A. Kisseljov

GEOMEETRIA

PLANIMEETRIA

VI–IX
KLASSILE

EESTI RIIKLIK KIRJASTUS

A-21542 I

A. KISSELJOV

GEOMEETRIA

PLANIMEETRIA

VI—IX KLASSILE

Prof. Glagolevi toimetusel ja täiendustega

ARHIIVKOGU

EESTI RIIKLIK KIRJASTUS
TALLINN 1957

Originaali tiitel: А. П. Киселёв.

Геометрия. Часть первая. Планиметрия. Учебник для 6—9 классов семилетней и средней школы.

Под редакцией и с дополнениями проф. Н. А. Глаголева.

Утверждён Министерством просвещения РСФСР.

Учпедгиз 1956.

Tõlge kinnitatud Eesti NSV Haridusministeeriumi poolt.

2

Tartu Riikliku Ülikooli
Raamatukogu
41735

ARHIIVKOGU

Eessõna.

A. Kisseljovi elementaargeomeetria õpik on pikemat aega olnud kõige levinumaks geomeetria õpikuks. Selle peamised paremused on keele lihtsus ja selgus ning jõukohasus keskkooliõpilaste arusaamisele.

Õpiku ümbertöötamisel ja kehtivate keskkooli õppeprogrammidega kohandamisel on ette võetud rohkearvuliselt muudatusi ja täiendusi eesmärgiga täpsustada, kohati aga ka laiemalt valgustada üksikuid küsimusi. Põhimõttelist laadi küsimustes on minu poolt tehtud autori tekstis olulisi muudatusi. Raamatu esimeses osas (planimeetria) on tähtsamateks muudatusteks järgmised: sirglõikude mõõtmise küsimuse käsitlemisel on tarvitusele võetud lõpmatud kümnendmurrud; sarnasusteooria on ühendatud üldülesandega sarnasusteisendusest; on antud rangem esitus küsimusele ringjoone pikkuse mõõtmisest; on täpsustatud ja koos sellega ka veidi lihtsustatud pindalade mõõtmise teooriat; on ära näidatud üksikute teoreemide tähtsus geomeetria üldkursuses; on antud täiendavaid näpunäiteid mõnede raskeimate ülesannete lahendamiseks; lahendusmeetodid konstruktsiooniülesannetele, mis olid autori poolt antud lisana raamatu lõpus, on nõutavate redaktsiooniliste muudatustega paigutatud raamatu vastavaisse kohtadesse (et õpilane saaks tutvuda nendega ja neid kasutada aine õppimise protsessis); on lühendatud arvutusülesannete osa, nimelt on ära jäetud ülesanded, millel pole suurt praktilist ja teoreetilist väärtust; täiesti on välja jäetud peatükk «Suhted ja võrded», mis kaasaja seisukohalt on täiesti vananenud.

Peale selle on minu poolt raamatu esimesele osale kirjutatud järgmised täiendused: 1) kujundite sümmeetria (teljeline ja tsentraalne, § 37 ja § 84—86); 2) kujundite sarnasusteisendus, hulknurkade perspektiivne asend ja ringjoonte sarnasus (§ 173—178); 3) arvude järjendi ja muutuva suuruse piirväärtus (§ 227—231).

Õpiku ümbertöötamisel püüdsin anda ainele võimalikult täpse esituse ja üksikuid küsimusi valgustada võimalikult laialt, samuti püüdsin nihutada esikohale geomeetrilised põhiideed liikumisest, sümmeetriast ja sarnasusest kui geomeetrilisest teisendusest. Kõik see toimus sel määral, kuipalju seda lubas teha juba olemasolev tekst ja raamatu ulatus. Peale selle püüdsin raamatu ümbertöötamisel hoiduda stiili mitmekesisusest, mis oleks olnud takistuseks õpilastele raamatu kasutamisel.

Vereja linn, 20. II 1938.

N. Glagolev.

Sissejuhatus.

1. **Geomeetrilised kujundid.** *Igalt poolt piiratud ruumi osa nimetatakse* ***geomeetriliseks kehaks.***

Geomeetrilist keha eraldab teda ümbritsevast ruumist **pind.**
Pinna üht osa eraldab teisest **joon.**
Joone üht osa eraldab teisest **punkt.**

Geomeetriline keha, pind, joon ja punkt ei esine eraldi. Kuid abstraheerimise abil võime pinda vaadelda sõltumatult kehast, joont sõltumatult pinnast ja punkti sõltumatult joonest. Seejuures tuleb pinda kujutleda paksuseta, joont laiuseta ja paksuseta ning punkti pikkuseta, laiuseta ja paksuseta.

Ruumis teatavał viisil asetatud mistahes punktide, joonte, pindade või kehade kogu nimetatakse ***kujundiks.*** Geomeetrilised kujundid võivad ruumis liikuda, ilma et nad seejuures muutuksid. Kaht geomeetrilist kujundit nimetatakse võrdseiks ehk kongruentseiks, kui üht neist on võimalik täielikult ühtistada teisega.

2. **Geomeetria.** *Teadust, mis uurib geomeetriliste kujundite omadusi, nimetatakse* ***geomeetriaks,*** mis kreeka keeles tähendab **maamõõtmist.** See teadus sai sellise nimetuse seepärast, et vanal ajal oli geomeetria peamiseks ülesandeks mõõta maapinnal kaugusi ja pindalasid.

Tasapind.

3. **Tasapind.** Kõigist pindadest on meile tuntuim tasane pind ehk lihtsalt **tasapind,** millest annab kujutluse hea aknaklaasi pind, vaikse vee pind tiigis jms.

Juhime tähelepanu tasapinna järgmisele omadusele:

tasapinna iga osa saab kõigi tema punktidega asetada sama tasapinna mõnele teisele osale või mõnele teisele tasapinnale, kusjuures võib pealitatava tasapinna osa ka ümber pöörata.

4. Sirgjoon. Lihtsaimaks jooneks on sirgjoon. Kujutlus sirgjoonest ehk lihtsalt sirgest on kõigile hästi tuttav. Kujutluse sellest annab pinguletõmmatud niit või valguse kiir, mis väljub kitsast avast. Selle kujutlusega ühtib sirge järgmine põhiomadus:

läbi kahe punkti on võimalik tõmmata ainult ühe sirge.

Sellest omadusest järeldub:
kui kahest sirgest üks on asetatud teisele nii, et ühe sirge mistahes kaks punkti langevad ühte teise sirge kahe punktiga, siis need sirged ühtivad ka kõigis oma teistes punktides (seepärast, et vastasel korral oleks võimalik tõmmata läbi kahe punkti kaks sirget, mis on võimatu).

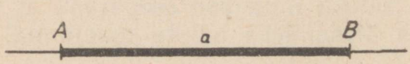
Samal põhjusel *kaks sirget võivad lõikuda ainult ühes punktis.*

Sirge võib asetseda tasapinnal. Seejuures on tasapinnal järgmine omadus:
kui tasapinnal võtta kaks mingit punkti ja läbi nende tõmmata sirge, siis selle sirge kõik punktid asetsevad sel tasapinnal.

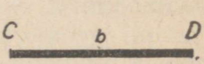
5. Piiramatu sirge. Kiir. Lõik. Kui sirget kujutleda pikendatuna piiramatult mõlemale poole, siis teda nimetatakse **lõpmatuks** (ehk **piiramatuks**) sirgeks.

Sirget tähistatakse tavaliselt kahe suure tähega, mis on paigutatud sirge mistahes punktide juurde. Nii öeldakse «sirge *AB*» ehk «*BA*» (joon. 1).

Sirge osa, mis on piiratud mõlemalt poolt, nimetatakse **sirglõiguks;** sirglõiku tähistatakse tavaliselt kahe tähega, mis on paigutatud selle otste juurde (sirglõik *CD*, joon. 2). Mõnikord tähistatakse sirget või sirglõiku ühe (väikese) tähega; näiteks öeldakse «sirge *a*», «sirglõik *b*» jne.



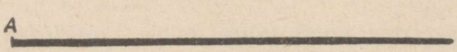
Joon. 1.



Joon. 2.

Sageli öeldakse «sirglõigu» asemel lihtsalt «lõik».

Mõnikord vaadeldakse sirget, mis on piiratud ainult ühelt poolt, näiteks punktis *A* (joon. 3). Niisuguse sirge kohta öeldakse, et ta lähtub punktist *A*; teda nimetatakse **kiireks** (ehk **poolsirgeks**).



Joon. 3.

6. Lõikude võrdsus ja mittevõrdsus. *Kaks lõiku on võrdsed, kui neid on võimalik paigutada teineteisele nii, et nende otsad ühtivad.*

Oletame näiteks, et lõik AB on asetatud lõigule CD (joon. 4) nii, et punkt A on ühtinud punktiga C ja sirge AB läheb mööda sirget CD. Kui seejuures otspunktid B ja D ühtivad, siis lõigud AB ja CD on võrdsed; vastasel korral lõigud pole võrdsed, seejuures väiksemaks lõiguks on see, mis moodustab osa teisest lõigust.

Joon. 4.

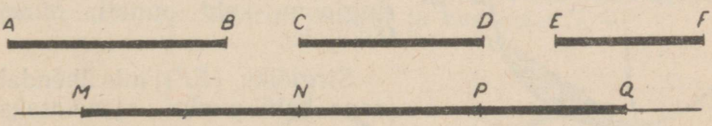
Selleks et mingile sirgele asetada lõik, mis võrduks teise lõiguga, tarvitatakse **sirklit** — riista, mida õpilased tunnevad oma kogemusist.

7. Lõikude summa. Mitme lõigu AB, CD, EF (joon. 5) summaks nimetatakse niisugust lõiku, mis saadakse järgmiselt.

Mingil sirgel võetakse mistahes punkt M, sellest alates paigutatakse sirgele lõik MN, mis on võrdne AB-ga, siis paigutatakse punktist N samas suunas lõik NP, mis on võrdne CD-ga, ja lõpuks lõik PQ, mis on võrdne EF-ga. Nüüd lõik MQ osutub antud lõikude AB, CD ja EF summaks (need antud lõigud on saadud summa suhtes liidetavad).

Samal viisil on võimalik saada mistahes lõikude arvu puhul nende summa.

Lõikude summal on kõik arvude summa omadused: ta ei sõltu liidetavate järjekorrast (vahetuvuse seadus ehk kommutatiivsuse seadus) ega sõltu ka sellest, et mõned liideta-



Joon. 5.

vad on asendatud nende summaga (ühenduvuse seadus ehk assotsiatiivsuse seadus).

Nii:

$$AB+CD+EF=AB+EF+CD=EF+CD+AB= \dots$$

ja

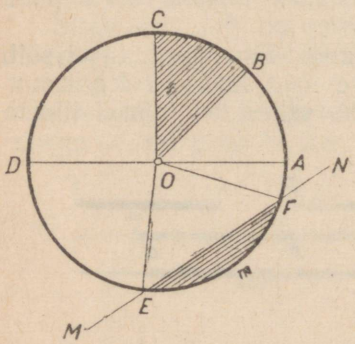
$$AB+CD+EF=AB+(CD+EF)=CD+(AB+EF)= \dots$$

8. Tehted lõikudega. Summa mõistest saab tuletada lõikude vahe mõiste, samuti ka järeldada, kuidas lõike korrutada ja jagada nimetu arvuga. Nii on lõikude AB ja CD vahe (kui $AB > CD$) niisugune kolmas lõik, mille summa CD-ga võrdub AB-ga; lõigu AB korrutis 3-ga on kolme lõigu summa, milles kõik liidetavad on võrdsed AB-ga; lõigu AB jagatis 3-ga on kolmandik lõigust AB jne.

Kui antud lõigud on mõõdetud mingi pikkusühikuga (näiteks sentimeetriga) ja nende pikkused on väljendatud vastavate arvudega, siis lõikude summat esitab lõikusid väljendavate arvude summa, nende vahet esitab arvude vahe jne.

Ringjoone mõiste.

9. Ringjoon. Kui anda sirklile mistahes haare, asetada tema teravik tasapinna mingisse punkti O (joon. 6) ja pöörata sirklit selle punkti ümber, siis sirkli teine jalg, mis on varustatud pliiatsi või sulega, joonestab tasapinnaga kokkupuutel sellele pideva joone, mille kõik punktid on ühekaugusel punktist O. Seda joont nimetatakse **ringjooneks,** punkti O aga tema **tsentriks** ehk **keskpunktiks.** Lõike OA, OB, OC..., mis ühendavad keskpunkti ringjoone punktidega, nimetatakse **raadiusteks.** Ühe ja sama ringjoone kõik raadiused on võrdsed.



Joon. 6.

Võrdsete raadiustega ringjooned on võrdsed, sest kui nad asetatakse ühele tasapinnale nii, et nende keskpunktid ühtivad, siis nad katavad teineteist täiesti.

Sirget (MN, joon. 6), mis läbib ringjoone kaht punkti, nimetatakse **lõikajaks.**

Sirglõiku (EF), mis ühendab ringjoone kaht punkti, nimetatakse **kõõluks.**

Keskpunkti läbivat kõõlu (AD) nimetatakse **diameetriks** ehk **läbimõõduks.**

Diameeter võrdub kahe raadiuse summaga ja seepärast ühe ringjoone kõik diameetrid on võrdsed.

Ringjoone osa (näiteks EmF) nimetatakse **kaareks.**

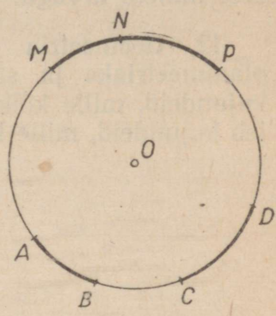
Mingi kaare otspunkte ühendava kõõlu (EF) kohta öeldakse, et ta **toetub** kaarele EmF.

Kaart tähistatakse mõnikord märgiga $\smile$; näiteks kirjutatakse nii: $\smile EmF$.

Ringjoone poolt piiratud tasapinna osa nimetatakse **ringiks** [1].

Ringi osa kahe raadiuse vahel (joonisel 6, osa COB, mis on viirutatud) nimetatakse **sektoriks**, osa aga, mille lõikab ringist ära mingi lõikaja (osa EmF), nimetatakse **segmendiks**.

10. Kaarte võrdsus ja mittevõrdsus. Ühe ja sama ringjoone (või võrdsete ringjoonte) kaared on võrdsed, kui üht neist on võimalik asetada teise peale nii, et nende otspunktid ühtivad. Oletame näiteks, et asetame kaare AB (joon. 7) kaarele CD nii, et punkt A ühtib punktiga C ning kaar AB läheb mööda kaart CD. Kui seejuures otspunktid B ja D ühtivad, siis ühtivad ka nende kaarte vahepealsed punktid, sest nad on kõik keskpunktist ühekaugusel, tähendab $\smile AB = \smile CD$. Kui aga punktid B ja D ei ühti, siis kaared pole võrdsed, seejuures on väiksem see kaar, mis moodustab osa teisest kaarest.

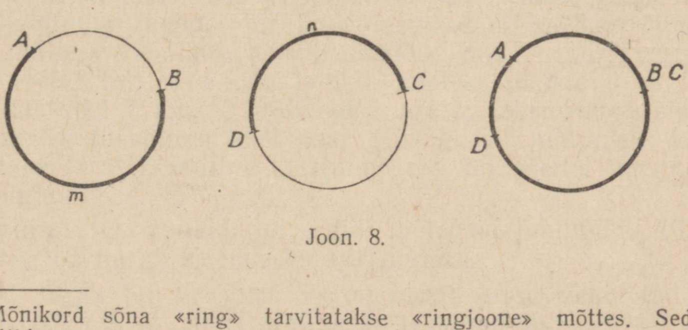


Joon. 7.

11. Kaarte summa. Mitme võrdse raadiusega kaare summaks nimetatakse niisugust sama raadiusega kaart, mis koosneb osadest, mis on vastavalt võrdsed antud kaartega. Kui ringjoone mingist punktist M (joon. 7) alates võtame kaare MN, mis on võrdne kaarega AB, ja siis punktist N paigutame edasi samas suunas kaare NP, mis on võrdne kaarega CD, siis kaar MP on kaarte AB ja CD summaks. Samal viisil võime saada kolme ja enama kaare summa.

Võrdsete raadiustega kaarte liitmisel võib juhtuda, et summa ei mahu ühele ringjoonele, üks kaartest võib osaliselt katta teise. Niisugusel korral on kaarte summaks kaar, mis on suurem tervest ringjoonest.

Nii näiteks saadakse kaarte AmB ja CnD liitmisel (joon. 8) kaar, mis koosneb tervest ringjoonest ja kaarest AD.



Joon. 8.

[1] Mõnikord sõna «ring» tarvitatakse «ringjoone» mõttes. Seda tuleb aga vältida, sest ühe sõna tarvitamine kahe eri mõiste jaoks võib esile kutsuda arusaamatusi.

Kaarte summa, nagu sirglõikudegi summa puhul kehtib vahetuvuse ja ühenduvuse seadus.

Kaarte summa mõistest järeldub, nagu sirglõikudegi puhul, kaarte vahe mõiste, samuti mõiste kaarte korrutamisest ja jagamisest nimetu arvuga.

12. Geomeetria jaotus. Geomeetria jaguneb kaheks osaks: **planimeetriaks ja stereomeetriaks.** Esimene käsitleb niisuguseid kujundeid, mille kõik osad asetsevad ühel tasapinnal; teine käsitleb kujundeid, mille kõik osad ei asetse ühel tasapinnal.

PLANIMEETRIA

ESIMENE PEATÜKK.

SIRGJOON.

I. Nurgad.

Eelmõisted.

13. Nurk. *Kujundit, mille moodustavad kaks ühest punktist väljunud kiirt* (*AO* ja *OB*, joon. 9), *nimetatakse* **nurgaks.** *Kiiri ehk poolsirgeid, mis moodustavad nurga, nimetatakse tema* **haaradeks,** ja *punkti, millest need väljuvad,* **nurga tipuks.** Haaru tuleb kujutleda tipust piiramatult pikendatuna.

Nurka tähistatakse tavaliselt kolme suure tähega, millest keskmine täht on paigutatud tipu juurde, äärmised tähed aga haarade mistahes punktide juurde; näiteks öeldakse: «nurk *AOB*» ehk «nurk *BOA*» (joon. 9).

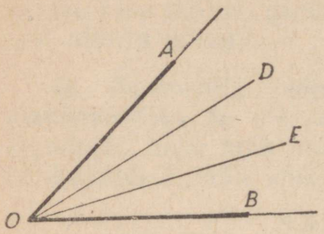
Nurka võib aga tähistada ka ühe tähega, mis on paigutatud tipu juurde, kui selle tipu juures pole teisi nurki. Mõnikord tähistame nurka numbriga või kreekakeelse tähega, asetades selle nurga sisse tipu juurde.

Nurga haarad jaotavad kogu tasapinna, millel asetseb nurk, kaheks piirkonnaks. Üks neist on **nurga sisemine piirkond,** teine **nurga väline piirkond.** Harilikult loetakse sisemiseks piirkonnaks seda, millesse täielikult asetub sirglõik, mis ühendab nurga haaradel võetud mistahes kaht punkti, näiteks punkte *A* ja *B* nurga *AOB* haaradel (joon. 9). Mõnikord aga loetakse nurga sisemiseks piirkonnaks tasapinna teist osa. Niisuguseil juhtumeil tavaliselt näidatakse eraldi, milline tasapinna osa on võetud nurga sisemiseks piirkonnaks.

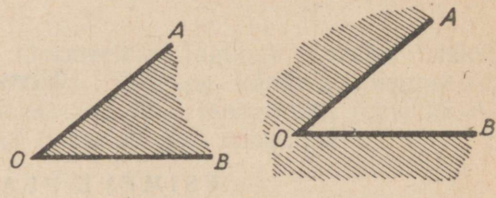
Joonisel 10 on näidatud eraldi mõlemad juhtumid. Viirutatud pinnaosa on nurga sisemiseks piirkonnaks.

Kui nurga tipust (joon. 9) on nurga sisse tõmmatud mingid sirged *OD*, *OE*, . . . , siis siinjuures tekkinud nurgad *AOD*, *DOE*, *EOB* . . . on nurga *AOB* osad.

Sõna «nurk» asemel tarvitatakse tihti märki $\angle$. Näiteks «nurk AOB» asemel kirjutatakse: $\angle AOB$.

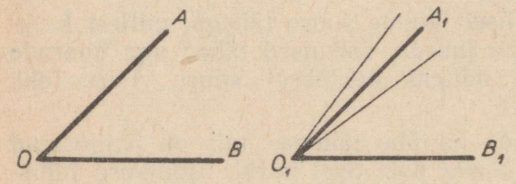


Joon. 9.



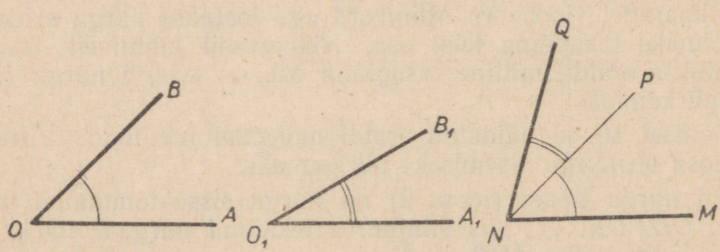
Joon. 10.

14. Nurkade võrdsus ja mittevõrdsus. Vastavalt geomeetriliste kujundite võrdsuse ehk kongruentsuse ülddefinitsioonile (§ 1) on *kaks nurka võrdsed, kui neid saab teineteisele asetamisega ühtistada.* Oletame näiteks, et paigutame nurga AOB nurgale $A_1O_1B_1$ (joon. 11) nii, et tipp O ühtib tipuga O_1, haar OB läheb mööda O_1B_1 ja mõlema nurga sisemised piirkonnad on ühel pool sirget O_1B_1. Kui seejuures haar OA ühtib haaraga O_1A_1, siis on nurgad võrdsed; kui aga haar OA on nurga $A_1O_1B_1$ sees või väljaspool seda, siis pole nurgad võrdsed; seejuures see nurk on väiksem, mis moodustab osa teisest nurgast.



Joon. 11.

15. Nurkade summa. Nurkade AOB ja $A_1O_1B_1$ (joon. 12) summaks nimetatakse säärast nurka, mis saadakse järgmisel viisil. Joonestame nurga MNP, mis on võrdne esimese antud nurgaga AOB, ja selle juurde joonestame nurga PNQ, mis on võrdne teise antud nurgaga $A_1O_1B_1$, nii et nurkadel oleks ühine tipp N ja ühine haar NP ning nurkade sisemised piirkonnad oleksid asetatud mõlemale poole ühist haara NP. Nüüd nimetatakse nurka MNQ antud



Joon. 12.

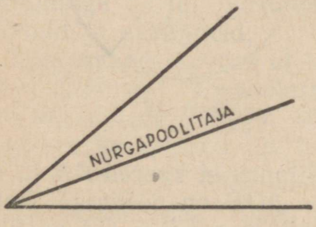
nurkade AOB ja $A_1O_1B_1$ summaks. Selle nurga sisemiseks piirkonnaks on see osa tasapinnast, mille moodustavad liidetavate nurkade sisemised piirkonnad. See on piirkond, milles asetseb liidetavate nurkade ühine haar (NP). Samal viisil võib saada ka kolme ja enama nurga summa.

Nurkade summa, nagu sirglõikudegi summa puhul kehtib vahetuvuse ja ühenduvuse seadus.

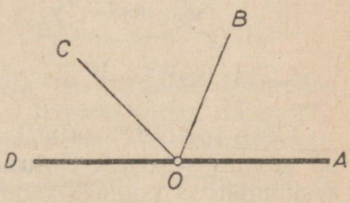
Sageli räägitakse niisugusest kiirest, mis poolitab antud nurga; seda kiirt nimetatakse **nurgapoolitajaks** ehk **bisektoriks** (joon. 13).

16. Nurga mõiste laiendamine. Nurkade liitmisel võivad esineda mõned erijuhtumid, mida on soovitav eraldi läbi arutada.

1) Võib juhtuda, et nurkade liitmisel, näiteks kolme nurga AOB, BOC ja COD (joon. 14) liitmisel, nurga COD haar OD moodustab nurga AOB haara OA pikenduse. Me saame siis kujundi, mille moodustavad kaks ühest punktist lähtuvat ja ühel sirgel asetsevat kiirt. Niisugust kujundit nimetatakse samuti nurgaks (**sirgnurgaks**).



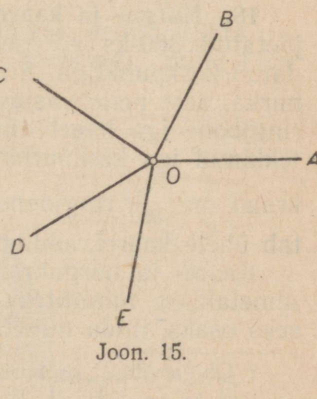
Joon. 13.



Joon. 14.

2) Võib juhtuda, et nurkade, näiteks viie nurga: AOB, BOC, COD, DOE ja EOA (joon. 15) liitmisel nurga EOA haar OA ühtib nurga AOB haaraga CA.

Kujundit, mille moodustavad niiviisi ühtinud kiired (koos kogu tasapinnaga, mis asetseb ühise tipu O ümber), nimetatakse samuti nurgaks (**täispöördeks**).



Joon. 15.

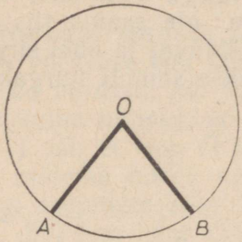
3) Lõpuks võib juhtuda, et nurkade summa ehitamisel meie mitte ainult ei täida kogu tasapinda ühise tipu ümber, vaid oleme sunnitud asetama nurki teineteise peale, kattes tasapinda ühise tipu ümber teist, kolmandat jne. korda. Niisugune nurkade summa võrdub täispöördega, millele on liidetud mõni nurk, või kahe täispöördega, millele on liidetud mõni nurk jne.

17. Kesknurk. *Nurka* (*AOB*, joon. 16), *mille moodustavad ringjoone kaks raadiust, nimetatakse* ***kesknurgaks.*** Niisuguse nurga ja kaare kohta, mis asetsevad nurga haarade vahel, öeldakse, et nad **vastavad** teineteisele.

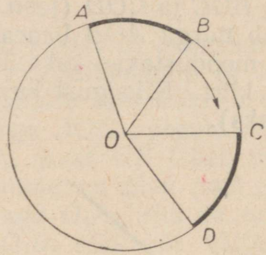
Kesknurkadel on vastavate kaarte suhtes kaks järgmist omadust:

1) ***kui kesknurgad ühes ringis või võrdseis ringides on võrdsed, siis on võrdsed ka nendele vastavad kaared*** ja

2) ümberpöördult: ***kui kaared on võrdsed, siis on võrdsed ka nendele vastavad kesknurgad.***



Joon. 16.



Joon. 17.

Olgu $\angle AOB = \angle COD$ (joon. 17); näitame, et kaared *AB* ja *CD* on samuti võrdsed. Kujutleme, et sektor *AOB* on pööratud ümber keskpunkti *O* noolega näidatud suunas nii, et raadius *OA* on ühtinud *OC*-ga. Siis nurkade võrdsuse tõttu raadius *OB* ühtib *OD*-ga; tähendab, kaared *AB* ja *CD* ühtivad, s. o. nad on võrdsed.

Ka teist omadust võib kergesti põhjendada pealitamisega.

18. Nurga- ja kaarekraadid. Kujutleme, et mingi ringjoon on jaotatud 360-ks võrdseks osaks ja kõik jaotuspunktid on ühendatud keskpunktiga. Siis tekib keskpunkti ümber 360 võrdset kesknurka, sest neile vastavad võrdsed kaared. Säärasel viisil saadud ringjoone iga kaart nimetatakse **kaarekraadiks,** keskpunkti juures tekkinud iga kesknurka aga **nurgakraadiks.** Tähendab, üks kaarekraad on $\frac{1}{360}$ ringjoonest, nurgakraad aga on kesknurk, mis vastab ühele kaarekraadile.

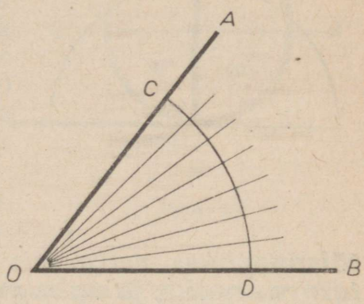
Kaare- ja nurgakraadid jaotatakse 60-ks võrdseks osaks, mida nimetatakse **minutiteks,** minutid aga jaotatakse veel 60-ks võrdseks osaks, mida nimetatakse **sekunditeks** [1].

---

[1] On tarvitusel ka nurkade ja kaarte sajandsüsteem; selles süsteemis on üks kaarekraad $\frac{1}{100}$ veerand-ringjoonest; minut $\frac{1}{100}$ kraadist ja 1 sekund $\frac{1}{100}$ minutist.

19. Vastavus kesknurkade ja kaarte vahel. Olgu AOB mingi nurk (joon. 18). Tõmbame tipust O kui keskpunktist nurga haarade vahele mistahes raadiusega kaare CD; siis nurk AOB on kesknurk, mis vastab kaarele CD.

Oletame näiteks, et selles kaares on 7 kaarekraadi (joonisel on kraadid kujutatud suurendatult). Kui nüüd ühendada kaare jaotuspunktid keskpunktiga, siis nurk AOB jaguneb ilmselt 7-ks nurgakraadiks. Üldiselt võib ütelda, et *nurka mõõdetakse temale vastava kaarega,* mõistes selle lause all järgmist: nurgas on niisama palju nurgakraade, -minuteid ja -sekundeid, kui palju vastavas kaares on kaarekraade, -minuteid ja -sekundeid. Kui näiteks kaares CD on 20 kaarekraadi, 10 kaareminutit ja 15 kaaresekundit, siis nurgas AOB on 20 nurgakraadi, 10 nurgaminutit ja 15 nurgasekundit. Seda väljendatakse lühidalt järgmiselt: $\angle AOB = 20°10'15''$, tähistades sümbolitega $°$, $'$ ja $''$ vastavalt kraade, minuteid ja sekundeid.

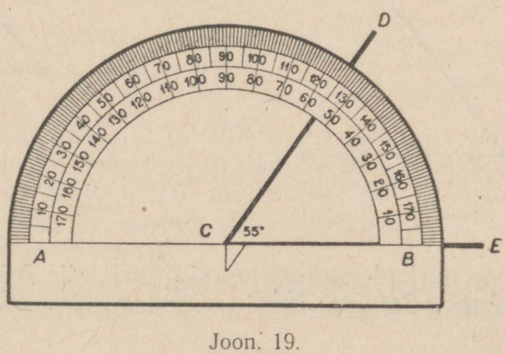


Joon. 18.

Nurgakraadi suurus ei sõltu ringjoone raadiusest. Tõepoolest, kui liita § 15 antud reegli põhjal 360 nurgakraadi, siis saadakse täispööre ringjoone keskpunkti juures. Milline ka ringjoon oleks, täispööre on alati niisama suur. Tähendab, võime ütelda, et nurgakraad on $\frac{1}{360}$ täispöördest. See nurka täielikult määrav nurgamõõt ei sõltu ringjoone raadiusest.

Nurgakraadide arv määrab antud nurgas ühe haara kalde suuruse teise haara suhtes.

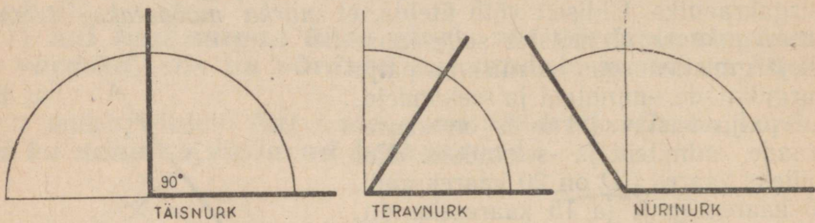
20. Mall. Nurkade mõõtmiseks tarvitatakse erilist riista — **malli.** See riist (joon. 19) kujutab enesest poolringi, mille kaar



Joon. 19.

on jaotatud 180-ks kraadiks. Selleks et mõõta nurka *DCE*, asetatakse sellele mall nii, et poolringi keskpunkt ühtib nurga tipuga, raadius *CB* läheb aga mööda *CE*-d. Siis nurga *DCE* haarde vahel asetseva kaare kraadide arv näitab nurga suurust. Malli abil saab ka joonestada nurka, mille suurus kraadides on antud.

21. Täisnurk, teravnurk ja nürinurk. *90°-list nurka* (see on järelikult pool sirgnurgast ehk veerand täispöördest) *nimetatakse*



Joon. 20.

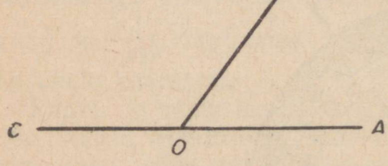
täisnurgaks; *nurka, mis on väiksem täisnurgast, nimetatakse* ***teravnurgaks,*** ja *nurka, mis on suurem täisnurgast, kuid väiksem sirgnurgast, nimetatakse* ***nürinurgaks*** (joon. 20).

Muidugi, ***kõik täisnurgad*** kui nurgad, mis sisaldavad ühepalju kraade, ***on võrdsed.***

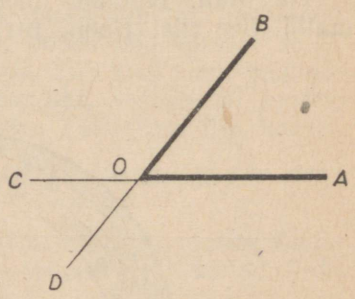
Täisnurga suurust tähistatakse mõnikord tähega *d* (esimene täht prantsuskeelsest sõnast «droit», mis tähendab «õige»).

Kõrvunurgad ja tippnurgad.

22. Kõrvunurgad ja nende omadused. *Kaht nurka* (*AOB* ja *BOC*, joon. 21) *nimetatakse* ***kõrvunurkadeks,*** *kui neil on üks ühine haar ja teised haarad on teineteise pikenduseks.*



Joon. 21.

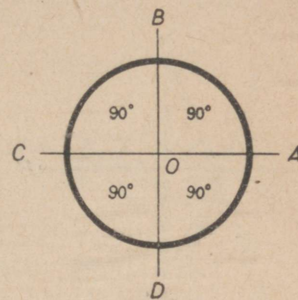


Joon. 22.

Et niisuguste nurkade summa on sirgnurk, siis ***kõrvunurkade summa võrdub 180°-ga*** (teiste sõnadega: ta võrdub kahe täisnurga summaga).

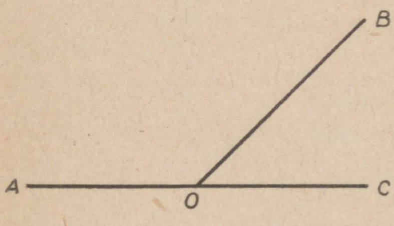
Igale nurgale saab joonestada kaks kõrvunurka. Näiteks nurgale *AOB* (joon. 22), pikendades külge *AO*, saame kõrvunurga *BOC* ja pikendades külge *BO*, saame teise kõrvunurga *AOD*. *Kaks nurka, BOC ja AOD, mis on ühe ja sama nurga AOB kõrvunurgad, on võrdsed*, sest kumbki neist täiendab nurka *AOB* 180°-ni.

Kui nurk *AOB* on täisnurk (joon. 23), s. t. võrdub 90°-ga, siis on ka iga tema kõrvunurk *COB* ja *AOD* täisnurk, sest nad võrduvad 180°—90°, s. o. 90°-ga. Neljas nurk *COD* on samuti täisnurk, sest kolme nurga, *AOB, BOC* ja *AOD* summa on 270°, järelikult neljas nurk võrdub 360°—270°, s. o. 90°-ga. Niisiis: *kui kahe sirge* (*AC* ja *BD*, joon. 23) *lõikumisel üks nurkadest osutub täisnurgaks, siis ka ülejäänud kolm nurka on täisnurgad.*

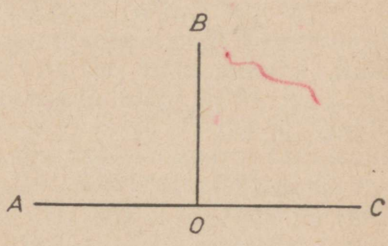


Joon. 23.

23. **Ristjoon ja kaldjoon.** Kahe kõrvunurga ühist haara (*OB*), kui nurgad pole võrdsed, nimetatakse **kaldjooneks** sellele sirgele (*AC*), millel asetsevad kaks teist haara (joon. 24). Juhtumil aga, kui kõrvunurgad on võrdsed (joon. 25), s. o. kui kumbki neist võrdub täisnurgaga, siis ühist haara nimetatakse **ristjooneks** ehk **perpendikulaariks** sellele sirgele, millel asetsevad kaks teist haara. Ühist tippu (*O*) nimetatakse esimesel juhtumil **kaldjoone aluseks**, teisel juhtumil **ristjoone aluseks.**



Joon. 24.



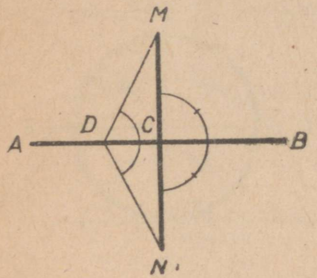
Joon. 25.

Kahe sirge kohta (*AC* ja *BD*, joon. 23), mis lõikumisel moodustavad täisnurga, öeldakse, et nad on **teineteisega risti**. Seda, et sirge *AC* on risti sirgega *BD*, märgitakse nii: $AC \perp BD$.

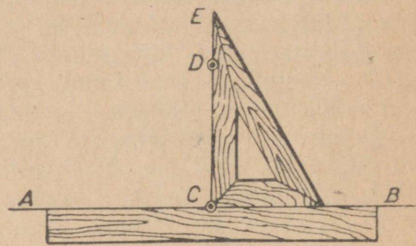
On silmanähtav, et antud sirge igast punktist saab tõmmata sirgele ainult ühe ristjoone.

24. Tõestame, et ***igast punktist, mis asetseb väljaspool sirget, saab sellele sirgele tõmmata ainult ühe ristjoone.***

Olgu antud mingi sirge AB (joon. 26) ja väljaspool seda mistahes punkt M. Esiteks tuleb näidata, et sellest punktist on võimalik tõmmata ristjoon sirgele AB, ja teiseks, et see ristjoon on ainus ristjoon, mis on võimalik tõmmata antud punktist M antud sirgele AB.



Joon. 26.



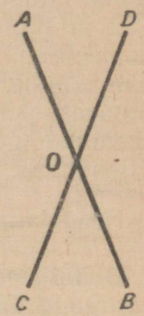
Joon. 27.

Kujutleme, et joonis on kokku murtud mööda sirget AB nii, et ülemine osa on langenud alumisele. Siis võtab punkt M mingi asendi N. Ära märkinud selle asendi, viime joonise endisse asendisse. Nüüd ühendame punktid M ja N sirgega ja veendume selles, et tõmmatud sirge MN on risti AB-ga, kuid iga teine punktist M tõmmatud sirge, näiteks MD, pole risti AB-ga. Selleks murrame joonise teiskordselt kokku. Punkt M langeb uuesti punktile N, punktid C ja D jäävad aga endistesse kohtadesse; järelikult sirglõik MC ühtib NC-ga ja MD ND-ga. Sellest järeldub, et $\angle MCB = \angle BCN$ ja $\angle MDC = \angle CDN$. Nurgad MCB ja BCN on aga kõrvunurgad ning nagu praegu näeme, on nad ka võrdsed; järelikult, kumbki neist on t ä i s n u r k ja seepärast $MN \perp AB$. Et aga joon MDN pole sirgjoon (sest ei saa olla kaht sirget, mis läbivad punkte M ja N), siis kahe võrdse nurga MDC ja CDN summa e i v õ r d u sirgnurgaga, s. o. $2d$-ga; seepärast nurk MDC pole täisnurk ja, tähendab, MD pole risti AB-ga. Niisiis: teist ristjoont punktist M sirgele AB tõmmata ei saa.

25. Joonestamiskolmnurk. Antud sirgele ristjoone joonestamiseks on hõlpus kasutada **joonestamiskolmnurka,** sest tema üks nurk on täisnurk. Selleks et sirgele AB (joon. 27) tõmmata ristjoon sirgel asetsevast punktist C või väljaspool sirget asetsevast punktist D, paigutatakse joonlaua serv AB-le ja joonlaua külge kolmnurk; joonlauda käega kinni hoides nihutatakse kolmnurka mööda joonlaua serva nii kaugele, kuni täisnurga teine serv läbib punkti C või D. Nüüd tõmmatakse sirge CE.

26. Tippnurgad ja nende omadused. *Kaht nurka nimetatakse* ***tippnurkadeks,*** *kui ühe nurga haarad on teise nurga haarade pikendusteks.* Nii tekib kahe sirge AB ja CD (joon. 28) lõikumisel kaks paari tippnurki: *AOD* ja *COB, AOC* ja *DOB* (ja neli paari kõrvunurki).

Kaks tippnurka on võrdsed (näiteks $\angle AOD = \angle BOC$, joon. 28), sest kumbki neist on ühe ja sellesama nurga kõrvunurk ($\angle DOB$ või $\angle AOC$ kõrvunurk), niisugused nurgad on aga, nagu nägime (§ 22), võrdsed.



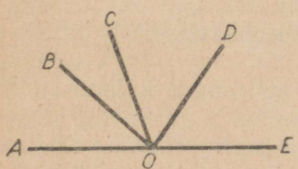
Joon. 28.

27. Märkusi ühistipuliste nurkade kohta. Ühise tipuga ehk ühistipuliste nurkade kohta on kasulik meeles pidada järgmised lihtsad tõed.

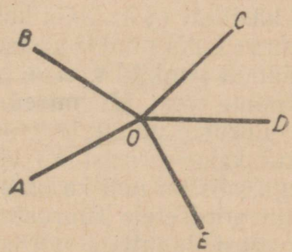
1) *Kui mõnede ühistipuliste nurkade* (*AOB, BOC, COD, DOE*, joon. 29) *summa on sirgnurk, siis see summa võrdub 2d-ga, s. o. 180°-ga.*

2) *Kui mõnede ühistipuliste nurkade* (*AOB, BOC, COD, DOE, EOA*, joon. 30) *summa on täispööre, siis see summa võrdub 4d-ga, s. o. 360°-ga.*

3) *Kui kahel nurgal* (*AOB* ja *BOC*, joon. 24) *on ühine tipp* (*O*) *ja ühine haar* (*OB*) *ning nende summa võrdub 2d* (s. o. 180°), *siis nende nurkade teised haarad* (*AO* ja *OC*) *on teineteise pikendusteks* (s. t. niisugused nurgad on kõrvunurgad).



Joon. 29.



Joon. 30.

Harjutusi.

1. Nurk võrdub 38°20′; leida selle nurga kõrvunurga suurus.
2. Kahel nurgal *ABC* ja *CBD* on ühine tipp *B* ja ühine haar *BC*. Nurgad ei kata teineteist; nurk $ABC = 100°20'$ ja nurk $CBD = 79°40'$. Kas haarad *AB* ja *BD* moodustavad sirgjoone?
3. Joonestada mingi nurk ja poolitada see malli ja joonlaua abil.
4. Tõestada, et kahe kõrvunurga poolitajad on teineteisega risti.
5. Tõestada, et kahe tippnurga poolitajad moodustavad ühe sirge.
6. Tõestada, et kui sirge *AB* punkti *O* juurde (joon. 28) joonestada mõlemale poole *AB* võrdsed nurgad *AOD* ja *BOC*, siis nende haarad *OD* ja *OC* moodustavad ühe sirge.
7. Tõestada, et kui punktist *O* (joon. 28) tõmmata kiired *OA, OD, OB, OC* nii, et $\angle AOC = \angle DOB$ ja $\angle AOD = \angle COB$, siis *OB* on *OA* pikenduseks ja *OD* on *OC* pikenduseks.

Juhis. Tuleb rakendada § 27, ja 2 ja 3.

2*

II. Matemaatilised laused.

28. **Teoreemid, aksioomid, definitsioonid.** Esitatust võime järeldada, et mõned geomeetrilised tõed lugesime täiesti silmanähtavaiks (näiteks tasapinna ja sirge omadused § 3 ja 4), teised aga tegime kindlaks arutluste abil (näiteks kõrvunurkade omadused § 22 ja tippnurkade omadused § 26). Niisugused arutlused on geomeetrias peamiseks vahendiks geomeetriliste kujundite omaduste kindlakstegemisel. Seepärast ongi edaspidise kursuse läbivõtmiseks kasulik tutvuda arutluste nende liikidega, mis leiavad rakendust geomeetrias. Kõik tõed, millega tegeleb geomeetria, väljenduvad lausetena.

Need laused võivad olla järgmised.

Definitsioonid. ***Definitsioonideks*** *nimetatakse lauseid, mis selgitavad ühe või teise nimetuse või väljenduse mõtet.* Näiteks tutvusime juba kesknurga, täisnurga, ristjoone ja mõnede teiste mõistete definitsioonidega.

Aksioomid. ***Aksioomideks*** *nimetatakse tõdesid, mida tunnustatakse tõestuseta.* Niisuguseiks on näiteks laused, mida eespool käsitleti (§ 4): läbi kahe punkti saab tõmmata ainult ühe sirge; kui sirge kaks punkti asetsevad antud tasapinnal, siis ka selle sirge ülejäänud punktid asetsevad sel tasapinnal.

Toome veel järgmised aksioomid, mis leiavad rakendust iga liiki suuruste puhul:

kui kaks suurust on võrdsed ühe ja sellesama kolmanda suurusega, siis on nad ka omavahel võrdsed;

kui võrdsetele suurustele liita võrdsed suurused või võrdsetest suurustest lahutada võrdsed suurused, siis saadud suurused on võrdsed;

kui mittevõrdsetele suurustele liita võrdsed suurused või mittevõrdsetest suurustest lahutada võrdsed suurused, siis suurem suurus jääb suuremaks.

Teoreemid. ***Teoreemideks*** *nimetatakse niisuguseid lauseid, mille õigsus selgub ainult pärast teatavat arutlust* (tõestust). Näideteks võiksid olla järgmised laused:

kui ühes ringis või võrdsetes ringides kesknurgad on võrdsed, siis on võrdsed ka neile vastavad kaared;

kui kahe sirge lõikumisel üks neljast nurgast on täisnurk, siis on ka ülejäänud nurgad täisnurgad jms.

Järeldused. ***Järeldusteks*** *nimetatakse lauseid, mis järelduvad vahetult aksioomidest või teoreemidest.* Näiteks aksioomist: *«läbi kahe punkti saab tõmmata ainult ühe sirge»* järeldub, et *«kaks sirget lõikuvad ainult ühes punktis».*

29. Teoreemi koostis. Igas teoreemis on kaks osa: eeldus ja väide. ***Eeldus*** *väljendab seda, mis antud,* ***väide*** *aga seda, mida tuleb tõestada.* Näiteks teoreemis: «*kui kesknurgad on võrdsed, siis on võrdsed ka neile vastavad kaared*», on eelduseks teoreemi esimene osa: «*kui kesknurgad on võrdsed*», väiteks aga teoreemi teine osa: «*siis on võrdsed ka neile vastavad kaared*». Teiste sõnadega: on antud (on teada), et kesknurgad on võrdsed, tõestada aga tuleb, et sel eeldusel on ka vastavad kaared võrdsed.

Teoreemi eeldus ja väide võivad mõnikord koosneda mitmest eri eeldusest ja eri väitest; näiteks teoreemis: «*kui arv jagub kahega ja kolmega, siis ta jagub ka kuuega*» koosneb eeldus kahest osast: «*kui arv jagub kahega*» ja «*kui arv jagub kolmega*».

On kasulik märkida, et iga teoreemi saab täpselt väljendada sõnadega nii, et tema eeldus algaks sõnaga «kui», väide aga sõnaga «siis». Näiteks teoreemi: «tippnurgad on võrdsed» võib täpsemalt sõnastada nii: «k u i kaks nurka on tippnurgad, s i i s on nad võrdsed».

30. Pöördteoreem. *Antud teoreemi* ***pöördteoreemiks*** *nimetatakse niisugust teoreemi, milles eelduseks on võetud antud teoreemi väide* (või üks osa väitest), *väiteks aga antud teoreemi eeldus* (või osa eeldusest). Näiteks on järgmised kaks teoreemi teineteise pöördteoreemideks:

kui kesknurgad on võrdsed, siis on võrdsed ka neile vastavad kaared.	*kui kaared on võrdsed, siis on võrdsed ka neile vastavad kesknurgad.*

Kui üht neist nimetame **otseseks teoreemiks**, siis teist tuleb nimetada **pöördteoreemiks.**

Antud näites on mõlemad teoreemid õiged. Nii pole see aga alati. Näiteks teoreem: «*kui kaks nurka on tippnurgad, siis on nad võrdsed*» on õige, aga pöördteoreem: «*kui kaks nurka on võrdsed, siis on nad tippnurgad*» pole õige.

Tõepoolest, oletame, et mingis nurgas on tõmmatud poolitaja (joon. 13). Nurgapoolitaja jaotab antud nurga kaheks väiksemaks nurgaks. Need nurgad on võrdsed, aga nad pole tippnurgad.

31. Vastandteoreem. *Antud teoreemi* ***vastandteoreemiks*** *nimetatakse niisugust teoreemi, mille eeldus ja väide on antud teoreemi eelduse ja väite e i t a m i n e.* Näiteks teoreemile: «*kui arvu ristsumma jagub üheksaga, siis arv jagub üheksaga*» vastab vastandteoreem: «*kui arvu ristsumma e i jagu üheksaga, siis arv e i jagu üheksaga*».

Ka siin tuleb ära märkida, et otsese teoreemi õigsus ei tähenda veel vastandteoreemi õigsust; näiteks vastandteoreem: «*kui iga liidetav e i jagu ühe ja sellesama arvuga, siis summa ka e i jagu selle arvuga*» pole õige, kuna otsene teoreem on aga õige.

32. Seos otsese teoreemi, pöördteoreemi ja vastandteoreemi vahel. Selle seose parimaks selgitamiseks väljendame teoreemid lühidalt järgmiselt (tähega A tähistame teoreemi eelduse, tähega B teoreemi väite).

1) **Otsene teoreem:** kui on A, siis on ka B.
2) **Pöördteoreem:** kui on B, siis on ka A.
3) **Otsese teoreemi vastandteoreem:** kui pole A, siis pole ka B.
4) **Pöördteoreemi vastandteoreem:** kui pole B, siis pole ka A.

Vaadeldes neid lauseid, on kerge märgata, et esimene neist on sarnlev neljandaga nagu teine kolmandaga, nimelt: esimene ja neljas lause on ümberpööratavad, samuti ka teine ja kolmas lause. Tõepoolest, lausest: «kui on A, siis on ka B» järgneb vahetult: «kui pole B, siis pole ka A» (sest kui A oleks, siis vastavalt esimesele lausele oleks ka B); ümberpöördult, lausest: «kui pole B, siis pole ka A» järeldame: «kui on A, siis on ka B» (sest kui poleks B, siis poleks ka A). Täpselt samuti veendume, et teisest lausest järgneb kolmas ja ümberpöördult.

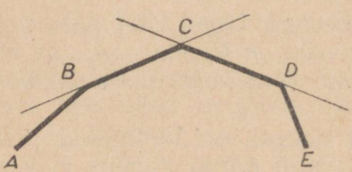
Niisiis, et olla kindel kõigi nelja teoreemi õigsuses, pole tarvidust tõestada kõiki neid eraldi; piisab, kui tõestada ainult kaks: otsene teoreem ja pöördteoreem, või jälle otsene teoreem ja vastandteoreem.

III. Kolmnurgad.

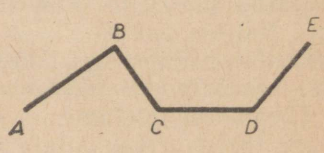
Hulknurga ja kolmnurga mõiste.

33. Murdjoon. Murdjooneks nimetatakse joont, mis moodustub mitte ühel sirgel asetsevaist sirglõikudest nii, et esimese lõigu otspunkt on teise lõigu alguspunktiks, teise lõigu otspunkt on kolmanda lõigu alguspunktiks jne. (joon. 31 ja 32).

Neid sirglõike nimetatakse murdjoone **lülideks**, naaberlõikude poolt moodustatud nurkade tippe nimetatakse murdjoone **tippudeks**. Murdjoont tähistatakse tähtede reaga, mis on paigutatud tema tippude ja otspunktide juurde; näiteks öeldakse: murdjoon $ABCDE$.



Joon. 31.



Joon. 32.

Murdjoont nimetatakse **kumeraks**, kui ta asetseb tervikuna ühel pool **iga** teda moodustavat lõiku, mis on piiramatult pikendatud mõlemale poole. Niisugune murdjoon on näiteks joonisel 31 kujutatud joon, kuna aga joonisel 32 kujutatud joon pole kumer (ta ei asetse ühel pool sirget BC).

Kui murdjoone otspunktid ühtivad, siis murdjoon on k i n n i n e (näiteks joon. $ABCDEA$ joonisel 33).

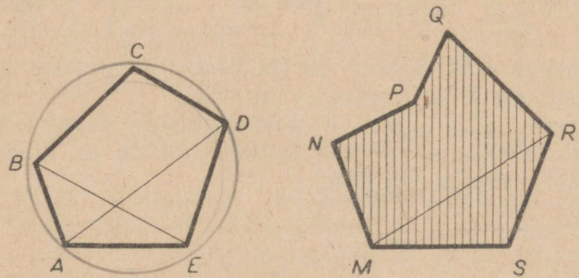
34. Hulknurk. *Kujundit, mille moodustab kinnine murdjoon koos selle joone poolt piiratud tasapinna osaga, nimetatakse*

hulknurgaks (joon. 33). Murdjoone lülisid nimetatakse hulknurga **külgedeks**, nurgad iga kahe naaberkülje vahel on hulknurga **nurgad**, nurkade tipud on hulknurga **tipud**.

Seejuures on hulknurga nurga sisemiseks piirkonnaks see piirkond, millesse kuulub nurga tipuga vahetult kokkupuutuv hulknurga oma sisemine piirkond. Nii on hulknurga *MNPQRS* (joon. 33) puhul nurgaks tipu *P* juures nurk, mis on suurem kahest täisnurgast (viirutatud sisemise piirkonnaga). Hulknurka piiravat murdjoont nimetatakse tema **kontuuriks** ehk **piirjooneks** ja lõiku, mis võrdub kõigi külgede summaga, **perimeetriks** ehk **ümbermõõduks**.

Hulknurka nimetatakse **kumeraks**, kui ta on piiratud kumera murdjoonega; selline on näiteks hulknurk *ABCDE*, mis on kujutatud joonisel 33 (hulknurk *MNPQRS* pole kumer hulknurk). Meie tegeleme peamiselt kumerate hulknurkadega.

Iga sirget (nagu *AD*, *BE*, *MR*, . . . , joon. 33), mis ühendab hulknurga kaht mitte ühe külje juures asetseva nurga tippu, nimetatakse hulknurga **diagonaaliks**.

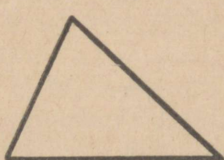


Joon. 33.

Hulknurga väiksem külgede arv on **kolm**. Külgede arvu järgi võivad hulknurgad olla kolmnurgad, nelinurgad, viisnurgad jne.

Lühidalt tähistatakse kolmnurka sümboliga △.

35. Kolmnurkade liigitelu. Kolmnurki liigitatakse külgede pikkuse ja nurkade suuruse järgi. Külgede järgi kolmnurgad on: **iseküIgsed** (joon. 34), kui kõik küljed on eri pikkusega, ja **võrdhaarsed** (joon. 35), kui kaks külge on ühepikkused; erijuhtumil nimetatakse võrdhaarset kolmnurka **võrdkülgseks** (joon. 36), kui kõik ta küljed on võrdsed.



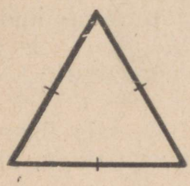
Joon. 34.

Joon. 35.

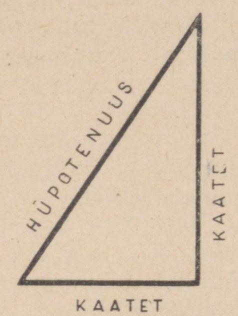
Nurkade suuruse järgi on kolmnurgad **teravnurksed** (joon. 36), kui kõik nurgad on teravnurgad, **täisnurksed** (joon. 37), kui üks nurk on täisnurk, ja **nürinurksed** (joon. 38), kui üks nurk on nürinurk.

Täisnurkses kolmnurgas nimetatakse külgi, mis moodustavad täisnurga, **kaatetiteks** ja täisnurga vastaskülge **hüpotenuusiks.**

36. Peamised jooned kolmnurgas. Kolmnurga külgedest üht nimetatakse mõnikord **aluseks,** selle vastas asetseva nurga tippu nimetatakse kolmnurga **tipuks.** Ristjoont, mis on tõmmatud tipust alusele või selle pikendusele, nimetatakse kolmnurga **kõrguseks.**



Joon. 36.

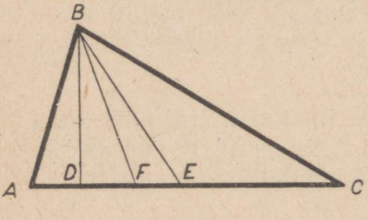


Joon. 37.

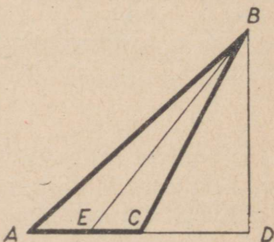
Joon. 38.

Kui kolmnurgas ABC (joon. 39 ja 39-a) on aluseks võetud külg AC, siis tipuks on B ja kõrguseks on BD.

Võrdhaarses kolmnurgas võetakse aluseks tavaliselt see külg, mis ei kuulu võrdsete külgede hulka; siis on ta tipuks võrdsete külgede vahel oleva nurga tipp.



Joon. 39.



Joon. 39-a.

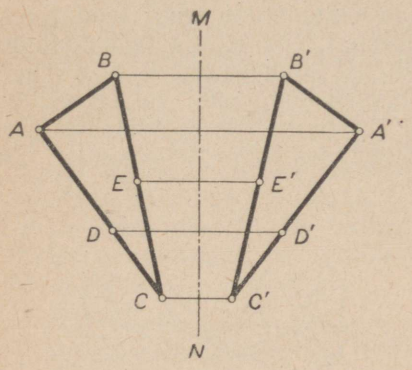
Sirglõiku BE (joon. 39 ja 39-a), mis ühendab mingi nurga tippu vastaskülje keskpunktiga, nimetatakse **mediaaniks** ehk **küljepoolitajaks.** Sirglõiku BF (joon. 39), mis jaotab kolmnurga mingi nurga pooleks, nimetatakse kolmnurga **nurgapoolitajaks** ehk **bisektoriks** (nurgapoolitaja ei ühti üldiselt ei mediaani ega kõrgusega). Kolmnurga igast tipust saab tõmmata ristjoone vastasküljele või selle pikendusele; järelikult on kolmnurgal kolm kõrgust.

Kolmnurga iga tippu saab ühendada vastaskülje keskpunktiga; järelikult on kolmnurgal kolm mediaani.

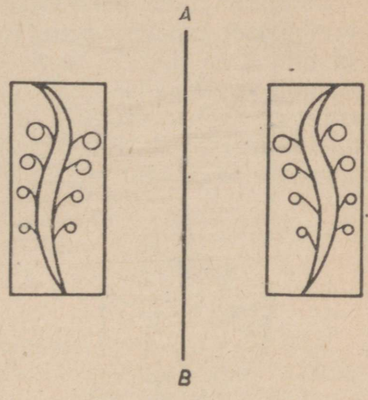
Samuti on selge, et kolmnurgal on kolm nurgapoolitajat.

Geomeetriliste kujundite teljeline sümmeetria.

37. Kolmnurkade, hulknurkade ja teiste geomeetriliste kujundite omaduste uurimisel esineb tihti juhtumeid, kus kahel võrdsel kujundil või kahel võrdsel lõigul või kahel punktil on eriline asend tasapinnal mingi sirge suhtes. Kui kaks mingisugust punkti A ja A' (joon. 40) asetsevad teine teisel pool sirget MN selle sirge ühel ja selsamal ristjoonel ning võrdsetel kaugustel ristjoone alusest



Joon. 40.



Joon. 41.

($Aa=A'a$), siis niisuguseid punkte nimetatakse s ü m m e e t r i l i s t e k s punktideks sirge MN suhtes.

Kaht kujundit (või ühe ja sellesama kujundi kaht osa) nimetatakse sümmeetrilisteks sirge MN suhtes, kui ühe kujundi (või kujundi ühe osa) igale punktile A, B, C, D, E,... (joon. 40) vastavad teise kujundi (või kujundi teise osa) sümmeetrilised punktid A', B', C', D', E',... ja ümberpöördult. Sirget MN nimetatakse sel juhul **sümmeetriateljeks.** Siin tarvitatakse sõna «telg» seepärast, et kui tasapinna osa, mis asetseb ühel pool sirget MN (näiteks vasakul pool), hakkame pöörama MN kui telje ümber niikaua, kuni ta ühtib selle osaga, mis asetseb teisel pool sirget MN (parema poolega), s i i s s ü m m e e t r i l i s e d k u j u n d i d ü h t i v a d, sest punkt A ühtib seejuures punkti A'-ga, punkt B punkti B'-ga jne.

Ümberpöördult, kui ühel pool mingit sirget asetseva kujundi saame selle pööramisega ümber antud sirge ühtistada teisel pool sirget asetseva kujundiga, siis on need kujundid sümmeetrilised pöörlemistelje suhtes. Öeldust järeldub, et **kaks kujundit, mis on sümmeetrilised mingi telje suhtes, on võrdsed.**

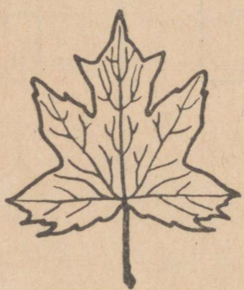
Sümmeetriat telje suhtes nimetatakse teljeliseks sümmeetriaks.

M ä r k u s. Kuigi sümmeetrilisi kujundeid saab pööramisega ümber sümmeetriatelje ühtistada, pole nad siiski, üldiselt rääkides, samased oma asendilt tasapinnal. Seda tuleb mõista järgmiselt.

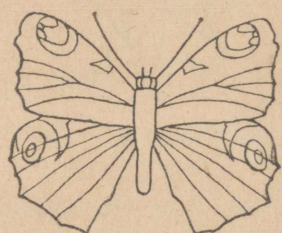
Selleks et ühtistada kaks sümmeetrilist kujundit, tuleb üks neist ümber pöörata ja järelikult ajutiselt tasapinnalt välja tõsta. Kui seda mitte teha, siis pole mingi liikumisega sellel tasapinnal võimalik kujundit ühtistada temaga telje suhtes sümmeetrilise kujundiga.

Joonisel 41 on kujutatud sirge AB suhtes kaks sümmeetrilist mustrit. Pöörates parempoolset mustrit ümber sirge AB, võib ta ühtistada vasakpoolse mustriga.

Seejuures tuleb parempoolne muster ümber pöörata. Kui aga parempoolset mustrit mitte eraldada tasapinnalt, vaid teda nihutada nii, et ta liuguks samal tasapinnal, siis ei saa teda kuidagi ühtistada vasakpoolse mustriga. Teljelist sümmeetriat esineb sageli igapäevases elus. Mustrid dekoratiivseil kangastel ja tapeetidel, arhitektuurilised ilustused hoonetel tasapinnaliste joonistuste näol ja hoonete fassaadid ise on sümmeetrilised mõne telje suhtes. Ka



Joon. 42.



Joon. 43.

looduses esineb tihti sümmeetrilisi kujundeid. Nii näiteks on puude lehed ja õite kroonlehed sümmeetrilised varre suhtes. Niisugune on joonisel 42 kujutatud vahtraleht. Liblikate tiivad ja nende värvikiri on sümmeetrilised keha telje suhtes (joon. 43).

Võrdhaarse kolmnurga omadusi.

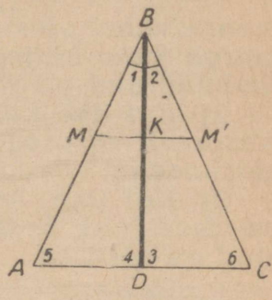
38. Teoreemid. ***1. Võrdhaarse kolmnurga tipunurga poolitaja on ühtlasi selle kolmnurga mediaaniks ja kõrguseks.***

2. Võrdhaarse kolmnurga alusnurgad on võrdsed.

Olgu $\triangle ABC$ (joon. 44) võrdhaarne ja sirge BD poolitagu tema tipunurga B. Tuleb tõestada, et nurgapoolitaja BD on ka mediaaniks ja kõrguseks.

Kujutleme, et $\triangle ABD$ on pööratud külje BD kui telje ümber nii, et ta on langenud kolmnurgale BDC. Siis nurkade *1* ja *2* võrdsuse tõttu külg AB langeb küljele BC ja nende külgede võrdsuse tõttu punkt A langeb punkti C. Seepärast DA ühtib DC-ga, nurk 4 ühtib nurgaga 3 ja nurk 5 ühtib nurgaga 6, tähendab $DA=DC$, $\angle 4=\angle 3$ ja $\angle 5=\angle 6$. Sellest, et $DA=DC$, järeldub, et BD on mediaan; sellest, et nurgad 3 ja 4 on võrdsed, järeldub, et need nurgad on täisnurgad ja BD on järelikult kolmnurga kõrgus; lõpuks, alusnurgad 5 ja 6 on võrdsed.

39. Järeldus. Näeme, et võrdhaarses kolmnurgas ABC (joon. 44) ühel ja samal sirgel BD on neli omadust: ta on tipunurga poolitaja, aluse mediaan, kõrgus ja ka aluse keskristjoon. Et juba üks neist omadusist määrab täielikult sirge BD asendi, siis ühe omaduse olemasolust tulenevad ka kõik teised omadused. Näiteks *kõrgus, mis on tõmmatud võrdhaarse kolmnurga alusele, on samal ajal tipunurga poolitajaks, aluse mediaaniks ja aluse keskristjooneks.*



Joon. 44.

40. Võrdhaarse kolmnurga sümmeetria. Nägime, et nurgapoolitaja BD jaotab võrdhaarse $\triangle ABC$ (joon. 44) kaheks kolmnurgaks (vasak- ja parempoolseks), mida saab pööramisega ümber BD ühtistada. Sellest võib järeldada, et missuguse punkti me ka võtaksime võrdhaarse kolmnurga ühel poolel, alati leidub tema teisel poolel punkt, mis on sümmeetriline esimese punktiga telje BD suhtes. Võtame näiteks punkti M küljel AB (joon. 44). Tõmbame sellest BD-le ristjoone MK ja pikendame seda ristjoont lõikumiseni küljega BC. Siis saame sellel küljel punkti M', mis on sümmeetriline punktiga M telje BD suhtes. Tõepoolest, pöörates $\triangle ABD$ ümber BD ning ühtistades ta $\triangle BCD$-ga, KM langeb KM'-le (täisnurkade võrdsuse tõttu), külg BA langeb küljele BC (nurkade 1 ja 2 võrdsuse tõttu); tähendab, punkt M, mis asetseb nii KM-l kui ka BA-l, langeb KM'-l kui ka BC-l asetsevasse punkti M'. Siit on näha, et $KM=KM'$. Nii asetsevadki punktid M ja M' mõlemal pool DB-d ühel ja samal DB ristjoonel ja võrdsetel kaugustel selle ristjoone alusest; tähendab, need punktid on sümmeetrilised telje BD suhtes. Seega, *võrdhaarses kolmnurgas tipunurga poolitaja on kolmnurga sümmeetriateljeks.*

Kolmnurkade võrdsuse (kongruentsuse) tunnused.

41. Eelmõisted. Kaks geomeetrilist kujundit, näiteks kaks kolmnurka, on, nagu teame, võrdsed (kongruentsed) sel korral, kui neid saab teineteisele paigutada nii, et nad ühtivad. Ühtivates kolmnurkades peavad muidugi olema vastavalt võrdsed kõik elemendid, s. o. küljed, nurgad, mediaanid ja nurgapoolitajad. Kuid selleks, et otsustada, kas kaks kolmnurka on võrdsed või mitte, pole tingimata tarvilik tõestada kõigi elementide võrdsust; piisab juba sellest, kui veenduda, et mõned elemendid on vastavalt võrdsed.

