



# ДИАГРАММЫ ПО МЕХАНИКЕ ГРУНТОВ

I

ТАЛЛИН  
1966

P. 1/52515

XI  
1А-13500  
||

ТАЛЛИНСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
Кафедра архитектуры

Д И А Г Р А М М Ы  
ПО МЕХАНИКЕ ГРУНТОВ

I

Л. Юргенсон, Э. Соонури

СОСТОЯНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ И ПРОЧНОСТИ  
В НАГРУЖЕННОМ ЭЛЕМЕНТАРНОМ КУБИКЕ ГРУНТА

31033

P<sub>1</sub>

Tartu Riikliku Ülikooli  
Raamatukogu

52515

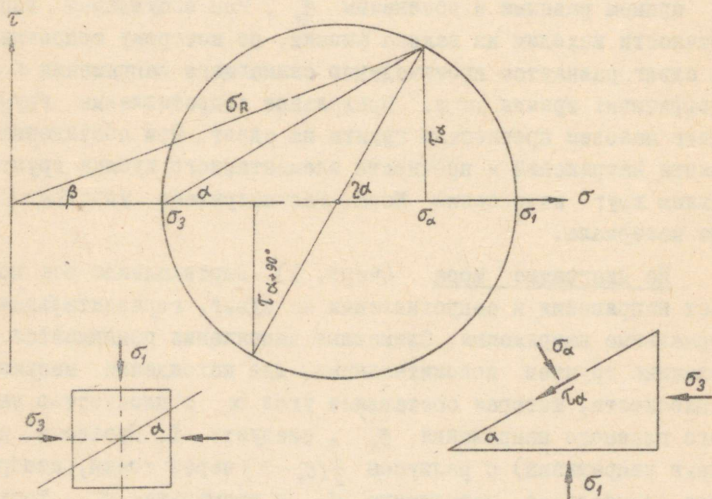
## СОСТОЯНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ И ПРОЧНОСТИ В НАГРУЖЕННОМ (ТРЕХОСНО СЖАТОМ) ЭЛЕМЕНТАРНОМ КУБИКЕ ГРУНТА

Обозначим через  $\sigma_1$  наибольшее сжимающее напряжение. Приложим его в вертикальном направлении, как обычно при испытании материалов. Горизонтальные главные напряжения  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  примем равными и обозначим  $\sigma_3$ . При обсуждении вопроса прочности исходим из закона физики, по которому сопротивление на сдвиг равняется произведению сжимающего напряжения  $\sigma$  на коэффициент трения  $\tan \varphi$ . Предельное сопротивление грунта на сдвиг назовем прочностью грунта на сдвиг. При обсуждении состояния напряжений и прочности элементарного кубика грунта применяем круг напряжений Мора. Рассматриваем упругое состояние материала.

На диаграмме Мора (черт. I) вертикальная ось показывает напряжения и сопротивления на сдвиг, горизонтальная ось - нормальные напряжения. Сжимающие напряжения принимаются в механике грунтов положительными. Для нахождения напряжений в плоскости, которая составляет угол  $\alpha$  с плоскостью наибольшего главного напряжения  $\sigma_1$ , следует: 1. Провести круг (круг напряжений) с радиусом  $\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$  через точки, изображающие наибольшее напряжение  $\sigma_1$  и наименьшее  $\sigma_3$ . Точки  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  одновременно обозначают плоскости, в которых действует данное напряжение. 2. Под углом  $2\alpha$  провести прямую через центр круга напряжений. 3. Из точки пересечения прямой с кругом опустить перпендикуляр на горизонтальную ось. Длина перпендикуляра показывает напряжение на сдвиг  $\tau_\alpha$ . Расстояние перпендикуляра от вертикальной оси показывает сжимающее напряжение  $\sigma_\alpha$ . Продолжение линий по другую сторону горизонтальной оси показывает напряжения в плоскости  $\alpha + \frac{\pi}{2}$ .

Замечания: 1. Сдвигающее напряжение увеличивается быстро при малых углах  $\alpha$ , а при приближении  $\alpha$  к  $45^\circ$  - медленно. 2. Наибольшее сдвигающее напряжение действует в плоскости  $\alpha = 45^\circ$  (считая от плоскостей главных напряжений).

