

Eesti Matemaatika Õpetamise Komisjoni Toimetused 3

KESKKOOLI MATEMAATIKA ÕPPEKAVA PROJEKT

Matemaatika Õpetamise Komisjoni kirjastus
Tartus, 1926

KESKKOOLI MATEMAATIKA ÕPPEKAVA PROJEKT

Keskkooli matemaatika õppekava
projekti väljatöötamise toimikond:

J. Nuut
G. Rägo

Ettepaneku esitajad ja aruandjad: samad.

Matemaatika
Õpetamise Komisjon:

A. Borkvell
J. Grünthal
J. Kuulberg
J. Nuut
G. Rägo

Vastu võetud MÕK-i üldkoosolekul
24.-25. II. 1926.

Prof. Gerhard Rägo,
MÕK-i esimees.

19236

Matemaatika Õpetamise Komisjoni kirjastus
Tartus, 1926

KESKKOOL MATEMAATIKA ÕPPEKAVA PROJEKT

Keeleline korrektor:

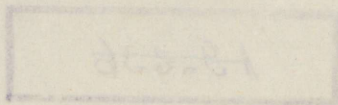
Tartu Ülikooli eesti keele lektor J. V. Veski.

2



A-8158

Vastu võetud MOK-i bibliotekale
24. 32. II. 1936.
Prof. Gerhard Rago,
MOK-i esimees.



Matemaatika Õpetamise Komisjoni kirjastus

Ed. Bergmann'i trükikoda, Tartus.

Matemaatika Õpetamise Komisjoni

seisukoht

keskkooli klasside arvu ja matemaatika tunnikava küsimustes.

Eelmärkus. Siin käsitletavate küsimuste kaalumist pole toimetatud ainuüksi matemaatika õpetamise seisukohalt: on arvestatud ka teisi asjaolusid ja andmeid, mis nende küsimuste otsustamisel võiksid mõõduandvad olla.

1. Üheteistkümnendaastane ühfluskool (kuueklassiline algkool ja sellele toetuv viieklassiline keskkool) annab meie oludes küll teatava üldhariduse, kuid ta ei suuda pakkuda küllalt laia, kindlat ja ühflast alust kõrgemale haridusele.

Selle asjaolu põhjusteks on: õpilaste ühtlusetu koosseis, koolide puudulik sisseseade, senini täpsamalt piiritlemata õppetöö eesmärk, kooli mõlema astme ülekuhjatuse ainetega ja ainekavade ülekoormatus materjaliga.

2. Selles oma osas, mille eesmärgiks on anda üldist keskkooli haridust, võiks meie kool jääda, nagu praegu, viieklassiliseks. Kõik keskkooli lõpetamisega saadavad õigused riigi- ja väeteenistusse astumiseks omandatakse selle viieklassilise kooli lõpetamisega.

3. Kõrgema hariduse omandamise ettevalmistuseks tuleks asutada tarvilik hulk keskkooli eriklasse (12. õppeaasta). Nende ülesandeks oleks:

1. anda ülikooli töö eeldusena tarvis olev erialale vastav süvendatud ettevalmistus neile õpilastele, kelle anded lubavad loota edukat töötamist kõrgemas õppeasutuses;

II. ühtlustada teadmisi ja oskusi õpilastel, kes tulevad mitmetüübilistest keskkooli harudest;

III. täiendada tarvilisel määral keelte mõistmist ja oskust, vastavalt nõuetele, mida seab valitud eriala.

Need eriklassid jaguneksid kolme tüüpi, vastavalt nende õppekava tuumale:

- a) eksakt-teadused;
- b) bioloogilised teadused;
- c) humanitaarteadused.

4. Nendesse eriklassidesse tuleks vastu võtta keskkooli lõpetajaid nende poolt valitud erialale vastava kohaselt korraldatud katsumise põhjal.

Õppetöö edukuse kindlustamiseks tuleks õpilaste arvu neis klassides piirata 20-ga.

Kavatsetavad eriklassid tuleks asutada hästi sisseseatud keskkoolide juurde.

Nende eriklasside arvu määraks kindlaks Vabariigi Valitsus kokkukõlas üldiste hariduskorralduste sihtidega¹⁾²⁾.

5. Arvestades matemaatika erakordset arendavat mõju ja matemaatilise mõtlemisviisi laialdasi rakendusi praegusaja kultuurielus, arwab MÕK möödapääsmata tarviliku olevat nõuda ka gümnaasiumi humanitaar-, majapidamis-, kommerts-, põllumajandus-, kultuurtehnika-, aiamajandus- ja sotsiaalharu viienda klassi tunnikava täiendamist kahe matemaatikatunniga.

6. MÕK ei näe tarvet erilise matemaatikakursuse kava järele üldhariduslikes tütarlaste keskkoolides.

1) Kuigi praegu ülesseatud teesid on kaugemaleulatuvad, kui neid võiks oodata matemaatika õppekava projektis, ei leia MÕK võimaliku olevat neid avaldamata jätta, seda enam, et häáli keskkooli 6-da klassi loomise tarbe kohta õn nii õlikooli ringkondadest kui ka keskkooli õpetajaskonnast kuulda olnud.

2) Punktide 1—4 kohta jäi MÕK-i liige J. Kuulberg eriarvamisele.

Matemaatika Õpetamise Komisjoni

juhtmõtted

keskkooli matemaatika õppekava projekti kokkuseadmisel.

1. Matemaatika õpetamine keskkoolis ei tohi endale seada kooli üldeesmärgist kõrgemale ulatuvaid või sellest erinevaid sihte.

Ühiselt teiste keskkooli ainetega seab ta endale ülesandeid:

harida õpilase vaimlisi jõude ning võimeid ja varustada teda teadmiste ning oskustega määral, mis võimaldaks temale orienteerumist teda ümbritsevas ilmas ning praegusaja elu ilmutustes.

2. Oma osa sellest ülesandest teostab matemaatika õpetamine

I. arendades mõtlemist mõistetes ja harjutades loogilist deduktsiooni;

II. harides meid ümbritsevas tõelikkuses esineva nähtustiku seletamist funktsionaalse olenemise mõiste abil;

III. kasvatades ruumilise mõtlemise ning kujutlemisvõimeid;

IV. laiendades ning süvendades algkoolis omandatud arvutamise ja kujutamise oskusi;

V. andes tarviliku hulga teadmisi arvuring ruumiteadusest.

3. Kava vastaku nii tervikus kui üksikosades ülesandele ja eesmärgile, mida seab matemaatika õpetamine endale keskkoolis.

4. Kava kokkuseadmisel, eriti tema palade valikul, ei tule ennast lasta juhtida vene-aegseist keskkooli programmidest. Aine osade valikut, nende rühmitamist ja järjestamist tuleb toimetada tegeliku elu ja moodsa metoodika nõuete kohaselt.

5. Silmas pidades, et matemaatikatundide arv on keskkoolis, eriti aga tema humanitaarharus, väga piiratud, tuleb kava küsimuste valikut toimetada erilise hoolega: kavas leidku aset ainult jääva hariiva ning arendava väärtusega palad, millel ei puudu küllalt laiad rakendamisvõimalused.

6. Kavasse tuleb võtta ainult säärased küsimused, mille käsitlemise võimalust antud õpilase vanadusastmel on näidanud pikema-aegsed pedagoogilised kogemused.

7. Palade hindamist ei tule toimetada mingi ühe matemaatika õpetamise osa-eesmärgi seisukohalt (näit. ainult kitsa formaal-loogilise eesmärgi või ainult operatsioonide tehnika omandamise seisukohalt): kava palad tuleb valida nõnda, et nende käsitlemisel võimalduks täiel määral saavutada aine õpetamise üldeesmärki.

Vastavalt sellele põhimõttele on kava projekt vaba paladest, mille käsitlemise ainsaks eesmärgiks on avalduste teistendamise harjutamine. Nii on kavast teadvalt välja jäetud või tunduvalt piiratud endistel aegadel suurt osa etendanud küsimused: tehted üldiste hulkliikmetega; erikujulised kõrgema astme võrrandid; irratsionaalsed ja trigonomeetrilised võrrandid.

Samale põhimõttele tugedes on kavast välja jäetud palad, millel pole laiemaid rakendusi: stereomeetria alguses harilikult käsitletud asendilauseste rägastik; kõik trigonomeetrilised ülesanded loomuvastaste andmetega (nad moodustasid vene-aegses keskkoolis trigonomeetriakursuse tuuma); kombinatoorika kursuse omaette osana.

8. Kus võimalik, tuleb jääda ligikaudu samasuguse materjalijaotuse juurde, nagu ta esineb viimases ajutises kavas.

9. Palade rühmitamist tuleb toimetada mitte mingite väliste tunnuste, vaid nende sisemise kokkukuuluvuse järele.

Nii on aritmeetiline rida paigutatud lineaarfunktsiooni kõrvale, geomeetiline rida eksponentfunktsiooni juurde, trigonomeetria alged Pythagoras'e lause järele.

10. Tuleb hoolt kanda selle eest, et üksikuis klassides käsiteldavad aineosad esineksid võimalikult tervikutena.

Kava palad olgu igas klassis koondatud tsüklitena, võimaluse korral kindla, selgesti silmapaistva tuuma ümber.

Säärasteks tuumadeks on algebra osas näiteks: lineaarolenevus; aritmeetilised tehted; ruutolenevus; eksponentolenevus; funktsiooni muutumise kiirus; formaalsete seaduste permanents.

Geomeetria osas jälle: tasapinnalise geomeetria asendi sidemed, t. g. meetrilised põhisidemed; trigonomeetrilise arvutamise algvõtted; geomeetria projektiivse käsitluse alged.

11. Kava sisaldagu iga klassi jaoks ainult niipalju ainet, kui tegelikult aine jaoks määratud aja jooksul võib läbi töötada.

Sellele põhimõttele tugedes on toimetatud funduvaid kärpimisi senises I, IV ja eriti V klassi kavas.

12. Kavad võimaldagu kaugeleulatuvat matemaatika osade ühiskäsitlemist — üksikute aineosade fusiooni.

Näited mõnede aineosade fusionistliku käsitluse võimalustest on toodud seletuskirjas (v. lhk. 31).

13. Kava tuleb kokku seada eeldusel, et keskkooli asfjad tunnevad matemaatikat MÕK-i algkooli matemaatika õppekava projekti ulatuses. See projekt seab teadmiste hulga suhtes tunduvalt vähemad nõuded kui praegu maksev algkooli õppekava (Haridusministeeriumi väljaanne 1921. a.).

14. Keskkooli matemaatika õppekava sisaldagu praegusaaja üldhariduse nõuetele vastava iarviliku ja küllaldase hulga materjali.

15. Kava tuleb välja töötada nõnda, et viieklassilist keskkooli hiljemini võiks täiendada kuueenda klassiga (eriklassiga), ilma et tarvis oleks muuta eelmiste klasside kursuse kava.

Viie esimese klassi materjal peab moodustama üldhareduse nõuetele vastava omaette terviku. Seda kava osa peab saama raskuseta maksmata panna ka siis, kui kavatsetava kuuenda klassi avamise tarve ei peaks leidma üldist tunnustamist.

Kavatsetava kuuenda klassi kursuse palad peavad lubama orgaanilist liitumist varemalt käsitletud materjaliga; nende pea-otstarve ei tohi olla teadmiste hulga suurendamine, vaid ennemalt omandatud teadmiste süvendamine, korraldamine ning vaatlemine üldisemalt vaatekohtadelt.

16. Kavatsetava kuuenda klassi materjal tuleb nõnda valida, et võimaluse korral saaks osa küsimusi juba varemini käsitleda.

Nii oleks näiteks mõeldav, et ühenduses kreeka mõtteilma käsitlemisega humanitaarharus kõne alla tuleb mõiste geomeetria aksiomaatilisest ülesehitamisest või ühenduses kunstiajaloo käsitlemisega — perspektiivi matemaatilised alused.

17. Kava olgu metoodiliselt survevaba.

18. Kava olgu niivõrt täielik, et asjatundjal tekib tema lugemisel selge ettekujutus aine ulatusest, rühmitusest ja sisu laadist.

19. Kava olgu vaba üldlauseist, mille sisu liiga lai või määramatu.

Näiteina säärastest sõnakombinatsioonidest olgu nimetatud: algebraline sümboolika; geomeetiline algebra; trigonomeetrilised valemid; irratsionaalsed võrrandid.

Käsiteldavad küsimused tuleb määrata võimalikult lühidalt vastavate märksõnadega.

Nii näiteks: algebralise avalduse mõiste: kordaja, astmenäitaja, sulud tehete järjekorra määrajatena; või: kolmnurga põhiomadused: suurem külge ja nurk; kahe külje summa ja vahe; kolmnurga sisse- ja ümberjoonestatud ringid; keskristjooned, kõrgused, nurga- ja küljepoolitajad.

20. Kava tarvitamise kergendamiseks, eriti aga tema eksliku tõlgendamise ärahoidmiseks tuleb ta täiendada: 1. selletuskirjaga, 2. tarvilikkude matemaatiliste lausete nimestikuga, 3. tarvilikkude konstruktsioonide nimestikuga.

Keskkooli matemaatika õpetamise eesmärk

on:

1. arendada järjekindla mõtlemise oskust;
2. harida meid ümbritseva ilma nähtuste seletamist funktsionaalse olenevuse mõiste abil;
3. kasvatada selge ja elava ruumilise kujutlemise võimet;
4. anda kaasa meid ümbritseva reaalsuse teadlikuks hindamiseks tarvilik kogu matemaatilisi teadmisi;
5. varustada oskustega, mis võimaldaksid neid teadmisi rakendada tegeliku elu poolt seatud küsimuste lahendamisel;
6. valgustada matemaatika tähendust praegusaaja vaimlises ja ainelises kultuuris ning tema osa kultuuri arenemise ajaloos.

Keskkooli matemaatika õppekava.

Eelmärkus. Püstsulgudesse võetud palad ei kuulu humanitaar-, majapidamis-, kommerts-, põllumajandus-, kultuuritehnika-, aiandus- ja sotsiaalaru kavasse.

I klass.

Teem: Algebraalne avaldus. Lineaarolenevus. Planimeetrisidemed.

Õpetamisülesanne:

1. arendada suuruste muutuvuse ja olenevuse mõistet;
2. uurida lineaarset olenevust;
3. laiendada arvuvald negatiivsete arvudega;
4. kätte juhatada planimeetrisidemed ja neile vastavad konstruktsioonvõtted.

Kava:

Algebraalse avalduse mõiste: kordaja, astmenäitaja, sulud tehete järjekorra määratlenä.

Arvutamise põhiseadused: kommutatiivsus (vahetuvusseadus), assotsiatiivsus (ühenduvusseadus), distributiivsus

Sirgloikude ja nurkade ühtuvus.

Teljeline sümmeetria tasapinnal.

Kolmnurkade neli ühtuvuslauset.

Rööpsirged. Paralleelide aksioomi järeldused: kolm-

(jaotuvusseadus). Arvutamise abivalemid: $(a+b)(a-b)$; $(a+b)^2$; $(a-b)^2$.

Algebralise avalduse numbriline väärtus. Avalduse väärtuse käik temas esineva tähe väärtuse muutumisel: tähe ja avalduse väärtuspaaride tabel; avalduse väärtuse käigu graafiline kujutus. Kahe suuruse olenevuse mõiste; selle olenevuse väljendusabinõud: valem, tabel, diagramm. Funktsiooni mõiste.

Arvuvalla laiendamine: positiivsed ja negatiivsed arvud. Liitmine, lahutamine, korrutamine, jagamine, ruutimine ja kuupimine laiendatud arvuvallas.

Funktsionaalne olenevus laiendatud arvuvallas. Võrdeline olenevus; pöördvõrdeline olenevus.

Esimese astme funktsioon; tema käigu graafiline kujutus; lineaarolenevus. Lineaarne interpolatsioon diagrammides ja numbrilistes tabelites. Aritmeetiline rida: üldliikme avaldus; summa valem.

Esimese astme võrrand ühe tundmatuga. Kahe lineaarvõrrandi ühislahenduse mõiste.

Polünoomid: nende korraldamine, liitmine ja lahutamine.

nurga välisnurk, kolmnurga ja lihtsa kumera hulknurga sisenurkade summa.

Kolmnurga põhiomadused: suurem külge ja nurk, kahe külge summa ja vahe, sisse- ja ümberjoonistatud ringid; tähtsamad transversaalid: keskristjooned, kõrgused, nurga- ja küljepoolitajad.

Rööpkülikute liigid ja põhiomadused: vastasküljed, vastasnurgad, diagonaalid. Trapetsi keskjoon.

Ringi ja korrapärase hulknurga tsentraalne sümmeetria.

Ringi puutuja; piirdenurgad ringis; diameetrile toetuv täisnurk.

Konstruksioonid joonlaua, kolmnurga, malli, sirkli ja teiste vahendite abil ning konstruktsioonid ainult sirkli ja joonlauaga — kavas nimetatud küsimuste piirkonnast (v. konstruktsioonide nimestik).

II klass.

T e e m: Aritmeetilised tehted. Ruutolenevus. Planimeetrilised mõõtmis- ja arvutamisprobleemid.

Õ p e t a m i s ü l e s a n n e:

1. kätte harjutada aritmeetilised tehted tähtvaldustega ühes murdude süstemaatilise käsitlemisega;
2. süvendada olenevushõistet, eriti ruutolenevuse uurimisel;
3. laiendada arvuvald ruutirratsioonaalsete arvudega;
4. kätte juhatada tasapinnalised meetrilised sidemed ja kätte harjutada nendele rajatud arvutamismõtted;
5. tutvustada sin, tan ja cos sümbolit.

K a v a:

Polünoomide korrutamine;
 $(a + b)^3$ ja $(a - b)^3$
valemid. Arvutamispõhiseaduste ja abivalemite rakendamine algebraliste avalduste teisendamisel, eriti polünoomide teguriteks lahutamisel. Polünoomide jagamine.

Murdude süstemaatiline käsitlemine: algarvu mõiste; suurem ühistegur ja väiksem ühiskordne; murdude võrdumise tingimus (võrde põhiomadus); murdude liitmine,

Pindalade võrdlemine. Hulknurkade ruutimine. Ruudu, püstküliku, rööpküliku, kolmnurga, trapetsi ja korrapärase hulknurga pindalade arvused.

Sirglõikude suhe ja võrdelised sirglõigupaarid.

Võrdelised lõigud rööpsirgete vahel.

Sarnased kujud; nende pindade side. Kolmnurkade 4 sarnasuselauset.

Pythagoras'e lause ja tei-

lahutamine, korrutamine ja jagamine. Kahe tundmatuga lineaarsüsteemi lahendamisevõtted.

Ruutolenevus

$$y = x^2$$

ja selle pööre

$$x = \sqrt{y}.$$

Arvu ruutjuure määramine.

Arvuvalla laiendamine ruut-irratsioonaalsete arvudega.

Üldine ruutolenevus

$$y = ax^2 + bx + c$$

ja selle graafiline kujutus.

Teise astme võrrand

$$ax^2 + bx + c = 0:$$

tema graafiline lahendamine; lahendamisevalem.

Teise astme võrrandi lahenduste omadused. Ruuttrinoomi teguriteks lahutamine.

sed meetrilised sidemed täisnurkses kolmnurgas. Teravnurga siinus ja tangens. Siinuse ja tangensi väärtuste tabelid ja nende tarvitamine täisnurkse kolmnurga elementide arvutamisel.

Teravnurga koosinus ja lõigu normaalprojektsioon.

Sarnasuselausete rakendused: kolmnurkade nurgapoolitajad; ringi lõikaja osade korrutis; puutuja ning lõikajad ühest täpist.

