	...	....
x_j	c_{jo}	$c_{j1} \dots c_{jj} \dots c_{jm}$
...	...	....
x_m	c_{mo}	$c_{m1} \dots c_{mj} \dots c_{mm}$
x_1	a_{1o}	$a_{11} \dots a_{1j} \dots a_{1m}$
...	...	....
x_i	a_{io}	$a_{i1} \dots a_{ij} \dots a_{im}$
...	...	....
x_n	a_{no}	$a_{n1} \dots a_{nj} \dots a_{nm}$

Olgu meil teada mingi lubatav baasilahend, s.t. et iga $i \in B \cup M$ korral $\alpha_i \leq a_{io} \leq \beta_i$. Kuna

$$\frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial x_i} = c_{io} + \sum_{j \in M} c_{ij}x_j \quad , \quad i \in M ,$$

siis antud baasilahendi korral on $\frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial x_i} = c_{io}$ ja sihifunktsiooni väärtus on c_{oo}. Kui $c_{io} \geq o$ iga $i \in M$ korral, siis muutujate x_i mittenegatiivsuse ja sihifunktsiooni kumeruse tõttu sihifunktsiooni väärtus enam väheneda ei saa ning antud baasilahend on optimaalne. Kui leidub $c_{po} < o$, $p \in M$, siis muutujale x_p positiivse väärtuse andmisel sihifunktsiooni väärtus väheneb. On kaks võimalust:

1. Sihifunktsiooni väärtuse vähenemine leiab aset seni,
V kuni mingi baasimuutuja x_l, $l \in B$ saab võrdseks oma alumise või ülemise tõkkega. Nõude $\alpha_l \leq x_l \leq \beta_l$ tõttu pole siis enam sihifunktsiooni antud suunas võimalik vähendada.

2. Tekib olukord, kus $\frac{\partial Q}{\partial x_p}$ saab võrdseks nulliga kuskil lubatavate lahendite piirkonnas, s.t. enne kui mõni baasimuutujatest x_l saavutab oma tõkkeväärtuse. Sel juhul ei oma x_l väärtuse edasine vähendamine (või suurendamine) enam mõtet, sest sihifunktsiooni väärtus hakkab kasvama. Nüüd toome sisse uue muutuja

$$u = \frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial x_p} = c_{po} + \sum_{j \in M} c_{pj}x_j \quad ,$$

sellega baasiindeksite hulk kasvab ühe indeksi võrra. Uut muutujat me märgi poolest ei kitsenda, samuti ei sea me talle kahepoolseid tõkkeid. Edaspidi nimetame seda uut muutujat vabaks muutujaks. Kuna üldiselt tuleb vabu muutujaid sisse tuua rohkem kui üks, siis tähistame neist esimest sümboliga

u_1, teist sümboliga u_2 jne. On ilmne, et erinevalt esialgsetest kitsendatud muutujatest, on baasivälise vaba muutuja korral sihifunktsiooni väärtuse optimaalsuseks tarvilik, et $\frac{\partial Q}{\partial u}$ võrduks nulliga. Vastasel juhul vabale muutujale u $\frac{\partial Q}{\partial u} < o$ korral positiivse ja $\frac{\partial Q}{\partial u} > o$ korral negatiivse väärtuse andmisel sihifunktsiooni väärtus väheneb.

Vaatleme nüüd üldist üleminekut mingilt k-ndalt lubatavalt baasilahendilt (k+1)-le lubatavale baasilahendile. Olgu k-ndal sammul baasiindeksite hulk tähistatud tähega B, mittebaasiindeksite hulk tähega M. Tähistame baasiväliseid muutujaid üldise sümboliga z_j, $j \in M$, olgu nende seas s vaba muutujat. Baasimuutujad avaldugu baasiväliste kaudu järgmiselt:

$$x_i = a_{io} + \sum_{j \in M} a_{ij} z_j \quad , \quad i \in B , \tag{3}$$

kusjuures baasilahendi lubatavuse tõttu $\alpha_i \leq a_{io} \leq \beta_i$ iga $i \in B \cup M$ korral. Olgu optimaalsuse tingimust rikkuvaks muutujaks z_p ning valemis

$$u = \frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial z_p} = c_{po} + \sum_{j \in M} c_{pj} z_j \tag{4}$$

olgu $c_{po} < 0$. Uue baasilahendi saamiseks anname muutujale z_p positiivse väärtuse, jättes teiste baasiväliste muutujate väärtused nullideks.

Tähistame selle z_p väärtuse, mille korral $\frac{\partial Q}{\partial z_p} = 0$, sümboliga λ_1. Seosest (4) saame, et

$$\lambda_1 = \frac{-c_{po}}{c_{pp}} \quad . \tag{5}$$

Kui $c_{pp} = 0$, siis jääb $\frac{\partial Q}{\partial z_p}$ negatiivseks muutuja z_p kuitahes suurtel väärtustel.

Uurime nüüd, milliste muutuja z_p positiivsete väärtuste juures on uus baasilahend lubatav. Valemist (3) ja kitsendusest $x_i \geq \alpha_i$ saame tingimuseks:

$$a_{ip} z_p \geq \alpha_i - a_{io} .$$

Kui $a_{ip} \geq 0$, siis on see võrratus rahuldatud. Olgu $a_{ip} < 0$, siis saame uue baasilahendi lubatavuse tingimuseks

$$z_p \leq \frac{\alpha_i - a_{io}}{a_{ip}} .$$

Tähistame

$$\lambda_2 = \min_{a_{ip}<0} \frac{\alpha_i - a_{io}}{a_{ip}} . \qquad (6)$$

Valemist (3) ja kitsendusest $x_i \leq \beta_i$ saame tingimuse

$$a_{ip} z_p \leq \beta_i - a_{io} .$$

Kui $a_{ip} \leq 0$, siis on see võrratus rahuldatud; olgu $a_{ip} > 0$, siis saame uue baasilahendi lubatavuse tingimuseks

$$z_p \leq \frac{\beta_i - a_{io}}{a_{ip}}$$

ning tähistame siin

$$\lambda_3 = \min_{a_{ip}>0} \frac{\beta_i - a_{io}}{a_{ip}} . \qquad (7)$$

Selleks, et sihifunktsiooni väärtuse vähenemine oleks maksimaalne ning et uus baasilahend oleks lubatav, tuleb valida $\lambda = \min\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ ja toimida edasi järgmiselt :

I. Kui $\lambda = \lambda_1$, siis tuleb valemi (4) kohaselt sisse tuua uus vaba muutuja u_{s+1} ning viia läbi veergude simpleksteisendus juhtelemendiga $c_{pp} > 0$. Seejuures kitsenduste (3) maatriksi A veeruvektorid A_j teisenevad järgmiselt:

$$\bar{A}_j = A_j - \frac{c_{pj}}{c_{pp}} A_p \ , \quad j \in \{0\} \cup M \setminus \{p\} \ ,$$
$$\bar{A}_w = \frac{1}{c_{pp}} A_p \ . \tag{8}$$

Põhjendame nüüd nõnda teisendatud tabeli lubatavuse. Muutuja x_k uus väärtus $\bar{a}_{ko}$ on järgmine:

$$\bar{a}_{ko} = a_{ko} - \frac{c_{po}}{c_{pp}} a_{kp} \ . \tag{9}$$

Seejuures on $\bar{a}_{ko} \geq \alpha_k$ parajasti siis, kui $a_{kp} > 0$ korral

$$\frac{a_{ko} - \alpha_k}{a_{kp}} \geq \frac{c_{po}}{c_{pp}} \tag{10}$$

ja $a_{kp} < 0$ korral

$$\frac{a_{ko} - \alpha_k}{a_{kp}} \leq \frac{c_{po}}{c_{pp}} \ . \tag{11}$$

Kuna võrratuses (10) on vasak pool mittenegatiivne, parem pool aga negatiivne arv, siis $a_{kp} > 0$ korral on $\bar{a}_{ko} \geq \alpha_k$. Et võrratuse $\lambda_1 \leq \lambda_2$ tõttu kehtib seos

$$\frac{-c_{po}}{c_{pp}} \leq \min_{a_{ip}<0} \frac{\alpha_i - a_{io}}{a_{ip}} \leq \frac{\alpha_k - a_{ko}}{a_{kp}} \ ,$$

siis on ka tingimus (11) täidetud ning $\bar{a}_{ko} \geq \alpha_k$ ka $a_{kp} < 0$ korral. Kitsendus $\bar{a}_{ko} \leq \beta_k$ on võrduse (9) tõttu täidetud parajasti siis, kui $a_{kp} > 0$ korral on

$$\frac{a_{ko} - \beta_k}{a_{kp}} \leq \frac{c_{po}}{c_{pp}} \tag{12}$$

ja $a_{kp} < 0$ korral on

$$\frac{a_{ko} - \beta_k}{a_{kp}} \geq \frac{c_{po}}{c_{pp}} \ . \tag{13}$$

Kuna $\lambda_1 \leq \lambda_3$, siis

$$\frac{-c_{po}}{c_{pp}} \leq \min_{a_{ip}>0} \frac{\beta_i - a_{io}}{a_{ip}} \leq \frac{\beta_k - a_{ko}}{a_{kp}}$$

ja järelikult on tingimus (12) täidetud. Tingimus (13) on ilmselt täidetud, sest võrratuse vasak pool on mittenegatiivne, parem pool aga negatiivne arv.

II. Kui $\lambda = \lambda_2$, siis tuleb läbi viia simpleksteisendus juhtelemendiga $a_{qp} < 0$, kusjuures indeksi q korral on saavutatud miinimum valemis (6). Teisendusvalemid on seejuures järgmised:

$$\begin{aligned} \bar{A}_o &= A_o - \frac{a_{qo} - \alpha_q}{a_{qp}} A_p , \\ \bar{A}_j &= A_j - \frac{a_{qj}}{a_{qp}} A_p , \qquad j \in M \setminus \{p\} , \\ \bar{A}_w &= \frac{1}{a_{qp}} A_p . \end{aligned} \tag{14}$$

Antud juhul ei ole uueks baasiväliseks muutujaks tegelikult mitte x_q, vaid $x_q^- = x_q - \alpha_q \geq 0$, sellest on tingitud ka vektori A_p kordaja vektori A_o teisendusvalemis. Muutuja x_k uueks väärtuseks $\bar{a}_{ko}$ saame:

$$\bar{a}_{ko} = a_{ko} - \frac{a_{qo} - \alpha_q}{a_{qp}} a_{kp} .$$

Seejuures $a_{kp} > 0$ korral on ilmselt $\bar{a}_{ko} \geq \alpha_k$, kui aga $a_{kp} < 0$, siis on $\bar{a}_{ko} \geq \alpha_k$ indeksi q valiku põhjal. Ka kitsendus $\bar{a}_{ko} \leq \beta_k$ on täidetud: kui $a_{kp} < 0$, siis on tingimus

$$\frac{a_{ko} - \beta_k}{a_{kp}} \geq \frac{a_{qo} - \alpha_q}{a_{qp}}$$

ilmselt täidetud. Kui $a_{kp} > 0$, siis $\lambda_2 \leq \lambda_3$ tõttu kehtib:

$$\min_{a_{ip}<0} \frac{\alpha_i - a_{io}}{a_{ip}} = \frac{\alpha_q - a_{qo}}{a_{qp}} \leq \min_{a_{ip}>0} \frac{\beta_i - a_{io}}{a_{ip}} \leq$$

$$\leq \frac{\beta_k - a_{ko}}{a_{kp}}$$

ja järelikult

$$\frac{a_{qo} - \alpha_q}{a_{qp}} \geq \frac{a_{ko} - \beta_k}{a_{kp}} ,$$

mis ongi tarvilik tingimus selleks, et $\bar{a}_{ko} \leq \beta_k$ ka $a_{kp} > 0$ korral. Järelikult on ka teisenduste (14) korral uus tabel lubatav.

