ТАРТУСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

П. Прюллер и Х. Таммет

Вычисление погрешностей измерений

I

ТАРТУ 1961

ТАРТУСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

КАФЕДРА ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

П. Прюллер и Х. Таммет

Вычисление погрешностей измерений

I

ТАРТУ 1961

Тартуский государственный университет
ЭССР, г. Тарту, ул. Юликооли, 18
П. Прюллер и Х. Таммет

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИЗМЕРЕНИЙ

Vastutav toimetaja K. Kuddu
Korrektor A. Pravdin
====================================
TRÜ rotaprint 1961. Trükipoognaid 3.
Tir. 500 eks. MB 05764. Tell. nr.560.

Hind 9 kop.

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Измерение физических величин . . . . стр. 6

§ 2. Погрешности измерений 7

§ 3. Абсолютная и относительная погрешность . . . результата измерений 9

§ 4. Округление приближенных чисел и арифметические действия с ними 12

§ 5. Среднее арифметическое и его погрешности . . . 15

§ 6. Погрешности результатов косвенных измерений . . 25

§ 7. Примеры вычисления погрешностей 29

§ 8. Таблицы инструментальных погрешностей 32

§ 9. Список литературы по вычислению погрешностей. 40

§ 10. Образцы работ:

1. Измерения посредством штангенциркуля и микрометра. 42

2. Определение количества электроэнергии и коэффициента полезного действия кипятильника. 47

ВВЕДЕНИЕ.

Измерение физических величин является основной деятельностью во всякой лаборатории и в технике. Знание точности и погрешности результатов измерения существенно определяет ценность данных и результатов измерений. Это обстоятельство заставляет характеризовать точность физических измерений количественно, что делается при всех лабораторных и технических измерениях.

Случайные и инструментальные погрешности характеризуются при помощи существенно различающихся критериев. Это обстоятельство очень затрудняет вычисление погрешностей измерения упрощенным способом. При этом невозможно избежать различных условных соглашений, относительно которых, к сожалению, до сих пор еще не создано общепринятых правил. Поэтому в различных руководствах относительно вычисления погрешностей измерения можно найти существенно различающиеся соглашения и правила. В § 8 руководства дано 7 таблиц, содержащих инструментальные погрешности на основании действующих норм ГОСТ'а.

В настоящем руководстве подробнее рассматривается точная количественная характеристика точности результата измерения и даются указания для практического определения погрешностей измерения. Соглашения относительно вычисления погрешностей измерения, приведенные в руководстве, используются в общем физическом практикуме Тартуского государственного университета.

Настоящее руководство является переводом текста 2-го издания эстонского руководства 1961 года.

Авторы выражают благодарность за ценные замечания и советы доцентам кафедры математики ТГУ Л. Выханду и О. Принитсу, ст. научному сотруднику Института физики и астрономии АН ЭССР Г. Желнину, переводчице руководства ст. преп. З. Бихеле, корректору доц. А. Правдину, за по-

мощь в приобретении таблиц инструментальных погрешностей ст. преп. А. Коппелю и заведующему Тартуским отделением Эстонской Государственной контрольной лаборатории по измерительной технике Р. Жасмину.

Авторы и впредь будут очень благодарны за сообщения различных пожеланий и указаний, имеющих целью улучшение настоящего руководства, касающегося вычисления погрешностей измерения.

Тарту, 26 июня 1961 г.

П. Прюллер .

Х. Таммет .

§ 1. Намерение физических величин.

Измерение какой-либо физической величины(длина,вес, объем и т.д.)заключается в сравнении ее с другой однородной с ней величиной, принятой за единицу измерения. Такое сравнение можно производить:

1. С помощью измерительного пособия, на котором отмечены единицы измерения, например, линейка, гиря, мензурка и т.д.;

2. с помощью измерительного прибора, например, амперметра, вольтметра и т.д.;

3. с помощью измерительной установки, в состав которой входят измерительные пособия, измерительные приборы и другие вспомогательные принадлежности, которые используются по определенной схеме или с применением специального метода измерения, как-то мост сопротивления, катодный осциллограф и т.д.

Результат измерения получают либо путем непосредственного отсчета по шкале, например, длину, температуру, время и т.д., либо посредством вычисления по формуле, связывающей ее с некоторыми другими непосредственно измеренными величинами, как, например, скорость, ускорение и т.д.

Непосредственное измерение заключается в определении местоположения данной точки на шкале прибора. При этом для повышения точности измерений приходится оценивать на глаз десятые доли наименьшего деления шкалы.

Обозначим измеряемую величину через X, единицу измерения через M, тогда результат измерения A покажет, сколько раз единица измерения содержится в измеряемой величине.

$$A = \frac{X}{M}, \text{ откуда } \underline{X = A \cdot M} \qquad (1)$$

Результат измерения A обратно пропорционален единице измерения M. Например, 17 см = 170 мм ,т.е. при уменьшении единицы измерения в 10 раз число, выражающее результат измерения, увеличивается во столько же раз.

При выполнении лабораторных работ измерения следует производить с максимальной тщательностью и точностью. От качества измерений зависит точность получаемого результата.

§ 2. Погрешности измерений.

Опыт показывает, что при повторных измерениях одной и той же величины результаты получаются различные. Отсюда следует, что ни одно измерение нельзя считать абсолютно точным, т.е. каждое измерение всегда связано с известной погрешностью или ошибкой.

В зависимости от причин, их вызывающих, погрешности делятся на :

1. Методические, обусловленные неточностью метода измерения, например, при измерении сопротивления проводника не учитывается сопротивление соединительных проводов;

2. инструментальные, причиной которых являются недостатки приборов;

3. погрешности отсчета. Причины последних могут быть как субъективными, например, недостатки зрения или слуха или объективными, например, плохое освещение, невыгодное положение прибора, колебания напряжения в сети электрического тока, колебания температуры и т.д. Погрешности отсчетов носят случайный характер, и при повторных измерениях они могут либо увеличивать, либо уменьшать результаты измерений.

Погрешности измерений делятся на :

1. Случайные, которые при повторных измерениях могут с одинаковой вероятностью быть как положительными, так и отрицательными.

2. Систематические, имеющие определенный знак, т.е. влияющие на результат измерения в одном определенном направлении, систематически увеличивая или уменьшая результат.

Например, не учитывая сопротивления соединительных проводов, мы делаем систематическую погрешность при определении сопротивления различных проводников.

Причинами систематических погрешностей могут быть недостатки приборов, например, сдвиг шкалы, погнутая стрелка, искажение масштаба и т.д.

Во многих случаях величину систематической погрешности и ее знак можно определить путем сравнения используемого прибора с контрольными или при методических погрешностях путем анализа результатов вычислений.

Для уменьшения систематических погрешностей нужно исследовать и исправлять измерительные приборы и методику измерений.

Однако имеется одна систематическая погрешность, которую нельзя ни ликвидировать, ни исправить. Ее величина определяется точностью изготовления самого измерительного прибора. Любой прибор дает возможность производить измерения лишь с известной точностью, которая зависит от устройства прибора, цены деления его шкалы, толщины черточек и т.д. Точность изготовления прибора определяет так называемую <u>инструментальную погрешность или погрешность прибора</u>. Инструментальная погрешность является по своему характеру систематической погрешностью, т.е. она изменяет результат измерения в одном направлении. Однако мы не знаем, в каком именно направлении. Поэтому перед значением инструментальной погрешности и ставят оба знака ($\pm$); величина ее обычно указывается в паспорте прибора. При длительном употреблении прибора значение инструментальной погрешности может изменяться. При отсутствии паспорта или, если инструментальная погрешность не дана в таблицах § 8, за погрешность прибора принимают, как минимум, <u>половину наименьшего деления шкалы, так называемой цены деления</u>. Например, погрешность прибора со шкалой с миллиметровыми делениями будет

$$A = \pm 0,5 \text{ мм} .$$

В случае шкал, снабженных нониусом (верньером), за погрешность прибора принимают <u>точность нониуса</u>, т.е. разность длин делений основной шкалы и нониуса.

Классификация инструментальных погрешностей штангенциркулей, микрометров, металлических линеек, гирь, термометров, секундомеров, колб, измерительных цилиндров, бюреток и пипеток дана в таблице § 8.

Случайные погрешности, как и инструментальные, нельзя ни ликвидировать, ни исправить.

Случайные погрешности, как и инструментальные погрешности, определяют ширину интервала, в котором находится действительное значение измеряемой величины.

Для уменьшения влияния случайных погрешностей каждое измерение следует производить несколько раз (5-10 раз), что дает возможность избежать влияния погрешностей в одном направлении. Случайные погрешности в единичных измерениях могут с одинаковой степенью вероятности уменьшать или увеличивать результат измерения. Поэтому наиболее близким к действительному значению измеряемой величины будет среднее арифметическое из нескольких измерений.

§ 3. Абсолютная и относительная погрешность результата измерений.

Разность между действительным значением измеряемой величины X и числом A, полученным при измерении, называется абсолютной погрешностью α результата измерений. Так как при наличии случайных ошибок результат измерения может быть либо меньше, либо больше действительного значения величины, то погрешность нужно либо прибавить, либо вычесть из полученного результата.

Т.е. $$X - A = \pm \alpha$$,откуда

$$X = A \pm \alpha \qquad (2)$$

Действительное значение измеряемой величины нам неизвестно. поэтому нельзя определить и величину α.

Числа A, получаемые при измерениях физических величин, являются лишь приближенными значениями этой величины.

При вычислениях приближенными являются и такие числа, как π, основание натуральных логарифмов e, большинство значений логарифмов и тригонометрических функций.

Анализ отдельных измерений, знание точности измерительного прибора, критическая обработка ряда серий дают возможность оценить предел, а в ряде случаев и порядок величины значения абсолютной погрешности.

Верхний предел значений действительных абсолютных погрешностей называем абсолютной погрешностью измерения.

Абсолютная погрешность имеет размерность и вместе с результатом измерения показывает, в каких пределах находится истинное значение измеряемой величины.

Абсолютные погрешности результатов измерений A, B, C.. обозначаем через ΔA, ΔB, ΔC . . .

Если абсолютная погрешность результата измерения A обозначена через ΔA, то действительное значение измеряемой величины X будет находиться в пределах

$$A - \Delta A \leq X \leq A + \Delta A.$$

Вместо этого неравенства обычно пишут :

$$X = (A \pm \Delta A) \text{ вместе с единицей измерения} \qquad (3)$$

Например, X = (0,70 ± 0,03)мм, означает, что измеряемая величина X лежит в интервале $0{,}67 \leq X \leq 0{,}73$ мм . Знание этого интервала дает возможность определить количество значащих цифр в искомом числе.

