Lehrbuch

der

ebenen Trigonometrie

von

W. Aersing.

Dorpat 1853.

Lehrbuch

der

ebenen Trigonometrie

zum Gebrauch

bei

dem Unterrichte in Gymnasien und höheren

Unterrichtsanstalten

von

W. Nerling,

Collegienrath und Oberlehrer an dem Gymnasium

in Dorpat.

Dorpat 1853,

gedruckt bei Heinrich Laakmann.

Der Druck dieser Schrift wird unter der Bedingung gestattet, daß nach Beendigung desselben der Abgetheilten Censur in Dorpat die vorschriftmäßige Anzahl von Exemplaren vorgestellt werde.

Dorpat, den 29. Juni 1853.

Abgetheilter Censor de la Croix.

Vorrede.

Schon bei der Herausgabe meines Lehrbuches der Planimetrie habe ich meine Ansicht darüber ausgesprochen, welche Anforderungen an die Einrichtung eines Lehrbuchs der Mathematik zu stellen sind. Der dort ausgesprochenen Ansicht bin ich auch bei der Abfassung der vorliegenden Arbeit gefolgt, und kann mich daher rücksichtlich der Behandlung und Darstellung des Lehrstoffes auf das bereits Gesagte beziehen.

Es dürfte vielleicht auffallen, daß man in vorliegendem Leitfaden Lehrsätze über das sphärische Dreieck, die eigentlich zur Stereometrie gehören, vor der sphärischen Trigonometrie aufgestellt finden wird. Zu dieser Anordnung bewogen mich zwei Gründe; nämlich einmal der Umstand, daß in Secunda, in welcher Klasse auf unsern Gymnasien die Stereometrie gelehrt wird, zur

Behandlung der erwähnten Lehrsätze zu wenig Zeit übrigbleibt und dann die Ueberzeugung, daß es zweckmäßig sei, die Sätze von der körperlichen Ecke aufzufrischen und anzuwenden.

Dorpat, den 10. März 1853.

Der Verfasser.

Einleitung.

§ 1. Die Geometrie lehrt, wie man ein Vieleck, sobald eine hinreichende Anzahl Linien und Winkel gegeben sind, construirt. Diese Angabe der einzelnen Stücke kann auf zweierlei Art geschehen; entweder werden die betreffenden Linien und Winkel geradezu selber vorgelegt, oder ihre Maaße angegeben. Im erstern Falle ließe sich die Construction unmittelbar ausführen, im zweiten Falle dagegen müßte man die Linien erst durch Abtragung mittelst eines Maaßstabes und die Winkel durch mechanische Theilung des Kreises zur Anschauung bringen, ehe man zur Construction des Vielecks schreiten könnte; wollte man aber die gesuchten Stücke ebenfalls in Zahlen ausgedrückt haben, so würden die durch Construction erhaltenen Linien und Winkel noch zu messen sein.

Man sieht wohl ein, daß dieses Verfahren eben so umständlich als ungenau ist; daher sucht man die gesuchten Stücke durch Rechnung abzuleiten, und diese Berechnungen lehrt die Trigonometrie (τρίγωνον, μετρεῖν).

§ 2. Jedes Vieleck läßt sich in Dreiecke zertheilen, deshalb behandelt denn auch die Trigonometrie vorzugsweise das Dreieck.

Man unterscheidet aber zweierlei Arten von Dreiecken, ebene und sphärische oder Kugeldreiecke; hiernach wird die Trigonometrie selbst in die ebene und sphärische eingetheilt.

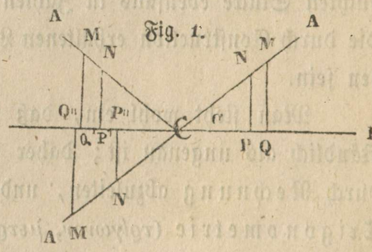
§ 3. Da sowohl unter den gegebenen als unter den gesuchten Stücken eines Dreiecks Winkel vorkommen, so muß die erste Frage sein, wie man diese Größen in Rechnung zu bringen habe, da Seiten und Winkel eines Dreiecks ungleichartige Größen sind, und sich daher durch Rechnung nicht mit einander verbinden lassen. Man hat deshalb den Gebrauch der Winkel gänzlich beseitigt, und für dieselben die Verhältnisse der Seiten substituirt, was in Folge der Lehre der Aehnlichkeit möglich ist, indem bei gleichen Winkeln die Seitenverhältnisse und umgekehrt sich nicht ändern können.

Die Lehre von diesen Seitenverhältnissen nennt man auch Goniometrie (γωνία, Winkel).

I. Goniometrie.

§ 4. Um die Seitenverhältnisse aller Winkel angeben zu können, nehme man den einen Schenkel des Winkels als fest und den andern als drehend an.

Fig. 1.



Es sei $\angle ACB = \angle \alpha$ ein spitzer Winkel; man nehme auf dem rotirenden Schenkel beliebige Punkte, N, M ꝛc., an und ziehe von demselben Senkrechte auf den andern Schenkel, NP, MQ, dadurch entstehen lauter ähnliche Dreiecke, in welchen die Seitenverhältnisse immer dieselben sind, also $\frac{NP}{CN} = \frac{MQ}{CM}$ oder $\frac{CP}{CN} = \frac{CQ}{CM}$ u. s. w.

Wird der Winkel durch die Drehung des Schenkels CA größer als *R*, so fallen die Senkrechten auf die Verlängerung des festen Schenkels und die Seitenverhältnisse sind ebenfalls gleich,

als $\frac{NP'}{CN} = \frac{MQ'}{CM}$ oder ist der Winkel ein convexer, so ist auch
$\frac{NP''}{CN} = \frac{MQ''}{CM}$ u. s. w.

Das Verhältniß der Senkrechten zum rotirenden Schenkel eines concaven oder convexen Winkels bleibt demnach immer dasselbe, man mag den Punkt N annehmen, wo man will, und wenn der Winkel α eine bestimmte Größe hat, so muß auch dieses Verhältniß einen bestimmten Werth besitzen. Hält z. B. der Winkel 30^0, so ist das Verhältniß der Gegenkathete zur Hypotenuse $\frac{1}{2}$, und findet sich umgekehrt das Verhältniß einer Kathete zur Hypotenuse $= \frac{1}{2}$, so liegt ihr auch wieder ein Winkel von 30^0 gegenüber.

§ 5. Der Winkel α und jenes Seitenverhältniß stehen also in einem solchen gegenseitigen Zusammenhange, daß jedem bestimmten Winkel ein bestimmtes Verhältniß entspricht und daß umgekehrt zu jedem solchen Verhältniß ein ganz bestimmter Winkel gehört. Sobald aber die Größe des Winkels sich ändert, ändert sich auch das Verhältniß zwischen dem Schenkel und dem Perpendikel. Winkel und Seitenverhältnisse sind also von einander abhängig, und solche Größen, die von andern Größen abhängen, nennt man Funktionen dieser Größen; daher nennt man diese Seitenverhältnisse goniometrische oder trigonometrische Funktionen, und sind als Quotienten zweier gleichartig benannten Zahlen unbenannte Zahlen.

§ 6. Es giebt sechs trigonometrische Funktionen, die verschiedene Namen führen:

1) Das Perpendikel NP (Fig. 1) dividirt durch den rotirenden Schenkel CN heißt der Sinus des Winkels BCA, also:
$\frac{NP}{CN} = \sin. BCA$;

2) der feste Schenkel CP oder dessen Verlängerung dividirt

durch den rotirenden CN heißt der Cosinus des Winkels BCA, also: $\frac{CP}{CN} = \cos. BCA$;

3) das Perpendikel NP dividirt durch den festen Schenkel CP oder dessen Verlängerung heißt die Tangente des Winkels BCA, also: $\frac{NP}{CP} = \text{tang. } BCA$;

4) der feste Schenkel CP oder dessen Verlängerung dividirt durch das Perpendikel NP heißt die Cotangente des Winkels BCA, also: $\frac{CP}{NP} = \text{cotg. } BCA$;

5) der rotirende Schenkel CN dividirt durch den festen CP oder dessen Verlängerung heißt die Sekante des Winkels BCA, also: $\frac{CN}{CP} = \sec. BCA$;

6) der rotirende Schenkel CN dividirt durch das Perpendikel NP heißt die Cosekante des Winkels BCA, also: $\frac{CN}{NP} = \text{cosec. } BCA$.

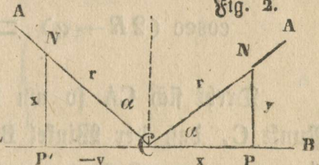
Anmerkung. Sin., cos. u. s. w. sind Symbole, nicht Factoren. — Die Herleitung des lateinischen Kunstwortes sinus ist schwierig. Godin († 1760) giebt folgende Erklärung. Da die Chorden der Bogen im Lateinischen auch inscriptae heißen, so habe man ihre Hälften, die Sinusse, semisses inscriptarum genannt, und dieses abgekürzt s. ins. geschrieben, woraus denn das Wort sinus entstanden sei. Die Benennungen anderer goniometrischen Funktionen, Cosinus, Cotangente, sind wirklich Zusammenziehungen von Co. sinus, d. i. complementi sinus u. s. w.

§ 7. Bezeichnet man in dem rechtwinkligen Dreiecke NCP (Fig. 1) die Gegenkathete eines spitzen Winkels α durch y, die Nebenkathete desselben Winkels durch x, die Hypotenuse, welche bei der Drehung immer dieselbe Länge behielt, durch r, und die Verlängerung des festen Schenkels über den Scheitel hinaus, sowie das Perpendikel des convexen Winkels durch negativ (—), so findet man zwischen den trigonometrischen Funktionen der spitzen und stumpfen Winkel folgenden Zusammenhang:

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{y}{r} = \sin\alpha = \cos(R-\alpha) \\[4pt]
\frac{x}{r} = \cos\alpha = \sin(R-\alpha) \\[4pt]
\frac{y}{x} = \operatorname{tang}\alpha = \operatorname{cotg}(R-\alpha) \\[4pt]
\frac{x}{y} = \operatorname{cotg}\alpha = \operatorname{tang}(R-\alpha) \\[4pt]
\frac{r}{x} = \sec\alpha = \operatorname{cosec}(R-\alpha) \\[4pt]
\frac{r}{y} = \operatorname{cosec}\alpha = \sec(R-\alpha)
\end{array}\right\} \text{(A)}$$

Cosinus ist der Sinus des Complementwinkels, $\angle$ CNP $= 90^0 - \alpha$, hier ist NP der feste Schenkel und CP das Perpendikel, also nach § 6, 2: $\frac{NP}{NC} = \cos(R-\alpha) = \frac{y}{r}$ u. s. w.

Fig. 2.



Dreht sich CA so um den Punkt C, daß der Winkel BCA $= R + \alpha$ wird, so fällt das Perpendikel von N auf die Verlängerung des festen Schenkels CB und $\triangle$ CNP′ $\cong \triangle$ CNP, folglich ist NP′ $=$ x und CP′ $=$ NP, aber negativ, also CP′ $= -$ y.

$$\left.\begin{array}{l}
\sin(R+\alpha) = \frac{x}{r} = \cos\alpha \\[4pt]
\cos(R+\alpha) = \frac{-y}{r} = -\sin\alpha \\[4pt]
\operatorname{tang}(R+\alpha) = -\frac{x}{y} = -\operatorname{cotg}\alpha \\[4pt]
\operatorname{cotg}(R+\alpha) = -\frac{y}{x} = -\operatorname{tang}\alpha \\[4pt]
\sec(R+\alpha) = -\frac{r}{y} = -\operatorname{cosec}\alpha \\[4pt]
\operatorname{cosec}(R+\alpha) = \frac{r}{x} = \sec\alpha
\end{array}\right\} \text{(B)}$$

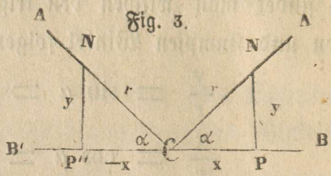


Fig. 3.

Dreht sich CA so um den Punkt C, daß der $\angle$ BCA $=$ $2R - \alpha$ wird, so fällt das Perpendikel NP'' ebenfalls auf die Verlängerung des festen Schenkels CB und $\triangle$ CNP'' $\cong$ $\triangle$ CNP, folglich NP'' $=$ NP $=$ y und CP'' $=$ CP aber negativ, also $= -$ x.

$$\left.\begin{aligned}
\sin(2R-\alpha) &= \frac{y}{r} = \sin\alpha \\
\cos(2R-\alpha) &= -\frac{x}{r} = -\cos\alpha \\
\operatorname{tang}(2R-\alpha) &= -\frac{y}{x} = -\operatorname{tang}\alpha \\
\operatorname{cotg}(2R-\alpha) &= \frac{-x}{y} = -\operatorname{cotg}\alpha \\
\sec(2R-\alpha) &= -\frac{r}{x} = -\sec\alpha \\
\operatorname{cosec}(2R-\alpha) &= \frac{r}{y} = \operatorname{cosec}\alpha
\end{aligned}\right\}\ (\mathfrak{C})$$

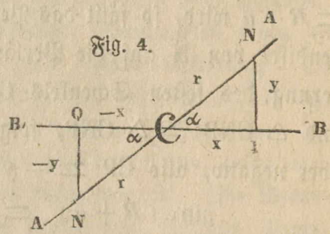


Fig. 4.

Dreht sich CA so um den Punkt C, daß der Winkel BCA ein convexer $= 2R + \alpha$ wird, so fällt das Perpendikel NQ auf die Verlängerung des festen Schenkels und ist den frühern Perpendikeln entgegengesetzt. Nun ist $\triangle$ CNQ $\cong$ $\triangle$ CNP, folglich NQ $=$ NP, CQ $=$ CP, aber entgegengesetzt.

$$\left.\begin{aligned}
\sin(2R+\alpha) &= \frac{-y}{r} = -\sin\alpha \\
\cos(2R+\alpha) &= \frac{-x}{r} = -\cos\alpha \\
\operatorname{tang}(2R+\alpha) &= \frac{-y}{-x} = \operatorname{tang}\alpha \\
\operatorname{cotg}(2R+\alpha) &= \frac{-x}{-y} = \operatorname{cotg}\alpha
\end{aligned}\right\}\ (\mathfrak{D})$$

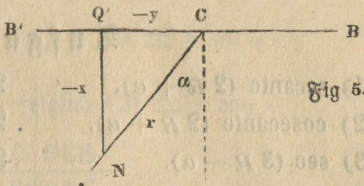


Fig 5.

Ist der convexe Winkel BCA $= 3R - \alpha$, so ist CQ′ $= - y$ und NQ′ $= - x$.

$$\left.\begin{aligned} \sin(3R-\alpha) &= \frac{-x}{r} = -\cos\alpha \\ \cos(3R-\alpha) &= \frac{-y}{r} = -\sin\alpha \\ \operatorname{tang}(3R-\alpha) &= \frac{-x}{-y} = \operatorname{cotg}\alpha \\ \operatorname{cotg}(3R-\alpha) &= \frac{-y}{-x} = \operatorname{tang}\alpha \end{aligned}\right\} (E)$$

Ist der convexe $\angle$ BCA $= 3R + \alpha$, so ist CQ″ $= y$ und NQ″ $= - x$.

$$\left.\begin{aligned} \sin(3R+\alpha) &= \frac{-x}{r} = -\cos\alpha \\ \cos(3R+\alpha) &= \frac{y}{r} = \sin\alpha \\ \operatorname{tang}(3R+\alpha) &= \frac{-x}{y} = -\operatorname{cotg}\alpha \\ \operatorname{cotg}(3R+\alpha) &= \frac{-y}{x} = -\operatorname{tang}\alpha \end{aligned}\right\} (F)$$

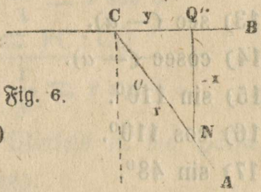
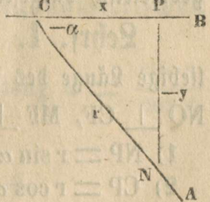


Fig. 6.

Denkt man sich den Winkel BCA durch Drehung des rotirenden Schenkels in entgegengesetzter Richtung beschrieben, so nennt man den Winkel **negativ** und demzufolge

$$\left.\begin{aligned} \sin(-\alpha) &= \frac{-y}{r} = -\sin\alpha \\ \cos(-\alpha) &= \frac{x}{r} = \cos\alpha \\ \operatorname{tang}(-\alpha) &= \frac{-y}{x} = -\operatorname{tang}\alpha \\ \operatorname{cotg}(-\alpha) &= \frac{-x}{y} = -\operatorname{cotg}\alpha \end{aligned}\right\} (G)$$

Fig. 7.



Es lassen sich also die Funktionen aller stumpfen und convexen, sowie negativen Winkel zurückführen auf die Funktionen bestimmter spitzen Winkel.

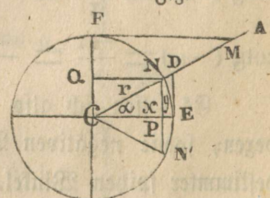
Aufgaben.

1) secante $(2R + \alpha)$.
2) cosecante $(2R + \alpha)$.
3) sec $(3R - \alpha)$.
4) cosec $(3R - \alpha)$.
5) sec $(3R + \alpha)$.
6) cosec $(3R + \alpha)$.
7) sin $(4R - \alpha)$.
8) cos $(4R - \alpha)$.
9) tang $(4R - \alpha)$.
10) cotg $(4R - \alpha)$.
11) sec $(4R - \alpha)$.
12) cosec $(4R - \alpha)$.
13) sec $(-\alpha)$.
14) cosec $(-\alpha)$.
15) sin 110^0.
16) cos 110^0.
17) sin 48^0.
18) sin $198^0\ 12'\ 42''$.
19) sin $156^0\ 15'\ 46''$
20) cos $198^0\ 12'\ 42''$.
21) sin $124^0\ 32'\ 14''$.
22) sin $309^0\ 10'\ 50''$.
23) sin $241^0\ 15'\ 36''$.
24) cos $124^0\ 32'\ 14''$.
25) sin $358^0\ 24'\ 33''$.
26) sin $130^0\ 15'\ 46''$.
27) sin $74^0\ 41'\ 50''$.
28) sin $210^0\ 40'\ 20''$.
29) cos $130^0\ 15'\ 46''$.
30) cos $309^0\ 10'\ 50''$.
31) cos $241^0\ 15'\ 36''$.
32) tang $122^0\ 14'$.
33) tang $205^0\ 18'\ 24''$.
34) tang $322^0\ 48'\ 37''$.
35) cotg $98^0\ 15'\ 20''$.
36) cotg $199^0\ 4'\ 54''$.
37) cotg $255^0\ 59'\ 10''$.
38) cotg $300^0\ 14'\ 22''$.

§ 8. Multiplicirt man die trigonometrischen Funktionen mit der angenommenen Länge des rotirenden Schenkels $CN = r$, so nennt man sie trigonometrische Linien, welche als solche geometrisch dargestellt werden können.

Lehrs. 1. Ist $\angle \alpha$ ein spitzer Winkel, $CN = r$ eine beliebige Länge des rotirenden Schenkels, $DE \perp CE$, $CF \perp CE$, $NQ \perp CF$, $MF \perp FC$, so ist:

Fig. 8.



1) $NP = r \sin \alpha$ (Sinuslinie);
2) $CP = r \cos \alpha$ (Cosinuslinie);
3) $DE = r \operatorname{tang} \alpha$ (Tangentenl.);
4) $FM = r \operatorname{cotg} \alpha$ (Cotg.-Linie);
5) $CD = r \sec \alpha$ (Sekantenl.);
6) $CM = r \operatorname{cosec} \alpha$ (Cosek.-L.).

Bew. 1) $\frac{NP}{r} = \sin\alpha$, folglich $NP = r \sin\alpha$.

2) $\frac{CP}{r} = \cos\alpha$, folglich $CP = r\cos\alpha$.

3) $\triangle NCP \backsim \triangle DCE$

$DE : NP = EC : PC$

$DE = r \cdot \frac{y}{x} = r \,\mathrm{tang}\,\alpha$.

4) $\triangle FMC \backsim \triangle CQN$

$MF : NQ = FC : QC$

$NQ = CP$

$QC = NP$

$MF = r \cdot \frac{x}{y} = r \,\mathrm{cotg}\,\alpha$.

5) Aus 3 folgt $DC : NC = CE : CP$

$DC = r \cdot \frac{r}{x} = r \sec\alpha$

6) Aus 4 folgt $CM : CN = FC : CQ$

$CM = r \cdot \frac{r}{y} = r \,\mathrm{cosec}\,\alpha$.

Lehrs. 2. Die Sinuslinie eines Winkels ist die Hälfte der Sehne des doppelten Winkels (Bogens).

Bew. Verlängert man NP bis zur Peripherie, so ist NN′ die Sehne eines Bogens, dessen Centriwinkel NCN′ ist. Da nun CP die Sehne NN′, wie auch den Centriwinkel NCN′ halbirt, so ist $NP = \frac{1}{2}$ Chorde $NN' = r \sin\alpha$.

Zus. Ist $NN' = r$, so ist $\angle\alpha = 30^0$ und $r \sin 30^0 = \frac{1}{2} r$.

§ 9. Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen eines Winkels.