III. Kui $\lambda = \lambda_3$, siis tuleb läbi viia simpleksteisendus juhtelemendiga $a_{qp} > 0$, kus q korral on saavutatud miinimum valemis (7). Seejuures on teisendusvalemid järgmised:

$$\bar{A}_o = A_o - \frac{a_{qo} - \beta_q}{a_{qp}} A_p ,$$

$$\bar{A}_j = A_j - \frac{a_{qj}}{a_{qp}} A_p , \quad j \in M \setminus \{p\} , \tag{15}$$

$$\bar{A}_w = - \frac{1}{a_{qp}} A_p .$$

Siin on uueks baasiväliseks muutujaks $x_q^+ = \beta_q - x_q \geq 0$. Muutuja x_k uus väärtus on järgmine:

$$\bar{a}_{ko} = a_{ko} - \frac{a_{qo} - \beta_q}{a_{qp}} a_{kp} .$$

Seejuures tingimuse $\bar{a}_{ko} \geq \alpha_k$ täidetus on $a_{kp} > 0$ korral ilmne ning $a_{kp} < 0$ korral järeldub see seosest $\lambda_3 \leq \lambda_2$. Tingimuse $\bar{a}_{ko} \leq \beta_k$ täidetus on ilmne $a_{kp} < 0$ korral, $a_{kp} > 0$ korral järeldub see indeksi q valikust. Seega on ka viimasel juhul uus baasilahend lubatav.

Olgu nüüd z_p vaba muutuja ja valemis (4) olgu $c_{po} > 0$. Anname muutujale z_p negatiivse väärtuse ja tähistame:

$$\lambda_1 = \left|\frac{-c_{po}}{c_{pp}}\right| = \frac{c_{po}}{c_{pp}} , \qquad (16)$$

$$\lambda_2 = \min_{a_{ip}>0} \left|\frac{\alpha_i - a_{io}}{a_{ip}}\right| = \min_{a_{ip}>0} \frac{a_{io} - \alpha_i}{a_{ip}} , \qquad (17)$$

$$\lambda_3 = \min_{a_{ip}<0} \left|\frac{\beta_i - a_{io}}{a_{ip}}\right| = \min_{a_{ip}<0} \frac{a_{io} - \beta_i}{a_{ip}} . \qquad (18)$$

Edasi toimime analoogiliselt eespool tooduga ja leiame kõigepealt $\lambda = \min\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$. Kui $\lambda = \lambda_1$, siis on simpleksteisenduse juhtelemendiks $c_{pp} > 0$ ja teisendus toimub valemite (8) kohaselt. Kui $\lambda = \lambda_2$ või $\lambda = \lambda_3$, siis on simpleksteisenduse juhtelemendiks vastavalt $a_{qp} > 0$ või $a_{qp} < 0$ ja teisenduse viime läbi vastavalt valemitele (14) või (15).

On kerge näha, et kui $c_{po} < 0$, $c_{pp} = 0$ ning iga $i \in B$ korral on $a_{ip} > 0$ ja $\beta_i = \infty$, siis ülesandel lahend puudub. Samuti sellisel juhul, kus vabale muutujale vastav $c_{po} > 0$, $c_{pp} = 0$ ja iga $i \in B$ korral on $a_{ip} < 0$ ning $\beta_i = \infty$, pole ülesandel lahendit.

Olgu valemitest (5),(6),(7) või (16),(17),(18) leitud λ_1, λ_2 ja λ_3 ning määratud eespool kirjeldatud viisil vastavad teisendusvalemid (8),(14) või (15). Sihifunktsiooni teisendamisel vaadeldud simpleksteisendustel tuleb ka tabeli sihifunktsiooni osas läbi viia veergude teisendus vastavalt määrarud valemitele (8), (14) või (15), seejärel veel sama teisendus ka tabeli sihifunktsiooni osa reavektoritega.

Tähistame baasiväliseid muutujaid pärast teisendust sümbolitega $\bar{z}_j$ ning baasiväliste indeksite hulka sümboliga $\bar{M}$, seejuures $\bar{M} = M \setminus \{p\} \cup \{w\}$ ja järelikult $j \in M \setminus \{p\}$ korral on $\bar{z}_j = z_j$, $\bar{z}_w$ aga avaldub eelnenu põhjal järgmiselt:

$$\bar{z}_w = \begin{cases} u_{s+1}, & \text{kui } \lambda = \lambda_1, \\ x_q^- = x_q - \alpha_q, & \text{kui } \lambda = \lambda_2, \\ x_q^+ = \beta_q - x_q, & \text{kui } \lambda = \lambda_3. \end{cases}$$

Meenutame, et $\lambda = \lambda_1$ korral

$$\bar{z}_w = u_{s+1} = c_{po} + \sum_{j \in M} c_{pj} z_j ,$$

millest

$$z_p = \frac{-c_{po}}{c_{pp}} + \frac{\bar{z}_w}{c_{pp}} - \sum_{\substack{j \in M \\ j \neq p}} \frac{c_{pj}}{c_{pp}} \bar{z}_j .$$

Tähistame $\lambda = \lambda_1$ korral

$$e_j = \begin{cases} \dfrac{-c_{pj}}{c_{pp}}, & j \in \{0\} \cup \bar{M} \setminus \{w\}, \\ \dfrac{1}{c_{pp}}, & j = w . \end{cases} \tag{19}$$

Kui $\lambda = \lambda_2$, siis

$$\bar{z}_w = x_q^- = a_{qo} - \alpha_q + \sum_{j \in M} a_{qj} z_j ,$$

millest

$$z_p = \frac{\alpha_q - a_{qo}}{a_{qp}} + \frac{\bar{z}_w}{a_{qp}} - \sum_{\substack{j \in M \\ j \neq p}} \frac{a_{qj}}{a_{qp}} \bar{z}_j ,$$

siin tähistame

$$e_j = \begin{cases} \dfrac{\alpha_q - a_{qo}}{a_{qp}}, & j = 0 , \\ -\dfrac{a_{qj}}{a_{qp}}, & j \in \overline{M} \setminus \{w\} , \\ \dfrac{1}{a_{qp}}, & j = w . \end{cases}$$

Kui $\lambda = \lambda_3$, siis seosest

$$\bar{z}_w = x_q^+ = \beta_q - a_{qo} - \sum_{j \in M} a_{qj} z_j$$

saame, et

$$z_p = \frac{\beta_q - a_{qo}}{a_{qp}} - \frac{\bar{z}_w}{a_{qp}} - \sum_{\substack{j \in M \\ j \neq p}} \frac{a_{qj}}{a_{qp}} \bar{z}_j$$

ja tähistame

$$e_j = \begin{cases} \dfrac{\beta_q - a_{qo}}{a_{qp}}, & j = 0 \\ -\dfrac{a_{qj}}{a_{qp}}, & j \in \overline{M} \setminus \{w\} , \\ -\dfrac{1}{a_{qp}}, & j = w . \end{cases}$$

V

Seega võime kasutusele võetud tähistuste tõttu kirjutada:

$$z_p = e_o + \sum_{j \in \overline{M}} e_j \bar{z}_j .$$

Kui nüüd sihifunktsiooni avaldises asendada muutuja z_p tema avaldisega uute baasiväliste muutujate kaudu, siis avalduvad uued sihifunktsiooni kordajad vanade kaudu järgmiselt (vt. [1]):

$$\begin{aligned}
\overline{c_{ij}} &= c_{ij} + c_{ip}e_j + c_{pj}e_i + c_{pp}e_je_i \ , \\
&\qquad\qquad i,j \in \{0\} \cup \overline{M} \setminus \{w\} \ , \\
\overline{c_{iw}} &= c_{ip}e_p + c_{pp}e_pe_i \ , \quad i \in \{0\} \cup \overline{M} \setminus \{w\}, \\
\overline{c_{wj}} &= c_{pj}e_p + c_{pp}e_pe_j \ , \quad j \in \{0\} \cup \overline{M} \setminus \{w\}, \\
\overline{c_{ww}} &= c_{pp}e_p^{\,2} \ .
\end{aligned} \tag{20}$$

Tõestame järgnevas kaks lemmat.

Lemma 1. Kui $\lambda = \lambda_1$, siis $i \neq w$, $j \neq w$ korral $\overline{c_{iw}} = \overline{c_{wj}} = 0$.

Tõestus. Valemite (20),(19) ja seose $c_{ij} = c_{ji}$ tõttu

$$\overline{c_{iw}} = c_{ip}e_p + c_{pp}e_pe_i = c_{ip}\frac{1}{c_{pp}} + c_{pp}\frac{1}{c_{pp}}\frac{-c_{pi}}{c_{pp}} = 0.$$

Samade valemite põhjal ka

$$\overline{c_{wj}} = c_{pj}e_p + c_{pp}e_pe_j = c_{pj}\frac{1}{c_{pp}} + c_{pp}\frac{1}{c_{pp}}\frac{-c_{pj}}{c_{pp}} = 0.$$

Lemma on tõestatud.

Lemma 2. Kui leidub selline indeks $j \in M$, mille puhul $c_{ij} = 0$ iga $i \neq j$ korral, ja $\lambda = \lambda_1$, siis ka $\overline{c_{ij}} = 0$ iga $i \neq j$ korral.

Tõestus. Kuna $j \in M$, siis $j \neq w$ ning valemitest (19) ja (20) saame, et $i,j \in \{0\} \cup \overline{M} \setminus \{w\}$ korral

$$\overline{c_{ij}} = c_{ij} + c_{ip}e_j + c_{pj}e_i + c_{pp}e_ie_j = c_{ij} + c_{ip}\frac{-c_{pj}}{c_{pp}} + c_{pj}\frac{-c_{pi}}{c_{pp}} + c_{pp}\frac{-c_{pi}}{c_{pp}}\frac{-c_{pj}}{c_{pp}} \ .$$

Et $i = j$ korral on viimases avaldises kõikides liidetavates vähemalt üks teguritest võrdne nulliga, siis on vaadeldud juhul ka $\overline{c_{ij}} = 0$ iga $i \neq j$ korral. Kui aga $i = w$, siis on $\overline{c_{wj}}$ võrdne nulliga lemma 1 põhjal (lemma 1 tõttu on ka $\overline{c_{iw}} = 0$). Lemma on tõestatud.

Toetudes lemmadele 1 ja 2, põhjendame järgnevas ka algoritmi lõplikkuse mittekõdunud ülesande korral.

Me nimetame sihifunktsiooni kordajate maatriksit $C = (c_{ij})$ normaalkujuliseks, kui $c_{oj} = c_{jo} = 0$ iga vaba muutuja z_j korral.

Näitame, et lõpliku arvu sammudega me kas jõuame uuele baasilahendile või teiseneb maatriks C normaalkujuliseks. Olgu baasiväliste muutujate seas s vaba muutujat. Kui mõni neist rikub normaalkujulisuse tingimust, s.t. talle vastav $c_{oj} \neq 0$, siis valime selle veeru juhtveeruks ning see vaba muutuja z_j läheb baasi. (Kuna meid vabade muutujate väärtused ei huvita, siis jätame ta tegelikult edaspidise vaatluse alt välja). See aga tähendab, et baasiväliste vabade muutujate arv ei saa sellisel juhul kasvada : kui $\lambda = \lambda_1$, siis jääb nende arv endiseks, kui $\lambda = \lambda_2$ või $\lambda = \lambda_3$, siis väheneb ühe võrra. Kui $\lambda = \lambda_1$ (s.t.uus baasiväline muutuja on vaba muutuja), siis lemma 1 põhjal $\overline{c_{iw}} = \overline{c_{wj}} = 0$, kui $i \neq w$, $j \neq w$ ning lemma 2 põhjal on nad nulliga võrdsed seni, kuni mõni kitsendatud baasimuutujatest pole muutunud baasiväliseks. See aga tähendab, et ülimalt s simplekssammu järel, kui me juba enne ei ole jõudnud uuele baasilahendile, on maatriks C meil normaalkujuline. Viimasel juhul aga on sihifunktsiooni edasine vähendamine võimalik ainult mõnele baasivälisele kitsendatud muutujale positiivse väärtuse andmise teel, see aga tähendab, et me ikkagi saame uue baasilahendi. Kuna mittekkinud juhul sihifunktsiooni väärtus igal sammul rangelt monotoonselt kahaneb, siis ei saa me vana baasilahendi juurde tagasi pöörduda. Baasilahendite arvu lõplikkuse tõttu jõuame optimaalsele lahendile lõpliku arvu sammudega.

Kõdunud juhul on lõplikkuse tõestamine komplitseeritum ning toimub analoogiliselt simpleksmeetodiga (vt. näiteks [2]).

