



TARTU RIIKLIK ÜLIKOO

FUNKTSIONAALVÖRRANDITE LAHENDAMINE

ÜLDISTATUD NEWTONI MEETODIGA

A u h i n n a t ö ö

Teostaja: matemaatika osak.V kursuse

üliõpilane Ü.Kaasik

Juhendaja: prof. G.Kangro

Tartu 1953

§1. NEWTONI MEETOD FUNKTSIONAALVÖRRANDI

LAHENDAMISEL

Newtoni meetod kõrgema astme võrrandite ligikaudseks lahendamiseks pärineb aastaist 1665 - 1670. Trükkis avaldati ta esmakordselt 1707. aastal Westoni poolt. Hiljem töötasid meetodi uurimisel rida matemaatikuid /Lagrange, Fourier, Euler jt./, kes said ka üksikuid tulemusi meetodi vea hindamisel. Meetodi koonduvuse küsimuse lahendas Cauchy ja hiljem Ostrowski .

Meetodi laiendamise algebraliste võrrandsüsteemide lahendamiseks teostasid Stenin [11], Ostrowski [12], Willers [17] ja mittelineaarsete integraalvõrrandite lahendamiseks Zagadski [8]. Meetodi koonduvuse küsimust algebraliste võrrandsüsteemide korral püüdsid lahendada Willers, Stenin jt., kes said ka üksikuid tulemusi. Kahe tundmatuga süsteemide jaoks lahendas küsimuse Ostrowski [13] ja integraalvõrrandite jaoks Zagadski [9].

1948. a. vaatles Kantorovitš [1] meetodit kõige üldisemal kujul funktsionaalvõrrandite puhul ja andis ka üldised koonduvustingimused.

Kantorovitš vaatles Newtoni meetodi rakendamist mittelineaarse funktsionaalvõrrandi

$$P(x) = 0 \tag{1}$$

ligikaudsel lahendamisel, kus P on pidev, kaks korda diferentseeruv operaator, mis kujutab Banachi ruumi X normeeritud ruumi Y .

Olgu võrrandi (1) lahendi x^* ligikaudne väärtus x_0 teada. Võrrutades operaatori P kasvu $P(x) - P(x_0)$ diferentsiaaliga punktis x_0 asendame antud võrrandi (1) ligikaudselt lineaarse võrrandiga

$$P(x) \approx P(x_0) + P'(x_0)(x - x_0) = 0. \quad (2)$$

Võrrandi (2) lahendit x_1 loemegi lähtevõrrandi (1) juure x^* uueks lähendiks. Kui eksisteerib $[P'(x_0)]^{-1}$, siis võrrandit (2) lahendades saame

$$x_1 = x_0 - [P'(x_0)]^{-1} P(x_0). \quad (3)$$

Analoogse valemiga avalduvad rekurentsetl siis ka järgmised x^* järkjärgulised lähendid

$$x_{n+1} = x_n - [P'(x_n)]^{-1} P(x_n). \quad (4)$$

Elementide x_n jada koonduvuse küsimuse täpseks lahendiks x^* selgitab järgmine Kantorovitši tõestatud teoreem:

Teoreem 1. Kui on täidetud tingimused:

1) valitud alglähendi x_0 puhul eksisteerib pöördoperaator $\Gamma_0 = [P'(x_0)]^{-1}$, kusjuures on teada tema normi tõke

$$\|\Gamma_0\| \leq B_0;$$

2) element x_0 rahuldab ligikaudselt võrrandit (1), kusjuures

$$\|\Gamma_0 P(x_0)\| \leq \eta_0;$$

3) piirkonnas

$$\|x - x_0\| \leq N(h_0)\eta_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - 2h_0}}{h_0} \eta_0 \quad (5)$$

on teine tuletis $P''(x)$ tõkestatud:

$$\|P''(x)\| \leq H; \quad (6)$$

4) konstandid B_0 , η_0 ja H rahuldavad tingimust

$$h_0 = B_0 \eta_0 H \leq \frac{1}{2},$$

siis võrrand (1) omab piirkonnas (5) lahendi x^* , milleks koondub protsess (4) kiirusega, mis on määratud võrratusega

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{1}{2^{n-1}} (2h_0)^{2^{n-1}} \eta_0. \quad (7)$$

Kantorovitš tõestas ka teoreemi, mis annab piirkonna, milles võrrandi lahend on ainus.

Teoreem 2. Olgu täidetud teoreemi 1 tingimused 1) - 4) selle vahega, et võrratus (6) on rahuldatud piirkonnas

$$\|x - x_0\| < L(h_0)\eta_0 = \frac{1 + \sqrt{1 - 2h_0}}{h_0} \eta_0 \quad (8)$$

Siis võrrandi (1) lahend on ainus piirkonnas (8).

Hiljem on meetodi kasutamise ja koonduvuse küsimusi edasi uurinud Mösovskih [4], [5], [6], Balujev [7] jt.

§2. NEWTONI MEETODI RAKENDAMINE

ALGEBRALISTE VÖRRANDITE SÜSTEEMIDELE

n tundmatuga n algebraalse võrrandi süsteemi

$$f_i(x^1, x^2, \dots, x^n) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (9)$$

puhul omandab võrrand (2) uue lähendi $x_1 = (x_1^1, x_1^2, \dots, x_1^n)$ leidmiseks alg-
lähendi $x_0 = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n)$ kaudu järgmise lineaarse võrrandsüsteemi kuju:

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_i}{\partial x^j} \right)_0 (x_i^j - x_0^j) + f_i(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (10)$$

Sellisel kujul andsid meetodi Runge ja König [16]. Võttes $X = Y = m_n$

saame teoreemi 1 järgmises sõnastuses:

Teoreem 3. Kui on täidetud tingimused:

1) matriksi

$$\left(\left(\frac{\partial f_i}{\partial x^j} \right)_0 \right)_{i,j=1,2,\dots,n}$$

determinant $\Delta \neq 0$ ja

$$\max_i \frac{1}{|\Delta|} \sum_{j=1}^n |U_j^i| \leq B_0,$$

kus U_j^i on matriksi elementide algebraised täiendid;

2) $\max_j |x_i^j - x_0^j| \leq \eta_0;$

3) $\left| \frac{\partial^2 f_i}{\partial x^j \partial x^k} \right| \leq \frac{H}{n^2} \quad (k, i, j = 1, 2, \dots, n);$

4) $h_0 = B_0 \eta_0 H \leq \frac{1}{2};$

siis võrrandsüsteem (9) omab lahendi, mis on leitav Newtoni protsessiga.