Lehrs. 3. Für jeden Winkel α ist 1) $\mathrm{tang}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ und 2) $\mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Bew. Ist $\angle\alpha$ ein spitzer Winkel, so ist:

$$\mathrm{tang}\,\alpha = \frac{y}{x} = \frac{r\sin\alpha}{r\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \left(\begin{array}{l}\text{§ 7 u. Lehrs.}\\ 1,\ 1.\,2.\end{array}\right)$$

$$\mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{x}{y} = \frac{r\cos\alpha}{r\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Ist $\angle \alpha > R$, z. B. $\alpha = R + \beta$, wo $\angle \beta$ ein spitzer Winkel bedeutet, so ist $\tang(R+\beta) = \frac{x}{-y} = \frac{r \sin(R+\beta)}{r \cos(R+\beta)}$ (§ 7, B), setzt man wieder für $R + \beta = \alpha$, so ist $\tang \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ u. s. w.

Lehrs. 4. Für jeden Winkel α ist $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ *)

Bew. Ist $\angle \alpha < R$, so ist $y^2 + x^2 = r^2$, folglich $r^2 \sin^2 \alpha + r^2 \cos^2 \alpha = r^2$, durch r^2 dividirt giebt: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Ist $\angle \alpha = 2R - \beta$, so ist (Fig. 3) $y^2 + (-x)^2 = r^2$, folglich $r^2 \sin^2 (2R - \beta) + r^2 \cos^2 (2R - \beta) = r^2$ durch r^2 dividirt und für $2R - \beta = \alpha$ gesetzt, erhält man

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \text{ u. s. w.}$$

Zus. Aus den beiden vorhergehenden Sätzen läßt sich nun, wenn eine Funktion eines Winkels gegeben ist, hieraus jede der übrigen finden.

Man findet leicht folgende Formeln:

1) $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$.

2) $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$.

3) $\tang \alpha = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$.

4) $\cotg \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$.

5) $\tang \alpha \cdot \cotg \alpha = 1$.

6) $\tang \alpha = \frac{1}{\cotg \alpha}$.

7) $\cotg \alpha = \frac{1}{\tang \alpha}$.

Aufgaben.

39) $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$.

40) $\cosec \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$.

41) $1 + \tang^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$.

42) $1 + \cotg^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$.

43) $\sec^2 \alpha = 1 + \tang^2 \alpha$.

44) $\cosec^2 \alpha = 1 + \cotg^2 \alpha$.

---

*) Der Ausdruck $\sin^2 \alpha$, soviel als $(\sin \alpha)^2$, bedeutet das Quadrat des Sinus eines Winkels, und ist nicht mit dem Sinus

§ 10. Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen zweier Winkel.

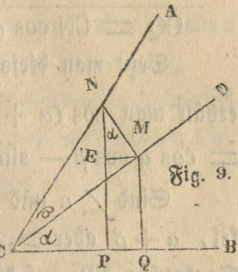


Fig. 9.

Lehrs. 5. Sind $\angle \alpha$ und $\angle \beta$ beliebige Winkel, so ist:

1) $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$

2) $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$

3) $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$

4) $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$

Bew. Es seien $\angle \alpha$ und $\angle \beta$ zusammen $< R$, so lege man sie an einander, daß der feste Schenkel des Winkels β mit dem beweglichen Schenkel des Winkels α zusammenfällt, so ist für Winkel $\alpha + \beta$ CB der feste und CA der bewegliche Schenkel; darauf nehme man einen beliebigen Punkt N in dem rotirenden Schenkel CA und ziehe NM $\perp$ CD, MQ $\perp$ CB, NP $\perp$ CB, ME $\perp$ NP, so ist $\sin(\alpha + \beta) = \frac{NP}{CN}$.

Nun ist $NP = EP + NE$

$EP = MQ = CM \sin\alpha$

$CM = CN \cos\beta$

$EP = CN \sin\alpha \cos\beta$

und $EN = NM \cos\alpha$

$NM = CN \sin\beta$

$EN = CN \cos\alpha \sin\beta$

$\angle NME + EMC = \angle EMC + CMQ$

$\angle NME = \angle CMQ$

$\angle ENM = \angle \alpha.$

Setzt man die Werthe für EP und EN in $\frac{NP}{CN}$ hinein, so erhält man:

$$1)\ \sin(\alpha + \beta) = \frac{CN \sin\alpha \cos\beta + CN \cos\alpha \sin\beta}{CN}$$

$$= \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta.$$

$$2)\ \cos(\alpha + \beta) = \frac{CP}{CN} = \frac{CQ - PQ}{CN}.$$

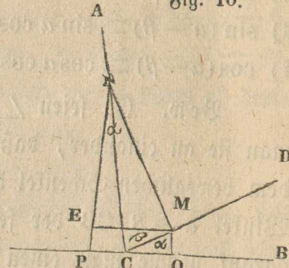
---

des Quadrats des Winkels α oder $\sin(\alpha)^2$ zu verwechseln, was keinen Sinn hat. Eben dies gilt von den übrigen trigonometrischen Funktionen.

$$\begin{array}{l} CQ = CM \cos\alpha \\ CM = CN \cos\beta \\ \hline CQ = CN \cos\alpha \cos\beta \end{array} \qquad \begin{array}{l} PQ = EM = NM \sin\alpha \\ NM = CN \sin\beta \\ \hline PQ = CN \sin\alpha \sin\beta \end{array}$$

Setzt man diese Werthe für CQ und PQ in 2) hinein, so erhält man $\cos(\alpha + \beta) = \dfrac{CN \cos\alpha \cos\beta - CN \sin\alpha \sin\beta}{CN}$ $= \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$.

Fig. 10.



Sind $\angle \alpha$ und $\angle \beta$ spitze Winkel, $\alpha + \beta$ aber $> R$, so fällt die Senkrechte NP auf die Verlängerung von CA; man ziehe wieder NM $\perp$ CB, MQ $\perp$ CA, ME $\perp$ NP, so ist:

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{NP}{CN} = \frac{EP + EN}{CN}$$

$$\begin{array}{l} EP = MQ = CM \sin\alpha \\ CM = CN \cos\beta \\ \hline EP = CN \sin\alpha \cos\beta \\ \\ EN = MN \cos\alpha \\ NM = CN \sin\beta \\ \hline EN = CN \cos\alpha \sin\beta, \text{ also} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \angle EMN + EMC = \angle EMC + CMQ \\ \hline \angle EMN = \angle CMQ \\ \hline \angle ENM = \angle \alpha \end{array}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{CN \sin\alpha \cos\beta + CN \cos\alpha \sin\beta}{CN}$$
$= \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$.

Ist $\angle \alpha$ ein spitzer Winkel und $\angle \beta > R$, also $\angle \beta = R + b$, so ist $\sin(\alpha + \beta) = \sin(R + [\alpha + b]) = \cos(\alpha + b)$ $= \cos\alpha \cos b - \sin\alpha \sin b$.

Es ist aber $\cos b = \sin(R + b) = \sin\beta$

und $-\sin b = \cos(R + b) = \cos\beta$, folglich

$\sin(R + b + \alpha) = \cos\alpha \sin(R + b) + \sin\alpha \cos(R + b)$, setzt man für $R + b = \beta$, so erhält man:

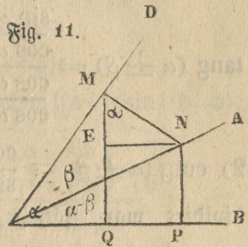
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta.$$

Ebenso $\cos(\alpha + \beta) = \cos(R + b + \alpha) = -\sin(b + \alpha)$ $= -\sin b \cos\alpha - \sin\alpha \cos b$, aber $-\sin b = \cos(R + b)$ $= \cos\beta$ und $\cos b = \sin(R + b) = \sin\beta$, also $\cos(\alpha + \beta)$ $= \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$.

Sind $\angle\,\alpha$ und $\angle\,\beta$ stumpfe Winkel, z. B. $\angle\,\alpha = R + a$ und $\angle\,\beta = R + b$, so ist $\sin(\alpha + \beta) = \sin(2R + a + b) = -\sin(a+b) = -\sin a \cos b - \cos a \sin b$, aber $-\sin a = \cos(R + a) = \cos\alpha$ und $\cos b = \sin(R + b) = \sin\beta$, $\cos a = \sin(R + a) = \sin\alpha$ u. $-\sin b = \cos(R + b) = \cos\beta$, folglich $\sin(\alpha + \beta) = \sin(2R + a + b) = \sin\alpha \cos\beta + \sin\beta \cos\alpha$ u.s.w.

3) Ist $\angle\,BCD = \alpha$ u. $> \angle\,\beta$, so lege man den festen Schenkel des Winkels β auf den rotirenden Schenkel des Winkels α und den rotirenden Schenkel CA in den Winkel α, so wird $\angle\,BCA = \alpha - \beta$ werden. Nimmt man in dem rotirenden Schenkel CA einen beliebigen Punkt N an und zieht NP $\perp$ CB, NM $\perp$ CD, MQ $\perp$ CB, NE $\perp$ MQ,

Fig. 11.



so ist $\sin(\alpha - \beta) = \frac{NP}{CN} = \frac{MQ - ME}{CN}$

$MQ = CM \sin\alpha$	$ME = MN \cos\alpha$
$CM = CN \cos\beta$	$MN = CN \sin\beta$
$MQ = CN \sin\alpha \cos\beta$	$ME = CN \cos\alpha \sin\beta$.

Also $\sin(\alpha - \beta) = \frac{CN \sin\alpha \cos\beta - CN \cos\alpha \sin\beta}{CN}$
$= \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$.

4) $\cos(\alpha - \beta) = \frac{CP}{CN} = \frac{CQ + QP}{CN}$ (Fig. 11.)

$CQ = CM \cos\alpha$	$QP = EN = MN \sin\alpha$
$CM = CN \cos\beta$	$MN = CN \sin\beta$
$CQ = CN \cos\alpha \cos\beta$	$QP = CN \sin\alpha \sin\beta$, folglich

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$.

Ist $\angle\,\alpha$ ein stumpfer und $\angle\,\beta$ ein spitzer oder auch ein stumpfer Winkel, so ist der Beweis wie bei 1) und 2) für stumpfe Winkel.

Lehrs. 6. Sind $\angle\,\alpha$ und $\angle\,\beta$ beliebige Winkel, so ist:

1) $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha \tan\beta}$;

2) $\cot g(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot g\,\alpha \cot g\,\beta \mp 1}{\cot g\,\alpha \pm \cot g\,\beta}$.

Bew. 1) Es ist $\tan g(\alpha \pm \beta) = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos(\alpha \pm \beta)}$ $= \frac{\sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta}$. Dividirt man Zähler und Nenner des letzten Ausdrucks durch $\cos\alpha\cos\beta$, so erhält man:

$$\tan g(\alpha \pm \beta) = \frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} \pm \frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} \mp \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\tan g\,\alpha \pm \tan g\,\beta}{1 \mp \tan g\,\alpha \tan g\,\beta}.$$

2) $\cot g(\alpha \pm \beta) = \frac{\cos(\alpha \pm \beta)}{\sin(\alpha \pm \beta)} = \frac{\cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta}$, dividirt man Zähler und Nenner des letzten Ausdrucks durch $\sin\alpha\sin\beta$, so erhält man: $\cot g(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot g\,\alpha \cot g\,\beta \mp 1}{\cot g\,\alpha \pm \cot g\,\beta}$.

Zus. Aus Lehrs. 5 und 6 ergeben sich leicht folgende Formeln, wenn man $\angle\beta = \angle\alpha$ setzt:

1) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ (Lehrs. 5, 1);

2) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ (Lehrs. 5, 2);

3) $\tan g\, 2\alpha = \frac{2\tan g\,\alpha}{1 - \tan g^2\alpha}$ (Lehrs. 6, 1);

4) $\cot g\, 2\alpha = \frac{\cot g^2\alpha - 1}{2\cot g\,\alpha}$ (Lehrs. 6, 2).

Setzt man in (2) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ für $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$, so wird $\cos 2\alpha = 1 - \sin^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$, also $\sin\alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}}$, für $2\alpha = a$ gesetzt, giebt

5) $\sin\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}}$.

Setzt man in $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ für $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$, so wird $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, folglich $\cos\alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}}$, setzt man wieder für $2\alpha = a$, so erhält man

6) $\cos\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$;

7) $\operatorname{tang} \frac{1}{2} a = \frac{\sin \frac{1}{2} a}{\cos \frac{1}{2} a} = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}}$;

8) $\operatorname{cotg} \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{1 + \cos a}{1 - \cos a}}$.

Lehrs. 7. Sind $\angle a$ und $\angle b$ beliebige Winkel, so ist:

1) $\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{1}{2}(a + b) \cos \frac{1}{2}(a - b)$;

2) $\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{1}{2}(a + b) \sin \frac{1}{2}(a - b)$;

3) $\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{1}{2}(a + b) \cos \frac{1}{2}(a - b)$;

4) $\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{1}{2}(a + b) \sin \frac{1}{2}(a - b) = 2 \sin \frac{1}{2}(a + b) \sin \frac{1}{2}(b - a)$.

Bew.
$$\begin{array}{ll} \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta & \text{(I)} \\ \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta & \text{(II)} \\ \hline \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin\alpha \cos\beta. & \end{array}$$

Setzt man für $\alpha + \beta = a$ und $\alpha - \beta = b$, so ist $\alpha = \frac{1}{2}(a + b)$ und $\beta = \frac{1}{2}(a - b)$, folglich

1) $\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{1}{2}(a + b) \cos \frac{1}{2}(a - b)$.

Subtrahirt man dagegen II von I, so erhält man: $\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos\alpha \sin\beta$, setzt man für α, β die Werthe von a, b hinein, so folgt

2) $\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{1}{2}(a + b) \sin \frac{1}{2}(a - b)$.

Addirt oder subtrahirt man folgende Gleichungen:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$, so erhält man

3) $\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{1}{2}(a + b) \cos \frac{1}{2}(a - b)$.

4) $\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{1}{2}(a + b) \sin \frac{1}{2}(a - b) = 2 \sin \frac{1}{2}(a + b) \sin \frac{1}{2}(b - a)$, da $-\sin z = \sin - z$ ist, also $-\sin \frac{1}{2}(a - b) = \sin \frac{1}{2}(b - a)$.

Aufgaben.

45) $\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{cotg} \alpha}{\operatorname{cotg}^2 \alpha - 1}$.

46) $\operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{1}{2}(\operatorname{cotg} \alpha - \operatorname{tang} \alpha)$.

47) $\operatorname{tang} \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}$.

48) $\operatorname{tang} \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}$.

49) $-\operatorname{cotg} \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\alpha - \cos\beta}$.

50) $-\operatorname{cotg} \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\alpha - \cos\beta}$.

51) $\operatorname{tang}\alpha \pm \operatorname{tang}\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha \cos\beta}$.

52) $\operatorname{cotg}\beta \pm \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\sin\alpha \sin\beta}$.

---

§ 11. Zu- und Abnahme der trigonometrischen Funktionen.

Hat der rotirende Schenkel noch keine Drehung gemacht, also liegt der Schenkel CA auf dem Schenkel CB; so ist $\angle \alpha = 0$, $y = 0$ und $x = r$, folglich

$$\sin 0 = \frac{0}{r} = 0$$

$$\cos 0 = \frac{r}{r} = 1$$

$$\operatorname{tang} 0 = \frac{0}{r} = 0$$

$$\operatorname{cotg} 0 = \frac{r}{0} = \infty \text{ (unendlich groß).}$$

Anmerk. Je kleiner der Divisor, desto größer der Quotient; ist der Divisor unendlich klein (0), so ist der Quotient unendlich groß (∞). Man muß sich aber hüten, die unendlich kleine, sowie die unendlich große Zahl für eine fest bestimmte Zahl anzusehen.

Fängt der Schenkel an sich zu drehen, so wird y größer und x kleiner; ist endlich $\angle \alpha = R$, so fällt der Punkt P in C und $y = r$, $x = 0$, folglich

$$\sin R = \frac{r}{r} = 1 \qquad \operatorname{tang} R = \frac{r}{0} = \infty$$

$$\cos R = \frac{0}{r} = 0 \qquad \operatorname{cotg} R = \frac{0}{r} = 0.$$

Tritt der rotirende Schenkel in den zweiten Quadranten, so wird y kleiner und x größer, ist endlich $\angle \alpha = 2R$, so ist $y = 0$, $x = r$, folglich:

$\sin 2R = \frac{0}{r} = 0$	$\text{tang}\, 2R = \frac{0}{r} = 0$
$\cos 2R = -\frac{r}{r} = -1$	$\text{cotg}\, 2R = -\frac{r}{0} = \infty.$

Im dritten Quadranten wird y wieder größer und x kleiner; wird $\angle \alpha = 3R$, so ist $y = r$, $x = 0$, folglich:

$\sin 3R = -\frac{r}{r} = -1$	$\text{tang}\, 3R = \frac{r}{0} = \infty$
$\cos 3R = \frac{0}{r} = 0$	$\text{cotg}\, 3R = \frac{0}{r} = 0.$

Im vierten Quadranten wird y kleiner und x größer; ist $\angle \alpha = 4R$, so ist:

$\sin 4R = \frac{0}{r} = 0$	$\text{tang}\, 4R = \frac{0}{r} = 0$
$\cos 4R = \frac{r}{r} = 1$	$\text{cotg}\, 4R = \frac{r}{0} = \infty.$

Hieraus folgt:

Der Sinus wächst im ersten Quadranten von 0 bis 1, nimmt im zweiten von 1 bis 0 ab, wächst im dritten von 0 bis 1, und nimmt im vierten von 1 bis 0 ab. Er ist im ersten und zweiten Quadranten positiv, im dritten und vierten negativ.

Der Cosinus nimmt im ersten Quadranten von 1 bis 0 ab, wächst im zweiten von 0 bis 1, nimmt im dritten von 1 bis 0 ab, und wächst im vierten von 0 bis 1. Er ist im ersten und vierten Quadranten positiv, im zweiten und dritten negativ.

Die Tangente wächst im ersten und dritten Quadranten von 0 bis ∞, und nimmt im zweiten und vierten von ∞ bis 0 ab. Dabei ist sie im ersten und dritten Quadranten positiv, im zweiten und vierten negativ.

Die Cotangente nimmt im ersten und dritten Quadranten von ∞ bis 0 ab, und wächst im zweiten und vierten von 0 bis ∞. Sie ist im ersten und dritten Quadranten positiv, im zweiten und vierten negativ.

Der Sinus, sowie der Cosinus, kann nie über Eins betragen, die Tangente und Cotangente dagegen jede beliebige Zahl sein. Zu jedem Winkel gehört nur eine einzige trigonometrische Funktion; dagegen gehören zu jeder trigonometrischen Funktion unzählig viele Winkel. So ist z. B. $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$, dagegen gehören zu einem Sinus, welcher $\frac{1}{2}$ ist, die Winkel 30^0, 150^0, so wie alle Winkel, welche man erhält, wenn man zu 30^0 und 150^0 beliebig viele ganze Umdrehungen addirt. Weiß man daher von einem Winkel, daß er $< 2R$ ist, wie dieß bei jedem Dreieckswinkel der Fall sein muß, und kennt man dann seinen Sinus, so kann der Winkel spitz oder stumpf sein. Die Bestimmung eines Dreieckswinkels durch seinen Sinus ist daher im Allgemeinen zweideutig; nicht so verhält es sich mit dem Cosinus, der Tangente und der Cotangente, da diese für spitze Winkel positiv, für stumpfe negativ sind.

Aufgaben.

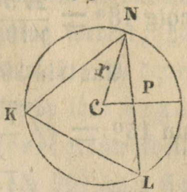
53) $\sec R$.
54) $\operatorname{cosec} R$.
55) $\sec 2R$.
56) $\operatorname{cosec} 2R$.
57) $\sec 3R$.
58) $\operatorname{cosec} 3R$.
59) $\sec 4R$.
60) $\operatorname{cosec} 4R$.

§ 12. Die Berechnung der trigonometrischen Funktionen.

Für einzelne Winkel ergeben sich die Zahlenwerthe der Sinusse, mithin auch die übrigen trigonometrischen Funktionen, direct aus geometrischen Betrachtungen. Aus Lehrsatz 2 ergiebt sich, daß, wenn man die Länge der Seite eines regelmäßigen Vielecks kennt, auch der Sinus des halben Centriwinkels gegeben ist.

Nehmen wir ein gleichseitiges Dreieck KLN und beschreiben um dasselbe einen Kreis, verbinden den Mittelpunkt C mit N und errichten aus C eine Senkrechte auf NL, so ist $\angle NCP = 60^0$, $CP = \frac{1}{2}r$ und $NP = \frac{r\sqrt{3}}{2}$, folglich

Fig. 12.



$$\sin 60^0 = \frac{NP}{CN} = \frac{r\sqrt{3}}{2r} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^0.$$

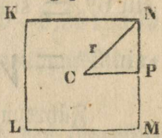
$$\cos 60^0 = \sqrt{1-\sin^2 60^0} = \sqrt{1-(\tfrac{1}{2}\sqrt{3})^2} = \sqrt{\tfrac{1}{4}} = \tfrac{1}{2} = \sin 30^0.$$

$$\tang 60^0 = \frac{\sin 60^0}{\cos 60^0} = \frac{\sqrt{3}}{2} : \tfrac{1}{2} = \sqrt{3} = \cotg 30^0.$$

$$\cotg 60^0 = \frac{1}{\tang 60^0} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \tang 30^0.$$

Nehmen wir ein regelmäßiges Viereck KLMN und ziehen aus dem Mittelpuncte C desselben CN, und $CP \perp NM$, so ist $\angle NCP = 45^0$, $CP = NP = \frac{r}{\sqrt{2}} = \frac{r\sqrt{2}}{2}$, folglich:

Fig. 13.