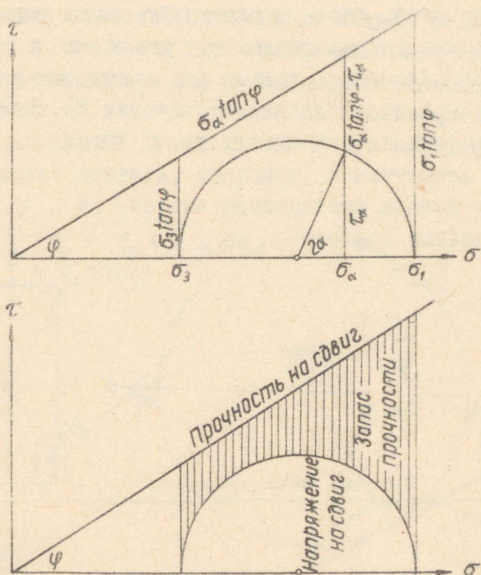
3. Когда  $\alpha = 45^\circ$ , то  $\tau = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$  и  $\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)$ . Величина наибольших сдвигающих напряжений равняется половине разницы между главными напряжениями. В плоскостях главных сдвигающих напряжений величина нормального напряжения равняется полусумме главных нормальных напряжений.



Черт. I. Применение круга Мора для определения напряжений в разных плоскостях.

Девiatorное напряжение. Если  $\sigma_1 = \sigma_3$ , то сдвигающие напряжения в любой плоскости равняются нулю. Сжимающие напряжения в таком случае во всех плоскостях равны. Следовательно, равно и сопротивление сдвигу. Такое состояние напряжений называется гидростатическим по аналогии с состоянием напряжений в воде. В грунте гидростатическое (сжимающее) напряжение вызывает, правда, прочность, но не вызывает сдвигающих напряжений. Чтобы вызвать сдвигающие напряжения, главные нормальные напряжения должны иметь разную величину.

Разницу между действующим в данной плоскости нормальным напряжением  $\sigma_\alpha$  и гидростатическим напряжением  $\sigma_3$  в данной точке, т.е. величину  $\sigma_\alpha - \sigma_3$ , называем девиаторным (отличающимся от гидростатического) напряжением. Величина девиаторного напряжения в данной точке изменяется от нуля (в плоскости  $\sigma_3$ ) до  $\sigma_1 - \sigma_3$  (в плоскости  $\sigma_1$ ). Следовательно, величина главного (наибольшего) девиаторного напряжения равняется  $\sigma_1 - \sigma_3$ . Девиаторное напряжение вызывает как сдвигающие, так и сжимающие напряжения, а следовательно, и прочность, но в разных плоскостях разной величины.

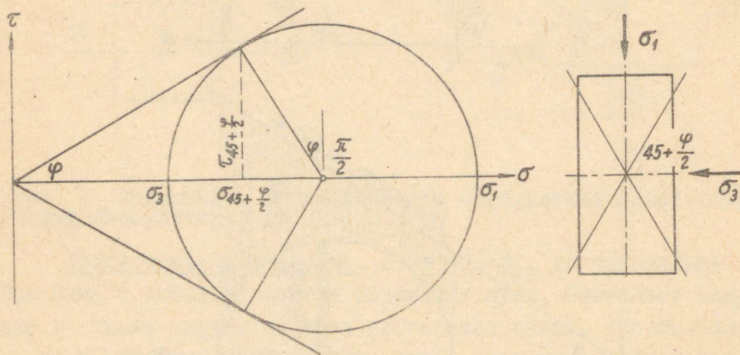


Черт. 2. Применение круга Мора для определения нормальных и сдвигающих напряжений, а также сопротивления сдвигу и резерва прочности в разных плоскостях.

Результирующее напряжение в плоскости  $\alpha$  изображает величина  $\sigma_R$  (черт. 1). Угол  $\beta$  является углом отклонения результирующего напряжения (угол между направлением  $\sigma_R$  и нормалью к плоскости). Когда угол отклонения результирующей станет равным углу трения, начинается сдвиг (скольжение, потеря прочности, разрушение). Это явление аналогично скольжению лестницы, когда угол отклонения лестницы равен углу трения.

Сопротивление сдвигу грунта, состоящего из несвязанных частиц (песка), увеличивается пропорционально сжатию  $\sigma$  и коэффициенту трения  $\tan \varphi$ .

