K. Wilde

Kurzer Leitfaden der Geometrie

I. Teil

(7. Schuljahr)

Tallinn, 1939
Schulamt der Estländischen Deutschen Kulturverwaltung

K. Wilde

Kurzer Leitfaden der Geometrie

I. Teil

(7. Schuljahr)

Tallinn, 1939

Schulamt der Estländischen Deutschen Kulturverwaltung

Estländische Druckerei A.-G. Tallinn 1939

Inhaltsverzeichnis.

Erster Abschnitt: Grundbegriffe, Parallelität.

§ 1. Körper, Flächen, Linien, Geraden.

1. Aus dem Vorkursus der Geometrie kennen wir folgende Körper: Säule (Prisma, insbesondere Quader und Würfel), Pyramide, Walze, (Zylinder), Kegel und Kugel.

Betrachten wir die Modelle dieser Körper, so finden wir an ihnen ebene oder krumme Begrenzungsflächen. Da, wo zwei Flächen zusammenstoßen, wo sie einander schneiden, entstehen gerade bezw. krumme Linien.

Wo drei Ebenen zusammenstoßen, entsteht ein Punkt.

2. Eine gerade Linie kann man sich durch einen gespannten Faden veranschaulichen. Dies besagt, daß die Gerade die kürzeste Linie darstellt, die zwei Punkte mit einander verbindet; daher gibt es zwischen zwei Punkten nur eine Gerade, oder mit anderen Worten, eine Gerade ist durch zwei Punkte vollständig bestimmt.

Eine Ebene wird veranschaulicht durch die Oberfläche einer guten Tafel (aus Holz, Metall, Glas) oder den Spiegel einer Flüssigkeit in einem weiten offenen Gefäß.

Wir bezeichnen auf einer Platte zwei Punkte mit Tinte oder Blei, legen über die beiden Punkte einen gespannten Faden und sehen, daß der Faden sowohl innerhalb als auch außerhalb dieser Punkte ganz und gar auf der Platte liegt. Mit anderen Worten: eine Gerade, die durch zwei Punkte einer Ebene geht, liegt auch mit allen übrigen Punkten in dieser Ebene.

Ein Lineal ist ein prismatischer Körper, dessen Kanten annähernd gerade Linien sind. Um die Güte eines Lineals zu prüfen, legt man seine Kante auf eine gut ebengeschliffene Platte und stellt fest, ob alle Punkte der Kante die Ebene berühren.

Ein *Punkt* wird veranschaulicht durch die Spitze eines Blei- oder Kreidestiftes. Bewegt man eine solche Spitze auf einem Blatt Papier oder auf einer Tafel, so entsteht ein Streifen, der eine Linie veranschaulicht.

Eine Linie entsteht durch Bewegung eines Punktes. Bewegt man die Spitze des Blei- oder Kreidestiftes längs der Kante eines Lineals, das mit der Seitenfläche einem Blatte Papier oder einer Tafel aufliegt, so beschreibt diese Spitze eine *Gerade*.

3. Ein Stück einer Geraden, das von beiden Seiten begrenzt ist, heißt *Strecke*.

Begrenzt man eine Gerade durch einen Punkt von einer Seite, so erhält man einen *Strahl*.

Aufg.: Zeichne mit Hilfe des *Stechzirkels* zwei gleiche Strecken $AB = CD$.

Erläutere durch Zeichnung die Bedeutung von $AB > CD$; $AB < CD$; $AB + CD = AD$; $AB - CD = AC$; $AB = 3\ CD$; $AB = \frac{1}{2}\ CD$.

Teile mit Hilfe des Stechzirkels eine Strecke in 2, 3, 4, 5, 6, 10, 20 Teile.

4. *Eine Strecke messen heißt feststellen, wieviel mal die Längeneinheit oder ein Teil von ihr in der betreffenden Strecke enthalten ist.*

Die Längeneinheit kann *willkürlich* gewählt werden.

Die meisten Staaten (außer den angelsächsischen) haben eine *Übereinkunft* getroffen, die Länge eines Stabes, der in Paris aufbewahrt wird, als Längenmaß zu benutzen. Diese Länge heißt 1 *Meter*.

$1\ m = 10\ dm = 100\ cm = 1000\ mm.$

$1\ km = 1000\ m.$

Aufg.: Übe dich im Messen von Strecken mit dem *Bandmaß* und dem *Millimetermaßstab*.

5. Haben zwei Gerade zwei Punkte gemeinsam, so fallen sie zusammen.

Zwei verschiedene Gerade u und v haben einen oder keinen gemeinsamen Punkt.

Haben zwei Gerade einen Punkt gemeinsam, so schneiden sie sich. In diesem Falle bestimmen sie auch eine Ebene.

Haben zwei Gerade keinen Punkt gemeinsam, so liegen sie im allgemeinen auch nicht in einer Ebene. Solche Gerade nennt man windschiefe Gerade.

Liegen zwei Gerade in einer Ebene und schneiden sich trotzdem nicht, so heißen sie parallele Gerade. Solche Gerade haben überall den gleichen Abstand voneinader.

§ 2. Drehung, Winkel, Senkrechte.

1. Drehe eine Strecke AB einmal vollständig um A. Bei einer solchen vollen Drehung beschreibt B einen Kreis.

Ein Kreis ist eine krumme, geschlossene Linie, deren Punkte von einem festen Punkt (Mittelpunkt, Zentrum) gleichen Abstand haben.

Die Strecke, die einen Punkt der Kreislinie mit dem Mittelpunkt verbindet, heißt Halbmesser oder Radius.

Der Kreis wird mit dem Zeichenzirkel gezeichnet.

Das von zwei Punkten begrenzte Stück einer Kreislinie heißt Bogen. Die Strecke, die die Endpunkte des Bogens verbindet, heißt Sehne. Eine Sehne, die durch den Mittelpunkt geht, heißt Durchmesser.

Der Durchmesser ist doppelt so lang wie der Halbmesser.

2. Dreht man einen Strahl AB um seinen Endpunkt **A**, so bildet jede neue Lage des Strahles mit der ursprünglichen Lage einen Winkel (Abb. 1) $\measuredangle$ BAC $= \alpha$. Der Punkt A heißt Scheitelpunkt des Winkels, die Strahlen AB und AC heißen Schenkel. Bei einer vollen Drehung ent-

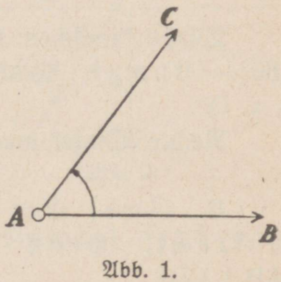

Abb. 1.

steht ein Vollwinkel bei einer halben Drehung ein gestreckter Winkel, bei einer viertel Drehung ein rechter Winkel (Abb. 2: α, β, γ).

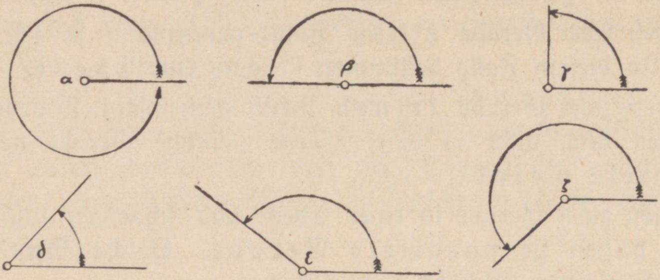

Abb. 2.

Der kleine Winkel, der bei der Ausführung des 360-ten Teiles der Volldrehung entsteht, heißt 1 Grad (1°). Zeichnet man in einem Winkel die Gradteilung hinein, so wird jeder beliebige um seinen Scheitelpunkt gezeichnete Kreis in kleine Bögen eingeteilt. Jeder derartige einem Winkelgrad entsprechende Bogen heißt 1 Bogengrad (°). Somit hat der Vollwinkel 360 Winkelgrad, der Kreis 360 Bogengrad, der gestreckte Winkel und der entsprechende Halbkreis 180° (Winkel- bezw. Bogengrad), der rechte Winkel und der entsprechende Viertelkreis 90°.

Eine halbkreisförmige Scheibe, deren Bogen in 180 Grad geteilt ist, verwendet man als Winkelmesser zum Messen oder Zeichnen von Winkeln.

Aufg.: Zeichne Winkel verschiedener Größe und miß sie mit Hilfe des Winkelmessers.

Zeichne Winkel von 30°, 45°, 60°, 90°, 180°, 225°, 270°, 340°.

Winkel zwischen 0° und 90° heißen spitz, zwischen 90° und 180° — stumpf, Winkel größer als 180° — überstumpf (Abb. 2: δ, ε, ζ).

Rechte Winkel werden mit dem Zeichendreieck gezeichnet.

3. Zwei Gerade (AB und CD) stehen aufeinander senkrecht, wenn sie einen rechten Winkel bilden (AB $\perp$ CD).

Zeichnet man die Senkrechte zu einer Geraden ausgehend von einem Punkt außerhalb der Geraden, so sagt man, die Senkrechte wird auf die Gerade gefällt. — Zeichnet man dagegen die Senkrechte ausgehend von einem Punkte der Geraden, so sagt man, die Senkrechte wird zur Geraden errichtet.

Aufg.: Übe dich im Fällen und Errichten von Senkrechten mit dem Zeichendreieck.

Unter dem Abstande eines Punktes von einer Geraden versteht man die senkrechte Strecke zwischen dem Punkt und der Geraden. Diese senkrechte Strecke heißt Lot.

Aufg.: Zeichne auf verschiedenen Seiten horizontaler, vertikaler und schräger Geraden Punkte und bestimme ihre Abstände von den Geraden.

4. Schneiden zwei Gerade s und t (Abb. 3) einander, so entstehen vier Winkel. Man faßt diese zu je zwei zusammen und spricht — im Hinblick auf ihre gegenseitige Lage — von Nebenwinkeln und Scheitelwinkeln.

Erklärung: Nebenwinkel sind Winkel, die einen Schenkel gemeinsam haben, während die beiden anderen Schenkel eine Gerade bilden (Abb. 3: α und β).

Lehrsatz (Nebenwinkelsatz): Die Summe zweier Nebenwinkel beträgt 180°.

Wir betrachten (Abb. 3) die beiden Nebenwinkel α und β. Beide zusammen geben einen gestreckten Winkel, weil die beiden verschiedenen Schenkel eine Gerade bilden. Mithin ist $\alpha + \beta = 180°$.

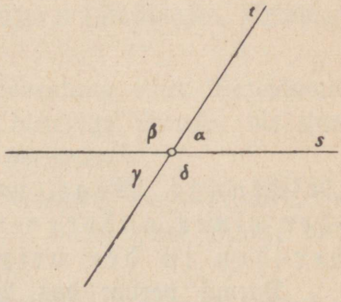

Abb. 3.

5. Scheitelwinkel sind Winkel, bei denen die Schenkel des einen Winkels Verlängerungen der Schenkel des anderen sind.

Lehrsatz (Scheitelwinkelsatz): Scheitelwinkel sind einander gleich.

Wir drehen die Gerade s um den gemeinsamen Scheitelpunkt der Winkel α und γ (Abb. 3) so weit, bis s mit t zusammenfällt. Beide Winkel entstehen durch ein- und dieselbe Drehung. Also ist $\alpha = \gamma$.

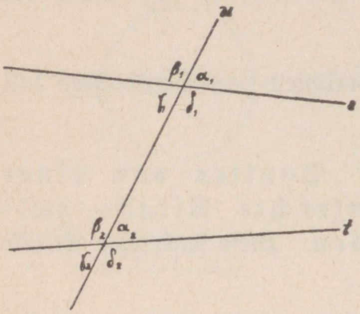

Abb. 4.

6. Werden zwei Gerade von einer dritten in zwei verschiedenen Punkten geschnitten, so entstehen 8 Winkel (Abb. 4). Im Hinblick auf ihre gegenseitige Lage an den beiden geschnittenen Geraden nennt man die Winkelpaare (α_1, α_2), (β_1, β_2), (γ_1, γ_2), (δ_1, δ_2) Gegenwinkel; die Winkelpaare (α_1, γ_2), (β_1, δ_2), (γ_1, α_2), (δ_1, β_2) — Wechselwinkel; die Winkelpaare (α_1, δ_2), (β_1, γ_2) (δ_1, α_2), $\gamma_1, \beta_2)$ — entgegengesetzte Winkel.

§ 3. Schiebung, Parallelität.