Kahest kahe tundmatuga võrrandist koosneva süsteemi korral on algebralised täiendid U_j võrdsed maatriksi enda elementidega /absoluutselt/ ja võime võtta

$$\max_i \frac{1}{|\Delta|} \sum_{j=1}^2 |U_j| \leq \frac{2b_0}{|\Delta|} = B_0, \quad (11)$$

kus $\left| \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_0 \right| \leq b_0$. Veelgi täpsemaks B_0 väärtuseks saame

$$B_0 = \frac{1}{|\Delta|} \max \left(\left| \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right)_0 \right| + \left| \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right)_0 \right| ; \left| \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right)_0 \right| + \left| \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right)_0 \right| \right).$$

Kasutades hinnangut (11) omandab teoreemi 3 tingimus 4) kuju

$$\frac{2b_0}{|\Delta|} \eta_0 H \leq \frac{1}{2}$$

ehk

$$4b_0 \eta_0 H \leq |\Delta|.$$

Peagu samal kujul sai oma teoreemi ka Ostrowski [13].

§3. NEWTONI MEEETODI ÜLDISTAMINE

FUNKTSIONAALVÖRRANDI PUHUL

Newtoni meetodi üldistamise võimalusi hakati otsima juba väga ammu. Kasutades ka teist järku tuletisi said selliseid üldistusi Halley [15], Euler [14], Richmond [18] ja paljud teised. Saadud üldistuste koonduvuse küsimused jäid aga lahendamata ja alles 1952. aastal õnnestus nõukogude matemaatikul Salehhovil [2] Kantorovitši tulemusi üldistades tõestada teoreemiga 1 analoogne teoreem üldistatud Newtoni meetodi jaoks ühe tundmatuga võrrandi puhul. Salehhovi teoreemi otsese üldistuse funktsionaalvõrrandile ja selle rakenduse integraalvõrrandite lahendamisel avaldas 1953. a. Mertvetsova [10]. Viimasest sõltumatult sai autor analoogse teoreemi ja tulemusi meetodi rakendamisel võrrandsüsteemide ning integraalvõrrandite pu-

hul. Nende esitamisele ongi pühendatud käesoleva töö järgmised paragrahvid. Selles paragrahvis on näidatud Newtoni meetodi üldistuse enda saamine üldise funktsionaalvõrrandi puhul.

Olgu $y = P(x)$ pidev ja kuni kolmanda järguni diferentseeruv operaator, mis kujutab Banachi ruumi X normeeritud ruumi Y .

Vaatleme võrrandit

$$P(x) = 0, \quad (12)$$

mille lahendi x^* ligikaudne väärtus x_0 olgu teada. Ligikaudse lahendi täpsuse parandamise uue meetodi loomiseks lähtume Taylori valemi analoogidest operaatori $P(x)$ jaoks:

$$P(x) \approx P(x_0) + P'(x_0)(x - x_0) \quad (13)$$

$$P(x) \approx P(x_0) + P'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}P''(x_0)(x - x_0)^2. \quad (14)$$

Asendades võrrandi (12) vasaku poole temaga ligikaudselt võrdsetega seostest (13) ja (14) saame ligikaudsed võrrandid

$$P(x_0) + P'(x_0)(x - x_0) = 0 \quad (15)$$

$$P(x_0) + P'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}P''(x_0)(x - x_0)^2 = 0. \quad (16)$$

Kui eksisteerib lineaarse operaatori $P'(x_0)$ pöördoperaator $[P'(x_0)]^{-1}$, siis võrrandit (15) lahendades saame

$$x = x_0 - [P'(x_0)]^{-1}P(x_0), \quad (17)$$

mis kujutab endast tavalist Newtoni meetodit funktsionaalvõrrandi jaoks /võrdle 3/.

Kui eksisteerib ka operaatori

$$P'(x_0) + \frac{1}{2}P''(x_0)(x - x_0)$$

pöördoperaator, siis kirjutades võrrandi (16) kujul

$$P(x_0) + \left[P'(x_0) + \frac{1}{2}P''(x_0)(x - x_0) \right](x - x_0) = 0$$

/siin kasutasime operaatorite lineaarsust/, saame seda lahendades viimase $x - x_0$ suhtes

$$x - x_0 = - \left[P'(x_0) + \frac{1}{2} P''(x_0)(x - x_0) \right]^{-1} P(x_0).$$

Asendades siin $x - x_0$ avaldisest (17) leiame

$$x - x_0 = - \left\{ P'(x_0) - \frac{1}{2} P''(x_0) [P'(x_0)]^{-1} P(x_0) \right\}^{-1} P(x_0)$$

ehk kasutades tähistust

$$[P'(x_0)]^{-1} = \Gamma_0,$$

$$x = x_0 - [P'(x_0) - \frac{1}{2} P''(x_0) \Gamma_0 P(x_0)]^{-1} P(x_0). \quad (18)$$

Valem (18) annabki meile võrrandi (12) juure x^* järgmise lähendi $x = x_0$, mida aga sageli on kasulikum leida lineaarsest võrrandist

$$[P'(x_0) - \frac{1}{2} P''(x_0) \Gamma_0 P(x_0)](x_1 - x_0) = - P(x_0). \quad (19)$$

Kui $P(x)$ on reaalne /või kompleksne/ funktsioon, siis kujutab valem (18) Salehhovi [2] poolt uuritud iteratsiooniprotsessi. Vaadeldaval juhul omab valem järkjärguliste lähendite leidmiseks kuju

$$x_{n+1} = x_n - [P'(x_n) - \frac{1}{2} P''(x_n) \Gamma_n P(x_n)]^{-1} P(x_n), \quad (20)$$

kus $\Gamma_n = [P'(x_n)]^{-1}$.

§4. ÜLDISTATUD NEWTONI MEETODI KOONDUVUS

Saadud iteratsiooniprotsessi (20) koonduvuse küsimuse lahendab järgmine teoreem.

Teoreem 4. Olgu alglähendi x_0 puhul täidetud tingimused:

1) eksisteerib operaatori $P'(x_0)$ pöördoperaator $\Gamma_0 = [P'(x_0)]^{-1}$ ja on teada selle normi tõke

$$\|\Gamma_0\| \leq B_0;$$

2) element x_0 rahuldab ligikaudselt võrrandit (12); eksisteerib pöördoperaator $[P'(x_0) - \frac{1}{2} P''(x_0) \Gamma_0 P(x_0)]^{-1}$, kusjuures

$$\|[P'(x_0) - \frac{1}{2} P''(x_0) \Gamma_0 P(x_0)]^{-1} P(x_0)\| \leq \eta_0;$$

3) piirkonnas, mis on defineeritud võrratusega

$$\|x - x_0\| \leq N(h_0)\eta_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - 2h_0}}{h_0} \eta_0 \quad (21)$$

on operaatori P teine ja kolmas tuletis t6kestatud:

$$\|P''(x)\| \leq H, \quad \|P'''(x)\| \leq K;$$

4) konstandid B_0, η_0 ja H rahuldavad v6rratust

$$h_0 = B_0 H \eta_0 \leq \frac{1}{2};$$

5) konstandid B_0, η_0, K ja h_0 rahuldavad v6rratust

$$k_0 = B_0 K \eta_0 \leq \frac{3h_0^2(7 - 3h_0 - h_0^2)}{(1 + h_0)(2 + h_0)^2}.$$

Neil tingimusil omab v6rrand (12) piirkonnas (21) lahendi x^* , millele l6heneb protsess (20) kiirusega, mis on m6aratud v6rratusega

$$\|x^* - x_n\| \leq \frac{1}{2^{n-1}} (2h_0)^{3^{n-1}-1} \eta_0. \quad (22)$$

T6estus. N6itame k6igepealt, et 6leminekul x_0 -lt x_1 -le j6avad tingimused 1) - 5) t6idetuks.

