

1010137
E. ETVERK — B. TIIKMA

GEOMEETRIA

KESKKOOLI IX KLASSILE

RK

„PEDAGOOGILINE KIRJANDUS“

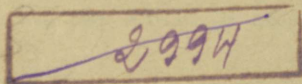
TALLINN 1946

2/25007

E. ETVERK — B. TIIKMA

GEOMEETRIA

KESKKOOLI IX KLASSILE



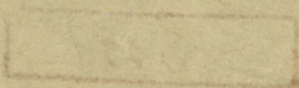
RK

„PEDAGOGILINE KIRJANDUS“
TALLINN 1946

2



A 16139



Peatükk I.

Hulknurga pindala.

§ 1. Hulknurkade pindvõrdsus.

Paljud praktilise elu vajadused, mis on ühenduses maa-pinna kasutamisega või mitmesuguste esemete pinna katmisega, nõuavad pinnatükkide võrdlemist nende suuruse poolest. Kõige sagedamini esinevad niisugused võrdlemise juhud, kus pinnatükid on tasased ja nende piirjooned on hulknurgad. Seepärast käsitleme kõigepealt hulknurgaga piiratud tasase pinnatüki suuruse küsimust.

Hulknurgaga piiratud tasase pinnatüki suurust nimetatakse hulknurga pindalaks.

Sõnastuse lühendamiseks nimetame edaspidi hulknurgaga piiratud pinnatükki ka lihtsalt hulknurgaks. Hulknurga $ABCD$ pindala tähistame enamasti sümboliga S_{ABCD} (täht S on algustäht ladina sõnast *superficies*, pealispind). Hulknurga pindala loeme ikka positiivseks suuruseks. Kui kahe hulknurga pindalad, näiteks $ABCD$ ja KLM , on võrdsed, s. t. kui

$$S_{ABCD} = S_{KLM},$$

siis nimetame neid hulknurki pindvõrdseiks.

Hulknurkade pindalade võrdlemist saab kõigil üksikjuhtudel teostada järgmise kahe iseenesest mõistetava tõe alusel.

1. Kui üht hulknurka saab paigutada teise peale nii, et nad ühtivad, siis hulknurgad on pindvõrdsed; lühidalt:

kongruentsed hulknurgad on pindvõrdsed.

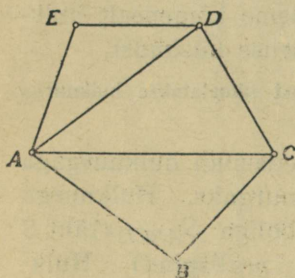
2. Kui hulknurk on tükeldatud mitmeks uueks hulknurgaks, siis tema pindala võrdub tükeldamisel saadud hulknurkade pindalade summaga;

näiteks joonisel 1 kujutatud viisnurga pindala

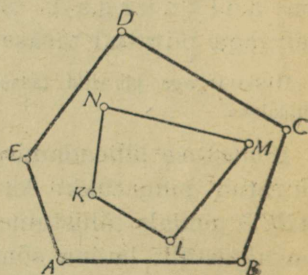
$$S_{ABCDE} = S_{ABC} + S_{ACD} + S_{ADE}.$$

Kui sellisel tükeldamisel saadud osadest mingi üks osa, näiteks ABC , kõrvaldada, siis ülejääv hulknurk on antud hulknurgast väiksema pindalaga:

$$S_{ACDE} < S_{ABCDE}.$$



Joonis 1.



Joonis 2.

Seda järeldust üldistades saame:

kui üks hulknurk on osa teisest hulknurgast, siis esimese hulknurga pindala on väiksem teise hulknurga pindalast;

näiteks hulknurga $KLMN$ pindala joonisel 2 on väiksem hulknurga $ABCDE$ pindalast.

Samuti on eelnenust selge, et

kui kaks hulknurka koosnevad vastavalt pindvõrdseist osadest, siis nad on pindvõrdsed,

sest kummagi hulknurga pindala võrdub tema tükeldamisel saadud osade pindalade summaga (lause 2) ja nende summade liikmed on vastavalt võrdsed.

Olesanded.

1. Kera lõikamisel tasapinnaga saadakse keha, mille äärjoon piirab kaht pinnatükki: üks neist on tasane, teine mitte. Kumma pinnatüki pindala on suurem?

2. Hulknurk piirab kaht pinnatükki: üks neist on tasane, teine mitte. Kumma pinnatüki pindala on suurem?

3. Hulknurk on diagonaaliga tükeldatud kaheks hulknurgaks. Võrrelda antud hulknurga ümbermõõtu tükeldamisel saadud hulknurkade ümbermõõtude summaga.

4. Antud on ruut ja võrdhaarne kolmnurk, mille haar võrdub ruudu diagonaaliga ja kõrgus ruudu küljega. Võrrelda nende kujundite pindalasid.

5. Antud on ruut. Joonestada rööpkülik, mille üks külg võrdub ruudu diagonaaliga, teine võrdub ruudu küljega ja mille üks diagonaal ristub küljega. Näidata, et need kujundid on pindvõrdsed.

6. Näidata, et kahest ruudust on see suurema pindalaga, mille külg on suurem.

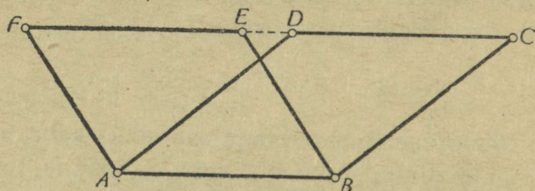
§ 2. Rööpkülikute ja kolmnurkade pindvõrdsus.

Tõestame, et

võrdsete alustega ja võrdsete kõrgustega rööpkülikud on pindvõrdsed.

Selleks paigutame rööpkülikud ühisele alusele AB , nagu on näidatud joonisel 3. Kui rööpkülikuil kõrgused on võrd-

sed, siis nende alustega paralleelsed küljed satuvad ühele ja samale sirgele FC , mis on paralleelne sirgega AB . Nelinurk $ABCF$ on seega trapets, mis on kahel viisil tükeldatud rööpkülilikuks ja kolmnurgaks, nimelt üks kord sirgega AD ja teine kord sirgega BE (joonis 3). Neil tükeldamistel



Joonis 3.

saadud kujundite pindalade summad on võrdsed, sest mõlemad summad annavad ühe ja sama trapetsi pindala:

$$S_{ABCD} + S_{ADF} = S_{ABEF} + S_{BCE}.$$

Kolmnurgad ADF ja BCE on kongruentsed, sest rööpküliliku vastaskülgedena

$$AD = BC \text{ ja } AF = BE$$

ja vastavalt paralleelsete ja samasuunaliste haaradega nurkadena

$$\angle DAF = \angle CBE.$$

Nende kolmnurkade kongruentsuse tõttu

$$S_{ADF} = S_{BCE}.$$

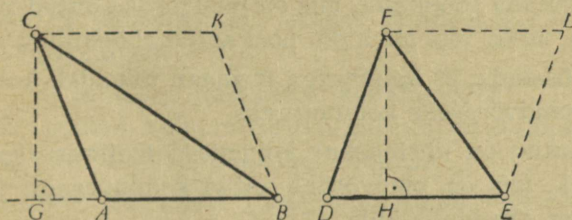
Lahutades need suurused ülalsaadud võrdsetest summadest saame võrdsed tulemused, nimelt

$$S_{ABCD} = S_{ABEF}.$$

Eelmine teoreem võimaldab tõestada, et võrdsete alustega ja võrdsete kõrgustega kolmnurgad on pindvõrdsed.

Eeldus: $AB = DE$; $CG = FH$ (joonis 4).

Väide: $S_{ABC} = S_{DEF}$.



Joonis 4.

Tõestus. Joonestame rööpkülikud $ABKC$ ja $DELF$, võttes nende kolmeks tipuks antud kolmnurkade tipud. Nende rööpkülikute alused on võrdsed ja kõrgused on võrdsed, seega ka pindalad on võrdsed. Et diagonaal tükeldab rööpküliku kaheks kongruentseks kolmnurgaks, siis

$$S_{ABKC} = 2S_{ABC},$$

millest

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}S_{ABKC};$$

samal viisil saame, et

$$S_{DEF} = \frac{1}{2}S_{DELF}.$$

Rööpkülikute $ABKC$ ja $DELF$ pindvõrdsuse põhjal on nende võrduste paremad pooled võrdsed, mistõttu on võrdsed ka nende vasakud pooled:

$$S_{ABC} = S_{DEF}.$$

Kahest viimasest teoreemist selgub, et kujundid võivad olla pindvõrdsed, ilma et nad oleksid kongruentsed, s. t. ilma et nad pealepaigutamisel ühtiksid.

Ulesanded.

7. Ehitada riskülik, mis on pindvõrdne antud rööpkülikuga ja millel on antud rööpkülikuga ühine alus.

8. Ehitada rööpkülik, mis on pindvõrdne antud rööpkülikuga ja mille üks nurk on pool antud rööpküliku nurgast.

9. Tõestada, et kolmnurga mediaan tükeldab kolmnurga kaheks pindvõrdseks kolmnurgaks.

10. Antud on nürinurkne kolmnurk. Ehitada täisnurkne kolmnurk, mis on pindvõrdne antud kolmnurgaga ja millel on sellega üks ühine külg.

11. Tõestada, et rööpküliku diagonaalid tükeldavad rööpküliku neljaks pindvõrdseks kolmnurgaks.

12. Trapetsi diagonaalid jaotavad trapetsi neljaks kolmnurgaks. Näidata, et kaks neist on teineteisega pindvõrdsed.

13. Tõestada, et sirgjoon, mis läbib trapetsi aluste keskohti, jaotab trapetsi kaheks pindvõrdseks osaks.

14. Antud on kolmnurk külgedega 4,2 cm, 3,1 cm ja 3,4 cm. Ehitada antud kolmnurgaga pindvõrdne kolmnurk, mille üks külg on endiselt 4,2 cm ja teine külg 6,5 cm.

15. Nelinurga $ABCD$ diagonaali AC keskpunkt on E . Tõestada, et nelinurgad $ABED$ ja $CBED$ on pindvõrdsed.

16. Kolmnurga ABC mediaanil AD on võetud punkt E . Tõestada, et kolmnurgad ABE ja ACE on pindvõrdsed.

17. Kolmnurga ABC külje AB punkt D on ühendatud tipuga C ja saadud sirglõik CD on poolitatud punktis E . Tõestada, et

$$S_{ABE} = \frac{1}{2} S_{ABC}.$$

§ 3. Hulknurga teisendamine kolmnurgaks.

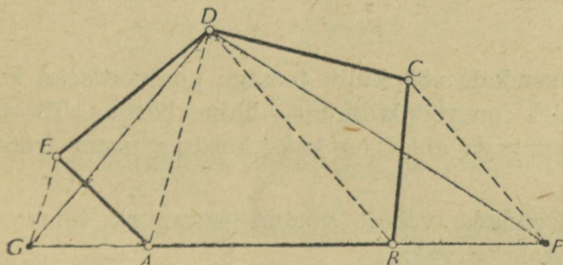
Kahe mistahes hulknurga pindala võrdlemiseks ei ole nii lihtsat tunnust, nagu on võrdsete aluste ja kõrgustega rööpkülikute või kolmnurkade pindalade võrdlemiseks. Et eriti lihtne on võrrelda ruutude pindalasid, siis hulknurkade pindalade võrdlemiseks teisendame need niisama suure pindalaga ruutudeks ja võrdleme saadud ruute.

Hulknurga teisendamist sellega pindvõrdseks ruuduks teostame järgmiselt:

1. teisendame hulknurga kolmnurgaks;
2. saadud kolmnurga teisendame ristkülikuks;
3. ristküliku teisendame ruuduks.

Kõiki neid teisendusi tuleb loomulikult nii teha, et kujundi pindala ei muutu.

Vaatleme kõigepealt hulknurga teisendamist kolmnurgaks. Olgu vaja viisnurk $ABCDE$ teisendada temaga pindvõrdseks kolmnurgaks (joonis 5).



Joonis 5.

Lahendus. Eraldame antud viisnurgast diagonaaliga DB kolmnurga BCD , joonestame läbi tipu C paralleeli diagonaalile DB ja leiame selle paralleeli ja külje AB pikenduse lõikepunkti F . Selle punkti ühendamisel punktiga D saame nelinurga $AFDE$, mis on pindvõrdne antud viisnurgaga $ABCDE$. Kui saadud nelinurgast samal viisil eraldame kolm-

nurga ADE ja asendame selle kolmnurgaga ADG , siis saame kolmnurga FDG , mis on pindvõrdne viisnurgaga $ABCDE$.

Põhjendus. Viisnurk $ABCDE$ on tükeldatud kolmnurkadeks BCD , BDA ja ADE , ja kolmnurk FDG on tükeldatud kolmnurkadeks BFD , BDA ja ADG . Neist $\triangle BDA$ on ühine mõlemal kujundil. Ülejäänud osade pindaladest

$$S_{BCD} = S_{BFD}$$

ja

$$S_{ADE} = S_{ADG},$$

sest kummalgi kolmnurkade paaril on ühine alus (BD ja AD) ja võrdsed kõrgused. Et viisnurk $ABCDE$ ja kolmnurk FDG koosnevad vastavalt pindvõrdsetest osadest, siis nad on pindvõrdsed.

Eespool kirjeldatud viisil on võimalik iga hulknurga tipude arvu vähendada järjest ühe võrra kuni hulknurgast on saadud pindvõrdne kolmnurk.

Ülesanded.

18. Teisendada rööpkülik temaga pindvõrdseks kolmnurgaks, millel on rööpkülikuga ühine kõrgus. Tõestada, et selle kolmnurga alus on kaks korda suurem rööpküliku alusest.

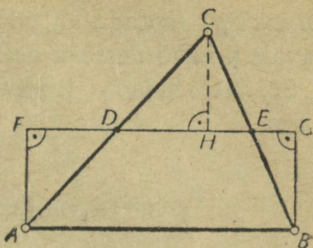
19. Teisendada vabalt võetud kuusnurk temaga pindvõrdseks kolmnurgaks.

§ 4. Kolmnurga teisendamine ristkülikuks.

Olgu antud teisendada ristkülikuks $\triangle ABC$ (joonis 6). Ülesande lahendamiseks joonestame sirge läbi antud kolmnurga kahe külje keskpunktide, näiteks läbi punktide D ja E , ning ehitame sellele sirgele aluse otspunktidest ristsir-

ged AF ja BG . Nii tekkiv nelinurk $ABGF$ on antud kolmnurgaga pindvõrdne ristkülik.

Põhjendus. Sirge DE kui kolmnurga kahe külje keskpunk-
te läbiv sirge on paralleelne kol-
manda küljega AB . Et paralleel-
lidel ristsirged on ühised, siis
nelinurk $ABGF$ on ristkülik. See
ristkülik koosneb kolmest osast,
nimelt kolmnurkadest AFD ja
 BGE ning trapetsist $ABED$.



Joonis 6.

Joonestades kolmnurga DEC kõrguse CH , tükeldub ka
antud kolmnurk ABC kolmeks osaks, mis on pindvõrdsed
ristküliku $ABGF$ vastavate osadega; tõepoolest:

$$\triangle DHC \cong \triangle DFA,$$

sest

$$DC = DA, \angle CDH = \angle ADF \text{ ja } \angle F = \angle H = 90^\circ;$$

samuti

$$\triangle EHC \cong \triangle EGB,$$

sest

$$EC = EB, \angle CEH = \angle BEG \text{ ja } \angle G = \angle H = 90^\circ;$$

lõpuks trapets $ABED$ on kolmnurga ja ristküliku ühine
osa.

Sellest järeldub, et ristkülik $ABGF$ on pindvõrdne antud
kolmnurgaga ABC .

Märkus. Kui $\triangle ABC$ on nürinurkne, siis tuleb tähega C
tähistada nürinurga tipp, et antud põhjendus jääks muutu-
matuks.

Ülesanded.

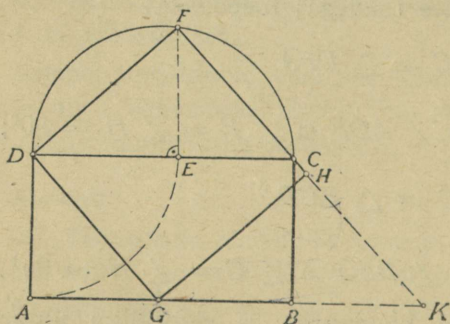
20. Teisendada täisnurkne kolmnurk temaga pindvõrd-
seks ristkülikuks, mille üheks küljeks on kolmnurga üks
kaatet. Kui pikk on ristküliku teine külg?

21. Teisendada nürinurkne kolmnurk temaga pindvõrdseks ristkülikuks, mille üheks küljeks on nürinurga üks lähiskül. Jaotada antud kolmnurk ja saadud ristkülik vastavalt pindvõrdseteks osadeks.

22. Teisendada trapets temaga pindvõrdseks ristkülikuks.

§ 5. Ristküliku teisendamine ruuduks.

Olgu antud teisendada ruuduks ristkülik $ABCD$ (joonis 7). Pöörame tema lühema külje AD tipu D ümber pike-male küljele, saades sellel lõigul DE ; nüüd ehitame niisuguse täisnurkse kolmnurga DFC , mille hüpotenuusiks on



Joonis 7.

ristküliku külj DC ja mille kõrgus tuleb punkti E . Selle kolmnurga ehitamiseks kasutame Thalese teoreemi, joonestades diameetrile DC toetuva piirdenurga DFC . Punktist D joonestame nüüd küljele FC paralleeli kuni

lõikumiseni sirgega AB ja saadud lõikepunktist G joonestame paralleeli küljele DF . Nii tekkinud rööpkülik $FDGH$ ongi ruut, mis on pindvõrdne antud ristkülikuga $ABCD$.

Põhjendus. Kõigepealt näitame, et $FDGH$ on tõepoolest ruut. Et nurk DFH on täisnurk, siis jääb ainult tõestada, et küljed FD ja DG on võrdsed. Selleks võrdleme täisnurkseid kolmnurki DEF ja DAG ; konstruktsiooni järgi

$$DE = DA;$$

peale selle

$$\angle ADG = \angle EDF$$

kui vastavalt ristuvate haaradega teravnurgad. Järelikult

$$\triangle DEF \cong \triangle DAG,$$

mistõttu

$$DF = DG.$$

Niisiis $FDGH$ on ruut. Pikendame selle külge FH kuni lõikumiseni sirgega AB punktis K . Et ristkülikul $ABCD$ ja rööpkülikul $CDGK$ on ühine alus DC ja ühine kõrgus BC , siis (§ 2 põhjal)

$$S_{ABCD} = S_{CDGK}.$$

Ruudul $FDGH$ ja rööpkülikul $CDGK$ on ühine alus DG ja ühine kõrgus GH , siis (§ 2 põhjal)

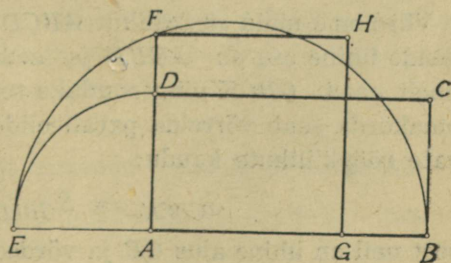
$$S_{FDGH} = S_{CDHK}.$$

Mõlema võrduse paremad pooled on võrdsed; niisiis on võrdsed ka nende vasakud pooled:

$$S_{FDGH} = S_{ABCD};$$

see tähendab, et ehitatud ruut ongi pindvõrdne antud ristkülikuga.

Veelgi hõlpsamini saab antud ristkülikut $ABCD$ teise-
dada temaga pind-
võrdseks ruuduks
järgmiselt:
pikendame ristkü-
liku üht külge, näi-
teks külge AB , teise
külge võrra, s. t.



Joonis 8.

joonestame $AE = AD$ (joonis 8); ringjoon diameetriga EB lõikab siis sirgjoont AD punktis F ning ruut küljega AF ongi pindvõrdne antud ristkülikuga, nimelt

$$S_{FAGH} = S_{ABCD}.$$

Põhjendus. Tõestame, et $FB \parallel DG$. Selleks võrdleme nurki AFB ja ADG (joonis 9). Et nurgad AFB ja AEF on vastavalt ristuvate haaradega teravnurgad, siis

$$\angle AFB = \angle E.$$

Kolmnurgad ADG ja AEF on täisnurksed ning

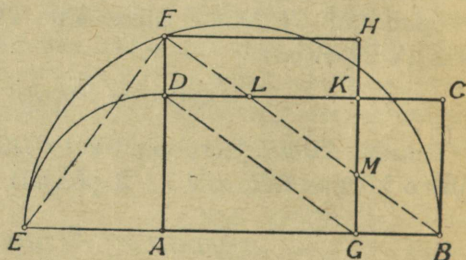
$$AD = AE \text{ ja } AG = AF;$$

järelikult

$$\triangle ADG \cong \triangle AEF,$$

mistõttu

$$\angle ADG = \angle E.$$



Joonis 9.

Nii on osutunud nurgaga E võrdseks niihästi nurk AFB kui ka nurk ADG ; seepärast

$$\angle AFB = \angle ADG,$$

millest järeldubki, et

FB || DG.

Võrdleme nüüd ristkülikut $ABCD$ ruuduga $AGHF$: nende ühine osa on $AGKD$ ja seda täiendab ristkülikuks ühelt poolt $GBCK$ ning ruuduks teiselt poolt $DKHF$. Neid omakorda saab võrrelda paralleelide FB ja DG vahel leiduvate rööpkülikute kaudu:

$$S_{GBCK} = S_{GBLD},$$

sest neil on ühine alus *GB* ja võrdsed kõrgused; samuti

$$S_{GBLD} = S_{GMFD}$$

ühise aluse DG ja võrdsete kõrguste tõttu ning lõpuks

$$S_{GMFD} = S_{DKHF}$$

jällegi ühise aluse FD ja võrdsete kõrguste tõttu. Nii on osutunud ristkülikud $GBCK$ ja $DKHF$ pindvõrdseteks, järelikult

$$S_{ABCD} = S_{AGHF}.$$

Eespool (§ 2) näitasime, et hulknurka on võimalik teisendada temaga pindvõrdseks kolmnurgaks. Siis näitasime, et kolmnurka saame teisendada temaga pindvõrdseks ristkülikuks. Nüüd nägime, et ristkülikut saame teisendada temaga pindvõrdseks ruuduks. Nii võime mistahes hulknurga järk-järgult teisendada temaga pindvõrdseks ruuduks. Ruutude pindalasid aga on lihtne võrrelda nende külgede võrdlemise teel. Nii saab mistahes kahe hulknurga pindalasid võrrelda ruutude kaudu. Et kõik selleks vajalikud teisendused on teostatavad sirkli ja joonlaua abil, siis võime ütelda, et

hulknurga teisendamist temaga pindvõrdseks ruuduks ja hulknurkade pindalade võrdlemist saab teostada sirkli ja joonlaua abil.

Ülesanded.

23. Teisendada kolmnurk külgedega 5 cm, 5,5 cm ja 4 cm temaga pindvõrdseks ruuduks ja mõõta selle külg.

24. Teisendada rööpkülik, millel $a = 2,5$ cm, $b = 4,5$ cm ja $\alpha = 45^\circ$, temaga pindvõrdseks ruuduks.

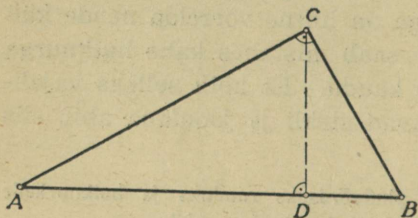
25. Teisendada kaks vabalt võetud nelinurka nendega pindvõrdseteks ruutudeks ja otsustada nende ruutude järgi, kumb nelinurk on suurema pindalaga.

§ 6. Ristkülikute ja ruutude teisendamisteoreeme.

Ristküliku teisendamisel pindvõrdseks ruuduks kasutatakse täisnurkset kolmnurka, mille ehitatakse Thalese teoreemi rakendades. Et neil teisendamistel selgunud asjaolu-

sid lühidalt ja meeldejäädvalt sõnastada, tuleb anda mõnele seal esinenud lõigule sobiv nimetus ühenduses kasutatud täisnurkse kolmnurgaga.

Olgu ABC täisnurkne kolmnurk ja AB selle hüpotenuus (joonis 10). Lõiku CD , mis esitab täisnurga tipu C kaugust hüpotenuusist, nimetame hüpotenuusile tõmmatud kõrguseks. Punkti D nimetame tipu C projektsiooniks hüpotenuusil; ta jaotab hüpotenuusi osadeks, mida nimetame kaatetite projektsioonideks hüpotenuusil — lõiku AD kaateti AC projektsiooniks ja lõiku DB kaateti CB projektsiooniks.



Joonis 10.