Kokkuvõttes on algoritm seega järgmine (vrd. [1]):

1. Kontrollime, kas leidub vaba muutujat z_j, mille korral $c_{oj} \neq 0$. Kui leidub ning vastav $c_{oj} < 0$, siis asume punkti 2, kui aga vastav $c_{oj} > 0$, siis punkti 3 täitmisele. Kui kõigi vabade muutujate korral $c_{oj} = 0$, siis valime juhtveeruks sellise veeru, kus kitsendatud muutujale vastav $c_{oj} < 0$. Kui ka iga kitsendatud muutuja korral on optimaalsuse tingimus täidetud, s.t. kõik vastavad kordajad on mittenegatiivsed, siis on optimaalne lahend leitud. Vastasel korral läheme punkti 2 juurde.

2. Leiame λ_1, λ_2 ja λ_3 vastavalt valemitele (5), (6) ja (7). Valime $\lambda = \min\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$. Edasi viime läbi simpleksteisenduse punkti 4 kohaselt.

3. Leiame suurused λ_1, λ_2 ja λ_3 vastavalt valemitele (16), (17) ja (18) ja suuruse $\lambda = \min\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$, edasi läheme punkti 4 juurde.

4. Viime läbi veergude simpleksteisenduse $\lambda = \lambda_1$ korral valemite (8), $\lambda = \lambda_2$ korral valemite (14) ning $\lambda = \lambda_3$ korral valemite (15) kohaselt. Nüüd asume punkti 5 täitmisele.

5. Valemite (20) kohaselt viime läbi ka tabeli sihifunktsiooni osa teisenduse. Seejärel pöördume jälle tagasi punkti 1.

Vaatame nüüd järgmist arvulist näidet: minimiseerida

$$Q(X) = x_1^2 - 8x_1 + x_2^2 - 5x_2$$

kitsendustel

$$0 \leq x_1 \leq 4 \quad ,$$

$$0 \leq x_2 \leq 2 \quad ,$$

$$0 \leq x_3 = x_1 + x_2 \leq 5 \quad ,$$

$$0 \leq x_4 = 3x_1 + 8x_2 \leq 24 \ .$$

Kirjutame välja ülesande simplekstabeli:

	1	$\downarrow x_1$	x_2
1	0	-4	-2,5
$\rightarrow x_1$	-4	1	0
x_2	-2,5	0	1
x_1	0	1	0
x_2	0	0	1
x_3	0	1	1
x_4	0	3	8

Võtame juhtveeruks näiteks muutujale x_1 vastava veeru, märgime nüüd ja edaspidi valitud juhtveerud ning juhtread ära noolekestega. Leiame valemite (5),(6) ja (7) kohaselt suurused λ_1, λ_2 ja λ_3 : $\lambda_1 = 4$, λ_2 jääb määramata, sest valitud veerus ei leidu ühtegi negatiivset kordajat, $\lambda_3 = \min\{4,5,8\}$. Kuna $\lambda_1 = 4$ ja $\lambda_3 = 4$, siis võime juhtreaks valida nii tabeli sihifunktsiooni osa 2. rea kui ka muutujale x_1 vastava rea, kusjuures simpleksteisendus tuleb 1. juhul läbi viia valemite (8) ja teisel juhul valemite (15) kohaselt. Valime $\lambda = \lambda_1$, siis on teisendatud tabel järgmisel kujul:

	1	u_1	$\downarrow x_2$
1	-16	0	-2,5
u_1	0	1	0
x_2	-2,5	0	1
x_1	4	1	0
x_2	0	0	1
$\rightarrow x_3$	4	1	1
x_4	12	3	8

Juhtveerg on uues tabelis üheselt määratud, juhtrea määramiseks leiame $\lambda_1 = 2,5$, $\lambda_3 = \min\{2;1;1,5\} = 1$. Järelikult tuleb juhtreaks valida x_3-le vastav rida ja teisendus viia läbi valemite (15) kohaselt. Uus tabel on järgmine:

	1	$\downarrow u_1$	x_3^+
1	-20	1,5	1,5
$\rightarrow u_1$	1,5	2	1
x_3^+	1,5	1	1
x_1	4	1	0
x_2	1	-1	-1
x_3	5	0	-1
x_4	20	-5	-8

Kuna nüüd vabale muutujale u_1 vastav kordaja on positiivne, ei ole tabel veel optimaalne. Seekord leiame suurused λ_1, λ_2 ja λ_3 vastavalt valemitest (16),(17) ja (18), kust saame, et $\lambda_1 = \frac{3}{4}$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = \frac{4}{5}$ ja järelikult $\lambda = \lambda_1$ ning teisendus tuleb läbi viia valemite (8) kohaselt. Uus tabel on optimaalne :

	1	u_2	x_3^+
1	$-21\frac{1}{8}$	0	$\frac{3}{4}$
u_2	0	$\frac{1}{2}$	0
x_3^+	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{2}$
x_1	$3\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
x_2	$1\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
x_3	5	0	-1
x_4	$23\frac{3}{4}$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{11}{2}$

Optimaalne sihifunktsiooni väärtus $Q^* = -21\frac{1}{8}$ ning optimaalses punktis on $x_1 = 3\frac{1}{4}$, $x_2 = 1\frac{3}{4}$, $x_3 = 5$ ja $x_4 = 23\frac{3}{4}$.

§2. OSALISELT TÄISARVULISE RUUTPLANEERIMISE ÜLESANDE LAHENDAMINE

Vaatleme järgmist kahepoolsete kitsendustega osaliselt täisarvulise ruutplaneerimise ülesannet: minimiseerida mittenegatiivselt määratud ruutfunktsionaal

$$Q(X) = c_{oo} + \sum_{j\in M} c_{oj}x_j + \sum_{i\in M}(c_{io} + \sum_{j\in M} c_{ij}x_j)x_i \quad (1)$$

kitsendustel

$$\alpha_i \leq x_i = a_{io} + \sum_{j\in M} a_{ij}x_j \leq \beta_i \ , \ i\in B\cup M \ , \quad (2)$$

$$x_j \text{ on täisarv, kui } j\in T\subset\{1,2,\ldots,n\} \ , \quad (3)$$

kus B on baasiindeksite hulk, M on baasiväliste indeksite hulk ja $B\cup M = \{1,2,\ldots,n\}$. Eeldame, et

$j \in M$ korral on $\alpha_j = 0$ ning $j \in T$ korral on α_j ja β_j täisarvud.

Olgu meil §-s 1 kirjeldatud meetodil leitud ülesande (1)-(2) mittetäisarvuline optimaalne lahend X* ja sisaldagu see baasiväliste muutujate seas q vaba muutujat. Siis ülesande (1)-(2) optimaalne lahend asub q hüpertasandi $u_j = \frac{\partial Q}{\partial x_j} = 0$ ning kitsendustega (2) määratud mingite hüpertasandite lõikepunktis. Tähistame kitsendustega (2) määratud lubatavate lahendite piirkonna tähega R ning piirkonna R lõikamisel hüpertasanditega $u_j = \frac{\partial Q}{\partial x_j} = 0$ moodustuvad 2^q osahulka sümbolitega $R_1, R_2, \ldots R_{2^q}$. Piirkondade R_i määramiseks tuleb läbi vaadata kõik vabade muutujate u_j $(j=1,2,\ldots q)$ märgikombinatsioonid. Võtame ülesande (1)-(2) optimaalsele lahendile X* vastavas baasiväliste indeksite hulgas M* kasutusele järgmised tähistused : olgu kitsendatud muutujate x_j indeksite hulk K*, nende vabade muutujate indeksite hulk, mis antud osapiirkonnas R_i on mittenegatiivsed $(u_j \geq 0)$, olgu P_i ning nende muutujate hulk, mis piirkonnas R_i on mittepositiivsed $(u_j \leq 0)$, olgu N_i . Siis igas osapiirkonnas R_i kehtivad seosed $M^* = K^* \cup P_i \cup N_i$, $P_i \cap N_i = \emptyset$ ning me võime kirjutada:

$$x_k = a_{ko} + \sum_{j \in K^*} a_{kj} x_j + \sum_{j \in P_i} a_{kj} u_j + \sum_{j \in N_i} (-a_{kj})(-u_j)$$

ehk

$$x_k = a_{ko} + \sum_{j \in M^*} b_{kj} z_j \quad , \qquad (4)$$

kus

$$z_j = \begin{cases} x_j \ , & \text{kui} \quad j \in K^* \ , \\ u_j \ , & \text{kui} \quad j \in P_i \ , \\ -u_j \ , & \text{kui} \quad j \in N_i \end{cases}$$

ja

$$b_{kj} = \begin{cases} a_{kj} \ , & \text{kui} \quad j \in K^* \cup P_i \ , \\ -a_{kj} \ , & \text{kui} \quad j \in N_i \ . \end{cases}$$

Ülesande (1)-(3) optimaalne lahend võib asuda igas piirkondadest R_i ning selle optimaalse lahendi leidmiseks leiame osapiirkondade R_i optimaalsed lahendid. Kehtivad järgmised teoreemid :

Teoreem 1. (Vt.[3]). Olgu X^* kumera funktsiooni $F(X)$ maksimumpunkt kumeral hulgal R , siis on X^* ka järgmise ülesande lahendiks:

$$\max \{ g(X^*)^T \cdot X \mid X \in R \} \ ,$$

kus $g(X)$ on funktsiooni $F(X)$ gradient.

Teoreem 2. (Vt.[4]). Olgu X^* funktsionaali $Q(X)$ miinimumpunkt piirkonnas R . Siis on X^* ka järgmise ülesande lahendiks:

$$\max \left\{ L(X) = -\frac{\partial Q(X^*)}{\partial X} \cdot X \mid X \in R_i \right\} , \qquad (5)$$

kus $\frac{\partial Q(X)}{\partial X}$ tähendab funktsionaali $Q(X)$ gradienti.

Tõestus. Osapiirkonna R_i definitsioonist järeldub, et X^* on lahendiks ka järgmisele ülesandele:

$$\min \{ Q(X) \mid X \in R_i \} \qquad (6)$$

ehk

$$\max \{ -Q(X) \mid X \in R_i \} \ .$$

Siis aga on teoreemi 1 põhjal X^* ka ülesande (5) lahend. Teoreem on tõestatud.

Teoreemi 2 rakendamiseks on meil vaja teada lineaarvormi $L(X)$ kordajaid. Et

$$L(X) = - \frac{\partial Q(X^*)}{\partial X} \cdot X = - \sum_{j=1}^{n} \frac{Q(X^*)x_j}{x_j} = - \sum_{j \in M^*} 2c_{oj}x_j \quad ,$$

siis võime lineaarse ülesande (5) sihifunktsioonina vaadelda optimaalse tabeli esimest rida. Kui tähistada lineaarse ülesande sihifunktsiooni kordajaid sümbolitega a_{oj}, siis $a_{oj} = -2c_{oj}$, $j \in M^*$ ja

$$\acute{L}(X) = \sum_{j \in M^*} a_{oj}x_j \tag{7}$$

Siin tuleb aga meeles pidada, et a_{oj} ja c_{oj} teisenevad erinevalt.

Olgu V n-mõõtmeliste vektorite hulk, mille komponendid x_j, $j \in T$, on täisarvulised ning olgu $R_i \cap V \neq \phi$. Olgu ülesande (1)-(2) optimaalses lahendis muutuja x_k, $k \in T$ korral $\{a_{ko}\} \neq 0$. Muudame lisakitsenduste lisamisega piirkonda R_i nii, et ülesande (6) ja järelikult ka ülesande (5) lahend $\hat{X}^* \in V$. Need lisakitsendused peavad rahuldama järgmisi nõudeid:

1) ei tohi ära lõigata ühtegi lubatavat lahendit,
2) peavad ära lõikama ülesande (1)-(2) sobimatu lahendi $X^* \notin V$.