T6histades $\Delta x = x_1 - x_0$ on

$$\Delta x = - [P'(x_0) - \frac{1}{2} P''(x_0) \Gamma_0 P(x_0)]^{-1} P(x_0) \quad (23)$$

ja tingimuse 2) p6hjal

$$\|\Delta x\| \leq \eta_0. \quad (24)$$

Kasutades operaatori kasvu hindamise valemit /vt. n6iteks [1] ptk.IV §1/ saame

$$\begin{aligned} \|\Gamma_0 [P'(x_0) - P'(x_1)]\| &\leq \|\Gamma_0\| \|P'(x_0) - P'(x_1)\| \leq \\ &\leq B_0 \left[\sup_{\bar{x} = x_0 + \theta \Delta x} \|P''(\bar{x})\| \right] \|\Delta x\| \leq B_0 H \eta_0 = h_0 < 1 \end{aligned}$$

/sest siin $\|\bar{x} - x\| = \theta \|\Delta x\| \leq \theta \eta_0 \leq N(h_0)\eta_0$ ja seega 3) tingimuse p6hjal

$$\|P''(\bar{x})\| \leq H/.$$

J6relikult Banachi teoreemi p6hjal eksisteerib p66rdoperaator

$$G^{-1} = \{ E - \Gamma_0 [P'(x_0) - P'(x_1)] \}^{-1}.$$

$$\text{kusjuures } \|G^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - h_0}.$$

V6ttes $\Gamma_1 = G^{-1} \Gamma_0$ leiame, et

$$\Gamma_1 = \{ E - \Gamma_0 [P'(x_0) - P'(x_1)] \}^{-1} [P'(x_0)]^{-1} =$$

$$= \{ P'(x_0) - [P'(x_0) - P'(x_1)] \}^{-1} = [P'(x_1)]^{-1}.$$

Järelikult

$$\| r_1 \| = \| [P'(x_1)]^{-1} \| \leq \| G^{-1} \| \| r_0 \| \leq \frac{B_0}{1 - \frac{1}{2} h_0} = B_1, \quad (25)$$

s.t. tingimus 1) on täidetud ka x_1 puhul.

Edasi lähtume jälle Taylori valemi analoogist $P(x)$ jaoks /vt. [3] IV §3/

$$P(x_1) = P(x_0) + P'(x_0)\Delta x + \frac{1}{2}P''(x_0)\Delta x^2 + R_3(x_1), \quad (26)$$

kus

$$R_3(x_1) = \frac{1}{2!} \int_0^1 P'''(\bar{x}) \Delta x^3 (1-\theta)^2 d\theta. \quad (27)$$

Asendame valemis (26) Δx -d seost (23) kasutades:

$$\begin{aligned} P(x_1) &= P(x_0) - [P'(x_0) + \frac{1}{2}P''(x_0)\Delta x][P'(x_0) - \frac{1}{2}P''(x_0)r_0 P(x_0)]^{-1} P(x_0) + R_3(x_1) = \\ &= [P'(x_0) - \frac{1}{2}P''(x_0)r_0 P(x_0)][P'(x_0) - \frac{1}{2}P''(x_0)r_0 P(x_0)]^{-1} P(x_0) - \\ &= [P'(x_0) + \frac{1}{2}P''(x_0)\Delta x][P'(x_0) - \frac{1}{2}P''(x_0)r_0 P(x_0)]^{-1} P(x_0) + R_3(x_1) = \\ &= -\frac{1}{2}P''(x_0)[r_0 P(x_0) + \Delta x][P'(x_0) - \frac{1}{2}P''(x_0)r_0 P(x_0)]^{-1} P(x_0) + R_3(x_1) = \\ &= -\frac{1}{2}P''(x_0)\{r_0 P(x_0) - [P'(x_0) - \frac{1}{2}P''(x_0)r_0 P(x_0)]^{-1} P(x_0)\}[P'(x_0) - \frac{1}{2}P''(x_0)r_0 P(x_0)]^{-1} P(x_0) + \\ &+ R_3(x_1) = -\frac{1}{2}P''(x_0)\{r_0 [P'(x_0) - \frac{1}{2}P''(x_0)r_0 P(x_0)][P'(x_0) - \frac{1}{2}P''(x_0)r_0 P(x_0)]^{-1} P(x_0) - \\ &- [P'(x_0) - \frac{1}{2}P''(x_0)r_0 P(x_0)]^{-1} P(x_0)\}[P'(x_0) - \frac{1}{2}P''(x_0)r_0 P(x_0)]^{-1} P(x_0) + R_3(x_1) = \\ &= \frac{1}{4}P''(x_0)r_0 P''(x_0)r_0 P(x_0)\{[P'(x_0) - \frac{1}{2}P''(x_0)r_0 P(x_0)]^{-1} P(x_0)\}^2 + R_3(x_1). \end{aligned}$$

Arvestades tingimusi 1) - 3) ja seost (27) saame siit

$$\| P(x_1) \| \leq \frac{1}{4} \| P''(x_0) \|^2 \| r_0 \| \| r_0 P(x_0) \| \|\Delta x\|^2 + \| R_3(x_1) \| \leq \frac{1}{4} H^2 B_0 \| r_0 P(x_0) \| \eta_0^2 + \frac{1}{6} K \eta_0^3.$$

