

TARTU ÜLIKOOL
SOTSIAAL- JA HARIDUSTEADUSKOND
ERIPEDAGOOGIKA OSAKOND

Ave Ojasalu

**TAVAKOOLI IV JA V KLASSI ÕPILASTE KIRJALIKU KORRUTAMISE JA
JAGAMISE OSKUSED**

Magistritöö

Läbiv pealkiri: kirjalik korrutamine ja kirjalik jagamine

KAITSMISELE LUBATUD

Juhendaja: Inga Mutso (PhD)

.....
(*allkiri ja kuupäev*)

Kaasjuhendaja: Kaja Plado (MA)

.....
(*allkiri ja kuupäev*)

Kaitsemiskomisjoni esimees: Marika Padrik (PhD)

.....
(*allkiri ja kuupäev*)

Osakonnas registreeritud

.....
(*allkiri ja kuupäev*)

Tartu 2012

Kokkuvõte

Käesoleva töö eesmärgiks oli uurida sama testimaterjali põhjal tavakooli IV ja V klassi õpilaste kirjaliku korrutamise ja kirjaliku jagamise oskusi ning ülesannete lahendamisel esinevaid vigu. Uurimuses osales 83 IV ja 76 V klassi õpilast, kes lahendasid 10 korrutamise ja 12 jagamise ülesannet. Korrutamise ülesanded lahendasid IV ja V klassi õpilased sarnaselt, kuid kolme ülesande lahendamisel osutasid IV klassi õpilased oluliselt ($p < 0,05$) edukamateks. Korrutamisel esinenud vead ja nende osakaalud klassides olid sarnased. Kõige sagedamini esinev viga korrutamisel oli mõlema klassi õpilastel seotud järgu ületamisega – eksiti korrutustabeli meenutamisel, sellele meeldejäetava järguühiku liitmisel või unustati meeldejäetav järguühik. Jagamise ülesannete lahendamisel osutasid IV klassi õpilased oluliselt ($p < 0,05$) edukamateks viie ülesande lahendamisel. Enim esinenud vead jagamisel ja nende osakaalud klassides olid sarnased. Ühiselt osutus IV ja V klassi õpilastele kõige probleemsemaks jagamise algoritmi arvestamine, kui tekkinud osajagatav oli väike ja enne järgmise järgu alla toomist tuli jagatisse lisada null (see jäi kirjutamata). Uurimustöö tulemusi on kasulik arvestada õpilastele kirjaliku korrutamise ja jagamise algoritmide õpetamisel. Töös on antud soovitusi ka madalama matemaatilise võimekusega õpilastele kirjaliku arvutamise algoritmide õpetamiseks.

Abstract**Public School Fourth and Fifth Graders' Written Multiplication and Division Skills**

The purpose of this paper is to examine public school's fourth and fifth graders' written multiplication and division skills and error patterns occurring in the assignments, which were based on the same test material. The research was based on 83 fourth graders and 76 fifth graders who solved ten multiplication and twelve division assignments. The multiplication assignments solved by the fourth graders and fifth graders had similar results, but in the solving of three assignments, the fourth graders' results were significantly ($p < 0.05$) better. The mistakes occurred in multiplication, and the proportion of mistakes between the grades was similar. In multiplication the mistake that occurred most frequently for both grades was linked to excelling the carrying number, mistakes were made in remembering the multiplication table, and in the adding or forgetting of the carrying number. In the solving of five division assignments, the fourth graders were significantly ($p < 0.05$) better. Most mistakes occurred in division, and the proportion of mistakes between both grades was similar. Jointly, for the fourth and fifth graders, the most frequent problem appeared to be the consideration of an algorithm when the dividend was too small for the divisor, and a significant zero had to be added (but it was unwritten) to the quotient before bringing down the next carrying number. The results of the study is necessary when teaching students written Multiplication and Division. There are also some recommendations for teaching students with lower mathematical abilities.

Tavakooli IV ja V klassi õpilaste kirjaliku korrutamise ja jagamise oskused

Matemaatika on ajast aega olnud õpilaste jaoks üks raskemaid õppeaineid. I ja II kooliastme õpilaste matemaatikaalastest teadmistest annavad ülevaate riiklikult korraldatavad tasemetööd. Tasemetöödega hinnatakse matemaatika ainekavaga sätestatud matemaatikaalaste teadmiste ja oskuste omandatust I ja II kooliastme lõpus – vastavalt III ja VI klassis.