1. Schiebt man ein Dreieck (etwa das Zeichendreieck) oder eine andere geradlinig begrenzte Figur so, daß eine der Seiten auf einer festen Geraden gleitet (Abb. 5), so beschreiben alle Punkte der Figur

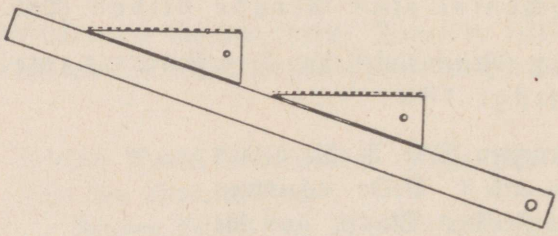

Abb. 5.

gleichlange Wege, und jede neue Lage einer Seite oder einer anderen mit der Figur fest verbundenen Geraden ist der ursprünglichen Lage parallel.

Darauf beruht das Verfahren mit Hilfe eines Zeichendreiecks und eines Lineals die Parallele zu einer gegebenen Geraden zu zeichnen. Als Zeichen für parallel schreibt man $\|$.

Aufg.: übe dich im Zeichnen von Parallelen.

2. a) *Lehrsatz: Sind zwei Gerade parallel* (Abb. 6), *so sind die Gegenwinkel gleich.*

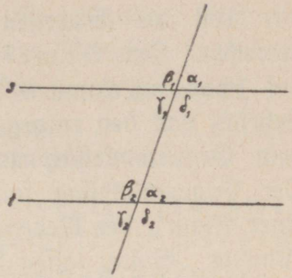

Abb. 6.

Bei Parallelen können die Gegenwinkel durch Schiebung in einander übergeführt werden. Also ist $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$, $\gamma_1 = \gamma_2$, $\delta_1 = \delta_2$.

b) *Lehrsatz: Sind zwei Gerade parallel, so sind die Wechselwinkel gleich.*

α_1 und γ_2 sind Wechselwinkel; $\alpha_1 = \alpha_2$ als Gegenwinkel; $\gamma_2 = \alpha_2$ als Scheitelwinkel. Sind aber zwei Größen (α_1, γ_2) einzeln einer dritten Größe (α_2) gleich, so sind sie auch unter einander gleich. Folglich ist $\alpha_1 = \gamma_2$.

Beweise die Gleichheit der übrigen Wechselwinkel.

c) *Lehrsatz: Sind zwei Gerade parallel, so beträgt die Summe zweier entgegengesetzter Winkel 180°.*

α_1 und δ_2 sind entgegengesetzte Winkel. $\alpha_1 + \delta_1 = 180°$, weil α_1 und δ_1 Nebenwinkel sind; $\delta_1 = \delta_2$ als Gegenwinkel. Also ist $\alpha_1 + \delta_2 = 180°$. Ebenso beweist man, daß die Summe zweier anderer entgegengesetzter Winkel 180° beträgt.

Aufg.: Beweise, daß Winkel mit parallelen Schenkeln entweder gleich sind oder einander zu 180° ergänzen.

3. In der Mathematik begegnen wir drei Arten von Sätzen: *Erklärungen* (Definitionen), *Grundsätzen* (Postulaten, Axiomen) und *Lehrsätzen* (Sätzen).

In einer *Erklärung* wird die Bedeutung einer Bezeichnung genau festgelegt. — „Der Halbmesser ist diejenige Strecke, die einen Punkt des Kreises mit seinem Mittelpunkt verbindet".

In einem *Grundsatz* wird eine Beziehung ausgesprochen, die ohne weiteres klar ist. — „Eine Gerade ist durch zwei Punkte vollständig bestimmt".

In einem *Lehrsatz* wird einer Wahrheit Ausdruck verliehen, die nicht ohne weiteres einleuchtet. — „Werden zwei Parallele von einer dritten Geraden geschnitten, so beträgt die Summe der entgegengesetzten Winkel 180°".

Um die Wahrheit eines Lehrsatzes darzutun, muß man ihn beweisen. Im Beweis wird gezeigt, daß die Wahrheit des Satzes auf schon anerkannten Wahrheiten beruht. So ließ sich z. B. der Lehrsatz von den entgegengesetzten Winkeln an parallelen Geraden aus dem Gegenwinkelsatz und dem Satz von den Nebenwinkeln ableiten. Der Gegenwinkelsatz folgt aus einer Erfahrung (Parallelverschiebung einer Figur), der Nebenwinkelsatz — aus der Erklärung des gestreckten Winkels. Somit lassen sich alle Lehrsätze auf Erklärungen und Grundsätze zurückführen. Da die Grundsätze der Erfahrung (Anschauung) entnommen sind, so beruht auch die Mathematik, wie die Naturwissenschaften, letzten Endes auf Erfahrung. Während aber die Naturwissenschaften die meisten Wahrheiten der Erfahrung (Beobachtung, Messung, Versuch) entnehmen, begnügt sich die Mathematik mit nur sehr wenigen Erfahrungssätzen. Die Bestätigung aller übrigen Sätze erfolgt auf dem obenerwähnten Wege des Beweises. Obgleich der Beweis die Wahrheit des mathematischen Satzes sicherstellt, bleibt doch die Anschauung der beste Wegweiser zum Auffinden, Erfassen und Behalten geometrischer Sätze. Allerdings muß beachtet werden, daß die Anschauung zuweilen auch trügt (optische Täuschungen).

4. In der Fassung eines Lehrsatzes unterscheidet man zwei Teile: die Voraussetzung (die Bedingung; das, was gegeben ist) und die Behauptung (das, was aus der Bedingung, aus dem Gegebenen folgt). — „Sind zwei Gerade parallel", — ist die Voraussetzung, — „so beträgt die Summe zweier entgegengesetzter Winkel 180°" — die Behauptung.

Werden Voraussetzung und Behauptung miteinander vertauscht, so erhält man die Umkehrung des betreffenden Satzes. — „Beträgt die Summe zweier entgegengesetzter Winkel 180°, so sind die Geraden parallel".

Ist ein Satz wahr, so braucht deswegen seine Umkehrung noch nicht wahr zu sein. „Bricht die Uhrfeder entzwei, so bleibt die Uhr stehen". Dieser Satz ist zweifellos richtig. Die Umkehrung dagegen: „wenn die Uhr stehen geblieben ist, so ist die Uhrfeder entzwei gebrochen", braucht nicht zu stimmen, weil die Uhr abgelaufen, eine Achse, ein Rädchen zerbrochen sein kann, usw. Bildet man die Umkehrung verschiedener Sätze, so überzeugt man sich bald, daß die wenigsten Sätze umkehrbar sind. Falsch ist auch die Umkehrung des Nebenwinkelsatzes: „Beträgt die Summe zweier Winkel 180°, so sind diese Winkel Nebenwinkel.

Ein Satz, der umgekehrt werden kann, ist folgender: Lebt ein Mensch, so schlägt sein Herz. Schlägt das Herz eines Menschen, so lebt er.

Ebenso lassen sich die Lehrsätze von den Parallelen umkehren.

5. Umkehrung der Lehrsätze von den Parallelen.

a) Lehrsatz: Sind die Gegenwinkel (an zwei Geraden, die von einer dritten geschnitten werden) gleich, so sind die (geschnittenen) Geraden parallel.

Merke! Gegeben ist die Gleichheit der Gegenwinkel. Zu untersuchen ist der Verlauf der Geraden s und t. Da wir darüber nichts wissen, sind die Geraden auf der Abb. 7 auch nicht parallel gezeichnet.

Voraussetzung: $\alpha_1 = \alpha_2$ (Abb. 7);

Behauptung: s ∥ t.

Beweis: Wir schieben den Winkel α_1 längs u bis sein Scheitelpunkt mit dem des Winkels α_2 zusammenfällt. Dann fällt auch s mit t zusammen, weil $\alpha_1 = \alpha_2$. Die ausgeführte Bewegung ist eine Parallelverschiebung. Infolgedessen muß die ursprüngliche Lage von s jeder neuen Lage, also auch der Lage t, parallel bleiben. Folglich ist s ∥ t.

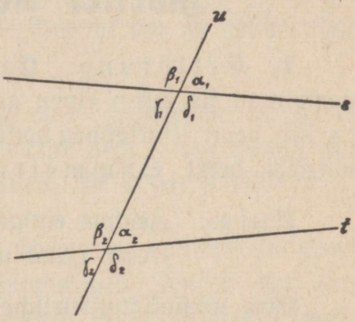

Abb. 7.

b) Lehrsatz: Sind die Wechselwinkel an zwei Geraden gleich, so sind die Geraden parallel.

Voraussetzung: $\alpha_1 = \gamma_2$

Behauptung: s ∥ t.

Beweis: $\alpha_1 = \gamma_2$ nach Voraussetzung; $\gamma_2 = \alpha_2$ als Scheitelwinkel. Folglich ist $\alpha_1 = \alpha_2$ als zwei Größen, die einzeln einer dritten gleich sind. α_1 und α_2 sind aber Gegenwinkel, und da nach dem vorigen Lehrsatz Gegenwinkel nur bei parallelen Geraden gleich sind, ist s ∥ t.

c) Lehrsatz: Beträgt die Summe zweier entgegengesetzter Winkel 180°, so sind die Geraden parallel.

Voraussetzung: (Abb. 7) $\alpha_1 + \delta_2 = 180°$;

Behauptung: $s \parallel t$.

Beweis: $\alpha_1 + \delta_2 = 180°$ nach der Voraussetzung. $\alpha_2 + \delta_2 = 180°$ nach dem Lehrsatz von den Nebenwinkeln. Folglich ist

$$\begin{array}{r}\alpha_1 + \delta_2 = \alpha_2 + \delta_2 \\ - \delta_2 = \quad - \delta_2 \\ \hline \alpha_2 = \alpha_2\end{array}$$

α_1 und α_2 sind aber Gegenwinkel, und da die Gegenwinkel nur an parallelen Geraden gleich sind, ist $s \parallel t$.

Zweiter Abschnitt: Symmetrie.

1. Erklärung: Eine Figur heißt achsialsymmetrisch, wenn man sie durch einen geraden Schnitt in zwei Teile zerlegen kann, die sich beim Umklappen decken. Die Gerade, die eine solche Teilung vollzieht, heißt Symmetrieachse der Figur.

Aufg.: Zeichne einige bekannte achsialsymmetrische Figuren aus freier Hand und bezeichne jedesmal die Symmetrieachse.

Eine achsialsymmetrische Figur kann dadurch erzeugt werden, daß man eine Figur um eine Gerade (diese kann auch eine Seite der Figur bilden) klappt, einen Abdruck der Figur herstellt und beide Figuren zusammen — die alte und die neue – als eine Figur auffaßt.

Erklärung: Figuren, die sich beim Aufeinanderlegen decken, heißen kongruent ($\cong$).

Aufg.: Klappe einen Halbkreis, den du mit einem weichen Bleistift auf ein Blatt Papier gezeichnet hast, um den Durchmesser (Blatt zusammenfalten!) und stelle durch Reiben einen Abdruck her.

Ergebnis: der Kreis ist eine achsialsymmetrische Figur. Jeder Durchmesser ist eine Symmetrieachse.

Aufg.: Klappe ein schiefwinkliges Dreieck um eine Seite.

Ergebnis: der Drache ist eine achsialsymmetrische Figur mit einer Eckenlinie als Symmetrieachse.

Aufg.: Fertige eine sogenannte Klexographie an.

Aufg.: Fertige die Klexographie eines „Punktes“ an.

2. Den zu einem Punkt in Bezug auf eine Achse symmetrischen Punkt findet man auf folgende Weise:

Man fällt aus dem gegebenen Punkt das Lot zur Achse und verlängert es um seine Länge. Das Ende des verlängerten Lotes ist der gesuchte Punkt.

Aufg.: Zeichne zu verschiedenen gegebenen Punkten die in Bezug auf die Achse symmetrischen Punkte.

Um eine Figur zu zeichnen, die zur gegebenen in Bezug auf eine Achse symmetrisch liegt, muß man zu jedem Punkt der Figur, den symmetrischen Punkt finden. In den meisten Fällen erlauben es die geometrischen Eigenschaften der Figur, die Anzahl der zu zeichnenden Puntte zu verringern.

Aufg.: Zeichne eine Strecke, die zu einer gegebenen Strecke in Bezug auf eine Achse symmetrisch liegt. Tue das gleiche für ein Dreieck, für ein Fünfeck, für einen Kreis.

3. Klappt man ein Dreieck um eine Seite, so entsteht im allgemeinen ein Viereck. Nur wenn ein rechtwinkliges Dreieck um eine Kathete (eine den rechten Winkel einschließende Seite) geklappt wird, entsteht ein achsialsymmetrisches Dreieck.

Lehrsatz: In einem achsialsymmetrischen Dreieck sind zwei Winkel und zwei Seiten gleich. Die Symmetrieachse halbiert die Grundlinie, halbiert den Winkel an der Spitze und steht auf der Grundlinie senkrecht (Abb. 8).