Siin tarviliku normi $\| r_0 P(x_0) \|^2$ tõkke saame tingimusest 2):

$$\| [P'(x_0) - \frac{1}{2}P''(x_0)r_0 P(x_0)]^{-1} P'(x_0)r_0 P(x_0) \| \leq \eta_0.$$

$$\| [E - \frac{1}{2}r_0 P''(x_0)r_0 P(x_0)]^{-1} r_0 P(x_0) \| \leq \eta_0.$$

$$\frac{\| r_0 P(x_0) \|}{\| E - \frac{1}{2}r_0 P''(x_0)r_0 P(x_0) \|} = \frac{\| [E - \frac{1}{2}r_0 P''(x_0)r_0 P(x_0)] [E - \frac{1}{2}r_0 P''(x_0)r_0 P(x_0)]^{-1} r_0 P(x_0) \|}{\| E - \frac{1}{2}r_0 P''(x_0)r_0 P(x_0) \|} \leq$$

$$\frac{\| E - \frac{1}{2}r_0 P''(x_0)r_0 P(x_0) \| \| [E - \frac{1}{2}r_0 P''(x_0)r_0 P(x_0)]^{-1} r_0 P(x_0) \|}{\| E - \frac{1}{2}r_0 P''(x_0)r_0 P(x_0) \|} \leq \eta_0,$$

$$\frac{\| r_0 P(x_0) \|}{\| E \| + \frac{1}{2} \| r_0 \| \| P''(x_0) \| \| r_0 P(x_0) \|} \leq \eta_0,$$

$$\| r_0 P(x_0) \| \leq \eta_0 [1 + \frac{1}{2} B_0 H \| r_0 P(x_0) \|] = \eta_0 + \frac{1}{2} h_0 \| r_0 P(x_0) \|,$$

$$\|r_0 P(x_0)\| \leq \frac{2\eta_0}{2 - h_0} = \delta_0.$$

Seega

$$\|P(x_1)\| \leq \frac{H^2 B_0 \eta_0^3}{2(2 - h_0)} + \frac{K \eta_0^3}{6} = \frac{[3H^2 B_0 + K(2 - h_0)] \eta_0^3}{6(2 - h_0)}$$

ja võrratust (25) kasutades

$$\|r_1 P(x_1)\| \leq \frac{B_0 \|P(x_1)\|}{1 - h_0} \leq \frac{[3H^2 B_0 + K(2 - h_0)] B_0 \eta_0^3}{6(2 - h_0)(1 - h_0)} \leq \frac{[3h_0^2 + k_0(2 + h_0)] \eta_0}{6(2 - h_0)(1 - h_0)} = \delta_1.$$

Kasutades tingimust 5) saame nüüd

$$\begin{aligned} \|\frac{1}{2} r_1 P''(x_1) r_1 P(x_1)\| &\leq \frac{1}{2} B_1 H \delta_1 = \frac{[3h_0^2 + k_0(2 + h_0)] \eta_0 H B_0}{12(2 - h_0)(1 - h_0)^2} \leq \\ &\leq \frac{[3h_0^2 + \frac{3h_0^2(7 - 3h_0 - h_0^2)}{(1 + h_0)(2 + h_0)}] h_0}{12(2 - h_0)(1 - h_0)^2} = \frac{3h_0^3(2 + 3h_0 + h_0^2 + 7 - 3h_0 - h_0^2)}{12(4 - h_0^2)(1 - h_0^2)(1 - h_0)} = \\ &= \frac{9h_0^3}{4(4 - h_0^2)(1 - h_0^2)(1 - h_0)} \leq \frac{1}{5} < 1. \end{aligned}$$

Seega Banachi teoreemi põhjal eksisteerib pöördoperaator

$$F^{-1} = [E - \frac{1}{2} r_1 P''(x_1) r_1 P(x_1)]^{-1}.$$

kusjuures

$$\|F^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{5}{4}.$$

Seda kasutades saame nüüd

$$\begin{aligned} \|F^{-1} r_1 P(x_1)\| &= \|[P'(x_1) - \frac{1}{2} P''(x_1) r_1 P(x_1)]^{-1} P(x_1)\| \leq \frac{5}{4} \delta_1 = \frac{5[3h_0^2 + k_0(2 + h_0)] \eta_0}{24(2 - h_0)(1 - h_0)} \leq \\ &\leq \frac{45h_0^2 \eta_0}{8(4 - h_0^2)(1 - h_0^2)} \leq \frac{3h_0^2 \eta_0}{2(1 - h_0^2)} = \eta_1 \leq 2h_0^2 \eta_0. \end{aligned}$$

Seega ka tingimus 2) on täidetud x_1 puhul.

Tingimuse 3) täidetuse x_1 puhul järeldeb sellest, et sfäär

$$\|x - x_1\| \leq N(h_1) \eta_1$$

sisaldub sfääris (21), mida on aga lihtsam tõestada allpool.

4) ja 5) tingimuste täidetuse on otseselt kontrollitav:

$$h_1 = B_1 H \eta_1 \leq \frac{2B_0 H h_0^2 \eta_0}{1 - h_0} \leq 4h_0^3 \leq h_0 \leq \frac{1}{2};$$

$$\frac{k_1}{h_1^2} = \frac{B_1 K \eta_1^2}{B_1^2 H^2 \eta_1^2} = \frac{K}{B_1 H^2} \leq \frac{K}{B_0 H^2} = \frac{B_0 K \eta_0^2}{B_0^2 H^2 \eta_0^2} = \frac{k_0}{h_0^2} \leq \frac{3(7 - 3h_0 - h_0^2)}{(1 + h_0)(2 + h_0)^2} \leq \frac{3(7 - 3h_1 - h_1^2)}{(1 + h_1)(2 + h_1)^2}$$

s.t.

$$k_1 \leq \frac{3h_1^2(7 - 3h_1 - h_1^2)}{(1 + h_1)(2 + h_1)^2}.$$

Seega on x_1 puhul täidetud kõik tingimused 1) - 5), kui me arvud B_0, η_0, h_0 ja k_0 asendame vastavalt arvudega B_1, η_1, h_1 ja k_1 . See võimaldab jätkata elementide x_n leidmist valemiga (20) ja hinnata nendega seotud suurusi B_n, η_n, h_n ja k_n järgmiste seostega

$$B_n = \frac{B_{n-1}}{1 - h_{n-1}}; \tag{28}$$

$$\eta_n = \frac{3h_{n-1}^2 \eta_{n-1}}{2(1 - h_{n-1}^2)} \leq 2h_{n-1}^2 \eta_{n-1}; \tag{29}$$

$$h_n = \frac{3h_{n-1}^3}{2(1 - h_{n-1}^2)(1 - h_{n-1})} \leq 4h_{n-1}^3; \tag{30}$$

$$k_n = B_n K \eta_n^2 \leq k_{n-1}. \tag{31}$$

Seoseid (30) korduvalt rakendades saame

$$\left. \begin{aligned} h_0 &= \frac{1}{2}(2h_0)^{3^0} \\ h_1 &\leq 2^2 h_0^3 = \frac{1}{2}(2h_0)^{3^1} \\ h_2 &\leq 2^2 h_1^3 \leq 2^{2 \cdot 2} \frac{1}{2^3} (2h_0)^{3^2} = \frac{1}{2}(2h_0)^{3^2} \\ &\dots \\ h_{n-2} &\leq \dots \leq \frac{1}{2}(2h_0)^{3^{n-2}} \\ h_{n-1} &\leq \dots \leq \frac{1}{2}(2h_0)^{3^{n-1}} \end{aligned} \right\} \tag{32}$$