Tutvudes Riikliku Eksami- ja Kvalifikatsioonikeskuse poolt avaldatud materjalidega (<http://www.ekk.edu.ee/valdkonnad/ulldharidusvalishindamine/eksamitoode-ja-tasemetoode-analuusid>), selgub, et vabariiklike tasemetööde tulemused matemaatikas on madalamad, võrreldes teistes õppeainetes korraldatud tasemetööde tulemustega. Kõige madalamad tulemused matemaatikas on VI klassi õpilastel. Tööde keskmine punktide arv maksimaalsest punktide arvust aastatel 2004-2009¹ sooritatud tasemetöös oli 58% (2009. aastal) kuni 74% (2007. aastal). Tasemetööde tulemuste kokkuvõttes tuuakse välja ka soorituse kvaliteet (s.o. hindele "4" ja "5" sooritanud õpilaste osakaal, s.t õpilane sai vähemalt 70% maksimaalsest punktide arvust) ja soorituse edukus (s.o. vähemalt hindele "3" sooritanud õpilaste osakaal). Soorituse kvaliteet aastatel 2004-2009 oli 38% (2009. aastal) kuni 67% (2007. aastal) ja soorituse edukus matemaatika tasemetöös 76% kuni 92%. Seega õpilasi, kes said II kooliastme matemaatika tasemetöö tulemuseks hinde "1" või "2", oli 8% kuni 24% (2009. aastal). Afanasjev (2006) juhtis tähelepanu asjaolule, et alates 2006. aastast hakkas kehtima uus ja liberaalsem hindamisjuhend², mille skaala hinnete "3" ja "2" saamiseks oli märgatavalt leebem. Ta tõi võrdluseks 2006. aasta tasemetöö, milles uue hindamiskaala järgi oli puudulike hinnetega ("1" ja "2") õpilasi 13%, aga endise hindamise alusel oleks neid olnud 22%. Seoses uue õppekavaga, hakkab kehtima taas rangem hindamine.

Tasemetöö analüüsi kokkuvõttes märkis Afanasjev (2006), et oluline reserv õppetulemuste parendamiseks on õpilaste arvutusoskuses. Samal arvamusel oli ka Veelmaa (2006), kes leidis, et II kooliastmes matemaatika õppimisel tekkivate raskuste põhjuseks on sageli õpilaste puudulik arvutamisoskus. Kuna matemaatikas on igal kooliastmel õpitav materjal seotud eelneval kooliastmel õpituga, siis on oluline teada õpilaste arvutusoskuste taset I kooliastme lõpuks.

III klasside tasemetööde edukus (hinnete "3", "4" ja "5" osakaal) aastatel 2004-2010 oli 96,2% (2010. aastal) kuni 98,9% (2007. aastal). Seega 3,8% kuni 1,1% õpilastest ei

¹ 2010. aastal matemaatikas tasemetööd VI klassile ei toimunud

² Haridus- ja teadusministri 2005. a määrus, avaldamismärge RTL 2005, 90, 1337. Hinne "3" 69-45%, hinne "2" 44-20% maksimaalsest võimalikust punktide arvust hinnatavas töös.

sooritanud tasemetööd positiivselt. Kuigi arvutusoskuste ja tasemetööde tulemusi ei saa üks ühele võrdsustada, on selge, et edukas tasemetöö sooritaja oskab ka õigesti arvutada. Eestis läbi viidud rahvusvaheline pikaajaline uuring (IPMA – *International Project on Mathematical Attainment* aastatel 2002-2005) jälgis 1.-3. klassi õpilaste põhiliselt arvutamisoskustega seotud oskuste edenemist (Palu, Afanasjev & Vojevodova, 2007). Lõpptestis osalenud 14 maast saavutas Eesti kõige kõrgema keskmise tulemuse ning ühtemoodi edukad olid nii poisid kui tüdrukud. Õpilasi, kelle tulemused olid stabiilselt nõrgad, oli 5,9%. Käsitletud uuringu andmetele toetudes võib öelda, et I kooliastme lõpus sooritasid rahvusvahelise lõpptesti matemaatikas hinnetele “4” ja “5” 86,3% õpilastest. Keskmiselt vähemalt rahuldava tulemuse saavutasid 94% õpilastest ning arvutamine valmistas püsivalt raskusi umbes 6% õpilastest.