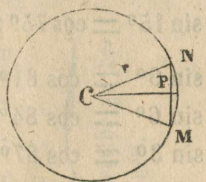


$$\sin 45^0 = \frac{NP}{CN} = \frac{r\sqrt{2}}{2r} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^0.$$

$$\tang 45^0 = \frac{\sin 45^0}{\cos 45^0} = 1 = \cotg 45^0.$$

Nehmen wir ein regelmäßiges Zehneck (Planimetrie, Aufg. 58, 127), so ist Winkel $NCP = 18^0$, die Seite $NM = \frac{r(-1+\sqrt{5})}{2}$, $NP = \frac{r(-1+\sqrt{5})}{4}$, folglich:

Fig. 14.



$$\sin 18^0 = \frac{NP}{r} = \frac{r(-1+\sqrt{5})}{4r} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$
$$= \cos 72^0.$$

$$\cos 18^0 = \sqrt{1-\sin^2 18^0} = \sqrt{1-\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{3-\sqrt{5}}{8}}$$
$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} = \sin 72^0.$$

$$\tang 18^0 = \frac{\sin 18^0}{\cos 18^0} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5+\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2\sqrt{5+\sqrt{5}}} = \cotg 72^0.$$

$$\operatorname{cotg} 18^\circ = \frac{2\sqrt{5}+\sqrt{5}}{\sqrt{10}-\sqrt{2}} = \operatorname{tang} 72^\circ.$$

Aus sin 30° ergiebt sich nach Lehrs. 6, Zus. 5, 6:

$$\sin 15^\circ = \sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}} = \cos 75^\circ.$$

$$\cos 15^\circ = \sqrt{\frac{1+\cos 30^\circ}{2}} = \sin 75^\circ.$$

Aus sin 18° ergiebt sich:

$$\sin 9^\circ = \sqrt{\frac{1-\cos 18^\circ}{2}} = \cos 81^\circ.$$

$$\cos 9^\circ = \sqrt{\frac{1+\cos 18^\circ}{2}} = \sin 81^\circ.$$

$$\sin 6^\circ = \sin(15^\circ - 9^\circ) = \sin 15^\circ \cos 9^\circ - \sin 9^\circ \cos 15^\circ.$$

$$\sin 3^\circ = \sqrt{\frac{1-\cos 6^\circ}{2}} = \cos 87^\circ.$$

Führt man die angedeuteten Rechnungen aus, so erhält man:

$$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = 0{,}866025.$$
$$\cos 60^\circ = \sin 30^\circ = 0{,}5.$$
$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = 0{,}707107.$$
$$\sin 18^\circ = \cos 72^\circ = 0{,}309017.$$
$$\cos 18^\circ = \sin 72^\circ = 0{,}951056.$$
$$\sin 15^\circ = \cos 75^\circ = \sqrt{\frac{1-0{,}866025}{2}} = \sqrt{0{,}0669875} = 0{,}258819.$$
$$\sin 9^\circ = \cos 81^\circ = \sqrt{0{,}024472} = 0{,}156434.$$
$$\sin 6^\circ = \cos 84^\circ = 0{,}104528.$$
$$\sin 3^\circ = \cos 87^\circ = 0{,}052336.$$

Aus diesen Beispielen sieht man die Möglichkeit, die Werthe der verschiedenen Funktionen zu berechnen; ordnet man sie alsdann nach einem gewissen System, so entstehen die trigonometrischen Tafeln.

§ 13. Die Unbequemlichkeit, mit den in irrationalen Brüchen ausgedrückten goniometrischen Funktionen Berechnungen des Multiplicirens oder Dividirens, Potenzirens und Extrahirens auszuführen, wie die Gestalt der Formeln, zu welchen trigonometrische Untersuchungen führen, solche häufig genug fordert, hat den Entwurf solcher trigonometrischer Tafeln veranlaßt, in denen nicht die Funktionen selbst, sondern vielmehr ihre Logarithmen enthalten sind*). Da nun aber jene größtentheils ächte Brüche und nur die Tangenten von 45^0 bis 90^0 oder Cotangenten von 45^0 bis 0^0 größer als die Einheit, also die Logarithmen der trigonometrischen Funktionen zum größten Theil negative Zahlen sind, so hat man der Gleichförmigkeit und Bequemlichkeit wegen alle Logarithmen um 10 zu groß angesetzt, und muß deßhalb bei jedem -10 hinzugefügt denken. So ist z. B. $\log \sin 30^0 = \log \frac{1}{2} = -0{,}3010300$, oder, nach Angabe der Tafeln, die dekadische Ergänzung $9{,}6989700$, weil $+10-0{,}3010300-10 = 9{,}6989700-10$ mit jenem negativen Logarithmus identisch ist.

Die besondere Einrichtung und den Gebrauch der logarithmisch-trigonometrischen Tafeln findet man gemeiniglich in der Einleitung derselben; daher glaube ich, um Raum zu ersparen, darauf hinweisen zu dürfen.

Aufgaben.

61) $\tang 60^0$.
62) $\tang 30^0$.
63) $\tang 18^0$.
64) $\cotg 60^0$.
65) $\cotg 30^0$.
66) $\cotg 18^0$.
67) $\cos 15^0$.
68) $\cos 9^0$.
69) $\cos 6^0$.

Die Zahlenwerthe zu berechnen.

70) $\cos 3^0$.
71) $\tang 15^0$.
72) $\tang 9^0$.
73) $\tang 6^0$.
74) $\tang 3^0$.
75) $\cotg 15^0$.
76) $\cotg 9^0$.
77) $\cotg 6^0$.
78) $\cotg 3^0$.

Die Zahlenwerthe zu berechnen.

*) Man hat auch Tafeln, wo die Funktionen selbst für bestimmte Winkel berechnet sind.

79) $\log \sin 36^\circ\ 12'\ 14''$.
80) $\log \cos 25^\circ\ 18'\ 16''$.
81) $\log \tan g\ 64^\circ\ 18'\ 12''$.
82) $\log \mathrm{cotg}\ 14^\circ\ 17'\ 10''$.
83) $\log \sin 137^\circ\ 29'\ 23''$.
84) $\log \sin 117^\circ\ 16'\ 14''$.
85) $\log \cos 214^\circ\ 36'\ 14''$.
86) $\log \mathrm{tang}\ 335^\circ\ 7'\ 46''$.
87) $\log \sin 203^\circ\ 15'$.
88) $\log \sin 314^\circ\ 50'\ 0{,}14''$.
89) $\log \cos 217^\circ\ 15'\ 16{,}3''$.
90) $\log \mathrm{tang}\ 143^\circ\ 9'\ 0{,}17''$.
91) $\log \mathrm{cotg}\ 301^\circ\ 10'\ 5{,}23''$.
92) $\log \sin 242^\circ\ 59'\ 42{,}4''$.
93) $\log \mathrm{tang}\ 234^\circ\ 14'\ 0{,}2''$.
94) $\log \sin x = 9{,}6389576$.
95) $\log \cos x = 9{,}5927638$.
96) $\log \mathrm{tang}\ x = 9{,}8625439$.
97) $\log \mathrm{cotg}\ x = 10{,}1317658$.
98) $\log \sin x = 9{,}7328467n$
99) $\log \mathrm{cotg}\ y = 10{,}5836710n$
100) $\log \mathrm{tang}\ x = 9{,}9875672n$
101) $\log \mathrm{cotg}\ x = 10{,}0056772$.
102) $\log \cos x = 9{,}3591267n$
103) $\log \sin x = 8{,}7931245$.
104) $\sin x = 0{,}75$.
105) $\cos x = \frac{2}{3}$.
106) $\mathrm{tang}\ x = 504{,}23$.
107) $\sin x = -\frac{2}{5}$.
108) $\mathrm{cotg}\ x = -1289{,}57$.
109) $\cos x = -0{,}4286$.
110) $\sin x = \frac{13}{50}$.
111) $\sin y = 0{,}06843$.
112) $\mathrm{tang}\ x = -28{,}35$.
113) $\cos x = -0{,}546$.
114) $\sin x = \frac{15}{16}$.
115) Aus dem Sinus eines Winkels α die übrigen Funktionen desselben Winkels zu berechnen. Es sei gegeben $\sin \alpha = 0{,}856$, so sind $\cos \alpha$, $\mathrm{tang}\ \alpha$, $\mathrm{cotg}\ \alpha$, $\sec \alpha$, $\mathrm{cosec}\ \alpha$ und $\angle \alpha$ wie groß?
116) Desgl. $\cos \alpha = 0{,}407$; wie groß sind: $\sin \alpha$, $\mathrm{tang}\ \alpha$, $\mathrm{cotg}\ \alpha$, $\sec \alpha$, $\mathrm{cosec}\ \alpha$ und $\angle \alpha$?
117) Desgl. $\mathrm{tang}\ \alpha = 2{,}34$; wie groß sind: $\mathrm{cotg}\ \alpha$, $\cos \alpha$, $\sin \alpha$, $\sec \alpha$, $\mathrm{cosec}\ \alpha$ und $\angle \alpha$?
118) Desgleichen $\sin x = \frac{5}{7}$.

119) $x = \sin 108^\circ\ 10' \,.\, \mathrm{tang}\ 95^\circ\ 20'$.

120) $x\,L = \dfrac{738 \text{ Fuß} \sin 24^\circ\ 16'\ 13''}{\sin 55^\circ\ 21'\ 13''}$.

121) $x = \dfrac{(34{,}14)^3 \sin^2 15^\circ\ 14'\ 22''}{(0{,}0043)^2}$.

II. Berechnung der ebenen Dreiecke.

§ 14. In der Planimetrie haben wir gesehen unter welchen Bedingungen ein beliebiges, sowie ein rechtwinkliges Dreieck bestimmt ist. Diese Sätze lassen sich unter folgende Gleichungen bringen. (Die Maaßzahlen der Dreiecksseiten bezeichnen wir durch a, b, c und die gegenüberstehenden Winkel durch α, β, γ.)

1) Zwei Seiten und zwei Gegenwinkel (a, b, α, β).

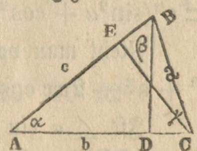
2) Zwei Seiten, einen Gegenwinkel und einen anliegenden Winkel (a, b, α, γ).

3) Drei Seiten und einen Winkel (a, b, c, α).

4) Eine Seite und drei Winkel (a, α, β, γ). Diese Gleichung kann nicht entwickelt werden, weil drei Winkel eigentlich nur zwei Stücke enthalten.

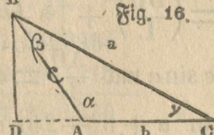
Lehrs. 8. Die Seiten verhalten sich wie die Sinusse der gegenüberstehenden Winkel. $\underline{a : c = \sin\alpha : \sin\gamma}$.

Fig. 15.



Bew. Man ziehe im Dreiecke ABC (Fig. 15) aus der Spitze B die Senkrechte BD, so ist BD $= c \sin\alpha = a \sin\gamma$, folglich $a : c = \sin\alpha : \sin\gamma$. Oder zieht man aus C die Senkrechte CE, so ist CE $=$ $b \sin\alpha = a \sin\beta$, folgl. $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$. Ist das Dreieck stumpfwinklig (Fig. 16), so fällt die Senkrechte von B auf die Verlängerung der Seite AC und im Dreiecke ABD ist BD $= c \sin(180^0 - \alpha) = c \sin\alpha$ (§ 7, C), im Dreiecke BDC ist BD $= a \sin\gamma$, folglich $c \sin\alpha = a \sin\gamma$.

Fig. 16.



Lehrs. 9. Die Summe zweier Seiten verhält sich zu dem Unterschiede dieser Seiten, wie die Tangente der halben Summe der gegenüberstehenden Winkel zu der Tangente der halben Differenz derselben Winkel. $\underline{a+b : a-b = \tan\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) : \tan\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)}$.

Bew. $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$ (Lehrs. 8); hieraus folgt:
$a + b : a - b = \sin\alpha + \sin\beta : \sin\alpha - \sin\beta$, oder
$a+b : a-b = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta) : 2\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ (Lehrs. 7). Dividirt man die Glieder des zweiten Verhältnisses durch $2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$, so erhält man:

$$a + b : a - b = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} : \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)},$$ also

$$a + b : a - b = \tang\frac{1}{2}(\alpha+\beta) : \tang\frac{1}{2}(\alpha-\beta).$$

Lehrs. 10. In jedem Dreiecke ist das Quadrat der Maaßzahl jeder Seite gleich der Summe der Quadrate der Maaßzahlen der beiden andern Seiten weniger dem doppelten Producte der Maaßzahlen dieser Seiten mal dem Cosinus des eingeschlossenen Winkels. $\underline{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$.

Bew. $a^2 = \left(\frac{BD}{L}\right)^2 + \left(\frac{DC}{L}\right)^2$ *) (Fig. 15.) $\frac{BD}{L} = c\sin\alpha$ und $\frac{DC}{L} = b - c\cos\alpha$, folglich

$$a^2 = c^2\sin^2\alpha + (b - c\cos\alpha)^2 = c^2\sin^2\alpha + b^2 - 2bc\cos\alpha + c^2\cos^2\alpha$$
$$= c^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + b^2 - 2bc\cos\alpha = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

Zieht man von C nach AB eine Senkrechte, so ist: $b^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos\beta$.

Ist $\angle\,\alpha$ ein stumpfer Winkel (Fig. 16), so ist: $a^2 = \left(\frac{DB}{L}\right)^2 + \left[b + \frac{AD}{L}\right]^2$. Nun ist $\frac{DB}{L} = c\sin(180^0 - \alpha)$ $= c\sin\alpha$ und $\frac{AD}{L} = c\cos(180^0 - \alpha) = -c\cos\alpha$, also $a^2 = c^2\sin^2\alpha + b^2 - 2bc\cos\alpha + c^2\cos^2\alpha = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

Berechnung der rechtwinkligen Dreiecke.

§ 15. Zur Auflösung eines rechtwinkligen Dreiecks sind

---

*) L bedeutet die Maaßeinheit, und $\frac{BD}{L}$ u. s. w. die Verhältnißzahl oder die Maaßzahl, welche als unbenannte Zahl nur zu einer Potenz erhoben werden kann.

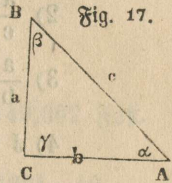
nur zwei Stücke nöthig, unter denen wenigstens eine Seite sein muß. In allen Aufgaben sei $\angle \gamma$ der rechte Winkel und JF der Flächeninhalt des Dreiecks.

Es sind nur folgende Aufgaben möglich:

1) Gegeben c, α; gesucht a, b, β, J.
2) » a, α; » b, c, β, J.
3) » c, a; » b, α, β, J.
4) » a, b; » c, α, β, J.
5) » J, α; » a, b, c, β.
6) » J, a; » b, c, α, β.
7) » J, c; » a, b, α, β.

1. Aufg. Aus der Hypotenuse c und einem spitzen $\angle \alpha$ die übrigen Stücke und den Inhalt des Dreiecks zu finden.

Fig. 17.



Aufl. 1) $\angle \beta = 90^0 - \alpha$

2) $a = c \sin \alpha$.

3) $b = c \cos \alpha$

4) $J = \frac{ab}{2} = \frac{c^2 \sin \alpha \cos \alpha}{2} = \frac{c^2 \sin 2\alpha}{4}$.

Beispiel. cL $= 45{,}93$ Fuß und $\angle \alpha = 23^0\ 41'\ 52''$.

1) $\angle \beta = 66^0\ 18'\ 8''$.

2) $\log a = \log 45{,}93 + \log \sin 23^0\ 41'\ 52''$

$$\begin{aligned} \log 45{,}93 &= 1{,}6620964 \\ \log \sin 23^0\ 41'\ 52'' &= 9{,}6041312 \\ \hline \log a &= 1{,}2662276 \end{aligned}$$

$a = \text{Num.} \log 1{,}2662276 = 18{,}4598$

aL $= 18{,}4598$ Fuß $= 2$ Faden 4 Fuß 5,5 Zoll.

3) $\log b = \log 45{,}93 + \log \cos 23^0\ 41'\ 52''$

$$\begin{aligned} \log 45{,}93 &= 1{,}6620964 \\ \log \cos 23^0\ 41'\ 52'' &= 9{,}9617429 \\ \hline \log b &= 1{,}6238393 \end{aligned}$$

$b = 42{,}0571$

bL $= 42{,}0571$ Fuß $= 6$ Faden 0 Fuß 0,6 Zoll.

4) $\log J = 2\log 45{,}93 + \log\sin 23^0\ 41'\ 52'' + \log\cos 23^0\ 41'\ 52'' - \log 2$

$$\begin{aligned} 2\log 45{,}93 &= 3{,}3241928 \\ \log\sin 23^0\ 41'\ 52'' &= 9{,}6041312-10 \\ \log\cos 23^0\ 41'\ 52'' &= 9{,}9617429-10 \\ \hline &\ 2{,}8900669 \\ \log 2 &= 0{,}3010300 \\ \hline \log J &= 2{,}5890369 \end{aligned}$$

$J = 388{,}1833.$

$JF = 388{,}1833\square$ Fuß $= 7\square$ Faden $45\square$ Fuß $26\square$ Zoll.

2. Aufg. Aus einer Kathete a und einem spitzen $\angle\,\alpha$ die übrigen Stücke und den Inhalt des Dreiecks zu berechnen.

Aufl. 1) $\angle\,\beta = 90^0 - \alpha.$

2) $\frac{a}{c} = \sin\alpha;\ c = \frac{a}{\sin\alpha}.$

3) $\frac{a}{b} = \operatorname{tang}\alpha;\ b = \frac{a}{\operatorname{tang}\alpha} = a \operatorname{cotg}\alpha.$

4) $J = \frac{ab}{2} = \frac{a^2 \operatorname{cotg}\alpha}{2}.$

Beisp. aL = 3 Fd. 4 Fuß 11 Zoll u. $\angle\,\alpha = 48^0\ 14'\ 10''.$

1) $\angle\,\beta = 41^0\ 45'\ 50''.$

2) $\log c = \log 311 - \log\sin 48^0\ 14'\ 10''$

$$\begin{aligned} \log 311 &= 12{,}4927604-10 \\ \log\sin 48^0\ 14'\ 10'' &= \ \ 9{,}8726782-10 \\ \hline \log c &= \ \ 2{,}6200822 \end{aligned}$$

$c = 416{,}948$

cL $= 416{,}948$ Zoll $= 4$ Faden 6 Fuß $8{,}948$ Zoll.

3) $\log b = \log 311 + \log\operatorname{cotg} 48^0\ 14'\ 10''$

$$\begin{aligned} \log 311 &= 2{,}4927604 \\ \log\operatorname{cotg} 48^0\ 14'\ 10'' &= 9{,}9508367 \\ \hline \log b &= 2{,}4435971 \end{aligned}$$

$b = 277{,}71$

bL $= 277{,}71$ Zoll $= 3$ Faden 2 Fuß $1{,}71$ Zoll.

4) $\log J = 2\log 311 + \log\operatorname{cotg} 48^0\ 14'\ 10'' - \log 2$

$$\left.\begin{array}{r} 2 \log 311 = 4{,}9855208 \\ \log \operatorname{cotg} 48^\circ\, 14'\, 10'' = 9{,}9508367 \\ \hline 4{,}9363575 \\ \log 2 = 0{,}3010300^{*)} \\ \hline \log J = 4{,}6353275 \end{array}\right\} \text{oder:} \begin{array}{r} 4{,}9855208 \\ 9{,}9508367-10 \\ 9{,}6989700-10 \\ \hline 4{,}6353275 \end{array}$$

$J = 43184{,}46$ und $JF = 43184{,}46\square$ Zoll $= 6\square$ Faden $5\square$ Fuß $128{,}46\square$ Zoll.

3. Aufg. Aus der Hypotenuse c und einer Kathete a die übrigen Stücke und den Inhalt des Dreiecks zu berechnen.

Aufl. 1) $\sin\alpha = \frac{a}{c}$.

2) $\cos\beta = \frac{a}{c}$.

3) $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(c+a)\,.\,(c-a)}$.

4) $J = \frac{ab}{2} = \frac{a\sqrt{(c+a)\,.\,(c-a)}}{2}$.

Beispiel $cL = 410{,}531$ Fuß und $aL = 149{,}002$ Fuß.

1) $\log \sin\alpha = \log a - \log c$

$$\begin{array}{rl} \log 149{,}002 = & 12{,}1731921-10 \\ \log 410{,}531 = & 2{,}6133460 \\ \hline \log \sin\alpha = & 9{,}5598461-10 \end{array}$$

$\angle\,\alpha = 21^\circ\, 16'\, 53{,}2''$.

2) $\log\cos\beta = \log a - \log c$

$\log\cos\beta = 9{,}5598461-10$

$\angle\,\beta = 68^\circ\, 43'\, 6{,}8''$.

3) $\log b = \frac{1}{2}[\log(c+a) + \log(c-a)]$

$$\begin{array}{rl} \log 559{,}533 = & 2{,}7478257 \\ \log 261{,}529 = & 2{,}4175198 \\ \hline 2 \,| & 5{,}1653455 \\ \hline \log b = & 2{,}5826727 \end{array}$$

$bL = 382{,}536$ Fuß $= 54$ Faden 4 Fuß 6 Zoll.

---

*) Statt zu subtrahiren zieht man log 2 von 10 ab, welches das Complement heiß, u. addirt, weil $-0{,}3010300 = 9{,}6989700-10$ ist.