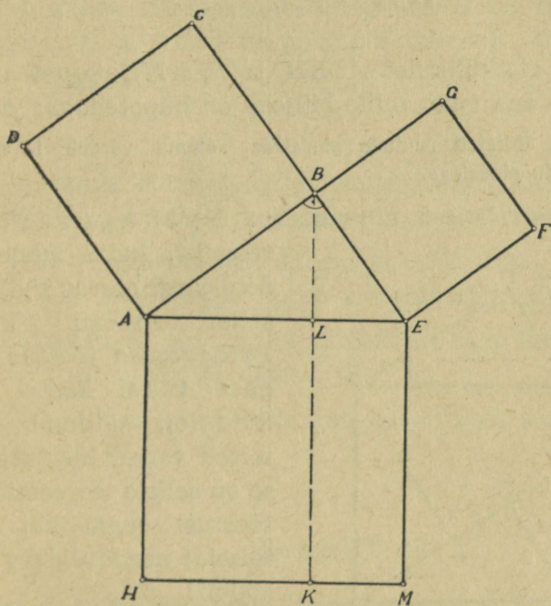
Eelmises paragrahvis kasutasime esimesel teisendamisevõttel täisnurkset kolmnurka DCF (joonis 7), mille kaateti DF projektsioon hüpotenuusil on DE . Ristküliku $ABCD$ üheks küljeks on hüpotenuus DC ja teine külg võrdub kaateti projektsiooniga DE . Selle ristkülikuga pindvõrdseks osutunud ruudul on küljeks kaatet DF . Nende kujundite pindvõrdsust sõnastame järgmise teoreemina:

kaatetile ehitatud ruut on pindvõrdne ristkülikuga, mille külgedeks on hüpotenuus ja selle kaateti projektsioon hüpotenuusil.

Seda teoreemi tuntakse Eukleides'e* teoreemi nime all.

* Eukleides, kreeka matemaatik, elas u. 315—255 e.m.a.; tema nime järgi kutsutakse «harilikku» geomeetriat (mis kasutab paralleelide aksiomi) eukleidiliseks geomeetriaks, kuna Eukleides esimesena andis niisuguse geomeetria süstemaatilise ülesehituse.

Teist teisendamisviisi põhjendades vaatlesime (joonis 9) kolmnurka EBF , mille kaatetite projektsioonid võrduvad ristküliku $ABCD$ külgedega; ristkülikuga pindvõrdseks osutunud ruudu $AGHF$ küljeks aga on hüpotenuusile tõmmatud kõrgus AF . Seda tõsiasja väljendab lause:



Joonis 11.

hüpotenuusile tõmmatud kõrgusele ehitatud ruut on pindvõrdne ristkülikuga, mille külgedeks on kaatetite projektsioonid.

See teoreem kannab täisnurkse kolmnurga kõrguse teoreemi nimetust.

Täisnurkse kolmnurga abil on võimalik ehitada ka niisugust ruutu, mille pindala võrdub kahe antud ruudu pindalade summaga. Selleks asetame antud ruudud nõnda, et nende küljed jäävad täisnurkse kolmnurga kaatetiteks (joo-

nis 11). Ruuduga $ABCD$ pindvõrdseks ristkülikuks on Eukleidese teoreemi järgi ristkülik $ALKH$, mille külg AL on kaateti AB projektsioon ja külg AH on joonestatud võrdsema hüpotenuusiga AE . Samuti on Eukleidese teoreemi järgi

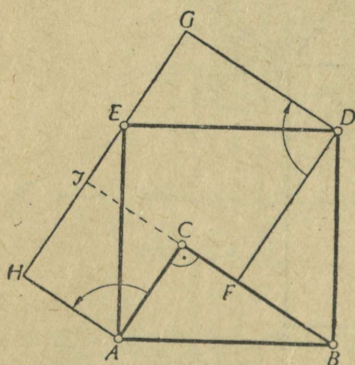
$$S_{BEFG} = S_{ELKM}.$$

Saadud ristkülikuist $ALKH$ ja $ELKM$ koosnev nelinurk $AHME$ on aga ruut, mille küljeks on hüpotenuus; järelikult

kaatetitele ehitatud ruutude pindalade summa võrdub hüpotenuusile ehitatud ruudu pindalaga.

Seda tähtsat lauset nimetatakse Pythagoras'e* teoreemiks, kuna mõnede teadete järgi olevat Pythagoras selle teoreemi tõestanud.

Pythagorase tõestus on aegade vältel kaotsi läinud, kuid on säilinud mitmed teised vanad tõestused. Üldse on sellele teoreemile leitud tõestusi enam kui ühelegi teisele; nende üldarv küünib 100-ni!



Joonis 12.

Hindude poolt on leitud Pythagorase teoreemile järgmine teisendustõestus. Joonestame täisnurkse kolmnurga ABC ja ehitame selle hüpotenuusile ruudu $ABDE$, nii nagu näidatud joonisel 12. Kui tõmmata kolmnurga ABC pikemale kaatetile BC ristlõik DF , siis tükeldub hüpotenuusile ehitatud ruut kolmeks osaks: kaheks kongruentseks

* Pythagoras, kreeka matemaatik, elas u. 580—500 e. m. a.

kolmnurgaks ABC ja BDF ning viisnurgaks $ACFDE$. Pöörame kolmnurga ABC punkti A ümber asendisse AEH ja kolmnurga BDF punkti D ümber asendisse EDG . Nii saame hüpotenuusile ehitatud ruudust kuusnurga $ACFDGH$. Kui pikendada külge BC kuni punktini I , siis kuusnurk $ACFDGH$ tükeldub kaheks ruuduks, milledest $ACIH$ on kaatetile AC ehitatud ruut ja $FDGI$ on kaatetile CB ehk FD ehitatud ruut.

Ulesanded.

26. Tõestada ruutude tükeldamise teel Pythagorase teoreem võrdhaarse täisnurkse kolmnurga erijuhul.

27. Ühel ruudul on külg 4,5 cm ja teisel 3 cm. Joonestada ruut, mis on pindvõrdne antud ruutude summaga.

28. Joonestada ruut, mille pindala on kaks korda suurem vabalt võetud ruudu pindalast.

29. Joonestada ruut, mille pindala on pool vabalt võetud ruudu pindalast.

§ 7. Pindalaühikud.

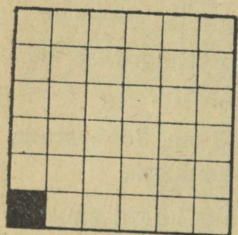
Hulknurga teisendamine temaga pindvõrdseks ruuduks annab võimaluse hulknurkade pindalade võrdlemiseks. Sagedamini toimetatakse seda võrdlemist nende pindalade mõõtmise teel.

Mõõta hulknurga pindala tähendab leida, mitu korda pindalaühikuks võetud pindala mahub mõõdetavale pindalale või missuguse osa pindalaühikust ta moodustab.

Maatüki pindala mõõtmise ülesanne on vanim geomeetria ülesanne; selle ülesande järgi on geomeetria saanud oma nime, sest sõna „geomeetria“ tuleb kreeka keelest ja tähendab maamõõtmist.

Pindalaühikuina kasutatakse niisuguste ruutude pindalaid, mille külgede pikkusteks on pikkusühikud. Vastavalt külje pikkusele neid ühikuid nimetatakse ruutkilomeetriks, hektaariks, aariks, ruutmeetriks, ruutdetsimeetriks, ruutsentimeetriks ja ruutmillimeetriks ning tähistatakse vastavalt sümbolitega

km^2 , ha , a , m^2 , dm^2 , cm^2 , mm^2 .



Joonis 13.

Hektaar näiteks on ruudu pindala, mille külg on 1 hektomeeter, s. o. 100 meetrit, aar on ruudu pindala, mille külg on 1 dekameeter, s. o. 10 meetrit.

Kui üks pikkusühik on teisest n korda suurem, siis vastav pindalaühik on teisest pindalaühikust n^2 korda suurem, nagu võib veenduda joonise 13 abil. Seetõttu pindalaühikud on ükstei-

sest järgmiselt olenevad:

$$1 \text{ km}^2 = 100 \text{ ha} = 10\,000 \text{ a} = 1\,000\,000 \text{ m}^2;$$

$$1 \text{ ha} = 100 \text{ a} = 10\,000 \text{ m}^2;$$

$$1 \text{ a} = 100 \text{ m}^2;$$

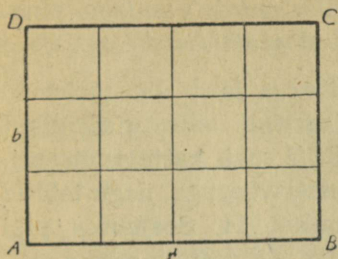
$$1 \text{ m}^2 = 100 \text{ dm}^2 = 10\,000 \text{ cm}^2 = 1\,000\,000 \text{ mm}^2;$$

$$1 \text{ dm}^2 = 100 \text{ cm}^2 = 10\,000 \text{ mm}^2;$$

$$1 \text{ cm}^2 = 100 \text{ mm}^2.$$

Pindala mõõtmise tulemusena saadakse pindala mõõtarv. Pindala mõõtarvu leidmine ehk pindala mõõtmine võib olla kas otsene või kaudne.

Pindala otsesel mõõtmisel loendatakse, mitu korda pindalaühik mahub mõõdetavale pindalale.



Joonis 14.

Olgu näiteks vaja mõõta ristküliku pindala, mille pikus on 4 cm ja laius 3 cm. Kui selle ristküliku katame ühesentimeetriste vahedega paralleelsirgete võrguga, siis ristküliku pindala tükel-
dub ruutsentimeetriteks (joo-
nis 14). Viimaste loendamisel
saame pindala mõõtarvu.

Pindala kaudsel mõõtmisel arvutatakse kujundi pindala selle kujundi ele-
mentide põhjal.

Ülesanded.

30. Avaldada m^2 -tes 0,4 km^2 , 0,705 km^2 , 31,8 ha, 0,069 ha, 43,5 a, 1,2 a, 0,08 a.

31. Avaldada cm^2 -tes 0,75 m^2 , 8 dm^2 , 0,4 dm^2 , 25 mm^2 , 413 mm^2 , 3900 mm^2 .

32. Missugune osa m^2 -st on 1 dm^2 , 1 cm^2 , 1 mm^2 ?

33. Avaldada $2\frac{3}{4}$ ruutjalga ruuttollides, kui 1 jalg = 12 tolli.

34. Avaldada ruutjalgades 432 ruuttolli, 48 ruuttolli, 120 ruuttolli.

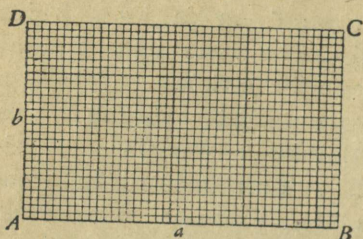
35. Missugune osa ruutsüllast on ruutjalg, kui 1 süld = 7 jalga?

§ 8. Ristküliku pindala.

Ristküliku pindala võrdub kahe lähiskülje korrutisega.

Tõestus. Olgu ristküliku $ABCD$ kahe lähiskülje AB ja AD pikkused vastavalt a sentimeetrit ja b sentimeetrit (joonised 14 ja 15). Nii arv a kui ka arv b võib olla kas

täisarv või kümnendmurd või harilik murd. Vaatleme pindala määramist igal nimetatud juhul eraldi.



Joonis 15.

Kui a ja b on mõlemad täisarvud, siis ristkülikut $ABCD$ saab katta ruutsentimeeter-võrguga, nagu tehtud joonisel 14. Seejuures piki külge AB asetseb reas a cm^2 . Et niisuguseid ridu üldse on b , siis ristkülik $ABCD$ on kaetud $b \cdot a$ ehk $a \cdot b$ ruut-

sentimeetriga. Seega ruutsentimeetrites avaldub ristküliku $ABCD$ pindala S järgmiselt:

$$S = ab.$$

Kui arvudest a ja b kas üks või mõlemad on kümnendmurrud, näiteks

$$a = 4,3 \text{ cm} \quad \text{ja} \quad b = 2,7 \text{ cm},$$

siis leiame niisuguse pikkusühiku, milles a ja b väljenduvad täisarvudes (joonis 15); antud juhul võib võtta selleks ühikuks millimeetri:

$$a = 43 \text{ mm} \quad \text{ja} \quad b = 27 \text{ mm}.$$

Kuna külgede mõõtardvud nüüd on täisarvud, siis eespool-leitud arvutamiseeskirja alusel ristküliku pindala on

$$43 \cdot 27 \text{ mm}^2$$

ehk võttes arvesse, et $1 \text{ mm}^2 = 0,01 \text{ cm}^2$,

$$0,01 \cdot 43 \cdot 27 \text{ cm}^2,$$

Selle avaldise teisendame ja kirjutame kujul

$$0,1 \cdot 43 \cdot 0,1 \cdot 27 \text{ cm}^2$$

ehk

$$4,3 \cdot 2,7 \text{ cm}^2.$$

Sellest nähtub, et ka sel juhul pindala mõõtarv ruutsentimeetrites võrdub külgede mõõtarvude korrutisega, s. t.

$$S = ab.$$

Kui arvudest a ja b kas üks või mõlemad on harilikud murrud, näiteks

$$a = 4\frac{1}{3} \text{ cm} \quad \text{ja} \quad b = 2\frac{3}{4} \text{ cm},$$

siis valime uueks pikkusühikuks niisuguse lõigu, mis täisarv kordi mahub nii küljesse a kui ka küljesse b , võttes selleks kõige suurema niisuguse lõigu, s. o. $\frac{1}{12}$ cm, saame, et

$$\text{ja} \quad a = 12 \cdot 4\frac{1}{3} \text{ uut pikkusühikut}$$

$$b = 12 \cdot 2\frac{3}{4} \text{ uut pikkusühikut,}$$

seega ristküliku pindala on

$$12 \cdot 4\frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 2\frac{3}{4} \text{ vastavat pindalaühikut.}$$

Et uus pikkusühik on $\frac{1}{12}$ cm, siis vastav pindalaühik on $(\frac{1}{12})^2 \text{ cm}^2$. Seetõttu ristküliku pindala ruutsentimeetrites on

$$(\frac{1}{12})^2 \cdot 12 \cdot 4\frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 2\frac{3}{4}$$

$$\text{ehk} \quad \frac{1}{12} \cdot 12 \cdot 4\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{12} \cdot 12 \cdot 2\frac{3}{4}$$

$$\text{ehk} \quad 4\frac{1}{3} \cdot 2\frac{3}{4}.$$

Seega ruutsentimeetrites avaldatuna ka sel juhul

$$S = ab.$$

Püüdes tõestatud teoreemi täpselt sõnastada, peaksime ütlema järgmiselt: ristküliku pindala mõõtarv võrdub tema kahe lähiskülje pikkuste mõõtarvude korrutisega, kui need küljed on mõõdetud ühtedes ja samades pikkusühikutes ning pindala on mõõdetud vastavais pindalaühikuis. Et see sõnastus on liiga pikk, siis kasutame eespool-antud lühemat sõnastust ja mõistame seda nii, nagu öeldud siinkohal. Nii-samuti tuleb mõista ka valemit $S = ab$. Samasugust lühemat väljendust tarvitame ka järgnevate pindalateoreemide puhul.

Järeldus. Et ruut on ristkülik, mille lähisküljed on võrdsed, siis ruudu pindala

ehk

$$S = a \cdot a$$

Seega

$$S = a^2.$$

ruudu pindala võrdub külje teise astmega.

Olesanded.

36. Arvutada ristküliku pindala, kui tema mõõtmed on 4,5 cm ja 6,8 cm; 12 cm ja 8,4 cm; 59 mm ja 12 mm; 0,8 m ja 18 cm.

37. Ristküliku pikkus on 4,2 cm ja pindala on 14,7 cm². Kui lai on ristkülik?

38. Ristküliku ümbermõõt on 28 cm ja alus on kõrgusest 3 cm võrra pikem. Arvutada ristküliku pindala.

39. Arvutada ruudu pindala, kui ruudu külg on 8 cm, 15 cm, 6,9 cm, 0,4 m, 24,6 m.

40. Mitu hektaari on ristkülikukujulise põllu pindala, mille pikkus on 240 m ja laius 75 m?

41. Mitu aari on ruudukujulise aia pindala, kui aia iga külg on 36 m?

42. Mitu korda suureneb ruudu pindala, kui ruudu külgi suurendada 4,5 korda?

43. Mille võrra suureneb ruudu pindala, kui ruudu külgi suurendada 5 cm-st 7,5 cm-ni?

44. Leida ruudu külje pikkus, kui külgede suurendamisel 3 korda ruudu pindala suureneb 200 m².

45. Kui ruudu külgi vähendada 4 dm, siis pindala vähe-
neb 128 dm². Leida esialgse ruudu külg.

46. Kui ristküliku lühemaid külgi suurendada 14 m ja pikemaid 8 m, siis saab ruudu, mille pindala on 328 m² suurem ristküliku pindalast. Leida ristküliku pindala.

47. Tuletada pindalade abil kahe arvu summa ruudu valem, kahe arvu vahe ruudu valem, kahe arvu summa ja vahe korrutise valem.

§ 9. Rööpküliku pindala.

Rööpküliku pindala võrdub aluse ja kõrguse korrutisega.

Tõestus. Joonestame ristküliku $ABEF$, millel on rööpkülikuga $ABCD$ ühine alus AB ja ühine kõrgus h_a (joonis 16). Siis

$$S_{ABCD} = S_{ABEF},$$

sest võrdsete aluste ja võrdsete kõrgustega rööpkülikud on pindvõrdsed. Et

$$S_{ABEF} = a \cdot h_a,$$

siis ka

$$S_{ABCD} = a \cdot h_a,$$

m. o. t. t.

Võttes rööpküliku aluseks külje $BC = b$ ja tähistades sellele ehitatud kõrgust sümboliga h_b , võime rööpküliku pindala avaldada ka kujul $b \cdot h_b$.

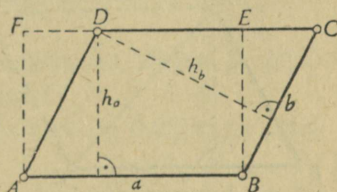
Ülesanded.

48. Rööpküliku lühem diagonaal, mille pikkus on 3,6 cm, on risti ühe küljega ja võrdub sellega. Arvutada rööpküliku pindala.

49. Rööpküliku alus on 25 m ja pindala on 3,5 aari. Leida rööpküliku kõrgus.

50. Rööpkülikul $a = 15$ cm, $b = 12$ cm ja $h_a = 6$ cm. Arvutada h_b .

51. Rööpkülikul $a = 6,5$ cm, $h_a = 7,2$ cm ja $h_b = 5,4$ cm. Kui pikk on külj b ?



Joonis 16.

52. Rööpküliku ümbermõõt on 68 cm, tema kõrgused suhtuvad kui 10 : 7. Leida küljed.

§ 10. Kolmnurga pindala.

Kolmnurga pindala võrdub aluse ja kõrguse poole korrutisega.

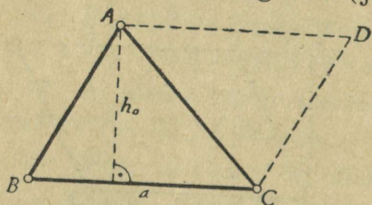
Tõestus. Joonestame läbi $\triangle ABC$ tipu A sirge AD nii, et

$$AD \parallel BC,$$

ja läbi tipu C sirge CD nii, et

$$CD \parallel AB.$$

Siis tekib rööpkülik $ABCD$, millel on kolmnurgaga ühine alus a ja ühine kõrgus h (joonis 17). Rööpküliku pindala võrdub aluse ja kõrguse korrutisega. Et $\triangle ABC$ on pool rööpkülikust $ABCD$, siis kolmnurga pindala võrdub aluse ja kõrguse poole korrutisega; seega



Joonis 17.

$$S = \frac{1}{2} ah_a.$$

Võttes kolmnurga aluseks mõne teise külje, võib kirjutada, et

$$S = \frac{1}{2} bh_b = \frac{1}{2} ch_c.$$

Järeldus 1. Kui täisnurkse kolmnurga aluseks võtta üks kaatet, siis teine kaatet on kõrguseks; seepärast täisnurkse kolmnurga pindala võrdub kaatetite poole korrutisega.

Järeldus 2. Et rombi diagonaalid on risti ja poolitavad teineteist, siis tükeldavad nad rombi neljaks võrdseks täisnurkseks kolmnurgaks. Olgu diagonaalid e ja f . Siis ühe kolmnurga pindala on

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{e}{2} \cdot \frac{f}{2} = \frac{1}{8} ef$$

ja rombi pindala on

$$4 \cdot \frac{1}{8} ef = \frac{1}{2} ef.$$

Seega

rombi pindala on pool diagonaalide korrutisest.

Ulesanded.

53. Ühise alusega ristkülik ja kolmnurk on pindvõrdsed. Mis võib öelda nende kõrgustest?

54. Kolmnurgal $a = 3,12$ m, $b = 5,2$ m ja $h_a = 4$ m. Kui pikk on h_b ?

55. Täisnurkne kolmnurk ja ruut on pindvõrdsed; ruudu külg on võrdne ühe kaatetiga. Kui pikk on teine kaatet?

56. Täisnurkse kolmnurga kaatetid on 12,7 m ja 15,6 m. Arvutada kolmnurga pindala.

57. Täisnurkse kolmnurga üks kaatet on 18 cm ja pindala 2,43 dm². Kui pikk on teine kaatet?

58. Kui kõrge on kolmnurk, mille alus on 0,82 m ja pindala on 0,492 m²?

59. Kui suur on rombi pindala, kui diagonaalid on 5,7 cm ja 8,4 cm?

§ 11. Trapetsi pindala.

Trapetsi pindala võrdub aluste poolsumma ja kõrguse korrutisega.

Tõestus. Tükeldame trapetsi $ABCD$ (joonis 18), mille alused on a ja c ning kõrgus h , diagonaaliga kolmnurkadeks ABD ja DBC . Siis

$$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{DBC}.$$

Võttes neis kolmnurkades alusteks küljed a ja c , saame

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} ah + \frac{1}{2} ch$$

ehk võttes sulgude ette ühised tegurid $\frac{1}{2}$ ja h

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} h(a + c)$$

ehk korrutades tegurid $\frac{1}{2}$ ja $a + c$

$$S_{ABCD} = \frac{a+c}{2} \cdot h,$$

m. o. t. t.

Et trapetsi aluste poolsumma $\frac{a+c}{2}$ võrdub kesklõiguga l , siis pindala

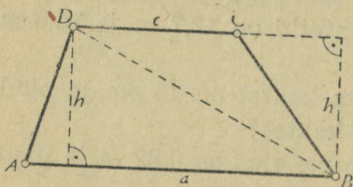
$$S = l \cdot h.$$

Seega

trapetsi pindala võrdub kesklõigu ja kõrguse korrutisega.

Ulesanded.

60. Arvutada trapetsi pindala, kui trapetsi alused on 5,8 cm ja 4,6 cm ning kõrgus on 3,7 cm.



Joonis 18.

61. Arvutada trapetsi pindala, kui sellel $a = 15,7$ m, $c = 8\frac{2}{3}$ m ja $h = 4\frac{4}{5}$ m.

62. Trapetsi pindala $S = 127,1$ m², alus $a = 18$ m ja alus $c = 13$ m. Kui kõrge on trapets?

63. Arvutada võrdhaarse trapetsi pindala, kui alused on 7 cm ja 11 cm ja üks nurk on 45°.

64. Trapetsi pindala $S = 392$ m², alus $a = 25$ m ja kõrgus $h = 14$ m. Kui pikk on alus c ?

65. Teisendada trapetsi temaga pindvõrdseks ristkülikuks, millel on trapetsiga ühine kõrgus.

66. Missuguse kujundi pindala valemiga saab trapetsi pindala valemist, kui selles ühe aluse pikkuseks võtta 0?

§ 12. Korrapärase hulknurga pindala.

Korrapärase hulknurga pindala leidmiseks tükeldame hulknurga kolmnurkadeks, ühendades hulknurga keskpunkti tippudega. Et korrapärase hulknurga keskpunkt on

tippudest võrdsetel kaugustel, siis kõik tükeldamisel tekkinud kolmnurgad on kongruentsed ja võrdhaarsed. Neis kolmnurkades on aluseks hulknurga külg ja kõrguseks hulknurga apoteem, s. o. keskpunkti küljele tõmmatud ristlõik. Seda teades saame tõestada, et

korrapärase hulknurga pindala võrdub poole übermõõdu ja apoteemi korrutisega.

Tõestus. Olgu antud korrapärase hulknurga külgede arv n , külg a ja apoteem h (joonis 19). Keskpunkti ühendamisel tippudega hulknurk tükeldub n võrdseks kolmnurkaks. Ühe niisuguse kolmnurga pindala

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} ah$$

ja n kolmnurga pindala

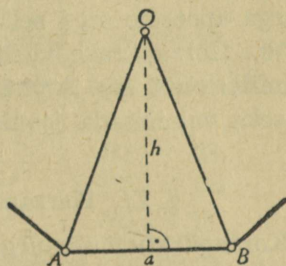
$$n \cdot S_{\triangle} = n \cdot \frac{1}{2} ah$$

ehk

$$n \cdot S_{\triangle} = \frac{na}{2} \cdot h.$$

Seega korrapärase n -nurga pindala

$$S = \frac{na}{2} \cdot h.$$



Joonis 19.

Selles valemis na tähistab hulknurga übermõõdu ehk perimeetrit ja $\frac{na}{2}$ poolt übermõõdu. Hulknurga poolt übermõõdu tähistatakse sagedasti tähega p . Seda tähist tarvitades korrapärase hulknurga pindala

$$S = p \cdot h.$$

Kui korrapärasest hulknurgast on antud peale külgede arvu n veel külg või apoteem või überjoonestatud ringi raadius, siis on sellega määratud kõik ülejäänud elemendid. Edaspidi näeme, kuidas neid elemente arvutada. Esialgu leiame pindala arvutamiseks vajalikud elemendid joonestat-

mise teel. On küllalt, kui selleks joonestada ainult üks kolmnurkadest, mis tekib hulknurga keskpunkti ühendamisel tippudega (joonis 19).

Ulesanded.