Missugused arvutamisoskused on õpilased omandanud I kooliastmes ja missuguste arvutamisoskuste omandamine võiks II kooliastmes õpilastele raskusi valmistada? Riiklikus õppekavas (Põhikooli ja gümnaasiumi riiklik õppekava, mis kehtis kuni 31.08.2010.)³ oli üheks põhikooli matemaatikaõpetuse õppe-eesmärgiks, et õpilane õpib arvutama peast, kirjalikult ja taskuarvutil. Õppekavas oli matemaatika ainekava vastav õppesisu ja õpitulemused (siinkohal on ära toodud ainult arvutusoskustega seonduv) määratletud kooliastmete kaupa. I kooliastme lõpuks pidid III klassi õpilased teadma ja tundma peast (uues õppekavas – valdama) korrutustabelit; oskama peast liita, lahutada, korrutada ja jagada arve 100 piires; kirjalikult liita ja lahutada neljakohalisi arve 10 000 piires. II kooliastme lõpuks pidid VI klassi õpilased oskama arvutada peast, kirjalikult ja taskuarvutil naturaalarvudega ja kümnendmurdudega ning rakendada nimetatud arvutusoskusi tekstülesannete lahendamisel. Uuteks ja olulisteks arvutamisoskusteks, mis tuli (samuti tuleb ka uues õppekavas) II kooliastmes omandada, on kirjaliku korrutamise ja kirjaliku jagamise oskused. Käesolevas töös võtan vaatluse alla õpilaste kirjaliku korrutamise ja jagamise oskused IV ja V klassis.

Kirjaliku korrutamise ja kirjaliku jagamise käsitlemine õppematerjalides

Kuigi õpetamisel on aluseks ainekava, toetub õpetaja oma igapäevatöö planeerimisel valdavalt kirjastuste poolt koostatud õppematerjalidele (õpikud, töövihikud, kontrolltööde ja ülesannete kogumikud). Õpetamisel jälgib õpetaja seega õppematerjalides pakutud algoritme, lahendusviise ning ülesannete raskusastet. Järgnevalt annan lühiülevaate kasutusel olevatest

³ Uue õppekava rakendumine algas praktiliselt alates 1.09.2011 järgmistest klassidest: I, IV, VII ja X.

erinevate autorite poolt koostatud õpikutest (vastavuses vana õppekavaga) seoses kirjaliku korrutamise ja jagamise käsitlemisega II kooliastmes.

Kirjaliku korrutamise ja jagamise õpetamine algab IV klassis (Noor, Nurk & Telgmaa, 2002; Kaasik, 2005, 2009, 2010). Käsitletav arvuvald IV kassi lõpuks suureneb miljonini. Kaasiku (2005, 2009, 2010) õppematerjalides peavad IV klassi lõpetajad oskama kirjalikult korrutada ja jagada neljakohalisi arve kahekohalise arvuga. Noor jt (2002) õppematerjalides on IV klassi lõpuks käsitletud korrutamist kolmekohaliste arvudega ja kirjalikul jagamisel jagatakse viiekohalisi arve kahekohalisega arvuga. Kokkuvõtvalt võib väita, et arvestades õppematerjalides esinevaid erinevusi, peavad kõik õpilased oskama IV klassi lõpuks kirjalikult korrutada ja jagada vähemalt neljakohalisi arve kahekohalise arvuga.

Kirjaliku korrutamise algoritm kolmekohalise arvu korrutamisel ühekohalise arvuga (Kaasik, 2005):

$$\begin{array}{r} 127 \\ \times 3 \\ \hline 381 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(esimene osakorrutis)} \\ \text{(teine osakorrutis)} \\ \text{(korrutis ehk lõppvastus)} \end{array}$$

Korrutamist alustatakse üheliste järgust.

3×7 ühelist = 21 ühelist ehk 2 kümnelist ja 1 üheline. 2 kümnelist peetakse meeles (või kirjutatakse kümneliste kohale), 1 üheline kirjutatakse korrutisse üheliste alla.