4) $\log J = \log a + \frac{1}{2}[\log(c+a) + \log(c-a)] - \log 2$

$$\log 149{,}002 = 2{,}1731921$$
$$\log b = 2{,}5826727$$
$$\text{Compl.} \log 2 = 9{,}6989700-10$$
$$\log J = 4{,}4548348$$

JF $= 28499{,}34\square$ Fuß $= 581\square$ Faden $30\square$ Fuß $48{,}96\square$ Zoll.

4. Aufg. Aus den beiden Katheten a, b die übrigen Stücke und den Inhalt des Dreiecks zu berechnen.

Aufl. 1) $c = \sqrt{a^2+b^2}$ | 3) $\tang \beta = \frac{b}{a}$

2) $\tang \alpha = \frac{a}{b}$ | 4) $J = \frac{ab}{2}$.

Beispiel. aL $= 33$ Fuß und bL $= 24$ Fuß 9 Zoll.

1) $\log c = \frac{1}{2}\log(a^2+b^2)$

$$\tfrac{1}{2}\log 245025 = 2\,|\,5{,}3892104$$
$$\log c = 2{,}6946052$$

cL $= 495$ Zoll $= 5$ Faden 6 Fuß 3 Zoll.

2) $\log \tang \alpha = \log a - \log b$

$$\log 396 = 2{,}5976952$$
$$\log 297 = 2{,}4727564$$
$$\log \tang \alpha = 0{,}1249388$$

$\angle \alpha = 53^\circ\ 7'\ 48{,}4''$.

3) $\log \tang \beta = \log b - \log a$

$$\log 297 = 12{,}4727564-10$$
$$\log 396 = 2{,}5976952$$
$$\log \tang \beta = 9{,}8750612-10$$

$\angle \beta = 36^\circ\ 52'\ 11{,}6''$.

4) $\log J = \log a + \log b - \log 2$

$$\log a + \log b = 5{,}0704516$$
$$\log 2 = 0{,}3010300$$
$$\log J = 4{,}7694216$$

JF $= 58806\square$ Zoll $= 8\square$ Faden $16\square$ Fuß $54\square$ Zoll.

5. Aufg. Aus dem Inhalte J und einem spitzen $\angle \alpha$ eines rechtwinkligen Dreiecks die übrigen Stücke zu berechnen.

Aufl. 1) $\angle \beta = 90^\circ - \angle \alpha$.

2) $J = \frac{a^2 \operatorname{cotg} \alpha}{2}$; $a = \sqrt{\frac{2J}{\operatorname{cotg} \alpha}} = \sqrt{2J \operatorname{tang} \alpha}$.

3) $c = \frac{a}{\sin \alpha} = \sqrt{\frac{2J \operatorname{tang} \alpha}{\sin^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{2J}{\sin \alpha \cos \alpha}} =$
$\sqrt{\frac{4J}{\sin 2\alpha}}$.

4) $b = \frac{a}{\operatorname{tang} \alpha} = \sqrt{\frac{2J \operatorname{tang} \alpha}{\operatorname{tang}^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{2J}{\operatorname{tang} \alpha}} = \sqrt{2J \operatorname{cotg} \alpha}$.

Beispiel. JF = 45□ Fuß 72□ Zoll und $\angle \alpha = 73^\circ\ 47'$.

1) $\angle \beta = 16^\circ\ 13'$.

2) $\log a = \frac{1}{2}(\log 2J + \log \operatorname{tang} \alpha)$

log 13104 = 4,1174039
log tang 73° 47′ = 10,5363424—10
2 | 4,6537463
log a = 2,3268731

aL = 212,26 Zoll = 2 Faden 3 Fuß 8,26 Zoll.

3) $\log c = \frac{1}{2}(\log 4J - \log \sin 2\alpha)$

log 26204 = 14,4184339—10
log sin 32° 26′*) = 9,7294223
2 | 4,6890116
log c = 2,3445058

cL = 221,05 Zoll = 2 Faden 4 Fuß 5,05 Zoll.

4) $\log b = \frac{1}{2}(\log 2J + \log \operatorname{cotg} \alpha)$

log 13104 = 4,1174039
log cotg 73° 47′ = 9,4636576
2 | 3,5810615
log b = 1,7905307

bL = 61,73 Zoll = 5 Fuß 1,73 Zoll.

6. Aufg. Aus dem Inhalte J und einer Kathete a die übrigen Stücke des rechtwinkligen Dreiecks zu berechnen.

---

*) $\operatorname{Sin} 2\alpha = \sin 147^\circ\ 34' = \sin 32^\circ\ 26'$.

Aufl. 1) $J = \frac{ab}{2}$; $b = \frac{2J}{a}$.

2) $\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{a^2}{2J}$.

3) $\tan\beta = \frac{2J}{a^2}$.

4) $c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{a^2 + \frac{4J^2}{a^2}}$.

Beispiel. $JF = 100$ Deßjätinen und $aL = 100$ Saschen. (100 Deßjätinen = 240000□ Saschen.)

1) $b = \frac{2 \cdot 240000}{100} = 4800$

$bL = 4800$ Saschen = 9 Werst 300 Saschen.

2) $\log\tan\alpha = 2\log a - \log 2J$

$$\begin{aligned} 2\log 100 &= 14{,}0000000-10 \\ \log 480000 &= 5{,}6812412 \\ \hline \log\tan\alpha &= 8{,}3187588-10 \end{aligned}$$

$\angle\alpha = 1^\circ\ 11'\ 36{,}6''$.

3) $\log\tan\beta = \log 2J - 2\log a$

$$\begin{aligned} \log 480000 &= 5{,}6812412 \\ 2\log 100 &= 4{,}0000000 \\ \hline \log\tan\beta &= 11{,}6812412-10 \end{aligned}$$

$\angle\beta = 88^\circ\ 48'\ 23{,}4''$.

4) $c = \sqrt{23050000} = 4801{,}04$

$cL = 4801{,}04$ Saschen =

9 Werst 301 Saschen 0 Arschin 1,92 Werschock.

7. Aufg. Aus dem Inhalte J und der Hypotenuse c die übrigen Stücke des rechtwinkligen Dreiecks zu berechnen.

Aufl. 1) $J = \frac{c^2\sin 2\alpha}{4}$; $\sin 2\alpha = \frac{4J}{c^2}$.

2)

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 \\ 2ab &= 4J \\ \hline a + b &= \sqrt{c^2 + 4J} \\ a - b &= \sqrt{c^2 - 4J} \\ \hline a &= \frac{\sqrt{c^2+4J} + \sqrt{c^2-4J}}{2} \end{aligned}$$

$$3)\ b = \frac{\sqrt{c^2+4J} - \sqrt{c^2-4J}}{2}.$$

$$4)\ \angle\beta = R - \angle\alpha.$$

Beispiel. JF = 30□ Sasch. 5□ Arschin, cL = 20 Sasch. 2 A.

1) $\log\sin 2\alpha = \log 4J - 2\log c$

$$\begin{aligned} \log 1100 &= 13{,}0413927-10 \\ 2\log 62 &= 3{,}5847834 \\ \hline \log\sin 2\alpha &= 9{,}4566093-10 \end{aligned}$$

$2\alpha = 16°\ 37'\ 41{,}6''$ oder $163°\ 22'\ 18{,}4''$

$\alpha = 8°\ 18'\ 50{,}8''$ oder $81°\ 41'\ 9{,}2''$.

$$2)\ a = \frac{\sqrt{4944}+\sqrt{2744}}{2} = \frac{70{,}3+52{,}3}{2} = 61{,}3$$

aL = 61,3 Arschin = 20 Saschen 1 Arschin 4,8 Werschock.

$$3)\ b = \frac{\sqrt{4944}-\sqrt{2744}}{2} = 9.$$

bL = 3 Saschen.

4) Hier ist $a > b$, folglich auch $\angle\alpha > \angle\beta$, also:
$\angle\alpha = 81°\ 41'\ 9{,}2''$ und $\angle\beta = 8°\ 18'\ 50{,}8''$.

Berechnung der schiefwinkligen Dreiecke.

§ **16.** Es sind folgende Aufgaben nur möglich:

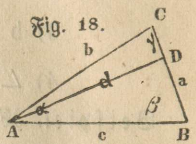
1)	Gegeben	a, α, β;	gesucht	b, c, γ, J.
2)	»	a, b, α;	»	c, β, γ, J $(a > b)$.
3)	»	a, b, γ;	»	c, α, β, J.
4)	»	a, b, c;	»	α, β, γ, J.
5)	»	a, b, J;	»	c, α, β, γ.
6)	»	a, β, J;	»	b, c, α, γ.
7)	»	a, α, J;	»	b, c, β, γ.
8)	»	α, β, J;	»	a, b, c, γ.

8. Aufg. Aus einer Seite a und zwei Winkeln α, β eines Dreiecks die übrigen Stücke und den Inhalt des Dreiecks zu berechnen.

Aufl. 1) $\angle \gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$.

2) $b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha}$ (Lehrs. 8).

Fig. 18.



3) $c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{a \sin (\alpha + \beta)}{\sin \alpha}$.

4) $J = \frac{ad}{2} = \frac{a\,c \sin \beta}{2} = \frac{a^2 \sin \beta \sin (\alpha + \beta)}{2 \sin \alpha}$.

Beispiel. $aL = 594$ Faden 6 Fuß 10 Zoll; $\angle \alpha = 69^\circ\ 43'\ 52{,}5''$ und $\angle \beta = 60^\circ\ 59'\ 10{,}2''$.

1) $\angle \gamma = 49^\circ\ 16'\ 57{,}3''$.

2) $\log b = \log a + \log \sin \beta - \log \sin \alpha$.

$$\begin{aligned}
\log 49978 &= 4{,}6987789 \\
\log \sin 60^\circ\ 59'\ 10{,}2'' &= 9{,}9417611 \\
\text{Compl. } \log \sin 69^\circ\ 43'\ 52{,}5'' &= 0{,}0277611^{*)} \\
\hline
\log b &= 4{,}6683011
\end{aligned}$$

$bL = 554$ Faden 4 Fuß 6,9 Zoll.

3) $\log c = \log a + \log \sin \gamma - \log \sin \alpha$

$$\begin{aligned}
\log 49978 &= 4{,}6987789 \\
\log \sin 49^\circ\ 16'\ 57{,}3'' &= 9{,}8796326-10 \\
\text{Cpl. } \log \sin 69^\circ\ 43'\ 52{,}5'' &= 0{,}0277611 \\
\hline
\log c &= 4{,}6061726
\end{aligned}$$

$cL = 40380{,}58$ Zoll $= 480$ Faden 5 Fuß 0,58 Zoll.

4) $\log J = 2 \log a + \log \sin \beta + \log \sin (\alpha + \beta) - \log 2 - \log \sin \alpha$

$$\begin{aligned}
2 \log 49978 &= 9{,}3975578 \\
\log \sin 60^\circ\ 59'\ 10{,}2'' &= 9{,}9417611-10 \\
\log \sin 49^\circ\ 16'\ 57{,}3'' &= 9{,}8796326-10 \\
\text{Cpl. } \log 2 &= 9{,}6989700-10 \\
\text{Cpl. } \log \sin 69^\circ\ 43'\ 52{,}5'' &= 0{,}0277611 \\
\hline
\log J &= 8{,}9456826
\end{aligned}$$

$JF = 882434620\square$ Zoll $=$

$125061\square$ Faden $29\square$ Fuß $28\square$ Zoll.

---

*) Man subtrahirt, indem man den Subtrahend mit entgegengesetzten Vorzeichen addirt, folglich addirt man $-\log \sin \alpha$ oder $+10 - 9{,}9722389 = 0{,}0277611$.

9. Aufg. Aus zwei Seiten a, b und dem der größern Seite gegenüberliegenden Winkel α die übrigen Stücke und den Inhalt des Dreiecks zu berechnen.

Aufl. 1) $\sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a}$.

2) $\angle \gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$.

3) $c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}$ oder $c = b \cos \alpha + \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 \alpha}$ (Lehrs. 10). Da $a > b$ ist, so ist auch $\sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 \alpha}$ größer als $b \cos \alpha$, daher ist nur die positive Wurzel zu nehmen.

4) $J = \frac{c b \sin \alpha}{2}$ oder $\frac{a b \sin \gamma}{2}$.

Beispiel. aL = 8 Saschen 2 Arschin 15 Werschock, bL = 1 S. 1 A. 10 W., $\angle \alpha = 102^0\, 32'\, 44''$.

1) $\log \sin \beta = \log b + \log \sin \alpha - \log a$

$$\begin{aligned} \log 74 &= 1{,}8692317 \\ \log \sin 77^0\, 27'\, 16'' &= 9{,}9895047-10 \\ \text{Cpl.} \log 431 &= 7{,}3655227-10 \\ \hline \log \sin \beta &= 9{,}2242591-10 \end{aligned}$$

$\angle \beta = 9^0\, 38'\, 52''$. (Hier kann nur der spitze Winkel von β genommen werden, da $\angle \alpha > \angle \beta$ ist.)

2) $\angle \gamma = 67^0\, 48'\, 24''$.

3) $\log c = \log a + \log \sin \gamma - \log \sin \alpha$

$$\begin{aligned} \log 431 &= 2{,}6344773 \\ \log \sin 67^0\, 48'\, 24'' &= 9{,}9665709-10 \\ \text{Cpl.} \log \sin 77^0\, 27'\, 16'' &= 0{,}0104953 \\ \hline \log c &= 2{,}6115435 \end{aligned}$$

cL = 408,83 Werschock = 8 Sasch. 1 Arschin 8,83 W.

4) $\log J = \log a + \log b + \log \sin \gamma - \log 2$

$$\begin{aligned} \log 431 &= 2{,}6344773 \\ \log 74 &= 1{,}8692317 \\ \log \sin 67^0\, 48'\, 24'' &= 9{,}9665709-10 \\ \text{Cpl.} \log 2 &= 9{,}6989700-10 \\ \hline \log J &= 4{,}1692499 \end{aligned}$$

JF = 14765,55□ Werschock = 6□ Sasch. 3□ A. 173,55□ W.

Wenn in dieser Aufgabe der der kleinern Seite gegenüberliegende Winkel gegeben ist, so sind zwei verschiedene Dreiecke möglich, wie auch die Planimetrie lehrt.

10. Aufg. Aus zwei Seiten a, b und dem eingeschlossenen Winkel γ eines Dreiecks die übrigen Stücke und den Inhalt desselben zu berechnen.

Aufl. $\alpha + \beta = 180^0 - \gamma$,

$\operatorname{tang} \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{a-b}{a+b} \operatorname{tang} \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{a-b}{a+b} \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\gamma$.

1) $\angle \alpha = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) + \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$.

2) $\angle \beta = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) - \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$.

3) $c = \frac{a \sin\gamma}{\sin\alpha}$ oder $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$.

4) $J = \frac{ab\sin\gamma}{2}$.

Beispiel. $aL = 8$ Arschin 11 Werschock, $bL = 10$ A. 5 W. und $\angle \gamma = 42^0\ 4'\ 10''$.

$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}(\beta - \alpha) = \log(b-a) + \log \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\gamma - \log(b+a)$

$\log 26 = 1,4149733$
$\log \operatorname{cotg} 21^0\ 2'\ 5'' = 0,4150365$
$\text{Cpl.} \log 304 = 7,5171264 - 10$
$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}(\beta - \alpha) = 9,3471362 - 10$

$\frac{1}{2}(\beta - \alpha) = 12^0\ 32'\ 18''$
$\frac{1}{2}(\beta + \alpha) = 68^0\ 57'\ 55''$.

1) $\angle \beta = 81^0\ 30'\ 13''$.

2) $\angle \alpha = 56^0\ 25'\ 37''$.

3) $\log c = \log a + \log \sin\gamma - \log \sin\alpha$

$\log 139 = 2,1430148$
$\log \sin 42^0\ 4'\ 10'' = 9,8260948 - 10$
$\text{Cpl.} \log \sin 56^0\ 25'\ 37'' = 0,0792605$
$\log c = 2,0483701$

$cL = 111,78$ Werschock $= 6$ Arschin $15,78$ Werschock.

4) $\log J = \log a + \log b + \log \sin\gamma - \log 2$

$$\begin{aligned} \log 139 &= 2{,}1430148 \\ \log 165 &= 2{,}2174839 \\ \log \sin 42^\circ\, 4'\, 10'' &= 9{,}8260948-10 \\ \text{Cpl.} \log 2 &= 9{,}6989700-10 \\ \hline \log J &= 3{,}8855635 \end{aligned}$$

JF = 7683,58□ Wersch. = 30□ Arschin 3,58□ Wersch.

11. Aufg. Aus den drei Seiten a, b, c eines Dreiecks die drei Winkel und den Inhalt desselben zu berechnen.

Aufl. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha$ (Lehrs. 10).

1) $\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

2) $\cos\beta = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$.

3) $\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$.

4) $J = \frac{bc \sin\alpha}{2}$.

Die Formeln 1, 2, 3 sind für die logarithmische Berechnung nicht bequem; man muß daher diese Ausdrücke umformen. Man addire 1 zu beiden Seiten der Gleichung (1), so ist:

$$1+\cos\alpha = 1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}.$$

Nun ist der Unterschied zweier Quadrate gleich dem Producte der Summe mit dem Unterschiede der Zahlen selbst, folglich: $1+\cos\alpha = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}$. Es ist aber $1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{1}{2}\alpha$, also $\cos^2\frac{1}{2}\alpha = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc} = \frac{1}{bc}\left(\frac{b+c+a}{2}\right)\left(\frac{b+c-a}{2}\right)$.

Bezeichnet man die Summe der drei Seiten durch s, so ist $\frac{b+c+a}{2} = \frac{1}{2}s$ und $\frac{b+c-a}{2} = \frac{1}{2}s - a$, folglich: $\cos\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}s(\frac{1}{2}s-a)}{bc}}$. Zieht man die Gleichung (1) von 1 ab, so erhält man:

$$1 - \cos\alpha = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc} =$$
$$\frac{a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)}{2bc} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc}.$$

Es ist aber $1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{1}{2}\alpha$, folglich:
$\sin^2\frac{1}{2}\alpha = \frac{a^2 - (b-c)^2}{4bc} = \frac{1}{bc}\left(\frac{a+b-c}{2}\right)\left(\frac{a+c-b}{2}\right)$. Nun ist
$\frac{a+b-c}{2} = \frac{1}{2}s - c$ und $\frac{a+c-b}{2} = \frac{1}{2}s - b$, also $\sin\frac{1}{2}\alpha =$
$\sqrt{\frac{(\frac{1}{2}s-b)(\frac{1}{2}s-c)}{bc}}$. Ebenso entwickelt man:

2) $\cos\frac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}s(\frac{1}{2}s-b)}{ac}}$ und $\sin\frac{1}{2}\beta =$
$\sqrt{\frac{(\frac{1}{2}s-c)(\frac{1}{2}s-a)}{ac}}$.

3) $\cos\frac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}s(\frac{1}{2}s-c)}{ab}}$ und $\sin\frac{1}{2}\gamma =$
$\sqrt{\frac{(\frac{1}{2}s-a)(\frac{1}{2}s-b)}{ab}}$.

Die Wurzeln sind durchgehends mit dem Zeichen + zu nehmen; denn da die Summe aller drei Winkel des ebenen Dreiecks immer gleich 180°, und folglich jeder einzelne Winkel kleiner als 180° ist, so ist der halbe Winkel immer kleiner als 90° und somit Sinus und Cosinus positiv.

Multiplicirt man $\cos\frac{1}{2}\alpha$ mit $\sin\frac{1}{2}\alpha$, so ist:
$\cos\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{bc}\sqrt{\frac{1}{2}s(\frac{1}{2}s-a)(\frac{1}{2}s-b)(\frac{1}{2}s-c)}$. Nun ist $2\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha = \sin\alpha$, also $\sin\alpha =$
$\frac{2}{bc}\sqrt{\frac{1}{2}s(\frac{1}{2}s-a)(\frac{1}{2}s-b)(\frac{1}{2}s-c)}$.

4) $J = \frac{bc\sin\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}s(\frac{1}{2}s-a)(\frac{1}{2}s-b)(\frac{1}{2}s-c)}$.

Beispiel:	
aL = 435,42 Fuß	$\frac{1}{2}s = 465{,}915$
bL = 389,04 Fuß	$\frac{1}{2}s - a = 30{,}495$
cL = 107,37 Fuß	$\frac{1}{2}s - b = 76{,}875$
	$\frac{1}{2}s - c = 358{,}545$.

1) $\log \cos \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}[\log \frac{1}{2}s + \log(\frac{1}{2}s - a) - \log b - \log c]$

$$\begin{array}{rl}
\log 465,915 &= 2,6683067 \\
\log 30,495 &= 1,4842286 \\
\text{Cpl. } \log 389,04 &= 7,4100057-10 \\
\text{Cpl. } \log 107,37 &= 7,9691170-10 \\ \hline
2 \,| & 19,5316580-20 \\
\log \cos \frac{1}{2}\alpha &= 9,7658290-10
\end{array}$$

$\frac{1}{2}\alpha = 54^0\ 19'\ 22,7''$ und $\angle\alpha = 108^0\ 38'\ 45,4''$.