Ringi sirgestamise ja ruutimise probleem. Arv π . Ringi kaare ja pinna valemid.

Meetrilised konstruktsioonid sirikli ja joonlauaga, eriti:

$$x = na; \frac{a}{n}; \frac{ab}{c};$$

$$\sqrt{a^2 + b^2}; \sqrt{a^2 - b^2}; \sqrt{ab}$$

(v. konstruktsioonide nimes- tik).

III klass.

Teem: Astmeline olenevus. Eksponentolenevus. Stereomeetrilised sidemed. Trigonomeetrilise arvutamise algmõisted.

Õpetamisülesanne:

1. süvendada olenevuse mõistet, eriti astmelise ja eksponentolenevuse uurimisel;
2. kätte harjutada logaritmid tarvitamine arvutamiseabinõuna;
3. tutvustada piiri mõistega ning anda aime irratsionaalarvu üldmõistest;
4. kätte juhatada stereomeetrilised põhisedemed ja kätte harjutada nendele rajatud paralleelprojektsiooni võtted;
5. kätte harjutada trigonomeetrilise arvutamise algvõtted.

Kava:

Kuupolenevus

$$y = x^3$$

ja selle pööre

$$x = \sqrt[3]{y}.$$

[Olenevus

$$y = x^3 + px + q$$

ja selle graafiline kujutus.

Taandatud kuupvõrrandi

$$x^3 + px + q = 0$$

lahendamine graafilisel teel;
lahenduse parandamine lineaarse interpolatsiooni teel.]

Täpid, sirged ja tasapinnad ruumi elementidena. Nende vastastikune asetumine, lõikumine ja vastastikune määramine.

Rööpseis ruumis. Kiivsirgete mõiste.

Ristseis ruumis. Sümmeetria tasapind.

Kald- ja normaalprojektsiooni mõiste. Paralleelprojektsiooni põhiseadus. Rööp-

Üldine astmeline olenevus

$$y = x^n$$

ja selle pööre

$$x = \sqrt[n]{y}.$$

Juuravalduste taandamine.

EkspONENTOLENEVUS

$$y = a^x$$

ja selle pööre: logaritmifunktsioon

$$x = \log y;$$

nende käikude kujukõverad.

Logaritmi omadused; nende rakendamine arvutamiseabinõuna. [Logaritmi astmik; logaritmiline liineal (arvutuslukat).]

Logaritmid tabelid.

Geomeetriline rida: üldliikme avaldus, summa valem.

Lõpmata kahaneva geomeetrilise rea summa. Perioodsed kümnendmurrud.

tahuka, prisma, püramiidi ja koonuse kujutamine paralleelprojektsioonis.

Funktsioonid $\sin$, $\cos$, $\tan$ ja $\cot$ täisnurkses kolmnurgas. Nende vahel maksvad põhised. Täisnurkse ja sarik-kolmnurga lahendamine trigonomeetriliste funktsioonide tabelite abil.

Trigonomeetrilised funktsioonid üksusringis. Nende funktsioonide määramispiirkonna laiendamine kuni 180° ja vastavad taandamisvalemid.

Koosinuslause ja tema rakendamine kaldnurkse kolmnurga arvutamisel.

Siinuslause ja tema rakendamine kolmnurga arvutamisel. Trigonomeetriliste funktsioonide logaritmid tabelite kasutamine.

IV klass.

Teem: Funktsiooni muutumise kiirus. Trigonomeetrilised sidemed ja kolmnurkade arvutamisevõtted. Analüütilise geomeetria alged.

Õpetamisülesanne:

1. tutvustada tuletise mõistega;
2. kätte juhatada trigonomeetrilised põhisedemed ja kolmnurga arvutamisevõtted;
3. tutvustada analüütilise geomeetria meetodiga.

Kava:

Funktsiooni pidevuse tunnus.

Funktsiooni tuletise mõiste: funktsiooni muutumise kiirus; tuletise otsene leidmine funktsiooni avalduse põhjal juhustel:

$$y = ax + b; x^2; x^3;$$

$$\frac{1}{x}; [\sqrt{x}].$$

Empiirilise funktsiooni tuletise leidmine. Tuletamise põhiseadused: summa ja vahe, [korrutise ja jagatise tuletised,] konstantsed liidetavad ja kordajad. x^n ja polünoomi tuletis. [Newton'i binoomvalem.]

Funktsioonid $\sin$, $\cos$, $\tan$, $\cot$ piirkonnas 0° kuni 360° ja kaugemale; nende diagrammid; nende perioodsus. Nurga absoluut- (kaar-) mõõt.

Siinuse ja koosinuse liitmislaused ja nendest järgnevad valemid

$$\sin 2\alpha, \cos 2\alpha$$

$$[\sin \frac{\alpha}{2} \text{ ja } \cos \frac{\alpha}{2}]$$

jaoks;

$\sin \alpha + \sin \beta$ ja $\sin \alpha - \sin \beta$ teguriteks lahutamine.

Tangenslause.

Nurga arvutamine kolmnurga külgede järele.

[Funktsiooni muutumise kiirendus: funktsiooni teine tuletis.]

[Kaudne olenemine ja kaudne tuletise leidmine.]

Tuletise mõiste funktsiooni muutumise uurimise abinõuna: kasvamise ja vähenemise tunnus, maksimumid ja miinimumid, [funktsiooni käigu kujukõvera käänukohad].

Tuletise mõiste rakendusmatemaatilistes probleemides: [võrrandite ligikaudne graafiline lahendamine ja lahenduse parandamine Newton'i võtte abil;] vea mõiste; suuruse kaudsel määramisel tehtud vea põhivalem

$$\Delta y \approx f'(x) \cdot \Delta x;$$

selle valemi rakendused kaudse mõõtmise ülesannetes; [avalduste lähendamine polünoomidega; ligikaudse arvutamise põhivalemid].

Kolmnurga pindala. Sissee ja ümberjoonestatud ringide raadiused.

[Trigonomeetriliste võrrandite tüübid:

$$a \sin mx = b;$$

$$a \sin x \cos x = b;$$

$$a \sin x + b \cos x + c = 0.]$$

Püstkoordinaatide tarvitamine planimeetrilistes küsimustes: asend, kaugus, [pindala].

Kahe muutujaga võrrandi graafiline tõlgendamine.

Lineaarne võrrand. Sirgete lõikumine, rööp- ja ristseis.

Teise astme võrrandi eritüübid: ringi, ellipsi ja hüperbooli (kesktäpp-)võrrandid, parabooli (tipp-)võrrand.

Kõvera lõikumine sirgega. Puutuja võrrand. Hüperbooli asümptootid ja asümptootvõrrand.

[Ellipsi, parabooli ja hüperbooli tulitäpid ja juhtjooned.]

[Ellipsi, parabooli ja hüperbooli läbimõõdud.]

[Koordinaatide teisendamine: teljestiku rööplüke, teljestiku pööramine; võrrandi astme invariants.]

[Polaarkoordinaadid: nende side püstkoordinaatidega; üldine koonuslõigete võrrand polaarkoordinaatides.]

V klass.

Teem: Pind- ja ruumalade arvutamisevõtted. Integraali mõiste. Elementaarsed transtsendentsed funktsioonid. Statistika alged.

Õpetamisülesanne:

1. tutvustada integraali mõistega;
2. kätte juhatada stereomeetrilised arvutamisevõtted;
3. tutvustada elementaarsete transtsendentsete tuletistega ning harjutada tuletise mõiste rakendamist;
4. harjutada täpsuse hindamist ja lühendatud ning ligikaudse arvutamise võtete kasutamist;
5. tutvustada tõenäosuse mõistega;
6. tutvustada sfäärigeomeetria algetega.

K a v a:

Kõvera poolt piiratud pinna ruutimisprobleem: pind kõvera, x -telje ja kahe ordinaadi vahel; pinna muutumise kiirus äärordinaadi seisumuutumisel; pinna arvutamise võte. Integraali mõiste. [Empiirilise funktsiooni integraali määramine]. Pöördkeha kuupimisprobleem: pöördkeha ruumala kahe ristlõike vahel; selle ruumala muutumise kiirus äär-

Prisma, püramiidi, silindri ja koonuse pinnalaotused ja nende kehade pinna mõõtmine.

Ruumala arvutamise põhi-laused: prisma ja püramiidi ruumala.

Püstsilindri ja püstkoonuse ruumala arvutamine.

Kera pinna sümmetria. Ringid kera pinnal. Suuringi mõiste. Sfäärilised koordinaadid. [Sfäärilise kolmnurga

lõike seisu muutumisel; ruumala arvutamise võte.

[Siinusfunktsiooni tuletis ühes suhte

$$\frac{\sin h}{h}$$

piirväärtusega nullile läheneva h puhul.]

[EkspONENTfunktsiooni tuletis ühes avalduse

$$\frac{a^h - 1}{h}$$

piirväärtusega nullile läheneva h puhul.]

[Logaritmfunktsiooni tuletis.]

[Vea valemi rakendus täpsuse küsimuse uurimises arvutamisel logaritmiliste tabelite ja arvutuslükati abil.]

Tõenäosusteooria algmõisted ja põhilaused: tõenäosuse mõiste; tõenäosuste liitmis- ja korrutamislause; statistiline tõenäosus; [sageduskõverad; suremuse tabelid ja kindlustusõpetusealged.]

mõiste. Siinuslause ja koosinuslause kera pinnal.]

Kera pinna ja ruumala mõõtmine.

VI klass.

Teem: Arvu mõiste laiendamise probleem. Geomeetria projektiivse käsitluse alged. Geomeetria süsteemi mõiste.

Õpetamisülesanne:

1. anda ülevaade arvu mõiste järk-järgulisest laiendamisest ning tutvustada formaalsete seaduste permanentsiprintsiibi;
2. laiendada arvuvald kompleksarvudega;
3. selgitada algebra põhilause mõtet;
4. tutvustada perspektiivse kujutamise meetodiga;
5. luua geomeetria projektiivse käsitlemise alus;
6. anda aime geomeetria süsteemipärasest ülesehitamisest.

K a v a:

Kokkuvõtlik ülevaade arvu mõiste ja operatsioonide mõtte järk-järgulisest laiendamisest: lihtarvude rida, täis- ja murdarvud, positiivsed ja negatiivsed arvud; ratsionaalsed ja irratsionaalsed arvud. Operatsioonide seaduste permanentsiprintsiip.

Kompleksarvud: kompleksarvu mõiste, tema geomeetiline kujutus vektorina tasa-

Tsentraalprojektsiooni (perspektiivi) põhimõisted: kujutustasapind, projektsiooni kesktäpp, peapunkt, horisont, distant. Täpi, sirge ja lihtsamate kandiliste kehade perspektiivide joonistamine. Rööpsirgete perspektiivne kujutus: pagutäpi mõiste ja tsentraalprojektsiooni põhi-seadus. Selle rakendused perspektiivide joonistamisel

pinnal; tehted komplekssarvudega ja nende tehete graafiline tõlgendamine.

Moivre'i lause.

Binomivõrrandid.

Kolmanda astme võrrandi trigonomeetriline lahendamine.

Algebra põhilause mõte.

ja perspektiivsete kujutuste lugemisel. Lõpmata kaugete ruumielementide mõiste.

Desargues'i lause perspektiivseist kolmnurkadest. Harmooniline asend ja kaksik-suhe. Täielik nelikülik. Projektiivne vastavus. Duaalne vastavus tasapinnal.

Koonuse tasapinnalised lõiked ringi tsentraalprojeksioonidena. Poolus ja poaar. Pascal'i kuusnurgalause ja selle duaalne teisend.

Kerapinna kaardi probleem: Mercator'i projektsioon; stereograafiline projektsioon.

Geomeetria aksiomaatilise ülesehitamise mõiste.

Seletuskiri

matemaatika õppekava juurde.

Eelmärkused.

1. Käesolevas seletuskirjas leiavad aset tähtsamad aine- käsitlemise põhimõtted; teda ei tule mõista matemaatika üksikasjalise meetoodika käsiraamatuna.

2. Mõned juhtmõtted, millele rajanes matemaatika õppekava projekti kokkuseadmine, peaksid kõige tõsisemat tähelepanu leidma ka kava teostamisel. See on põhjuseks, miks nad esinevad, tunduvalt arendatult, ka seletuskirjas. Nende juhtmõtete rõhutamist ka seletuskirjas on seda enam tarvis, et õppekava maksmapanemisel ära jääb tema projekti kokkuseadmise lähtekohtade nimetamine.

Üldosa.

1. **Põhinõue.** Matemaatika õpetamine keskkoolis pi- dagu hoolsalt silmas kooli üldpüüdeid: ta ei tohi endale seada kooli eesmärgist kõrgemale ulatuvaid või sellest kõrvale kalduvaid sihte. Koolitöö kogueesmärgi saavutamine on mõeldav ainult sel teel, et kõigi ainete õpetamise üksiksihid selle eesmärgiga kokkukõlastatakse.

2. **Õpetamise ülesanne.** Ühiselt teiste keskkooli aine- tega seab matemaatika õpetamine endale ülesandeks:

harida õpilase vaimlisi jõude ning võimeid ja varustada teda teadmiste ning oskustega määral, mis võimaldaks temale orienteerumist teda ümbritsevas ilmas ning praegusaja elu ilmutustes.

Oma osa sellest ülesandest teostab matemaatika õpetamine sellega, et ta

a) arendab mõtlemist mõistetes, nimelt

läheldes konkreetseist näiteist harjutab järk-järgulise abstraktsiooni teel mõisteid looma; nende mõistete vahelisi sidemeid otsima; leitud sidemetest loogilisel teel tuletama loodud mõisteteilma valitsevaid seadusi ning viimaseid rakendama reaalses ilmas meile esineva korra uurimisel;

b) harib meid ümbritsevas tõelikkuses toimuvate nähtuste seletamist funktsionaalse olemise mõiste abil, nimelt

harjutab meie ümber sündivaid nähtusi hoolsalt jälgima, nende käiku määravaid suurusi arvuliselt väljendama, mõõtmisvõimeid täpsust hindama, seadusi leidma, mis nähtuste arenemist valitsevad, ning ennustama nende edaspidist käiku;

c) kasvatab ruumilise mõtlemise ja kujutlemise võimeid, nimelt

harjutab meid ümbritsevat tõelikkust ruumis vaatlema, teda ruumis nägema ning ruumis ette kujutama; ruumilisi objekte (reaalseid ja ideaalseid) seadusepäraselt kujutama kahemõõtelisel joonisel ja kolmemõõtelisel mudelil ning uurima nende objektide vastastikust asetumist, nende kuju, nende suurust ja nende vahel valitsevaid vahekordi;

d) annab kaasa piiratud hulga teadmisi arvuring ruumiteadusest, mis tarvilikud meid ümbritseva ilma ja elu ilmutuste teadlikuks hindamiseks;

e) varustab oskustega, mis lubaksid omandatud matemaatilisi teadmisi rakendada kvantitatiivsete probleemide lahendamisel, mida seab riigikodanikule ja kogukonna liikmele nüüdisaja elu; oskusi, mida tarvis nii pärastise erialalise hariduse omandamisel kui ka sellele toetuva kutse ülesannete täitmisel;

f) valgustab matemaatika tähtsust praegusaja vaimlises ning ainelises kultuuris ja tema osa kultuuri arenemise ajaloos.

3. Kasvatuslik ülesanne. Kõrvu püüdega, avaldada sügavat ja püsivat harivat mõju, seisab matemaatika õpetamise kasvatuslik ülesanne:

ta tahab kasvatada tõe armastust ja austamist, asjaolude objektiivset hindamist, iseseisva otsustamise võimet, nõudlikku enesearvustust ning arenenud vastutustunnet;

ta tahab kasvatada harjumust probleeme otsida, seada ning neid lahendada, küsimuste käsitlemisel nende põhja tungida, selgelt ning järjekindlalt mõelda, oma mõtteid kaalutult ning täpsalt väljendada ja oma mõttevilja esitada korraldatult loogilises seoses;

ta tahab harjutada kavakindla, püsiva ja hoolsa töötamise oskust ning segamatu tähelepanu võimet;

ta tahab harjutada meid ümbritsevas tõelikkuses esinevate korrapäraste kujundite, matemaatiliste vahekordade ning seaduste ilu tajumist ja eriliselt arendada täpsuse ning korra tunnet.

4. Palade järjekord. Kavas esitatud üksikutes klassides käsitlemisele tulevate palade järjekord on üks mitmest võimalikust; seda ei tule mõista sunduslikuna õpetajale: talle jääb vabadus klassikava materjali omakohaselt järjestada.

Nii oleks näiteks mõeldav, et enne lineaarvõrrand, siis lineaarfunktsioon, enne ruutvõrrand, siis üldine ruutolenevus käsitlusele võetakse; võrrandite puhul võiks käsitleda enne nende algebralist, siis alles graafilist lahendamist; geomeetrilises osas võiks näiteks enne käsitleda kujude sarnasust, siis nende pindalasid; enne trigonomeetrilise arvutamise algmõisteid, siis stereomeetrilisi asendilauseid.

5. Faktiline materjal ja meetod. Kogu matemaatika õpetamisel tuleb tõsiselt silmas pidada nõuet, et esijoones arendataks matemaatilist mõtlemist; põhjanevate matemaatiliste tõsiasiade omandamine ning operatsioonide toimetamise oskuse kätteharjutamine sünnib teises järjes: mõistlik faktide memoreerimine ning oskuste harjutus on mõeldavad ainuüksi peale seda, kui on jõutud selgele arusaamisele nende mõttest ja taibatud side ennemalt omandatud aineosaga.

Keskooli kursuse vältel käsitledavate matemaatiliste faktide kogu ulatus on nimetatud allpool tarvilikkude lausete ja konstruktsioonide nimestikkudes. Seal esinevat materjali ei ole mitte mõeldud soovitada «päheõppimiseks»; aine õigel käsitlemisel jääb tema kaaluvam osa meelde mälu erilise pingutusega.

Pole õigustatud püüe, saavutada kohe algusest peale järjekindlat matemaatiliste tõdede süsteemi; säärane eesmärk võiks olla ainult kokkuvõttel kavatsetavas VI klassis. Küll aga tuleks rühmitada lauseid nende kokkukuuluvuse järele tsükletteksse, nagu see ka kavast välja paistab.

Igas lausetsükklis tuleb eriti rõhutada neid elemente, millel põhjenevad teised lauserühmad või mis esinevad kindlate osadena rakenduses. Kõigi teiste lausete hulk tuleb vähendada võimaliku miinimumini.

Matemaatilise mõtlemise arendamisel väärrib erilist tähelepanu matemaatika meetod: analüüs, süntees, induktioon, deduktsioon, täielik induktioon; järk-järguliste lähenduste meetod; piirimeetod; projektimismeetod; koordinaatide meetod; aksiomaatiline meetod.

Kõrvu meetodi omaette suure ideaalse väärtusega seisab tema tähtsus tõsiasiade korraldamise võimsa abinõuna: nii rühmituvad ühe ja sellesama mõttekäigu, järk-järguliste lähenduste meetodi ümber: ruut- ja kuupjuure leidmine; logaritmi arvutamine; kõigi võrrandite numbriline lahendamine; integraali ligikaudne määramine; või jälle koonduvad piirimeetodi ümber: lõpmatu rea summa mõiste; ringi sirgestamise ja ruutimise probleem; tuletis ja integraal; pindade ning ruumalade arvutamine.

Õpilane peab jõudma selgele arusaamisele neist meetoditest: nende ulatus ei piirdu matemaatika-alaga; neid vajame ka muidu kogu oma vaimlises tegevuses.

6. **Harjutuste hulk.** Harjutuste hulka, mis määratud eriliselt operatsioonide mehaanilise oskuse omandamiseks, tuleb piirata selleks otstarbeks tarviliku arvuga.