3×2 kümnelist = 6 kümnelist, millele liidetakse üheliste korrutamisel saadud 2 kümnelist ning kirjutatakse saadud 8 kümnelist korrutisse kümneliste alla.

3×1 sajalist = 3 sajalist, need kirjutatakse korrutises sajaliste alla.

Ülesanded mitmekohaliste arvude korrutamisel ja jagamisel on väga erineva raskusastmega. Lahendamise raskus suureneb vastavalt arvus sisalduvate kohtade suurenemisele ja vastavuses ülendamine (järgu ületamiste) arvu suurenemisele.

Tüüpülesanded korrutamise õpetamisel

- kahekohalise arvu korrutamine ühekohalise arvuga üleminekuga üheliste või kümneliste järgus (27×3 ; 74×2)
- kahekohalise arvu korrutamine ühekohalise arvuga üleminekuga üheliste ja kümneliste järgus (85×3)
- kolmekohalise arvu korrutamine ühekohalise arvuga üleminekuga üheliste või kümneliste järgus (127×3 , 154×2)

- kolmekohalise arvu korrutamine ühekohalise arvuga üleminekuga üheliste ja kümneliste järgus (175×3)
- korrutamise erijuhud: kolmekohaliste arvude korrutamine ühekohalise arvuga, kui null on lõpus või keskel (280×3 ; 208×3)
- kahekohalise arvu korrutamine täiskümnelisega (27×20)

Kirjaliku jagamise algoritm kolmekohalise arvu jagamisel kahekohalise arvuga (Kaasik, 2005):

$$\begin{array}{r} 442 : 13 = 34 \\ \underline{39} \\ 52 \\ \underline{52} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} (44 \text{ ja } 52 \text{ on osajagatavad}) \\ (39 \text{ ja } 52 \text{ osajagatava kontrollimine}) \end{array}$$

4 sajalist 13-ga jagada ei saa, seega jagatise sajalisi ei tule.

4 sajalist koos 4 kümnelisega on 44 kümnelist (osajagatav), neid 13-ga jagades saadakse jagatise 3 kümnelist.

3 kümnelist korrutatakse 13-ga (kontrollitakse jagatise saadud 3 sobivust).

Üle jääb 5 kümnelist, mis koos 2 ühelisega on 52 ühelist.

Jagatakse 52 ühelist (osajagatav) 13-ga ning saadakse jagatise 4 ühelist.

4 ühelist korrutatakse 13-ga (kontrollitakse jagatise saadud 4 sobivust).

Jääk on 0, jagamine on lõppenud.

Tüüpülesanded kirjaliku jagamise õpetamisel

- kolmekohalise arvu jagamine ühekohalisega järku ületamata ($369 : 3$)
- sajaliste järk jagub täpselt, jääk jääb kümneliste järgus ($372 : 3$)
- kolmekohalises nulliga lõppevas arvus sajalised ei jagu täpselt ($570 : 3$)
- jagatava sajaliste arv on väiksem kui jagatav ning ei jagu seega täpselt ($153 : 3$)
- jagamise erijuhud, kui jagatises tuleb null jagatise lõppu või keskele ($720 : 4$; $812 : 4$, $820 : 4$)
- täiskümnete jagamine ($840 : 2$)

V klassi õppematerjalides (Kaasik, Cibulskaitė, & Strickiene, 2002; Telmaa & Nurk, 2002) käsitletav arvuvald suureneb miljardini. Kirjalikul arvutamisel õpitakse naturaalarvude ja kümnendmurdude kirjalikku korrutamist ja jagamist. Õpitakse ka jaguvuse tunnuseid ning kümnendmurdude ja naturaalarvude ümardamist. V klassi materjalides soovitavad Telmaa ja

Nurk (2002) kirjalikul jagamisel jagatise kohtade arvu märkimiseks kasutada jagatavas ülakoma ($232\overline{4}523 : 33 =$, jagatisse tuleb viis kohta).

Kirjaliku korrutamise erinevaid algoritme ning nende vormistamise võimalusi

Korrutise leidmiseks vormistatakse kirjaliku arvutamise algoritme erinevalt. Väljaandes “Key Maths” (Baker, Bland, Hogan, Holt, Job, Verity & Wills, 1995) tutvustatakse kolme erinevat kirjaliku korrutamise algoritmi. Neist üks on sarnane meil õpitava algoritmiga, erinevus seisneb korrutamisel meeldejäetavate järguühikute märkimise asukohas. Kuna meeldejäetavad järguühikud kirjutatakse tekkiva osakorrutise alla, siis kujuneb (kirjaliku korrutamise omandamise algetapil) kahekohalise arvuga korrutamisel vormistamine mitmeetapiliseks.