2) $\log \cos \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{2}[\log \frac{1}{2}s + \log(\frac{1}{2}s - b) - \log a - \log c]$

$$\begin{array}{rl}
\log 465,915 &= 2,6683067 \\
\log 76,875 &= 1,8857851 \\
\text{Cpl. } \log 435,42 &= 7,3610916-10 \\
\text{Cpl. } \log 107,37 &= 7,9691170-10 \\ \hline
2 \,| & 19,8843004-20 \\
\log \cos \frac{1}{2}\beta &= 9,9421502-10
\end{array}$$

$\frac{1}{2}\beta = 28^0\ 55'\ 15,9''$ und $\angle\beta = 57^0\ 50'\ 31,8''$.

3) $\log \sin \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}[\log(\frac{1}{2}s - a) + \log(\frac{1}{2}s - b) - \log a - \log b]$*)

$$\begin{array}{rl}
\log 30,495 &= 1,4842286 \\
\log 76,875 &= 1,8857851 \\
\text{Cpl. } \log 435,42 &= 7,3610916-10 \\
\text{Cpl. } \log 389,04 &= 7,4100057-10 \\ \hline
2 \,| & 18,1411110-20 \\
\log \sin \frac{1}{2}\gamma &= 9,0705555-10
\end{array}$$

$\frac{1}{2}\gamma = 6^0\ 45'\ 21,4''$ und $\angle\gamma = 13^0\ 30'\ 42,8''$.

4) $\log J = \frac{1}{2}[\log \frac{1}{2}s + \log(\frac{1}{2}s - a) + \log(\frac{1}{2}s - b) + \log(\frac{1}{2}s - c)]$

$$\begin{array}{rl}
\log 465,915 &= 2,6683067 \\
\log 30,495 &= 1,4842286 \\
\log 76,875 &= 1,8857851 \\
\log 358,545 &= 2,5545437 \\ \hline
2 \,| & 8,5928641 \\
\log J &= 4,2964320
\end{array}$$

JF = 19789,37□ Fuß = 19789□ Fuß 53□ Zoll.

*) Für kleine Winkel nimmt man den Sinus.

12. Aufg. Aus zwei Seiten a, b und dem Inhalte J eines Dreiecks die übrigen Stücke desselben zu berechnen.

Aufl. $J = ab \sin\gamma$ (Aufg. 10).

1) $\sin\gamma = \frac{2J}{ab}$

$\cos\gamma = \sqrt{1-\sin^2\gamma} = \frac{1}{ab}\sqrt{a^2b^2-4J^2}$

2) $c^2 = a^2+b^2-2ab\cos\gamma = a^2+b^2-2\sqrt{a^2b^2-4J^2}$

$c = \sqrt{a^2+b^2-2\sqrt{(ab+2J)(ab-2J)}}$

3) $J = \frac{ac\sin\beta}{2}$; $\sin\beta = \frac{2J}{ac}$

4) $\angle\alpha = 180^0 - (\beta+\gamma)$ oder $\sin\alpha = \frac{2J}{bc}$. Oder man berechnet, nachdem man $\angle\gamma$ gefunden hat, $\angle\alpha$ und $\angle\beta$ nach Lehrs. 9.

Beispiel. aL = 464 Saschen 1 Arschin, bL = 90 Saschen 2 Arschin und JF = 3789□ Saschen 5□ Arschin.

1) $\log\sin\gamma = \log 2J - \log a - \log b$

$$\begin{aligned}
\log 68212 &= 4,8338608 \\
\text{Cpl. } \log 1393 &= 6,8560489-10 \\
\text{Cpl. } \log 272 &= 7,5654311-10 \\
\hline
\log\sin\gamma &= 9,2553408-10
\end{aligned}$$

$\angle\gamma = 10^0\ 22'\ 17''$ oder $169^0\ 37'\ 43''$.

2)
$$\begin{aligned}
a^2 &= 1940449 \\
b^2 &= 73984 \\
\hline
a^2+b^2 &= 2014433
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
ab &= 378896 \\
2J &= 68212 \\
\hline
ab+2J &= 447108 \\
ab-2J &= 310684
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log 447108 &= 5,6504125 \\
\log 310684 &= 5,4923189 \\
\hline
2 &\,|\, 11,1427314 \\
\hline
& 5,5713657
\end{aligned}$$

$2\sqrt{(ab+2J)(ab-2J)} = \pm 745410$

$c = \sqrt{a^2+b^2-2\sqrt{(ab+2J)(ab-2J)}} = \sqrt{1269023} = 1126,5$ od.

$c = \sqrt{a^2+b^2+2\sqrt{(ab+2J)(ab-2J)}} = \sqrt{2759843} = 1661,2.$

3) $\log\sin\beta = \log 2J - \log a - \log c$

$$\log 68212 = 4{,}8338608$$
$$\text{Cpl. } \log 1393 = 6{,}8560489-10$$
$$\text{Cpl. } \log 1126{,}5 = 6{,}9482688-10$$
$$\log \sin \beta = 8{,}6381785-10$$

$\angle \beta = 2^0\, 29'\, 28{,}9''$. Da c $>$ b ist, so muß $\angle \beta$ ein spitzer Winkel sein. Nimmt man für c den zweiten Werth, so ist

$$\log 68212 = 4{,}8338608$$
$$\text{Cpl. } \log 1393 = 6{,}8560489-10$$
$$\text{Cpl. } \log 1661{,}2 = 6{,}7795781-10$$
$$\log \sin \beta = 8{,}4694878-10$$

$\angle \beta = 1^0\, 41'\, 20{,}8''$.

4) $\angle \alpha = 180^0 - (\beta + \gamma) = 180^0 - (2^0 29'\, 28{,}9'' + 10^0 22'\, 17'') = 167^0\, 8'\, 14{,}1''$ oder $\angle \alpha = 180^0 - (1^0\, 41'\, 20{,}8'' + 169^0\, 37'\, 43'') = 8^0\, 40'\, 56{,}2''$.

Diese Aufgabe enthält zwei verschiedene Dreiecke, in dem einen ist: cL = 1126,5 Arschin = 375 Saschen 1 A. 8 W., $\angle \alpha = 167^0\, 8'\, 14{,}1''$, $\angle \beta = 2^0\, 29'\, 28{,}9''$ und $\angle \gamma = 10^0\, 22'\, 17''$; in dem andern Dreiecke ist cL = 1661,2 Arschin = 553 Saschen 2 Arschin 3 Werschock, $\angle \alpha = 8^0\, 40'\, 56{,}2''$, $\angle \beta = 1^0\, 41'\, 20{,}8''$ und $\angle \gamma = 169^0\, 37'\, 1{,}3''$.

Wird die Aufgabe nach Lehrs. 9 berechnet, so erhält man dieselben Werthe.

$\operatorname{tang} \frac{1}{2} (\alpha - \beta) = \frac{a-b}{a+b} \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\gamma$; $\angle \gamma$ sei gleich $10^0\, 22'\, 17''$

$$\log 1121 = 3{,}0496056$$
$$\log \operatorname{cotg} 5^0\, 11'\, 8{,}5'' = 11{,}0421276$$
$$14{,}0917332$$
$$\log 1665 = 3{,}2214142$$
$$\log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) = 10{,}8703190$$
$$\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) = 82^0\, 19'\, 22{,}6''$$
$$\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) = 84^0\, 48'\, 51{,}5''$$
$$\angle \alpha = 167^0\, 8'\, 14{,}1',$$
$$\angle \beta = 2^0\, 29'\, 28{,}9''.$$

Ist $\angle \gamma = 169^0\, 37'\, 43''$, so ist

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) = \frac{1121}{1665}\,\text{cotg}\,84^0\,48'\,51{,}5''$$

$$\begin{aligned}
\log 1121 &= 3{,}0496056\\
\log \text{cotg}\,84^0\,48'\,51{,}5'' &= 8{,}9578725\\
\text{Cpl. } \log 1165 &= 6{,}7785858-10\\
\hline
\log \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) &= 8{,}7860639
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) &= 3^0\,29'\,47{,}8''\\
\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) &= 5^0\,11'\,8{,}5''\\
\hline
\angle\,\alpha &= 8^0\,40'\,56{,}3''\\
\angle\,\beta &= 1^0\,41'\,20{,}7''.
\end{aligned}$$

13. Aufg. Aus einer Seite a, einem anliegenden Winkel β und dem Inhalte J eines Dreiecks die übrigen Stücke desselben zu berechnen.

Aufl. 1) $J = \frac{ac \sin\beta}{2}$ (8. Aufg., 4); $c = \frac{2J}{a \sin\beta}$

2) $a+c : a-c = \text{cotg}\,\tfrac{1}{2}\beta : \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\gamma)$; $\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\gamma)$
$= \frac{a-c}{a+c}\,\text{cotg}\,\tfrac{1}{2}\beta = \frac{a^2\sin\beta-2J}{a^2\sin\beta+2J}\,\text{cotg}\,\tfrac{1}{2}\beta.$

Hieraus findet man α und 3) $\angle\,\gamma$.

4) $b = \frac{a \sin\beta}{\sin\alpha}.$

Beispiel. aL = 44 Fuß, $\angle\,\beta = 42^0\,14'\,25''$ und JF = 784□ Fuß 100□ Zoll.

1) $\log c = \log 2J - \log a - \log \sin\beta$

$$\begin{aligned}
\log 225992 &= 5{,}3540930\\
\text{Cpl. } \log 528 &= 7{,}2773661-10\\
\text{Cpl. } \log \sin 42^0\,14'\,25'' &= 0{,}1724950\\
\hline
\log c &= 2{,}8039541
\end{aligned}$$

cL = 636,72 Zoll = 53 Fuß 0,72 Zoll.

2) $\log \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha) = \log(c-a) + \log \text{cotg}\,\tfrac{1}{2}\beta - \log(c+a)$

$$\begin{aligned}
\log 108{,}72 &= 2{,}0363094\\
\log \text{cotg}\,21^0\,7'\,12{,}5'' &= 0{,}4131071\\
\text{Cpl. } \log 1164{,}72 &= 6{,}9337784-10\\
\hline
\log \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha) &= 9{,}3831949-10
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha) &= 13^0\,35'\,7{,}2''\\
\tfrac{1}{2}(\gamma+\alpha) &= 68^0\,52'\,47{,}5''\\
\hline
\angle\,\alpha &= 55^0\,17'\,40{,}3''.
\end{aligned}$$

3) $\angle \gamma = 82^0\ 27'\ 54{,}7''$

4) $\log b = \log a + \log \sin \beta - \log \sin \alpha$

$$\begin{array}{rl} \log 528 &= 2{,}7226339 \\ \log \sin 42^0\ 14'\ 25'' &= 9{,}8275261-10 \\ \text{Cpl.} \log \sin 55^0\ 17'\ 40{,}3'' &= 0{,}0850808 \\ \hline \log b &= 2{,}6352408 \end{array}$$

bL = 431,75 Zoll = 35 Fuß 11,75 Zoll.

14. Aufg. Aus einer Seite a, einem Gegenwinkel α und dem Inhalt J eines Dreiecks die übrigen Stücke desselben zu berechnen.

Aufl. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$

$$bc = \frac{2J}{\sin \alpha} \quad (12.\ \text{Aufg.},\ 4)$$

$$b^2 + c^2 = a^2 + \frac{4J \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$2bc = \frac{4J}{\sin \alpha}$$

$$b^2 + 2bc + c^2 = a^2 + \frac{4J}{\sin \alpha}(1 + \cos \alpha) =$$

$a^2 + \dfrac{8J \cos^2 \frac{1}{2}\alpha}{\sin \alpha}$, hieraus die Wurzel gezogen und für $\sin \alpha = 2 \sin \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\alpha$ gesetzt, giebt:

(A) $b + c = \sqrt{a^2 + \dfrac{8J \cos \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\alpha}{2 \sin \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\alpha}} = \sqrt{a^2 + 4J \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\alpha}$.

Ebenso findet man $b^2 - 2bc + c^2 = a^2 - \dfrac{4J}{\sin \alpha}(1 - \cos \alpha) = a^2 - \dfrac{8J \sin^2 \frac{1}{2}\alpha}{\sin \alpha}$, also

(B) $b - c = \sqrt{a^2 - 4J \operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha}$. Addirt und subtrahirt man (A) und (B), so erhält man:

1) $b = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 + 4J \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\alpha} + \sqrt{a^2 - 4J \operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha}\right)$.

2) $c = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 + 4J \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\alpha} - \sqrt{a^2 - 4J \operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha}\right)$.

3) $\sin \beta = \dfrac{b \sin \alpha}{a}$.

4) $\angle \gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$.

Beispiel. $aL = 8$ Fuß 4 Zoll, $\angle \alpha = 42^0\ 37'\ 18''$ und $JF = 33\square$ Fuß $25\square$ Zoll.

$$\log 4\,J \cot g\, \tfrac{1}{2}\alpha = \log 4\,J + \log \cot g\, \tfrac{1}{2}\alpha$$

$$\begin{array}{rl} \log 19108 = & 4{,}2812152 \\ \log \cot g\, 21^0\ 18'\ 39'' = & 0{,}4088224 \\ \hline & 4{,}6900376 \end{array}$$

$$4\,J \cot g\, \tfrac{1}{2}\alpha = 48982{,}12$$
$$a^2 + 4\,J \cot g\, \tfrac{1}{2}\alpha = 58982{,}12.$$

$$\log 4\,J\, \tang\, \tfrac{1}{2}\alpha = \log 4\,J + \log \tang\, \tfrac{1}{2}\alpha$$

$$\begin{array}{rl} \log 19108 = & 4{,}2812152 \\ \log \tang\, 21^0\ 18'\ 39'' = & 9{,}5911776 \\ \hline & 3{,}8723928 \end{array}$$

$$4\,J \tang\, \tfrac{1}{2}\alpha = 7454{,}06$$
$$a^2 - 4\,J \tang\, \tfrac{1}{2}\alpha = 2545{,}94.$$

1) $b = \frac{1}{2}\left(\sqrt{58982{,}12} + \sqrt{2545{,}94}\right) =$
$\frac{1}{2}(242{,}86 + 50{,}45) = 146{,}66$
$bL = 146{,}66$ Zoll $= 12$ Fuß $2{,}66$ Zoll.

2) $c = \frac{1}{2}(242{,}86 - 50{,}45) = 96{,}2$
$cL = 96{,}2$ Zoll $= 8$ Fuß $0{,}2$ Zoll.

3) $\log \sin \beta = \log b + \log \sin \alpha - \log a$

$$\begin{array}{rl} \log 146{,}66 = & 2{,}1663117 \\ \log \sin 42^0\ 37'\ 18'' = & 9{,}8306875-10 \\ \hline & 11{,}9969992-10 \\ \log 100 = & 2{,}0000000 \\ \hline \log \sin \beta = & 9{,}9969992-10 \end{array}$$

$\angle \beta = 83^0\ 16'\ 20''$ oder $96^0\ 43'\ 40''$.

Hier ist $\angle \beta = 96^0\ 43'\ 40''$, denn nimmt man den spitzen Winkel für β, so ist $\angle \gamma > \angle \alpha$, welches nicht möglich ist, da Seite $c < a$ ist.

4) $\angle \gamma = 180^0 - (\alpha + \beta) = 180^0 - 139^0\ 20'\ 58'' =$
$40^0\ 39'\ 2''$.

15. Aufg. Aus zwei Winkeln α, β und dem Inhalt J eines Dreiecks die übrigen Stücke desselben zu berechnen.

Aufl. 1) $\angle \gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$.

2) $J = \frac{a^2 \sin\beta \sin(\alpha+\beta)}{2 \sin\alpha}$ (8. Aufg., 4);

$$a = \sqrt{\frac{2 J \sin\alpha}{\sin\beta \sin(\alpha+\beta)}}.$$

3) $J = \frac{c^2 \sin\alpha \sin\beta}{2 \sin\gamma}$; $c = \sqrt{\frac{2J \sin\gamma}{\sin\alpha \sin\beta}}$.

4) $b = \frac{a \sin\beta}{\sin\alpha} = \sqrt{\frac{2 J \sin\beta}{\sin\alpha \sin\gamma}}$.

Beispiel. $\angle \alpha = 50^0\ 40'\ 30''$, $\angle \beta = 50^0\ 40'\ 30''$ und $JF = 200\Box$ Fuß.

1) $\gamma = 78^0\ 39'$.

2) $\log a = \frac{1}{2}(\log 2J - \log \sin\gamma)$

$$\begin{array}{rl} \log 400 = & 12{,}6020600-10 \\ \log \sin 78^0\ 39' = & 9{,}9914225-10 \\ \hline & 2\,|\,2{,}6106375 \\ \hline \log a = & 1{,}3053187 \end{array}$$

$aL = 20{,}198$ Fuß $= 20$ Fuß $2{,}37$ Zoll.

3) $bL = 20$ Fuß $2{,}37$ Zoll.

4) $\log c = \frac{1}{2}(\log 2J + \log \sin\gamma - 2 \log \sin\alpha)$

$$\begin{array}{rl} \log 400 = & 2{,}6020600 \\ \log \sin 78^0\ 39' = & 9{,}9914225-10 \\ \text{Cpl. } 2 \log \sin 50^0\ 40'\ 30'' = & 0{,}2230078 \\ \hline & 2\,|\,2{,}8164903 \\ \hline \log c = & 1{,}4082451 \end{array}$$

$cL = 25{,}6$ Fuß $= 25$ Fuß $7{,}2$ Zoll.

Fragen.

1) Was lehrt die Trigonometrie?

2) Wie theilt man die Trigonometrie ein?

3) Was lehrt die Goniometrie?

4) Was heißt eine Funktion?

5) Wie viele trigonometrische Funktionen giebt es?

6) Wie definirt man sie?
7) Was heißt es: im ersten, zweiten u. s. w. Quadranten?
8) In welchen Quadranten sind die trigonometrischen Funktionen positiv?
9) In welchen negativ?
10) Welche Vorzeichen haben die trigon. Funktionen im ersten, zweiten u. s. w. Quadranten?
11) Haben die trig. Funktionen von Winkeln, die größer als 90^0 sind, andere Werthe als die der spitzen Winkel?
12) Zwischen welchen Gränzen liegen die trig. Funktionen?
13) Ist sin α gleich sinus mal α? und warum nicht?
14) Was heißt ein negativer Winkel?
15) Welche Vorzeichen haben die trig. Funktionen eines negativen Winkels?
16) Sind die trig. Funktionen benannte oder unben. Zahlen?
17) Welche sind die trig. Linien?
18) Man soll die trig. Funktionen durch den Sinus desselben Winkels ausdrücken.
19) In welcher Beziehung steht die Tangente zur Cotangente eines und desselben Winkels und umgekehrt?
20) Wie unterscheidet sich die Formel für eine trig. Funktion der Summe zweier Winkel von der der Summe zweier trigon. Funktionen?
21) Wie findet man den Sinus der Summe zweier Winkel?
22) Wie den Cosinus, die Tangente und Cotangente der Summe zweier Winkel?
23) Wie findet man den Sinus des Unterschiedes zweier Winkel?
24) Wie den Cosinus, die Tangente und Cotangente des Unterschiedes zweier Winkel?
25) Wie drückt man die Summe oder den Unterschied zweier Sinusse oder zweier Cosinusse durch ein Product aus?
26) Wie findet man die Zahlenwerthe für die trig. Funktionen?
27) Wie findet man aus dem Zahlenwerthe einer trig. Funktion eines Winkels den Zahlenwerth einer trig. Funktion eines halben Winkels?

28) Weshalb sind die Logarithmen der trig. Funktionen zu groß genommen?

29) Weshalb nimmt man beim Aufsuchen der Logarithmen für den Sinus und die Tangente die nächst kleinere, hingegen für den Cosinus und die Cotangente die nächst größere Zahl?

30) Weshalb sind die Logarithmen der trig. Funktionen nur für Winkel bis 45° berechnet?

31) Welcher trig. Funktion kann man jeden beliebigen Zahlenwerth geben? und welche können nur ächte Brüche sein?

32) Was versteht man unter Maaßzahl der Seiten?

33) Wie viele Größen sind zur Bestimmung eines Dreiecks nöthig?

34) Warum bestimmen 3 Winkel nicht die Größe eines Dreiecks?

35) Wenn x ein kleiner Winkel ist, was nimmt man für sin x, cos x u. s. w.?

36) Wie viele Relationen bestehen zwischen den Seiten und Winkeln eines ebenen Dreiecks?

37) Wenn man Logarithmen subtrahiren soll, so kann man das Complement oder die dekadische Ergänzung addiren, warum?

Aufgaben aus der ebenen Trigonometrie.

122) In einem rechtw. Dreiecke ist die Hypotenuse cL = 232,35 Fuß und $\angle \beta = 34^\circ 14' 32''$ gegeben; man soll die übrigen Stücke und den Inhalt des Dreiecks finden.

123) Desgleichen cL = 162 Fuß und $\angle \beta = 14^\circ 7' 8''$.

124) In einem rechtw. Dreiecke ist die Hypotenuse cL = 213,16 Fuß und eine Cathete aL = 116,13 Fuß gegeben; man soll die übrigen Stücke und den Inhalt des Dreiecks berechnen.

125) Desgleichen cL = 52,17 Fuß und aL = 31,19 Fuß.

126) In einem rechtw. Dreiecke ist eine Cathete aL = 315,46 Fuß und der ihr anliegende $\angle \beta = 42^\circ 44' 15''$ gegeben; man soll die übrigen Stücke und den Inhalt des Dreiecks finden.

127) Desgleichen a = 785,34 und $\angle \beta = 67^\circ 2' 35''$.

128) In einem rechtw. Dreiecke ist eine Cathete aL = 23,14 Fuß und der ihr gegenüberliegende $\angle \alpha = 12^0\ 13'\ 14''$ gegeben; man soll die übrigen Stücke und den Inhalt des Dreiecks finden.