На диаграмме Мора сжимающее напряжение дается горизонтальным расстоянием от начала координат. Следовательно, если из начала координат провести прямую под углом  $\varphi$  к горизонтальной оси, то ордината этой линии будет изображать величину  $\sigma_\alpha \cdot \tan \varphi$ , т.е. прочность на сдвиг (черт. 2). Величина ее находится в пределах от  $\sigma_3 \cdot \tan \varphi$  до  $\sigma_1 \cdot \tan \varphi$ .



Черт. 3. Состояние предела прочности в изображении Мора.

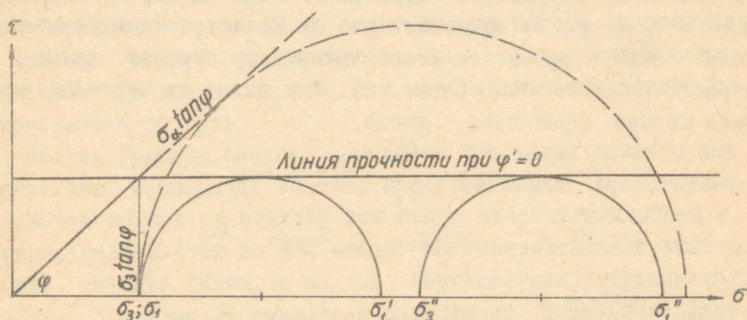
Разница между ординатой линии прочности и ординатой круга, изображающей напряжение на сдвиг, показывает запас прочности  $\sigma_\alpha \cdot \tan \varphi - \tau_\alpha$  в данной наклонной плоскости. Запас прочнос-



ти меньше всего в плоскостях, угол наклона которых больше  $45^\circ$ . При увеличении разницы между главными напряжениями запас прочности снижается и падает до нуля, когда круг напряжений коснется линии прочности. В таком случае  $\tau_\alpha = \sigma_\alpha \cdot \tan \varphi$  — сдвигающее напряжение равняется прочности на сдвиг (черт. 3).

Предельное состояние материала показывает и то, что угол отклонения  $\beta$  результирующего напряжения равен в этом случае углу трения  $\varphi$ .

Динамика напряжений и прочности при возрастании вертикальной нагрузки. Будем исходить из гидростатического состояния напряжений  $\sigma_1 = \sigma_3$ , которое изображено на черт. 4 непрерывной линией. Сжимающие напряжения во всех плоскостях равны. Прочность материала также одинакова во всех плоскостях и равняется  $\sigma_3 \cdot \tan \varphi$ . Равное во всех направлениях сжимающее напряжение не может вызвать сдвига или потери прочности, так как сдвигающие напряжения во всех плоскостях равняются нулю. Для вызова сдвигающих напряжений требуется наличие девиаторного напряжения. Его можно вызвать, например, увеличением вертикального напряжения  $\sigma_1$ . На чертеже непрерывной линией показано состояние, где  $\sigma_1' = \sigma_3 + 2\sigma_3 \tan \varphi$ , которое вызывает сдвигающее напряжение  $\tau = \sigma_3 \tan \varphi$ .



Черт. 4. Зависимость прочности на сжатие от сопротивления сдвигу. Непрерывные линии соответствуют материалу, сопротивление сдвигу которого не увеличивается при повышении нагрузочного давления. Прерывистая линия относится к материалу, сопротивление сдвигу которого увеличивается пропорционально нагрузочному давлению.

Если бы теперь прочность материала осталась прежней, т.е. если прочность под только что приложенным девиаторным напряжением не увеличилась, то должен произойти сдвиг. Этому закону подчиняется жирная природная глина при быстром нагружении. При быстром росте нагрузки рост сопротивления трению не успеет идти в шаг с увеличением напряжений (приложенная новая нагрузка воспринимается давлением поровой воды, эффективное напряжение, т.е. давление между минеральными частицами, остается прежним, а следовательно, и вызываемое трением сопротивление сдвигу:  $\varphi$  кажется равным нулю). В таком случае материал обладает прочностью на сдвиг —  $c$ , равной во всех плоскостях. Величина предельного девиаторного напряжения (которое обычно называется прочностью на сжатие) равно двухкратной прочности материала на сдвиг  $2c$ . Предельным является любое состояние, где разница главных напряжений равна  $2c$ , напр. состояние  $\sigma_1'' - \sigma_3'' = 2c$  (черт. 4). Следовательно, грунты, у которых  $\varphi$  как бы равняется нулю, теряют прочность при  $\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = c$ .