Абсолютная погрешность характеризует результат измерения, а не точность измерения. Для характеристики последнего вводится понятие относительной погрешности.

Относительной погрешностью называется отношение абсолютной погрешности ΔA к результату измерений A

$$E_A = \frac{\Delta A}{A} \qquad (4)$$

Относительная погрешность - безразмерная величина, ее выражаем обычно в процентах.

Например, если X = (0,70 ± 0,03), то

$$E_X = \frac{0{,}03}{0{,}70} = \frac{3}{70} = 0{,}043 \simeq 0{,}05 = 5\%$$

Относительная погрешность, определяемая по формуле (4), является верхней границей действительной погрешности $\frac{\alpha}{X}$, так как $\alpha \leqq \Delta A$ и $X \simeq A$.

Из формулы (4) следует, что абсолютная погрешность

$$\Delta A = E_A \cdot A \qquad (5)$$

Этой формулой пользуются для вычисления абсолютной погрешности ΔA, если известна относительная E_A.

Приведем примеры определения абсолютных погрешностей отдельных измерений.

Масштабом с сантиметровыми делениями измерятеся длина, находящаяся ближе всего к числу 127. Тогда результатом измерения будет 127 см с абсолютной погрешностью $\pm$ 0,5 см, т.е.

$$X = (127 \pm 0{,}5) \text{ см} .$$

Погрешность, величина которой равна половине единицы последнего знака результата измерения (в данном случае 0,5 см), называется <u>стандартной погрешностью</u>. Стандартная погрешность масштаба с миллиметровыми делениями равна $\pm$ 0,5 мм = $\pm$ 0,05 см .

Часто приходится учитывать погрешность не только в конце, но и в начале отсчета шкалы. Например, при измерении расстояния между двумя отметками на мензурке, разности уровней жидкостей в U - образной трубке и т.д. В этом случае абсолютная погрешность возрастает вдвое.

В случае масштаба, имеющего сантиметровые деления, оценивать на глаз десятые доли сантиметра, то абсолютная погрешность будет равна $\pm$ 0,1 см (вместо 0,05 см как в случае шкалы с миллиметровыми делениями). Если соответствующий результат измерения равняется 127,3 см, то запишем

$$x = (127{,}3 \pm 0{,}1) \text{ см} .$$

По термометру, имеющему цену деления 1 градус, можем сделать отсчет с точностью до 0,1°С, но инструментальную погрешность отсчитываем по таблице 5 § 8 .

Например, при технических термометрах с температурным ин- интервалом 1-100°C пишем $t = (19,3 \pm 1,0)°C$. Измеряя время с помощью секундомера, делаем отсчет с точностью наименьшего деления шкалы, но инструментальную погрешность отсчитываем по таблице 6 § 8. Например, при отдельном измерении до 60 сек секундомера 2 класса пишем $t = (45,4 \pm 0,6)$ сек. Измеряя объем воды конической мензуркой вместимостью 250 $см^3$ с ценой деления 25 $см^3$, мы можем сделать отсчет с точностью до $0,1 \cdot 25 = 2,5$ $см^3$, но инструментальную погрешность отсчитываем по таблице 7 § 8.

При заранее измеренных величинах без указания ошибки за абсолютную погрешность принимают половину единицы последнего знака, например, масса $m = (632,4 \pm 0,05)$ г. На вольт- и амперметре класс точности отмечается цифрой в кружке. Значок 1 означает, что абсолютная погрешность любого отсчета равна 1% от максимального значения деления шкалы, например, $0,01 \cdot 250 = 2,5 \simeq 3$ в при шкале на 250 вольт. Если стрелка вольтметра показывает 218, то $X = (218 \pm 3)$ в.

Точность измерения зависит от измерительных приборов и методики измерения. Точность нельзя повысить искусственно за счет последующих арифметических действий.

§ 4. Округление приближенных чисел и арифметические действия с ними.

Каждое число, означающее результат измерения, должно писаться с указанием абсолютной погрешности.

Абсолютную погрешность дают обычно в виде числа, содержащего одну значащую цифру, отличную от нуля, например,

$\pm 0,03$ см, ± 200 м и т.д.

Результат измерения всегда записывается с точностью, соответствующей первой значащей цифре значения абсолютной погрешности. Например, $(15,19 \pm 0,03)$ см, (12700 ± 200) м. Нельзя записывать $(15,1947 \pm 0,03)$ см или (12715 ± 200) м.

Лишние значащие цифры в результате измерения опускаются или , в случае целых чисел, заменяются нулями.

1. При округлении результатов измерений последнюю значащую цифру увеличивают на единицу, если следующая цифра равна или превышает 5, или оставляют без изменений, если следующая цифра меньше 5. В этом случае последнее значащее число оставляют без изменения.

Например, $\pi = 3,14159$ округляется : 3,1416; 3,142 и 3,14. Число 0,6345 округляется так: 0,635; 0,63 (а не 0,64).

Округление чисел до половины единицы последней значащей цифры называется стандартным округлением. При этом, записи чисел 5,7 см и 5,7 ($\pm$ 0,05) см считаются равноценными.

Исключением из этого правила является округление абсолютных и относительных погрешностей, которые округляются всегда в сторону возрастания погрешности. Поскольку за погрешность мы принимаем верхнюю границу действительной погрешности, то и при округлении эта верхняя граница не должна уменьшиться, так как в противном случае она может стать меньше действительной погрешности.

Например, абсолютная погрешность $\Delta A = 0,034$ см $\simeq 0,04$ см, относительная погрешность $E_A = \frac{0,06}{12,9} \simeq \frac{0,06}{12} = 0,005 = 0,5\%$

В некоторых случаях, чтобы избежать слишком больших округлений, в абсолютной погрешности берут два значащих числа, например $\Delta A = 0,032$ см , т.е. не округляют эту ошибку до 0,04 см . В этом случае и в результате измерений следует сохранить соответствующее число значащих цифр после запятой, в данном случае 3 значащих цифры.

2. Значащими цифрами считаются все цифры 1, 2, 3 ... 9 и нуль, если он находится между двумя значащими цифрами или в конце целого числа или дроби. Нули, расположенные впереди значащих цифр десятичной дроби, не считаются значащими.

Например, в числе 0,0106 первые два нуля незначащие, нуль между 1 и 6 является значащей цифрой; в числе 7000 все нули значащие, и абсолютная погрешность равна

$\pm 0,5$. Если в предыдущем случае значащей цифрой считать только 7, то число следует записать в виде $7 \cdot 10^3$. При такой записи абсолютная погрешность равна $\pm 0,5 \cdot 10^3 = \pm 500$.

Число 8,60 показывает, что при его измерении учитывались и сотые, поэтому погрешность будет равна $\pm 0,005$. Абсолютная погрешность числа 8,6 будет $\pm 0,05$,т.е. в десять раз больше предыдущей. Итак, у приблизительных десятичных дробей нули справа значащих цифр указывают точность измерения.

3. При сложении или вычитании приближенных чисел их предварительно округляют согласно правилам (1) и (2) <u>до десятичного знака</u> , превышающего на единицу числа десятичных знаков того из данных чисел, в котором число десятичных знаков наименьшее.

Например, вместо чисел

2,923	складывают числа	2,92
15,467		15,47
6,0		6,0
		24,39 ≃ 24,4

Сумму округляют до одного знака,как это указано в примере.

4. При умножении или делении приближенных чисел в полученном результате оставляют лишь такое количество знаков, какое было у числа с наименьшим количеством значащих цифр.

Например, $427 \cdot 23 = 98 \cdot 10^2$ (но не 9821) или $454 : 61 = 7,4$ (но не 7,44).

5. При всех арифметических действиях <u>в промежуточных результатах нужно сохранять на одну значащую цифру больше</u>, чем это предусмотрено правилами (3) и (4) .

Например, $427 \cdot 23 \cdot 11 = (982 \cdot 10) \cdot 11 = 11 \cdot 10^4$ (но не 108020 или 110000). Так как в исходных числах наименьшее количество значащих цифр равно двум (числа 23 и 11), то в промежуточном произведении $427 \cdot 23 = 9821$ следует сохранить три значащих цифры, т.е. записываем $982 \cdot 10$ (а не 9820, так как здесь 4 значащих цифры). Окончательный результат записывают в виде $11 \cdot 10^4$, где остаются лишь две значащих цифры 11 .

Внимание ! В промежуточных результатах надо полностью выписывать промежуточные произведения (например. $982 \cdot 10$), что значительно облегчает проверку вычислений .

Если первая значащая цифра окончательного результата умножения или деления будет меньше первой значащей цифры наименее точного исходного числа, то в результате оставляют на одну значащую цифру больше, чем предусмотрено правилом (4). Например, $454 : 75 = 6{,}05$, а не 6,1 (так как $6 < 7$) или $1{,}60 \cdot 0{,}9 = 1{,}4$, а не 1 (так как $1 < 9$).

§ 5. Среднее арифметическое и его погрешности η и σ_N

При выполнении лабораторных работ по физике каждую величину, как правило, измеряют по меньшей мере 5 раз, если руководством не предусмотрено другое число измерений.

Наиболее вероятным значением измеряемой величины будет среднее арифметическое из результатов отдельных измерений $N_1, N_2 \ldots N_n$:

$$\bar{N} = \frac{N_1 + N_2 + \cdots + N_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} N_i}{n} \quad (6),$$

где n есть число измерений.

Пусть произведено 5 измерений, результаты которых N_1, N_2, N_3, N_4, N_5 ,причем N_2 – наименьшее из полученных значений.

Среднее арифметическое

$$\bar{N} = \frac{N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5}{5} =$$

$$= \frac{5N_2 + (N_1-N_2) + (N_2-N_2) + (N_3-N_2) + (N_4-N_2) + (N_5-N_2)}{5}$$

$$= N_2 + \frac{\sum_{i=1}^{5} (N_i-N_2)}{5} \quad (7)$$

Из формулы (7) видно, что вычисление среднего арифметического можно облегчить, если к наименьшему измеренному значению прибавить среднее арифметическое из отклонений значений отдельных измерений от наименьшего значения.