129) Desgleichen aL = 12,14 Fad. u. $\angle \alpha = 15^0\ 13'\ 11''$.

130) In einem rechtw. Dreiecke sind die beiden Catheten aL = 69,13 Faden und bL = 18,6 Faden gegeben; man soll die übrigen Stücke und den Inhalt des Dreiecks finden.

131) Desgleichen a = 18,5 und b = 16,5.

132) Der Inhalt JF = 116□ Fuß eines rechtw. Dreiecks und der $\angle \alpha = 13^0\ 14'\ 5''$ sind gegeben; man soll die übrigen Stücke des Dreiecks berechnen.

133) Desgleichen $\angle \alpha = 23^0\ 8'\ 52''$ und JF = 92□ Fuß.

134) In einem rechtw. Dreiecke sind beide Catheten bL = 3476 Faden 2 Fuß 7 Zoll und aL = 854 Faden 3 Fuß 6 Zoll gegeben; man soll die übrigen Stücke berechnen.

135) In einem rechtw. Dreiecke ist die Hypotenuse cL = 10 Faden 4 Fuß 5 Zoll und der $\angle \beta = 80^0\ 59'\ 45''$ gegeben; man soll die übrigen Stücke des Dreiecks berechnen.

136) In einem rechtw. Dreicke ist eine Cathete bL = 10236 Faden 4 Fuß 8 Zoll und $\angle \beta = 48^0\ 50'\ 30''$ gegeben; man soll die übrigen Stücke des Dreiecks finden.

137) In einem gleichschenkligen Dreiecke ist die Grundlinie cL = 4 Fd. 6 Fuß und eine Seitenlinie aL = 12 Fd. 5 Fuß; die übrigen Stücke und den Inhalt des Dreiecks zu berechnen.

138) In einem gleichschenkligen Dreiecke ist eine Seitenlinie aL = 12376 Fuß 8 Zoll und der Winkel an der Spitze $\gamma = 150^0\ 27'\ 18''$; gesucht werden die übrigen Stücke und der Inhalt des Dreiecks.

139) In einem gleichschenkligen Dreiecke ist die Grundlinie cL = 38 Faden 2 Fuß 2 Zoll und ein anliegender Winkel $\alpha = 89^0\ 59'\ 50''$; gesucht werden die übrigen Stücke und der Inhalt des Dreiecks.

140) Aus einer Seite a = 1546,33 und zwei $\angle \beta = 62^0\ 43'\ 55''$ und $\angle \gamma = 53^0\ 22'\ 37''$ eines Dreiecks die übrigen Stücke und den Inhalt des Dreiecks zu berechnen.

141) Desgleichen $aL = 2789$ Zoll, $\angle \alpha = 24^\circ\, 18'\, 12''$, $\angle \beta = 36^\circ\, 14'\, 26''$.

142) Es sind zwei Seiten $aL = 325{,}54$ Fuß, $bL = 415{,}64$ Fuß eines Dreiecks und ein Gegenwinkel $\beta = 68^\circ\, 42'$ gegeben; man soll die übrigen Stücke und den Inhalt des Dreiecks berechnen.

143) Es sind zwei $\angle \alpha = 32^\circ\, 15'\, 20''$, $\angle \beta = 105^\circ\, 46'\, 32''$ und die Zwischenseite $cL = 328$ Faden 9 Fuß 7 Zoll eines Dreiecks gegeben; gesucht werden die übrigen Stücke und der Inhalt des Dreiecks.

144) Es sind zwei $\angle \alpha = 80^\circ\, 40'\, 10''$, $\angle \beta = 87^\circ\, 50'\, 36''$ und eine Gegenseite $aL = 1789$ Faden 8 Fuß eines Dreiecks gegeben; man berechne die übrigen Stücke und den Inhalt des Dreiecks.

145) Es sind zwei Seiten $a = 349{,}73$, $c = 230{,}23$ und ein Gegenwinkel $\alpha = 37^\circ\, 49'\, 25''$ eines Dreiecks gegeben; gesucht werden die übrigen Stücke und der Inhalt desselben.

146) Es sind zwei Seiten $b = 348{,}25$, $c = 256{,}96$ und der eingeschlossene $\angle \alpha = 56^\circ\, 27'$ eines Dreiecks gegeben; man soll die übrigen Stücke und den Inhalt desselben berechnen.

147) Es sind zwei Seiten $aL = 16$ Faden, $cL = 12$ Fd. und ein Gegenwinkel $\alpha = 50^\circ$ eines Dreiecks gegeben; man soll die übrigen Stücke und den Inhalt desselben berechnen.

148) Es sind drei Seiten $aL = 1415{,}7$ Fuß, $bL = 1389{,}9$ Fuß und $cL = 2627{,}54$ Fuß eines Dreiecks gegeben; man berechne die Winkel und den Inhalt des Dreiecks.

149) Desgleichen $aL = 323{,}4$ Zoll, $bL = 297{,}5$ Zoll und $cL = 300$ Zoll.

150) Die Seiten eines Dreiecks zu berechnen, von welchem $\angle \alpha = 36^\circ\, 52'$, $\angle \beta = 110^\circ\, 5'$ und der Flächeninhalt $J = 1476$ gegeben sind.

151) Die unbekannten Stücke eines Dreiecks zu finden, wenn dessen Grundlinie $cL = 87{,}75$ Fuß, der Gegenwinkel $\gamma = 73^\circ\, 20'$ und die Differenz der Basiswinkel $\beta - \alpha = 13^\circ\, 4'$ ist.

152) Desgleichen, wenn $cL = 117{,}3$ Fuß, $\angle \gamma = 92^\circ\, 18'$ und das Verhältniß der andern Seite $8 : 11$ ist.

153) Desgleichen, wenn $\angle \alpha = 49^\circ\ 17'\ 10''$, $\angle \beta = 95^\circ\ 36'\ 20''$, aL = 5 Faden 9 Zoll gegeben sind.

154) Desgleichen, wenn aL = 917 Faden 5 Fuß 9 Zoll, bL = 1289 Faden 5 Zoll und $\angle \alpha = 35^\circ\ 27'\ 16''$ gegeben sind.

155) Desgleichen, wenn bL = 9095 Fuß 5 Zoll, cL = 746985 Fuß und $\angle \alpha = 47^\circ\ 19'\ 41''$ gegeben sind.

156) Desgleichen, wenn aL = 150 Saschen, cL = 227 Saschen 2 Arschin 4 Werschock, $\angle \alpha = 40^\circ\ 40'\ 40''$ gegeben sind.

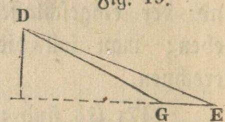
157) Aus der Länge einer senkrechten Stange AB = 9 Fuß und derjenigen ihres horizontalen Schattens AC = 11,7 Fuß die Sonnenhöhe, d. h. $\angle \gamma$, zu bestimmen.

158) Aus der Sonnenhöhe $\angle \gamma = 48^\circ\ 10'$ und der Länge des horizontalen Schattens AC = 201 Fuß die Höhe eines Thurmes AB zu berechnen.

159) Die Seite eines regulairen Siebenecks sei sL = 5,73 Arschin; wie groß ist der Radius des umschriebenen Kreises?

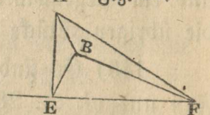
160) Der Gipfel D eines Berges erscheint in E unter dem Winkel $19^\circ\ 16'$, in G unter dem Winkel $20^\circ\ 42'$ und GE = 937 Fuß. Wie hoch ist der Berg?

Fig. 19.



161) Die Höhe eines Thurmes AB zu bestimmen, wenn die Standlinie EF = 844 Fuß, $\angle$ EFA = $34^\circ\ 16'$, $\angle$ AEF = $92^\circ\ 32'$ und $\angle$ AEB = $16^\circ\ 44'$ ist.

Fig. 20.



162) Wie groß ist die Seite eines regulairen Neunecks, wenn der Radius des umschriebenen Kreises rL = 5 Arschin sei?

163) Die Sehne eines Kreisbogens ist aL = 141 Faden 1 Fuß lang, der Durchmesser des Kreises dL = 1200 Faden. Wie lang ist der Kreisbogen?

164) Eine Linie BC auf dem Felde zu messen, welche nur an ihrem Endpunkte B zugänglich sei. Gegeben AB = 314 Fuß, $\angle \alpha = 41^\circ\ 10'$ und $\angle \beta = 63^\circ\ 50'$.

Fig. 21.

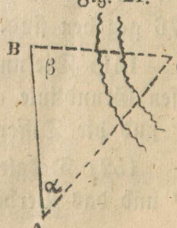
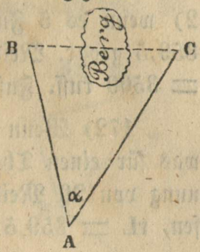
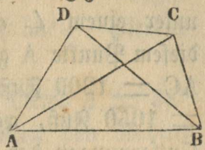


Fig. 22.



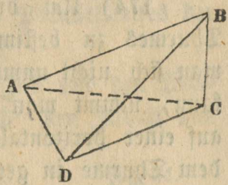
165) Desgleichen, wenn sie an beiden Endpunkten zugänglich, aber weder unmittelbar zu messen, noch zu übersehen ist. Geben AC = 1073 Fuß, AB = 1182 Fuß und $\angle \alpha = 45^0\ 3'$.

Fig. 23.



166) Desgleichen eine Linie DC, die an keinem ihrer Endpunkte zugänglich ist. Gegeben die Standlinie AB = 534 Fuß, $\angle$ ABC = $65^0\ 42'$, $\angle$ ABD = $38^0\ 16'$, $\angle$ BAD = $52^0\ 8'$, u. $\angle$ BAC = $29^0\ 4'$.

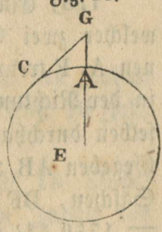
Fig. 24.



167) Desgleichen eine Linie AC, wenn die Standlinie BD dieselbe durchschneidet. Gegeben BD = 1038 Faden, $\angle$ DBA = $26^0\ 36'$, $\angle$ BDA = $85^0\ 7'$, $\angle$ DBC = $31^0\ 42'$ und $\angle$ BDC = $19^0\ 44'$.

168) Aus dem Centriwinkel $\alpha = 92^0\ 6'$ und dem Radius rL = 13,5 Fuß den Kreisabschnitt KF zu berechnen.

Fig. 25.



169) Die Weite des Gesichtskreises, d. h. den Bogen AC für den Gipfel G eines Berges zu bestimmen, welcher 5460 par. Fuß über der Meeresfläche liege, wenn der Erdradius 3267000 Toisen angenommen wird. (1 Toise = 6 par. Fuß.)

170) Die Seiten eines Vierecks ABCD sind: AB = 12 Fuß, BC = 10 Fuß, CD = 9 Fuß, DA = 8 Fuß, der $\angle \alpha = 85^0\ 30'$. Man berechne die andern Winkel, die Diagonalen und den Flächeninhalt des Vierecks.

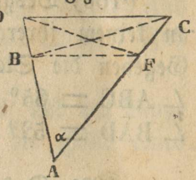
171) Wie weit muß man sich von einem Berge, der 5000 russ. Fuß hoch ist, entfernen, um ihn aus dem Horizont zu verlieren? 1) Wenn das Auge sich in der Erdfläche selbst befindet;

2) wenn es 5 Fuß darüber erhoben ist. (Der Erdradius = 859,5 geogr. Meilen, 15 geogr. Meilen = 104 Werst, 1 Werst = 3500 russ. Fuß.)

172) Wenn die Höhe des Aetna's 10000 par. Fuß beträgt, was für einen Theil desselben wird man noch aus einer Entfernung von 20 Meilen sehen können? (1 Meile = 3806,7 Toisen, rL = 859,5 Meilen.)

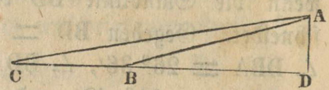
173) Die Linien BD, CF treffen in A unter einem $\angle\ \alpha = 60^0$ zusammen. Von diesem Punkte A gemessen ist AB = 800 Fuß, AC = 1200 Fuß, AD = 920 Fuß und AF = 1050 Fuß, welches sind die gegenseitigen Entfernungen der Punkte B, C, D, F?

Fig. 26.



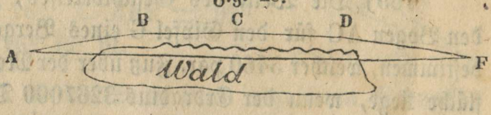
174) Um die Höhe eines Thurmes zu bestimmen, welchem man sich nicht unmittelbar nähern kann, nimmt man vor demselben auf einer horizontalen Ebene zwei Punkte B, C an, welche mit dem Thurme in gerader Linie liegen, und mißt die Entfernung BC = 791,8 Fuß, die Höhenwinkel ABD = $15^0\ 11'\ 48''$ und ACD = $8^0\ 2'\ 24''$; wie hoch ist der Thurm?

Fig. 27.



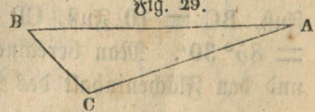
175) Ein Wald, welcher zwei Stationen A, F trennt, soll in der Richtung derselben durchhauen werden, d. h. wie groß ist der Winkel BAF? Gegeben AB = 518 Saschen, BC = 425 Saschen, CD = 368 Saschen, DF = 374 Saschen, $\angle$ ABC = $178^0\ 24'$, $\angle$ BCD = $175^0\ 11'$ und $\angle$ CDF = $173^\circ\ 34'$.

Fig. 28.



176) Wie groß ist die Entfernung AB eines in horizontaler Ebene gelegenen, unzugänglichen Punktes A von dem in derselben Ebene gelegenen Standpunkte B, wenn A sowohl von B als von dem zweiten Standpunkte C aus sichtbar, und durch wirkliche Messung BC = 726 Ellen, $\angle$ ABC = $39^0\ 14'\ 3''$, $\angle$ ACB =

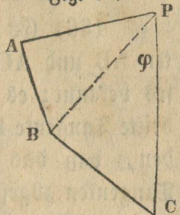
Fig. 29.



127° 34′ 18″ groß gefunden worden ist? und wie groß wird die Distanz AC sein?

177) Es soll die Entfernung eines Ortes B von dem Thurme P gemessen werden, ohne den Thurm von B aus sehen zu können.

Fig. 30.



Aufl. Man nehme zwei andere Punkte A und C, in welchen man P erblicken kann, und messe AB = 2 Werst 340 Saschen, BC = 3 Werst 145 Saschen, ∠ BAP = 76° 15′ 10″, ∠ BCP = 43° 20′ 12″, ∠ ABC = 169° 24′ 38″. Hieraus soll BP berechnet werden.

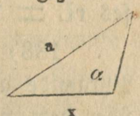
178) Aus der geographischen Breite eines Ortes β = 38° 14′ und dem Radius der Erde rL = 860 Meilen den Radius des Parallelkreises zu finden.

179) Wie viel beträgt der Umfang des Parallelkreises der Erdkugel unter dem 45sten Grade der Breite?

180) Aus der Höhe CD = 5 Fuß 2 Zoll und den Winkeln α = 59° 5′ 10″ und ∠ β = 45° 8′ 5″ den Inhalt und die Seiten des Dreiecks zu ermitteln.

181) Es soll von einem gegebenen ∠ α durch eine gegebene Linie aL ein Dreieck abgeschnitten werden, welches den bestimmten Inhalt JF hat. Gegeben ∠ α = 106° 44′, aL = 34 Fuß 8 Zoll, JF = 120□ Fuß 83□ Zoll.

Fig. 31.

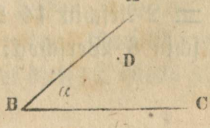


182) Aus der Sehne AB und dem Radius AC den Inhalt des Kreisausschnitts zu finden. Gegeben AB = 4 Fuß 10 Zoll, AC = 6 Fuß.

183) Aus dem Mittelpunktswinkel α = 49° 15′ 36,5″ und dem Radius rL = 9 Fuß eines Kreises den Inhalt des Kreisabschnitts zu finden.

184) Es ist die Sehne AB = 3 Arschin 9 Werschock und der Mittelpunktswinkel α = 41° 15′ gegeben; man soll den Inhalt des Abschnitts ermitteln.

Fig. 32.

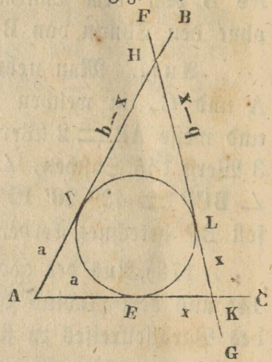


185) Es ist ∠ ABC = ∠ α = 40° und innerhalb dieses Winkels ein Punkt D gegeben; man soll auf dem Schenkel BC

den Mittelpunkt desjenigen Kreises finden, welcher den Schenkel AB berührt und dessen Peripherie durch D geht. Gegeben BD = aL = 2 Saschen 1 Arschin und DBC = $\angle\, \beta$ = 20° 15′.

186) Es sind die beiden Tangenten AB und AC eines gegebenen Kreises bekannt; es soll an diesen Kreis eine dritte Tangente FG dergestalt gelegt werden, daß das von den beiden erstern Tangenten abgeschnittene Stück derselben, nämlich HK, eine bestimmte Größe hat.

Fig. 33.



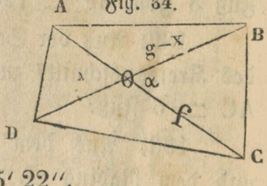
Aufl. Da die Tangenten AB u. AC gegeben, also AD und $\angle$ BAC bekannt sind, so hat man nur noch die Linie EK dergestalt zu bestimmen, daß die aus dem Endpunkte K dieser Linie nach dem gegebenen Kreise gezogene Tangente HK die bestimmte Größe hat. — Gegeben AD = aL = 14 Werschock, $\angle$ BAC = $\angle\, \alpha$ = 60°, HK = bL = 1 Arschin 14 Wersch.

187) Den Umfang und den Inhalt eines regelmäßigen Neunecks zu finden, wenn der Halbmesser des umschriebenen Kreises rL = 18 Fuß 6 Zoll ist.

188) Wie weit wird sich der Schatten einer 80 Fuß hohen Pyramide auf einer Ebene erstrecken, wenn die Sonne 25 Grad über dem Horizont steht?

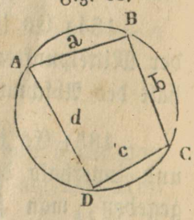
189) Den Inhalt eines jeden Vierecks aus seinen beiden Diagonalen und dem von denselben eingeschlossenen Winkel zu finden. Gegeben AC = fL = 6 Fuß 4 Zoll, BD = gL = 7 Fuß 1 Zoll und $\angle$ BOC = $\angle\, \alpha$ = 58° 15′ 22″.

Fig. 34.



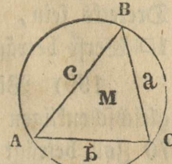
190) Den Inhalt eines im Kreise eingeschriebenen Vierecks aus seinen vier Seiten zu berechnen. Gegeben aL = 3 Arschin 10 Werschock, bL = 4 Arschin 7 Werschock, cL = 2 Arschin 14 Werschock und dL = 7 Arschin 8 Werschock.

Fig. 35.



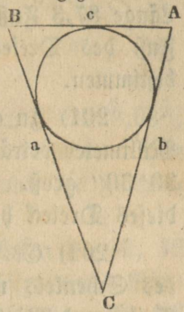
191) Den Halbmesser des um ein Dreieck beschriebenen Kreises aus seinen drei Seiten zu finden. Gegeben aL = 4 Faden 3 Fuß, bL = 3 Faden 2 Fuß 9 Zoll und cL = 6 Faden 5 Fuß.

Fig. 36.



192) Den Halbmesser des in ein Dreieck beschriebenen Kreises aus seinen drei Seiten zu finden. Gegeben aL = 10 Fuß 11 Zoll, bL = 9 Fuß 10 Zoll und cL = 8 Fuß 9 Zoll.

Fig. 37.



193) Wie groß werden die Seiten und Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks sein, wenn die Summe der Hypotenuse und der einen Kathete 9 Zoll, die Summe der Hypotenuse und der andern Kathete dagegen 8 Zoll beträgt?

194) In einem rechtw. Dreiecke sind die Hypotenuse und die eine Kathete zusammen 423,6068 Faden lang, dagegen ist 123,6068 Faden der Unterschied der Längen der Hypotenuse und der andern Kathete. Wie groß werden die Seiten und Winkel desselben Dreiecks sein?

195) Es soll ein rechtw. Dreieck gebildet werden, in welchem sich das aus der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse gefällte Perpendikel zu der einen Kathete wie 3 zu 4 verhält und die Hypotenuse 683,31 Zoll lang ist. Wie groß werden demnach die Katheten und die spitzen Winkel dieses Dreiecks sein?

196) Es ist der Umfang 10 Werschock und die Höhe 1 Werschock eines rechtw. Dreiecks gegeben. Man soll die Seiten und Winkel dieses Dreiecks berechnen.

197) Es ist die Summe 16 Fuß der beiden Katheten, sowie auch der Flächeninhalt 15□ Fuß eines rechtw. Dreiecks gegeben. Wie groß werden die Seiten und Winkel dieses Dreiecks sein?

198) Wie groß werden die Seiten und Winkel eines rechtw. Dreiecks sein, dessen Umfang 10 Werst und dessen Flächeninhalt 1□ Werst beträgt?