Näide t e n a, kus praegu seatud nõuet tuleb eriti hoolsalt silmas pidada, olgu nimetatud järgmised: algebraliste avalduste teisendamine (sulgude avamine, teguriteks lahutamine, tehted polünoomidega, tehted murd- ja juuravaldustega); graafikute joonistamine; võrrandite lahendamine valmite valemite abil; harjutused logaritmilise ja trigonomeetrilise arvutamistehnika omandamiseks; funktsioonide tuletiste leidmine differentsimisvalemite põhjal; geomeetrilise joonistamise harjutused.

7. Harjutusmaterjali lihtsuse nõue. Operatsioonide toimetamise oskuse ja arvutamis- ning kujutamistehnika omandamine sündigu võimalikult lihtsate ja loomulikkude ülesannete najal ning suuruse ja täpsuse poolest tõetruude andmete alusel.

Selle nõudega on määratud kadumisele keskkooli-kursuse piirkonnast: algebralised avaldused ebaloosulikkude kordajatega, nagu $\frac{89}{61}$; — 0,71349752; 0, (4); 0,71 (8) — mis iialgi ei esine tõetruis rakenduses; algebralised avaldused ebaloosuliku ehitusega, eriti avaldused, mis sisaldavad sulu-, juure-, murrukriipsu või teiste märkide «p e s i», nagu näiteks:

$$a - 2 \{ 3b - 4[a - 2(b - c)] \};$$

$$\frac{\frac{3a^2}{2x} - \frac{2b^2}{5y}}{\frac{5x^2y}{a+b} - \frac{4xy^2}{a-b}};$$

$$\sqrt[4]{\sqrt{6} - \sqrt[3]{7}} \cdot \sqrt[4]{\sqrt{6} + \sqrt[3]{7}};$$

trigonomeetrilised arvutamisesanded andmetega, nagu neid iialgi ei esine tegeliku elu poolt seatud probleemides:

a) ülesanded loomuvastaste lähte-elementidega, näiteks kolmnurga arvutamise ülesanded andmeist:

$$\begin{array}{ll} a, h_b, m_s; & m_a, h_a, n_a; \\ a + c, h_c - h_a, \beta; & a^2 + b^2, S, \gamma; \end{array}$$

b) ülesanded, milledes andmed on antud suurema täpsusega, kui seda võimaldavad mõõtmisriistad või nõuab ülesande loomus;

konstruktsioon-ülesanded kunstlikult valitud andmetega, eriti need, mis ei toetu otseselt kaaluvamail geomeetria lauseil.

8. **Kontrolli nõue.** Igat arvutamise saadust ja konstruktsiooni tulemust kontrollitagu selleks kohaste võtete abil.

Nõude järjekindel läbiviimine on paremaks õpilase vastutustunde ja eneseusalduse kasvatamise abinõuks.

Kontrollimisvõtetena olgu nimetatud: arvulise ülesande lahendamine ümmardatud andmetes; numbrilise töö kontrollimine graafiliste võtete abil ja ümberpöörduvalt; ülesande lahendamine kahel, teineteisest olenematu teel; ülesande lahendamine ilma arvutamisinõudeta ja nende abil (funktsioonide x^2 , x^3 , $\sin x$, $\tan x$ jne. väärtuste tabelid, logaritmid, tabelid, arvutuslühid, nomogrammid); konstruktsiooni rajamine ühele lauserühmale ning tema saaduse uurimine teise lausetsükli abil; konstruktsiooni saaduse katseline proovimine; konstruktsiooni läbiviimine teiste andmete või teise mõõtkava tarvitamisel.

9. **Graafiline meetod.** Kus kohane, tarvitatagu graafilist meetodit mõistete selgitamiseks, lausete sisu näitlikustegemiseks ning mõtte intuiitiivse taipamise hõlbustamiseks.

Küsimuste näidete n a, mis kohased graafiliseks esitamiseks, olgu nimetatud: arvutamise abivalemid: $(a + b)$ $(a - b)$, $(a + b)^2$; lineaarse interpolatsiooni võte; aritmeetilise rea liikme ja summa valemid; geomeetrilise rea liikme avaldus ja summa mõiste; empiiriliste, astmeliste, täisratsionaalsete, eksponent-, logaritm- ning trigonomeetriliste funktsioonide käik; tuletise mõiste; positiivsed, negatiivsed ja kompleksarvud ning tehted nendega; Newton'i võte võrrandite numbriliseks lahendamiseks; piiri mõiste; hulknurkade ruutimisprobleem; ruumkujude tasapinnaliste kujutuste tuletamise probleem.

Graafilise meetodi tähtsus ei peitu mitte üksnes aine selgitamises ja näitlikus esitamises: tal on suur tähtsus tegeliku matemaatika tööriistana.

Nii täidab funktsiooni graafik või astmik funktsiooni väärtuste tabeli ülesannet, sagedasti täielikumalt ning kohasemalt, kui tabel seda teeb; nii laheneb katseteadustes rida küsimusi graafiliselt hõlpsamini kui numbrilisel teel: nähtuse arenemise kiiruse määramine registraatorite poolt märgitud nähtuse käigu kõverast; vaatluste tasandamine ja katsevigade leidmine; nähtuse vaatlusest teda valitseva seaduse tuletamine lineaarse, ruut-, kuup-, üldse astmelise ning eksponentolenevuse korral; võrrandite lähilahenduste määramine.

Kõrvu ülemalöelduga on graafiline ainekäsitlemis-meedod üks paremaid abinõudest matemaatika õpetamise kasvatustlikkude eesmärkide saavutamiseks.

10. Konkreetseuse nõue. Et kindlustada õpilaste huvi uute mõttekäikude vastu, tuleb lähtuda võimalikult konkreetseist sisukaist küsimusseadeist. Tõelikult ongi suurem hulk matemaatilisi mõttekäike kujunenud just konkreetsete probleemide käsitlemisel.

Eriliselt tuleb ülesseatud nõuet silmas pidada põhjapanevate mõistete arendamisel, milleles toimub meid ümbritseva ilma kvalitatiivne ja kvantitatiivne järelduskujutamise mõtteis.

Niisuguste mõistete näidetena olgu nimetatud: positiivne ja negatiivne arv; olenevuse mõiste; pidevus ja katkevus; nähtuse käigu ühtlus; nähtuse käigu kiirus; nähtuse perioodsus; pikkus, pind- ja ruumala; ühtvus ja sarnasus; kuju projektsiooni mõiste.

Nõude mõtte selgitamiseks olgu järgmine rida näiteid.

Konkreetsed ained.

Pisikute paljunemine; väikeloomade sigimine; linna ja riigielanikkude arvu kasvamine.

Õhulaeva kandejõud antud kõrgusel.

Temal arenduvad matemaatilised küsimused.

Alus, astmenäitaja, aste; geomeetiline rida; selle liikme avaldus ja summa; katkevus ja pidevus; eksponentolenevus; orgaanilise kasvamise seadus; selle kasvamise kiirus; logaritmi mõiste ja põhiomadused; logaritmi astmik.

Positiivne ja negatiivne arv; positiivsete ja negatiivsete arvude liitmine; lineaarolenevus; lineaarvõrrand ja selle lahendus; kuupolenevus; kuupjuur.

Kangi tasakaal.

Ühtlane nihkumine, paisumine, jahtumine.

Päevapilt; pilt kino näitelinal.

Jõu pöördvõime (moment); positiivne ja negatiivne arv; nende korrutamine ja jagamine; pöördvõrdeline olenevus; sarikhüperbool; asümp-toodi mõiste.

Võrdeline olenevus; võrdetegur; lineaarne seadus; ühtlase nähtuskäigu kiiruse mõiste ja mõõt; vaatluste tasandamine; lineaarne interpolatsioon.

Projektsiooni mõiste; sarnasus; sarnaste kujude pik-kuste ning pindalade suhtumine; perspektiivne kujutamine ja selle põhiseadused.

11. **Mõttearendused *ab ovo*.** Et uut mõistet omandada ja uue mõtteviisiga kohaneda, ei jätku harilikult ühe näite käsitlemisest, vaid on tarvis pikemaajalist, küllalt vaheldus-rikast harjutamist võimalikult konkreetse aine najal. Tähtsamaid mõttekäike tuleb arendada korduvalt *ab ovo*, järjest uut materjali tarvitades. Säärasel ainekäsitusel näeb õpilane selgesti, kuidas üks ja sama matemaatiline küsimusseade tekib hoopis lahus seisvate alade vaatlemisel, kuidas suur hulk üksikeisest olenematuid nähtusi paindub ühe ja sama seaduse alla, kuidas matemaatiline mõtlemine vähese hulgaga mõisteid rühmitab, korraldab ning seob välisilma sündmustiku ülevaatalikuks tervikuks ning annab meile võimu tema üle valitseda.

12. **Matemaatika rakendused.** Uued mõisted, uued mõtteviisid saavad õpilase jäädavaks vaimuvaraks ainult pike-maaegsel töötamisel nendega, eriti nende korduval rakendamisel. Selleks valitagu eeskätt elusa, reaalse sisuga, tõsioludele vastavate andmetega probleeme.

Rikkalikku materjali nendeks pakub isiklik, kogukonna ja riiklik elu, meid ümbritsev tõsiasjade ilm ning loodus oma mitmekesisel nähtustikuga.

Mõned näited.

Mõiste.

Võrdeline ja lineaarolenevus.

Ruutolenevus ja selle pööre.

Geomeetiline rida, eksponentolenevus, logaritm.

Selle rakendamise võimalused.

Pikkuste mõõtmismikkude side lahkuminevate üksuste puhul; keha ruumala ja tema kaal; veduri käidud tee ja kulutatud kütteaine hulk; rõhk ja hõõrumine; jõud ja venimine; C, R ja F termomeetrite skaalade side; ühtlane tõusmine, langemine, pöörlemine, kulumine jne.; tariifid; dividend.

Langemine raskusväljas; juhtme soendamine voolu poolt; viipuri pikkuse ja võnke aja olenevus; anumast välja voolava vee kiiruse ja vee pinna kõrguse olenevus.

Kapital liitprotsentidel; laenu kustutamise küsimused; õiglane progressiivne maksustamine; liikumise kustumine takistavas olluses; valguse neeldumine; sooja keha jahutamine.

13. Fusioon. Kavas on aine ülevaate saamise kergendamiseks algebra, geomeetria ja analüüsi elementide palad enamasti üksteisest lahus nimetatud. Seda ei tule nõnda mõista, et ka aine käsitlemisel peaksid esile tulema selgesti tõmmatud piirid üksikute aineosade vahel. Otse vastupidi: aine elustamise mõttes oleks väga soovitav, et iga esineva võimaluse korral läbi viidaks aineosade ühiskäsitus — aineosade fusioon. Siis kaoks eksiarvamine, nagu oleks igas matemaatika osas oma eriline mõtteviis.

Matemaatika õpetamise ülesanne ei seisa mitte algebra, geomeetria, trigonomeetria, analüütilise geomeetria, kujutava geomeetria ja matemaatilise analüüsi teisenduste, tõestuste,

arvutuste ning konstruktsioonide kättejuhatamises, vaid kõigile neile osadele ühise, suure praktilise väärtusega, arendava ja kasvatava mõtlemis- ning töötamisviisi harimises. Matemaatika üksikosade mõttelise sideme loomine toimub aine fusionistlikul käsitlemisel funktsionaalse olenevuse mõiste abil; nende ühtepõimimise tähtsamaks abinõuks on graafilised ning numbrilised tööd. Kinnipidamisel kahest põhinoolest (konkreetsed mõttekäikude lähtekohad, matemaatilise töövilja rakendamine) põimub matemaatika õpetamine füüsika kvantitatiivsete küsimuste, kosmograafia meetriliste ülesannete, statistikaküsimuste ning tehnikaprobleemide käsitlemisega.

Mõned võimaliku fusiooni näited:

- a) Sirgete rööpseis ning ristseis tasapinnas ja ruumis.
- b) Hulknurkade ja ringi pindalad; prisma, püramiidi, silindri ning koonuse kül- ning täispinnad nende laotusis.
- c) Koosinuse mõiste, lõigu normaalprojektsioon tasapinnas ning ruumis, pindala normaalprojektsioon; jõu osa antud sihis, tuule rõhk katusele, pinna valgustuse tugevus; töö mõiste.
- d) Pythagoras'e lause, kauguse kaudse määramise põhi- võtte; ruutolenevus, ruutjuur, ühismõõdetud lõigud, (ruut-) irratsionaalne arv; ringi võrrand.
- e) Prisma ja silindri ruumala; pöördkeha ruumala element; integraali mõiste; kera ja pöördellipsoidi ruumala; pöördkeha massi arvutamine.
- f) Ruumilise kuju elementide (nurgad, lõigud, pindalad, ruumalad) määramine ühtuvuse-ning sarnasuselausetele rajatud arvutamise teel, trigonomeetriliste sidemete ja tabelite tarvitamise teel, graafilisel teel kuju projektsioonides tasapinnale.

14. Tööprintsip matemaatika õpetamisel. Praegu toimuva kooli-õppeviisi reformimise juhtivaks mõtteks on tööprintsip. Ta nõuab: õpilase vaba algatust probleemi seadel; probleemi lahenduse iseseisvat otsimist õpilase enese poolt või ühiselt kaasvõitlejatega; õpilase vaimlist vabadust ning rippumatust õpetaja mõttekäigu survest; õpilase vaimutöö sidumist füüsilise tegevusega nende vastastikuseks elustamiseks.

Pole kahflust, et meie algkool areneb ülalnimetatud mõttes töökooliks. Keskkooli ülesandeks on juba olemasolevat väärtuslikku õpilase harjumust, iseseisvalt töötada, oma eesmärgi kohaselt ära kasutada ning teda edasi arendada. Matemaatilise töö praktiline osa ei tohiks esineda algkoolis juba tehtud tööde kordamisena. Temas peavad käsitlemist leidma uued teemid või jälle ennemalt puudutatud aine uurimine peab toimuma uute, täpsamate abinõudega. Töö tagajärgede kindlustamiseks tuleb nii teemid kui ka abinõud nõnda valida, et nad õpilasele küllalt huvi pakuksid.

Missugust küsimust ka käsitletakse, igal puhul peab enne tööle asumist kindel, hästi nähtav töö eesmärk kujunenud olema, peab probleem selge väljenduse leidma ning kogu töö läbiviimine uurimise viisil toimuma.

Töödena, millel ühiselt arendamist leiavad koordineeritud vaimlise ja füüsilise tegevuse küljed, olgu nimetatud:

- a) matemaatiline joonestamine;
- b) geomeetriliste mudelite valmistamine;
- c) mõõtmistööd väljal;
- d) laboratoorsed katsed.

Näiteks:

a) Planimeetriliste jooniste piinlik-täppis valmistamine ja vastavate lausete katselise aluse loomine mõõtmise teel; funktsioonide käigu graafikute valmistamine ühes käigu kiiruse graafilise määramisega; võrrandite graafiline lahendamine; lihtsate nomogrammide valmistamine; tasapinnalised projektsioon-kujutused ruumiliste asendilauseste illustratsiooniks; tüüpiliste kehade täpsad tasapinnalised kujutused.

b) Pappmudelid tasapinnageomeetria lausete illustratsiooniks; liikuvad papp-, klaas-, varras- ja niitmudelid samaks otstarbeks; arvutuslühendid mitmesuguste astmikkude jaoks.

c) Kauguste, kõrguste, kallete ja pindalade määramine väljal mõõtpaela, sekstandi, teodoliidi ja teiste riistade abil; lihtsamad mõõtmisülesanded taevakerasel.

d) mõnede nähtuste katseline uurimine: soenemine, paisumine, venimine, paindumine, rõhu muutumine jne. ühes katsevigade määramisega ja nähtuse käiku valitseva seaduse otsimisega.

15. **Pidevuse nõue matemaatika õpetamisel.** Matemaatika õpetamine keskkoolis toetub arenemisele, teadmistele ja oskustele, milledega õpilased algkoolist tulevad. Kuid õpetagajärjed esimesel ja osalt ka teisel keskkooli õppeaastal ei olene mitte ainult nendest alustest; nad on suurel määral tingitud õpetaja oskusest korraldada kohaselt üleminekut katselisest matemaatika käsitlesest algkoolis aine mõttelisele käsitlesele keskkoolis. See üleminek ei tohi sündida järsku; ta peab toimuma ettevaatlikult, aegamööda, järk-järgult; iga tema samm — ainult õpilase vaimlisel valmisolekul selle astumiseks. Õpilase mõistlik asjakohane juhtimine nõuab õpetajalt mitte ainult head tahet, suurt hoolt ning õpilase psühholoogia arvestamist, ta eeldab peale selle, et õpetaja küllaldaselt tuttav on algkooli matemaatika õpetamise juhtimõtetega ning tööviisidega.¹⁾

Rida neid juhtimõtteid peaks tähelepanu leidma ka keskkooli matemaatikaõpetajalt, kõige pealt õpetamisel keskkooli alamates klassides. Üks raskemaist ja tähtsamaist ülesandeist esimesel keskkooli õppeaastal on viia õpilasi arusaamisele, kui piiratud ja vähe usutav on katseline tõele jõudmise meetod, ning küsimuste seadmisele, milledele vastust võib saada üksnes loogilise arutuse teel. Ei tohiks mingit tõestust anda enne, kui tarve tema järele on selgesti ära tuntud. Tervet rida lauseid, mille tõestamise, s. t. lihtsamaist tõdedest tuletamise tarvet õpilased ei näe, tuleb maksvaks tunnistada ilma nende loogilise põhjenduseeta.

Niisuguste lausete näidetena olgu nimetatud järgmised: kõik täisnurgad on võrdsed; kahe kõrvunurga summa on π ; kaks tippnurka on võrdsed; püstloik, mis täpist sirgele joonistatud, on lühem igast samale sirgele joonistatud kaldloigust.

1) Olgu lubatud juhtida matemaatikaõpetajate tähelepanu MÕK-i poolt kokkuseatud ja tema „Toimetuste“ esimese numbrina ilmunud „Algkooli matemaatika õppekava projektile“, eriti sellele lisatud seletus kirjale.

Lausete tõestusi ei tule esimesel keskkooli õppeaastal kunagi anda valmilkujul; et tekiks selge efekujutus tõestuse eesmärgist, tema mõttest ning läbiviimise korrast, peab kogu töö kandma uurimise loomu, võimaldades õpilaste elavat osavõttu ning laialdast isetegevust.

16. Definiitsioonid ja aksioomid. Õpilased tulevad keskkooli küll teatud matemaatiliste kujutelmadega, mitte aga juba väljakujunenud matemaatiliste mõistetega. Nende tekkimiseks, nendega harjumiseks, nende vaheliste suhete äratundmiseks on aega tarvis. Sel põhjusel ei või lubatavaks tunnistada keskkooli matemaatika õpetamise algamist definiitsioonide üleslugemisega, seda enam, et suur hulk esimesi matemaatilisi mõisteid kuulub algmõistete hulka ning nende defiiniimine on üldse võimatu või loogiliselt väärtuseta. Seesuguste mõistete näidetena olgu nimetatud: täpp, sirge, tasapind, koht, siht, suund, suurus, arv, kiirus, pind. Neile mõistetele antavad definiitsioonid on sagedasti sisutud või muidu teaduslikult seisukohalt puudulikud.

Näidetena olgu nimetatud järgmised: täpp on see, millel pole osa; sirge on kõige lühem kaugus kahe täpi vahel; pind on keha piir; nurk on pööre; suurus on see, mis võib olla suurem või vähem.