Nõutavate omadustega on Gomory II meetodi lõikekitsendus (vt.[5]), mis koos Beale´i meetodiga kasutamiseks on sobiv võtta järgmisel kujul :

$$s = - \{a_{ko}\} + \sum_{j \in M} d_{kj}z_j \quad , \tag{8}$$

kus

$$d_{kj} = \begin{cases} \{-b_{kj}\}, & j \in T, \ \{-b_{kj}\} \leq \{a_{ko}\}, \\ \dfrac{\{a_{ko}\}}{1 - \{a_{ko}\}} \{b_{kj}\}, & j \in T, \ \{-b_{kj}\} > \{a_{ko}\}, \\ -b_{kj}, & j \notin T, \ b_{kj} \leq 0, \\ \dfrac{\{a_{ko}\}}{1 - \{a_{ko}\}} b_{kj}, & j \notin T, \ b_{kj} > 0 . \end{cases}$$

Lisame lõikekitsenduse (8) ülesandele (5). See on lineaarse planeerimise ülesanne sihifunktsiooniga (7), mis on duaalselt lubataval kujul. Lisatav kitsendus (8) muudab aga tabeli mittelubatavaks, seepärast on ilmselt otstarbekas kasutada simpleksmeetodit kahepoolsete kitsenduste juhul. Esimesel sammul on ainsaks rikutud kitsenduseks lisatud lõikekitsendus ning sellega on juhtrea valik määratud. Üldiselt ei pruugi tabel ühe sammuga lubatavaks teiseneda, seepärast vaatleme kahepoolsete kitsendustega duaalset simpleksmeetodit üldkujul. Samal põhjusel tuleb üldiselt tabelile lisada ka lineaarse ülesande (5) sihifunktsioon (7).

Olgu muutuja x_k korral tabeli lubatavus rikutud. Kasutame järgmisi tähistusi:

$$g_{ko} = \begin{cases} \beta_k - a_{ko}, & \text{kui } a_{ko} > \beta_k, \\ a_{ko} - \alpha_k, & \text{kui } a_{ko} < \alpha_k \end{cases}$$

ja

$$g_{kj} = \begin{cases} -b_{kj}, & \text{kui } a_{ko} > \beta_k, \\ b_{kj}, & \text{kui } a_{ko} < \alpha_k . \end{cases}$$

Lõikekitsenduse (8) korral on $\alpha = 0$ ja $\beta = \infty$. Juhtreana vaatleme rida $x_k' = g_{ko} + \sum_{j \in M} g_{kj} z_j$ (tegelikult

$x_k' = x_k - \alpha_k$ või $x_k' = \beta_k - x_k$). Juhtveeru valiku reegli tuletamisel arvestame lineaarse planeerimise ülesande (5) duaalse lubatavuse säilimise nõuet. Olgu juhtveeruks veerg indeksiga l , siis nõudest

$$\bar{a}_{oj} = a_{oj} - \frac{a_{ol}}{g_{kl}} g_{kj} \leq 0$$

saame juhtveeru valiku reegliks :

$$\frac{-a_{ol}}{g_{kl}} = \min_{g_{kj}>0} \frac{-a_{oj}}{g_{kj}} \tag{9}$$

Esimesel sammul on see samaväärne tingimusega

$$\frac{c_{ol}}{g_{kl}} = \min_{g_{kj}>0} \frac{c_{oj}}{g_{kj}} .$$

Tähistame kitsenduste maatriksi veeruvektorid sümbolitega A_j , siis on simpleksteisenduse valemid järgmised:

$$\begin{aligned} \bar{A}_j &= A_j - \frac{g_{kj}}{g_{kl}} A_l \ , \quad j \ \{0\} \cup M \setminus \{l\} \\ \bar{A}_k &= \frac{1}{g_{kl}} A_l \ . \end{aligned} \tag{10}$$

Leiame kirjeldatud viisil osaliselt täisarvulise lineaarse ülesande lahendi piirkonnas R_i . Kui selle lahendi $\hat{X}^*$ korral kõik kordajad c_{oj} , $j \in \hat{M}$, on mittenegatiivsed, siis on $\hat{X}^*$ ka ruutplaneerimise ülesande (6) lahend. Kui leidub $c_{oj} < 0$, siis teisendame §-s 1 kirjeldatud meetodi abil tabeli uuesti optimaalsele kujule. Sealjuures on võimalik, et tuleb juurde vabu muutujaid ja osapiirkondade R_i arv kasvab.

Nii tuleks läbi uurida kõik osapiirkonnad R_i ($i = 1,2,\ldots,p$). Olgu meil leitud mingi piirkonna R_t

optimaalne lahend X^* ning vastav sihifunktsiooni väärtus Q_t. Kui mõne teise piirkonna R_s uurimisel on mingis lubatavas punktis, mis ei rahulda osalise täisarvulisuse nõuet, optimaalsel kujul oleva ruut-sihifunktsiooni korral $Q_s \geq Q_t$, siis võib ilmselt selles piirkonnas R_s lahendamise katkestada, sest sellisel juhul saab sihifunktsiooni väärtus lõike-kitsenduste edasisel lisamisel ainult kasvada ning me ei saa piirkonnas R_s paremat lahendit, kui see oli piirkonnas R_t. Kui aga leidub $c_{0j} < 0$ ning vastav $x_j < \beta_j$, siis seda üldiselt väita ei saa, sest nüüd on võimalik sihifunktsiooni väärtust veel ka vähendada.

Olgu nii läbi vaadatud kõik piirkonnad R_i, siis otsitava osaliselt täisarvulise ülesande optimaalse sihifunktsiooni väärtuse Q^* leiame vähimana piirkondade R_i optimaalsete sihifunktsiooni väärtuste Q_i seast:

$$Q^* = \min \{Q_1, \ldots, Q_p\} .$$

Väärtusele Q^* vastav lahend X^* ongi osaliselt täisarvulise ruutplaneerimise ülesande (1)-(3) optimaalseks lahendiks.

Gomory II ja Beale'i meetodite lõplikkuse ning osapiirkondade R_i lõpliku arvu tõttu on kirjeldatud meetod ülesande (1)-(3) lahendamiseks samuti lõplik.

Vaatleme nüüd ülesande (1)-(3) erijuhtu, kus $T = \{1,2,\ldots n\}$, s.o. täielikult täisarvulist ülesannet. Ka seda ülesannet saab lahendada Gomory II meetodi lõikekitsendust kasutades, kuid võib kasutada ka Gomory I algoritmi lõikekitsendust (vt. [5]), mis on lihtsam:

$$s = -\{a_{ko}\} + \sum_{j\in M} \{-b_{kj}\} z_j \quad .$$

Selleks, et seda teha, tuleb vabad muutujad u_j juba ülesande (1)-(2) lahendamisel defineerida nii, et nad oleksid täisarvulised, s.o.

$$u_j = C\ (\ c_{ko} + \sum_{j\in M} c_{kj} x_j\ )\quad ,$$

kus C on kordajate c_{kj} ja c_{ko} nimetajate vähim ühiskordne. L.G.Sedöhhi artiklis (vt. [4]) on nimetatud asjaolu arvestamata jäetud.

Edasi toimime siin täielikus kooskõlas osaliselt täisarvulise ülesandega.

Vaatame näitena järgmist osaliselt täisarvulist ülesannet: minimiseerida ruutfunktsionaal

$$Q(X) = -\ 6x_1 + 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2$$

kitsendustel

$$0 \le x_1 \quad ,$$

$$0 \le x_2 \le 1 \quad ,$$

$$0 \le x_3 = x_1 + x_2 \le 2 \quad ,$$

x_2 on täisarv .

Ülesande mittetäisarvuline optimaalne tabel on järgmine :

	1	$\downarrow u$	x_3
1	$\frac{-11}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
u	0	$\frac{3}{2}$	0
x_3	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
x_1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$
x_2	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{2}$
x_3	0	0	1
s_1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Vaatleme esiteks piirkonda , kus $u \geq 0$. Kuna $u \notin T$, $x_3 \notin T$, $b_{ij} = a_{ij}$, siis on kitsendus (8) järgmine:

$$s = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}x_3 \geq 0 \quad ,$$

lisame kitsenduse tabelile. Juhtveeru valiku reegli (9) põhjal tuleb juhtveeruks valida muutujale u vastav veerg. Valemite (10) kohaselt teisendatud tabel on järgmine:

	1	s_1	$\downarrow x_3$
1	-4	3	-1
s_1	3	6	-3
$\rightarrow x_3$	-1	-3	2
x_1	2	1	-1
x_2	0	-1	0
x_3	0	0	1

Uues tabelis ei ole ruutsihifunktsioon enam optimaalsel kujul. Leiame §1 valemite (5),(6) ja (7) põhjal $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 2$ ning pärast simpleksteisendust valemite (8) järgi §1 -st, saame järgmise tabeli:

$$\begin{array}{c|ccc|}
 & 1 & s_1 & u_1 \\
\hline
1 & -4\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\
s_1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\
u_1 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
x_1 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\
x_2 & 0 & -1 & 0 \\
x_3 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\
\hline
\end{array}$$

Piirkonnas $u \geq 0$ on see tabel optimaalne, $Q_1^* = -4\frac{1}{2}$. Uurime nüüd piirkonda $u \leq 0$, siin $b_{i1} = -a_{i1}$, $b_{i2} = a_{i2}$. Kitsenduseks saame:

$$s_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}x_3 \mp s_1 \geq 0 ,$$

mis tuleb ka lisada mittetäisarvulise ülesande optimaalsele tabelile. Teisendusvalemite (10) kohaselt teisendatud uus tabel on jällegi mitteoptimaalsel kujul:

$$\begin{array}{c|ccc|}
 & 1 & s_2 & \downarrow x_3 \\
\hline
1 & -4 & 3 & -1 \\
s_2 & 3 & 6 & -3 \\
\rightarrow x_3 & -1 & -3 & 2 \\
\hline
x_1 & 1 & -1 & 0 \\
x_2 & 1 & 1 & -1 \\
x_3 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
\end{array}$$

Teisendame tabeli §-s 1 kirjeldatud viisil optimaalsele kujule, leiame $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$. Järelikult tuleb siin võtta juhtelemendiks c_{22}, uus tabel on järgmine :

	1	s_2	u_2
1	$-4\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0
s_2	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	0
u_2	0	0	$\frac{1}{2}$
x_1	1	-1	0
x_2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
x_3	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$

Uues tabelis $x_2 = \frac{1}{2}$ ei ole täisarv ning nüüd tuleks tabelile lisada uus lõikekitsendus. Paneme aga tähele, et sihifunktsiooni väärtus antud baasilahendi korral on võrdne ülesande osapiirkonnas $u \geq 0$ leitud optimaalse väärtusega $Q_1^* = -4\frac{1}{2}$. Kuna sihifunktsiooni väärtus pärast uue lõikekitsenduse lisamist kasvab, siis võime ülesande edasisest lahendamisest osapiirkonnas $u \leq 0$ loobuda, sest paremat lahendit seal olla ei saa. Järelikult on optimaalseks sihifunktsiooni väärtuseks $Q^* = -4\frac{1}{2}$ ja optimaalseks punktiks $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{1}{2}$.

§3. OTSENE ALGORITM RUUTPLANEERIMISE ÜLESANDE LAHENDAMISEKS

Vaatleme järgmist täisarvulist ruutplaneerimise ülesannet: minimiseerida mittenegatiivselt määratud ruutfunktsionaal

$$Q(X) = c_{oo} + \sum_{j\in M} c_{oj}x_j + \sum_{i\in M}(c_{io} + \sum_{j\in M} c_{ij}x_j)x_i \qquad (1)$$

kitsendustel

$$x_i = a_{io} + \sum_{j\in M} a_{ij}x_j \geq 0 \quad , \quad i\in B\cup M \quad , \qquad (2)$$

$$x_j \text{ on täisarvud} \quad , \quad j\in B\cup M \quad , \qquad (3)$$

kus M tähistab baasiväliste indeksite, B baasiindeksite hulka ja $M\cup B = \{1,2,\ldots n\}$, n aga on muutujate arv. Eeldame, et kordajad $c_{ij} = c_{ji}$ $(i,j\in M\cup\{0\})$ ja a_{ij} $(i\in M\cup B,\ j\in M\cup\{0\})$ on täisarvud ning et ülesanne on lubataval kujul, s.t. $a_{io} \geq 0$ iga $i\in B$ korral.

Me nimetame ruutplaneerimise ülesande (1)-(3) tabelit (vt. tabel 1, §1) duaalselt lubatavaks, kui $c_{io} \geq 0$ iga $i\in M$ korral. Kui leidub $c_{ol}<0$, siis muutujale x_l positiivse väärtuse andmisel sihifunktsiooni väärtus kahaneb. Kuid erinevalt lineaarse planeerimise ülesandest on ruutplaneerimise ülesandes olemas ka selline võimalus, kus sihifunktsioon antud suunas algul kahaneb, hiljem aga hakkab jälle kasvama.