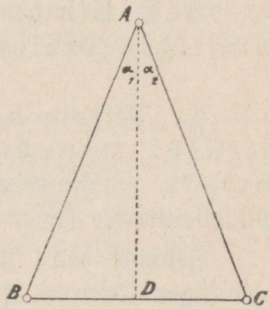

Abb. 8.

Voraussetzung: $\triangle ABD \cong \triangle ACD$;

1. Behauptung: $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD$;
2. Behauptung: $AB = AC$;

3. Behauptung: $BD = CD$;
4. Behauptung: $\alpha_1 = \alpha_2$
5. Behauptung: $AD \perp BC$.

Beweis: Da nach der Voraussetzung die Dreiecke ABD und ACD beim Aufeinanderlegen sich decken, so ist $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD$; $AB = AC$; $BD = CD$; $\alpha_1 = \alpha_2$. Da ferner BC eine Gerade ist, so ist $\sphericalangle ADB + \sphericalangle ADC = 180°$. Und da $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ADC$ infolge der gegebenen Dreieckskongruenz ist, so ist $\sphericalangle ADB = 90° = \sphericalangle ADC$. D. h. $AD \perp BC$.

4. Die beiden gleichen Seiten eines achsialsymmetrischen Dreiecks heißen Schenkel des Dreiecks, daher heißt das achsialsymmetrische Dreieck auch gleichschenkliges Dreieck. Die dritte Seite nennt man Grundlinie oder Basis. Die beiden gleichen Winkel heißen Basiswinkel.

Nimmt man die Symmetrie als Einteilungsgrund, so kann man die Dreiecke in symmetrische (gleichschenklige) und unsymmetrische Dreiecke einteilen.

Einen besonderen Fall des gleichschenkligen Dreiecks bildet das gleichseitige Dreieck, bei dem alle drei Seiten gleich sind.

Aufg.: Was kann man über die symmetrischen Eigenschaften und was über die Winkel des gleichseitigen Dreiecks sagen?

Satz. Ein gleichseitiges Dreieck ist auch ein gleichwinkliges Dreieck.

5. Unter der Mittelsenkrechten einer Strecke versteht man die Senkrechte im Mittelpunkt dieser Strecke. — Die Symmetriachse eines gleichschenkligen Dreiecks ist die Mittelsenkrechte seiner Basis.

Zeichnet man über einer Strecke als Basis eine Reihe gleichschenkliger Dreiecke, so haben sie alle eine gemeinsame Symmetrieachse — die Mittelsenkrechte der Basis. Mit anderen Worten ihre Spitzen bestimmen die Mittelsenkrechte dieser Strecke. Da eine Gerade durch zwei Punkte vollständig bestimmt ist, genügt es, die Spitzen von zwei gleichschenkligen Dreiecken zu konstruieren, um die Mittelsenkrechte der Basis zu finden.

Die Konstruktion der Mittelsenkrechten einer gegebenen Strecke wird mit *Zirkel* und *Lineal* folgendermaßen ausgeführt (Abb. 9). Ist Platz vorhanden, so schlägt man um A und B Kreisbögen mit gleichem Radius, deren zwei Schnittpunkte die Lage der gesuchten Mittelsenkrechten bestimmen. Man kann also in diesem Fall die *Konstruktion mit ein- und derselben Zirkelöffnung* ausführen. Ist dagegen auf der einen Seite nur wenig Platz vorhanden (die Strecke liegt am Rande des Papierblattes), so könnte man die Zirkelöffnung nur wenig größer als $\frac{AB}{2}$ nehmen, erhielte also eine ungenaue Konstruktion (warum?). Hier muß man zur allgemeinen Konstruktion *mit verschiedener Zirkelöffnung* auf einer Seite von AB zurückgreifen.

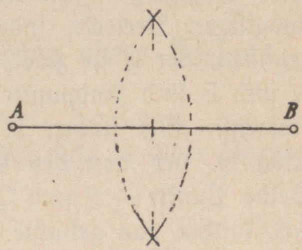

Abb. 9.

6. Zuweilen bilden alle Punkte, denen ein- und dieselbe Eigenschaft zukommt, eine Linie (geometrischer Ort).

Alle Punkte, die von einem festen Punkt gleichen Abstand haben, bilden einen Kreis.

Alle Punkte, die von einer festen Geraden gleichen Abstand haben, bilden zwei Parallele zu dieser Geraden.

Alle Punkte, die von zwei parallelen Geraden gleich weit entfernt sind, liegen auf ihrer Mittelparallelen.

Alle Punkte, die von zwei festen Punkten gleich weit entfernt sind, bilden die Mittelsenkrechte der Verbindungsstrecke der beiden festen Punkte.

Folgerung: Die Mittelsenkrechte einer Strecke ist eine Symmetrieachse der Strecke.

7. Die durchgenommenen Sätze erlauben es, noch folgende Konstruktionsaufgaben mit *Zirkel und Lineal* zu lösen.

Aus einem Punkt außerhalb einer Geraden das Lot auf sie zu fällen.

Gegeben: Die Gerade g und der Punkt P. (Führe die Zeichnung selbst aus. Den gegebenen Punkt bezeichne mit einem kleinen Kreuz).

Lösung: Wir machen P zur Spitze eines willkürlichen gleichschenkligen Dreiecks, indem wir um P als Mittelpunkt einen Kreis zeichnen, der g in zwei Punkten schneidet. Die beiden Schnittpunkte A und B sind Endpunkte der Basis AB. P ist von ihnen gleich weit entfernt. Wir finden in bekannter Weise noch einen zweiten Punkt, etwa Q, der von den Endpunkten der Basis gleich weit entfernt ist. Beide Punkte — P und Q — bestimmen die Mittelsenkrechte der Strecke AB, mithin das gesuchte Lot.

8. Aus einem Punkt P einer Geraden g soll die Senkrechte zu ihr errichtet werden.

Gegeben: g und P. (Führe die Zeichnung selbst aus!)

Lösung: Wir machen P zum Mittelpunkt einer Strecke, indem wir um P mit beliebigem Halbmesser einen Kreis schlagen, der g in A und B schneidet. Wir finden in bekannter Weise einen Punkt Q, der von A und B den gleichen Abstand hat. P und Q bestimmen die Mittelsenkrechte von AB (warum?), und damit die gesuchte Senkrechte.

9. Einen gegebenen Winkel zu halbieren.

Gegeben: ∢ AOB (Abb. 10).

Aufg.: Den Winkel zu halbieren.

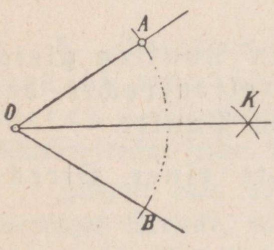

Abb. 10.

Lösung: Wir zeichnen um O mit beliebigem Halbmesser einen Kreis. Dieser schneidet von den Schenkeln des Winkels gleiche Stücke ab (OA = OB), die wir als Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks mit der Basis AB auffassen. Die Basis brauchen wir nicht zu zeichnen. In bekannter Weise finden wir einen von A und B gleich weit entfernten Punkt K, durch den die Mittelsenkrechte der Basis AB bestimmt wird. Diese geht durch O und halbiert den Winkel bei O.

Anmerkung: Weitere Konstruktionsaufgaben finden sich im Anhang.

Dritter Abschnitt: Dreieckslehre.

§ 1. Beziehungen zwischen den Stücken eines Dreiecks.

1. Erklärungen. Als Dreieck $\triangle ABC$ bezeichnet man eine Figur, die entsteht, wenn man drei Punkte, die nicht in einer Geraden liegen, mit einander verbindet. Die Verbindungsstrecken heißen Seiten, die Endpunkte der Strecken heißen Ecken, die von den Strecken gebildeten Winkel heißen Winkel des Dreiecks. Seiten und Winkel heißen Stücke des Dreiecks. Man ist überein gekommen, die Stücke auf die zweckmäßigste Art und Weise so zu bezeichnen, wie es aus Abb. 11 zu ersehen ist. Die einem Winkel (α) entsprechende Seite (a) ist seine Gegenseite.

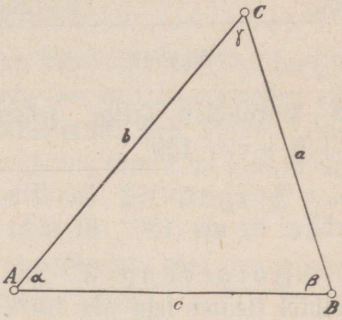

Abb. 11.

Der Abstand einer Ecke von der gegenüberliegenden Seite heißt Höhe des Dreiecks. Jedes Dreieck hat drei Höhen (Abb. 12).

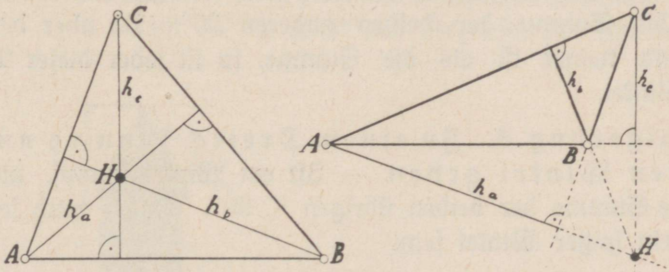

Abb. 12.

Aufg.: Schneide aus Kartonpapier ein Dreieck aus, schlage um jede Ecke mit dem Zirkel einen Bogen und schneide mit der Schere die Winkel längs den Bögen ab. Lege die drei Winkel aneinander!

2. Lehrsatz (Innenwinkelsatz): Die Summe der Winkel eines Dreiecks beträgt 180°.

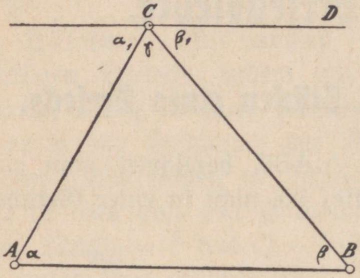

Abb. 13.

Voraussetzung: (Abb. 13). α, β und γ sind Winkel des $\triangle$ ABC.

Behauptung: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Beweis: Wir zeichnen durch C die Parallele zu AB. Die dabei entstehenden Winkel α_1 und β_1 bilden zusammen mit γ einen gestreckten Winkel. D. h. $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma = 180°$. Da aber $\alpha_1 = \alpha$ und $\beta_1 = \beta$ ist, als Wechselwinkel an Parallelen (zeige jedes Mal die Schneidende!), so ist auch $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Folgerung 1. Ein Dreieck, in dem die Summe der Winkel größer ist als 180°, ist nicht möglich.

Folgerung 2. In einem Dreieck muß die Summe zweier Winkel kleiner sein als 180°.

Folgerung 3. In einem Dreieck bestimmen zwei Winkel den dritten. Stimmen also zwei Dreiecke in zwei Winkeln überein, so müssen sie auch im dritten Winkel übereinstimmen.

Folgerung 4. **In einem Dreieck kann nur ein Winkel ein rechter Winkel sein.** — Ist ein Winkel 90°, so beträgt die Summe der beiden anderen 90°. Da aber der einzelne Summand kleiner ist als die Summe, so ist jeder dieser Winkel ein spitzer Winkel.

Folgerung 5. **In einem Dreieck kann es nur einen stumpfen Winkel geben.** — Ist ein Winkel stumpf, also $> 90°$, so ist die Summe der beiden übrigen $< 90°$. Daher muß jeder dieser Winkel ein spitzer Winkel sein.

Erklärung: Nach der Größe der Winkel werden die Dreiecke eingeteilt in rechtwinklige (Dreiecke, die einen rechten Winkel haben), stumpfwinklige (Dreiecke mit einem stumpfen Winkel) und spitzwinklige (alle Dreieckswinkel sind spitze Winkel).

Im rechtwinkligen Dreieck heißen die senkrecht aufeinander stehenden Seiten Katheten; die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite heißt Hypotenuse.

Folgerung 6. Winkel, deren Schenkel aufeinander senkrecht stehen, sind entweder gleich, oder ergänzen einander zu 180°. Beweis leicht!

Anleitung: 1. Fall. Gegeben sei ein spitzer Winkel. Aus einem Punkt außerhalb des Winkels fällen wir die beiden Lote auf seine Schenkel. Wir betrachten die beiden entstandenen Dreiecke. Diese stimmen in zwei Winkeln (welchen?) überein. Daher müssen sie auch (Folg. 3) im dritten Winkel übereinstimmen.

Die übrigen Fälle erhält man, wenn man je einen Schenkel des Winkels in die entgegengesetzte Richtung zeichnet.

Aufg.: Fertige dir aus Karton einen Winkelmesser (Durchmesser wenigstens 20 cm) an, leime an den Durchmesser eine Leiste und befestige im Mittelpunkt den Faden eines Senkbleis. Mit dieser Vorrichtung kannst du (auf Grund der Folg. 6) Höhenwinkel oder die Neigung einer schrägen Platte messen.