Näide: **146 x 24**

1. Esimene tegur korrutatakse läbi ühelistega, meeldejäetavad ühikud kirjutatakse korrutise alla.

$$\begin{array}{r} 146 \\ \times 4 \\ \hline 584 \\ \text{1 2*} \end{array}$$

2. Esimene tegur korrutatakse läbi kümneliste täisarvuga (ühikuga).

$$\begin{array}{r} 146 \\ \times 2 \\ \hline 292 \\ \text{1} \end{array}$$

3. Teine osakorrutis korrutatakse kümnega.

$$292 \times 10 = 2920$$

4. Saadud osakorrutised liidetakse ja saadakse lõppvastus (korrutis). Liitmisel meeldejäetavad ühikud märgitakse kujuneva vastuse alla.

$$\begin{array}{r} 584 \\ + 2920 \\ \hline 3504 \\ \text{11} \end{array}$$

* korrutamisel meeldejäetavate järguühikute paiknemine

Hiljem, kui osakorrutiste arvutamisel meeldejäetavaid arve enam kirja ei panda, muutub vormistamine lühemaks ja märgitakse ainult osakorrutiste liitmisel meeldejäetavad ühikud.

$$\begin{array}{r} 223 \\ \times 36 \\ \hline 1338 \\ 6690 \\ \hline 8028 \\ \text{11} \end{array}$$

Baker jt (1995) pakuvad kirjaliku korrutamise õppimiseks teise algoritmina korrutamise tabeli abil. Korrutamiseks joonestatakse ruudustik/tabel. Suurema teguri järgud paigutatakse tabeli veergudesse ja teine tegur paigutatakse tabeli paremale küljele ridadesse. Igale järgühikule on eraldi oma rida või veerg. Lahtrid poolitatakse diagonaalide abil, mis ulatuvad üle tabeli alumise serva. Diagonaalide abil poolitatud tabeli lahtritesse kirjutatakse diagonaalist üles kümmelised ja diagonaalist alla kirjutatakse ühelised. Tabeli alla kujuneb lõppvastus. Järgnevalt näide etappide kaupa.

Näide 1: **125 x 23**

1. Joonestatakse ruudustik, paigutatakse tegurid.

1	2	5	
			2
			3

2. Tõmmatakse lahtritele diagonaalid, mis ulatuvad üle tabeli.

1	2	5	
			2
			3

3. Korrutatakse tabeli veerus ja reas olevad arvud omavahel.

$5 \times 2 = 10$, kümmelised kirjutatakse kastis diagonaalist üles, ühelised kirjutatakse diagonaalist alla. $2 \times 2 = 4$, kümmelisi ei ole, siis kirjutatakse kasti diagonaalist üles 0 ja 4 üheliste kohale. $5 \times 3 = 15$ jne. Lõppvastuse saamiseks liidetakse diagonaalide vahel olevad arvud ja lõppvastus kujuneb tabeli alla. Kui korrutamisel polnud järjekord tähtis, siis liitmist tuleb alustada paremalt vasakule (üheliste järgust). Selliselt korrutades pole osakorrutiste arvutamisel meeldejäetavate ühikutega vaja arvestada.

	1	2	5	
	0	0	1	2
	2	4	0	
	0	0	1	3
	3	6	5	
2	8	7	5	

Näide 2 selgitab osakorrutiste liitmisel meeldejäetavate ühikute paigutamist:

$$146 \times 24 = 3504$$

	1	4	6	
	0	0	1	2
	2	8	2	
	0	1	2	4
	4	6	4	
3	5	0	4	
1		1*		

Kirjaliku korrutamise kolmandas variandis, mis on meiegi koolipraktikas matemaatikas kasutusel olnud, paigutatakse tegurid kõrvuti.