42. Kolmnurkade võrdsuse kolm tunnust.

T e o r e e m i d. **1) *Kui ühe kolmnurga kaks külge ja nende vahel olev nurk on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kahe küljega ja nende vahel oleva nurgaga, siis kolmnurgad on võrdsed.***

2) *Kui ühe kolmnurga külg ja selle lähisnurgad on vastavalt võrdsed teise kolmnurga külje ja selle lähisnurkadega, siis kolmnurgad on võrdsed.*

3) *Kui ühe kolmnurga kolm külge on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kolme küljega, siis kolmnurgad on võrdsed.*

1. Olgu ABC ja $A_1B_1C_1$ kaks kolmnurka (joon. 45), millel

$$AC = A_1C_1,\ AB = A_1B_1 \text{ ja } \angle A = \angle A_1.$$

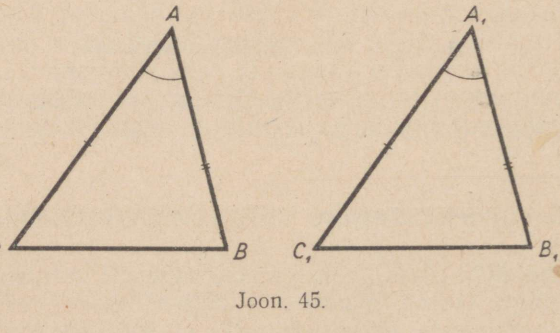
Tuleb tõestada, et need kolmnurgad on võrdsed.

Paigutame kolmnurga ABC kolmnurgale $A_1B_1C_1$ nii, et punkt A langeb punkti A_1 ja külg AC läheb mööda külge A_1C_1[1]. Siis nende külgede võrdsuse tõttu punkt C ühtib punktiga C_1, nurkade A ja A_1 võrdsuse tõttu külg AB läheb mööda külge A_1B_1 ja nende külgede võrdsuse tõttu punkt B ühtib punktiga B_1; seepärast ka külg CB ühtib küljega C_1B_1 (sest kaks punkti võib ühendada ainult ühe sirgega), ja kolmnurgad ühtivad; tähendab, nad on võrdsed.

2. Olgu ABC ja $A_1B_1C_1$ kaks kolmnurka (joon. 46), millel

$$\angle C = \angle C_1,\ \angle B = \angle B_1 \text{ ja } CB = C_1B_1.$$

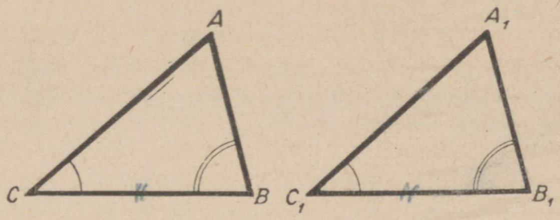
Tuleb tõestada, et need kolmnurgad on võrdsed.



Joon. 45.

[1] Selles paragrahvis näidatud pealitamiste teostamiseks tuleb mõnikord pealitatav kolmnurk ümber pöörata.

Paigutame kolmnurga ABC kolmnurgale $A_1B_1C_1$ nii, et punkt C langeb punkti C_1 ja külg CB läheb mööda külge C_1B_1. Siis nende külgede võrdsuse tõttu punkt B ühtib punktiga B_1, kuna nurkade B ja B_1 ning C ja C_1 võrdsuse tõttu külg BA läheb mööda külge B_1A_1 ja külg CA mööda C_1A_1.



Jcon. 46.

Et aga kaks sirget võivad lõikuda ainult ühes punktis, siis tipp A peab ühtima tipuga A_1. Seega kolmnurgad ühtivad; tähendab, nad on võrdsed.

3. Olgu ABC ja $A_1B_1C_1$ kaks kolmnurka (joon. 47), millel

$$AB=A_1B_1,\ BC=B_1C_1 \text{ ja } CA=C_1A_1.$$

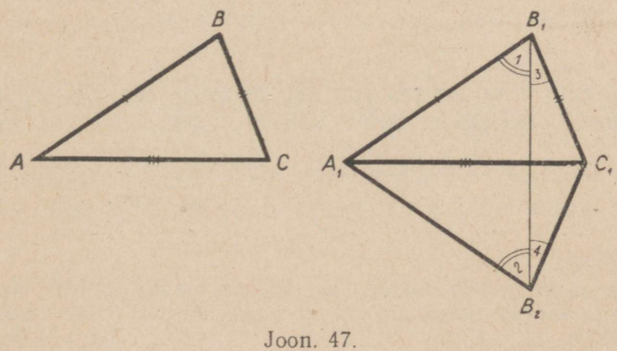
Tuleb tõestada, et need kolmnurgad on võrdsed.

Tõestada seda võrdsuse tunnust pealitamisega, nagu seda tegime kahe esimese tunnuse tõestamisel, ei saa, sest midagi teadmata nurkade suurusest ei saa me väita, et kahe võrdse külje ühtimisel ühtivad ka ülejäänud küljed.

Pealitamise asemel kasutame siin k õ r v a l e p a i g u t a m i s t.

Paigutame kolmnurga ABC kolmnurga $A_1B_1C_1$ *k*õrvale nii, et võrdsed küljed AC ja A_1C_1 ühtivad. Siis kolmnurk ABC võtab asendi $A_1C_1B_2$.

Punktide B_1 ja B_2 ühendamisel sirgega saame kaks võrdhaarset kolmnurka: $A_1B_1B_2$ ja $B_1C_1B_2$; neil on ühine alus B_1B_2. Võrd-



Joon. 47.

haarses kolmnurgas on aga aluse lähisnurgad võrdsed (§ 38); järelikult $\angle 1 = \angle 2$ ja $\angle 3 = \angle 4$ ja seepärast $\angle A_1B_1C_1 = \angle A_1B_2C_1 = \angle B$.

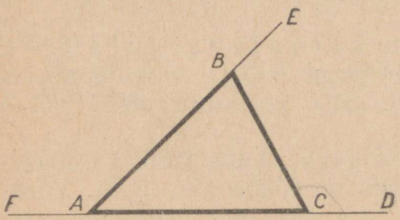
Niisugusel juhtumil peavad aga kolmnurgad olema võrdsed, sest ühe kolmnurga kaks külge ja nende vahel olev nurk on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kahe külje ja nende vahel oleva nurgaga [1].

M ä r k u s. *Võrdsetes kolmnurkades on võrdsete külgede vastas võrdsed nurgad* ja ümberpöördult: *võrdsete nurkade vastas on võrdsed küljed.*

Tõestatud teoreemid kolmnurkade võrdsusest ja oskus võrdseid kolmnurki ära tunda näidatud tunnuste järgi kergendavad suurel määral paljude geomeetriliste ülesannete lahendamist ning on tarvilikud paljude teoreemide tõestamiseks. Teoreemid kolmnurkade võrdsusest on peamiseks vahendiks keerukate geomeetriliste kujundite omaduste kindlakstegemisel. Õpilased veenduvad selles aine edasisel läbivõtmisel.

Kolmnurga välisnurk ja selle omadus.

43. D e f i n i t s i o o n. *Kolmnurga* (või hulknurga) *mingi nurga kõrvunurka nimetatakse selle kolmnurga* (või hulknurga) **välisnurgaks.** Välisnurgad on näiteks nurgad BCD, CBE ja BAF (joon. 48). Välisnurkadest eraldamiseks nimetatakse kolmnurga (või hulknurga) oma nurki **sisenurkadeks.**



Joon. 48.

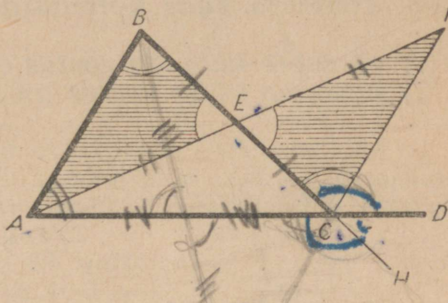
Kolmnurga (või hulknurga) igale nurgale saab joonestada kaks välisnurka (pikendades nurga üht või teist haara). Need kaks nurka on tippnurkadena võrdsed.

44. Teoreem. ***Kolmnurga välisnurk on suurem igast sisenurgast, mis pole selle välisnurga kõrvunurgaks.***

Näiteks tõestame, et kolmnurga ABC välisnurk BCD (joon. 49) on suurem kummastki sisenurgast A ja B, mis pole välisnurga

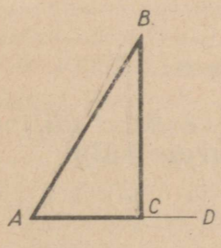
[1] Selleks et sirge B_1B_2 oleks alati kujundi $A_1B_1C_1B_2$ sees, tuleb kolmnurgad üksteise kõrvale paigutada nii, et nende ühiseks küljeks A_1C_1 on kõige suurem külg.

BCD kõrvunurkadeks. Tõmbame küljele *BC* mediaani *AE* ja selle pikendusele paigutame lõigu *EF*=*AE*. Punkt *F* asetseb ilmselt nurga *BCD* sees. Ühendame *F* ja *C* sirgega. Kolmnurgad *ABE* ja *EFC* (viirutatud) on võrdsed, sest neil on punkti *E* juures võrdsed nurgad kahe vastavalt võrdse külje vahel. Kolmnurkade võrdsusest järeldame, et nurgad *B* ja *ECF*, kui võrdsete külgede *AE* ja *EF* vastasnurgad, on võrdsed. Nurk *ECF* moodustab aga ainult osa välisnurgast *BCD* ning on seepärast viimasest väiksem; järelikult ka nurk *B* on väiksem nurgast *BCD*.

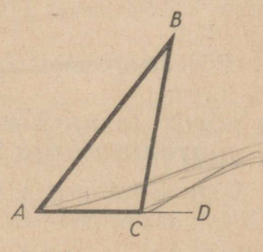


Joon. 49.

Pikendades külge *BC* väljapoole *C*-d, saame välisnurga *ACH*, mis on võrdne nurgaga *BCD*. Kui tõmmata tipust *B* küljele *AC* mediaan ja seda pikendada mediaani pikkuse võrra väljapoole *AC*-d, siis võime täpselt samuti tõestada, et nurk *A* on väiksem nurgast *ACH*, s. t. väiksem nurgast *BCD*.



Joon. 50.



Joon. 51.

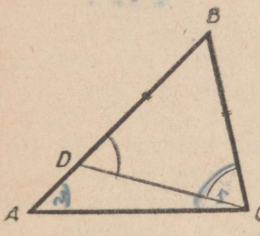
45. Järeldus. *Kui kolmnurgas üks nurk on täisnurk või nürinurk, siis teised nurgad on teravnurgad.*

Tõepoolest: oletades, et kolmnurgas *ABC* mingi nurk *C* (joon. 50 ja 51) on täisnurk või nürinurk, siis selle kõrvunurk *BCD* peab olema täisnurk või teravnurk; nurgad *A* ja *B* on tõestatu põhjal väiksemad sellest välisnurgast ja on seega teravnurgad.

46. Teoreemid. ***Igas kolmnurgas:***

1) võrdsete külgede vastas on võrdsed nurgad;
2) suurema külje vastas on suurem nurk.

1. Kui kolmnurga kaks külge on võrdsed, siis kolmnurk on võrdhaarne; võrdhaarse kolmnurga alusnurgad on võrdsed (§ 38), tähendab, nurgad võrdsete külgede vastas on võrdsed.



Joon. 52.

2. Olgu kolmnurgas ABC (joon. 52) külg AB suurem kui BC; tuleb tõestada et nurk BCA on suurem nurgast A.

Paigutame suuremale küljele BA tipust B lõigu BD, mis on võrdne lühema küljega BC, ja ühendame punktid D ja C sirgega. Saame võrdhaarse kolmnurga DBC, mille alusnurgad, s. o. $\angle BDC$ ja $\angle BCD$, on võrdsed. Nurk BDC, kolmnurga ADC välisnurk, on suurem nurgast A, järelikult ka nurk BCD on suurem nurgast A, seepärast on nurk BCA ammugi suurem nurgast A, mida oligi tarvis tõestada.

47. Pöördteoreemid. ***Igas kolmnurgas:***

1) võrdsete nurkade vastas on võrdsed küljed;
2) suurema nurga vastas on suurem külg.

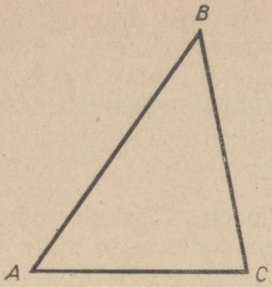
1. Olgu kolmnurgas ABC nurgad A ja C võrdsed (joon. 53); tuleb tõestada, et $BA=BC$.

Väidame vastupidist, s. t. väidame, et küljed AB ja BC pole võrdsed. Siis üks külgedest peab olema teisest pikem ja, järelikult, otsese teoreemi põhjal peab nurkadest A ja C olema üks suurem teisest. See aga räägib vastu eeldusele, et $\angle A=\angle C$; tähendab, ei saa olla, et küljed AB ja BC pole võrdsed; jääb järele oletus, et $AB=BC$.

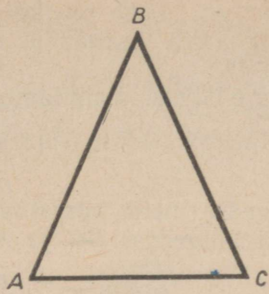
2. Olgu kolmnurgas ABC (joon. 54) nurk C suurem nurgast A; tuleb tõestada, et $AB>BC$.

Väidame vastupidist, s. t. väidame, et AB pole suurem BC-st; siis võib esineda kaks juhtumit: kas $AB=BC$, või $AB<BC$.

Esimesel juhtumil, vastavalt otsesele teoreemile, nurk C peab võrduma nurgaga A, teisel juhtumil nurk C peab olema väiksem nurgast A; nii üks kui teine järeldus räägib vastu eeldusele; tähendab, mõlemad juhtumid tuleb kõrvale jätta. Jääb järele ainus võimalik juhtum, et $AB>BC$.



Joon. 53.



Joon. 54.

J ä r e l d u s e d.

1) *Võrdkülgses kolmnurgas on kõik nurgad võrdsed.*
2) *Võrdnurkses kolmnurgas on kõik küljed võrdsed.*

48. Vastuväiteline tõestusviis. Viisi, mida meie äsja kasutasime pöördteoreemide tõestamisel, nimetatakse **vastuväiteliseks tõestuseks** ehk **absurdsusele viimiseks** (*reductio ad absurdum*).

Esimese nimetuse sai see viis sellest, et arutluse alguses tehakse oletus, mis on **vastupidine** (räägib vastu) sellele, mida on tarvis tõestada. Absurdsusele viimiseks nimetatakse seda viisi seetõttu, et arutledes tehtud oletuse alusel, tuleme absurdsele otsusele. Sellise järelduse saamine sunnib meid loobuma algul tehtud oletusest ja tunnustama väite õigsust.

Seda viisi kasutatakse tihti teoreemide tõestamisel.

49. Märkus pöördteoreemide kohta. Algajad teevad geomeetria õppimisel sageli ühe väga tüüpilise vea. Viga seisab selles, et pöördteoreemi õigsust loetakse endastmõistetavaks, kui otsene teoreem on tõestatud. Siit tulenebki kujutlus, et pöördteoreemide tõestamine on liigne. Sellise järelduse väärust võib näidata rea näidetega. Üks niisugune näide oli toodud § 30. Seepärast tulebki pöördteoreeme, kui nad on õiged, eraldi tõestada.

Murdjoone ja sirglõigu võrdlev pikkus.

50. Teoreem. ***Kolmnurgas on iga külg väiksem kahe teise külje summast.***

Kui kolmnurgas võtame mitte suurima külje, siis on ta muidugi väiksem kui kahe teise külje summa. Tähendab, tuleb tõestada, et isegi kolmnurga s u u r i m külg on väiksem kahe teise külje summast.

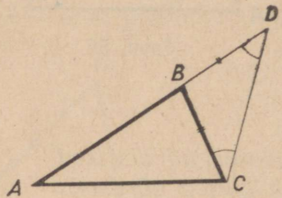
Olgu kolmnurgas ABC (joon. 55) suurimaks küljeks AC. Pikendame külge AB, paigutame selle pikendusele $BD=BC$ ja tõmbame sirglõigu CD. Et $\triangle BDC$ on võrdhaarne, siis $\angle D = \angle DCB$; seepärast on nurk D väiksem nurgast DCA ja järelikult kolmnurgas ADC on külg AC väiksem kui AD (§ 47), s. t. $AC<AB+BD$. Asendades BD BC-ga, saame:

$$AC<AB+BC.$$

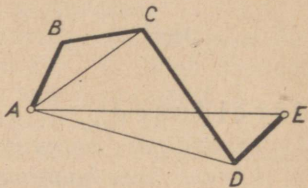
J ä r e l d u s. Lahutame saadud võrratuse mõlemast poolest AB või BC:

$$AC-AB<BC;$$
$$AC-BC<AB.$$

Lugedes neid võrratusi paremalt poolt vasakule näeme, et kumbki külgedest BC ja AB on suurem kahe teise külje vahest;



Joon. 55.



Joon. 56.

ilmselt võib seda ütelda ka kolmanda, suurima külje AC kohta; seega: *kolmnurgas iga külg on suurem kahe teise külje vahest.*

51. Teoreem. ***Sirglõik, mis ühendab kaht mingisugust punkti, on väiksem igast neid punkte ühendavast murdjoonest.***

Kui murdjoon, millest siin on jutt, koosneb ainult kahest lülist, siis on teoreem juba tõestatud eelmises paragrahvis. Võtame arutlusele juhtumi, kui murdjoon koosneb enamast kui kahest lülist.

Olgu AE (joon. 56) sirglõik, mis ühendab punkte A ja E, $ABCDE$ aga mingi murdjoon nende punktide vahel. Tuleb tõestada, et AE on väiksem summast $AB+BC+CD+DE$.

Ühendades punkti A punktidega C ja D, leiame eelmise teoreemi põhjal:

$$AE<AD+DE;$$
$$AD<AC+CD;$$
$$AC<AB+BC.$$

Liidame liikmeti need võrratused ja saadud võrratuse mõlemast poolest lahutame AD ja AC, saame:

$$AE<AB+BC+CD+DE.$$

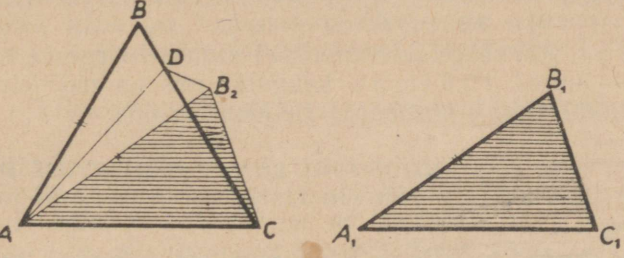
52. Kahe vastavalt võrdse küljega kolmnurgad.

Teoreemid. ***Kui ühe kolmnurga kaks külge on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kahe küljega, siis:***

1) ***nende külgede vahel oleva suurema nurga vastas on suurem külg;***

2) ümberpöördult: ***mittevõrdseist külgedest suurema külje vastas on suurem nurk.***

1. Olgu kolmnurkades ABC ja $A_1B_1C_1$ (joon. 57) antud: $AC=A_1C_1$, $AB=A_1B_1$ ja $\angle BAC>\angle A_1$. Tuleb tõestada, et $BC>B_1C_1$. Paigutame kolmnurga $A_1B_1C_1$ kolmnurgale ABC nii, et külg A_1C_1 ühtib küljega AC. Et aga $\angle A_1<\angle BAC$, siis külg A_1B_1 on nurga BAC sees; võtku kolmnurk $A_1B_1C_1$ asendi AB_2C



Joon. 57.

(tipu B_2 asend võib olla kolmnurga ABC sees, temast väljaspool või ka küljel BC — teoreemi võib tõestada kõigi nende juhtumite kohta). Tõmbame nurga BAB_2 poolitaja AD ja ühendame D B_2-ga; saame kaks kolmnurka: ABD ja DAB_2; need kolmnurgad on võrdsed, sest neil on ühine külg AD, $AB=AB_2$ eelduse põhjal ja $\angle BAD=\angle DAB_2$ konstruktsiooni põhjal. Kolmnurkade võrdsusest järeldub, et $BD=DB_2$. Kolmnurgast DCB_2 saame: $B_2C<B_2D+$ $+DC$ (§ 50) ehk (asendades B_2D BD-ga)

$$B_2C<BD+DC, \text{ tähendab } B_1C_1<BC.$$

2. Olgu samades kolmnurkades ABC ja $A_1B_1C_1$ antud: $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$ ja $BC>B_1C_1$; tuleb tõestada, et $\angle BAC>$ $\angle A_1$.

Väidame vastupidist, s. o. et nurk BAC pole suurem nurgast A_1; siis võib esineda kaks juhtumit: kas $\angle BAC=\angle A_1$ või $\angle BAC<\angle A_1$. Esimesel juhul oleksid kolmnurgad võrdsed ja järelikult külg BC võrduks B_1C_1-ga, mis aga räägib vastu eeldusele; teisel juhul peaks külg BC (teoreemi 1 põhjal) olema väiksem küljest B_1C_1, mis samuti on vastuolus eeldusega. Tähendab, mõlemad juhtumid tuleb kõrvale jätta — jääb järele ainus võimalik juhtum, et $\angle BAC>\angle A_1$.

Ristjoone ja kaldjoone võrdlev pikkus.

53. Teoreem. ***Mingist punktist sirgele tõmmatud ristjoon on väiksem samast punktist samale sirgele tõmmatud kaldjoonest*** [1].

[1] Paragrahvides 53, 54 ja 55 on lühiduse mõttes tarvitatud termineid «ristjoon» ja «kaldjoon» mõistete «ristsirge lõik antud punktist ristjoone aluseni» ja «kaldsirge lõik antud punktist kaldjoone aluseni» asemel.

Olgu AB (joon. 58) ristjoon, mis on tõmmatud punktist A sirgele MN, ja AC mingi kaldjoon, tõmmatud samast punktist A sirgele MN; tuleb tõestada, et $AB<AC$.

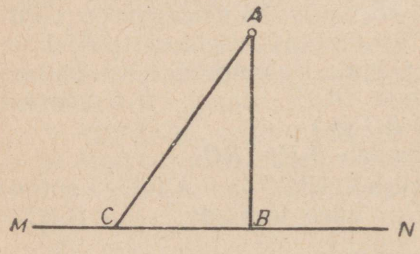
Kolmnurgas ABC on nurk B täisnurk, nurk C aga teravnurk (§ 45); tähendab $\angle C<\angle B$ ja seepärast on $AB<AC$, mida oligi tarvis tõestada.

M ä r k u s. Kui räägitakse «punkti kaugusest sirgest», siis mõeldakse selle juures l ü h i m a t kaugust, mis on mõõdetud antud punktist antud sirgele tõmmatud ristjoont mööda.

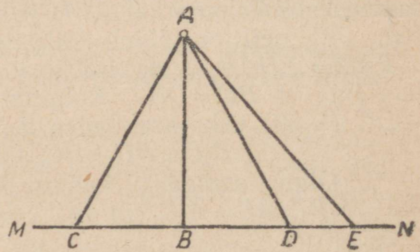
54. Teoreem. ***Kui väljaspool sirget asetsevast punktist on tõmmatud sellele sirgele ristjoon ja mõned kaldjooned, siis:***

1) ***kui kahe kaldjoone alused on võrdsel kaugusel ristjoone alusest, siis kaldjooned on võrdsed;***

2) ***kui kahe kaldjoone alused pole võrdsel kaugusel ristjoone alusest, siis on see kaldjoon pikem, mille alus on kaugemal ristjoone alusest.***



Joon. 58.



Joon. 59.

1. Olgu AC ja AD (joon. 59) kaldjooned, mis on tõmmatud punktist A sirgele MN. Nende alused C ja D on ühekaugusel ristjoone AB alusest, s. o. $CB=BD$; tuleb tõestada, et $AC=AD$.

Kolmnurkadel ABC ja ABD on ühine külg AB, peale selle $BC=BD$ (eelduse põhjal) ja $\angle ABC=\angle ABD$ (kui täisnurgad); seega need kolmnurgad on võrdsed ja seepärast ka $AC=AD$.

2. Olgu AC ja AE (joon. 59) kaks niisugust punktist A sirgele MN tõmmatud kaldjoont, mille alused pole ühekaugusel ristjoone alusest; olgu näiteks $BE>BC$. Tuleb tõestada, et $AE>AC$.

Paigutame $BD=BC$ lõigule BE ja tõmbame AD. Äsjatõestatu põhjal $AC=AD$. Võrdleme AE-d AD-ga. Nurk ADE on kolmnurga ABD välisnurk ja seepärast on ta suurem täisnurgast ABD; järelikult on nurk ADE nürinurk ja seepärast peab nurk AED olema teravnurk (§ 45), tähendab $\angle ADE>\angle AED$ ning järelikult $AE>AD$, seepärast $AE>AC$.

55. Pöördteoreemid. ***Kui väljaspool sirget asetsevast punktist*** (joon. 59) ***on tõmmatud sellele sirgele ristjoon ja mõned kaldjooned, siis:***

1) kui kaks kaldjoont on võrdsed, siis nende alused on võrdsel kaugusel ristjoone alusest;

2) kui kaks kaldjoont pole võrdsed, siis pikema kaldjoone alus on kaugemal ristjoone alusest.

Tõestagu õpilased ise need teoreemid (vastuväiteliselt).

Täisnurksete kolmnurkade võrdsuse tunnused.

56. Kaks tunnust, mis ei nõua eri tõestust. Et täisnurksetes kolmnurkades nurgad kaatetite vahel kui täisnurgad on alati võrdsed, siis täisnurksed kolmnurgad on võrdsed:

1) kui ühe kolmnurga kaatetid on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kaatetitega;

2) kui ühe kolmnurga kaatet ja selle terav lähisnurk on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kaateti ja selle terava lähisnurgaga.

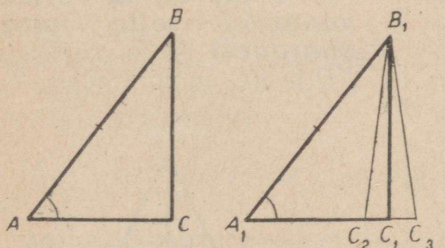
Kumbki neist tunnuseist ei nõua erilist tõestust, sest nad on üldiste tunnuste erijuhtumid. Tõestame veel kaks järgmist tunnust, mis on kehtivad ainult täisnurksete kolmnurkade puhul.

57. Kaks eri tõestust nõudvat tunnust.

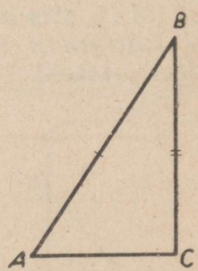
Teoreemid. ***Täisnurksed kolmnurgad on võrdsed:***

1) kui ühe kolmnurga hüpotenuus ja teravnurk on vastavalt võrdsed teise kolmnurga hüpotenuusi ja teravnurgaga või

2) kui ühe kolmnurga hüpotenuus ja kaatet on vastavalt võrdsed teise kolmnurga hüpotenuusi ja kaatetiga.



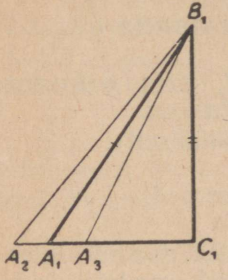
Joon. 60.



Joon. 61.

1. Olgu ABC ja $A_1B_1C_1$ (joon. 60) kaks täisnurkset kolmnurka, millel $AB = A_1B_1$ ja $\angle A = \angle A_1$; tuleb tõestada, et need kolmnurgad on võrdsed.

Asetame kolmnurga ABC kolmnurgale $A_1B_1C_1$ nii, et võrdsed hüpotenuusid ühtivad. Siis nurkade A ja A_1 võrdsuse tõttu kaatet AC läheb piki A_1C_1. Seejuures punkt C peab ühtima punktiga C_1, sest oletusel, kui C ei ühti punktiga C_1, peaks kaatet BC võtma asendi B_1C_2 või B_1C_3, mis aga pole võimalik, sest ühest punktist B_1 ei saa sirgele A_1C_1 tõmmata kaht ristjoont (B_1C_1 ja B_1C_2 või B_1C_1 ja B_1C_3).



Joon. 62.

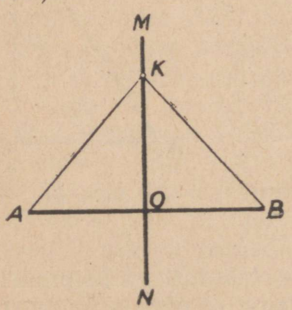
2. Olgu (joon. 61 ja 62) täisnurksetes kolmnurkades antud: $AB=A_1B_1$ ja $BC=$ $=B_1C_1$; tuleb tõestada, et need kolmnurgad on võrdsed.

Asetame kolmnurga ABC kolmnurgale $A_1B_1C_1$ nii, et võrdsed kaatetid BC ja B_1C_1 ühtivad. Siis täisnurkade võrdsuse tõttu CA läheb piki C_1A_1. Seejuures hüpotenuus AB peab ühtima hüpotenuusiga A_1B_1; vastasel korral, kui ta võtaks asendi A_2B_1 või A_3B_1, oleks meil juhtum, kus kaks võrdset kaldjoont (A_1B_1 ja A_2B_1 või A_1B_1 ja A_3B_1) pole ühekaugusel ristjoone alusest, mis ei ole võimalik (§ 54).

Sirglõigu keskristjoone ja nurgapoolitaja omadus.

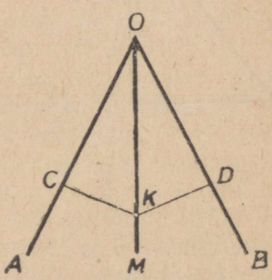
58. Sirglõigu keskristjoone omadus on väga sarnane nurgapoolitaja omadusega. Selleks et seda sarnasust paremini näha, esitame tõestused rööbiti.

1) ***Kui mingi punkt*** (K, joon. 63) ***asetseb sirglõigu*** (AB) ***keskristjoonel*** (MN), ***siis on ta võrdsel kaugusel selle sirglõigu otstest*** (s. o. KA = $= KB$).



Joon. 63.

1) ***Kui mingi punkt*** (K, joon. 64) ***asetseb nurga*** (AOB) ***poolitajal*** (OM), ***siis on ta võrdsel kaugusel selle nurga haaradest*** (s. o. ristlõigud KD ja KC on võrdsed).



Joon. 64.

Et MN on risti AB-ga ja $AO=OB$, siis AK ja KB on sirgele AB kaldjooned, mille alused on võrdsel kaugusel ristjoone alusest; tähendab $KA=KB$.

2) **Pöördteoreem.**

Kui mingi punkt (K, joon. 63) ***on võrdsel kaugusel sirglõigu*** (AB) ***otspunktidest*** (s. o. kui $KA = KB$), ***siis asetseb see punkt sirglõigu*** (AB) ***keskristjoonel.***

Tõmbame läbi K sirge $MN \perp AB$. Saame kaks täisnurkset kolmnurka: KAO ja KBO; need kolmnurgad on võrdsed, sest neil on ühine kaatet KO ja võrdsed hüpotenuusid. Seepärast $AO=OB$. Tähendab, sirge MN, mis on tõmmatud läbi K risti AB-ga, jaotab lõigu AB pooleks.

Et OM jaotab nurga pooleks, siis täisnurksed kolmnurgad OCK ja ODK on võrdsed, sest neil on ühine hüpotenuus ja võrdsed teravnurgad tipu O juures. Tähendab $KC=KD$.

2) **Pöördteoreem.**

Kui mingi punkt (K, joon. 64) ***on võrdsel kaugusel nurga haaradest*** (s. o. ristjooned KC ja KD on võrdsed), ***siis asetseb see punkt nurgapoolitajal.***

Tõmbame läbi O ja K sirge OM. Saame kaks täisnurkset kolmnurka: OCK ja ODK; need kolmnurgad on võrdsed, sest neil on ühine hüpotenuus ja võrdsed kaatetid CK ja DK. Seepärast on võrdsed ka nurgad tipu O juures. Tähendab, sirge OM, mis on tõmmatud läbi punkti K, on nurga AOB poolitaja.

59. Järeldus. Kahest tõestatud teoreemist (otsesest ja pöördteoreemist) saab tuletada veel järgmised vastandteoreemid.

Kui punkt ei asetse sirglõigu keskristjoonel, siis pole ta võrdsel kaugusel selle sirglõigu otspunktidest.

Kui punkt ei asetse nurgapoolitajal, siis pole ta võrdsel kaugusel selle nurga haaradest.

Tõestagu õpilased ise need teoreemid (vastuväiteliselt).

60. Geomeetriline koht. Mingi omadusega **punktide geomeetriliseks kohaks** nimetatakse niisugust joont (või pinda ruumis) või üldse niisugust punktide kogumikku, milles kõik punktid on selle omadusega ja milles pole ühtki punkti, millel see omadus puudub.

Näiteks antud punktist C võrdsel kaugusel r asetsevate punktide geomeetriliseks kohaks on ringjoon, mille keskpunktiks on C ja raadiuseks on r.

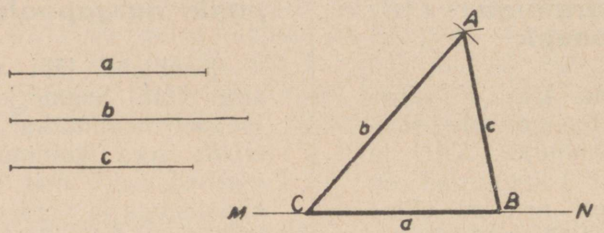
Eelmiste paragrahvide teoreemidest järeldub:

kahest antud punktist võrdsel kaugusel asetsevate punktide geomeetriliseks kohaks on antud punkte ühendavale sirglõigule tõmmatud keskristjoon;

nurga haaradest võrdsel kaugusel asetsevate punktide geomeetriliseks kohaks on nurgapoolitaja.

IV. Põhilised konstrueerimisülesanded.

61. Eelmärkusi. Eelmistes peatükkides tõestatud teoreemid lubavad lahendada mõningaid konstrueerimisülesandeid. Tähendame, et elementaargeomeetrias käsitletakse ainult niisuguseid ülesandeid, mida on võimalik lahendada joonlaua ja



Joon. 65.

sirkli abil. Joonestamiskolmnurga ja mõnede teiste riistade kasutamine on lubatud aja kokkuhoiu mõttes, pole aga tingimata tarvilik.

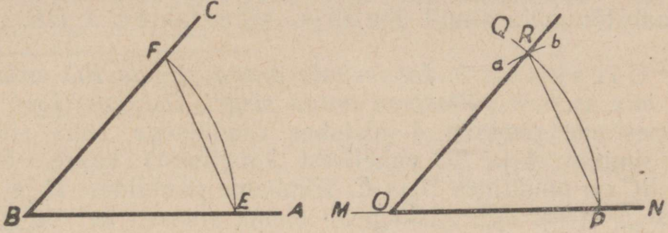
62. Ülesanne 1. *Joonestada kolmnurk tema kolme külje* a, b ja c järgi (joon. 65).

Paigutame mingile sirgele MN lõigu CB, mis on võrdne ühega kolmest küljest, näiteks a-ga. Joonestame punktidest C ja B kaks väikest kaart, ühe raadiusega b, teise raadiusega c. Punkti A, milles need kaared lõikuvad, ühendame punktidega B ja C. Kolmnurk ABC on otsitav.

Märkus. Et kolm sirglõiku võiksid olla kolmnurga külgedeks, on tingimata tarvilik, et suurem neist oleks väiksem kahe teise summast (§ 50).

63. Ülesanne 2. *Joonestada nurk, mis võrdub antud nurgaga ABC, mille üheks haaraks on antud sirge ja mille tipp asetseb antud punktis* O (punkt O on sirgel MN, joon. 66).

Joonestame tipust B kui keskpunktist mistahes raadiusega kaare EF antud nurga haarade vahele; siis tõmbame sirkli haaret muutmata punktist O kaare PQ. Edasi joonestame raadiusega, mis on võrdne lõiguga *EF*, punktist *P* kui keskpunktist kaare *ab*. Lõpuks tõmbame läbi punktide *O* ja *R* (kaarte lõikepunkt) sirge. Nurk *ROP* võrdub nurgaga *ABC*, sest kolmnurgad *ROP* ja *FBE* on võrdsed kui kolmnurgad, mille kolm külge on vastavalt võrdsed.



Joon. 66.

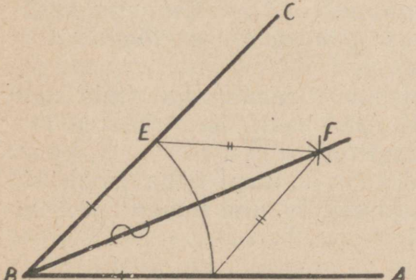
64. Ülesanne 3. *Poolitada antud nurk ABC* (joon. 67); teiste sõnadega: *joonestada antud nurga poolitaja ehk nurga sümmeetriatelg.*

Joonestame punktist *B* nurga haarade vahele mistahes raadiusega kaare *DE*. Siis tõmbame punktidest *D* ja *E* mistahes raadiusega, mis peab aga suurem olema poolest *D* ja *E* vahelisest kaugusest, kaks väikest kaart (vt. märkus ülesandel 1). Need kaared lõikuvad mingis punktis *F*. Tõmmates joone *BF*, saame nurga *ABC* poolitaja.

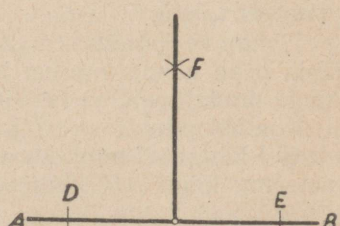
Tõestuseks ühendame punkti *F* punktidega *E* ja *D*, saame kaks kolmnurka *BEF* ja *BDF*; need kolmnurgad on võrdsed, sest neil on ühine külg *BF*, $BD = BE$ ja $DF = EF$ konstruktsiooni põhjal. Kolmnurkade võrdsusest järeldub, et $\angle ABF = \angle CBF$.

65. Ülesanne 4. *Joonestada sirgel AB antud punktist C sellele sirgele ristjoon* (joon. 68).

Paigutame sirgele *AB* mõlemale poole antud punkti *C* mingid võrdsed lõigud *CD* ja *CE*. Joonestame punktidest *E* ja *D* ühesuguse raadiusega (mis peab siiski olema suurem *CD*-st) kaks väi-



Joon. 67.



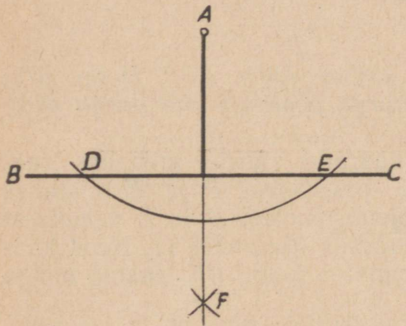
Joon. 68.

kest kaart; need kaared lõikuvad mingis punktis F. Sirge, mis on tõmmatud läbi punktide C ja F, ongi otsitav ristjoon.

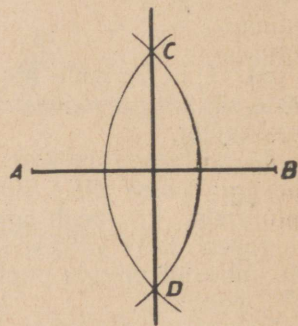
Punkt F on tõepoolest, nagu joonisest näha, võrdsel kaugusel punktidest D ja E; järelikult peab ta asetsema lõigu DE keskristjoonel (§ 58); lõigu DE keskpunktiks on C, aga läbi punktide C ja F saab tõmmata ainult ühe sirge; tähendab $FC \perp DE$.

66. Ülesanne 5. *Joonestada antud sirgele BC antud punktist A, mis asetseb väljaspool antud sirget, ristjoon* (joon. 69).

Joonestame punktist A mistahes raadiusega (mis siiski peab olema suurem A ja BC vahelisest kaugusest) kaare. See kaar lõikub BC-ga punktides D ja E. Tõmbame punktidest D ja E mingi raadiusega (mis aga siiski peab olema suurem kui $\frac{1}{2}$ DE) kaks



Joon. 69.



Joon. 70.

väikest kaart. Need kaared lõikuvad mingis punktis F. Sirge AF ongi otsitav ristjoon.

Kumbki punktidest A ja F on tõepoolest, nagu näha joonisest, võrdsel kaugusel punktidest D ja E. Niisugused punktid aga asetsevad sirglõigu DE keskristjoonel (§ 58).

67. Ülesanne 6. *Antud sirglõigule* (AB) *tõmmata keskristjoon* (joon. 70); teiste sõnadega: *joonestada sirglõigu* (AB) *sümmeetriatelg.*

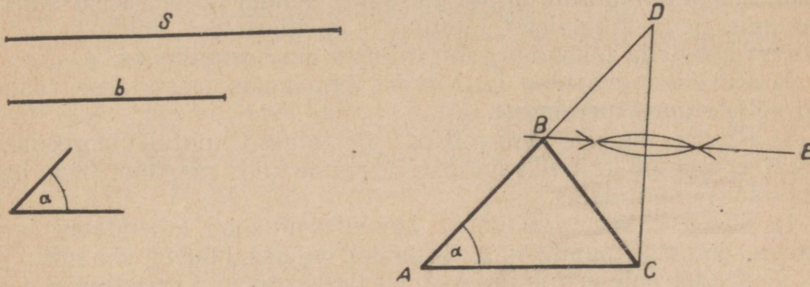
Tõmbame punktidest A ja B mistahes raadiusega (mis aga siiski peab olema suurem kui $\frac{1}{2}AB$) kaks kaart. Need kaared lõikuvad punktides C ja D. Sirge CD ongi otsitav ristjoon.

Kumbki punktidest C ja D on tõepoolest, nagu näha joonisest, võrdsel kaugusel punktidest A ja B; järelikult need punktid peavad asetsema lõigu AB sümmeetriateljel.

Ülesanne 7. *Poolitada antud sirglõik* (joon. 70). Lahendus samasugune nagu eelmiselgi ülesandel.

68. Näide keerukamast ülesandest. Läbiarutatud põhiülesannete abil võib lahendada ka keerukamaid ülesandeid. Näiteks lahendame järgmise ülesande.

Ü l e s a n n e. *Joonestada kolmnurk, kui on antud selle alus b, aluse lähisnurk α ja kahe teise külje summa s* (joon. 71).



Joon. 71.

Et koostada lahendusplaan, oletame, et ülesanne on lahendatud, s. o. et on leitud niisugune kolmnurk ABC, mille alus $AC=b$, $\angle A=\alpha$ ja $AB+BC=s$. Vaatleme saadud joonist. Külge AC, mis on võrdne b-ga, ja nurka A, mis on võrdne α-ga, me oskame ehitada. Tähendab, meil tuleb leida nurga A (α) teisel haaral niisugune punkt B, et summa $AB+BC$ võrduks s-ga Pikendanud AB, märgime lõigu AD, mis on võrdne s-ga.

Nüüd seisab küsimus selles, et leida sirgel AD niisugune punkt B, mis oleks võrdsel kaugusel punktidest C ja D. Niisugune punkt, nagu teame (§ 58), peab asetsema lõigu CD keskristjoonel. Punkt B on selle ristjoone ja sirge AD lõikepunkt.

Seega ülesande lahendus on järgmine: joonestame (joon. 71) nurga A, mis on võrdne antud nurgaga α; nurga haaradele asetame $AC=b$ ja $AD=s$ ja ühendame sirglõiguga punktid D ja C. Lõigule CD tõmbame keskristjoone BE; selle lõikepunkti AD-ga, s. o. punkti B, ühendame C-ga. $\triangle ABC$ on otsitav, sest ta rahuldab kõiki ülesande nõudeid: $AC=b$, $\angle A=\alpha$ ja $AB+BC=s$ (sest $BD=BC$).

Vaadeldes joonist märgime, et ülesanne pole lahendatav igasuguste andmete puhul. Tõepoolest, kui summa on b-ga võrreldes liiga väike, siis ristjoon EB ei tarvitse lõigata AD-d (või selle asemel ta lõikab AD pikendust väljaspool punkti A või väljaspool punkti D); niisugusel juhtumil on ülesanne lahendamatu. Ka sõltumatult joonisest võib näha, et ülesanne pole lahendatav, kui $s<b$ või $s=b$, sest ei saa olla kolmnurka, milles kahe külje summa on väiksem või võrdne kolmanda küljega.

Juhtumil, kui ülesanne on lahendatav, on tal ainult üks lahend, s. t. on olemas ainult üks kolmnurk, mis rahuldab ülesande nõudeid, sest ristjoon BE võib lõikuda sirgega AD ainult ühes punktis.

69. Märkus. Toodud näitest on näha, et keeruka konstrueerimisülesande lahendus koosneb neljast osast.

1) Oletanud, et ülesanne on lahendatud, tehakse otsitava kujundi ligikaudne joonis ja seda tähelepanelikult uurides püütakse leida niisuguseid seoseid ülesande andmete ja otsitavate suuruste vahel, mis võimaldaksid antud ülesannet siduda teiste varem lahendatutega. Seda tähtsaimat ülesande lahenduse osa, mille eesmärgiks on koostada lahendusplaan, nimetatakse **analüüsiks.**

2) Kui lahendusplaan on niiviisi leitud, siis teostatakse vastavalt sellele **konstrueerimine.**

3) Plaani õigsuse kontrolliks tõestatakse tuntud teoreemide põhjal, et saadud kujund rahuldab ülesande kõiki nõudeid. Seda osa nimetatakse **sünteesiks.**

4) Siis esitatakse küsimus, kas ülesanne on lahendatav igasuguste andmete puhul, kas ülesandel on üks lahend või mitu ja kas ülesandel pole erijuhtumeid, mis lihtsustavad joonestamist või, ümberpöördult, teevad selle keerukamaks. Lahenduse seda osa nimetatakse ülesande **uurimiseks.**

Kui ülesanne on väga lihtne ja pole kahtlust selle lahendatavuses, siis jäävad tavaliselt ära analüüs ja uurimine, asutakse kohe joonestama ja siis tõestatakse. Nii toimisime selle peatüki esimese seitsme ülesande puhul; ka edaspidi toimime lihtsate ülesannete lahendamisel nii.

Harjutusi.

Tõestada teoreemid.

1. Võrdhaarses kolmnurgas on võrdsed kaks mediaani, kaks nurgapoolitajat, kaks kõrgust.

2. Kui võrdhaarse kolmnurga haaradele tõmmata keskristjooned lõikumiseni teise haaraga, siis tekkinud ristlõigud on võrdsed.

3. Sirge, mis on risti nurgapoolitajaga, lõikab nurga haaradest ära võrdsed lõigud,

4. Kolmnurga mediaan on väiksem kolmnurga poolest ümbermõõdust.

5. Kolmnurga mediaan on väiksem nende külgede poolsummast, mille vahel ta asetseb.

Juhis. Pikendada mediaani tema oma pikkuse võrra, saadud punkt ühendada selle külje ühe otspunktiga, millele oli tõmmatud mediaan, ja vaadelda saadud kujundit.

6. Kolmnurga mediaanide summa on väiksem kolmnurga ümbermõõdust, kuid suurem poolest ümbermõõdust.

Juhis. Vaata eelmist harjutust, aga ka § 50 järeldust.

7. Nelinurga diagonaalide summa on väiksem nelinurga ümbermõõdust, kuid suurem poolest ümbermõõdust.

8. Tõestada otsese teoreemina, et iga punkt, mis ei asetse sirglõigu keskristjoonel, ei ole võrdsel kaugusel selle sirglõigu otspunktidest, vaid on lähemal nimelt sellele otspunktile, kuspool ristjoont ta asetseb.

9. Tõestada otsese teoreemina, et iga punkt, mis ei asetse nurgapoolitajal, pole võrdsel kaugusel nurga haaradest.

10. Kolmnurga mingist tipust tõmmatud mediaan on võrdsel kaugusel kolmnurga teistest tippudest.

11. Nurga A ühel haaral on võetud lõigud AB ja AC ja teisel haaral lõigud $AB'=AB$ ja $AC'=AC$. Tõestada, et sirgete BC' ja $B'C$ lõikepunkt asetseb nurgapoolitajal.

12. Tuletada eelmisest teoreemist nurgapoolitaja joonestamise viis.

13. Kui A' ja A, B ja B' on kaks mingi sirge XY suhtes sümmeetriliste punktide paari, siis need neli punkti A, A', B, B' asetsevad ühel ringjoonel.

14. On antud teravnurk XOY ja punkt A selle sees. Leida haaral OX punkt B ja haaral OY punkt C nii, et $\triangle ABC$ ümbermõõt oleks väikseim.

Juhis. Tuleb võtta punktid, mis oleksid sümmeetrilised punktiga A haarade OX ja OY suhtes.

Konstrueerimisülesandeid.

15. Joonestada kahe, kolme ja enama nurga summa.

16. Joonestada kahe nurga vahe.

17. Kahe nurga summa ja vahe põhjal leida need nurgad.

18. Jaotada nurk 4-ks, 8-ks ja 16-ks võrdseks osaks.

19. Tõmmata läbi antud nurga tipu väljaspool seda nurka niisugune sirge, mis moodustaks nurga haaradega võrdsed nurgad.

20. Joonestada kolmnurk, kui on antud: a) kaks külge ja nende vahel olev nurk; b) üks külg ja selle lähisnurgad; c) kaks külge ja suurema külje vastasnurk; d) kaks külge ja väiksema külje vastasnurk (saadakse kaks, üks või mitte ühtki lahendit).

21. Joonestada võrdhaarne kolmnurk, kui on antud: a) alus ja haar; b) alus ja alusnurk; c) haar ja tipunurk; d) haar ja alusnurk.

22. Joonestada täisnurkne kolmnurk, kui on antud: a) kaks kaatetit; b) kaatet ja hüpotenuus; c) kaatet ja teravnurk.

23. Joonestada võrdhaarne kolmnurk, kui on antud: a) kõrgus ja haar; b) kõrgus ja tipunurk; c) alus ja haarale tõmmatud kõrgus.

24. Joonestada täisnurkne kolmnurk hüpotenuusi ja teravnurga järgi.

25. Tõmmata läbi nurga sees antud punkti niisugune sirge, mis lõikaks nurga haaradest ära võrdsed lõigud.

26. Kahe lõigu summa ja vahe põhjal leida lõigud.

27. Jaotada antud sirglõik 4-ks, 8-ks ja 16-ks võrdseks osaks.

28. Leida antud sirgel niisugune punkt, mis asetseks võrdsel kaugusel kahest antud punktist (väljaspool sirget).

29. Leida punkt, mis asetseks võrdsel kaugusel kolmnurga tippudest.

30. Leida nurga haaru lõikaval sirgel punkt, mis asetseks võrdsel kaugusel selle nurga haaradest.

31. Leida punkt, mis asetseks võrdsel kaugusel kolmnurga külgedest.

32. Leida sirgel AB niisugune punkt C, et läbi C ühel pool sirget AB asetsevaile punktidele M ja N tõmmatud kiired CM ja CN moodustaksid kiirtega CA ja CB võrdsed nurgad.

Juhis. Joonestada punktile M telje AB suhtes sümmeetriline punkt M' ja ühendada M' N-ga.

33. Joonestada täisnurkne kolmnurk ühe kaateti ja hüpotenuusi ning teise kaateti summa järgi.

34. Joonestada kolmnurk aluse, aluse lähisnurga ja kahe teise külje vahe järgi (vaadelda kaht juhtumit: 1) kui on antud väiksem aluse lähisnurkadest, 2) kui on antud neist suurem).

Juhis. Vt. ülesanne § 68.

35. Joonestada täisnurkne kolmnurk, kui on antud üks kaatet ja hüpotenuusi ning teise kaateti vahe.

36. On antud nurk A ja punktid B ja C, milledest üks asetseb nurga ühel ja teine teisel haaral. Leida: 1) punkt M nii, et ta asetseks võrdsel kaugusel nurga haaradest ja et $MC=MB$; 2) punkt N nii, et ta asetseks võrdsel kaugusel nurga haaradest ja et $NC=CB$.

37. Raudtee läheduses on külad A ja B. Leida raudteel (mis on sirgjooneline) jaamale koht nii, et see oleks võrdsel kaugusel A-st ja B-st.

38. On antud nurk A ja selle ühel haaral punkt B. Leida nurga teisel haaral niisugune punkt C, et summa $CA+CB$ oleks võrdne antud lõiguga l.

V. Paralleelsed sirged.

Põhiteoreemid.

70. **Definitsioon.** *Kaht sirget nimetatakse* ***paralleelseiks,*** *kui nad asetsevad ühel tasapinnal ega lõiku, ükskõik kui palju me neid ka pikendaksime.*

Sirgete paralleelsust märgitakse sümboliga $\|$. Kui sirged AB ja CD on paralleelsed, siis kirjutatakse: $AB \| CD$.

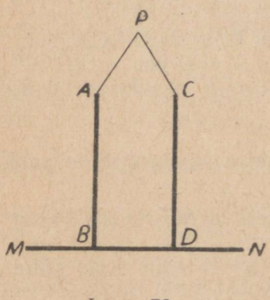
Paralleelsete sirgete olemasolu tõendab järgmine teoreem.

71. Teoreem. ***Ühele ja samale sirgele*** (MN) ***tõmmatud kaks ristjoont*** (AB ja CD, joon. 72) ***ei lõiku, ükskõik kui palju neid ka pikendada.***

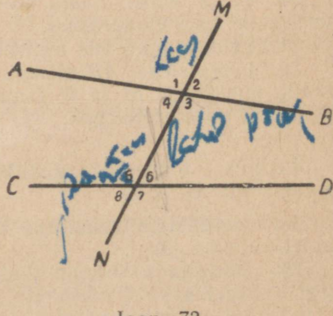
Tõepoolest, kui need ristjooned lõikuksid mingis punktis P, siis sellest punktist oleks sirgele MN tõmmatud kaks ristjoont, mis aga pole võimalik (§ 24).

Seega ühe ja sama sirge kaks ristjoont on paralleelsed.

72. **Kahe sirge lõikamisel kolmanda sirgega tekkinud nurkade nimetused.** Olgu kaks sirget AB ja CD (joon. 73) lõigatud kol-



Joon. 72.



Joon. 73.

manda sirgega MN. On tekkinud kaheksa nurka (tähistame need numbritega), mille nimetused paarikaupa on järgmised:

kaasnurgad (ehk vastavad nurgad): *1* ja *5*, *4* ja *8*, *2* ja *6*, *3* ja *7*;

põiknurgad: *3* ja *5*, *4* ja *6* (sisemised); *1* ja *7*, *2* ja *8* (välised);

lähisnurgad: *4* ja *5*, *3* ja *6* (sisemised); *1* ja *8*, *2* ja *7* (välised).

73. Kahe sirge paralleelsuse tunnused. ***Kui kahe sirge*** (AB ja CD, joon. 74) ***lõikamisel kolmanda sirgega*** (MN) ***osutub, et:***

1) ***üks paar kaasnurki on võrdsed*** või

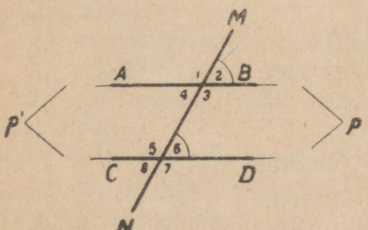
2) ***üks paar põiknurki on võrdsed*** või

3) ***kahe sisemise lähisnurga*** või ***kahe välise lähisnurga summa on 2d,***

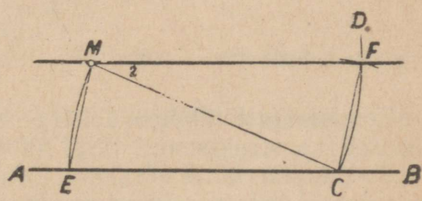
siis need kaks sirget on paralleelsed.

Olgu näiteks antud, et kaasnurgad *2* ja *6* on võrdsed; tuleb tõestada, et sel juhtumil $AB \| CD$.

Väidame vastupidist, s. o. et sirged AB ja CD pole paralleelsed; niisugusel korral lõikuvad sirged mingis punktis P paremal pool MN-i või mingis punktis P' vasakul pool sirget MN. Kui lõikumine on punktis P, siis tekib kolmnurk, mille välisnurgaks on nurk *2*, sisenurgaks aga nurk *6*, mis pole nurga *2* kõrvunurk, tähendab,



Joon. 74.



Joon. 75.

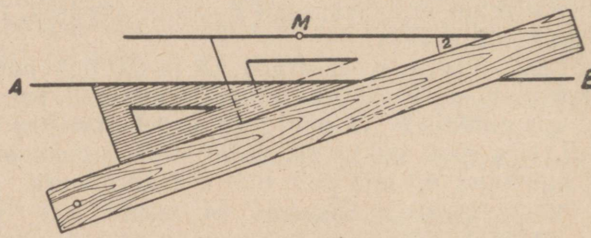
nurk *2* peab olema suurem nurgast *6* (§ 44), mis räägib aga vastu eeldusele; seega sirged AB ja CD ei saa lõikuda mingis punktis paremal pool sirget MN. Kui oletada, et sirged lõikuvad punktis P', siis tekib kolmnurk, millel on sisenurgaks nurk *4*, mis on võrdne nurgaga *2*, välisnurgaks aga nurk *6*, mis pole nurga *4* kõrvunurk; siis peab nurk *6* olema suurem nurgast *4* ja järelikult suurem nurgast *2*, mis räägib aga vastu eeldusele. Tähendab, sirged AB ja CD ei saa lõikuda ka punktis, mis asetseb vasakul pool sirget MN; järelikult need sirged ei lõiku, s. t. nad on paralleelsed.

Samal viisil tõestatakse, et $AB \| CD$, kui $\angle 1 = \angle 5$ või $\angle 3 = \angle 7$ jne.

Olgu veel antud, et $\angle 4+\angle 5=2d$. Siis peame järeldama, et $\angle 4=\angle 6$, sest nurkade *6* ja *5* summa on samuti *2d*. Kui aga $\angle 4=\angle 6$, siis sirged ei saa lõikuda, sest vastasel korral nurgad *4* ja *6* ei saa olla võrdsed (üks oleks välisnurk, teine aga temaga mitte kõrvu olev sisenurk).

74. Ülesanne. *Tõmmata läbi punkti M* (joon. 75) *sirge, mis oleks paralleelne antud sirgega AB.*

Selle ülesande üks lihtsamaid lahendusi on järgmine: joonestame punktist *M* mistahes raadiusega kaare *CD*, edasi joonestame punktist *C* sama raadiusega kaare *ME*. Siis tõmbame punktist *C* raadiusega, mis on võrdne *E* ja *M* vahelise kaugusega, väikese kaare. See kaar lõikab kaart *CD* punktis *F*. Sirge *MF* on paralleelne sirgega *AB*.



Joon. 76.

Tõestuseks tõmbame abisirge *MC*; tekkinud nurgad *1* ja *2* on võrdsed konstruktsiooni järgi (sest kolmnurgad *EMC* ja *MCF* on võrdsed kolme külje võrdsuse tõttu); kui aga sisemised põiknurgad on võrdsed, siis on sirged paralleelsed.

Paralleelsete sirgete joonestamiseks, nagu näha jooniselt 76, on hõlpus kasutada joonestamiskolmnurka koos joonlauaga.

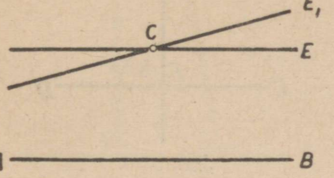
75. Paralleelsete sirgete aksioom. ***Väljaspool sirget asetsevast punktist ei saa tõmmata läbi kaht sirget, mis oleksid paralleelsed ühe ja sama sirgega.***

Niisiis, kui (joon. 77) $CE \parallel AB$, siis ükski teine sirge CE_1, mis on tõmmatud läbi punkti *C*, ei saa olla paralleelne *AB*-ga, s. t. sirge CE_1 lõikub pikendamisel *AB*-ga.

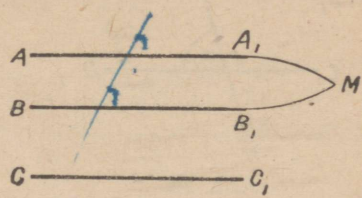
Tõestada seda lauset, s. t. tuletada teda kui järeldust varem tunnustatud aksioomidest, pole võimalik. Sellepärast tuleb sellele vaadata kui uuele aksioomile.

76. Järeldused. 1) *Kui $CE \parallel AB$* (joon. 77) *ja mingi kolmas sirge CE_1 lõikab üht neist paralleelseist sirgeist, siis ta lõikab ka teist.* Vastasel korral läbiks punkti C kaks AB-ga paralleelset sirget, mis on aga võimatu.

2) *Kui kaks sirget AA_1* ja *BB_1* (joon. 78) *on paralleelsed ühe ja sama kolmanda sirgega CC_1, siis on nad ka omavahel paralleelsed.*



Joon. 77.



Joon. 78.

Tõepoolest, kui oletada, et sirged AA_1 ja BB_1 lõikuvad mingis punktis M, siis oleks läbi selle punkti tõmmatud kaks CC_1-ga paralleelset sirget, mis pole aga võimalik.

77. Nurkadest, mis tekivad kahe paralleelse sirge lõikamisel kolmanda sirgega.

Teoreem (pöördteoreem, § 73). ***Kui kaks paralleelset sirget*** (AB ja CD, joon. 79) ***on läbi lõigatud mingi sirgega*** (MN)***, siis:***

1) kaasnurgad on võrdsed;

2) põiknurgad on võrdsed;

3) sisemiste lähisnurkade summa võrdub sirgnurgaga;

4) väliste lähisnurkade summa võrdub sirgnurgaga.

Tõestame, et kui näiteks $AB \parallel CD$, siis kaasnurgad α ja β on võrdsed.

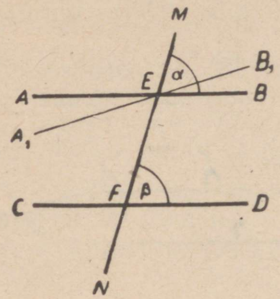
Väidame vastupidist, et nurgad pole võrdsed (olgu näiteks $\alpha > \beta$). Joonestanud nurga $MEB_1 = \beta$, me saame sirge A_1B_1, mis ei ühti AB-ga ja, järelikult, meil on kaks sirget, mis on tõmmatud läbi punkti E ja mis on paralleelsed ühe ning sama sirgega CD, nimelt: $AB \parallel CD$ teoreemi eelduse põhjal ja $A_1B_1 \parallel CD$ vastavate nurkade MEB_1 ja β võrdsuse tõttu. Et see järeldus räägib vastu paralleelsete sirgete aksioomile, siis väide, et nurgad α ja β pole võrdsed, on vale, ja peab olema, et $\alpha = \beta$.

Samuti saab tõestada ka teoreemi ülejäänud väited. Ülaltõestatud teoreemidest järeldub järgmine teoreem:

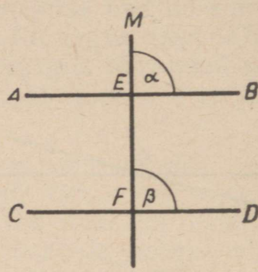
kui sirge on risti ühega kahest paralleelsest sirgest, siis on ta risti ka teisega.

Tõepoolest, kui $AB \parallel CD$ (joon. 80) ja $ME \perp AB$, siis, esiteks, ME, lõigates sirget AB, peab lõikama ka sirget CD mingis punktis

F; teiseks on kaasnurgad α ja β võrdsed. Nurk α aga on täisnurk, tähendab, ka nurk β on täisnurk, s. t. $ME \perp CD$.



Joon. 79.



Joon. 80.

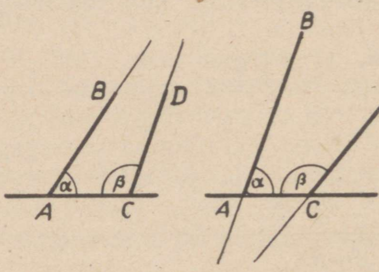
78. Sirgete mitteparalleelsuse tunnused. Kahest teoreemist, otsesest (§ 73) ja selle pöördteoreemist (§ 77), saab järeldada, et ka vastandteoreemid on õiged, s. o.:

kui kahe sirge lõikamisel kolmandaga osutub, et 1) kaasnurgad pole võrdsed või 2) sisemised põiknurgad pole võrdsed jne., siis sirged pole paralleelsed;

kui kaks sirget pole paralleelsed, siis nende lõikamisel kolmanda sirgega: 1) kaasnurgad pole võrdsed, 2) sisemised põiknurgad pole võrdsed jne.

Neist mitteparalleelsuse tunnustest (neid on kerge tõestada vastuväiteliselt) on kasulik juhtida erilist tähelepanu järgmisele: *kui sisemiste lähisnurkade summa* (α ja β, joon. 81) *pole võrdne sirgnurgaga, siis sirged* (AB ja CD) *lõikuvad.*

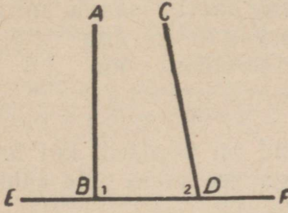
Kui need sirged ei lõikuks, siis oleksid nad paralleelsed ja sisemiste lähisnurkade summa võrduks sirgnurgaga, mis räägiks vastu eeldusele.



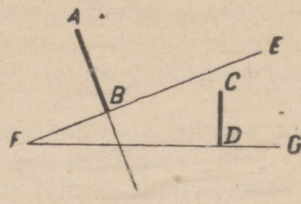
Joon. 81.

See lause (täiendatuna väitega, et sirged lõikuvad sealpool lõikajat, kus sisemiste lähisnurkade summa on sirgnurgast väiksem) oli võetud kuulsa kreeka geomeetri **Eukleidese** (elas III sajandil e. m. a.) poolt ilma tõestuseta tema geomeetria «Elementidesse» kui paralleelsete sirgete aksioom ja seepärast on ta tuntud **Eukleidese postulaadi** nime all. Praegusajal on selliseks aksioomiks võetud lihtsam lause (§ 75).

Näitame veel kaks järgmist mitteparalleelsuse tunnust, mida läheb meil edaspidi tarvis.



Joon. 82.



Joon. 83.

1) *Ühe ja sama sirge* (EF) *ristjoon* (AB, joon. 82) *ja kaldjoon* (CD) *lõikuvad, sest sisemiste lähisnurkade 1 ja 2 summa ei võrdu sirgnurgaga.*

2) *Kaks sirget* (AB ja CD, joon. 83), *mis on risti kahe lõikuva sirgega* (FE ja FG), *lõikuvad.*

Tõepoolest, kui oletada vastupidist, s. o. et $AB \parallel CD$, siis sirge FD, olles risti ühe paralleelse sirgega (CD), on risti ka teise paralleelse sirgega (AB) ja ühest punktist F on siis ühele sirgele AB tõmmatud kaks ristjoont FB ja FD, mis pole aga võimalik.

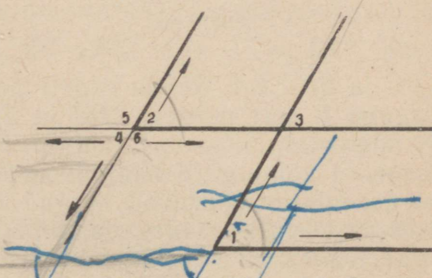
Vastavalt paralleelsete või ristuvate haaradega nurgad.

79. Teoreem. ***Kui ühe nurga haarad on vastavalt paralleelsed teise nurga haaradega, siis nurgad on kas võrdsed või nende summa võrdub sirgnurgaga.***

Vaatleme eraldi järgmist kolme juhtumit (joon. 84).

1) Olgu nurga *1* haarad vastavalt paralleelsed nurga *2* haaradega ja peale selle olgu nad samasuunalised (joonisel on suunad näidatud nooltega). Pikendanud nurga *2* üht haara lõikumiseni nurga *1* haaraga, saame nurga *3*, mis on võrdne nurgaga *1* ja nurgaga *2* (kui kaasnurgad paralleelide juures); järelikult $\angle 1 = \angle 2$.

2) Olgu nurga *1* haarad vastavalt paralleelsed nurga *4* haaradega, suunad aga olgu vastupidised.



Joon. 84.

Pikendanud nurga *4* mõle-

TRÜ Raamatukogu

maid haaru, saame nurga *2*, mis on võrdne nurgaga *1* (äsja tõestatud) ja nurgaga *4* (kui tippnurgad); järelikult $\angle 4 = \angle 1$.

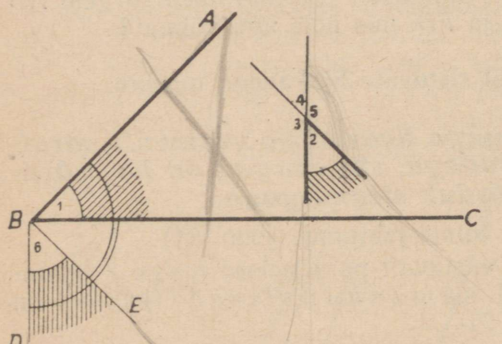
3) Olgu lõpuks nurga *1* haarad vastavalt paralleelsed nurga *5* ja *6* haaradega, seejuures kaks haara on samasuunalised, kaks aga vastassuunalised.