Der Höhenwinkel ist ein Winkel, den eine schräge Gerade mit einer waagerechten bildet.

Zur Bestimmung der Höhe eines Gegenstandes mußt du seine Spitze anvisieren und den Höhenwinkel bestimmen. Ferner mußt du die waagerechte Grundlinie a (Abb. 14) und deine Augenhöhe ausmessen. Fertigst du nun eine Zeichnung an, in der du 1 Meter 1 Centimeter lang zeichnest (verjüngter Maßstab 1 : 100), so kannst du die Höhe des Gegenstandes finden.

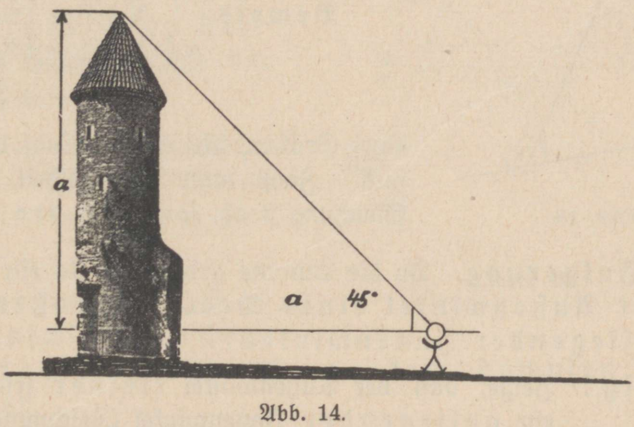

Abb. 14.

Anleitung: Zeichne zunächst die Grundlinie, dann die anliegenden Winkel (90° und den gemessenen Höhenwinkel).

Aufg.: Erkläre die Abb. 14.

Aufg.: Berechne die Winkel eines gleichseitigen Dreiecks.

Aufg.: Berechne die Summe der Innenwinkel eines Vierecks, eines Fünfecks, eines Sechsecks, eines n-ecks.

Aufg.: Von den Winkeln α, β, γ eines Dreiecks ist 1) $\alpha = 58°$; $\beta = 72$; 2) $\alpha = 36°$; $\beta = 64°$; 3) $\alpha = 15°$; $\beta = 32°$. Wie groß ist der dritte Winkel γ?

Aufg.: In einem Dreieck ist α doppelt so groß und β sechsmal so groß als γ. Wie groß sind die Winkel?

Aufg.: In einem rechtwinkligen Dreieck ist der eine spitze Winkel (α) gegeben. Wie groß ist der andere (β)? 1) $\alpha = 60°$; 2) $\alpha = 37°$; 3) $\alpha = 45°$

Aufg.: Ein Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks beträgt 50°. Wie groß ist der Winkel an der Spitze?

3. Erklärung: Unter dem Außenwinkel eines Dreiecks versteht man einen Winkel, der von einer Seite und der Verlängerung der anstoßenden Seite gebildet wird. Ein Dreieck hat sechs Außenwinkel.

Lehrsatz (Außenwinkelsatz): Der Außenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der beiden nicht anliegenden Innenwinkel.

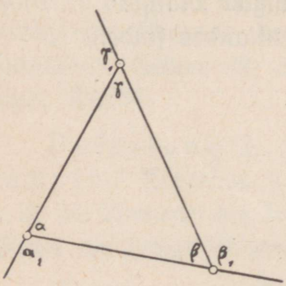

Abb. 15.

Voraussetzung: β_1 ist ein Außenwinkel (Abb. 15).

Behauptung: $\beta_1 = \alpha + \gamma$

Beweis:
$$\begin{array}{r}\beta_1 + \beta = 180° \text{ (warum?)} \\ \alpha + \beta + \gamma = 180° \text{ (warum?)} \\ \hline \beta_1 + \beta = \alpha + \beta + \gamma,\end{array}$$
als zwei Größen, die einzeln einer dritten gleich sind. Zieht man von beiden Seiten der Gleichung β ab, so folgt $\beta_1 = \alpha + \gamma$.

1. Folgerung. Da die Summe größer ist als ein Summand, so ist der Außenwinkel eines Dreiecks größer als ein nichtanliegender Innenwinkel.

Aufg.: Zeige, daß der Außenwinkel kleiner sein kann als ein anliegender Innenwinkel (Zeichnung).

2. Folgerung. Der Außenwinkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks ist doppelt so groß als ein Basiswinkel. Beweise den Satz selbst.

Aufg.: Verlängere den Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks über die Spitze hinaus um seine eigene Länge. Verbinde den erhaltenen Endpunkt mit der einen Ecke der Grundlinie. Was für einen Winkel bildet die zuletzt gezeichnete Strecke mit der Grundlinie.

Aufg.: Beweise, daß in einem gleichschenkligen Dreieck eine Parallele zur Grundlinie ein ebenfalls gleichschenkliges Dreieck abschneidet.

Aufg.: Die durch die Spitze eines achsialsymmetrischen Dreiecks gezogene Parallele zur Grundlinie halbiert den Außenwinkel an der Spitze.

4. Lehrsatz: In einem Dreieck liegt der größeren Seite der größere Winkel gegenüber.

Im gleichschenkligen Dreieck ABC liegen den beiden gleichen Schenkeln die gleichen Basiswinkel gegenüber (Abb. 16). Dreht man die Grundlinie um ihren Mittelpunkt M, so sieht man: so lange $c > b$, ist auch $\gamma > \beta$, so lange $c < b$, ist $\gamma < \beta$.

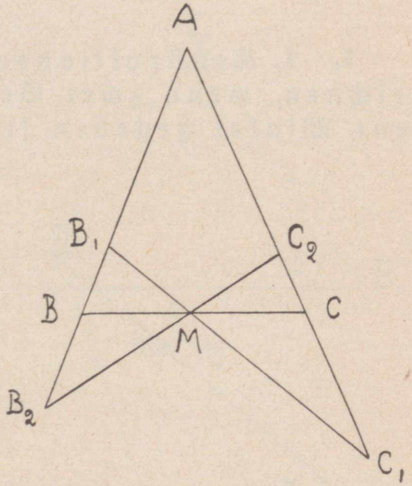

Abb. 16.

1. Folgerung. In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse die größte Seite.

2. Folgerung. Das Lot ist der kürzeste Abstand eines Punktes von einer Geraden.

3. Folgerung. In einem stumpfwinkligen Dreieck liegt die größte Seite dem stumpfen Winkel gegenüber.

5. Lehrsatz: In einem Dreieck ist die Summe zweier Seiten größer als die dritte Seite.

Beweis: Wir fassen insbesondere die Ecken A und B des Dreiecks ABC (Abb. 11) ins Auge. Da die Strecke AB die kürzeste Entfernung zwischen den Punkten A und B bildet, so ist der gebrochene Linienzug $ACB > AB$ oder $AC + CB > AB$.

Aufg.: Beweise den Satz, indem du von der Strecke AC ausgehst.

Aufg.: Beweise, daß eine Seite des Dreiecks größer ist als die Differenz der beiden anderen Seiten.

§ 2. Dreieckskonstruktionen. Kongruenz.

Ein Dreieck hat sechs Stücke: drei Seiten und drei Winkel. Zwischen den Stücken des Dreiecks bestehen jedoch Beziehungen. So ist beispielsweise der dritte Winkel schon bestimmt, wenn die beiden anderen Winkel gegeben sind. Im Folgenden werden wir sehen, welche Stücke ein Dreieck vollständig bestimmen.

1. 1. Konstruktionsaufgabe: Ein Dreieck zu zeichnen, wenn zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind.

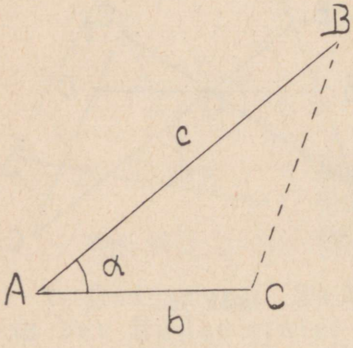

Abb. 17.

Gegeben: b, c, $\sphericalangle \alpha$.

Wir zeichnen zunächst (Abb. 17) den Winkel α und tragen auf seinen Schenkeln die Stücke b und c ab.

Da es zwischen B und C nur eine Strecke gibt, so ist das Dreieck durch die gegebenen Stücke vollständig bestimmt.

Anmerkung: Zeichnet man mehrere Dreiecke nach diesen Angaben, so ist es möglich sie durch Aufeinanderlegen zur Deckung zu bringen.

Figuren, die sich beim Aufeinanderlegen decken, heißen kongruente Figuren. Demnach sind alle nach den Angaben der 1. Konstruktionsaufgabe gezeichneten Dreiecke kongruent. — Trägt man b und c in einer anderen Reihenfolge auf den Schenkeln von α ab, so entsteht ein symmetrisches Dreieck, das man vorher umklappen muß, um es mit einem früher gezeichneten durch Aufeinanderlegen zur Deckung zu bringen. Figuren, die erst nach erfolgtem Umklappen sich decken, heißen ebenfalls kongruent.

Dies vorausgeschickt, können wir sagen, daß durch zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel eindeutig kongruente Dreiecke bestimmt werden.

2. 2. Konstruktionsaufgabe: Ein Dreieck zu zeichnen, wenn eine Seite und die beiden anliegenden Winkel gegeben sind.

Gegeben: c, $\sphericalangle \alpha$, $\sphericalangle \beta$. Selbstverständlich muß $\alpha + \beta < 180°$ sein.

Wir zeichnen zunächst (Abb. 18) die Seite $c = AB$ und machen A und B zu Scheitelpunkten der Winkel α und β. Da sich zwei Geraden nur in einem Punkte schneiden, so ist hier eine ganz bestimmte Lösung vorhanden. Wendet man die Anmerkung zur 1. Konstruktionsaufgabe auch hier an, so kann man sagen: durch eine Seite und die beiden anliegenden Winkel werden eindeutig kongruente Dreiecke bestimmt.

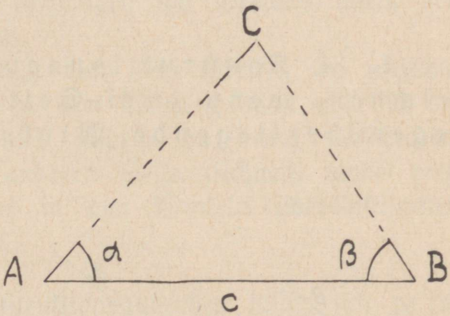

Abb. 18.

Anmerkung: Sind nicht α und β, sondern etwa α und γ, d. h. zwei Winkel gegeben, von denen der eine kein anliegender Winkel ist, so läßt sich dieser Fall auf den behandelten dadurch zurückführen, daß man β nach der Gleichung $\beta = 180° - (\alpha + \gamma)$ berechnet.

3. 3. Konstruktionsaufgabe: Ein Dreieck zu zeichnen, wenn alle drei Seiten gegeben sind.

Das ist nur möglich, wenn jede Seite einzeln kleiner ist, als die Summe der beiden anderen Seiten.

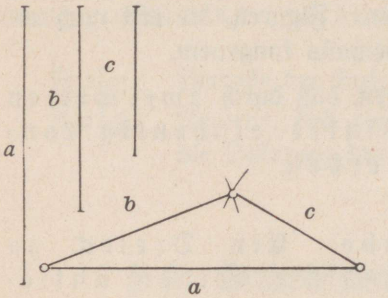

Abb. 19.

Gegeben: die Strecken a, b und c.

Wir zeichnen zunächst (Abb. 19) a und schlagen mit b und c als Halbmesser zwei Kreise um die Endpunkte von a. Durch den Schnitt beider Kreise werden zwei symmetrische Dreiecke bestimmt (auf der Zeichnung ist nur eins abgebildet).

Durch drei Seiten werden kongruente Dreiecke eindeutig bestimmt.

Aufg.: Löse die Aufgabe, indem du die Zeichnung mit b beginnst. Vergleiche das Dreieck mit dem früheren.

4. 4. Konstruktionsaufgabe: Ein Dreieck zu zeichnen, wenn zwei Seiten und der einer Seite gegenüberliegende Winkel gegeben sind.

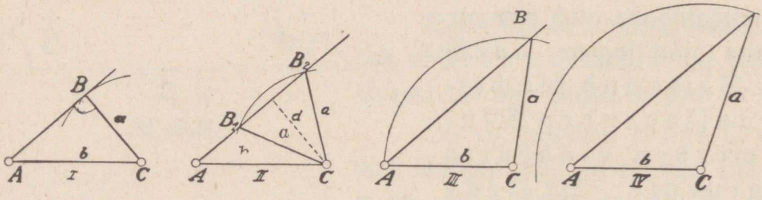

Abb. 20.

Gegeben: a, b, $\sphericalangle \alpha$.