Kuna

$$\frac{\partial Q}{\partial x_l} = 2(c_{lo} + \sum_{j\in M} c_{lj}x_j) \quad , \tag{4}$$

siis $c_{ll} \neq 0$ korral on selles iseärases kohas muutuja x_l väärtus $x_l{}^\circ = \frac{-c_{lo}}{c_{ll}}$. Tähistame selle väärtuse sümboliga λ_1 :

$$\lambda_1 = \frac{-c_{lo}}{c_{ll}} \quad . \tag{5}$$

Kui $c_{ll} = 0$, siis seosest (4) näeme, et $\frac{\partial Q}{\partial x_l}$ ei saa nulliga võrdseks saadagi.

Uurime nüüd tabeli lubatavuse säilitamist muutujale x_l positiivse väärtuse $x_l{}^1$ andmisel. Seosest (2) näeme, et kui $a_{il} \geq 0$, siis muutuja x_i jääb ka $x_l{}^1 > 0$ korral mittenegatiivseks. Kui aga $a_{il} < 0$, siis peab kehtima võrratus $x_l{}^1 \leq \frac{a_{io}}{-a_{il}}$. Järelikult on muutuja x_l täisarvulisuse tõttu tabeli lubatavuse säilimiseks nõutav, et

$$x_l{}^1 \leq \min_{a_{il}<0} \left[\frac{a_{io}}{-a_{il}}\right] = \left[\frac{a_{ko}}{-a_{kl}}\right] \quad .$$

Tähistame selle muutuja x_l väärtuse sümboliga λ_2:

$$\lambda_2 = \left[\frac{a_{ko}}{-a_{kl}}\right] = \min_{a_{il}<0}\left[\frac{a_{io}}{-a_{il}}\right] \quad . \tag{6}$$

Leiame nüüd Gomory kitsenduse kuju ülesandele (1)-(3), selleks vaatleme seost (2) järgmisel kujul:

$$x_k = a_{ko} - \sum_{j\in M}(-a_{kj})x_j$$

Pärast selle võrduse jagamist suurusega $\mu > 0$ ning murd- ja täisosade eraldamist saame:

$$\frac{x_k}{\mu} + \sum_{j\in M}\left\{\frac{-a_{kj}}{\mu}\right\}x_j - \left\{\frac{a_{ko}}{\mu}\right\} = \left[\frac{a_{ko}}{\mu}\right] - \sum_{j\in M}\left[\frac{-a_{kj}}{\mu}\right] x_j$$

Kuna viimase võrduse parem pool on iga lubatava lahendi korral täisarv, siis on seda ka vasak pool. Vasaku poole kahe esimese liikme mittenegatiivsuse ning võrratuse $-\left\{\frac{a_{ko}}{\mu}\right\}>-1$ tõttu on siis võrduse vasak pool, järelikult aga ka parem pool lubatavate lahendite korral mittenegatiivne täisarv ning me võime kirjutada :

$$s = \left[\frac{a_{ko}}{\mu}\right] - \sum_{j\in M}\left[\frac{-a_{kj}}{\mu}\right] x_j \geq 0 \ . \qquad (7)$$

Vastavalt konstruktsioonile ei lõika kitsendus (7) ära ühtegi lubatavat lahendit.

Leidugu $c_{ol} < 0$ ja olgu meil valemist (6) määratud k-nda rea järgi moodustatud kitsendus (7). Selleks, et nõnda moodustatud kitsenduse juhtelement oleks -1, valime $\mu = -a_{kl}$:

$$s = \left[\frac{a_{ko}}{-a_{kl}}\right] - \sum_{j\in M}\left[\frac{-a_{kj}}{-a_{kl}}\right] x_j \geq 0$$

ehk s.o. sama,mis

$$s = \left[\frac{a_{ko}}{-a_{kl}}\right] - \sum_{j\in M}\left[\frac{a_{kj}}{a_{kl}}\right] x_j \geq 0 \ . \qquad (8)$$

Teeme kitsenduse järgi simplekssammu. Kuna juhtelement on -1 , siis tabeli täisarvulisus teisendusel säilib. Pärast seda teisendust on sihifunktsiooni väärtus $\overline{c_{oo}}$ järgmine (vt. [1]) :

$$\overline{c_{oo}} = c_{oo} + 2\left[\frac{a_{ko}}{-a_{kl}}\right]c_{ol} + \left[\frac{a_{ko}}{-a_{kl}}\right]^2 c_{ll} \ .$$

Siit näeme, et kui $\left[\frac{a_{ko}}{-a_{kl}}\right] = 0$, siis $\overline{c_{oo}} = c_{oo}$, kui aga $\left[\frac{a_{ko}}{-a_{kl}}\right] > 0$, siis saame sihifunktsiooni väärtuse vähenemiseks järgmise tingimuse :

$$2\, c_{ol} + \left[\frac{a_{ko}}{-a_{kl}}\right] c_{ll} < 0 \qquad (9)$$

Kui siin $c_{ll} = 0$, siis on $c_{ol} < 0$ töttu tingimus (9) täidetud. Kui aga $c_{ll} > 0$, siis on tingimus (9) samaväärne tingimusega

$$\left[\frac{a_{ko}}{-a_{kl}}\right] < 2\, \frac{-c_{ol}}{c_{ll}} \quad ,$$

mis on tähistuste (5) ja (6) töttu samaväärne nöudega $\lambda_2 < 2\lambda_1$.

Seega vöime öelda, et sihifunktsiooni väärtus vaadeldud simplekssammul väheneb parajasti siis, kui $0 < \lambda_2 < 2\lambda_1$. Kui $\lambda_2 = 0$, siis sihifunktsiooni väärtus ei muutu. Vastavalt lähterea valikule on ka teisenenud tabel lubatav.

Vaatleme nüüd juhtu, kus $\lambda_2 \geq 2\lambda_1$, s.t.

$$\left[\frac{a_{ko}}{-a_{kl}}\right] \geq 2\, \frac{-c_{lo}}{c_{ll}} \quad .$$

Siin lisame kitsenduste tabelile nn. vaba muutuja (vt. [1])

$$u = \frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial x_l} = c_{lo} + \sum_{j \in M} c_{lj} x_j \qquad (10)$$

ning vaatleme seda eraldi piirkondades $u \geq 0$ ja $u \leq 0$ (vt. [4]). Seega vaba muutuja sissetoomisega meie esialgne ülesanne hargneb kaheks iseseisvaks ülesandeks, baasimuutujate hulk aga kasvab ühe indeksi vörra. Sihifunktsiooni kordajate c_{ij} ja muutujate

x_j täisarvulisuse tõttu on ka vaba muutuja u täisarvuline. Märgime, et seejuures muutujale x_l vastav rida tabeli sihifunktsiooni osas ühtib u avaldisega.

Uurime nüüd piirkonda $u \geqq 0$ ja moodustame vaba muutuja u järgi kitsenduse (7), kus võtame $\mu = c_{ll} > 0$:

$$s = \left[\frac{c_{lo}}{c_{ll}}\right] - \sum_{j\in M} \left[\frac{-c_{lj}}{c_{ll}}\right] x_j \geqq 0 \qquad (11)$$

Kitsendus (11) erineb kitsendusest (8), sest siin tuleb juhtelemendiks +1, kitsenduse vabaliige $\left[\frac{c_{lo}}{c_{ll}}\right]$ on aga $c_{lo} < 0$ tõttu negatiivne. Ka kitsendus $u \geqq 0$ ei ole rahuldatud, s.t. me asume väljaspool haruülesande lubatavate lahendite piirkonda. Pärast simpleks-sammu kitsenduse (11) järgi saame vaba muutuja uueks väärtuseks:

$$\bar{u} = c_{lo} - \left[\frac{c_{lo}}{c_{ll}}\right] c_{ll} \geqq c_{lo} - \frac{c_{lo}}{c_{ll}} c_{ll} = 0 .$$

Selleks, aga, et uus tabel oleks lubatav, peab ka iga $i \in B$ korral olema

$$\overline{a_{io}} = a_{io} - \left[\frac{c_{lo}}{c_{ll}}\right] a_{il} \geqq 0 .$$

Siit näeme, et $a_{il} \geqq 0$ korral on $\overline{a_{io}} \geqq 0$. Olgu $a_{il} < 0$, siis saame järgmise tingimusega $\overline{a_{io}} \geqq 0$ samaväärsete tingimuste ahela:

$$\frac{a_{io}}{-a_{il}} \geqq - \left[\frac{c_{lo}}{c_{ll}}\right],$$

$$\left[\frac{a_{io}}{-a_{il}}\right] \geqq - \left[\frac{c_{lo}}{c_{ll}}\right],$$

$$-\left[\frac{a_{io}}{-a_{il}}\right] \leqq \left[\frac{c_{lo}}{c_{ll}}\right] \leqq \frac{c_{lo}}{c_{ll}},$$

$$\left[\frac{a_{io}}{-a_{il}}\right] \geqq \frac{-c_{lo}}{c_{ll}} \quad . \tag{12}$$

Eelduse $\lambda_2 \geqq 2\lambda_1$ tõttu on aga võrratus (12) rahuldatud ning järelikult on $\overline{a_{io}} \geqq 0$ ka $a_{il} < 0$ korral.

Uurime nüüd sihifunktsiooni väärtuse muutumist antud teisenduste korral :

$$\overline{c_{oo}} = c_{oo} - 2\left[\frac{c_{lo}}{c_{ll}}\right]c_{lo} + \left[\frac{c_{lo}}{c_{ll}}\right]^2 c_{ll} \quad .$$

Sihifunktsiooni väärtus kahaneb parajasti siis, kui

$$2\, c_{lo} - \left[\frac{c_{lo}}{c_{ll}}\right]c_{ll} < 0 \, , \tag{13}$$

sest $c_{lo} < 0$ ja $c_{ll} > 0$ tõttu $\left[\frac{c_{lo}}{c_{ll}}\right] < 0$.

Tingimus (13) on aga täidetud parajasti siis, kui $\frac{c_{lo}}{c_{ll}} < -\frac{1}{2}$ ehk tähistuse (5) tõttu siis, kui $\lambda_1 > \frac{1}{2}$.

Kui $\frac{c_{lo}}{c_{ll}} = -\frac{1}{2}$ ehk s.o. $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, siis sihifunktsiooni väärtus jääb samaks. Juhul $\frac{c_{lo}}{c_{ll}} > -\frac{1}{2}$ $(\lambda_1 < \frac{1}{2})$ aga sihifunktsiooni väärtus simplekssammul kitsenduse (11) järgi koguni kasvab.

Vaatleme nüüd ülesande teist haru, s.o. piirkonda, kus $u \leqq 0$. Teeme siin muutuja vahetuse $t = -u \geqq 0$:

$$t = -c_{lo} + \sum_{j\in M}(-c_{lj})x_j \tag{14}$$

ning moodustame t-rea järgi kitsenduse (7), kus võtame $\mu = c_{ll}$:

$$s = \left[\frac{-c_{lo}}{c_{ll}}\right] - \sum_{j\in M}\left[\frac{-(-c_{lj})}{c_{ll}}\right] x_j \geqq 0$$

ehk

$$s = \left[\frac{-c_{1o}}{c_{11}}\right] - \sum_{j\in M} \left[\frac{c_{1j}}{c_{11}}\right] x_j \geq 0 \tag{15}$$

Kitsendus (15) lubatavaid lahendeid ära ei lõika, juhtelemendiks tuleb jällegi -1. Tabel jääb pärast simplekssammu lubatavaks : nõue

$$\overline{a_{io}} = a_{io} + \left[\frac{-c_{1o}}{c_{11}}\right] a_{i1} \geq 0$$

on $a_{i1} \geq 0$ korral ilmselt täidetud. Olgu $a_{i1} < 0$, siis on nõue $\overline{a_{io}} \geq 0$ samaväärne võrratusega

$$\frac{a_{io}}{-a_{i1}} \geq \left[\frac{-c_{1o}}{c_{11}}\right],$$

mis on eelduse $\lambda_2 \geq 2\lambda_1 > 0$ tõttu kindlasti täidetud. Ka on $\overline{t} = 0$:

$$\overline{t} = - c_{1o} + \left[\frac{-c_{1o}}{c_{11}}\right] (-c_{11}) \geq - c_{1o} + \frac{c_{1o}}{c_{11}} c_{11} = 0 .$$

Uurime ka vaadeldaval juhul sihifunktsiooni väärtuse muutumist:

$$\overline{c_{oo}} = c_{oo} + 2\left[\frac{-c_{1o}}{c_{11}}\right] c_{1o} + \left[\frac{-c_{1o}}{c_{11}}\right]^2 c_{11} .$$

Sellest seosest on näha, et $\left[\frac{-c_{1o}}{c_{11}}\right] = 0$ korral on $\overline{c_{oo}} = c_{oo}$, kui aga $\left[\frac{-c_{1o}}{c_{11}}\right] > 0$, siis sihifunktsiooni väärtus kahaneb parajasti siis, kui

$$2 c_{1o} + \left[\frac{-c_{1o}}{c_{11}}\right] c_{11} < 0$$

ehk

$$\left[\frac{-c_{1o}}{c_{11}}\right] < 2 \frac{-c_{1o}}{c_{11}} .$$

Viimane võrratus on aga $c_{1o} < 0$ tõttu alati täidetud.