Säärased definiitsioonid ei taba asja, varjavad ainult tõelist olukorda, ei seleta määratavat mõistet ega saa neid tarvitada tööriistana, eriti tõestamisabinõuna.

On aga mõiste rahuldav defiiniimine võimalik, tähendab, laseb mõiste ennast tuttavate vahekordade abil siduda teistega, mis varemini omandatud, siis peaksid õpilased ise vastavale definiitsioonile jõudma.

Põhioletuste, s. t. aksioomide ehk postulaatide all ei tule mõista fingimata neid lauseid, mis seda nime kannavad moodsas aksiomaatikas või näiteks Euklides'e süsteemis. Iga lauset, mis väljendab antud arenemisastmel «iseenesestmõistetavat» tõde, võib sel korral mõtteahela toena tarvitada. Põhioletuste hulk pole seega jääv keskkooli-kursuse vältusel:

ta on kord kasvav, kord vähenev suurus. Püüdest, äratuntud tõdede hulka ülevaatlikult korraldada, kasvab järk-järgult tarve uurida tõestamata võetud põhioletuste rippumatust üksteisest. Soovist, esitada tõdesid loogiliselt järjekindlas süsteemis, tekib nõue taandada põhioletuste hulka miinimumini. Selles nõudes peituvad aksiomaatilise meetodi juured.

17. Intuitsiooni osa matemaatika õpetamisel. Meeltega tajutavaist elementidest vabale mõtlemisele juhtimine on üks matemaatika õpetamise eesmärkidest. Kuid selle eesmärgi saavutamine on võimalik ainult keskkooli lõpuklassides: abstraktse mõtlemise võime areneb aeglaselt; kogu algkooli piirkonnas ja keskkooli esimeste aastate vältel ei suuda õpilane üldse mõelda mõistetes, ilma vastavate kujutelmade, ilma mõtte reaalse, silmaga nähtava, käega katsutava aluseta. Alles sugulise küpsmise aja möödumisel hakkab abstraktne mõtlemine vaimutegevuses kaaluvamat osa etendama. Üldalseletatud asjaolusid arvestades tuleb matemaatika õpetamisel, eriti keskkooli kolme esimese aasta vältel, kindlustada intuitsioonile tema tähtsuse vääriline koht. Kuid ka hiljemini on tarvis anda talle laiad arenemisvõimalused; jätab ju tõe intuiitiivne taipamine vaimusse sügavamad vaod kui abstraktne tõe tuletus. Formaali-loogilise momendi ülesanne on enam kontrolliv kui loov.

Matemaatika intuiitiivse käsitlemise abinõudeks on joonis ja mudel; tema meetoodilistest võtetest olgu nimetatud: nihutamine, voltimine, pööramine, tükeldamine, laotamine, projekteerimine, kuju pidev muundamine. Nende abinõude najal ja võtete kasutamisel toimub niisuguste mõistete, seaduste ja operatsioonide selgitamine, arendamine ja omandamine kui näiteks: ühtsus, sümmeetria, asend, pindala, sarnasus, irratsionaalarv, tõke, piir, arvutamise põhiseadused ja abivahendid, tehted negatiivsete ja kompleksarvudega, piiri ja pidevuse mõistete rajatud protsessid.

18. Matemaatika kultuuriline väärtus. Kogu matemaatika õpetamisel tuleb püüda esitada ainet nõnda, et nähta-

vale tuleks aine kultuuriline väärtus. Matemaatika annab kätte mõisted, milledes toimub ilmas oleva kirjeldamine: arv ja geomeetiline kuju; mõisted, milledes toimub sündmustiku korraldamine nähtusrühmadesse: olenevus, pidevus, ühtlus; seadused, mis valitsevad nähtuste käike, millede abil suudame nähtuste arenemislaadi ette näha, neid juhtida ning valitseda; võimsa tööriista looduse uurimiseks; kõigile teadusile ühise eeskuju oma objektiivsuse, selguse ning täpsuse poolest.

Matemaatikal on kaaluv mõtte- ning töö-ökoonoomiline tähtsus: üks ja sama lineaarne valem määrab kõigi ühtlaselt sündivate nähtuste käigud; ruutpöördvõrdeline olenevus valitseb korraga masside tõmbejõudu, elektrivälja pinevuse muutumist, valguse tugevuse kahanemist kaugusega; arvutustabel, astmik ja nomogramm lubavad numbrilist tööd mitmekordselt kiirustada.

Matemaatika on tähtsaks meie elu korraldamise abinõuks: tema abil toimub mineviku arvestamine, kavatsuste plaanistamine, tuleviku eelarvestamine; temalt saame objektiivse aluse ning tegelikud võtted maksunormide määramiseks, tariifide, sidekordade ning kindlustamisviiside väljatöötamiseks.

Matemaatikal on sügav tunnetuslik väärtus: selgemalt kui mujal näeme temas mõiste tekkimise, kujunemise ja selgumise käiku; tutvume printsiipidega, milledele rajatakse mõistete sisu laiendamine; õpime tõesid üksteisest järeldama ning mõttevilja kindlate põhimõtete järele korraldama; tingimusliigitama tarvilikkuse ning küllalduse järele; õpime lõpuks tundma mõtlemismeetodeid: induktsiooni, deduktsiooni, järkjärguliste lähenduste meetodit — kõigi täpsate loodusteaduste uurimisviiside prototüüpi.

Matemaatika kultuurilise väärtuse selgitamisel on õige koht puudutada

Matemaatika ajalugu. Küsimuste näidetena, mis pakuvad huvi nii omaette kui ka kultuurilooliselt, võiks nimetada:

arvumärkide ajalugu; murdude käsitlemine egiptlastel; kümnendmurdude ja kümnendmõõdustiku ajalugu; irratsionaalarvu mõiste arenemine; ringi sirgestamise ja ruutimise prob-

leemide ajalugu; algebralise sümboolika arenemine; piirimeetodi ajalugu; maakera kuju uurimise ajalugu; arvutamiskiiside ja arvutamiskabinõude ajalugu.

19. **Oskussõnade tarvitamine.** Oskussõnade tarvitamisel oleks soovitatav võtta juhtnõõriks «Matemaatika Sõnastik» (III trükk, Tartu, Eesti Kirjanduse Seltsi kirjastus) ühes täiendustega, mis lähemal ajal ilmuvad MÕK-i «Toimetuste» 4. numbrina. Keele ühtluse ning puhtuse mõttes oleks tarvis hoiduda oma oskussõnade loomisest või juba tarvitusel olevate muutmisest, kus pole selleks eriti kaaluvaid põhjusi.

20. **Sümbolite tarvitamine.** Sümbolite tarvitamisel oleks ühtluse mõttes vaja käia MÕK-i väljaantud ja Haridusministeeriumi poolt soovitatud (6. XI. 1925, nr. 24575) «Matemaatika Sümboolika» põhimõtete ja näpunäidete järele.

Eriosa.

1. **Algebraline avaldus.** Algebra õpetamise lähteobjektiks on algebraline avaldus. Sellele on võimalik jõuda mitmel teel; nimelt: 1^o kirjutades arve üldkujul; 2^o väljendades arvutamise juhiseid; 3^o avaldades valemites kaudsel teel mõõdetavaid suurusid; 4^o lahendades üldkujul antud ülesandeid.

Näidetenä mõtte selgitamiseks olgu nimetatud:

1^o paaritu arvu avaldus:

$$2n + 1;$$

arvu avaldus, millel x kümnelist ja y ühelist:

$$10x + y;$$

2^o eeskirja väljendus, mille põhjal kontrollitakse jagamise saadust:

$$a = bq + r;$$

murdude liitmise juhise väljendus:

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{n} = \frac{an + bm}{mn}$$

3^o geomeetrilised suurused: ruudu, püstküliku, trapetsi ja ringi pinnad; kuubi, püströöptahuka, prisma ning silindri pinnad ja ruumalad.

4^o ülesanded ühtlase liikumise kohta: kehade käidud teed, liikuvate kehade vahelised kaugused, kohtamisajad; protsent-ülesanded: tulu kapitalist, tulu ärioperatsioonidest, protsentuaalne koosseis.

Kõigi avaldus- ja valemnäidete käsitlemisel tuleb tõsiselt tähelepanu pühendada nende otstarbe seletamisele: nad on lühikesed ja täpsa mõtteväljendamise abinõuks matemaatilises kiirkeeles ja kiirkirjas; sel kohal väljendavad nad eriti uuritavate suuruste arvutamise juhiseid või jälle eeskirju, mille järele ülesande lahendus tuletatakse tema andmeist.

Esimese kaaluvama rakendamise leiab valemi mõiste arvutamise põhiseaduste sümbolisel väljendamisel:

$$a + b = b + a;$$

$$a \cdot b = b \cdot a;$$

$$a + (b + c) = (a + b) + c;$$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Nende seaduste põhjaneva osa tõttu matemaatikas (nad on iga arvutamise aluseks) tuleb nende käsitlemist hoolsalt toimetada, eeskätt nende mõtet graafilise tõlgendamise teel õpilaste arusaamisele lähemale tuues ja nende osa numbrilisel arvutamisel selgitades.

Otseste järeldustena eelmistest seadustest esinevad arvutamise abivalemid:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2;$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Nende valemite mehaanilisel päheõppimisel pole harivat mõju; on tarvis, et õpilased selgesti taipaksid nende valemite mõttelist sisu. Valemite mõtet aitab suurel määral omaks teha nende graafiline tõlgendamine, eriti aga nende rakendamine

numbrilisel arvutamisel; neid võib õpetada otsekohe arvutamise, eriti peastarvutamise kergendamise vaatekohalt:

$$39 \cdot 41 = 40^2 - 1^2;$$

$$73^2 = 70^2 + 2 \cdot 70 \cdot 3 + 3^2;$$

$$101^3 = 100^3 + 3 \cdot 100^2 \cdot 1 + 3 \cdot 100 \cdot 1^2 + 1^3.$$

Tähtavalduse numbrilise väärtuse arvutamine võimaldab korduvalt temas väljendatud mõtet analüüsida ja tema koosseisu ning ehitust uurida. Numbriliste väärtuste arvutamiseks tuleb tarvitada peamiselt ühest tähest ehitatud avaldusi. Arvutamistöö peab toimuma sihi- ja plaanikindlalt, kindla kava — arvutamisskeemi — järele; viimane tuleb nõnda valida, et operatsioonide toimetamine sünniks võimalikult mõtte-
töövabalt, et igasugused abiarvutamised oleksid taandatud miini-
mumini, et kontrollimisel poleks tarvis asja uuesti kirjutada ja resultaadid esineksid kohe tabelis kokkuvõetutena. Praegu ülesseatud nõudeid selgitab näitena järgmine arvutamisskeem:

$s = \frac{3t}{1+t^2}$	t	t^2	$1+t^2$	$3t$	$\frac{3t}{1+t^2}$
	1	1	2	3	1,5
	2	4	5	6	1,2
	3	9	10	9	0,9
	:	:	:	:	:

Arvutamine toimub nõnda: kirjutatakse rida t väärtusi, näiteks 1, 2, 3...; arvutatakse t^2 : 1, 4, 9,..., siis $1+t^2$, siis $3t$, siis $3t$ ja $1+t^2$ jagatis. Töö toimub järjest ülevalt alla, mitte pahemalt käelt paremale. Arvutamised tuleb teha asjakohase täpsusega.

Avalduse s numbrilise väärtuse kõik leiab tähe t väärtuse muutumisel omale näitliku kujutuse ts -diagrammis: ühe muutuja t väärtused kujutatakse (näiteks ruutpaberil) ühel teljel, teise omad lõikudena teise

telje sihis. Siin on koht tutvustada õpilasi kohaste mõõ-
tude valiku küsimusega ning alguse ärajätmise
võttega; ka väärib kaalumist kujutamisevõtte ulatuse
ja tema täpsuse küsimus.

Avalduse väärtuse käigu kujutus kõverana lubab
astuda sammu kaugemale, kui seda võimaldab tabel: joonis
lubab graafilisel interpoolimisel leida avalduse väärtusi vahe-
pealsetel muutuja väärtustel, mis tabelis ei esine.

Algebraliste avalduste rühmitamist liikidesse [üks- ja hulki-
liikmed (polünoomid), sarnased avaldused, täis- ning murd-
ratsionaalsed avaldused, irratsionaalsed avaldused] on kohane
toimetada mitte algebrakursuse algusel, vaid hiljemini, kus on
kogunenud küllaldane avaldustematerjal ja hakkab tekkima
tarve avalduste liigitamise järele.

2. Aritmeetilised tehted. Aritmeetiliste tehete käsitle-
misel tuleb hoiduda avaldusi tarvitamast, mille liikmete ehitus
keeruline: peamaterjaliks selles osas on 1., 2. ja 3. astmelised
ühe muutuja polünoomid, nagu näiteks:

$$0,5x + 2,7; \quad x^2 - 5x + 6; \quad 2x^3 - 4x^2 + 7.$$

Jagamise käsitlemisel väärib tähelepanu jagamine vahega
 $x - a$; siin kerkib terve rida tähtsaid küsimusi: jäägi avaldus;
polünoomi väärtus täpis $x = a$; juhus, kus jagamine vahega $x - a$
sünnib jäägita; side võrrandi lahenduse mõistega; võrrandi
astme alandamise küsimus ühe tema lahenduse tundmisel; polü-
noomi teguriteks lahutamine; algebra põhilause.

Polünoomi teguriteks lahutamise küsimust ei tule mõista
probleemina, millel omaette väärtus: teda tuleb käsitleda ainult
sel määral, millel teda tarvis opereerimisel lihtsamate murdu-
dega. Teguriteks lahutamise näidetena valitagu ainuüksi nii-
sugused polünoomid, mille kujutamine korrutistena toimub arvu-
tamise põhiseaduste ja abivalemite otsesel rakendamisel.

3. Murrud. Murdude käsitlemine nõuab erilist hoolt:
algkoolis harjuvad õpilased murdudega töötama intuiitiiv-
selt; sügavam loogiline võtete põhjendus jääb
seal ära; selle koht on keskkoolis.

Murdude süstemaatiline kursus tuleb rajada esijoones arvulisele materjalile; intuiitiivselt äratuntud arvutamishäired saavad loogilise põhjenduse, väljendatakse algebra keeles ja rakendatakse murdudele, mille elementideks on lihtsa ehitusega täisratsionaalsed avaldused. Sagedad numbrilised näited on tarvilikud ka hiljemini, et tehete mõtet õpilastele arusaadavaks teha ja kuivapoolset abstraktset ainet konkreetse arvulise materjaliga elustada.

Murdude käsitleuskava kujuneks lühidalt nõnda: osa ja kordse mõiste, alg- ja kordarv, murdude avaldamine samanimelistes osades, ühenduses sellega suurem ühistegur ja vähem ühiskordne, murdude ühisnimetaja, murdude suuruste võrdlemine, murdude võrdumise tingimus (võrde põhiomadus), murdude liitmine ja lahutamine, osa leidmine tervest ja terve leidmine osa järele ühes murdude korrutamise ja jagamise küsimusega.

4. **Juuravaldused.** Juuravalduste käsitlemisel tuleb piiruda kõige lihtsamate juhtumustega: peale seda kui

$$\sqrt{a}, \sqrt[n]{a}, \sqrt[n]{a}$$

mõiste omandatud, tuleb tehetest käsitleda ainult:

arvu juure alla võtmist,

$$\text{näiteks} \quad a\sqrt{b} = \sqrt{a^2b}, \quad a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b};$$

arvu juuremärgi alt vabastamist,

$$\text{näiteks} \quad \sqrt[n]{a^3 b} = a\sqrt[n]{b};$$

sarnaste juurte koondamist juuravaldustes ja murru $\frac{a}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}$ nimetaja ratsionaalimist.

Juuravalduste materjal olgu võimalikult lihtne ja oma ehituses läbipaistev.

5. **Funktsionaalse olenevuse mõiste: 1. tsükkel.** Funktsionaalse olenevuse mõiste on algebrakursuse t u u m a k s. Suuruste olenevuse mõiste on osalt käsitlemist leidnud juba algkoolis; selle mõiste arendamine ja süvendamine on keskkoolis üheks tähtsamaks matemaatika õpetamise ülesandeks. Side

algkoolis uuritud lihtsamate olenemisuhtumustega luuakse kohe algebrakursuse alul, algebralise avalduse numbriliste väärtuste tabelite kokkuseadmisel ja nende väärtuste käigu graafilisel kujutamisel. Algkoolis käsitletavate valemite hulk on võrdlemisi piiratud: nad esinevad eeskätt äratuntud aritmeetiliste ja geomeetriliste tõdede väljendajatena. Keskkoolis on avalduste valiku vabadus tunduvalt suurem. Ülesannete ja harjutuste materjali valikul tuleb silmas pidada nõuet, et avalduse väärtuste arvutamine ei teeks üleliigseid raskusi. Avalduste näidetestena, mis numbriliseks tööks ja graafiliseks kujutamiseks kohased, olgu nimetatud järgmised:

$$ax^2 + bx + c, \quad \frac{a}{a+x}$$

$$\frac{ax}{1+x^2}, \quad \frac{ax^2}{1+x^2}$$

kohaselt valitud x -i piirkonnas ja kohaselt antud numbriliste kordajatega.

Kogu numbriline töö tuleb teha asjakohase täpsusega; graafiline töö esteetiliselt rahuldavana.

Sel kohal puudutatakse saadud kujukõverate iseärasusi ainult mööda minnes, ilma et neid sügavamalt uuritaks: rõhk langeb olenevuse mõtte arendamisele.

Positiivsete ja negatiivsete arvude mõiste loomisega laieneb tunduvalt olenevuste määramispiirkond: kõverad, mis ennemalt y -teljel lõppesid, täienevad uute osadega, omandades harmoonilisema, silma enam rahuldava kuju.

Esimeseks funktsiooniks, mille käigu omadused ja iseärasused tulevad põhjalikule uurimisele, on loomulikult lineaarfunktsioon

$$y = ax + b.$$

Tema käigu graafiliseks väljenduseks on sirge joon ja tema põhiomaduseks, et rippumatu ja rippuva muutuja kasvud olenevad võrdeliselt teineteisest. Siin on koht pikemalt peatuda lineaarse interpolatsiooni juures numbrilises ja graafilises käsitluses: selge arusaamine toimingu mõttest, lubatavusest ja tema rakendamisevõimaluse piiridest on tabelite tarvitamise mõistmise eelduseks.

Teiseks funktsiooniks, mis käsitlusele tuleb, on ruutfunktsioon $y=x^2$; selle olenevuse pööramisel saadakse funktsioon $x=\sqrt{y}$ ¹⁾. Muutujate x ja y funktsionaalse olenevuse vastastikkus, funktsiooni ühesuse ja kahesuse mõisted ning kõvera harude teljelise sümmeetria leiavad siin konkreetset erijuhul oma näitliku seletuse.

Funktsioon

$$y = x^2 + px + q$$

taandub endisele muutuja x lineaarse teisendamise teel; üldine ruutfunktsioon

$$y = ax^2 + bx + c$$

funktsioonile

$$x^2 + px + q$$

muutuja y mõõtkava kohaselt valikul.

Funktsiooni

$$y = x^3$$

(hiljemini näitena vahest ka $y=x^4$) käsitlemine sünnib tema käigu graafilise kujutuse najal. Tähelepanu väärub funktsioonide

$$x, x^2, x^3, x^4, \dots$$

kujukõverate käik algustäpi ümbruses: kujutatuna ühises teljes-tikus näitavad nad silmanähtavalt väikeste murdude astmete kiiret kahanemist.

Funktsiooni mõiste on kavas paigutatud võrrandi mõiste ette. Kõik mõttekäigud arenevad sel viisil sirgjoonselt, küsimused tekivad loomulikult, neid ei seata meelevaidselt, juhuslikult; aine läbitöötamine sünnib tema loomu kohaselt.