Wir zeichnen zunächst b = AC (Abb. 20) und konstruieren bei A den Winkel α. Dann schlagen wir um C mit a als Halbmesser einen Kreis. Es ergeben sich folgende Möglichkeiten:

e r s t e n s: $a = d$, dem Abstand des Punktes C vom unbestimmten Schenkel AB. Der Kreis um C berührt den unbestimmten Schenkel und es entsteht ein rechtwinkliges Dreieck.

z w e i t e n s: $a > d$. Der Kreis um C schneidet den unbestimmten Schenkel in zwei verschiedenen Punkten und es entstehen zwei verschiedene Dreiecke.

d r i t t e n s: $a = b$. Der unbestimmte Schenkel wird in A und B geschnitten. Es entsteht ein gleichschenkliges Dreieck.

v i e r t e n s: $a > b$. Der unbestimmte Schenkel wird nur in e i n e m Punkt B geschnitten. Es entsteht e i n Dreieck.

Wenn $a < b$, erhalten wir für $a < d$ kein Dreieck, für $a > d$ zwei Dreiecke und im Grenzfalle $a = d$ ein Dreieck.

Wenn $a = b$, so erhalten wir als besonderen Fall ein gleichschenkliges Dreieck.

Unsere Zeichnung führten wir für einen spitzen Winkel α aus. Ist α aber stumpf, so hat nur der vierte Fall Bedeutung

Somit erhält man ein bestimmtes Dreieck nur im vierten Fall $a > b$, d. h. in dem Fall, wenn α der größeren Seite gegenüberliegt.

5 Wir haben vier Fälle angeführt, wo Dreiecke durch drei Stücke vollständig bestimmt werden.

Drei Winkel bestimmen jedoch noch kein Dreieck, da unzählig viele Dreiecke möglich sind, die in drei Winkeln, nicht aber in den Seiten übereinstimmen. Zeige dies, indem du durch verschiedene Punkte einer Seite Parallele zur anderen Seite zeichnest, wobei mehrere Dreiecke entstehen, die zwar in den Winkeln übereinstimmen, aber trotzdem nicht kongruent sind.

6. Die Ergebnisse der Konstruktionsaufgaben lassen sich zu folgenden Kennzeichen der Kongruenz (Kongruenzsätzen) zusammenfassen:

I. D r e i e c k e s i n d k o n g r u e n t, w e n n s i e i n z w e i S e i t e n u n d d e m e i n g e s c h l o s s e n e n W i n k e l ü b e r e i n s t i m m e n (SWS).

II. D r e i e c k e s i n d k o n g r u e n t, w e n n s i e i n e i n e r S e i t e u n d z w e i a n l i e g e n d e n W i n k e l n ü b e r e i n s t i m m e n (WSW).

III. D r e i e c k e s i n d k o n g r u e n t, w e n n s i e i n a l l e n d r e i S e i t e n ü b e r e i n s t i m m e n (SSS).

IV. Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem Gegenwinkel der größeren Seite übereinstimmen (SsW).

7. Lehrsatz: Alle Punkte, die von den Schenkeln eines Winkels den gleichen Abstand haben, liegen auf der Winkelhalbierenden dieses Winkels.

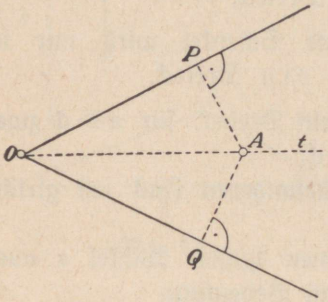

Abb. 21.

Voraussetzung: (Abb. 21) AP = AQ.

Behpt.: $\sphericalangle$ POA = $\sphericalangle$ QOA.

Beweis: Betrachte die Dreiecke AOP und AOQ und stelle ihre Kongruenz fest. Schließe aus der Kongruenz der Dreiecke auf die Gleichheit der Winkel POA und QOA.

Aufg.: Zeichne Dreiecke aus folgenden Stücken:

1) $a = 5$ cm; $b = 9$ cm; $\gamma = 47°$.
2) $a = 9{,}2$ cm; $c = 6{,}1$ cm; $\beta = 130°$.
3) $a = 8$ cm; $\beta = 43°$; $\gamma = 59°$.
4) $c = 7$ cm; $\alpha = 100°$; $\beta = 20°$.
5) $a = b$; $b = 7{,}2$ cm; $c = 9{,}3$ cm.
6) Läßt sich ein Dreieck zeichnen aus $a = 6$ cm, $b = 4$ cm, $c = 11$ cm?
7) Zeichne ein Dreieck aus $a = 9$ cm; $b = 6$ cm; $\beta = 40°$.
   $a = 7$ cm; $b = 8$ cm; $\beta = 50°$.
8) $a = 7$ cm (8 cm, 9 cm, 10 cm, 12 cm); $b = 10$ cm; $\alpha = 53°$.
9) $a = 4$ cm; $b = 3$ cm (4 cm, 7 cm); $\beta = 120°$.

8. Konstruktionsaufgabe: Der dritte Kongruenzsatz liefert die Konstruktion eines Winkels (Scheitelpunkt O, Abb. 22), der einem gegebenen Winkel α (Scheitelpunkt A) gleich ist (d. h. sich mit ihm beim Aufeinanderlegen deckt).

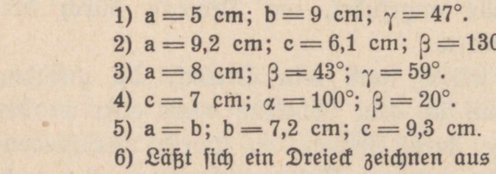

Abb. 22.

Wir zeichnen den Strahl OK und schlagen um A und O mit gleichem Radius zwei Bögen. Der eine Bogen bestimmt die

Stücke AB, AC und das in der Abbildung nicht wiedergegebene Stück BC, womit ein Dreieck durch drei Seiten gegeben ist. Darauf schlagen wir mit BC als Halbmesser um K einen Bogen, der den vorher gezeichneten Bogen im Punkt L schneidet. Zeichnet man nun den Strahl OL, so ist der entstandene Winkel KOL $= \alpha$. Weise dies selbst nach!

Aufg.: Finde die Summe zweier oder mehrerer gegebener Winkel durch Konstruktion. Finde die Differenz zweier Winkel durch Konstruktion.

Vierter Abschnitt: Viereckslehre.

§ 1. Erklärungen. Einteilung der Vierecke.

1. Erklärungen: Ein Viereck ist eine Figur, die entsteht, wenn man vier Punkte in der Ebene, von denen keine drei in einer Geraden liegen, mit einander verbindet. Die Verbindungsstrecken heißen Seiten, die von ihnen gebildeten Winkel heißen Winkel des Vierecks, die Scheitelpunkte der Winkel heißen Ecken. Man unterscheidet überschlagene Vierecke, bei denen eine Seite die andere innerlich schneidet, und nicht überschlagene Vierecke. Im folgenden ist nur von nicht überschlagenen Vierecken die Rede.

Eine Strecke, die zwei gegenüberliegende Ecken miteinander verbindet, heißt Eckenlinie oder Diagonale.

2. Bei der Einteilung der Vierecke bedient man sich der Parallelität der Seiten als Einteilungsgrund. Demzufolge gibt es Vierecke mit parallelen Seiten und Vierecke ohne parallele Seiten. Letztere nennt man auch Trapezoide. Vierecke mit einem Paar paralleler Seiten heißen Trapeze, Vierecke mit zwei Paar paralleler Seiten Parallelogramme.

Innerhalb der Parallelogramme sind bemerkenswert die rechtwinkligen (gleichwinkligen) Parallelogramme oder die Rechtecke und die gleichseitigen Parallelogramme oder Rhomben. Eine besondere Stellung nimmt das Quadrat ein, das als gleichseitiges Rechteck oder rechtwinkliger Rhombus angesprochen werden kann.

§ 2. Die Innenwinkel des Vierecks.

1. Lehrsatz: In jedem Viereck beträgt die Summe der Innenwinkel 360°.

Beweis leicht! Zerlege das Viereck durch eine Eckenlinie in zwei Dreiecke.

2. Der bewiesene Satz gilt für jedes Viereck. Hat das Viereck besondere Eigenschaften, so haben diese zur Folge, daß zu dem bewiesenen Satz noch andere hinzukommen, die ihren Grund in den besonderen Eigenschaften haben. Dieser Fall tritt z. B. ein, wenn das Viereck parallele Gegenseiten besitzt, d. h. ein Parallelogramm ist.

§ 3. Sätze über Parallelogramme.

1. Lehrsatz: In jedem Parallelogramm sind die gegenüber liegenden Winkel gleich.

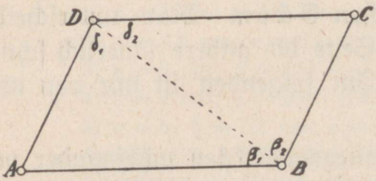

Abb. 23.

Voraussetzung: (Abb. 23) AB ∥ DC; AD ∥ BC.

Behpt.: $\sphericalangle$ ABC $=$ $\sphericalangle$ ADC.

Beweis: Wir zeichnen die Eckenlinie BD. Als Wechselwinkel bei parallelen Geraden (welchen?) ist $\beta_1 = \delta_2$; $\beta_2 = \delta_1$.

Addiert man zu zwei gleichen Größen einzeln gleiche Größen, so erhält man gleiche Summen. Folglich ist:

$$\beta_1 + \beta_2 = \delta_1 + \delta_2 \text{ oder}$$
$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC,$$

d. h. die gegenüberliegenden Winkel eines Parallelogramms sind gleich.

2. Lehrsatz: In jedem Parallelogramm sind die parallelen Seiten gleich.

Voraussetzung: (Abb. 23) AB ∥ DC; AD ∥ BC.

Behauptung: AB $=$ DC; AD $=$ BC.

Beweis: Wir zeichnen die Eckenlinie BD. Das $\triangle ABD \cong \triangle DCB$ nach dem 2. Kongruenzsatz (die nähere Begründung finde selbst!). Daraus folgt $AB = DC$ und $AD = BC$, d. h. die parallelen Gegenseiten eines Parallelogramms sind einander gleich.

3. Lehrsatz: In jedem Parallelogramm halbiert eine Eckenlinie die andere.

Voraussetzung: (Abb. 24) $AB \parallel DC$; $AD \parallel BC$.

Behauptung: $AO = CO$; $BO = DO$.

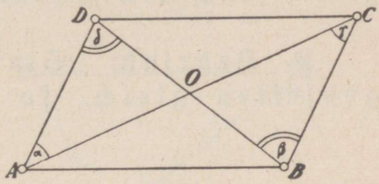

Abb. 24.

Beweis: Wir betrachten die Dreiecke AOD und BOC. Diese Dreiecke sind kongruent (Weise dies nach!). Daraus folgt $AO = CO$ und $BO = DO$, d. h. der Schnittpunkt der Diagonalen ist zugleich ihr gemeinsamer Mittelpunkt.

4. Aus dem Vorhergehenden geht hervor, daß ein Parallelogramm nach einer halben Drehung um O mit sich selbst zur Deckung gebracht werden kann. Figuren, die nach einer Drehung von 180° mit sich selbst zur Deckung gelangen, heißen zentralsymmetrisch. Der Drehpunkt heißt Symmetriepunkt der Figur.

Das Parallelogramm ist also eine zentralsymmetrische Figur, deren Symmetriepunkt im Schnittpunkt der Eckenlinien liegt.

Aufg.: Beweise, daß jede Strecke, die zwei Gegenseiten im Parallelogramm mit einander verbindet und durch den Symmetriepunkt geht, von diesem halbiert wird.

§ 4. Umkehrung der Parallelogrammsätze.

1. Lehrsatz: Sind in einem Viereck die gegenüberliegenden Winkel gleich so ist es ein Parallelogramm.

Voraussetzung: α, β, γ und δ sind die Winkel eines Vierecks; $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$.

Behauptung: AD $\parallel$ BC; AB $\parallel$ DC.

Beweis: Aus dem Innenwinkelsatz fürs Viereck folgt $\alpha+\beta+\gamma+\delta=360°$, oder, da $\alpha=\gamma$ und $\beta=\delta$, $2\delta+2\beta=360°$ oder $\alpha+\beta=180°$. α und β sind jedoch entgegengesetzte Winkel, die nur an parallelen Geraden gleich sind. Folglich ist AD $\parallel$ BC. Ebenso beweist man die Parallelität der beiden anderen Seiten. Also ist ein Viereck, in dem die gegenüberliegenden Winkel gleich sind, ein Parallelogramm.

2. Lehrsatz: Sind in einem Viereck die Gegenseiten gleich, so ist es ein Parallelogramm.

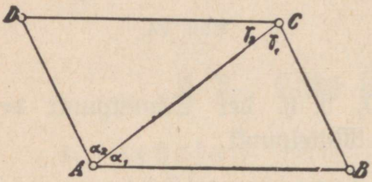

Abb. 25.