Rakendades nüüd korduvalt seoseid (29) ja lõpuks seoseid (32) saame η_n jaoks uue tõkke:

$$\begin{aligned} \eta_n &\leq 2h_{n-1}^2 \eta_{n-1} \leq 2^2 h_{n-1}^2 h_{n-2}^2 \eta_{n-2} \leq \dots \leq 2^n h_{n-1}^2 h_{n-2}^2 \dots h_1^2 h_0^2 \eta_0 \leq \\ &\leq 2^n \cdot \frac{1}{2^{2n}} (2h_0)^{2 \cdot 3^{n-1}} \cdot (2h_0)^{2 \cdot 3^{n-2}} \dots (2h_0)^{2 \cdot 3^1} \cdot (2h_0)^{2 \cdot 3^0} \eta_0 = \\ &= \frac{1}{2^n} (2h_0)^{2 \cdot (3^{n-1} + 3^{n-2} + \dots + 3 + 1)} \eta_0 = \frac{1}{2^n} (2h_0)^{3^n - 1} \eta_0 \end{aligned}$$

s.t.

$$\eta_n \leq \frac{1}{2^n} (2h_0)^{3^n - 1} \eta_0. \tag{33}$$

Edasi on otsese arvutamisega tõestatav võrratus

$$\eta_n \leq \eta_n N(h_n) - \eta_{n+1} N(h_{n+1}). \quad (34)$$

Tõepoolest, arvestades $N(h_n)$ definitsiooni (21) ja seoseid (29) ning (30) saame

$$\begin{aligned} \eta_n + \eta_{n+1} N(h_{n+1}) &= \eta_n + \frac{3h_n^2 \eta_n}{2(1-h_n^2)} \cdot \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{3h_n^3}{(1-h_n^2)(1-h_n)}}}{\frac{3h_n^3}{2(1-h_n^2)(1-h_n)}} = \dots \\ \dots &= \eta_n \frac{1 - \sqrt{(1+2h_n)\left(1 + \frac{h_n^2}{1+h_n}\right)}}{h_n} \leq \eta_n \frac{1 - \sqrt{1-2h_n}}{h_n} = \eta_n N(h_n), \end{aligned}$$

kust järeldubki võrratus (34).

Kuna võrratuse (24) võib üldiselt kirjutada kujul

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \eta_n.$$

siis arvestades, et $N(h_n) \leq 2$ ja kasutades võrratuse (34) ning (33) saame:

$$\begin{aligned} \|x_{n+p} - x_n\| &\leq \eta_n + \eta_{n+1} + \dots + \eta_{n+p-1} \leq \eta_n N(h_n) - \eta_{n+p} N(h_{n+p}) \leq \\ &\leq \eta_n N(h_n) \leq 2\eta_n \leq \frac{1}{2^{n-1}} (2h_0)^{3^{n-1}} \eta_0. \end{aligned}$$

s.t.

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leq \frac{1}{2^{n-1}} (2h_0)^{3^{n-1}} \eta_0. \quad (35)$$

Ruumi X täielikkuse tõttu järeldub võrratusest (35), et eksisteerib

$$x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Lastes võrratuses (35) $p \rightarrow \infty$ saame

$$\|x^* - x_n\| \leq \frac{1}{2^{n-1}} (2h_0)^{3^{n-1}} \eta_0.$$

s.t. seose (22). Kui võrratuse (35) tuletamisel võtta $n = 0$, siis saame võrratuse

$$\|x_p - x_0\| \leq \eta_0 N(h_0),$$

kust $p \rightarrow \infty$ puhul leiame

$$\|x^* - x_0\| \leq \eta_0 N(h_0),$$

s.t. x^* asub sfääris (21).

Et x^* on võrrandi (12) lahend, järeldub võrdusest

$$P(x_n) + [P'(x_n) - \frac{1}{2}P''(x_n)\Gamma_n P(x_n)](x_{n+1} - x_n) = 0$$

kui $n \rightarrow \infty$. Kuna siis $\|x_{n+1} - x_n\| \rightarrow 0$, aga

$$\begin{aligned} \|P'(x_n) - \frac{1}{2}P''(x_n)\Gamma_n P(x_n)\| &\leq \|P'(x_n)\| + \frac{1}{2}H\|\Gamma_n P(x_n)\| \leq \\ &\leq \|P'(x_0)\| + \|P'(x_n) - P'(x_0)\| + \frac{1}{2}H\delta_n \leq \\ &\leq \|P'(x_0)\| + H\|x_n - x_0\| + \frac{1}{2}H\delta_n \leq \|P'(x_0)\| + HN(h_0)\eta_0 + \frac{1}{2}H\delta_n, \end{aligned}$$

kus

$$\delta_n = \frac{[3h_{n-1}^2 + k_{n-1}(2 + h_{n-1})]\eta_{n-1}}{6(2 - h_{n-1})(1 - h_{n-1})},$$

saame $\|P(x_n)\| \rightarrow 0$ ja kuna $x_n \rightarrow x^*$, siis $P(x)$ pidevuse tõttu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(x_n) = P(x^*) = 0$$

m.o.t.t.

Meil jäi veel tõestada, et üldiselt sfäär

$$\|x - x_n\| \leq N(h_n)\eta_n \tag{36}$$

sisaldub sfääris (21). Tõepoolest, olgu x sfääri (36) punkt. Siis võrratust (34) kasutades

$$\|x - x_0\| \leq \|x_n - x_0\| + \|x - x_n\| \leq [\eta_0 N(h_0) - \eta_n N(h_n)] + \eta_n N(h_n) = \eta_0 N(h_0),$$

s.t. x asub tõesti ka sfääris (21).

Sellega on sõnastatud teoreem tõestatud.

M. Mertvetsova [10] tõestas ka teoreemi, mis annab piirkonna, milles võrrandi lahend on ainus.

Teoreem 5. Kui teoreemi 4 tingimused 1) - 5) on täidetud piirkonnas

$$\|x - x_0\| < \sqrt{2}\eta_0,$$

siis võrrandil (12) on selles piirkonnas ainus lahend.

Edasi vaatleme, kuidas toimub saadud Newtoni meetodi üldistuse ja teoreemi 4 kasutamine algebraalsete võrrandsüsteemide ja integraalvõrrandite konkreetsetel juhtudel.

§5. ÜLDISTATUD NEWTONI MEETODI

KASUTAMINE ALGEBRALISTE VÖRRANDITE

SÜSTEEMIDE LIGIKAUDSEL LAHENDAMISEL

Mittelineaarsele võrrandsüsteemile

$$u^i = f_i(x^1, x^2, \dots, x^n) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (37)$$

funktsionaalvõrrandi kuju andes saame

$$u = P(x) = 0,$$

kus P on operaator, mis kujutab n-mõõtmelise ruumi n-mõõtmelisse:

$$u = (u^1, u^2, \dots, u^n); \quad x = (x^1, x^2, \dots, x^n).$$

Süsteemi (37) lahendi alglahendi tähistame

$$x_0 = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n)$$

ja täpse lahendi

$$x^* = (x_*^1, x_*^2, \dots, x_*^n).$$

Edasi võtame tarvitusele tähistused

$$\left. \begin{aligned} u_0^i &= f_i(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\ u_j^i &= \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \\ u_{j\kappa}^i &= \left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_\kappa} \right)_0 \quad (i, j, \kappa = 1, 2, \dots, n) \\ \Delta x^j &= x_1^j - x_0^j \quad (j = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

kus

$$x_1 = (x_1^1, x_1^2, \dots, x_1^n)$$

on süsteemi lahendi uus lähend.