67. Leida korrapärase kuusnurga pindala, kui selle kuusnurga külge on 4,5 cm.

68. Toa põrand tahetakse katta korrapärase kuusnurga kujuliste parkettkividega, mille külge on 8 cm. Mitu parkettkivi on tarvis põranda katmiseks, kui põranda pikkus on 9 m ja laius 7,4 m?

69. Avaldada korrapärase kolmnurga pindala kahel viisil ja järeldada saadud avaldistest, et korrapärase kolmnurga apoteem on $\frac{1}{3}$ selle kolmnurga kõrgusest.

70. Korrapärase viisnurga ümber joonestatud ringjoone raadius on 6 cm. Arvutada pindala. (Joonelementide mõõtmiseks valmistada joonis.)

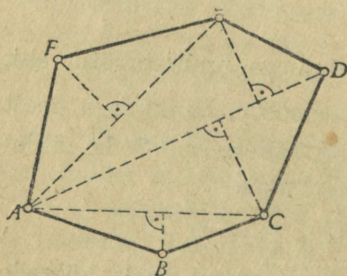
§ 13. Korrapäratu hulknurga pindala.

Korrapäratu hulknurga pindala määramiseks hulknurk tükeldatakse kujundeiks, mille pindala saab arvutada;

nende arvutamisel ja saaduste liitmisel leitakse antud hulknurga pindala. Sagedamini tarvitatakse üht kahest järgmisest tükeldamisviisist.

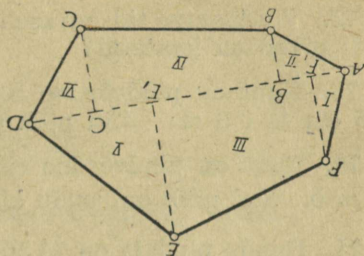
1. Hulknurga ühest tipust ehitatakse kõik diagonaalid ja mõõdetakse igas niiviisi saadud kolmnurgas üks külge ja sellele vastav

kõrgus. Nagu näha jooniselt 20, kulub kuusnurga pindala leidmiseks sel viisil 7 mõõtmist.



Joonis 20.

2. Hulknurga ühele diagonaalile ehitatakse ristlõigud hulknurga tippudest. Niiviisi hulknurk tükeldub täisnurkseteks kolmnurkadeks ja täisnurkseteks trapetsiteks. Pindala arvutamiseks mõõdetakse ristlõigud FF_1 , $BB_1, \dots$ ja lõigud AF_1 , $F_1B_1, \dots$, milleks ristlõigud tükeldavad diagonaali (joonis 21). Nende mõõtmiste andmeil arvutatakse tükeldamisel saadud kolmnurkade ja trapetsite pindalad ja liidetakse need. Nagu joonisel näha, kulub kuusnurga pindala leidmiseks sel viisil 9 mõõtmist.



Joonis 21.

Näide. Olgu joonisel 21 kujutatud maatüki mõõtmisel saadud, et meetrites

$$\begin{array}{lll} AF_1 = 26, & E_1C_1 = 12, & BB_1 = 38, \\ F_1B_1 = 8, & C_1D = 12, & EE_1 = 45, \\ B_1E_1 = 27, & FF_1 = 31, & CC_1 = 18. \end{array}$$

Maatüki pindala arvutamist toimetame järgmise skeemi järgi.

Kujundi nr.	Üks alus	Teine alus	Kõrgus	Pindala
I	26	—	31	$\frac{26 \cdot 31}{2} = 403$
II	34	—	38	$\frac{34 \cdot 38}{2} = 646$
III	31	45	35	$\frac{31 + 45}{2} \cdot 35 = 1330$
IV	38	18	39	$\frac{38 + 18}{2} \cdot 39 = 1092$
V	24	—	45	$\frac{24 \cdot 45}{2} = 540$
VI	12	—	18	$\frac{12 \cdot 18}{2} = 108$

Kokku $4119 \text{ m}^2 \approx 41,2 \text{ a}$

Ulesanded.

71. Joonestada vabalt mingi viisnurk, tükeldada see joonisel 21 näidatud viisil ja arvutada pindala.

72. Võrdhaarse täisnurkse kolmnurga pindala on 338 dm^2 . Kui pikad on kaatetid?

73. Ruut on pindvõrdne ristkülikuga, mille mõõtmed on $3,6 \text{ cm}$ ja $0,9 \text{ cm}$. Kui pikk on ruudu külg?

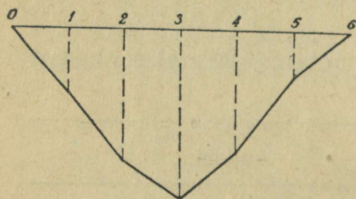
74. Ruut on pindvõrdne ristkülikuga, mille mõõtmed on a ja b . Kui pikk on ruudu külg?

75. Ruudu pindala on $11,56 \text{ dm}^2$. Arvutada ruudu ümbermõõt.

76. Ruudu pindala on $S \text{ cm}^2$. Kui pikk on ümbermõõt?

77. Ruudukujulise põllutüki pindala on $2,5 \text{ ha}$. Kui pikk on põllutüki külg?

78. Arvutada jõesäangi ristlõike (joonis 22) pindala, kui sügavused on antud tabelis:



Joonis 22.

Kaugus kaldast meetrites	1	2	3	4	5	6
sügavus meetrites	1,15	2,3	2,85	2,15	0,8	0

79. Kuidas leida jõesäangi ristlõike pindala, kui jõe põhja ristlõike-joon ei ole murdjoon, vaid kõverjoon?

80. Kas ja kuidas saaks kõverjoonega piiratud pinnatüki pindala leida millimeeterpaberi abil?

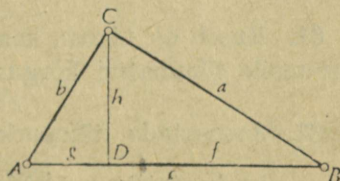
Peatükk II.

Seosed kolmnurga joonelementide vahel.

§ 14. Täisnurkse kolmnurga joonelemendid.

Täisnurkne kolmnurk on määratud oma kahe küljega. Tema kolmanda külje leidmiseks joonestame kolmnurga antud kahe külje järgi ja mõõdame joonisest kolmanda külje. Kuid seda külge saab ka arvutada, teades teiste külgede pikkusi.

Olgu ABC täisnurkne kolmnurk ja AB selle hüpotenuus (joonis 23). Hüpotenuusile tõmmatud kõrgus CD jaotab hüpotenuusi kaheks lõiguks, AD ja DB , mis on kaatetite AC ja CB projektsioonid hüpotenuusil. Täisnurkse kolmnurga külgi,



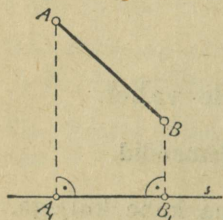
Joonis 23.

hüpotenuusile tõmmatud kõrgust ja kaatetite projektsioone hüpotenuusil nimetatakse selle kolmnurga joonelementideks. Joonelementide hõlpsamaks arvutamiseks tähistame igaühte neist ühe tähega ja nimelt hüpotenuusi tähega c , kaateteid tähtedega a ja b , hüpotenuusile tõmmatud kõrgust tähega h ja kaatetite projektsioone tähtedega f ja g (a projektsioon on f). On selge, et

$$f + g = c.$$

Olgu märgitud, et punkti ja lõigu projektsiooni mõistet ei tarvitata mitte ainult ühenduses täisnurkse kolmnurgaga: üldiselt

punkti projektsiooniks sirgel nimetatakse punktist sirgele joonestatud ristlõigu ja sirge ühist punkti.



Joonis 24.

Seega punkt A_1 joonisel 24 on punkti A projektsioon sirgel s , kui

$$AA_1 \perp s.$$

Sirglõigu projektsiooniks sirgel nimetatakse sirglõigu otspunktide projektsioonide vahelist lõiku.

Seega A_1B_1 joonisel 24 on lõigu AB projektsioon sirgel s , kui

$$AA_1 \perp s \text{ ja } BB_1 \perp s.$$

Ülesanded.

81. Kumb on pikem, kaatet või tema projektsioon, hüpotenuusile tõmmatud kõrgus või kaatet?

82. Joonestada täisnurkne kolmnurk, millest on antud

- a) kaatetite projektsioonid;
- b) hüpotenuus ja ühe kaateti projektsioon;
- c) üks kaatet ja tema projektsioon.

83. Millal lõigu projektsioon sirgel on punkt?

84. Kolmnurga hüpotenuus on 17 cm ja ühe kaateti projektsioon on 11,5 cm. Kui pikk on teise kaateti projektsioon?

85. Leida ristküliku tipu projektsioon tema diagonaalil, mis ei lähtu sellest tipust.

§ 15. Täisnurkse kolmnurga joonelementide vahelised seosed.

Ühenduses ristküliku teisendamisega temaga pindvõrdseks ruuduks saime kolm teoreemi, mis väljendavad seoseid täisnurkse kolmnurga joonelementidele ehitatud ruutude ja ristkülikute pindalade vahel (§ 6). Et vahepeal oleme õppinud pindalasid väljendama arvudena, siis saame need seosed nüüd avaldada võrdustena (valemitena). Selleks asendame neis teoreemides iga seal esineva ruudu pindala tema külje mõõtarvu ruuduga ja ristküliku pindala tema kahe lähiskülje mõõtarvude korrutisega, kasutades eelmises paragrahvis tarvitusele võetud tähiseid. Nii tehes saame Eukleidese teoreemiks võrdused

$$a^2 = fc \quad \text{ja} \quad b^2 = gc,$$

kõrguse teoreemiks võrduse

$$h^2 = fg$$

ja Pythagorase teoreemiks võrduse

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Neis võrdustes esinevad suurused a , b , c , f , g ja h on täisnurkse kolmnurga joonelementide mõõtarvud, mistõttu need võrdused on joonelementide vahelised seosed. Nimetades kaateti mõõtarvu ruutu lühemalt kaateti ruuduks ja kaateti projektsiooni mõõtarvu ning hüpotenuusi mõõtarvu korrutist lihtsalt nende joonelementide korrutiseks, saame Eukleidese teoreemile järgmise algebralise sõnastuse:

kaateti ruut on võrdne selle kaateti projektsiooni ja hüpotenuusi korrutisega.

Analoogiliselt saame sõnastada kõrguse teoreemi:

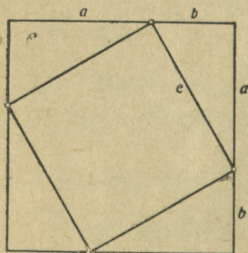
hüpoteenuusile tõmmatud kõrguse ruut võrdub kaatetite projektsioonide korrutisega,

ja Pythagorase teoreemi:

kaatetite ruutude summa võrdub hüpoteenuusi ruuduga.

Nende seoste tuletamine oli rajatud ristküliku teisendamisele temaga pindvõrdseks ruuduks (§ 5). Näitame nüüd, et Pythagorase teoreemi on võimalik tõestada ilma Eukleidese teoreemita, ja järel dame Pythagorase teoreemist ülejäänud kaks teoreemi.

1. Pythagorase teoreem. Olgu joonestatud ruut küljega $a + b$ cm. Ühendame ruudu külgedel leiduvad lõikude a ja b ühised otspunktid järjestikku sirglõikudega (joonis 25). Saadud nelinurga küljed on võrdsed, sest nad on kongruentsete täisnurksete kolmnurkade hüpoteenuusid; ka on võrdsed selle nelinurga nurgad, sest igaüks neist täiendab täisnurkse kolmnurga kahe teravnurga summat sirgnurgani. See nelinurk on siis ruut, mille külje pikkus olgu c cm.



Joonis 25.

Avaldame antud ruudu pindala saadud väiksema ruudu pindala ja täisnurksete kolmnurkade pindalade kaudu. Et antud ruudu pindala (ruutsentimeetrites) on $(a + b)^2$, seesmise ruudu pindala on c^2 ja iga täisnurkse kolmnurga pindala on $\frac{ab}{2}$, siis

$$(a + b)^2 = c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2},$$

ehk

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab,$$

millest

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

2. Täisnurkse kolmnurga kõrguse teoreem. Pythagorase teoreemi põhjal kolmnurgas BCD (joonis 26)

$$h^2 = a^2 - f^2$$

ja kolmnurgas ACD

$$h^2 = b^2 - g^2.$$

Nende võrduste poolte liitmisel saame võrduse

$$2h^2 = a^2 + b^2 - f^2 - g^2;$$

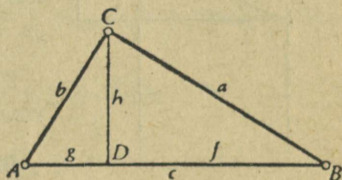
et Pythagorase teoreemi järgi $a^2 + b^2 = c^2$ ja c^2 on sama mis $(f + g)^2$, siis asendamisel saame, et

$$\begin{aligned} 2h^2 &= c^2 - f^2 - g^2 = \\ &= (f + g)^2 - f^2 - g^2 = \\ &= f^2 + 2fg + g^2 - f^2 - g^2, \end{aligned}$$

millest

$$\text{ja } 2h^2 = 2fg$$

$$h^2 = fg.$$



Joonis 26.

3. Eukleidese teoreem. Pythagorase teoreemi põhjal kolmnurgas BCD (joonis 26).

$$a^2 = f^2 + h^2;$$

et kõrguse teoreemi järgi $h^2 = fg$, siis

$$\text{ehk } a^2 = f^2 + fg$$

$$\text{ehk } a^2 = f(f + g)$$

$$a^2 = fc.$$

Samuti leiame, lähtudes kolmnurgast ACD , et

$$b^2 = gc.$$

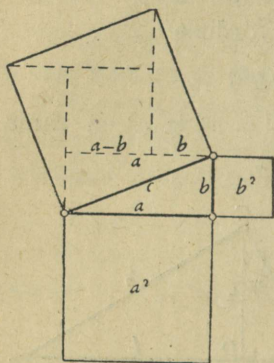
Ülesanded.

86. Avaldada täisnurkse kolmnurga hüpotenuus tema kaatetite kaudu.

87. Avaldada täisnurkse kolmnurga kaatet a kaateti b ja hüpotenuusi c kaudu.

88. Avaldada ruudu diagonaal tema külje kaudu.

89. Avaldada ristküliku diagonaal tema pikkuse ja laiuse kaudu.



Joonis 27.

90. Avaldada täisnurkse kolmnurga ühe kaateti projektsioon teise kaateti projektsiooni ja hüpotenuusile tõmmatud kõrguse kaudu.

91. Avaldada täisnurkse kolmnurga kaatet selle projektsiooni ja hüpotenuusi kaudu.

92. Tõestada Pythagorase teoreem joonise 27 andmeil.

93. Järeldada täisnurkse kolmnurga kõrguse teoreem Pythagorase teoreemist ja Eukleidese teoreemist.

§ 16. Täisnurkse kolmnurga joonelementide arvutamine.

Iga seos täisnurkse kolmnurga joonelementide vahel sisaldab kolm elementi. Kui neist mingid kaks elementi on antud, siis selle seose põhjal saab arvutada kolmanda elemendi. Nii saab Pythagorase teoreemi põhjal leida täisnurkse kolmnurga kolmanda külje, kui kaks külge on antud. Olgu antud näiteks kaatetid a ja b . Et

siis

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

Seega

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

hüpotenuus võrdub ruutjuurega kaatetite ruutude summast.

Kui on antud hüpotenuus ja üks kaatet, näiteks kaatet b , siis teise kaateti leiame järgmiselt:

et

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

siis

$$a^2 = c^2 - b^2$$

ja

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}.$$

Seega

kaatet võrdub ruutjuurega hüpotenuusi ja teise kaateti ruutude vahest.

Näide. Kui $c = 17$ cm ja $a = 8$ cm, siis samades ühikutes

$$b = \sqrt{17^2 - 8^2} = \sqrt{289 - 64}$$

seega

$$b = \sqrt{225} = 15$$

Täisnurkse kolmnurga kõrguse teoreem

$$h^2 = fg$$

võimaldab arvutada selle kolmnurga kõrgust, kui on antud kaatetite projektsioonid, ja ühe kaateti projektsiooni, kui on antud kõrgus ja teise kaateti projektsioon. Lahendades selle seose h suhtes, saame

$$h = \sqrt{fg}$$

ja lahendades kaateti a projektsiooni suhtes, saame

$$f = \frac{h^2}{g}.$$

Näide: Kui $f = 12$ cm ja $g = 18$ cm, siis samades ühikutes

$$h = \sqrt{12 \cdot 18} = \sqrt{216}$$

ehk

$$h \approx 14,7.$$

Eukleidese teoreem väljendab seost hüpotenuusi, ühe kaateti ja selle projektsiooni vahel. Teades kahte neist, saab arvutada kolmanda: kui on antud näiteks c ja f , siis

$$a^2 = fc$$

ja

$$a = \sqrt{fc};$$

kui on antud b ja c , siis

$$b^2 = gc$$

ja

$$g = \frac{b^2}{c}.$$

Näide. Kui kaatet $a = 6,4$ dm ja tema projektsioon $f = 4$ dm, siis hüpotenuusi leiame järgmiselt:

$$a^2 = fc,$$

seega antud juhul

$$6,4^2 = 4c,$$

millest

$$c = \frac{6,4^2}{4}$$

ehk

$$c = \frac{40,96}{4},$$

see on

$$c = 10,24.$$

Kui on antud täisnurkse kolmnurga mistahes kaks joonelementi, siis käsitletud kolm seost koos seosega $c = f + g$ võimaldavad arvutada kõiki teisi joonelemente. Selleks tuleb lähtuda seosest, milles esinevad antud kaks elementi, arvutada sellest kolmas element, võtta siis mingi teine seos, milles esinevad arvutatud kolmas element ja üks antud elementidest, ja jätkata tööd niiviisi, kuni kõik elemendid on leitud.

Näide. Olgu antud, et $a = 8$ cm ja $h = 5$ cm. Arvutame ülejäänud joonelemendid, s. o. b, c, f ja g .

Pythagorase teoreemi järgi kolmnurgast, mille külgedeks on f, h ja a (joonis 26)

seega antud juhul
$$f^2 = a^2 - h^2$$

ehk
$$f^2 = 8^2 - 5^2$$

ja
$$f^2 = 39$$

ehk
$$f = \sqrt{39}$$

ehk
$$f \approx 6,245.$$

Eukleidese teoreemi järgi

$$a^2 = fc,$$

millest

$$c = \frac{a^2}{f}.$$

Asendades selles a ja f nende väärtustega, saame

$$c \approx \frac{8^2}{6,245}$$

ehk peale nõutud tehete teostamist

$$c \approx 10,25.$$

Et kaatetite projektsioonide summa võrdub hüpotenuusiga, siis

$$g = c - f,$$

seega

$$g \approx 10,25 - 6,245$$

ehk

$$g \approx 4,005.$$

Pythagorase teoreemi järgi

$$b^2 = c^2 - a^2,$$

seega antud juhul

$$b^2 = 10,25^2 - 8^2$$

ehk, kasutades ruutude vahe teguriteks lahutamist,

$$b^2 = 18,25 \cdot 2,25$$

ehk

$$b^2 \approx 41$$

ja

$$b \approx 6,4.$$

Kontrolliks võime b arvutada ka Eukleidese teoreemi alusel:

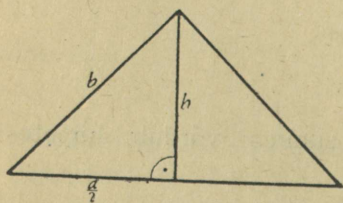
$$b^2 = gc,$$

seega

$$b^2 \approx 4,005 \cdot 10,25 \approx 41.$$

Vastus: $b \approx 6,4$ cm; $c \approx 10,2$ cm; $f \approx 6,2$ cm; $g \approx 4,0$ cm.

Neidsamu arvutamismõtteid saab kasutada risküliku, võrdhaarse kolmnurga, korrapärase hulknurga ja teiste kujundite elementide arvutamiseks, kui neid kujundeid saab tükeldada täisnurkseteks kolmnurkadeks.



Joonis 28.

Ülesanne. Võrdhaarse kolmnurga alus on 14 cm ja haar on 10 cm. Arvutada kolmnurga pindala.

Lahendus. Pindala arvutamiseks on vaja teada peale aluse ka kõrgus. Et kõrgus tükeldab võrdhaarse kolmnurga

kaheks täisnurkseks kolmnurgaks, mille hüpotenuusiks on haar ja üheks kaatetiks on pool alust (joonis 28), siis

$$h^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

seega	$h^2 = 10^2 - 7^2$
ehk	$h^2 = 51$
ja	$h = \sqrt{51}$
ehk	$h \approx 7,14.$
Seega	$S \approx \frac{14 \cdot 7,14}{2}$
ehk	$S \approx 50.$

Vastus: kolmnurga pindala on ligikaudu 50 cm².

Ulesanded.

94. Täisnurkse kolmnurga kaatet $b = 16$ m ja hüpotenuus $c = 24$ m. Leida kaatetite projektsioonid.

95. Täisnurkse kolmnurga kaatet $a = 8$ cm ja hüpotenuus $c = 12$ cm. Kui pikad on kaatetite projektsioonid?

96. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuus $c = 9,45$ m ja kaateti a projektsioon $f = 4,2$ m. Kui pikk on kaatet a ?

97. Täisnurkse kolmnurga kaateti a projektsioon on 32 cm ja kaateti b projektsioon on 40 cm. Kui pikad on kaatetid?

98. Kui pikk on täisnurkse kolmnurga hüpotenuus, kui kaatet $a = 2,8$ cm ja kaatet $b = 4,5$ cm?

99. Täisnurksel kolmnurgal $a = 0,39$ m ja $c = 0,89$ m. Kui pikk on b ?

100. Kui kaugele maakera pinnale võib näha lennukilt, kui lennuk tõuseb 4 km kõrgusele? (Maakera raadius on 6370 km).

101. Arvutada täisnurkse kolmnurga kõrgus, kui kaatetite projektsioonid on 27 cm ja 48 cm.

102. Täisnurkse kolmnurga kõrgus on 18 cm ja ühe kaateti projektsioon on 13,5 cm. Kui pikk on hüpotenuus?
103. Täisnurksel kolmnurgal $a = 15$ cm ja $h = 12$ cm. Arvutada teised joonelemendid.
104. Täisnurksel kolmnurgal $c = 25$ cm ja $f = 4$ cm. Arvutada teised joonelemendid.
105. Võrdhaarse täisnurkse kolmnurga pindala on $10,58 \text{ m}^2$. Kui pikk on hüpotenuus?
106. Võrdhaarse kolmnurga alus on 72 dm ja kõrgus on 15 dm. Arvutada kolmnurga übermõõt.
107. Võrdhaarse trapetsi alused on 8 cm ja 5,2 cm ning kõrgus on 4,8 cm. Kui pikk on trapetsi übermõõt?
108. Ringi raadius on 78 cm. Kui kaugel keskpunktist asetseb 60 cm pikkune kõõl?
109. 7 cm pikkune kõõl asetseb ringjoone keskpunktist 8,4 cm kaugusel. Kui pikk on ringjoone raadius?
110. Ruudu diagonaali pikkus on 2,4 m. Arvutada ruudu übermõõt ja pindala.
111. Ruudu diagonaali pikkus on d cm. Kui pikk on ruudu külge?
112. Ristküliku ühe tipu projektsioon diagonaalile on selle diagonaali otspunktidest 8 ja 15 cm kaugusel. Kui pikad on ristküliku küljed?
113. Ringjoone kõõlu pikkus on 40 cm ja kõõlu projektsioon kõõlu otspunktist tõmmatud diameetril on 24 cm. Leida ringjoone raadius.
114. Ristküliku diagonaali pikkus on 0,89 m ja ühe külje pikkus on 0,39 m. Arvutada ristküliku pindala.

115. Rombi pindala on 442 cm^2 ja ühe diagonaali pikkus on 26 cm . Kui pikk on rombi külg?

116. Võrdhaarse kolmnurga pindala on 540 cm^2 ja kõrgus on 36 cm . Kui pikk on übermanöö?

117. Võrdkülgse kolmnurga külk on 10 cm . Arvutada selle kolmnurga pindala.

118. Võrdkülgse kolmnurga kõrgus on 15 cm . Kui pikk on selle kolmnurga külk?

119. Korrapärase kuusnurga külk on 5 cm . Arvutada apoteem ja pindala.

120. Korrapärase nelinurga ümber joonestatud ringjoone raadius on 10 cm . Arvutada külk, apoteem ja pindala.

121. Korrapärase kolmnurga ümber joonestatud ringjoone raadius on 12 cm . Kui pikk on selle kolmnurga apoteem ja külk? Näpunäide: pikendada apoteemi kuni ringjooneni ja ühendada saadud punkt külje otspunktidega.

122. Väljaspool ringjoont asetsevast punktist on ringjoonele tõmmatud kaks puutujat. Leida ringi keskkoha kaugus antud punktist teades, et ringi raadius on 5 cm ja puutujalõikude summa on 24 cm .

123. Kahe ringjoone raadiused on vastavalt 25 cm ja 14 cm . Ringjoonte keskkotade kaugus teineteisest on 61 cm . Leida nende ühise puutujalõigu pikkus.

124. Ringjoone raadius on 50 cm . Arvutada selle ringjoone kahe paralleelse kõõlu vaheline kaugus, kui nende kõõlude pikkused on 48 cm ja 14 cm .

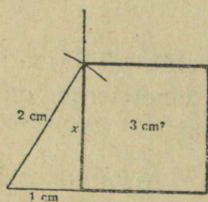
125. Ringjoone raadius on r . Leida ringjoone diameetri pikendusel punkt, millest ringjoonele tõmmatud puutujalõigu pikkus on võrdne diameetriga.