<u>Märkus.</u> Tegelikult ei ole kitsenduste (10) või (14) lisamine kitsendustele (2) vajalik ja baasiindeksite arv võib jääda muutumatuks, s.t. , et kitsendusi $u \geq 0$ ja $u \leq 0$ arvestame me ainult ülesande hargnemispunktis, neid tabelile lisamata. Möningatel juhtudel võib aga nimetatud kitsenduste lisamine olla siiski otstarbekas. Edaspidi eeldame, et kitsendusi (10) või (14) tabelile ei lisata , vaid piirdutakse nende järgi moodustatud s-kitsenduste lisamisega. Sellega ülesande mölema haru ühiste lubatavate lahendite hulk ei muutu. Edaspidi nimetame kitsendusest $u \geq 0$ lähtuvat ülesande haru positiivseks haruülesandeks, kitsendusest $u \leq 0$ lähtuvat ülesannet negatiivseks haruülesandeks.

Seega tuleb ülesande lahendamisel toimida järgmiselt :

1. Võtta juhtveeruks selline veerg, kus $c_{ol} < 0$.

2. Leida vastavalt valemitele (5) ja (6) suurused λ_1 ja λ_2 .

3. Kui $\lambda_2 < 2\lambda_1$, siis moodustada kitsendus (8).

4. Kui $\lambda_2 \geq 2\lambda_1$, siis tuleb edasi vaadata kahte ülesannet. Positiivses haruülesandes tuleb seose (10) järgi moodustada lõikekitsendus (11), negatiivses haruülesandes seose (14) järgi kitsendus (15).

5. Viia läbi simpleksteisendus moodustatud lisakitsenduse $s \geq 0$ järgi.

6. Lahendamisprotsessi tuleb jätkata seni, kuni kõik $c_{oj} \geq 0$.

Kõik ülesande harunemistel tekkivad haruülesanded tuleb lahendada sama skeemi järgi. Kui osutub, et ülesande lahendamisel harunemist ei toimu, siis on leitud lahend ka ülesande optimaalne lahend. Kui aga harunemisi on olnud, siis olgu ülesande erinevatel harudel leitud sihifunktsiooni optimaalsed väärtused $Q_1, Q_2, \ldots, Q_p$. Leiame $Q = \min\{Q_1, Q_2, \ldots, Q_p\}$, optimaalseks lahendiks on nii leitud sihifunktsiooni väärtusele Q vastav lahend.

Uurime nüüd ka kirjeldatud algoritmi lõplikkuse küsimust. Eeldame, et lubatavate lahendite piirkond on tõkestatud.

Tähistame mingil suvalisel sammul kitsenduste (2) maatriksi tähega A, s.o. $A = (a_{ij})$, $i \in B \cup M$, $j \in \{0\} \cup M$, kus M on baasiväliste ja B baasiindeksite hulgad vaadeldaval sammul. Maatriksi A veerge tähistame sümbolitega A_j, $j \in M$, vabaliikmete veergu märgime sümboliga A_0. Kuna lähteülesande maatriks sisaldas ühikmaatriksit, siis on vektorid A_j lineaarselt sõltumatud. Simplekssammul teisenenud kitsenduste süsteemi maatriksi ning viimase veergude jaoks kasutame vastavalt tähiseid $\bar{A}$ ja $\bar{A}_j$.

Defineerime vektorid B_j, mille esimeseks komponendiks on sihifunktsiooni lineaarliikme kordaja ning järgmised n komponenti on vektoriga A_j vastandmärgilised, s.o.

$$B_j = \begin{pmatrix} c_{0j} \\ -A_j \end{pmatrix}, \quad j \in M .$$

Sümbolite B ja $\bar{B}$ tähendus on analoogiline A ja $\bar{A}$ tähendusega, siin tuleb ainult tähele panna, et vektorite B_j esimesed komponendid teisenevad üldiselt erinevalt ülejäänud komponentidest.

Meenutame veel kord tingimusi sihifunktsiooni väärtuse kahanemiseks eespool vaadeldud kolmel juhul :

1. Kui $\lambda_2 < 2\lambda_1$, siis tarvilik ja piisav tingimus sihifunktsiooni kahanemiseks oli, et $\left[\frac{a_{ko}}{-a_{kl}}\right] \neq 0$.

2. Kui $\lambda_2 \geq 2\lambda_1$, siis positiivses haruülesandes väheneb sihifunktsiooni väärtus parajasti siis, kui $\frac{-c_{ol}}{c_{ll}} > \frac{1}{2}$.

3. Kui $\lambda_2 \geq 2\lambda_1$, siis negatiivses haruülesandes on tarvilik ja piisav tingimus sihifunktsiooni kahanemiseks, et $\left[\frac{-c_{lo}}{c_{ll}}\right] \neq 0$.

Vaatleme 1.juhtu. Kui $\left[\frac{a_{ko}}{-a_{kl}}\right] \neq 0$, siis vabaliikmete vektor A_o muutub ja me võime öelda, et vaadeldaval juhul iga muutus vabaliikmete vektoris A_o toob endaga kaasa sihifunktsiooni väärtuse vähenemise mingi täisarvu võrra. Siit järeldub, et kui sihifunktsioon on lubatavate lahendite hulgal tõkestatud (tõkestatud lubatavate lahendite piirkonna korral see on nii), siis peab muutuste arv vektoris A_o olema lõplik. Sellest ei või küll veel midagi ~~midagi~~ järeldada algoritmi lõplikkuse kohta harunemisteta ülesande korral, sest on mõeldav selline olukord, kus mingist sammust alates jääb A_o konstantseks, kuid tabelis leidub $c_{oj} < 0$.

Kui 1.juhul on sihifunktsiooni väärtuse muutumatuks jäämise põhjuseks see, et me jääme ka pärast simplekssammu samasse punkti, siis 2.juhul liigume me kindlasti uude punkti, kus aga sihifunktsiooni väärtus ei pea olema väiksem. Paneme aga tähele, et kitsenduse $s \geq 0$ tõttu me enam ülesande harunemise punkti tagasi pöörduda ei saa, sest see on vaadeldavas positiivses haruülesandes mittelubatav. Seega võime öelda, et kui lubatavate lahendite piirkond on tõkestatud, siis muutujate x_j täisarvulisuse tõttu on lubatavate punktide hulk lõplik ja järelikult ei saa vaadeldav 2.juht põhjustada ülesande lõpmatut hargnemist.

Vaatleme nüüd 3.juhtu. Siin on küll mõeldav selline olukord, kus me jääme pärast simplekssammu samasse punkti lõpmatul arvul sammudel, kusjuures igal neist sammudest leiab aset ülesande uus harunemine. Kuna aga samasse punkti jääme me parajasti siis, kui s-kitsenduse vabaliige on võrdne nulliga, siis on 1. ja 3. juht formaalselt analoogilised : mõlemal juhul võib algoritmi lõpmatust põhjustada s-kitsenduse vabaliikme võrdumine nulliga lõpmatul arvul sammudel. Ka on s-kitsendused nimetatud juhtudel analoogilised, mõlemas on juhtelemendiks -1. Seepärast vaatleme me järgnevas neid kahte juhtu koos, kasutades seejuures 1.juhu tähistusi.Kuna 2.juht ei saa olla algoritmi lõpmatuse põhjuseks, siis jätame ta edaspidise lähema vaatluse alt välja.

Simpleksteisenduse valemid on meid huvitaval juhul järgmised:

$$\overline{A}_o = A_o + \left[\frac{a_{ko}}{-a_{kl}}\right] A_l \ ,$$

$$\overline{A}_j = A_j - \left[\frac{a_{kj}}{a_{kl}}\right] A_l \ , \quad j \in M \setminus \{l\} \ , \tag{16}$$

$$\overline{A}_w = - A_l$$

Vektorite B_j esimeste komponentide üldised teisendusvalemid on järgmised :

$$\overline{c_{oj}} = c_{oj} - \left[\frac{a_{kj}}{a_{kl}}\right] c_{ol} + \left[\frac{a_{ko}}{-a_{kl}}\right] c_{lj} - \left[\frac{a_{ko}}{-a_{kl}}\right]\left[\frac{a_{kj}}{a_{kl}}\right] c_{ll} \ ,$$

$$\overline{c_{ow}} = - c_{ol} - \left[\frac{a_{ko}}{-a_{kl}}\right] c_{ll} \ . \tag{17}$$

Kui kehtib võrdus $\left[\frac{a_{ko}}{-a_{kl}}\right] = 0$, siis on vektorite B_j esimeste komponentide teisendusseosed täpselt samad mis ülejäänud komponentidelgi ning me võime kirjutada:

$$\overline{B}_j = B_j - \left[\frac{a_{kj}}{a_{kl}}\right] B_l \ , \quad j \in M \setminus \{l\} \ ,$$

$$\overline{B}_w = - B_l \ .$$

Valemitest (16) saame, et lähterea elemendid teisenevad järgmiselt:

$$\overline{a_{kj}} = a_{kj} - \left[\frac{a_{kj}}{a_{kl}}\right] a_{kl} \ , \quad j \in M \setminus \{l\} \ ,$$

$$\overline{a_{kw}} = - a_{kl} \ .$$

Viimasest võrdusest saame $a_{kl} \neq 0$ tõttu:

$$\frac{\overline{a_{kj}}}{a_{kl}} = \frac{a_{kj}}{a_{kl}} - \left[\frac{a_{kj}}{a_{kl}}\right] = \left\{\frac{a_{kj}}{a_{kl}}\right\} \ ,$$

millest

$$0 \leq \frac{\overline{a_{kj}}}{a_{kl}} < 1$$

ning $a_{kl} < 0$ töttu

$$0 \geq \overline{a_{kj}} > a_{kl} \quad . \tag{18}$$

Eespool kirjeldatud algoritmi lõplikkuse tõestamiseks tuleb juhtveeru ning s-kitsenduse lähterea valikut veidi kitsendada. Nimelt on vajalik veel teatud omadustega nn. etaloonvõrrand

$$x_r = a_{ro} + \sum_{j \in M} a_{rj} x_j \quad ,$$

mis lisatakse kitsenduste süsteemile. Etaloonvõrrand ei lõika ära ühtegi lubatavat lahendit, mõnikord sobib etaloonvõrrandiks ka mõni esialgsetest võrranditest. Edaspidi eeldame, et etaloonvõrrand on kitsenduste süsteemis juba olemas.

Defineerime nüüd järgmise vektori:

$$B_j^* = \frac{B_j}{-a_{rj}} \quad , \quad a_{rj} \neq 0 \quad , \quad j \in M \quad .$$

Seame etaloonvõrrandile järgmised nõuded :

T1 : kui $B_j \prec 0$, siis $-a_{rj} > 0$,

T2 : kui $a_{rj} > 0$, siis $B_j^* \prec B_l^*$.

Neist nõudeist on näha, et kui kitsenduste süsteemis leidub selline võrrand, kus kõik kordajad a_{rj} on negatiivsed, siis võib selle võrrandi valida etaloonvõrrandiks. Kui sellist võrrandit ei leidu, siis võib lisada näiteks sellise võrrandi, kus $a_{rj} = -1$, $j \in M$ ja a_{ro} on summa $\sum_{j \in M} x_j$ ülemine tõke.