199) Wie groß werden die Schenkel und Winkel eines gleichschenkligen Dreiecks sein, dessen Grundlinie 36 Zoll und Höhe 70 Zoll beträgt?

200) Von einem gleichschenkligen Dreiecke kennt man die Länge 87,3 Fuß eines der beiden Schenkel und die Höhe 60,7 Fuß des Dreiecks. Man soll die Grundlinie und die Winkel bestimmen.

201) In einem gleichschenkligen Dreiecke, dessen Höhe 38643 Millimeter beträgt, ist jeder der beiden Winkel an der Basis $30^{0}\ 30'\ 30''$ groß. Welche Basis und welche Schenkel wird demnach dieses Dreieck haben?

202) Es ist die Höhe 36 Fuß und die Summe 105 Fuß des Schenkels und der Grundlinie bekannt. Es sollen die drei Seiten und Winkel dieses gleichschenkligen Dreiecks berechnet werden.

203) Wie groß werden in einem gleichschenkligen Dreieck die drei Seiten und Winkel sein, wenn der Umfang 1 Arschin und die Höhe $\frac{1}{4}$ Arschin dieses Dreiecks ist?

204) In einem dreieckformigen Hofraume betragen die drei Winkel $\angle \alpha = 55^{0}$, $\angle \beta = 60^{0}$ und $\angle \gamma = 65^{0}$; die eine Mauer ist aL $= 37\frac{1}{8}$ Fuß lang. Wie viel □-Fuß Flächenraum enthält dieser Hof?

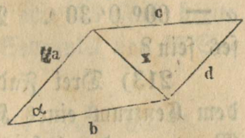
205) In einem Rhomboid sind zwei anliegende Seiten 683 und 700 Toisen lang, der von ihnen eingeschlossene Winkel aber ist $60^{0}\ 50'\ 40''$ groß. Man soll, wenn die Seite von 700 Toisen als Grundlinie angesehen wird, nicht nur den Flächeninhalt desselben, sondern auch dessen Höhe berechnen.

206) Von einem Trapez kennt man die Basis aL $= 0,7$ Fuß, die an derselben liegenden Winkel $\alpha = 30^{0}\ 14'\ 16''$ und $\angle \beta = 40^{0}\ 40'\ 38''$, sowie die Höhe des Trapezes, die 0,378 Fuß beträgt. Man soll die Länge der der Basis parallel liegenden Seiten, sowie den Flächeninhalt dieses Trapezes angeben.

207) In einem Viereck sind zwei anliegende Seiten aL $=$ 1,67 Fuß und bL $= 2,08$ Fuß, ferner der von ihnen einge-

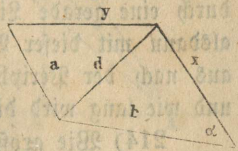
schlossene Winkel $\alpha = 36^0\ 4\frac{3}{4}'$ gegeben, die andern beiden Seiten sind cL = 3,74 Fuß und dL = 2,5 Fuß. Man verlangt den Flächeninhalt dieses Vierecks.

Fig. 38.



208) Von einem Viereck kennt man zwei anliegende Seiten, welche aL = $8\frac{1}{2}$ Faden und bL = $10\frac{3}{4}$ Faden lang sind, ferner die aus dem von diesen beiden Seiten gebildeten Winkel ausgehende Diagonale dL = $15\frac{5}{8}$ Faden, endlich den dieser Diagonale gegenüberliegenden Winkel $\alpha = 45^0\ 0'\ 8{,}03''$, der an der $10\frac{3}{4}$ Faden langen Vierecksseite sich befindet. Wie groß werden demnach die beiden andern Seiten und der Flächeninhalt des Vierecks sein?

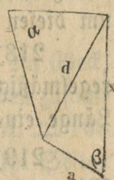
Fig. 39.



209) Man kennt die vier Seiten von 10 Ellen 3 Zoll, 12 Ellen 7 Zoll, 13 Ellen und 15 Ellen 5 Zoll Länge eines Vierecks, sowie dessen eine Diagonale von 14 Ellen Länge. Es soll der Flächeninhalt dieses Vierecks bestimmt werden.

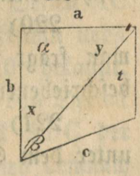
210) Es ist die Diagonale dL = 10 Fuß eines Vierecks gegeben, in welchem die der Diagonale gegenüberliegenden Winkel $\alpha = 40^0\ 0'\ 10''$ und $\angle \beta = 50^0\ 0'\ 40''$ betragen. Der letztere Winkel liegt an derjenigen Vierecksseite, welche aL = $7\frac{1}{2}$ Fuß lang ist. Wie viel Fuß werden demnach die Längen der übrigen Seiten des Vierecks betragen?

Fig. 40.



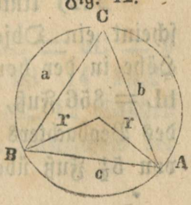
211) Von einem Viereck kennt man die 3 auf einander folgenden Seiten aL = 452 Millimetern, bL = 610 Mllm. und cL = 411 Mllm., sowie die von ihnen gebildeten Winkel $\alpha = 92^0\ 5'$ und $\angle \beta = 68^0\ 53'$. Wie groß werden die beiden übrigen Winkel und die vierte Seite dieses Vierecks sein?

Fig. 41.



212) Es sind zwei an einander stoßende Sehnen in einem Kreise gegeben, nämlich aL = 10,6 Zoll und bL = 11,9 Zoll, der von diesen Sehnen gebildete Winkel beträgt

Fig. 42.



$\alpha = 60^\circ\ 0'\ 30''$. Wie groß wird der Halbmesser dieses Kreises sein?

213) Drei Faden ist die Entfernung eines Punktes von dem Centrum eines Kreises, dessen Halbmesser $\frac{1}{2}$ Faden beträgt. Wenn nun der besagte Punkt mit dem Mittelpunkte des Kreises durch eine gerade Linie verbunden wird; welchen Winkel wird alsdann mit dieser Verbindungslinie eine vom besagten Punkte aus nach der Peripherie des Kreises gezogene Tangente bilden? und wie lang wird diese Tangente selbst sein?

214) Wie groß wird der Centriwinkel sein, den zwei nach den Endpunkten einer 6,3 Zoll langen Sehne gezogene Radien rL = 4,45 Zoll eines gegebenen Kreises unter sich bilden?

215) Wie groß werden die Seiten eines regelmäßigen, in und um den Kreis von 9 Zoll Halbmesser gelegten Siebenecks sein?

216) Wie groß werden die Halbmesser der in und um ein regelmäßiges Siebeneck beschriebenen Kreise sein, sobald die Länge der Seite des Siebenecks 0,84376 Fuß beträgt?

217) Ein Kreis hat einen Durchmesser von $7\frac{3}{4}$ Arschin; wie groß werden demnach die Seiten eines regelmäßigen, in und um diesen Kreis zu construirenden Achtecks sein?

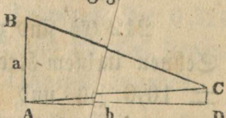
218) Wie groß werden die Durchmesser der in und um ein regelmäßiges Achteck beschriebenen Kreise sein müssen, wenn die Länge einer Seite des Achtecks $8\frac{2}{7}$ Fuß beträgt?

219) Der Umfang eines Kreises ist 876 Decimeter groß. Wie groß werden die Flächenräume des in und um diesen Kreis beschriebenen regelmäßigen Fünfecks sein?

220) Der Durchmesser eines Kreises beträgt 3 Fuß 5 Zoll; man fragt nach dem Flächeninhalt des, in und um diesen Kreis beschriebenen, regelmäßigen Sechsecks.

221) Ein $5\frac{1}{2}$ Fuß großer Mensch erscheint einem andern unter dem Sehwinkel von $2^\circ\ 16'\ 35''$ in welcher Entfernung?

Fig. 43.



222) Unter welchem Sehwinkel erscheint ein Object von aL = 186 Fuß Höhe in der horizontalen Entfernung von bL = 856 Fuß, vorausgesetzt, das Auge des Beobachters befindet sich in einer Höhe von $5\frac{1}{2}$ Fuß über dem Boden?

223) In welcher Entfernung scheint eine 35 Fuß breite Allee zusammen zu laufen? (Unter einem Sehwinkel von 40 Sekunden sind Gegenstände noch sichtbar.)

224) Ein 50 Fuß im Durchmesser haltender Luftballon erscheint in einer Richtung, die mit dem Horizonte einen Winkel von ungefähr 12° bildet, nur noch als Punkt. Wie weit ist derselbe muthmaßlich von dem Beobachter entfernt, und wie hoch schwebt er über der Erde?

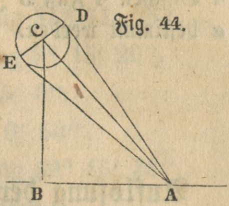


Fig. 44.

225) In einem beliebigen Dreiecke sind die $\angle \beta = 56^\circ$ und $\angle \gamma = 54^\circ$, sowie die Summe zweier Seiten $(a+c)L = 634$ Centimeter gegeben; gesucht werden die drei Seiten.

226) Die Summe der drei Seiten eines Dreiecks, in welchem die Winkel α, β, γ resp. $49^\circ\ 50'$, $56^\circ\ 40'$ und $73^\circ\ 30'$ betragen, ist $sL = 6{,}8437$ Meter. Wie groß werden die Seiten sein?

227) Wenn in einem Dreieck ABC die auf a, b, c resp. gefällten Höhen $h = 4$, $h' = 5$ und $h'' = 6$ gegeben sind; die Winkel und Seiten des Dreiecks zu bestimmen.

228) Zwei regelmäßige Polygone, ein 36eck und ein 60eck, verhalten sich zu einander wie $m : n$ $(5 : 4)$ und enthalten zusammen soviel Flächenraum als ein Kreis, dessen Umfang $pL = 108$ Saschen bekannt ist. Wie groß werden demnach die resp. Seiten xL und yL dieser beiden Polygone sein?

229) In einem ebenen Dreiecke ABC sind die Seiten AC = 15 Saschen 2 Arschin und BC = 10 Saschen 1 Arschin nebst dem von ihnen eingeschlossenen Winkel $\gamma = 42^\circ\ 34'\ 10''$ bekannt. Man soll aus der Spitze A eine Gerade AD so durch das Dreieck ABC ziehen, daß das hierdurch entstandene Dreieck ADC der mte (3te) Theil vom Dreieck ABC ist. Wie groß wird demnach der Winkel DAC angenommen werden müssen.

230) Wenn im Dreiecke ABC die Basis $BC = aL = 6$ Saschen 4 Fuß, der Winkel $BAC = \angle \alpha = 58^\circ\ 14'\ 15{,}2''$ und die Summe der Seiten AB und $AC = sL = 12$ Saschen 5 Fuß bekannt ist; wie groß wird alsdann der Unterschied der beiden Winkel β und γ sein?

231) In dem ebenen Dreiecke ABC ist die Seite BC $=$ aL $=$ 5 Saschen 2 Fuß 10 Zoll, der Winkel ACB $= \angle \gamma =$ $98^0\ 14'\ 12{,}6''$ und die Differenz der Seiten AC und AB dL $=$ 4 Saschen 4 Fuß 3 Zoll gegeben. Es soll der Winkel BAC $=$ α bestimmt werden.

Auflösung der Aufgaben aus der Goniometrie.

1) — secante α.	8) cos α.
2) — cosec α.	9) — tang α.
3) — cosec α.	10) — cotg α.
4) — sec α.	11) sec α.
5) cosec α.	12) — cosec α.
6) — sec α.	13) sec α.
7) — sin α.	14) — cosec α.

15) cos 20^0 oder sin 70^0.
16) — sin 20^0 $=$ — cos 70^0.
17) cos 42^0.
18) — sin $18^0\ 12'\ 42''$ $=$ — cos $71^0\ 47'\ 18''$.
19) cos $66^0\ 15'\ 46''$ oder sin $23^0\ 44'\ 14''$.
20) — cos $18^0\ 12'\ 42''$ oder — sin $71^0\ 47'\ 18''$.
21) cos $34^0\ 32'\ 14''$ oder sin $55^0\ 27'\ 46''$.
22) — cos $39^0\ 10'\ 50''$ oder — sin $50^0\ 49'\ 10''$.
23) — sin $61^0\ 15'\ 36''$ oder — cos $28^0\ 44'\ 24''$.
24) — sin $34^0\ 32'\ 14''$ oder — cos $55^0\ 27'\ 46''$.
25) — cos $88^0\ 24'\ 33''$ oder — sin $1^0\ 35'\ 27''$.
26) cos $40^0\ 15'\ 46''$ oder sin $49^0\ 44'\ 14''$.
27) cos $15^0\ 18'\ 10''$.
28) — sin $30^0\ 40'\ 20''$ oder — cos $59^0\ 19'\ 40''$.
29) — sin $40^0\ 15'\ 46''$ oder — cos $49^0\ 44'\ 14''$.
30) sin $39^0\ 10'\ 50''$ oder cos $50^0\ 49'\ 10''$.

31) $-\cos 61^0\ 15'\ 36''$ oder $-\sin 28^0\ 44'\ 24''$.

32) $-\operatorname{cotg} 32^0\ 14'$ oder $-\operatorname{tang} 57^0\ 46'$.

33) $\operatorname{tang} 25^0\ 18'\ 24''$ oder $\operatorname{cotg} 64^0\ 41'\ 36''$.

34) $-\operatorname{cotg} 52^0\ 48'\ 37''$ oder $-\operatorname{tang} 37^0\ 11'\ 23''$.

35) $-\operatorname{cotg} 81^0\ 44'\ 40''$ oder $-\operatorname{tang} 8^0\ 15'\ 20''$.

36) $\operatorname{cotg} 19^0\ 4'\ 54''$ oder $\operatorname{tang} 70^0\ 55'\ 6''$.

37) $\operatorname{cotg} 75^0\ 59'\ 10''$ oder $\operatorname{tang} 14^0\ 0'\ 50''$.

38) $-\operatorname{tang} 30^0\ 14'\ 22''$ oder $-\operatorname{cotg} 59^0\ 45'\ 38''$.

39) bis 52) findet man bei den Aufgaben.

53) ∞.
54) 1.
55) —1.
56) ∞.
57) ∞.
58) —1.
59) 1.
60) ∞.
61) 1,73205.
62) 0,57735.
63) 0,32492.
64) 0,57735.
65) 1,73205.
66) 3,07768.
67) 0,96592.
68) 0,98768.
69) 0,99452.
70) 0,99863.
71) 0,26794.
72) 0,15838.
73) 0,10510.
74) 0,052407.
75) 3,73205.
76) 6,31375.
77) 9,51436.
78) 19,08113.
79) 9,7713379—10.
80) 9,9561922—10.
81) 10,3176782—10.
82) 10,5940757—10.

83) $\log \sin 42^0\ 30'\ 37'' = 9{,}8297683$.

84) $\log \cos 27^0\ 16'\ 14'' = 9{,}9488298$.

85) $\log - \cos 34^0\ 36'\ 4'' = 9{,}9154660n$.

86) $\log - \operatorname{cotg} 65^0\ 7'\ 46'' = 9{,}6661061n$.

87) $\log - \sin 23^0\ 15' = 9{,}5963154n$.

88) 9,8507443n—10.
89) 9,9008881n—10.
90) 9,8747463n.
91) 9,7816559n.
92) 9,9498620n.
93) 10,1424641.

94) $x = 25^\circ\ 48'\ 55''$ oder $154^\circ\ 11'\ 5''$.
95) $x = 66^\circ\ 57'\ 1''$ oder $293^\circ\ 2'\ 59''$.
96) $x = 36^\circ\ 4'\ 50''$ oder $216^\circ\ 4'\ 50''$.
97) $x = 36^\circ\ 26'\ 18''$ oder $216^\circ\ 26'\ 18''$.
98) $x = 212^\circ\ 43'\ 18''$ oder $327^\circ\ 16'\ 41''$.
99) $y = 165^\circ\ 22'\ 55{,}8''$ oder $345^\circ\ 22'\ 55{,}8''$.
100) $x = 135^\circ\ 49'\ 13''$ oder $315^\circ\ 49'\ 13''$.
101) $x = 44^\circ\ 37'\ 32''$ oder $224^\circ\ 37'\ 32''$.
102) $x = 103^\circ\ 12'\ 58''$ oder $256^\circ\ 47'\ 2''$.
103) $x = 3^\circ\ 33'\ 38''$ oder $176^\circ\ 26'\ 22''$.
104) $x = 48^\circ\ 35'\ 25''$ oder $131^\circ\ 24'\ 35''$.
105) $x = 48^\circ\ 11'\ 22''$ oder $311^\circ\ 48'\ 38''$.
106) $x = 89^\circ\ 53'\ 11''$ oder $269^\circ\ 53'\ 11''$.
107) $x = 203^\circ\ 34'\ 41''$ oder $336^\circ\ 25'\ 19''$.
108) $x = 179^\circ\ 57'\ 21''$ oder $359^\circ\ 57'\ 21''$.
109) $x = 115^\circ\ 22'\ 44''$ oder $244^\circ\ 37'\ 16''$.
110) $x = 15^\circ\ 4'\ 12''$.
111) $y = 3^\circ\ 55'\ 25{,}7''$ oder $176^\circ\ 4'\ 34{,}3''$.
112) $x = 92^\circ\ 1'\ 13''$ oder $272^\circ\ 1'\ 13''$.
113) $x = 123^\circ\ 5'\ 35''$ oder $236^\circ\ 54'\ 25''$.
114) $x = 69^\circ\ 38'\ 9''$ oder $110^\circ\ 21'\ 51''$.
115) $\cos\alpha = 0{,}516\ldots$, $\tang\alpha = 1{,}658\ldots$,
$\cotg\alpha = 0{,}602\ldots$, $\sec\alpha = 1{,}937\ldots$,
$\operatorname{cosec}\alpha = 1{,}168\ldots$, $\angle\alpha = 58^\circ\ 52'\ 13''$.

116) $\sin\alpha = 0{,}913428$, $\tang\alpha = 2{,}24429$,
$\cotg\alpha = 0{,}44557$, $\sec\alpha = 2{,}457002$,
$\operatorname{cosec}\alpha = 1{,}094777$, $\angle\alpha = 65^\circ\ 59'\ 11''$.

117) $\cotg\alpha = 0{,}427\ldots$, $\cos\alpha = 0{,}3931\ldots$,
$\sin\alpha = 0{,}9194\ldots$, $\sec\alpha = 2{,}54388\ldots$,
$\operatorname{cosec}\alpha = 1{,}08766\ldots$, $\angle\alpha = 66^\circ\ 51'\ 37''$.

118) $\cos x = 0{,}699854$, $\cotg x = 0{,}979803$,
$\tang x = 1{,}02061$, $\sec x = 14{,}2886$,
$\operatorname{cosec} x = 14{,}0001$, $\angle x = 45^\circ\ 35'\ 4''$.

119) $x = -10{,}17796$.

120) $xL = 368{,}659$ Fuß.

121) $x = 148689617$.

Auflösung der Aufgaben aus der ebenen Trigonometrie.

122) $aL = 192{,}07$ Fuß, $bL = 130{,}74$ Fuß,
$\angle \alpha = 55^\circ\ 45'\ 28''$, $JF = 12556{,}2\square$ Fuß.

123) $aL = 157{,}106$ Fuß, $bL = 39{,}517$ Fuß,
$\angle \alpha = 75^\circ\ 52'\ 52''$, $JF = 3109{,}58\square$ Fuß.

124) $\angle \alpha = 33^\circ\ 0'\ 40''$, $\angle \beta = 56^\circ\ 59'\ 20''$,
$bL = 178{,}74$ Fuß, $JF = 10379{,}02\square$ Fuß.

125) $\angle \alpha = 36^\circ\ 42'\ 58''$, $\angle \beta = 53^\circ\ 17'\ 2''$,
$bL = 41{,}81$ Fuß, $JF = 652{,}174\square$ Fuß.

126) $\angle \alpha = 47^\circ\ 15'\ 45''$, $bL = 291{,}48$ Fuß,
$cL = 429{,}506$ Fuß, $JF = 45975{,}2\square$ Fuß.

127) $\angle \alpha = 22^\circ\ 57'\ 25''$, $b = 1854{,}01$,
$c = 2013{,}48$, $J = 728017{,}1$.

128) $bL = 106{,}84$ Fuß, $cL = 109{,}31$ Fuß,
$\angle \beta = 77^\circ\ 46'\ 46''$, $JF = 1236{,}15\square$ Fuß.

129) $bL = 44{,}6219$ Fuß, $cL = 46{,}2435$ Fuß,
$\angle \beta = 74^\circ\ 46'\ 49''$, $JF = 270{,}85\square$ Fuß.

130) $\angle \alpha = 74^\circ\ 56'\ 27''$, $\angle \beta = 15^\circ\ 3'\ 33''$,
$cL = 71{,}58$ Fuß, $JF = 642{,}909\square$ Fuß.

131) $\angle \alpha = 48^\circ\ 16'\ 13''$, $\angle \beta = 41^\circ\ 43'\ 47''$,
$c = 24{,}78$, $J = 152{,}625$.

132) $aL = 7{,}386$ Fuß, $bL = 31{,}407$ Fuß,
$cL = 32{,}264$ Fuß, $\angle \beta = 76^\circ\ 45'\ 55''$.

133) $aL = 8{,}86$ Fuß, $bL = 20{,}74$ Fuß,
$cL = 52{,}77$ Fuß, $\angle \beta = 66^\circ\ 51'\ 8''$.