126. Ühelt pool ringi keskpunkti võetakse kaks paralleelset kõõlu, mis toetuvad kaartele 60° ja 120° . Kõõlude ots-punktid ühendatakse sirglõikudega nii, et tekib trapets. Anda eeskiri saadud trapetsi pindala määramiseks. (Ringi raadius on r).

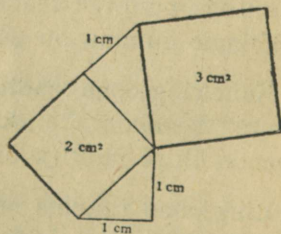
§ 17. Ruutirratsionaalarvu kujutamine lõiguna.

Eelmises paragrahvis käsitlesime arvutusülesandeid, mida saab lahendada täisnurkse kolmnurga joon-elementide vaheliste seoste abil. Vaatleme nüüd konstruktsioonülesandeid, mis lahenduvad samade seoste põhjal.

Pythagorase teoreem võimaldab joonestada ruutu, mille pindala võrdub kahe antud ruudu pindalade summaga või pindalade vahega. Esimese ülesande lahendamiseks joonestame täisnurkse kolmnurga, mille kaateteiks on antud ruutude küljed; siis hüpotenuusi ruut on pindvõrdne antud ruutude summaga. Teise ülesande lahendamiseks ehitame täisnurkse kolmnurga, mille hüpotenuusiks on suurema ruudu külg ja üheks kaatetiks väiksema ruudu külg.



Joonis 29.



Joonis 30.

Ruutude liitmise ja lahutamise teel on võimalik ehitada ruutu, mille pindala mõõtarv on mistahes täisarv, näiteks 3. Selleks ehitame täisnurkse kolmnurga, mille üks kaatet on

1 cm ja hüpotenuus on 2 cm; siis hüpotenuusi ruudu pindala on 4 cm^2 , ühe kaateti ruudu pindala 1 cm^2 ja teise kaateti ruudu pindala on 3 cm^2 (joonis 29). Sama ülesannet võib veel teisiti lahendada, liites ruuduga, mille pindala on 2 cm^2 , ruudu pindalaga 1 cm^2 (joonis 30). Niiviisi tööd jätkates võib saada ruudu, mille pindala mõõtarv on mistahes täisarv.

Olgu ruudu pindala mõõtarv mingi täisarv a ; siis ruudu külg on $\sqrt{a}$. Algebrast teame, et kui arv a ei ole mõne täisarvu ruut, nagu 4, 9, 16, siis $\sqrt{a}$ on irratsionaalarv. Pythagorase teoreemi alusel on võimalik iga irratsionaalarvu $\sqrt{a}$ kujutada lõiguna. Selleks ehitame eespool-kirjeldatud viisil ruudu, mille pindala on a ; selle ruudu külg ongi $\sqrt{a}$.

Ruutirratsionaalarvu on võimalik kujutada lõiguna ka Eukleidese teoreemi alusel: kui

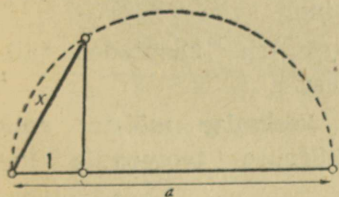
$$x = \sqrt{a},$$

siis

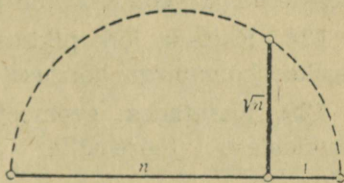
$$x^2 = a$$

ehk

$$x^2 = 1 \cdot a;$$



Joonis 31.



Joonis 32.

sellest nähtub, et x on täisnurkse kolmnurga kaatet, kui selle projektsioon hüpotenuusile on 1 ja hüpotenuus on a . Ehitades täisnurkse kolmnurga, mille hüpotenuus on a ühikut ja ühe kaateti projektsioon on 1 ühik, saamegi lõiguna arvu $\sqrt{a}$ (joonis 31).

Kõige kohasem on ruutirratsionaalarvu kujutada lõiguna kõrguse teoreemi alusel: et saada lõiku $\sqrt{n}$, joonestame täisnurkse kolmnurga, mille kaatetite projektsioonide pikkused on n ja 1; hüpotenuusile tõmmatud kõrgus on siis $\sqrt{n}$ (joonis 32). Kui arv n on tublisti suurem kui 1, siis joonise vähendamiseks ja suurema täpsuse saavutamiseks on soovitatav kaatetite projektsioonide pikkusteks võtta kaks arvu a ja b nii, et

$$n = a \cdot b.$$

Siis hüpotenuusile tõmmatud kõrgus on

$$\sqrt{n} = \sqrt{ab}.$$

Et ruutjuurt kahe arvu korrutisest nimetatakse nende arvude keskmiseks võrdeliseks ehk geomeetriliseks keskmiseks, siis täisnurkse kolmnurga kõrguse teoreem võimaldab joonestada kahe antud lõigu a ja b geomeetrilist keskmist $\sqrt{ab}$ (joonis 32).

Ülesanded.

127. Joonestada kahe vabalt võetud lõigu aritmeetiline keskmine ja geomeetriline keskmine.

128. Ehitada lõik pikkusega $\sqrt{6}$ cm, kasutades täisnurkse kolmnurga kõrguse omadust.

129. Kasutades geomeetrilise keskmise mõistet anda Eukleidese teoreemile ja kõrguse teoreemile uus sõnastus.

130. Joonestada lõik pikkusega $\sqrt{8}$ cm Pythagorase teoreemi, Eukleidese teoreemi ja kõrguse teoreemi alusel.

131. Joonestada lõik pikkusega $\sqrt{13}$ cm.

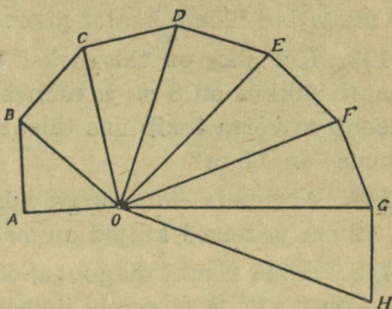
132. Ehitada lõik pikkusega $\sqrt{5 \cdot 8}$ cm.

133. Ehitada lõik pikkusega $\sqrt{40}$ cm.

134. Ehitada lõik pikkusega $\sqrt{a(b+c)}$.

135. Joonestada võrdhaarne täisnurkne kolmnurk tema ümbermõõdu p järgi.

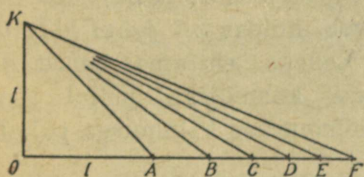
136. Joonis 33 on valmistatud nõnda, et $AO = AB = BC = CD = DE = EF = FG = GH = 1$, ning $OAB, OBC, OCD, \dots, OGH$ on täisnurgad. Arvutada OB, OC, OD, OE, OF, OG ja OH .



Joonis 33.

137. Arvutamise teel jaotada 10 cm pikkune sirglõik kuldloikes*, s. o. nii, et selle suurem osa oleks terve lõigu ja selle väiksema osa geomeetiline keskmine.

138. Jaotada arvutamise teel sirglõik a kuldloikes.



Joonis 34.

139. Geomeetria õpiku pikem kül on 20 cm. Kui lai peaks olema raamat, et tal oleks meeldivaim kuju?

140. Joonisel 34

$$OA = OK = l.$$

Anda seletus lõikude $OB = AK, OC = BK$, jne. kohta.

* Juba vanal ajal märgati, et ristkülik, mille pikkuse ja laiuse suhe on võrdne pikkuse ning laiuse summa ja pikkuse suhtega, omab silmale vaatamiseks meeldivaima, sobivaima kuju. Ka kunstis ja arhitektuuris on see suhe tähelepanu osaliseks saanud. Keskajal nimetati seesugust sirglõigu jaotamist (— nii, et suurem osa on terve lõigu ja väiksema osa geomeetiline keskmine—) «kuldloikes jaotamiseks» (ladina keeles — *sectio aureo*) ja ka «jumalikuks jaotamiseks» (*sectio divino*).

141. Trapetsi alused on 10 cm ja 31 cm, küljed on 13 cm ja 20 cm. Leida trapetsi pindala.

142. Mitme % võrra suureneb täisnurkse kolmnurga pindala, kui kaatetite esialgsed pikkused on 20 cm ning 40 cm ja kui lühem kaatet pikeneb poole võrra?

143. Kui pikk on täisnurkse kolmnurga kaatet, kui teise kaateti pikkus on 8 m ja esimese kaateti pikkuse suurendamisel 9 m võrra tekib uus täisnurkne kolmnurk, mille hüpotenuus on 17 m?

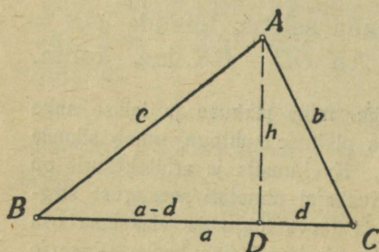
144. Arvutada kolmnurga kõrgus, kui kolmnurga alus on 42 cm ja teised küljed on 40 cm ja 26 cm.

145. Leida rombi diagonaalide pikkused, teades, et nende suhe on 5 : 12 ja et rombi ümbermõõt on 52 m.

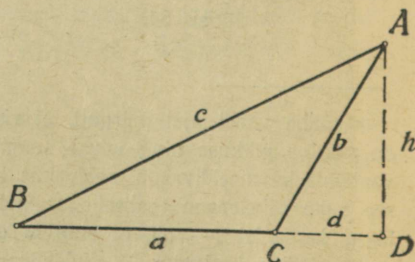
146. Võrdhaarse kolmnurga alus on 70 cm ja haar on 37 cm. Leida ümberringjoone raadius.

§ 18. Laiendatud Pythagorase teoreem.

Olgu kolmnurgas ABC tipu C (joonised 35 ja 36) juures teravnurk või nürinurk. Vaatame, kuidas sel juhul külge c avaldub teiste külgede kaudu. Selleks ehitame tipust A kolmnurga kõrguse. Teravnurkse kolmnurga puhul see kõrgus lõikab vastaskülge a ja nürinurkse kolmnurga puhul selle külje pikendust.



Joonis 35.



Joonis 36.

Tähistame külje b projektsiooni küljel a (või selle pikendusel) tähega d .

Siis Pythagorase teoreemi põhjal:

teravnurkses kolmnurgas

$$c^2 = h^2 + (a-d)^2$$

nürinurkses kolmnurgas

$$c^2 = h^2 + (a+d)^2$$

Pärast sulgude avamist

$$c^2 = h^2 + a^2 + d^2 - 2ad$$

$$c^2 = h^2 + a^2 + d^2 + 2ad.$$

Et kolmnurgas ADC Pythagorase teoreemi järgi $h^2 + d^2 = b^2$, siis

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ad$$

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ad,$$

ehk ühiselt kirjutatuna

$$c^2 = a^2 + b^2 \mp 2ad,$$

Ex libl. univ. Tart.

kus märk $-$ kehtib terava nurga C korral ja märk $+$ nüri nurga C korral. Saadud valem annab õige tulemuse ka siis, kui nurk C on täisnurk. Tõepoolest, siis külje b projektsioon d on pikkuselt null, seega $2ad = 0$ ja $c^2 = a^2 + b^2$, nagu see peabki olema. Seega Pythagorase teoreem jääb ülaltõestatud teoreemi erijuhuks, mistõttu seda teoreemi võime nimetada laiendatud Pythagorase teoreemiks.

Laiendatud Pythagorase teoreemist järeldub kergesti lause:

kolmnurga nurk on terav-, täis- või nürinurk, vastavalt sellele kas nurga vastaskülje ruut on väiksem teiste külgede ruutude summast, sellega võrdne või sellest suurem.

Tõepoolest, kui näiteks $c^2 < a^2 + b^2$, siis C ei saa olla muud kui teravnurk, sest kui $\angle C = 90^\circ$ või $\angle C > 90^\circ$; siis vastavalt $c^2 = a^2 + b^2$ või $c^2 = a^2 + b^2 + 2ad$, nii et kummalgi juhul c^2 ei tuleks väiksem kui $a^2 + b^2$.

Näited. 1. Olgu kolmnurga külgede mõõtardud 3, 4 ja 5 ühikut. Et

$$3^2 + 4^2 = 25$$

ja

$$5^2 = 25,$$

siis

$$5^2 = 3^2 + 4^2$$

ja seega kolmnurk külgedega 3, 4 ja 5 ühikut on täisnurkne.

2. Olgu $a = 8$, $b = 12$ ja $c = 10$ ühikut. Siis

$$b^2 = 144$$

ja

$$a^2 + c^2 = 64 + 100 = 164$$

ja seega

$$b^2 < a^2 + c^2;$$

sellest järeldub, et kolmnurk ei ole täisnurkne.

See tõsiasi, et kolmnurk külgedega 3, 4 ja 5 ühikut on täisnurkne, oli tuntud egiptuse matemaatikuile juba mitu tuhat aastat e. m. a. Selle tõe põhjal egiptuse maamõõtjad ja ehitusmeistrid ehtasid täisnurka, kasutades 12 ühiku pikkust nööri, mis tõmmati pingule kolmnurgaks külgedega 3, 4 ja 5 ühikut. Ka vanadel hindudel oli ammu e. m. a. teada, et kolmnurgad, mille külgede mõõtardud täidavad tingimust $c^2 = a^2 + b^2$, on täisnurksed.

Peale arvkolmiku 3, 4 ja 5 leidub teisi täisarvude kolmikuid, mis võivad olla täisnurkse kolmnurga külgede mõõtardudeks, näiteks 5, 12 ja 13, siis 8, 15 ja 17, jne.

Niisuguseid täisarvude kolmikuid, mis võivad olla täisnurkse kolmnurga külgede mõõtardudeks, nimetatakse Pythagorase arvudeks.

Olesanded.

147. Kas kolmnurk külgedega 3,6 m, 8,5 m ja 7,7 m on täisnurkne või mitte?

148. Täisnurkse kolmnurga kaatetid on 28 cm ja 45 cm. Kui pikk on hüpotenuus?

149. Ringjoonel võetud punkt on ühendatud ühe diameetri otspunktidega. Näidata, et nii saadud kõõlude ruutude summa on võrdne diameetri ruuduga.

150. Ühe diameetri otspunktid on ühendatud: a) ringjoone sees oleva punktiga, b) väljaspool ringjoont oleva punktiga. Tõestada, et diameetri ruut on suurem juhul a saadud lõikude ruutude summast ja väiksem juhul b saadud lõikude ruutude summast.

151. Mis liiki on kolmnurk (nurkade järgi), kui kolmnurga küljed on: 1) 2, 3, 4; 2) 3, 4, 5; 3) 10, 15, 18; 4) 12, 35, 37?

152. Leida kolmnurga kolmas külg, kui kaks külge on 7 cm ja 5 cm ja teise külje projektsioon esimesel on 3 cm.

153. Arvutada kolmnurga kolmas külg, kui teised kaks külge on 10 cm ja 25 cm ning nurk nende vahel on 120° .

154. Arvutada kolmnurga kolmas külg, kui esimene on 21 cm, teine 10 cm ja teise projektsioon esimesel on 6 cm.

155. Kolmnurga küljed on 37 cm, 13 cm ja 40 cm. Leida esimeste külgede projektsioonid kolmandal küljel ja sellele tõmmatud kõrgus.

156. Kolmnurga alus on 4,2 m ja kõrgus on 2,4 m. Leida kolmas külg, kui teine on 4 m.

Peatükk III.

Hulknurkade sarnasus.

§ 19. Võrdelised sirglõigud.

Olgu antud kahe sirglõigu pikkused, näiteks

$$a = 6 \text{ cm} \quad \text{ja} \quad b = 2 \text{ cm}.$$

Arvu $\frac{6}{2}$ ehk 3 nimetatakse lõikude a ja b jagatiseks ehk suhteks. Lõikude a ja b suhet tähistame sümbooliga

$$\frac{a}{b} \text{ ehk } a : b.$$

Antud pikkuste puhul

$$a : b = 3.$$

Üldiselt

kahe sirglõigu jagatis ehk suhe on arv, mis näitab, mitu korda üks sirglõik on teisest pikem või missuguse osa moodustab üks sirglõik teisest.

Kahe lõigu suhe on kas ratsionaalarv, nagu 3, $\frac{5}{7}$, 1,8, või irratsionaalarv, nagu $\sqrt{2}$, $2\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{4}$. Ilma tõestuseta usume, et

irratsionaalarvudega laiendatud arvuvallas leidub kahe mistahes lõigu suhet väljendav arv.

Olgu lõikude a ja b suhe k , teisiti

$$\frac{a}{b} = k.$$

Siis

$$1 : \frac{a}{b} = 1 : k$$

ehk

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{k}.$$

Seega

lõikude b ja a suhe on lõikude a ja b suhte pöördarv.

Kui kahe sirglõigu a_1 ja b_1 jagatis on sama suur kui kahe teise sirglõigu a_2 ja b_2 jagatis, s. t. kui

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2},$$

siis ütleme, et lõigud a_1 ja a_2 on võrdelised ehk proportsionaalsed lõikudega b_1 ja b_2 .

Kõige väiksem lõikude arv, mille kohta saab tarvitada mõistet „võrdelised“, on neli. Kuid võrdelised võivad olla ka enam kui neli lõiku: kui on n paari vastavaid sirglõike

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$$

$$b_1, b_2, b_3, \dots, b_n,$$

nii et

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = k,$$

siis ütleme, et need lõigud on võrdelised.

Seega:

sirglõigud on võrdelised, kui vastavate lõikude suhted on võrdsed.

Arv k , millega võrduvad kõik need suhted, näitab, mitu korda esimesed lõigud on pikemad neile vastavaist teistest lõikudest või missuguse osa neist nad moodustavad. Seda arvu k nimetatakse võrdeteguriks.

Ülesanded.

157. Külgede pikkused on ühel kolmnurgal 12,4 cm, 8,6 cm ja 14,8 cm ning teisel 31 cm, 37 cm ja 21,5 cm. Arvutada nende kolmnurkade vastavate külgede suhted.

158. Lõikude a ja b suhe on 1,5. Kui suur on lõikude b ja a suhe?

159. Lõikude s ja t suhe on 0,25. Kui suur on lõikude t ja s suhe?

160. Leida järgmiste lõikude suhe ja otsustada igal juhul, kas see suhe on ratsionaalne või irratsionaalne: ruudu diagonaal ja külg, võrdkülgse kolmnurga külg ja pool alust, ruudu külg ja siseringi raadius.

161. Leida võrdkülgse kolmnurga kõrguse ja külje suhe.

162. Täita lüngad järgnevates ridades nii, et tekiks kaks rida võrdelisi pikkusi:

4, 2,4, ..., 5,4,..., 18,5, ... cm,

6, ..., 9, ..., 10,2, ..., 78 cm.

163. Antud on lõigud pikkusega 2 cm, 5 cm, 7,5 cm ja 12,4 cm. Leida nendega võrdeliste lõikude pikkused, nii et antud lõigu suhe uude lõiku oleks alati 2,5.

§ 20. Kolmnurga sisenurga poolitaja.

Kolmnurga sisenurga poolitaja lõikab selle nurga vastaskülge. Tõestame, et

sisenurga poolitaja jaotab vastaskülje lõikudeks, mis on võrdelised selle nurga lähiskülgedega.

Eeldus: AD on kolmnurga ABC nurga A poolitaja (joonis 37).

Väide:

$$\frac{BD}{BA} = \frac{CD}{CA}.$$

Tõestus: Punkt D kui nurgapoolitaja punkt on nurga A haaradest võrdsetel kaugustel k . Avaldame kolmnurga ABD pindala kahel viisil: üks kord aluse BD ja kõrguse h kaudu, teine kord aluse BA ja kõrguse k abil; tulemused on kindlasti võrdsed:

$$\frac{h}{2} BD = \frac{k}{2} BA.$$

Jagades võrduse mõlemat poolt suurustega BA ja $\frac{h}{2}$, saame

$$\frac{BD}{BA} = \frac{k}{h}.$$

Kolmnurga ADC pindala saame samuti kahel viisil väljendada: ühelt poolt see pindala

on $\frac{h}{2} \cdot CD$ ja teiselt poolt $\frac{k}{2} \cdot CA$.

Niisiis

$$\frac{h}{2} \cdot CD = \frac{k}{2} \cdot CA,$$

millest

$$\frac{CD}{CA} = \frac{k}{h}.$$

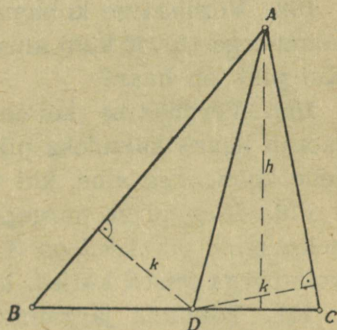
Seega

$$\frac{BD}{BA} = \frac{CD}{CA}.$$

Olesanded.

164. Kolmnurga küljed on 14 dm, 18 dm ja 24 dm. Kui pikad on lõigud, milledeks nurgapoolitaja jaotab kõige pikema külje?

165. Kolmnurga küljed on 10 cm, 14 cm ja 16 cm. Kui pikad on lõigud, milledeks nurgapoolitajad jaotavad küljed?



Joonis 37.

166. Kolmnurga kahe külje pikkused on 20 cm ja 30 cm. Leida kolmanda külje pikkus, kui nurgapoolitaja jaotab selle lõikudeks, milledest üks on teisest 7 cm pikem.

167. Täisnurkse kolmnurga kaatetid on 6 cm ja 8 cm. Kui pikk on suurema teravnurga poolitaja?

168. Võrdhaarse kolmnurga alus on 12 cm ja haara lõik kolmnurga tipust kuni aluse lähisnurga poolitajani on 4 cm. Kui pikk on haar?

169. Võrdhaarse kolmnurga aluse lähisnurga poolitaja jaotab haara lõikudeks pikkusega 5 cm ja 4 cm. Arvutada selle kolmnurga alus, kui ta on haarast lühem.

170. Kolmnurga nurgapoolitaja jaotab vastaskülje lõikudeks, mille pikkused on 3 cm ja 5 cm. Kui pikad on selle kolmnurga teised küljed, kui üks on teisest 6 cm pikem?

171. Tõestada järgmine teoreem: kolmnurga välisnurga poolitaja lõikab vastaskülje pikendust punktis, mille kaugused sama külje otstest on võrdelised selle nurga lähiskülgedega.

§ 21. Kiirteteoreemid.

Paralleelide lõigud nurga haarade vahel on võrdelised paralleelide kaugustega nurga tipust.

Lõikame nurga A haarasid esialgu ainult kahe paralleeliga ja tõestame teoreemi sellel erijuhul.

Eeldus: $BC \parallel B_1C_1$ (joonis 38).

Väide: $\frac{a}{u} = \frac{a_1}{u_1}$.

Tõestus: Kolmnurga ABC ja trapetsi BB_1C_1C pindalade summa on võrdne kolmnurga AB_1C_1 pindalaga:

$$S_{ABC} + S_{BB_1C_1C} = S_{AB_1C_1};$$

avaldades need pindalad aluste ja kõrguste kaudu, saame

$$\frac{a \cdot u}{2} + \frac{a + a_1}{2} (u_1 - u) = \frac{a_1 \cdot u_1}{2}$$

ehk

$$au + au_1 + a_1u_1 - au - a_1u = a_1u_1$$

Pärast lihtsustamist saame

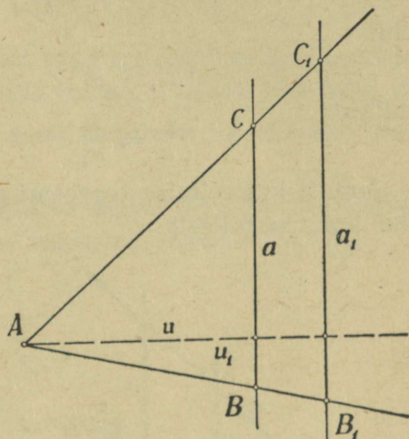
$$au_1 = a_1u,$$

millest

$$\frac{a}{u} = \frac{a_1}{u_1}.$$

Kui nurga haarad on lõigatud enam kui kahe paralleeliga, siis iga paralleeli lõigu suhe tema kaugusse nurga tipust on võrdne esimese paralleeli lõigu ja selle kauguse suhtega, järelikult kõik niisugused suhted on võrdsed.

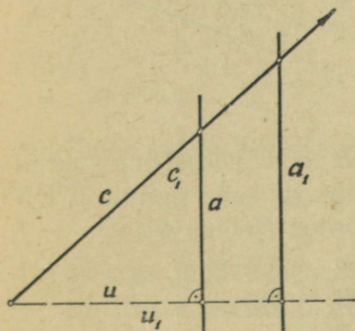
Nurga haara lõigud nurga tipust paralleelideni on võrdelised paralleelide kaugustega nurga tipust.



Joonis 38.

Eeldus:

$a \parallel a_1$ (joonis 39).



Joonis 39.

Väide:

$$\frac{c}{u} = \frac{c_1}{u_1}.$$

Tõestus: Eelmise teoreemi põhjal

$$\frac{a}{u} = \frac{a_1}{u_1} = k,$$

kui võrdetegur tähistada tähega k .