Разности между средним арифметическим и отдельными результатами измерений, т.е. отклонения результатов измерений от среднего арифметического называют вероятнейшими погрешностями.

$$\Delta N_1 = N - N_1$$
$$\Delta N_2 = N - N_2$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\Delta N_n = N - N_n$$

Название " вероятнейшая погрешность " объясняется тем, что она показывает отклонение результата измерений от наиболее вероятного значения измеряемой величины, т.е. от среднего арифметического из всех измерений .

Вероятнейшие погрешности могут быть как положительными, так и отрицательными; они подчиняются следующим закономерностям:

а) Алгебраическая сумма вероятнейших погрешностей равна нулю. Складывая обе половины вышеприведенных равенств, получим

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta N_i = nN - \sum_{i=1}^{n} N_i$$

Из формулы (6) следует, что $nN = \sum_{i=1}^{n} N_i$, следовательно

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta N_i = 0$$

Это свойство может быть использовано для проверки правильности вычисления среднего арифметического. Небольшая разность между суммами положительных и отрицательных значений вероятнейших погрешностей будет иметь место лишь в том случае, когда среднее арифметическое было округлено.

б) Сумма квадратов вероятнейших погрешностей имеет наименьшее значение. Если вычислять отклонения результатов отдельных измерений не от среднего арифметического, а от какого-либо другого числа, то сумма квадратов этих отклонений будет во всех случаях больше, чем сумма квадратов вероятнейших погрешностей.

Для среднего арифметического наиболее просто вычисляется средняя абсолютная погрешность, которая является средним арифметическим из абсолютных величин вероятнейших погрешностей.

Средняя абсолютная погрешность

$$\eta = \frac{|\Delta N_1| + |\Delta N_2| + \ldots + |\Delta N_n|}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |\Delta N_i|}{n} \qquad (8).$$

Средней относительной погрешностью E_N назвается отношение средней абсолютной погрешности η к среднему арифметическому N из результатов измерений, т.е.

$$E_N = \frac{\eta}{N} \qquad (8a)$$

Непосредственно абсолютная погрешность не указывает, насколько среднее арифметическое может отличаться от действительного значения измеряемой величины. Возможное расхождение среднего арифметического от действительного значения измеряемой величины характеризуется средней квадратической погрешностью σ_N. Сущность средней квадратической погрешности разъясняется в теории вероятности.

Объектом исследования теории вероятности являются случайные события. Вероятностью p появления случайного события называется предел, к которому стремится отношение числа появления этого события m к числу всех событий n, если последнее стремится к бесконечности. Вероятность

$$p = \lim_{n \to \infty} \frac{m}{n}$$

Если вероятность нахождения погрешности ΔA в интервале от x_1 до x_2 будет равна p, то в случае очень большого числа измерений n в этот интервал попадает $n \cdot p$ число измерений

Если для определения какой-либо величины произвести очень большое число измерений, то скажутся следующие закономерности:

1. Случайные погрешности положительного и отрицательного знака появляются с одинаковой частотой.

2. Чем больше по абсолютной величине случайная погрешность, тем меньше вероятность ее появления и наоборот.

Истинная погрешность v среднего арифметического N, т.е. его отклонение от действительного значения измеряемой величины X является также случайной величиной.

$$v = N - X$$

Частота появления истинных погрешностей различной величины подчинена нормальному закону распределения случайных погрешностей Гаусса, который может быть представлен следующим уравнением

$$y = \frac{1}{\sigma_N\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{v^2}{2\sigma_N^2}} \qquad (9),$$

где σ_N средняя квадратичная погрешность и е основание натуральных логарифмов.

Соответствующая этому уравнению кривая, так называемая кривая Гаусса представлена на рисунках 1 и 2.

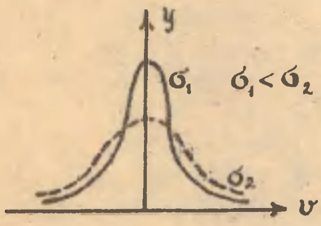


рис. 1.

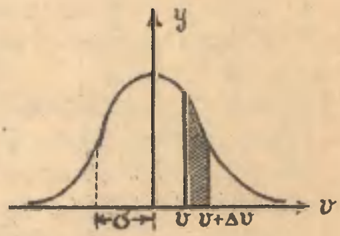


рис. 2.

Величина σ_N^2 в формуле (9) называется дисперсией и является единственным параметром, определяющим форму кривой. Чем меньше дисперсия σ_N, тем выше и острее будет максимум кривой Гаусса (рис.1).

Вероятность Δp того, что искомая погрешность v находится в интервале от v до $v+\Delta v$, равняется заштрихованной площади на рис. 2.

Если Δv мало, то ордината y в точке v приблизительно равна отношению вероятности Δp к ширине интервала Δv, т.е.

$$y \approx \frac{\Delta p}{\Delta v} \qquad (a)$$

Чем меньше Δv, тем точнее равенство (а).

Окончательно ордината

$$y = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta p}{\Delta v}$$

Изобразим на рисунке 3 ординаты, соответствующие значениям v_1 и $-v_1$

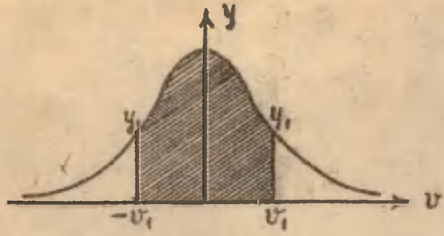


рис. 3.

Площадь между ординатами, осью абсцисс и кривой Гаусса численно равна вероятности того, что погрешность v будет находиться в интервале

$$-v_1 \leqq v \leqq v_1 \quad \text{или} \quad |v| \leqq v_1$$

Величину площади вычисляют интегрированием. Хотя при продолжении кривой Гаусса она нигде не пересекается с осью абсцисс, все же площадь, ею ограниченная, конечна и в пределе равняется 1. Последнее находится в полном соответствии с тем, что вероятность получения погрешности любой величины будет 1.

Часть площади, заклю ченная между ординатами, будет всегда меньше единицы; это значит, что получение результата с погрешностью, находящейся в определенном интервале, нельзя считать обеспеченным. Чем уже интервал, тем меньше площадь между ординатами, тем меньше вероятность получения результата с погрешностью, находящей в этом интервале.

Ниже приводятся величины площадей для некоторых интервалов, заключенных между гауссовой кривой, осью абсцисс и ординатами, соответствующими абсциссам $-v$ и $+v$ (абсолютное значение абсцисса $|v|$) 1/

1/ площадь равна $\Phi\left(\frac{v}{\sigma_N}\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{v}{\sigma_N}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

$\lvert v \rvert <$	вероятность p 1)	$\lvert v \rvert <$	вероятность p 1)
0,00	0,000	$0{,}6745\,\sigma_N$	0,5 2)
$0{,}1\,\sigma_N$	0,080	σ_N	0,683
$0{,}2\,\sigma_N$	0,159	$2\,\sigma_N$	0,955
$0{,}3\,\sigma_N$	0,236	$3\,\sigma_N$	0,997
$0{,}4\,\sigma_N$	0,311	$4\,\sigma_N$	0,999
$0{,}5\,\sigma_N$	0,383		

В соответствии с приведенной таблицей можно с вероятностью $p = 0{,}683$ ожидать нахождения среднего арифметического N в интервале

$$X - \sigma_N \leqq N \leqq X + \sigma_N$$

или

$$N = X \pm \sigma_N$$

Если произвести к серий измерений (где к должно быть очень большим числом), то приблизительно в 2/3 случаях из общего количества серий (точнее $0{,}683 \cdot к$ серий) среднее арифметическое из результатов измерений попадет в интервал $X \pm \sigma_N$ и в 1/3 из общего количества серий (точнее $0{,}317 \cdot к$ серий) среднее арифметическое будет вне данного интервала.

Квадратичная погрешность σ_N представляет собой абсциссу точки перегиба кривой Гаусса.

С вероятностью $p = 0{,}997$ (т.е. почти наверняка) можно ожидать, что среднее арифметическое не отличается от истинного значения больше, чем на $3\,\sigma_N$.

В теории вероятностей выводится формула, согласно которой средняя квадратичная погрешность N из n измерений

---

1) Площадь $\Phi(\frac{v}{\sigma_N})$

2) С вероятностью $p = 0{,}5$ можно ожидать, что среднее арифметическое $N = X \pm 0{,}6745 \cdot \sigma_N = X \pm r$. Величину $r = 0{,}6745 \cdot \sigma_N \simeq 2/3 \cdot \sigma_N$ называют вероятной погрешностью.

равна квадратному корню из суммы квадратов отклонений от среднего арифметического, деленной на произведение $n\cdot(n-1)$

$$\sigma_N = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\Delta N_i)^2}{n\cdot(n-1)}} \qquad (10)$$

Квадратичная погрешность одного результата измерений

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\Delta N_i)^2}{n-1}} = \sigma_N\cdot\sqrt{n} \qquad (10a)$$

есть в $\sqrt{n}$ раз больше квадратичной погрешности среднего арифметического σ_N.

Из формулы (10) видно, что квадратичная погрешность уменьшается при возрастании числа измерений. Однако это уменьшение замедляется при возрастании числа измерений. Отсюда следует, что для дальнейшего повышения точности среднего арифметического надо не увеличивать число измерений, а пользоваться более точным прибором или совершенствовать методику измерений.

Вопрос о том, какой погрешностью пользоваться для характеристики окончательного результата, решается по договоренности. [1])

---

[1]) В теории вероятности доказывается, что при очень большом числе измерений n средняя абсолютная η и квадратичная σ_N погрешность связаны следующим соотношением

$$\sigma_N = \frac{1,25}{\sqrt{n}}\eta \qquad (11),$$

т.е. средняя квадратичная погрешность меньше средней абсолютной погрешности. Например, при десяти измерениях $n=10$ получим по формуле (11)

$$\sigma_N = 0,4\,\eta$$

Формулой (11) можно пользоваться для проверки вычисления погрешностей.

Если погрешности, вычисленные по формулам (10) и (11), сильно отличаются, то это показывает, что в данном случае вероятность появления случайных погрешностей не подчиняется закону распределения Гаусса.