6. Võrrandite käsitlemine. Võrrand on võimsaks matemaatiliseks uurimisriistaks. Tema käsitlemisele tuleb pühendada väärilist tähelepanu. Võrrandite lahendamiseks on olemas üldised võtted või valemid; kuid mitte neis ei peitu võrrandite käsitlemise pea-otstarve: selle aineala käsitlemise eesmärgiks on esijoones mõtlemise arendamine. Valemid ja võtted ununevad lõpuks; neid võib tarbekorral raamatutest

1) Sümboli $\sqrt{y}$ tähenduse kohta v. MÕK-i väljaantud „Matemaatika Sümboolika“ lhk. 12, märkus 5.

leida, püsima peaks aga jääma oskus probleemis esinevaid suurusi ning nende sidemeid sümbolites väljendada ja probleemi-seade mõtet võrrandites avaldada. Ülesandeid, mis määratud ainult valemi või võtte äraõppimiseks, tuleb arvult piirata selleks otstarbeks hädatarviliku hulgaga; eriti põhjalikult aga peab käsitledama konkreetsete probleemide tõlkimist võrrandite keelde: võrrandite käsitlemine pakub head juhust näidata matemaatika rakendatavust meid ümbritseva tõelikkuse uurimisel.

Kavas on graafiline võrrandi lahendamistee nimetatud esimesel kohal; see ei pea õpetajat takistama soovi korral lahendamist valemi teel ette seadmast.

Säärase järjestuse põhjuseks on järgmised asjaolud: graafiline lahendamisvõte on näitlikum; ta annab lahenduse küll ainult piiratud täpsusega, kuna numbrilisel lahendamisel võib täpsust piiramata tõsta; kuid lahendusest valemi teel on graafiline selle poolest ette, et teda iga järgu algebralise võrrandi, isegi transtsendentsete võrrandite lahendamiseks saab kasutada, kuna valemite lahendamine on võimalik ainult äärmuseni kitsa ulatusega võrrandite tüüpides.

Võrrandite käsitlemisel on sünnis koht kaaluda meetodi hindamise küsimust: lahendamisvõtte ulatus ja tema piirid, võtte üldsus, võtte poolt võimaldatud täpsus, võttega töötamiseks kuluv aeg tema ühe- ja mitmekordsel rakendamisel.

Võrranditega tutvumine algab I õppeaastal 1. astme võrranditega. Ei saa kohaseks lugeda selle lihtsa ja tähtsa küsimuse käsitlemist alles peale igasuguste avalduste liigitamist ja laiemat tehete toimetamist nendega; ülesandeid, mis viivad esimese astme võrrandile, võib ja peab andma algebrakursuse algusest peale. Nende käsitlemine eeldab ainult selget arusaamist tähe tarvitamisest arvu tähisena, eriti tunnemaatunmärgina, ja arvutamise põhiseaduste otsese rakendamise oskust. Põhjalikuma käsitlemise ja laiema rakenduse leiab 1. astme võrrand peale lineaarfunktsiooni uurimist. Siit viib otsene tee kahe lineaarvõrrandi süsteemi juurde. Selle lahendamist on kohane esitada esijoones graafi-

lises tõlkes. Algebraalise lahendamise lähem eesmärk on saada kahest antud võrrandist järeldus, mis oleks vaba ühest tundmatust. Kahe lineaarvõrrandi süsteemi lahenduse uurimisel tuleb graafilise kujutuse najal hoolsalt läbi töötada juhtumused: ääris lõplik lahendus, lõpmatu lahendus, lõpmata palju lahendusi.

Teise astme üldvõrrandi

$$ax^2 + bx + c = 0$$

käsitlemisel tuleb näidata, et kohase pikkusmõõdu valiku teel y -teljel on võimalik kõiki ruutvõrrandeid graafiliselt lahendada ühe ja sama parabooli abil $y = x^2$.

Võrrandi lahendamist valemi põhjal tuleb lubada alles peale seda, kui lahendusavalduse tuletamise mõte on päris selge.

Teise astme võrrandsüsteemide lahendamist on kõige kohasem uurida ühenduses sirge, ringi, parabooli ja võrdhaarse hüperbooli ühistäppide otsimisega.

Irratsionaalvõrrandid ei ole kavas eriti nimetatud. Mõne üksiku näite võib läbitöötada geomeetriliste probleemide lahendamisel tekkiva tarbe korral.

Kolmanda astme võrrandi

$$x^3 + px + q = 0$$

käsitlemise eesmärgiks III klassis pole mitte anda lahendamise valemit, vaid näidata, et ka siis, kui niisugune valem puudub, võib ligikaudse lahenduse leida ja tema headust lineaarse interpoolimise teel järk-järgult tõsta. Mõtteliselt ei too küsimus uudist; ta näitab konkreetset juhtumust, et «järk-järguliste lähenduste meetod», millega on tutvunud juba teise astme võrrandi puhul, on rakendatav ka teiste võrrandite lahendamisel.

Kompleksarvude käsitlemine on mõeldud alles kavatsatavas VI (eri-) klassis; seni tuleb ruutjuure all esineva negatiivse suuruse juhul sellega leppida, et võrrandil pole lahendusi.

7. Arvu mõiste algebras. Algebrakursust pole kohane alata arvuvalla laiendamise küsimusega; posi-

tiivse ja negatiivse arvu mõiste loomine on esimeseks raskemaks abstraktsiooni sammuks keskkooli matemaatikakursuses. Selle sammu astumist tuleb võimalikult kergendada ja loomulikult sündida lasta. Üheks teeks negatiivsetele arvudele ning nende kujutusele jõuda on mõne lihtsa nähtuskäigu graafiline esitamine: maapinna profiili langemine ülevaltpoolt järve pinda allapoole seda, õhu temperatuuri langemine soojust külmale, bilansi langemine varast võlale jne. Pole tarvet kujutada positiivseid ja negatiivseid arve lõikudena ühel sirgel; kohasem on nende arvude kujutamine vektoritena, rööbiti teatud sihiga.

«Märkide seadusi» on teaduslikult seisukohalt lubamatut tõestama hakata; nad on kokkulepped, mis tehtud kindla eesmärgiga, alal hoida operatsioonide põhiseadusi ka uute elementidega laiendatud arvuvallas: nendega defiinitakse tehteid juhtumustel, kus endised definitsioonid mõtte kaotavad.

Formaalsete seaduste permanentsiprintsiibi abstraktse loomu tõttu oleks raske temale rajada kogu arvutamisreeglite laiendamist. Nendele reeglitele peaks loodama intuiitiivne alus, käsitledes konkreetseid näiteid, nagu maastiku või temperatuuri tõusmine ja langemine, vara ja võla muutumine, ühtlane liikumine.

On konkreetseil juhtumusil selgusele jõutud, et märkide reegel on asjakohane kokkulepe, siis tunnistatakse ta maksvaks igal juhul ja näidatakse, et sel puhul jäävad arvutamise põhiseadused maksvaks ka laiendatud arvuvallas.

Kuidaviisi laieneb ühiselt arvu mõistega ka funktsiooni oma, näitab võrdelise, pöördvõrdelise ja lineaarse olenevuse uurimine laiendatud arvuvallas.

Järgmiseks arvu mõiste laiendamise sammuks on ruut-irratsioonalse arvu mõiste loomine. Sümbolit $\sqrt{a}$ vaadatakse esiotsa kui nõuet, leida arv, mille ruut on a . Näidatakse lihtsail näitel $a = 2, 3, 5 \dots$, et pole võimalik nõuet täpsalt rahuldada ei täis- ega murdarvuga; seatakse küsimus nõude ligikaudse rahuldamise kohta; saadakse efekirjutatud täpsustele

0,1; 0,01; 0,001 jne. vastav rida $\sqrt{a}$ lähisväärtusi ning luuakse, mõttes järk-järguliste lähenduste rida lõpmatult pikendades, uue arvu mõiste; selle sümboliks valitakse vastavalt $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ jne.

Teheite reegleid irratsionaalarvude piirkonnas on võimaliku tõestada: ka need on kokkulepped; küll aga on võimalik tagantjärele nende otstarbekohasust näidata.

Viimases (kavatsetavas) VI klassis on ette nähtud kokkuvõtlik ülevaade arvuvalla laienemisest lihtarvust üle täis- ja murd-, positiivsete ja negatiivsete, ratsionaalsete ja irratsionaalsete arvude reaalarvude vallani. Järgmiseks sammuks on arvuvalla laiendamine kompleksarvudega. Säärase arvu mõtte kandjaks saab kohaselt sihitud vektor tasapinnal; tema abil leiavad tehted kompleksarvudega näitliku tõlgendamise. Ka siin on tarvis peatuda arvutamise põhiseaduste maksmajäämise juures.

Kompleksarvudega laiendatud arvuvallas on 1-se, 2-se ja 3-da astme võrranditel igal puhul vastavalt 1, 2 ja 3 lahendust. Ühes eelmiste resultaatidega valmistab viimaks binoomvõrrandite käsitlemine pinna algebra põhilause mõtte selgitamisele: algebralisel võrrandil on nii mitu lahendust, kui palju üksusi on tema astmenäitajas.

8. Funktsionaalse olenevuse mõiste: 2. tsükkel. Tsükli tuumaks on eksponent- ja logaritmolenevus. Esimene väärib tähelepanu oma sageda esinemise tõttu igapäevase elu küsimustes: liitprotsentidel kasvava kapitali-, tähtajaliste maksude- ja laenu kustutuseprobleemid lahenduvad eksponentvalemite; orgaaniline kasvamine, liikumise sumbumine, soojuste hajumine ja hulk teisi nähtusi alluvad eksponentseadustele.

Teise — logaritmi — tähtsus on tingitud eeskätt töö-ökonoomiliselt väärtuslikkude arvutamisinõudega, mis põhjenevad logaritmi omadustel. Eksponentfunktsiooni ja logaritmi loogiliselt rahuldav käsitlemine eeldab üldise astme mõiste samm-sammulist väljatöötamist. Piiratud aeg ja küsimuse abstraktne loomus ei luba seda koolis läbi viia: tuleb tarvilikkudele seostele jõuda intuiitiivselt. Asja käsitlemise abinõudena olgu nimetatud: aritmeetilise ja geomeetrilise

rea vastuseade; selle vastuseade astmik-kujutus; interpolatsioon täisarvuliste astmenäitajate puhul antud funktsiooni $y = a^x$ väärtuste tabelis; valmi logaritmidetabeli katseline kasutamine arvutamiste kergendusabinõuna.

Uurimise pea-eesmärgiks on jõuda intuiitiivsel teel eksponent-olenevust iseloomustavale liitmislausele:

$$f(x_1) \cdot f(x_2) = f(x_1 + x_2).$$

Olenevuse pööramine annab siis logaritmifunktsiooni ühes tema põhiomadusega:

$$g(x_1 \cdot x_2) = g(x_1) + g(x_2).$$

Viimast sidet võib rippumata eelmisest logaritmidete käsitlemise lähtekohaks võtta, seades endale ülesande, toimetada korrutamist kaudselt, nimelt kergema tehte — liitmise — teel.

Logaritmidete tabelite eesmärki ei tule näha ainuüksi selles, et õpilased omandaksid oskuse neid kasutada arvutamisinõuna; kõne all oleval näitel õpitakse üldse töötamist tabelitega. Ka on logaritmidetabel, -kõver ja -astmik eriti kohasteks «funktsionaalse mõtlemisviisi» arendamise abinõudeks.

Arvestades asjaolu, et kõigi konkreetsete probleemide andmed on teada ainult piiratud täpsusega, harilikult mitte üle 0,001 andme väärtusest, tuleb soovitada neljakohalisi tabelleid: väike lehekülgede arv hõlbustab erakordselt nende tarvitamist. Suur hulk tegeliku elu probleeme lubab töötamist isegi kolmekohalistega logaritmidega, mis poolele leheküljele ära mahuvad. Sama täpsust, nagu viimased, võimaldab vähema jõukuluga logaritmiline arvutuslühakat. Et selle ehitus kehastab logaritmi liitmislause, tuleb teda hinnata mitte ainult tähtsa arvutamistriistana, vaid ka eriti kohasena töö elustamise abinõuna kõigi küsimuste käsitlemisel, mis koonduvad logaritmi mõiste ümber. Operatsioonidena, mille toimetamine logaritmilisel arvutuslühakatil eriti kerge, olgu nimetatud: võrrete lahendamine, mõõtude teisendamine, korrutamine, jagamine, lineaarne interpoolimine, ruutimine, kuupimine, ruutjuure leidmine, pindade ning ruumalade arvutamine.

9. **Piiri mõiste** on üks tähtsamaist matemaafilistest mõttesünnitustest: ilma temata pole võimalik siduda selget mõtet suure hulga igapäevases elus tarvitataivate kõnekäändudega; näidetena olgu nimetatud: kiirus mitteühtlase liikumise korral; liikumise siht antud momendil kõverjoonse tee puhul; mäenõlva järskus antud kohal; takistuste võitmisel tehtav töö; mitteühtlases liikumises käidud tee.

Piiri mõiste ning piirile mineku selgitamise loomulikum tee läheb otsitava suuruse järk-järgulise lähendamise kaudu: ringi pikkust lähendame 6-, 12-, 24- jne. nurga ümbermõõtudega, kahaneva geomeetrilise rea summat kahe, kolme jne. liikme osasummaga, tuletist y' kasvude suhtega $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, vähendades samm-sammult x -kasvu.

Piiriprotsessi mõiste nõuab korduvat *ab ovo* selgitamist kohaste näidete najal. Alles pärast pikemat harjumist asjaga võib piirivõtteid mehaaniliselt tarvitama hakata. Viimased tuleb rajada intuitsioonile, mitte aga loogilispeentele põhjendustele.

Piiri mõiste käsitlemisel on lausete lühendustena möödapääsemata tarvilikud kõnekäänud: lõpmata kasvav, lõpmata vähenev (hoiduda tuleks ütlustest «lõpmata suur», «lõpmata väike»). Nende sõnade mõtet tuleb kohaselt valitud näidete ja graafiliste kujutuste najal õpilastele põhjalikult selgitada. Lähennemissümbolina tuleb tarvitada erandina noolt $\rightarrow$, mitte võrdusmärki $=$, lõpmatu kasvamise tähisena sümbolit $\rightarrow \infty$.

Näiteks

$$\begin{array}{l} \sin x \rightarrow 1 ; \quad \tan x \rightarrow \infty \\ x \rightarrow 0 \quad \quad \quad x \rightarrow \frac{\pi}{2} \end{array}$$

10. **Funktsionaalse olenevuse mõiste: 3. tsükkel.** Tsükli ülesandeks on selgitada kolm tähtsamat mõistet: nähtuse käigu pidevus, ühtlus ning kiirus ja käsitleda kahte täpsa loodusteaduse põhiprobleemi:

- a) määrata nähtuse arenemise kiirus, teades tema käiku, ja
- b) määrata nähtust valitsev seadus, tundes tema kiiruse käiku.

Esimese probleemi käsitlemise lõppsaaduseks on tule-
tise mõiste, mille erijuhuna esinevad kiiruse, järskuse ning
intensiivsuse mõisted; teise probleemi uurimise lõpptulemuseks
on integraali mõiste, mille erijuhuna esinevad: kõvera
joonega piiratud pindala, kõvera pinnaga piiratud ruumala,
jõu varal takistuste vastu tehtud töö, voolu võimsus jne.

Kogu töö peab lähtuma küsimusseadetest, arenema prob-
leemidel ning lõppema ülesannetega, mis kerkivad konkreet-
sete nähtuskäikude uurimisel, nagu neid külluses pakub meid
ümbritsev sündmustik: nihkumine, pöörlemine, paisumine, võnku-
mine, orgaaniline kasvamine, soojuste hajumine, voolu kustu-
mine jne.

Analüütiliselt antud olenevustest tulevad esimeses järjes
käsitlemisele ainult:

$$y = ax + b, x^2, x^3,$$

teise ja kolmanda astme polünoomid

ning funktsioonid $\frac{1}{x}$ ja $\sqrt{x}$;

teises järjes:

$$\sin x, a^x, \log x.$$

Ka kaudse olenemise uurimisel tuleb jääda eelmiste
funktsioonide piirkonda; näidetena olgu nimetatud:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c},$$

$$\sin(ax + b), e^{-kx}.$$

Kogu töö vältel peetagu silmas, et kõne all oleva tsükli
ülesanne on suure mõttelise väärtusega ja laialdaste rakendus-
tega tuletise ning integraali mõistete väljatöötamine, mitte
aga igasuguste avalduste differentsimine ning integreerimine.
Sel põhjusel on kavas nimetatud juhtumustest kaugemale ulatuv
differentsimis- ning integreerimisvalemite tuletamine ülearune;
ülevalnimetatud juhtumusi jätkub täiesti suure hulga tähtsate
matemaatiliste ning loodusteaduslikkude ülesannete lahen-
damiseks.

On soovitatav asja nõnda korraldada, et iga valemi tule-
tamisele järgneb selle rakendamine: sel viisil selgub kõige
paremini arendatud mõttekäikude väärtus.

Kõne all olev aine osa kuulub keskkoolis tänurikkamate matemaatika palade hulka: aine käsitlemisel on ka õpilasele nähtav selge uurimise loomus, intuiitiivne tõe äratundmine käib käsikäes tema loogilise põhjendusega, asja elustab kogu aeg katselise, algebralise, numbrilise ning graafilise töö vaheldumine.

11. Statistika alged. Esimeseks selgitamist nõudvaks mõisteks kõne all olevas tsüklis on sündmuse tõenäosus. Lihtsail võimalikult läbipaistvail skemaatilisel näiteil selgitatakse permutatsioonide mõistet, uuritakse üldse võimalikkude ja nähtusele soodsate juhtumuste küsimust; defiinitakse viimaste arvude suhtena sündmuse tõenäosus ning tõestatakse tõenäosuste liitmis- ja korrutamislauseid. Kogu näidete kompleks tuleb nõnda valida, et kombinatoorne arvutamine ei teeks raskusi; rõhk langeb kogu töö vältel mõistete selgitamisele.

Kaaluvamaks sammuks edaspidises töös on üleminek matemaatilisel tõenäosusel statistilisele; sündmuse tõenäosus on tema esinemise relatiivne sagedus küllalt pikas nähtustereas.

Liitmis- ja korrutamislauseste maksvust ka statistilise tõenäosuse puhul tuleb võtta aksioomina.

Statistilise tõenäosuse mõiste otseste rakendustena esinevad kindlustusprobleemid, mille lahendamise aluseks on suremustabelid.

Küsimustsükli lõpu moodustaks juhusest olenevate suurusväärtuste sagedusjaotuse uurimine; üks säärase jaotuse tüüpidest leiab väljenduse katsevigade seaduses.

12. Ligikaudse arvutamise küsimused. Suurem hulk andmeid, mida me saame välisilma vaatlemisel kas otsese tajumise, loendamise või mõõtmise teel, pole täpsad. Meie mõõtmis- ning uurimisriistade puudulikkuse tõttu, meie meelte piiratud tundlikkuse, mälu puuduste ning tööd segavate juhuslikkude välismõjude tõttu on saadud andmed vigased. Nad ei saa isegi põhimõtteliselt täpsad olla, sest et võimatu

on meie mõõtmistöö alust, meie mõõtuksusi (m, kg, sec jne.) täpsalt definiida.

Andme täppis viga on igal juhul meile tundmatu suurus; küll aga on harilikult teada võimaliku vea ülemmäär. Andme headust hindame tema võimaliku relatiivse vea ülemmäära järele.