Прерывистая линия на черт. 4 показывает состояние материала типа песка, где трение при увеличении нагрузки сразу же увеличивается. В этом случае прочность материала остается неизменной ( $\sigma_3 \tan \varphi$ ) только в плоскости  $\sigma_3$ , в других же плоскостях возрастает пропорционально сжатию. Так как  $\sigma_3 \tan \varphi \neq \sigma_1 \tan \varphi$ , то материал уже не является изотропным. Условие потери прочности можно выявить с помощью прямоугольного треугольника (черт. 3). Как видно из чертежа, материал теряет прочность, когда

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3} = \sin \varphi$$

или 
$$\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} = \tan^2(45^\circ + \frac{\varphi}{2})$$

или 
$$\frac{\sigma_3}{\sigma_1} = \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} = \tan^2(45^\circ - \frac{\varphi}{2})$$

Замечания: 1. Потеря прочности при сжимающей нагрузке вызывается напряжениями на сдвиг. 2. Потеря прочности не зависит от величины главных напряжений, а от их соотношения.

3. Сдвиг не проходит через плоскости наибольших напряжений на сдвиг, а через плоскости, наклоненные под углами  $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}$  к плоскости  $\sigma_1$ , т.е. к направлению  $\sigma_3$ .

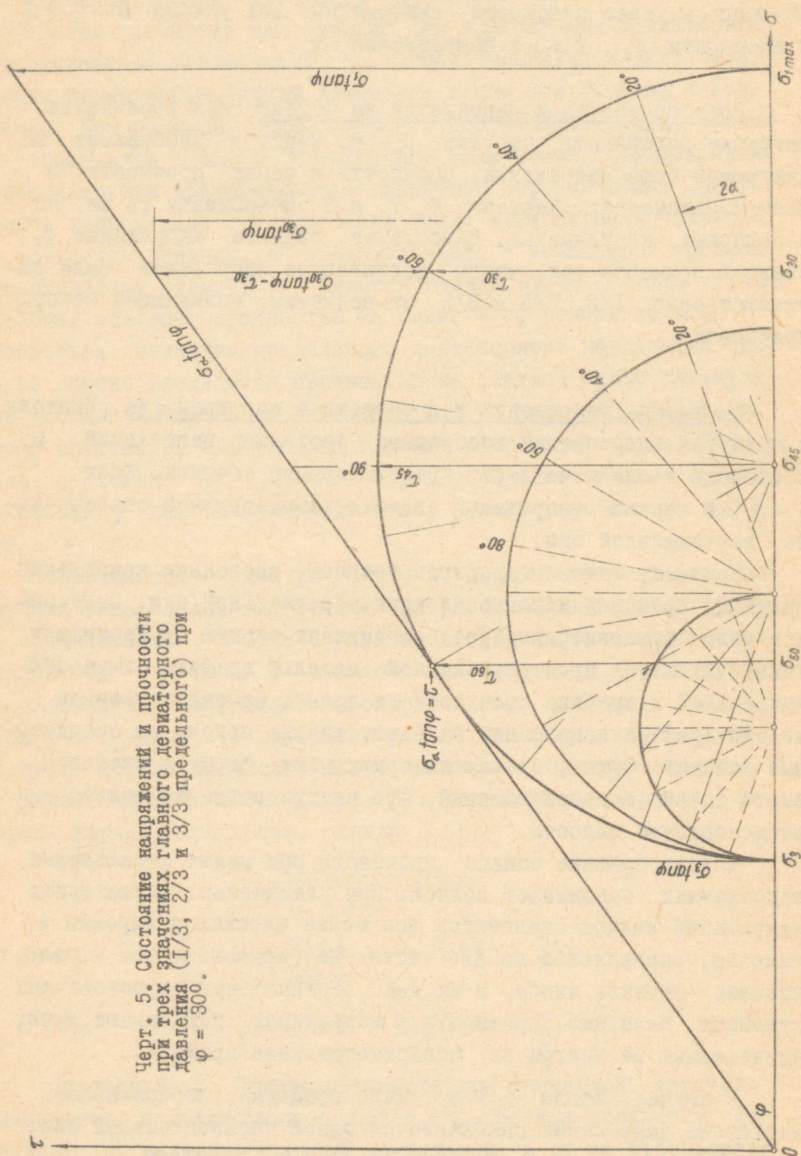
Рост прочности и напряжений на сдвиг при увеличении нагрузки показывают чертежи 5 - 8. Черт. 5 изображает на диаграмме Мора напряжения, прочности и запас прочности в разных плоскостях. Чертежи 6, 7 и 8 показывают то же, но в полярных координатах. Наибольшее главное напряжение  $\sigma_1$  взято в примерах так, чтобы девиаторное напряжение было соответственно 1/3, 2/3 и 3/3 от величины, вызывающей потерю прочности.