$$\begin{array}{r} 23 \times 375 \\ 1125 \\ 750 \\ \hline 8625 \end{array}$$

Kirjaliku jagamise erinevaid algoritme ning nende vormistamise võimalusi

Kirjalikul jagamisel kasutusel olevaid algoritme ja lahendusstrateegiaid võib jaotada kaheks: a) traditsioonilised kirjaliku jagamise algoritmid ja b) mittetraditsioonilised ehk mitteametlikud (*informal*) ja intuiitiivsed (*intuitive*) lahendusstrateegiad. Traditsioonilised kirjaliku jagamise algoritmid Soomes (Kaasik, 2005), Hollandis ja USA-s (Hickendorff, van Putten, Verhelst & Heiser, 2010) ning Inglismaal (Anghileri, 2006) on sarnased meil õpetatava kirjaliku jagamise algoritmiga. Erinevus seisneb algoritmide vormistamises.

* liitmisel meeldejäetavate järgühikute märkimine

Järgnevalt näited erinevate maade kirjaliku jagamise vormistustest probleemi $736 : 32 = 23$ lahendamisel. Järgnevalt esitatud näidetes paikneb jagaja (32) jagatava (736) ees, jagatis (23) kirjutatakse Soomes, USA-s ja Inglismaal jagatava kohale, Hollandis kirjutatakse jagatavast paremale.

Traditsioonilise kirjaliku jagamise algoritmi erinevaid vormistusi (*notations*):

Hollandis	Soomes	Inglismaal
$ \begin{array}{r} 32 \overline{) 736} \setminus 23 \\ \underline{64} \\ 96 \\ \underline{96} \\ 0 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 32 \overline{) 736} \\ \underline{64} \\ 96 \\ \underline{96} \\ 0 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 23 \\ 32 \overline{) 736} \\ \underline{64} \\ 96 \\ \underline{96} \\ 0 \end{array} $
<p>USA-s</p> $ \begin{array}{r} 23 \\ 32 \overline{) 736} \\ \underline{-64} \\ 96 \\ \underline{-96} \\ 0 \end{array} $		

Kirjalikul arvutamisel kasutatavad mitteametlikud (informal) intuiitsed (intuitive) strateegiad

Järgnevalt ülevaade Inglismaal (Anghileri, 2006) ja Hollandis (Hickendorff jt, 2010) õpilaste poolt kasutatavatest mitteametlikest intuiivsetest arvutusstrateegiatest kirjalikul arvutamisel. Need on strateegiad, mis on õpilastel varem õpitud ja mida nad omavahel kombineerivad. Mitteametlikud strateegiad kirjalikul arvutamisel on näiteks: loendamine (mõttes, sõrmedel); korduv liitmine/lahutamine; korrutamise kasutamine jagamisel; korduv pooleks jagamine ($424 : 4$, 424 jagatakse esmalt pooleks - 212 ja saadud vastus veel üks kord pooleks - 106); ümardamine (nt jagamisel ümardatakse jagatavat ja jagajat); arvu jaotamine järkudeks ja nendega arvutamine ($400+20+4$); täiskümneteni liitmine või lahutamine. Varem õpitud lahendustrateegiate kasutamine aitab õpilastel paremini mõista suhteid aritmeetiliste operatsioonide vahel. Korrutamine on kui korduv liitmine ja jagamine kui korduv lahutamine.

Õpilaste intuiivsetele ideele toetuv algoritm on võetud kirjalikul jagamisel kasutusele Inglismaal (Anghileri, 2006) ja Hollandis (Hickendorff jt, 2010). Neis riikides on muudetud matemaatika õppekavasid mitmel põhjusel. Üheks põhjuseks oli õpilaste kehv arvutusoskus riiklikes tasemetöodes. Teiseks oli üldine rahvusvaheline trend, et õpilane on aktiivne avastaja/õppija, kes konstrueerib ise ülesannetele vastused. Õpilased peavad omandatud

teadmisi erinevate lahendusstrateegiatega puhul paindlikult kasutama. Õpilastele tuleb anda võimalus ise leiutada/otsida vastuseid, alustades mitteametlikest intuiitvsetest strateegiatest. Kirjalikule jagamisele eelneb järgmiste mitteametlike strateegiatega kasutamine: loendamine, korduv liitmine, korrutamise kasutamine, korduv lahutamine. Mitteametlik strateegia – jagaja kordsete korduv lahutamine jagatavast (*chunking-based strategies*) võib sõltuvalt vormistusviisist olla ka ametlik kirjaliku jagamise strateegia.