Tähistusi (38) kasutades on

$$P(x_0) = u_0 = (u_0^1, u_0^2, \dots, u_0^n)$$

$$P'(x_0) = (u_j^i)_{i,j=1,2,\dots,n}$$

$$P''(x_0) = (u_{j\kappa}^i)_{i,j,\kappa=1,2,\dots,n}$$

$$\Gamma_o = \frac{1}{\Delta} (U_j^i)_{i,j=1,2,\dots,n}$$

kus U_j^i on matriksi (u_j^i) elementide algebralised täiendid ja Δ selle matriksi determinant. Edasi

$$\begin{aligned} \Gamma_o u_o &= \frac{1}{\Delta} \left(\sum_{\ell=1}^n U_{\ell}^j u_o^{\ell} \right)_{j=1,2,\dots,n} \\ P''(x_o) \Gamma_o u_o &= \frac{1}{\Delta} \left(\sum_{j=1}^n u_{jk}^i \sum_{\ell=1}^n U_{\ell}^j u_o^{\ell} \right)_{i,k=1,2,\dots,n} \\ P'(x_o) - \frac{1}{2} P''(x_o) \Gamma_o u_o &= \left(u_k^i - \frac{1}{2\Delta} \sum_{j=1}^n u_{jk}^i \sum_{\ell=1}^n U_{\ell}^j u_o^{\ell} \right)_{i,k=1,2,\dots,n} \end{aligned}$$

Tähistades

$$A_{ik} = u_k^i - \frac{1}{2\Delta} \sum_{j=1}^n u_{jk}^i \sum_{\ell=1}^n U_{\ell}^j u_o^{\ell} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n), \quad (39)$$

omandab võrrand 19 paranduse x määramiseks järgmise lineaarse võrrandsüsteemi kuju:

$$\sum_{k=1}^n A_{ik} \Delta x^k = -u_o^i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (40)$$

Kasutades ruumi m_n meetrikat saame teoreemist 4:

Teoreem 6. Kui on täidetud tingimused:

- 1) $\Delta \neq 0, \quad \max_1 \frac{1}{|\Delta|} \sum_{j=1}^n |U_j^i| \leq B_o;$
- 2) $\max_j |\Delta x^j| \leq \eta_o;$
- 3) $\left| \frac{\partial^2 f_i}{\partial x^j \partial x^k} \right| \leq \frac{H}{n^2}, \quad \left| \frac{\partial^3 f_i}{\partial x^j \partial x^k \partial x^{\ell}} \right| \leq \frac{K}{n^3};$
- 4) $h_o = B_o H \eta_o \leq \frac{1}{2};$
- 5) $k_o = B_o K \eta_o^2 \leq \frac{3h_o^2 (7 - 3h_o - h_o^2)}{(1 + h_o)(2 + h_o)^2};$

siis võrrandsüsteem (37) omab lahendi, mis on valitud algühendist lähtudes leitav üldistatud Newtoni protsessiga.

Vaatleme nüüd erijuhtu, mil on tegemist kahest kahe tundmatuga võrrandsüsteemiga koosneva süsteemiga

$$\left. \begin{aligned} u^1 &= f_1(x^1, x^2) = 0 \\ u^2 &= f_2(x^1, x^2) = 0: \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Nüüd on matriksi (u_j^i) elementide algebralised täiendid U_j^i lihtsalt lei-

tavad, nimelt

$$U_1^1 = u_2^2, U_2^1 = -u_2^1, U_1^2 = -u_1^2, U_2^2 = u_1^1.$$

Seosed (39) võrrandsüsteemi (40) kordajate leidmiseks omandavad nüüd

kuju

$$A_{i\kappa} = u_{\kappa}^i - \frac{u_{1\kappa}^i \Delta_1}{2\Delta} - \frac{u_{2\kappa}^i \Delta_2}{2\Delta}, \quad (42)$$

kus

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} u_1^1 & u_2^1 \\ u_1^2 & u_2^2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} u_1^1 & u_0^1 \\ u_1^2 & u_0^2 \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} u_1^1 & u_2^1 \\ u_1^2 & u_2^2 \end{vmatrix}.$$

Seega võrrandsüsteem (40) paranduste Δx^j leidmiseks tuleb

$$\left. \begin{aligned} A_{11} \Delta x^1 + A_{12} \Delta x^2 + u_0^1 &= 0 \\ A_{21} \Delta x^1 + A_{22} \Delta x^2 + u_0^2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Kasutades operaatorite tökete hindamisel veidi täpsemaid valemeid on teoreem 6 nüüd sõnastatav järgmiselt

Teoreem 7. Kui on täidetud tingimused:

- 1) $\Delta \neq 0$; $\max(|u_1^1| + |u_1^2|; |u_2^1| + |u_2^2|) \leq B_0 |\Delta|$;
- 2) $\max(|\Delta x^1|; |\Delta x^2|) \leq \eta_0$;
- 3) $\max_1 \sum_{\kappa, j=1}^2 \left| \frac{\partial^2 f_i}{\partial x^j \partial x^\kappa} \right| \leq H$ ja $\left| \frac{\partial^3 f_i}{\partial x^j \partial x^\kappa \partial x^\epsilon} \right| \leq \frac{K}{8}$

piirkonnas $\max_j |x^j - x_0^j| \leq 2\eta_0$;

- 4) $h_0 = B_0 H \eta_0 \leq \frac{1}{2}$;
- 5) $k_0 = B_0 K \eta_0^2 \leq \frac{3h_0^2 (7 - 3h_0 - h_0^2)}{(1 + h_0)(2 + h_0)^2}$;

siis protsess koondub süsteemi lahendiks, kusjuures

$$\max(|x_*^1 - x_n^1|; |x_*^2 - x_n^2|) \leq \frac{1}{2^{n-1}} (2h_0)^{3^{n-1}} \eta_0. \quad (44)$$

Siin tingimuse 5) kontrollimist võib praktiliselt lihtsustada, kui kasutada tunduvalt rangemat tingimust

$$5') \quad k_0 \leq \frac{42}{25} h_0^2.$$

§6. N Ä I T E D

Meetodi praktiline kasutamine kahe tundmatuga võrrandsüsteemi puhul toimub järgmiselt. Kõigepealt arvutame suurused u_0^i , u_j^i , u_{jk}^i ja nende abil

$$\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \frac{\Delta_1}{2\Delta} \text{ ning } \frac{\Delta_2}{2\Delta}.$$

Seostest (42) saame edasi süsteemi (43) kordajad ja viimast lahendades leiame parandused Δx^1 ja Δx^2 . Kontrollides nüüd teoreemi 7 tingimuste täidetust veendume, kas uus lähend (x_1^1, x_1^2) on eelmisest parem /siinjuures peab aga mainima, et ka juhul kui teoreemi tingimused pole täidetud võib uus lähend alglähendist täpsem olla/. Suuremat täpsust soovides rakendame meetodit veel kord, võttes nüüd alglähendiks (x_1^1, x_1^2) .