В физическом практикуме в случае измерений $n > 5$ вычисляют квадратичную, а в случае $n \leq 5$ среднюю абсолютную погрешность. Для нахождения предельной абсолютной погрешности среднего арифметического руководствуются следующим правилом:

а) если $n > 5$, то

$$\Delta N = 3\sigma_N \tag{12}$$

б) если $n \leqq 5$, то

$$\Delta N = 2\eta \tag{13}$$

Принимая условия (12) и (13), мы считаем, что с вероятностью почти 1 среднее арифметическое отличается от истинного значения результата измерения не больше, чем на $3\sigma_N$ или 2η.

Величину ΔN, найденную по формуле (12) или (13), можно считать абсолютной погрешностью результата измерения лишь в том случае, если ΔN по крайней мере в 5 раз больше инструментальной погрешности ΔM, указанной в паспорте прибора или при отсутствии данных паспорта прибора, в таблице инструментальных погрешностей, приведенной в § 8.

Инструментальную погрешность электроизмерительных приборов определяют по их классу точности, помеченному на шкале прибора.

Если инструментальная погрешность прибора не дана в паспорте или в таблице § 8, то за нее, как правило, надо принимать номинальную погрешность $\Delta M'$, равную половине цены наименьшего деления шкалы.

Шкалы измерительных приборов изготовляются обычно так, чтобы номинальная погрешность была приблизительно равна действительной инструментальной погрешности. У старых изношенных приборов инструментальная погрешность может быть значительно больше номинальной, поэтому последней можно пользоваться лишь в том случае, если прибор был предварительно проверен по более точному. На предприятиях, в университетских лабораториях и т.д. время от времени производят обязательный государственный контроль всех измерительных приборов. При этом определяютинструментальные погрешности всех приборов и забраковывают те приборы, погрешности которых превышают норму.

Если ΔN не превышает в 5 раз величину ΔM, то абсолютной погрешностью измеренного числа будет их сумма $\Delta N + \Delta M$.

При повторных измерениях предельная абсолютная погрешность ΔN среднего арифметического складывается с инструментальной погрешностью ΔM, имеющей место при каждом измерении и достигающей величины до $+\Delta M$ или $-\Delta M$. Поэтому в крайних случаях верхней границей абсолютной погрешности измерения будет $+(\Delta N + \Delta M)$ или $-(\Delta N + \Delta M)$.

Если в процессе измерений выяснится, что отклонения результатов отдельных измерений от среднего арифметического меньше инструментальной погрешности, то погрешность среднего арифметического находить не надо, а за абсолютную погрешность результата измерения берут инструментальную погрешность ΔM.

Ниже приводится пример определения погрешности результата измерения.

Диаметр металлического вала измеряется с помощью микрометра с ценой деления 0,01 мм. Инструментальная погрешность согласно паспорту равна $\Delta M = 0{,}004$ мм. Чтобы производить измерения в соответствии с точностью прибора, следует на глаз оценивать десятые доли деления.

Результат отдельных измерений заносят в таблицу в виде столбца. В следующий столбец вписывают отклонения от наименьшего числа, умноженные на 10^3 $(\delta \cdot 10^3)$, что облегчает вычисление среднего арифметического. Далее выписывают отклонения от среднего арифметического, умноженные также на 10^3 $(\Delta \cdot 10^3)$, и их квадраты $(\Delta^2 \cdot 10^6)$.

Использование при вычислениях лишь единиц последних десятичных знаков целесообразно, так как при этом не надо выписывать лишние нули.

№ измерения	D mm	$\delta \cdot 10^3$	$\Delta \cdot 10^3$	$\Delta^2 \cdot 10^6$
1	21,433	11	-2	4
2	21,424	2	+7	49
3	21,430	8	+1	1
4	21,429	7	+2	4
5	21,440	18	-9	81
6	21,435	13	-4	16
7	21,422	0	+9	81
8	21,435	13	-4	16
9	21,428	6	+3	9
10	21,431	9	0	0
	$N \simeq 21,431$	87	$\Sigma \Delta^+ = +22$ $\Sigma \Delta^- = -19$	261

От наименьшего числа 21,422 сумма отклонений $\Sigma \delta = 87 \cdot 10^{-3}$.

Среднее арифметическое согласно формуле (7) будет

$$N = 21,422 + \frac{87 \cdot 10^{-3}}{10} \simeq 21,431 \text{ мм}.$$

Среднее арифметическое берут со столькими же знаками после запятой, как и в измеренных числах.

Сумма квадратов отклонений от среднего арифметического равна $\Sigma (\Delta N_i)^2 = 261 \cdot 10^{-6}$.

Средняя квадратичная погрешность согласно формуле (9) будет

$$\sigma_D = \sqrt{\frac{261 \cdot 10^{-6}}{10 \cdot 9}} = \frac{10^{-3}}{3} \cdot \sqrt{26,1} = \frac{10^{-3} \cdot 5,1}{3} \simeq 0,0017 \text{ мм}$$

Предельную погрешность среднего арифметического найдем по формуле (12)

$$\Delta N = 3 \cdot 0,0017 \text{ мм} = 0,0051 \text{ мм} \simeq 0,006 \text{ мм}$$

Погрешность результата измерений

$$\Delta D = \Delta N + \Delta M = 0,006 + 0,004 = 0,01 \text{ мм}$$

Относительная погрешность

$$E_D = \frac{0,01}{21,43} = 0,00047 \simeq 0,0005 = 0,05\%$$

Диаметр $D = (21{,}43 \pm 0{,}01)$ мм, $E_D = 0{,}05\%$

Радиус $R = (10{,}715 \pm 0{,}005)$ мм, $E_R = 0{,}05\%$

При числе измерений от 5 до 10 среднюю квадратичную погрешность можно приближенно оценить по формуле

$$\sigma_N = \frac{d}{n},$$

где d разность наибольшего и наименьшего результатов измерений.

В приведенном примере наибольший результат 21,440 мм, наименьший 21,422 мм , разность равняется 0,018 мм

$$\sigma_D = \frac{18 \cdot 10^{-8}}{10} = 0{,}0018 \text{ мм},$$

которая хорошо совпадает с средней квадратичной погрешностью 0,0017 мм .

Если же этот же вал измерять штангенциркулем, у которого точность нониуса равна 0,1 мм и инструментальная погрешность по таблице 1 § 8 $\Delta M = 0{,}1$ мм , то для каждого измерения получим всегда 21,4 мм и определение случайных ошибок не имеет смысла.

В этом случае результат измерений будет

$$D = (21{,}4 \pm 0{,}1) \text{ мм}$$

§ 6. Погрешности косвенных измерений.

В большинстве случаев непосредственно измерить искомую величину нельзя. Поэтому приходится измерять ряд вспомогательных величин, которые связаны с искомой посредством математической формулы. Погрешность результата косвенного измерения зависит не только от погрешностей измеряемых вспомогательных величин, но и от математических действий, производимых с ними.

В теории погрешностей выводятся формулы для вычисления погрешностей в случае различных математических соотношений.[1]

См. 1/ "Физический практикум" под ред.проф.Ивероновой, Введение. Гостехиздат,Москва 1953 .

2/ К.П. Яковлев "Математическая обработка результатов измерений ". Гостехиздат, Москва 1950

В таблице 1 приведены формулы абсолютных и относительных погрешностей тригонометрических функций и различных математических соотношений.

Таблица 1.

Математическое действие	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность
$U = A + B + C$	$\Delta U = \pm(\Delta A + \Delta B + \Delta C)$	$E_U = \pm \frac{\Delta A + \Delta B + \Delta C}{A + B + C}$
$U = A \mp B$	$\Delta U = \pm(\Delta A + \Delta B)$	$E_U = \pm \frac{\Delta A + \Delta B}{A - B}$
$U = A \cdot B$	$\Delta U = \pm(A \cdot \Delta B + B \cdot \Delta A)$	$E_U = \pm(\frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B})$
$U = \frac{A}{B}$	$\Delta U = \pm \frac{B \cdot \Delta A + A \cdot \Delta B}{B^2}$	$E_U = \pm (\frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B})$
$U = A^n$	$\Delta U = \pm n \cdot A^{n-1} \cdot \Delta A$	$E_U = \pm n \cdot \frac{\Delta A}{A}$
$U = \sqrt[n]{A}$	$\Delta U = \pm \frac{1}{n} A^{\frac{1}{n}-1} \cdot \Delta A$	$E_U = \pm \frac{1}{n} \frac{\Delta A}{A}$
$U = \sin A$	$\Delta U = \pm \cos A \cdot \Delta A$	$E_U = \pm \cot A \cdot \Delta A$
$U = \cos A$	$\Delta U = \pm \sin A \cdot \Delta A$	$E_U = \pm \tan A \cdot \Delta A$
$U = \tan A$	$\Delta U = \pm \frac{\Delta A}{\cos^2 A}$	$E_U = \pm \frac{2 \cdot \Delta A}{\sin 2A}$
$U = \cot A$	$\Delta U = \pm \frac{\Delta A}{\sin^2 A}$	$E_U = \pm \frac{2 \cdot \Delta A}{\sin 2A}$

Из этой таблицы видно, что, например, абсолютная погрешность суммы равна сумме абсолютных погрешностей слагаемых; абсолютная же погрешность разности равна сумме абсолютных погрешностей уменьшаемого и вычитаемого.

Относительная погрешность произведения равна сумме относительных погрешностей сомножителей, а относительная погрешность частного равна сумме относительных погрешностей делителя и делимого.

При вычислении погрешностей результатов косвенных измерений действия надо производить в следующем порядке:

1) Для всех непосредственных величин вычисляют абсолютные погрешности в соответствии с §§ 3 и 5 настоящего руководства.

В случае пяти измерений вычисляют среднюю абсолютную погрешность, а при большем числе измерений – среднюю квадратичную погрешность.

Абсолютную погрешность непосредственно измеряемой величины в соответствии с этим вычисляют по формулам

$$\Delta X = 2\eta + \Delta M \quad \text{или} \quad \Delta X = 3\sigma_N + \Delta M$$

2) Окончательный результат U вычисляют по соответствующей математической формуле, подставляя в нее значения измеренных величин. При этом необходимо учитывать требования правил (1) – (5) § 4, чтобы не тратить время на перемножение 7- и 10-ти значных чисел, если они имеют всего по 2-3 значащих цифры.

Рекомендуется вместе с числовыми значениями каждой величины выписать в формулу и их единицы измерений и проверить единицу результата до того, как будут произведены все вычисления.