Arvude jagamisel on aluseks kaks käsitlust (Anghileri, 2006): a) arvu jaotamine võrdseteks osadeks (28 jagatud 7) ja b) mahutavuse alusel (Mitu 7 mahub 28?). Esimene jagamine on seotud järkude (*place value*) eraldamisega, mis toetab kaudselt traditsioonilist algoritmi. Teine mudel kaasab eraldiseisva protseduuri nagu jagaja korduva lahutamise. Sellest tulenevalt on mõistlik lahutamisel kasutada jagaja kordseid ehk “suuremaid tükke” (*chunks*), mis ongi baasiks jagaja kordsete lahutamise (*chunking*) algoritmile.

Näiteks $98 : 7$, traditsioonilisel jagamisel “7 läheb 9 üks kord”, jääk 2, millele lisatakse 8 ja $28 : 7$ on 4. Vastus on 14. Jagaja kordsete korduval lahutamisel korrutatakse $7 \times 10 = 70$, see lahutatakse 98 ja jääk jääb 28, mis jagatakse 7. Traditsioonilisel kirjalikul jagamisel peab iga jagaja kordne olema lahutamisel optimaalne (see ei saa olla liiga väike ega suur), aga jagaja kordsete korduval lahutamisel sellist tingimust ei ole. Kordsete korduvat lahutamist saab läbi viia kõrgemal ja madalamal tasemel. Kõrgemal tasemel lahutamisel peab esimene jagaja kordne olema vähemalt 10 korda jagajast suurem. Kui see on väiksem kui 10 korda, siis on ülesanne lahendatud madalamal tasemel, sest arvutamine ning selle vormistamine venivad pikaks, lahendamine võtab kauem aega ning samuti kutsub esile rohkem vigu.

Veel näiteks: probleemi $736 : 32 =$ lahendamisevariandid jagaja kordsete korduval lahutamisel on toodud järgmisel skeemil (Hickendorff jt, 2010).

	Korduva lahutamise vormistamine (skeemita)	Korduva lahutamise vormistamise skeem
Madalamal tasemel (<i>low-level of chunking</i>)	$2 \times 32 = 64$ $4 \times 32 = 128$ $8 \times 32 = 256$ $16 \times 32 = 512$ $20 \times 32 = 640$ $22 \times 32 = 704$ $23 \times 32 = 736$	$736 : 32 =$ $\begin{array}{r} 160- \\ 576 \\ \hline 160- \\ 416 \\ \hline 160- \\ 256 \\ \hline 160- \\ 96 \\ \hline 96 \\ 0 \end{array} \begin{array}{l} 5x \\ \\ 5x \\ 5x \\ 5x \\ 3x + \\ 23x \end{array}$
Kõrgemal tasemel (<i>high-level of chunking</i>)	$10 \times 32 = 320$ $20 \times 32 = 640$ $3 \times 32 = 96$ $23 \times 32 = 736$	$736 : 32 =$ $\begin{array}{r} 640- \\ 96 \\ \hline 96 \\ 0 \end{array} \begin{array}{l} 20x \\ \\ 3x + \\ 23x \end{array}$

Nimetatud ametlikuks jagamise strateegiaks Inglismaal ja Hollandis.

Madalamal tasemel ja skeemita on mitteametlik strateegia. Kõrgemal tasemel koos skeemiga lahendamisstrateegia on Hollandis asendanud traditsioonilise kirjaliku jagamise algoritmi ja Inglismaal on see kasutusel koos traditsioonilise algoritmiga.

Kirjaliku korrutamise ja jagamise oskuste omandamine

Kirjaliku arvutamise oskuste omandamist on mitmetes teadustöodes uuritud tingimustes, kus õpilased leiavad ise lahendusviisi (strateegia) antud ülesannete lahendamiseks. Selliselt uurides selguvad erinevad peast- ja kirjalikult arvutamise strateegiad, mida õpilased kasutavad ning samuti nende kasutatavate strateegiate efektiivsus ülesannete lahendamisel (Anghileri, 2001, 2006; Lucangeli, Tressoldi, Bendotti, Bonanomi & Siegel, 2003; Hickendorff jt, 2010).