Näide 1. Lahendame võrrandsüsteemi

$$\left. \begin{aligned} u^1 &= y^2 + xy - x^2 + 7x - 12 = 0 \\ u^2 &= x^2y - 3y^2 - 5x - 1 = 0, \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

võttes $x_0 = 6$; $y_0 = 1$. Arvutusi teostades saame

$$B_0 = 0,22 ; \eta_0 = 0,083 ; H = 33 ; h_0 = 0,59 > \frac{1}{2}.$$

Seega teoreemi 7 tingimus 4) pole täidetud. Sellele vaatamata on süsteemi (43) lahendamisel saadud uus lähend

$$x_1 = 6,0824 ; y_1 = 0,9177$$

alglähendist tunduvalt täpsem.

Näide 2. Lahendame sama võrrandsüsteemi (45) võttes alglähendiks $x_0 = 6,1$; $y_0 = 0,9$. Nüüd $B_0 = 0,216$; $\eta_0 = 0,02$; $H = 32,5$; $K = 16$; $\Delta = -184,025$; $h_0 = 0,14 < \frac{1}{2}$; $k_0 = 0,002 < 0,01 < \frac{42}{25} h_0^2$.

Lineaarne süsteem (43) paranduste leidmiseks omandab kuju

$$\left. \begin{aligned} -4,27406 \Delta x + 7,9084445 \Delta y - 0,21 &= 0 \\ 6,0688533 \Delta x + 31,652667 \Delta y - 0,441 &= 0, \end{aligned} \right\}$$

kust $\Delta x = - 0,0172382$; $\Delta y = 0,0172376$ ja seega

$$x_1 = 6,0827618 ; y_1 = 0,9172376.$$

Võttes vea hindamise valemis (44) $n = 1$ näeme, et tulemuse viga ei ole suurem kui $\pm 1,6 \cdot 10^{-3}$. Tegelikult on tulemus aga täpsem, erinedes lahendist vähem kui 10^{-6} võrra. Tavalisest Newtoni meetodist saadud uus lähend tuleb vaadeldaval juhul

$$x_1 = 6,08263 ; y_1 = 0,91713,$$

kus viga on rohkem kui $\pm 10^{-4}$.

Näide 3. Olgu teada võrrandsüsteemi

$$\left. \begin{aligned} 4,5x^2 + 2y^2 - 2x - 1 &= 0 \\ x^2 - 1,5x - y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

lahendi alg lähend $x_0 = - 0,2$, $y_0 = 0,4$. Siin

$$B_0 = 0,835 ; \eta_0 = 0,028 ; H = 13 ; K = 0 ; h_0 = 0,31.$$

Uueks lähendiks süsteemist (43) saame

$$x_1 = - 0,227931 ; y_1 = 0,393867 .$$

Valemist (44) saame, et selle viga on väiksem kui $1,1 \cdot 10^{-2}$. Tegelikult on viga aga väiksem kui $2 \cdot 10^{-5}$.

Näide 4. Lahendame sama võrrandsüsteemi (46) lähtudes alg lähendist $x_0 = - 0,23$; $y_0 = 0,39$. Nüüd saame

$$x_1 = - 0,22794754; y_1 = 0,393888136$$

ja vea ülemmääraks $6,3 \cdot 10^{-6}$. Tegelik viga on jälle väiksem, nimelt alla 10^{-7} .

Seega näeme, et praktiliselt koondub meetod veelgi kiiremini, kui seda teoreem 7 garanteerib.

§7. NEWTONI MEETODI JA SELLE ÜLDISTUSE

RAKENDAMINE INTEGRAALVÖRRANDITE PUHUL

Mittelinearsele integraalvõrrandile

$$x(s) = \int_0^1 K(s,t,x(t)) dt, \quad (47)$$

kus K on oma argumentide pidev funktsioon, saab samuti anda funktsionaalvõrrandi kuju

$$P(x) = 0.$$

Siin $P(x) = (E - K)x = x(s) - \int_0^1 K(s,t,x(t)) dt.$

Tavalise Newtoni meetodi puhul lineaarne võrrand (2) uue lähendi leidmiseks omandab nüüd kuju

$$x_1(s) - x_0(s) - \int_0^1 K'_x(s,t,x_0(t))(x_1(t) - x_0(t)) dt = \varepsilon_0(s)$$

ehk operaatorites

$$(E - K'_x(x_0))(x_1 - x_0) = - (E - K)x_0,$$

kus

$$\varepsilon_0(s) = - (E - K)x_0 = \int_0^1 K(s,t,x_0(t)) dt - x_0(s),$$

$x_0(s)$ on lähendi algühend ja operaator

$$K'_x(x_0)x = \int_0^1 K'_x(s,t,x_0(t)) x(t) dt.$$

Vaadeldes operaatoreid ruumis C on teoreem 1 siin kasulik sõnastada järgmisel, veidi muudetud kujul:

Teoreem 8. Kui on täidetud tingimused:

- 1) algühendi $x_0(s)$ puhul tuum $K'_x(s,t,x_0(t))$ omab resolvendi $G(s,t)$, kusjuures

$$\int_0^1 |G(s,t)| dt \leq B_0 - 1 \quad (0 \leq s \leq 1);$$
- 2) $B_0 |\varepsilon_0(s)| \leq \eta_0;$
- 3) $|K''_{x_2}(s,t,u)| \leq H$ piirkonnas (5);
- 4) $h_0 = B_0 \eta_0 H \leq \frac{1}{2};$

siis Newtoni protsess alglähendiga $x_0(s)$ koondub võrrandi (47) lahendiks.

Üldistatud Newtoni meetodi korral tuleb uus lähend leida võrrandist

$$\Delta x(s) - \int_0^1 [K'_x(s, t, x_0(t)) + \frac{1}{2} K''_{xx}(s, t, x_0(t)) y(t)] \Delta x(t) dt = \varepsilon_0(s),$$

kus $y(s)$ on võrrandi

$$y(s) - \int_0^1 K'_x(s, t, x_0(t)) y(t) dt = \varepsilon_0(s)$$

lahend, s.t. tavalise Newtoni meetodiga saadud parandus.