После вычисления окончательного результата надо проверить его порядок величины, т.е. записать ответ в форме $k \cdot 10^n$, где k – однозначное число, а n – целое число. Для этого надо каждое число, входящее в формулу, округлить до одной, в крайнем случае, до двух цифр, произвести требуемые формулой действия и сравнить результаты.

Неучет упомянутых выше правил приводит к затрате лишних усилий и времени на бесполезные вычисления.

3) Находят абсолютные погрешности разностей и сумм, имеющихся в математической формуле.

4) Вычисляют относительную ошибку окончательного результата. Предположим, что искомая величина U выражается через измеренные величины (или их разности и суммы) следующей формулой

$$U = \frac{A^a \cdot B^b}{C^c \cdot D^d} \qquad (14)$$

В этой формуле имеют место всевозможные умножения, деления и возведения в степень. В соответствии с таблицей 1 относительная погрешность результата равна сумме относительных ошибок множителей

$$E_U = \frac{\Delta U}{U} = a\frac{\Delta A}{A} + b\frac{\Delta B}{B} + c\frac{\Delta C}{C} + \dots \tag{15}$$

В случае тригонометрических функций относительные погрешности по формуле 15 вычисляются по соответствующим правилам таблицы 1.

Если в выражении имеются такие величины, как $\pi = 3{,}141593$ или $g = 981{,}79$ см/сек^2 (гор. Тарту), то в выражении относительной погрешности E_U надо сначала найти сумму S относительных погрешностей всех остальных множителей. π и g следует брать с таким числом значащих цифр после запятой, чтобы их относительная погрешность $\frac{\Delta\pi}{\pi}$ или $\frac{\Delta g}{g}$ не изменила первой значащей цифры после нуля в сумме S

$\pi = 3{,}1$, $\quad \frac{\Delta\pi}{\pi} = \frac{0{,}042}{3} = 0{,}014$

$\pi = 3{,}14$, $\quad \frac{\Delta\pi}{\pi} = \frac{0{,}0016}{3} = 0{,}00053$

$\pi = 3{,}142$ $\quad \frac{\Delta\pi}{\pi} = \frac{0{,}00041}{3} = 0{,}00014$ и т.д.

$g = 982$ см/сек^2 $\quad \frac{\Delta g}{g} = \frac{0{,}21}{980} = 0{,}00022$

$g = 981{,}8$ см/сек^2 $\quad \frac{\Delta g}{g} = \frac{0{,}01}{981} = 0{,}00001$ и т.д.

Вместо приведенной выше таблицы можно пользоваться стандартными относительными погрешностями, хотя и для $\pi = 3{,}14$ стандартная погрешность $\frac{\Delta\pi}{\pi} = \frac{0{,}005}{3} = 0{,}0017$, т.е. примерно в 3 раза больше погрешности 0,00053 ,данной в таблице.

Если, например, сумма относительных погрешностей множителей $S = 0{,}0372$, то взяв $\pi = 3{,}14$, найдем окончательный результат

$$E_U = 0{,}0372 + 0{,}00053 = 0{,}0377 \simeq 0{,}038,$$

т.е. при этом значении π в относительной погрешности первая значащая цифра после запятой, (число 3) не меняется.

5. По формуле (5) вычисляют абсолютную погрешность окончательного результата

$$\Delta U = U \cdot E_U$$

где U есть окончательный результат (по формуле 14), а E_U его относительная погрешность, вычисленная по формуле (15).

ΔU дается с двумя значащими цифрами, поэтому для перемножения величины U и E_U следует округлить также до двух значащих цифр.

6. Записывают окончательный результат в следующем виде

$$u = (U \pm \Delta U) \text{ вместе с единицей измерения}$$

$$E_U = \ldots \%$$

где ΔU округляют до одной значащей цифры, а U до такого же порядка, что и ΔU. К ответу обязательно приписывается единица измерения. Под окончательным результатом пишется относительная погрешность в процентах.

Важнейшим условием всей работы является ее тщательное и правильное оформление. Числа надо записывать точно и правильно. При сложении и вычитании числа подписывают так, чтобы числа одного порядка приходились одно над другим.

Желательно результаты измерений сразу же записывать в чистовик, предусмотрев место для их погрешностей. Пользование черновиками не оправдывает себя, так как переписка связана с лишней затратой времени и возможностью возникновения ошибок.

В настоящем руководстве приведены примеры вычисления погрешностей и некоторые наглядные образцы работ физического практикума.

§ 7. Примеры вычисления погрешностей.

Пример 1. Количество тепла, выделяющееся в проводнике, вычисляется по формуле Джоуля-Ленца

$$Q = c \cdot I^2Rt ,$$

где $c = (0{,}24 \pm 0{,}005)\frac{\text{кал}}{\text{дж}}$, $R = (10{,}0 \pm 0{,}2)$

$t = (40{,}0 \pm 0{,}6)$ сек ; $I = (3{,}0 \pm 0{,}1)$а

$Q = 0{,}24 \cdot 3^2 \cdot 10 \cdot 40 = 864$ кал .

Относительная погрешность

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \frac{\Delta c}{c} + 2\frac{\Delta I}{I} + \frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta t}{t} = \frac{0{,}005}{0{,}24} + 2 \cdot \frac{0{,}1}{3} + \frac{0{,}2}{10} + \frac{0{,}6}{40} =$$

$$= 0{,}021 + 0{,}067 + 0{,}02 + 0{,}015 \simeq 0{,}123$$

Абсолютная погрешность

$\Delta Q = 864 \cdot 0{,}123 = 106{,}3$ кал $\simeq 107$ кал

$Q = (864 \pm 107)$ кал $\simeq (860 \pm 110)$ кал

$E_Q = 12{,}3\% \simeq 13\%$

Пример 2. Вычислить объем полого цилиндра

$$V = h\,(R^2 - r^2)$$

где высота $h = (20{,}0 \pm 0{,}02)$ см

внешний радиус $R = (6{,}00 \pm 0{,}01)$ см

внутренний радиус $r = (2{,}00 \pm 0{,}01)$ см

Объем

$$V = 3{,}14 \cdot 20 \cdot (6^2 - 2^2) = 3{,}14 \cdot 640 = 2010 \text{ см}^3$$

Относительная погрешность

$$E_V = \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta h}{h} + \frac{\Delta(R^2 - r^2)}{R^2 - r^2} + \frac{\Delta\pi}{\pi} = \frac{\Delta h}{h} + \frac{2R\cdot\Delta R + 2r\cdot\Delta r}{R^2 - r^2} +$$

$$+ \frac{\Delta\pi}{\pi} = \frac{0{,}02}{20} + \frac{2 \cdot 6 \cdot 0.01 + 2 \cdot 2 \cdot 0{,}01}{6^2 - 2^2} + \frac{\Delta\pi}{\pi} =$$

$$0{,}0010 + \frac{0{,}12 + 0{,}04}{32} + \frac{\Delta\pi}{\pi} = 0{,}0010 + 0{,}0050 + \frac{\Delta\pi}{\pi} =$$

$$= 0{,}0060 + 0{,}00053 = 0{,}00653 \simeq 0{,}0066 .$$

Абсолютная погрешность .

$\Delta V = 2010 \cdot 0{,}0066 = 13{,}3 \simeq 14$ см^3

$V = (2010 \pm 14)$ см^3 $\simeq (2010 \pm 20)$ см^3

$E_V = 0{,}0066 \simeq 0{,}7\%$

<u>Пример 3.</u> Вычислить $x = c \cdot b$, где c – постоянное число и $\Delta c = 0$

$$x + \Delta x = c\,(b + \Delta b) = cb + c \cdot \Delta b$$

Следовательно

$$\Delta x = \pm c \cdot \Delta b\ ; \quad \frac{\Delta x}{x} = \frac{c \cdot \Delta b}{c \cdot b} = \frac{\Delta b}{b}$$

Если например

$c = 3$ и $b = (20 \pm 0{,}2)$ см, т.е. $\frac{\Delta b}{b} = \frac{0{,}2}{20} = 0{,}01 = 1\%$

тогда

$x = 3 \cdot 20 = 60$ см, $\Delta x = 3 \cdot 0{,}2 = 0{,}6$ см, $\frac{\Delta x}{x} = \frac{0{,}6}{60} = 0{,}01 = 1\%$

Из этого примера следует, что постоянный множитель увеличивает абсолютную погрешность произведения и не изменяет его относительной погрешности.

§ 8. Таблицы инструментальных погрешностей

1. Таблица инструментальных погрешностей штангенциркулей

Границы измерений в мм	Точность нониуса в мм		
	0,02	0,05	0,1
	инструментальная ошибка штангенциркуля в мм		
до 300	± 0,02	± 0,05	± 0,1
от 300 до 500	± 0,03	± 0,05	± 0,1
от 500 до 1000	± 0,04	± 0,05	± 0,1

2. Таблица инструментальных погрешностей микрометров -

Границы измерений в мм	до 100	от100до150	от150до200
класс 0, ΔМ мм=	± 0,002	± 0,0025	± 0,003
-"- 1, ΔМ мм=	± 0,004	± 0,005	± 0,006
-"- 2, ΔМ мм=	± 0,008	± 0,010	± 0,012

3. Таблица инструментальных погрешностей для измерительных металлических линеек, изготовленных по ГОСТ'у 427 - 56

На металлической измерительной линейке нанесена миллиметровая и полумиллиметровая шкала с пределами измерений 150, 300, 500 и 1000 мм .

Отклонения длины шкалы линеек от номинальных размеров не должны превышать величины согласно следующей таблице.

Измеряемая длина до	150 мм	300 мм	500 мм	1000мм
Допустимое отклонение в миллиметрах ±	0,1	0,1	0,15	0,20

Например, у линейки с длиной 1000 мм при измерении длины до 300 мм допустимое отклонение ± 0,1 мм , до 500 мм ± 0,15 мм .