Kui andmed on vigased, siis on seda ka nendest tuletatud järeldused. Viimaste täpsusetus oleneb peale andmete vigade ka veel sellest, et me suurt osa numbrilisi väärtusi saame arvutamisel tarvitada ainult piiratud täpsusega: nii tarvitame arve $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, π , e jne., samuti logaritme ning sin-, cos- ja tan-väärtusi kas kahe-, kolme- või neljakohalistena, teadvalt ära jättes vastavates kümnendkujutustes kõik kõrgemajärgulised määrgid. Graafilisel tööel tekivad vead peale muu ka veel joonistamisabinõude täpsusetusest. Öeldust järgneb, et numbrilise ja graafilise töö saadused üldiselt vigu sisaldavad. Põhimõttelise ja tegeliku väärtuse omandavad need saadused alles peale seda, kui on näidatud, et neis peituv viga on vähem lubatavast määra st, mille suurus tingitud andmete täpsusest.

Üks suurem tegeliku tähtsusega ning kaaluvama kasvatusliku väärtusega ülesannetest, mis matemaatika õpetamisel tähta, on harjutada õpilast igal sammul kaaluma usku, millega võib võtta andmeid ja nendele rajatud järeldusi.

Selle ülesande täitmiseks peaks kogu õppetöö kestes kaalutama igal kohasel juhul vea hindamise küsimusi ning harjutatama lühendatud arvutamise võtteid. Need palad on tõelikkusetunde arendamise kohasemaks abinõuks.

Alljärgnev rida näiteid selgitab suunda, milles tuleb juhtida tööd.

Tähtede tähendus on järgmine:

a ja b — suuruste tõelised väärtused;
 $a + \alpha$ ja $b + \beta$ — nende asemel saadud ligikaudsed väärtused;
 α ja β — vead või, üldisemalt, väikesed suurused.

Näited. 1°. Algebralise liitmise ja lahutamise käsitlemisel saadakse avalduste

$(a + a) + (b + \beta)$ ja $(a + a) - (b + \beta)$ vaatlemisel raskuseta summa ja vahe vea piirid.

2°. Murdude liitmise, lahutamise ja suurusjärjestamise käsitlemisel leitakse summa ning vahe relatiivse vea rajad.

3°. Korrutise $(a + a)(b + \beta)$ uurimisel leitakse korrutise vea ligikaudse avaldusena

$$a\beta + ba,$$

mis on aluseks lühendatud korrutamise võtte põhjendamisel. Samast avaldusest järgneb korrutise relatiivse vea ülemmäära valem.

4°. Kohast ainet lühendatud arvutamise võtete käsitlemiseks pakuvad arvutamise abivalemite erijuhud; väikeste a ja β puhul on:

$$(a + a)(a - a) \approx a^2$$

$$\frac{1}{1 + \beta} \approx 1 - \beta$$

$$(a + a)(b + \beta) \approx ab + (a\beta + ba)$$

$$(a + a)^2 \approx a^2 + 2aa$$

$$\sqrt{1 + \beta} \approx 1 + \frac{1}{2}\beta$$

$$(a + a)^3 \approx a^3 + 3a^2a.$$

5°. Funktsiooni kasvu avaldamine tuletise kaudu viib otsesel teel vea põhivalemi juurde:

$$\Delta y \approx f'(x) \cdot \Delta x;$$

sellel põhjeneb kõigi kaudselt määratavate suuruste vigade arvutamine. Iga geomeetria- ning füüsikavalem annab ainet vea põhivalemi rakendamiseks, pakkudes ühtlasi materjali sisukaks numbriliseks tööks.

Matemaatilistest küsimustest, mille lahendamine toetub otseselt viimasele valemile, olgu nimetatud täpsuse uurimise probleem, mida võib saavutada arvutamisel logaritmiliste tabelitega ning logaritmilise arvutuslükatiga.

6°. Ettevalmistuseks avalduste lähendamisele polünoomidega on määratud kordajate võtte käsitlemine. Ta annab funktsiooni $(1+x)^n$ korral lihtsal teel Newton'i binoomarenduse täisarvulise n puhul.

7°. Logaritmi, siinuse, koosinuse ning tangensi väärtuste arvutamise probleem viib küsimusele, kas neid funktsioone on võimalik ligikaudu kujutada polünoomidena. Määramatute kordajate meetod annab vaevata kujutuse. Viimase headuse hindamise nõue annab võimaluse korduvalt vea probleeme seada ning lähendusavaldusi tuletada. Viimaste näideteks on väikese a korral:

$$\log_e(1+a) \approx a - \frac{a^2}{2}, \quad \sin a \approx a - \frac{a^3}{6},$$

$$\tan a \approx a, \quad \cos a \approx 1 - \frac{a^2}{2}.$$

Paremaks abinõuks selge efektkujutuse muretsemiseks lähenduste headusest on funktsioonide eneste ning nende lähenduste graafiline kujutamine ühes ja samas teljestikus.

13. Geomeetria õpetamise ülesanne. Geomeetria õpetamise tähtsamaks ülesandeks on elava ruumilise kujutlemisvõime ning selge ruumilise mõtlemise harimine ja arenenud ruumitunde ning ruumimeele kasvatamine. Formaali-loogilise mõtlemise arenemine ja täpsa, seaduspärase joonistamise oskuse omandamine peaksid esinema õppetöö kõrvalsaadusena.

14. Geomeetria õpetamise abinõud. Tarvitada oleva vähese tundidearvuga on õppetöö eesmärgi saavutamine mõeldav ainult töö intensiivsuse tõstmisel maksimumini ning kõigi abinõude ärakasutamisel, mis kõlblikud töö lihtsustamiseks, kiirustamiseks, hõlbustamiseks ja elustamiseks.

Sääraste abinõudena tuleb nimetada kõige pealt lihtsaid, suures mõõtkavas valmistatud varras-, traat-, papp-, puu-, klaas-, vörk- ning niit-mudeleid. Nende valmistamine ei tee raskusi ja võib suuremalt osalt sündida õpilaste silmade ees nende eneste kaasabil.

Müügil olevad mudelid on sagedasti kõlbmatud: nad on liiga väikesed, vähe ülevaatlilikud, mitmeks otstarbeks korraga mõeldud, mis võtab nendelt värskuse, ning peale kõige kallid.

Teise tähtsa abinõuna geomeetria õpetamisel tuleb eriti rõhutada varras- ja traatmudelite varjupilte päikese kiirtes (paralleelprojektsioon) ning projektsiooniapparaadi hajuvas kiirtekimbust (tsentraalprojektsioon).

Kolmandal kohal tuleb nimetada täpsaid, paralleelprojektsioonis valmistatud kujutusi tähtsamaist ruumilistest korrapärastest objektidest, kõige parem õlivärviga linoleumil või kiltpapil, millel saab vabalt kriidiga edasi joonistada¹⁾.

Suur osa geomeetrilist tööd toetub joonisele. Oma ülesannet täidab joonis täiel määral ainult siis, kui ta on puhas, korralik, õige, ülevaatlilik ning rahuldab esteetiliselt. Nõue on maksev nii tahvli kui ka vihikujoonise kohta. Jooniste lugemise kergendamiseks tuleb laialt ära kasutada vastavaid tehnilisi abinõusid: kriipsjooned; värvilised lõigud, nurgad, kaared; viirutised; nooled. Eriti tuleb hoolt kanda selle eest, et tähistused oleksid lihtsad, võimalikult ühetähelised ega segaks joonise vaatlemist²⁾.

15. Deduktiivse geomeetria alged. Deduktiivse geomeetria käsitlemise alul tuleb hoolsalt selgitada geomeetrilise tõestuse tarvidust, eesmärki ning mõtet. Tõestuste korral langeb rõhk mitte nii väga tõestuse välisele küljele kui järjekindlusele mõtteahelas; tõestuste üldskeem kujuneb aja jooksul iseendast. Formaalselt, teaduslikult rahuldavat täielikkust ning loogilisi peenusi pole võimalik keskkooli-astmel nõuda: tuleb lubada toetumist teaduslikult seisukohalt ka vahest üleliigsele aksioomidele — kui intuiitiivselt õigeks tunnistanud tõdedele.

Seesuguste tõdede näidetena olgu nimetatud järgmised: iga pinda on võimalik väljendada arvuna; lihtne, kinnine hulk-

1) Täielikumat seletust „matemaatika õppeabinõude“ kohta annab sama pealkirja all ilmuv MÕK-i „Toimetuste“ 7. number.

2) V. MÕK-i ettepanekud tema „Toimetustes“ nr. 2: „Matemaatika Sümboolika“.

nurk jaotab tasapinna kaheks eraldatud osaks; ringi lõikaja läheneb kindlale piirseisule, kui teine tema ühistäppidest kõveraga viimast mööda järk-järgult läheneb esimesele; kasvab suurus nõnda, et ta kogu aeg jääb vähemaks teatud tõkkest, siis läheneb ta kindlasti piirile.

Et piiratud ajaga siiski töö eesmärki saavutada, tuleb kogu käsitletav materjal hoolsalt valida: käsitlemisele võetagu ainult säärased laused, millel on põhimõtteline väärtus ning küllalt laiad rakendamise võimalused. Tuleb kindlasti hoiduda huvivaeste, ühetaoliste lausete ja nende pöörete üleslugemisest: võib rahulduda üksikute tüüpide iseloomustamiseks kohaste lausetega. Lauserühmade näidetena, kus kõne all olevat nõuet tuleb eriti hoolsalt silmas pidada, olgu nimetatud: rööpsirgete, nelinurkade, ringi nurkade, kõõlude ja kaarte, ruumsirgete ja tasapindade rist- ja rööpseisu lausete tsükliid.

Üksikute lausete rühmitamine, järjestamine ning sidumisviis jäävad õpetaja valida.

16. Planimeetrilised põhisidemed. Uurimise peaobjektiks on kindla keha (*starrer Körper*) geomeetrilised omadused. Sel astmel ei tule kindlat keha mõista teadusliku fiktsioonina, vaid füüsilise reaalsusena. Aineosa mõtteliseks tuumaks on ühtuvuse ning sümmeetria mõisted, tema käsitlemise tähtsamaks meetodiliseks abinõuks: nihutamine (ühtuvuse tõestamisel) ning pööramine kuju tasapinnas asuva või tasapinnaga risti oleva telje ümber (sümmeetria tõestamisel).

Kolmnurga geomeetrias väärivad oma põhjaneva tähtsuse tõttu rõhutamist ühtuvusel laused ning võrdhaarse kolmnurga kui sümmeetria õpetuse põhikuju omadused. Rööpsirgete käsitlemisel tuleb selgesti väljendada paralleelide aksioom ja näidata, et rida teisi geomeetria tõdesid, nagu näiteks kolmnurga nurkade summa võrdumine π -ga, on oluliselt tingitud kõne all oleva aksioomi maksvusest.

Nii rööpsirgete kui ka rööpkülikute õpetuses tuleb piirata tüüpiliste lausetega, mis leiavad rakendamist konstruktsioonidel loomulikult valitud andmeist.

Korrapäraseid hulknurki on kohane käsitleda ühiselt ringiga, valmistades ette ringi pikkuse ning pindala mõõtmise käsitlemist.

Hilisemate eksituste ärahoidmiseks on soovitatav defiinida ringi puutujat algusest peale lõikaja piirkujuna.

17. Konstruktsioonülesanded. Konstruktsioonülesannete suur pedagoogiline väärtus seisab selles, et õpilasele avanevad siin hoopis laiemad isetegevuse võimalused, kui see lausete deduktiivsel tõestamisel on võimalik. Neid ülesandeid ei tule mitte käsitleda geomeetriakursuse eripeatükina, vaid orgaanilises ühenduses uuritava materjaliga. Nad ei tarvitse ka sugugi esineda tuntud lausete illustratsioonidena või rakendustena: mõni konstruktsioon võib sageli omaette tööeesmärk olla, millele püüdmisel leitakse rida lauseid ühes tõestustega lisasaadusena.

Riistade hulka pole kohane algusest peale piirata sirkli ja joonlauaga, kuna tegeliku töö juures ometi ka teised riistad, nagu $\perp$ -joonlaud, kolmnurk, mall, pabeririba, mõõdupuu, niit jne. tarvitamist leiavad. Küll aga tuleb kogu töö vältel alaliselt kaaluda, mida võimaldab antud riist teha, mil määral on see või teine vahend töö juures tarvilik või ülearune.

Järk-järgult kujuneb mõiste konstruktsioonidest, kus riistade valik teadvalt piiratud, ühes Euklides'e konstruktsioonide erijuhuga.

On tungivaks vajaduseks, et konstruktsioonid ei toimuks mitte ainult mõttes, vaid et neid tehtaks tegelikult. Ainult sel viisil õpitakse tundma töö vea mõistet, harjutakse saaduse täpsust kaaluma ning töö lihtsust hindama. Viimased kaalutlused on paremaks abinõuks eelarvamise eemaldamiseks, nagu oleksid ainult Euklides'e konstruktsioonid «täpsad». Tegelikult annavad *approksimaatiivsed võtted* sageli saaduse just väiksema veaga kui nn. «täpsad konstruktsioonid».

Konstruktsiooni resultaadi uurimisel on sünnis kaaluda küsimusi, kuidas saadus muutub andmete pideval muutumisel ning milleks ta taandub piirjuhtumustel; sel viisil saab hulk

head materjali funktsionaalse olenevuse mõtte arendamiseks ning intuiitiivse mõtlemise harjutamiseks.

18. **Tasapinna meetrilised probleemid** on tunduval määral abstraktsemad, kui seda olid enamalt käsitletud ühtvuse-, sümmeetria- ning asetumisküsimused; õpilased on nende probleemide uurimiseks aga ka juba vastavalt ette valmistatud, psühholoogiliselt küpsemad ning enam harjunud asja loogilise käsitlemisega. Meetriliste probleemide esimese tsükli moodustavad hulknurkade kuju teisendamise küsimused püsivaks jääva pinna tingimusel; uurimise lõppsaadusena esineb lause iga hulknurga ruutimise võimalusest sirkli ja joonlauaga. Kaaluvamaks tõeks sellest pindala lausetsüklist on Pythagorase lause: temale toetub kogu tasapinna ning ruumi kaudne mõõtmine. Sellest asjaolust on tingitud lause erakordne praktiline ning teoreetiline väärtus; viimane peab kogu aine käsitleluse selgesti nähtavale tulema.

Pythagorase lauselt viib otsene tee irratsionaalarvude (ühismõõduta suuruste) küsimustsüklile. Mõttekäigud koonduvad järk-järguliste lähenduste meetodi ümber ja viivad aksioomile: peale mõõtuksuse valikut on võimalik iga pikkust väljendada (ratsionaalse või irratsionaalse) arvuna.

Viimasele tõele tuleb rajada kogu sarnasuseõpetus. Sel viisil kaob tarve uurida iga lause puhul eraldi juhtumusi, kus lineaar-elementid on ühismõõtsed ja kus nad seda ei ole. Võrrete asemele astub igal pool lihtne võrdelist olenevust väljendav side linearelementide vahel: $l' = k \cdot l$, kus k on võrdetegur.

Järk-järguliste lähenduste printsiip on ka ringi sirgestamise ning tema pinna ruutimise probleemi juhtivaks mõtteks. On soovitatav neid küsimusi käsitleda rööbiti numbriliselt ja graafiliselt.

Tasapinna (ja ka ruumi) meetriliste probleemide tsükkel lubab laialt fusionistlikku käsitlemist: suur hulk puht-geomeetrisi lauseid laseb endid kõige otsemalt algebraliselt tuletada (näiteks võrdeliste lõikude laused eeldatavate pinnavalemite

alusel, samuti sarnaste kujude pindalade sidemed); rida algebralise iseloomuga lauseid võib kõige kergemini joonisest välja lugeda [näiteks $(a+b)$ $(a-b)$ ja $(a+b)^2$ valemid]; rida meetrilisi ülesandeid lubab eriti ülevaatlikku käsitlemist trigonomeetriliste funktsioonide abil. Koolis pole ruumi teaduslikult seisukohalt huvitavale «meetodi puhtuse nõudele»: paremaks tõele jõudmise teeks on koolis see, mis viib eesmärgile kõige kergemalt ja otsesemalt.

19. Stereomeetrilised sidemed. Stereomeetriliste sidemete käsitlemise pea-eesmärk on selge asendi mõiste kujundamine. Selle eesmärgi saavutamine pole mõeldav asendilauseste rägastiku pika deduktsiooni teel; monotoonne lausete tuleamine igava, sisuvaese kriidijoonise najal mõjub vaimuväsitavalt, annab vähe ainet elavate kujutelmade tekkimiseks ning on ka formaalselt vähese väärtusega; on ju tasapinna geomeetria käsitlemisel võimalik arendada deduktiivset mõtlemist hoopis soodsamal materjalil. Ruumiliste objektide selge kujutlemine nõuab mitte nii väga mõtte kui ettekujutuse pingutust. See vajab esiotsa ainelist alust oma toena. Sellena tuleb esijoones arvesse model; teises — varjud ja projektsioonid; stereoskoobilised kujutused; viimaks joonis. Stereomeetrilisi asendilauseid võib modelitelt välja lugeda; nende lausete väärtus tuleb esile eriti ruumiliste objektide seadusepäraste kujutuste valmistamisel kald- ja normaalprojektsioonis. Viimaste najal sünnib praegusajal kogu tehniline mõtlemine.

20. Ruumi meetrilised probleemid. Kuigi pind- ja ruumalade käsitlemine on ette nähtud alles keskkooli 5. klassis, tuleks ruumilise mõtlemise harjutamiseks aeg-ajalt juba varemini anda ülesandeid, mis sisaldavad ülalnimetatud elemente, lubades õpilastel töötada algkoolist teada olevate pind- ja ruumalavalemitega.

Üheks ruumi meetriliste probleemide käsitlemise ülesandeks on luua loogiline alus pind- ja ruumalavalemitele, milledele on algkoolis jõutud katselisel teel. Teejuhiks on kogu töö kestes mõned intuiitiivselt õigeks tunnistatud printsiibid

ning lubatavaks arvatud võtted. Näidetena olgu nimetatud: tasapinnale laotuvate pindade suuruse jäävuse printsiip nende pindade painutamisel; Cavalieri-printsiip; järk-järgulise lähendamise meetod ja piirilemineku võte; keha pind- ja ruumala määramise võte nende elementaarosade integreerimise teel.

Pind- ja ruumala küsimuste (näiteks kera pind- ja ruumala probleemide) käsitlemine «tühifusmeetodile» rajatud klassilises esituses on raskepärane ja nõuab aega, mida tundide piiratud arvu juures raske leida. Võrdlemata otsesemalt ja kergema vaevaga viib eesmärgile integreerimis- meetod, mis siin omakord leiab läbipaistva geomeetrilise tõlgendamise.

Ruumilised mõõtulesanded annavad head ainet nii graafiliseks kui ka numbriliseks tööks. Et nad aga oma otstarvet täidaksid, ei tohiks nad olla lihtsad arvude asetamisülesanded valmis valemitesse või konstruktsioonülesanded, mille lahendamine sünnib valmis eeskirjade järele: ülesande lahendamine peab nõudma ruumilist mõttetööd; ta ei pea võimalik olema ilma geomeetrilise vaatluseta ja uurimiseta. Üldiselt ei tohiks kitsendada ülesande lahendamismeetodi ning töö-abinõude valikut. Ülesannete valikul tuleks hoolt kanda selle eest, et nende lahendused õpilastele huvi pakuksid. Ainet seesuguste probleemide seadeks leidub külluses loodusteaduse ja tehnika alal.