Pikendanud nurga *5* või nurga *6* üht haara, saame nurga *2*, mis on võrdne (tõestatu põhjal) nurgaga *1*; aga $\angle 5$ (või $\angle 6) + \angle 2 = 2d$ (kui kõrvunurgad); järelikult ka $\angle 5$ (või $\angle 6) + \angle 1 = 2d$.

Seega paralleelsete haaradega nurgad on võrdsed, kui haarad on sama- või vastassuunalised; kui aga see nõue pole täidetud, siis nurkade summa võrdub sirgnurgaga.

Märkus. Võiks ju ütelda, et paralleelsete haaradega nurgad on võrdsed siis, kui mõlemad nurgad on kas teravnurgad või nürinurgad; esineb aga juhtumeid, kus nurkade välisilme järgi on raske otsustada, kas nad on teravnurgad või nürinurgad; seepärast tuleb võrrelda nurkade haarade suundi.

80. Teoreem. ***Kui ühe nurga haarad on vastavalt risti teise nurga haaradega, siis nurgad on kas võrdsed või nende summa võrdub sirgnurgaga.***



Joon. 85.

Olgu nurk ABC, mis on tähistatud numbriga *1* (joon. 85), üks antuist; teiseks nurgaks võtame ühe neljast nurgast: *2*, *3*, *4* või *5*, mis on tekkinud kahe sirge lõikumisel, milledest üks on risti haaraga AB, teine aga risti haaraga BC (nurkade ühine tipp võib olla tasapinna mistahes punktis).

Tõmbame nurga *1* tipust kaks abisirget: $BD \perp \perp BC$ ja $BE \perp BA$. Nende sirgete poolt moodustatud nurk *6* võrdub nurgaga *1*, sest nurgad DBC ja EBA on võrdsed kui täisnurgad, ja lahutades mõlemast nurga EBC, saame: $\angle 6 = \angle 1$. Nüüd näeme, et abinurga *6* haarad on paralleelsed nende lõikuvate sirgetega, mis moodustavad nurgad *2*, *3*, *4* ja *5* (sest kaks ristjoont ühele sirgele on paralleelsed, § 71); järelikult need nurgad on kas võrdsed nurgaga *6* või moodustavad temaga summa $2d$. Asendades nurga *6* võrdse nurgaga *1*, saame selle, mida oli tarvis tõestada.

81. Teoreem. ***Kolmnurga sisenurkade summa võrdub sirgnurgaga.***

Olgu ABC (joon. 86) mingi kolmnurk; tuleb tõestada, et nurkade A, B ja C summa võrdub sirgnurgaga, s. o. 180°-ga.

Pikendanud külge AC ja tõmmanud $CE \parallel AB$, leiame: $\angle A = \angle ECD$ (kui kaasnurgad paralleelide juures), $\angle B = \angle BCE$ (kui sisemised põiknurgad paralleelide juures); järelikult $\angle ECD + \angle BCE + \angle C = \angle A + \angle B + \angle C = 2d = 180°$.

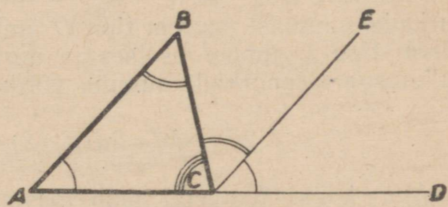
Järeldused. 1) *Kolmnurga iga välisnurk võrdub temaga mitte kõrvuolevate sisenurkade summaga* (nii $\angle BCD = \angle A + \angle B$).

2) *Kui ühe kolmnurga kaks nurka on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kahe nurgaga, siis on võrdsed ka kolmnurkade kolmandad nurgad.*

3) *Täisnurkse kolmnurga teravnurkade summa võrdub täisnurgaga, s. o. 90°-ga.*

4) *Võrdhaarses täisnurkses kolmnurgas teravnurk võrdub $\frac{1}{2}d$, s. o. 45°-ga.*

5) *Võrdkülgses kolmnurgas iga nurk võrdub $\frac{2}{3}d$, s. o. 60°-ga.*



Joon. 86.

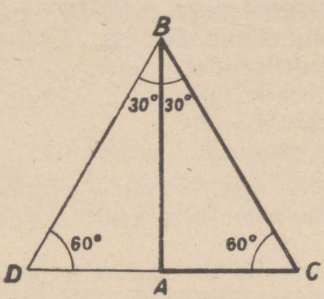
6) *Kui täisnurkses kolmnurgas ABC* (joon. 87) *üks teravnurkadest* (näiteks $\angle B$) *võrdub 30°-ga, siis selle nurga vastaskaatet võrdub poole hüpotenuusiga.*

Teades, et niisuguses kolmnurgas teine teravnurk võrdub 60°-ga, joonestame kolmnurga ABC juurde teise kolmnurga ABD, mis on võrdne antud kolmnurgaga. Saame kolmnurga DBC, milles iga nurk võrdub 60°-ga. Selline võrdnurkne kolmnurk on ka võrdkülgne (§ 47) ja seepärast $DC = BC$. Aga $AC = \frac{1}{2} DC$; tähendab, $AC = \frac{1}{2} BC$.

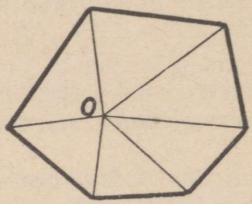
Tõestagu õpilased ise pöördteoreemi: *kui kaatet võrdub poole hüpotenuusiga, siis kaateti vastasnurk võrdub 30°-ga.*

82. Teoreem. ***Kumera hulknurga sisenurkade summa võrdub 180° ja n−2 korrutisega, kus n on hulknurga külgede arv.***

Võtnud kumera hulknurga sees (joon. 88) mistahes punkti O, ühendame selle hulknurga tippudega. Siis kumer hulknurk tükeldub kolmnurkadeks, millede arv võrdub hulknurga külgede arvuga. Iga kolmnurga sisenurkade summa on $2d$; järelikult kõigi kolmnurkade sisenurkade summa on $2dn$. See arv on ilmselt hulknurga sise-



Joon. 87.



Joon. 88.

nurkade summast suurem tipu O ümber asetsevate nurkade summa võrra; tipu O ümber asetsevate nurkade summa on $4d$; järelikult hulknurga sisenurkade summa võrdub:

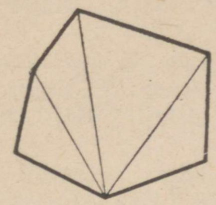
$$2dn - 4d = 2d(n-2) = 180°(n-2).$$

Märkus. Teoreemi saab tõestada ka nii. Kumera hulknurga mingist tipust tõmbame diagonaalid (joon. 89). Siis hulknurk tükeldub kolmnurkadeks, millede arv on hulknurga külgede arvust kahe võrra väiksem. Tõepoolest, kui mitte arvestada kaht külge, mis moodustavad nurga, mille tipust on tõmmatud diagonaalid, siis iga ülejäänud külje kohta tuleb üks kolmnurk. Seega kõiki kolmnurki on kokku $n-2$, kus n on hulknurga külgede arv. Igas kolmnurgas on sisenurkade summa $2d$; tähendab, kõigi kolmnurkade sisenurkade summa on $2d(n-2)$; see summa on aga ka hulknurga sisenurkade summa.

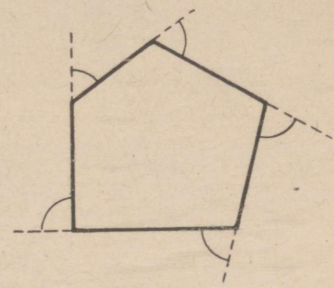
Tõestatud teoreem on kehtiv ka mittekumerate hulknurkade kohta. Kui hulknurga sees on võimalik leida niisugune punkt, et sirglõigud, mis ühendavad seda punkti hulknurga tippudega, asetsevad hulknurga sees, siis tõestus on täpselt sama, mis eespool toodud esimene tõestus. Kui aga hulknurgas sellist punkti ei leidu, siis tuleb hulknurk tükeldada mingi diagonaaliga kumerateks hulknurkadeks ja arvutada siis iga sellise hulknurga sisenurkade summa ja liita need summad. Tulemuseks on sama valem $2dn-4d$. Soovitame lugejale teostada see arvutus.

83. Teoreem. ***Kui kumera hulknurga igast tipust pikendame üht külgedest üle tipu, siis kõigi siinjuures tekkinud hulknurga välisnurkade summa võrdub 360°-ga*** (olenemata hulknurga külgede arvust).

Hulknurga iga välisnurk moodustab koos sisenurgaga kui kõrvunurgaga $2d$ (joon. 90); järelikult, kui sisenurkade summa liita välisnurkade summaga, saadakse $2dn$ (kus n on hulknurga kül-



Joon. 89.



Joon. 90.

gede arv); sisenurkade summa on aga, nagu nägime, $2dn-4d$; järelikult välisnurkade summa võrdub:

$$2dn-(2dn-4d)=2dn-2dn+4d=4d=360°.$$

Tsentraalne sümmeetria.

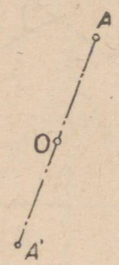
84. Paragrahvis 37 oli vaadeldud juhtum, kus kaks võrdset kujundit on sümmeetrilised sirge suhtes. Eespool tuletatud paralleelsete sirgete omadused võimaldavad tutvuda veel ühe tähelepanuväärse kahe võrdse kujundi, kahe võrdse lõigu või kahe punkti vastastikuse asetuse liigiga mingi samal tasapinnal asetseva punkti suhtes.

Kui punktid A, A' **ja** O (joon. 91) **asetsevad ühel sirgel ja punkt** O **on sirglõigu** AA' **keskpunktiks** ($OA=OA'$), **siis punkte** A **ja** A' **nimetatakse sümmeetrilisteks punktideks punkti** (O) **suhtes.** Selleks et leida punkt, mis oleks sümmeetriline punktiga A mõne teise punkti O suhtes, tuleb punktid A ja O ühendada sirglõiguga, siis seda lõiku pikendada üle punkti O ja sellel pikendusel võtta punkt A' nii, et $A'O=AO$. Saadud punkt ongi otsitav.

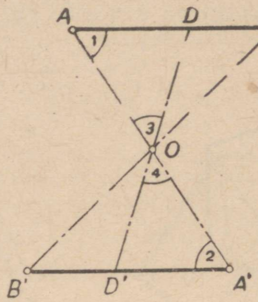
85. Teoreem. ***Kui mingi sirge*** (AB) ***kahele punktile*** (A ja B) ***joonestada sümmeetrilised punktid*** (A' ja B') ***mõne punkti*** O ***suhtes, siis:***

1) ***punkte*** A' ***ja*** B' ***ühendav sirge on paralleelne antud sirgega*** AB, ***seejuures on sirglõik*** AB ***võrdne sirglõiguga*** $A'B'$***;***

2) *antud sirge AB igale punktile vastab sellele sümmeetriline punkt sirgel $A'B'$.*



Joon. 91.



Joon. 92.

Tõestus. 1) Kolmnurgad AOB ja $A'OB'$ (joon. 92) on võrdsed, sest neil $AO = A'O$ ja $BO = B'O$ (konstruktsiooni põhjal) ning $\angle AOB = \angle A'OB'$ (kui tippnurgad). Nende kolmnurkade võrdsusest järeldub: $AB = A'B'$ ja $\angle OAB = \angle OA'B'$; tähendab $AB \parallel A'B'$ (§ 73, 2. juhtum).

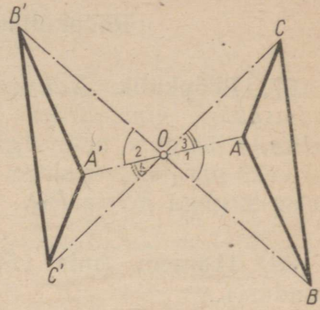
2) Võtame sirgel AB mingi punkti D (joon. 92). Sirge, mis läbib D ja O, lõikub sirgega $A'B'$ mõnes punktis D'. Kolmnurgad AOD ja $A'OD'$ on võrdsed sest neil $AO = A'O$, $\angle 1 = \angle 2$ (kui sisemised põiknurgad paralleelide juures) ja $\angle 3 = \angle 4$ (kui tippnurgad). Nende kolmnurkade võrdsusest järeldub: $OD = OD'$. Tähendab, punktid D ja D' on sümmeetrilised punkti O suhtes.

86. **Sümmeetrilised kujundid.** ***Kaks kujundit on sümmeetrilised antud punkti O suhtes, kui ühe kujundi igale punktile vastab teisel kujundil sümmeetriline punkt.***

Punkti O nimetatakse antud kujundite **sümmeetria keskpunktiks.** Sellist sümmeetriat nimetatakse erinevalt teljelisest sümmeetriast, mida oli käsitletud varem (§ 37), tsentraalseks sümmeetriaks. Kui antud kujundi igale punktile vastab mõne keskpunkti suhtes sümmeetriline punkt samas kujundis, siis öeldakse, et antud kujundil on sümmeetria keskpunkt. Sellise kujundi näiteks on ringjoon. Sümmeetria keskpunktiks on siin ringjoone keskpunkt.

Iga kujundit saab ühtistada kujundiga, mis on temaga sümmeetriline, pöörates teda sümmeetria keskpunkti ümber. Tõepoolest, võtame näiteks kaks kolmnurka: ABC ja $A'B'C'$ (joon. 93), mis on keskpunkti O suhtes sümmeetrilised. Pöörame kujundit, seda tasapinnalt eraldamata, punkti O kui keskpunkti ümber seni, kuni sirge OA langeb sirgele OA'.

Et $\angle 1 = \angle 2$ ja $\angle 3 = \angle 4$, siis sirge OB langeb OB'-le, sirge OC aga sirgele OC'. Et $OA = OA'$, $OB = OB'$, $OC = OC'$, siis punkt A ühtib punktiga A', punkt B punktiga B' ja punkt C punktiga C'. Seega kolmnurk ABC ühtib kolmnurgaga $A'B'C'$.

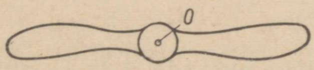


Joon. 93.

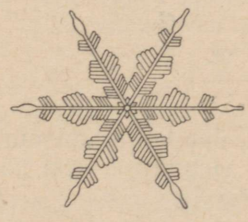
On ilmne, et niisugusel pöördel iga sirge OA, OB, OC ja ka kolmnurga ABC iga külg pöördub 180° võrra. Kui kujundil on sümmeetria keskpunkt, siis pärast pööret 180° võrra ümber sümmeetria keskpunkti kujund ühtib iseendaga.

M ä r k u s. Pööramisel, mida praegu rakendasime kolmnurkade ABC ja $A'B'C'$ ühtistamisel, liugus kolmnurk ABC mööda tasapinda. Seega võib keskpunkti suhtes sümmeetrilisi kujundeid ühtistada, ilma et oleks tarvis neid t a s a p i n n a l t e r a l d a d a. Sellega erineb tsentraalne sümmeetria oluliselt teljelisest sümmeetriast (§ 37), kus sümmeetriliste kujundite ühtistamisel oli tarvis üks neist ümber pöörata.

Kujundite tsentraalne sümmeetria, samuti nagu teljeline, esineb sageli looduses ja igapäevases elus. Joonisel 94 on kujutatud lennuki propeller. Tal on sümmeetria keskpunktiks punkt O. Joonisel 95 on kujutatud lumehelve, millel on ka sümmeetria keskpunkt.



Joon. 94.


Joon. 95.

VI. Rööpkülikud ja trapetsid.

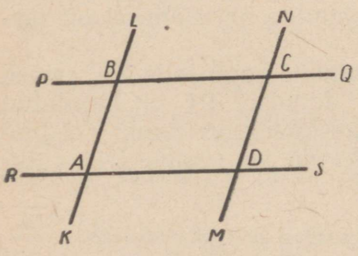
Rööpkülikud (parallelogrammid).

87. **Rööpkülik.** *Nelinurka, millel on kaks paari paralleelseid vastaskülgi, nimetatakse* ***rööpkülikuks*** *ehk* ***parallelogrammiks.*** Niisuguse nelinurga ($ABCD$, joon. 96) võib näiteks saada, kui kaks paralleelset sirget KL ja MN läbi lõigata kahe teise paralleelse sirgega RS ja PQ.

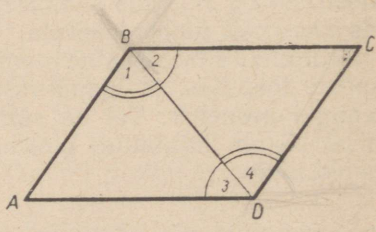
88. **Teoreem** (mis väljendab rööpküliku külgede ja nurkade omadusi).

Rööpküliku vastasküljed on võrdsed, vastasnurgad on võrdsed ja ühe külje lähisnurkade summa võrdub sirgnurgaga (joon. 97).

Tõmmates diagonaali BD, saame kaks kolmnurka: ABD ja BCD. Need kolmnurgad on võrdsed, sest neil on ühine külg BD. $\angle 1 = \angle 4$ ja $\angle 2 = \angle 3$ (kui põiknurgad paralleelide juures). Kolmnurkade võrdsusest järeldub: $AB = CD$, $AD = BC$ ja $\angle A = \angle C$. Vastasnurgad B ja D on samuti võrdsed kui võrdsete nurkade summad.



Joon. 96.



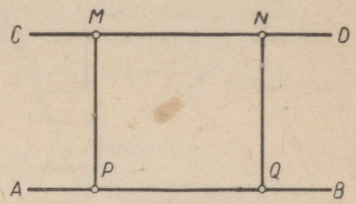
Joon. 97.

Lõpuks, ühe külje lähisnurkade, näiteks nurkade A ja D summa moodustab sirgnurga, sest nad on sisemised lähisnurgad paralleelide juures.

M ä r k u s. Rööpküliku vastaskülgede võrdsust väljendatakse mõnikord lühidalt järgmiselt: *paralleelide lõigud paralleelide vahel on võrdsed.*

J ä r e l d u s. *Kui kaks sirget on paralleelsed, siis ühe sirge kõik punktid on võrdsel kaugusel teisest sirgest;* lühidalt: *paralleelsed sirged* (AB ja CD, joon. 98) *on igal pool teineteisest ühekaugusel.*

Tõepoolest, kui sirge CD mistahes punktidest M ja N tõmmata sirgele AB ristjooned MP ja NQ, siis need ristjooned on paralleelsed (§ 71) ja seepärast kujund $MNQP$ on rööpkülik; siit järeldub, et $MP=NQ$, s. o. punktid M ja N on ühekaugusel sirgest AB.



Joon. 98.

89. Rööpküliku kaks tunnust.

Teoreem. ***Kui kumeras nelinurgas: 1) vastasküljed on võrdsed või 2) kaks vastaskülge on võrdsed ja paralleelsed, siis nelinurk on rööpkülik.***

1. Olgu kujund $ABCD$ (joon. 99) nelinurk, milles

$$AB=CD \text{ ja } BC=AD.$$

Tuleb tõestada, et see kujund on rööpkülik, s. o. et $AB \parallel CD$ ja $BC \parallel AD$.

Tõmmates diagonaali BD, saame kaks kolmnurka, mis on võrdsed, sest neil: BD on ühine külg, $AB=CD$ ja $BC=AD$ (eelduse põhjal). Nende kolmnurkade võrdsusest järeldub: $\angle 1=\angle 4$ ja $\angle 2=\angle 3$ (võrdsetes kolmnurkades on võrdsete külgede vastas võrdsed nurgad); seetõttu $AB \parallel CD$ ja $BC \parallel AD$ (kui põiknurgad on võrdsed, siis sirged on paralleelsed).

2. Olgu nelinurgas ($ABCD$, joon. 99) $BC \parallel AD$ ja $BC=AD$. Tuleb tõestada, et $ABCD$ on rööpkülik, s. o. et $AB \parallel CD$.

Kolmnurgad ABD ja BCD on võrdsed, sest neil: BD on ühine külg, $BC=AD$ (eelduse põhjal) ja $\angle 2=\angle 3$ (kui põiknurgad paralleelide juures). Nende kolmnurkade võrdsusest järeldub, et $\angle 1=\angle 4$, seega $AB \parallel CD$.

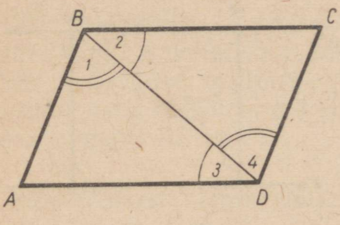
90. Teoreem (mis väljendab rööpküliku diagonaalide omadust).

Kui nelinurk ($ABCD$, joon. 100) ***on rööpkülik, siis tema diagonaalid poolitavad teineteist.***

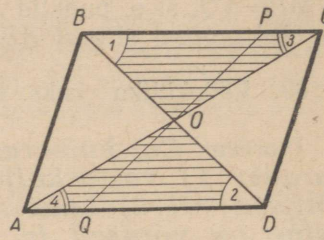
Pöördteoreem. ***Kui nelinurga diagonaalid poolitavad teineteist, siis nelinurk on rööpkülik.***

1) Kolmnurgad BOC ja AOD on võrdsed, sest $BC=AD$ (kui rööpküliku vastasküljed), $\angle 1=\angle 2$ ja $\angle 3=\angle 4$ (kui põiknurgad paralleelide juures). Kolmnurkade võrdsusest järeldub, et $OC=OA$ ja $OB=OD$.

2) Kui $AO=OC$ ja $BO=OD$, siis kolmnurgad AOD ja BOC on võrdsed (kahe külje ja nende vahel oleva nurga järgi). Kolmnurkade võrdsusest järeldub: $\angle 1=\angle 2$ ja $\angle 3=\angle 4$. Järelikult



Joon. 99.



Joon. 100.

$BC \parallel AD$ (põiknurgad on võrdsed) ja $BC=AD$; seega kujund $ABCD$ on rööpkülik.

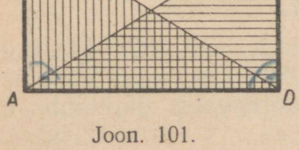
91. Rööpküliku sümmeetria keskpunkt. *Rööpkülikul on sümmeetria keskpunkt.* Selleks keskpunktiks on diagonaalide lõikepunkt (joon. 100). Tõepoolest, et $BO=OD$ ja $OC=OA$, siis lõigud BC ja AD on sümmeetrilised punkti O suhtes ja lõigu BC igale punktile P vastab lõigul AD (§ 85) sümmeetriline punkt Q.

Samuti veendume selles, et lõigud AB ja CD on sümmeetrilised punkti O suhtes. Kui rööpkülikut pöörata 180° võrra tema diagonaalide lõikepunkti ümber, siis rööpküliku uus asend ühtib esialgsega. Seejuures iga tipp ühtib vastastipuga (joonisel 100 tipp A ühtib C-ga ja B ühtib D-ga).

Rööpküliku mõned eriliigid: ristkülik, romb, ruut.

92. Ristkülik ja ta omadused. Kui rööpküliku üks nurk on täisnurk, siis ka ta ülejäänud nurgad on täisnurgad (§ 88). *Rööpkülikut, mille kõik nurgad on täisnurgad, nimetatakse* ***ristkülikuks.***

Et ristkülik on rööpkülik, siis on tal kõik rööpküliku omadused; näiteks, ta diagonaalid poolitavad teineteist ja nende lõikepunkt on sümmeetria keskpunktiks. Ristkülikul on aga ka eriomadusi.



Joon. 101.

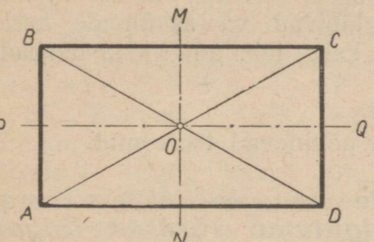
1) ***Ristküliku*** ($ABCD$, joon. 101) ***diagonaalid on võrdsed.***

Täisnurksed kolmnurgad ACD ja ABD on võrdsed, sest neil AD on ühine kaatet ja $AB=CD$ (kui rööpküliku vastasküljed). Kolmnurkade võrdsusest järeldub: $AC=BD$.

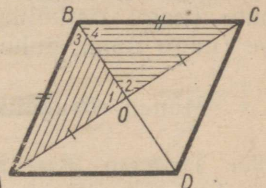
2) ***Ristkülikul on kaks sümmeetriatelge.***

Iga sirge, mis läbib ristküliku sümmeetria keskpunkti ja on paralleelne tema vastaskülgedega, on tema sümmeetriateljeks. Ristküliku sümmeetriateljed on teineteisega risti (vt. joon. 102).

93. Romb ja ta omadused. *Rööpkülikut, mille kõik küljed on võrdsed, nimetatakse* ***rombiks.*** Muidugi, kõik rööpküliku omadused on olemas ka rombil, peale selle on tal aga veel kaks eriomadust.



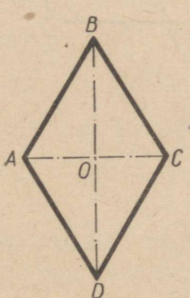
Joon. 102.



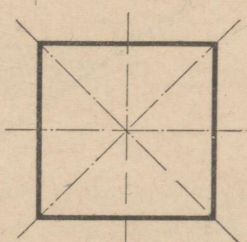
Joon. 103.

1) ***Rombi*** ($ABCD$, joon. 103) ***diagonaalid on teineteisega risti ja poolitavad rombi nurki.***

Kolmnurgad ABO ja BOC on võrdsed, sest neil: BO on ühine külg, $AB = BC$ (sest rombi küljed on võrdsed) ja $AO = OC$ (sest iga rööpküliku diagonaalid poolitavad teineteist). Kolmnurkade võrdsusest järeldub, et $\angle 1 = \angle 2$, s. o. $BD \perp AC$ ja $\angle 3 = \angle 4$, see tähendab, et diagonaal poolitab nurga B. Kolmnurkade BOC ja COD võrdsusest järeldub, et diagonaal poolitab C jne.



Joon. 104.



Joon. 105.

2) ***Rombi diagonaalid on ta sümmeetriatelgedeks.***

Diagonaal BD (joon. 104) on rombi $ABCD$ sümmeetriateljeks, sest pöörates $\triangle ABD$ ümber BD, ühtistame ta kolmnurgaga BCD.

Tõepoolest, diagonaal BD poolitab nurgad B ja D ning peale selle $AB=BC$ ja $AD=CD$.

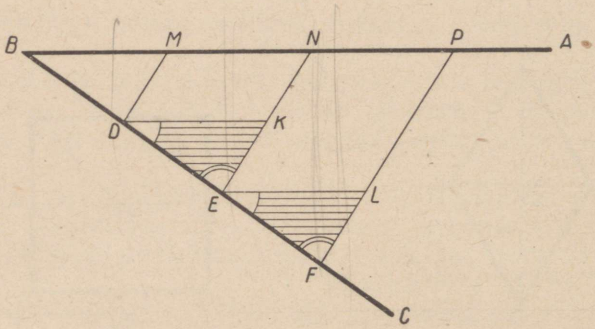
Sama arutlus on kehtiv ka diagonaali AC kohta.

94. **Ruut ja ta omadused.** ***Ruuduks*** *nimetatakse niisugust rööpkülikut, milles kõik küljed on võrdsed ja kõik nurgad täisnurgad*; võib ka ütelda, et **ruut** *on ristkülik, mille küljed on võrdsed,* või *romb, mille nurgad on täisnurgad.* Seepärast ruudul on rööpküliku, ristküliku ja rombi omadused. Näiteks, ruudul on neli sümmeetriatelge (joon. 105): kaks läbivad vastasküljgede keskpunkte (nagu ristküliku puhul) ja kaks läbivad vastasnurkade tippe (nagu rombi puhul).

Mõned rööpküliku omadustel põhinevad teoreemid.

95. **Teoreem.** ***Kui nurga ühele haarale*** (näiteks nurga ABC haarale BC, joon. 106) ***paigutame võrdsed lõigud*** ($DE = EF = \ldots$) ***ja läbi nende otspunktide tõmbame paralleelsed sirged*** (DM, EN, $FP, \ldots$) ***kuni lõikumiseni nurga teise haaraga, siis nurga teisel haaral tekivad samuti võrdsed lõigud*** ($MN = NP = \ldots$).

Tõmbame abisirged DK ja EL paralleelselt AB-ga. Seejuures tekkinud kolmnurgad DKE ja ELF on võrdsed, sest $DE=EF$ (eelduse põhjal), $\angle KDE=\angle LEF$ ja $\angle KED=\angle LFE$ (kui kaasnurgad paralleelide juures). Nende kolmnurkade võrdsusest järeldub, et $DK=EL$. Aga $DK=MN$ ja $EL=NP$ kui rööpkülikute vastasküljed, tähendab $MN=NP$.



Joon. 106.

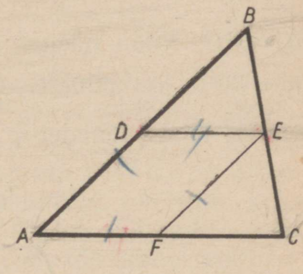
M ä r k u s. Võrdsed lõigud võivad olla paigutatud ka nurga B tipust: $BD=DE=EF=\ldots$ Siis tuleb võrdsed lõigud ka teisel haaral lugeda nurga tipust: $BM=MN=NP=\ldots$

96. Järeldus. *Sirge* (*DE*, joon 107), *mis on tõmmatud läbi kolmnurga külje* (*AB*) *keskpunkti paralleelselt tema teise küljega* (*AC*), *poolitab kolmnurga kolmanda külje* (*BC*).

Tõepoolest, näeme, et nurga *B* haarale on paigutatud võrdsed lõigud $BD=DA$ ja läbi jaotuspunktide *D* ja *A* on tõmmatud paralleelsed sirged *DE* ja *AC* lõikumiseni haaraga *BC*; tõestatu põhjal tekivad ka sellel haaral võrdsed lõigud $BE=EC$ ja seepärast punkt *E* poolitab lõigu *BC*.

Märkus. Lõiku, mis ühendab kolmnurga kahe külje keskpunkte, nimetatakse kolmnurga **kesklõiguks.**

97. Teoreem (mis väljendab kolmnurga kesklõigu omadust). ***Sirglõik*** (*DE*, joon. 107), ***mis ühendab kolmnurga kahe külje keskpunkte*** (s. o. kolmnurga *ABC* kesklõik), ***on paralleelne kolmanda küljega ja võrdub kolmanda külje poolega.***



Joon. 107.

Tõestuseks kujutleme, et läbi külje *AB* keskpunkti tõmbasime sirge paralleelselt küljega *AC*. Siis eelmises paragrahvis tõestatu põhjal poolitab see sirge külje *BC* ja ühtib järelikult sirglõiguga *DE*, mis ühendab külgede *AB* ja *BC* keskpunkte.

Tõmmates veel $EF \| AD$, leiame, et külg *AC* poolitub punktis *F*; tähendab, $AF=FC$ ja peale selle $AF=DE$ (kui rööpküliku *ADEF* vastasküljed), seega:

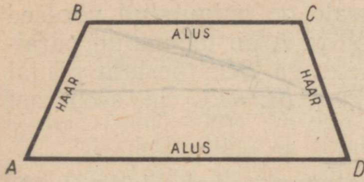
$$DE=\frac{1}{2}AC.$$

Trapetsid.

98. *Nelinurka, mille kaks vastaskülge on paralleelsed, teised kaks külge aga pole paralleelsed, nimetatakse* ***trapetsiks.*** Trapetsi paralleelseid külgi (*AD* ja *BC*, joon. 108) nimetatakse tema **alusteks,** mitteparalleelseid külgi (*AB* ja *CD*) — **haaradeks.** Kui haarad on võrdsed, siis trapets on **võrdhaarne.**

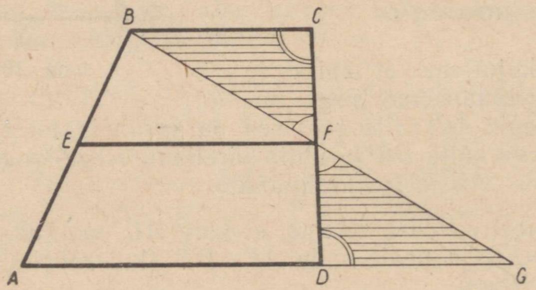
99. Trapetsi kesklõigu omadus. Sirglõiku, mis ühendab trapetsi haarade keskpunkte, nimetatakse trapetsi **kesklõiguks.** Sellel lõigul on järgmine omadus.

Teoreem. ***Trapetsi kesklõik*** (joon. 109) ***on alustega paralleelne ning võrdub aluste poolsummaga.***



Joon. 108.

Tõmbame läbi punktide B ja F sirge kuni lõikumiseni külje AD pikendusega punktis G. Saame kaks kolmnurka BCF ja DFG, mis on võrdsed, sest neil: $CF=FD$ (eelduse põhjal), $\angle BFC=\angle DFG$ (kui tippnurgad) ja $\angle BCF=\angle FDG$ (kui põiknurgad paralleelide juures). Kolmnurkade võrdsusest järeldub, et $BF=FG$ ja $BC=DG$. Nüüd näeme, et kolmnurgas ABG sirglõik EF ühendab kahe külje keskpunkte, tähendab (§ 97), $EF\|AG$ ja $EF=\frac{1}{2}(AD+DG)$; teiste sõnadega: $EF\|AD$ ja $EF=\frac{1}{2}(AD+BC)$.



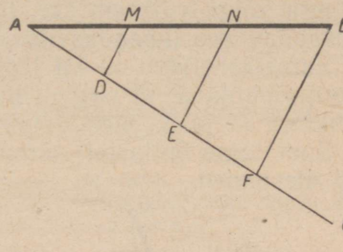
Joon. 109.

100. Ülesanne. *Jaotada antud sirglõik* (AB, joon. 110) *võrdseteks osadeks, millede arv on antud* (näiteks kolmeks). Sirglõigu otspunktist A tõmbame sirge AC, mis moodustab AB-ga mingi nurga; paigutame AC-le punktist A kolm võrdset lõiku: AD, DE ja EF; punkti F ühendame punktiga B; lõpuks tõmbame punktidest E ja D paralleelselt FB-ga sirged EN ja DM. Siis sirglõik AB jaotub tõestatu põhjal punktides M ja N kolmeks võrdseks osaks.

Konstrueerimisülesandeid.

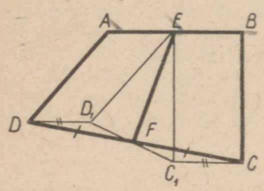
101. Rööplükkemeetod. Rööpküliku omaduste rakendusele on rajatud konstrueerimisülesannete lahendamise eriviis, mis on tuntud rööp- ehk paralleellükkemeetodi nime all. Kõige paremini selgitab selle meetodi olu näide.

Ülesanne. *Joonestada nelinurk ABCD* (joon. 111), *kui on teada kõik tema küljed ja sirglõik EF, mis ühendab vastaskülgede keskpunkte.*



Joon. 110.

Selleks et antud jooned teineteisele lähendada, viime küljed AD ja BC rööplükke abil asenditesse ED_1 ja EC_1. Siis külg DD_1 on võrdne ja paralleelne AE-ga ja külg CC_1 on võrdne ja paralleelne EB-ga; et aga $AE=EB$, siis $DD_1=CC_1$ ja $DD_1 \| CC_1$. Seetõttu kolmnurgad DD_1F ja CC_1F on võrdsed (sest $DD_1=CC_1$, $DF=FC$ ja $\angle D_1DF=\angle FCC_1$); tähendab, $\angle D_1FD=\angle CFC_1$ ja seepärast peab joon D_1FC_1 olema sirgjoon, s. t. kujund ED_1FC_1 on kolmnurk. Selles kolmnurgas on teada kaks külge ($ED_1=AD$ ja $EC_1=BC$) ja mediaan EF, mis on tõmmatud kolmandale küljele. Nende andmete põhjal on kerge joonestada kolmnurka ED_1C_1 (pikendame sirglõiku EF üle punkti F oma pikkuse võrra ja saadud punkti ühendame D_1-ga ja C_1-ga; saame rööpküliku, milles on teada küljed ja üks diagonaal).



Joon. 111.

Kui kolmnurk ED_1C_1 on leitud, joonestame kolmnurgad D_1DF ja C_1CF ja siis kogu nelinurga $ABCD$.

Jätame selle meetodi abil õpilastel lahendada järgmised ülesanded.

1. Joonestada trapets, kui on antud üks nurk, kaks diagonaali ja kesklõik.
2. Joonestada nelinurk, kui on antud kolm külge a, b, c ja kaks otsitava külje lähisnurka α ja β.
3. Joonestada trapets nelja külje järgi.

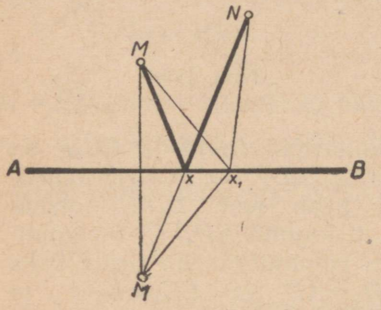
102. Sümmeetriameetod. Teljelise sümmeetria omadusi võime kasutada ka konstrueerimisülesannete lahendamisel. Mõnikord on kerge leida lahendusplaani, kui osa joonist pöörata mõne sirge ümber nii, et ta võtaks sümmeetrilise asendi teisel pool seda sirget. Toome näite.

Ülesanne. *Leida sirgel AB* (joon. 112) *niisugune punkt X, et ta kauguste summa kahest antud punktist M ja N oleks väikseim.*

Kui joonis murda kokku mööda sirget AB, siis punkt M võtab asendi M', mis on sümmeetriline M-ga AB suhtes ja punkti M kaugus sirge AB mistahes punktist võrdub selle punkti kaugusega M'-st. Seepärast ongi summad $MX+XN$, MX_1+X_1N... vastavalt võrdsed summadega $M'X+XN$, $M'X_1+X_1N$...; viimastest summadest on aga kõige väiksem see, mille puhul $M'XN$ on sirge. Siit ongi arusaadav see lahendusviis.

Sama lahendus on ka järgmisel ülesandel: leida sirgel AB niisugune punkt X, et sirged, mis ühendavad seda punkti kahe antud punktiga M ja N, moodustaksid sirgega AB võrdsed nurgad.

Soovitame õpilastel sümmeetriameetodi abil lahendada järgmised ülesanded.



Joon. 112.

1. Joonestada nelinurk $ABCD$, kui on teada tema neli külge ja et diagonaal AC poolitab nurga A.

2. Täisnurksel piljardil on antud kahe palli A ja B asend. Mis suunas tuleb lüüa palli A, et see pärast tagasipõrkamist kõigist neljast piljardi äärisest põrkaks kokku palliga B?

3. On antud nurk ja tema sees punkt. Joonestada väikseima ümbermõõduga kolmnurk nii, et selle üks tipp oleks antud punktis ja kaks teist tippu asetseksid antud nurga haaradel.

Harjutusi.

Tõestada teoreemid.

1. Kui ühendada järjest mingi nelinurga külgede keskpunktid, saadakse rööpkülik.

2. Täisnurkses kolmnurgas hüpotenuusile tõmmatud mediaan võrdub poole hüpotenuusiga.

Juhis. Mediaani tuleb pikendada tema oma pikkuse võrra.

3. Pöördteoreem: kui mediaan on pool sellest kolmnurga küljest, millele ta on tõmmatud, siis kolmnurk on täisnurkne.

4. Täisnurkses kolmnurgas moodustavad hüpotenuusile tõmmatud mediaan ja kõrgus nurga, mis võrdub kolmnurga teravnurkade vahega.

Juhis. Vt. ülesanne 2.

5. Kolmnurgas ABC nurga A poolitaja lõikab külge BC punktis D; sirge, mis on tõmmatud D-st paralleelselt CA-ga, lõikab külge AB punktis E; sirge, mis on tõmmatud E-st paralleelselt BC-ga, lõikab külge AC punktis F. Tõestada, et $EA=FC$.

6. Antud nurga sees on teine nurk, mille haarad on paralleelsed antud nurga haaradega ja võrdsel kaugusel neist. Tõestada, et teise nurga nurgapoolitaja ühtib antud nurga nurgapoolitajaga.

7. Trapetsi kesklõik poolitab iga sirglõigu, mis ühendab alumise aluse mingit punkti ülemise aluse mingi punktiga.

8. Kolmnurgas on tõmmatud läbi aluse lähisnurkade poolitajate lõikepunkti sirge paralleelselt alusega. Tõestada, et selle sirge lõik kolmnurga kahe külje vahel võrdub aluse lähisküljede lõikude summaga (lõigud on mõeldud alusest kuni tõmmatud sirgeni).

9. Läbi kolmnurga tippude on tõmmatud sirged paralleelselt vastaskülgedega. Tõestada, et nende sirgete poolt tekitatud kolmnurk koosneb neljast kolmnurgast, milledest igaüks võrdub antud kolmnurgaga, ja et iga tema külg on kaks korda suurem antud kolmnurga vastavast küljest.

10. Võrdhaarses kolmnurgas on aluse iga punkti kauguste summa haaradest jääv suurus ja see võrdub haarale tõmmatud kõrgusega.

11. Kuidas muutub see teoreem, kui punkt võtta aluse pikendusel?

12. Võrdkülgses kolmnurgas on kolmnurga sees võetud iga punkti kauguste summa külgedest jääv suurus, mis on võrdne kolmnurga kõrgusega.

13. Rööpkülik, mille diagonaalid on võrdsed, on ristkülik.

14. Rööpkülik, mille diagonaalid on teineteisega risti, on romb.

15. Rööpkülik, mille diagonaal poolitab nurga, on romb.

16. Rombi diagonaalide lõikepunktist on joonestatud ristjooned rombi külgedele. Tõestada, et nende ristjoonte alused on ristküliku tipud.

Juhis. Vt. ülesanne 13.

17. Ristküliku nurkade poolitajad moodustavad lõikumisel ruudu.

18. Tõestada, et kui A', B', C' ja D' on ruudu külgede CD, DA, AB ja BC keskpunktid, siis lõigud AA', CC', DD' ja BB' moodustavad lõikumisel ruudu, mille külg võrdub $\frac{2}{5}$-ga iga lõigu pikkusest.

19. On antud ruut $ABCD$. Selle külgedele on asetatud võrdsed lõigud: AA_1, BB_1, CC_1 ja DD_1. Punktid A_1, B_1, C_1 ja D_1 on järjestikku ühendatud lõikudega. Tõestada, et $A_1B_1C_1D_1$ on ruut.

20. Kui mingi nelinurga külgede keskpunktid võtta uue nelinurga tippudeks, siis viimane nelinurk on rööpkülik. Määrata, millal see rööpkülik on: 1) ristkülik, 2) romb, 3) ruut.

Leida geomeetriline koht.

21. Antud punktist antud sirge mistahes punktidesse tõmmatud lõikude keskpunktidele.

22. Kahest paralleelsest sirgest võrdsel kaugusel asetsevatele punktidele.

23. Ühise alusega ja võrdsete kõrgustega kolmnurkade tippudele.

Konstrueerimisülesandeid.

24. On antud kolmnurga kaks nurka; joonestada kolmas nurk.

25. On antud täisnurkse kolmnurga üks teravnurk; joonestada teine teravnurk.

26. Tõmmata antud sirgega paralleelne sirge sellest antud kaugusel.

27. Poolitada nurk, mille tippu pole joonisel.

28. Tõmmata läbi antud punkti sirge, mis moodustaks antud sirgega antud nurga.

29. On antud kaks sirget XY ja $X'Y'$ ja punkt P; tõmmata läbi antud punkti sirgetele niisugune lõikaja, et antud punkt P poolitaks lõikaja lõikepunktide vahelise osa.

30. Tõmmata sirge läbi antud punkti nii, et selle lõik kahe antud paralleeli vahel võrduks antud lõiguga.

31. Paigutada antud sirglõik antud teravnurga haarade vahele nii, et ta oleks risti ühe haaraga.

32. Paigutada antud sirglõik antud nurga haarade vahele nii, et ta oleks paralleelne nurga haarasid lõikava sirgega.

33. Paigutada antud sirglõik antud nurga haarade vahele nii, et ta lõikaks nurga haaradest ära võrdsed lõigud.

34. Joonestada täisnurkne kolmnurk, kui on antud teravnurk ja selle vastaskaatet.
35. Joonestada kolmnurk, kui on antud kaks nurka ja neist ühe nurga vastaskülg.
36. Joonestada võrdhaarne kolmnurk, kui on antud tipunurk ja alus.
37. Joonestada võrdhaarne kolmnurk, kui on antud alus ja haarale tõmmatud kõrgus.
38. Joonestada võrdhaarne kolmnurk, kui on antud haar ja haarale tõmmatud kõrgus.
39. Joonestada võrdkülgne kolmnurk, kui on antud kõrgus.
40. Jaotada täisnurk kolmeks võrdseks osaks (teiste sõnadega: ehitada nurk, mis võrdub $\frac{1}{3}\, d = 30°$-ga).
41. Joonestada kolmnurk, kui on antud alus, kõrgus ja külg.
42. Joonestada kolmnurk, kui on antud alus, kõrgus ja aluse lähisnurk.
43. Joonestada kolmnurk, kui on antud üks nurk ja kõrgused, mis on tõmmatud selle nurga haaradele.
44. Joonestada kolmnurk, kui on antud üks külg, kahe teise külje summa ja kõrgus ühele neist külgedest.
45. Joonestada kolmnurk, kui on antud kõrgus, ümbermõõt ja aluse lähisnurk.
46. Tõmmata kolmnurgas sirge paralleelselt alusega nii, et selle lõik külgede vahel võrduks külgede lõikude summaga (lõigud on võetud alusest tõmmatud sirgeni).
47. Joonestada hulknurk, mis oleks võrdne antud hulknurgaga.

J u h i s. Antud hulknurk tükeldatakse diagonaalidega kolmnurkadeks.

48. Joonestada nelinurk, kui on antud kolm nurka ja kaks külge, mis moodustavad neljanda nurga.

J u h i s. Tuleb leida neljas nurk.

49. Joonestada nelinurk, kui on antud kolm külge ja kaks diagonaali.
50. Joonestada rööpkülik, kui on antud kaks mittevõrdset külge ja üks diagonaal.
51. Joonestada rööpkülik, kui on antud üks külg ja kaks diagonaali.
52. Joonestada rööpkülik, kui on antud kaks diagonaali ja nurk nende vahel.
53. Joonestada rööpkülik, kui on antud alus, kõrgus ja üks diagonaal.
54. Joonestada ristkülik, kui on antud üks diagonaal ja nurk diagonaalide vahel.
55. Joonestada romb, kui on antud külg ja üks diagonaal.
56. Joonestada romb, kui on antud kaks diagonaali.
57. Joonestada romb, kui on antud kõrgus ja üks diagonaal.
58. Joonestada romb, kui on antud nurk ja diagonaal, mis läbib seda nurka.
59. Joonestada romb, kui on antud diagonaal ja selle vastasnurk.
60. Joonestada romb, kui on antud diagonaalide summa ja nurk diagonaali ja külje vahel.
61. Joonestada ruut, kui on antud diagonaal.
62. Joonestada trapets, kui on antud üks alus, selle lähisnurk ja kaks haara (võib olla kaks lahendust, üks või mitte ühtki).
63. Joonestada trapets, kui on antud aluste vahe, kaks haara ja üks diagonaal.
64. Joonestada trapets, kui on antud neli külge. (Kas ülesanne on alati lahendatav?)
65. Joonestada trapets, kui on antud üks alus, kõrgus ja kaks diagonaali (lahendatavuse tingimus?).
66. Joonestada trapets, kui on antud kaks alust ja kaks diagonaali (lahendatavuse tingimus?).

67. Joonestada ruut, kui on antud diagonaali ja külje summa.

68. Joonestada ruut, kui on antud diagonaali ja külje vahe.

69. Joonestada rööpkülik, kui on antud diagonaalid ja kõrgus.

70. Joonestada rööpkülik, kui on antud külg, diagonaalide summa ja nurk diagonaalide vahel.

71. Joonestada kolmnurk, kui on antud kaks külge ja mediaan kolmandale küljele.

72. Joonestada kolmnurk, kui on antud alus, kõrgus ja mediaan küljele.

73. Joonestada täisnurkne kolmnurk, kui on antud hüpotenuus ja kaatetite summa. (Uurida.)

74. Joonestada täisnurkne kolmnurk, kui on antud hüpotenuus ja kaatetite vahe.

75. On antud kaks punkti A ja B, mis asetsevad ühel pool sirget XY. Paigutada sellele sirgele sirglõik MN antud pikkusega l nii, et murdjoon $AM+MN+NB$ oleks lühim.

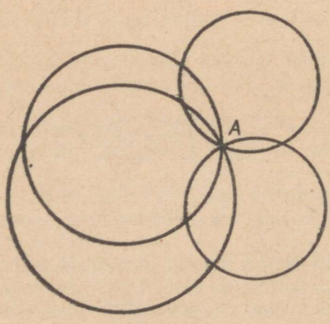
J u h i s. Punkt B tuleb viia pikkuse l võrra punktile A lähemale, nihutades teda mööda sirget, mis on paralleelne sirgega XY.

TEINE PEATÜKK.

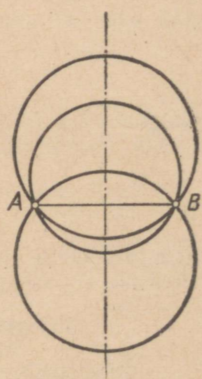
RINGJOON.

I. Ringjoone kuju ja asend.

103. Eelmärkus. On ilmne, et läbi ühe punkti (*A*, joon. 113) on võimalik tõmmata kuitahes palju ringjooni; nende keskpunktid võivad olla võetud meelevaldselt. Läbi kahe punkti (*A* ja *B*, joon. 114) saab tõmmata ka kuitahes palju ringjooni, kuid nende



Joon. 113.



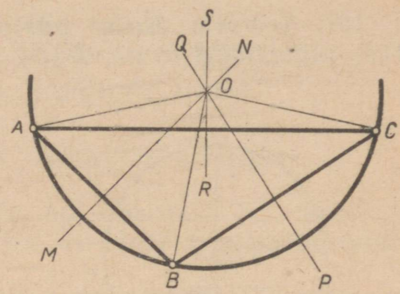
Joon. 114.

keskpunkte ei saa võtta meelevaldselt, sest punktid, mis asetsevad võrdsetel kaugustel punktidest *A* ja *B*, peavad olema sirglõigu *AB* keskristjoonel (§ 58).

Nüüd vaatame, kas on võimalik ringjoont tõmmata läbi kolme punkti.

104. Teoreem. ***Läbi kolme mitte ühel sirgel asetseva punkti saab tõmmata ainult ühe ringjoone.***

Läbi kolme punkti A, B ja C (joon. 115), mis ei asetse ühel sirgel (teiste sõnadega: läbi $\triangle ABC$ tippude), saab ainult sel korral tõmmata ringjoone, kui on olemas niisugune neljas punkt O, mis asetseb võrdsel kaugusel punktidest A, B ja C. Tõestame, et niisugune punkt on olemas, ja seejuures ainult üks. Selleks arvestame seda, et iga punkt, mis on võrdsel kaugusel punktidest A ja B, peab asetsema AB keskristjoonel MN (§ 58), samuti iga punkt, mis on võrdsel kaugusel punktidest B ja C, peab asetsema BC keskristjoonel QP. Tähendab, kui on olemas punkt, mis on võrdsel kaugusel kolmest punktist A, B ja C, siis peab ta asetsema üheaegselt sirgetel MN ja PQ; see on võimalik ainult siis, kui ta ühtib nende sirgete lõikepunktiga. Sirged MN ja PQ **lõikuvad alati,** sest nad on ristjooned lõikuvaile sirgjoontele AB ja BC (§ 78). Nende lõikepunkt O on punkt, mis on võrdsel kaugusel punktidest A, B ja C; tähendab, kui võtta see punkt ringjoone keskpunktiks ja raadiuseks võtta lõik OA (või OB või OC), siis ringjoon läbib punkte A, B ja C. Kuna sirged MN ja PQ võivad lõikuda ainult ühes punktis, siis saab olla ka ainult **üks keskpunkt** ja raadiusel võib olla ainult üks pikkus; tähendab, ka otsitav ringjoon on **ainus.**



Joon. 115.

M ä r k u s. Kui punktid A, B ja C (joon. 115) asetseksid ühel sirgel, siis ristjooned MN ja PQ oleksid paralleelsed ja seega ei lõikuks. Järelikult, läbi kolme ühel sirgel asetseva punkti ei saa tõmmata ringjoont.

J ä r e l d u s. Punkt O (joon. 115), olles võrdsel kaugusel punktidest A ja C, peab asetsema külje AC keskristjoonel RS. Seega *kolmnurga külgede keskristjooned lõikuvad ühes punktis.*

105. Teoreem. ***Diameeter*** (AB, joon. 116), ***mis on risti kõõluga*** (CD), ***poolitab kõõlu ja selle kõõlu otspunktide vahel olevad kaared.***

Murrame joonise kokku mööda diameetrit AB nii, et joonise vasak pool langeb paremale poolele. Siis vasakpoolne poolringjoon ühtib parempoolse poolringjoonega ja ristjoon KC läheb mööda KD-d. Sellest järeldub, et punkt C, mis on poolringjoone ja KC lõikepunkt, ühtib punktiga D; seepärast

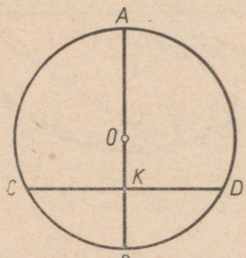
$$CK = KD; \smile BC = \smile BD; \smile AC = \smile AD.$$

106. Pöördteoreemid. 1. ***Diameeter*** (*AB*, joon. 116), ***mis on tõmmatud läbi kõõlu*** (*CD*) ***keskpunkti, on risti selle kõõluga ning poolitab kõõlu otspunktide-vahelised kaared.***

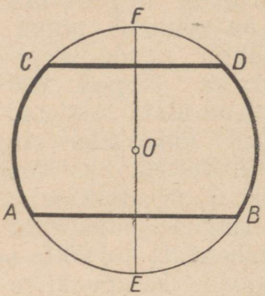
2. ***Diameeter*** (*AB*), ***mis on tõmmatud läbi kaare*** (*CBD*) ***keskpunkti, on risti kõõluga, mis ühendab selle kaare otspunkte, ning poolitab kõõlu.***

Neid kaht teoreemi on kerge tõestada vastuväiteliselt.

107. Teoreem. ***Kahe paralleelse kõõlu*** (*AB* ja *CD*, joon. 117) ***vahelised kaared*** (*AC* ja *BD*) ***on võrdsed.***

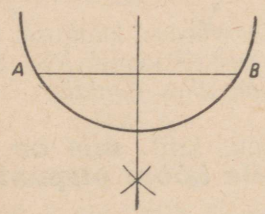


Joon. 116.

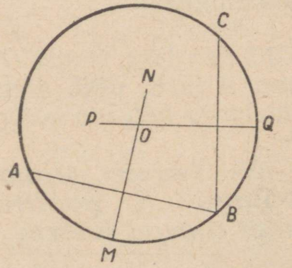


Joon. 117.

Murrame joonise kokku mööda diameetrit *EF*, mis on risti kõõluga *AB*. Eelmise teoreemi põhjal võime väita, et punkt *A* langeb punktile *B*, punkt *C* punktile *D* ja järelikult kaar *AC* ühtib kaarega *BD*, see aga tähendab, et kaared on võrdsed.



Joon. 118.



Joon. 119.

108. Ülesandeid. 1) *Poolitada antud kaar* (*AB*, joon. 118). Ühendame kaare otspunktid kõõluga *AB*, joonestame sellele ringjoone keskpunktist ristjoone ja pikendame seda lõikumiseni kaarega. Eespool toodud teoreemi põhjal see ristjoon poolitab kaare *AB*.

Kui ringjoone keskpunkti pole teada, tuleb kõõlule tõmmata keskristjoon.

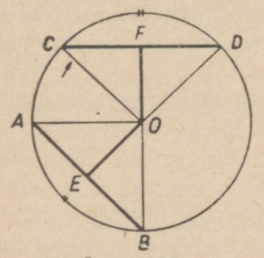
2) *Leida antud ringjoone keskpunkt* (joon. 119). Võttes antud ringjoonel mingisugused kolm punkti *A*, *B* ja *C*, tõmmatakse läbi nende kaks kõõlu, näiteks *AB* ja *CB*, ning nendele kõõludele tõmmatakse keskristjooned *MN* ja *PQ*. Ringjoone otsitav keskpunkt, olles võrdsel kaugusel punktidest *A*, *B* ja *C*, peab asetsema nii sirgel *MN* kui ka sirgel *PQ*; järelikult on ta nende ristjoonte lõikepunktis, seega punktis *O*.

II. Seos kaarte, kõõlude ja kõõlude ning ringjoone keskpunkti vaheliste kauguste vahel.

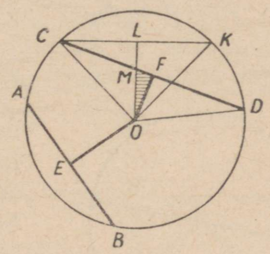
109. Teoreem. ***Kui ringis või võrdsetes ringides:***

1) *kaared on võrdsed, siis on võrdsed ka nendele vastavad kõõlud ning need on võrdsel kaugusel ringi keskpunktist;*

2) *kaks kaart, mis on väiksemad poolringjoonest, ei ole võrdsed, siis suuremale kaarele vastab suurem kõõl ja see on ringi keskpunktile lähemal.*



Joon. 120.



Joon. 121.

1. Olgu kaar *AB* võrdne kaarega *CD* (joon. 120); tuleb tõestada, et kõõlud *AB* ja *CD* on võrdsed ja et samuti on võrdsed ringi keskpunktist kõõludele tõmmatud ristlõigud *OE* ja *OF*.

Pöörame sektorit *OAB* noolega näidatud suunas ümber keskpunkti *O* seni, kuni raadius *OB* ühtib *OC*-ga. Siis kaar *BA* läheb mööda kaart *CD* ja nad ühtivad võrdsuse tõttu. Seega kõõl *AB* ühtib kõõluga *CD* ja ristlõik *OE* ühtib ristlõiguga *OF* (ühest punktist saab antud sirgele tõmmata ainult ühe ristjoone), s. t. $AB = CD$ ja $OE = OF$.

2. Olgu kaar *AB* (joon. 121) väiksem kaarest *CD* ja mõlemad kaared seejuures väiksemad poolringjoonest; tuleb tõestada, et kõõl *AB* on väiksem kõõlust *CD*, ristlõik *OE* on aga suurem ristlõigust *OF*. Paigutame kaarele *CD* kaare *CK*, mis on võrdne kaarega *AB*, ja tõmbame abikõõlu *CK*, mis tõestatu põhjal võrdub kõõluga *AB*

ja on samal kaugusel keskpunktist kui kõõl AB. Kolmnurkadel COD ja COK on kaks vastavalt võrdset külge (kui raadiused), nurgad nende külgede vahel pole aga võrdsed; sel juhul, nagu teame (§ 52), asetseb suurema nurga vastas, s. o. $\angle COD$ vastas suurem külg; tähendab $CD > CK$ ja seepärast $CD > AB$.

Tõestuseks, et $OE > OF$, tõmbame $OL \perp CK$ ja arvestame seda, et $OE = OL$; järelikult piisab sellest, kui võrdleme lõiku OF lõiguga OL. Täisnurkses kolmnurgas OFM (joonisel viirutatud) on hüpotenuus OM suurem kaatetist OF; aga $OL > OM$, tähendab, OL on ammugi suurem kui OF ja seepärast $OE > OF$.

Teoreem, mis on tõestatud ü h e ringi kohta, säilitab oma kehtivuse ka v õ r d s e t e ringide puhul, sest niisugused ringid erinevad üksteisest ainult oma asendi poolest.

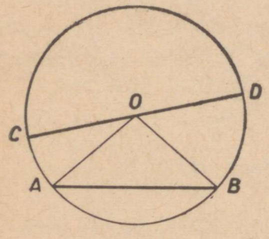
110. Pöördteoreemid. Eelmises paragrahvis läbiarutatud teoreemidele vastavalt on kehtivad ka pöördteoreemid, nimelt: *ühes ringis või võrdsetes ringides:*

1) *võrdsed kõõlud on võrdsel kaugusel ringi keskpunktist ning võrdsetele kõõludele vastavad võrdsed kaared;*

2) *ringi keskpunktist võrdsel kaugusel asetsevad kõõlud on võrdsed ning nendele kõõludele vastavad võrdsed kaared;*

3) *kahest mittevõrdsest kõõlust asetseb suurem ringi keskpunktile lähemal ja talle vastab suurem kaar;*

4) *kahest kõõlust, mis asetsevad ringi keskpunktist mittevõrdsel kaugusel, on suurem see, mis on lähemal ringi keskpunktile, ja talle vastab suurem kaar.*



Joon. 122.

Neid teoreeme on kerge tõestada vastuväiteliselt. Näiteks esimese teoreemi tõestamisel arutleme nii: kui antud kõõludele vastaksid mittevõrdsed kaared, siis vastavalt otsesele teoreemile nad poleks võrdsed, mis aga räägib vastu eeldusele; tähendab, võrdsetele kõõludele vastavad võrdsed kaared. Kui aga kaared on võrdsed, siis vastavalt otsesele teoreemile peavad kaartele vastavad kõõlud asetsema ringi keskpunktist võrdsel kaugusel.

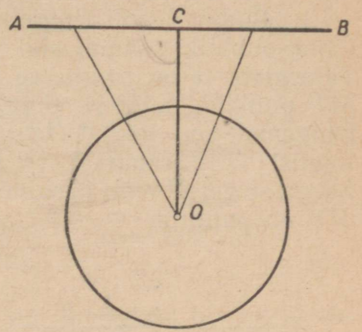
111. Teoreem. *Diameeter on suurim kõõl.*

Kui mingi kõõlu, näiteks AB (joon. 122) otspunktid ühendada keskpunktiga O, siis saadakse kolmnurk AOB, milles üks külg on kõõl, teised küljed aga — raadiused. Kolmnurgas on aga üks külg väiksem teiste külgede summast, järelikult on kõõl AB väiksem kahe raadiuse summast. Tähendab, diameeter on suurem igast keskpunkti mitteläbivast kõõlust. Et aga diameeter on ka kõõl, siis võib ütelda, et diameeter on suurim kõõl.

III. Sirge ja ringjoone vastastikune asend.

112. On ilmne, et sirge ja ringjoon võivad olla järgmises kolmes vastastikuses asendis.

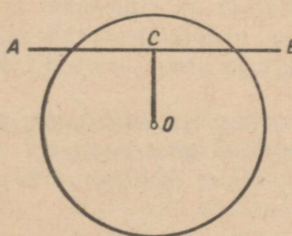
1) *Ringjoone keskpunkti kaugus* (*OC*) *sirgest* (*AB*) (s. o. ristlõik, mis on tõmmatud keskpunktist sirgele) *on suurem ringi raadiusest* (joon. 123). Siis on sirgel võetud punkti *C* kaugus ringjoone keskpunktist suurem raadiusest ja seepärast on ta väljaspool ringi. Et sirge kõik teised punktid on veel kaugemal punktist *O* kui punkt *C* (kaldlõigud on pikemad ristlõigust), siis on nad kõik väljaspool ringi; tähendab, sirgel pole ühiseid punkte ringjoonega.



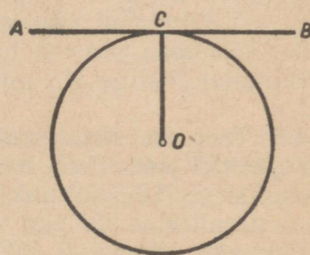
Joon. 123.

2) *Ringjoone keskpunkti kaugus* (*OC*) *sirgest* (*AB*) *on väiksem ringi raadiusest* (joon. 124). Sel juhtumil asetseb punkt *C* ringi sees ning sirge lõikab ringjoont.

3) *Ringjoone keskpunkti kaugus* (*OC*) *sirgest* (*AB*) *on võrdne ringi raadiusega* (joon. 125). Siis peab punkt *C* kuuluma nii sirgele kui ka ringjoonele, sirge kõik muud punktid, mis on kaugemal punktist *O* kui punkt *C*, on väljaspool ringi. Tähendab, niisugusel juhul on ringjoonel ja sirgel ainult üks ühine punkt, nimelt punkt, mis on ringi keskpunktist sirgele tõmmatud ristlõigu aluseks.



Joon. 124.



Joon. 125.

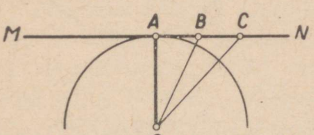
Niisugust sirget, millel on ringjoonega ainult üks ühine punkt, nimetatakse ringjoone **puutujaks;** ühist punkti nimetatakse **puutepunktiks.**

113. Puutuja kohta tõestame k a k s j ä r g m i s t t e o r e e m i (otsese ja pöördteoreemi) (joon. 126):

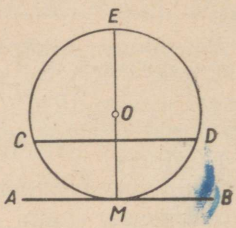
1) kui sirge (*MN*) ***on risti raadiusega*** (*OA*) ***selle otspunktis*** (*A*) ***ringjoonel, siis on ta ringjoone puutuja,*** ja ümberpöördult:

2) kui sirge on ringjoone puutuja, siis on ta risti puutepunkti tõmmatud raadiusega.

1. Punkt *A*, kui ringjoonel asetsev raadiuse otspunkt, on ringjoone punktiks; samal ajal kuulub ta ka sirge *MN* punktide hulka. Tähendab, ta on ringjoone ja sirge ühine punkt. Kõik muud sirge *MN* punktid, nagu *B*, *C* ja teised, asetsevad ringi keskpunktist *O* kaugemal, sest lõigud *OB*, *OC*, ... kui kaldlõigud on pikemad ristlõigust *OA*, seepärast on siis punktid *B*, *C* jt. väljaspool ringi. Seega sirgel *MN* on üksainus ühine punkt (*A*) ringjoonega ja sirge *MN* on puutuja.



Joon. 126.



Joon. 127.

2. Kui sirge *MN* puutub ringjoont punktis *A*, siis kõik muud selle sirge punktid on väljaspool ringjoont; seetõttu lõigud *OB*, *OC*, ... on suuremad raadiusest *OA* (punkt *O* on ringjoone keskpunkt). Tähendab, see raadius on v ä i k s e i m lõikudest, mis ühendavad punkti *O* sirge *MN* mistahes punktiga ja seepärast $OA \perp MN$.

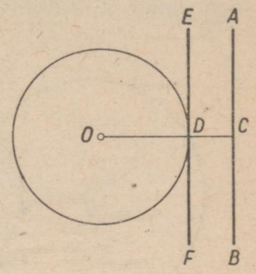
114. Teoreem. ***Kui puutuja on paralleelne kõõluga, siis puutepunkt poolitab antud kõõlule vastava kaare.***
Olgu sirge *AB* puutujaks ringjoonele punktis *M* (joon. 127) ja olgu ta paralleelne kõõluga *CD*; on vaja tõestada, et $\smile CM = \smile MD$.
Tõmmates diameetri *ME* läbi puutepunkti, on meil $EM \perp AB$, järelikult $EM \perp CD$; seepärast $\smile CM = \smile MD$.

115. Ü l e s a n n e. *Joonestada puutuja antud ringjoonele O paralleelselt antud sirgega AB* (joon. 128).

Joonestame keskpunktist *O* sirgele *AB* ristjoone *OC* ja läbi punkti *D*, milles see ristjoon lõikab ringjoont, tõmbame $EF \parallel AB$. *EF* ongi otsitav puutuja. Tõepoolest, et $OC \perp AB$ ja $EF \parallel AB$, siis $EF \perp OD$, aga sirge, mis on risti raadiusega selle otspunktis ringjoonel, on puutuja.

116. Kaare sujuv liitumine sirgega või teise kaarega. Sirgjoonte ja ringjoonte kaarte joonestamisel räägitakse tavaliselt, et sirge *AB* (joon. 129) ja ringjoone kaar *BC*, mis liituvad punktis *B*, on **liitunud sujuvalt,** kui nad selles punktis puutuvad teineteist.

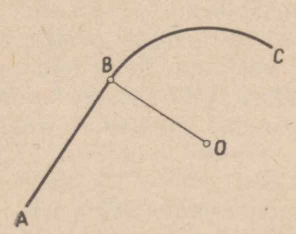
Kaks kaart *AB* ja *BC* (joon. 130), mis liituvad punktis *B*, on **liitunud sujuvalt,** kui seda punkti läbib nende ühine puutuja *DE*.