Voraussetzung: (Abb. 25) AB = DC; AD = BC.

Behauptung: AB $\parallel$ DC; AD $\parallel$ BC.

Beweis: Wir zeichnen eine Eckenlinie AC. Dann entstehen zwei kongruente Dreiecke ABC und ACD (Weise die Kongruenz selbst nach!). In kongruenten Dreiecken sind die gleichliegenden Stücke einander gleich, folglich $\alpha_1=\gamma_2$ und $\alpha_2=\gamma_1$. Diese Winkel sind aber Wechselwinkel und Wechselwinkel sind nur an parallelen Geraden gleich. Folglich ist AB $\parallel$ DC und AD $\parallel$ BC, d. h. ein Viereck mit gleichen Gegenseiten ist ein Parallelogramm.

3. Lehrsatz: Halbiert in einem Viereck eine Eckenlinie die andere, so ist es ein Parallelogramm.

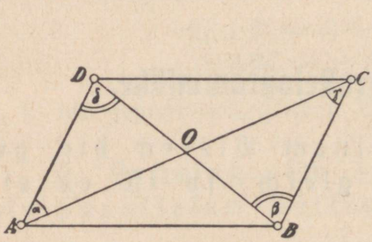

Abb. 26

Voraussetzung: (Abb. 26) AO = CO und BO = DO.

Behauptung: AB $\parallel$ DC; AD $\parallel$ BC.

Beweis: $\triangle$ AOD $\cong$ $\triangle$ BOC (begründet das!). In kongruenten Dreiecken sind die entsprechenden Stücke einander gleich, infolgedessen ist $\alpha=\gamma$ (oder $\delta=\beta$). Diese Winkel sind aber

Wechselwinkel und Wechselwinkel sind nur an parallelen Geraden gleich, d. h. AD ist parallel zu BC. Ebenso beweist man die Parallelität der beiden anderen Seiten.

Aus dem Bewiesenen geht hervor, daß ein Viereck ein Parallelogramm ist, wenn seine Diagonalen einander halbieren.

4. Lehrsatz: Ein Viereck ist ein Parallelogramm, wenn zwei Gegenseiten gleich und parallel sind.

Voraussetzung: (Abb. 27) $AD = BC$ und $AD \parallel BC$.

Behauptung: $AB \parallel DC$.

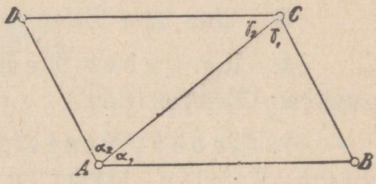

Abb. 27.

Beweis: Wir zeichnen die Eckenlinie AC. Dann ist $\triangle ADC \cong \triangle ABC$ nach dem 1. Kongruenzsatz. Denn erstens haben die Dreiecke die Seite AC gemeinsam, ferner stimmen sie in den Seiten AD und BC laut Voraussetzung überein; und endlich ist $\alpha_1 = \gamma_2$ als Wechselwinkel an den Parallelen AD und BC, die durch AC geschnitten werden.

Da nun in kongruenten Dreiecken alle gleichliegenden Stücke gleich sein müssen, so ist auch $\alpha_2 = \gamma_1$. Somit ist ABCD ein Viereck mit zwei gleichen gegenüberliegenden Winkeln und ist auf Grund eines vorher bewiesenen Satzes (nenne ihn!) ein Parallelogramm.

§ 5. Das Rechteck.

1. Denkt man sich in den Ecken eines Parallelogramms Zylindergelenke angebracht, so ist es möglich, die Winkel des Parallelogramms zu verändern. Was geschieht mit den Eckenlinien, wenn die Winkel rechte Winkel werden? (Zeichnung selbst anfertigen!)

2. Lehrsatz: In einem Rechteck sind die Diagonalen gleich.

Voraussetzung: (Abb. 28) $AB \parallel DC$; $AD \parallel BC$; $AD \perp AB$.

Behauptung: $AC = BD$.

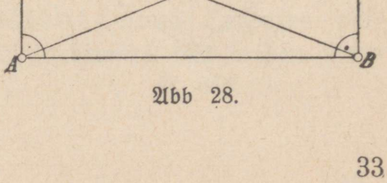

Abb 28.

Beweis: $\triangle ABC \cong \triangle BAD$ nach dem 1. Kongruenzsatz (SWS). In kongruenten Dreiecken müssen aber die entsprechenden Seiten einander gleich sein. D. h. $AC = BD$.

Aufg.: Zeige, wie man mit Hilfe von Zirkel und Lineal die Senkrechte zu einer Geraden mit Hilfe des eben bewiesenen Lehrsatzes zeichnen kann, wenn die Senkrechte so nah am Rande der Zeichnung liegt, daß die früher erwähnte Konstruktion nicht durchführbar ist.

Aufg.: Finde die Symmetrieachsen eines Rechtecks.

3. Aus dem Gesagten folgt:

1. Um jedes Rechteck kann ein Kreis gezeichnet werden (Beweis leicht!).

2. Jeder Winkel, dessen Scheitelpunkt auf einem Kreise liegt und dessen Schenkel durch die Endpunkte des Durchmessers gehen, ist ein rechter Winkel. (Satz des Thales).

Die Gleichheit der Diagonalen eines Parallelogramms wird, wie aus dem Vorhergehenden zu ersehen ist, durch die Gleichheit der Innenwinkel bedingt.

§ 6. Der Rhombus.

1. Lehrsatz: In einem Rhombus stehen die Diagonalen senkrecht auf einander und halbieren die Winkel an den Ecken.

Voraussetzung: (Abb. 29) $AB \parallel DC$; $AD \parallel BC$; $AB = BC$.

Behpt: $BD \perp AC$; $\sphericalangle ABD = \sphericalangle CBD$; $\sphericalangle ADB = \sphericalangle CDB$.

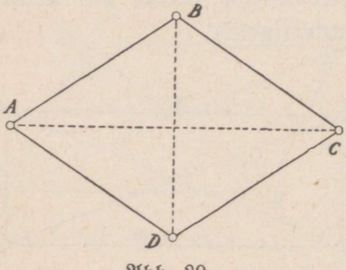

Abb. 29.

Beweis: AC ist die gemeinsame Grundlinie der gleichschenkligen Dreiecke ABC und ADC. Wie früher gezeigt worden ist (wo?), besitzen gleichschenklige Dreiecke mit ein und derselben Basis eine gemeinsame Symmetrieachse, die durch den Mittelpunkt der Basis und durch die beiden Spitzen geht. Da nun der Schnittpunkt der Diagonalen der Mittelpunkt von BC ist, so ist BD die gemeinsame Symmetrieachse der Dreiecke ABC und ADC. Infolgedessen ist BD ⊥ AC und $\sphericalangle$ ABD = $\sphericalangle$ CBD, desgleichen $\sphericalangle$ ADB = $\sphericalangle$ CDB.

Für die Dreiecke ABD und BCD ist AC die gemeinsame Symmetrieachse und folglich $\sphericalangle$ BAC = $\sphericalangle$ DAC; $\sphericalangle$ DCA = $\sphericalangle$ BCA.

Aufg.: Untersuche die Eigenschaften eines sog. Drachenvierecks, d. h. eines Vierecks, das entsteht, wenn man zwei in den Grundlinien übereinstimmende gleichschenklige Dreiecke so an einander legt, daß die Grundlinien sich decken.

§ 7. Das Quadrat.

1. Lehrsatz: In einem Quadrat als einem gleichseitigen Rechteck bezw. gleichwinkligen Rhombus sind die Diagonalen gleich, stehen aufeinander senkrecht und halbieren die Winkel des Quadrates.

Aufg.: Konstruiere aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel ein Parallelogramm.

Aufg.: Zeichne auf Grund der Sätze über das Parallelogramm mit Hilfe von Zirkel und Lineal die Parallele zu einer gegebenen Geraden durch einen außerhalb gelegenen Punkt.

Aufg.: Gegeben ist eine Seite, die Eckenlinie und der Winkel zwischen Eckenlinie und Seite. Konstruiere das Parallelogramm.

Aufg.: Welche Stücke bestimmen ein Quadrat, eine Rechteck, einen Rhombus, ein allgemeines Parallelogramm, ein Trapez, ein Trapezoid? Konstruiere nach selbstgewählten Stücken diese Figuren.

§ 8. Das Trapez.

Erklärung. Unter der Mittellinie eines Trapezes versteht man die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte der beiden nichtparallelen Seiten.

1. Lehrsatz. In einem Trapez ist die Mittellinie der Grundlinie parallel.

Voraussetzung: (Abb. 30) $a \parallel b$; M und N sind die Mittelpunkte der beiden nichtparallelen Seiten.

Behauptung: $m \parallel b$.

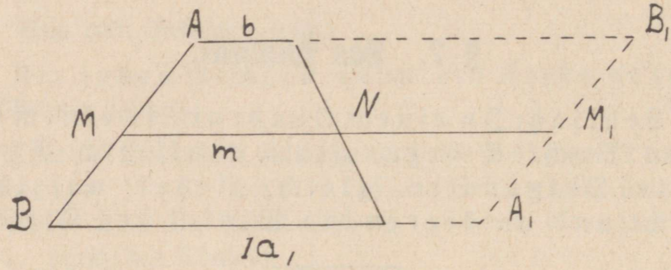

Abb. 30.

Beweis: Wir führen mit dem Trapez um N als Drehpunkt eine halbe Drehung aus. Dann ist MAB_1M_1 ein Parallelogramm, weil $MA = M_1B_1$ und $MA \parallel M_1B_1$ ist. Daraus folgt $MM_1 \parallel AB_1$, mithin $m \parallel b$.

2. Lehrsatz: In einem Trapez ist die Mittellinie gleich der halben Summe der beiden parallelen Seiten.

Beweis: (Abb. 30). Aus der Zeichnung ist ersichtlich, daß $2\,m = a + b$. Folglich ist $m = \frac{a+b}{2}$.

§ 9. Streckenteilung.

1 Lehrsatz: Werden parallele Geraden von zwei Geraden geschnitten, und sind die Abschnitte auf der einen Schneidenden gleich, so sind sie auch auf der anderen gleich.

Voraussetzung: $p_1 \parallel p_2 \parallel p_3 \parallel p_4$. Diese Parallelen werden von g und h geschnitten (Abb. 31); AB = BC.

Behpt.: DE = EF.

Beweis: Wir zeichnen durch die Punkte D und E parallel zu g die Strecken DG und EH. Dann ist $\triangle$ DEG $\cong$ $\triangle$ EFH nach dem 2. Kongruenzsatz. Denn DG = AB, weil ABDG ein Parallelogramm ist, und da AB = BC und ferner BC = EH, so ist DG = EH. Ferner stimmen die Dreiecke in den beiden anliegenden Winkeln überein (warum?). Aus der Kongruenz der Dreiecke folgt DE = EF.

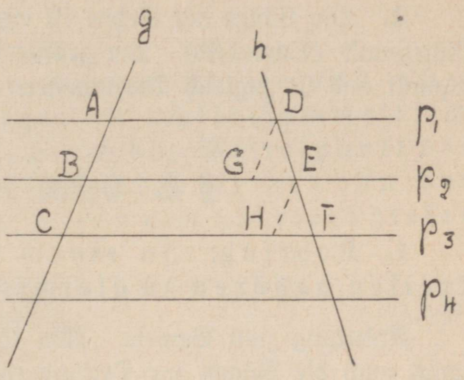

Abb. 31.

Folgerung: Zeichnet man in einem Dreieck durch den Mittelpunkt der einen Seite eine Parallele zur zweiten Seite, so wird die dritte Seite halbiert.

Fünfter Abschnitt: Der Kreis.

§ 1. Erklärungen.

1. Wiederhole aus dem 1. Abschnitt § 2 die Erklärung des Kreises, des Halbmessers, des Durchmessers, der Sehne, des Bogens.

Eine Sekante ist eine Gerade, die zwei Punkte mit dem Kreise gemeinsam hat. Eine durch den Kreismittelpunkt gehende Sekante heißt Zentrale. Eine Tangente ist eine Gerade, die nur einen Punkt (den Berührungspunkt) mit dem Kreise gemeinsam hat. Unterscheide Kreislinie (Kreisumfang, Peripherie) und Kreisfläche (Scheibe). Die Figur, die von einer Sehne und dem zugehörigen Bogen begrenzt ist, heißt Kreisabschnitt. Ein Kreisausschnitt ist eine Figur, die von zwei Halbmessern und einem Bogen begrenzt wird.

2. Die Länge der Sehne ist eine Funktion ihres Abstandes vom Mittelpunkt (Schaubild). Die größte Sehne geht durch den Kreismittelpunkt und ist zugleich Durchmesser.