21. Trigonomeetriline arvutamine. Esimene tutvumine trigonomeetriliste sümbolitega $\sin x$, $\cos x$ ja $\tan x$ sünnib kauguste, kõrguste, kallakute ja nurkade mõõtmise ülesannete graafilisel lahendamisel. Lihtne joonis mm-paberil annab võimaluse nende suuruste kahekohalisi tabelleid kokku seada. Viimaseid tuleks kohe kasutada konkreetsete probleemide lahendamise abinõuna: sel viisil selgub kõige paremini loodud mõistete otstarbekohasus.

Hiljemini tulevad uurimisele nende funktsioonide vahelised sidemed, nende määramispiirkonna laiendamise küsimus 90° kuni 180° ning kaugemale sellest. Kogu töö tuleb elustada uuritavate funktsioonide graafiliste kujutustega ning sel puhul

põhjalikult peatuda nende perioodsuse juures. Viimasega on tingitud nende funktsioonide laialdane rakendamisvõimalus. Ühtlasi leiab siin näitliku eelkäsitluse suur hulk mõisteid, nagu kasvamine, vähenemine, ekstreemumid, käänukohad, lõpmatu kasvamine, asümptootiline lähenemine. Nende sügavam uurimine toimub hiljemini tuletismõiste abil.

Kolmnurkade arvutamise ülesandeid tuleb piirata nende juhtumustega, mis otseselt toetuvad trigonomeetrilistele põhisidemetele ja mis tegelikult esinevad kauguste, kõrguste, kallakute ja nurkade kaudsel määramisel. Harjutuste materjal ei tohiks olla juhuslikkude arvude rägastik; ta peab niivõrt sisurikas olema, et tema läbitöötamine pakuks õpilasele huvi. Tuleks soovida, et ülesanded oleksid pärit õpilaste lähemast ümbrusest ja tarvilikud andmed muretsetaks nende eneste poolt lihtsate mõõtmiste teel. Numbrilise töö puhul tuleb nõuda kindlaid arvutamisskeeme ning arvutamiste vahetpidamatut kontrolli. Saaduste täpsus peab olema kooskõlas andmete omaga: tõelikkusemeele kasvatamiseks on tarvilik igakordne vea hindamine nii andmetes kui saadustes.

22. Analüütilise geomeetria alged. Analüütilise geomeetria käsitlemise ülesanne on harjutada mõtlemist koordinaatides. Oskust neis töötada on praegusel ajal vaja igal sammul: kogu meie orienteerumine ruumis, maapinnal, merel, õhus, maa all, samuti kaardil, plaanil või topograafilisel ülesvõttel sünnib koordinaatide abil. Kõrvu sellega on koordinaatide meetod aluseks olnud viimaste aastasade matemaatika arenemisele. Ei saa kahtlust olla meetodi käsitlemise arendavas mõjus: ta on sillaks, mis ühendab ruumi- ning arvu-mõttevaldu.

Tunduv osa analüütilise geomeetria eeltööst on tehtud funktsioonide käikude graafilisel kujutamisel:

$$y = ax + b, ax^2, ax^2 + bx + c, \frac{1}{x}$$

ja nende kukukõverate iseärasuste vaatlemisel. Sellel alusel toimub analüütilise geomeetria tuummõiste — kõvera võrrandi mõiste selgitamine. Selleks valitavad näited tuleb võtta

erandita kõverate hulgast, millede definitsioon ennast raskuseta tõlkida lubab koordinaatide keelde.

Üksikasjalisemale käsitlemisele tulevad ainult esimese ja teise astme jooned; pole mingi tarvet püüda tuletada võimalikult suurt hulka nende joonte üllatavaid omadusi; võib piirduda võrdlemisi väikeste näidete hulgaga, mis omaette huvi pakuvad ning tähtsad laialdaste rakenduste tõttu; töö eesmärgiks on eeskätt mõtlemisviisi arendamine, mitte teadmiste kuhjamine.

23. Perspektiivi ja projektiivse geomeetria alged.

Perspektiivi tähtsus üldhariduslike ainet tsüklis seisab selles, et temale on rajatud kogu klassiline Lääne-Euroopa maalikunst; varjud täpikujuliste valgusallikate kiirtes, päevapilt, udupilt, kino-näitelina pilt ja, mis kõige tähtsam, kogu välisilma kujutused meie silma võrkkilel on perspektiivid.

Töö tuleb kõne all olevas küsimustsüklis rajada katsealisele alusele; nimelt kehade varjude vaatlemisele, mis nad heidavad voltakaare, künkla või mingi teise täpikujulise valgusallika kiirte kimbus.

Siin selguvad näitlikult perspektiivi põhimõisted: vaatepiir, peapunkt, distants, sirge pagutäpp, tasapinna pagusirge. Varemini tundmaõpitud stereomeetrilised sidemed võimaldavad sel puhul laialdast huvirikast ning tähtsat rakendamist perspektiivi põhiseaduste ning põhikonstruktsioonide tuletamisel: joonistamistunnis antavad empiirilised juhised saavad omale teadusliku aluse. Töö üldeesmärgiks on näidata, et ruumilise objekti omadused määravad tema kujutuse omadusi ja ümberpöörduvalt. Kohaselt valitud päevapiltide lugemine annab ainet elementaarse fotogramm-meetriliste küsimuste kaalumiseks.

Perspektiivse kujutusena esineb ka maapinna kaart stereograafilises või Mercator'i projektsioonis. Tähtsamateks mõisteteks, mis sel puhul valgustamist nõuavad, on kaardi kujutruudus väikestes osades, kaardi mõõtkava, geodeetiline joon maakeral ja vahest ka loksodroom.

Käsikäes perspektiivsete kujutuste vaatlemisega ja nende omaduste uurimisega valmivad geomeetria projektiivse käsitluse põhimõisted: harmooniline asend, kaksiksuhe, täielik nelinurk (Steiner'i trapetsi joonis perspektiivis), projektiivses vastavuses olevad sirgete kimbud, lõpmata kauged ruumielemendid. Selle lausetetsükli ilusamaks rakenduseks on koonuslõigete ühiskäsitlus: nad esinevad vastamisi perspektiivsete kujutustena, kust korraga järgnevad kõik nende ühised omadused: ühine definitsioon, diameetrite, puutujate ja fookuste omadused. Side analüütilises geomeetrias käsiteldud teise astme kõveratega luuakse Dandelin'i võtte abil.

24. Märkus. Kava aineosa hindamisel tuleb silmas pidada mitte ainult tema väärtust omaette, vaid tõsiselt arvestada asjaolu, kuivõrt ta vastab oma loomupoolest kooliharude erilaadile. Sellelt seisukohalt asja vaadeldes peaks näiteks reaalarvude eriti rõhutama matemaatika rakendusi täpsates teadustes, tehnikaharus — normaalprojektiooni võtteid, sotsiaalarvud — statistika algeid, kommertsharus rahandusprobleeme.

Kuigi kolmes viimases klassis kõigi harude matemaatika-kavades suur osa palasid nime poolest ühte langeb, ei pea see mitte tähendama, et neid tuleb ka ühteviisi käsitella: harudes väiksema matemaatikatundide arvuga tuleb olude sunnil piirduda palamõtte tuuma ja vähesearvuliste illustratsioonide, näidete ning rakenduste esitamisega. Ka tuleb viimaseid üldiselt lihtsamatena võtta ja arvutamise- ning kujutamistehniliselt kergematena valida kui vastavaid ülesandeid reaalarvude.

Tarvilikkude lausete nimestik.

Eelmärkus. Alljärgnevas lausete nimestikus pole aset leidnud definitsioonid, põhjustel, mis seletuskirja üldosa 16-das numbris nimetatud. Laused pole liigitatud aksioomideks ja teoreemideks, et õpetajale vabadus jätta eeldusi oma äranägemise järele valida. Samuti ei ole peatunud üksikute lausete rakendustel.

Lausete väljenduse kuju, nagu ta allpool esineb, pole sunduslik õpetajale.

Algebra.

Kommutatiivsuse seadus liitmisel:

$$a + b = b + a.$$

Assotsiatiivsuse seadus liitmisel:

$$a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c.$$

Kommutatiivsuse seadus korrutamisel:

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

Assotsiatiivsuse seadus korrutamisel:

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot b \cdot c.$$

Distributiivsuse seadus:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

$$a + (b - c) = (a + b) - c = a + b - c$$

$$b - (+a) = b - a; \quad b - (-a) = b + a$$

$$(+a)(+b) = +ab$$

$$(+a)(-b) = -ab$$

$$(-a)(+b) = -ab$$

$$(-a)(-b) = +ab$$

$$(-a)^2 = +a^2$$

$$(-a)^3 = -a^3$$

Arvutamise abivalemid:

$$ac + bc + ad + bd = (a + b)(c + d)$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Märkus: Viimase rühma valemid tuleb lugeda nii ühes kui teises suunas.

Võrdeliselt olenevate suuruste x ja y side:

$$y = m \cdot x \quad (m \text{ on konstant}).$$

Pöördvõrdeliselt olenevate suuruste x ja y side:

$$y = \frac{k}{x} \quad (k \text{ on konstant}).$$

Lineaarselt olenevate suuruste side:

$$y = mx + b.$$

Lineaarse interpolatsiooni valem:

$$y - y_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} (x - x_1).$$

Aritmeetilise rea üldliige

$$a_k = a_1 + (k - 1) \cdot d.$$

Aritmeetilise rea n liikme summa

$$s_n = \frac{1}{2} (a_1 + a_n) \cdot n.$$

Murd $\frac{a}{m}$ on suurem kui $\frac{b}{n}$ tingimusel

$$an > bm.$$

Murdude võrdumise tingimus (võrde põhiomadus):

kui $\frac{a}{m} = \frac{b}{n}$, siis on $an = bm$ ja ümberpöörduvalt.

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{n} = \frac{an + bm}{mn}$$

$$\frac{a}{m} - \frac{b}{n} = \frac{an - bm}{mn}$$

$$\frac{a}{m} \cdot \frac{b}{n} = \frac{ab}{mn}$$

$$\frac{a}{m} : \frac{b}{n} = \frac{an}{bm}$$

Võrrandi $x^2 + px + q = 0$ lahendus

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad (1)$$

Võrrandi $ax^2 + bx + c = 0$ lahendus

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Võrrandi $x^2 + px + q = 0$ lahenduste x_1 ja x_2 omadused:

$$x_1 + x_2 = -p,$$

$$x_1 \cdot x_2 = +q.$$

Sama võrrandi pahem pool

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2).$$

$$\sqrt{a^2 b} = a \sqrt{b}$$

$$\sqrt[3]{a^3 b} = a \sqrt[3]{b}$$

$$\frac{m}{\sqrt{a}} = \frac{m \sqrt{a}}{a}$$

$$\frac{m}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{m(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{a - b}$$

$$\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \quad (n=2; 3)$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad (n=2; 3).$$

$$\log(a \cdot b) = \log a + \log b$$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$$

$$\log a^n = n \log a$$

$$\log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log a.$$

Geomeetrilise rea üldliige

$$a_k = a_1 \cdot q^{k-1}.$$

Geomeetrilise rea n liikme summa

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Lõpmatu kahaneva geomeetrilise rea summa

$$s = \frac{a_1}{1 - q} \quad (|q| < 1).$$

Funktsioon $y = f(x)$ on pidev, kui ühes $\Delta x \rightarrow 0$ ka $\Delta y \rightarrow 0$.

Kui y muutub ühtlaselt x -i muutumisel, siis on y lineaarne x -i funktsioon:

$$y = mx + b.$$

Funktsiooni $y = f(x)$ tuletis

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

kujutab $f(x)$ käigu kujukõvera puutuja kaldenurga tangensi.

Differentsimisvalemid.

Funktsioon:

Tuletis:

$$ax + b$$

$$a$$

$$x^2$$

$$2x$$

$$x^3$$

$$3x^2$$

x^n	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$a \cdot f(x)$	$a \cdot f'(x)$
$f(x) + c$	$f'(x)$
$f(x) + g(x)$	$f'(x) + g'(x)$
$f(x) - g(x)$	$f'(x) - g'(x)$
$f(x) \cdot g(x)$	$f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$
$f(u), u = u(x)$	$f'_u(u) u'_x(x)$
$c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0$	$3c_3x^2 + 2c_2x + c_1$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
a^x	$a^x \cdot \log a$ (alusel e)
e^x	e^x
$\log x$ (alusel e)	$\frac{1}{x}$

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{m} a^{n-m}b^m + \dots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + \binom{n}{n} b^n \text{ (Newton).}^1)$$

Funktsioon $f(x)$ kasvab, kui $f'(x) > 0$

ja väheneb, kui $f'(x) < 0$.

Funktsiooni ekstreemumi tunnused: täpis x_0 on $f(x)$ maksimum, kui: $f'(x_0)=0$, $f'(x_0-h)>0$, $f'(x_0+h)<0$; minimum, kui: $f'(x_0)=0$, $f'(x_0-h)<0$, $f'(x_0+h)>0$.

Funktsiooni $y=f(x)$ käigu kujukõvera käänukohti määravad tingimused $f''(x_0)=0$, $f''(x_0-h)<0$, $f''(x_0+h)>0$
või $f''(x_0)=0$, $f''(x_0-h)>0$, $f''(x_0+h)<0$.

Newton'i võtte alus: kui võrrandi $f(x)$ lahenduse lähisväärtus on α , siis on lahenduse täpsam lähisväärtus

$$\beta = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}.$$

On suuruse täppis väärtus a , tema mõõtmisel tehtud viga a , siis on mõõtmise relatiivne viga ligikaudu võrdne jagatisega

$$\frac{a}{a+a}.$$

Kui x tähendab otseselt mõõdetavat suurust ja y määratakse kaudselt seose $y=f(x)$ abil, siis on x -i mõõtmisveaga Δx tingitud y -viga

$$\Delta y \approx f'(x) \cdot \Delta x.$$

On pind piiratud kõveraga $y=f(x)$, x -teljega ja kahe ordinaadiga, siis on pinna element

$$du = y \cdot dx$$

ning pind (kahe ordinaadi vahel täpes x_0 ja x)

$$u = \int_{x_0}^x y \cdot dx.$$

Kui

$$y = c_2 x^2 + c_1 x + c_0,$$

siis on $\int y \cdot dx = \frac{1}{3} c_2 x^3 + \frac{1}{2} c_1 x^2 + c_0 x + c$,

kus c on integrimiskonstant.

On pöördkeha ristlõike raadius $y=f(x)$ ja langeb x -telg ühte pöördteljega, siis on keha ruumala element

$$dV = \pi y^2 \cdot dx$$

ning keha ruumala (kahe ristlõike vahel täpes x_0 ja x)

$$V = \pi \int_{x_0}^x y^2 \cdot dx.$$

Vahetluste (permutatsioonide) arv n elemendist

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n!$$

On nähtuse tõenäosus teatud katses p_1 ning teises katses p_2 , siis on tõenäosus, et nähtus esile tuleb k a s esimeses v õ i teises katses:

$$p = p_1 + p_2.$$

On nähtuse tõenäosus ühes katses p_1 , teises, rippumata sellest, kas ta esimeses juba esinenud, p_2 , siis on tõenäosus, et nähtus esile tuleb kui esimeses n õ n d a k a teises katses:

$$p = p_1 \cdot p_2.$$

Nähtuse relatiivne sagedus küllalt pikas katsereas on praktiliselt võrdne tema esiletulemise tõenäosusega.

Imaginaarse üksuse astmed on:

$$i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1.$$

Kompleksarvu $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$

aste

$$z^n = \rho^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) \text{ (Moivre).}$$

Võrrandi

$$z^n - 1 = 0$$

lahendused on:

$$z_k = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n},$$

kus

$$k = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Geomeetria.

Läbi kahe täpi läheb üks ainuke sirge.

Kaks sirget võivad ainult ühes täpis lõikuda.

Ühtuvail nurkadel on ühtuvad kõrvunurgad.

Tippnurgad on ühtuvad.

Tasapinnal läheb läbi täpi üks ainuke sirge, mis risti sel tasapinnal asetseva kinnissirgega.

Võrdhaarses kolmnurgas on tipunurga poolitaja ühtlasi alusepoolitaja ja alusele toetuv kõrgus ning määrab aluse keskristjoone ja kolmnurga sümmeetriatelje.

Võrdhaarse kolmnurga alusnurgad on ühtuvad.

Ühtuvate alusnurkadega kolmnurk on võrdhaarne.

Kaks kolmnurka on ühtuvad:

1^o. kui ühe kolmnurga kaks külge ja nende vahel olev nurk on ühtuvad teise kolmnurga vastavate elementidega;

2^o. kui ühe kolmnurga külge ja kaks nurka on ühtuvad teise kolmnurga vastavate elementidega;

3^o. kui ühe kolmnurga küljed on ühtuvad teise kolmnurga külgedega;

4^o. kui ühe kolmnurga kaks külge ja selle küljepaari suurema külje vastas olev nurk on ühtuvad teise kolmnurga vastavate elementidega.

Läbi täpi läheb üks ainuke sirge, mis rööbib seda täppi mitte sisaldava kinnissirgega.

Kaks sirget on rööbikud, kui nende lõikumisel kolmandaga tekivad ühtuvad vastavad nurgad, või ühtuvad põiknurgad, või niisugused vastasnurgad, millede summa on π .

Rööpsirgete lõikumisel sirgega tekivad ühtuvad vastavad nurgad, ühtuvad põiknurgad ja niisugused vastasnurgad, millede summa on π .

Kaks sirget on isekeskis rööbikud, kui kumbki neist on kolmandaga rööbik.

Vastavalt rööbikute või vastavalt risti seisvate haaradega teravnurgad on ühtuvad.

Kolmnurga välisnurk võrdub selle nurga tipu vastas oleva kahe sisenurga summaga.

Kolmnurga sisenurkade summa on π .

Tasases, lihtsas kumeras n -nurgas on sisenurkade summa $\pi(n-2)$.

Täpist sirgele joonistatud kaldlõik on seda pikem, mida pikem lõigu (sirgele võetud normaal-) projektsioon.

Täpi ja sirge vaheline ristlõik on lühem kui kaldlõik.

Kolmnurga kahe külje summa on suurem ja nende vahe vähem kui kolmas külj.

Kolmnurga suurem nurk asub suurema külje vastas ja ümberpöörduvalt.

Kolmnurga kesk-ristjooned lõikuvad ühes täpis; samuti lõikuvad vastavalt ühes täpis kolmnurga kõrgussirged ja nurga-poolitajad.

Rööpkülilikul on ühtuvad vastasküljed ja ühtuvad vastasnurgad.

Ühtuvate vastaskülgedega tasane, lihtne nelinurk on rööpkülilik.

Lihtne nelinurk, millel kaks ühtuvat ja rööbikut külge, on rööpkülilik.

Rööpküliliku diagonaalid poolitavad teineteist.

Püstküliliku diagonaalid on ühtuvad.

Rombi diagonaalid seisavad teine teisel risti.

Trapetsi kesklõik on alustega rööbik; kesklõik on aluste aritmeetiline keskmine.

Ringi diameeter poolitab sel diameetril risti seisva kõõlu, kõõlule vastava kesknurga ja kaare.

Diameeter on ringi sümmeetriatelg.

Ühtuvaile kõõlulele ringis vastavad ühtuvad kesknurgad; suuremale kõõlule suurem kesknurk.

Diameeter on kõige suurem kõõl.

Ringi puutuja seisab puutetäppi viival raadiusel risti.

Raadiuse ja ringjoone ühistäpis raadiusel risti seisev sirge on ringi puutuja.

Täpist ringile joonestatud puutelõigud on võrdsed.

Ringi piirdenurk on võrdne samale kaarele toetuva kesknurga poolega.