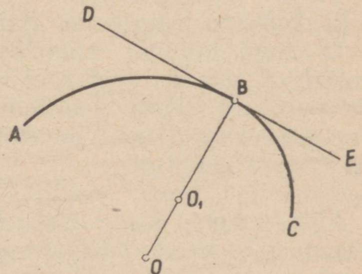
Joon. 128.

Sirge sujuvaks liitumiseks kaarega on tarvis (§ 113), et selle ringjoone, mille osaks on antud kaar, keskpunkt asetseks ristjoonel, mis on tõmmatud antud sirgele liitumispunktist.

Ühe kaare sujuvaks liitumiseks teise kaarega on tarvis (§ 113), et nende ringjoonte, mille osadeks on antud kaared, keskpunktid asetseksid ühel sirgel, mis on tõmmatud liitumispunktist risti nende kaarte ühise puutujaga.



Joon. 129.



Joon. 130.

Kahe joone (sirge ja kaare või kahe kaare) sujuv liitumine teeb ülemineku ühelt teisele ladusaks, ilma nukkideta; ta leiab rakendust näiteks raudteede ja trammiliinide käänakute ehitamisel.

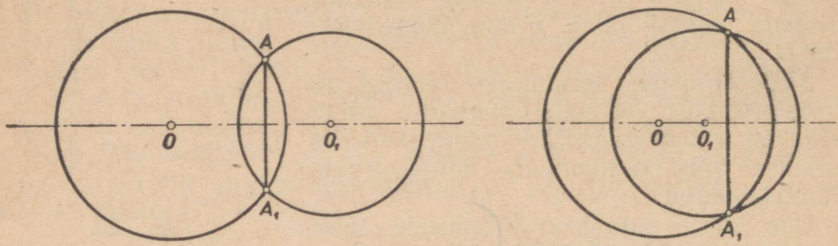
IV. Kahe ringjoone vastastikune asend.

117. D e f i n i t s i o o n i d. Kui kahel ringjoonel on ainult üks ühine punkt, siis öeldakse, et nad **puutuvad;** kui aga kahel ringjoonel on kaks ühist punkti, siis öeldakse, et nad **lõikuvad.**

Kahel mitteühtival ringjoonel ei saa olla kolme ühist punkti, sest vastasel korral peaks olema võimalik läbi kolme punkti tõmmata kaks ringjoont, mis aga pole võimalik (§ 104).

Nimetame **ringide keskjooneks** sirget, mis läbib kahe ringjoone keskpunkte.

118. Teoreem. ***Kui kahel ringjoonel*** (joon. 131) ***on üks ühine punkt*** (A) ***väljaspool nende keskjoont, siis on neil veel üks teine ühine punkt*** (A_1)***, mis on keskjoone suhtes esimesega sümmeetriline*** (ja järelikult niisugused ringjooned lõikuvad).



Joon. 131.

Et mõlema ringjoone diameetrid asetsevad keskjoonel, siis on ta kogu kujundi sümmeetriateljeks; seepärast peab ühisele punktile A, mis on ühel pool keskjoont, vastama ühine sümmeetriline punkt A_1 teisel pool sümmeetriatelge (A_1 asetseb punktist A ringide keskjoonele joonestatud ristjoonel ja samal kaugusel keskjoonest kui A-gi).

Järeldus. *Kahe lõikuva ringjoone ühine kõõl* (AA_1, joon. 131) *on risti nende keskjoonega ja poolitub selle poolt.*

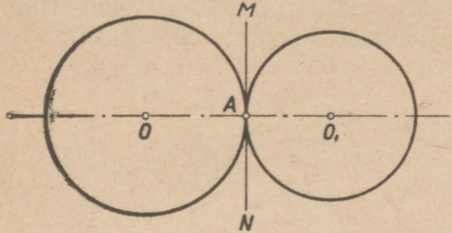
119. Teoreem. ***Kui kahel ringjoonel on ühine punkt*** (A) ***nende keskjoonel, siis nad puutuvad*** (joon. 132 ja 133).

Neil ringjoontel ei saa olla teist ühist punkti väljaspool keskjoont, sest vastasel korral oleks neil veel kolmas ühine punkt teisel pool seda joont, ja ringjooned peaksid järelikult ühtima. Ka keskjoonel ei saa olla teist ühist punkti, sest vastasel korral peaks ringjoontel olema ühine kõõl. Aga kõõl, mis läbib keskpunkte, on diameeter. Kui aga kahel ringjoonel on ühine diameeter, siis nad ühtivad.

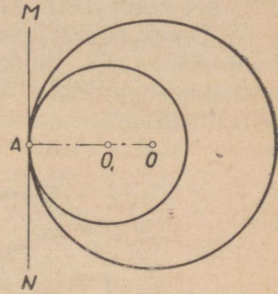
Märkus. Kahe ringjoone puutumine on **väline**, kui ringjooned asetsevad teineteisest väljaspool (joon. 132), ja **seesmine**, kui üks ringjoon on teise sees (joon. 133).

120. Teoreem (pöördteoreem eelmisele). ***Kui kaks ringjoont puutuvad*** (punktis A, joon. 132 ja 133), ***siis nende puutepunkt asetseb keskjoonel.***

Punkt A ei saa asetseda väljaspool keskjoont, sest vastasel korral oleks ringjoontel veel teine ühine punkt, mis on vasturääkiv eeldusele.



Joon. 132.



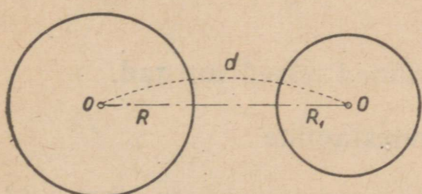
Joon. 133.

121. J ä r e l d u s. *Kahel puutuval ringjoonel on ühine puutuja puutepunktis*, seepärast et tõmmates läbi puutepunkti sirge MN (joon. 132 ja 133) risti raadiusega OA, on see sirge risti ka raadiusega O_1A.

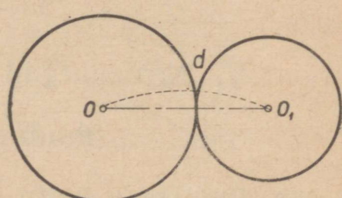
122. Kahe ringjoone vastastikuse asendi erijuhtumid. Tähistame kahe ringjoone raadiused tähtedega R ja R_1 ja nende keskpunktide vahelise kauguse tähega d. Vaatame, milline seos on nende suuruste vahel ringjoonte vastastikuse asendi erijuhtumeil. Neid juhtumeid võib olla viis, nimelt:

1) R i n g j o o n e d e i p u u t u t e i n e t e i s t n i n g a s e t s e v a d t e i n e t e i s e s t v ä l j a s p o o l (joon. 134); sel juhul ilmselt $d > R + R_1$.

2) R i n g j o o n t e l o n v ä l i n e p u u t u m i n e (joon. 135); siis $d = R + R_1$, sest puutepunkt on keskjoonel.



Joon. 134.



Joon. 135.

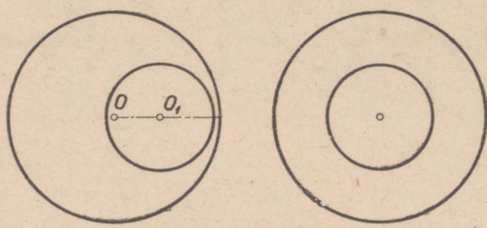
3) R i n g j o o n e d l õ i k u v a d (joon. 131); siis $d < R + R_1$ ja samal ajal $d > R - R_1$, sest kolmnurgas OAO_1[1] on külg OO_1, mis

[1] Joonisel 131 tõmmata sirged OA ja O_1A.

on võrdne d-ga, väiksem teiste külgede summast, aga suurem teiste külgede vahest. Teised küljed on vastavalt R ja R_1.

4) Ringjoontel on seesmine puutumine (joon. 133); sel juhul $d=R-R_1$, sest puutepunkt on keskjoonel.

5) Üks ringjoon on teises, seda puutumata (joon. 136); siis ilmselt $d<R-R_1$; erijuhtumil $d=0$, kui ringjoonte keskpunktid ühtivad (niisuguseid ringjooni nimetatakse **kontsentrilisteks**).



Joon. 136.

Märkus. Õpilastel on soovitav tõestada järgmiste pöördteoreemide õigsus:

1) *kui* $d>R+R_1$, *siis ringjooned ei puutu ning on teineteisest väljaspool*;

2) *kui* $d=R+R_1$, *siis ringjooned puutuvad väliselt*;

3) *kui* $d<R+R_1$ *ja ühtlasi* $d>R-R_1$, *siis ringjooned lõikuvad*;

4) *kui* $d=R-R_1$, *siis ringjooned puutuvad seesmiselt*;

5) *kui* $d<R-R_1$, *siis üks ringjoon on teises ja nad ei puutu teineteist.*

Kõiki neid teoreeme on kerge tõestada vastuväiteliselt.

V. Piirdenurgad ja mõned teised nurgad.

Puutuja joonestamine

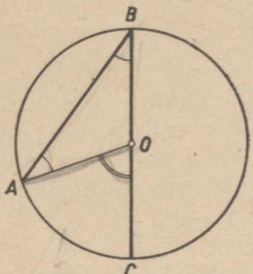
123. Piirdenurk. *Nurka, mis on moodustatud kahe ühest punktist lähtuva kõõlu poolt, nimetatakse* ***piirdenurgaks.*** Niisugune nurk on näiteks nurk ABC (joon. 137). Piirdenurga kohta öeldakse tavaliselt, et ta **toetub** kaarele, mis asetseb nurga haarade vahel. Nii toetub nurk ABC kaarele AC.

124. Teoreem. ***Piirdenurka mõõdab pool sellest kaarest, millele ta toetub.***

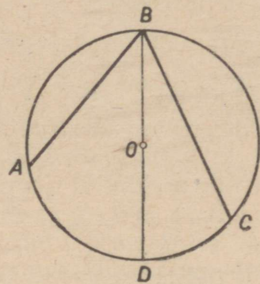
Seda teoreemi tuleb mõista nii: piirdenurgas on niisama palju nurgakraade, -minuteid ja -sekundeid, kui palju kaarekraade, -minuteid ja -sekundeid on pooles kaares, millele nurk toetub.

Teoreemi tõestamisel vaatleme eraldi kolme juhtumit.

1. Ringjoone keskpunkt O (joon. 137) asetseb piirdenurga ABC haaral. Tõmmates raadiuse AO, saame $\triangle AOB$, milles $AO=OB$ (kui raadiused) ja järelikult $\angle ABO=\angle BAO$. Selle

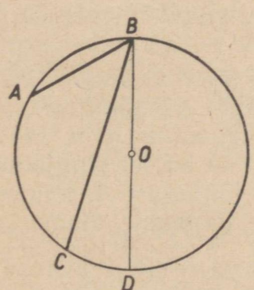


Joon. 137.

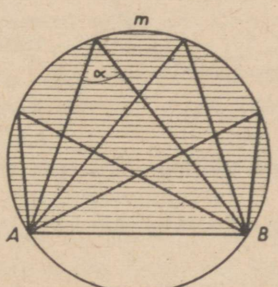


Joon. 138.

kolmnurga suhtes on nurk AOC välisnurk; seepärast võrdub ta nurkade ABO ja BAO summaga ning see on võrdne nurga ABO kahekordse suurusega; seepärast nurk ABO võrdub kesknurga AOC poolega. Nurka AOC mõõdab aga kaar AC, s. o. ta sisaldab nii palju nurgakraade, -minuteid ja -sekundeid, kui palju kaarekraade, -minuteid ja -sekundeid on kaares AC; järelikult piirdenurka ABC mõõdab pool kaarest AC.



Joon. 139.



Joon. 140.

2. Ringjoone keskpunkt O on piirdenurga ABC haarade vahel (joon. 138).

Tõmmates diameetri BD, me jaotame nurga ABC kaheks nurgaks, milledest üht, nagu eespool tõestatud, mõõdab pool kaarest

AD, teist aga pool kaarest DC; järelikult nurka ABC mõõdab summa $\frac{1}{2}\smile AD+\frac{1}{2}\smile DC$, see summa aga võrdub $\frac{1}{2}(\smile AD+\smile DC)$, s. o. $\frac{1}{2}\smile AC$.

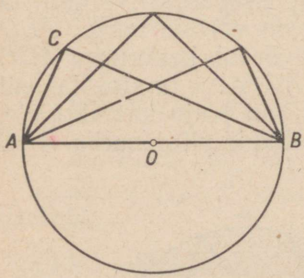
3. Ringjoone keskpunkt O on väljaspool piirdenurka ABC (joon. 139). Tõmmates diameetri BD saame: $\angle ABC = \angle ABD - \angle CBD$.

Kuid nurka ABD mõõdab pool kaarest AD ja nurka CBD pool kaarest CD; järelikult mõõdab nurka ABC vahe $\frac{1}{2}\smile AD-\frac{1}{2}\smile CD$, see vahe aga võrdub suurusega $\frac{1}{2}(\smile AD-\smile CD)$, s. o. $\frac{1}{2}\smile AC$.

125. Järeldused. 1) *Kõik ühele ja samale kaarele toetuvad piirdenurgad on võrdsed* (joon. 140), sest igaüht neist mõõdab pool ühest ja samast kaarest. Kui neist nurkadest ühe tähistame α-ga, siis võib ütelda, et segment AmB (joonisel viirutatud) mahutab endas nurga, mis võrdub α-ga.

2) *Iga piirdenurk, mis toetub diameetrile, on täisnurk* (joon. 141), sest iga niisugust nurka mõõdab pool poolringjoonest, järelikult nurk võrdub 90°-ga.

126. Ülesanne. *Joonestada täisnurkne kolmnurk, kui on antud hüpotenuus c ja kaatet b* (joon. 142).

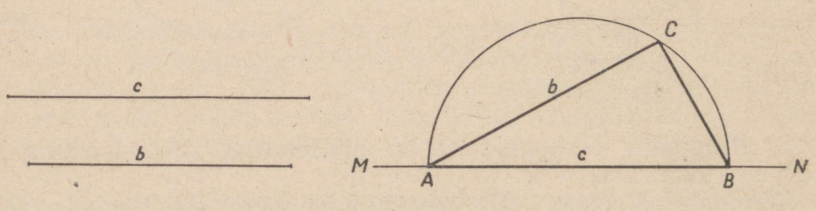


Joon. 141.

Võtame mingil sirgel MN lõigu $AB=c$ ja joonestame AB-le poolringjoone. Punktist A (või B) kui keskpunktist tõmbame kaare raadiusega b. Poolringjoone ja kaare lõikepunkti C ühendame diameetri AB otstega. Kolmnurk ABC on otsitav, sest nurk C on täisnurk, c on hüpotenuusiks ja b kaatetiks.

127. Ülesanne. *Joonestada ristjoon antud kiirele AB tema otspunktist, seda kiirt pikendamata* (joon. 143).

Võtame väljaspool sirget mingi punkti O nii, et ringjoon keskpunktiga O ja raadiusega, mis on võrdne lõiguga OA, lõikaks kiirt AB mingis punktis C. Läbi selle punkti tõmbame diameetri CD,



Joon. 142.

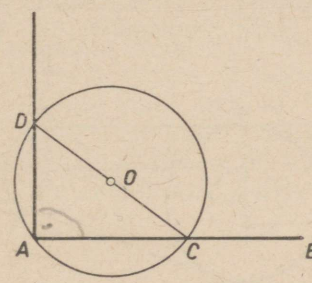
mille otsa D ühendame A-ga. Sirge AD on otsitav ristjoon, sest nurk A on täisnurk kui diameetrile toetuv piirdenurk.

128. Ü l e s a n n e. *Tõmmata antud punktist antud ringjoonele puutuja.*

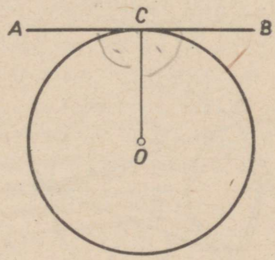
Vaatleme kaht juhtumit.

1) A n t u d p u n k t (C, joon. 144) o n s a m a l r i n g j o o n e l. Siis tõmbame läbi punkti raadiuse ja raadiusele läbi otspunkti C tõmbame ristjoone (nii, nagu näidatud eelmises ülesandes).

2) A n t u d p u n k t (A, joon. 145) o n v ä l j a s p o o l r i n g j o o n t (keskpunktiga O). Ühendame punktid A ja O, poolitame AO punktis O_1 ja tõmbame punktist O_1 kui keskpunktist raadiusega OO_1 ringjoone. Ühendame punkti A ja mõlema ringjoone lõikepunktid B ja B_1 sirgetega. Tõmmatud sirged ongi puutujad, sest nurgad OBA ja OB_1A on täisnurgad (piirdenurgad, mis toetuvad diameetrile).



Joon. 143.



Joon. 144.

J ä r e l d u s. *Väljaspool ringjoont asetsevast punktist ringjoonele tõmmatud puutujad on võrdsed ning moodustavad võrdsed nurgad sirgega, mis ühendab antud punkti ringjoone keskpunktiga.* See järeldub kolmnurkade AOB ja AOB_1 võrdsusest (joon. 145).

129. Ü l e s a n n e. *Tõmmata ühine puutuja kahele ringjoonele* O ja O_1 (joon. 146).

1) A n a l ü ü s. Oletame, et ülesanne on lahendatud. Olgu AB ühine puutuja ning A ja B puutepunktid. On ilmne, et kui on leitud üks puutepunktidest, näiteks A, siis on teist kerge leida. Tõmbame raadiused OA ja O_1B. Need raadiused, olles risti sama puutujaga, on paralleelsed; seepärast, kui punktist O_1 tõmmata $O_1C \parallel BA$, siis kolmnurk OCO_1 peab olema t ä i s n u r k n e täisnurgaga tipu C juures. Seetõttu, kui joonestada ringjoon raadiusega OC punktist O kui keskpunktist, siis peab see ringjoon puutuma sirget O_1C punktis C. Abiringjoone raadius on teada; ta

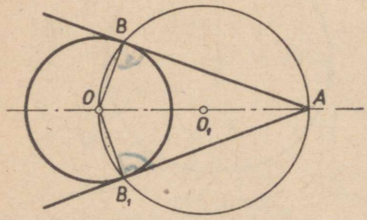
võrdub $OA-CA=OA-O_1B$, s. t. ta võrdub antud ringjoonte raadiuste vahega.

K o n s t r u e e r i m i n e. Konstrueerimist saab seega teostada nii: joonestame punktist O kui keskpunktist ringjoone raadiusega, mis on võrdne antud raadiuste vahega; saadud ringjoonele tõmbame punktist O_1 puutuja O_1C (nagu näidatud eelmises ülesandes); läbi puutepunkti C tõmbame raadiuse OC ja pikendame seda lõikumiseni antud ringjoonega punktis A. Lõpuks tõmbame punktist A paralleeli CO_1-le.

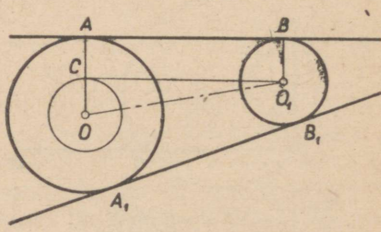
Täpselt samuti saame joonestada ka teise ühise puutuja A_1B_1. Sirgeid AB ja A_1B_1 nimetame **väliseiks** ühiseiks puutujaiks kahele ringjoonele.

Võib veel tõmmata kaks **seesmist** puutujat järgmisel viisil (joon. 147).

2) A n a l ü ü s. Oletame, et ülesanne on lahendatud. Olgu AB otsitav puutuja. Tõmbame puutepunktidest A ja B raadiused OA ja O_1B. Need raadiused, olles risti ühise puutujaga, on paralleelsed.



Joon. 145.



Joon. 146.

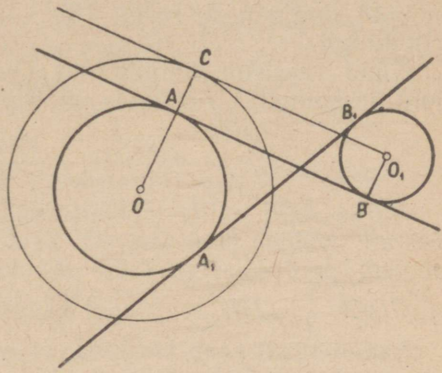
Seepärast, kui punktist O_1 tõmmata $O_1C \parallel BA$ ja pikendada OA-d kuni lõikumiseni O_1C-ga punktis C, siis OC on risti O_1C-ga; seetõttu ringjoon, mis on tõmmatud punktist O raadiusega OC, puutub sirget O_1C punktis C. Abiringjoone raadius on teada: ta võrdub $OA+AC=OA+O_1B$, s. t. ta võrdub antud ringjoonte raadiuste summaga.

K o n s t r u e e r i m i n e. Seega saab konstrueerimist teostada nii: joonestame punktist O kui keskpunktist ringjoone raadiusega, mis võrdub antud raadiuste summaga; punktist O_1 tõmbame sellele ringjoonele puutuja O_1C; puutepunkti C ühendame O-ga; lõpuks tõmbame punktist A, milles OC lõikub antud ringjoonega, AB paralleelselt CO_1-ga.

Samal viisil saab joonestada ka teise ühise seesmise puutuja A_1B_1.

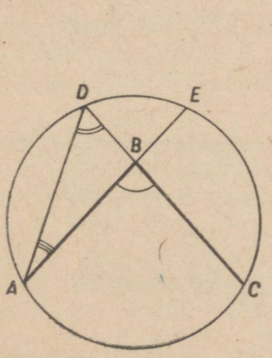
130. Teoreemid. 1) ***Nurka*** (ABC, joon. 148), ***mille tipp asetseb ringi sees, mõõdetakse kahe kaare*** (AC ja DE) ***poolsummaga, milledest üks asetseb nurga haarade vahel, teine – haarade pikenduste vahel.***

2) ***Nurka*** (ABC, joon. 149), ***mille tipp asetseb väljaspool ringi ja mille haarad lõikavad ringjoont, mõõdetakse nurga haarade vahel asetseva kahe kaare*** (AC ja ED) ***poolvahega.***

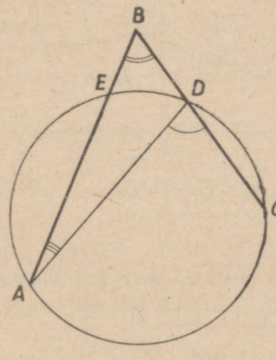


Joon. 147.

Tõmmates kõõlu AD (nii ühel kui ka teisel joonisel), saame $\triangle ABD$, mille suhtes vaadeldav nurk ABC on välisnurgaks, kui ta tipp on ringi sees, ja sisenurgaks, kui tipp on väljaspool ringi. Seepärast esimesel juhul: $\angle ABC = \angle ADC + \angle DAE$, teisel juhul: $\angle ABC = \angle ADC - \angle DAE$. Nurki ADC ja DAE kui piirdenurki mõõdavad kaarte AC ja DE pooled; seepärast nurka



Joon. 148.



Joon. 149.

ABC mõõdab esimesel juhul summa $\frac{1}{2} \smile AC + \frac{1}{2} \smile DE$, mis võrdub $\frac{1}{2}(\smile AC + \smile DE)$, teisel juhul aga vahe $\frac{1}{2} \smile AC - \frac{1}{2} \smile DE$, mis võrdub $\frac{1}{2}(\smile AC - \smile DE)$.

131. Teoreem. ***Nurka*** (ACD, joon. 150 ja 151), ***mis on puutuja ja kõõlu vahel, mõõdab pool selle nurga sees asetsevast kaarest.***

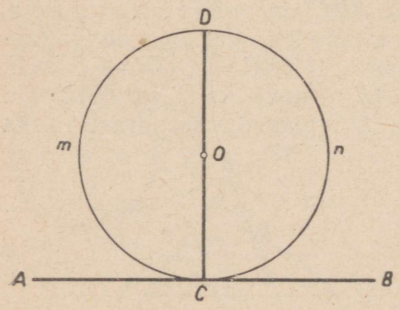
Oletame algul, et kõõl CD läbib keskpunkti O, s. t. et kõõl on diameeter (joon. 150). Siis nurk ACD on täisnurk ja võrdub järelikult $90°$-ga. Pool kaarest CmD on samuti $90°$, sest kaar CmD on pool ringjoonest, seega $180°$. Tähendab, teoreem on kehtiv sel erijuhtumil.

Nüüd vaatleme üldjuhtumit (joon. 151), kui kõõl CD ei läbi ringi keskpunkti. Tõmmates nüüd diameetri CE, saame:

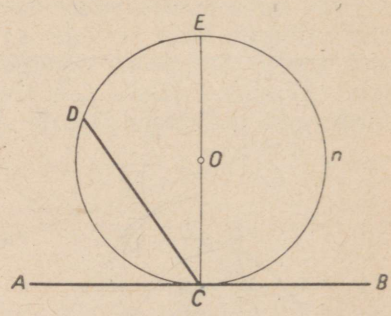
$$\angle ACD = \angle ACE - \angle DCE.$$

Nurka ACE, mille moodustavad puutuja ja diameeter, mõõdab tõestatu põhjal pool kaarest CDE; nurka DCE kui piirdenurka mõõdab pool kaarest DE; järelikult nurka ACD mõõdab vahe $\frac{1}{2}\smile CDE - \frac{1}{2}\smile DE$, s. o. pool kaarest CD.

Samal viisil saab tõestada, et nürinurka BCD (joon. 151), mis on moodustatud puutuja ja kõõlu poolt, mõõdab pool kaarest $CnED$; erinevus tõestuses seisab ainult selles, et nurka vaadeldakse täisnurga BCE ja teravnurga ECD summana, mitte aga vahena.



Joon. 150.



Joon. 151.

132. Ülesanne. *Joonestada lõigule AB segment, mis mahutab endas antud nurga* α (joon. 152).

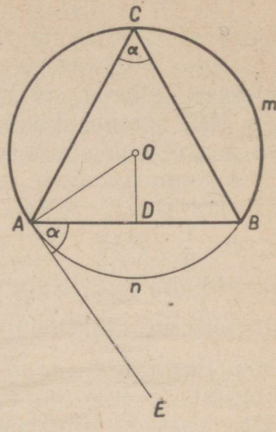
Analüüs. Oletame, et ülesanne on lahendatud; olgu segment AmB niisugune, mis mahutab endas nurga α, s. t. niisugune, et mistahes piirdenurk temas võrdub α-ga. Tõmbame abisirge AE, mis puutub ringjoont punktis A. Siis nurk BAE, mis on moodustatud puutuja ja kõõlu poolt, peab võrduma piirdenurgaga ACB, sest nii üht kui ka teist mõõdab pool kaarest AnB. Võtame arvesse, et ringjoone keskpunkt O peab olema sirglõigu AB keskristjoonel DO ja samal ajal ka puutepunktist puutujale AE tõmmatud ristjoonel AO. Siit tuletame järgmise mooduse joonestamiseks.

Joonestamine. Joonestame lõigu AB otsa juurde nurga BAE, mis on võrdne α-ga; sirglõigule AB ehitame keskristjoone

DO ja punktist *A* ristjoone sirgele *AE*; nende kahe ristjoone lõikepunkti *O* võtame raadiusega *AO* tõmmatava ringjoone keskpunktiks.

T õ e s t u s. Segment *AmB* on otsitav, sest temasse joonestatud mistahes piirdenurka mõõdab pool kaarest *AnB*, aga pool sellest kaarest mõõdab ka nurka $BAE = \alpha$.

M ä r k u s. Joonisel 152 on joonestatud segment, mis asetseb pealpool sirglõiku *AB*. Samasuguse segmendi saab joonestada ka teisel pool sirglõiku *AB*. Seega võib ütelda, et *nende punktide geomeetriline koht, millest antud lõik AB on nähtav antud nurgas* α, *koosneb kahest segmendikaarest, millest kumbki mahutab endas nurga* α, *kusjuures üks asetseb ühel pool, teine teisel pool AB-d.*



Joon. 152.

Konstrueerimisülesandeid.

133. Geomeetriliste kohtade meetod. Paljude konstrueerimisülesannete lahendamisel saab edukalt kasutada geomeetrilise koha mõistet ja sellel põhinevat geomeetriliste kohtade meetodit.

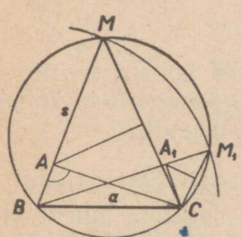
See meetod, mis oli tuntud juba Platoni aegadel (IV sajandil e. m. a.), seisab järgmises. Oletame, et esitatud ülesande lahendus nõuab mõne teatud tingimusi rahuldava punkti leidmist. Kui kõrvaldame ühe neist tingimustest, muutub ülesanne määramatuks, s. t. teda rahuldab siis lõpmatu palju punkte. Need punktid moodustavad mõne geomeetrilise koha. Joonestame selle, kui see osutub võimalikuks. Nüüd võtame arvesse enne meie poolt kõrvaldatud eelduse ja kõrvaldame mõne teise; ülesanne muutub jälle määramatuks, s. t. teda rahuldab lõpmatu palju punkte, mis moodustavad uue geomeetrilise koha. Joonestame selle, kui see on võimalik. Otsitav punkt, mis peab rahuldama kõiki tingimusi, peab kuuluma mõlemale geomeetrilisele kohale, s. o. ta peab olema nende lõikepunktiks. Ülesanne osutub lahendatavaks või lahendamatuks vastavalt sellele, kas leitud geomeetrilised kohad lõikuvad või mitte; ülesandel on nii palju lahendeid, kui palju on lõikepunkte.

Toome selle meetodi kohta ühe näite, mis ühtlasi näitab, kuidas tuleb mõnikord joonises tarvitusele võtta abijooni selleks, et kasutada kõiki ülesande andmeid.

134. Ülesanne. *Joonestada kolmnurk, kui on antud alus a, tipunurk A ja teiste külgede summa s.*

Olgu ABC otsitav kolmnurk (joon. 153). Et arvestada külgede summat, pikendame külge BA ja asetame sellele $MB=s$. Tõmmates MC, saame abikolmnurga BMC. Joonestanud selle kolmnurga, on kerge joonestada ka otsitav kolmnurk ABC.

Kolmnurga BMC joonestamine on rajatud punkti M leidmisele. Et kolmnurk AMC on võrdhaarne ($AM=AC$) ja järelikult $\angle M=\frac{1}{2}\angle BAC$ (sest $\angle M+\angle MCA=\angle BAC$), peab punkt M rahuldama kaht tingimust: 1) ta on B-st kaugusel s, 2) temast on sirglõik BC nähtav nurgas, mis võrdub $\frac{1}{2}\angle A$-ga. Kõrvale jättes teise tingimuse, saame lõpmatu hulga punkte M, mis asetsevad ringjoonel, mis on tõmmatud punktist B raadiusega s. Kõrvale jättes esimese tingimuse, saame jälle lõpmatu hulga punkte M, mis asetsevad segmendi kaarel, mis on ehitatud lõigule BC ning mis mahutavad enesesse $\frac{1}{2}\angle A$-ga võrduva nurga. Seega viiakse punkti M leidmine üle kahe geomeetrilise koha joonestamisele. Neid geomeetrilisi kohti me oskame joonestada. Ülesanne osutub lahendamatuks, kui neil kahel geomeetrilisel kohal pole ühiseid punkte; ülesandel on üks või kaks lahendit vastavalt sellele, kas geomeetrilised kohad puutuvad või lõikuvad (meie joonisel on saadud kaks kolmnurka: ABC ja A_1BC, mis rahuldavad ülesande tingimusi).



Joon. 153.

Mõnikord ei seisa ülesanne mitte punkti määramises, vaid mitut tingimust rahuldava sirge leidmises. Kui kõrvaldada üks tingimus, saame lõpmatu hulga sirgeid; seejuures võib juhtuda, et kõik need sirged määravad mõne joone (näiteks, kõik nad on puutujad mõnele ringjoonele). Kõrvaldades teise tingimuse ja arvestades esimest, mis oli enne kõrvale jäänud, saame jälle lõpmatu hulga sirgeid, mis võib-olla määravad mõne teise joone. Ehitanud, kui võimalik, need kaks joont, me leiame kergesti ka otsitava sirge. Toome näite.

135. Ülesanne. *Joonestada lõikaja kahele ringjoonele O ja O_1 nii, et lõikaja osad antud ringjoonte sees võrduksid antud lõikudega a ja a_1.*

Kui arvestada ainult üht tingimust, näiteks, et lõikaja osa ringis O võrduks lõiguga a, siis saame lõpmatu hulga lõikajaid, mis kõik peavad asetsema võrdsel kaugusel ringi keskpunktist (sest võrdsed kõõlud asetsevad võrdsel kaugusel keskpunktist). Seepärast, kui joonestada ringis O kustahes kõõl, mis võrdub

a-ga, ja tõmmata raadiusega, mis oleks võrdne selle kõõlu kaugusega ringi keskpunktist, ringiga O kontsentriline ringjoon, siis kõik lõikajad, millest on jutt, peavad seda abiringjoont puutuma; samal viisil, arvesse võttes ainult teist tingimust, otsustame, et otsitav lõikaja peab puutuma teist abiringjoont, mis on kontsentriline ringiga O_1. Tähendab, küsimuse lahendamine seisab ühise puutuja joonestamises kahele ringjoonele.

Harjutusi.

Leida geomeetrilised kohad:

1. Punktidele, milledest antud ringjoonele tõmmatud puutujad on võrdsed antud lõiguga.

2. Punktidele, milledest antud ringjoon on nähtav antud nurgas (s. t. antud punktist antud ringjoonele tõmmatud kaks puutujat moodustavad antud nurga).

3. Antud raadiusega ja antud sirget puutuvate ringjoonte keskpunktidele.

4. Antud raadiusega ja antud ringjoont puutuvate ringjoonte keskpunktidele (kaks juhtumit: väline ja seesmine puutumine).

5. Antud pikkusega sirglõigu teisele otspunktile, kui see sirglõik liigub paralleelselt iseenesega nii, et üks tema ots liugub ringjoont mööda.

Juhis. Võtame kaks sirglõiku, mis kujutavad liikuva sirglõigu kaht asendit, ja tõmbame nende ringjoonel asetsevaist otstest raadiused, lõikude teistest otstest tõmbame sirged paralleelselt vastavate raadiustega kuni lõikumiseni sirgega, mis on tõmmatud läbi ringjoone keskpunkti paralleelselt liikuva lõiguga. Võtame vaatlusele tekkinud rööpkülikud.

6. Antud pikkusega sirglõigu keskpunktile, kui see sirglõik liigub nii, et ta otspunktid liuguvad mööda täisnurga haarasid.

Tõestada teoreemid.

7. Kõigist ringi sees võetud punkti A läbivaist kõõludest on väikseim see, mis on risti läbi punkti A tõmmatud diameetriga.

8. Kõõlul AB on võetud punktid D ja E võrdsel kaugusel kõõlu keskpunktist C ja nendest punktidest on kõõlule AB püstitatud ristjooned DF ja EG kuni lõikumiseni ringjoonega. Tõestada, et need ristlõigud on võrdsed.

Juhis. Joonis kokku murda diameetrit mööda.

9. Ringis on tõmmatud kaks kõõlu CC' ja DD' risti diameetriga AB. Tõestada, et sirglõik MM', mis ühendab kõõlude CD ja $C'D'$ keskpunkte, on risti diameetriga AB.

10. Ringis, keskpunktiga O, on tõmmatud kõõl AB ja pikendatud BC võrra, mis võrdub raadiusega. Läbi punkti C ja keskpunkti O on tõmmatud lõikaja CD (D on teine lõikepunkt ringjoonega). Tõestada, et nurk AOD võrdub nurga ACD kolmekordsega.

11. Kui läbi ringjoone keskpunkti ja väljaspool ringjoont asetseva punkti tõmmata lõikaja, siis lõikaja see osa, mis asetseb antud punkti ja lähima lõikepunkti vahel, on väikseim kaugus, aga lõikaja osa, mis asetseb antud punkti ja teise lõikepunkti vahel, on suurim kaugus punktist ringjooneni.

12. Väikseim kaugus kahe teineteisest väljaspool asetseva ringjoone vahel on see keskjoone osa, mis asetseb ringjoonte vahel.

13. Kui läbi kahe ringjoone lõikepunkti tõmmata lõikajaid, pikendamata neid väljapoole ringjooni, siis kõige pikemaks lõikajaks on see, mis on paralleelne keskjoonega.

14. Kui kahele ringjoonele, mis puutuvad teineteist väliselt, tõmmata kolm ühist puutujat, siis neist seesmine poolitab iga välise puutuja puutepunktide vahelise osa.

15. Läbi ringjoone punkti A on tõmmatud kõõl AB ja läbi punkti B puutuja ringjoonele; risti OA-ga tõmmatud diameeter lõikab puutujat ja kõõlu (või selle pikendust) vastavalt punktides C ja D. Tõestada, et $BC=CD$.

16. Kahele ringjoonele, keskpunktidega O ja O_1, mis puutuvad väliselt punktis A, on tõmmatud ühine väline puutuja BC (B ja C on puutepunktid); tõestada, et nurk BAC on täisnurk.

Juhis. Tõmmata punktist A ühine puutuja ja vaadelda võrdhaarseid kolmnurki ABD ja ADC.

17. Kaks sirget lähtuvad punktist M ja puutuvad ringjoont punktides A ja B. Tõmmanud raadiuse OB, pikendatakse seda väljapoole punkti B pikkuse $BC=OB$ võrra. Tõestada, et $\angle AMC=3\angle BMC$.

18. Kaks sirget lähtuvad punktist M ja puutuvad ringjoont punktides A ja B. Punktide A ja B vahel asetseval väiksemal kaarel on võetud mingi punkt C ja läbi selle on tõmmatud kolmas puutuja kuni lõikumiseni MA ja MB-ga punktides D ja E. Tõestada, et: 1) $\triangle MDE$ ümbermõõt ja 2) nurk DOE ei olene punkti C asendist.

Juhis. Kolmnurga DME ümbermõõt $= MA+MB$.

$$\angle DOE=\frac{1}{2}\angle AOB.$$

19. On tõmmatud lõikaja paralleelselt kahe võrdse ringjoone keskjoonega OO'; see lõikaja lõikub ringjoonega O punktides A ja B ning ringjoonega O' punktides A' ja B'. Tõestada, et $AA'=BB'=OO'$.

Konstrueerimisülesandeid.

20. Jaotada kaar 4-ks, 8-ks, 16-ks ... võrdseks osaks.

21. Ühe ja sama raadiusega kaarte summa ja vahe põhjal leida need kaared.

22. Joonestada antud keskpunktist niisugune ringjoon, mis poolitaks antud ringjoone.

23. Leida antud sirgel punkt, mis oleks kõige lähemal antud ringjoonele.

24. Ringis on antud kõõl. Tõmmata teine kõõl, mida poolitaks esimene ja mis moodustaks sellega antud nurga. (Kas iga antud nurga puhul on ülesanne lahendatav?)

25. Läbi antud punkti ringis tõmmata kõõl, mis poolituks antud punktis.

26. Joonestada ringjoon antud nurga haaral võetud punktist nii, et ta eraldaks teisest haarast antud pikkusega kõõlu.

27. Joonestada antud raadiusega ringjoon nii, et ta keskpunkt asetseks antud nurga haaral ja eraldaks teisest haarast antud pikkusega kõõlu.

28. Joonestada antud raadiusega ringjoon, mis puutuks antud sirget antud punktis.

29. Tõmmata puutuja antud ringjoonele paralleelselt antud sirgega.

30. Joonestada ringjoon, mis läbiks antud punkti A ja puutuks antud sirget antud punktis B.

31. Joonestada ringjoon, mis puutuks antud nurga haaru, seejuures üht neist antud punktis.

32. Kahe paralleeli vahel on antud punkt; joonestada ringjoon, mis läbiks antud punkti ja puutuks antud sirgeid.

33. Tõmmata antud ringjoonele puutuja nii, et see moodustaks antud sirgega antud nurga. (Mitu lahendust?)

34. Tõmmata punktist väljaspool ringi sellele ringile lõikaja nii, et ringi sees olev lõikaja osa võrduks antud lõiguga (uurida ülesannet).

35. Joonestada antud raadiusega ringjoon, mis läbiks antud punkti ja puutuks antud sirget.

36. Leida antud sirgel niisugune punkt, et sellest punktist antud ringjoonele tõmmatud puutujad võrduksid antud lõiguga.

37. Joonestada kolmnurk, kui on antud üks nurk ja kaks kõrgust, milledest üks on tõmmatud antud nurga tipust.

38. On antud kaks punkti. Tõmmata sirge nii, et antud punktidest sellele tõmmatud ristlõigud võrduksid antud lõikudega.

39. Joonestada ringjoon, mis läbiks antud punkti ja puutuks antud ringjoont antud punktis.

40. Joonestada ringjoon, mis puutuks antud kaht paralleeli ja ringjoont nende vahel.

41. Joonestada antud raadiusega ringjoon, mis puutuks antud ringjoont ja läbiks antud punkti [läbi arutada kolm juhtumit: antud punkt asetseb: 1) väljaspool ringi, 2) ringjoonel ja 3) ringi sees].

42. Joonestada antud raadiusega ringjoon, mis puutuks antud sirget ja antud ringjoont.

43. Joonestada antud raadiusega ringjoon, mis eraldaks antud nurga haaradest antud pikkusega kõõlud.

44. Joonestada ringjoon, mis puutub antud ringjoont antud punktis ja antud sirget (kaks lahendust).

45. Joonestada ringjoon, mis puutub antud sirget antud punktis ja antud ringjoont (kaks lahendust).

46. Joonestada ringjoon, mis puutub kaht antud ringjoont, seejuures üht neist antud punktis [läbi arutada kolm juhtumit: 1) otsitav ringjoon on väljaspool antud ringjooni; 2) üks antud ringjoontest on otsitava ringi sees, teine väljaspool; 3) mõlemad antud ringid on otsitava ringi sees].

47. Joonestada ringjoon, mis puutuks kolme antud võrdset ringjoont seesmiselt või väliselt.

48. Joonestada antud sektorisse ringjoon, mis puutuks sektorit piiravaid raadiusi ja sektori kaart.

49. Joonestada antud ringisse kolm võrdset ringjoont, mis puutuksid üksteist paarikaupa ja antud ringjoont.

50. Tõmmata läbi ringi sees antud punkti kõõl nii, et selle lõikude vahe võrduks antud lõiguga.

Juhis. Joonestada läbi antud punkti antud ringiga kontsentriline ring. Selles ringis joonestada, alates antud punktist, antud pikkusega kõõl.

51. Tõmmata lõikaja läbi kahe ringjoone lõikepunkti nii, et selle osa ringide sees võrduks antud pikkusega.

Juhis. Joonestada täisnurkne kolmnurk, mille hüpotenuusiks on sirglõik, mis ühendab antud ringjoonte keskpunkte, ja kaatetiks lõik, mis võrdub antud lõigu poolega jne.

52. Tõmmata lõikaja väljaspool ringi asetsevast punktist nii, et lõikaja seesmine osa võrduks välise osaga.

Juhis. Olgu O ringjoone keskpunkt, R — selle raadius, A — antud punkt. Joonestame $\triangle AOB$, milles $AB=R$, $OB=2R$. Kui C on lõigu OB keskpunkt, siis sirge AC on otsitav.

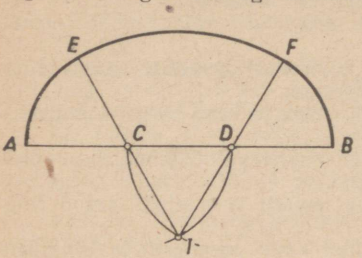
53. Joonestada kaar, mis oleks liidetud sujuvalt (§ 116) antud sirgega antud punktis ning läbiks antud punkti.

54. Liita sujuvalt kaks mitteparalleelset sirget kaarega (§ 116). Võtame kolm juhtumit:

1) kui pole antud liitumispunkte ja kaare raadiust;

2) kui on antud ainult kaare raadius;

3) kui on antud üks liitumispunkt, kaare raadiust pole aga antud (niisugusteks sirgete kaarega liitumise näideteks võivad olla raudteede käänakud).



Joon. 154.

55. Joont, mida arhitektuuris nimetatakse «kolme keskpunktiga kõveraks» (ehk «pool-ovaaliks»), joonestatakse järgmiselt (joon. 154): sirglõik AB jaotatakse punktides C ja D kolmeks võrdseks osaks; nendest punktidest joonestatakse raadiusega CD kaared, mis lõikuvad punktis I; tõmmatakse sirged IC ja ID ning pikendatakse neid; joonestatakse punktidest C ja D kaared AE ja BF ning kaar EF punktist I. Selgitada, mispärast kaared AE, EF ja FB on liidetud sujuvalt. Kas need kaared on ka siis sujuvalt liidetud, kui $AC=DB$, aga AC ei võrdu CD-ga?

VI. Kõõlhulknurgad ja puutujahulknurgad.

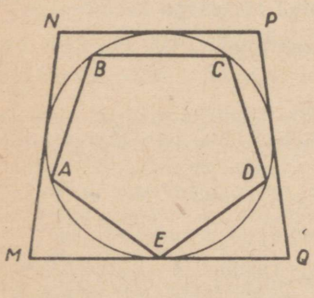
136. D e f i n i t s i o o n i d. *Kui hulknurga (ABCDE) kõik tipud* (joon. 155) *on ringjoonel, siis öeldakse, et see hulknurk on* ***kõõlhulknurk*** (ehk ***sissejoonestatud hulknurk***), või öeldakse, et ringjoon on h u l k n u r g a l e ü m b e r j o o n e s t a t u d.

Kui aga mingi hulknurga ($MNPQ$, joon. 155) *kõik küljed on puutujad ringjoonele, siis öeldakse, et see hulknurk on* ***puutujahulknurk*** (ehk ***ümberjoonestatud hulknurk***), või öeldakse, et ringjoon on h u l k n u r g a l e s i s s e j o o n e s t a t u d.

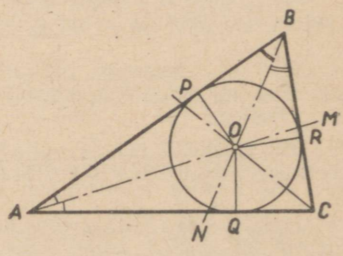
137. Teoreemid. 1) ***Iga kolmnurga ümber saab joonestada ainult ühe ringjoone.***

2) ***Igasse kolmnurka saab joonestada ainult ühe ringjoone.***

1. Iga kolmnurga tipud A, B ja C on kolm punkti, mis ei asetse ühel sirgel. Läbi nende punktide on aga alati võimalik joonestada ringjoon ja seejuures ainult üks (§ 104).



Joon. 155.

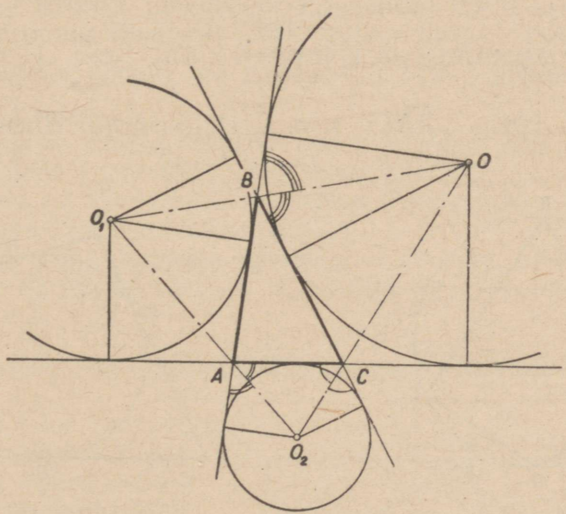


Joon. 156.

2. Kui on võimalik niisugune ringjoon, mis puutub kolmnurga ABC iga külge (joon. 156), siis peab selle ringjoone keskpunkt

asetsema võrdsel kaugusel kolmnurga külgedest. Tõestame, et niisugune punkt on olemas. Külgedest AB ja AC võrdsel kaugusel asetsevate punktide geomeetriliseks kohaks on nurga A poolitaja AM (§ 60); külgedest BA ja BC võrdsel kaugusel asetsevate punktide geomeetriliseks kohaks on nurga B poolitaja. Need kaks poolitajat peavad ilmselt lõikuma mingis punktis O kolmnurga sees. See punkt ongi võrdsel kaugusel kolmnurga külgedest, sest ta asetseb mõlemal geomeetrilisel kohal. Niisiis, et joonestada kolmnurka ringjoon, tuleb kaks kolmnurga mingit nurka poolitada ja poolitajate lõikepunkt võtta keskpunktiks. Raadiuseks on üks ristlõikudest OP, OQ või OR, mis on joonestatud keskpunktist kolmnurga külgedele. Ringjoon puutub külgi punktides P, Q ja R, sest nendes punktides on küljed risti raadiustega nende otspunktides ringjoonel (§ 113). Teist ringjoont ei saa olla, sest kaks nurgapoolitajat lõikuvad ühes punktis ja ühest punktist saab tõmmata sirgele ainult ühe ristjoone.

M ä r k u s. Õpilased veendugu ise selles, et kolmnurga ümber joonestatud ringjoone keskpunkt on kolmnurga sees ainult siis, kui see on teravnurkne; nürinurkses kolmnurgas on see keskpunkt väljaspool kolmnurka ja täisnurkses kolmnurgas on ta hüpotenuusi keskpunktis. Sissejoonestatud ringjoone keskpunkt on alati kolmnurga sees.



Joon. 157.

J ä r e l d u s. Punkt O (joon. 156), olles võrdsel kaugusel küljedest CA ja CB, peab asetsema nurga C poolitajal; järelikult *kolmnurga kolme sisenurga poolitajad lõikuvad ühes punktis.*

138. Külgejoonestatud ringjooned. Külgejoonestatud ringjoonteks nimetatakse ringjooni (joon. 157), mis puutuvad kolmnurga üht külge ja kahe teise külje p i k e n d u s i (nad on väljaspool kolmnurka). Niisuguseid ringjooni on kolmnurgal kolm. Selleks et neid joonestada, tõmmatakse kolmnurga ABC välisnurkade poolitajad ja nende lõikepunktid võetakse ringjoonte keskpunktideks. Nii on nurga A sissejoonestatud ringjoone keskpunktiks punkt O, s. o. nurgaga A mittekõrvuolevate välisnurkade poolitajate BO ja CO lõikepunkt; selle ringjoone raadiuseks on punktist O kolmnurga mingile küljele tõmmatud ristlõik.

139. Kumera kõõlnelinurga omadus.

1) *Kumeras kõõlnelinurgas on vastasnurkade summa võrdne sirgnurgaga.*

2) Ümberpöördult: *kui kumeras nelinurgas vastasnurkade summa võrdub sirgnurgaga, siis selle nelinurga ümber saab joonestada ringjoone.*

1. Olgu $ABCD$ (joon. 158) sissejoonestatud kumer nelinurk; tuleb tõestada, et

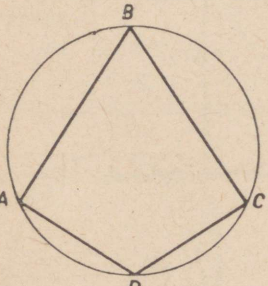
$$\angle B + \angle D = 2d \text{ ja } \angle A + \angle C = 2d.$$

Et iga kumera nelinurga nelja nurga summa võrdub $4d$-ga (§ 82), siis piisab tõestusest, et üks võrdustest on õige.

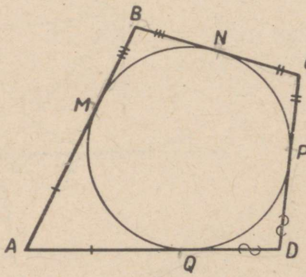
Tõestame näiteks, et $\angle B + \angle D = 2d$.

Nurki B ja D kui piirdenurki mõõdavad: esimest — pool kaarest ADC; teist — pool kaarest ABC; järelikult summat $\angle B + \angle D$ mõõdab summa $\frac{1}{2} \smile ADC + \frac{1}{2} \smile ABC$; see summa võrdub aga suurusega $\frac{1}{2} (\smile ADC + \smile ABC)$, s. o. $\frac{1}{2}$ ringjoonega; tähendab

$$\angle B + \angle D = 180° = 2d.$$



Joon. 158.



Joon. 159.

2. Olgu $ABCD$ (joon. 158) selline kumer nelinurk, milles $\angle B + \angle D = 2d$ ja järelikult $\angle A + \angle C = 2d$. Tuleb tõestada, et selle nelinurga ümber saab joonestada ringjoone.

Joonestame nelinurgas läbi mingi kolme tipu, näiteks A, B ja C, ringjoone (mis on alati teostatav). Neljas tipp D peab asetsema sellel ringjoonel, sest vastasel korral nurga D tipp on kas ringi sees või väljaspool seda ja siis seda nurka ei mõõda pool kaarest ABC; seepärast summat $\angle B + \angle D$ ei mõõdaks kaarte ADC ja ABC poolsumma ja, tähendab, summa $\angle B + \angle D$ ei võrduks $2d$-ga, mis räägib vastu eeldusele.

Järeldused: 1) *Kõigist rööpkülikuist saab ainult ristküliku ümber joonestada ringjoone.*

2) *Trapetsi ümber saab joonestada ringjoone ainult siis, kui trapets on võrdhaarne.*

140. Puutujanelinurga omadus. *Puutujanelinurgas on vastasküljede summad võrdsed.*

Olgu nelinurk $ABCD$ (joon. 159) puutujanelinurk, s. o. ta küljed puutuvad ringjoont; tuleb tõestada, et $AB+CD=BC+AD$.

Tähistame puutepunktid tähtedega M, N, P ja Q. Et kaks ühest punktist ringjoonele tõmmatud puutujat on võrdsed, siis $AM=AQ$, $BM=BN$, $CN=CP$ ja $DP=DQ$.

Järelikult:

$$AM+MB+CP+PD=AQ+QD+BN+NC,$$

s. o.

$$AB+CD=AD+BC.$$

VII. Neli tähtsat punkti kolmnurgas.

141. Me nägime, et:

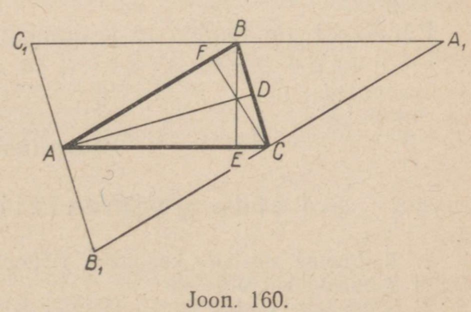
1) *kolmnurga külgede keskristjooned lõikuvad kõik ühes punktis* (mis on ümberjoonestatud ringi keskpunktiks);

2) *kolmnurga sisenurkade poolitajad lõikuvad kõik ühes punktis* (mis on siseringjoone keskpunktiks).

Järgmised kaks teoreemi annavad veel kaks tähtsat punkti kolmnurgas: 3) kolme kõrguse lõikepunkti ja 4) kolme mediaani lõikepunkti.

142. Teoreem. *Kolmnurga kõrgused lõikuvad kõik ühes punktis.*

Tõmbame kolmnurgas ABC (joon. 160) läbi iga tipu sirge, paralleelselt vastasküljega. Saame abikolmnurga $A_1B_1C_1$, mille külgedega on antud kolmnurga kõrgused risti. Et $C_1B=AC=BA_1$ (kui rööpküliku vastasküljed), siis punkt B on külje A_1C_1 keskpunkt.



Joon. 160.

Samal viisil veendume, et C on A_1B_1 keskpunkt ja et A on B_1C_1 keskpunkt. Niisiis, antud kolmnurga kõrgused on abikolmnurga külgede keskristjooned; need aga, nagu meie teame (§ 104), lõikuvad ühes punktis.

Märkus. Punkti, milles lõikuvad kolmnurga kõrgused, nimetatakse **ortotsentriks.**

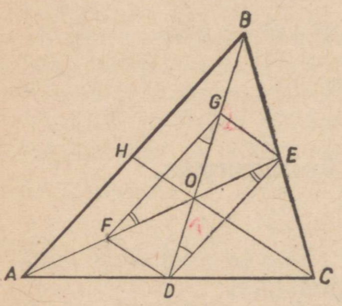
143. Teoreem. ***Kolmnurga mediaanid lõikuvad kõik ühes punktis; see punkt eraldab iga mediaani küljest ühe kolmandiku, vastavast küljest arvates.***

Võtame kolmnurgas ABC (joonis 161) kaks mediaani, näiteks AE ja BD, mis lõikuvad punktis O, ja tõestame, et

$$OD = \frac{1}{3} BD \text{ ja } OE = \frac{1}{3} AE.$$

Tõestuseks poolitame OA ja OB punktides F ja G ning ehitame nelinurga $DEGF$. Et lõik FG ühendab kolmnurga ABO kahe külje keskpunkte, siis $FG \parallel AB$ ja $FG = \frac{1}{2} AB$. Lõik DE ühendab samuti kolmnurga ABC kahe külje keskpunkte; seepärast $DE \parallel AB$ ja $DE = \frac{1}{2} AB$. Siit järeldame, et $DE \parallel FG$ ja $DE = FG$; järelikult on nelinurk $DEGF$ rööpkülik (§ 89) ja seepärast $OF = OE$ ja $OG = OD$. Siit järeldub, et

$$OE = \frac{1}{3} AE \text{ ja } OD = \frac{1}{3} BD.$$



Joon. 161.

Kui nüüd võtame kolmanda mediaani koos kas mediaaniga AE või mediaaniga BD, siis veendume samuti, et nende lõikepunkt eraldab kummastki neist $\frac{1}{3}$ osa, vastavast küljest arvates; tähendab, kolmas mediaan peab lõikuma mediaanidega AE ja BD samas punktis O.

Füüsikast on teada, et kolmnurga mediaanide lõikepunkt on kolmnurga raskuskese; ta asetseb alati kolmnurga sees.

Harjutusi.

Leida geomeetrilised kohad:

1. Ristjoonte alustele, kusjuures ristjooned on tõmmatud punktist A läbi punkti B minevatele sirgetele.
2. Ringi sees võetud punkti läbivate kõõlude keskpunktidele.

Tõestada teoreemid.

3. Kui kaks ringjoont puutuvad, siis puutepunkti läbiv mistahes lõikaja eraldab ringjoontest kaks vastasasetsevat kaart, mis sisaldavad ühepalju kraade.

4. Kui kaks võrdset kõõlu lõikuvad ühes ringis, siis nende vastavad lõigud on võrdsed.

5. Kaks ringjoont lõikuvad punktides A ja B; läbi A on tõmmatud lõikaja, millel on ringjoontega lõikepunktid C ja D; tõestada, et nurk CBD on jääv suurus iga lõikaja puhul, mis läbib punkti A.

Juhis. Nurgad ACB ja ADB on jäävad suurused.

6. Kui läbi kahe ringjoone puutepunkti tõmmata kaks lõikajat ja nende otspunktid ühendada kõõludega, siis need kõõlud on paralleelsed.

7. Kui läbi kahe ringjoone puutepunkti nende ringide sees tõmmata lõikaja, siis puutujad, mis on tõmmatud läbi lõikaja otspunktide, on paralleelsed.

8. Kui kolmnurga kõrguste alused ühendada sirgetega paarikaupa, siis saadakse uus kolmnurk, milles esimese kolmnurga kõrgused on nurkade poolitajaiks.

9. Võrdkülgse kolmnurga ABC ümber joonestatud ringjoonel on võetud mingi punkt M; tõestada, et suurim lõikudest MA, MB, MC võrdub kahe ülejäänud lõigu summaga.

10. Punktis P on tõmmatud ringjoonele kaks puutujat PA ja PB ja läbi punkti B diameeter BC. Tõestada, et sirged CA ja OP on paralleelsed (O on ringjoone keskpunkt).

11. Läbi ühe kahe ringjoone lõikepunktidest on tõmmatud mõlemas ringis diameetrid. Tõestada, et sirge, mis ühendab nende diameetrite otspunkte, läbib ringjoonte teise lõikepunkti.

12. Diameeter AB ja kõõl AC moodustavad $30°$-se nurga. Läbi C on tõmmatud puutuja, mis lõikab AB pikendust punktis D. Tõestada, et $\triangle ACD$ on võrdhaarne.

13. Kui kolmnurga ümber joonestada ringjoon ja selle mistahes punktist joonestada ristlõigud kolmnurga külgedele, siis nende ristlõikude alused asetsevad ühel sirgel (Simpsoni sirge).

Juhis. Tõestus põhineb piirdenurkade (§ 124) ja sissejoonestatud nelinurga nurkade (§ 139) omadusil.

Konstrueerimisülesandeid.

14. Leida antud sirgel punkt, millest antud sirglõik on nähtav antud nurgas.

15. Joonestada kolmnurk, kui on antud selle alus, tipunurk ja kõrgus.

16. Tõmmata antud sektori kaarele niisugune puutuja, et selle osa, mis asetseb raadiuste pikenduste vahel, võrduks antud lõiguga. (See ülesanne taandada eelmisele.)

17. Joonestada kolmnurk, kui on antud selle alus, tipunurk ja aluse mediaan.

18. On antud suuruse ja asendi poolest kaks lõiku a ja b. Leida niisugune punkt, millest lõik a oleks nähtav antud nurgas α ja lõik b antud nurgas β.

19. Leida kolmnurgas punkt, millest kolmnurga küljed oleksid nähtavad võrdsetes nurkades.

Juhis. Arvestada seda, et igaüks mainitud nurkadest peab võrduma $\frac{4}{3}\,d$-ga.

20. Joonestada kolmnurk, kui on antud selle tipunurk, kõrgus ja aluse mediaan.

J u h i s. Pikendada mediaani oma pikkuse võrra ja selle lõigu otspunkt ühendada aluse otspunktidega. Vaadelda tekkinud rööpkülikut.

21. Joonestada kolmnurk, kui on antud selle alus, aluse lähisnurk ja nurk, mis on antud nurga tipust tõmmatud mediaani ja selle külje vahel, millele mediaan on tõmmatud.

22. Joonestada rööpkülik, kui on antud selle kaks diagonaali ja üks nurk.

23. Joonestada kolmnurk, kui on antud selle alus, tipunurk ja teiste külgede summa või vahe.

24. Joonestada nelinurk, kui on antud selle kaks diagonaali, kaks kõrvuti asetsevat külge ja nurk kahe ülejäänud külje vahel.

25. On antud kolm punkti A, B ja C. Tõmmata läbi A niisugune sirge, et punktidest B ja C sellele sirgele joonestatud ristjoonte vaheline kaugus võrduks antud lõiguga.

26. Joonestada antud ringisse kolmnurk, millel on antud kaks nurka.

27. Joonestada antud ringi ümber kolmnurk, millel on antud kaks nurka.

28. Joonestada kolmnurk, kui on antud tipunurk, kõrgus ja ümberjoonestatud ringjoone raadius.

29. Joonestada antud ringisse kolmnurk, kui on antud kahe külje summa ja nurk, mis asub neist ühe külje vastas.

30. Joonestada antud ringisse nelinurk, millel on antud üks külg ja kaks nurka, mis pole antud külje lähisnurkadeks.

31. Joonestada antud rombisse ring.

32. Joonestada võrdkülgse kolmnurga sisse kolm ringi, mis puutuksid paarikaupa üksteist ja kolmnurga kaht külge.

33. Joonestada kõõlnelinurk, kui on antud selle kolm külge ja üks diagonaal.

34. Joonestada romb, kui on antud selle külg ja siseringi raadius.

35. Joonestada antud ringi ümber täisnurkne võrdhaarne kolmnurk.

36. Joonestada võrdhaarne kolmnurk, kui on teada selle alus ja siseringi raadius.

37. Joonestada kolmnurk, kui on teada selle alus ja kaks mediaani, mis on tõmmatud aluse otspunktidest.

J u h i s. Vt. § 143.

38. Joonestada kolmnurk, kui on teada selle kolm mediaani.

J u h i s. Vt. § 143.

39. On antud ringjoon ja sellel punktid A, B ja C. Joonestada selle ringjoone sisse niisugune kolmnurk, et selle nurkade poolitajad pikendamisel läbiksid need kolm punkti.

40. Samasugune ülesanne nagu eelminegi, ainult nurgapoolitajate asemele võtta kõrgused.

41. On antud ringjoon ja sellel kolm punkti M, N ja P, milles lõikuvad (pikendamisel) sissejoonestatud kolmnurga ühest tipust tõmmatud kõrgus, nurgapoolitaja ja mediaan. Joonestada see kolmnurk.

42. On antud ringjoonel kaks punkti A ja B. Tõmmata neist punktidest kaks paralleelset kõõlu, mille summa on antud.

A r v u t u s ü l e s a n d e i d.

43. Arvutada piirdenurk, mis toetub kaarele, mille pikkus on $\frac{1}{12}$ ringjoonest.

44. Ring on jaotatud kaheks segmendiks kõõluga, mis jaotab ringjoone suhtes $5:7$. Arvutada nurgad, mille mahutavad enesesse need segmendid.

45. Kaks kõõlu moodustavad lõikumisel nurga $36°15'32''$. Arvutada kraadides, minutites ja sekundites kaks kaart selle nurga haarade ja haarade pikenduste vahel, kui kaarte suhe on $3:2$.

46. Nurk ühest punktist ringjoonele tõmmatud puutujate vahel on $20°15'$. Arvutada kaared, mis asetsevad puutepunktide vahel.

47. Arvutada nurk puutuja ja kõõlu vahel, kui kõõl jaotab ringjoone kaheks osaks suhtes $3:7$.

48. Kaks võrdset ringjoont moodustavad lõikumisel nurga $\frac{2}{3}\,d$, määrata kraadides väiksem lõikepunktide vahel asetsev kaar.

Märkus. Kahe lõikuva kaare nurgaks nimetatakse seda nurka, mille moodustavad puutujad kaartele kaarte lõikepunktis.

49. Läbi diameetri ühe otspunkti on tõmmatud puutuja ja läbi teise otspunkti lõikaja, mis puutujaga moodustab nurga $20°30'$. Leida puutuja ja lõikaja vahel asetseva väiksema kaare suurus.

KOLMAS PEATÜKK.

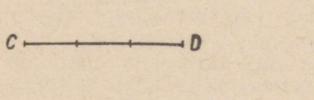
SARNASED KUJUNDID.

I. Suuruste mõõtmise mõiste.

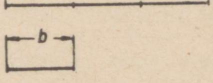
144. Ülesanne lõigu mõõtmisest. Kaht lõiku võrreldes saime seni määrata, kas nad on võrdsed, ja kui mitte, siis milline neist on suurem (§ 6). Meil tuli seda teha kolmnurga külgede ja nurkade vahel olevate seoste uurimisel (§ 46, 47), sirge ja murdjoone võrdlemisel (§ 50, 51) ja mõnedel teistel juhtumitel (§ 53, 54, 55). Säärane lõikude võrdlemine ei anna aga täpset kujutlust iga lõigu suurusest.

Nüüd esitame ülesande: määrata lõigu pikkuse täpne mõiste ja leida viisid selle pikkuse väljendamiseks arvuga.

145. Ühismõõt. *Kahe sirglõigu* ü h i s m õ õ d u k s *nimetatakse niisugust kolmandat lõiku, mida sisaldavad antud lõigud täisarv korda.* Nii näiteks, kui lõik AM (joon. 162) mahub 5 korda AB-sse ja 3 korda CD-sse, siis AM on AB ja CD ühismõõt. Samuti saab rääkida kahe ühesuguse raadiusega kaare, kahe nurga ja üldse kahe sama liiki suuruse ühismõõdust.



Joon. 162.



Joon. 163.

M ä r k u s. On ilmne, et kui AM on lõikude AB ja CD ühismõõt, siis, olles jaotanud AM kaheks, kolmeks, neljaks jne. osaks, me saame lõikudele AB ja CD väiksemad ühismõõdud. Niisiis, kui kahel lõigul on mingi ühismõõt, siis võib ütelda, et neil on lõpmatu palju ühismõõte. Üks neist on suurim ühismõõt.

146. Teoreemid, millel põhineb suurima ühismõõdu leidmine. Selleks et leida kahe lõigu **suurim** ühismõõt, kasutatakse järjestikuse paigutamise viisi, sarnaselt selle järjestikuse jagamisega, millega leitakse aritmeetikas kahe täisarvu suurim ühisjagaja. See viis põhineb järgmistel teoreemidel.

1) ***Kui kahest lõigust*** (a ja b, joon. 163) ***väiksem lõik mahub täisarv korda ilma jäägita suuremasse lõiku, siis on see väiksem lõik antud lõikude suurim ühismõõt.***

Mahtugu näiteks lõik b täpselt 3 korda lõiku a; kuna siinjuures lõik b mahub iseenesesse muidugi 1 kord, siis on b lõikude a ja b ühismõõt; teiselt poolt on see mõõt aga ka suurim, sest mitte ükski b-st suurem lõik ei mahu b-sse täisarv korda.