4. Таблица допустимых погрешностей для гирь

Масса гири	Аналитические	Технические классов 1-го	2-го	3-го	Масса гири	Аналитические	Технические классов 1-го	2-го
20 кг		+ 200 мг	+ 2 г	+ 10 г				
10 "		+ 100 "	+ 1 "	+ 5 "				
5 "		+ 50 "	+500 мг	+2,5 "	500 мг	± 0,3 мг	± 0,5 мг	± 2 мг
2 "		+ 30 "	+300 "	+1,5 "	200 "	± 0,3 "	± 0,5 "	± 2 "
1 "		+ 20 "	+200 "	+1 "	100 "	± 0,3 "	± 0,5 "	± 2 "
500 г		+ 10 "	+100 "	+500мг	50 "	± 0,3 "	± 0,5 "	± 2 "
200 "	+ 2 мг	+ 4 "	+ 50 "	+200 "	20 "	± 0,2 "	± 0,5 "	± 2 "
100 "	+ 1 "	+ 3 "	+ 25 "	+100 "	10 "	± 0,2 "	± 0,5 "	± 2 "
50 "	+ 1 "	+ 3 "	+ 20 "	+ 30 "	5 "	± 0,1 "	± 0,5 "	± 1 "
20 "	+ 1 "	+ 2 "	+ 15 "	+ 50 "	2 "	± 0,1 "	± 0,2 "	± 0,4мг
10 "	+0,6 "	+ 2 "	+ 10 "	+ 30 "	1 "	± 0,1 "	± 0,1 "	± 0,2 "
5 "	+0,6 "	+ 2 "	+ 6 "	+ 20 "				
2 "	+0,6 "	+ 1 "	+ 4 "	+ 20 "				
1 "	+0,6 "	+ 1 "	+ 4 "	+ 10 "				

Примечание: Погрешности рейтеров не должны превышать допустимых погрешностей для гирь той же номинальной массы. Разность в массе одноименных рейтеров ив одного набора не должны превышать 0,1 мг.

5. Таблица инструментальных погрешностей для жидкостных термометров.

Погрешности показаний технических термометров (область измерений от -30° до $+500^{\circ}$С) в зависимости от цены деления и температурного интервала не должны превышать величин, указанных в таблице 1.

Таблица 1.

Температурный интервал в °С		Допустимые погрешности при цене деления		
от	до	1°С	2°С	5 и 10°С
- 30	0	± 1	± 2	-
1	100	± 1	± 2	-
101	200	± 2	± 2	± 5
201	300	± 3	± 4	± 5
301	400	± 4	± 4	± 10
401	500	± 5	± 5	± 10

Примечания : а) Погрешности показаний инкубаторных термометров с ценой деления шкалы 0,5°С не должны превышать ± 0,25°С, а с ценой деления 0,1°С - ± 0,1°С.

б) Погрешности показания вновь изготовленных максимальных термометров (медицинских и ветеринарных) не должны превышать +0,10 и -0,15°С, а термометров,находящихся в обращении, ± 0,15°С.

Погрешности показаний лабораторных ртутных термометров (область измерений от -30°до $+300^{\circ}$С) в зависимости от цены деления и температурного интервала не должны превышать величин, указанных в таблице 2.

Таблица 2.

Температурный интервал в $^{\circ}C$		Допустимые погрешности при цене деления			
от	до	0,01 и 0,02$^{\circ}C$	0,05$^{\circ}C$	0,1 и 2$^{\circ}C$	0,5$^{\circ}C$
- 30	0	-	$\pm$ 0,1	$\pm$ 0,3	$\pm$ 1
1	100	$\pm$ 0,05	$\pm$ 0,1	$\pm$ 0,2	$\pm$ 1
101	200	-	-	$\pm$ 0,4	$\pm$ 1
201	300	-	-	$\pm$ 1	$\pm$ 2

Примечание: Погрешности показаний калориметрических термометров не должны превышать $\pm$ 0,02$^{\circ}C$ у термометров с ценой деления шкалы 0,01° и $\pm$ 0,04$^{\circ}C$ у термометров с ценой деления шкалы 0,02$^{\circ}C$.

6. Инструментальные погрешности секундомеров.

Секундомеры разделяются, в зависимости от точности их хода, на 3 класса.

При измерении секундомером нужно учесть поправку нулевой точки, которая у исправного секундомера не должна превышать величины наименьшего деления шкалы.

Абсолютная погрешность измерения промежутка времени зависит от величины этого промежутка. Если имеется возможность повторить измерения данного интервала времени, то совершаем 10 измерений и находим среднюю арифметическую из полученных результатов, что позволяет получить меньшую абсолютную погрешность.

Абсолютные погрешности измерений промежутка времени в секундах приведены ниже (температура воздуха при измерениях $t = 20^{\circ}C \pm 5^{\circ}C$).

Замечание: В этой таблице приведены значения абсолютных погрешностей, представляющих собою усредненные максимальные значения абсолютных погрешностей, измеренных для многих секундомеров. Эти погрешности, в особенности в случае измеряемого промежутка времени до 60 сек., сравнительно большие. Поэтому желательно определить соответствующие для используемого секундомера погрешности. При отсутствии хронометра можно совершить 10 или более отдельных измерений секундным маятником(к нити длиной 99,4 см подвешен небольшой шарик), принимая при каждом измерении продолжительность до полных колебаний с малыми амплитудами(продолжительность всего отдельного измерения = 60 сек.). Вычислить среднее арифметическое всех отдельных измерений, его квадратичная ошибка σ_N и квадратичная ошибка относительно числа отдельных измерений $\sigma = \sigma_N \cdot \sqrt{n}$(см. руководство стр. 21).

Абсолютная погрешность арифметического среднего данного секундомера равняется $3\sigma_N$ и абсолютная погрешность отдельного измерения есть 3σ .

Класс секундомера	Характер измерения	Абсолютная ошибка в секундах при интервале измерения		
		до 60 сек	до 15 мин	до 30 мин
1	Отдельное измерение	0,4	0,7	1,0
	Арифметическое среднее 10-ти или более измерений	0,2	0,4	0,6
2	Отдельное измерение	0,6	1,0	1,5
	Арифметическое среднее 10-ти или более измерений	0,3	0,6	1,0
3	Отдельное измерение	0,6	1,3	2,4
	Арифметическое среднее 10-ти или более измерений	0,3	0,8	1,6

7. Таблица допустимых погрешностей колб, измерительных цилиндров, бюреток и пипеток .

Вместимость в мл	Допустимые отклонения (±) от номинальной вместимости при 20°С в мл												
	Колбы 1-го класса		Колбы 2-го класса		Измерительные цилиндры		Конические мензурки	Бюретки с прямым краном		Пипетки с одной отметкой		Пипетки с подразделениями и двумя отметками	
	Наливные	Отливные	Наливные	Отливные	Наливные	Отливные		1-го класса	2-го класса	1-го класса	2-го класса	1-го класса	2-го класса
2000	0,50	1,00	1,00	2,00	6,0	12,0	-						
1000	0,30	0,60	0,60	1,20	4,0	8,0	10,0						
500	0,15	0,30	0,30	0,60	2,0	4,0	6,0						
250	0,10	0,20	0,20	0,40	1,0	2,0	3,0						
200	0,10	0,20	0,20	0,40	-	-	-	0,20	0,40				
100	0,10	0,20	0,20	0,40	0,4	0,8	1,5	0,10	0,20	0,08	0,16	0,10	0,20
50	0,05	0,10	0,10	0,20	0,3	0,6	1,0	0,05	0,10	0,05	0,12	0,08	0,16
40	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,05	0,12	0,08	0,16
25	0,03	0,06	0,06	0,12	0,2	0,4	-	0,03	0,06	0,04	0,10	0,05	0,10
20	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,03	0,06	0,04	0,08
15	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,03	0,06	0,04	0,08

10	-	-	-	-	0,2	0,4	-	-	-	0,02	0,04	0,03	0,06
5	-	-	-	-	0,2	0,4	-	0,010	0,030	0,01	0,03	0,02	0,04
4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,01	0,03	0,02	0,04
2	-	-	-	-	-	-	-	0,006	0,015	0,006	0,015	0,01	0,02
1	-	-	-	-	-	-	-	0,006	0,015	0,006	0,015	0,01	0,02
0,5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,006	0,015	0,01	0,02

7. Таблица допустимых погрешностей для колб, измерительных цилиндров, бюреток и пипеток.

Отсчет показания уровня смачивающей жидкости,(например, воды) в сосуде производится по нижнему краю мениска. В случае отсчета, соответствующего полному делению шкалы, совпадают касательная плоскость, проведенная к поверхности мениска жидкости, и горизонтальная плоскость, проходящая через верхний край отметки шкалы. При несмачивающей жидкости, (например, ртути) отсчет показания производится по верхнему краю мениска в точке касания ее края с нижним краем проверяемой отметки.

Измерительные цилиндры и колбы изготовляются отливными и наливными. Они различаются друг от друга в расчете объема жидкости, оставшейся в сосуде вследствие смачивания. Для получения правильного отсчета наливной измерительный сосуд должен быть перед измерением высушен; отливной сосуд должен быть смочен жидкостью, которую затем выливают, выдерживая сосуд в перевернутом положении при вместимости сосуда 1 л - 30 сек и свыше 1 л - 60 сек .

§ 9. Список литературы.

1. Бронштейн И.Н. и К.А. Семендяев
   Справочник по математике - Гостехиздат, Москва 1948.

2. Длужневский Г.И., С.Н. Немиров, Б.А. Садиков, Л.Ф. Суходольская
   Лабораторные работы по физике. Министерство высшего образования СССР, Методическое Управление, Гос. Изд. "Советская Наука" Москва 1958.

3. Гуткин А.М. и И. Федорова
   Погрешности при физических измерениях. Московский ордена Ленина Энергетический Институт имени В.М. Молотова, Москва 1956.

4. Под ред. В.И. Иверoновой
   Физический практикум. Гостехиздат, Москва 1953.

5. Маликов С.Ф.
   Введение в технику измерений. Комитет по делам мер и измерительных приборов при Совете Министров СССР - Гос. Научно-техническое издательство машиностроительной литературы, Москва 1952.

6. Романовский
   Применение математической статистики в опытном деле. Гостехиздат 1947.

7. Талалаева Е.В.
   О вычислении ошибок измерений. Министерство высшего образования СССР. Изд. Московского Университета 1957.

8. Яковлев К.П.
   Математическая обработка результатов измерений. Гостехиздат, Москва 1950.

П. Комитет стандартов, мер и измерительных приборов при Совете Министров Союза ССР

1. Инструкция 138-57 по поверке штангенциркулей, Москва, 1958 .

2. Сборник инструкций 135-57, 136-57, 137-57 по поверке микрометров, Москва, 1958 .

3. Инструкция 83-57 по поверке измерительных металлических линеек, Москва, 1957 .

4. Инструкция 69-56 по поверке рабочих гирь (мер массы), Москва, 1956 .

5. Приборы для измерения температуры и их поверка. Стандартгиз, Москва, стр.215 .