Ringi täpist joonestatud puutuja ja kõõlu vaheline nurk võrdub kõõlule vastava kesknurga poolega.

Diameetrile toetuv piirdenurk on täisnurk.

Korrapärasele hulknurgale saab ringi sisse joonestada ja ringi ümber joonestada.

Ühtuvate alustega ja ühtuvate kõrgustega rööpkülükute pindalad on võrdsed. Samadel tingimustel on võrdsed ka kolmnurkade pindalad.

Täisnurkse kolmnurga kaatetitele ehitatud ruutude summa on võrdne hüpotenuusile ehitatud ruuduga (Pythagoras).

Hulknurga ruutimine on sirkli ja joonlaua abil teostatav.

Püstküliku pindala on võrdne kahe lähiskülje pikkuste korrutisega.

Rööpküliku pindala on võrdne aluse ja kõrguse pikkuste korrutisega.

Kolmnurga pindala on võrdne aluse ja kõrguse pikkuste poole korrutisega.

Trapetsi pindala on võrdne kesklõigu ja kõrguse pikkuste korrutisega.

Nurga haarade lõikumisel rööpsirgetega tekivad haaradel ja lõikajatel võrdelised lõigupaarid.

Kui nurga haarade lõikumisel sirgetega tekkinud vastavad lõigupaarid on võrdelised, siis on lõikajad rööbikud.

Kaks kolmnurka on sarnased:

1°. kui üks nurk ühes kolmnurgas on ühtuv ühe nurgaga teises ja nende nurkade lähisküljed on võrdelised;

2°. kui kaks nurka ühes kolmnurgas on vastavalt ühtuvad kahe nurgaga teises;

3°. kui kolmnurkade küljed on võrdelised;

4°. kui ühe kolmnurga kaks külge on võrdelised teise kolmnurga kahe küljega ja nurk, mis ühes kolmnurgas asub nimetatud küljepaari suurema külje vastas, on võrdne vastava nurgaga teises kolmnurgas.

Sarnaste hulknurkade pindalad on võrdelised külgede pikkuste ruutudega.

Täisnurkse kolmnurga hüpotenuusile toetuv kõrgus on kaatete projektsioonide keskmine võrdeline (võttes projektsioone normaalselt hüpotenuusile).

Kaatet on oma projektsiooni ja hüpotenuusi keskmine võrdeline.

Kolmnurga nurgapoolitaja jaotab vastaskülje võrdeliselt nurga lähiskülgedega.

Ringi lõikaja pöörlemisel kinnistäpi ümber jääb lõikaja osade pikkuste korrutis konstantseks, arvates osi täpist ringini. Asub kinnistäpp väljaspool ringi, siis võrdub see korrutis samast täpist joonestatud puutelõigu pikkuse ruuduga.

Ringi ümber joonestatud lihtsa hulknurga ümbermõõt ja pindala on vastavalt suuremad kui sama ringi sisse joonestatud lihtsa hulknurga ümbermõõt ja pindala.

Ringi ümber ja sisse joonestatud lihtsate korrapäraste ühenimeliste hulknurkade ümbermõõtude vahed kahanevad lõpmata külgede arvu piiramata kasvamisel. Samal tingimusel kahanevad lõpmata nimetatud hulknurkade pindalade vahed.

Korrapärase hulknurga pindala võrdub perimeetri ja apoteemi pikkuste poole korrutisega.

Ringjoone pikkus on $2\pi r$; ringjoone pindala on πr^2 , kus r on ringi raadius.

Sektori pindala on võrdeline kesknurgaga.

Tasapinna määravad kolm mitte ühel sirgel asetsevat täppi, või kaks lõikuvat sirget, või kaks rööpsirget.

Sirge asub tasapinnal, kui neil mõlemil on kaks ühist täppi.

Kaks tasapinda lõikuvad sirges joones, või nad on rööbikud.

Rööptasapindade lõikumisel tasapinnaga tekivad rööbikud lõiksirged.

Läbi täpi läheb üks ainuke tasapind, mis rööbik seda täppi mitte sisaldava kinnistasapinnaga.

Kolme tasapinna lõikumisel tekkinud sirged on kas isekeskis rööbikud või lähevad läbi ühise täpi.

Sirge, mis risti kahe lõikuva sirgega, on viimaste sirgete tasapinna normaal.

Rööplõikude paralleelprojektsioonid on rööbikud. Rööplõigud on võrdelised oma paralleelprojektsioonidega.

Kera lõikumisel tasapinnaga tekib ring; viimase raadius on kõige suurem, kui lõikaja tasapind läheb läbi kera kesktäpi.

Prisma ruumala võrdub põhja pindala ja kõrguse pikkuse korrutisega.

Püramiidi ruumala võrdub põhja pindala ja kõrguse pikkuse korrutise kolmandikuga.

Ümmarguse silindri ruumala on $\pi r^2 h$; tema külgpind $2\pi r h$, kus r on põhja raadius ja h silindri kõrgus.

Ümmarguse püstkoonuse ruumala on $\frac{1}{3} \pi r^2 h$, külgpindala $\pi r l$, kus r on põhja raadius, h koonuse kõrgus ja l moodustaja pikkus.

Kera vöö pindala on $2\pi rh$, kera täispind $4\pi r^2$, kera ruumala $\frac{4}{3}\pi r^3$, kus r on kera raadius ja h vöö kõrgus.

Analüütilise geomeetria alged.

Kahe täpi $(x_1|y_1)$ ja $(x_2|y_2)$ vahelise kauguse ruut on

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Täpi $(x|y)$ ja alguse $(0|0)$ vahelise kauguse ruut on

$$x^2 + y^2.$$

On lõigu otsadeks $(x_1|y_1)$ ja $(x_2|y_2)$ ja jaotab teda täpp $(x|y)$ vahekorras $m_1:m_2$, siis on

$$x = \frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}, \quad y = \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}.$$

Sama lõigu keskkoha koordinaatideks on:

$$x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2).$$

Esimese astme võrrandiga

$$Ax + By + C = 0$$

määratud sideme graafiline kuju on sirge joon.

Sirge joone võrrand on lineaarne.

Sirge võrrand on määratud:

1^o. algordinaadiga b ja tõusuga m :

$$y = mx + b;$$

2^o. lõikudega a ja b , mis sirge tekitab telgedel:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1;$$

3^o. sirge kaugusega algusest p ja sirge normaali kalde-nurgaga α :

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0.$$

Täpi $(x_0 | y_0)$ kaugus sirgest

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$$

on

$$|x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - p|.$$

Kahe sirge $y = m_1 x + b_1$ ja $y = m_2 x + b_2$ vahel oleva nurga tangensi absoluutväärtus on

$$\left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|.$$

Samade sirgete rööpseisu ja ristseisu tingimused on vastavalt:

$$m_1 - m_2 = 0$$

ja

$$1 + m_1 \cdot m_2 = 0.$$

Kui ringi keskkohkt valida koordinaatide alguseks ja raadius tähistada r , siis on ringi võrrand:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Kui ellipsi sümmeetriateljed valida koordinaatide telgedeks ja tähistada tema telgede pikkused $2a$ ja $2b$, siis on ellipsi võrrand:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ellipsi fookuste vahe on $2c$, kus $c^2 = a^2 - b^2$ ($a > b$).

Kui hüperbooli sümmeetriateljed valida koordinaatide telgedeks ja tähistada fokaalsirgel asuva telje pikkus $2a$, teise telje pikkus $2b$, siis on hüperbooli võrrand:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Hüperbooli fookuste vahe on $2c$, kus $c^2 = a^2 + b^2$.

Kui valida parabooli sümmeetriatelg ja puutuja lagitäpis koordinaatide telgedeks ja tähistada fookuse kaugus juhtjoonest p , siis on parabooli võrrand:

$$y^2 = 2px.$$

Teljestiku rööplükkel teisenevad koordinaadid valemite järele:

$$\begin{aligned}x &= x' + a \\ y &= y' + b,\end{aligned}$$

kus x, y ja x', y' tähendavad vastavalt täpi koordinaate vanas ja uues süsteemis ning a ja b on uue alguse koordinaatideks vana teljestiku suhtes.

Teljestiku pööramisel nurga α võrra teisenevad koordinaadid valemite järele:

$$\begin{aligned}x &= x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \\ y &= x' \sin \alpha + y' \cos \alpha,\end{aligned}$$

kus x, y ja x', y' on vastavalt täpi koordinaadid vanas ja uues süsteemis.

On koordinaatide telgedeks võrdhaarse hüperbooli asümptoodid, siis on selle hüperbooli võrrand

$$xy = k \quad (k = \text{konst}).$$

Kõvera võrrandi aste jääb muutumatuks nii teljestiku rööplükkel kui teljestiku pööramisel.

Püst- ja polaarkoordinaatide side on määratud valemitega:

$$\begin{aligned}x &= \varrho \cdot \cos \theta \\ y &= \varrho \cdot \sin \theta.\end{aligned}$$

Ellipsi, hüperbooli ja parabooli täpi kaugused tulitäpini ja juhtjooneni on võrdelised. Esimese kauguse suhe teisega (ekstsentrismus) on ellipsi puhul < 1 , parabooli puhul $= 1$, hüperbooli puhul > 1 .

Ellipsi, hüperbooli ja parabooli ühine võrrand polaarkoordinaatides on:

$$\varrho = \frac{p}{1 + e \cos \theta},$$

kus $2p$ on kõvera fokaallaius, e kõvera ekstsentrismus.

Perspektiivi ja projektiivse geomeetria alged.

Täpi ja sirge tsentraalprojeksioonid tasapinnale on vastavalt täpp ja sirge joon. Erandiks on juhtumus, kus projektitavad kujud asuvad tasapinnal, mis sisaldab projektsiooni kesktäppi ja on rööbik kujutustasapinnaga.

Rööbikute sirgete tsentraalprojeksioonid lõikuvad nende sirgete ühises pagutäpis.

Tasapinna sirgete pagutäpid asuvad ühel sirgel (tasapinna pagusirgel).

Kui kujutustasapinnaks on püsttasapind, siis on rõhtsate tasapindade ühiseks pagusirgeks horisont. Rõhtsate sirgete pagutäpid asuvad horisondil. Püstsirged kujunevad perspektiivis püstsirgetena.

Lõigu otsade projektsioonid, lõigu keskkoha projektsioon ja lõigu sihi pagutäpp moodustavad täpisalga ristjagatise (kaksiksuhtega) — 1 (harmonilise rühma).

Ristjagatise väärtus ei muutu projekteerimisel; eriti jääb nelja harmoonilise täpi asend projektsioonis harmooniliseks.

Täielikus nelikülikus moodustavad harmoonilise salga diagonaalil asuvad neliküliku tipud ja selle diagonaali lõiketäpid teiste diagonaalidega.

Sirge, mis ühendab trapetsi diagonaalide lõiktäppi mitte-rööbikute külgede pikenduste ühistäpiga, ühendab ühtlasi trapetsi aluste kesktäppe (Steiner).

Perspektiivsete kolmkülikute vastavate külgede ühistäpid asuvad ühel sirgel (Desargues).

Ringi tsentraalprojeksioon ringi telje (keskkohast ringi tasapinnale püstitatud normaali) täpist on ring, ellips, parabool või hüperbool.

Lõikuvad kahe kimbu vastavad kiired koonuslõikel, mis kimpude tippudest läbi läheb, siis on vastavate kiirtesalkade ristjagatised võrdsed.

Koonuslõikele sisse joonestatud kuusnurga vastaskülgede ühistäpid asuvad ühel sirgel (Pascal).

Koonuslõikele ümber joonestatud kuusnurgas lõikuvad vastastippude ühendussirged ühes täpis (Brianchon).

Sirgjoone ühistäpid koonuslõikega, sirgel asuv poolus ja sirge ühistäpp polaariga moodustavad harmoonilise salga.

Sfääri stereograafilises projektsioonis esineb ring ringina, erijuhul sirgena.

Nurgad esinevad selles projektsioonis oma tõelises suuruses.

Trigonomeetria.

Märkus. Kooskõlas MÕK-i „Matemaatika Sümbolika“ on kolmnurga küljed tähistatud tähtedega a, b, c ; nende vastasturgad vastavalt α, β, γ ; täisnurkse kolmnurga hüpotenuus tähega c ; kolmnurga pindala tähega S ; perimeeter $2p$; alusele a toetuv kolmnurga kõrgus h_a ; kolmnurga ümber ja sisse joonestatud ringide raadiused vastavalt r ja ϱ .

Täisnurkses kolmnurgas on:

$$\frac{a}{c} = \sin \alpha, \quad \frac{b}{c} = \cos \alpha, \quad \frac{a}{b} = \tan \alpha, \quad \frac{b}{a} = \cot \alpha.$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}.$$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = +\cos \alpha \quad \cos(90^\circ - \alpha) = +\sin \alpha$$

$$\sin(90^\circ + \alpha) = +\cos \alpha \quad \cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = +\sin \alpha \quad \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha.$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2}$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

Kolmnurgas on:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2r \quad (\text{siinuslause}).$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \quad (\text{koosinuslause}).$$

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan \frac{\alpha-\beta}{2}}{\tan \frac{\alpha+\beta}{2}} \quad (\text{tangenslause}).$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}.$$

$$S = \frac{1}{2} ah_\alpha = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$$

$$S = qp = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Sfäärilises kolmnurgas on:

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}$$

(sfäärigeomeetria siinuslause)

ja

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

(sfäärigeomeetria koosinuslause).

Tarvilikkude konstruksioonide nimestik.

I klassis:

Lõikude liitmine ja lahutamine.

Lõigu poolitamine.

Antud täppidele antud telje suhtes sümmeetriliste täppide konstruimine.

Kahe täpi sümmeetriatelje joonestamine.

Sirge joonestamine läbi antud täpi risti antud sirgega.

Täisnurga joonestamine.

Püstküliku ja ruudu joonestamine.

Võrdhaarse kolmnurga joonestamine.

Võrdkülgse kolmnurga joonestamine.

Rombi joonestamine.

Kolmnurga kõrguste konstruimine.

Kolmnurga küljepoolitajate konstruimine.

Nurga poolitamine.

Nurga ülekandmine.

Nurkade liitmine ja lahutamine.

Kolmnurkade konstruimine antud elementidest vastavalt neljale ühtuvuselausele.

Hulknurga ülekandmine.

Sirge joonestamine läbi antud täpi rööbiti antud sirgega.

Rööpküliku konstruimine lähtudes antud külgedest, või antud diagonaalidest.

Püstküliku, ruudu ja rombi konstruimine lähtudes antud diagonaalidest.

Täisnurksete kolmnurkade joonestamine antud hüpotenuusil.

Ringi puutuja joonestamine läbi antud täpi.

Ringi joonestamine kolmnurga ümber ja kolmnurga sisse.

Ringi kesktäpi leidmine.

Korrapärase hulknurga külgede arvu kahendamine.

Korrapärase neli- ja kaheksanurga ning kuus- ja kaheistnurga joonestamine.

II klassis:

Püstküliku ruutimine.

Kolm- ja hulknurga ruutimine.

Hulknurga n -kordne suurendamine.

Lõigu jagamine n ossa täisarvulise n korral.

Kolmele antud lõigule neljanda võrdelise leidmine.

Esimese astme võrrandiga määratud pikkuse konstruimine sirkli ja joonlaua abil.

Lõigu pikkuse suurendamine antud vahekorras.

Kahe lõigu keskmise võrdelise konstruimine.

Lõigu (sisemine ja välimine) jaotamine antud vahekorras.

Ruutvõrrandiga määratud pikkuse konstruimine sirkli ja joonlaua abil.

Lõigu jaotamine kuldlõikes.

Korrapärase viis- ja kümmenurga joonestamine.

Ringi ligikaudne sirgestamine.

Sisukord.

	lhk.
MÕK-i seisukoht keskkooli klasside arvu ja matemaatika tunnikava küsimustes	3
MÕK-i juhtmõtted keskkooli matemaatika õppekava projekti kokkuseadmisel	5
Keskkooli matemaatika õpetamise eesmärk	9
Keskkooli matemaatika õppekava	10
I klass	10
II "	12
III "	14
IV "	16
V "	18
VI "	20
Seletuskiri matemaatika õppekava juurde.	22
Eelmärkused	22
Üldosa	22
1. Põhinõue	22
2. Õpetamise ülesanne	22
3. Kasvatuslik ülesanne	24
4. Palade järjekord	24
5. Faktiline materjal ja meetod	24
6. Harjutuste hulk	25
7. Harjutusmaterjali lihtsuse nõue	26
8. Kontrolli nõue	27
9. Graafiline meetod	27
10. Konkreetse nõue	28
11. Mõttearendused <i>ab ovo</i>	29
12. Matemaatika rakendused	29
13. Fusioon.	30
14. Tööprintsip matemaatika õpetamisel	31
15. Pidevuse nõue matemaatika õpetamisel.	33
16. Definitsioonid ja aksioomid	34
17. Intuitsiooni osa matemaatika õpetamisel	35
18. Matemaatika kultuuriline väärtus	35
19. Oskussõnade tarvitamine	37
20. Sümbolite tarvitamine	37

	lhk.
Eriosa	37
1. Algebraalne avaldus	37
2. Aritmeetilised tehted	40
3. Murrud	40
4. Juuravaldused	41
5. Funktsionaalse olenevuse mõiste: 1. tsükkel	41
6. Võrrandite käsitlemine	43
7. Arvu mõiste algebras	45
8. Funktsionaalse olenevuse mõiste: 2. tsükkel	47
9. Piiri mõiste	49
10. Funktsionaalse olenevuse mõiste: 3. tsükkel	49
11. Statistika alged	51
12. Ligikaudse arvutamise küsimused	51
13. Geomeetria õpetamise ülesanne	54
14. Geomeetria õpetamise abinõud	54
15. Deduktiivse geomeetria alged	55
16. Planimeetrilised põhisedemed	56
17. Konstruksioonülesanded	57
18. Tasapinna meetrilised probleemid	58
19. Stereomeetrilised sidemed	59
20. Ruumi meetrilised probleemid	59
21. Trigonomeetriline arvutamine	60
22. Analüütilise geomeetria alged	61
23. Perspektiivi ja projektiivse geomeetria alged	62
24. Märkus	63
Tarvilikkude lausefe nimestik	64
Algebra	64
Geomeetria	71
Trigonomeetria	81
Tarvilikkude konstruksioonide nimestik	83

Eesti Matemaatika Õpetamise Komisjoni
väljaandel on ilmunud tema **Toimetused**

1: Algkooli matemaatika õppekava projekt.
32 lhk. Hind 60 marka.

2: Matemaatika sümboolika.
32 lhk. Hind 100 marka.

(Haridusministeeriumi poolt kirjaga 6. XI. 1925, nr. 24575,
koolidele tarvitusele võtmiseks soovitatud).

3: Keskkooli matemaatika õppekava projekt.
85 lhk. Hind 150 marka.

Kavatsusel on:

4: Matemaatika sõnastiku täiendused.

5: Matemaatika arvutamiseskeemid.

Edasi: **Matemaatika õppeabinõud.**

Matemaatika õpetajate edasiharimise kava.

Ülalnimetatuid väljaandeid 1—3 võib tellida Matemaatika
Õpetamise Komisjonilt (Tartu Ülikool, Matemaatika Instituut).
Nende väärtuse ettetasumisel saadetakse nad hinnata tellijale
kätte. Järeelmaksuga tellides on saatekulu saaja kanda.

3.

TÜ RAAMATUKOGU



1 0300 01255334 5

Hind 150 marka.

Matemaatika Õpetamise Komisjonile (Tartu Ülikool, Matemaatika
Instituut) 150 marga ettetasumisel saadetakse Õppekava tellijale
hinnata kätte.