Et juhtveerg oleks alati üheselt määratud, kitsendame juhtveeru valikut järgmiselt :

$$B_l^* = \operatorname*{lex\,min}_{a_{rj} < 0} B_j^* \quad . \tag{19}$$

Paneme tähele, et kui $B_j < 0$, siis tingimuse T1 tõttu ka $B_j^* < 0$.

Järgnevas tõestame mõned teoreemid (vrd. [6]).

Teoreem 1. Kui $\left[\frac{a_{ko}}{-a_{kl}}\right] = 0$, siis seosed

$$a_{rl} B_j < a_{rj} B_l \tag{20}$$

ja

$$a_{rl} \overline{B}_j < \overline{a_{rj}} B_l \tag{21}$$

on samaväärsed iga indeksi r korral.

Tõestus. Toetudes valemitele (16), saame järgmised võrdused:

$$\begin{aligned} &\overline{a_{rj}}(-A_l)-a_{rl}(-\overline{A}_j)=(a_{rj}-\left[\frac{a_{kj}}{a_{kl}}\right]a_{rl})(-A_l)- \\ &-a_{rl}(-A_j+\left[\frac{a_{kj}}{a_{kl}}\right]A_l)=a_{rj}(-A_l)-a_{rl}(-A_j) . \end{aligned} \tag{22}$$

Valemite (17) ning eelduse tõttu saame ka vektorite B_j esimeste komponentide jaoks järgmised võrdused:

$$\begin{aligned} &\overline{a_{rj}}\, c_{ol} - a_{rl}\, \overline{c_{oj}} = (a_{rj}-\left[\frac{a_{kj}}{a_{kl}}\right]a_{rl})c_{ol}-a_{rl}(c_{oj}- \\ &-\left[\frac{a_{kj}}{a_{kl}}\right]c_{ol}+\left[\frac{a_{ko}}{-a_{kl}}\right]c_{lj}-\left[\frac{a_{ko}}{-a_{kl}}\right]\left[\frac{a_{kj}}{a_{kl}}\right]c_{ll}=a_{rj}\, c_{ol} - a_{rl}\, c_{oj} . \end{aligned}$$

Arvestades ka seoseid (22) võime kirjutada:

$$\overline{a_{rj}}\, B_l - a_{rl}\, \overline{B}_j = a_{rj}\, B_l - a_{rl}\, B_j .$$

Sellest võrdusest järeldubki teoreemi väide.

Teoreem 2. Kui on täidetud tingimus T1 ja valemist (19) määratud indeksi l korral on $c_{ol} \geq 0$, siis on tabel duaalselt lubatav.

Tõestus. Valemist (19) nähtub, et $a_{rj} < 0$ korral on $c_{ol}^* \leq c_{oj}^*$. Kuna $c_{ol}^* = \frac{c_{ol}}{-a_{rl}}$, siis on $a_{rl} < 0$ tõttu $c_{ol}^* \geq 0$

ja järelikult ka $c^*_{oj} = \frac{c_{oj}}{-a_{rj}} \geqq 0$. Et aga $c_{oj}=c^*_{oj}(-a_{rj})$, siis $a_{rj}<0$ töttu ongi $c_{oj} \geqq 0$. (Kui siin oletada, et leidub $a_{rp}>0$, siis vastav $c_{op} \geqq 0$, sest eelduse kohaselt on tingimus T1 täidetud.) Teoreem on töestatud.

Teoreem 3. Kui maatriksi B korral on täidetud tingimused T1 ja T2 ning lisakitsenduses $\left[\frac{a_{ko}}{-a_{kl}}\right] = 0$, siis kehtib seos (20) ning tingimused T1 ja T2 on täidetud ka maatriksi $\overline{B}$ korral. Peale selle $\overline{B}^*_j \succ B^*_l$ iga $j \in M$ korral, kus $\overline{a_{rj}} < 0$. Eriti on siis $\overline{B}^*_{\overline{l}} \succ B^*_l$, kus $\overline{l}$ määratakse maatriksis $\overline{B}$ seose (19) kohaselt.

Töestus. 1. Olgu $a_{rj} < 0$ ($a_{rl} < 0$ kindlasti), siis juhtveeru valiku reegli (19) põhjal on $B^*_l \prec B^*_j$, s.t.

$$\frac{B_l}{-a_{rl}} \prec \frac{B_j}{-a_{rj}} .$$

Korrutades seda võrratust suurusega $-(a_{rl} \cdot a_{rj})$, veendumegi seose (20) kehtivuses.

2. Olgu nüüd $a_{rj} > 0$. Tingimuse T2 töttu on $B^*_j \prec B^*_l$:

$$\frac{B_j}{-a_{rj}} \prec \frac{B_l}{-a_{rl}}$$

Siit järeldubki pärast korrutamist suurusega $-(a_{rj}\, a_{rl})$ seose (20) kehtivus.

3. Kui $a_{rj} = 0$, siis tingimuse T1 töttu on $B_j \succ 0$ ning ka siin kehtib seos (20):

$$a_{rj}\, B_l = 0 \succ a_{rl}\, B_j .$$

Teoreemi 1 kohaselt on seos (20) samaväärne seosega (21):

$$\overline{a_{rj}}\, B_l \succ a_{rl}\, \overline{B}_j \quad .$$

Siit järeldub vahetult teoreemi esimene väide: kui $\overline{B}_j \prec 0$, siis $\overline{a_{rj}}$ peab olema negatiivne, mis ongi tingimus T1 maatriksi $\overline{B}$ korral.

Jagame nüüd seose (21) suurusega $\overline{a_{rj}}\, a_{rl}$, kui $\overline{a_{rj}} \succ 0$, siis

$$\frac{\overline{B}_j}{\overline{a_{rj}}} \succ \frac{B_l}{a_{rl}}$$

ja järelikult

$$\overline{B}^*_j \prec B^*_l \quad . \qquad (23)$$

Kui $\overline{a_{rj}} < 0$, siis seosest (21) saame, et

$$\frac{\overline{B}_j}{\overline{a_{rj}}} \prec \frac{B_l}{a_{rl}}$$

ning s.t., et

$$\overline{B}^*_j \succ B^*_l \quad . \qquad (24)$$

Kuna $j = \overline{l}$ korral on $\overline{a_{r\overline{l}}} < 0$, siis võime seose (24) põhjal kirjutada $\overline{B}^*_{\overline{l}} \succ B^*_l$. Seose (23) tõttu saame $j \neq l$, $\overline{a_{rj}} > 0$ korral, et $\overline{B}^*_j \prec B^*_l$ ning viimaste seoste kokkuvõttena kehtib $\overline{B}^*_j \prec \overline{B}^*_{\overline{l}}$. Kui aga $j = l$, siis $\overline{B}^*_w = B^*_l$, sest valemite (16) põhjal $\overline{B}_w = - B_l$ ja $\overline{a_{rw}} = - a_{rl} > 0$ ning ikkagi $\overline{B}^*_{\overline{l}} \succ B^*_l = \overline{B}^*_w$. Sellega ongi tingimuse T2 kehtivus maatriksis $\overline{B}$ ning kogu teoreem tõestatud.

<u>Teoreem 4 .</u> Kui maatriksid B ja $\overline{B}$ rahuldavad tingimusi T1 ja T2 , $c_{ol} < 0$, $\left[\frac{a_{ko}}{-a_{kl}}\right] = 0$ ja $\overline{a_{r\overline{l}}} > a_{rl}$, siis kehtib võrratus $\overline{c_{o\overline{l}}} > c_{ol}$.

Tõestus. Teoreemi 3 põhjal on rahuldatud seos

(20) ning siis teoreemi 1 põhjal ka seos (21), võtame viimati nimetatud seoses $j = \bar{1}$ ning vaatleme vektorite B_j esimesi komponente. Nende vahel kehtib seos:

$$a_{rl}\,\overline{c_{o\bar{l}}} \leq \overline{a_{r\bar{l}}}\,c_{ol} .$$

Kuna $c_{ol} < 0$, ja $a_{rl} < \overline{a_{r\bar{l}}} < 0$, siis kehtivad võrratused

$$\frac{\overline{c_{o\bar{l}}}}{c_{ol}} \leq \frac{\overline{a_{r\bar{l}}}}{a_{rl}} < 1 .$$

Selle võrratuse äärmistest osadest järeldubki teoreemi väide.

<u>Teoreem 5.</u> Olgu lubatavate lahendite piirkond tõkestatud. Olgu $\lambda_2 < 2\lambda_1$ korral s-kitsendus iga kord, kui see on võimalik, moodustatud etaloonvõrrandi järgi, kui see aga pole võimalik, siis esimese võimaliku võrrandi järgi. Olgu $\lambda_2 \geq 2\lambda_1$ korral ülesanne jaotatud kaheks haruülesandeks, kus s-kitsendused on moodustatud vastavalt kitsenduste $u \geq 0$ ja $t = -u \geq 0$ järgi. Siis on vaadeldud otsene algoritm ruutplaneerimise ülesande lahendamiseks lõplik.

Tõestus. Lubatavate lahendite piirkonna tõkestatuse tõttu võime öelda, et vektor A_o võib muutuda vaid lõplik arv kordi. Järelikult leidub iga indeksi $i \in B \cup M$ korral lõplik konstant d_i , nii et $a_{io} \leq d_i$ kõigi a_{io} väärtuste korral, mis saadakse maatriksi A teisendamisel.

Olgu $\lambda_2 < 2\lambda_1$. Kui osutub, et etaloonvõrrandit ei saa valida kitsenduse lähtereaks, s.t. kui kehtib võrratus

$$\left[\frac{a_{ro}}{-a_{rl}}\right] > \min_{a_{il}<0}\left[\frac{a_{io}}{-a_{il}}\right] = \lambda_2 ,$$

siis $\left[\frac{a_{ro}}{-a_{rl}}\right] \geq 1$ ja järelikult $-a_{rl} \leq a_{ro} \leq d_r$.

Kui aga $\left[\frac{a_{ro}}{-a_{rl}}\right] = \lambda_2$, siis moodustame s-kitsenduse etaloonvõrrandi järgi. Kui $\lambda_2 \neq 0$, siis vektor A_o muutub, kui $\lambda_2 = 0$, siis on $\overline{A}_o = A_o$ ja $-a_{rl} > a_{ro}$. Valemi (18) põhjal aga kehtib võrratus $0 \geq \overline{a_{rl}} > a_{rl}$. Kui pärast simplekssammu ikka veel $-\overline{a_{rl}} > \overline{a_{ro}} = a_{ro}$, siis uuesti $\lambda_2 = 0$ ning r-nda rea võib uuesti valida lähtereaks jne. Lõpliku arvu sammude järel kehtib $-a_{rl} \leq a_{ro} \leq d_r$.

Kui $2\lambda_1 \leq \lambda_2$, siis $\lambda_2 \geq 1$ ning järelikult sel juhul kehtib võrratus $-a_{rl} \leq a_{ro} \leq d_r$ alati. Märgime ka, et juhu $\lambda_2 \geq 2\lambda_1$ negatiivne haruülesanne on samaväärne juhuga, kus $\lambda_2 < 2\lambda_1$ ja kus ainukeseks võimalikuks kitsenduse lähtereaks on u-rida, sest $\lambda_1 \leq \frac{1}{2}\lambda_2$ tõttu kehtivad järgmised võrratused:

$$\left[\frac{-c_{lo}}{c_{ll}}\right] \leq \frac{-c_{lo}}{c_{ll}} \leq \frac{1}{2}\left[\frac{a_{ko}}{-a_{kl}}\right] = \frac{1}{2}\min_{a_{il}<0}\left[\frac{a_{io}}{-a_{il}}\right] .$$

Et aga $\lambda_2 \geq 2\lambda_1 > 0$, siis $\left[\frac{a_{ko}}{-a_{kl}}\right] \neq 0$ ja järelikult

$$\left[\frac{-c_{lo}}{c_{ll}}\right] < \left[\frac{a_{ko}}{-a_{kl}}\right] .$$

Seepärast ei ole vajadust nimetatud juhu eraldi uurimiseks, vaid me ühendame ta juhuga $\lambda_2 < 2\lambda_1$.