6. Инструкция 247-54 по поверке секундомеров, Главная Палата Мер и Измерительных Приборов СССР, Москва, 1954.

7. Инструкция 31-53 по поверке мер вместимости стеклянных технических 1-го и 2-го классов, Москва, 1954 .

К А Ф Е Д Р А   О Б Щ Е Й   Ф И З И К И   Т Г У

Отчет о лабораторной работе

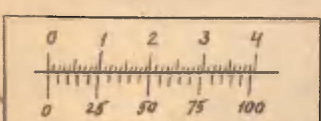
№ 10

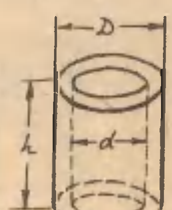
Фамилия: Петров. Имя: Сергей	Матр.: № 60612	Работа выполнена: "20" марта 1961 г.
Факультет, отделение: мед. лечебное	Курс: I	Отчет представлен: "27" марта 1961 г.
Руководитель практикума: асс. Б. Таллмре	Группа: III	Провере- рено: .... Оценка: ....
ЗАГЛАВИЕ РАБОТЫ: N26 N27	Измерения штангенциркулем и микрометром.	
Исследуемые тела: 1) При измерении штангенциркулем — полый цилиндр. 2) При измерении микрометром — моток проволоки	Наименования и номера использованных приборов: Штангенциркуль ШЦ №: 8243555 Точность нониуса 0,05 мм Цена деления шкалы 1 мм Погрешность прибора ±0,05 мм Расстояние между ножками 10 мм Погрешность расстояния -"- ±0,02 мм Микрометр МК №: 1899 Интервал измерений 0-25 мм Погрешность прибора ±0,004 мм Цена деления 0,01 мм	

СХЕМА ОПЫТА

Работа N26 Измерения штангенциркулем

Определить объем и плотность полого цилиндра





$\frac{D}{2} = R$

$\frac{d}{2} = r$

Штангенциркуль состоит из масштабной линейки, вдоль которой передвигается т.н. нониус, с помощью которого можно определить доли одного деления масштаба. Если сдвинуть ножки штангенциркуля вплотную, то нуль нониуса и нуль масштабной линейки совпадают, поэтому поправка нулевой точки отсутствует. Длина нониуса равна 39 мм и на нем нанесено 20 делений; из этого следует, что длина одного деления нониуса равна 39 мм : 20 = 1,95 мм. Точность нониуса равна 2 мм − 1,95 мм = 0,05 мм

Если 1, 2, 3 и т.д. черточки нониуса совпадают с 2, 4, 6 и т.д. делениями масштаба, то расстояние между нулевым делением нониуса и масштаба, а следовательно и ножками штангенциркуля соответственно равно 1×0,05 мм = 0,05 мм, 2×0,05 мм = 0,10 мм, 3×0,05 мм = 0,15 мм. Эти дробные части миллиметра отсчитываем по нониусу, на котором отмечены через каждые 5 делений сотые доли миллиметра 25, 50, 75 и 100. При измерении внутреннего диаметра к показанию на штангенциркуле прибавляется начальное расстояние ножек, равное 10 мм.

Результаты измерения цилиндра

№ п/п	Внешний диаметр		Внутренний диаметр		Высота	
	⌀D мм	$\delta\cdot10^2$ мм	⌀d мм	$\delta\cdot10^2$ мм	h мм	$\delta\cdot10^2$ мм
1	23,75	—	21,90	5	29,05	—
2	23,80	5	21,85	—	29,05	—
3	23,80	5	21,90	5	29,10	5
4	23,80	5	21,85	—	29,05	—
5	23,75	—	21,85	—	29,05	—
6	23,75	—	21,85	—	29,10	5
7	23,75	—	21,90	5	29,05	—
8	23,75	—	21,90	5	29,05	—
9	23,75	—	21,90	5	29,05	—
10	23,80	5	21,85	—	29,10	5
ср. арифм.	23,77	20 : 10 = 2	21,88	25 : 10 = 3	29,07	15 : 10 = 2

D = 23,75 + 0,02 = 23,77 мм
D = (23,77 ± 0,05) мм
R = (11,89 ± 0,03) мм

d = 21,85 + 0,03 = 21,88 мм
d = (21,88 ± 0,07) мм
r = (10,94 ± 0,04) мм

h = 29,05 + 0,02 = 29,07 мм
h = (29,07 ± 0,05) мм

При измерении внешнего диаметра Д отклонения результатов измерений от среднего арифметического равны соответственно +0,02 мм, −0,03 мм, −0,03 мм и т.д. Они меньше, чем погрешность штангенциркуля, равная ±0,05 мм. Поэтому за погрешность среднего арифметического будем принимать погрешность прибора 0,05 мм, к которой при измерении внутреннего диаметра прибавим погрешность ножек 0,02 мм. Погрешность радиуса будет вдвое меньше погрешности диаметра.

Объем вещества цилиндра $V=\pi h(R^2-r^2)$

$V=3{,}14\cdot 29{,}07(11{,}89^2-10{,}94^2)=91{,}280(141{,}37-119{,}68)=$

$=91{,}280\cdot 21{,}69=1979{,}9$ мм^3 1)

Приближенная проверка: $V=3\cdot 29(12^2-11^2)=87(144-121)=2001$ мм^3

Относительная погрешность объема

$$E_V=\frac{\Delta V}{V}=\frac{\Delta h}{h}+\frac{\Delta(R^2-r^2)}{R^2-r^2}+\frac{\Delta\pi}{\pi}=\frac{\Delta h}{h}+\frac{2R\cdot\Delta R+2r\cdot\Delta r}{R^2-r^2}+\frac{\Delta\pi}{\pi}=$$

$$=\frac{0{,}05}{29}+\frac{2\cdot 12\cdot 0{,}03+2\cdot 11\cdot 0{,}04}{21}+\frac{\Delta\pi}{\pi}=0{,}0018+\frac{1{,}60}{21}+\frac{\Delta\pi}{\pi}=$$

$=0{,}0018+0{,}08+0{,}00053=0{,}08233\approx 0{,}083$. 2)

Абсолютная погрешность объема

$\Delta V=V\cdot E_V=20\cdot 10^2\cdot 0{,}083$ мм$^3=166$ мм$^3\approx 170$ мм^3

$V=(1980\pm 170)$ мм$^3=(1{,}98\pm 0{,}17)$ см^3 3) $E_V=8{,}3\%$

Вес цилиндра (на технических весах, точность 0,01 Г)

$P=(17{,}60\pm 0{,}005)$ Г

Удельный вес вещества цилиндра $e=\frac{P}{V}$; $e=\frac{17{,}60\,Г}{1{,}98\,см^3}=8{,}89\,\frac{Г}{см^3}$

Относительная погрешность удельного веса

$E_e=\frac{0{,}005}{17}+\frac{0{,}17}{1{,}98}=0{,}0003+0{,}086=0{,}087$

Абсолютная погрешность удельного веса $\Delta e=8{,}9\cdot 0{,}087=0{,}7743=0{,}8\,\frac{Г}{см^3}$

$e=(8{,}9\pm 0{,}8)\,\frac{Г}{см^3}$; $E_e=8{,}7\%\approx 9\%$

---

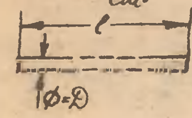
1) В исходных данных h, r и R число значащих цифр 4, поэтому сохраняем в промежуточном результате на одну цифру больше, т.е. 5. Вычисление погрешности покажет, какое число значащих цифр надо принять для числа π.

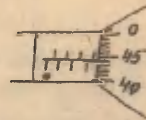
2) Относительная погрешность числа π берется с таким числом знаков после запятой, чтобы при сложении не изменилась первая значащая цифра относительной погрешности объема. Согласно таблице пункта 3 §6 $\frac{\Delta\pi}{\pi}=0{,}00053$ и следовательно $\pi=3{,}14$.

3) Абсолютную погрешность записываем двумя значащими цифрами, т.к. это промежуточный результат (надо вычислить удельный вес).

Работа №27. Изменения микрометром

Вычислить длину мотка латунной проволоки (без изоляции). Удельный вес латуни
$e = (8{,}4 \pm 0{,}05)\,\frac{г}{см^3}$





Показание микрометра
$5{,}5 + 0{,}440 = 3{,}940$ мм

Микромет представляет собою винт, свободно перемещающийся в скобе. Шаг винта равен 0,5 мм. На шкале барабана шагу винта соответствует 50 дел. При повороте барабана на одно деление винт передвигается вперед на расстояние $\frac{1}{50} \cdot 0{,}5 = 0{,}01$ мм, которое называется ценой деления микрометра.

Под горизонтальной чертой шкалы нанесены целые миллиметры, над ней — половины. Отсчитываем по шкале целые и половины мм, а на барабане — сотые доли мм.

При соприкосновении винта со скобой нулевое деление барабана смещается вверх от горизонтальной черты шкалы, следовательно поправка нулевой точки $\alpha > 0$

№ п/п	Нулевая точка	$\delta \cdot 10^3$	Диаметр проволоки D мм	$\delta \cdot 10^3$	$\Delta \cdot 10^3$	$\Delta^2 10^6$
1	+0,007	–	0,290	5	+6	36
2	7	–	,297	12	−1	1
3	7	–	,307	22	−11	121
4	7	–	,295	10	+1	1
5	7	–	,292	7	+4	16
6			,303	18	−7	49
7			,296	11	0	0
8			,293	8	+3	9
9			,285	0	+11	121
10			,299	14	−3	9
[illegible]	+0,007		0,296	107	+22 −22	363

Диаметр $D = 0,285 + \frac{107 \cdot 10^{-3}}{10} =$

$= 0,285 + 0,011 = 0,296$ (мм)

Диаметр вместе с поправкой нулевой точки

$D = 0,296 + 0,007 = 0,303$ (мм).