Состояние напряжений и прочности в пространстве. Чертежи в полярных координатах изображают состояние напряжений и прочности в одной четверти вертикального сечения. Если  $\sigma_2 = \sigma_3$ , то картина напряжений является симметричной относительно вертикальной оси.

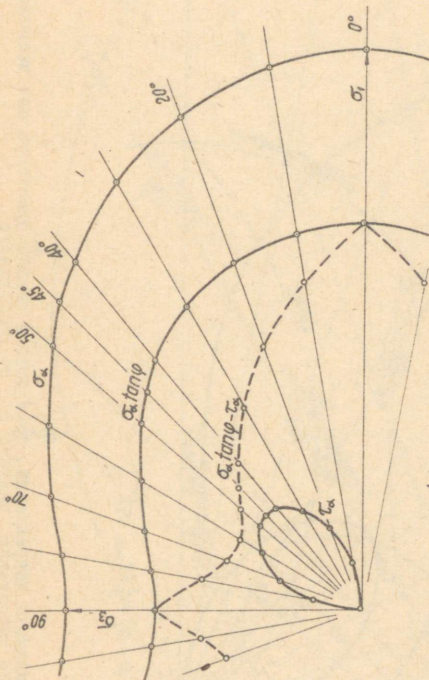
Представление о пространственном состоянии напряжений получим, вращая диаграммы вокруг вертикальной оси. Полученное тело вращения, которое напоминает скатую по вертикали тыкву, является пространственной моделью графика сжимающих напряжений и графика прочности на сдвиг. Пространственная модель графика напряжений на сдвиг внешне похожа на соединенные доньями рюмки, стенки которых имеют форму клеверного листа такой большой ширины, что внутри остается только воронкообразная полость.

Модель графика запаса прочности при малых девиаторных напряжениях напоминает волчок. При увеличении девиаторных напряжений волчок становится все более плоским и широким и, наконец, разделяется на две части: на горизонтальное кольцо, имеющее сечение линзы, и на два вертикальных остроконечных столбика. Величины прочности и напряжений показывают лучи, проведенные из центра на поверхность тела вращения.

В случае, когда  $\sigma_2 \neq \sigma_3$ , тело вращения, изображающее состояние напряжений, сплюснуто по одной горизонтальной оси.

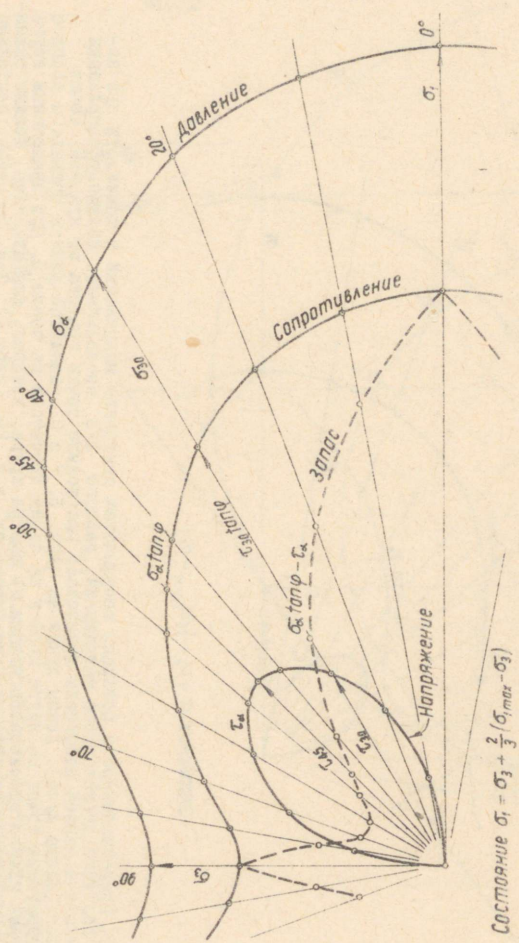


Черт. 5. Состояние напряжений и прочности при трех значениях главного девиаторного давления (1/3, 2/3 и 3/3 предельного) при  $\varphi = 300^\circ$ .