Siis

$$a = ku \quad \text{ja} \quad a_1 = ku_1.$$

Pythagorase teoreemi põhjal:

$$c^2 = a^2 + u^2 = k^2 u^2 + u^2 = u^2 (k^2 + 1)$$

ja

$$c_1^2 = a_1^2 + u_1^2 = k^2 u_1^2 + u_1^2 = u_1^2 (k^2 + 1).$$

Seega

$$\frac{c^2}{c_1^2} = \frac{u^2 (k^2 + 1)}{u_1^2 (k^2 + 1)} = \frac{u^2}{u_1^2}$$

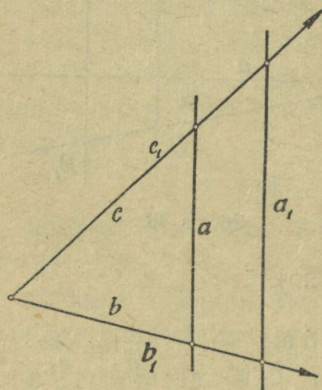
ehk

$$\frac{c}{c_1} = \frac{u}{u_1},$$

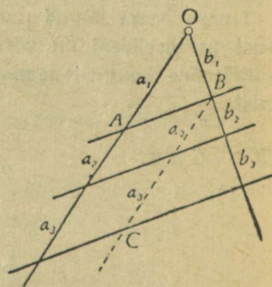
millest

$$\frac{c}{u} = \frac{c_1}{u_1}.$$

Samuti kui eelmise teoreemi puhul võib ka siin olla enam kui kaks paralleeli.



Joonis 40.



Joonis 41.

Järeldus. Viimase kahe teoreemi põhjal on nurga haarade lõikude ja seda nurka lõikava kahe paralleeli lõikude kohta kehtivad järgmised võrded (joonis 40):

$$\frac{a}{u} = \frac{a_1}{u_1} \quad \text{ehk} \quad \frac{a}{a_1} = \frac{u}{u_1},$$

$$\frac{b}{u} = \frac{b_1}{u_1} \quad \text{,,} \quad \frac{b}{b_1} = \frac{u}{u_1},$$

$$\frac{c}{u} = \frac{c_1}{u_1} \quad , \quad \frac{c}{c_1} = \frac{u}{u_1} ;$$

siit selgub, et

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} .$$

Seda järeldust võime sõnastada järgmiselt:

nurga haarade lõikamisel paralleelsete sirgetega tekivad võrdeliste külgedega kolmnurgad.

Lõikame nüüd nurga haarad mitme paralleeliga ja vaatleme haarade lõike paralleelide vahel. Saab tõestada, et

lõigud, mis paralleelid tekitavad nurga ühel haaral, on võrdelised teise haara vastavate lõikudega.

Eeldus: paralleelid tekitavad nurga ühel haaral lõigud $a_1, a_2, a_3, \dots$ ja teisel haaral vastavad lõigud $b_1, b_2, b_3, \dots$ (joonis 41).

Väide:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \dots$$

Tõestus. Eelmise teoreemi järgi

$$\frac{a_1 + a_2}{a_1} = \frac{b_1 + b_2}{b_1} ;$$

Kui kummagi murru lugeja jagada nimetajaga, siis saame

$$1 + \frac{a_2}{a_1} = 1 + \frac{b_2}{b_1} ,$$

millest

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} ;$$

vahetades selle võrde sisemised liikmed ja siis võrde pooled, saame

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} .$$

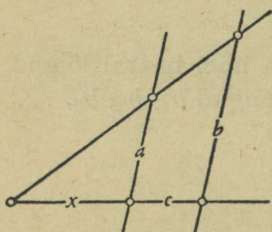
Joonestame nüüd läbi punkti B abisirge BC nii, et $BC \parallel OA$. Et rööpküliku vastasküljed on võrdsed, siis jaotavad paral-

leelid haara BC lõikudeks, mis vastavalt on võrdsed lõikudega $a_2, a_3, \dots$ (joonis 41). Et viimati saadud võrre on kehtiv ka nurga B haarade lõikude kohta, siis

$$\frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}.$$

Ühendades kaks viimast võrret, saame

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}.$$



Joonis 42.

Uusi abisirgeid joonestades võib väidet samal viisil tõestada iga sirglõikude paari kohta lõikajate vahel.

Et nurga haarad on kaks ühest ja samast punktist väljuvat kiirt, siis nimetatakse selles paragrahvis käsitletud teoreeme kiirteteoreemideks.

Ülesanded.

172. Täisnurkses kolmnurgas on joonestatud mõlema kaateti keskristsirged. Kus need sirged lõikuvad?

173. Täisnurkses kolmnurgas kaatetitega 4,8 cm ja 14 cm on joonestatud ühe kaatetiga paralleelne lõik nii, et saadud uue kolmnurga hüpotenuus on 11,1 cm. Kui pikad on uue kolmnurga kaatetid?

174. Kolmnurga küljed on 12 cm, 18 cm ja 20 cm. Kõige pikemale küljele on joonestatud paralleel, mis poolitab kõige lühema külje. Kui pikad on väiksema kolmnurga küljed?

175. Joonisel 42 tähendagu: $a = 21$ cm, $b = 33$ cm ja $c = 6$ cm. Kui pikk on sirglõik x , kui $a \parallel b$?

176. Kui pikk on sirglõik x joonisel 42, kui $b = 1,5a$ ja $c = 0,4b$?

177. Kolm ühest ja samast punktist lähtuvat kiirt on lõigatud kolme paralleeliga, mis esimesel kiirel tekitavad lõigud 3,5 cm, 1,6 cm ja 2,4 cm. Teise ja kolmanda kiire lõigud kiirte otspunktist esimese paralleelini on vastavalt 3 cm ja 4 cm. Kui pikad on nende kiirte lõigud paralleelide vahel?

§ 22. Kiirteteoreemi rakendusi.

Kui nurga haarasid lõigata mitme rööpsirgega nii, et ühel haaral tekivad võrdsed lõigud, siis tekivad ka teisel haaral võrdsed lõigud; tõepoolest, kui joonisel 41

$$a_1 = a_2 = a_3 = \dots,$$

siis

$$b_1 = b_2 = b_3 = \dots,$$

sest kui võrdsete murdude

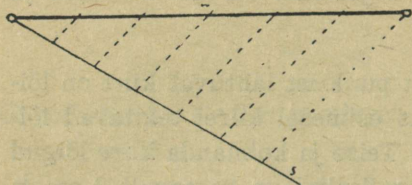
$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \dots$$

lugejad on võrdsed, siis on seda ka nimetajad. Seetõttu nurga haarade lõikamine paralleelsete sirgetega võimaldab

antud sirglõigu jaotada sirkli ja joonlaua abil n võrdseks lõiguks.

Lahendus. Et jaotada lõik a näiteks 6-ks võrdseks lõiguks (joonis 43), võetakse läbi a ühe otspunkti abisirge s , märgitakse sellel 6 võrdset lõiku, ühendatakse punkt, mileni jõutakse, sirglõigu a teise otspunktiga ja joonestatakse

sellele ühenduslõigule paralleelid läbi abisirgel märgitud punktide. Need paralleelid jaotavad lõigu a kuueks võrdseks lõiguks.



Joonis 43.

Võrde kolme liikmega on neljas määratud; kui näiteks kolm esimest liiget a , b ja c on antud, siis neljanda liikme võib arvutada järgmiselt: et

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x},$$

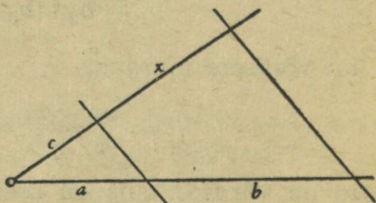
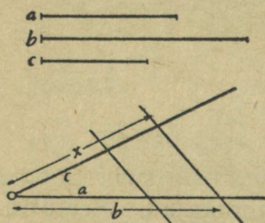
siis võrde peaomaduse põhjal

$$ax = bc$$

ja seega

$$x = \frac{bc}{a}.$$

Selle ülesande geomeetrilist lahendamist nimetatakse kolme sirglõigule neljanda võrdelise leidmiseks.



Joonis 44.

Lahendus. Kanname vabalt võetud nurga ühele haarale, alates tipust, lõigud a ja b ning teisele haarale lõigu c . Läbi lõigu b otspunkti joonestame paralleeli sirgele, mis läbib lõikude a ja c otspunkte. Lõigule b vastav lõik nurga teisel haaral ongi otsitav lõik x (joonis 44).

Olesanded.

178. Jaotada vabalt võetud ristlõik sirkli ja joonlaua abil viieks võrdseks lõiguks.

179. Leida neljas võrdeline sirglõikudele $a = 3,2$ cm, $b = 4,8$ cm ja $c = 4,2$ cm nii arvutamise kui ka joonestamise teel.

180. Näidata, et täisnurkse kolmnurga hüpotenuusile vastav kõrgus on hüpotenuusi ja kaatetite neljas võrdeline.

181. Võrdhaarse trapetsi alused on 14 cm ja 9 cm ning haarad 7 cm. Kui palju tuleb haarasid pikendada, et nad lõikuksid?

182. Trapetsi alused on 6 cm ja 3,2 cm ning haarad on 3 cm ja 2,5 cm. Kui palju tuleb kumbagi haara pikendada, et nad lõikuksid?

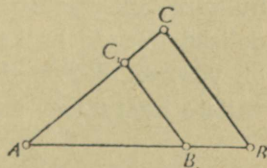
§ 23. Sarnased hulknurgad.

Kiirteteoreemi järgi nurga haarade lõikamisel kahe paralleelse sirgega tekivad võrdeliste külgedega kolmnurgad. Näitame nüüd, et nende kolmnurkade vastavad nurgad on võrdsed. Tõepoolest, kui joonisel 45 $BC \parallel B_1C_1$, siis kolmnurkade ABC ja AB_1C_1 nurkadest

ja

$$\angle B = \angle B_1$$

$$\angle C = \angle C_1$$



Joonis 45.

kui kaasnurgad, mis tekivad kahe paralleelse sirge lõikamisel kolmandaga. Kolmas nurk neil kolmnurkadel on ühine.

Seega $\triangle ABC$ ja $\triangle AB_1C_1$ on vastavalt võrdsete nurkadega ja võrdeliste külgedega. Niisuguseid vastavalt võrdsete nurkadega ja võrdeliste külgedega kolmnurki nimetatakse sarnasteks. Kasutades seda nimetust võib eespool (§ 22) tõestatud teoreemi sõnastada nõnda:

nurga haarade lõikamisel kahe paralleelse sirgega tekivad sarnased kolmnurgad.

Üldiselt

hulknurki nimetatakse sarnasteks, kui ühe hulknurga nurgad on võrdsed teise hulknurga vastavate nurkadega ja küljed on võrdelised teise hulknurga külgedega.

Hulknurkade sarnasuse märkimiseks kasutatakse sümbolit $\sim$.

Tõestame, et

kaks hulknurka on sarnased, kui ühe hulknurga küljed on paralleelsed teise hulknurga vastavate külgedega ja nende hulknurkade vastavaid tippe läbivad sirged lõikuvad ühes ja samas punktis.

Eeldus: $AB \parallel A_1B_1$, $BC \parallel B_1C_1$, ..., $EA \parallel E_1A_1$; sirged AA_1 , BB_1 , ..., EE_1 läbivad ühist punkti O (joonis 46).

Väide: $ABC \dots E \sim A_1B_1C_1 \dots E_1$.

Tõestus. Väite tõestamiseks on vaja näidata, et nende hulknurkade vastavad nurgad on võrdsed ja küljed on võrdelised. Nende hulknurkade mistahes kaks vastavat nurka on võrdsed, sest nad on vastavalt paralleelsete ja samasuunaliste haaradega nurgad. Näiteks

$$\angle A = \angle A_1,$$

sest eelduse järgi nende nurkade haaradest

$$AB \parallel A_1B_1 \quad \text{ja} \quad AE \parallel A_1E_1$$

ning joonise järgi need haarad on samasuunalised.

Tõestame nüüd, et kõnesolevate hulknurkade küljed on võrdelised. Et eelduse järgi

$$AB \parallel A_1B_1 \text{ ja } BC \parallel B_1C_1,$$

siis kiirteteoreemi põhjal

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BO}{B_1O} \text{ ja } \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{BO}{B_1O}.$$

Et nende võrrete paremad pooled on võrdsed, siis on võrdsed ka vasakud pooled; seega

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}.$$

Samal viisil tõestust jätkates saame

$$\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1}; \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{DE}{D_1E_1}; \dots$$

ehk kokkuvõetult

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \dots = \frac{EA}{E_1A_1}.$$

Seega hulknurkade $ABC\dots E$ ja $A_1B_1C_1\dots E_1$ vastavad nurgad on võrdsed ja küljed võrdelised, mistõttu

$$ABC\dots E \sim A_1B_1C_1\dots E_1.$$

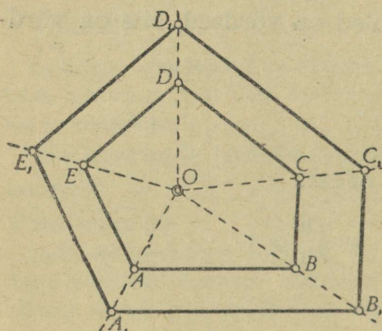
Viimane teoreem võimaldab ehitada antud hulknurgaga sarnast hulknurka. Olgu antud viisnurk $ABCDE$ ja nõutagu sellega sarnase viisnurga ehitamist nii, et selle küljed on 1,5 korda pikemad antud viisnurga külgedest (joonis 46).

Ülesande lahendamiseks joonestame vabalt valitud punktist O kiired läbi antud hulknurga tippude, võtame ühel kiirel, näiteks OA , punkti A_1 nii, et

$$OA_1 = 1,5 \cdot OA,$$

ja lähtudes punktist A_1 joonestame hulknurga $A_1B_1C_1D_1E_1$ nii, et selle küljed on paralleelsed antud hulknurga vastavate külgedega. Viimati tõestatud teoreemi järgi on uus hulknurk endisega sarnane, kusjuures nende vastavate külgede jagatis on 1,5, sest konstruktsiooni järgi

$$\frac{A_1O}{AO} = 1,5.$$



Joonis 46.

Antud hulknurgaga sarnase hulknurga joonestamist nimetatakse ka hulknurga suurendamiseks või vähendamiseks vastavalt sellele, kas uue hulknurga küljed on suuremad või väiksemad antud hulknurga külgedest.

Seega

suurendada hulknurk n korda tähendab joonestada antud hulknurgaga sarnane hulknurk n korda pikemate külgedega.

Arvu n , mis näitab, mitu korda ühe hulknurga küljed on pikemad temaga sarnase hulknurga külgedest, nimetatakse sarnasusete guriks.

Hulknurga suurendamiseks või vähendamiseks vabalt võetud punkt O joonisel 46 ei tarvitse asetseda antud hulknurga sees; ta võib olla ka selle küljel, tipus või väljaspool hulknurka.

Ulesanded.

183. Suurendada vabalt võetud viisnurk 2 korda.

184. Vähendada vabalt võetud kuusnurk 3 korda.

185. Tõestada, et kahe sarnase hulknurga ümbermõõtude jagatis võrdub nende vastavate külgede jagatisega. Näpunäide: avaldada ühe hulknurga küljed ja ümbermõõt teise hulknurga külgede kaudu.

186. Joonestada täisnurkne kolmnurk, mille hüpotenuus $c = 5,6$ cm ja mille kaatetite suhe on $0,6$.

187. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuus $c = 8,5$ cm ja kaatet $b = 3,6$ cm. Teise, eelmisega sarnase kolmnurga kõige lühema külje pikkus on $2,4$ cm. Kui pikad on viimase kolmnurga teised küljed?

188. Standard-formaadi paberilehtede iga järgmine väiksem formaat saadakse eelmise formaadi poolitamise teel. Kõik formaadid on üksteisega sarnased. Näidata, et iga niisuguse formaadi mõõtmete suhe on sama suur, kui ruudu külje ja ruudu diagonaali suhe.

189. Standard-formaadi kõige suurema paberilehe (nn. algpoogna) pindala on 1 m^2 . Leida selle mõõtmed.

190. Standard-formaadi paberilehe diagonaal on a cm. Leida paberilehe mõõtmed.

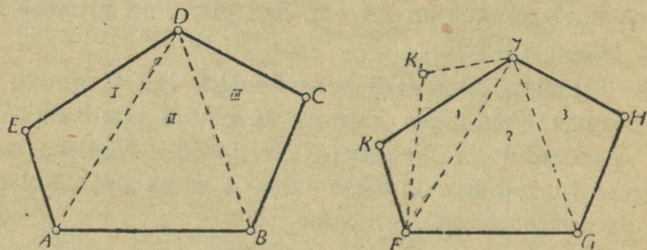
§ 24. Hulknurkade sarnasuse tunnuseid.

Eespool nägime, et kaks hulknurka on sarnased, kui ühe hulknurga küljed on paralleelsed teise hulknurga vastavate külgedega ja nende vastavaid tippe läbivad sirged lõikuvad ühes ja samas punktis. Vaatleme nüüd hulknurkade sarnasuse tunnuseid juhul, kui hulknurgad ei ole niisuguses asendis.

Kõige kergem on otsustada korrapäraste hulknurkade sarnasust:

kaks korrapärast hulknurka on sarnased, kui neil on ühepalju tippe, sest kahe korrapärase n -nurga nurgad on vastavalt võrdsed ja ka küljed on võrdelised. Nii on kõik korrapärased 5 -nur-

gad sarnased, kõik korrapärased 8-nurgad sarnased jne. Teiste hulknurkade sarnasuse otsustamiseks, kui see teisiti pole võimalik, tükeldatakse nad kolmnurkadeks; seda tükeldamist võib toimetada näiteks diagonaalidega, mis lähtuvad ühest paarist vastavatest tippudest. Kui hulknurki saab tükeldada ühesuuruseks arvuks kolmnurkadeks, mis on sarnased ja ühel viisil asetatud, siis hulknurgad on sarnased. Nii on joonisel 47 kujutatud hulknurk $ABCDE$ sarnane hulk-



Joonis 47.

nurgaga $FGHIK$, kui on sarnased kolmnurgad I ja 1, II ja 2, III ja 3, sest sel juhul on sarnased kolmnurgad ühel viisil asetatud. Kuid sama hulknurk $ABCDE$ ei ole sarnane hulknurgaga $FGHIK_1$, sest kolmnurga 1 asetus ei vasta kolmnurga I asetusele.

Sellest selgub, et hulknurkade sarnasuse otsustamiseks on vaja tunda kolmnurkade sarnasuse tunnuseid. Neid on neli, nagu kongruentsuse tunnuseidki.

Ülesanded.

191. Tuua näiteid sarnaste kujundite kohta geomeetriast ja mujalt.

192. Millal on kaks ruutu sarnased?

193. Millal on kaks rombi sarnased?

194. Millal on kaks ristkülikut sarnased?

195. Kolmnurgas, mille külgede pikkused on 14,8 cm, 10,6 cm ja 12,4 cm, on joonestatud rööpsirge kõige lühemale küljele. Saadud uues kolmnurgas on kõige pikem külg 9,62 cm. Kui pikad on uue kolmnurga teised küljed?

§ 25. Kolmnurkade sarnasuse I tunnus.

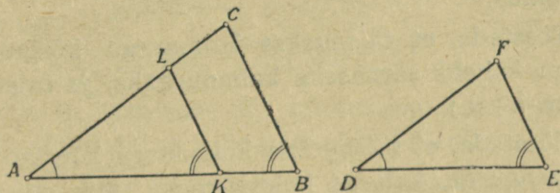
Kaks kolmnurka on sarnased, kui ühe kolmnurga kaks nurka on võrdsed teise kolmnurga vastavate nurkadega.

Eeldus:

$$\angle A = \angle D; \quad \angle B = \angle E \text{ (joonis 48).}$$

Väide:

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF.$$



Joonis 48.

Tõestus: Mõõdame kolmnurga ABC küljel AB alates punktist A sirglõigu DE ning selle lõpp-punktist K joonestame

$$KL \parallel BC.$$

Nii saadud $\triangle AKL$ on sarnane kolmnurgaga ABC , sest nurga A haarad on lõigatud kahe paralleeliga.

Näitame, et tekkinud kolmnurk AKL on kongruentne antud kolmnurgaga DEF . Eelduse kohaselt

$$\angle A = \angle D$$

ja joonestamise järgi

$$AK = DE$$

ning

$$\angle K = \angle B = \angle E,$$

millest kongruentsuse tunnuse nkn järgi

$$\triangle AKL \cong \triangle DEF.$$

Et kolmnurk ABC oli sarnane kolmnurgaga AKL , siis on ta sarnane ka sellega kongruentse kolmnurgaga DEF :

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF.$$

Ülesanded.

196. Kuidas sõnastada kolmnurkade sarnasuse I tunnust täisnurksete kolmnurkade juhul, kuidas võrdhaarsete kolmnurkade juhul?

197. Kaarsilla sõrestiku ülemiseks piirjooneks on ringi kaar, mille kõrgus on 1,2 m. Silla pikkus on 6 m. Leida selle kaare raadius.

198. Tõestada, et täisnurkse kolmnurga kõrgus jaotab kolmnurga kaheks sarnaseks kolmnurgaks, ja tuletada sellest valem $h^2 = f \cdot g$.

199. Tõestada, et täisnurkse kolmnurga kõrgus tükeldab antud kolmnurga kaheks kolmnurgaks, mis on sarnased antud kolmnurgaga. Järeldada sellest Eukleidese teoreem.

§ 26. Kolmnurkade sarnasuse II tunnus.

Kaks kolmnurka on sarnased, kui ühe kolmnurga üks nurk on võrdne teise kolmnurga ühe nurgaga ja nende nurkade lähisküljed on võrde-
lised.

Eeldus:

$$\angle A = \angle D; AB:DE = AC:DF \text{ (joonis 48).}$$

Väide:

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF.$$

Tõestus: Mõõdame $\triangle ABC$ küljel AB alates punktist A sirglõigu DE ning selle lõpp-punktist K joonestame $KL \parallel BC$.

Siis kiirteteoreemi põhjal

sel korral aga

$$\triangle AKL \sim \triangle ABC,$$

millest

$$\frac{AL}{AC} = \frac{AK}{AB},$$

$$AL = \frac{AC \cdot AK}{AB} = \frac{AC \cdot DE}{AB}.$$

Eeldusest järeldub aga, et ka

$$DF = \frac{AC \cdot DE}{AB}$$

seega

$$AL = DF.$$

Koos eeldusega $\angle A = \angle D$ saame kolmnurkade kongruentsuse tunnuse knk järgi, et

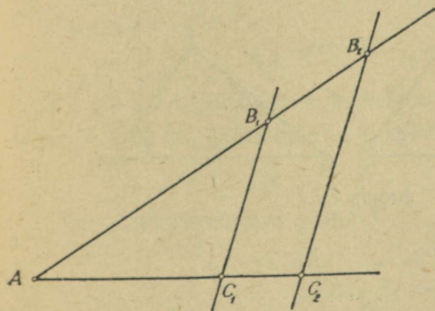
Järelikult ka

$$\triangle AKL \cong \triangle DEF.$$

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF.$$

Kolmnurkade sarnasuse II tunnusest saame teha järelduse, mida nimetatakse kiirteteoreemi pöördteoreemiks:

kui kaks sirget lõikab nurga haarasid nii, et lõigud nurga tipust ühe lõikajani on võrdelised lõikudega nurga tipust teise lõikajani, siis lõikajad on paralleelsed.



Joonis. 49.

seega tõesti $B_1C_1 \parallel B_2C_2$.

Tõestus: Kolmnurgad AB_1C_1 ja AB_2C_2 on sarnased II tunnuse põhjal, sest eelduse järgi

$$\frac{AC_1}{AC_2} = \frac{AB_1}{AB_2}$$

ja

$$\angle A = \angle A.$$

Kolmnurkade sarnasusest järeldame aga, et

$$\angle C_1 = \angle C_2.$$

Olesanded.

200. Kuidas sõnastada kolmnurkade sarnasuse II tunnust täisnurksete kolmnurkade juhul?

201. Tõestada, et kolmnurga kahe külje keskpunkte ühendav lõik on pool kolmandast küljest ja on paralleelne sellega.

202. Tõestada, et kolmnurga kaks küljepoolitajat lõikuvad punktis, mis eraldab neist ühe kolmandiku. Järeldada sellest, et kolmnurga kolm küljepoolitajat lõikuvad ühes ja samas punktis.

§ 27. Kolmnurkade sarnasuse III tunnus.

Kaks kolmnurka on sarnased, kui ühe kolmnurga küljed on võrdselised teise kolmnurga külgedega.

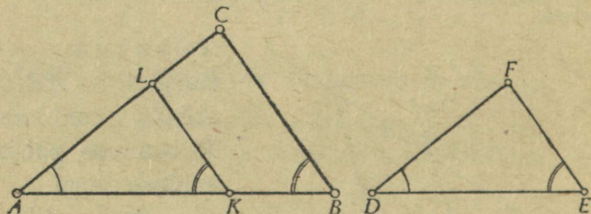
Eeldus:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} \quad (\text{joonis 50}).$$

Väide:

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF.$$

Tõestus. Mõõdame $\triangle ABC$ küljel AB sirglõigu DE ning selle lõpp-punktist K joonestame $KL \parallel BC$.



Joonis 50.

Siis kiirteteoreemi põhjal

$$\triangle ABC \sim \triangle AKL,$$

nii et

$$\frac{KL}{BC} = \frac{AK}{AB}$$

ehk

$$KL = \frac{BC \cdot AK}{AB} = \frac{BC \cdot DE}{AB}$$

ja samuti

$$AL = \frac{AC \cdot DE}{AB}.$$

Eelduse järgi aga

$$\frac{BC \cdot DE}{AB} = EF \text{ ja } \frac{AC \cdot DE}{AB} = DF,$$

järelikult

$$KL = EF \text{ ja } AL = DF.$$

Kolmnurkade kongruentsuse tunnus kkk laseb siit järeldada, et

$$\triangle AKL \cong \triangle DEF,$$

mistõttu ka

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF,$$

nagu oligi tõestada.