2) ***Kui kahest lõigust väiksem lõik*** (b, joon. 164) ***mahub suuremasse*** (a) ***täisarv korda mingi jäägiga*** (r), ***siis antud lõikude suurim ühismõõt*** (kui see on olemas) ***peab olema ka väiksema lõigu*** (b) ***ja jäägi*** (r) ***suurimaks ühismõõduks.***

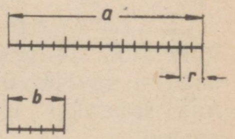
Olgu näiteks

$$a=b+b+b+r.$$

Sellest võrdusest saame tuletada kaks järgmist järeldust.

1) Kui on olemas lõik, mis mahub jäägita b-sse ja r-isse, siis ta mahub ka jäägita a-sse; kui näiteks mingi lõik mahub b-sse täpselt 5 korda ja r-isse täpselt 2 korda, siis mahub ta a-sse jäägita $5+5+5+2$, s. o. 17 korda.

2) Ümberpöördult: kui on olemas lõik, mis mahub jäägita a-sse ja b-sse, siis ta mahub ka jäägita r-isse; kui näiteks mingi lõik mahub a-sse täpselt 17 korda ja b-sse täpselt 5 korda, siis sellesse a osasse, mis võrdub $3b$-ga, mahub ta 15 korda; järelikult a ülejäänud osasse, s. o. r-isse, mahub ta 17—15, s. o. 2 korda.



Joon. 164.

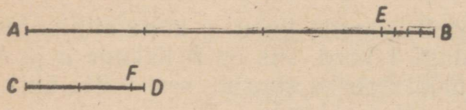
Niisiis, kahel lõikude paaril a ja b ning b ja r peavad olema samad ühismõõdud (kui nad on olemas); sellepärast peab neil olema ka sama suurim ühismõõt.

Neile kahele teoreemile tuleb veel lisada järgmine mõõtmise **aksioom** (Archimedese aksioom):

kui suur ka suurem lõik (a) ja kui väike ka väiksem lõik (b) oleksid, me saame, paigutades väiksema lõigu suuremale 1, 2, 3 jne. korda, et pärast mingit m-kordset paigutamist jääki pole või on jääk, mis on väiksem väiksemast lõigust (b); teiste sõnadega: alati on võimalik leida niisugune küllalt suur positiivne täisarv m, et $b \cdot m<a$, aga $b \cdot (m+1)>a$.

147. Kahe lõigu suurima ühismõõdu leidmine. Oletame, et tuleb leida kahe antud lõigu AB ja CD (joon. 165) suurim ühismõõt.

Selleks paigutame sirkli abil väiksema lõigu suuremale lõigule nii palju kordi, kui palju on võimalik. Seejuures võib vastavalt Archimedese aksioomile esineda üks kahest juhtumist: kas 1) CD mahub lõiku AB jäägita, siis vastavalt teoreemile 1 on CD otsitav mõõt, või 2) saadakse mingi jääk EB, mis on väiksem lõigust CD (nagu meil joonisel); siis tuleb vastavalt teoreemile 2 leida kahe väiksema lõigu, nimelt CD ja jäägi EB suurim ühismõõt. Et see leida, toimime nagu ennegi, s. o. paigutame lõigu EB lõigule CD nii mitu korda, kui palju on võimalik. Ja jällegi võib esineda üks kahest juhtumist: kas 1) EB mahub lõiku CD jäägita, siis otsitav mõõt on EB, või 2) saadakse jääk FD, mis on väiksem lõigust EB (nagu meie joonisel); siis küsimus seisneb kahe väiksema lõigu, nimelt EB ja teise jäägi FD suurima ühismõõdu leidmises.



Joon. 165.

Jätkates seda võtet, võib meil esineda kaks juhtumit:

1) pärast mõnekordset paigutamist me ei saa mingit jääki või 2) järjestikuse paigutamise võttel pole lõppu (eeldusel, et oleme suutelised paigutama kuitahes väikesi lõike, mis muidugi on võimalik ainult teoreetiliselt).

Esimesel juhtumil on viimane jääk antud lõikude suurim ühismõõt. Selleks et hõlpsam oleks arvutada, mitu korda mahub saadud suurim ühismõõt antud lõikudesse, kirjutame rea võrdusi, mis saadakse iga paigutamise tulemusena. Vastavalt joonisele saame:

pärast esimest paigutamist . . . $AB=3CD+EB$;
„ teist „ . . . $CD=2EB+FD$;
„ kolmandat „ . . . $EB=4FD$.

Minnes üle alumisest võrdusest ülemisele, leiame järjest:

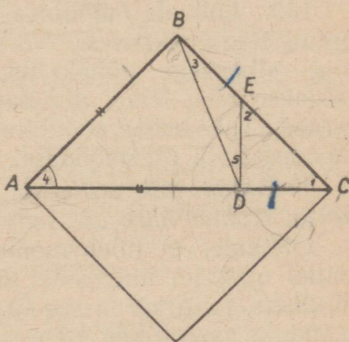
$$EB=4FD;\ CD=(4FD)\cdot 2+FD=9FD.$$
$$AB=(9FD)\cdot 3+4FD=31FD.$$

Samal viisil leiame kahe sama raadiusega kaare, kahe nurga jne. suurima ühismõõdu.

Teisel juhtumil ei ole antud lõikudel ühismõõtu. Et see kindlaks teha, oletame, et antud lõikudel AB ja CD on mingi ühismõõt. See mõõt peab, nagu nägime, mahtuma täisarv korda mitte ainult lõikudesse *AB* ja *CD*, vaid ka jäägisse *EB*, järelikult ka teisesse jääki *FD*, kolmandasse, neljandasse jne. jääki. Et jäägid järjest vähenevad, siis igasse järgnevasse jääki peab ühismõõt mahtuma vähem arv korda kui eelmisse. Kui näiteks lõiku *EB* mahub ühismõõt 100 korda (üldiselt m korda), siis lõiku *FD* mahub ta vähem kui 100 korda (tähendab, mitte rohkem kui 99 korda); järgmisse jääki mahub ta vähem kui 99 korda (tähendab, mitte rohkem kui 98 korda) jne. Et aga positiivsete vähenevate täisarvude 100, 99, 98... (üldiselt m, $m-1$, $m-2, \ldots$) real on lõpp (kui suur arv m ka oleks), siis peaks ka järjestikuse paigutamise võtte küllaldasel jätkamisel olema lõpp (s. o. meie jõuame nii kaugele, et jääki enam pole). Tähendab, kui järjestikusel paigutamisel lõppu ei ole, siis ka antud lõikudel ei ole ühismõõtu.

148. **Ühismõõduga ja ühismõõduta lõigud.** *Kaht sirglõiku nimetame* ***ühismõõduga lõikudeks,*** *kui neil ühismõõt on olemas, ja* ***ühismõõduta lõikudeks,*** *kui neil ühismõõt puudub.*

Tegelikus elus puudub võimalus veenduda ühismõõduta lõikude olemasolus, sest jätkates järjestikku paigutamist, me ikkagi saame lõpuks niisuguse väikese jäägi, mis n ä i b m a h t u v a t täisarv korda eelmisesse jääki. Võib-olla, et ka siin peaks tekkima mõni jääk, aga riistade (sirkli) ebatäpsuse ja meie meeleorganite (silma) ebatäiuslikkuse tõttu pole meil võimalik seda kindlaks teha. Et siiski ühismõõduta lõike on olemas, näeme järgmisest tõestusest.



Joon. 166.

149. Teoreem. ***Ruudu diagonaal ja külg on ühismõõduta.***

Et diagonaal jagab ruudu kaheks võrdhaarseks kolmnurgaks, siis võib teoreemi sõnastada ka teisiti: ***võrdhaarse täisnurkse kolmnurga hüpotenuus ja kaatet on ühismõõduta.***

Eelkõige tõestame niisuguse kolmnurga järgmise omaduse: kui hüpotenuusile (joon. 166) paigutame lõigu *AD*, mis on võrdne kaatetiga, ja tõmbame $DE \perp AC$, siis tekkinud täisnurkne kolmnurk *DEC* on võrdhaarne ja kaateti *BC* lõik *BE* osutub võrdseks hüpotenuusi lõiguga *DC*. Et veenduda selles, tõmbame sirge *BD* ja vaatleme kolmnurkade *DEC* ja *BED* nurki. Et kolmnurk *ABC* on võrdhaarne ning täisnurkne, siis $\angle 1 = \angle 4$ ja järelikult $\angle 1 = 45°$. Seepärast on ka nurk *2* täisnurkses kolmnurgas *DEC* võrdne 45°-ga ja seega on kolmnurgal *DEC* kaks võrdset nurka, mispärast ka küljed *DC* ja *DE* on võrdsed.

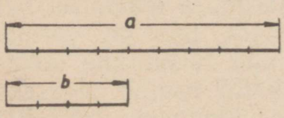
Kolmnurgas BDE võrdub nurk 3 täisnurga ja nurga ABD vahega, nurk 5 võrdub täisnurga ADE ja nurga ADB vahega. Nurgad ADB ja ABD on aga võrdsed (sest $AB=AD$); tähendab $\angle 3=\angle 5$. Siis on aga kolmnurk DBE võrdhaarne ja seepärast $BE=ED=DC$.

Olles selle ära märkinud, asume leidma lõikude AB ja AC ühismõõtu. Et $AC>AB$ ja $AC<AB+BC$, s. o. $AC<2AB$, siis kaateti AB võib paigutada hüpotenuusile AC ainult üks kord mingi jäägiga DC. Nüüd on vaja see jääk paigutada AB-le või BC-le. Lõik BE võrdub aga tõestatu põhjal DC-ga. Tähendab, DC on vaja paigutada veel EC-le. EC on aga võrdhaarse kolmnurga DEC hüpotenuus. Järelikult ühismõõdu leidmine viiakse üle võrdhaarse täisnurkse kolmnurga DEC kaateti DC paigutamisele sama kolmnurga hüpotenuusile EC. See paigutamine omakorda viiakse üle uue väiksema võrdhaarse täisnurkse kolmnurga kaateti paigutamisele kolmnurga hüpotenuusile jne., ilmselt lõputult. Et aga see toiming on lõputu, siis lõikudel AC ja AB puudub ühismõõt.

150. Lõikude mõõtmise mõiste. Selleks et saada selge kujutlus antud lõigu pikkusest, võrreldakse teda teise, meile juba tuntud lõigu pikkusega, näiteks meetriga (seda tuntud lõiku, millega võrreldakse teisi lõike, nimetatakse **pikkusühikuks**). Mõõtmisel võib esineda kaks erinevat juhtumit: kas mõõdetav lõik ja ühik on ühismõõduga või ühismõõduta.

1) Mõõta lõik, millel on ühikuga ühismõõt, tähendab leida, mitu korda mahub ühik või selle mingi osa antud lõigusse.

Oletame, et tuleb mõõta mingi lõik a (joon. 167) ühikuga b, millel on a-ga ühismõõt. Siis leitakse nende ühismõõt ja tehakse kindlaks, mitu korda see ühismõõt mahub b-sse ja a-sse. Kui ühismõõduks osutub lõik b ise, siis mõõtmise tulemuseks on t ä i s a r v. Nii näiteks, kui lõik b mahub lõiku a kolm korda, siis öeldakse, et lõigu a pikkus võrdub kolme ühikuga. Kui aga ühismõõduks on lõigu b mingi osa, siis mõõtmise tulemuseks on m u r d a r v. Nii näiteks, kui ühismõõduks on $\frac{1}{4}$ b ja see osa mahub lõiku a üheksa korda (nagu kujutatud joonisel 167), siis öeldakse, et lõigu a pikkus võrdub $\frac{9}{4}$ ühikuga.



Joon. 167.

Mõõtmisel saadud arvu nimetatakse mõõdetava suuruse **mõõtarvuks**. Täis- ja murdarve nimetatakse **ratsionaalarvudeks**.

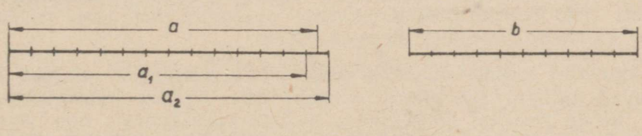
2) Kui aga antud lõigul a pole ühismõõtu ühikuga b, siis mõõtmist toimetatakse kaudselt; lõigu a asemel mõõdetakse kaht lõiku, millel on ü h i s m õ õ t ü h i k u g a ja millest üks on väiksem, teine aga suurem lõigust a ja mis erinevad lõigust a mistahes väikese arvu võrra. Selleks et leida need lõigud, toimitakse

nii: oletame, et soovime leida ühismõõduga lõigud, mis erineksid lõigust a vähem kui ühe kümnendiku võrra ühikust b. Jagame ühiku b kümneks võrdseks osaks (joon. 168) ja paigutame ühe niisuguse osa lõigule a nii mitu korda, kui võimalik. Oletame, et see toimub 13 korda mingi jäägiga, mis on väiksem kui $\frac{1}{10}\,b$. Saame lõigu a_1, mis on väiksem kui a ja millel on ühikuga ühismõõt. Lisanud sellele veel $\frac{1}{10}\,b$, saame teise lõigu a_2, mis on suurem kui a ja mis erineb lõigust a vähem kui ühe kümnendiku ühiku võrra ning millel on ka ühikuga ühismõõt. Lõikude a_1 ja a_2 pikkused väljenduvad arvudega $\frac{13}{10}$ ja $\frac{14}{10}$. Neile arvudele me vaatame kui lõigu a pikkuse l i g i k a u d s e t e l e väärtustele: esimene puuduga, teine liiaga. Et lõik a erineb lõikudest a_1 ja a_2 vähem kui $\frac{1}{10}$ ühiku võrra, siis öeldakse, et kumbki neist arvudest väljendab lõigu a pikkust täpsusega kuni $\frac{1}{10}$.

Üldse, et leida lõigu a pikkuse ligikaudsed väärtused täpsusega kuni $\frac{1}{n}$ ühikut, jagatakse ühik b n võrdseks osaks ja tehakse kindlaks, mitu korda ühiku $\frac{1}{n}$ osa mahub a-sse; kui see osa mahub lõiku a m korda mingi jäägiga, mis on väiksem $\frac{1}{n}\,b$-st, siis arvud $\frac{m}{n}$ ja $\frac{m+1}{n}$ on lõigu a pikkuse ligikaudsed väärtused täpsusega kuni $\frac{1}{n}$ ühikut, esimene puuduga, teine liiaga.

Tuleb märkida, et niisugusel viisil saab leida ligikaudseid väärtusi ka sel korral, kui mõõdetaval lõigul a on ühismõõt ühikuga b; vahe seisab ainult selles, et siin võime, kui soovime, leida ka täpse väärtuse, kuna aga juhtumil, kui mõõdetaval lõigul pole ühismõõtu ühikuga, ei saa me täpset tulemust ainult ratsionaalarvudega väljendada.

Et saada see arv, mis väljendab täpselt lõigu a pikkust, kui ta on pikkusühikuga ühismõõduta, toimitakse järgmiselt.



Joon. 168.

Arvutatakse järjest lõigu a pikkuse ligikaudne väärtus täpsusega kuni 0,1 puuduga, siis täpsusega kuni 0,01 puuduga, siis edasi täpsusega kuni 0,001 puuduga ja jätkatakse seda toimingut piiramatult, suurendades iga kord täpsust 10 korda. Sellisel toimingul saadakse järjestikused kümnendmurrud, algul ainult ühe kümnendkohaga, siis kahe, kolme ja edasi üha enam kümnendkohtadega. Kirjeldatud toimingu piiramatul jätkamisel saadakse lõpmatu mitteperioodiline kümnendmurd. (See murd ei saa olla perioodiline, sest siis saab murdu muuta harilikuks murruks ja lõigul a oleks ühismõõt pikkusühikuga.)

Algebrast on teada, et iga lõpmatu mitteperioodiline kümnendmurd määrab mingi **irratsionaalarvu.** Niisugused arvud saame näiteks ruutjuure leidmisel, kui arvust pole võimalik leida täpset juurt. Nii $\sqrt{2}$ on **irratsionaalarv**, mis kujutab endast lõpmatut kümnendmurdu [1]:

$$\sqrt{2}=1,4142\ldots$$

Seega on lõpmatu kümnendmurd, mis saadakse lõigu a ligikaudsel mõõtmisel, kui lõik on ühikuga ühismõõduta, mingi irratsionaalarv. Seda arvu loetaksegi lõigu a pikkuse täpseks mõõtarvuks.

M ä r k u s. Sama irratsionaalarvu võib saada, kui arvutada järjest lõigu a pikkuse ligikaudseid väärtusi täpsusega kuni 0,1; 0,01; 0,001; . . ., kuid mitte puuduga, vaid liiaga. Tõepoolest, kaks ligikaudset väärtust, mis on võetud ühesuguse täpsusega, üks puuduga, teine liiaga, erinevad teineteisest ainult viimase kümnendkoha poolest. Täpsusastme järjestikusel tõstmisel see viimane kümnendkoht nihkub komast paremal üha kaugemale, ühiste kümnendkohtade arv üha suureneb. Toimingu piiramatul jätkamisel saadakse seega sama lõpmatu kümnendmurd, s. t. sama irratsionaalarv.

Lõpmatu kümnendmurru täpne väärtus on suurem selle igast ligikaudsest väärtusest puuduga ja väiksem selle igast ligikaudsest väärtusest liiaga.

151. Lõpmatud kümnendmurrud. Lõpmatute kümnendmurdude kasutamisele võtmine algebras toimub järgmiste definitsioonide põhjal.

Lõpmatut kümnendmurdu nimetatakse reaalarvuks.

Kaks lõpmatut kümnendmurdu on võrdsed, kui nende vastavatel kohtadel seisvad kümnendmärgid on võrdsed.

Kahest mittevõrdsest lõpmatust kümnendmurrust loetakse suuremaks reaalarvuks seda murdu, milles esimene vastavail kohtadel seisvatest mittevõrdsetest kümnendmärkidest on suurem arv.

Kui lõpmatus kümnendmurrus kõik kümnendmärgid mingist kohast alates võrduvad nulliga, siis murd võrdub selle lõpliku kümnendmurruga, mis saadakse antud murrust kõigi nende nullide kasutamisel, mis seisavad paremal pool viimast numbrit. Nii võrdub lõpmatu kümnendmurd 7,8530078000 . . . lõpliku murruga 7,8530078. Lõpmatut perioodilist murdu perioodiga 9 saab alati asendada lõpliku kümnendmurruga, mis saadakse antud murrust, kui selle viimasele üheksast erinevale numbrile juurde lisada üks ja ära jätta kõik järgnevad üheksad. Nii saab murdu 3,72999 . . . asendada lõpliku murruga 3,73.

---

[1] Muidugi pole võimalik lõpmatut kümnendmurdu kirjutada, sest selle kümnendkohtade arv on lõpmatu. Hoolimata sellest loetakse murd tuntuks, kui on teada viis, mille abil saab leida kuitahes palju murru kümnendkohti.

152. Lõpmatu kümnendmurru ligikaudsed väärtused.

Kui lõpmatus kümnendmurrus võtta ainult n kohta, siis saadakse lõplik murd, mida nimetatakse *lõpmatu kümnendmurru ligikaudseks väärtuseks* täpsusega kuni $\frac{1}{10^n}$ puuduga. Kui antud murrus aga suurendada viimast kümnendkohta ühe ühelise võrra, s. t. murrule lisada $\frac{1}{10^n}$, siis saadakse uus lõplik murd, mida nimetatakse lõpmatu kümnendmurru ligikaudseks väärtuseks sama täpsusega, kuid liiaga. Olgu n kümnendkohaga reaalarvu a ligikaudne väärtus puuduga a_n ja liiaga a'_n, siis $a'_n=a_n+\frac{1}{10^n}$. Mittevõrdsete reaalarvude definitsioonist järeldub, et reaalarv on suurem igast tema puuduga võetud ligikaudsest väärtusest ja väiksem igast liiaga võetud ligikaudsest väärtusest. Olgu näiteks antud reaalarv 1,414 . . ., mis määrab $\sqrt{2}$. Selle ligikaudne väärtus puuduga, täpsusega kuni 0,01, on 1,41, liiaga aga 1,42, sest

$$1{,}41=1{,}41000\ldots$$
$$1{,}42=1{,}42000\ldots$$

Mittevõrdsete reaalarvude definitsioonide põhjal saame:

$$1{,}41000\ldots<1{,}414\ldots<1{,}42000\ldots \text{ ehk}$$
$$1{,}41<\sqrt{2}<1{,}42.$$

153. Tehted reaalarvudega. Liitmine. Olgu antud kaks reaalarvu α ja β. Võtame nende ligikaudsed väärtused n kümnendkohaga (n on mistahes arv), enne puuduga, siis liiaga. Arvude α ja β ligikaudsed väärtused puuduga tähistame vastavalt α_n ja β_n, ligikaudsed väärtused liiaga aga α'_n ja β'_n. Seejuures

$$\alpha'_n=\alpha_n+\frac{1}{10^n};\quad \beta'_n=\beta_n+\frac{1}{10^n}. \qquad (1)$$

Koostame nüüd summad $\alpha_n+\beta_n$ ja $\alpha'_n+\beta'_n$.
Kumbki neist on kümnendmurd n kümnendkohaga.
Olgu esimene summa γ_n ja teine γ'_n.

$$\alpha_n+\beta_n=\gamma_n;\ \alpha'_n+\beta'_n=\gamma'_n.$$

Liites liikmeti võrdused (1), saame:

$$\alpha'_n+\beta'_n=\alpha_n+\beta_n+\frac{2}{10^n}$$

ehk $\gamma'_n\ \gamma_n+\frac{2}{10^n}$. See võrdus näitab, et γ'_n saadakse murrust γ_n kahe ühiku lisamisega tema viimasele kümnendkohale. Nüüd hakkame suurendama n-i. Niisugusel juhul murd γ_n annab lõpmatu kümnendmurru, mille tähistame γ-ga. See murd võib olla kas perioodiline või mitteperioodiline. Oletame, et murd γ on mitteperioodiline. Niisugusel korral peab tal olema lõpmatu palju 9-st erinevaid kümnendkohti. Sel juhul peab murru γ 9-st erinevate kümnendkohtade arv suurenema arvu n suurenemisega. Et murru γ_n liitmine $\frac{2}{10^n}$-ga ei avalda mõju nendele kümnendkohtadele, mis seisavad vasakul kahest viimasest 9-st erinevast kümnendkohast, siis ühiste kümnendkohtade arv murdudes γ_n ja γ'_n suureneb piiramatult arvu n suurenemisega. Järelikult, murd γ'_n annab sama lõpmatu kümnendmurru kui murd γ_n-gi. Seejuures järeldub eelmisest, et mistahes n puhul

$$\gamma_n < \gamma < \gamma'_n. \tag{2}$$

Nüüd oletame, et murd γ on perioodiline. Sel juhul kujutab ta endast ratsionaalarvu. See arv, nagu pole raske aru saada, rahuldab samuti võrratusi (2).

D e f i n i t s i o o n. *Reaalarvu γ, mis rahuldab võrratusi* (2), *nimetatakse reaalarvude α ja β summaks:*

$$\gamma = \alpha + \beta.$$

154. Teised tehted reaalarvudega. Analoogiliselt saab defineerida kahe reaalarvu vahet, nende korrutist ja jagatist. Nende tehete üksikasjalisem uurimine näitab, et niisuguselt defineeritud reaalarvude summa ja korrutis alluvad tehete nendele seadustele, mis on kehtivad ratsionaalarvude puhul: liitmine allub vahetuvuse ja ühenduvuse seadusele:

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha, (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma),$$

korrutamine aga vahetuvuse, ühenduvuse ja jaotuvuse seadusele:

$$\alpha\beta = \beta\alpha, (\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma), (\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma.$$

Neil juhtumeil, kui lõpmatud kümnendmurrud on perioodilised, viivad eespool defineeritud tehted nendega, nagu seda on kerge näidata, samadele tulemustele kui tehted harilikkudegi murdudega, mis saadakse perioodiliste murdude muutmisel.

Seega, ratsionaalarvud on ainult reaalarvude üheks eriliigiks.

155. Kahe lõigu suhe. Arvu, mis saadakse lõigu a mõõtmise tulemusena, nimetatakse lõigu a mõõtarvuks. Kui lõigul a on ühismõõt mõõtühikuga, siis tema mõõtarv on ratsionaalarv. Kui tal aga pole ühismõõtu mõõtühikuga, siis ta mõõtarv on irratsionaalarv, mis on kujutatav lõpmatu mitteperioodilise kümnendmurruna.

Edaspidi mõistame lõigu pikkuse all lõigu mõõtarvu, mis on määratud antud mõõtühikuga. Kahe lõigu suhte all mõistame nende mõõtarvude suhet.

Kahe lõigu suhe ei sõltu sellest, kuidas on valitud mõõtühik. Tõepoolest, kui näiteks valitud mõõtühiku asemele võtame teise, kolm korda väiksema mõõtühiku, siis igasse lõiku mahub uus mõõtühik kolm korda rohkem kordi kui endine mõõtühik. Murrus, mis väljendab lõikude suhet, suurenevad lugeja ja nimetaja kolm korda. Murru väärtus sel juhul aga ei muutu. Kui antud lõigud on ühismõõduga, siis nende suhte arvutamisel on hõlpus võtta mõõduks nende ühismõõt. Niisugusel juhul ilmneb kohe, et kahe ühismõõduga lõigu suhe on nende arvude suhe, mis näitavad, mitu korda lõikude ühismõõt mahub kumbagi lõiku.

II. Kolmnurkade sarnasus.

156. Eelmõisted. Meid ümbritsevas elus kohtame tihti kujundeid, millel on ühesugune kuju, mõõtmed aga erinevad. Sellised on näiteks ühe ning sama isiku fotod, millel on eri suurus, või jälle hoone või linna plaanid, mis on valmistatud mitmes eri mõõtkavas. Niisuguseid kujundeid nimetatakse **sarnaseiks.** Lõikude pikkuse mõõtmise oskus lubab täpselt määrata kujundite geomeetrilise sarnasuse mõiste ning anda viisid, kuidas muuta kujundi suurust ilma tema kuju muutmata. Kujundi mõõtmete muutmist ilma kuju muutmata nimetatakse antud kujundi sarnasusteisenduseks. Kujundite sarnasuse uurimist algame lihtsaimast juhtumist, nimelt kolmnurkade sarnasusest.

157. Vastavad küljed. Selles peatükis vaadeldakse kolmnurki, millel nurgad on vastavalt võrdsed. Kokkuleppel nimetame selliseil juhtumeil **«vastavaiks»** külgedeks kolmnurkade neid külgi, mis asetsevad vastavalt võrdsete nurkade vahel (need küljed on ka vastavalt võrdsete nurkade v a s t a s).

158. *Definitsioon.* ***Kaks kolmnurka on sarnased, kui: 1) ühe kolmnurga nurgad on vastavalt võrdsed teise kolmnurga nurkadega ja 2) ühe kolmnurga küljed on võrdelised teise kolmnurga vastavate külgedega.***

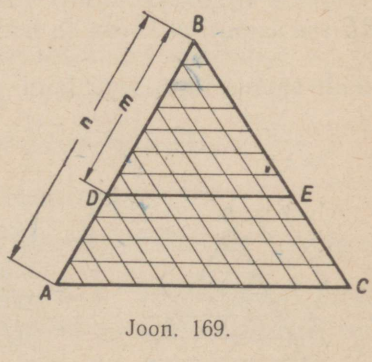
Et niisuguseid kolmnurki on olemas, näitab järgmine teoreem.

159. Teoreem. ***Sirge*** (DE, joon. 169), ***mis on paralleelne kolmnurga*** (ABC) ***mingi küljega*** (AC), ***lõikab selle kolmnurga küljest kolmnurga*** (DBE), ***mis on sarnane antud kolmnurgaga.***

Olgu kolmnurgas ABC sirge DE paralleelne küljega AC. Tuleb tõestada, et kolmnurk DBE on sarnane kolmnurgaga ABC.

Meil tuleb tõestada esiteks nurkade võrdsus ja teiseks kolmnurkade ABC ja DBE vastavate külgede võrdelisus.

1. Kolmnurkade nurgad on vastavalt võrdsed, sest nurk B on neil ühine, aga $\angle D = \angle A$ ja $\angle E = \angle C$ kui kaasnurgad paralleelide DE ja AC lõikajate AB ja CB juures.



Joon. 169.

2. Nüüd tõestame, et $\triangle DBE$ küljed on võrdelised $\triangle ABC$ vastavate külgedega, s. t. et

$$\frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BC} = \frac{DE}{AC}.$$

Tõestuseks vaatleme eraldi kaht järgmist juhtumit.

1) Küljed AB ja DB on ühismõõt. Jaotame AB osadeks, mis on võrdsed AB ja DB ühismõõduga. Siis DB jaotub osadeks, mille arv on täisarv. Olgu neid küljes DB m ja küljes AB n. Läbi jaotuspunktide tõmbame ühe rea paralleele AC-ga ja teise rea paralleele BC-ga. Nüüd jaotuvad BE ja BC võrdseiks osadeks (§ 95), milliseid küljes BE on m ja küljes BC n. Täpselt samuti jaotub DE m võrdseks osaks ja AC n võrdseks osaks, kusjuures DE ja AC osad on võrdsed (kui rööpkülikute vastasküljed). Nüüd on ilmne, et

$$\frac{BD}{BA}=\frac{m}{n};\ \frac{BE}{BC}=\frac{m}{n};\ \frac{DE}{AC}=\frac{m}{n}.$$

Järelikult

$$\frac{BD}{BA}=\frac{BE}{BC}=\frac{DE}{AC}.$$

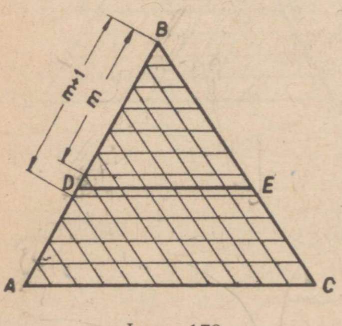
2) Küljed AB ja DB on ühismõõduta (joon. 170).

Leiame suhete $\frac{BD}{BA}$ ja $\frac{BE}{BC}$ ligikaudsed väärtused, algul täpsusega kuni $\frac{1}{10}$, siis kuni $\frac{1}{100}$ ja suurendame täpsust järjest edasi 10 korda.

Selleks jaotame külje AB algul kümneks osaks ja läbi jaotuspunktide tõmbame paralleelid AC-ga.

Siis jaotub külg BC samuti kümneks osaks. Oletame, et $\frac{1}{10}$ küljest AB mahub BD-sse m korda, siinjuures tekkinud jääk on väiksem $\frac{1}{10}$ AB-st. Siis, nagu näha joonisest 170, $\frac{1}{10}$ küljest BC mahub BE-sse samuti m korda ja tekkinud jääk on väiksem $\frac{1}{10}$ BC-st. Järelikult saame täpsusega kuni $\frac{1}{10}$:

$$\frac{BD}{BA}=\frac{m}{10};\ \frac{BE}{BC}=\frac{m}{10}.$$



Joon. 170.

Edasi jaotame AB sajaks võrdseks osaks ja oletame, et $\frac{1}{100}$ küljest AB mahub BD-sse m_1 korda. Tõmmates jälle läbi jaotuspunktide paralleelid AC-ga veendume selles, et $\frac{1}{100}$ BC mahub BE-sse samuti m_1 korda. Seepärast saame täpsusega kuni $\frac{1}{100}$:

$$\frac{BD}{BA}=\frac{m_1}{100} \text{ ja } \frac{BE}{BC}=\frac{m_1}{100}.$$

Suurendades edasi täpsuse järku 10, 100... korda, veendume selles, et suhete $\frac{BD}{BA}$ ja $\frac{BE}{BC}$ ligikaudsed väärtused, mis on arvutatud mistahes, kuid ühesuuruse täpsusega, on võrdsed. Järelikult, nende suhete täpsed väärtused väljenduvad ühe ja sama lõpmatu kümnendmurruga; tähendab

$$\frac{BD}{BA}=\frac{BE}{BC}.$$

Täpselt samuti, tõmmates läbi külje AB jaotuspunktide paralleelid BC-ga, leiame, et

$$\frac{BD}{BA}=\frac{DE}{AC}.$$

Järelikult

$$\frac{BD}{BA}=\frac{BE}{BC}=\frac{DE}{AC}.$$

160. M ä r k u s e d. 1. Tõestatud suhted moodustavad kolm järgmist võrret:

$$\frac{BD}{BA}=\frac{BE}{BC};\quad \frac{BD}{BA}=\frac{DE}{AC};\quad \frac{BE}{BC}=\frac{DE}{AC}.$$

Paigutades nendes võrretes siseliikmed ümber, saame:

$$\frac{BD}{BE}=\frac{BA}{BC};\quad \frac{BD}{DE}=\frac{BA}{AC};\quad \frac{BE}{DE}=\frac{BC}{AC}.$$

Seega, *kui kolmnurkade küljed on võrdelised, siis ühe kolmnurga mistahes kahe külje suhe võrdub teise kolmnurga vastavate külgede suhtega.*

2. Kujundite sarnasust märgitakse mõnikord sümboliga $\sim$

Kolmnurkade sarnasuse kolm tunnust.

161. Teoreemid. ***Kui kahes kolmnurgas:***

1) ühe kolmnurga kaks nurka on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kahe nurgaga või

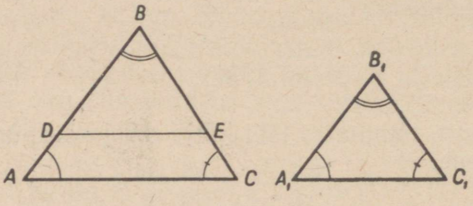
2) ühe kolmnurga kaks külge on võrdelised teise kolmnurga kahe küljega ja nurgad nende külgede vahel on võrdsed või

3) ühe kolmnurga kolm külge on võrdelised teise kolmnurga kolme küljega,

siis niisugused kolmnurgad on sarnased.

1. Olgu ABC ja $A_1B_1C_1$ (joon. 171) niisugused kolmnurgad, milledes $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$ ja järelikult $\angle C=\angle C_1$.

Tuleb tõestada, et need kolmnurgad on sarnased. Paigutame lõigule AB lõigu BD, mis on võrdne lõiguga A_1B_1, ja tõmbame $DE \parallel AC$. Siis saame abikolmnurga DBE, mis on eespool tõestatud teoreemi (§ 159) põhjal sarnane $\triangle ABC$-ga. Teiselt poolt



Joon. 171.

$\triangle DBE = \triangle A_1B_1C_1$, sest neis: $BD = A_1B_1$ (konstruktsiooni põhjal), $\angle B = \angle B_1$ (eelduse põhjal) ja $\angle D = \angle A_1$ (sest $\angle D = \angle A$ ja $\angle A = \angle A_1$). On aga ilmne, et kui kahest võrdsest kolmnurgast üks on sarnane kolmandaga, siis on ka teine sarnane kolmandaga; järelikult:

$$\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC.$$

2. Olgu kolmnurkades ABC ja $A_1B_1C_1$ antud (joon. 172)

$$\angle B = \angle B_1 \text{ ja } \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}. \qquad (1)$$

Tuleb tõestada, et need kolmnurgad on sarnased.

Paigutame uuesti lõigule AB lõigu BD, mis on võrdne lõiguga A_1B_1, ja tõmbame $DE \parallel AC$. Saame abikolmnurga BDE, mis on sarnane $\triangle ABC$-ga. Tõestame, et ta võrdub $\triangle A_1B_1C_1$-ga. Kolmnurkade ABC ja DBE sarnasusest järeldub, et

$$\frac{AB}{DB} = \frac{BC}{BE}. \qquad (2)$$

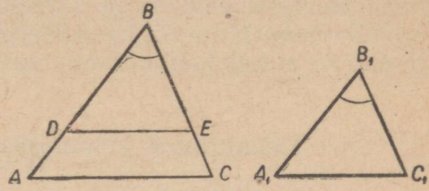
Võrreldes seda võrret antud võrdega (1) märkame, et võrrete esimesed suhted on võrdsed ($DB = A_1B_1$ konstruktsiooni põhjal); järelikult on ka võrrete teised suhted võrdsed, seega

$$\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{BC}{BE}.$$

Kui aga võrde eesliikmed on võrdsed, siis peavad võrdsed olema ka võrde tagaliikmed, tähendab

$$B_1C_1 = BE.$$

Nüüd näeme, et kolmnurkades DBE ja $A_1B_1C_1$ on üks paar võrdseid nurki ($\angle B = \angle B_1$), mis asetsevad vastavalt võrdsete külgede vahel; tähendab, need kolmnurgad on võrdsed. $\triangle DBE$ on aga sarnane $\triangle ABC$-ga, seepärast on ka $\triangle A_1B_1C_1$ sarnane $\triangle ABC$-ga.



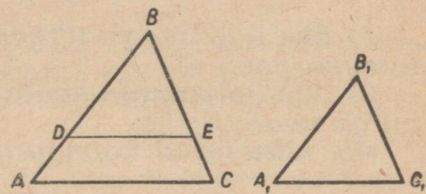
Joon. 172.

3. Olgu kolmnurkades ABC ja $A_1B_1C_1$ (joon. 173) antud:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}. \qquad (1)$$

Tuleb tõestada, et need kolmnurgad on sarnased.

Teinud sama konstruktsiooni nagu eelmistelgi juhtumitel, näitame, et $\triangle DBE = \triangle A_1B_1C_1$. Kolmnurkade ABC ja DBE sarnasusest järeldub, et



Joon. 173.

$$\frac{AB}{DB} = \frac{BC}{BE} = \frac{AC}{DE}. \qquad (2)$$

Võrreldes seda suhete rida antud reaga (1), märkame, et nendes ridades esimesed suhted on võrdsed, järelikult on ka ülejäänud suhted võrdsed; seepärast

$$\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{BC}{BE},$$

millest

$$B_1C_1 = BE;$$

samuti

$$\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AC}{DE},$$

millest

$$A_1C_1 = DE.$$

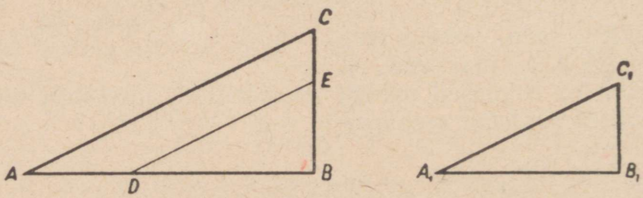
Nüüd näeme, et kolmnurkades DBE ja $A_1B_1C_1$ on kolm paari vastavalt võrdseid külgi; tähendab, need kolmnurgad on võrdsed. Üks neist, nimelt $\triangle DBE$, on sarnane $\triangle ABC$-ga; järelikult peab ka $\triangle A_1B_1C_1$ olema sarnane $\triangle ABC$-ga.

162. Märkusi tõestusviisi kohta. On kasulik juhtida tähelepanu sellele, et tõestusviis, mida kasutasime kolme eelmise teoreemi tõestamisel, on üks ja seesama, nimelt: paigutanud suurema kolmnurga küljele lõigu, mis võrdub väiksema kolmnurga vastava küljega, ja tõmmates paralleeli teisele küljele, saame abikolmnurga, mis on sarnane suurema kolmnurgaga. Pärast seda tõestame teoreemi eelduse ja sarnaste kolmnurkade omaduste põhjal, et abikolmnurk on võrdne väiksema kolmnurgaga, ja lõpuks teeme järelduse antud kolmnurkade sarnasuse kohta.

Täisnurksete kolmnurkade sarnasuse tunnused.

163. Kaks tunnust, mis ei nõua eri tõestust. Kuna täisnurgad on alati võrdsed, siis tõestatud kolmnurkade sarnasuse tunnuste põhjal võime väita, et ***kui kahes täisnurkses kolmnurgas:***

1) ühe kolmnurga teravnurk võrdub teise kolmnurga teravnurgaga või
2) ühe kolmnurga kaatetid on võrdelised teise kolmnurga kaatetitega,
siis niisugused kolmnurgad on sarnased.



Joon. 174.

164. Tunnus, mis nõuab eri tõestust.

Teoreem. ***Kui ühe kolmnurga hüpotenuus ja kaatet on võrdelised teise kolmnurga hüpotenuusi ja kaatetiga, siis kolmnurgad on sarnased.***

Olgu ABC ja $A_1B_1C_1$ kaks kolmnurka (joon. 174), miiles nurgad B ja B_1 on täisnurgad ja

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1}. \qquad (1)$$

Tuleb tõestada, et need kolmnurgad on sarnased.

Tõestuseks kasutame sama viisi, mida rakendasime varem. Paigutame lõigule AB lõigu $BD=A_1B_1$ ja tõmbame $DE \parallel AC$.

Saame abikolmnurga DBE, mis on sarnane $\triangle ABC$-ga. Tõestame, et ta on võrdne $\triangle A_1B_1C_1$-ga. Kolmnurkade ABC ja DBE sarnasusest järeldub, et

$$\frac{AB}{DB}=\frac{AC}{DE}. \tag{2}$$

Võrreldes seda võrret antud võrdega (1) leiame, et nende esimesed suhted on võrdsed, järelikult ka teised suhted on võrdsed, seega

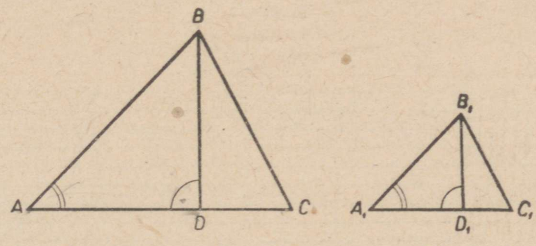
$$\frac{AC}{DE}=\frac{AC}{A_1C_1},$$

millest

$$DE=A_1C_1.$$

Nüüd näeme, et kolmnurgad DBE ja $A_1B_1C_1$ ühtivad hüpotenuusi ja ühe kaateti poolest; järelikult on nad võrdsed. Et aga üks neist on sarnane $\triangle ABC$-ga, siis on ka teine kolmnurk sarnane $\triangle ABC$-ga.

165. Teoreem (kõrguste suhtest). ***Sarnastes kolmnurkades vastavad küljed on võrdelised vastavate kõrgustega,*** s. t. nende kõrgustega, mis on tõmmatud vastavatele külgedele.



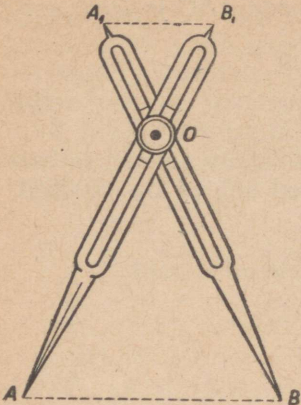
Joon. 175.

Tõepoolest, kui kolmnurgad ABC ja $A_1B_1C_1$ (joon. 175) on sarnased, siis on ka täisnurksed kolmnurgad BAD ja $B_1A_1D_1$ sarnased ($\angle A=\angle A_1$ ja $\angle D=\angle D_1$);

seepärast

$$\frac{BD}{B_1D_1}=\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{AC}{A_1C_1}.$$

166. Suhtesirkel (jaotussirkel). Kolmnurkade sarnasusel põhineb suhtesirkli tarvitamine. Selle sirkli abil on kerge antud lõiku jaotada mitmeks võrdseks osakeks.



Joon. 176.

Suhtesirkel koosneb kahest ühesugusest terava otsaga jalast AB_1 ja BA_1 (joon. 176). Jalgades on sooned, milles liigub kruvi, mida võib kinnitada soovitavas kohas. Sirkli jalgu võib ümber kruvi pöörates kaugendada ja lähendada. Oletame, et lõik AB on tarvis jaotada kolmeks võrdseks osaks. Selleks kinnitame kruvi niisuguses punktis O, et kaugus AO oleks kolm korda pikem kaugusest OB_1 (seda on kerge teostada nende jaotuste ja numbrite abil, mis on soone äärtel). Nüüd avame sirkli ja asetame ta nii, nagu näidatud joonisel. Siis on teravike A_1 ja B_1 vaheline kaugus $\frac{1}{3}$ AB pikkusest, sest sarnastest kolmnurkadest AOB ja A_1OB_1 järeldub, et

$$A_1B_1 : AB = OB_1 : OA = 1 : 3.$$

Nüüd tuleb vaid sirkel ümber pöörata ja lõigule AB paigutada kolm korda lõik A_1B_1.

167. Ristmõõtkava. Sarnaste kolmnurkade omadustele on rajatud ka ristmõõtkava valmistamine. Mõõtkava ehitus selgub joonisest 177.

Joon. 177.

3m 4dm 6cm.

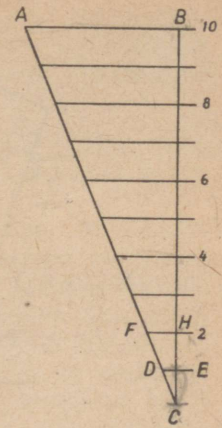
Olgu joone AB suuremad jaotused meetrid (vähendatud kujul). Siis väiksemad jaotused on detsimeetrid. Selleks et saada sentimeetreid, oleks tulnud need väiksemad jaotused veel jagada 10 võrdseks osaks, mis aga nende jaotuse väiksuse tõttu pole teostatav joonmõõtkavas (s. o. joonel AB). Ristmõõtkava lubab aga saada ka sentimeetreid. Selle selgitamiseks kujutame suurendatud kujul eraldi (joon. 178) selle kitsa täisnurkse kolmnurga, mis meie joonisel asetseb paremal.

Paralleelsed sirged lõikavad sellest kolmnurgast sarnased kolmnurgad ja seepärast võime kirjutada võrded (joon. 178):

$$DE : AB = CE : CB = 1 : 10;$$
$$FH : AB = CH : CB = 2 : 10 \text{ jne.};$$

tähendab

$$DE = \frac{1}{10} AB; \quad FH = \frac{2}{10} AB \text{ jne.}$$



Joon. 178.

Nüüd on selge, et kui näiteks võtta mõõtkaval sirkliga lõik punktist M punktini N (joon. 177), siis selle lõigu pikkus on

$$3 \text{ m } 4 \text{ dm } 6 \text{ cm} = 3{,}46 \text{ m}.$$

III. Hulknurkade sarnasus.

168. Definitsioon. ***Kaht ühenimelist[1] hulknurka nimetatakse sarnasteks, kui 1) ühe hulknurga nurgad on vastavalt võrdsed teise hulknurga nurkadega ja 2) võrdsete nurkade lähisküljed on võrdelised.***

See tähendab, et kui hulknurk $ABCDE$ on sarnane hulknurgaga $A_1B_1C_1D_1E_1$ (vt. joon. 180), siis $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $\angle D = \angle D_1$, $\angle E = \angle E_1$ ja

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{DE}{D_1E_1} = \frac{EA}{E_1A_1}.$$

Seejuures hulknurkade küljed AB ja A_1B_1, BC ja B_1C_1, CD ja C_1D_1 jne. on vastavad küljed.

Et niisuguseid hulknurki on olemas, näeme järgmise ülesande lahendusest.

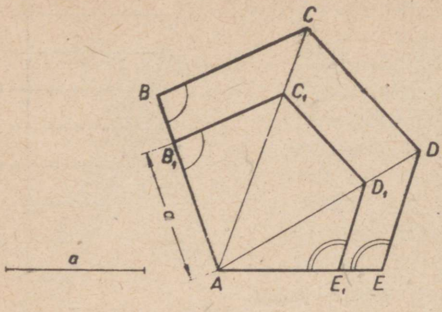
169. Ülesanne. *On antud hulknurk ABCDE ja lõik a. Joonestada teine hulknurk, mis oleks sarnane antud hulknurgaga ja mille külg, mis vastab antud hulknurga küljele AB, oleks võrdne lõiguga a* (joon. 179).

Seda võib kõige lihtsamalt teha nii. Küljele AB paigutame $AB_1 = a$ (kui $a > AB$, siis punkt B_1 asetub AB pikendusele). Siis, tõmmates A-st kõik diagonaalid, ehitame $B_1C_1 \parallel BC$, $C_1D_1 \parallel CD$ ja $D_1E_1 \parallel DE$.

Saame hulknurga $AB_1C_1D_1E_1$, mis on sarnane hulknurgaga $ABCDE$.

---

[1] Ühenimelisteks hulknurkadeks nimetatakse hulknurki, milledel on ühepalju nurki ja järelikult ka ühepalju külgi.



Joon. 179.

Tõepoolest, esiteks, ühe hulknurga nurgad võrduvad teise hulknurga nurkadega: nurk A on neil ühine, $\angle B_1 = \angle B$ ja $\angle E_1 = \angle E$ kui kaasnurgad paralleelide juures; $\angle C_1 = \angle C$ ja $\angle D_1 = \angle D$ kui nurgad, mis koosnevad vastavalt võrdsetest osadest; teiseks, meil on võrded:
kolmnurkade AB_1C_1 ja ABC sarnasusest:

$$\frac{AB_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{AC_1}{AC};$$

kolmnurkade AC_1D_1 ja ACD sarnasusest:

$$\frac{AC_1}{AC} = \frac{C_1D_1}{CD} = \frac{AD_1}{AD};$$

kolmnurkade AD_1E_1 ja ADE sarnasusest:

$$\frac{AD_1}{AD} = \frac{D_1E_1}{DE} = \frac{AE_1}{AE}.$$

Et esimese rea kolmas suhe võrdub teise rea esimese suhtega ja teise rea kolmas suhe võrdub kolmanda rea esimese suhtega, siis seega kõik 9 suhet on võrdsed. Kõrvaldades neist need suhted, milles esinevad diagonaalid, võime kirjutada:

$$\frac{AB_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1D_1}{CD} = \frac{D_1E_1}{DE} = \frac{AE_1}{AE}.$$

Näeme, et ühenimelistel hulknurkadel $ABCDE$ ja $AB_1C_1D_1E_1$ nurgad on vastavalt võrdsed ja vastavad küljed on võrdelised; tähendab, need hulknurgad on sarnased.

170. Märkus. Kolmnurkade puhul, nagu nägime (§ 161), nurkade võrdsusest tuleneb külgede võrdelisus ja ümberpöördult: külgede võrdelisusest tuleneb nurkade võrdsus; seetõttu on kolmnurkade puhul ainult nurkade võrdsus või jälle ainult külgede võrdelisus nende sarnasuse piisavaks tunnuseks. Hulknurkade sarnasuse tunnuseks pole piisav ainult nurkade võrdsus või külgede võrdelisus; näiteks, ruudul ja ristkülikul on nurgad võrdsed, nende küljed pole aga võrdelised; ruudu ja rombi küljed on võrdelised, nurgad pole aga võrdsed.

171. Teoreem (sarnaste hulknurkade tükeldamisest sarnasteks kolmnurkadeks). ***Sarnaseid hulknurki saab tükeldada samaks arvuks sarnasteks ja ühesuguselt asetatud kolmnurkadeks.***

Näiteks on hulknurgad $ABCDE$ ja $AB_1C_1D_1E_1$ (joon. 179) diagonaalidega tükeldatud sarnasteks ühesuguselt asetatud kolmnurkadeks.

Näitame veel järgmist tükeldamisviisi. Võtame hulknurga $ABCDE$ sees (joon. 180) mingi punkti O ja ühendame selle kõikide tippudega. Siis tükeldub hulknurk $ABCDE$ kolmnurkadeks. Nende arv võrdub hulknurga külgede arvuga. Võtame ühe neist, näiteks AOE (joonisel viirutatud), ja joonestame teise hulknurga vastaval küljel A_1E_1 nurgad $O_1A_1E_1$ ja $O_1E_1A_1$, mis on vastavalt võrdsed nurkadega OAE ja OEA; lõikepunkti O_1 ühendame hulknurga $A_1B_1C_1D_1E_1$ teiste tippudega. Siis tükeldub ka see hulknurk samaks arvuks kolmnurkadeks. Tõestame, et esimese hulknurga kolmnurgad on vastavalt sarnased teise hulknurga kolmnurkadega. $\triangle AOE$ on sarnane $\triangle A_1O_1E_1$ konstruktsiooni põhjal.

Selleks et tõestada naaberkolmnurkade ABO ja $A_1B_1O_1$ sarnasust, võtame arvesse, et hulknurkade sarnasusest järeldub:

$$\angle BAE = \angle B_1A_1E_1 \text{ ja } \frac{BA}{B_1A_1} = \frac{AE}{A_1E_1}; \tag{1}$$

kuna aga kolmnurkade AOE ja $A_1O_1E_1$ sarnasusest saame:

$$\angle OAE = \angle O_1A_1E_1 \text{ ja } \frac{AO}{A_1O_1} = \frac{AE}{A_1E_1}. \tag{2}$$

Võrdustest (1) ja (2) järeldub, et

$$\angle BAO = \angle B_1A_1O_1 \text{ ja } \frac{BA}{B_1A_1} = \frac{AO}{A_1O_1}.$$

Nüüd näeme, et kolmnurkades ABO ja $A_1B_1O_1$ on võrdsed nurgad BAO ja $B_1A_1O_1$, mis asetsevad võrdeliste külgede vahel; tähendab, kolmnurgad on sarnased.

Täpselt samuti tõestame kolmnurkade BCO ja $B_1C_1O_1$ sarnasuse, siis kolmnurkade COD ja $C_1O_1D_1$ sarnasuse jne. On ilmne, et mõlemas hulknurgas sarnased kolmnurgad on asetatud ühesuguselt.

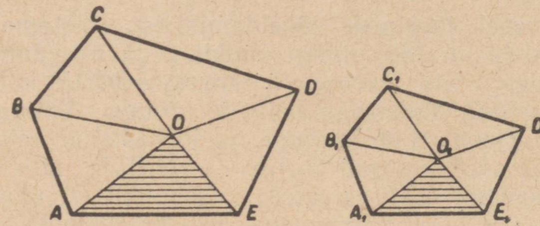
172. Teoreem (sarnaste hulknurkade ümbermõõtude suhtest). ***Sarnaste hulknurkade ümbermõõdud suhtuvad nagu nende vastavad küljed.***

Olgu hulknurgad $ABCDE$ ja $A_1B_1C_1D_1E_1$ (joon. 180) sarnased, siis on definitsiooni järgi:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{DE}{D_1E_1} = \frac{EA}{E_1A_1}.$$

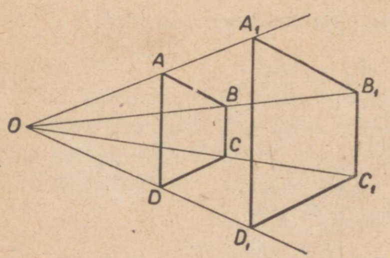
Kui meil on olemas võrdsete suhete rida, siis kõigi eesliikmete summa suhtub kõigi tagaliikmete summaga nii, nagu mingi eesliikmeist oma tagaliikmega, seepärast

$$\frac{AB+BC+CD+DE+EA}{A_1B_1+B_1C_1+C_1D_1+D_1E_1+E_1A_1}=\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\ldots$$



Joon. 180.

173. Sarnasustegur. Kahe sarnase hulknurga (või kolmnurga) vastavate külgede suhet nimetatakse nende hulknurkade (või kolmnurkade) **sarnasusteguriks.**



Joon. 181.

174. Hulknurkade sarnasusteisendus. Hulknurga joonestamist, mis on sarnane antud hulknurgaga antud sarnasusteguri puhul, nimetatakse antud hulknurga **sarnasusteisenduseks.**

Antud hulknurgaga sarnase hulknurga joonestamise viis, mis on näidatud § 169, on üks sarnasusteisenduse erijuhtumeid. Sarnasusteisenduse üldine meetod seisab järgmises. Olgu vajalik teisendada sarnaselt nelinurk $ABCD$ (joon. 181), kui sarnasustegur on k. Võtame mingi punkti O nelinurga tasapinnal. Tõmbame punktist O läbi nelinurga tippude sirged OA, OB, OC ja OD. Sirgele OA paigutame punktist O punkti A suunas lõigu OA_1, mis on võrdne lõiguga $k \cdot OA$, nii et $OA_1=k \cdot OA$ (joonisel $k=\frac{5}{3}$).

Samuti pikendame sirget OB ja paigutame sellele punktist O punkti B suunas lõigu OB_1, mis on võrdne lõiguga $k \cdot OB$, nii et $OB_1=k \cdot OB$.

Täpselt samuti toimime sirgetega OC ja OD. Neil saame punktid C_1 ja D_1, kusjuures $OC_1=k \cdot OC$ ja $OD_1=k \cdot OD$. Ühendanud sirgetega järjest punktid A_1, B_1, C_1 ja D_1, saame otsitava nelinurga

$A_1B_1C_1D_1$. Tõepoolest, võrdustest $OA_1=k \cdot OA$, $OB_1=k \cdot OB$, $OC_1=k \cdot OC$ ja $OD_1=k \cdot OD$ järeldub, et

$$\frac{OA_1}{OA}=\frac{OB_1}{OB}=\frac{OC_1}{OC}=\frac{OD_1}{OD}=k.$$

Võrdleme kolmnurki OAB ja OA_1B_1. Neil on ühine nurk tipu O juures ja peale selle

$$\frac{OA_1}{OA}=\frac{OB_1}{OB},$$

järelikult need kolmnurgad on sarnased (§ 161, II juhtum). Nende sarnasusest järeldame, et

$$\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{OA_1}{OA}=k \text{ ja } \angle OAB=\angle OA_1B_1, \tag{1}$$

järelikult, $AB \parallel A_1B_1$ (§ 73).

Täpselt samal viisil tõestame, et kolmnurgad OBC ja OB_1C_1 on sarnased. Siit järeldub, et

$$\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{OB_1}{OB}=k, \ \angle OBC=OB_1C_1 \tag{2}$$

ja, järelikult, et $BC \parallel B_1C_1$.

Samal viisil tõestame ka järgmiste kolmnurkade OCD ja OC_1D_1 sarnasuse, siis kolmnurkade OAD ja OA_1D_1 sarnasuse. Kolmnurkade OCD ja OC_1D_1 sarnasusest järeldub, et

$$\frac{C_1D_1}{CD}=\frac{OC_1}{OC}=k \text{ ja } CD \parallel C_1D_1; \tag{3}$$

kolmnurkade OAD ja OA_1D_1 sarnasusest järeldub, et

$$\frac{A_1D_1}{AD}=\frac{OD_1}{OD}=k \text{ ja } AD \parallel A_1D_1. \tag{4}$$

Võrdustest (1), (2), (3) ja (4) järeldub, et

$$\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{C_1D_1}{CD}=\frac{A_1D_1}{AD}=k.$$

Peale selle, $\angle DAB=\angle D_1A_1B_1$ kui vastavalt paralleelsete haaradega nurgad (§ 79).

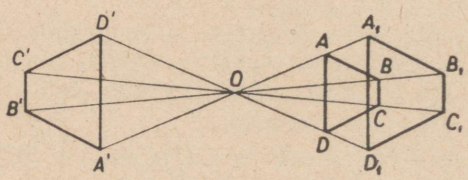
Samal põhjusel saame:

$$\angle ABC=\angle A_1B_1C_1,$$
$$\angle BCD=\angle B_1C_1D_1,$$
$$\angle CDA=\angle C_1D_1A_1.$$

Niiviisi näeme, et nelinurkades $ABCD$ ja $A_1B_1C_1D_1$ nurgad on vastavalt võrdsed ja vastavad küljed on võrdelised, tähendab, need nelinurgad on sarnased, kusjuures nende nelinurkade sarnasusteguriks on k.

175. Sarnasuse keskpunkt. Punkti O nimetatakse hulknurkade sarnasusteisendusel (§ 174) mõlema hulknurga **sarnasuse keskpunktiks.**

Hulknurga sarnasusteisendust saab teostada ka veidi teisiti. Nimelt, võtnud punkti O (joon. 182) ja ühendanud selle nelinurga $ABCD$ tippudega, võib pikendada sirgeid OA, OB,... teisele poole punkti O, siis paigutame sirgele OA punktist O vastassuunas punktile A lõigu OA', mis on võrdne lõiguga $k \cdot OA$. Täpselt samuti paigutame sirgete OB, OC,... pikendustele punktist O lõigud OB', OC',..., mis on vastavalt võrdsed lõikudega $k \cdot OB$, $k \cdot OC$,...; ühendanud sirgetega järjest punktid $A'B'C'D'$, saame nelinurga $A'B'C'D'$, mis on ilmselt sümmeetriline punkti O suhtes nelinurgaga $A_1B_1C_1D_1$. Järelikult on nelinurgad $A'B'C'D'$ ja $A_1B_1C_1D_1$ võrdsed ja, tähendab, nelinurgad $ABCD$ ja $A'B'C'D'$ on sarnased, kusjuures nende sarnasustegur on k. Esimesel teisendusmeetodil nimetatakse punkti O hulknurkade väliseks sarnasuse keskpunktiks (joon. 181), teisel meetodil — nende sisemiseks sarnasuse keskpunktiks (joon. 182).



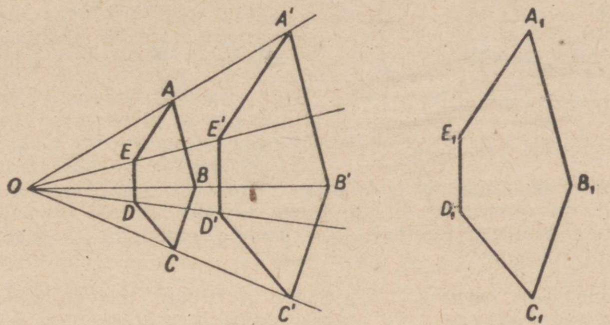
Joon. 182.

M ä r k u s. Teisendamisel võib kasutada võrdselt kas sisemist või välist sarnasuse keskpunkti. Nii üht kui teist võib valida täiesti vabalt. Erijuhtumil, kui võtta väliseks sarnasuse keskpunktiks hulknurga üks tippudest ja teostada sarnasusteisendus, saamegi just selle meetodi, mida rakendati § 169.

176. Sarnaste hulknurkade perspektiivne asend. Kahe hulknurga $ABCD$ ja $A_1B_1C_1D_1$ asetusel joonisel 181 ja ka hulknurkade $ABCD$ ja $A'B'C'D'$ asetusel joonisel 182 on järgmised omadused: 1) mõlema hulknurga vastavad küljed on paralleelsed; 2) sirged, mis ühendavad vastavaid tippe, lõikuvad ühes punktis. Niisugust hulknurkade asendit nimetatakse p e r s p e k t i i v s e k s. Tõestame, et sellisesse asendisse võib viia mistahes kahte sarnast hulknurka.

Olgu meil antud kaks hulknurka $ABCDE$ ja $A_1B_1C_1D_1E_1$ (joon. 183). Võtame sarnasuse keskpunktiks mingi punkti O ja ehitame hulknurga, mis on sarnane ja perspektiivne $ABCDE$-ga, seejuures võtame sarnasusteguriks suhte $\frac{A_1B_1}{AB}$. Me saame hulknurga $A'B'C'D'E'$, mis on sarnane $ABCDE$-ga ja samal ajal võrdne $A_1B_1C_1D_1E_1$-ga. Tõepoolest, et hulknurkade $ABCDE$ ja $A'B'C'D'E'$ sarnasustegur võrdub $\frac{A_1B_1}{AB}$-ga, siis $\frac{A'B'}{AB}=\frac{A_1B_1}{AB}$; siit $A'B'=A_1B_1$. Hulknurgad $A_1B_1C_1D_1E_1$ ja $A'B'C'D'E'$ on aga sarnased, järelikult

$$\frac{A'B'}{A_1B_1}=\frac{B'C'}{B_1C_1}=\frac{C'D'}{C_1D_1}=\frac{D'E'}{D_1E_1}=\frac{A'E'}{A_1E_1}.$$



Joon. 183.

Seepärast järeldub võrdusest $A'B'=A_1B_1$, et $B'C'=B_1C_1$, $C'D'=C_1D_1$, $D'E'=D_1E_1$ ja $A'E'=A_1E_1$. Et peale selle hulknurga $A_1B_1C_1D_1E_1$ nurgad on vastavalt võrdsed hulknurga $A'B'C'D'E'$ nurkadega, siis need hulknurgad on võrdsed. Kui paigutada hulknurk $A_1B_1C_1D_1E_1$ hulknurgale $A'B'C'D'E'$ nii, et nad ühtivad, siis hulknurk $A_1B_1C_1D_1E_1$ asetub perspektiivselt hulknurgaga $ABCDE$.

IV. Mistahes kujuga kujundite sarnasus.

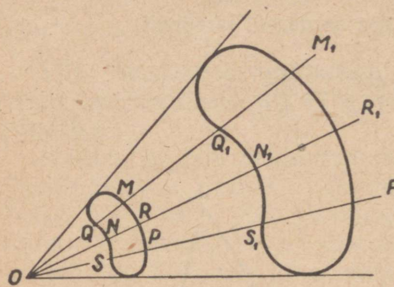
177. Ülaltoodud hulknurkade sarnasusteisenduse meetod annab võimaluse üldistada sarnasuse mõistet juhtumite kohta, kui kujund on piiratud kõverjoontega. Sellist sarnase kujundi joonestamise viisi saab nimelt rakendada ükskõik millise kujundi kohta. Olgu näiteks antud mistahes kujuga tasapinnaline kujund A (joon. 184).

Võtame kujundi tasapinnal mingi punkti O ja ühendame selle punkti sirgetega kujundi A vabalt võetud punktidega M, N, P,... Igale tõmmatud sirgele OM, ON, OP,... paigutame niisugused lõigud OM_1, ON_1, OP_1,..., et

$$\frac{OM_1}{OM}=\frac{ON_1}{ON}=\frac{OP_1}{OP}=\ldots \text{jne.}$$

Punktid M_1, N_1, P_1, ... asetsevad mingil uuel kujundil A_1. Mida enam punkte me võtame kujundil A, seda enam punkte saame ka kujundile A_1.

Selleks et saada kogu kujund A_1, tuleb tõmmata sirged punktist O kõigile kujundi A punktidele ja ehitada nendel sirgetel kujundi A_1 vastavad punktid. Niiviisi joonestatud kujundit A_1 nimetame sarnaseks kujundiga A.



Joon. 184.

Selleks et saada kujund A_1, pole tarviski erijuhtumeil tõmmata kiiri kujundi A kõigile punktidele; piisab sellest, kui joonestada ainult üksikud punktid ja siis, kasutades kujundi A eriomadusi, joonestada kujund A_1. Nii näiteks juhtumil, kui A on hulknurk, piisab sellest, kui ühendada punkt O ainult selle hulknurga tippudega, joonestada sarnase hulknurga tipud ja siis need ühendada sirglõikudega.

Sellist üleminekut kujundilt A kujundile A_1 nimetatakse kujundi A sarnasusteisenduseks. Kujundite sarnasusteisendus on üks tähtsamaid geomeetrilisi teisendusi, mis leiab laialdast rakendust praktikas. Kinos ekraanil näidatav pilt on sarnane filmil kujutatud pildiga; hoonete fassaadide ja plaanide tehnilised joonised, kohtade ja linnade plaanid jne. saadakse sarnasusteisenduse tulemusena.

178. Ringjoonte sarnasus. Tõestame, et kujund, mis on sarnane ringjoonega, on ka ringjoon.

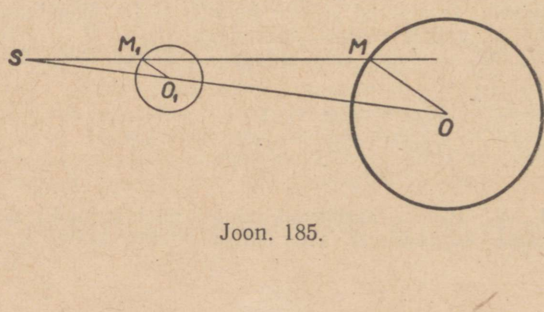
Teoreem. Geomeetriline koht nendele punktidele, mis jaotavad mingi punkti ja ringjoone vahel olevaid kiiri antud suhtes, on ringjoon.

Olgu antud ringjoon, mille raadius on R ja keskpunkt punktis O (joon. 185). Võtame mingi punkti S; ühendanud selle punkti ja punkti O_1 sirgega, jaotame lõigu SO punktis O_1 kaheks osaks suhtes $\frac{SO_1}{SO}=k$.

Võtame antud ringjoonel mingi punkti M ja ühendame selle punktiga S. Lõigul SM leiame niisuguse punkti M_1, et $\frac{SM_1}{SM}=\frac{SO_1}{SO}=k$. Selleks tuleb punktist O_1 tõmmata OM-iga paralleelne sirge, lõikumiseni sirgega SM. Kolmnurkade SOM ja SO_1M_1 sarnasusest järeldub, et $\frac{O_1M_1}{OM}=\frac{SO_1}{SO}$.