Oletame nüüd, et algoritm ei ole lõplik, s.t. ,et olukord, kus A_o ei muutu, jääb püsima lõpmatul arvul sammudel. Kuna võrratus $-a_{rl} \leq a_{ro} \leq d_r$ saavutatakse alati lõpliku arvu sammudega, siis järelikult, kui algoritm ei ole lõplik, peab leiduma lõpmata palju selliseid maatrikseid A, kus see võrratus on täidetud. Tähistame seda lõpmatut maatriksite hulka tähega H:

$$H = \{A \mid -a_{rl} \leq a_{ro}\}.$$

Olgu A ja $\bar{A}$ maatriksid hulgast H, kusjuures A on mingi fikseeritud, $\bar{A}$ aga mistahes maatriksile A järgnev maatriks. Et igal sammul $\bar{A}_o = A_o$, siis järelikult s-kitsenduste vabaliikmed võrduvad nulliga ning me võime rakendada teoreemi 3, mille põhjal $\bar{B}^*_{\bar{1}} \succ B^*_1$. Siit saame vektorite B^*_j esimeste komponentide jaoks võrratuse $\overline{c^*_{o\bar{1}}} \geq c^*_{ol}$. Viimasest seosest ning võrratusest $-\overline{a_{r\bar{1}}} \leq d_r$ järeldub $\overline{c_{o\bar{1}}} < 0$ tõttu, et

$$\frac{\overline{c_{o\bar{1}}}}{d_r} \geq \frac{\overline{c_{o\bar{1}}}}{-\overline{a_{r\bar{1}}}} = \overline{c^*_{o\bar{1}}} \geq c^*_{ol}$$

ehk s.o., et $0 > \overline{c_{o\bar{1}}} \geq d_r\, c^*_{ol}$. Sellest on aga näha, et $\overline{c_{o\bar{1}}}$ võib hulgas H omandada vaid lõpliku arvu erinevaid täisarvulisi väärtusi. Kuna ka $\overline{a_{r\bar{1}}}$ võib hulgas H omandada vaid lõpliku arvu täisarvulisi väärtusi, siis peab ka $\overline{c^*_{o\bar{1}}}$ erinevaid väärtusi olema lõplik hulk. Võrratuse $\overline{c^*_{o\bar{1}}} \geq c^*_{ol}$ tõttu peab siis c^*_{ol} saama hulgas H konstandiks, et aga viimane võrratus kehtib olenemata sellest, kas $A, \bar{A} \in H$ või mitte, siis saab c^*_{ol} konstandiks ka väljaspool hulka H.

Seega on $c^*_{o1} = \text{const.}$ mingis lõpmatus hulgas G_1, mis sisaldab kõiki maatrikseid A, välja arvatud lõplik hulk esimesi.

Vaatleme nüüd vektorite $\overline{B}^*_{\overline{1}}$ ja B^*_1 järgmisi komponente b^*_{11}. Kui maatriksid $A, \overline{A} \in G_1$, siis seoste $\overline{B}^*_{\overline{1}} \succ B^*_1$ ja $\overline{c^*_{o\overline{1}}} = c^*_{o1}$ tõttu kehtib võrratus $\overline{b^*_{1\overline{1}}} \geq b^*_{11}$. Oletame, et vaadeldav komponent on hulgas $G_1 \cap H$ ülalt tõkestatud, s.t. et leidub selline lõplik konstant d, nii et $b^*_{11} \leq d$. Siis kehtivad seosed

$$b^*_{11} \leq \overline{b^*_{1\overline{1}}} = \frac{\overline{b_{1\overline{1}}}}{-\overline{a_{r\overline{1}}}} \leq d \ ,$$

millest $-\overline{a_{r\overline{1}}} > 0$ tõttu saame võrratuse :

$$-\overline{a_{r\overline{1}}}\, b^*_{11} \leq \overline{b_{1\overline{1}}} \leq -\overline{a_{r\overline{1}}}\, d \ .$$

Viimasest võrratusest on näha, et ka vektorite B_1 komponent b_{11} võib omandada vaid lõpliku arvu täisarvulisi väärtusi. Kuna seoses $b^*_{11} = \dfrac{b_{11}}{-a_{r1}}$ on nii lugejal kui nimetajal võimalik omandada vaid lõplik arv erinevaid väärtusi, siis võime sama öelda ka b^*_{11} ratsionaalsete väärtuste kohta ja järelikult monotoonse kasvamise $\overline{b^*_{1\overline{1}}} \geq b^*_{11}$ tõttu saab ka b^*_{11} konstandiks mingis lõpmatus hulgas $G_2 \subset G_1$.

Kui oletada, et kõik komponendid b^*_{11}, b^*_{21} jne. on tõkestatud, siis saame, et teatud kohast alates on kõik komponendid konstandid ja järelikult $\overline{B}^*_{\overline{1}} = B^*_1$. See võrdus on aga võimatu. Järelikult leidub selline esimene indeks $q \geq 1$, mille korral b^*_{q1} on tõkestamata ja võrratused

$$\overline{b^*_{q\bar{l}}} \geq b^*_{ql} \succ d_q \geq a_{qo}$$

kehtivad mingis lõpmatus hulgas G_q, mis sisaldab teatud maatriksist A alates kõiki maatrikseid ja kus c^*_{ol}, b^*_{1l}, ..., $b^*_{q-1,l}$ on konstandid. Kuna

$$b^*_{ql} = \frac{b_{ql}}{-a_{rl}} = \frac{-a_{ql}}{-a_{rl}} \text{, siis } -a_{ql} \geq b^*_{ql} \succ a_{qo} \text{ ja}$$

järelikult $\left[\frac{a_{qo}}{-a_{ql}}\right] = 0$. Hulgas $G_q \cap H$ on aga $\left[\frac{a_{ro}}{-a_{rl}}\right] > 0$, nii et me võime kitsenduse lähtereaks valida q-nda rea, r-ndat aga ei või. Tegelikult võib juhtuda, et mingi indeksi $p \leq q$ korral kehtib $\left[\frac{a_{po}}{-a_{pl}}\right] = \left[\frac{a_{qo}}{-a_{ql}}\right] = 0$, siis valime lähtereaks p-nda rea. Et seose $\overline{B^*_{\bar{l}}} \succ B^*_l$ tõttu kehtib võrratus $\overline{b^*_{p\bar{l}}} \geq b^*_{pl}$, s.t.

$$\frac{\overline{a_{p\bar{l}}}}{\overline{a_{r\bar{l}}}} = \frac{\overline{b_{p\bar{l}}}}{\overline{-a_{r\bar{l}}}} \geq \frac{b_{pl}}{-a_{rl}} = \frac{a_{pl}}{a_{rl}}$$

ning valemi (18) põhjal kehtib võrratus $\overline{a_{p\bar{l}}} > a_{pl}$, siis järelikukt peab kehtima ka seos $a_{rl} < \overline{a_{r\bar{l}}} < 0$. Võrduse $\overline{a_{ro}} = a_{ro}$ ja võrratuse $-\overline{a_{r\bar{l}}} < -a_{rl} \leq a_{ro}$ tõttu ka vahetult järgnev maatriks $\bar{A} \in G_q \cap H$. See aga tähendab, et me saame negatiivsete täisarvude a_{rl} rangelt kasvava lõpmatu jada, mis on ülalt tõkestatud. See aga pole võimalik. Järelikult peab algoritm olema lõplik.

Teoreem on tõestatud.

Vaatleme järgmist näidet : minimiseerida

$$Q(X) = -2x_1 - 4x_2 + x_1^2 + x_2^2$$

kitsendustel

$$x_3 = 6 - 2x_1 - 3x_2 \quad ,$$
$$x_4 = 5 - x_1 - 4x_2 \quad ,$$
$$x_i \geq 0 \text{ ja täisarv} \quad , \quad i = 1,2,3,4.$$

Ülesande lähtetabel on esitatud tabelis 1 :

Tabel 1.

	1	↓x_1	x_2
1	0	-1	-2
→x_1	-1	1	0
x_2	-2	0	1
x_1	0	1	0
x_2	0	0	1
x_3	6	-2	-3
x_4	5	-1	-4
s_1	-1	1	0
s_3	1	-1	0

Juhtveeru valikuks on meil siin kaks võimalust, valime näiteks muutujale x_1 vastava veeru. Siis vastavalt valemitele (5) ja (6) leitud $\lambda_1 = 1$ ja $\lambda_2 = 3$ ning järelikult haruneb ülesanne kaheks haruülesandeks. Lisame tabelile 1 valemi (11) järgi moodustatud kitsenduse $s_1 = -1 + x_1$ ning viime läbi simpleksteisenduse, tulemuseks saame tabeli 1.1 (vt. järgmisel lk.). nimetatud tabelis on juhtveeruks muutujale x_2 vastav veerg ja $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$. Nüüd moodustame muutujale x_4 vastava rea järgi kitsenduse (8) : $s_2 = 1 - x_2$. Pärast simpleksteisendust on tabel 1.2 optimaalne, positiivse haruülesande optimaalseks lahendiks on seega $Q^* = -4$, $X^* = (1,1,1,0)$.

Tabel 1.1.

	1	s_1	↓ x_2
1	-1	0	-2
s_1	0	1	0
x_2	-2	0	1
x_1	1	1	0
x_2	0	0	1
x_3	4	-2	-3
→ x_4	4	-1	-4
s_2	1	0	-1

Tabel 1.2.

	1	s_1	s_2
1	-4	0	1
s_1	0	1	0
s_2	1	0	1
x_1	1	1	0
x_2	1	0	1
x_3	1	-2	3
x_4	0	-1	4

Lahendame nüüd ka negatiivse haruülesande. Selleks lisame tabelile 1 valemi (15) kohaselt moodustatud kitsenduse $s_3 = 1 - x_1$ (varem lisatud kitsendus s_1 jääb nüüd vaatluse alt välja). Teisendatud tabelis 1.-1 on juhtveeruks muutujale x_2 vastav veerg, ka siin on $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ ning lisatav kitsendus on $s_4 = 1 - x_2$. Uus tabel 1.-2 on optimaalne.

Tabel 1.-1.

	1	s_3	↓ x_2
1	-1	0	-2
s_3	0	1	0
x_2	-2	0	1
x_1	1	-1	0
x_2	0	0	1
x_3	4	2	-3
→ x_4	4	-1	-4
s_4	1	0	-1

Tabel 1.-2.

	1	s_3	s_4
1	-4	0	1
s_3	0	1	0
s_4	1	0	1
x_1	1	-1	0
x_2	1	0	1
x_3	1	2	3
x_4	0	1	4

Ka negatiivses haruülesandes saame optimaalseks lahendiks $Q^* = -4$, $X^* = (1,1,1,0)$, mis on seega ka kogu ülesande lahendiks.

Kui samas ülesandes valida esimesel sammul juhtveeruks muutujale x_2 vastav veerg, siis ülesande lahendamise käigus hargnemist ei tule. Mõlema veeru valimine juhtveeruks on võimalik ka täpsustatud juhtveeru valiku reegli korral : esimesel juhul tuleks etaloonvõrrandiks valida muutujale x_4 vastav rida, teisel juhul aga muutujale x_3 vastav rida.

Kasutatud kirjandus

I. Г.П.Кюнци, В.Крелле. Нелинейное программирование. М.,I965, I36-I48.

2. Д.Б.Юдин, Е.Г.Гольштейн. Линейное программирование. Теория, методы и приложения. М.,I969, 2I7-224.

3. Г.Зойтендейк. Методы возможных направлений.М.,I963.,39.

4. Л.Г.Седых. Алгоритм решения задачи квадратичного программирования. "Применение методов вычислительной математики и ЭВМ в технико-экономических расчетах". I970, вып.2, 87-93.

5. А.А.Корбут, Ю.Ю.Финкельштейн. Дискретное программирование. М.,I969, I26-I49.

6. F.Glover. A new foundation for a simplified primal integer programming algorithm. Operations Research, I968, vol.I6, Nr.4, 727-740.

Р е з ю м е

дипломной работы Р.Керге "О решении целочисленных задач квадратичного программирования".

Настоящая дипломная работа состоит из трех частей. В первой части рассматривается нецелочисленная задача квадратичного программирования с двухсторонними ограничениями, для решения которого метод Била обобщается на случай двухсторонних ограничений. Во второй части приводится метод для решения соответствующей частично- или полностью целочисленной задачи, исходя от оптимального нецелочисленного решения, найденного методом, описанным в первой части работы. В третьей части приводится один из возможных представлений прямого алгоритма Гловера для решения задач квадратичного программирования. Доказывается конечность описанного прямого алгоритма.

08.06.72 RKerge

SISUKORD