§ 28. Kolmnurkade sarnasuse IV tunnus.

Kaks kolmnurka on sarnased, kui ühe kolmnurga kaks külge on võrde-
lised teise kolmnurga kahe küljega ja nurk, mis ühes kolmnurgas asetseb
nimetatud küljepaari suurema külje vastas, võrdub vastava nurgaga teises
kolmnurgas.

Eeldus:

$$AB:DE = AC:DF; AB > AC; \angle C = \angle F \text{ (joonis 50).}$$

Väide:

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF.$$

Tõestus. Mõõdame kolmnurga ABC küljel AB sirglõigu
 $AK = DE$ ja joonestame punktist K rööplõigu küljele BC :

$$KL \parallel BC.$$

Siis kiirteteoreemi põhjal

$$\triangle ABC \sim \triangle AKL.$$

ja

$$\frac{AL}{AC} = \frac{AK}{AB},$$

millest

$$AL = \frac{AC \cdot AK}{AB} = \frac{AC \cdot DE}{AB}.$$

Eelduse järgi $\frac{AC \cdot DE}{AB} = DF$

ja seega

$$AL = DF.$$

Et eelduse järgi veel

$$\angle L = \angle C = \angle F,$$

siis kolmnurkade kongruentsuse tunnuse KkN järgi

$$\triangle AKL \cong \triangle DEF.$$

Kuna enne saime

$$\triangle ABC \sim \triangle AKL$$

ja nüüd

$$\triangle AKL \cong \triangle DEF,$$

siis järeldubki, et

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF.$$

Ülesanded.

203. Külgede pikkused on ühel kolmnurgal 2,5 m, 4 m ja 3,75 m ning teisel kolmnurgal 75 cm, 80 cm ja 50 cm. Kas need kolmnurgad on sarnased?

204. Kuidas sõnastada sarnasuse IV tunnust täisnurksete kolmnurkade juhul?

§ 29. Sarnaste kolmnurkade kõrgused.

Sarnaste kolmnurkade vastavate kõrguste jagatis on võrdne vastavate aluste jagatisega.

Eeldusi:

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF; CG \text{ ja } FH \text{ on vastavad kõrgused.}$$

Väide:

$$CG : FH = AB : DE \text{ (joonis 51).}$$

Tõestus. Eelduse järgi kolmnurkades AGC ja DHF

$$\angle A = \angle D \text{ ja } \angle G = \angle H = 90^\circ;$$

seega kolmnurkade sarnasuse I tunnuse järgi

$$\triangle AGC \sim \triangle DHF,$$

millest järeldub, et

$$CG : FH = AC : DF.$$

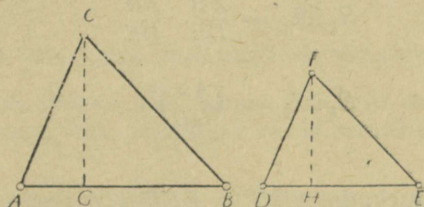
Et eelduse järgi $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, siis

$$AB : DE = AC : DF.$$

Neist kahest võrdusest järeldub, et

$$CG : FH = AB : DE,$$

nagu tahtsime tõestada.



Joonis 51.

§ 30. Sarnaste kolmnurkade pindalad.

Sarnaste kolmnurkade pindalade jagatis on võrdne vastavate külgede jagatise ruuduga.

Eeldus:

$\triangle ABC \sim \triangle DEF$; CG ja FH on vastavad kõrgused (joonis 51).

Väide:

$S_1 : S_2 = (AB : DE)^2$, kus S_1 on $\triangle ABC$ pindala ja S_2 on $\triangle DEF$ pindala.

Tõestus. Avaldame kolmnurkade pindalad aluse ja kõrguse kaudu; siis

$$S_1 = \frac{AB \cdot CG}{2} \text{ ja } S_2 = \frac{DE \cdot FH}{2}.$$

Seega

$$S_1 : S_2 = \frac{AB \cdot CG}{2} : \frac{DE \cdot FH}{2}$$

ehk

$$S_1 : S_2 = \frac{AB \cdot CG}{DE \cdot FH} = \frac{AB}{DE} \cdot \frac{CG}{FH}.$$

Eelmise teoreemi järgi

$$\frac{CG}{FH} = \frac{AB}{DE},$$

seetõttu

$$S_1 : S_2 = \frac{AB}{DE} \cdot \frac{AB}{DE}$$

ehk

$$S_1 : S_2 = \left(\frac{AB}{DE}\right)^2,$$

m. o. t. t.

Olgu kolmnurkade ABC ja DEF vastavate külgede suhe k ; siis

$$S_1 : S_2 = k^2$$

ja

$$S_1 = k^2 \cdot S_2.$$

Seega

kui kolmnurka suurendada k korda siis kolmnurga pindala suureneb k^2 korda.

Et $\left(\frac{AB}{DE}\right)^2 = \frac{AB^2}{DE^2}$, siis võib öelda ka: kolmnurkade pindalad suhtuvad kui vastavate külgede ruudud.

Ülesanded.

205. Kolmnurga kül $a = 5$ dm ja sellele küljele joonestatud kõrgus $h = 3,5$ dm. Teise, eelmisega sarnase kolmnurga kül $a_1 = 3$ dm. Arvutada kolmnurkade pindalad.

206. Kahe sarnase kolmnurga vastavate külgede suhe on 2,5. Väiksema kolmnurga pindala on $18,4 \text{ dm}^2$. Leida suurema kolmnurga pindala.

207. Kolme sarnase kolmnurga pindalade summa on 196 m^2 ja nende übermõõdud suhtuvad kui $1 : 2 : 3$. Leida iga kolmnurga pindala.

208. Kolmnurga külg on 15 dm . Kui suur on selle kolmnurgaga sarnase pindalalt kaks korda suurema kolmnurga vastav külg?

209. Kahe sarnase kolmnurga pindalade vahe on 60 cm^2 ja nende kolmnurkade vastavate külgede suhe on $\frac{3}{2}$. Arvutada nende kolmnurkade pindalad.

§ 31. Sarnaste hulknurkade diagonaalid.

Diagonaalid, mis lähtuvad kahe sarnase hulknurga ühest vastavate tipude paarist, jaotavad need hulknurgad paariti sarnasteks kolmnurkadeks.

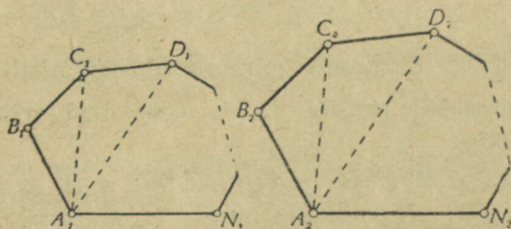
Eeldus:

$$A_1 B_1 C_1 D_1 \dots N_1 \sim A_2 B_2 C_2 D_2 \dots N_2; A_1 \text{ ja } A_2$$

on vastavad tipud.

Väide:

$\triangle A_1 B_1 C_1 \sim \triangle A_2 B_2 C_2; \triangle A_1 C_1 D_1 \sim \triangle A_2 C_2 D_2;$
jne. (joonis 52).



Joonis 52.

Tõestus. Et antud hulknurgad on sarnased, siis

$$A_1B_1 : A_2B_2 = B_1C_1 : B_2C_2$$

ja

$$\angle B_1 = \angle B_2.$$

Seega kolmnurkade sarnasuse II tunnuse järgi

$$\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2.$$

Sellest järeldame, et diagonaalide A_1C_1 ja A_2C_2 suhe on niisama suur kui antud hulknurga vastavate külgede suhe.

Eelduse järgi

$$\angle B_1C_1D_1 = \angle B_2C_2D_2;$$

kolmnurkade $A_1B_1C_1$ ja $A_2B_2C_2$ sarnasusest järeldub, et

$$\angle B_1C_1A_1 = \angle B_2C_2A_2.$$

Lahutades eelviimase võrduse pooltest viimase võrduse vastavad pooled, saame

$$\angle A_1C_1D_1 = \angle A_2C_2D_2.$$

Eespool selgus, et

$$A_1C_1 : A_2C_2 = C_1D_1 : C_2D_2.$$

Seega kolmnurkade sarnasuse II tunnuse järgi

$$\triangle A_1C_1D_1 \sim \triangle A_2C_2D_2.$$

Samal viisil tõestust jätkates saab teoreemi tõestada iga kolmnurkade paari kohta.

Järeldus: kahe sarnase hulknurga vastavate diagonaalide jagatis on niisama suur kui vastavate külgede jagatis.

§ 32. Sarnaste hulknurkade pindalad.

Sarnaste hulknurkade pindalade jagatis võrdub nende vastavate külgede jagatise ruuduga.

Eeldus: $A_1B_1 \dots N_1 \sim A_2B_2 \dots N_2$; $A_1B_1 \dots N_1$ pindala on S_1 ja $A_2B_2 \dots N_2$ pindala on S_2 (joonis 52).

Väide:

$$S_1 : S_2 = (A_1B_1 : A_2B_2)^2.$$

Tõestus. Diagonaalid, mis lähtuvad vastavatest tipudest A_1 ja A_2 , jaotavad hulknurgad paariti sarnasteks kolmnurkadeks. Olgu esimese hulknurga jaotamisel saadud kolmnurkade pindalad

$$P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$$

ja teise hulknurga jaotamisel saadud kolmnurkade pindalad vastavalt

$$Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n.$$

Siis

$$S_1 = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n.$$

ja

$$S_2 = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_n.$$

Kui antud hulknurkade vastavate külgede jagatis on k , siis

$$P_1 = k^2 Q_1, P_2 = k^2 Q_2, \dots$$

Seega

$$S_1 = k^2 Q_1 + k^2 Q_2 + \dots + k^2 Q_n$$

ehk pärast ühise teguri k^2 sulgude ette viimist

$$S_1 = k^2 (Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n).$$

Et sulgudesse jääv avaldis on teise hulknurga pindala S_2 , siis

$$S_1 = k^2 \cdot S_2,$$

millest

$$S_1 : S_2 = k^2.$$

Tulemust võib sõnastada ka järgmiselt:

kui hulknurka suurendada k korda, siis hulknurga pindala suureneb k^2 korda.

Ulesanded.

210. Mitu korda suureneb hulknurga pindala selle hulknurga suurendamisel 2, 3, 4, 5 korda?

211. Mitu korda tuleb suurendada hulknurka, et selle pindala suureneks 4, 10, 16, 50, 100 korda?

212. Kahe sarnase ristküliku pindalade jagatis on 13,69 ja väiksema ristküliku mõõtmed on 2,9 cm ja 5,5 cm. Arvutada suurema ristküliku mõõtmed.

213. Kahe sarnase hulknurga pindalad on 180 cm^2 ja 80 cm^2 . Arvutada suurema hulknurga übermõõt, kui väiksema hulknurga übermõõt on 48 cm.

214. Kahe ruudu pindalade vahe on 1 m^2 ja pindalade suhe on 2. Kui pikad on nende ruutude küljed?

215. Kuidas suhtuvad omavahel trapetsi alused, kui trapetsit täiendav kolmnurk on pindvõrdne trapetsiga?

216. Täisnurkse kolmnurga külgedele on joonestatud samanimelised korrapärased hulknurgad. Tõestada, et hüpoteenusile joonestatud hulknurga pindala võrdub kaatetitele joonestatud hulknurkade pindalade summaga.

217. Tõestada, et eelmises ülesandes antud teoreem on kehtiv üldiselt sarnaste hulknurkade kohta.

§ 33. Teoreem ringjoone lõikajast.

Kasutades kolmnurkade sarnasust, saab tõestada järgmise teoreemi ringjoone lõikajast:

kui lõikaja pöörduv mingi oma punkti ümber, siis ei muutu korrutis, mille teguriteks on eelnimetatud punkti kaugused ringjoone ja lõikaja ühistest punktidest.

Pöördugu lõikaja punkti S ümber ja olgu ringjoone ja lõikaja ühised punktid A ja B . Vaatleme selle lõikaja kahte asendit A_1B_1 ja A_2B_2 (joonis 53) ja tõestame, et

$$A_1S \cdot B_1S = A_2S \cdot B_2S.$$

Ühendame punkti A_1 punktiga B_2 ja punkti A_2 punktiga B_1 ning vaatleme kolmnurki A_1B_2S ja A_2B_1S . Igal juhul on neil kolmnurkadel üks paar võrdseid nurki, nimelt punkti S juures; kuid peale selle on neil võrdsed nurgad punktide B_2 ja B_1 juures, sest need on kas piirdenurgad, mis toetuvad

ühele ja samale kaarele, või piirdenurk ja nurk puutuja ning kõõlu vahel. Seepärast kolmnurkade sarnasuse I tunnuse põhjal

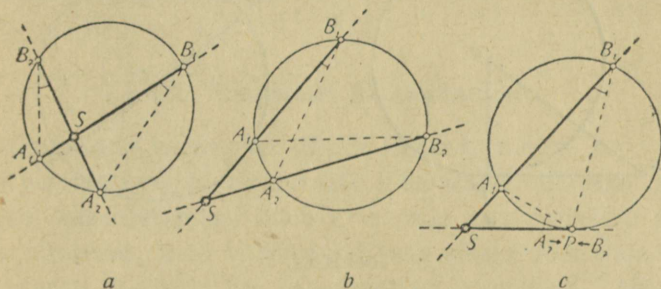
$$\triangle A_1 B_2 S \sim \triangle A_2 B_1 S.$$

Sellest järeldub, et nende vastavate külgede jagatised on võrdsed, seega

$$A_1 S : A_2 S = B_2 S : B_1 S.$$

Võrde peaomaduse põhjal järeldubki sellest, et

$$A_1 S \cdot B_1 S = A_2 S \cdot B_2 S.$$



Joonis 53.

Punkti S läbiva lõikaja osade korrutis $AS \cdot BS$ ei muutu, kui lõikaja pöörduv punkti S ümber, kuid muutub, kui punkt S muudab oma asukohta ringjoone suhtes. Lõikaja osade korrutise $AS \cdot BS$ arvutamiseks tähistame ringjoone raadiuse tähega r ja punkti kauguse ringjoone keskpunktist tähega a .

Kui punkt S on väljaspool ringjoont, siis lõikaja osade korrutis võrdub puutujalõigu ruuduga (joonis 53c):

$$AS \cdot BS = PS^2.$$

Et puutuja on risti puutepunktist lähtuva raadiusega, siis (joonis 54a)

$$PS^2 = a^2 - r^2$$

ja seega sel juhul

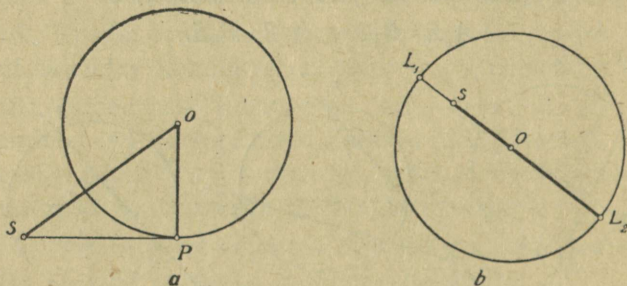
$$AS \cdot BS = a^2 - r^2.$$

Kui punkt S on ringjoone sees, siis on lõikaja osade korru-
tist kõige lihtsam arvutada seda punkti läbiva diameetri
abil; sel juhul (joonis 54b)

$$\text{ehk} \quad AS \cdot BS = L_1S \cdot L_2S$$

$$\text{ehk} \quad AS \cdot BS = (r-a) \cdot (r+a)$$

$$AS \cdot BS = r^2 - a^2.$$



Joonis 54.

Ulesanded.

218. Olgu $ABCD$ kõõlnelinurk ja P selle diagonaalide lõikepunkt. Tõestada, et $AP \cdot CP = BP \cdot DP$.

219. Ringis, mille raadius $r = 8$ cm, on joonestatud 14 cm pikkune kõõl läbi punkti P , mille kaugus ringi keskpunktist on 5 cm. Kui pikkadeks lõikudeks jaotab punkt P selle kõõlu?

220. Punktis S lõikuvad ringjoone puutuja ja keskpunkti läbiv lõikaja. Punktist S on ringjoone lähima punktini 7 cm ja puutepunktini 12 cm. Kui kaugel punktist S on ringjoone kõige kaugem punkt?

221. Tõestada, et kahe lõikuva ringjoone ühiseid punkte läbiv sirge poolitab nende ringjoonte ühise puutuja puutepunktide vahelise lõigu.

222. Kõõlu pikkus on 30 dm ja kõõlu keskkoha kaugus ringjoone lähemast punktist on 9 dm. Leida ringjoone raadius.

223. Punktist P väljaspool ringjoont tõmmatakse ringjoone lõikaja ja puutuja. Leida puutujalõigu pikkus, kui ta on 10 cm pikem lõikaja osast ringjoone sees ja samavõrra lühem lõikaja osast ringi ja punkti P vahel.

224. Joonestada lõik d , kui $d^2 = ab$, võttes lõigud a ja b ringjoone lõikaja osadeks.

§ 34. Maa-alade plaanistamine.

Hulknurkade sarnasuse üheks rakendusala on maa-alade plaanistamine. Suuremate maa-alade, näiteks maa-ilmajao, kaardistamisel tuleb arvestada maapinna kui kera-pinna kõverust, kuid väiksemaid maa-alasid võib ilma suurema veata vaadelda kui tasapinnalisi kujundeid. Maa-ala plaanistada tähendab sel juhul maatükiga sarnase vähendatud kujundi joonestamist. Kui plaani joonestamisel on pik-kused vähendatud n korda, siis plaanil iga pikkus on $\frac{1}{n}$ vastavast pikkusest looduses.

Plaani või kaardi ja maatüki vastavate pikkuste jagatist $\frac{1}{n}$ ehk $1:n$ nimetatakse plaani või kaardi arvmõõduks*.

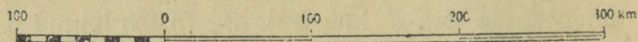
Harilikult valitakse arvuks n mingi ümmargune arv, näiteks 100, 250, 500, 1000, 1 000 000.

Peale arvmõõdu on plaan või kaart harilikult veel varustatud joonmõõduga; joonis 55 kujutab joonmõõtu, mille vastav arvmõõt on $1:5\,000\,000$.

* Plaani on mõõt $1:10\,000$ või suurem sellest, kaardil aga $1:10\,000$ või väiksem sellest.

Kaardi joonmõõt näitab vastavust kaardilt võetud pikkuse ja vastava loodusliku pikkuse vahel. Näiteks kaardil, mille joonmõõtu kujutab joonis 55, vastab lõigule punktide 0 ja 100 vahel pikkus 100 km.

Tuntakse mitmeid plaanistamisvõtteid. Järgnevalt on toodud mõned näited neist mõõtmistest, mille teostamisel on võimalik plaani joonestamine.



Joonis 55.

1. Käies ümber plaanistatava maa-ala, mõõdetakse selle kui hulknurga küljed ja nurgad.
2. Asutakse plaanistatava maa-ala ühte tippu ja mõõdetakse sellest lähtuvad küljed, diagonaalid ja nurgad nende vahel (joonis 52).
3. Tähistatakse maatüki üks diagonaal ja ülejäänud tippudest sellele diagonaalile ehitatud ristlõigud ning mõõdetakse need ristlõigud ja diagonaali lõigud ristlõikude vahel (joonis 21).

Olesanded.

225. Tallinna ümbruse kaardil mõõduga 1 : 100 000 on Ülemiste järve pikkus 48 mm. Kui pikk on see järv tõeliselt?

226. Eesti NSV kaardil mõõduga 1 : 1 500 000 on Kuresaare ja Ruhnu vahe 43 mm. Kui kaugel asetseb Ruhnu Kuressaarest?

227. Kaarti, mille mõõt oli 1 : 100 000, suurendati 4 korda. Kui suur on uue kaardi mõõt?

228. Jõe pikkus kaardil mõõduga 1 : 150 000 on 17,4 cm. Kui pikk on see jõgi kaardil mõõduga 1 : 750 000?

229. Musta mere pikkus kaardil mõõduga 1 : 18 000 000 on 6,7 cm. Kui pikk on sama meri kaardil mõõduga 1 : 3 000 000?

230. Harku järve pikkus kaardil mõõduga 1 : 100 000 on 2 cm. Sama järve pikkus teisel kaardil on 0,8 cm. Kui suur on teise kaardi mõõt?

231. Kaardil mõõduga 1 : 500 000 on Ilmeni järve pindala 36,8 cm². Kui suur on see järv tõeliselt?

§ 35. Pikkuste kaudne mõõtmine sarnaste kolmnurkade abil.

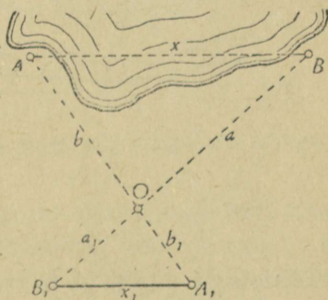
Kolmnurkade sarnasuse üheks rakendusala on kauguste ja kõrguste kaudne mõõtmine.

Kaks punkti, millele vahelist kaugust mõõdetakse, võivad olla ligipääsetavad või üks neist on ligipääsematu või koguni mõlemad on ligipääsematud.

Vaatleme kõiki neid kolme juhtumit eraldi.

1. Olgu A ja B kaks ligipääsetavat punkti (joonis 56), aga nende vahelise kauguse otsene mõõtmine

olgu võimatu. Need punktid võivad olla näiteks järve kaldal. Valime punkti O kaldast veidi eemal nii, et saab mõõta selle kaugust punktidest A ja B . Pikendame sirgloike AO ehk b ja BO ehk a nii palju, et AO pikendus b_1 on mingi täisarv n kordi väiksem lõigust b ja pikendus a_1 on lõigust a sama arv kordi väiksem.



Joonis 56.

Kui nüüd mõõdame lõikude b_1 ja a_1 otspunktide A_1 ja B_1 vahelise kauguse x_1 ja suurendame seda n korda, siis saame otsitava kauguse AB .

Tõepoolest kolmnurkade sarnasuse II tunnuse järgi

$$\triangle AOB \sim \triangle A_1OB_1,$$

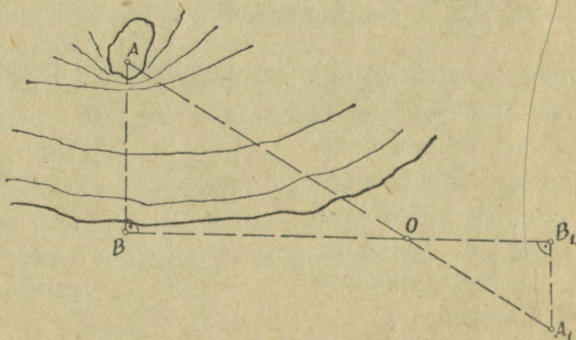
millest järeldub, et

$$x : x_1 = a : a_1.$$

Et $a : a_1 = n$, siis

$$x = nx_1.$$

2. Vaatleme nüüd kauguse mõõtmist kahe punkti vahel juhtumil, kui üks neist punktidest on ligipääsematu.



Joonis 57.

Tähistagu punkt A saarel olevat tuletorni, mille kaugust tahetakse mõõta merekaldal olevast punktist B .

Selleks valime nende punktide vahelise lõigu ristsirgel punkti O ja punkti B_1 nii, et lõik OB_1 on täisarv n korda väiksem lõigust OB . Punktist B_1 tõmmatud ristsirge lõikab sirget OA punktis A_1 . Mõõdame kauguse punktide A_1 ja B_1 vahel; selle kauguse n -kordne ongi punktide A ja B vaheline kaugus.

Siin oleme kasutanud kolmnurkade sarnasuse I tunnust, kuna kolmnurgad AOB ja A_1OB_1 omavad kaks võrdset vasta-

vat nurka, — täisnurgad punktide B ja B_1 juures ja võrdsed tippnurgad punkti O juures.

Ka kõrguse mõõtmisel enamail juhtumeil on üks punktidest ligipääsematu. Vaatleme näitena puu kõrguse kaudselt mõõtmist.

Puu kõrgust saab mõõta tema varju abil (joonis 58): kui puu kõrgus on x m, puu varju pikkus tasasel maapinnal v m, kepi pikkus a m ja kepi varju pikkus b m, siis sarnastest kolmnurkadest ABC ja $A_1B_1C_1$ saab, et

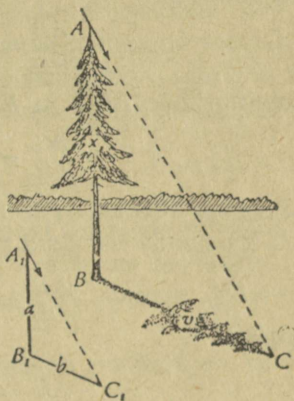
$$x : a = v : b,$$

millest

$$x = \frac{av}{b}$$

ehk

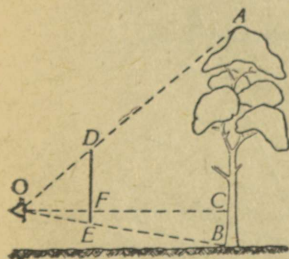
$$x = \frac{a}{b} \cdot v.$$



Joonis 58.

Erijuhul, kui $a = b$, siis $x = v$.

Kuid ka varjudeta saab puu kõrgust või mistahes kõrgust kaudselt mõõta.



Joonis 59.