Operaatorites omab võrrand uue lähendi leidmiseks kuju

$$\{E - K'_x(x_0) + \frac{1}{2} K''_{xx}(x_0) [E - K'_x(x_0)]^{-1} (E - K)x_0\} \Delta x + (E - K)x_0 = 0,$$

$$\text{kus } K''_{xx}(x_0) x' x'' = \int_0^1 K''_{xx}(s, t, x_0(t)) x'(t) x''(t) dt.$$

Meetodi koonduvuse kohta kehtib nüüd järgmine

Teoreem 9. Kui on täidetud tingimused:

1) alglähendi $x_0(s)$ puhul tuum $K'_x(s, t, x_0(t))$ omab resolvendi $G(s, t)$, kusjuures

$$\int_0^1 |G(s, t)| dt \leq B_0 - 1 \quad (0 \leq s \leq 1);$$

2) operaatorile $K'_x(x_0) - \frac{1}{2} K''_{xx}(x_0) [E - K'_x(x_0)]^{-1} (E - K)x_0$ vastav tuum omab resolvendi $R(s, t)$, kusjuures

$$\int_0^1 |R(s, t)| dt \leq C_0 - 1 \quad (0 \leq s \leq 1),$$

ning

$$C_0 |\varepsilon_0(s)| \leq \eta_0;$$

3) $|K''_{u^2}(s, t, u)| \leq H$ ja $|K''_{u^3}(s, t, u)| \leq K$ piirkonnas (21);

4) $h_0 = B_0 \eta_0 H \leq \frac{1}{2}$;

5) $k_0 = B_0 \eta_0^2 K \leq \frac{3h_0^2(7 - 3h_0 - h_0^2)}{(1 + h_0)(2 + h_0)^2}$;

siis üldistatud Newtoni protsess koondub võrrandi (47) lahendiks kiirusega (22).

Näide 5. Lahendame integraalvõrrandi

$$x(s) = 1 - 0,4854s + s^2 + \int_0^1 s t \arctan x(t) dt,$$

võttes $x_0(s) = 1,5 / \sqrt{t}$. [1] IV §3/. Siin

$$K'_x(s, t, x) = \frac{st}{1 + x^2}; \quad K'_x(s, t, x_0) = \frac{4}{13} st;$$

$$K''_{xx}(s, t, x) = \frac{-2stx}{(1 + x^2)^2}; \quad K''_{xx}(s, t, x_0) = -\frac{48}{169} st.$$

Tuuma $K'_x(s, t, x_0)$ resolvent $G(s, t) = \frac{12}{35} st$ ja

$$\max_s \int_0^1 |G(s, t)| dt = \frac{6}{35} .$$

Seega $B_0 = \frac{41}{35}$. Edasi

$$\varepsilon_0(s) = -(E - K)x_0 = s^2 + 0,006012s - 0,5$$

$$y(s) = \varepsilon_0(s) + \int_0^1 G(s, t)\varepsilon_0(t) dt = s^2 + 0,0067s - 0,5 .$$

Operaatori $K'_x(x_0) - \frac{1}{2} K''_{xx}(x_0) [E - K'_x(x_0)]^{-1} (E - K)x_0$ tuum omandab kuju

$$\frac{4}{13} st - \frac{24}{169} st(t^2 + 0,0067t - 0,5)$$

ja selle resolvent

$$R(s, t) = 0,023866s (-6t^3 - 0,0402t^2 + 16t) .$$

Siinjuures $\max_s \int_0^1 |R(s, t)| dt = 0,154806$ ning seega $C_0 = 1,154806$.

Nüüd leiame

$$\frac{\eta_0}{C_0} = \max_s |\varepsilon_0(s)| = \varepsilon_0(1) = 0,506012 ; \quad \eta_0 = 0,58435 ;$$

$$H = \max_u |K''_{u^2}(s, t, u)| = \max_u \left| \frac{2stu}{(1 + u^2)^2} \right| = \frac{3}{8} \sqrt{3} ;$$

$$K = \max_u |K'''_{u^3}(s, t, u)| = \max_u \left| \frac{2st(1 - 3u^2)}{(1 + u^2)^3} \right| = 0,5 ;$$

$$h_0 = 0,445 < 0,5 ; \quad k_0 = 0,2 < 0,335 = \frac{42}{25} h_0^2 .$$

Seega teoreemi tingimused täidetud ja võime arvutada

$$\begin{aligned} \Delta x(s) &= \varepsilon_0(s) + \int_0^1 R(s, t)\varepsilon_0(t) dt = s^2 + 0,006012s - 0,5 - 0,005407s = \\ &= s^2 + 0,000605s - 0,5 ; \end{aligned}$$

$$x_1(s) = s^2 + 0,000605s + 1 .$$

Täpsest lahendist $x^*(s) = s^2 + 1$ erineb see vähem kui 0,0007 võrra, samal ajal kui alglähendi x_0 erinevus x^* -st oli 0,5 ja Newtoni meetodiga saadud lähendi $y(s) + x_0(s)$ erinevus 0,007 .

T s i t e e r i t u d k i r j a n d u s :

- [1] Канторович Л. В., Функциональный анализ и прикладная математика, УМН т. III вып. 6 (28) 1948.
- [2] Салехов Г. С., О сходимости процесса касательных гипербол, ДАН т. 82 № 4, 1952.
- [3] Гавурин М. К., Нелинейные функциональные преобразования, Уч. зап. ЛГУ вып. 19, 1950.
- [4] Мысовских И. П., Об одном методе решения нелинейных функциональных уравнений и его применениях, Автореф. 1950.
- [5] — " — К вопросу о сходимости метода Ньютона, Труды мат. ин-та им. В. А. Стеклова 28, 1949.
- [6] — " — О сходимости метода Ньютона, Прикладная матем. и мех. 16, 6, 1952.
- [7] Балухев А. Н. Общая теория метода С. А. Чаплыгина, Автореферат 1952.
- [8] Загадский Д. М., ДАН т. 59 №6, 1948.
- [9] — " — Приближенное решение нелинейных интегральных уравнений, Диссертация, Пед. ин-тут им. А. И. Герцена, 1946.
- [10] Мертвцова М. А., Аналог процесса касательных гипербол для общих функциональных уравнений, ДАН т. 88 № 4, 1953.
- [11] Стенин Н. П. Сборник работ " Конформное отображение", М.-Л. 1937.
- [12] Ostrowski A. Матем. сборник, 2, 1937.
- [13] — " — Commen. Math. Helv. 9, 1937.
- [14] Euler L. Differentiaalrechnung II, Kap. 9.
- [15] Halley A new and general method of finding the roots of equations, Phil. Transact. of the Roy. Soc. London 18, 1694.
- [16] Runge u. König Vorlesungen über numerisches Rechnen, Berlin, 1924.
- [17] Willers F. Methoden d. prakt. Analysis, Berlin, 1923.
- [18] Richmond Journal of the London Math. Soc., 19, 1, 1944.