§ 2. Sehne und Bogen.

1. Lehrsatz: In einem Kreise oder in gleichen Kreisen gehören zu gleichen Sehnen gleiche Bögen.

Anleitung zum Beweis. Wir können die gegebenen Sehnen und damit auch die Bögen zur Deckung miteinander bringen.

Aufg.: Verdoppele, verdreifache, vervierfache einen Bogen.
Aufg.: Teile einen Bogen in zwei, in vier, in acht gleiche Teile.
Aufg.: Teile einen Kreis in vier gleiche Teile, jedes Viertel in drei Teile (annähernd, mit dem Stechzirkel) und fahre so fort, bis du den Viertelkreis in Teile von je 5° geteilt hast.
Aufg.: Beweise, daß gleiche Sehnen vom Kreismittelpunkt den gleichen Abstand haben.
Aufg.: Beweise, daß eine von einem Kreise und einer Sehne gebildete Figur achsialsymmetrisch ist.

§ 3. Von der Kreistangente.

1. Lehrsatz: Halbmesser und Tangente stehen im Berührungspunkt aufeinander senkrecht.

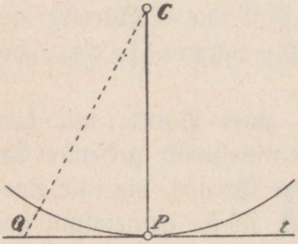

Abb. 32.

Wir drehen die Strecke CQ entgegen dem Uhrzeigersinn (Abb. 32). Dabei wird CQ ständig kürzer und ist in der Lage CP, wo P der Berührungspunkt und CP der Halbmesser ist, am kürzesten. Da aber die kürzeste Entfernung des Punktes C von der Geraden t das Lot ist, so ist $CP \perp t$.

Folgerung: Die von einem Kreise und einer Tangente gebildete Figur ist achsialsymmetrisch.

Die Symmetrieachse ist die durch den Berührungspunkt gehende Zentrale.

2. Lehrsatz: Die von einem Kreise und zwei Tangenten gebildete Figur ist achsialsymmetrisch. Die Symmetrieachse geht durch den Mittelpunkt des Kreises und durch den Scheitelpunkt des von den Tangenten gebildeten Winkels und halbiert diesen Winkel.

Voraussetzung: $CA = CB$; $CA \perp DA$; $CB \perp DB$ (Abb. 33).

Behpt.: $\sphericalangle CDA = \sphericalangle CDB$.

Beweis: Beide Tangenten AD und BD bestimmen den Winkel ADB, dessen Symmetriachse die durch D gehende Winkelhalbierende ist. Da die Winkelhalbierende alle Punkte enthält, die von DA und DB gleichen Abstand haben und $CA = CB$ ist, so geht sie durch den Mittelpunkt des Kreises C. DC ist also als Zentrale auch Symmetriachse des Kreises.

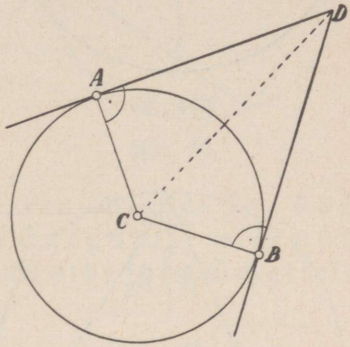

Abb. 33.

Folgerung: Die durch einen außerhalb liegenden Punkt an den Kreis gelegten Tangentenstrecken sind gleich.

Aufg.: Welche Linie bilden die Mittelpunkte der Kreise, die innerhalb eines Winkels liegen und seine Schenkel berühren?

§ 4. Winkel und Kreis.

1. Erklärungen: Ein Mittenwinkel (Zentriwinkel) ist ein Winkel, dessen Scheitelpunkt im Kreismittelpunkt liegt.

Ein Umfangswinkel ist ein Winkel, dessen Scheitel auf dem Kreisumfange liegt.

Ein von einer Tangente und einer durch den Berührungspunkt gehenden Sehne gebildeter Winkel heißt Sehnentangentenwinkel.

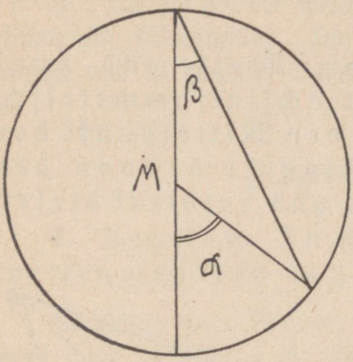

Abb. 34.

2. Lehrsatz: Ein Mittenwinkel ist doppelt so groß als der Umfangswinkel über dem gleichen Bogen.

Wir betrachten zunächst einzeln folgende Fälle:

1. Fall: Der Mittelpunkt des Kreises liegt auf dem einen Schenkel des Umfangswinkels (Abb. 34). $\alpha = 2\beta$ als Außenwinkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks.

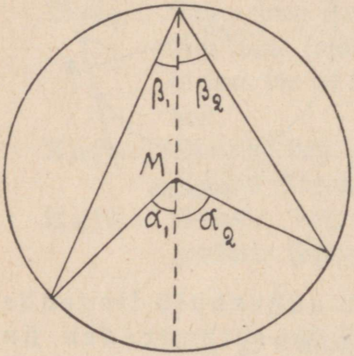

Abb. 35.

2. Fall: Der Mittelpunkt liegt zwischen den Schenkeln des Umfangswinkels (Abb. 35).

Wir zeichnen durch die Scheitelpunkte beider Winkel einen Durchmesser. Dieser zerlegt α bezw. β (auf der Abbildung nicht bezeichnet) in α_1 und α_2 bezw. β_1 und β_2. Auf Grund des 1. Falles

ist $\alpha_1 = 2\beta_1$

$\alpha_2 = 2\beta_2$

oder $\alpha_1 + \alpha_2 = 2(\beta_1 + \beta_2)$

folglich $\alpha = 2\beta$

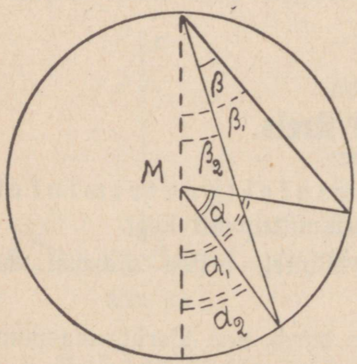

Abb. 36.

3. Fall: Der Mittelpunkt liegt außerhalb des Umfangswinkels (Abb. 36).

Wir zeichnen wieder den Durchmesser durch die Scheitelpunkte der Winkel. Dann entstehen die Winkel α_1, α_2, β_1 und β_2. Auf Grund des 1. Falles

ist $\alpha_1 = 2\beta_1$

$\alpha_2 = 2\beta_2$

oder $\alpha_1 - \alpha_2 = 2(\beta_1 - \beta_2)$

folglich $\alpha = 2\beta$

Da außer den besprochenen drei Fällen keine anderen möglich sind, so gilt allgemein, daß der Mittenwinkel doppelt so groß ist als der zugehörige Umfangswinkel.

Folgerung 1. (*Satz des Thales.*) *Jeder Umfangswinkel über dem Durchmesser ist ein rechter Winkel* (*Abb.* 37).

Aufg.: Konstruiere mit Hilfe des Thalessatzes die Tangente in einem Punkte der Kreisperipherie.

Aufg.: Zeichne durch einen Punkt außerhalb des Kreises seine beiden Tangenten.

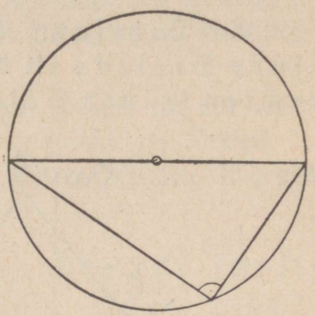

Abb. 37.

Folgerung 2. *Bewegt sich ein Winkel so, daß seine Schenkel durch die beiden Endpunkte ein- und derselben Strecke gehen, so beschreibt sein Scheitelpunkt den Bogen eines Kreises.*

3. *Lehrsatz: Der Sehnentangentenwinkel ist die Hälfte des Mittenwinkels über dem gleichen Bogen.*

Gegeben: Der Sehnentangentenwinkel DAB (Abb. 38). Der zugehörige Mittenwinkel ist ACB.

Wir fällen aus dem Mittelpunkt C des Kreises die Senkrechte CE auf die Sehne AB. Dadurch wird der Winkel ACB halbiert. $\measuredangle$ BCE = $\measuredangle$ ACE = $\frac{1}{2}$ $\measuredangle$ ACB. Die Schenkel des Winkels ACE stehen auf den Schenkeln des Winkels DAB senkrecht. Daraus folgt $\measuredangle$ DAB = $\measuredangle$ ACE = $\frac{1}{2}$ $\measuredangle$ ACB.

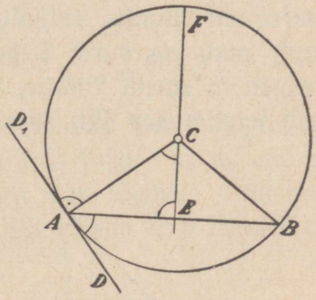

Abb. 38.

Beweise, daß DAC = $\measuredangle$ ACF ist, also gleich der Hälfte des Winkels, der $\measuredangle$ ACB zu 360° ergänzt.

§ 5. Umkreis und Inkreis.

1. *Erklärung.* Der *Umkreis* einer Figur ist derjenige Kreis, der durch alle Ecken der Figur geht. Der *Inkreis* einer Figur ist ein Kreis, der alle Seiten der Figur berührt.

Aus dem Gesagten geht hervor, daß der Mittelpunkt des Umkreises von allen *Ecken* der Figur gleichen Abstand hat. Der Mittelpunkt des Inkreises dagegen ist von allen *Seiten* gleich weit entfernt.

2. Lehrsatz: *Der Mittelpunkt des Umkreises eines Dreiecks ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten seiner Seiten.*

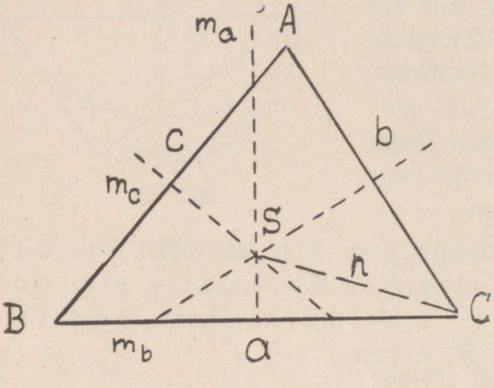

Abb. 39.

Beweis: Die Mittelsenkrechte m_c enthält alle Punkte, die von A und B gleichen Abstand haben (Abb. 39). Auf der Mittelsenkrechten m_a liegen alle Punkte, die von B und C gleich weit entfernt sind. Der Schnittpunkt S liegt gleichzeitig auf beiden Mittelsenkrechten und hat somit von allen drei Ecken A, B und C die gleiche Entfernung.

Da die dritte Mittelsenkrechte m_b alle von A und C gleich weit entfernten Punkte enthält, und da S einen dieser Punkte darstellt, so muß auch m_b durch S gehen. Mithin schneiden sich alle Mittelsenkrechten in einem Punkte, der von den drei Ecken gleichen Abstand hat und folglich der Mittelpunkt des Umkreises ist.

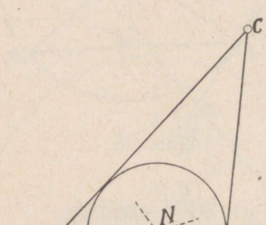

Abb. 40.

3. Lehrsatz: *Der Mittelpunkt des Inkreises eines Dreiecks liegt im Schnittpunkt der Winkelhalbierenden seiner Winkel.*

Die Winkelhalbierende AN des Winkels CAB (Abb. 40) enthält alle Punkte, die von AB und AC gleichen Abstand haben. Ebenso enthält die Winkelhalbierende BN des Winkels ABC alle Punkte, die in gleicher Entfernung von BA und BC liegen. Der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden N hat somit von allen drei Seiten AB, AC und BC den gleichen Abstand.

Die Winkelhalbierende des Winkels ACB enthält alle von CA und CB gleich weit liegenden Punkte, und da N einen dieser Punkte darstellt, so muß diese Winkelhalbierende auch durch N gehen. Somit schneiden sich die Winkelhalbierenden der Innenwinkel des Dreiecks in einem Punkte, der von den Seiten den gleichen Abstand hat, und folglich den Mittelpunkt des Inkreises darstellt.

Aufg.: Zeichne den Umkreis, bezw. den Inkreis für ein rechtwinkliges, stumpfwinkliges und spitzwinkliges Dreieck.

Aufg.: Zeichne durch drei nicht in einer Geraden liegende Punkte den Kreis.