Metsaametnikud sagedasti mõõdavad kasvava puu kõrgust 80 cm pikkuse kepiiga, millele on tehtud märk 8 cm kaugusel selle otsast. Hoides keppi väljasirutatud käes püstsuunas, leitakse niisugune asend, kus puu latv A , vaatleja silm O ja kepi üks ots D on ühel ja samal sirgel ning puu juur B , vaatleja silm

O ja kepi teine ots E asetsevad teisel sirgel (joonis 59). On niisugune asend leitud, siis märgitakse puu tüvel punkt C ,

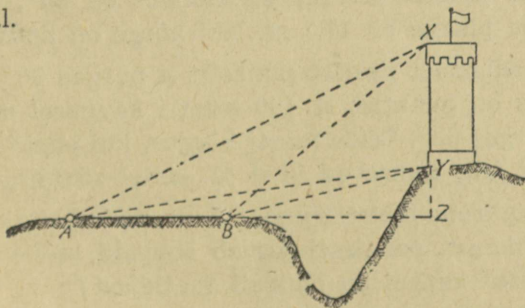
3. Sarnaste kolmnurkade abil on võimalik mõõta kaugusi ja kõrgusi ka sel juhtumil, kui mõlemad punktid on ligipääsematud. Näitena vaatleme kahe laeva vahelise kauguse mõõtmist merekaldal oleva vaatleja poolt.

Olgu A ja B kaks ankrusseisvat laeva (joonis 60). Nende vahelise kauguse mõõtmiseks märgime merekaldal kaks punkti K ja L , millede vahelise kauguse mõõdame võimalikult täpselt. Lõiku KL nimetame baasiks. Baasi otspunktidest on näha punktid A ja B . Mõõdame baasi otspunktide juures olevad nurgad

AKL , BKL , ALK ja BLK .

Teades baasi pikkust KL ja neid nurki, joonestame vähen-
datud mõõdus nelinurga $ABLK$. Kui seejuures mõõduks on $1:n$, siis tõeline kaugus AB on n korda suurem joonisel esinevast kaugusest AB .

Vaatleme juhtumit, kus ligipääsematud punktid on püst-
tasapinnal.



Joonis 61.

Olgu vaja mõõta joonisel 61 kujutatud torni kõrgust. Selle mõõtmiseks tähistame rõhtsal maapinnal torni suunas mineva baasi AB , mille otspunktidest on näha torni tipp X ja torni jalg Y . Nüüd mõõdame baasi otspunktide juures torni tipu ja torni jala kõrgusnurgad

XAZ , YAZ , XBZ ja YBZ .

Teades neid nurki ja baasi pikkust AB , joonestame vähen-
datud mõõdus nelinurga $ABYX$, millest leiame torni kõrguse
 XY . Samast joonisest võib määrata ka torni jala kõrguse
rõhtsirgest AB .

Ülesanded.

232. Telefoniposti varju pikkus on 4,9 m samal ajal, kui
1,7 m pikkuse kepi varju pikkus on 1,4 m. Kui kõrge on
telefonipost?

233. 200 m kaugusel vabrikukorstnast viseeriti selle kõr-
gust väljasirutatud käes püstloodis hoitud mõõtpuuga ja
saadi korstna näiva kõrgusena 24 cm. Kui kõrge on vabriku-
korsten, kui väljasirutatud käe pikkus on 75 cm?

234. Kui kõrgel on päike silmapiirilt momendil, mil 2,5 m
kõrguse posti varju pikkus rõhtsal pinnal on 3,2 m?

235. Kui päikese kõrgus silmapiirilt on 35° , siis lipu-
varda varju pikkus on 17,1 m. Kui kõrge on lipuvarras?

236. Raadiomast paistab punktist A nurgas 30° ja punk-
tist B , mis on punktist A 100 meetri kaugusel masti jala
suunas, nurgas 62° . Leida masti kõrgus, kui punktid A ja B
ning masti jalg asetsevad ühel ja samal rõhtsirgel.

237. Metallraha läbimõõduga 2,5 cm, mida hoitakse 50 cm
kaugusel silmast, parajasti varjab õhupalli, mille läbimõõt
on 16 m. Kui kaugel on õhupall vaatlejast?

238. Vaatleja, kes seisab tornist 42 m kaugusel, näeb
torni ja enda vahel asetseva tiigi veepinnal 2 m kaugusel
tornitipu peegeldust. Leida torni kõrgus teades, et vaatleja
silm on veepinnast 1,75 m kõrgusel.

239. Maapinnal punktis A paistab kalju äär 45° -se nurga
all, aga punktis B , mis asetseb punktist A kaljule ristsuunas
50 m kaugusel punktist A , 30° -se nurga all. Leida kalju ääre
kõrgus kalju jalalt.

240. Vabrikukorsten paistab a meetri kaugusel korstnjalast 30° -se nurga all. Kui kõrge on korsten?

241. Kas on vajalik, et joonisel 57 võetakse kolmnurk ABO täisnurkne? Missuguseid paremusi on mõõtmisviisil täisnurkse kolmnurga abil võrreldes mittetäisnurkse kolmnurgaga?

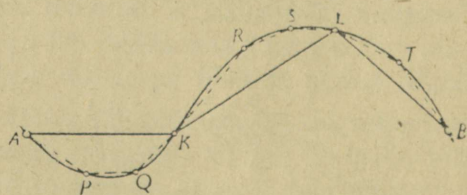
242. Kõrgepinge liini postist 20 m kaugusel märgitakse maapinnal punkt O . Selle punkti ja posti vahele 4 meetri kaugusele punktist O asetatakse püsti mõõtpuu, mille pikkus on 3 m. Nüüd asuvad punkt O , mõõtpuu ots ja posti tipp ühel sirgel. Leida posti kõrgus.

243. Kuidas eelmise ülesande eeskujul mõõta kaugust rõhttasapinnal?

Ringjoone pikkus ja ringi pindala.

§ 36. Kõverjoone ligikaudne pikkus.

Ringjoone nagu iga kõverjoone pikkuse mõõtmise põhimõtteliseks raskuseks on asjaolu, et pikkusühik kui sirgjoone lõik ei saa ühtida tema ühegi lõiguga. Selle raskuse ületamiseks asendatakse kõverjoon murdjoonega, mille pikkus võimalikult vähe erineb antud kõverjoone pikkusest, ja mõõdetakse selle murdjoone pikkus. Olgu vaja mõõta näiteks joonisel 62 kujutatud kõverjoone lõik punktide A ja B vahel.



Joonis 62.

Kui selle kõverjoone lõigu asendame murdjoonega $AKLB$, siis saame tublisti lühema joone, kui on kõverjoon $AKLB$, sest selle murdjoone iga lõik AK , KL , LB on lühem kui vastav kõverjoone lõik. Et saada murdjoon, mille pikkus vähem erineb kõverjoone $AKLB$ pikkusest, selleks võetakse kõverjoonel lisaks punktidele K ja L veel uusi punkte P , Q , R , S , T

ja ühendatakse need uueks murdjooneks. Uus murdjoon $APQKR\dots B$ on pikem kui endine murdjoon $AKLB$, sest murdjoon

$$APQK > AK, KRSL > KL \text{ jne.},$$

järelikult ka nende summa $APQKR\dots B$ on pikem kui murdjoon $AKLB$.

Kuid kõverjoonest AB on uus murdjoon $APQK\dots B$ siiski lühem, sest murdjoone iga lõik $AP, PQ, \dots$ on lühem vastavast kõverjoone lõigust. Niiviisi uute punktide juurdevõtmisega võib moodustada murdjooni, mille pikkus küllalt hästi asendab mõõdetava kõverjoone pikkust. Selle murdjoone pikkuse mõõtmisel saame kõverjoone ligikaudse pikkuse.

§ 37. Ringjoone pikkuse ligikaudne väljendamine kõõlhulknurga ja puutujahulknurga abil.

Ringjoone ligikaudse pikkuse määramiseks joonestame ringjoone sisse mingi korrapärase hulknurga, näiteks korrapärase kuusnurga, ja arvutame selle übermõõdu. Et korrapärase kuusnurga kül

$$a_6 = r,$$

siis übermõõt

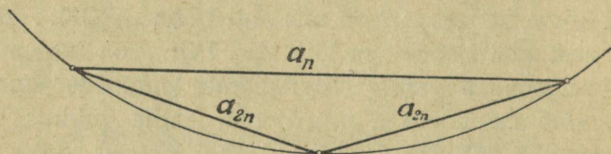
$$s_6 = 6r$$

ja seega ringjoone pikkus on ligikaudu raadiuse kuuekordne.

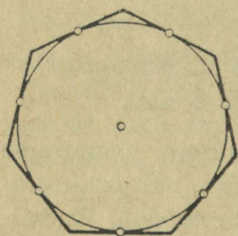
Soovides saada ringjoone pikkust täpsemalt, joonestame kaks korda suurema tippude arvuga kõõlhulknurga ja arvutame selle übermõõdu. Nii saadud übermõõt on endisest suurem, sest, nagu saab tõestada,

korrapärase kõõlhulknurga übermõõt kasvab selle tippude arvu kahekordistamisel.

Tõestus. Tähistame korrapärase kõõl- n -nurga külje pikkuse sümboliga a_n ja kaks korda suurema tippude arvuga kõõlhulknurga külje pikkuse a_{2n} . Tippude arvu kahekordseks muutumisel n -nurga iga külje asemele tuleb kaks $2n$ -nurga külge (joonis 63). Nende kahe külje summa $2 \cdot a_{2n}$ on suurem kui a_n , sest see murdjoon on pikem kui sirglõik



Joonis 63.



Joonis 64.

a_n . Korrapärase kõõl- n -nurga ümbermõõt on $n \cdot a_n$, korrapärane kõõl- $2n$ -nurk koosneb aga $2n$ küljest a_{2n} tema ümbermõõt on järelikult $2n \cdot a_{2n}$, ehk $n \cdot 2 \cdot a_{2n}$, mis ongi suurem kui $n \cdot a_n$.

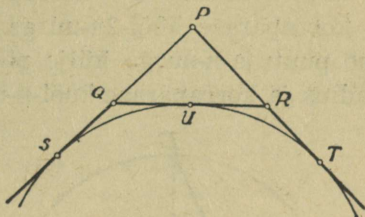
Joonestame nüüd ringjoone ümber mingi korrapärase puutujahulknurga, näiteks seitsenurga (joonis 64). Meie kujutluse järgi on selle hulknurga ümbermõõt ringjoonest pikem. Et ta tõesti on pikem, selgub sellest, et puutujahulknurga ümbermõõt lüheneb tema tippude arvu suurenemisel. Nimelt saab hõlpsasti tõestada, et

korrapärase puutujahulknurga ümbermõõt lüheneb tippude arvu kahekordseks muutmisel.

Tõestus. Olgu punkt P korrapärase puutujahulknurga üks tipp ning punktid S ja T sellest tipust lähtuvate külgede ja ringjoone puutepunktid (joonis 65). Et puutujahulknurga külj poolitub puutepunktis, siis SP on pool külge, järelikult

murdjoone SPT pikkus võrdub parajasti ühe külje pikkusega. Joonestame nüüd kaks korda suurema tippude arvuga puutujahulknurga külje; selleks poolitame kaare ST ja joonestame poolituspunkti U puutuja QR . Lõik QR ongi kaks korda suurema tippude arvuga puutujahulknurga üks külj. Et

$$SQ = QU = UR = RT,$$



Joonis 65.

siis murdjoon $SQRT$ esitab selle hulknurga külje kahekordset pikkust. Nii on endise puutujahulknurga ühe külje pikkuse murdjoone SPT asemele tulnud uue hulknurga kahe külje pikkune murdjoon $SQRT$, mis on aga eelmisest kindlasti lühem, sest

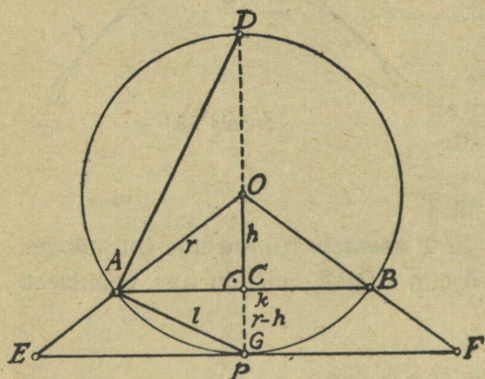
$$QR < QP + PR.$$

Endise hulknurga ümbermõõduks on n -kordne murdjoone SPT pikkus, tippude arvu kahekordseks muutmisel aga tuleb ümbermõõduks n -kordne lühema murdjoone $SQRT$ pikkus, nii et ümbermõõt tõesti lüheneb, nagu tõestama pidimegi.

Et kõõlhulknurga ümbermõõt on ringjoone pikkuse lähisväärtus puudusega ja puutujahulknurga ümbermõõt on ringjoone pikkuse lähisväärtus liiaga, siis järeldub tõestatud teoreemidest, et mõlemad lähisväärtused lähevad paremaks tippude arvu kahekordseks muutmisel, need lähisväärtused tulevad koomale.

§ 38. Kõõlhulknurkade ja puutujahulknurkade joonelementide vahelised seosed.

Ringjoone pikkuse lähisväärtuste tegelikuks arvutamiseks on vaja avaldada 1) korrapärase kõõl- n -nurga apoteem, 2) korrapärase kõõl- $2n$ -nurga külje pikkus ja 3) korrapärase puutuja- n -nurga külje pikkus, kui andmeteks on ringi raadius ja korrapärase kõõl- n -nurga külje pikkus. Tähistame



Joonis 66.

ringi raadiuse tähega r ja mingi antud kõõlu pikkuse tähega k (joonis 66). Kõõlu kaugust ringi keskpunktist esitab lõik h , mis poolitab kõõlu ja on temaga risti. Kolmnurgast OAC saame Pythagorase teoreemi järgi

$$h^2 = r^2 - \left(\frac{k}{2}\right)^2.$$

Kui kirjutada mure $\frac{k}{2}$ laiendatult $\frac{rk}{2r}$, siis

$$h^2 = r^2 - r^2 \left(\frac{k}{2r} \right)^2,$$

millest

$$h = r \sqrt{1 - \left(\frac{k}{2r}\right)^2}.$$

Pool antud kõõlule k toetuvast kesknurgast toetub lühemale kõõlule, mille tähistame l (joonis 66). Selle pikkuse leidmiseks kasutame kolmnurka GDA , mis on Thalese teoreemi põhjal täisnurkne kolmnurk hüpotenuusiga $2r$ ja kaa-

tetiga l ; sama kaateti projektsioon hüpotenuusil on $r-h$. Järelikult Eukleidese teoreemi põhjal

$$l^2 = 2r (r-h)$$

ehk kui kasutada eespool leitud h avaldist

$$l^2 = 2r \left(r - r \sqrt{1 - \left(\frac{k}{2r}\right)^2} \right) = 2r^2 - 2r^2 \sqrt{1 - \left(\frac{k}{2r}\right)^2}.$$

Viimases liikmes kanname teguri 2 juuritavasse ja siis taandame juuritavas olevat murdu; nii saame

$$l^2 = 2r^2 - r^2 \sqrt{4 - \left(\frac{k}{r}\right)^2},$$

millest

$$l = r \sqrt{2 - \sqrt{4 - \left(\frac{k}{r}\right)^2}}.$$

Joonestame nüüd ringjoonele puutuja, mis on paralleelne kõõluga k (joonis 66); kõõlule toetuv kesknurk lõikab puutujast sirglõigu p . Selle lõigu pikkuse leidmiseks kasutame kolmnurkade OEF ja OAB sarnasust; nende kõrgused on vastavalt r ja h , mistõttu

$$\frac{p}{k} = \frac{r}{h}$$

ehk

$$p = \frac{r}{h} \cdot k.$$

Allakriipsutatud valemite tuletamisel võiks k olla ükskõik missugune ringi lähimõõdust lühem kõõl. Seepärast võime nende valemite rakendamisel võtta kõõlu k parajasti mingi korrapärase kõõl- n -nurga küljega võrdseks. Siis h on sama hulknurga apoteem, l on korrapärase kõõl- $2n$ -nurga külg ja p on korrapärase puutuja- n -nurga külg.

Esimesest valemist on näha, et kui korrapärase kõõlhulknurga tippude arv on suur ja vastavalt sellele külg k on üsna

lühike, siis apoteem h tuleb ringi raadiusest ainult pisut lühem, sest siis murd $\frac{k}{2r}$ on üsna väike, nii et juuritav on peaaegu 1. Sama tippude arvuga korrapärase puutujahulknurga külge p tuleb järelikult ainult pisut pikem kui kõõlhulknurga külge k , sest kolmanda valemi kohaselt on nende suhe $\frac{r}{h}$ ning see läheb siis ainult pisut suuremaks arvust 1. Nagu teame, on korrapärane puutuja- n -nurk sarnane korrapärase kõõl- n -nurgaga ja nende übermõõtude suhe on samuti $\frac{r}{h}$. Järelikult korrapärase puutujahulknurga übermõõt on suure tippude arvu puhul ainult pisut suurem kui vastava kõõlhulknurga übermõõt.

Ulesanded.

244. Avaldada korrapärase kõõl-kuusnurga külge, apoteem ja übermõõt ringi raadiuse r kaudu.

245. Avaldada korrapärase kõõl-kolmnurga külge, apoteem ja übermõõt ringi raadiuse r kaudu.

246. Kasutades korrapärase kõõl-kuusnurga külge pikkust, leida korrapärase kõõl-kaksteistnurga külge ja übermõõt.

247. Avaldada korrapärase kõõl-nelinurga külge, apoteem ja übermõõt ringi raadiuse r kaudu.

248. Kasutades eelmise ülesande tulemusi, leida korrapärase kõõl-kaheksanurga külge ja übermõõt.

249. Leida ringi über joonestatud korrapärase nelinurga abil arv, millest ringjoone pikkus kindlasti on väiksem.

250. Avaldada korrapärase puutuja-kuusnurga külge ja übermõõt ringi raadiuse r kaudu.

251. Teades korrapärase puutuja-kuusnurga külge pikkust, leida korrapärase puutuja-kaksteistnurga külge ja übermõõt ringi raadiuse r kaudu.

§ 39. Ringjoone pikkus.

Iga kõõlhulknurga ümbermõõt on ringjoone pikkuse lähisväärtuseks puudusega ja iga puutujahulknurga ümbermõõt esitab ringjoone pikkust liiaga. Eespool selgus, et suure tippude arvu puhul tuleb korrapärase puutujahulknurga ümbermõõt aga ainult pisut pikem kui sama tippude arvuga korrapärase kõõlhulknurga ümbermõõt. Arvutused näitavad, et nende ümbermõõtude erinevus läheb kuitahes väikeseks küllalt suure tippude arvu puhul. Sel viisil on järelilikult täiesti kindlaks määratud üksainus vahepealne pikkus, millest kõik kõõlhulknurkade ümbermõõdud on lühemad ja puutujahulknurkade ümbermõõdud pikemad; seda vahepealset pikkust ongi loomulik lugeda ringjoone pikkuseks.

Matemaatikas esineb palju juhtumeid, millal mingi suurus on määratud üsna samal viisil, nagu ringjoone pikkus kõõlhulknurkade ümbermõõtude ja puutujahulknurkade ümbermõõtude kaudu. Näiteks $\sqrt{5}$ ei ole ise päris täpselt kirjutatav ühegi täisarvu ega murdarvu kujul, ometi on ta täiesti täpselt kindlaks määratud selle põhjal, et temast on väiksemad kõik need arvud, mille ruut on väiksem kui 5, ja suuremad kõik need, mille ruut on suurem kui 5. Kõigil niisugustel puhkudel, mil mingi arv on kindlaks määratud temast väiksemate arvude hulga ja temast suuremate arvude hulga kaudu, nimetatakse seda arvu nende arvuhulkade vaheliseks piiriks. Nii võime öelda, et

ringjoone pikkus on kõõlhulknurkade ümbermõõtude ja puutujahulknurkade ümbermõõtude vaheline piir.

Vaatame, kuidas eelmises paragrahvis tuletatud valemite abil saab ringjoone pikkust arvutada tarvitamiskõlbliku täpsusega. Kõige sobivam kõõlhulknurk arvutamise alustamiseks on korrapärane kõõl-kuusnurk, sest tema külg võrdub

teatavasti raadiusega. Tähistades korrapärase kõõl- n -nurga übermõõtu sümboliga s_n , kirjutame, et korrapärase kõõl-kuusnurga übermõõt on 6 raadiust:

$$s_6 = 6r.$$

Tähistame korrapärase kõõl- n -nurga apoteemi sümboliga h_n , korrapärase puutuja- n -nurga külje pikkuse b_n ja übermõõdu t_n . Siis kirjutame eelmise paragrahvi teise valemi põhjal, et

$$h_6 = r \sqrt{1 - \left(\frac{r}{2r}\right)^2} = r \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{r}{2} \sqrt{3},$$

ja seega kolmanda valemi järgi

$$b_6 = \frac{r}{\frac{r}{2} \sqrt{3}} \cdot r = \frac{2r}{\sqrt{3}} = \frac{2r}{3} \sqrt{3},$$

mistõttu

$$t_6 = 6 \cdot \frac{2r}{3} \sqrt{3} = 4r \sqrt{3}.$$

Teades, et $\sqrt{3} \approx 1,732051$, saame (viiekohaliselt õige murdosaga kirjutades)

$$t_6 = 6,92820r.$$

Korrapärase kõõl-12-nurga külje pikkuse a_{12} leiame kolmanda valemi abil, võttes seal $k = a_6 = r$; nii saame

$$a_{12} = r \sqrt{2 - \sqrt{4 - 1}} = r \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

ehk. kasutades jällegi sama $\sqrt{3}$ väärtust

$$a_{12} = r \sqrt{2 - 1,732051} = r \sqrt{0,267949} = 0,517638r,$$

nii et

$$s_{12} = 12 \cdot 0,517638r = 6,21166r.$$

Samal viisil arvutusi jätkates leiame kõik järgmises tabelis toodud arvud

Tippude arv n	Kõõlhulknurga ümbermõõt s_n	Puutujahulknurga ümbermõõt t_n
6	$6r$	$6,92820r$
12	$6,21166r$	$6,43078r$
24	$6,26526r$	$6,31932r$
48	$6,27870r$	$6,29217r$
96	$6,28206r$	$6,28543r$
192	$6,28291r$	$6,28375r$
384	$6,28312r$	$6,28333r$
768	$6,28317r$	$6,28322r$

Tabeli lõpus on näha, et niihästi s_{768} kui ka t_{768} on õigesti ümmardatult $6,2832r$;

see tulemus esitabki ringjoone pikkust üsna hea täpsusega. Et tegelikel mõõtmistel on ringi läbimõõt (diameeter d) hõlpsamini kättesaadav kui raadius, siis on kohane ringjoone pikkust avaldada ka läbimõõdu kaudu; tähistades ringjoone pikkuse tähega u , kirjutame saadud tulemuse järgmiselt:

$$u = 6,2832r$$

ehk $u = 3,1416d$.

Kordaja 3,1416 on, nagu eespoolt teame, kindlasti õige kuni viimase kirjutatud kohani, kuid seda kordajat oleks võinud arvutada ka veelgi täpsemini. Selleks oleks tarvitsenud ainult kõik ümbermõõdud arvutada suurema kohtade hulgaga ja jätkata tabelit veel suurema tippude arvuni. Teoreetiliselt täpset kordajat, mille lähisväärtusena esineb arv 3,1416, tähistatakse kreeka tähega π . Niisiis

$$u = \pi d \quad \text{ehk} \quad u = 2\pi r.$$

Seega

ringjoone pikkus võrdub π ja läbimõõdu korrutisega.

Arvu π uurimisel on teadusemehed selgitanud, et see on irratsionaalarv, ta ei ole meie arvudesüsteemis üldse täpselt väljendatav. Selle arvu ligikaudne väärtus on arvutatud enam kui 700 kohaga, millest esimesed 31 kohta on järgmised:

3,14159 26535 89793 23848 26433 83279.

Arvutamisel ei kasutata muidugi kusagil niisugust väärtust, vaid piirduakse väärtusega 3,14 või eriti täpsemate arvutuste juures väärtusega 3,1416.

Kreeka matemaatik Archimedes, kes elas a. 287—212 e. m. a., leidis, et

$$3 \frac{10}{71} < \pi < 3 \frac{10}{70},$$

millest

$$\pi \approx 3\frac{1}{7}.$$

Ülesanded.

252. Arvutada ringjoone pikkus, kui raadius on 5 cm; 7,2 cm; 0,3 dm; $1\frac{2}{3}$ km.

253. Kui pikk on raadius ringjoonel, mille pikkus on 17,27 cm; 0,942 m; 10 m?

254. Tõestada, et ringjoone pikkus suureneb n korda, kui raadiust suurendada n korda.

255. Kui palju suureneb ringjoone pikkus, kui selle raadiust suurendada 10 cm võrra?

256. Masinaratas teeb 900 pööret minutis. Kui pika tee läbib 1 tunni vältel ratta punkt, mis on 40 cm kaugusel keskpunktist?

257. Muuta $3\frac{1}{7}$ kümnendmurruks ja leida, mitme õige kohaga see annab π väärtuse.

258. Muuta kümnendmurruks murd $\frac{355}{113}$ ja leida, mitme õige kohaga see annab π väärtuse.

259. Tornikella minutiosuti pikkus on 58 cm. Kui pika tee lähib tema otpunkt ööpäevas?

260. Veduri suure ratta läbimõõt on 2 m ja väikese ratta läbimõõt on 0,80 m. Mitu täispööret teeb kumbki ratas Tallinnast Tartu sõites, kui selle tee pikkus on 191 km?