Järelikult $\frac{O_1M_1}{OM}=k$. Siit leiame lõigu O_1M_1 **pikkuse:** $O_1M_1=k\cdot OM$ ehk $O_1M_1=k\cdot R$.

Näeme, et suurus M_1O_1 on mingi jääv suurus, mis ei sõltu punkti M asendist antud ringjoonel. Järelikult, kui punkt M muudab oma asendit ringjoonel, siis punkt M_1, liikudes tasapinnal, moodustab ringjoone, mille keskpunktiks on O_1 ja raadiuseks $k\cdot R$.



Joon. 185.

179. Teoreem. Kaht ringjoont tasapinnal võib alati vaadelda kui perspektiiv-sarnaseid kujundeid, kusjuures neil on kaks sarnasuse keskpunkti: üks väline, teine sisemine.

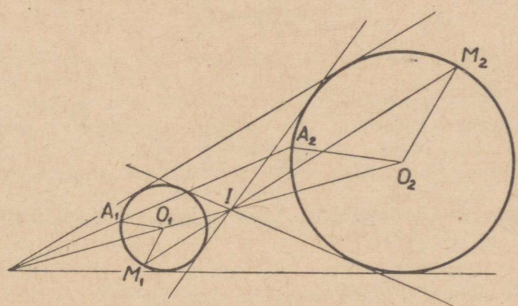
Olgu antud kaks ringjoont keskpunktidega O_1 ja O_2 ja raadiustega R_1 ja R_2 (joon. 186). Tõmbame keskjoone O_1O_2 ja leiame sellel kaks punkti I ja E vastavalt võrdustele

$$\frac{O_1I}{O_2I}=\frac{R_1}{R_2} \text{ ja } \frac{O_1E}{O_2E}=\frac{R_1}{R_2}.$$

On kerge mõista, et punktidel I ja E on sarnasuse keskpunkti omadused. Võtame esimesel ringjoonel mingi punkti M_1, tõmbame sirge IM_1 ja paigutame sellele lõigu IM_2 nii, et $IM_1{:}IM_2=R_1{:}R_2$. $\triangle IO_1M_1 \sim \triangle IO_2M_2$, sest $\angle O_1IM_1 = \angle O_2IM_2$, $\frac{IM_1}{IM_2}=\frac{R_1}{R_2}$ ja $\frac{O_1I}{O_2I}=\frac{R^1}{R_2}$; järelikult $\frac{O_1M_1}{O_2M_2}=\frac{R_1}{R_2}$; et $O_1M_1=R_1$, siis $O_2M_2=R_2$.

See tähendab, et punkt M_2 asetseb teisel ringjoonel. Järelikult on punkt I antud ringjoonte sisemine sarnasuse keskpunkt. Samal viisil saab tõestada, et E on väline sarnasuse keskpunkt.

Punktide I ja E määramist võib teostada nii: tõmbame antud ringjoontes vabalt kaks paralleelset raadiust ja ühendame nende otspunktid; saadud sirge lõikab keskjoont sarnasuse keskpunktis. Seejuures, kui tõmmatud raadiused on suunatud ühele poole (joon. 186, O_1A_1 ja O_2A_2), on sarnasuse keskpunkt väline, kui aga raadiused on suunatud vastaspoole (joon. 186, O_1M_1 ja O_2M_2), siis sar-



Joon. 186.

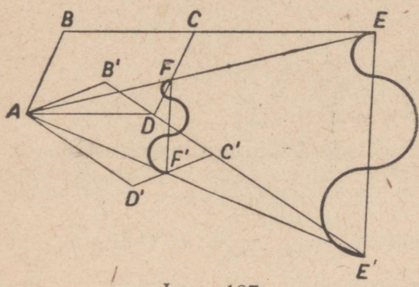
nasuse keskpunkt on sisemine. Ka on selge, et kui ringjooned puutuvad, siis üks sarnasuse keskpunktidest ühtib puutepunktiga. Seejuures, kui ringjoonte puutumine on väline, siis puutepunktis on sisemine sarnasuse keskpunkt, on aga puutumine sisemine, siis puutepunktis on ringjoonte väline sarnasuse keskpunkt.

Harjutusi. 1. Tõestada, et kui kaks ringjoont asetsevad teineteisest väljaspool, siis nende väline sarnasuse keskpunkt ühtib nende ühiste väliste puutujate lõikepunktiga, sisemine sarnasuse keskpunkt ühtib aga nende ühiste seesmiste puutujate lõikepunktiga.

2. Missugune asend peab olema kahel ringjoonel tasapinnal, et nende väline ja sisemine sarnasuse keskpunkt ühtiksid?

Vastus. Ringjooned peavad olema kontsentrilised.

180. Pantograaf. Kujundite sarnasusteisendust võib mehhaaniliselt teostada erilise riista abil, mille leiutajaks oli Christoph Scheiner 1603. a. Leiutaja nimetas riista pantograaliks.



Joon. 187.

Kujutleme rööpkülikut $ABCD$ (joon. 187), mille külgedeks on metallist vardad, mis võivad pöörelda šarniirides tippude ümber. Kinnitame tipu A liikumatult, võtame BC pikendusel mingi punkti E ja joonestame selle punktiga mingi joone EE'. Olgu F sirgete AE ja CD lõikepunkt ja $AB'C'D'$ meie šarniir-rööpküliku uus asend. Et rööpküliku külgede pikkused ja lõikude CE ja CF pikkused ei muutu punkti E liikumisel, siis võime kirjutada järjest võrded:

$$\frac{AD}{CE}=\frac{DF}{FC}=\frac{AF}{FE}\ (\text{sest } \triangle ADF \sim \triangle ECF);\ \frac{AD'}{C'E'}=\frac{D'F'}{F'C'};$$

siit järeldub, et $\triangle AD'F' \sim \triangle E'C'F'$; järelikult $\angle AF'D'=\angle E'F'C'$, s. o. punktid A, F' ja E' asetsevad ühel sirgel. Edasi saame samade kolmnurkade sarnasusest, et $\frac{AF'}{F'E'}=\frac{D'F'}{F'C'}$; aga

$$\frac{D'F'}{F'C'}=\frac{DF}{FC}=\frac{AF}{FE},$$

järelikult

$$\frac{AF'}{F'E'}=\frac{AF}{FE}.$$

Siit järeldub, et kolmnurgad AEE' ja AFF' on sarnased, järelikult $\angle AFF'=\angle AEE'$ ja $EE' \parallel FF'$.

Edasi leiame joonise põhjal:

$$\frac{AF}{FE}=\frac{BC}{CE}\ \text{ja}\ \frac{AF'}{F'E'}=\frac{B'C'}{C'E'}.$$

Koostades liitvõrded, kirjutame:

$$\frac{AF+FE}{AF}=\frac{BC+CE}{BC}\ \text{ja}\ \frac{AF'+F'E'}{AF'}=\frac{B'C'+C'E'}{B'C'}$$

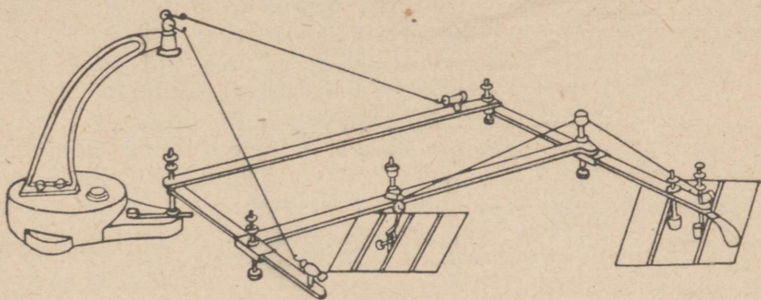
ehk

$$\frac{AE}{AF}=\frac{BE}{BC}\ \text{ja}\ \frac{AE'}{AF'}=\frac{B'E'}{B'C'};$$

aga $BE = B'E'$ ja $BC = B'C'$; järelikult

$$\frac{AE}{AF} = \frac{AE'}{AF'} = \frac{BE}{BC}.$$

Need võrdused näitavad, et kui punkt E joonestab mingi kujundi, siis punkt F joonestab sellega sarnase kujundi, seejuures on nende kujundite sarnasustegur võrdne suhtega $\frac{BE}{BC}$. Kui punkti E kinnitada nõel ja punkti F pliiats, siis nõela vedamisel mööda mõne kujundi kontuuri pliiats joonestab paberile sellega sarnase kujundi kontuuri. Selleks et muuta sarnasustegurit, tuleb punkti E nihutada mööda sirget BC ühele või teisele poole. Sellele šarniir-rööpküliku omadusele ongi rajatud pantograafi ehitus, mille üldkuju on näidatud joonisel 188. Riista kasutatakse plaanide ümberjoonestamisel erisugustes mõõtudes.



Joon. 188.

Väikeste ja kujult lihtsate kujundite sarnasusteisenduseks võib kasutada ka suhtesirklit (§ 166). Selleks tuleb liikuv kruvi kinnitada nii, et sirkli jala pikkus jaotuks suhtes, mis võrdub antud sarnasusteguriga, siis tuleb võtta kujundi sarnasuse keskpunkt ja kiirte abil ühendada sellega kujundi põhipunktid. Igal kiirel tuleb mõõta sama haardega lõik sarnasuse keskpunktist kujundi punkti poole, siis tuleb sirkel ümber pöörata ja samale kiirele paigutada lõik, mis võrdub sirkli teise haardega. Nii võib ümber joonestada antud kujundi kõik põhipunktid ja saada kujund soovitavas suuruses.

Konstrueerimisülesandeid.

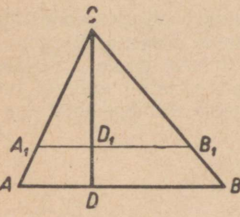
181. Sarnasusmeetod. Paljude konstrueerimisülesannete lahendamisel võib edukalt kasutada kujundite sarnasusteisendust.

Sarnasusmeetod seisab selles, et ülesande mõnede andmete põhjal konstrueeritakse esialgu kujund, mis on sarnane otsitavaga, ja alles siis minnakse üle otsitavale kujundile. See meetod on eriti hõlpus siis, kui on antud ainult üks pikkus, kõik teised antud suurused on aga kas nurgad või joonte suhted. Niisugused on näiteks ülesanded: joonestada kolmnurk, kui on antud üks nurk, üks külg ja kahe teise külje suhe või kui on antud kaks nurka ja mõne lõigu (kõrguse, mediaani, nurgapoolitaja jne.)

pikkus; joonestada ruut, kui on antud diagonaali ja külje summa või vahe jt.

Lahendame näiteks niisuguse ülesande.

Ülesanne 1. *Joonestada kolmnurk, kui on antud selle üks nurk C, selle nurga lähiskülgede suhe $AC:BC$ ja antud nurga tipust tõmmatud kõrgus h* (joon. 189).



Joon. 189.

Olgu $AC:BC=m:n$, kus m ja n on kaks antud lõiku või kaks arvu. Joonestame nurga C, selle haaradele paigutame lõigud CA_1 ja CB_1, mis on võrdelised m ja n-ga. Kui m ja n on lõigud, siis võtame otse $CA_1=m$ ja $CB_1=n$. Kui m ja n on arvud, siis, võtnud mingi lõigu l, joonestame lõigud $CA_1=ml$ ja $CB_1=nl$.

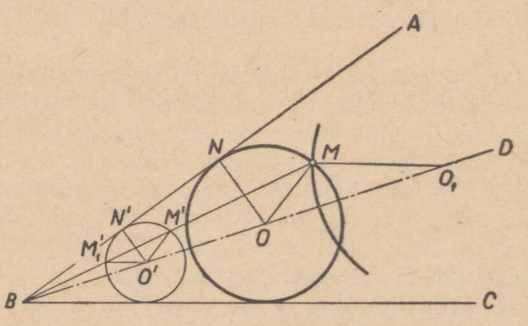
Mõlemal juhul on meil $CA_1:CB_1=$ $=m:n$. On ilmne, et kolmnurk CA_1B_1 on sarnane otsitava kolmnurgaga.

Selleks et saada otsitav kolmnurk, joonestame kolmnurgas CA_1B_1 kõrguse CD_1, tähistades selle h_1-ga. Nüüd valime vabalt sarnasuse keskpunkti ja joonestame kolmnurga, mis on sarnane kolmnurgaga A_1B_1C, kusjuures sarnasusteguri suuruseks on $\frac{h}{h_1}$ (h on otsitava kolmnurga kõrgus). Sel viisil saadud kolmnurk ongi otsitav.

Hõlpsaim on võtta sarnasuse keskpunktiks punkt C. Nüüd on otsitava kolmnurga joonestamine üsna lihtne (joon. 189). Pikendame kolmnurga A_1B_1C kõrgust CD_1, paigutame sellele lõigu CD, mis on võrdne h-ga, ja tõmbame AB paralleelselt A_1B_1-ga.

Kolmnurk ABC ongi otsitav.

Seda laadi ülesannetes jääb otsitava kujundi asend meelevaldseks: mõnikord aga tuleb joonestada kujund, mille asend antud punktide ja joonte suhtes peab olema määratud. Seejuures võib juhtuda, et kõrvaldades ühe asendi tingimuse, saame teiste tingi-



Joon. 190.

muste põhjal lõpmatu palju kujundeid, mis on kõik s a r n a s e d otsitavaga. Sel korral võib sarnasusmeetodit edukalt kasutada. Toome näiteid.

Ü l e s a n n e 2. *Antud nurgasse ABC joonestada ringjoon, mis läbiks antud punkti M* (joon. 190).

Loobume esialgu tingimusest, et ringjoon peab läbima punkti M. Sel juhul rahuldab ülesannet lõpmatu palju ringjooni, mille keskpunktid asetsevad nurgapoolitajal BD. Joonestame neist ühe, näiteks selle, mille keskpunkt on O'. Võtame sellel ringjoonel punkti M', mis v a s t a k s punktile M, s. o. punkti kiirel MB, ja tõmbame raadiuse $M'O'$. Kui nüüd joonestada $MO \| M'O'$, siis punkt O on otsitava ringjoone keskpunkt. Tõepoolest, tõmmates haarale BA ristlõigud ON ja $O'N'$, saame sarnased kolmnurgad MBO ja $M'BO'$, NBO ja $N'BO'$, milledest tuletame: $MO : M'O' = BO : BO'$; $NO : N'O' = BO : BO'$; siit

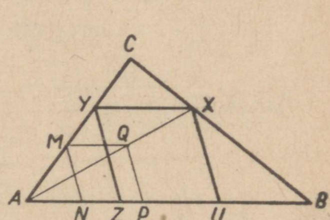
$$MO : M'O' = NO : N'O'.$$

Aga $M'O' = N'O'$; järelikult $MO = NO$, s. t. ringjoon, mis on joonestatud keskpunktist O raadiusega OM, puutub haara AB; et aga selle ringjoone keskpunkt asetseb nurgapoolitajal, siis ta puutub ka haara BC.

Kui vastavaks punktiks võtame kiire MB teise lõikepunkti ringjoonega, nimelt M'_1, siis leiame ka otsitava ringjoone keskpunkti O_1. Järelikult on antud ülesandel kaks lahendust.

Ü l e s a n n e 3. *Antud kolmnurka ABC joonestada antud teravnurgaga romb nii, et üks rombi külgedest asetseks kolmnurga ABC alusel AB, kaks rombi tippu aga kolmnurga haaradel AC ja BC* (joon. 191).

Loobume esialgu nõudest, et üks rombi tippudest asetseks kolmnurga küljel BC. Nüüd saab joonestada lõpmatu palju rombe, mis rahuldavad ülesande teisi nõudeid. Joonestame neist ühe.



Joon. 191.

Võtame küljel AC mingi punkti M. Joonestame selle punkti juurde nurga, mis võrdub rombi antud nurgaga ja mille üks haar on paralleelne alusega AB; selle nurga teine haar lõikab alust AB mingis punktis N. Alusele AB paigutame punktist N lõigu NP, mis on võrdne MN-ga, ja joonestame rombi külgedega MN ja NP. Q on rombi neljas tipp.

Edasi võtame tipu A sarnasuse keskpunktiks ja joonestame rombi, mis on sarnane rombiga $MNPQ$, valides sarnasusteguri nii, et tipule Q vastav uue rombi tipp oleks küljel BC. Selleks pikendame sirget AQ kuni lõikumiseni küljega BC mõnes punktis X. See punkt X on otsitava rombi üheks tipuks.

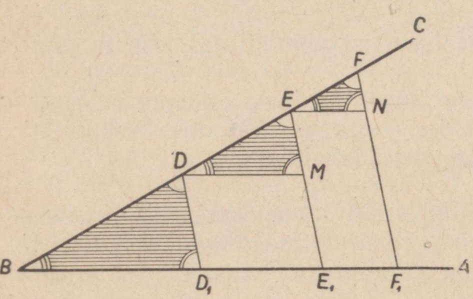
Tõmmates sellest punktist paralleelsed sirged rombi $MNPQ$ külgedele, saame otsitava rombi $XYZU$.

Jätame õpilasil endil sarnasusmeetodiga lahendada järgmised ülesanded.

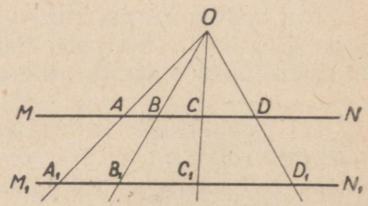
1. Joonestada kolmnurk, kui on antud kaks nurka ja ümberjoonestatud ringjoone raadius.
2. Joonestada kolmnurk, kui on antud kõrguse ja aluse suhe, tipunurk ja haara mediaan.
3. On antud nurk AOB ja selle sees punkt C. Leida haaral OB punkt M, mis oleks võrdsel kaugusel haarast OA ja punktist C.

V. Mõned teoreemid võrdelistest lõikudest.

182. Teoreem. ***Nurga*** (ABC) ***haarade lõikamisel paralleelsete sirgetega*** (DD_1, EE_1, FF_1,...) ***tekivad haaradel võrdelised lõigud*** (joon. 192).



Joon. 192.



Joon. 193.

Tuleb tõestada, et

$$\frac{BD}{BD_1}=\frac{DE}{D_1E_1}=\frac{EF}{E_1F_1}$$

ehk

$$BD : DE = BD_1 : D_1E_1;$$
$$DE : EF = D_1E_1 : E_1F_1 \text{ jne.}$$

Tõmmates paralleelselt BA-ga abisirged DM, EN jne., saame kolmnurgad BDD_1, DEM, EFN jne., mis on sarnased, sest nende nurgad on vastavalt võrdsed (sirgete paralleelsuse tõttu). Nende sarnasusest järeldub, et

$$\frac{BD}{BD_1}=\frac{DE}{DM}=\frac{EF}{EN} \cdot \cdot \cdot \text{ jne.}$$

Selles võrdsete suhete reas asendame lõigu DM lõiguga D_1E_1, lõigu EN lõiguga E_1F_1 jne. (rööpkülikute vastasküljed on võrdsed), ja me saame tulemuse, mida oligi tarvis tõestada.

183. Teoreem. ***Ühest punktist*** (O) ***lähtuvate sirgete*** (OA, OB, $OC, \ldots$) ***lõikamisel kahe paralleelse sirgega tekivad nendel paralleelidel võrdelised lõigud*** (joon. 193).

Tuleb tõestada, et sirge MN lõigud AB, BC, $CD, \ldots$ on võrdelised sirge M_1N_1 lõikudega A_1B_1, B_1C_1, $C_1D_1, \ldots$

Kolmnurkade OAB ja OA_1B_1 (§ 159) ning kolmnurkade OBC ja OB_1C_1 sarnasust tuletame:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BO}{B_1O} \text{ ja } \frac{BO}{B_1O} = \frac{BC}{B_1C_1};$$

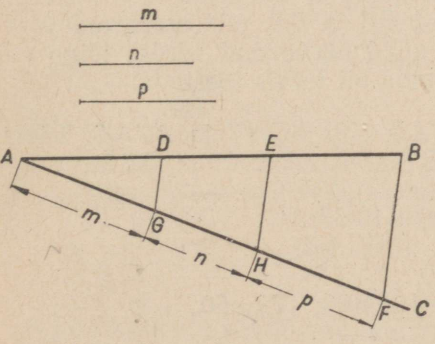
siit

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}.$$

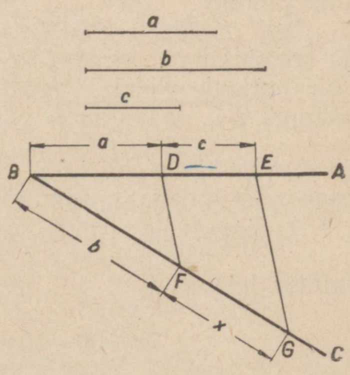
Samuti tõestame ka teiste lõikude võrdelisuse.

184. Ülesanne. *Jaotada sirglõik AB* (joon. 194) *kolmeks osaks suhtes $m : n : p$, kus m, n* ja *p on antud lõigud või antud arvud.*

Tõmmates kiire AC, mis moodustab mistahes nurga lõiguga AB, paigutame sellele punktist A lõigud, mis on võrdsed lõikudega m, n ja p. Punkti F, s. o. lõigu p otspunkti, ühendame punktiga B sirge BF abil ja läbi punktide G ja H tõmbame BF-le paralleelid GD ja HE. Nüüd jaotub lõik AB punktides D ja E osadeks suhtes $m : n : p$.



Joon. 194.



Joon. 195.

Kui m, n ja p on mingid arvud, näiteks 2, 5 ja 3, siis konstruktsioon teostatakse samal viisil, ainult selle vahega, et AC-le paigutatakse lõigud, mis on võrdsed kahe, viie ja kolme vabalt võetud pikkusühikuga.

Muidugi võib kasutada seda joonestusviisi ka sel korral, kui antud lõik tuleb jaotada osadeks, mille arv on kuitahes suur.

185. Ülesanne. *Kolmele antud lõigule a, b ja c leida neljas võrdeline* (joon. 195), *s. o. leida niisugune lõik x, et oleks kehtiv võrre: $a : b = c : x$.*

Paigutame mingi nurga ABC haaradele lõigud: $BD = a$, $BF = b$, $DE = c$. Tõmmates siis läbi D ja F sirge, ehitame $EG \| DF$. Lõik FG on otsitav.

Kolmnurga nurgapoolitaja omadus.

186. Teoreem. *Kolmnurga* (ABC) ***mistahes sisenurga poolitaja*** (BD, joon. 196) ***jaotab vastaskülje osadeks*** (AD ja DC), ***mis on võrdelised selle nurga lähisküljedega.***

Tuleb tõestada, et $AD : DC = AB : BC$, kui $\angle ABD = \angle DBC$. Tõmbame $CE \parallel BD$ kuni lõikumiseni külje AB pikendusega punktis E. Siis on meil vastavalt teoreemile § 182 võrre:

$$AD : DC = AB : BE.$$

Selleks et üle minna saadud võrdelt sellele, mida tuleb tõestada; on küllaldane, kui näidata, et $BE = BC$, s. o. et $\triangle BCE$ on võrdhaarne. Selles kolmnurgas $\angle E = \angle ABD$ (kui kaasnurgad paralleelide juures) ja $\angle BCE = \angle DBE$ (kui põiknurgad samade paralleelide juures).

Aga $\angle ABD = \angle DBC$ eelduse põhjal, tähendab $\angle E = \angle BCE$ ja seepärast on võrdsed ka küljed BC ja BE, mis asetsevad võrdsete nurkade vastas. Asendades nüüd ülaltoodud võrdes lõigu BE lõiguga BC, saame selle võrde, mida oli tarvis tõestada.

Arvuline näide. Olgu $AB = 10$; $BC = 7$ ja $AC = 6$. Tähistades AD tähega x, saame võrde

$$x : (6 - x) = 10 : 7,$$

millest leiame,

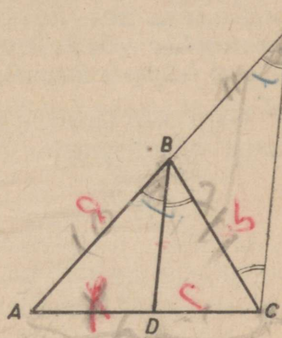
$$7x = 60 - 10x; \; 7x + 10x = 60; \; 17x = 60;$$

$$x = \frac{60}{17} = 3\frac{9}{17}.$$

Järelikult

$$DC=6-x=6-3\,\frac{9}{17}=2\,\frac{8}{17}.$$

187. **Teoreem** (mis väljendab kolmnurga välisnurga poolitaja omadust). ***Kolmnurga*** (ABC) ***välisnurga*** (CBF) ***poolitaja*** (BD, joon. 197) ***lõikab vastaskülje*** (AC) ***pikendust niisuguses punktis*** (D), ***mille kaugused selle külje otspunktidest*** (DA ja DC) ***on võrdelised lähisküljedega*** (AB ja BC).



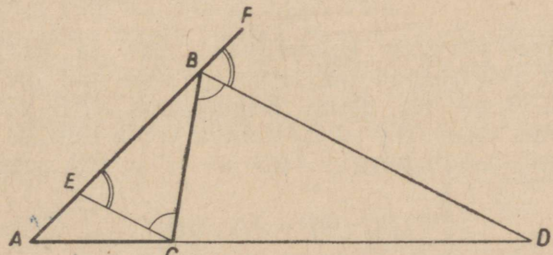
Joon. 196.

Tuleb tõestada, et $DA:DC=AB:BC$, kui $\angle CBD=\angle FBD$.

Tõmmates $CE \parallel BD$, saame võrde:

$$DA:DC=AB:BE.$$

Et $\angle BEC=\angle FBD$ (kui kaasnurgad paralleelide juures) ja $\angle BCE=\angle CBD$ (kui põiknurgad paralleelide juures) ja nurgad FBD ja CBD on võrdsed eelduse põhjal, siis $\angle BEC=\angle BCE$;



Joon. 197.

seega $\triangle BCE$ on võrdhaarne, s. t. $BE=BC$. Asendades võrdes lõigu BE lõiguga BC, saame selle võrde, mida oligi tarvis tõestada:

$$DA:DC=AB:BC.$$

Märkus. Erijuhtumit kujutab võrdhaarse kolmnurga tipu juures olev välisnurga poolitaja, mis on paralleelne kolmnurga alusega.

VI. Meetrilised seosed kolmnurga ja mõnede teiste kujundite elementide vahel.

188. Teoreem. ***Täisnurkse kolmnurga hüpotenuusile joonestatud kõrgus on keskmine võrdeline lõikudega, milledeks see kõrgus jaotab hüpotenuusi, ja kaatet on keskmine võrdeline hüpotenuusi ja selle kaateti juures oleva hüpotenuusi lõiguga.***

Olgu AD (joon. 198) kõrgus, mis on tõmmatud täisnurga A tipust hüpotenuusile BC. Tuleb tõestada kolm järgmist võrret:

$$1)\ \frac{BD}{AD}=\frac{AD}{DC};\quad 2)\ \frac{BC}{AB}=\frac{AB}{BD};\quad 3)\ \frac{BC}{AC}=\frac{AC}{DC}.$$

Esimest võrret meie tõestame kolmnurkade ABD ja ADC sarnasuse põhjal. Need kolmnurgad on sarnased, sest

$$\angle 1=\angle 4 \text{ ja } \angle 2=\angle 3$$

(haarad on vastavalt risti, § 80). Võtame kolmnurgas ABD küljed BD ja AD, mis moodustavad tõestatava võrde esimese suhte; kolmnurgas ADC on vastavaiks külgedeks AD ja DC[1], seepärast

$$BD:AD=AD:DC.$$

Teist võrret tõestame kolmnurkade ABC ja ABD sarnasuse põhjal. Need kolmnurgad on sarnased, sest nad on täisnurksed ja teravnurk B on neil ühine. Kolmnurgas ABC võtame küljed BC ja AB, mis moodustavad tõestatava võrde esimese suhte; vastavaiks külgedeks kolmnurgas ABD on AB ja BD, seepärast

$$BC:AB=AB:BD.$$

Kolmanda võrde tõestame kolmnurkade ABC ja ADC sarnasuse põhjal. Need kolmnurgad on sarnased, sest nad on mõlemad täisnurksed ja neil on ühine teravnurk C. Kolmnurgas ABC võtame küljed BC ja AC; vastavateks külgedeks kolmnurgas ADC on küljed AC ja DC, seepärast $BC:AC=AC:DC$.

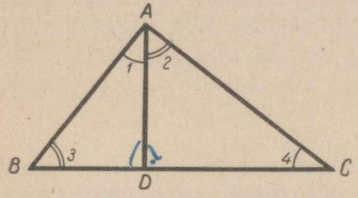
---

[1] Et eksimatult otsustada, millised küljed võetud kolmnurkades on vastavad, on kasulik toimida järgmiselt:

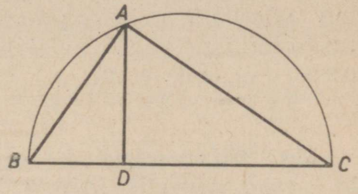
1) näidata nurgad, mille vastas asetsevad ühes kolmnurgas võetud küljed;
2) leida vastavalt võrdsed nurgad teises kolmnurgas;
3) võtta nende nurkade vastasküljed.

Näiteks kolmnurkade ABD ja ADC puhul arutame nii: kolmnurgas ABD on küljed BD ja AD nurkade *1* ja *3* vastas; kolmnurgas ADC võrduvad nende nurkadega nurgad *4* ja *2*; nende nurkade vastas on küljed AD ja DC. Tähendab, külgedele BD ja AD vastavad küljed on AD ja DC.

189. Järeldus. Olgu A (joon. 199) mingi punkt ringjoonel, millest on joonestatud diameetrile BC ristjoon. Ühendanud diameetri otspunktid selle punktiga, saame täisnurkse kolmnurga ABC,



Joon. 198.



Joon. 199.

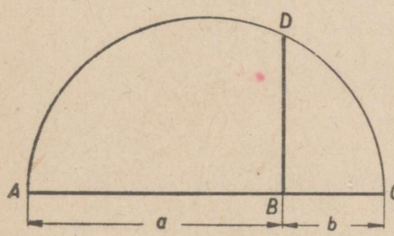
milles hüpotenuusiks on diameeter, kaatetiteks aga kõõlud (§ 115, 2). Rakendades eespool tõestatud teoreemi selle kolmnurga kohta, tuleme järgmisele järeldusele:

ristlõik, mis on tõmmatud ringjoone mingist punktist diameetrile, on keskmine võrdeline diameetri lõikudega, milledeks see ristlõik jaotab diameetri, ja kõõl, mis ühendab seda punkti diameetri otspunktiga, on keskmine võrdeline diameetri ja selle kõõlu juures oleva diameetri lõiguga.

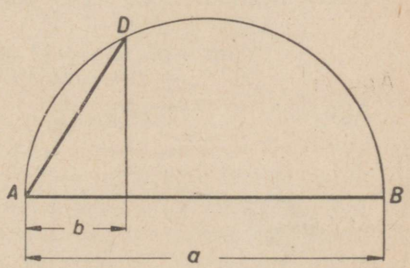
190. Ülesanne. *Joonestada lõik, mis oleks antud lõikude a ja b keskmine võrdeline.*

Ülesannet võib lahendada kahel viisil.

1) Paigutame meelevaldselt võetud sirgele (joon. 200) lõigud $AB=a$ ja $BC=b$; võtame AC diameetriks ja joonestame poolringjoone; punktist B tõmbame AC-le ristlõigu BD kuni lõikumiseni ringjoonega. See ristlõik ongi lõikude a ja b otsitav keskmine võrdeline.



Joon. 200.



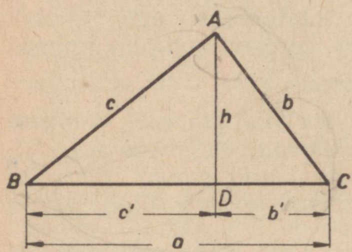
Joon. 201.

2) Paigutame meelevaldselt võetud sirgele (joon. 201) punktist A lõigud a ja b. Suurema lõigu võtame diameetriks ja joonestame poolringjoone. Tõmmanud väiksema lõigu otspunktist AB-le ristlõigu kuni lõikumiseni ringjoonega punktis D, ühendame

punktid A ja D. Kõõl AD ongi lõikude a ja b otsitav keskmine võrdeline.

191. Pythagorase teoreem. Eespool tõestatud teoreemid lubavad püstitada tähelepanuväärse seose mistahes täisnurkse kolmnurga külgede vahel. Selle seose avastas kreeka matemaatik Pythagoras (VI saj. e. m. a.) ja seepärast nimetatakse seda seost Pythagorase teoreemiks.

Kui täisnurkse kolmnurga küljed on mõõdetud ühe ja sama mõõtühikuga, siis hüpotenuusi pikkuse ruut võrdub kaatetite pikkuste ruutude summaga.



Joon. 202.

Olgu ABC (joon. 202) täisnurkne kolmnurk, AD on ristlõik, mis on tõmmatud täisnurga tipust hüpotenuusile. Oletame, et kolmnurga küljed ja hüpotenuusi lõigud on mõõdetud ühe ja sama mõõtühikuga ja seejuures on saadud arvud a, b, c, c' ja b' (kokkuleppe põhjal tähistatakse kolmnurga külgi väikeste tähtedega, vastavalt suurtele tähtedele, millega tähistatakse vastasnurki). Rakendades teoreemi § 188, võime kirjutada võrded:

$$a : c = c : c' \text{ ja } a : b = b : b';$$

siit

$$ac' = c^2 \text{ ja } ab' = b^2.$$

Liites liikmeti need kaks võrdust, saame:

$$ac' + ab' = c^2 + b^2 \text{ ehk } a(c' + b') = c^2 + b^2.$$

Aga et

$$c' + b' = a,$$

siis

$$a^2 = c^2 + b^2.$$

Seda teoreemi sõnastatakse harilikult lühendatult nii: ***hüpotenuusi ruut võrdub kaatetite ruutude summaga.***

Näide. Oletame, et kaatetid, mis on mõõdetud mingi ühikuga, väljenduvad arvudega 3 ja 4; siis hüpotenuus, mõõdetuna sama ühikuga, väljendub arvuga x, mis rahuldab võrrandit: $x^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$, millest $x = \sqrt{25} = 5$.

M ä r k u s. Täisnurkset kolmnurka külgedega 3, 4 ja 5 nimetatakse **egiptuse** kolmnurgaks, sest seda tundsid juba vanad egiptlased. Seal kasutasid maamõõtjad seda kolmnurka täisnurga ehitamiseks maapinnal. Võte oli järgmine: köis oli jaotatud sõlmedega kaheteistkümneks võrdseks osaks; pärast köie otste ühendamist anti köiele teivaste abil kolmnurga kuju. Külgedeks olid 3, 4 ja 5 jaotust; nurk, mis on külgede 3 ja 4 vahel, on täisnurk [1].

Pythagorase teoreemi võib sõnastada ka veel nii, nagu seda tegi Pythagoras ise. Selle sõnastusega tutvume hiljem (§ 257).

192. J ä r e l d u s. *Kaatetite ruudud suhtuvad nagu nendele kaatetitele vastavad hüpotenuusi lõigud.*

Tõepoolest, eelmise paragrahvi võrrandite põhjal leiame:

$$c^2 : b^2 = ac' : ab' = c' : b'.$$

193. M ä r k u s. 1. Kolmele eespool saadud võrdusele:

$$1)\ ac' = c^2,\quad 2)\ ab' = b^2 \text{ ja } 3)\ a^2 = b^2 + c^2$$

võime lisada veel järgmised kaks:

$$4)\ b' + c' = a \text{ ja } 5)\ h^2 = b'c'$$

(h-ga on tähistatud kõrgus AD). Neist võrdustest on kolmas, nagu nägime, kahe esimese ja neljanda järeldus, nii et viiest võrdusest on sõltumatuid võrdusi neli; seepärast ongi võimalik kahe antud suuruse põhjal kuuest leida ülejäänud neli.

Näiteks oletame, et on antud hüpotenuusi lõigud $b' = 5$ m ja $c' = 7$ m; siis:

$$a = b' + c' = 12;\quad c = \sqrt{ac'} = \sqrt{12 \cdot 7} = \sqrt{84} = 9{,}165\ldots$$

$$b = \sqrt{ab'} = \sqrt{12 \cdot 5} = \sqrt{60} = 7{,}745\ldots$$

$$h = \sqrt{b'c'} = \sqrt{5 \cdot 7} = \sqrt{35} = 5{,}916\ldots$$

M ä r k u s 2. Järgmistes teoreemides räägime lühidalt: «külje ruut» sõnade «külje pikkust väljendava mõõtarvu ruut» asemel või «lõikude korrutis» sõnade «lõikude pikkust väljendavate mõõtarvude korrutis» asemel. Seejuures eeldame, et lõigud on mõõdetud ühe ja sama ühikuga.

---

[1] Täisnurkseid kolmnurki, mille külgede mõõtarvudeks on t ä i s a r v u d, nimetatakse **Pythagorase** kolmnurkadeks. Võib tõestada, et selliste kolmnurkade kaatetid x ja y ning hüpotenuus z on seotud järgmiste valemitega:

$$x = 2ab,\quad y = a^2 - b^2,\quad z = a^2 + b^2,$$

kus a ja b on vabalt võetud täisarvud tingimusel, et $a > b$.

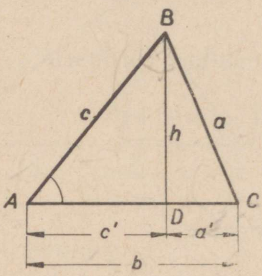
194. Teoreem. ***Igas kolmnurgas teravnurga vastaskülje ruut võrdub kahe teise külje ruutude summaga, millest on lahutatud ühe külje kahekordne korrutis selle külje lõiguga teravnurga tipust kuni kõrguse aluseni.***

Olgu kolmnurgas ABC (joon. 203 ja 204) külg BC teravnurga A vastaskülg ja BD kõrgus, mis on tõmmatud ühele ülejäänud külgedest, näiteks küljele AC (või AC pikendusele). Tuleb tõestada, et

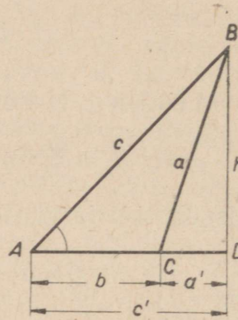
a c b h d

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot AD$$

või tähistades lõikude pikkused väikeste tähtedega, nagu näidatud joonisel: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc'$.



Joon. 203.



Joon. 204.

Täisnurksest kolmnurgast BDC leiame:

$$a^2 = h^2 + (a')^2. \qquad (1)$$

Määrame mõlemad ruudud h^2 ja $(a')^2$. Täisnurksest kolmnurgast BAD leiame:

$$h^2 = c^2 - (c')^2. \qquad (2)$$

Teiselt poolt, $a' = b - c'$ (joon. 203) või $a' = c' - b$ (joon. 204). Mõlemal juhtumil saame, et $(a')^2$ võrdub sama avaldisega:

$$(a')^2 = (b - c')^2 = b^2 - 2bc' + (c')^2;$$
$$(a')^2 = (c' - b)^2 = (c')^2 - 2bc' + b^2. \qquad (3)$$

Nüüd omab võrdus (1) kuju:

$$a^2 = c^2 - (c')^2 + b^2 - 2bc' + (c')^2 = c^2 + b^2 - 2bc'.$$

195. Teoreem. ***Igas kolmnurgas nürinurga vastaskülje ruut võrdub kahe teise külje ruutude summaga, millele***

on liidetud ühe külje kahekordne korrutis selle külje lõiguga nürinurga tipust kõrguse aluseni.

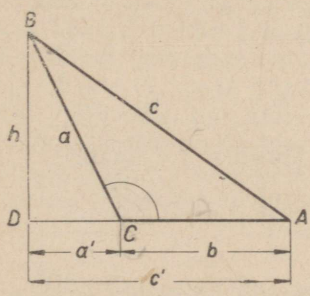
Olgu kolmnurgas ABC (joon. 205) külg AB nürinurga C vastas ja BD kõrgus, mis on tõmmatud ühe ülejäänud külje, näiteks AC pikendusele; tuleb tõestada, et

$$AB^2=AC^2+BC^2+2AC\cdot CD$$

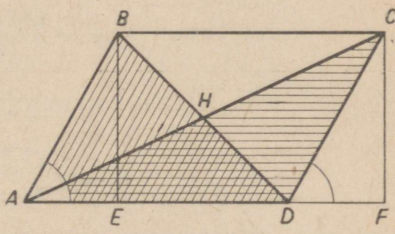
või kasutades lühendatud tähistusi vastavalt joonisele:

$$c^2=a^2+b^2+2ba'.$$

Kolmnurkadest ABD ja CBD leiame: $c^2=h^2+(c')^2=a^2-(a')^2+ +(a'+b)^2=a^2-(a')^2+(a')^2+2ba'+b^2=a^2+b^2+2ba'$, mida oligi tarvis tõestada.



Joon. 205.



Joon. 206.

196. Järeldus. Kolmest viimasest teoreemist järeldame, et *kolmnurga külje ruut võrdub, on väiksem või on suurem kahe teise külje ruutude summast vastavalt sellele, kas selle külje vastasnurk on täisnurk, teravnurk või nürinurk; siit järeldub pöördteoreem:*

kolmnurga nurk on kas täisnurk, teravnurk või nürinurk vastavalt sellele, kas selle nurga vastaskülje ruut võrdub, on väiksem või on suurem kahe ülejäänud külje ruutude summast.

197. Teoreem. ***Rööpküliku diagonaalide ruutude summa võrdub tema külgede ruutude summaga.***

Tõmbame rööpküliku $ABCD$ tippudest B ja C (joon. 206) alusele AD ristlõigud BE ja CF. Kolmnurkadest ABD ja ACD leiame:

$$BD^2=AB^2+AD^2-2AD\cdot AE;$$
$$AC^2=AD^2+CD^2+2AD\cdot DF.$$

Täisnurksed kolmnurgad ABE ja DCF on võrdsed, sest neis on võrdsed hüpotenuusid ja üks paar võrdseid teravnurki; siit järeldub, et $AE=DF$.

Liites nüüd liikmeti need kaks võrdust, siis $-2AD \cdot AE$ ja $+2AD \cdot DF$ koonduvad ja me saame:

$$BD^2+AC^2=AB^2+AD^2+AD^2+CD^2=$$
$$=AB^2+BC^2+CD^2+AD^2.$$

198. Kolmnurga kõrguste määramine tema külgede kaudu. Määrame kolmnurga ABC kõrguse h_a, mis on tõmmatud küljele $BC=a$ (joon. 207 ja 208).

Tähistame külje a (mis nürinurga C puhul on pikendatud, joon. 208) lõigud järgmiselt: lõigu BD c'-ga ja lõigu DC b'-ga.

Rakendades teoreemi kolmnurga teravnurga vastaskülje kohta (§ 194), saame:

$$b^2=a^2+c^2-2ac'.$$

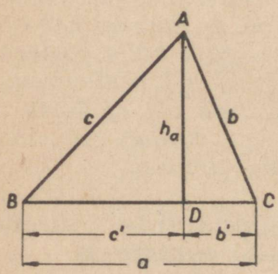
Sellest võrrandist leiame lõigu c':

$$c'=\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}.$$

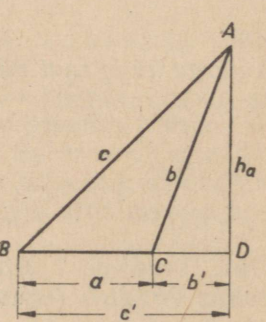
Pärast seda leiame kolmnurgast ABD kõrguse kui kaateti:

$$h_a=\sqrt{c^2-\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)^2}.$$

Samuti võib leida kolmnurga külgede kaudu kõrgused h_b ja h_c, mis on tõmmatud külgedele b ja c.



Joon. 207.



Joon. 208.

VII. Võrdelised lõigud ringis.

199. Mõnede võrdeliste lõikudega ringis tutvusime juba varem (§ 189); nüüd tutvume veel mõnede teistega.

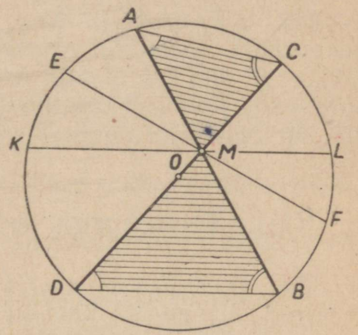
Teoreem. ***Kui läbi ringi sees võetud punkti*** (M, joon. 209) ***tõmmata mingi kõõl*** (AB) ***ja diameeter*** (CD)***, siis kõõlu lõikude korrutis*** ($AM \cdot MB$) ***võrdub diameetri lõikude korrutisega*** ($MD \cdot MC$).

Tõmmates kaks abikõõlu AC ja BD, saame kaks kolmnurka: AMC ja MBD (joonisel viirutatud), mis on sarnased, sest neis on nurgad A ja D võrdsed kui piirdenurgad, mis toetuvad ühele ja samale kaarele BC, ja nurgad C ja B on võrdsed kui piirdenurgad, mis toetuvad ühele ja samale kaarele AD. Kolmnurkade sarnasusest saame:

$$AM : MD = MC : MB,$$

millest

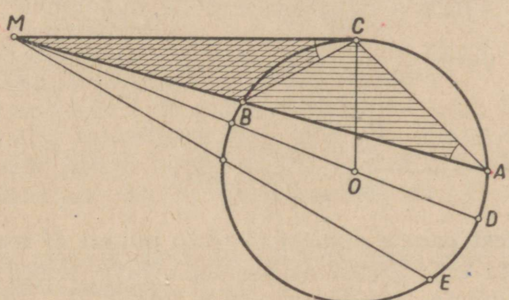
$$AM \cdot MB = MD \cdot MC.$$



Joon. 209.

200. Järeldus. *Kui läbi ringi sees võetud punkti* (M, joon. 209) *on tõmmatud mistahes arv kõõle* (AB, EF, KL, ...), *siis iga kõõlu lõikude korrutis on jääv arv kõikide kõõlude kohta*, sest iga kõõlu kohta on see korrutis võrdne läbi punkti M mineva diameetri CD lõikude korrutisega.

201. Teoreem. ***Kui väljaspool ringi võetud punktist*** (M, joon. 210) ***on ringile tõmmatud mingi lõikaja*** (MA) ***ja***



Joon. 210.

puutuja (MC)***, siis lõikaja korrutis oma välise osaga võrdub puutuja ruuduga*** (siin eeldatakse, et lõikaja on piiratud teise lõikepunktiga ja puutuja on piiratud puutepunktiga).

Tõmbame abikõõlud AC ja BC; saame kaks kolmnurka: MAC ja MBC (joonisel viirutatud), mis on sarnased, sest neil on ühine nurk M ning nurgad MCB ja CAB on võrdsed, sest kumbagi neist mõõdab pool kaarest BC. Võtame kolmnurgas MAC küljed MA ja MC; neile vastavaiks külgedeks kolmnurgas MBC on MC ja MB; seepärast

$$MA : MC = MC : MB,$$

millest

$$MA \cdot MB = MC^2.$$

202. Järeldus. *Kui väljaspool ringi võetud punktist* (M, joon. 210) *tõmmata ringile mistahes arv lõikajaid* (MA, MD, ME, ...), *siis iga lõikaja korrutis oma välise osaga on kõigi lõikajate kohta jääv arv*, sest iga lõikaja puhul võrdub see korrutis punktist M tõmmatud puutuja ruuduga (MC^2).

VIII. Teravnurga trigonomeetrilised funktsioonid.

203. Definitsioonid. Olgu α mingi teravnurk (joon. 211). Võtame selle nurga ühel haaral mingi punkti M ja tõmbame sellest nurga teisele haarale ristlõigu MN. Saame täisnurkse kolmnurga BMN. Võtame selle kolmnurga külgede suhted paarikaupa, ja nimelt:

$\frac{MN}{BM}$, s. o. nurga α vastaskaateti suhe hüpotenuusiga,

$\frac{BN}{BM}$, s. o. nurga α lähiskaateti suhe hüpotenuusiga,

$\frac{MN}{BN}$, s. o. nurga α vastaskaateti suhe lähiskaatetiga ja nende pöördsuhted:

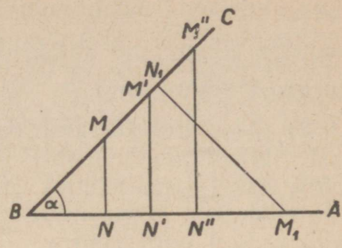
$$\frac{BM}{MN}, \quad \frac{BM}{BN}, \quad \frac{BN}{MN}.$$

Ükski nendest kuuest suhtest ei sõltu punkti M asendist haaral BC. Tõepoolest, kui punkti M asemel võtta teised punktid M', M'', ... ja tõmmata ristlõigud $M'N'$, $M''N''$, ... siis tekkinud kolmnurgad $BM'N'$, $BM''N''$, ... on sarnased kolmnurgaga BMN, sest kolmnurkade vastavad nurgad on võrdsed. Et aga sarnastes kolmnurkades vastavad küljed on võrdelised, siis

$$\frac{MN}{BN} = \frac{M'N'}{BN'} = \frac{M''N''}{BN''} = \ldots \text{ jne.}$$

$$\frac{BN}{MN} = \frac{BN'}{M'N'} = \frac{BN''}{M''N''} = \ldots \text{ jne.}$$

Ühegi võetud suhte suurus ei sõltu ka sellest, millisel nurga haaral on punkt M võetud. Kui näiteks võtame haaral BA punkti M_1 (sama joonis) ja tõmbame $M_1N_1 \perp BC$, siis kolmnurk BM_1N_1 on samuti sarnane kolmnurgaga BMN, sest neil on kaks paari võrdseid nurki, nimelt täisnurgad ja nurk α, mis esineb nii ühes kui ka teises kolmnurgas; seepärast



Joon. 211.

$$\frac{M_1N_1}{BM_1} = \frac{MN}{BM} = \ldots \text{ jne.}$$

Seega meie poolt võetud suhted ei muutu punkti M asendi muutumisel nurga α ühel või teisel haaral, kuid muutuvad muidugi nurga suuruse muutumisel.

Seejuures nurga igale suurusele vastab iga suhte täiesti määratud väärtus.

Seepärast võime ütelda, et iga suhe on ainult nurga **funktsioon** ja määrab nurga suuruse.

Nimetatud suhteid nimetatakse **nurga trigonomeetrilisteks funktsioonideks.** Neist kuuest suhtest kasutatakse kõige rohkem järgmist nelja, millele on antud erinimetused ja eritähised:

nurga α vastaskaateti suhet hüpotenuusiga nimetatakse nurga α ***siinuseks*** ja tähistatakse: $\sin \alpha$;

nurga α lähiskaateti suhet hüpotenuusiga nimetatakse nurga α ***koosinuseks*** ja tähistatakse: $\cos \alpha$;

nurga α vastaskaateti suhet lähiskaatetiga nimetatakse nurga α ***tangensiks*** ja tähistatakse: $\operatorname{tg} \alpha$ või $\tan \alpha$;

nurga α lähiskaateti suhet vastaskaatetiga nimetatakse nurga α ***kootangensiks*** ja tähistatakse: $\operatorname{ctg} \alpha$ või $\cot \alpha$.

Et kumbki kaatetitest on väiksem hüpotenuusist, siis iga nurga siinus ja koosinus on väiksem 1-st, ja et üks kaatet võib olla suurem või väiksem teisest kaatetist või võrdne teise kaatetiga, siis tangens ja kootangens võivad olla suuremad või väiksemad 1-st või võrdsed 1-ga.

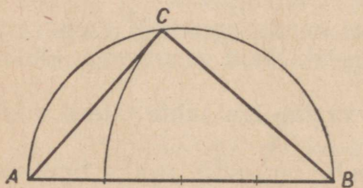
204. Nurga joonestamine, kui on antud üks selle nurga trigonomeetrilistest funktsioonidest.

1) Olgu vaja joonestada nurk, mille siinus on $\frac{3}{4}$. Selleks tuleb joonestada niisugune täisnurkne kolmnurk, mille ühe kaateti suhe hüpotenuusiga on $\frac{3}{4}$, ja võtta see nurk, mis on selle kaateti vastas. Kolmnurga joonestamiseks võtame mingi lühikese lõigu ja ehitame lõigu AB (joon. 212), mis võrdub nelja võetud lõigu pikkusega. Lõigu AB võtame diameetriks ja joonestame poolringjoone. Nüüd võtame punkti B keskpunktiks ja joonestame kaare raadiu-

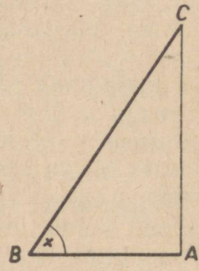
sega, mis on $\frac{3}{4}$ hüpotenuusist. Selle kaare lõikepunkti poolringjoonega ühendame punktidega A ja B, saame kolmnurga, milles nurga A siinus ongi $\frac{3}{4}$.

2) On antud võrrand: $\cos x = 0{,}7$; joonestada nurk x. Selle ülesande lahendame samuti kui eelnevagi: hüpotenuusiks võtame lõigu AB (sama joonis), mille pikkus on 10 mingit võrdset osa, kaatetiks aga lõigu, mille pikkus on 7 sama osa; siis selle kaateti lähisnurk A ongi otsitav.

3) Joonestada nurk x, kui $\tan x = 1\frac{1}{2}$.



Joon. 212.



Joon. 213.

Selleks tuleb ehitada niisugune täisnurkne kolmnurk, mille üks kaatet oleks $1\frac{1}{2}$ korda suurem teisest kaatetist. Joonestanud täisnurga (joon. 213), asetame selle nurga ühele haarale meelevaldselt võetud pikkusega lõigu AB, teisele haarale aga lõigu AC, mis võrdub $1\frac{1}{2}$ AB-ga. Ühendanud punktid B ja C, saame nurga B, mille tangens on $1\frac{1}{2}$.

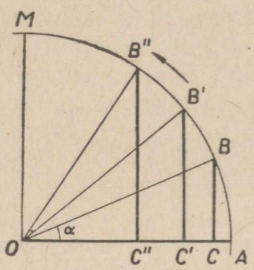
Samal viisil tuleb toimida, kui soovitakse joonestada nurk antud kootangensi kaudu; otsitavaks nurgaks on siis see nurk, mille lähiskaatetiks on AC.

205. Trigonomeetriliste funktsioonide muutumine nurga muutumisel 0°-st kuni 90°-ni. Selleks et oleks hõlpsam jälgida siinuse ja koosinuse muutumist nurga muutumisel, oletame, et sellel muutumisel hüpotenuusi pikkus, mis võrdub ühe pikkusühikuga, ei muutu, muutuvad ainult kaatetid. Joonestame raadiusega OA (joon. 214), mis võrdub meelevaldselt võetud pikkusühikuga, veerandi ringjoonest AM ja võtame selles mingi kesknurga $AOB = \alpha$. Joonestades punktist B raadiusele OA ristlõigu BC, saame:

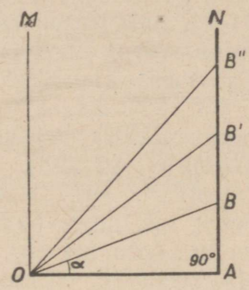
$$\sin \alpha = \frac{BC}{OB} = \frac{BC}{1} = BC \text{ arvulise väärtusega;}$$

$$\cos \alpha = \frac{OC}{OB} = \frac{OC}{1} = OC \text{ arvulise väärtusega.}$$

Kujutleme, et raadius OB pöörleb ümber keskpunkti O joonisel noolega näidatud suunas, alates asendist OA kuni asendini OM. Nüüd suureneb nurk 0°-st kuni 90°-ni (läbistades joonisel näidatud väärtused AOB, AOB', AOB'' jne.); nurga vastaskaateti BC arvuline väärtus suureneb nullist (kui $\alpha=0°$) kuni üheni (kui $\alpha=90°$); kaateti OC arvuline väärtus aga väheneb ühest (kui $\alpha=0°$) kuni nullini (kui $\alpha=90°$). Seega: **nurga suurenemisel 0°-st kuni 90°-ni tema siinus suureneb 0-st kuni 1-ni ja koosinus väheneb 1-st kuni 0-ni.**



Joon. 214.



Joon. 215.

Jälgime nüüd tangensi muutumist. Et nurga tangens on nurga vastaskaateti suhe lähiskaatetiga, siis on hõlpsam oletada, et teravnurga suurenemisel lähiskaatet jääb võrdseks pikkusühikuga, vastaskaatet aga muutub. Võtame lõigu OA, mis on võrdne pikkusühikuga (joon. 215), ja vaatame sellele kui kolmnurga AOB muutumatule kaatetile. Kolmnurga nurk $AOB=\alpha$ muutub.

Vastavalt definitsioonile $\tan\alpha=\frac{AB}{OA}=\frac{AB}{1}=AB$ arvulise väärtusega.

Nihutame nüüd punkti B mööda sirget AN, alates punktist A, üha kõrgemale läbi asendite B', B'', ... jne.; siis, nagu näha joonisest, nurk α ja selle tangens suurenevad; kui seejuures liikuv punkt B ühtib punktiga A, on nurk $\alpha=0°$ ja ka nurga tangens on null. Kui punkt B tõuseb mööda sirget AN üha kõrgemale, nurk α suureneb, püüdes saada nurgaks $AOM=90°$, ja tangensi arvuline väärtus suureneb samuti, seejuures võib ta ilmselt saada suuremaks mistahes suurest arvust (kasvab piiramatult). Tähendab, **nurga suurenemisel 0°-st kuni 90°-ni tema tangens kasvab piiramatult.**

Väljenduse «muutuv suurus kasvab piiramatult» asemel öeldakse, et «muutuv suurus kasvab lõpmatuseni». Sõna «lõpmatus» väljendatakse sümboliga ∞. Tangensi muutumist võib seega väljendada järgmiselt: nurga suurenemisel 0°-st kuni 90°-ni tangens suureneb 0-st kuni ∞ -ni.

Kootangensi definitsioonist (§ 203) järeldub, et kootangens on tangensi pöördsuurus ($\cot \alpha = 1 : \tan \alpha$) ja seepärast, kui $\tan \alpha$ kasvab 0-st ∞-ni, siis $\cot \alpha$ väheneb ∞-st kuni 0-ni.

206. Trigonomeetriliste funktsioonide tabel. Selle raamatu lõppu on lisatud tabel, mis sisaldab trigonomeetrilised funktsioonid (täpsusega kuni neljanda kümnendkohani) kõigi täisarv-kraadiliste nurkade jaoks 0°-st kuni 90°-ni. Tabel on koostatud nii: esimeses veerus vasakult (mille pealkirjaks on «kraadid») on paigutatud kraadid: 0°, 1°, 2°, 3°,... kuni 45°; teises veerus (pealkirja all «siinused») on paigutatud esimeses veerus olevate nurkade siinused; kolmandas veerus on koosinused, siis tangensid ja siis kootangensid. Viimases, kuuendas veerus on paigutatud jälle kraadid, nimelt: 90°, 89°, 88°, 87°,... jne. kuni 45°. See on tehtud (ruumi kokkuhoiu mõttes) sel alusel, et vastavalt siinuse ja koosinuse definitsioonile (§ 203) $\sin \alpha = \cos (90° - \alpha)$, $\cos \alpha = \sin (90° - \alpha)$ jne., tähendab, $\sin 1° = \cos 89°$, $\sin 2° = \cos 88°$ jne. Seepärast on selle veeru all, mille peal on sõna «siinused», trükitud «koosinused»; selle veeru all (3. vasakult), mille peal on märgitud «koosinused», seisavad «siinused» jne. Seega nurkade jaoks 0°-st kuni 45°-ni tuleb kraadid võtta esimeses veerus vasakult, trigonomeetriliste funktsioonide nimetused veergude pealt, nurkade jaoks 45°-st kuni 90°-ni tuleb kraadid võtta viimases veerus paremalt, funktsioonide nimetused aga veergude alt. Näiteks leiame tabelist: $\tan 35° = 0{,}7002$, $\cos 53° = 0{,}6018$, $\tan 72° = 3{,}0777$ jne.

Sellise tabeli abil võime leida mitte ainult antud nurga trigonomeetrilise funktsiooni, vaid ka ümberpöördult: nurga trigonomeetrilise funktsiooni põhjal võime leida ka sellele vastava nurga (ligikaudu). Olgu näiteks tarvis leida nurk x, kui on teada, et $\sin x = 0{,}6152$. Otsime siinuste veergudes arvu, mis on võimalikult lähedal 0,6152-le. Niisuguseks arvuks on 0,6157, mis on $\sin 38°$. Et $0{,}6152 < 0{,}6157$, siis $x < 38°$. Aga teiselt poolt $0{,}6152 > 0{,}6018$ (tabelis asetseb viimane arv arvu 0,6157 peal ja on $\sin 37°$); seepärast $x > 37°$. Me leidsime niiviisi kaks nurka: 37° ja 38°, mille vahel on nurk x. Tähendab, kui võtta x asemel nurk 37° või nurk 38°, siis esimesel juhtumil leiame ligikaudse x väärtuse puuduga, teisel juhtumil liiaga, nii ühel kui teisel juhul on täpsus kuni 1°. Neist nurkadest tuleb eelistada seda, mille siinus on lähemal antud siinusele (antud näites on parem võtta 38°).

Olgu veel tarvis leida nurk x võrrandi $\cot x = 0{,}7826$ põhjal. Kootangensite veergudest leiame: $0{,}7813 = \cot 52°$ ja $0{,}8098 = \cot 51°$.

Et $0{,}8098 > 0{,}7826 > 0{,}7813$, siis $51° < x < 52°$, seejuures on x lähemal 52°-le ja seepärast on x-i suuruseks parem võtta 52° (täpsus kuni 1°).

207. Seos täisnurkse kolmnurga külgede ja nurkade vahel. 1) Täisnurksest kolmnurgast ABC leiame (joon. 216):

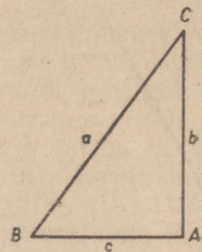
$$\frac{b}{a} = \sin B; \ \frac{c}{a} = \cos B;$$

siit

$$b = a \sin B, \ c = a \cos B.$$

Et aga $B = 90° - C$, siis $\sin B = \cos C$ ja $\cos B = \sin C$, tähendab, eelmisi võrdlusi võib täiendada nii:

$$b = a \sin B = a \cos C;$$
$$c = a \cos B = a \sin C.$$



Joon. 216.

Seega: **täisnurkse kolmnurga kaatet võrdub hüpotenuusi ja vastasnurga siinuse või lähisnurga koosinuse korrutisega.**

2) Samast kolmnurgast leiame:

$$\frac{b}{c} = \tan B; \ \frac{c}{b} = \cot B;$$

siit:

$$b = c \tan B; \ c = b \cot B.$$

Aga $\tan B = \cot (90° - B) = \cot C$ ja $\cot B = \tan (90° - B) = \tan C$, seepärast võime kirjutada:

$$b = c \tan B = c \cot C,$$
$$c = b \cot B = b \tan C,$$

s. t. **kaatet võrdub teise kaateti ja vastasnurga tangensi või lähisnurga kootangensi korrutisega.**

208. Täisnurksete kolmnurkade lahendamine. Ülaltoodud seosed lubavad **lahendada** täisnurkseid kolmnurki, s. t. leida mõne antud elemendi põhjal ülejäänud elemendid. Toome näite.

Näide. Täisnurkses kolmnurgas on antud: hüpotenuus $a = 4{,}5$ ja nurk $C = 42°$. Leida kaatetid ja nurk B.

$$b = a \cos C = 4{,}5 \cdot \cos 42°; \ c = a \sin C = 4{,}5 \cdot \sin 42°.$$

Tabelist leiame: $\sin 42° = 0{,}6691$, $\cos 42° = 0{,}7431$.

Tähendab: $b = 4{,}5 \cdot 0{,}7431 = 3{,}344$; $c = 4{,}5 \cdot 0{,}6691 = 3{,}011$; $B = 90° - C = 48°$.

IX. Mõiste algebra rakendamisest geomeetrias.

209. Ü l e s a n n e. *Antud lõik jaotada kuldlõikes.*

Seda ülesannet tuleb mõista nii: jaotada antud lõik kaheks osaks nii, et suurem osa oleks kogu lõigu ja selle väiksema osa keskmiseks võrdeliseks.

Ülesanne on lahendatud, kui oleme leidnud ühe osadest, milledeks tuleb jaotada antud lõik. Leiame suurema osa, s. o. selle, mis peab olema kogu lõigu ja selle väiksema osa k e s k m i s e k s v õ r d e l i s e k s. Oletame, et jutt pole mitte selle lõigu joonestamisest, vaid ainult selle osa pikkuse a r v u t a m i s e s t. Siis võib ülesande lahendada a l g e b r a l i s e l t, nimelt nii: kui antud lõigu pikkus on tähistatud a-ga ja suurema osa pikkus x-ga, siis lühema osa pikkus on $a - x$ ja vastavalt ülesande nõudele saame võrde:

$$a : x = x : (a - x);$$

siit

$$x^2 = a(a - x) \text{ ehk } x^2 + ax - a^2 = 0.$$

Lahendanud ruutvõrrandi, leiame:

$$x_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}; \quad x_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}.$$

Jätame kõrvale teise lahendi kui negatiivse, võtame ainult esimese, positiivse. Anname sellele lahendile sobivama kuju:

$$x_1 = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} - \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} - \frac{a}{2} =$$

$$= \sqrt{\frac{5a^2}{4}} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}\sqrt{5} - \frac{a}{2} = \frac{a(\sqrt{5} - 1)}{2} = a \cdot 0{,}61803\ldots$$

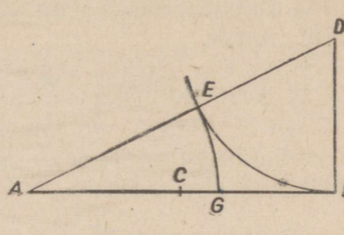
Seega ülesanne on alati l a h e n d a t a v ja tal on ainult ü k s l a h e n d.

Kui meil läheks korda joonestada niisugune lõik, mille pikkus väljendub leitud valemiga, siis, kandes selle lõigu antud lõigule, jaotame viimase kuldlõikes. Seega küsimus seisab leitud valemiga määratud lõigu konstrueerimises. Valemiga määratud lõiku konstrueerida on hõlpsam, kui võtame selle lihtsustamata kujul, s. t. kujul:

$$x_1 = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} - \frac{a}{2}.$$

Võttes vaatlusele avaldise $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}$ märgime, et see on hüpotenuus niisuguses täisnurkses kolmnurgas, milles üks kaatet on a ja teine $\frac{a}{2}$. Joonestanud niisuguse kolmnurga, leiame lõigu, mida väljendab valem $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2}$. Selleks et saada lõik x_1, tuleb joonestatud kolmnurga hüpotenuusist lahutada $\frac{a}{2}$. Seega konstruktsiooni saab teostada järgmiselt.

Poolitame (joon. 217) antud lõigu $AB=a$ punktis C. Tõmbame otspunktist B lõigule ristjoone ja paigutame sellele $BD=BC$. Ühendanud punktid A ja D sirglõiguga, saame täisnurkse kolmnurga ABD, mille üks kaatet $AB=a$ ja teine kaatet $BD=\frac{a}{2}$. Järelikult kolmnurga hüpotenuus $AD=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2}$. Selleks



Joon. 217.

et hüpotenuusist lahutada pikkus $\frac{a}{2}$, joonestame punktist D kaare raadiusega $BD=\frac{a}{2}$. Siis lõik AE võrdub $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2}-\frac{a}{2}$, s. o. võrdub x_1-ga. Paigutanud AE AB-le, saame punkti G, mis jaotab lõigu AB kuldlõikes.

M ä r k u s. Ülaltoodud lõigu jaotamist läheb tarvis korrapärase kõõl-kümmenurga külje leidmisel.

210. Geomeetriliste ülesannete algebraline lahendusviis. Meie lahendasime esitatud ülesande a l g e b r a r a k e n d a m i s e g a g e o m e e t r i a s. See lahendusviis seisab järgmises: kõigepealt otsustatakse, milline lõik tuleb leida, et ülesanne lahendada. Siis, tähistanud antud lõikude pikkused tähtedega a, b, c, ... ja otsitava lõigu pikkuse tähega x, koostatakse ülesande andmete põhjal võrrand, mis seob antud pikkused otsitava pikkusega. See võrrand lahendatakse. Saadud valemit uuritakse, s. o. määratakse, kas ülesanne on lahendatav mistahes andmete või ainult mõnede andmete puhul, kas saadakse üks lahend või mitu. Siis tuleb konstrueerida valem, s. t. leida konstrueerimisega niisugune lõik, mille arvuline väärtus on määratud valemiga.