Отклонения от среднего арифметического достигают 0,01 мм и превышают погрешность прибора $\Delta M = 0,004$ мм, поэтому вычисляем среднюю квадратическую погрешность

$$\sigma_D = \sqrt{\frac{363 \cdot 10^{-6}}{10 \cdot 9}} = \frac{10^{-3}}{3}\sqrt{36,3} = 0,002 \text{ мм}$$

Абсолютная погрешность диаметра

$\Delta D = 3\sigma + \Delta M = 3 \cdot 0,002 + 0,004 = 0,010$ (мм)

Диаметр $D = (0,303 \pm 0,010)$ мм $= (0,0303 \pm 0,0010)$ см

Вес мотка проволоки на технических весах

$P = (3,82 \pm 0,005)$ Г

Так как произведение объема проволоки $\frac{\pi D^2 l}{4}$ на удельный вес e равно весу P, то

$$\frac{\pi D^2 l}{4} \cdot e = P, \text{ откуда } l = \frac{4P}{\pi D^2 e};$$

$$l = \frac{4 \cdot 3,82 \text{ Г}}{3,14 \cdot (30,3 \cdot 10^{-3})^2 \text{см}^2 \cdot 8,4 \frac{\text{Г}}{\text{см}^3}} = \frac{3,82}{3,14 \cdot 918 \cdot 10^{-6} \cdot 2,1} \text{ см} =$$

$$= \frac{3,82 \cdot 10^6}{288 \cdot 10 \cdot 2,1} \text{ см} = \frac{3,82 \cdot 10^6}{605 \cdot 10} \text{ см} = 631 \text{ см}.$$

Относительная погрешность

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta P}{P} + 2\frac{\Delta D}{D} + \frac{\Delta e}{e} + \frac{\Delta \pi}{\pi} = \frac{0,005}{3,8} + 2 \cdot \frac{0,0010}{0,03} + \frac{0,05}{8,4} + \frac{\Delta \pi}{\pi} =$$

$$= 0,0013 + 0,07 + 0,006 + \frac{\Delta \pi}{\pi} = 0,0773 + 0,00053 = 0,078$$

Абсолютная погрешность

$\Delta l = 64 \cdot 10 \cdot 0,078 \approx 50$ см [1]

Длина проволоки

$l = (631 \pm 50)$ см $= (630 \pm 50)$ см [2]

$E_l = 0,078 \approx 8\%$.

---

1) При вычислении погрешности число 631 округлено до двух значащих цифр, т.е. $64 \cdot 10$.

2) Окончательный результат 631 округляют до 630.

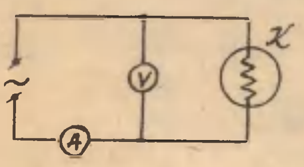
КАФЕДРА ОБЩЕЙ ФИЗИКИ ТГУ

Отчет о лабораторной работе

№ ..7..

Фамилия: Смирнова Имя: Татьяна	Матр.: № 60750	Работа выполнена: "10" апреля 1961 г.
Факультет, отделение: ест-мат. физики	Курс: I	Отчет представлен: "17" апреля 1961 г.
Руководитель практикума: асс. К. Кару	Группа: 5	Прове- рено: ....Оценка: ....
ЗАГЛАВИЕ РАБОТЫ: N93	Определение количества ~~электроэнергии~~ и к.п.д кипятильника	
Исследуемые тела: электрический нагреватель	Наименования и номера использованных приборов: 1) электрический чайник №61279 2) амперметр №2964, класс 2,5, шкала 6а 3) вольтметр №23517, -"- 2,5, -"- 250в 4) мензурка 250 см³, наименьшее деление 25см³ 5) термометр с ценой деления 1°С 6) секундомер, 3 класс	

СХЕМА ОПЫТА



A – амперметр
V – вольтметр
K – нагреватель

Задание

При нагревании воды кипятильником определить:

а) полный расход электроэнергии и ее стоимость, если 1 киловатт-час стоит 4 коп.

б) электроэнергию, затраченную на нагревание воды (полезная работа)

в) к.п.д. кипятильника

2. Ход работы.

а) Вся затраченная электроэнергия в квч

$$A = Nt = 0{,}001\, UJt ,$$

где N – мощность в квт, U – напряжение в вольтах, J – сила тока в амперах, t – время в часах

То же количество энергии, выраженное в калориях согласно закону Джоуля-Ленца

$$Q = cUJt ,$$

где t – время в секундах, $c = (0{,}24 \pm 0{,}005)\,\frac{кал}{дж}$ – термический эквивалент работы

б) Теплота, затраченная на нагревание воды, вычисляется по формуле

$$q = c_1 m (\tau_2 - \tau_1),$$

где c_1 – удельная теплоемкость воды, m – масса воды,
τ_1 – начальная температура воды,
τ_2 – конечная температура воды.

в) К.п.д. кипятильника

$$\eta = \frac{q \cdot 100}{Q}\ \%.$$

Работа выполняется в следующем порядке:

1) в чайник налить 750 см^3 воды, измеренной мензуркой;
2) составляется цепь;
3) измеряется начальная температура τ_1 и при включении тока включается секундомер.
4) во время опыта через каждую минуту регистрируются показания вольтметра и амперметра,
5) вода нагревается до 80-90 °С, затем выключается ток и одновременно останавливается секундомер, после чего измеряется конечная температура воды τ_2;

б) результаты измерений и вычислений заносятся в таблицу:

U(в)	217	215	216	217	217	217	217	216	216	216	215+1=216в
δ(в)	2	–	1	2	2	2	2	1	1	1	$\frac{14}{10}=1{,}4\approx1$
J(а)	2,70	2,70	2,69	2,69	2,69	2,69	2,70	2,70	2,69	2,69	2,69+0=2,69а
$\delta\cdot10^2$(а)	1	1	–	–	–	–	1	1	–	–	$\frac{4\cdot10^{-2}}{10}=0{,}004\approx0$

Погрешность отсчета вольтметра (класс 2,5; шкала 250 в) равна $0{,}025\cdot250\approx7$ в.

Погрешность отсчета амперметра (класс 2,5; шкала 5а) равна $0{,}025\cdot5=0{,}125\approx0{,}13$ а

Из таблицы видно, что отклонения отсчетов вольтметра и амперметра от средних арифметических равны 1 в и 0,01 а, т.е. меньше чем погрешности приборов 7 в и 0,13 а. Поэтому за погрешность среднего арифметического принимаем погрешность прибора

$U=(216\pm7)$ в

$J=(2{,}69\pm0{,}13)$ а

Время нагревания $t=8$ мин. 30 сек ±2 сек $=(510\pm2)$ сек $=(0{,}125\pm0{,}0005)$ час [1]

Масса воды $m=(750\pm6)$ г [1]

Начальная температура $\tau_1=(19{,}1\pm1{,}0)\,^\circ C$ [1]

Конечная —"— $\tau_2=(86{,}2\pm1{,}0)\,^\circ C$ [1]

Разность температур $\tau_2-\tau_1=86{,}2-19{,}1=67{,}1\,^\circ C$

погрешность $1{,}0^\circ+1{,}0^\circ=2{,}0^\circ$

Вся затраченная электроэнергия

$$A=0{,}001\cdot216\,в\cdot2{,}69\,а\cdot0{,}125\,час=0{,}0726\ квч.$$

Относительная погрешность

$$\frac{\Delta A}{A}=\frac{7}{216}+\frac{0{,}13}{2{,}69}+\frac{0{,}0005}{0{,}125}=0{,}033+0{,}049+0{,}004=0{,}086$$

---

[1] См. §8 Таблицы инструментальных погрешностей: погрешности секундомеров (6, III класс), погрешности измерительных цилиндров (7, объем 250 см³ 3 раза измерена) и погрешности технических термометров (5, цена деления 1°С).

Абсолютная погрешность $\Delta A = 0{,}073 \cdot 0{,}086 = 0{,}0063 \approx 0{,}007$ квч

$$A = (0{,}073 \pm 0{,}007)\text{ квч}$$

Стоимость электроэнергии $C = 0{,}073 \cdot 4 = 0{,}292 \approx 0{,}3$ коп.

Затраченная энергия в калориях $Q = 0{,}24 \frac{\text{кал}}{\text{дж}} \cdot 216\text{в} \cdot 2{,}69\text{а} \cdot 510\text{сек} \approx 71 \cdot 10^3$ кал

Относительная погрешность $\frac{\Delta Q}{Q} = \frac{0{,}005}{0{,}24} + \frac{7}{216} + \frac{0{,}13}{2{,}69} + \frac{2}{510} = 0{,}107 \approx 0{,}11$

Абсолютная погрешность $\Delta Q = 71 \cdot 10^3 \cdot 0{,}11 = 781 \approx 800$ кал

$$Q = (71000 \pm 800)\text{ кал.}$$

Количество теплоты, затраченное на нагревание воды

$$q = 1\frac{\text{кал}}{\text{г} \cdot \text{град}} \cdot 750\text{ г} \cdot 67{,}1\text{ град} = 503 \cdot 10^2\text{ кал}$$ 1)

Относительная погрешность $\frac{\Delta q}{q} = 0{,}0009 + \frac{6}{750} + \frac{2}{67} = 0{,}0389 \approx 0{,}04$ 1)

Абсолютная погрешность $\Delta q = 51 \cdot 10^3 \cdot 0{,}04 = 2040 \approx 2100$ кал

$$q = (50300 \pm 2100)\text{ кал}$$

К.п.д. $\eta = \frac{50300}{71000} = 0{,}71 = 71\%$

Относительная погрешность $\frac{\Delta\eta}{\eta} = \frac{\Delta Q}{Q} + \frac{\Delta q}{q} = 0{,}11 + 0{,}04 = 0{,}15$

Абсолютная погрешность $\Delta\eta = 0{,}71 \cdot 0{,}15 = 0{,}1065 = 0{,}11$

Коэффициент полезного действия кипятильника

$$\underline{\eta = (0{,}71 \pm 0{,}11) = (71 \pm 11)\%}$$

$$\underline{E_\eta = 0{,}15 = 15\%}$$

---

1) Средняя удельная теплоемкость воды в интервале температур от 20° до 100°С (смотри В.И. Иверонова, „Физический практикум", 1953, стр. 594) $c_1 = 0{,}9991 \frac{\text{кал}}{\text{г} \cdot \text{град}}$. Абсолютная погрешность $\Delta c_1 = 0{,}0009 \frac{\text{кал}}{\text{г} \cdot \text{град}}$ и относительная погрешность $\frac{\Delta c_1}{c_1} = \frac{0{,}0009}{0{,}9991} = 0{,}0009$

Интервал температур	c_1 $\frac{\text{кал}}{\text{г} \cdot \text{град}}$
20 – 70°С	0,9981
20 – 75°С	0,9984
20 – 80°С	0,9986
20 – 85°С	0,9988
20 – 90°С	0,9991
20 – 95°С	0,9994
20 – 100°С	0,9997