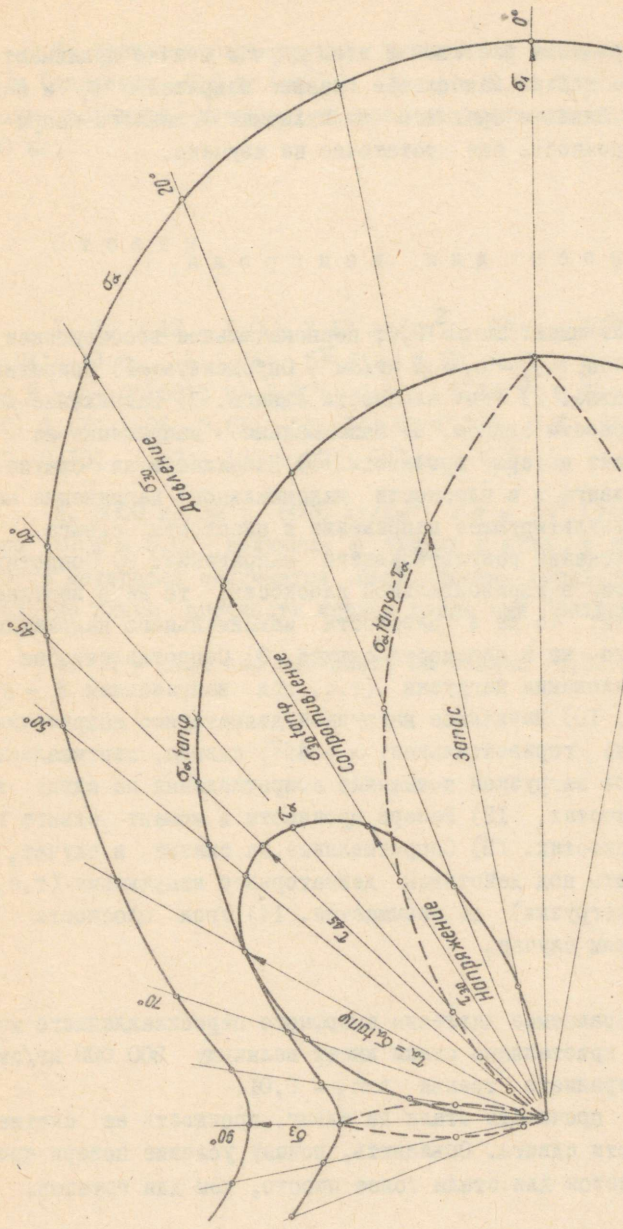


$$\text{Состояние } \sigma = \sigma_3 + \frac{1}{3}(\sigma_{\text{max}} - \sigma_3)$$

Черт. 6. Представленное в полярных координатах состояние напряжений и прочности при величине главного девиаторного напряжения, равного  $1/3$  предельного. Величину напряжения и прочности в данной плоскости показывает расстояние точки графика от нулевой точки координат (длина луча). Длины лучей на черт. 6, 7 и 8 равняются длинам ординат и абсцисс соответствующих точек на круге Мора и на линии прочности на черт. 5. При применении круга Мора более удобно оперировать углами из центра круга, которые, как известно, должны равняться двойной величине угла наклона плоскости, т.е.  $2\alpha$  (черт. 1). Так, например, состояние напряжений, прочности и резерва прочности в плоскости, наклоненной под углом  $\alpha = 45^\circ$  к горизонтальной, показывают на черт. 6, 7 и 8 линии лучей (радиус-векторов) под тем же углом. Этому соответствует на черт. 5 центральный угол  $2\alpha = 90^\circ$ .



Черт. 7. Динамика напряжений, прочности и запаса прочности при величине главного девиаторного напряжения, равного  $\frac{2}{3}$  от предельного.



Предельное состояние  $\tau_{60} = \tau_{60} \tan \varphi$

Черт. 8. Динамика напряжений и прочности при предельной величине главного девиаторного напряжения.