261. Täisnurkse kolmnurga ümber, mille kaatetid on 2,4 cm ja 3,2 cm, on joonestatud ringjoon. Kui pikk on see ringjoon?

262. Ringjoon on oma diameetrist 10,7 cm võrra pikem. Kui pikk on raadius?

263. Üle kahe masinaratta, mille raadiused on 8,5 dm ja 1,7 dm, läheb veorihm. Mitu pööret teeb masina töötamisel väike ratas minutis, kui suur teeb 150 pööret minutis?

§ 40. Ringi pindala.

On selge, et iga kõõlhulknurga pindala on väiksem kui ringi pindala, sest kõõlhulknurk mahub täielikult ringile ja jätab osa ringist katmata (joonis 67). Samuti on kindel, et iga puutujahulknurga pindala on ringi pindalast suurem, sest ring mahub täielikult puutujahulknurga sisse ja jätab osa tema pinnast katmata. Korrapärase hulknurga pindala on teatavasti pool ümbermõõdu ja apoteemi korrutist; nii on korrapärase kõõl- n -nurga pindala

$$\frac{1}{2} s_n h_n$$

ja korrapärase puutuja- n -nurga pindala

$$\frac{1}{2} t_n r,$$

sest puutujahulknurga apoteemiks on ringi raadius. Nagu teada, erinevad s_n ja t_n teineteisest üsna vähe, kui tippude arv n on küllalt suur; ühtlasi on siis h_n ainult pisut väiksem

kui r . Nii selgub, et kõigi kõõlhulknurkade pindalade ja puutujahulknurkade pindalade vahele jääb parajasti üksainus neid eraldav arv, mida ongi loomulik lugeda ringi pindalaks. Seega

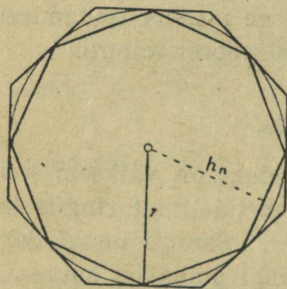
ringi pindala on kõõlhulknurkade pindalade ja puutujahulknurkade pindalade vaheline piir.

Nüüd on aga selge, kuidas avaldada ringi pindala; nimelt osutub avaldise

$$\frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot r$$

väärtus parajasti igast kõõlhulknurga pindalast suuremaks ja igast puutujahulknurga pindalast väiksemaks. Tõepoolest, iga tippude arvu n puhul

$$s_n < 2\pi r < t_n$$



Joonis 67.

ja pealegi on h_n väiksem kui r . Järelikult $\frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot r$ ehk πr^2 ongi ringi pindala. Tähistades ringi pindala tähega S , saame valemi

$$S = \pi r^2.$$

Et $r = \frac{d}{2}$, siis võib valemit kirjutada ka kujul

$$S = \frac{\pi}{4} d^2.$$

Seega

ringi pindala võrdub arvu π ja raadiuse ruudu korrutisega ehk

ringi pindala on arvu $\frac{\pi}{4}$ ja läbimõõdu ruudu korrutis.

Ülesanded.

264. Arvutada ringi pindala, kui raadius on 18 cm, 4,3 dm, 0,54 m, 175 m.

265. Arvutada ringi raadius, kui ringi pindala on 22,9 m², 4681 mm², 1 km².

266. Ümmarguse palgi ümbermõõt on 88 cm. Arvutada palgi ristlõike pindala.

267. Tõestada, et ringi pindala suureneb n^2 korda, kui raadius suureneb n korda.

268. Ruudu sisse ja ümber on joonestatud ringjoon. Mitu korda on ühe ringi pindala suurem teise ringi pindalast?

269. Ristküliku mõõtmed on 0,66 m ja 1,16 m. Kui suur on pindala, mida piirab selle ristküliku tippe läbiv ringjoon?

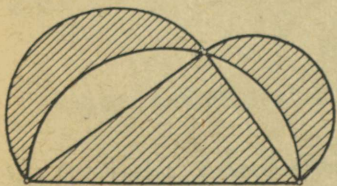
270. Kaks veetoru, läbimõõduga 8 cm ja 15 cm, tahetakse asendada ühe toruga, millel on sama läbilaskevõime. Arvutada selle toru läbimõõt.

271. Ringjoone kahe paralleelse kõõlu pikkused on 30 cm ja 16 cm, kaugus nende vahel on 17 cm. Leida ringi pindala.

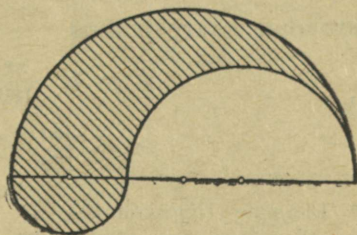
272. Kahe kontsentrilise ringjoone raadiused on 0,5 m ja 0,7 m. Kui suur on nende ringjoonte vahelise rõnga pindala?

273. Kahest kontsentrisest ringjoonest seesmine poolitab välimisega piiratud pindala. Kui suur on seesmise ringi raadius, kui välimise ringi raadius on r .

274. Kolme ringi läbimõõdud $2r_1$, $2r_2$, ja $2r_3$ on ühe täisnurkse kolmnurga külgedeks. Tõestada, et kahe väiksema ringi pindalade summa võrdub kolmanda ringi pindalaga.



Joonis 68.



Joonis 69.

275. Tõestada, et kahe poolringi pindalade summa võrdub ühe kolmanda poolringi pindalaga, kui nende poolringide lähimõõtudeks on täisnurkse kolmnurga küljed.

276. Näidata, et joonisel 68 viirutatud nn. Hippokrates'e* „kuusirpide“ pindalade summa on võrdne joonisel antud täisnurkse kolmnurga pindalaga.

277. Joonestada ring, mille pindala võrdub kahe antud ringi a) pindalade summaga, b) pindalade vahega.

278. Arvutada joonisel 69 antud viirutatud kujundi pindala, lugedes viirutamata poolringi lähimõõduks 4 ühikut.

279. Kahe ringi pindalade vahe on $a \text{ cm}^2$ ja raadiuste vahe on $b \text{ cm}$. Leida mõlema ringi pindala.

§ 41. Kaare pikkus ja sektori pindala.

Ringjoone kaare pikkus on määratud, kui on teada kaare raadius r ja kraadide arv α . Kaare kraadide arvu asemel võib olla antud sellele kaarele toetuva kesknurga suurus, sest kaare ja sellele toetuva kesknurga kraadide arvud on võrdsed.

Arvutame α -kraadilise kaare pikkuse k , kui ringjoone raadius on r (joonis 70). Et ringjoone pikkus ehk, teisiti, 360-kraadise kaare pikkus on $2\pi r$, siis 1-kraadise kaare pikkus on

$$\frac{2\pi r}{360} \quad \text{ehk} \quad \frac{\pi r}{180},$$

α -kraadise kaare pikkus

$$k = \alpha \cdot \frac{\pi r}{180}$$

ehk

$$k = \frac{\pi r \alpha}{180}.$$

* Ülesanne Hippokrates'elt — kreeka teadlane V sajandist e.m.a. Tema oli esimesi, kes püüdis määrata kõveraga piiratud pinnatüki pindala.

Kui kaare pikkus on sama suur kui raadiuse pikkus, siis

$$r = \frac{\pi r \alpha}{180}$$

ja

$$\alpha = \frac{180}{\pi} \approx 57,3;$$

järelikult vastav kesknurk on umbes
57° 18'.

Kesknurka, mis toetub raadiusepikkusele kaarele nime-
tatakse radiaaniks. Seda nurka kasutatakse nur-
gamõõtmise ühikuna ja nimetatakse ka nurga absoluut-
seks ühikuks. Mõõtes täisnurka radiaanides saab

$$90 : \frac{180}{\pi} = \frac{90\pi}{180} = \frac{\pi}{2} \approx 1,57.$$

Selle tõttu tarvitatakse täisnurga tähisena ka tähist $\frac{\pi}{2}$.

Kesknurk α ja sellele vastav kaar k piiravad sektorit
 ABO (joonis 70). Tähistame sektori pindala sümboliga S_α
ja leiame selle arvutamiseks valemi.

Kui sektori nurk kasvab ja saab võrdseks 360°, siis sek-
tori pindala saab võrdseks ringi pindalaga, s. t. 360-kraa-
dise sektori pindala on πr^2 ; et sama ringi ühekraadised
sektorid on võrdsed, siis

1-kraadise kaarega sektori pindala on $\frac{\pi r^2}{360}$, α -kraadise
kaarega sektori pindala

$$S_\alpha = \frac{\pi r^2 \alpha}{360}$$

ehk

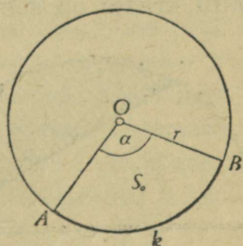
$$S_\alpha = \frac{\pi r \alpha}{180} \cdot \frac{r}{2}.$$

Eespool leidsime, et kaare pikkus

$$k = \frac{\pi r \alpha}{180};$$

seega

$$S_\alpha = \frac{k r}{2},$$



Joonis 70.

tähendab,

sektori pindala võrdub raadiuse ja kaare pikkuse poole korrutisega.

Viimasest sektori pindala valemist selgub, et sektor on pindvõrdne kolmnurgaga, mille alus on võrdne kaare pikkusega ja kõrgus on võrdne raadiusega.

Ulesanded.

280. Kui pikk on 38° -ne kaar ringjoonel, mille raadius $r = 24$ dm?

281. Ringjoone raadius $r = 62$ cm. Mitu kraadi on poole meetri pikkuses kaares?

282. Kaks linna on ühel ja samal meridiaanil, kuid üks neist põhjalaiusel 51° ja teine lõunalaiusel 39° .

Kui suur on nende linnade vaheline kaugus, kui Maakera meridiaani raadius on 6370 km?

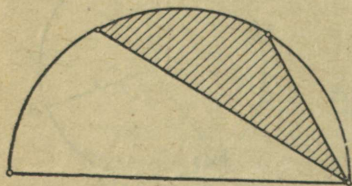
283. Mitu kraadi sisaldab Maakera ekvaatori 1000 km pikkune kaar, kui ekvaatori raadius on 6380 km?

284. Kaks ühel ja samal meridiaanil asetsevat linna on teineteisest 250 km kaugusel. Lõunapoolsema linna põhjalaius on $47^\circ 15'$. Leida põhjapoolsema linna põhjalaius.

285. Arvutada 48° -se sektori pindala, kui raadius $r = 0,5$ m.

286. Ringjoone pikkus on 96 dm. Kui suur on 35° -se sektori pindala?

287. Ringi raadius on 1 m ja sektori pindala on 1 m^2 . Mitu kraadi on sektori kaar?



Joonis 71.

288. Arvutada $s e g - m e n d i$, s. o. ringjoone kaarega ja kõõluga piiratud pinnatüki pindala, kui samale kaarele toetuv kesk-nurk on 100° ja raadius on 20 cm. (Kõõlu pikkuse mõõtmiseks valmistada joonis.)

289. Poolringjoon jagatakse kolmeks võrdseks osaks; (joonis 71); jaotuspunktid ühendatakse diameetri otspunktiga. Leida keskmise pinnatüki pindala, kui poolringi raadius on r .

290. Ringi 56° -se sektori pindala on 84 cm^2 . Arvutada ringjoone pikkus.

291. Raadiuse-pikkuse kaarega sektori pindala on $0,72 \text{ m}^2$. Kui pikk on raadius?

292. Ringjoone kaare otspunktidest tõmmatakse puutuvad lõikumiseni punktis P . Leida pindala, mis on piiratud ringjoone kaarega ja nende puutujate lõikudega, kui ringjoone raadius on $r \text{ cm}$ ja kaar on 60° (või 120°).

§ 42. Ringjoone sirgestamine ja ringi ruutimine.

Ringi pindala valemist

$$S = \frac{s \cdot r}{2}$$

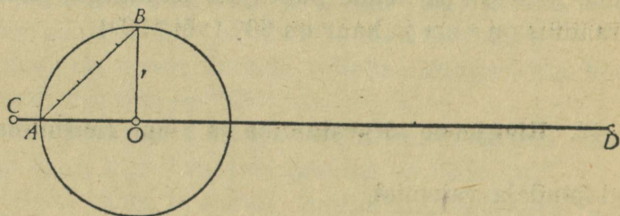
on näha, et ring on pindvõrdne siisuguse kolmnurgaga, mille alus on s ja kõrgus on r . Kui oleks võimalik sirkli ja joonlaua abil ehitada siisugust sirglõiku, mille pikkus täpselt võrdub ringjoone pikkusega, siis saaks ehitada ringiga pindvõrdse kolmnurga ja viimase järgi ka ruudu. Sirglõigu joonestamist, mille pikkus võrdub ringjoone pikkusega, nimetatakse ringjoone sirgestamiseks ehk rektifikatsiooniks. Seda ülesannet püüti lahendada enam kui 2000 aasta vältel, kuni saksa matemaatik Lindemann 1882. a. tõestas, et π on siisugune irratsionaalne arv, mille pikkusega sirglõiku ei saagi ehitada sirkli ja joonlaua abil. Sellest järeldub, et

ringjoone sirgestamine on sirkli ja joonlaua abil võimatu.

Samuti on teostatatu ringi ruutimine ehk kvadratuur, s. o. ringiga pindvõrdse ruudu ehitamine sirkli ja joonlaua abil.

Ringjoone ligikaudseks sirgestamiseks on palju võtteid. Tutvume kahega neist.

1. Joonestame kaks ristuvat raadiust, ühendame nende otspunktid ja leiame nii saadud kõõlust $\frac{1}{5}$ (joonis 72). Kui ringjoone läbimõõdu kolmekordset AD pikendada kõõlu AB ühe viiendiku võrra, siis saame ringjoone ligikaudse pikkuse CD .



Joonis 72.

Arvutus:

$$AB = \sqrt{2r^2} = r \sqrt{2} \approx r \cdot 1,4142$$

$$AC = \frac{1}{5} AB \approx \frac{r \cdot 1,4142}{5} \approx 0,28284r$$

$$CD \approx 6r + 0,28284r \approx 6,28284r$$

$$s = \pi d \approx 6,28319r$$

Seega selliselt konstrueeritud pikkus erineb tõelisest ringjoone pikkusest vähem kui $0,0004r$ võrra.

2. Poolakas Adam Kochanski andis a. 1685 alljärgneva lihtsa, kuid väga täpse poolringjoone sirgestamise võtte.

Läbi diameetri AB otspunkti B joonestame puutuja ja keskpunkti O juurde ehitame nurga $\angle BOC = 30^\circ$. Selle kesknurga teine haar lõigaku puutujat punktis C . Edasi leiame puutujal CB punkti D nii, et

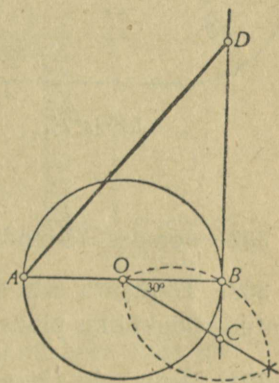
$$CD = 3r.$$

Punktide A ja D ühendamisel saame sirglõigu, mille pikkus ligikaudu võrdub poolringjoone pikkusega (joonis 73).

Arvutades lõigu AD pikkuse, näeme, et see erineb poolringjoone pikkusest ligikaudu $0,00006r$ võrra. Seega eespool kirjeldatud võte on väga täpne!

Ülesanded.

293. Prantsuse matemaatik Viète (1540—1603) leidis π jaoks ligikaudse väärtuse $1,8 + \sqrt{1,8}$. Arvutada sellest π viiekohalise murdosaga ja määrata ligikaudse väärtuse vea ülemmäär.



Joonis 73.

294. Joonestada ringjoon, mille pikkus võrdub kahe antud ringjoone pikkuste summaga.

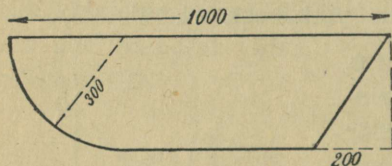
295. Joonestada ringjoon, mille pikkus on pool antud ringjoone pikkusest.

296. Mitu korda on ruudu ümberringjoon pikem sama ruudu siseringjoonest?

297. Ringi raadius on r cm. Kui pikk on ringiga pindvõrdse ruudu külg?

298. Rööpküliku $ABCD$ külje CD punkt F on ühendatud vastaskülje AB otspunktidega. Tõestada, et kolmnurga ABF pindala on pool rööpküliku pindalast.

299. Trapetsi $ABCD$ külje BC keskpunkt E on ühendatud külje AD otspunktidega. Tõestada, et $\triangle AED$ pindala on pool trapetsi pindalast.



Joonis 74.

300. Tõestada, et kolmnurga kolm küljepoolitajat jaotavad kolmnurga kuueks pindvõrdseks osaks (vt. ülesanne 9).

301. Võttes mõõtmed jooniselt 74, arvutada kõistee vaguni külje pindala (mm^2).

302. Joonise 75 andmetel arvutada kujundite pindalad.

303. Tõmmata läbi antud punkti sirge, mis poolitab antud rööpküliku pindala.

304. Arvutada täisnurkse kolmnurga pindala, kui selle külgede pikkused väljenduvad teineteisele järgnevate paarisarvudena.

305. Täisnurkse kolmnurga pindala on 720 m^2 ja kaatetid suhtuvad kui $9 : 40$. Leida hüpotenuus.

306. Ehitada ruut, mis on pindvõrdne kahe ruudu pindalade summaga, kui nende küljed on 12 cm ja 15 cm .

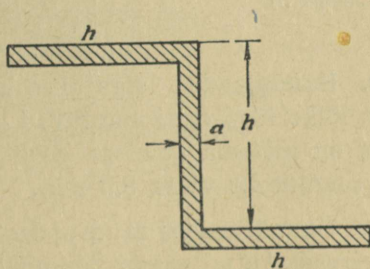
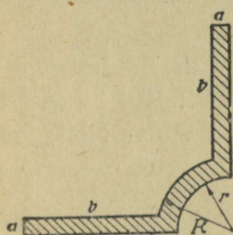
307. Leida geomeetriliselt: $3\sqrt{2}$, $\frac{1}{3}\sqrt{2}$.

308. Kolmnurga küljed suhtuvad kui $3 : 5 : 7$. Kuidas suhtuvad tema kõrgused?

309. Antud ruutu pindalaga 289 cm^2 on joonestatud teine ruut pindalaga 225 cm^2 , nii et teise ruudu tipud on antud ruudu külgedel. Kui pikad lõigud tekivad antud ruudu külgedel?

310. Kolmnurga kahe külje summa on 20 m. Nende vahelise nurga poolitaja jaotab vastaskülje osadeks, mis suhtuvad kui 5 : 9. Leida küljed.

311. Kolmnurga küljed on 15 cm, 18 cm ja 20 cm. Leida nurgapoolitajate pikkused.



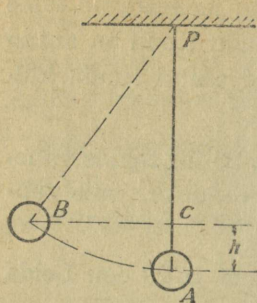
Joonis 75.

312. Kahe sarnase kolmnurga pindalade suhe on 1,96. Suurema kolmnurga küljed on 75,6 cm, 91 cm ja 119 cm. Kui pikad on teise kolmnurga küljed?

313. Ringjoonel on võetud punkt P , mis asetseb läbimõõdu otspunktidest A ja B vastavalt 17 cm ja 24 cm kaugusel. Kui suur on kaugus AB , kui punkti P liikudes mööda ringjoont kaugus BP saab võrdseks 20 cm-ga?

314. Arvutada $\frac{1}{3} \sqrt{141} - \sqrt{6}$ kuue kümnendkohaga ja võrrelda avaldises esinevaid arve tulemusega ja π väärtusega.

315. Kuidas suhtuvad veorihmaga ühendatud kahe pöörleva ratta läbimõõdud, kui esimene ratas teeb minutis 1000, teine 375 pööret?



Joonis 76.

316. Jaotada ring kontsentrilise ringjoonega kaheks pindvõrdseks osaks.

317. Kahe antud ringjoone raadiused on r_1 ja r_2 . Kui pikk on ringjoon, mille raadius on $r_1 + r_2$?

318. Kahe lõikuva ringjoone raadiused on r_1 ja r_2 . Nende lõikepunktide ühendatakse ringjoonte keskpunktidega, millede vaheline kaugus on d . Leida saadud nelinurga pindala.

319. Raudplaadist lõigatakse kaks rida ümmargusi seibe nii, et lõikeringjooned puutuvad üksteist. Kui kaugel teisestest on mõlema seibirea keskkohiti läbivad sirgjooned? Seibi raadiuseks võtta 8,5 mm.

320. Ümmargusest raudvardast tuleb freesida neljatahuline varras. Antud varda läbimõõt on 2,6 cm. Kui suur on uue varda ristlõike külg?

321. Kellapendli pikkus on 60 cm. Pendel tõuseb võnkumisel algseisust (joonis 76) äärmisse seisuga BP, olles nüüd $h = 15$ cm kõrgemal kui punktis A. Arvutada kaugus BC.

322. Trapetsi üks alus on pool teisest alusest. Tõestada, et diagonaalid lõikuvad punktis, mis eraldab neist ühe kolmandiku.

323. Kaevukoogu pikem õlg on 3,25 m ja lühem õlg on 1,5 m. Kui palju vajub koogu lühema õla ots, kui pikema õla ots tõuseb 2,5 m?

324. Mansardkorra aken on kujult pool korrapärast kaheksanurka. Leida akna pindala, kui akna alumise raami pikkus on 2 m. Kui palju läheb klaasi tarvis, kui raamipuu laius on 4 cm?

Sisukord.

Peatükk I.

Hulknurga pindala.

	Lk.
§ 1. Hulknurkade pindvõrdsus	3
§ 2. Rööpkülükute ja kolmnurkade pindvõrdsus	5
§ 3. Hulknurga teisendamine kolmnurgaks	9
§ 4. Kolmnurga teisendamine ristkülikuks	10
§ 5. Ristküliku teisendamine ruuduks	12
§ 6. Ristkülikute ja ruutude teisendamisteoreeme	15
§ 7. Pindalaühikud	19
§ 8. Ristküliku pindala	21
§ 9. Rööpküliku pindala	25
§ 10. Kolmnurga pindala	26
§ 11. Trapetsi pindala	27
§ 12. Korrapärase hulknurga pindala	28
§ 13. Korrapärase hulknurga pindala	30

Peatükk II.

Seosed kolmnurga joonelementide vahel.

§ 14. Täisnurkse kolmnurga joonelemendid	33
§ 15. Täisnurkse kolmnurga joonelementide vahelised seosed	35
§ 16. Täisnurkse kolmnurga joonelementide arvutamine	38
§ 17. Ruutirratsionaalarvu kujutamine lõiguna	46
§ 18. Laiendatud Pythagorase teoreem	50

Peatükk III.

Hulknurkade sarnasus.

§ 19. Võrdelised sirglõigud	54
§ 20. Kolmnurga sisenurga poolitaja	56
§ 21. Kiirteteoreemid	58
§ 22. Kiirteteoreemi rakendusi	63

	Lk.
§ 23. Sarnased hulknurgad	65
§ 24. Hulknurkade sarnasuse tunnuseid	69
§ 25. Kolmnurkade sarnasuse I tunnus	71
§ 26. Kolmnurkade sarnasuse II tunnus	72
§ 27. Kolmnurkade sarnasuse III tunnus	74
§ 28. Kolmnurkade sarnasuse IV tunnus	75
§ 29. Sarnaste kolmnurkade kõrgused	76
§ 30. Sarnaste kolmnurkade pindalad	77
§ 31. Sarnaste hulknurkade diagonaalid	79
§ 32. Sarnaste hulknurkade pindalad	80
§ 33. Teoreem ringjoone lõikajast	82
§ 34. Maa-alade plaanistamine	85
§ 35. Pikkuste kaudne mõõtmine sarnaste kolmnurkade abil . .	87

Peatükk IV.

Ringjoone pikkus ja ringi pindala.

§ 36. Kõverjoone ligikaudne pikkus	94
§ 37. Ringjoone pikkuse ligikaudne väljendamine kõõlhulknurga ja puutujahulknurga abil	95
§ 38. Kõõlhulknurkade ja puutujahulknurkade joonelementide vahelised seosed	98
§ 39. Ringjoone pikkus	101
§ 40. Ringi pindala	105
§ 41. Kaare pikkus ja sektori pindala	108
§ 42. Ringjoone sirgestamine ja ringi ruutimine	111

Vastutav toimetaja A. Humal.

Ladumisele antud 10. VI 1946. Trükkimisele antud 11. IX 1946. Trükiarv 9500 eks. Paber 56:79, $\frac{1}{16}$. Trükipoognaid 7,5. Trükitähti trükipoognas 33408. Arvutuspooznaid 6,1. MB-05077. Tellimise nr. 1583. Trükikoda «Tartu Kommunist», Tartu, Ülikooli 21/23.

На эстонском языке.

Э. Этверк и Б. Тийкма. Геометрия для IX класса.

Rbl. 4.—

A-16139

TÜ RAAMATUKOGU



1 0300 00422398 0

Rbl. 4.—

A-16139

E. ETVERK JA B. TIIKMA — GEOMEETRIA KESKKOOLI IX KL.

E. ETVERK — B. TIIKMA

GEOMEETRIA

KESKKOOLI IX KLASSILE



TÜ RAAMATUKOGU

1 0300 00422398 0

РК

„PEDAGOOGILINE KIRJANDUS“

TALLINN 1946