Seega geomeetriliste ülesannete algebraline lahendusviis koosneb üldiselt neljast järgmisest osast: 1) võrrandi koostamine, 2) selle lahendamine, 3) saadud valemi uurimine ja 4) valemi konstrueerimine.

Mõnikord tuleb ülesandes leida mitu lõiku. Siis tähistatakse nende arvulised väärtused tähtedega x, y, ... ja püütakse koostada nii palju võrrandeid, kui palju on otsitavaid suurusi.

211. Lihtsamate valemite konstrueerimine. Esitame mõned lihtsamad valemid, milliseid saab konstrueerida sirkli ja joonlaua abil, seejuures eeldame, et tähed a, b, c, . . . väljendavad antud lõikude pikkusi, x aga otsitava lõigu pikkust. Peatumata selliste valemite juures, nagu

$$x=a+b+c, \quad x=a-b, \quad x=2a,\ 3a, \ldots,$$

mille konstrueerimine on väga lihtne, asume keerulisemate valemite juurde.

1) Valemid $x=\frac{a}{2}$, $\frac{a}{3}, \ldots$, $x=\frac{2}{3}a, \ldots$ jt. konstrueeritakse lõigu a jaotamisega võrdseteks osadeks ja siis, kui vaja, selle osa kordumisega 2, 3, . . . korda.

2) Valem $x=\frac{ab}{c}$ väljendab lõikude c, a ja b neljandat võrdelist. Sellest võrdusest tuletame:

$$cx=ab,$$

millest

$$c:a=b:x. \qquad \frac{c}{a}=\frac{b}{x}$$

Järelikult leiame x viisil, mis oli näidatud neljanda võrdelise leidmiseks (§ 185).

3) Valem $x=\frac{a^2}{b}$ väljendab lõikude b, a ja a neljandat võrdelist või, nagu öeldakse, lõikude b ja a kolmandat võrdelist. Antud võrdusest tuletame:

$$bx=a^2,$$

millest

$$b:a=a:x.$$

Järelikult leitakse x samuti, nagu leitakse neljas võrdeline (lõik a esineb kaks korda).

4) Valem $x=\sqrt{ab}$ väljendab a ja b keskmist võrdelist. Antud võrdusest tuletame:

$$x^2=ab,$$

millest

$$a:x=x:b.$$

Järelikult leitakse x viisil, mis oli varem näidatud keskmise võrdelise konstrueerimiseks (§ 190).

5) Valem $x=\sqrt{a^2+b^2}$ väljendab hüpotenuusi täisnurkses kolmnurgas, mille kaatetid on a ja b.

6) Valem $x=\sqrt{a^2-b^2}$ väljendab kaatetit täisnurkses kolmnurgas, mille hüpotenuus on a ja teine kaatet on b.

Konstrueerimist on kõige hõlpsam teostada nii, nagu näidatud § 126.

Toodud valemeid võib nimetada põhivalemiteks. Nende abil konstrueeritakse keerulisemaid valemeid. Näiteks:

7) $x=a\sqrt{\frac{2}{3}}$. Viies a juuremärgi alla, saame:

$$x=\sqrt{\frac{2}{3}a^2}=\sqrt{a\cdot\frac{2}{3}\cdot a}.$$

Siit näeme, et x on lõikude a ja $\frac{2}{3}a$ keskmine võrdeline.

8) $x=\sqrt{a^2+b^2-c^2+d^2}$. Oletame, et $a^2+b^2=k^2$. Siis k leitakse kui hüpotenuus täisnurkses kolmnurgas, mille kaatetid on a ja b. Joonestanud k, oletame, et $k^2+d^2=l^2$. Nüüd leitakse l kui hüpotenuus täisnurkses kolmnurgas, mille kaatetid on k ja d. Joonestanud l, saame: $x=\sqrt{l^2-c^2}$. Järelikult on x kaatet niisuguses täisnurkses kolmnurgas, mille hüpotenuus on l ja teine kaatet on c.

Piirdume nende näidetega. Tähendame, et taoline algebraliste valemite konstrueerimisviisi arutlus lubab teha järgmise tähtsa järelduse:

joonlaua ja sirkli abil on võimalik teostada ainult niisuguste algebraliste valemite konstrueerimist, mida võib saada tuntud suurustest lõpliku arvu ratsionaalsete tehete ja ruutjuurte leidmise abil.

Harjutusi.

Tõestada teoreemid.

1. Sirge, mis on tõmmatud läbi trapetsi aluste keskpunktide, läbib trapetsi haarade pikenduste lõikepunkti ja diagonaalide lõikepunkti.

2. Kui kolmnurgas on mittevõrdsete külgede vahel oleva nurga tipust tõmmatud nurgapoolitaja ja mediaan, siis esimene on lühem teisest.

3. Kui kaks ringi puutuvad väliselt, siis see osa ühisest välisest puutujast, mis asetseb puutepunktide vahel, on ringide diameetrite keskmine võrdeline.

4. Kui paigutada nurga haaradele selle tipust võrdelised lõigud, siis sirged, mis ühendavad nende lõikude otspunkte, on paralleelsed.

5. Kui täisnurkse kolmnurga ABC sisse joonestada ruut $DEFG$ nii, et külg DE oleks hüpotenuusil BC, siis see külg on hüpotenuusi lõikude BD ja EC keskmine võrdeline (punktid hüpotenuusil on järjekorras B, D, E, C).

6. Kui kaks lõiku AB ja CD lõikuvad (ka pikendamisel) punktis E nii, et $EB \cdot EA = EC \cdot ED$, siis punktid A, B, C ja D asetsevad ühel ringjoonel (pöördteoreem teoreemidele §§ 200 ja 202).

7. On antud ringjoon O ja kaks punkti A ja B. Läbi nende punktide on tõmmatud mitu ringjoont, mis lõikavad ringjoont O või puutuvad seda. Tõestada, et kõik kõõlud, mis ühendavad mistahes tõmmatud ringjoone ja ringjoone O lõikepunkte, lõikuvad (pikendamisel) ühes punktis, mis asetseb AB pikendusel.

8. Põhinedes sellele, tuletada konstrueerimisviis ringjoonele, mis läbiks antud kaks punkti A ja B ning puutuks antud ringjoont O.

9. Tasapinnal on antud kaks ringi. Kui nende ringide kaks raadiust pöörlevad, olles kogu aeg teineteisega paralleelsed, siis sirge, mis ühendab nende raadiuste otspunkte, lõikub keskjoonega alati samas punktis (ringide s a r n a s u s k e s k p u n k t i s).

10. Kolmnurga mediaan poolitab kõik sirged, mis on tõmmatud kolmnurgas paralleelselt selle küljega, millele on tõmmatud mediaan.

11. On antud kolm ühest punktist lähtuvat sirget. Kui mööda üht sirget liigub mingi punkt, siis selle kaugused kahest teisest sirgest moodustavad jääva suhte.

12. Kui kaks ringjoont on kontsentrilised, siis ühel ringjoonel meelevaldselt võetud punkti ja teise ringjoone mistahes diameetri otspunktide vaheliste kauguste ruutude summa on jääv suurus (§ 197).

13. Kui ühendada sirgetega mingi kolmnurga kolme kõrguse alused, siis siinjuures antud kolmnurga tippude juures tekkinud kolm kolmnurka on sarnased antud kolmnurgaga. Tuletada siit, et antud kolmnurga kõrgused on nurgapoolitajaiks selles kolmnurgas, mis on moodustatud kõrguste aluseid ühendavate sirgete poolt.

14. Antud ringjoone diameeter AB on pikendatud üle B. Sellel pikendusel võetud mingist punktist C on tõmmatud sirge $CD \perp AB$. Kui nüüd selle ristjoone mingi punkt M ühendada A-ga, siis (olles A_1-ga tähistanud selle sirge teise lõikepunkti ringjoonega) korrutis $AM \cdot AA_1$ on jääv suurus iga punkti M puhul.

L e i d a g e o m e e t r i l i s e d k o h a d.

15. Läbi ringjoone antud punkti tõmmatud kõõlude keskpunktidele.

16. Läbi ringjoone antud punkti tõmmatud kõõlusid suhtes $m:n$ jaotavatele punktidele.

17. Punktidele, mille kaugused antud nurga haaradest suhtuvad nagu $m:n$.

18. Punktidele, mille ja kahe antud punkti vaheliste kauguste ruutude summa on jääv suurus (§ 197).

19. Punktidele, mille ja kahe antud punkti vaheliste kauguste ruutude vahe on jääv suurus.

20. Punktidele, mis jaotavad kõiki ringjoone punkte ja antud punkti O (mis asetseb ringi sees või väljaspool seda) ühendavaid sirglõike suhtes $m:n$.

K o n s t r u e e r i m i s ü l e s a n d e i d.

21. Tõmmata sirge läbi nurga sees või väljaspool seda oleva punkti nii, et selle lõigud antud punkti ja nurga haarade vahel suhtuksid nagu $m:n$.

22. Leida kolmnurgas niisugune punkt, et ristlõigud, mis on tõmmatud sellest kolmnurga külgedele, suhtuksid nagu $m:n:p$ (vt. harjutus 17).

23. Joonestada kolmnurk, kui on antud üks nurk, üks selle nurga lähisküIg ja selle külje suhe kolmanda küljega. (Mitu lahendust?)

24. Joonestada kolmnurk, kui on antud tipunurk, alus ja selle suhe ühe haaraga.

25. Joonestada kolmnurk, kui on antud tipunurk, kõrgus ja aluse lõikude suhe.

26. Joonestada kolmnurk, kui on antud tipunurk, alus ja alusel punkt, mida läbib tipunurga poolitaja.

27. Joonestada kolmnurk, kui on antud kaks nurka ning aluse ja kõrguse summa või vahe.

28. Joonestada võrdhaarne kolmnurk, kui on antud tipunurk ja aluse ning kõrguse summa.

29. Sirgel MN on antud punktid A ja B. Leida sellel sirgel kolmas punkt C nii, et $CA : CB = m : n$, kus m ja n on antud lõigud või antud arvud (kui $m \neq n$, siis punkte on kaks: üks A ja B vahel, teine väljaspool lõiku AB).

30. Antud ringisse joonestada kolmnurk, kui on antud alus ja kahe teise külje suhe.

31. Antud ringisse joonestada kolmnurk, kui on antud alus ja mediaan ühele tundmatuist külgedest.

32. Antud segmendisse joonestada ruut nii, et selle üks külg oleks kõõlul ja kaks tippu kaarel.

Juhis. Ülesande lahendamisel tuleb rakendada sarnasusmeetodit (§ 181).

33. Antud kolmnurka joonestada ruut nii, et selle üks külg oleks kolmnurga alusel ja kaks tippu kolmnurga haaradel.

34. Antud kolmnurka joonestada ristkülik (vt. eelmine ülesanne) nii, et selle küljed suhtuksid nagu $m : n$.

35. Antud ruudu ümber joonestada kolmnurk, mis oleks sarnane antud kolmnurgaga.

36. On antud ringjoon ja sellel kaks punkti A ja B. Leida sellel ringjoonel kolmas punkt C nii, et punkti kaugused A-st ja B-st moodustaksid antud suhte.

37. Joonestada kolmnurk, kui on antud kaks külge ja nende vahel oleva nurga poolitaja (vt. joon. 196; enne leiame lõigu CE võrdest $CE : BD = AE : AB$, siis joonestame kolmnurga BCE jne.).

38. Joonestada sirglõik x nii, et ta suhe antud lõiguga m võrduks $a^2 : b^2$ (a ja b on antud lõigud).

39. Leida väljaspool ringi niisugune punkt, et puutuja, mis sellest on tõmmatud antud ringjoonele, oleks kaks korda väiksem samast punktist läbi ringjoone keskpunkti tõmmatud lõikajast (algebra rakendamine geomeetrias).

40. Tõmmata läbi väljaspool ringi antud punkti niisugune lõikaja, mis jaotuks antud ringjoonega antud suhtes (algebra rakendamine geomeetrias).

41. Joonestada kolmnurk, kui on antud selle kolm kõrgust h_1, h_2, h_3.

Lahendus. Kõigepealt tuleb tõestada sarnastest kolmnurkadest, et kõrgused on pöördvõrdelised vastavate külgedega. Kui küljed, milledele on tõmmatud kõrgused h_1, h_2, h_3, on tähistatud vastavalt x_1-, x_2- ja x_3-ga, siis

$$x_1 : x_2 = h_2 : h_1;$$

$$x_2 : x_3 = h_3 : h_2 = 1 : \frac{h_2}{h_3} = h_1 : \frac{h_1 h_2}{h_3};$$

siit

$$x_1 : x_2 : x_3 = h_2 : h_1 : \frac{h_1 h_2}{h_3}.$$

Avaldis $\frac{h_1 h_2}{h_3}$ on h_1, h_2 ja h_3 neljas võrdeline. Olles selle joonestanud (olgu see k), on meil kolm lõiku: h_2, h_1 ja k, milledega otsitavad küljed on võrdelised, tähendab, kolmnurk, mille külgedeks on need lõigud, on sarnane antud kolmnurgaga ja seepärast küsimus taandub ülesandeks: joonestada kolmnurk, mis on sarnane antud kolmnurgaga ja millel on antud kõrgus. Ülesanne on lahendamatu, kui antud lõikude h_1, h_2 ja k põhjal pole võimalik kolmnurka joonestada.

42. Joonestada lõigud, mis on väljendatud valemitega:

$$1) \quad x = \frac{abc}{de} = \frac{ab}{d} \cdot \frac{c}{e}$$

(tuleb kaks korda joonestada neljas võrdeline);

$$2) \quad x = \sqrt{a^2 + bc}$$

(enne tuleb joonestada lõik $k = \sqrt{bc}$, siis $x = \sqrt{a^2 + k^2}$).

Arvutusülesandeid.

43. Teravnurksesse kolmnurka, mille alus on a ja kõrgus h, on joonestatud ruut nii, et selle üks külg on kolmnurga alusel ja kaks tippu kolmnurga haaradel. Leida ruudu x külg.

44. Kolmnurga küljed on 10, 12 ja 17 m. Leida 17-meetrise külje lõigud, milledeks jaotab külje selle vastasnurga poolitaja.

45. Täisnurga tipust hüpotenuusile tõmmatud ristlõik jagab selle lõikudeks m ja n. Arvutada kaatetid.

46. Kolmnurgas ABC on antud küljed a, b ja c. Arvutada mediaan AD, mis on tõmmatud küljele BC.

Juhis. Pikendanud mediaani AD kauguse $DE = AD$ võrra ja ühendanud punkti E punktidega B ja C, saame rööpküliku, mille kohta rakendame teoreemi § 197.

47. Kolmnurga ABC küljed on: $AB = 7$; $BC = 15$ ja $AC = 10$. Määrata, kas nurk A on terav-, täis- või nürinurk, ja arvutada kõrgus, mis on tõmmatud tipust B.

48. Punktist väljaspool ringi on tõmmatud puutuja a ja lõikaja. Arvutada lõikaja pikkus, kui on teada, et ta välise osa suhe sisemise osaga on $m : n$.

49. Kahele ringile, mille raadiused on R ja r ning keskpunktide joon d, on tõmmatud ühine puutuja. Määrata arvutamise teel selle puutuja ja keskpunktide joone lõikepunkti asend, esiteks, kui see punkt asetseb väljaspool keskpunkti, ja teiseks, kui see punkt asetseb keskpunktide vahel.

NELJAS PEATÜKK.

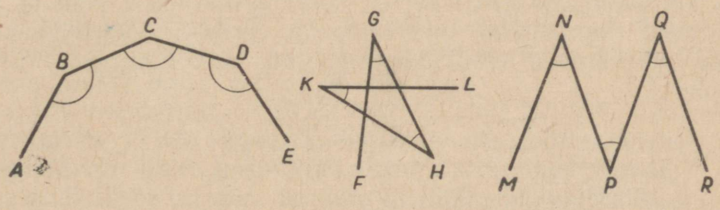
KORRAPÄRASED HULKNURGAD JA RINGJOONE PIKKUSE ARVUTAMINE.

I. Korrapärased hulknurgad.

212. Definitsioonid. Murdjoont nimetatakse **korrapäraseks**, kui ta rahuldab järgmist kolme tingimust: 1) murdjoont moodustavad lõigud on võrdsed; 2) nurgad iga kahe naaberlõigu vahel on võrdsed ja 3) igast kolmest järjestikusest lõigust esimene ja kolmas asetsevad ühel ja samal pool sirget, millel asetseb teine lõik.

Niisugused on näiteks murdjooned *ABCDE* ja *FGHKL* (joon. 218); kolmas murdjoon *MNPQR* pole korrapärane, sest ta ei rahulda kolmandat nõuet.

Korrapärane murdjoon võib olla **kumer**, nagu näiteks joon *ABCDE*.

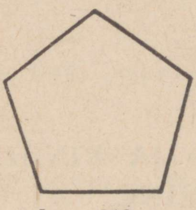


Joon. 218.

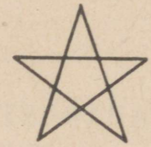
Hulknurk on **korrapärane**, kui ta on piiratud korrapärase murdjoonega, s. t. kui tal on võrdsed küljed ja võrdsed nurgad. Niisugused hulknurgad on näiteks ruut, võrdkülgne kolmnurk ja teised.

Hulknurk, mis on kujutatud joonisel 219, on korrapärane **kumer** viisnurk; joonisel 219-a kujutatud hulknurk on samuti korrapärane viisnurk, kuid mitte kumer (see on nn. **tähtviisnurk**). Selles geomeetria kursuses vaatleme ainult kumeraid korrapäraseid hulknurki, ja seepärast, rääkides korrapärasest hulknurgast, mõistame selle nimetuse all kumerat hulknurka.

Järgnevad teoreemid näitavad, et korrapäraste hulknurkade ehitamine on tihedalt seotud ringjoone jaotamisega võrdseteks osadeks.



Joon. 219.



Joon. 219-a.

213. Teoreem. ***Kui ringjoon on jaotatud mitmeks*** (enamaks kui kaheks) ***võrdseks osaks, siis:***

1) ***ühendanud kõik naaberjaotuspunktid kõõludega, saame korrapärase hulknurga*** (kõõlhulknurga);

2) ***tõmmanud läbi kõigi jaotuspunktide puutujad ja pikendanud igaüht neist kuni lõikumiseni puutujaga naaberjaotuspunktis, saame korrapärase hulknurga*** (puutujahulknurga).

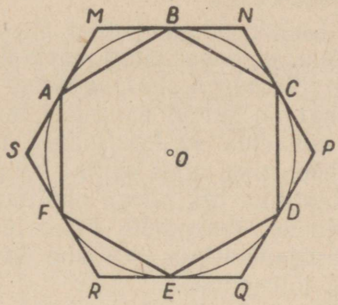
Olgu ringjoon (joon. 220) jaotatud punktides A, B, C jne. mitmeks võrdseks osaks ja läbi nende punktide olgu tõmmatud kõõlud AB, $BC, \ldots$ ja puutujad MBN, NCP jne. Siis:

1) kõõlhulknurk $ABCDEF$ on korrapärane, sest kõik ta küljed on võrdsed (kui kõõlud, mis vastavad võrdseile kaartele) ja kõik nurgad on võrdsed (kui piirdenurgad, mis toetuvad võrdseile kaartele);

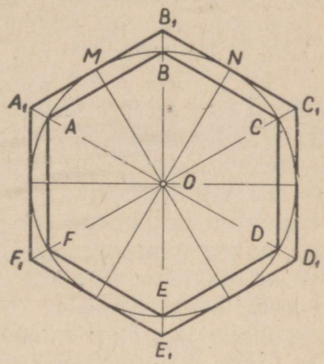
2) selleks et tõestada puutujahulknurga $MNPQRS$ korrapärasust, vaatleme kolmnurki AMB, BNC jne. Neil on alused AB, $BC, \ldots$ võrdsed; aluste lähisnurgad on samuti võrdsed, sest neid mõõdavad võrdsed kaared (nurka, mis on puutuja ja kõõlu vahel, mõõdab pool selle nurga sees olevast kaarest). Tähendab, kõik need kolmnurgad on võrdhaarsed ja võrdsed ning seepärast $MN = NP = \ldots$ ja $\angle M = \angle N = \ldots$, s. t. hulknurk $MNPQRS$ on korrapärane.

214. Märkus. Kui keskpunktist O (joon. 221) joonestada ristjooned kõõludele AB, $BC, \ldots$ ja neid pikendada lõikumiseni ringjoonega punktides M, N jne., siis need punktid jaotavad kõik kaared ja kõõlud pooleks ning sellega ka ringjoone võrdseiks osadeks.

Seepärast, kui tõmbame läbi punktide M, N jne., nagu eespool näidatud, puutujad kuni vastastikuse lõikumiseni, saame korrapärase puutujahulknurga, mille küljed on paralleelsed kõõlhulknurga külgedega. Iga tippude paar A ja A_1, B ja B_1 jne. asetseb keskpunktiga ühel ja samal sirgel, nimelt nurga MON ja teiste niisuguste nurkade poolitajail.



Joon. 220.



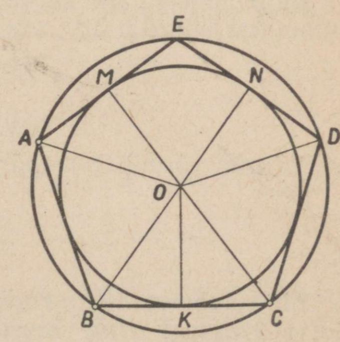
Joon. 221.

215. Teoreem. ***Kui hulknurk on korrapärane, siis***

1) ***tema ümber saab joonestada ringjoone;***

2) ***tema sisse saab joonestada ringjoone.***

1. Tõmbame läbi korrapärase hulknurga $ABCDE$ kolme naabertipu A, B ja C (joon. 222) ringjoone ja tõestame, et see ringjoon läbib ka neljanda tipu D. Joonestame keskpunktist O ristlõigu kõõlule BC ja ühendame punkti O punktidega A ja D. Pöörame nelinurga $ABKO$ ümber külje OK nii, et ta langeb nelinurgale $ODCK$. Siis lõik KB läheb mööda lõiku KC (tipu K juures olevate täisnurkade võrdsuse tõttu), punkt B langeb punkti C (sest kõõl BC jaotub punktis K pooleks), külg BA läheb mööda CD (nurkade B ja C võrdsuse tõttu) ja lõpuks punkt A langeb punkti D (külgede BA ja CD võrdsuse tõttu). Sellest järeldub, et lõigud OA ja OD ühtivad ja, tähendab, punktid A ja D on keskpunktist ühekaugusel; seepärast tipp D peab asetsema punkte A, B ja C läbival ringjoonel. Samal viisil



Joon. 222.

tõestame, et see ringjoon, minnes läbi kolme naabertipu B, C ja D, läheb ka läbi järgmise tipu E jt.; tähendab, ringjoon läbib hulknurga kõiki tippe.

2. Tõestatust järeldub, et korrapärase hulknurga külgedele võib vaadata kui ringjoone võrdseile kõõludele; niisugused kõõlud on aga võrdsel kaugusel keskpunktist; tähendab, kõik ristlõigud OM, ON jt., mis on tõmmatud punktist O hulknurga külgedele, on võrdsed, ja seepärast ongi joonestatud ringjoon keskpunktist O raadiusega OM hulknurga $ABCDE$ siseringjooneks.

216. J ä r e l d u s. Eelnevast on näha, et kahel ringjoonel: korrapärase hulknurga ümberringjoonel ja hulknurga siseringjoonel on ühine keskpunkt. Et see ühine keskpunkt on samal kaugusel hulknurga kõigist tippudest, siis peab ta asetsema keskristjoonel, mis on tõmmatud hulknurga mistahes küljele, ning olles samal kaugusel iga nurga haaradest, peab ta asetsema ka iga nurga poolitajal. Seepärast, et leida ühe või teise ringjoone keskpunkt, tuleb leida kahe külje keskristjoonte või kahe nurgapoolitaja või ühe külje keskristjoone ja mingi nurga poolitaja lõikepunkt.

On kerge märgata, et hulknurga külgede keskristjooned, samuti ka nurkade poolitajad, on hulknurga sümmeetriatelgedeks.

217. D e f i n i t s i o o n i d. Ülalnimetatud ringjoonte ühist keskpunkti nimetatakse vastava hulknurga **keskpunktiks**, siseringjoone raadiust nimetatakse hulknurga **apoteemiks.**

Nurka, mis on moodustatud korrapärase hulknurga mingi külje otspunktidesse tõmmatud raadiuste poolt, nimetatakse ***kesknurgaks.***

Hulknurgal on kesknurki niisama palju nagu külgi; kõik need nurgad on võrdsed kui kesknurgad, mis vastavad võrdseile kaartele.

Et kõigi kesknurkade summa võrdub $4d$-ga ehk 360°-ga, siis igaüks neist võrdub $4d : n$ ehk $360^\circ : n$, kus n väljendab hulknurga külgede arvu; nii on korrapärase kuusnurga kesknurk $360^\circ : 6 = 60^\circ$; korrapärase kaheksanurga kesknurk on $360^\circ : 8 = 45^\circ$ jne.

Et hulknurga sisenurkade summa võrdub $2d(n-2)$, kus n on hulknurga külgede arv, siis korrapärase hulknurga iga sisenurk on

$$\frac{2d(n-2)}{n}.$$

Näiteks võrdub korrapärase kaheksanurga sisenurk:

$$\frac{2d(8-2)}{8} = \frac{12d}{8} = \frac{3}{2}d = 135^\circ.$$

218. Teoreem. ***Korrapärased ühenimelised hulknurgad on sarnased ning nende küljed suhtuvad nagu raadiused või apoteemid.***

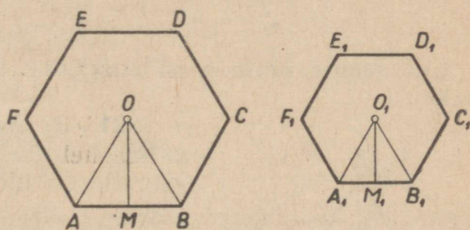
1) Selleks et tõestada korrapäraste ühenimeliste hulknurkade $ABCDEF$ ja $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ sarnasust (joon. 223), piisab kindlakstegemisest, et nende nurgad on võrdsed ja küljed võrdelised.

Hulknurkade nurgad on võrdsed, sest igaüks neist sisaldab ühepalju kraade, nimelt $\frac{180°(n-2)}{n}$, kus n on iga hulknurga külgede arv. Et $AB=BC=CD=\ldots$ ja $A_1B_1=B_1C_1=C_1D_1=\ldots$, siis on ilmne, et $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CD}{C_1D_1}=\ldots$, s. t. et selliste hulknurkade küljed on võrdelised.

2) Olgu O ja O_1 (joon. 223) antud hulknurkade keskpunktid, OA ja O_1A_1 raadiused ja OM ja O_1M_1 apoteemid. Kolmnurgad OAB ja $O_1A_1B_1$ on sarnased, sest nende kolmnurkade nurgad on vastavalt võrdsed.

Nende sarnasusest järeldub:

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{OA}{O_1A_1}=\frac{OM}{O_1M_1}.$$



Joon. 223.

J ä r e l d u s. Et sarnaste hulknurkade ümbermõõdud on võrdelised vastavate külgedega (§ 172), siis *korrapäraste ühenimeliste hulknurkade ümbermõõdud suhtuvad nii nagu nende raadiused või apoteemid.*

219. Ü l e s a n n e. *Arvutada: 1) kõõlruudu külg; 2) korrapärase kõõlkuusnurga külg; 3) korrapärase kõõlkolmnurga külg.*

Tähistame korrapärase n-nurga külje a_n-ga ja ümbermõõdu p_n-ga. Valemeid kõõlruudu, kõõlkuusnurga ja kõõlkolmnurga külgedele on kerge tuletada jooniste 224, 225 ja 226 abil.

1) Joonisel 224 on tõmmatud kaks ristiolevat diameetrit AC ja BD ja nende otspunktid on järjest ühendatud kõõludega; on saadud kõõlruut $ABCD$.

Täisnurksest kolmnurgast AOB leiame:

$$AB^2=AO^2+OB^2=2R^2;$$

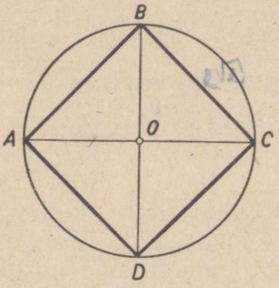
siit

$$a_4=R\sqrt{2}.$$

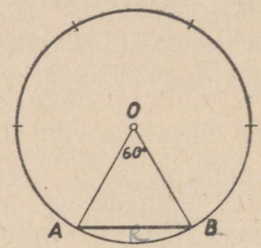
220. 2) Joonisel 225 on joonestatud kõõl, mis vastab kesknurgale 60° (korrapärase kõõlkuusnurga külg). Et võrdhaarses kolmnurgas AOB kumbki nurkadest A ja B on $(180°—60°):2=$

$=60°$, siis kolmnurk AOB on võrdnurkne ja järelikult ka võrdkülgne; tähendab

$$AB=AO, \text{ s. o. } a_6=R.$$

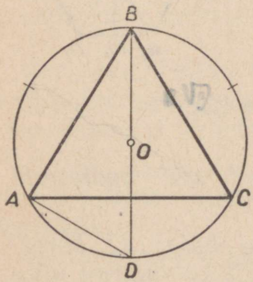


Joon. 224.



Joon. 225.

Siit saame lihtsa viisi ringjoone jaotamiseks kuueks võrdseks osaks.



Joon. 226.

221. 3) Joonisel 226 on ringjoon jaotatud kuueks võrdseks osaks ja jaotuspunktid on üle ühe järjest ühendatud kõõludega, on tekkinud korrapärane kõõlkolmnurk ABC. Tõmmates kõõlu AD, saame täisnurkse kolmnurga ABD (nurk BAD kui diameetrile toetuv piirdenurk on täisnurk). Kolmnurgast ABD leiame:

$$AB=\sqrt{BD^2-AD^2},$$

seega

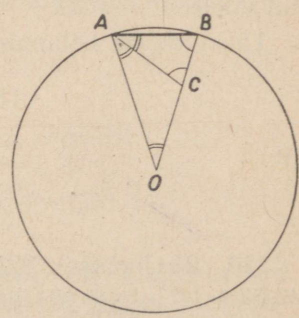
$$a_3=\sqrt{(2R)^2-R^2},$$

tähendab

$$a_3=R\sqrt{3}.$$

222. Ülesanne. *Joonestada korrapärane kõõlkümmenurk ja väljendada selle külg raadiuse kaudu.*

Eelkõige tõestame korrapärase kümmenurga ühe tähtsa omaduse. Olgu kõõl AB (joon. 227) korrapärase kümmenurga küljeks. Siis nurk AOB on 36° ja kumbki nurkadest A ja B on $\frac{1}{2}\cdot(180°—36°)$, s. t. võrdub 72°-ga. Jaotame nurga A sirgega AC pooleks. Kumbki nurkadest, mis on tekkinud punkti A juures, on 36°; järelikult $\triangle ACO$, omades kaks võrdset nurka, on võrdhaarne, s. t. $AC=CO$; $\triangle ABC$ on samuti võrdhaarne, sest $\angle B=72°$ ja $\angle ACB=180°-72°-36°=72°$; järelikult $AB=AC=CO$. Kolmnurga nurgapoolitaja omaduse põhjal (§ 186) võime kirjutada:



Joon. 227.

$$AO : AB = OC : CB. \qquad (1)$$

Asendades AO ja AB võrdsete lõikudega OB ja OC, saame:

$$OB : OC = OC : CB; \qquad (2)$$

seega on raadius OB jaotatud punktis C kuldlõikes (§ 209), seejuures OC on suurem osa. OC aga võrdub korrapärase kõõlkümmenurga küljega; tähendab, *korrapärase kõõlkümmenurga külg võrdub kuldlõikes jaotatud raadiuse suurema osaga.*

Nüüd on kerge ülesannet lahendada.

1) Jaotatakse ringi raadius (näiteks OA, joon. 228) kuldlõikes; võttes siis sirkli haardeks raadiuse suurema osa, eraldatakse ringjoonel üksteise järel kaared. Jaotuspunktid ühendatakse järjest kõõludega.

2) Tähistanud korrapärase kõõlkümmenurga külje x-ga, võime võrde (2) kirjutada nii:

$$R : x = x : (R - x);$$

siit

$$x^2 + Rx - R^2 = 0.$$

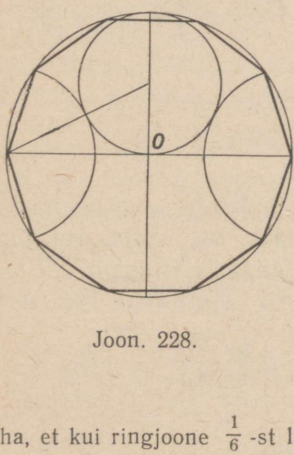
Lahendanud ruutvõrrandi, leiame:

$$x = a_{10} = R\,\frac{\sqrt{5}-1}{2} = R \cdot 0{,}61803\ldots$$

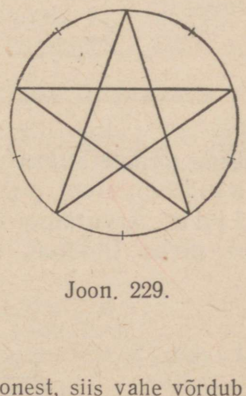
223. Märkused. 1) Et joonestada korrapärane kõõlviisnurk, jaotatakse ringjoon kümneks võrdseks osaks (nagu oli ülal näidatud) ning ühendatakse jaotuspunktid kõõludega järjest üle ühe.

2) Võrdusest

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{5}{30} - \frac{3}{30} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$$



Joon. 228.

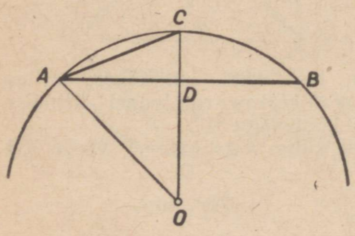


Joon. 229.

on näha, et kui ringjoone $\frac{1}{6}$-st lahutada $\frac{1}{10}$ ringjoonest, siis vahe võrdub $\frac{1}{15}$-ga ringjoonest. See asjaolu annab meile lihtsa võtte korrapärase kõõlviisteistnurga joonestamiseks, sest ringjoone jaotamine kuueks ja kümneks võrdseks osaks on meile tuttav.

3) Et ehitada viieharuline täht (joon. 229), jaotatakse ringjoon kümneks võrdseks osaks ja ühendatakse kõõlude abil jaotuspunktid, jättes iga ühendamise juures kolm punkti vahele (nagu näidatud joonisel).

224. Ülesanne. *Kahekordistada korrapärase kõõlhulknurga külgede arv.*



Joon. 230.

Selle sõnastuse all tuleb mõista kaht ülesannet: 1) antud korrapärasest kõõlhulknurgast tuleb joonestada teine korrapärane kõõlhulknurk, millel on külgede arv kaks korda suurem; 2) arvutada selle hulknurga külg, kui on antud esimese hulknurga külg ja ringi raadius.

1) Olgu AB (joon. 230) korrapärase kõõl-n-nurga külg, O olgu ringi keskpunkt. Tõmbame $OC \perp AB$ ja ühendame punktid A ja C. Kaar AB jaotub punktis C pooleks; järelikult kõõl AC on korrapärase kõõl-$2n$-nurga küljeks.

2) Kolmnurgas ACO on nurk O alati teravnurk (sest kaar ACB on alati väiksem poolringjoonest ja järelikult pool seda kaart, s. t. kaar AC, on väiksem veerandringjoonest); seepärast (§ 194):

$$AC^2 = OA^2 + OC^2 - 2OC \cdot OD;$$

seega

$$a_{2n}^2 = R^2 + R^2 - 2R \cdot OD = 2R^2 - 2R \cdot OD.$$

Täisnurksest kolmnurgast AOD määrame kaateti OD;

$$OD = \sqrt{AO^2 - AD^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2} = \sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}.$$

Järelikult

$$a_{2n}^2 = 2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}.$$

Selline on korrapärase kõõlhulknurga külgede arvu kahekordistamise valem (sellest valemist leiame a_{2n}, võttes ruutjuure).

Näide. Arvutame korrapärase kõõlkaksteistnurga külje. Et arvutus oleks lihtsam, oletame, et $R=1$ (järelikult ka $a_6=1$).

$$a_{12}^2 = 2 - 2\sqrt{1 - \frac{1}{4}} = 2 - 2\sqrt{\frac{3}{4}} = 2 - \sqrt{3},$$

millest

$$a_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{3}} = 0{,}517\ldots$$

Et korrapäraste samanimeliste hulknurkade küljed suhtuvad nagu nende raadiused (§ 218), siis raadiuse puhul, mis pole võrdne ühega, vaid mingisuguse arvuga R, saame korrapärase kaksteistnurga külje valemi:

$$a_{12} = R\sqrt{2-\sqrt{3}} = R \cdot 0{,}517\ldots$$

225. Mitmeks võrdseks osaks saab jaotada ringjoone sirkli ja joonlaua abil?

Kasutades eelmistes ülesannetes läbiarutatud võtteid, saame sirkli ja joonlaua abil jaotada ringjoont (ja järelikult joonestada ka vastava külgede arvuga korrapäraseid kõõlhulknurki) võrdseiks osadeks, mille arv on toodud järgmises tabelis:

3	$3 \cdot 2$	$3 \cdot 2 \cdot 2 \ldots$	üldiselt	$3 \cdot 2^n$
4	$4 \cdot 2$	$4 \cdot 2 \cdot 2 \ldots$	„	2^n
5	$5 \cdot 2$	$5 \cdot 2 \cdot 2 \ldots$	„	$5 \cdot 2^n$
15	$15 \cdot 2$	$15 \cdot 2 \cdot 2 \ldots$	„	$3 \cdot 5 \cdot 2^n$

Saksa matemaatik Gauss (surnud 1855. a.) tõestas, et sirkli ja joonlaua abil saab ringjoone jaotada võrdseiks osadeks, mille arv, olles algarvuks, väljendub valemiga $2^{2^n}+1$. Näiteks saab ringjoone jaotada 17 võrdseks osaks ja 257 võrdseks osaks, sest 17 ja 257 on algarvud kujult $2^{2^n}+1$ $(17=2^{2^2}+1;\ 257=2^{2^3}+1)$.

Gaussi tõestus ulatub välja elementaarmatemaatika piiridest.

Ka on tõestatud, et sirkli ja joonlaua abil saab ringjoone jaotada võrdseiks osadeks, mille arv on kordarv, mis koosneb: 1) tegureist kujul $2^{2^n}+1$ ja 2) tegurist 2 mistahes astmes. Näiteks saab sirkli ja joonlaua abil joonestada korrapärast 170-nurka $[170=2 \cdot 5 \cdot 17=2 \cdot (2^2+1) \cdot (2^{2^2}+1)]$.

Jaotada ringjoont võrdseiks osadeks, mille arv on mõni teine arv, saab ainult ligikaudu. Olgu näiteks tarvis jaotada ringjoon seitsmeks võrdseks osaks (või joonestada korrapärane kõõlseitsenurk). Siis arvutatakse esmalt kesknurk, see võrdub: $\frac{360^\circ}{7} = 51\frac{3^\circ}{7}$. Täpselt niisugust nurka sirkli ja joonlauaga joonestada ei saa, kuid hulknurga keskpunkti juurde saab malli abil joonestada nurga suurusega ligikaudu 51°, ja nii saame ligikaudu $\frac{1}{7}$ ringjoonest.

Harjutusi.

1. Koostada valem korrapärase kõõl-24-nurga külje jaoks.
2. Koostada valem korrapärase kõõl-8-nurga ja kõõl-16-nurga külgede jaoks.
3. Koostada valem korrapärase puutujakolmnurga ja puutujakuusnurga külgede jaoks.

4. Olgu AB, BC ja CD kolm järjestikust külge korrapärases hulknurgas, mille keskpunkt on O. Kui pikendada külgi AB ja CD nende lõikumiseni punktis E, siis nelinurga $OAEC$ ümber saab joonestada ringjoone.

5. Tõestada, et 1) iga võrdkülgne kõõlhulknurk on korrapärane; 2) iga võrdnurkne puutujahulknurk on korrapärane.

6. Tõestada, et: 1) igal korrapärasel n-nurgal on n sümmeetriatelge, seejuures kõik teljed läbivad keskpunkti; 2) hulknurga puhul paarisarvu küljedega on keskpunkt ühtlasi ka sümmeetriakeskpunktiks.

7. Tõestada, et korrapärase viisnurga kaks diagonaali, mis ei lähtu ühest tipust, jaotuvad lõikumisel kuldlõikes.

J u h i s. Olgu $ABCDE$ korrapärane viisnurk, AC ja BE on diagonaalid, F on diagonaalide lõikepunkt. $\triangle ABC \sim \triangle ABF$ jne.

8. Antud külje põhjal joonestada: 1) korrapärane kaheksanurk; 2) korrapärane kümmenurk.

9. Ruudu nurkadest lõigata osad ära nii, et tekiks korrapärane kaheksanurk.

10. Antud ruutu joonestada võrdkülgne kolmnurk, paigutades selle ühe tipu ruudu tippu või mingi külje keskpunkti.

11. Joonestada võrdkülgne kolmnurk teise võrdkülgsesse kolmnurka nii, et kolmnurkade küljed oleksid vastastikku risti.

12. Joonestada nurgad: 18°, 30°, 75°, 72°.

13. Ringjoone ümber on joonestatud mingi korrapärane hulknurk. Kasutades seda, joonestada ringjoonesse korrapärane hulknurk, millel oleks külgi kaks korda rohkem kui antud hulknurgal.

II. Ringjoone ja selle osade pikkuse arvutamine.

226. Eelselgitus. Sirglõiku saab võrrelda teise sirglõiguga, mis on võetud pikkusühikuks, sest sirged teineteise peale asetamisel ühtivad. Ja ainult sel põhjusel saame kindlaks teha, milliseid lõike lugeda võrdseiks ja milliseid mittevõrdseiks, mis on lõikude summa ja missugune lõik on teisest 2, 3, 4, . . . korda suurem jms. Samuti saame võrrelda ühesuguse raadiusega ringjoonte kaari, sest ka need kaared ühtivad pealitamisel. Et aga mingi osa ringjoonest (või mõnest teisest kõverast) ei ühti sirgega, siis pole võimalik pealitamisega kindlaks teha, kas mingi kõverjoone osa on pikkuselt võrdne antud ringjoone lõiguga või mitte, järelikult ei saa ka otsustada selle üle, missugune kõverjoone osa on 2, 3, 4, . . . korda suurem antud sirglõigust. Seepärast ongi tingimata tarvilik kindlaks teha, mida mõistame r i n g j o o n e (või selle osa) p i k k u s e all, kui seda võrdleme sirglõigu pikkusega.

Selleks tuleb meil kasutamisele võtta uus mõiste, millel on eriti suur tähtsus kogu matemaatikas, nimelt p i i r v ä ä r t u s e m õ i s t e.

Arvude järjendi piirväärtus.

227. Paljudes algebra ja geomeetria küsimustes kohtame arvude järjendit, milles arvud järgnevad üksteisele mingis seaduspärasuses. Näiteks (naturaalarvude) loomulike arvude rida:

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots ;$$

lõpmatu aritmeetiline ja geomeetriline progressioon:

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d, \ldots,$$
$$a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3, \ldots$$

kujutavad lõpmatuid arvude järjendeid.

Iga niisuguse järjendi kohta võib näidata reegli, mille põhjal ta liikmed koostatakse. Nii:

aritmeetilises progressioonis iga liikme ja eelmise liikme vahe on jääv, geomeetrilises progressioonis võrdub iga liige eelmise liikme ja mõne kindla arvu (progressiooni teguri) korrutisega.

Paljud järjendid on koostatud keerulisemate reeglite järgi. Nii näiteks arvutades $\sqrt{2}$ puuduga, algul täpsusega $\frac{1}{10}$, siis täpsusega $\frac{1}{100}$, siis täpsusega $\frac{1}{1000}$ ja jätkates arvutust piiramatult, saame lõpmatu arvude järjendi:

$$1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ 1{,}4142, \ldots,$$

mis annab $\sqrt{2}$ ligikaudsed väärtused kasvava täpsusega.

Selle järjendi jaoks pole olemas lihtsat reeglit, mille järgi oleks võimalik ühe liikme põhjal määrata järgmine liige, kuid siiski on võimalik määrata selle järjendi mistahes liige; kui näiteks on tarvis leida neljas liige, tuleb arvutada $\sqrt{2}$ täpsusega kuni 0,0001, viienda liikme saamiseks tuleb $\sqrt{2}$ arvutada täpsusega kuni 0,00001 jne.

Mööname, et antud lõpmatu järjendi liikmed $a_1, a_2, a_3, \ldots$ lähenevad vastavalt oma järjekorranumbri suurenemisele piiramatult mõnele arvule A. See tähendab järgmist: on olemas niisugune arv A, et mistahes väikese positiivse arvu q puhul meie leiame ikka antud reas niisuguse liikme, millest alates kõik liikmed oma absoluutväärtuselt erinevad A-st vähem kui q võrra. Lühidalt meie väljendame seda omadust nii: vahe $a_n - A$ absoluutväärtus kahaneb piiramatult järjekorranumbri n suurenemisega.

Niisugusel juhtumil nimetatakse arvu A antud lõpmatu arvude järjendi piirväärtuseks. Toome näite sellise järjendi kohta. Koostame kümnendmurdude järjendi:

$$0{,}9;\ 0{,}99;\ 0{,}999; \ldots$$

Siin saadakse iga järgmine liige eelmisest liikmest, sellele juurde kirjutades kümnendkoha 9.

On kerge märgata, et selle järjendi liikmed lähenevad piiramatult ühele.

Nimelt: esimene liige erineb ühest $\frac{1}{10}$ võrra, teine $\frac{1}{100}$ võrra, kolmas $\frac{1}{1000}$ võrra, ja kui järjendis küllalt kaugele minna, siis võib temas leiduda liige, mis erineb ühest kuitahes väikese etteantud arvu võrra. Järelikult võime ütelda, et võetud lõpmatul arvude järjendil on piirväärtuseks üks. Teiseks näiteks arvude järjendi kohta, millel on piirväärtus, võib olla järjend, milles liikmeina esinevad ligikaudsed lõigu pikkuse väärtused, kui lõigul pole ühismõõtu pikkusühikuga (§ 150) ja kõik väärtused on arvutatud puuduga, algul täpsusega kuni $\frac{1}{10}$, siis täpsusega kuni $\frac{1}{100}$, siis kuni $\frac{1}{1000}$ jne.

Selle järjendi piirväärtuseks on lõpmatu kümnendmurd, mis ongi antud lõigu täpne mõõtarv. Lõpmatu kümnendmurru suurus on kahe tema ligikaudse ühesuuruse täpsusega arvutatud (üks liiaga, teine puuduga) väärtuse vahel.

Nagu oli eespool näidatud, väheneb see vahe ligikaudsete väärtuste täpsuse suurenemisega piiramatult. Järelikult peab ka täpsuse suurenemisel vahe lõpmatu kümnendmurru ja tema ligikaudse väärtuse vahel piiramatult vähenema. Tähendab, lõpmatu kümnendmurd on piirväärtuseks murru kõigi ligikaudsete väärtuste järjendile. Ligikaudsed väärtused peavad olema kõik kas liiaga või jälle puuduga.

On kerge märgata, et mitte igal lõpmatul järjendil pole piirväärtust; näiteks naturaalarvude (loomulike arvude) 1, 2, 3, 4, 5, . . . real puudub ilmselt piirväärtus, sest arvud suurenevad piiramatult ega lähene mingisugusele arvule.

228. Teoreem. ***Igal lõpmatul arvude järjendil saab olla ainult üks piirväärtus.***

Selle teoreemi õigsuses veendume kergesti, kasutades vastuväitelist tõestusviisi. Tõepoolest, oletame, et antud järjendil

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$$

on kaks erinevat piirväärtust: A ja B. Niisugusel juhtumil selle põhjal, et A on järjendi piirväärtus, peab vahe $a_n - A$ absoluutväärtus piiramatult vähenema n-i suurenemisel. Samal põhjusel peab ka vahe $a_n - B$ absoluutväärtus piiramatult vähenema n-i suurenemisel.

Aga niisugusel juhul peab vahe

$$(a_n - A) - (a_n - B)$$

absoluutväärtus samuti lõpmatult vähenema või peab olema võrdne nulliga. See viimane vahe on aga arvude A ja B vahe ning on järelikult mingi täiesti määratud, nullist erinev arv. See arv ei sõltu järjekorranumbrist n ja n-i suurenemisel ta ei muutu. Seega oletus, et arvude järjendil on olemas kaks piirväärtust, viib meid vasturääkivusele.

229. Kasvava lõpmatu arvude järjendi piirväärtus.

Vaatleme niisugust järjendit: a_1, a_2, $a_3, \ldots a_n$, milles iga liige on suurem eelmisest ($a_{n+1} > a_n$) ja samal ajal kõik järjendi liikmed on väiksemad mingist kindlast arvust M, s. o. mistahes n-i puhul $a_n < M$.

Sel juhul järjendil on kindel piirväärtus (Weierstrassi teoreem).

230. Tõestus. Olgu antud lõpmatu arvude järjend

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \ldots, \tag{1}$$

milles iga liige on suurem eelmisest või võrdub temaga ($a_{n+1} \geqslant a_n$), kusjuures järjendi liikmete hulgas pole arvu, mis oleks suurem antud arvust M, näiteks pole arvu, mis oleks suurem 10-st. Võtame arvu 9 ja vaatame, kas pole järjendi (1) liikmete hulgas arve, mis oleksid suuremad 9-st. Oletame, et niisuguseid arve pole. Võtame arvu 8 ja vaatame, kas järjendis (1) on arve, mis oleksid suuremad 8-st. Oletame, et on. Nüüd kirjutame üles arvu 8 ja jagame vahemiku 8 ja 9 vahel kümneks võrdseks osaks ja teeme järjest proovid arvudega 8,1; 8,2; 8,3 . . ., s. t. me vaatame, kas järjendi (1) liikmete hulgas on arve, mis oleksid suuremad kui 8,1. Kui on, siis püstitame sama küsimuse 8,2 kohta jne. Oletame, et järjendis (1) on arve, mis on suuremad arvust 8,6, kuid 8,7-st suuremaid arve pole. Nüüd teeme teise üleskirjutuse: kirjutame üles 8,6 ja jagame vahemiku 8,6 ja 8,7 vahel 10-ks võrdseks osaks ja teeme järjest kontrolli arvudega 8,61; 8,62; 8,63; . . . Oletame, et järjendis (1) on arve, mis on suuremad arvust 8,64, kuid pole niisuguseid arve, mis oleksid suuremad 8,65-st. Nüüd teeme kolmanda üleskirjutuse 8,64 ja toimime samal viisil vahemikuga 8,64 kuni 8,65. Jätkates seda toimingut piiramatult, saame lõpmatu kümnendmurru 8,64 . . ., s. t. mõne reaalarvu. Tähistame selle α-ga ja võtame tema ligikaudsed väärtused n kümnendkohaga puuduga ja liiaga. Esimene olgu α_n, teine on α'_n. Seejuures, nagu teame (§ 150),

$$\alpha_n < \alpha < \alpha'_n \quad \text{ja} \quad \alpha'_n - \alpha_n = \frac{1}{10^n}.$$

Reaalarvu α koostamise viisist järeldub, et arvude järjendi (1) liikmete hulgas pole arve, mis oleksid suuremad kui α'_n, on aga arve, mis on suuremad kui α_n. Olgu a_k üks selline arv:

$$\alpha_n < a_k < \alpha'_n.$$

Järjendi (1) kasvamise tõttu ja selle tõttu, et temas pole liikmeid, mis oleksid suuremad kui α'_n, järeldame, et kõik järjendi järgnevad liikmed a_{k+1}, $a_{k+2}, \ldots$ asetsevad samuti α_n ja α'_n vahel, s. t. kui $m > k$, siis $\alpha_n < a_n < \alpha'_n$.

Et aga reaalarv α asetseb samuti α_n ja α'_n vahel, siis vahe $a_m - \alpha$ absoluutväärtus on väiksem arvude α'_n ja α_n vahest. Aga $\alpha'_n - \alpha = \frac{1}{10^n}$, järelikult

$$\left| a_m - \alpha \right| < \frac{1}{10^n}. \tag{2}$$

Seega igale n-i väärtusele saab näidata niisuguse arvu k, et $m \geqslant k$ puhul on kehtiv võrratus (2). Et aga n-i piiramatul kasvamisel murd $\frac{1}{10^n}$ piiramatult kahaneb, siis võrratusest (2) järeldub, et reaalarv α on järjendi (1) piirväärtus. Seega arvude järjend (1) omab kindla piirväärtuse.

231. Muutuva suuruse piirväärtus. Kui on antud arvude järjend $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, siis võib siin n-ndat liiget nimetada *muutuvaks suuruseks,* mille arvuline väärtus sõltub järjekorranumbrist n. Nimetust «muutuv suurus» kasutatakse sageli kõne lihtsustamiseks. Nii öeldakse väljenduse «on antud lõpmatu arvude järjend $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$» asemel «on antud muutuv suurus a_n, millel võivad olla järjest väärtused $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$». Kui kasutada seda väljendusviisi, siis võib rääkida järjendi piirväärtuse asemel muutuva suuruse piirväärtusest.

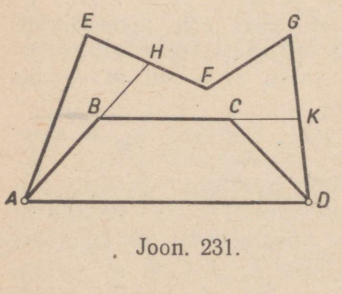
Niisugusel juhul võib § 228 teoreemi sõnastada järgmiselt: «Igal muutuval suurusel on ainult üks piirväärtus». Seda teoreemi sõnastatakse tihti ka nii: «Kui on antud kaks muutuvat suurust a_n ja b_n, kusjuures esimese suuruse kõik väärtused on vastavalt võrdsed teise suuruse väärtustega: $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $a_n = b_n, \ldots$, siis esimese suuruse piirväärtus, muidugi kui ta on olemas, võrdub teise suuruse piirväärtusega» ehk lühidalt: «Kui kaks muutuvat suurust on võrdsed, siis on võrdsed ka nende piirväärtused.»

Teoreemi (§ 229) lõpmatult kasvava arvude järjendi piirväärtusest võib sõnastada nii: *kui muutuv suurus a_n kasvab järjekorranumbri n kasvamisel ja samal ajal püsib väiksemana mõnest jäävast arvust, siis sellel muutuval suurusel on piirväärtus.*

Ringjoone pikkus.

Piirväärtuse mõiste annab meile võimaluse täpselt määrata, mida meie mõistame ringjoone pikkuse all. Eelkõige tõestame järgmised teoreemid.

232. Teoreem. *Kumer murdjoon* (*ABCD*, joon. 231) ***on väiksem igast murdjoonest*** (*AEFGD*), ***mis teda hõlmab.***



Joon. 231.

Mõisteil «hõlmav murdjoon» ja «hõlmatav murdjoon» on järgmine mõte. Olgu kahel murdjoonel (nagu neil, mis on kujutatud joonisel) ühised otspunktid A ja D; nad on asetatud niiviis, et üks murdjoon ($ABCD$) on terveni selle hulknurga sees, mis on moodustatud teise murdjoone ja lõigu AD poolt; siis välist murdjoont nimetatakse hõlmavaks ja seesmist hõlmatavaks murdjooneks.

Tuleb tõestada, et hõlmatav murdjoon $ABCD$ (kui ta on kumer) on lühem igast hõlmavast murdjoonest $AEFGD$ (ükskõik, kas kumerast või mittekumerast), s. t. et

$$AB+BC+CD<AE+EF+FG+GD.$$

Pikendame kumera murdjoone lülisid nii, nagu näidatud joonisel. Siis, arvestades seda, et sirglõik on väiksem igast sirglõigu otspunkte ühendavast murdjoonest, võime kirjutada järgmised võrratused:

$$AB+BH<AE+EH;$$
$$BC+CK<BH+HF+FG+GK;$$
$$CD<CK+KD.$$

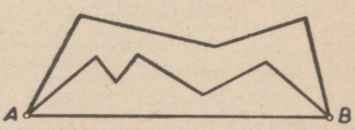
Liidame liikmeti kõik need võrratused ja saadud võrratuse mõlemast poolest lahutame abilõigud BH ja CK; edasi asendame summa $EH+HF$ lõiguga EF ja summa $GK+KD$ lõiguga GD, saame otsitava võrratuse.

Märkus. Kui hõlmatav joon poleks kumer (joon. 232), siis esitatud tõestust me ei saaks rakendada. Sel juhul võib hõlmatav murdjoon olla isegi suurem hõlmavast murdjoonest.

233. Teoreem. ***Kumera hulknurga*** ($ABCD$) ***ümbermõõt on väiksem iga teise, esimest hõlmava hulknurga*** ($LMNPQR$) ***ümbermõõdust*** (joon. 233).

Tuleb tõestada, et

$$AB+BC+CD+DA<LM+MN+NP+PQ+QR+RL.$$



Joon. 232.

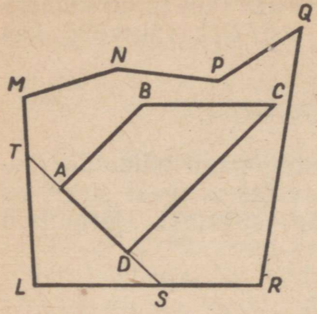
Olles pikendanud mõlemas suunas kumera hulknurga mingit külge AD, rakendame murdjoontele $ABCD$ ja $ATMNPQRSD$, mis ühendavad punkte A ja D, eelmise paragrahvi teoreemi; saame võrratuse:

$$AB+BC+CD<AT+TM+MN+NP+PQ+$$
$$+QR+RS+SD.$$

Teiselt poolt, et lõik ST on väiksem murdjoonest SLT, siis võime kirjutada:

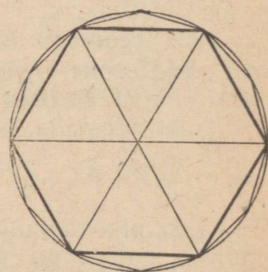
$$TA+AD+DS<TL+LS.$$

Liidame liikmeti need kaks võrratust ja lahutame mõlemast poolest abilõigud AT ja DS; edasi asendame summa $TL+TM$ lõiguga LM ja summa $LS+RS$ lõiguga LR, saame otsitava võrratuse.



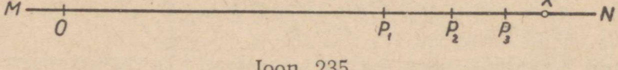
Joon. 233.

234. Ringjoone pikkuse definitsioon. Joonestame antud ringjoonesse (joon. 234) korrapärase hulknurga, näiteks kuusnurga, ja paigutame mingile sirgele MN (joon. 235) lõigu OP_1, mis on võrdne selle kuusnurga ümbermõõduga (meie joonisel on see ümbermõõt ruumi puudusel kujutatud lühendatult). Nüüd kahekordistame kõõlkuusnurga külgede arvu, s. o. kuusnurga asemel võtame korrapärase kõõlkaksteistnurga. Leiame selle ümbermõõdu ja paigutame ta sirgele MN samast punktist O; olgu see pikkus OP_2, mis peab olema suurem OP_1-st, sest kuusnurga iga ühe külje asemel võetakse nüüd murdjoon (mis koosneb kahest 12-nurga küljest); see murdjoon on aga pikem kuusnurga küljest. Kahekordistame jälle kõõlkaksteistnurga külgede arvu, s. t. võtame nüüd korrapärase kõõl-24-nurga (joonisel pole näidatud), leiame selle ümbermõõdu ja paigutame ta sirgele MN jälle alates samast punktist O; saame lõigu OP_3, mis on suurem kui OP_2 samal põhjusel, mispärast OP_2 on suurem kui OP_1.



Joon. 234.

Nüüd kujutleme, et see kahekordistamise ja ümbermõõtude paigutamise toiming kestab üha. Siis saame ümbermõõtude OP_1, OP_2, OP_3, . . . kasvava järjendi. Kuid see kasvamine ei saa olla piiramatu, sest iga kumera kõõlhulknurga ümbermõõt (olgu hulknurga külgede arv kuitahes suur) on ikka väiksem mistahes külgede arvuga puutujahulknurga ümbermõõdust (mis on hõlmavaks hulknurgaks kõõlhulknurga suhtes). Seetõttu on saadud korrapäraste kõõlhulknurkade ümbermõõtude järjendil kindel piirväärtus (§ 229). See piirväärtus ongi ringjoone pikkuseks. Seega anname järgmise d e f i n i t s i o o n i: *ringjoone pikkuseks nimetame seda piirväärtust, millele läheneb selle ringjoone sisse joonestatud korrapärase kõõlhulknurga ümbermõõt, kui hulknurga külgede arvu piiramatult kahekordistada.*



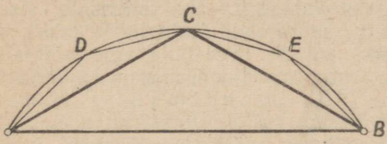
Joon. 235.

M ä r k u s. On võimalik tõestada (me jätame selle tõestuse ära), et see piirväärtus ei sõltu sellest, millisest hulknurgast me alustame kahekordistamist.

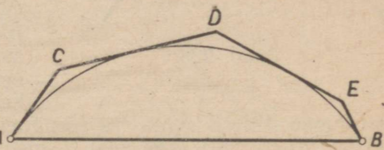
Veel enam, võib tõestada, et ka siis, kui kõõlhulknurgad pole korrapärased, nende ümbermõõdud lähenevad siiski samale piirväärtusele kui korrapäraste hulknurkade ümbermõõdudki, on vaid tarvis, et küljed piiramatult väheneksid (ja järelikult külgede arv piiramatult suureneks), seejuures pole tähtis, kas külgede arvu suurenemine toimub kahekordistamise teel või mõne teise seaduse põhjal (tõestuse jätame ära).

Seega, igal ringjoonel on oma üksainus piirväärtus, millele läheneb tema sisse joonestatud kumera kõõlhulknurga ümbermõõt, kui hulknurga küljed piiramatult vähenevad; see piirväärtus ongi ringjoone pikkuseks.

Samal viisil võetakse ringjoone mingi kaare AB (joon. 236) pikkuseks see piirväärtus, millele läheneb selle kaare sisse joonestatud murdjoone ümbermõõt, kui murdjoone lülide arvu piiramatult kahekordistada.



Joon. 236.



Joon. 237.

235. Teoreemid. Esituse lihtsustamiseks esitame tõestuseta järgmised peaaegu ilmselt kehtivad laused:

ringjoone kaare pikkus on: 1) suurem temale vastavast kõõlust, kuid 2) väiksem igast tema ümber joonestatud ja temaga ühiseid otspunkte omavast murdjoone pikkusest (joon. 237).

236. Nende lausete tõestus.

1) Olgu ACB (joon. 236) ringjoone kaar ja AB vastav kõõl; tuleb tõestada, et kaar on pikem sellest kõõlust.

Oletame, et joonestame kaaresse korrapärased murdjooned niiviisi: esimene murdjoon koosnegu kahest kõõlust AC ja CB; teise murdjoone saame esimesest selle lülide kahekordistamise teel; see on murdjoon $ADCEB$, mis koosneb neljast kõõlust; kolmanda murdjoone saame teisest selle lülide kahekordistamise teel: see juba koosneb kaheksast kõõlust. Nüüd kujutleme, et kahekordistamise toiming jätkub piiramatult. Siis iga kahekordistamisega murdjoone ümbermõõt üha kasvab; näiteks:

$$AD+DC+CE+EB>AC+CB,$$

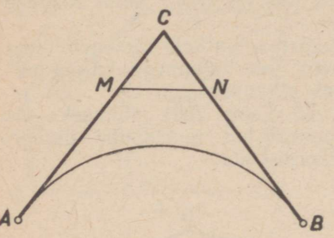
sest

$$AD+DC>AC \text{ ja } CE+EB>CB.$$

Seetõttu piirväärtus, millele läheneb see ümbermõõt, peab olema suurem esimese murdjoone ümbermõõdust, s. t. suurem summast $AC+CB$ ja seega peab olema suurem ka kõõlust AB. See piirväärtus on aga kaare ACB pikkus: tähendab, see kaar peab olema suurem kõõlust AB.

2) Olgu ümber kaare joonestatud mingi murdjoon (ükskõik, kas korrapärane või mitte) (joon. 237). Kui murdjoone otspunktid ühtivad kaare otstega, siis kaarele võib vaadata kui mitme kaare summale; iga kaar on kahest lõigust koosnevast murdjoonest hõlmatud. Olgu üheks niisuguseks osaks kaar AB (joon. 238). Tõestame, et selle kaare pikkus on väiksem summast $AC+CB$, mille lihtsuse mõttes tähistame S-ga. Tõestuseks võtame abimurdjoone $AMNB$, mille

saame, kui lõikame nurga C läbi mingi lõiguga MN, mis aga *ei tohi* kaart AB *lõigata*. (See on alati võimalik, kui murdjoon on ümberjoonestatud murdjoon, s. t. koosneb puutujaist.) Tähistame selle abimurdjoone $AMNB$ pikkuse S_1-ga. Et $MN<MC+NC$, siis $S_1<S$.



Joon. 238.

Tõestame nüüd, et piirväärtus, millele läheneb kaaresse AB joonestatud korrapärase murdjoone ümbermõõt, ei saa olla suurem kui S_1, kui murdjoone külgede arv suureneb piiramatult. Tähistame selle piirväärtuse L-iga ja oletame, et $L>S_1$. Et muutuv ümbermõõt läheneb oma piirväärtusele L *kui tahes lähedale*, siis vahe L ja murdjoone ümbermõõdu vahel võib saada väiksemaks vahest $L—S_1$; tähendab, sissejoonestatud murdjoone ümbermõõt saaks siis suuremaks kui S_1. See pole aga võimalik, sest iga kumer murdjoon, mis on joonestatud kaaresse AB, on *hõlmatav* hõlmava murdjoone $AMNB$ suhtes ja seepärast on väiksem kui S_1. Järelikult ei saa oletada, et $L>S_1$. Siis aga peab L olema kas väiksem kui S_1 või äärmisel juhtumil võrdne sellega. Et aga $S_1<S$, siis nii ühel kui teisel juhtumil peab L olema väiksem kui S, mida oligi tarvis tõestada.

237. Ringjoone pikkuse määramine. Selleks võib kasutada *kahekordistamise* valemit, mille tuletasime varem (§ 224), s. t. valemit:

$$a_{2n}^2 = 2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}.$$

Kui raadius R on 1, siis valemil on lihtsam kuju:

$$a_{2n}^2 = 2 - 2\sqrt{1 - \frac{a_n^2}{4}}.$$

Tähistades tavakohaselt korrapärase kõõlhulknurga külje a_n-ga (külgede arv on n), siis saame $a_6 = R = 1$.

Rakendades kahekordistamise valemit, leiame:

$$a_{12}^2 = 2 - 2\sqrt{1 - \frac{1}{4}} = 2 - \sqrt{3};$$

$$a_{24}^2 = 2 - 2\sqrt{1 - \frac{a_{12}^2}{4}}; \qquad a_{48}^2 = 2 - 2\sqrt{1 - \frac{a_{42}^2}{4}} \text{ jne.}$$

Oletame, et katkestasime kahekordistamise 96-nurga juures. Selleks et saada selle hulknurga ümbermõõt, tuleb külg korrutada 96-ga. Sellele ümbermõõdule me võime vaadata kui ringjoone pikkuse ligikaudsele väärtusele. Tähistanud selle p_{96}-ga ja teostanud arvutused, leiame:

$$p_{96}=6,2820638\ldots$$

Kui raadius on R, siis saame:

$$p_{96}=R\cdot 6,2820638\ldots \text{ ehk } p_{96}=2R\cdot 3,1410319\ldots$$

Tähistades ringjoone pikkuse C-ga, saame sellele ligikaudse valemi:

$$C=2R\cdot 3,1410319\ldots$$

Kui kahekordistamine oleks piirdunud 192-nurgaga, siis oleksime saanud ringjoone pikkusele täpsema väärtuse, nimelt:

$$C=2R\cdot 3,14145247\ldots$$

Jätkates kahekordistamise toimingut, võib saada ringjoone pikkusele üha täpsemaid väärtusi.

238. Ringjoone pikkuse suhe diameetriga. Ringjoone pikkuse määramise toimingust näeme, et arv, millega tuleb korrutada diameetrit ringjoone pikkuse saamiseks, ei sõltu diameetrist enesest. Kui leidsime, et mingi ringjoone pikkuse määramisel pidime diameetrit korrutama mõne arvuga, siis ka iga teise ringjoone pikkuse määramisel peame tema diameetrit korrutama sellesama arvuga.