Для упрощения расчетов в этом случае обычно принимают во внимание только наибольшее главное напряжение  $\sigma_1$  и наименьшее  $\sigma_3$ . Влияние среднего по величине главного напряжения на прочность еще достаточно не изучено.

### В о п р о с ы   д л я   к о н т р о л я

I. Грунт имеет  $\tan \varphi = 0,6$ ; первоначальное всестороннее напряжение  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 1 \text{ кг/см}^2$ . Определить: 1) Сопротивление на сжатие. 2) Угол плоскости сдвига. 3) Напряжение на сдвиг в плоскости сдвига. 4) Максимальное напряжение на сдвиг в момент потери прочности. 5) Напряжение на сжатие в плоскости сдвига и в плоскости максимального напряжения на сдвиг. 6) Результирующее напряжение в плоскости сдвига. 7) Угол отклонения результирующего напряжения. 8) Сопротивление на сдвиг в горизонтальной плоскости; то же в вертикальной плоскости; то же в плоскости максимального напряжения на сдвиг; то же в плоскости сдвига. 9) Сопротивление на сдвиг до приложения нагрузки (т.е. под напряжением  $\sigma_1 = \sigma_3 = 1 \text{ кг/см}^2$ ). 10) Вызванное нагрузкой девиаторное напряжение в плоскостях: горизонтальной,  $\alpha = 45^\circ$ , сдвига, вертикальной. 11) Вызванное нагрузкой повышение сопротивления на сдвиг в тех же плоскостях. 12) Резерв прочности в момент сдвига в тех же плоскостях. 13) Сопротивление на сжатие в случае, если прочность под действием девиаторного напряжения (т.е. добавочной нагрузки) не повышается. 14) Угол плоскости сдвига в таком случае.

II. Воображаемое давление аморфного переохлажденного металла между кристаллами стали имеет величину  $300\,000 \text{ кг/см}^2$ ; коэфф. внутреннего трения  $\tan \varphi = 0,01$ . Определить: прочность стали на сдвиг, прочность на сжатие, угол плоскости сдвига. Объяснить, почему условие потери прочности выражается для стали более просто, чем для грунтов.



III. Капиллярность грунта выражается величиной, равной 2 м (давление  $0,2 \text{ кг/см}^2$ ) и  $\tan \varphi = 0,5$ . Определить диаметр цилиндра, несущего на пределе прочности нагрузку в 50 кг.

О т в е т ы

I. 1)  $3,12 - 1,0 = 2,12 \text{ кг/см}^2$ ; 2)  $\alpha = 60^{\circ}29'$ ; 3)  $\tau_{\alpha} = 0,91$ ; 4)  $\tau_{\text{макс}} = 1,06$ ; 5)  $\sigma_{\alpha} = 1,51$  и  $\sigma_{45} = 2,06$ ; 6)  $\sigma_r = 1,77$ ; 7)  $\beta = \varphi = 30^{\circ}58'$ ; 8)  $1,87$ ;  $0,60$ ;  $1,24$  и  $0,91$ ; 9)  $0,60$ ; 10)  $2,12$ ;  $1,06$ ;  $0,51$ ;  $0$ ; 11)  $0$ ;  $0,31$ ;  $0,64$ ;  $1,27$ ; 12)  $0,60$ ;  $0$ ;  $0,18$ ;  $1,87$ ; 13)  $1,20$ ; 14)  $\alpha = 45^{\circ}$ .

II.  $3000 \text{ кг/см}^2$ ;  $6000 \text{ кг/см}^2$  и  $\alpha = 45^{\circ}$  (точнее  $45^{\circ}17'$ ); при  $\tan \varphi = 0,01$  величина  $\varphi$  близка к нулю, и линия прочности материала получается практически горизонтальной, подобно линии прочности жирной глины при быстром нагружении.

III.  $d = 14,1 \text{ см}$ ; прочность на сжатие  $0,32 \text{ кг/см}^2$ .

Повторное издание

Сдано в печать 10 марта 1966 г. Бумага 60x84. 1/16.

Печ л. 1. Усл. печ. л. 0,93 Тираж 200. Зах. № 97

Ротапринт ТПИ

Цена 3 коп.



Цена 3 коп.

XI

A-13500

TÜ RAAMATUKOGU



1 0300 00546255 3