4. Lehrsatz: Die Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.

Voraussetzung: $h_a \perp CB$; $h_b \perp AC$; $h_c \perp AB$ (Abb. 41).

Behauptung: Die drei Höhen schneiden sich in einem Punkt.

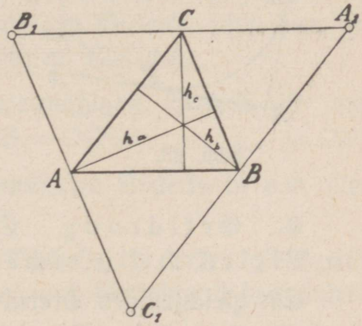

Abb. 41.

Beweis: Wir zeichnen durch die Ecken A, B und C Parallele zu den gegenüberliegenden Seiten. Dann entsteht ein neues $\triangle A_1 B_1 C_1$, dessen Seiten von den Ecken des gegebenen Dreiecks halbiert werden. In der Tat ist $AB_1 = AC_1$, denn da AB_1CB laut Konstruktion ein Parallelegramm ist, so ist $AB_1 = CB$; ebenso findet man, wenn man das Parallelogramm AC_1BC betrachtet, $AC_1 = CB$, woraus $AB_1 = AC_1$ folgt. h_a h_b und h_c sind also im $\triangle A_1 B_1 C_1$ die Mittelsenkrechten der Seiten. Und von diesen ist bereits bewiesen worden, daß sie sich in ein- und demselben Punkte schneiden.

5. Satz. In einem Viereck, das einem Kreise einbeschrieben ist, beträgt die Summe zweier gegenüberliegender Winkel 180°. Finde für den Satz die Voraussetzung (Abb. 42) und die Behauptung. Bezeichne den Mittelpunkt des Umkreises und die Innenwinkel

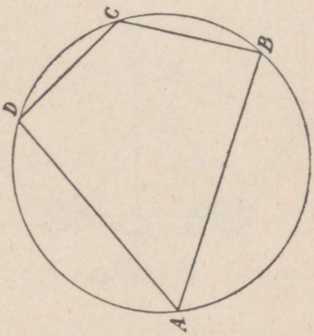

Abb. 42.

Der Mittenwinkel, der α entspricht ist $\alpha_1 = 2\,\alpha$, ebenso ist der Mittelwinkel, der γ entspricht, $\gamma_1 = 2\,\gamma$. Daraus folgt:

$$2\alpha + 2\gamma = \alpha_1 + \gamma_1$$

$2(\alpha + \gamma) = \alpha_1 + \gamma_1$, oder wie aus der Zeichnung zu ersehen ist

$2(\alpha + \gamma) = 360°$ d. h. $\alpha + \gamma = 180°$.

Ebenso beweist man, daß $\beta + \delta = 180°$ ist.

Satz. In einem Viereck, das um einen Kreis gezeichnet ist, ist die Summe zweier gegenüberliegender Seiten gleich der Summe der beiden anderen Seiten.

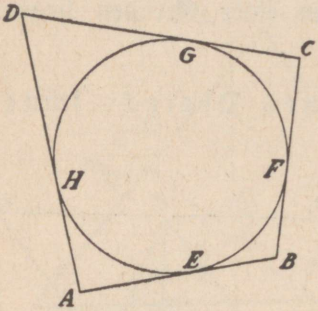

Abb. 43.

Beweis: (Abb. 43). In dem Viereck sind auf Grund des Satzes von der Gleichheit der Tangentenabschnitte

$$AE = AH$$
$$BE = BF$$
$$DG = DH$$
$$CG = CF$$

d. h. $AE + BE + DG + CG = AH + BF + DH + CF$

oder $AB + DC = AD + BC$

6. Erklärung. Ein regelmäßiges Vieleck ist ein Vieleck mit gleichen Seiten und gleichen Winkeln.

Ein gleichseitiges Dreieck ist zugleich regelmäßig, da seine Winkel ebenfalls gleich sind. Von den Vierecken ist das Quadrat regelmäßig.

Lehrsatz: Jedem regelmäßigen Vieleck kann ein Kreis umbeschrieben bezw. einbeschrieben werden. Beide Kreise (Umkreis und Inkreis des regelmäßigen Vielecks) haben einen gemeinsamen Mittelpunkt (Mittelpunkt des regelmäßigen Vielecks).

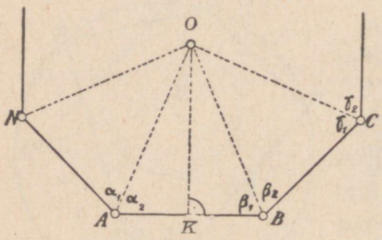

Abb. 44.

Voraussetzung: $AB = BC = \ldots\ldots = NA$; $\sphericalangle NAB = \sphericalangle ABC = \ldots\ldots$; (Abb. 44).

Behauptung: O ist der Mittelpunkt des regelmäßigen Vielecks.

Beweis: Wir zeichnen die Winkelhalbierenden der bei A und

B gelegenen Winkel. Dann ist $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2$, als Hälften nach Voraussetzung gleicher Winkel. Die Winkelhalbierenden schneiden sich im Punkte O und bestimmen das $\triangle$ AOB, das gleichschenklig ist, weil $\alpha_2 = \beta_1$ ist. Klappt man nun das $\triangle$ AOB um OB, so fällt AB, infolge $\beta_1 = \beta_2$, auf BC und deckt sich mit BC, da AB = BC ist. Der Winkel α_2 nimmt die Lage γ_1 ein. Da aber α_2 und somit auch β_1 halb so groß ist als ein Winkel des Vielecks, so ist CO die Winkelhalbierende des Winkels bei C. Es ist klar, das man auf diese Weise fortschreitend das ganze Vieleck in kongruente gleichschenklige Dreiecke mit der gemeinsamen Spitze in O zerlegen kann.

Zieht man noch in Betracht, daß in kongruenten Dreiecken die gleichliegenden Höhen gleich sind, so folgt aus dem Gesagten:

Erstens. Die Winkelhalbierenden der Innenwinkel, desgleichen die Mittelsenkrechten der Seiten des regelmäßigen Vielecks schneiden sich in einem Punkt (Mittelpunkt des regelmäßigen Vielecks).

Zweitens. Der Mittelpunkt des regelmäßigen Vielecks ist von allen Ecken gleich weit entfernt (OA = OB = OC = ... = ON).

Drittens. Der Mittelpunkt des regelmäßigen Vielecks ist von allen Seiten gleich weit entfernt (OK).

Der Mittelpunkt des regelmäßigen Vielecks ist daher gleichzeitig Mittelpunkt des Umkreises (Halbmesser OA) und Mittelpunkt des Inkreises (Halbmesser OK).

Erklärung. Das gleichschenklige Dreieck, das von der Seite und dem Mittelpunkt des regelmäßigen Vielecks bestimmt wird, heißt Bestimmungsdreieck des regelmäßigen Vielecks.

Hat das regelmäßige Vieleck n Seiten, so beträgt der Winkel an der Spitze des Bestimmungsdreiecks $\frac{360^\circ}{n}$.

7. Konstruktion eines regelmäßigen Sechsecks aus der Seite a mit Zirkel und Lineal (Abb. 45).

Plan (Analysis): Der Winkel an der Spitze des Bestimmungsdreiecks ist $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$. Das besagt, daß das Bestimmungsdreieck gleichwinklig, also auch

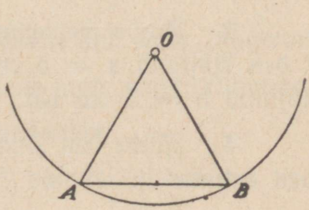

Abb. 45.

gleichseitig ist. Da aber seine Schenkel Radien des Umkreises sind, so ist auch die Seite des regelmäßigen Sechsecks gleich dem Radius des Umkreises (AB = OA).

Konstruktion: Wir zeichnen einen Kreis mit dem Halbmesser a und tragen a als Sehne sechsmal nacheinander ab.

8. Konstruktion eines regelmäßigen Dreiecks, dessen Umkreis gegeben ist.

Wir zeichnen in den Kreis ein regelmäßiges Sechseck und verbinden die erste Ecke mit der dritten, die dritte mit der fünften und die fünfte wieder mit der ersten Ecke.

9. Konstruktion eines regelmäßigen Vierecks, dessen Umkreis gegeben ist.

Wir zeichnen zwei senkrecht aufeinander stehende Durchmesser und verbinden ihre Endpunkte miteinander.

Ausgehend von den konstruierten Figuren können durch Halbierung der Bögen weitere regelmäßige Vielecke (12-eck, 24-eck usw., 8-eck, 16-eck usw.) gezeichnet werden.

Anhang

(Zur Wiederholung).

1. Zeichne die symmetrische Figur zu einem regelmäßigen Sechseck in Bezug auf eine beliebige Gerade als Symmetrieachse.

2. Suche diejenigen Punkte, die vom Punkte P_1 den Abstand $a = 8$ cm und gleichzeitig von dem Punkte P_2 den Abstand $b = 12$ cm haben.

3. Finde denjenigen Punkt, der von einem gegebenen Punkte P den Abstand $a = 5$ cm und von einer gegebenen Geraden g den Abstand $b = 3$ cm hat.

4. Finde den Punkt, der von den Punkten P_1, P_2 und P_3 gleich weit entfernt ist.

5. Finde den Punkt, der von dem einem Schenkel eines gegebenen Winkels $\alpha = 40°$ (130°) den Abstand $a = 2$ cm, von dem anderen Schenkeln den Abstand $b = 5$ cm hat.

6. Denke dir zu jedem bekannten Konstruktionsfall eines Dreiecks die entsprechenden Stücke und führe die Konstruktionen aus.

7. Beweise, daß in einem rechtwinkligen Dreieck, in dem der eine spitze Winkel 30° beträgt, die gegenüberliegende Kathete halb so groß ist als die Hypotenuse.

8. Beweise, daß in kongruenten Dreiecken die gleichliegenden Höhen, Seiten- oder Winkelhalbierenden, überhaupt die gleichliegenden Strecken einander gleich sind.

9. Verlängert man zwei Dreiecksseiten um ihre eigene Länge über ihren Schnittpunkt hinaus, und verbindet die Endpunkte, so entsteht ein dem ursprünglichen kongruentes Dreieck.

10. Zeige, wie mit Hilfe der vorigen Aufgabe die Breite eines Teiches, die Breite eines Hauses u. ä. sich bestimmen läßt.

11. Zeichne ein Dreieck aus:

$a = 7$ cm, $b = 8{,}6$ cm, $\gamma = 100°$,
$c = 7{,}5$ cm, $\alpha = 30°$, $\beta = 98°$,
$a = 12$ cm, $b = 16$ cm, $c = 20$ cm,
$a = 7$ cm, $b = 5$ cm, $\alpha = 120°$,
$a = 9$ cm, $b = 12$ cm, $\alpha = 57°$.

12. Zeichne einen Winkel mit dem Punkte P als Scheitelpunkt, der einem gegebenen Winkel gleich ist.

13. Zeichne ein gleichseitiges Dreieck aus der Seite $a = 6{,}4$ cm.

14. Zeichne ein Viereck aus vier gegebenen Seiten und einem gegebenen Winkel.

15. Zeichne ein Parallelogramm aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel.

16. Zeichne einen Rhombus aus einer Seite und einer Diagonale.

17. Zeichne ein Rechteck aus einer Seite und einer Diagonale.

18. Zeichne ein Quadrat aus einer Diagonale.

19. Konstruiere einen Winkel von 45°, von 60°.

20. Teile durch Probieren mit dem Stechzirkel eine Strecke von 8 cm in drei gleiche Teile; eine Strecke von 12 cm in sieben gleiche Teile.

21. Die Winkelhalbierenden der benachbarten Winkel eines Parallelogramms stehen senkrecht aufeinander.

22. Die Mittelpunkte der Seiten eines Vierecks bilden die Eckpunkte eines Parallelogramms (Zeichne die Diagonalen des Vierecks).

23. Finde den zu einem Bogen gehörenden Kreismittelpunkt.

24. Zeichne mehrere Kreise, die die Schenkel eines Winkels berühren. Welche Linie wird durch die Mittelpunkte aller solcher Berührungskreise gebildet?

25. Zeichne einen Kreis mit dem Radius $R = 5$ cm, der eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkt berührt.

26. Zeichne einen Kreis ($R = 4$ cm), der eine gegebene Gerade berührt und durch einen außerhalb der Geraden liegenden Punkt geht.

27. Zeichne einen Kreis, der eine Gerade in einem gegebenen Punkte berührt und durch einen außerhalb gelegenen Punkt geht.

28. Welche von den bekannten Parallelogrammen haben einen Umkreis und welche einen Inkreis?