Võtame kaks ringjoont, ühe raadius olgu R, teise raadius aga r. Esimese ringjoone pikkuse tähistame C-ga, teise oma c-ga. Joonestame mõlemasse ringjoonesse korrapärased hulknurgad ühesuuruse külgede arvuga ja hakkame kahekordistama nende hulknurkade külgede arvu.

Tähistame P_n-ga esimesse ringjoonesse joonestatud korrapärase hulknurga ümbermõõdu ja p_n-ga teise ringjoonesse joonestatud korrapärase hulknurga ümbermõõdu.

Paragrahvis 218 tõestatud teoreemide põhjal võime kirjutada:

$$\frac{P_n}{R}=\frac{p_n}{r} \text{ ehk } \frac{P_n}{2R}=\frac{p_n}{2r}.$$

Muutuva ümbermõõdu P_n piirväärtuseks on esimese ringjoone pikkus C. Teise muutuva ümbermõõdu p_n piirväärtuseks on teise ringjoone pikkus c. Seepärast võrdusest $\frac{P_n}{2R}=\frac{p_n}{2r}$ järeldub, et $\frac{C}{2R}=\frac{c}{2r}$ (§ 228 ja § 231). Seega võime ütelda, et *ringjoone pikkuse suhe tema diameetriga on jääv suurus kõigi ringjoonte puhul.*

Seda jäävat arvu tähistatakse kreeka tähega π [1].
Niisiis võime ringjoone pikkusele C kirjutada valemi:

$$C=2R\cdot\pi \text{ ehk } C=2\pi R.$$

On tõestatud, et arv π on **irratsionaalne** arv, tähendab, seda ei saa väljendada mingisuguse ratsionaalse arvuga. Tema ligikaudseid väärtusi võib aga leida mitmel viisil ja soovitava täpsusega. Võtnud ringjoone pikkuse ligikaudseks väärtuseks kõõl-96-nurga ümbermõõdu, saame π-le ligikaudse väärtuse 3,14 puuduga, s. o. täpsusega kuni 0,01. See täpsus on praktiliseks otstarbeks peaaegu alati küllaldane. Erilist täpsust nõudvail juhtumeil võib piirduda ligikaudse väärtusega (liiaga) $\pi=3{,}1416$.

Teadlased, kasutades täiuslikumaid võtteid, määrasid π täpsusega, mis kaugelt ületab kõiki praktilisi nõudeid (nii määras inglise matemaatik Shanks 1873. aastal π-le 707 kümnendkohta [2]).

On kasulik ära märkida, et juba III saj. e. m. a. kuulus Sürakuusa teadlane Archimedes leidis π-le väga lihtsa arvu $\frac{22}{7}$, s. o. $3\frac{1}{7}$. See arv on pisut suurem π-st ja erineb sellest vähem kui 0,002 võrra.

Geomeetriliste ülesannete lahendamisel esineb tihti π pöördarv, s. o. $\frac{1}{\pi}$. On kasulik meeles pidada sellest arvust mõned kümnendkohad.

$$\frac{1}{\pi}=0{,}3183098\ldots$$

239. ***n* kraadi sisaldava kaare pikkus.** Ringjoone pikkus on $2\pi R$, 1°-se kaare pikkus on $\frac{2\pi R}{360}=\frac{\pi R}{180}$; järelikult, n kraadi sisaldava kaare pikkus S väljendub nii:

$$S=\frac{\pi Rn}{180}.$$

---

[1] See tähistus on tõenäoliselt tarvitusele võetud XVII sajandil. Täht π (pii) on kreekakeelse sõna *περιφερέια* (ringjoon) algtäht.

[2] Et meeles pidada üsna pikk rida arvu π kümnendkohti, võib kasutada järgmist prantsuskeelset riimi:

Que j'aime à faire apprendre
Un nombre utile aux hommes!

või venekeelset riimi, mis on koostatud keskkooliõpetaja Schönrocki poolt:

Кто и шутя и скоро пожелает(ъ)
Пи узнать число уж(ъ) знает(ъ)!

Kui välja kirjutada ritta nendes sõnades esinevate tähtede arvud (sõnad on kirjutatud vana ortograafia järgi), siis saame π-le ligikaudse väärtuse (liiaga) 3,1415926536. Täpsus on kuni poole kümnebiljondikuni.

Kui kaar on väljendatud minutites (n') või sekundites (n''), siis ta pikkus väljendub vastavalt valemitega:

$$S = \frac{\pi R n}{180 \cdot 60} \text{ või } S = \frac{\pi R n}{180 \cdot 60 \cdot 60},$$

kus n on minutite või sekundite arv.

240. Ülesanne. *Arvutada täpsusega kuni 1 mm ringjoone raadius, kui selle 81°21′36″ sisaldava kaare pikkus on 0,452 m.*

Muutes 81°21′36″ sekunditeks, saame arvu 292 896. Võrrandist

$$0{,}452 = \frac{\pi R \cdot 292\,896}{180 \cdot 60 \cdot 60}$$

leiame:

$$R = \frac{0{,}452 \cdot 180 \cdot 60 \cdot 60}{292\,896 \pi} = \frac{1}{\pi} = 0{,}318 \text{ (m)}.$$

241. Ülesanne. *Määrata kraadide arv kaares, mille pikkus võrdub raadiusega.*

Asendades valemis, mis määrab n kraadi sisaldava kaare pikkuse, S-i R-ga, saame võrrandi:

$$R = \frac{\pi R n}{180} \text{ ehk } 1 = \frac{\pi n}{180};$$

siit

$$n^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} = 180^\circ \cdot \frac{1}{\pi} = 180^\circ \cdot 0{,}3183098 = 57^\circ{,}295764 =$$
$$= 57^\circ 17' 44''{,}8.$$

Tähendame, et kaart, mille pikkus võrdub raadiusega, nimetatakse radiaaniks.

Harjutusi.

1. Tõestada, et kahes ringis niisugused kesknurgad, mille vastavad kaared on võrdsed, suhtuvad nagu raadiuste pöördväärtused.

2. Läbi ringjoonel võetud punkti A on tõmmatud diameeter AB, korrapärase kõõlkuusnurga külg AC ja puutuja MN. Keskpunktist O on joonestatud AC-le ristlõik, mis on pikendatud lõikumiseni puutujaga punktis D. Sellest punktist on paigutatud puutujale (läbi punkti A) lõik DE, mis on võrdne kolme raadiusega. Punkt E on ühendatud diameetri otspunktiga B. Määrata vea suurus, kui BE võtta poolringjoone pikkuseks.

3. Antud poolringjoone diameetrile on joonestatud kaks võrdset poolringjoont ja sellesse kolme poolringjoone vahelisse kujundisse on joonestatud ring. Tõestada, et selle ringi diameeter suhtub võrdsete poolringjoonte diameetriga nagu 2 : 3.

4. Arvutada kraadides, minutites ja sekundites kaar, mille pikkus võrdub selle ringjoone sisse joonestatud ruudu küljega.

5. Arvutada maakera ekvaatori 1°-se kaare pikkus. Maa raadius = =6400 km.

VIIES PEATÜKK.

PINDALADE MÕÕTMINE.

I. Hulknurkade pindalad.

242. Pindala mõiste. Igapäevasest elust on igaühel meist teatav kujutlus pindalast.

Asume nüüd täpsustama kujundi pindala mõistet ja kindlaks määrama pindala mõõtmise võtteid.

243. Põhidefinitsioonid pindaladest. *Hulknurga külgedega või mõne muu tasapinnalise kinnise kõveraga piiratud pinna osa nimetatakse selle kujundi* ***pindalaks.***

Me esitame endale ülesande: leida pindala suurusele väljendus mõne arvu kujul, s. t. leida pindala mõõtarv.

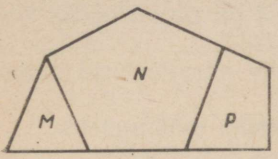
Seejuures on nõutav, et kujundite pindalade ja nende mõõtarvude vaheline seos rahuldaks järgmisi tingimusi.

1) Kahe võrdse kujundi pindalade mõõtarvud peavad olema võrdsed.

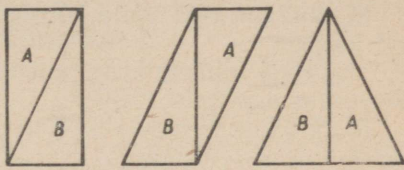
2) Kui antud kujund on tükeldatud mitmeks osaks (M, N, P, joonis 239), milledest igaüks on kinnine kujund, siis terve kujundi pindala mõõtarv peab võrduma tema osade pindalade mõõtarvude summaga.

Märkus. Viimase nõude suhtes tuleb tingimata teha järgmine tähtis märkus. Pindalasid mõõdame positiivsete arvudega. Kahe positiivse arvu summa on aga ikka suurem kummastki liidetavast. Seepärast ongi, et teise nõude võiks vastu võtta, tingimata tarvis, et kujundite pindaladel oleksid vastavad omadused. Selgitame seda. Oletame, et olles tükeldanud antud kujundi mitmeks osaks, paigutame need osad ümber ja saame seejuures uued kujundid (nagu see on tehtud joonisel 240 osadega A ja B). Tekib küsimus: kas on võimalik osade ümberpaigutamisega saada niisugune kujund, mis mahuks täielikult esialgsesse kujundisse? Kui see oleks võimalik, siis saaksime kaks kujundit, milledest üks asetseks teise sees, seejuures aga oleksid nende pindalade mõõtarvud vastavalt teisele nõudele võrdsed.

Seega terve kujundi pindala mõõtarv osutuks võrdseks kujundi mõne osa pindala mõõtarvuga, s. t. summa võrduks ühe liidetavaga, mis pole aga võimalik positiivsete arvude puhul. Järelikult, teist tingimust me ei saa sel juhtumil vastu võtta. Esimesena juhtis tähelepanu sellele küsimusele Itaalia matemaatik Dezolt (1881). Ülalmainitud ümberpaigutamise võimalust peeti algul aksioomiks, hiljem aga tõestasid rangelt seda võimalust Schur, Killing, Šatunovski ja Hilbert. See kujundite pindalade omadus lubab meil vastu võtta teise tingimuse.



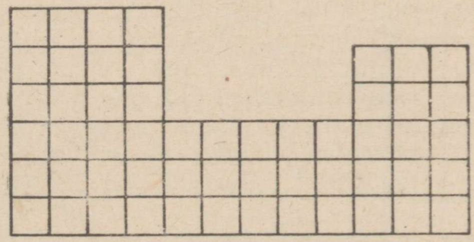
Joon. 239.



Joon. 240.

Kujundeid, mille pindalad on võrdsed, nimetatakse **pindvõrdseiks**. Võrdsed kujundid on muidugi ka pindvõrdsed, aga pindvõrdseteks kujunditeks võivad olla ka mittevõrdsed kujundid (nagu need, mis on kujutatud joonisel 240).

244. Pindala mõõtmise mõiste. Antud kujundi pindala mõõtmiseks valitakse kõigepealt pindalaühik. Niisuguseks ühikuks võetakse ruut, mille külg võrdub mingi pikkusühikuga, näit. ühe meetriga, ühe sentimeetriga jne. Kujult lihtsaimate kujundite pindalade mõõtarv saadakse järgmisel viisil. Paigutame pindalaühiku mõõdetavasse pindalasse nii palju kordi, kui palju see on võimalik. Seda võib teha väikeste pindalade puhul, mida on võimalik joonestada paberile, läbipaistva millimeeterpaberi abil. Oletame, et mõõdetavale kujundile on paigutatud selline ruutude võrk. Kui antud kujundi piirjoon moodustab murdjoone (joon. 241), mille lülid



Joon. 241.

ühtivad ruutude võrku moodustavate sirgete osadega, siis kujundi sees olevate ruutude arv annab antud kujundi pindala täpse mõõtarvu.

Tegelikult toimub aga pindalade mõõtmine mitte pindalaühiku või selle osa pealitamisega, vaid kaudselt — kujundi mõnede joonte mõõtmise abil. Kuidas seda tehakse, näeme järgmistest paragrahvidest.

245. **Alus ja kõrgus.** Kokkuleppe põhjal nimetame kolmnurga või rööpküliku üht külge **aluseks**, ristlõiku aga, mis on joonestatud sellele küljele kolmnurga tipust või rööpküliku puhul vastaskülje mistahes punktist, nimetame **kõrguseks.**

Ristkülikus võib võtta kõrguseks külje, mis on risti aluseks võetud küljega.

Trapetsis nimetatakse alusteks mõlemaid paralleelseid külgi, kõrguseks aga ühist ristlõiku aluste vahel.

Ristkülikus nimetatakse alust ja kõrgust tema **mõõtmeteks.**

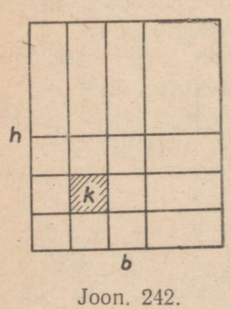
246. Teoreem. ***Ristküliku pindala võrdub tema aluse ja kõrguse korrutisega.***

Seda lühikest lauset tuleb mõista nii: ristküliku pindala mõõtarv ruutühikuis võrdub tema aluse ja kõrguse vastavais pikkusühikuis väljendatud mõõtarvude korrutisega.

Tõestusel võib esineda kolm juhtumit.

1) Aluse ja kõrguse pikkused (mõõdetuna ühe ja sama ühikuga) on väljendatud t ä i s a r v u d e g a.

Võrdugu antud ristküliku (joon. 242) alus täisarvuga b pikkusühikut ja kõrgus täisarvuga h sama pikkusühikut. Jaotanud aluse b-ks ja kõrguse h-ks võrdseks osaks, tõmbame läbi jaotuspunktide rea kõrgusega paralleelseid ja rea alusega paralleelseid sirgeid. Nende sirgete vastastikusel lõikumisel tekivad nelinurgad. Võtame ühe neist, näiteks nelinurga k (joonisel viirutatud). Et selle nelinurga küljed on konstruktsiooni põhjal paralleelsed antud ristküliku vastavate külgedega, siis on kõik ta nurgad täisnurgad; seega nelinurk k on ristkülik. Teiselt poolt, selle nelinurga iga külg võrdub kahe naaberparalleeli vahelise kaugusega, s. t. võrdub pikkusühikuga. Tähendab, ristkülik k on ruut, nimelt see ruutühik, mis vastab võetud pikkusühikule (kui näiteks alus ja kõrgus on mõõdetud sentimeetritega, siis ruudu pindala on üks ruutsentimeeter). Et ühe nelinurga kohta öeldu on kehtiv ka iga teise nelinurga kohta, siis see tähendab, et me oleme antud ristküliku pindala tõmmatud paralleelidega jaotanud ruutühikuiks. Leiame nende arvu. On ilmne, et sirged, mis on paralleelsed alusega, jaotavad ristküliku niisama suureks rõhtsaks ribade arvuks, kui palju on kõrguses pikkusühikuid, s. t. h-ks võrdseks ribaks. Teiselt poolt, sirged, mis on paralleelsed kõrgusega, jaotavad iga rõhtsa riba niimitmeks ruutühikuks, kui palju pikkusühikuid on aluses, s. t. b-ks ruutühikuks. Tähendab, ruutühikuid on kokku $b \cdot h$. Seega:



Joon. 242.

$$\text{ristküliku pindala} = bh,$$

s. t. ta võrdub aluse ja kõrguse korrutisega.

2) Aluse ja kõrguse pikkused (mõõdetuna ühe ja sama ühikuga) on väljendatud murdarvudega.

Olgu näiteks antud ristküliku

$$\text{alus} = 3\frac{1}{2} = \frac{7}{2} \text{ pikkusühikut ja}$$

$$\text{kõrgus} = 4\frac{3}{5} = \frac{23}{5} \text{ sama ühikut.}$$

Tehes murrud ühenimelisteks, saame:

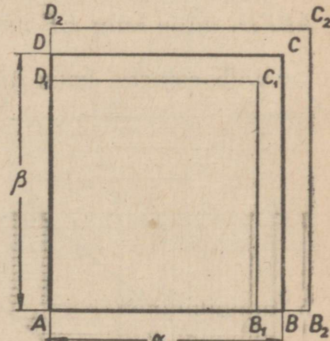
$$\text{alus} = \frac{35}{10}; \quad \text{kõrgus} = \frac{46}{10}.$$

Võtame $\frac{1}{10}$ pikkusühikust uueks pikkusühikuks. Siis võime ütelda, et aluses on neid uusi ühikuid 35 ja kõrguses 46. Tähendab, 1. juhtumil tõestatu põhjal ristküliku pindala võrdub $35 \cdot 46$ ruutühikuga, mis vastavad uuele pikkusühikule. See uus ruutühik on aga $\frac{1}{100}$ osa sellest ruutühikust, mis vastab eelmisele pikkusühikule; tähendab, ristküliku pindala võrdub eelmistes ruutühikutes:

$$\frac{35 \cdot 46}{100} = \frac{35}{10} \cdot \frac{46}{10} = 3\frac{1}{2} \cdot 4\frac{3}{5} \text{ (ruutühikut).}$$

3) Alus ja kõrgus (või ainult üks neist) ei oma ühismõõtu pikkusühikuga ja järelikult on nende pikkused väljendatud irratsionaalarvudega.

Sel juhtumil tuleb leppida pindala mõõtmise ligikaudse tulemusega soovitava täpsuseni.



Joon. 243.

Kuid ka sel juhul võib leida ristküliku pindala täpse mõõtarvu. Olgu ristküliku $ABCD$ (joon. 243) aluse AB pikkus väljendatud irratsionaalarvuga α ja kõrguse AD pikkus irratsionaalarvuga β. Kumbagi neist arvudest võib kujutada lõpmatu mitteperioodilise kümnendmurruna (§ 150). Võtame nende arvude ligikaudsed väärtused n kümnendkohaga, enne puuduga, siis liiaga. Ligikaudsed väärtused puuduga tähistame α_n-ga (esimese arvu jaoks) ja β_n-ga (teise arvu jaoks), aga ligikaudsed väärtused liiaga vastavalt α'_n- ja β'_n-ga. Paigutame alusele AB punktist A esmalt lõigu AB_1, mille arvuline väärtus on α_n, siis lõigu AB_2 arvulise väärtusega α'_n. Ilmselt $AB_1 < AB$ ja $AB_2 > AB$. Siis paigutame kõrgusele AD punktist A lõigud AD_1 ja AD_2, mille arvulised väärtused võrduvad vastavalt β_n ja β'_n. Ilmselt $AD_1 < AD$ ja $AD_2 > AD$.

Joonestame kaks abiristkülikut $AB_1C_1D_1$ ja $AB_2C_2D_2$. Nendest kummagi alus ja kõrgus on väljendatud ratsionaalarvudega:

$$AB_1 = \alpha_n;\ AB_2 = \alpha'_n,\ AD_1 = \beta_n,\ AD_2 = \beta'_n.$$

Seepärast teisel juhtumil tõestatu põhjal

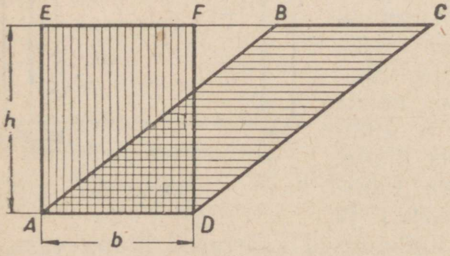
$$AB_1C_1D_1 \text{ pindala} = \alpha_n \cdot \beta_n,$$
$$AB_2C_2D_2 \quad \text{„} \quad = \alpha'_n \cdot \beta'_n.$$

Nüüd suurendame arvu n piiramatult. Niisugusel juhtumil α_n ja α'_n lähenevad piirväärtusele — irratsionaalarvule α, β_n ja β'_n lähenevad irratsionaalarvule β. Korrutised $\alpha_n\beta_n$ ja $\alpha'_n\beta'_n$ aga, nagu on teada algebrast, lähenevad ühisele piirväärtusele, mida nimetatakse arvude α ja β korrutiseks (§ 154). See ühine korrutiste $\alpha_n\beta_n$ ja $\alpha'_n\beta'_n$ piirväärtus võetaksegi ristküliku $ABCD$ pindala mõõtarvuks. On kerge otseselt veenduda selles, et see mõõtarv rahuldab neid kaht tingimust, mida peab rahuldama pindala mõõtarv (§ 243), nimelt: 1) võrdsete ristkülikute mõõtarvud on võrdsed; 2) kui ristkülik tükeldada mitmeks osaks, siis terve ristküliku pindala mõõtarv võrdub tema osade pindalade mõõtarvude summaga. Seega ka kolmandal juhtumil ristküliku pindala võrdub aluse ja kõrguse korrutisega.

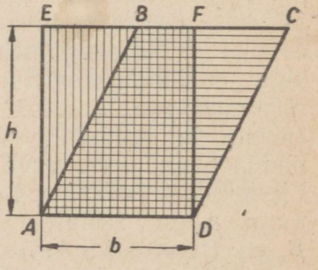
247. Teoreem. ***Rööpküliku*** ($ABCD$, joon. 244 ja 245) ***pindala võrdub aluse ja kõrguse korrutisega.***

Joonestame alusele AD (ühel ja teisel joonisel) ristküliku $AEFD$, mille külg EF asetseb külje BC pikendusel.

Võib esineda kaks juhtumit.



Joon. 244.



Joon. 245.

1) Külg BC on väljaspool külge EF ja 2) külg BC ühtib osalt EF-ga (esimene juhtum on kujutatud joonisel 244, teine joonisel 245). Tõestame, et nii ühel kui ka teisel juhtumil

$$\text{pindala } ABCD = \text{pindala } AEFD.$$

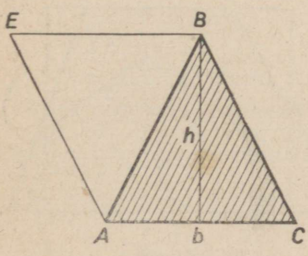
Kui täiendame rööpkülikut kolmnurgaga AEB või ristkülikut kolmnurgaga DFC, siis saame mõlemal juhul sama trapetsi $AECD$. Et aga täiendavad kolmnurgad on võrdsed (neil on vastavalt võrdsed kaks külge ja nende külgede vahel olevad nurgad), siis on rööpkülik ja ristkülik pindvõrdsed. $AEFD$ pindala aga võrdub korrutisega bh; järelikult ka $ABCD$ pindala $= bh$, seejuures b on rööpküliku alus ja h tema kõrgus.

248. Teoreem. ***Kolmnurga*** (ABC, joon. 246) ***pindala võrdub aluse ja kõrguse poole korrutisega.***

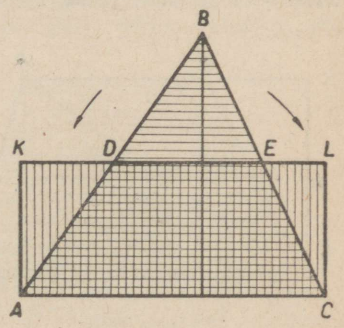
Tõmbame $BE \| AC$ ja $AE \| BC$. Saame rööpküliku $AEBC$, mille pindala tõestatu põhjal võrdub bh-ga. Kolmnurga ABC pindala on aga pool rööpküliku $AEBC$ pindalast; järelikult $\triangle ABC$ pindala $=$ $= \frac{1}{2} b \cdot h$.

Märkus. On kerge veenduda selles, et iga kolmnurga võib tükeldada osadeks, mille ümberpaigutamisega võib saada ristküliku; seejuures on saadud ristküliku alus sama, mis kolmnurgal, kõrgus aga kaks korda väiksem kolmnurga kõrgusest (joon. 247).

249. Järeldused. 1) *Võrdsete aluste ja võrdsete kõrgustega kolmnurgad on pindvõrdsed.*



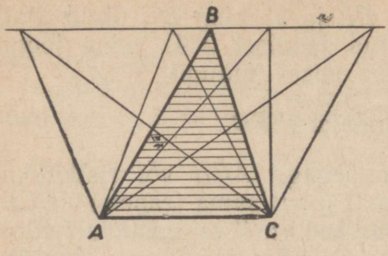
Joon. 246.



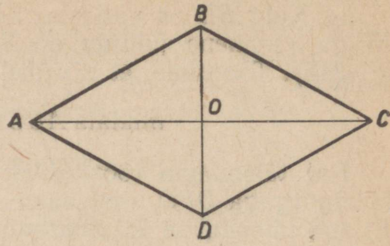
Joon. 247.

Kui kolmnurga ABC (joon. 248) tippu B nihutada edasi mööda sirget, mis on paralleelne alusega AC, alus aga jätta endiseks, siis kolmnurga pindala ei muutu.

2) *Täisnurkse kolmnurga pindala võrdub tema kaatetite poole korrutisega*, sest üks kaatet võib olla aluseks, teine aga kõrguseks.



Joon. 248.



Joon. 249.

3) *Rombi pindala võrdub tema diagonaalide poole korrutisega.* Tõepoolest, kui $ABCD$ (joon. 249) on romb, siis ta diagonaalid on teineteisega risti. Seepärast

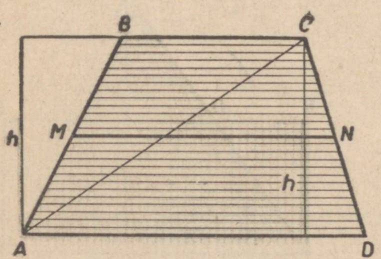
$$\triangle ABC \text{ pindala} = \frac{1}{2} AC \cdot OB$$

$$\triangle ACD \quad ,, \quad = \frac{1}{2} AC \cdot OD$$

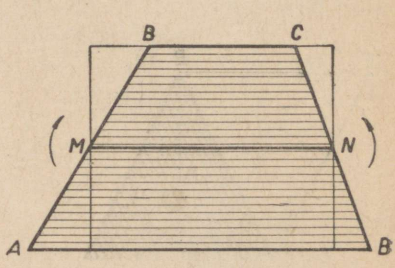
$$ABCD \quad ,, \quad = \frac{1}{2} AC \cdot (OB + OD) = \frac{1}{2} AC \cdot BD$$

4) *Kahe kolmnurga pindalad suhtuvad nagu nende aluste ja kõrguste korrutised* (tegur $\frac{1}{2}$ taandub).

250. Teoreem. ***Trapetsi pindala võrdub aluste poolsumma ja kõrguse korrutisega.***



Joon. 250.



Joon. 251.

Tõmmates trapetsis (joon. 250) $ABCD$ diagonaali AC, me võime trapetsi pindalale vaadata kui kahe kolmnurga (CAD ja ABC) pindala summale. Seepärast:

$$\text{trapetsi } ABCD \text{ pindala} = \frac{1}{2} AD \cdot h + \frac{1}{2} BC \cdot h = \frac{1}{2} (AD + BC) \cdot h.$$

251. Järeldus. Kui MN (joon. 251) on trapetsi kesklõik, siis, nagu teada (§ 99),

$$MN = \frac{1}{2}(AD+BC),$$

seepärast

$$\text{trapetsi } ABCD \text{ pindala} = MN \cdot h,$$

tähendab, *trapetsi pindala võrdub kesklõigu ja kõrguse korrutisega.*
Seda võib näha ka otseselt joonisest 251.

252. Teoreem. *Puutujahulknurga pindala võrdub ümbermõõdu ja poole raadiuse korrutisega.*

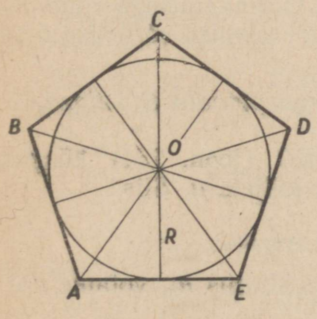
Ühendanud keskpunkti O (joon. 252) puutujahulknurga kõigi tippudega, oleme hulknurga tükeldanud kolmnurkadeks, mille alusteks võib võtta hulknurga küljed ja kõrgusteks ringi raadiuse.

Tähistanud raadiuse R-ga, saame: $\triangle AOB$ pindala $= AB \cdot \frac{1}{2}R$, $\triangle BOC$ pindala $= BC \cdot \frac{1}{2}R$ jne.

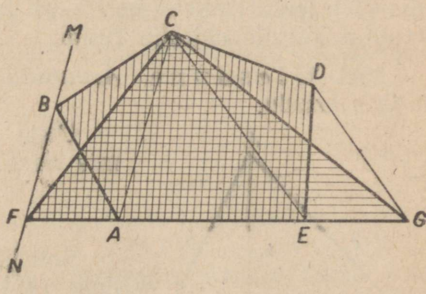
Järelikult

$ABCDE$ pindala $= (AB+BC+CD+DE+EA) \cdot \frac{1}{2}R = P \cdot \frac{1}{2}R$, kus P-ga on tähistatud hulknurga ümbermõõt.

Järeldus. *Korrapärase hulknurga pindala võrdub ümbermõõdu ja poole apoteemi korrutisega*, sest igale korrapärasele hulknurgale võib vaadata kui puutujahulknurgale, mille raadius võrdub apoteemiga.



Joon. 252.



Joon. 253.

253. Mittekorrapärase hulknurga pindala. Selleks et leida mingi korrapäratu hulknurga pindala, võime ta tükeldada kolmnurkadeks (näiteks diagonaalidega), arvutada eraldi iga kolmnurga pindala ja tulemused liita.

254. Ülesanne. *Joonestada kolmnurk, mis oleks pindvõrdne antud hulknurgaga* ($ABCDE$, joon. 253).

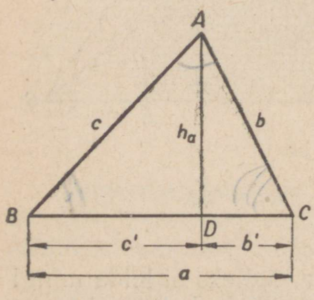
Eraldame antud hulknurgast mingi diagonaaliga kolmnurga ABC. Tõmbame läbi kolmnurga ABC selle tipu, mis asetseb tõmmatud diagonaali vastas, sirge MN paralleelselt AC-ga. Siis pikendame üht külgedest (kas EA või DC, mis puutuvad kokku äralõigatud kolmnurgaga) kuni lõikumiseni sirgega MN (joonisel on pikendatud külg EA). Lõikepunkti F ühendame sirge abil punktiga C. Kolmnurgad CBA ja CFA on pindvõrdsed, sest neil on ühine alus AC ja nende tipud B ja F asetsevad alusega paralleelsel sirgel. Kui antud hulknurgast eraldame $\triangle CBA$ ja asendame selle temaga pindvõrdse kolmnurgaga CFA, siis pindala suurus ei muutu; järelikult antud hulknurk on pindvõrdne hulknurgaga $FCDE$, millel on ilmselt nurkade arv ühe võrra väiksem. Samuti võime saadud hulknurga nurkade arvu vähendada veel ühe võrra ja jätkata järjest nurkade vähendamist seni, kuni oleme saanud kolmnurga (joonisel FCG).

255. Ülesanne. *Joonestada ruut, mis oleks pindvõrdne antud hulknurgaga.*

Kõigepealt teisendame hulknurga pindvõrdseks kolmnurgaks ja siis selle kolmnurga ruuduks. Olgu kolmnurga alus b ja kõrgus h ning otsitava ruudu külg x. Siis kolmnurga pindala võrdub $\frac{1}{2}bh$ ja ruudu pindala x^2; järelikult $\frac{1}{2}bh=x^2$; siit $\frac{1}{2}b : x = x : h$. Tähendab, ruudu külje joonestamisel võib kasutada viisi, mis on varem näidatud (§ 190) keskmise võrdelise joonestamisel.

Märkus. Antud hulknurka pole vaja alati teisendada kolmnurgaks. Näiteks, kui on tegemist trapetsi teisendamisega ruuduks, siis võib leida trapetsi kesklõigu ja kõrguse keskmise võrdelise ning saadud lõigule ehitada ruudu.

256. Ülesanne. *Arvutada kolmnurga pindala S külgede a, b ja c kaudu.*



Joon. 254.

Olgu h_a $\triangle ABC$ (joon. 254) kõrgus, mis on tõmmatud küljele a. Siis

$$S=\frac{1}{2}ah_a.$$

Selleks et leida kõrgus h_a, võtame võrduse (§ 194):

$$b^2=a^2+c^2-2ac'$$

ja määrame sellest lõigu c':

$$c'=\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}.$$

Kolmnurgast ABD leiame:

$$h_a = \sqrt{c^2 - \left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)^2} =$$
$$= \frac{1}{2a}\sqrt{4a^2c^2-(a^2+c^2-b^2)^2}.$$

Teisendame juuremärgi all seisva avaldise järgmiselt:

$$\begin{aligned}&(2ac)^2-(a^2+c^2-b^2)^2=\\&=(2ac+a^2+c^2-b^2)(2ac-a^2-c^2+b^2)=\\&=[(a^2+c^2+2ac)-b^2][b^2-(a^2+c^2-2ac)]=\\&=[(a+c)^2-b^2][b^2-(a-c)^2]=\\&=(a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c).\end{aligned}$$

Järelikult

$$S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}^{1}.$$

Kui tähistame $a+b+c=2p$, siis $a+c-b=$
$=(a+b+c)-2b=2p-2b=2(p-b)$.

Samuti

$$b+a-c=2(p-c) \text{ ja } b+c-a=2(p-a).$$

Siis

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{2p\cdot 2(p-a)\cdot 2(p-b)\cdot 2(p-c)}, \text{ seega}$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

See avaldis on tuntud H e r ō n i v a l e m i nimetuse all (Aleksandria matemaatiku Heroni nime järgi, elas III—II saj. e. m. a.).

E r i j u h t u m. Võrdkülgse kolmnurga, mille külg on a, pindala väljendub järgmise valemiga:

$$S=\sqrt{\frac{3a}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Pythagorase teoreem ja sellel põhinevad ülesanded.

257. Teoreem. ***Täisnurkse kolmnurga kaatetitele joonestatud ruutude pindalade summa võrdub hüpotenuusile joonestatud ruudu pindalaga.***

---

[1] Et kolmnurga mistahes kahe külje summa on suurem kolmandast küljest, siis kõik avaldised $a+b-c$, $a+c-b$ ja $b+c-a$ on positiivsed.

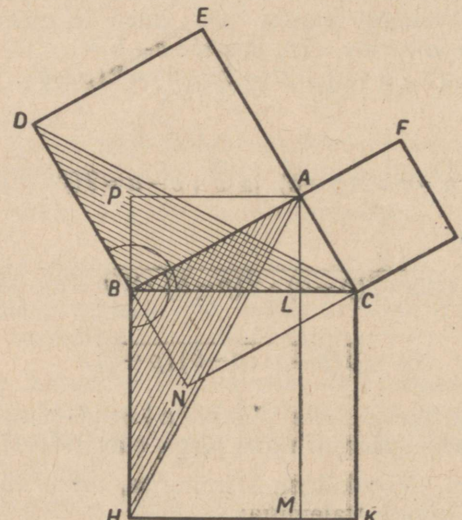
See lause on teisend varem tõestatud (§ 191) Pythagorase teoreemist: *hüpotenuusi mõõtarvu ruut võrdub kaatetite mõõtarvude ruutude summaga.* Tõepoolest, lõigu mõõtarvu ruut võrdub lõigule joonestatud ruudu pindala mõõtarvuga. Seepärast § 191 teoreem on sama, mis selles paragrahvis esitatu.

Toome Pythagorase teoreemile teise tõestuse, mis pole rajatud pindalade arvutusele, vaid pindalade vahetule võrdlemisele.

Tõestus (Eukleides'elt). Olgu ABC (joon. 255) täisnurkne kolmnurk, $BDEA$, $AFGC$ ja $BCKH$ aga kaatetitele ning hüpotenuusile joonestatud ruudud. Tuleb tõestada, et kahe esimese ruudu pindalade summa võrdub kolmanda ruudu pindalaga.

Tõmbame $AM \perp BC$. Siis ruut $BCKH$ tükeldub kaheks ristkülikuks. Tõestame, et ristkülik $BLMH$ on pindvõrdne ruuduga $BDEA$.

Tõmbame abisirged DC ja AH. Vaatleme kaht joonisel viirutatud kolmnurka. $\triangle CDB$, millel on ruuduga $BDEA$ ühine alus BD ja mille kõrgus CN võrdub ruudu kõrgusega, on pindvõrdne poole ruuduga.



Joon. 255.

$\triangle ABH$, millel on ristkülikuga $BLMN$ ühine alus BH ja mille kõrgus võrdub ristküliku kõrgusega BL, on pindvõrdne poole ristkülikuga. Võrreldes neid kaht kolmnurka, leiame, et neil $BD = BA$ ja $BC = BH$ (kui ruudu küljed); peale selle $\angle DBC = \angle ABH$, sest kumbki neist nurkadest koosneb ühisest osast $\angle ABC$ ja täisnurgast. Tähendab, kolmnurgad ABH ja DBC on võrdsed. Siit järeldub, et ristkülik $BLMH$ on pindvõrdne ruuduga $BDEA$. Ühendanud punkti G punktiga B ja punkti A punktiga K, tõestame täpselt samuti, et ristkülik $LCKM$ on pindvõrdne ruuduga $AFGC$. Siit järeldub, et ruut $BCKH$ on pindvõrdne ruutude $BDEA$ ja $AFGC$ summaga.

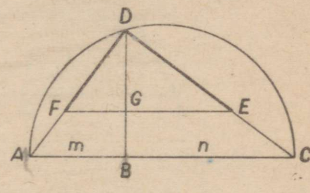
258. Ülesandeid. 1) *Joonestada ruut, mille pindala võrdub kahe antud ruudu pindalade summaga.*

Joonestame täisnurkse kolmnurga, mille kaatetiteks on antud ruutude küljed. Selle kolmnurga hüpotenuusile joonestatud ruudu pindala võrdubki antud ruutude pindalade summaga.

2) *Joonestada ruut, mille pindala võrdub kahe antud ruudu pindalade vahega.*

Joonestame täisnurkse kolmnurga, mille hüpotenuusiks on suurema ruudu külg ja kaatetiks väiksema ruudu külg. Selle kolmnurga teisele kaatetile joonestatud ruut ongi otsitav.

3) *Joonestada ruut, mille pindala ja antud ruudu pindala suhe on $m : n$.*



Joon. 256.

Asetame meelevaldselt võetud sirgele (joon. 256) lõigud $AB = m$ ja $BC = n$ ja joonestame AC-le kui diameetrile poolringjoone. Punktist B püstitame ristjoone BD kuni lõikumiseni poolringjoonega. Tõmmates kõõlud AD ja DC, saame täisnurkse kolmnurga, mille kohta on kehtiv seos (§ 192):

$$AD^2 : DC^2 = AB : BC = m : n.$$

Selle kolmnurga kaatetile DC asetame lõigu DE, mis on võrdne antud ruudu küljega, ja tõmbame $EF \| CA$.[1] Lõik DF on otsitava ruudu külg, sest

$$\frac{DF}{DE} = \frac{AD}{DC}; \text{ siit } \left(\frac{DF}{DE}\right)^2 = \left(\frac{AD}{DC}\right)^2.$$

Järelikult

$$DF^2 : DE^2 = AD^2 : DC^2 = m : n.$$

Sarnaste kujundite pindalade suhe.

259. Teoreem. ***Kui kahel kolmnurgal on üks paar võrdseid nurki, siis nende kolmnurkade pindalad suhtuvad nagu võrdsete nurkade lähisküljede korrutised.***

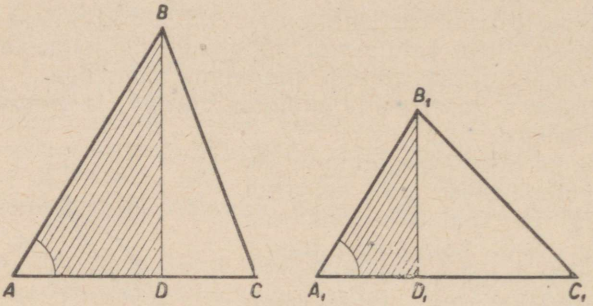
Olgu kolmnurkades ABC ja $A_1B_1C_1$ (joon. 257) nurgad A ja A_1 võrdsed.

---

[1] Kui antud ruudu külg on suurem DC-st, siis punktid E ja F asetsevad kaatetite DC ja DA pikendustel.

Tõmmates kõrgused BD ja B_1D_1, saame:

$$\frac{\triangle ABC \text{ pindala}}{\triangle A_1B_1C_1 \text{ pindala}} = \frac{AC \cdot BD}{A_1C_1 \cdot B_1D_1} = \frac{AC}{A_1C_1} \cdot \frac{BD}{B_1D_1}.$$



Joon. 257.

Kolmnurgad ABD ja $A_1B_1D_1$ on sarnased ($\angle A = \angle A_1$ ja $\angle D = \angle D_1$), seepärast suhe $BD : B_1D_1$ võrdub suhtega $AB : A_1B_1$; asendades esimese suhte teisega, saame:

$$\frac{\triangle ABC \text{ pindala}}{\triangle A_1B_1C_1 \text{ pindala}} = \frac{AC}{A_1C_1} \cdot \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC \cdot AB}{A_1C_1 \cdot A_1B_1}.$$

260. Teoreem. ***Sarnaste kolmnurkade või hulknurkade pindalad suhtuvad nagu vastavate külgede ruudud.***

1) Kui ABC ja $A_1B_1C_1$ on kaks sarnast kolmnurka, siis nende nurgad on vastavalt võrdsed; olgu $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ ja $\angle C = \angle C_1$. Rakendame nende kolmnurkade kohta eelnevat teoreemi:

$$\frac{\triangle ABC \text{ pindala}}{\triangle A_1B_1C_1 \text{ pindala}} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1} \cdot \frac{AC}{A_1C_1}. \quad (1)$$

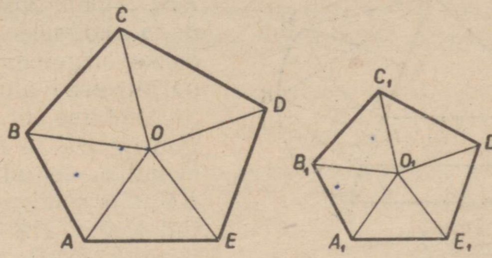
Kolmnurkade sarnasusest järeldub:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}. \quad (2)$$

Seepärast võime võrduses (1) kumbagi suhetest $\frac{AB}{A_1B_1}$ ja $\frac{AC}{A_1C_1}$ asendada mistahes suhtega teisest võrduste reast (2); järelikult,

$$\frac{\triangle ABC \text{ pindala}}{\triangle A_1B_1C_1 \text{ pindala}} = \left(\frac{AB}{A_1B_1}\right)^2 = \left(\frac{AC}{A_1C_1}\right)^2 = \left(\frac{BC}{B_1C_1}\right)^2 = \frac{AB^2}{A_1B_1^2} =$$
$$= \frac{AC^2}{A_1C_1^2} = \frac{BC^2}{B_1C_1^2}.$$

2) Kui $ABCDE$ ja $A_1B_1C_1D_1E_1$ (joon. 258) on kaks sarnast hulknurka, siis võime need, nagu nägime (§ 171), tükeldada samaks arvuks ja ühesuguselt asetatud kolmnurkadeks.



Joon. 258.

Olgu need kolmnurgad järgmised: AOB ja $A_1O_1B_1$, BOC ja $B_1O_1C_1$ jne. Vastavalt teoreemi esimeses osas tõestatule, saame võrded:

$$\frac{\triangle AOB \text{ pindala}}{\triangle A_1O_1B_1 \text{ pindala}}=\left(\frac{AB}{A_1B_1}\right)^2; \quad \frac{\triangle BOC \text{ pindala}}{\triangle B_1O_1C_1 \text{ pindala}}=\left(\frac{BC}{B_1C_1}\right)^2 \text{ jne.}$$

Hulknurkade sarnasusest järeldub:

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CD}{C_1D_1}=\ldots$$

ja seepärast

$$\left(\frac{AB}{A_1B_1}\right)^2=\left(\frac{BC}{B_1C_1}\right)^2=\left(\frac{CD}{C_1D_1}\right)^2=\ldots$$

Seega

$$\frac{\triangle AOB \text{ pindala}}{\triangle A_1O_1B_1 \text{ pindala}}=\frac{\triangle BOC \text{ pindala}}{\triangle B_1O_1C_1 \text{ pindala}}=\frac{\triangle COD \text{ pindala}}{\triangle C_1O_1D_1 \text{ pindala}}=\ldots,$$

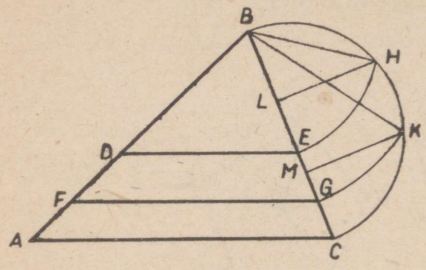
millest

$$\frac{\triangle AOB \text{ pindala} + \triangle BOC \text{ pindala} + \triangle COD \text{ pindala} + \ldots}{\triangle A_1O_1B_1 \text{ pindala} + \triangle B_1O_1C_1 \text{ pindala} + \triangle C_1O_1D_1 \text{ pindala} + \ldots}=$$

$$=\frac{ABCDE \text{ pindala}}{A_1B_1C_1D_1E_1 \text{ pindala}}=\frac{AB^2}{A_1C_1^2}.$$

Järeldus. *Korrapäraste ühenimeliste hulknurkade pindalad suhtuvad nagu nende külgede ruudud või ümberringjoonte raadiuste ruudud või apoteemide ruudud.*

261. Ülesanne. *Antud kolmnurk tükeldada m pindvõrdseks osaks sirgetega, mis oleksid paralleelsed ta küljega.*



Joon. 259.

Olgu näiteks kolmnurk ABC (joon. 259) tarvis tükeldada kolmeks pindvõrdseks osaks sirgetega, mis oleksid paralleelsed alusega AC.

Oletame, et otsitavad lõigud on DE ja FG. On ilmne, et kui on leitud lõigud BE ja BG, siis sellega on ka määratud lõigud DE ja FG. Kolmnurgad BDE, BFG ja BAC on sarnased; seepärast

$$\frac{\triangle BDE \text{ pindala}}{\triangle BAC \text{ pindala}}=\frac{BE^2}{BC^2} \text{ ja } \frac{\triangle BFG \text{ pindala}}{\triangle BAC \text{ pindala}}=\frac{BG^2}{BC^2}.$$

Kuid

$$\frac{\triangle BDE \text{ pindala}}{\triangle BAC \text{ pindala}}=\frac{1}{3} \text{ ja } \frac{\triangle BFG \text{ pindala}}{\triangle BAC \text{ pindala}}=\frac{2}{3}.$$

Järelikult

$$\frac{BE^2}{BC^2}=\frac{1}{3} \text{ ja } \frac{BG^2}{BC^2}=\frac{2}{3};$$

siit

$$BE=\sqrt{\frac{1}{3}BC^2}=\sqrt{\frac{1}{3}BC\cdot BC}$$

$$BG=\sqrt{\frac{2}{3}BC^2}=\sqrt{\frac{2}{3}BC\cdot BC.}$$

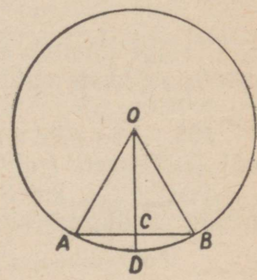
Neist avaldusist on näha, et BE on BC ja $\frac{1}{3}BC$ keskmine võrdeline ning BG on BC ja $\frac{2}{3}BC$ keskmine võrdeline. Seepärast võib joonestamist toimetada järgmiselt: jaotame BC kolmeks võrdseks osaks punktides L ja M; joonestame BC-le poolringjoone; punktidest L ja M tõmbame BC-le ristlõigud LH ja MK. Kõõlud HB ja KB ongi otsitavad keskmised võrdelised; esimene kogu diameetri BC ja selle ühe kolmandiku BL keskmine võrdeline, teine BC ja BM, seega BC ja $\frac{2}{3}BC$ keskmine võrdeline. Nüüd tuleb veel need kõõlud asetada BC-le punktist B; saamegi otsitavad punktid E ja G.

Samal viisil võib kolmnurka tükeldada kuitahes suureks arvuks pindvõrdseteks osadeks.

II. Ringi ja tema osade pindala.

262. Teoreem. ***Korrapärase kõõlhulknurga külgede arvu piiramatul kahekordistamisel võib hulknurga külg saada väiksemaks mistahes väikesest arvust.***

Olgu n korrapärase kõõlhulknurga külgede arv ja p tema ümbermõõt; siis ühe külje pikkus väljendub murruga $\frac{p}{n}$. Hulknurga külgede arvu piiramatul kahekordistamisel kasvab selle murru nimetaja piiramatult, lugeja aga, s. o. p, kasvab ka, kuid mitte piiramatult (sest iga kõõlhulknurga ümbermõõt on alati väiksem puutujahulknurga ümbermõõdust). Kui aga mõne murru nimetaja piiramatult kasvab, lugeja aga oma kasvamisel on alati väiksem mõnest jäävast suurusest, siis murd võib saada väiksemaks igast kuitahes väikesest arvust. Tähendab, sedasama võib ütelda ka korrapärase kõõlhulknurga külje kohta: piiramatul külgede arvu kahekordistamisel võib ta saada väiksemaks igast kuitahes väikesest arvust.



Joon. 260.

263. Järeldus. Olgu (joon. 260) AB korrapärase kõõlhulknurga külg, OA selle raadius ja OC apoteem. Kolmnurgast OAC leiame (§ 50):

$$OA - OC < AC;$$

$$OA - OC < \frac{1}{2} AB.$$

Et korrapärase kõõlhulknurga külgede arvu piiramatul kahekordistamisel võib külg saada, nagu praegu tõestasime, väiksemaks igast kuitahes väikesest arvust, siis võib sedasama ütelda ka vahe $OA - OC$ kohta. Niisiis, korrapärase kõõlhulknurga külgede arvu piiramatul kahekordistamisel võib *raadiuse ja apoteemi vahe saada väiksemaks igast kuitahes väikesest arvust*. Seda võib väljendada ka teisiti: korrapärase kõõlhulknurga külgede arvu piiramatul kahekordistamisel piirväärtus, millele läheneb apoteem, on raadius.

264. Ringi pindala. Joonestame ringisse, mille raadius on R, mingi korrapärase kõõlhulknurga. Olgu

selle hulknurga pindala S,
„ „ ümbermõõt p,
„ „ apoteem a.

Me nägime (§ 252, järeldus), et nende suuruste vahel on olemas seos

$$S = \frac{1}{2} p \cdot a.$$

Nüüd oletame, et selle hulknurga külgede arv kahekordistub piiramatult. Siis ümbermõõt p ja apoteem a (järelikult ka pindala S) suurenevad, seejuures läheneb ümbermõõt piirväärtusele, milleks on ringjoone pikkus C, apoteem aga läheneb piirväärtusele, mis on võrdne ringi raadiusega R. Sellest järeldub, et hulknurga pindala läheneb piirväärtusele, mis võrdub $\frac{1}{2} C \cdot R$. See piirväärtus ongi ringi pindala arvuline väärtus. Seega võime kirjutada, kui ringi pindala tähistada S-ga, et

$$S = \frac{1}{2} C \cdot R,$$

s. t. *ringi pindala võrdub ringjoone pikkuse ja poole raadiuse korrutisega.*

Et $C = 2\pi R$, siis

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R \cdot R = \pi R^2,$$

s. t. *ringi pindala võrdub raadiuse ruudu ning ringjoone ja diameetri pikkuste suhte korrutisega.*

265. Järeldus. *Ringide pindalad suhtuvad nagu raadiuste või diameetrite ruudud.*

Tõepoolest, kui S ja S_1 on kahe ringi pindalad, R ja R_1 on aga nende raadiused, siis

$$S = \pi R^2$$

ja

$$S_1 = \pi R_1^2;$$

siit

$$\frac{S}{S_1} = \frac{\pi R^2}{\pi R_1^2} = \frac{R^2}{R_1^2} = \frac{4R^2}{4R_1^2} = \frac{(2R)^2}{(2R_1)^2}.$$

266. Ülesanne. 1. *Arvutada ringi pindala, kui ringjoone pikkus on 2 m.*

Selleks leiame enne raadiuse R võrdusest:

$$2\pi R = 2,$$

millest

$$R = \frac{1}{\pi} = 0{,}3183\ldots$$

Siis määrame ringi pindala:

$$S = \pi R^2 = \pi \left(\frac{1}{\pi}\right)^2 = \frac{1}{\pi} = 0{,}3183\ldots\ (\text{m}^2).$$

267. Ülesanne 2. *Joonestada ruut, mis oleks pindvõrdne antud ringiga.*

Seda ülesannet, mis on tuntud nimetuse all «ringi kvadratuur», ei saa lahendada sirkli ja joonlaua abil. Tõepoolest, kui tähistame otsitava ruudu külje tähega x ja ringi raadiuse tähega R, siis saame võrrandi:

$$x^2 = \pi R^2,$$

millest

$$\pi R : x = x : R,$$

s. t. x on poole ringjoone ja selle raadiuse keskmine võrdeline. Järelikult, kui on teada lõik, mille pikkus võrdub poole ringjoonega, siis on kerge joonestada ruutu, mis on pindvõrdne ringiga, ja ümberpöördult: kui on teada ringiga pindvõrdse ruudu külg, siis võib joonestada lõigu, mille pikkus võrdub poole ringjoonega. Sirkli ja joonlauaga pole aga võimalik joonestada lõiku, mille pikkus võrduks poole ringjoone pikkusega, järelikult pole võimalik täpselt lahendada ülesannet ringi kvadratuurist. Ligikaudselt saab ülesande lahendada, kui enne leida poole ringjoone ligikaudne pikkus ja siis selle lõigu ja raadiuse keskmine võrdeline.

268. Teoreem. ***Sektori pindala võrdub tema kaare ja poole raadiuse korrutisega.***

Sisaldagu sektori AOB kaar AB (joon. 261) n kraadi. On ilmne, et sektori, mille kaar on 1°, pindala on $\frac{1}{360}$ ringi pindalast, s. t. $\frac{\pi R^2}{360}$. Järelikult sektori (mille kaar on $n°$) pindala on:

$$S = \frac{\pi R^2 n}{360} = \frac{\pi R n}{180} \cdot \frac{R}{2}.$$

Et aga murd $\frac{\pi R n}{180}$ väljendab kaare pikkust (§ 239), siis, tähistades selle tähega s, saame:

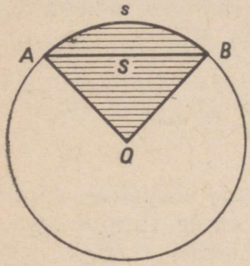
$$S = s \cdot \frac{R}{2}.$$

269. Segmendi pindala. Selleks et leida segmendi pindala, kui on antud segmenti piirav kaar s ja kõõl AB (joon. 261), tuleb arvutada eraldi sektori $AOBsA$ ja kolmnurga AOB pindala ning esimesest lahutada teine.

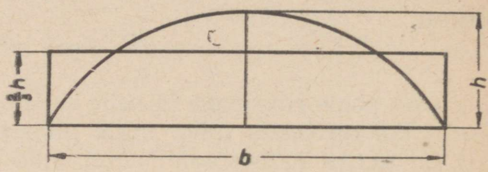
Kui aga kaare mõõtarv pole suur, võib segmendi pindala määrata järgmise ligikaudse valemi järgi (me esitame selle tõestuseta):

$$\text{segmendi pindala} = \frac{2}{3}\, bh, \tag{1}$$

kus b on segmendi alus (joon. 262) ja h — kõrgus. On tõestatud, et viga, mis tekib selle ligikaudse valemi rakendamisel, on seda väiksem, mida väiksem on suhe $h:b$; näiteks kui h on väiksem



Joon. 261.



Joon. 262.

kui $\frac{1}{9}b$ (see esineb siis, kui kaar on väiksem kui 50°), siis osutub viga väiksemaks kui 1% pindalast.

Täpsema tulemuse annab keerukam valem:

$$\text{segmendi pindala} = \frac{2}{3}bh + \frac{h^3}{2b}. \qquad (2)$$

Harjutusi.

Tõestada teoreemid.

1. Rööpkülikus on diagonaali mistahes punkti kaugused kahest lähisküljest pöördvõrdelised nende külgedega.

2. Trapetsi pindala võrdub ühe haara ja teise haara keskpunktist esimesele haarale tõmmatud ristlõigu korrutisega.

3. Kaks nelinurka on pindvõrdsed, kui nende diagonaalid ja nurgad diagonaalide vahel on vastavalt võrdsed.

4. Trapetsi diagonaalide lõikumisel tekib diagonaalide ja trapetsi aluste vahel kaks kolmnurka. Kui nende kolmnurkade pindalad on vastavalt p^2 ja q^2, siis kogu trapetsi pindala on $(p+q)^2$.

5. Korrapärase kõõlkuusnurga pindala on $\frac{3}{4}$ korrapärase puutujakuusnurga pindalast.

6. Nelinurgas $ABCD$ on diagonaali BD keskpunktist tõmmatud teisele diagonaalile AC paralleelne sirge; see sirge lõikab külge AD punktis E. Tõestada, et lõik CE jaotab nelinurga pooleks.

7. Kui kolmnurga mediaanid võtta uue kolmnurga külgedeks, siis selle teise kolmnurga pindala on $\frac{3}{4}$ esimese kolmnurga pindalast.

8. Ringis, mille keskpunktiks on O, on tõmmatud kõõl AB. Raadiusele OA kui diameetrile on joonestatud teine ringjoon. Antud kõõl lõikab ära nii ühest kui teisest ringist segmendid. Tõestada, et tekkinud segmentide pindalad suhtuvad nagu 4 : 1.

9. Arvutada täisnurkse trapetsi pindala, kui trapetsi üks nurk on 60° ning on teada mõlemad alused, või üks alus ja kõrgus, või üks alus ja haar, mis on alusega kaldu.

10. On antud trapetsi alused a ja b ja kõrgus h. Arvutada selle kolmnurga pindala, mis tekib, kui haarasid pikendada nende lõikumiseni.

11. Kolmnurga sisse on joonestatud teine kolmnurk, mille tipud poolitavad esimese kolmnurga külgi; teise kolmnurga sisse on samal viisil joonestatud kolmas kolmnurk; kolmandasse neljas jne. piiramatult. Leida nende kolmnurkade pindalade summa piirväärtus.

12. Kolmnurga kolme külje a, b ja c kaudu arvutada kolmnurga siseringi raadius r.

Juhis. Kui S on kolmnurga pindala, siis on kerge näidata, et

$$S=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr=pr,$$

kus p tähistab kolmnurga poolümbermõõtu.

Teiselt poolt, pindala S väljendub valemiga, mis oli tuletatud § 256. Siit võib saada valemi r jaoks.

13. Väljendada segmendi kõrgus ja pindala antud ringi raadiuse r kaudu, kui segmendile vastav kesknurk on 60°. Arvutamist teostada kolmel viisil: 1) sektori ja kolmnurga pindalade vahe kaudu; 2) esimese (§-s 269 antud) lühendatud valemi põhjal ja 3) teise (samas paragrahvis antud) lühendatud valemi põhjal. Võrrelda kaht viimast tulemust teineteisega, selleks et määrata ligikaudsete tulemuste absoluutne ja relatiivne viga.

Lahendus. $b=r$.

$$h=r-\frac{1}{2}r\sqrt{3}=\frac{1}{2}r(2-\sqrt{3})=0{,}1340r,$$

$$\text{1) pindala } S_1=\frac{\pi r^2}{6}-\frac{r^2\sqrt{3}}{4}=r^2\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=0{,}0906r^2;$$

$$\text{2) pindala } S_2=\frac{2}{3}bh=\frac{2}{3}\cdot r\cdot 0{,}1340r=0{,}0893r^2;$$

$$\text{3) pindala } S_3=\frac{2}{3}bh+\frac{h^3}{2b}=0{,}0893r^2+0{,}0012r^2=0{,}0905r^2.$$

Absoluutne viga:

$$\text{pindala } S_2=0{,}0906r^2-0{,}0893r^2=0{,}0013r^2;$$
$$\text{pindala } S_3=0{,}0906r^2-0{,}0905r^2=0{,}0001r^2.$$

Relatiivne viga (s. o. absoluutse vea suhe mõõdetava suurusega):

$$\text{pindalal } S_2=\frac{S_1-S_2}{S_1}=\frac{0{,}0013r^2}{0{,}0906r^2}=0{,}014=1{,}4\%.$$

$$\text{pindalal } S_3=\frac{S_1-S_3}{S_1}=\frac{0{,}0001r^2}{0{,}0906r^2}=0{,}001=0{,}1\%.$$

Niisiis, tulemus esimese ligikaudse valemi põhjal on väiksem tõelisest tulemusest (ligikaudu) 1,4% võrra, tulemus teise ligikaudse valemi põhjal on aga väiksem tõelisest tulemusest 0,1% võrra.

14. 1) Arvutada ringi raadius, kui on teada segmendi alus b ja kõrgus h.

Juhis. Täisnurksest kolmnurgast, mille hüpotenuus on r, üks kaatet on $\frac{b}{2}$ ja teine kaatet on $r—h$, leiame võrrandi:

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2+(r-h)^2=r^2,$$

millest on kerge määrata r.

2) Arvutada ringi diameeter, kui on teada, et segmendi alus on 67,2 cm ja kõrgus on 12,8 cm (vaata eelmine juhis).

Konstrueerimisülesandeid.

15. Tükeldada kolmnurk tema tipust lähtuvate sirgetega kolmeks osaks, mille pindalad suhtuvad nagu $m:n:p$.

16. Tükeldada kolmnurk kaheks pindvõrdseks osaks sirgega, mis läbib külje antud punkti.

17. Leida kolmnurga sees niisugune punkt, et sirged, mis seda punkti ühendavad kolmnurga tippudega, tükeldaksid kolmnurga kolmeks pindvõrdseks osaks.

Juhis. Jaotame külje AC kolmeks võrdseks osaks punktides D ja E. Tõmbame läbi D sirge paralleelselt AB-ga ja läbi E sirge paralleelselt BC-ga. Nende sirgete lõikepunkt ongi otsitav punkt.

18. Sama ülesanne, kuid osade suhe olgu $2:3:4$ (või üldiselt $m:n:p$).

19. Tükeldada rööpkülik kolmeks pindvõrdseks osaks sirgetega, mis lähtuvad ta tipust.

20. Tükeldada rööpkülik sirgega, mis läbib antud punkti, kaheks osaks nii, et nende osade pindalad suhtuksid nagu $m:n$.

Juhis. Jaotada rööpküliku kesklõik suhtes $m:n$ ja jaotuspunkt ühendada antud punktiga.

21. Tükeldada rööpkülik kolmeks pindvõrdseks osaks sirgetega, mis on paralleelsed diagonaaliga.

22. Jaotada kolmnurga pindala kuldlõikes, alusele paralleelse sirgega.

Juhis. Lahendatakse algebra rakendamisega geomeetrias.

23. Tükeldada kolmnurk kolmeks pindvõrdseks osaks sirgetega, mis on risti alusega.

24. Tükeldada ring kontsentriliste ringjoontega kaheks, kolmeks jne. pindvõrdseks osaks.

25. Tükeldada trapets kaheks pindvõrdseks osaks sirgega, mis on paralleelne alustega.

Juhis. Pikendanud trapetsi haarasid nende lõikumiseni, võtta otsitavaks otsitava sirge kaugus saadud kolmnurga tipust; koostada võrded, lähtudes sarnaste kolmnurkade pindaladest.

26. Teisendada antud ristkülik teiseks ristkülikuks, millel on antud alus.

27. Joonestada ruut, mille pindala oleks $\frac{2}{3}$ antud ruudu pindalast.

28. Teisendada ruut pindvõrdseks ristkülikuks, mille kahe mittevõrdse külje summa või vahe on antud.

29. Joonestada ring, mis oleks pindvõrdne rõngaga kahe antud kontsentrilise ringjoone vahel.

30. Joonestada kolmnurk, mis oleks sarnane ühega ja pindvõrdne teisega antud kolmnurkadest.

31. Teisendada antud kolmnurk pindvõrdseks ning võrdkülgseks kolmnurgaks (algebra rakendamisega geomeetrias).

32. Joonestada antud ringi ristkülik antud pindalaga m^2 (algebra rakendamisega geomeetrias).

33. Joonestada antud kolmnurka ristkülik antud pindalaga m^2 (algebra rakendamisega geomeetrias; uurida).

Nurkade 0° kuni 90° trigonomeetriliste funktsioonide tabel.

Kraadid	Siinused	Koosinused	Tangensid	Kootangensid	Kraadid
0	0,0000	1,0000	0,0000	∞	90
1	0,0175	0,9998	0,0175	57,29	89
2	0,0349	0,9994	0,0349	28,64	88
3	0,0523	0,9986	0,0524	19,08	87
4	0,0698	0,9976	0,0699	14,30	86
5	0,0872	0,9962	0,0875	11,43	85
6	0,1045	0,9945	0,1051	9,514	84
7	0,1219	0,9925	0,1228	8,144	83
8	0,1392	0,9903	0,1405	7,115	82
9	0,1564	0,9877	0,1584	6,314	81
10	0,1736	0,9848	0,1763	5,671	80
11	0,1908	0,9816	0,1944	5,145	79
12	0,2079	0,9781	0,2126	4,705	78
13	0,2250	0,9744	0,2309	4,331	77
14	0,2419	0,9703	0,2493	4,011	76
15	0,2588	0,9659	0,2679	3,732	75
16	0,2756	0,9613	0,2867	3,487	74
17	0,2924	0,9563	0,3057	3,271	73
18	0,3090	0,9511	0,3249	3,078	72
19	0,3256	0,9455	0,3443	2,904	71
20	0,3420	0,9397	0,3640	2,747	70
21	0,3584	0,9336	0,3839	2,605	69
22	0,3746	0,9272	0,4040	2,475	68
23	0,3907	0,9205	0,4245	2,356	67
24	0,4067	0,9135	0,4452	2,246	66
25	0,4226	0,9063	0,4663	2,145	65
26	0,4384	0,8988	0,4877	2,050	64
27	0,4540	0,8910	0,5095	1,963	63
28	0,4695	0,8829	0,5317	1,881	62
29	0,4848	0,8746	0,5543	1,804	61
30	0,5000	0,8660	0,5774	1,732	60
31	0,5150	0,8572	0,6009	1,664	59
32	0,5299	0,8480	0,6249	1,600	58
33	0,5446	0,8387	0,6494	1,540	57
34	0,5592	0,8290	0,6745	1,483	56
35	0,5736	0,8191	0,7002	1,428	55
36	0,5878	0,8090	0,7265	1,376	54
37	0,6018	0,7986	0,7536	1,327	53
38	0,6157	0,7880	0,7813	1,280	52
39	0,6293	0,7771	0,8098	1,235	51
40	0,6428	0,7660	0,8391	1,192	50
41	0,6561	0,7547	0,8693	1,150	49
42	0,6691	0,7431	0,9004	1,111	48
43	0,6820	0,7314	0,9325	1,072	47
44	0,6947	0,7193	0,9657	1,036	46
45	0,7071	0,7071	1,0000	1,000	45
	Koosinused	Siinused	Kootangensid	Tangensid	

Mõned arvud, mis sageli esinevad ülesannete lahendamisel.

$\pi \approx 3{,}1416$ (umbes $3\frac{1}{7}$); $\frac{\pi}{180} \approx 0{,}01745$; $\sqrt{2} \approx 1{,}4142$; $\sqrt{5} \approx 2{,}2361$;

$\frac{1}{\pi} \approx 0{,}3183$; $\frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 17' 44''$; $\sqrt{3} \approx 1{,}73205$; $\sqrt{6} \approx 2{,}4495$.

SISUKORD.

PLANIMEETRIA.

Esimene peatükk.

Sirgjoon.

Teine peatükk.

Ringjoon.

Kolmas peatükk.

Sarnased kujundid.

Neljas peatükk.

Korrapärased hulknurgad ja ringjoone pikkuse arvutamine.

Viies peatükk.

Pindalade mõõtmine.

Киселёв, А. П.

Геометрия. Часть первая. Планиметрия. Учебник для 6—9-го классов семилетней и средней школы.

На эстонском языке.

Эстонское Государственное издательство. Таллин, Пярну маантеэ 10.

*

Toimetaja K. Kallaste

Tehniline toimetaja L. Uuspõld

Korrektor Ü. Rattur

Ladumisele antud 22. III 1957. Trükkimisele antud 27. IV 1957. Paber 60×92, 1/16. Trükipoognaid 12,75. Arvutuspoognaid 12,22. Trükiarv 10 000. Tellimise nr. 1145. Trükikoda «Tartu Kommunist», Tartu, Ülikooli 17/19.

Hind rbl. 2.35

6—6

Rbl. 2.35
A-21542
TÜ RAAMATUKOGU
1 0300 00357075 3