134) $cL = 3579$ Faden 5 Fuß 11 Zoll,
$\angle \alpha = 13^\circ\ 48'\ 34''$, $\angle \beta = 76^\circ\ 11'\ 26''$,
$JF = 14\square$ Faden $24\square$ Fuß $132{,}4\square$ Zoll.

135) $\angle \alpha = 9^\circ\ 0'\ 15''$, aL = 1 Faden 4 Fuß 7,7 Zoll, bL = 10 Faden 3 Fuß 5,99 Zoll, JF = 8□ Faden 36□ Fuß 3,3□ Zoll.

136) $\angle \alpha = 41^\circ\ 9'\ 30''$, cL = 13596 Faden 3 Fuß, aL = 8948 Faden 2 Fuß 8 Zoll, JF = 45800799□ Faden 46□ Fuß 86□ Zoll.

137) $\angle \alpha = \angle \beta = 78^\circ\ 59'\ 17{,}5''$, $\angle \gamma = 22^\circ\ 1'\ 25''$, JF = 30□ Faden 15□ Fuß 20□ Zoll.

138) $\angle \alpha = \angle \beta = 14^\circ\ 46'\ 21''$, cL = 23934 Fuß 6,1 Zoll, JF = 377675173□ Fuß 88□ Zoll.

139) aL = bL = 395095 Faden 1 Fuß 8 Zoll, $\angle \gamma = 0^\circ\ 0'\ 20''$, JF = 7567954 □ Faden 30 □ Fuß 60 □ Zoll.

140) $\angle \alpha = 63^\circ\ 53'\ 28''$, b = 1530,681, c = 1382,077, J = 949826,4.

141) bL = 4006,13 Zoll, cL = 5900,55 Zoll, $\angle \gamma = 119^\circ\ 27'\ 22''$, JF = 4864388 □ Zoll.

142) $\angle \alpha = 46^\circ\ 51'\ 48''$, $\angle \gamma = 64^\circ\ 26'\ 12''$, cL = 402,443 Fuß, JF = 610310 □ Fuß.

143) aL = 262 Faden 6 Fuß 0,43 Zoll, bL = 473 Faden 6 Fuß 10,3 Zoll, $\angle \gamma = 41^\circ\ 58'\ 8''$, JF = 41657 □ Faden 11 □ Fuß 24 □ Zoll.

144) cL = 361 Faden 2 Fuß 2 Zoll, bL = 1812 Faden 6 Fuß 0,24 Zoll, $\angle \gamma = 11^\circ\ 29'\ 14''$, JF = 323147 □ Faden 29 □ Fuß.

145) $\angle \beta = 118^\circ\ 22'\ 1''$, $\angle \gamma = 23^\circ\ 48'\ 33''$ b = 501,823, J = 35424,8.

146) a = 297,313, $\angle \beta = 77^\circ\ 28'\ 17''$, $\angle \gamma = 46^\circ\ 4'\ 43''$, J = 37289,2.

147) bL = 20,809 Faden, $\angle \gamma = 35^\circ\ 4'\ 1''$, $\angle \beta = 94^\circ\ 55'\ 59''$, JF = 95,6424 □ Faden.

148) $\angle \alpha = 20^\circ\ 43'\ 15''$, $\angle \beta = 20^\circ\ 19'\ 34''$, $\angle \gamma = 138^\circ\ 57'\ 11''$, JF = 646065,6 □ Fuß.

149) $JF = 282 \square$ Fuß $10{,}5 \square$ Zoll, $\angle \alpha = 65° \; 32' \; 12''$,
$\angle \beta = 56° \; 51' \; 33''$, $\angle \gamma = 57° \; 36' \; 15''$.

150) $b = 65{,}0902$, $c = 37{,}7965$, $a = 41{,}5794$.

151) $bL = 79{,}219$ Fuß, $aL = 66{,}772$ Fuß,
$JF = 2533{,}715 \square$ Fuß,
$\angle \alpha = 46° \; 48'$ und $\angle \beta = 59° \; 52'$.

152) $aL = 67{,}712$ Fuß, $bL = 93{,}106$ Fuß,
$\angle \alpha = 35° \; 13' \; 30''$, $\angle \beta = 52° \; 28' \; 34''$.

153) $bL = 6$ Faden 4 Fuß 11,27 Zoll,
$cL = 3$ Faden 6 Fuß 1,5 Zoll,
$JF = 9 \square$ Faden $41 \square$ Fuß $79{,}8 \square$ Zoll,
$\angle \gamma = 35° \; 6' \; 30''$.

154) $\angle \beta = 54° \; 33' \; 18{,}7''$, $\angle \gamma = 92° \; 59' \; 25{,}3''$,
$cL = 1580$ Faden 1 Fuß.

155) $\angle \gamma = 78° \; 53' \; 28{,}1''$, $\angle \beta = 53° \; 46' \; 50{,}9''$,
$aL = 8289$ Fuß 1,8 Zoll.

156) $\angle \gamma = 81° \; 45' \; 6{,}8''$, $\angle \beta = 57° \; 34' \; 13{,}2''$,
$bL = 194$ Saschen 11,6 Werschock.

157) $\angle \gamma = 37° \; 34' \; 6''$.

158) $AB = b \tan \gamma \,.\, L = 224$ Fuß 6,5 Zoll.

159) $r = \dfrac{s}{2 \sin 15° \; 42' \; 51{,}4''}$; $rL = 6{,}60315$ Arschin.

160) Die Höhe des Berges $= 4369$ Fuß.

161) $AB = \dfrac{EF \sin EFA \,.\, \sin AEB}{\sin EAF} = 170{,}87$ Fuß.

162) $a = 10 \sin 20°$, $aL = 3$ Arschin 6,7 Werschock.

163) Den Mittelpunktswinkel x des Kreisbogens berechnet man zuerst, $\sin x = \dfrac{a}{d}$, $x = 55° \; 25' \; 11''$; dann ist der Kreisbogen $bL = \dfrac{r \, x \, \pi}{60} \,.\, L = 165$ Fd. 5 Fß. 8 Zoll.

164) $\angle \gamma = 75°$, $BC = \dfrac{AB \sin \alpha}{\sin \gamma} = 213{,}982$ Fuß.

165) $\angle \gamma = 74° \; 7' \; 22{,}7''$, $\angle \beta = 60° \; 49' \; 37{,}3''$,
$BC = 869{,}708$ Fuß.

166) AD = 330,72 Fuß, AC = 488,37 Fuß,
$\angle$ DAC = 23° 4′, $\angle$ ADC = 121° 52′ 44″,
$\angle$ ACD = 35° 3′ 16″.

167) AD = 500,28, DC = 697,59, AB = 1113,26,
CB = 450,33, AC = 956,97.

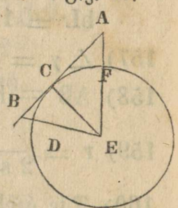
168) $K = r^2\left(\frac{\alpha\pi}{360} - \frac{\sin\alpha}{2}\right) = 55{,}1108;$
KF = 55,1108 □ Fuß.

169) Der Centriwinkel des Bogens AC ist = 1° 21′ 8″.
Der Bogen = 77103,6 Toisen = 142,3 Werst. (1 Werst = 541,5 Toisen.)

170) $\angle\ \beta$ = 75° 20′ 34″, $\angle\ \gamma$ = 93° 46′ 26″,
$\angle\ \delta$ = 105° 23′,
die Diagonalen 13,8873 Fuß und 13,537 Fuß.
JF = 92,754 □ Fuß.

171) (Fig. zu 169.) 1) Der Centriwinkel des Bogens AC = 1° 15′ 16″. Der Bogen = 130 Werst 1651,3 Fuß.

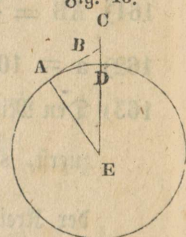
Fig. 45.



1) $\cos AEC = \frac{CE}{AE}$, $\sin \frac{1}{2} CEB = \sqrt{\frac{BD}{2\,BE}}$. Der Centriwinkel des Bogens DF ist = 1° 17′ 38″. Der Bogen = 134 Werst 2010,2 Fuß.

172) AD = 20 Meilen
$\angle$ AED = $\angle\ \alpha$ = 1° 19′ 59,6″
$CB = \left(h - \frac{2\,r\,\sin^2\frac{1}{2}\alpha}{\cos\alpha}\right)L =$
10000 Fuß — 5311,42 Fuß = 4688,58 Fuß.

Fig. 46.



173) BF = 950 Fuß, BC = 1058 Fuß, DF = 991 Fuß,
DC = 1087,4 Fuß.

174) $AD = \frac{CB \sin\gamma \sin\beta}{\sin\alpha} = 232{,}6$ Fuß.

175) $\angle$ BAC $= 0^0\ 43'\ 16''$, $\angle$ CAD $= 1^0\ 35'\ 54''$,
$\angle$ DAF $= 2^0\ 20'\ 2''$, addirt, giebt
$\angle$ BAF $= 4^0\ 39'\ 12''$.

176) AB $= 2521{,}023$ Ellen, AC $= 2011{,}79$ Ellen.

177) $\angle\ \varphi = 32^0\ 36'\ 2''$,
BP $= 4$ Werst 95 Saschen 2 Fuß.

178) xL $= 675{,}527$ Meilen.

179) xL $= 3818{,}3$ Meilen.

180) cL $= 8$ Fuß 2,8 Zoll, bL $= 6$ Fuß 0,2 Zoll,
aL $= 7$ Fuß 3,4 Zoll, JF $= 21\square$ Fuß $39{,}91\square$ Zoll.

181) $x + y = \sqrt{a^2 + 4 J \cot g \frac{1}{2}\alpha}$, $x - y = \sqrt{a^2 - 4 J \tan g \frac{1}{2}\alpha}$,
xL $= 31$ Fuß 6,12 Zoll, yL $= 7$ Fuß 11,9 Zoll.

182) $\angle\ \alpha = 47^0\ 30'\ 14''$, xF $= 14\square$ Fuß $133{,}02\square$ Zoll.

183) xF $= 4\square$ Fuß $19{,}278\square$ Zoll.

184) xF $= 198{,}359\square$ Werschock.

185) Die Entfernung des Mittelpunktes des gesuchten Kreises sei EB $=$ xL und der Radius ED $=$ rL, der Berührungspunkt der Tangente in BA sei G; so ist ED $=$ EG $= x \sin\alpha$ und $x^2 \sin^2\alpha = a^2 + x^2 - 2ax\cos\beta$. Hieraus findet man: $x = \dfrac{a\left(\cos\beta \pm \sqrt{2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}\right)}{\cos^2\alpha}$
xL $= 5$ Saschen 1,14 Arschin oder 2 Saschen 0,24 A.

186) $b^2 = (a+b-x)^2 + (a+x)^2 - 2(a+x)(a+b-x)\cos\alpha$

$$x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - (a^2 + ab)\tan g^2 \tfrac{1}{2}\alpha}$$

xL $= 19{,}43$ Werschock oder $10{,}57$ Werschock.

187) UL $= 113$ Fuß 10,71 Zoll, JF $= 990\square$ Fuß $67{,}4\square$ Zoll.

188) xL $= 171$ Fuß 6 Zoll.

189) $\triangle\ ABC = \dfrac{f(g-x)\sin\alpha}{2} \cdot F$,

$\triangle\ ADC = \dfrac{fx\sin\alpha}{2} \cdot F$,

$ABCD = \dfrac{fg\sin\alpha}{2} \cdot F = 19\square$ Fuß $10{,}81\square$ Zoll.

190) $\triangle ABC = \frac{1}{2} a d \sin A$
$\triangle ADC = \frac{1}{2} b c \sin(180^0 - A)$

$$ABCD = \left(\frac{ad + bc}{2}\right) \sin A$$
$$s = a + b + c + d$$
$$\sin A = \frac{\sqrt{(s-2a)(s-2b)(s-2c)(s-2d)}}{2(ad + bc}$$
$$ABCD = \sqrt{(\tfrac{1}{2}s - a)(\tfrac{1}{2}s - b)(\tfrac{1}{2}s - c)(\tfrac{1}{2}s - d)}\ .\ F$$
= 17□ Arschin 19,61□ Werschock.

191) $r = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{a b c}{4\sqrt{\frac{1}{2}s(\frac{1}{2}s - a)(\frac{1}{2}s - b)(\frac{1}{2}s - c)}}$
rL = 3 Faden 5 Fuß 6,52 Zoll.

192) $\triangle BMC = \frac{ar}{2}$; $\triangle ABC = \frac{(a + b + c) r}{2}$
$$r = \frac{2\sqrt{\frac{1}{2}s(\frac{1}{2}s - a)(\frac{1}{2}s - b)(\frac{1}{2}s - c)}}{a + b + c}$$
rL = 33,226 Zoll = 2 Fuß 9,226 Zoll.

193) xL = 5 Zoll (Hypotenuse), yL = 4 Zoll (Kathete), zL = 3 Zoll (Hathete), $\angle \alpha$ 36° 52′ 11,64″, $\angle \beta$ = 53° 7′ 48,36″.

194) xL = 223 Faden 4 Fuß 2,9 Zoll (Hypotenuse), yL = 200 Faden (Kathete), zL = 100 Fad. (Kathete), $\angle \alpha$ = 26° 33′ 53,3″, $\angle \beta$ = 63° 26′ 6,7″.

195) $y = \frac{h\sqrt{7}}{4}$, yL = 451,96 Zoll,

$z = \frac{3h}{4}$, zL = 512,48 Zoll.

$\angle \alpha$ = 48° 35′ 25″, $\angle \beta$ = 41° 24′ 35″.

196) Hypotenuse $x = \frac{(u-h)^2 + h^2}{2(u-h)}$, xL = $4\frac{5}{9}$ Werschock,

$z = \frac{(u-h)^2 - h^2}{2(u-h)}$, zL = $4\frac{4}{9}$ Werschock.

$\cot g\, \alpha = \frac{(u-h)^2 - h^2}{2(u-h)h}$, α = 12° 40′ 49″.

197) $y = \frac{a + \sqrt{a^2 - 8b}}{2}$, yL = 13,83 Fuß,

$x = \frac{a - \sqrt{a^2 - 8b}}{2}$, $xL = 2{,}17$ Fuß,

$z = \sqrt{a^2 - 4b}$, $zL = 14$ Fuß,

$\angle \alpha = 8^0\ 55'\ 0{,}4''$.

198) $y = \frac{a^2 + 4b + \sqrt{(a^2 - 4b)^2 - 16a^2b}}{4a}$

$yL = 4{,}7817$ Werst, $xL = 0{,}4183$ Werst,

$zL = 4{,}8$ Werst, $\angle \alpha = 85^0\ 0'\ 2''$.

199) $x = \frac{1}{2}\sqrt{4h^2 + a^2}$, $xL = 72{,}27$ Zoll,

$\angle B = 75^0\ 36'\ 55''$, $\angle A = 28^0\ 47'\ 48{,}8''$.

200) $xL = 125{,}48$ Fuß, $\angle A = 44^0\ 3'\ 5{,}1''$,

$\angle B = 91^0\ 53'\ 49{,}8''$.

201) $yL = 76119{,}3$ Millimeter, $xL = 131162$ Millimeter,

$\angle \alpha = 118^0\ 59'$.

202) $yL = 58{,}6$ Fuß, $xL = 46{,}4$ Fuß,

$\angle \alpha = 50^0\ 51'\ 29{,}7''$, $\angle \beta = 78^0\ 17'\ 0{,}6''$.

203) $a = \frac{u^2 + 4h^2}{4u}$, $aL = 5$ Werschock, $cL = 6$ Werschock,

$\angle \alpha = 3^0\ 7'\ 48''$, $\angle \beta = 73^0\ 44'\ 24''$.

204) $J = \frac{a^2 \sin\beta \sin\gamma}{2 \sin\alpha}$, $JF = 660{,}305\square$ Fuß.

205) $JF = 417524{,}7\square$ Toisen, $hL = 596{,}46$ Toisen.

206) $x = a - \frac{h \sin(\alpha + \beta)}{\sin\alpha \sin\beta}$, $xL = 3{,}6117$ Fuß,

$J = ah - \frac{h^2 \sin(\alpha + \beta)}{2 \sin\alpha \sin\beta}$, $JF = 1{,}57091\square$ Fuß,

207) $x = 1{,}75$, $s = c + d + x$,

$J = \frac{ab \sin\alpha}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}s\,(\frac{1}{2}s - c)\,(\frac{1}{2}s - d)\,(\frac{1}{2}s - x)}$

$JF = 3\square$ Fuß $107{,}85\square$ Zoll.

208) $x = b \cos\alpha \pm \sqrt{d^2 - b^2 \sin^2\alpha} = 20{,}9654$,

$xL = 20$ Faden 6 Fuß 9 Zoll. Die Seite y ist unbestimmbar, warum?

209) $JF = 145\square$ Ellen $101{,}2\square$ Zoll.

210) $xL = 13{,}4088$ Fuß. Die beiden andern Seiten des Vierecks sind unbestimmbar, warum?

211) $\angle y + \angle t = 79^0\ 47'\ 27{,}1''$
$\angle z = 119^0\ 14'\ 32{,}9''$,
$fL = 483{,}213$ Millimeter.

212) $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2\,ab \cos\gamma}$
$c = \sqrt{r^2 + r^2 - 2\,r^2 \cos 2\gamma}$
$r = \frac{1}{2 \sin\gamma} \sqrt{a^2 + b^2 - 2\,ab \cos\gamma}$
$rL = 6{,}5205$ Zoll.

213) Die Tangente = 2 Faden 6 Fuß 11 Zoll,
Der Winkel = $9^0\ 35'\ 38{,}7''$.

214) Der Centriwinkel = $90^0\ 7'\ 22{,}6''$.

215) Die Seite des eingeschriebenen Siebenecks = 18 sin $25^0\ 42'\ 51{,}4''$ = 7,8099 Zoll. Die Seite des umschriebenen Siebenecks = 18 tang $25^0\ 42'\ 51{,}4''$ 8,6683 Zoll.

216) Der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises = 0,87604 Fuß. Der Halbmesser des umschriebenen Kreises = 0,97233 Fuß.

217) Die Seite des eingeschriebenen Achtecks = 2 Arschin 15,45 Werschock. Die Seite des umschriebenen Achtecks 3 Arschin 3,36 Werschock.

218) Der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises = 10,17419 Fuß. Der Halbmesser des umschriebenen Kreises = 11,01256 Fuß.

219) Der Flächenraum des eingeschriebenen Fünfecks = $\frac{5}{8}\left(\frac{876}{\pi}\right)^2 \sin 72^0 \,.\, F = 46216{,}24\square$ Decimeter. Der Flächenraum des umschriebenen Fünfecks = $\frac{5}{4}\left(\frac{876}{\pi}\right)^2 \operatorname{tang} 36^0 \,.\, F = 70612{,}15\square$ Decimeter.

220) Der Flächeninhalt des eingeschriebenen Sechsecks = $3 \,.\, 21^2 \sin 60^0 \,.\, F = 1145{,}751\square$ Zoll. Der Flächeninhalt des umschriebenen Sechsecks = $6 \,.\, 21^2 \operatorname{tang} 30^0 \,.\, F$ $1527{,}669\square$ Zoll.

221) In einer Entfernung von 138,36 Fuß.

222) $\angle ACB = 12^0\ 16'\ 30''$.

223) Die Allee scheint in einer Entfernung von 180481,6 Fuß vom Beobachter zusammen zu laufen.

224) $AC = DC \operatorname{cotg} 20^\circ = 257831$ Fuß,
$CB = AC \sin 12^\circ = 53606$ Fuß.

225) $a = \dfrac{317 \sin 110^\circ}{\sin 82^\circ \cos 28^\circ}$, $aL = 340,6874$ Centimeter
$cL = 293,3126$ Centimeter, bL $300,5709$ Centimeter.

226) $a = \dfrac{s \,.\, \sin A}{\sin A + \sin B + \sin C}$, $aL = 2,04409$ Meter,
$bL = 2,234854$ Meter, $cL = 2,564756$ Meter.

227) $\operatorname{Sin} \frac{1}{2} A = \dfrac{1}{24}\sqrt{\dfrac{(hh' + h'h'' - h''h)(h'h'' + h''h - hh')}{h'h''}}$
$\angle A = 85^\circ\ 27'\ 33,6''$,
$\sin B = \dfrac{h \sin A}{h''}$, $\angle B = 41^\circ\ 38'\ 58,8''$,
$\angle C = 52^\circ\ 53'\ 27,5''$, $a = \dfrac{h''}{\sin C} = 7,52366$,
$b = 5,01574$, $c = 6,01889$.

228) $x = \dfrac{p}{6}\sqrt{\dfrac{m \operatorname{tang} 5^\circ}{(m+n)\,\pi}}$; $y = \dfrac{p}{2}\sqrt{\dfrac{n \operatorname{tang} 3^\circ}{15\pi(m+n)}}$
$xL = 2$ Saschen 0 Arschin 11,46 Werschock,
$yL = 1$ Saschen 0 Arschin 9,784 Werschock.

229) $\operatorname{Tang} DAC = \dfrac{BC \sin \gamma}{m\,AC - BC \cos \gamma}$
$\angle DAC = 10^\circ\ 3'\ 47,5''$.

230) $\cos \frac{1}{2}(\gamma - \beta) = \dfrac{s \,.\, \sin \frac{1}{2}\alpha}{a}$, $\gamma - \beta = 39^\circ\ 23'\ 14,8''$.

231) $\operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha = \dfrac{d + a \cos \gamma}{a \sin \gamma}$, $\angle \alpha = 71^\circ\ 14'\ 49''$.

Inhalt.