3.-5. klassi (keskmine vanus 8,3 kuni 10,2 eluaastat) õpilaste peast- ja kirjaliku arvutamise strateegiate omandamist ja efektiivsust (s.t õpilase poolt kasutatud strateegia annab 75% juhtudest õige vastuse) on uurinud Lucangeli jt (2003). Nad leidsid, et koolis õpetatavat kirjaliku liitmise algoritmi hakkavad efektiivselt kasutama 3. klassi õpilased, kirjalikku lahutamist 4. klassi õpilased. Märgati ka, et 3.-5. klassini vähenes liitmisel meelde jäetavate järkude märkimine (sageli hoiti meeles peetavat järku sõrmedel – nii mitu sõrme hoiti püsti). Lahutamisel vähenes võtmise/laenamise märkimine 3.-4. klassi võrdluses 5. klassi õpilastega. Kirjalik korrutamine muutus efektiivseks alates 4. klassist ning koos kirjaliku korrutamise efektiivsuse tõusuga 3.- 5. klassini vähenes meeles peetavate järkude märkimine. 5. klassi õpilastel, kes kasutasid meeles peetavate järkude üles märkimist, oli efektiivsus kirjalikul korrutamisel madalam kui 4. klassi vastavatel õpilastel. Kõige keerulisemaks kujunes kirjaliku jagamise algoritm, mille kasutamine muutus efektiivseks alles alates 5. klassist (74% kasutamise juhtudest).

Anghileri (2001) uuris 5. klassi (vanuses 9-10 aastat) õpilasi, kui neile õpetati kirjalikku jagamist. Kahe testimise vahe oli viis kuud. Kuigi sel ajal õpilased harjutasid kirjalikku jagamist, parestid 52% õpilaste vastused, ülejäänud 48% jäi tulemus samaks või oli halvem. Teises katses tegid paljud õpilased rohkem vigu ja jätsid vastamata. Mõlemas testis oli rohkem vastamata ülesandeid poistel (10%) kui tüdrukutel (8%). Üldiselt testi tulemustes poiste ja tüdrukute vahel statistilist erinevust ei esinenud. Kuigi õpilased kasutasid ülesannete lahendamisel palju erinevaid mitteametlikke strateegiaid, oli enim kasutatud lahendamisstrateegiaks jagamise standardalgoritmi (traditsiooniline) kasutamine. Traditsioonilise jagamise strateegia kasutamine tõusis 38%-lt 49%-ni teises testis, kuid pooled nendest katsetest tõid vale vastuse vigase algoritmi tõttu või suutmatusest täita

arvutamisprotseduure (arvutamisvead). Kõige edukam lahendusstrateegia oli kõrgemal tasemel jagaja kordsete lahutamine (*high-level of chunking*). Peale esimest testi sooritasid õpilased kiirtesti (*speedtest*), millega uuriti nende peast arvutamise oskusi (liitmine, lahutamine, korrutamine). Tulemuste kõrvutamisel leiti, et kirjaliku jagamise algoritmi omandamine polnud lihtne ka õpilastele, kes arvutamise kiirtesti edukalt sooritasid.

Erineva matemaatilise võimekusega õpilaste lahendamise strateegiate valikud kirjalike jagamisülesannete lahendamisel tõid välja Hickendorff jt (2010). Keskmise ja üle keskmise matemaatilise võimekusega õpilased valisid lihtsamate arvutamisyülesannete lahendamiseks peastarvutamise ja keerulisemate puhul kirjaliku lahendamise strateegia. Sellist valikut ei teinud madalama matemaatilise võimekusega õpilased. Nemad kasutasid rohkem peastarvutamise strateegiaid ja vähem kirjaliku lahendamise strateegiaid. Kui aga madala matemaatilise võimekusega õpilased valisid kirjaliku lahendamise strateegia, olid nende tulemused paremad (rohkem õigeid vastuseid) kui peastarvutamise strateegiate kasutamisel.

Kirjaliku arvutamise algoritmidest peetakse jagamise algoritmi omandamist õpilastele kõige raskemaks (Chinn, 2008; Anghileri, 2001; Lucangeli jt, 2003). Chinn (2008) uuris 7.-9. klassi õpilaste ärevust seoses matemaatikaga. Põhikooli õpilastel oli kirjalik jagamine (kalkulaatorita) ärevust tekitava faktorina 2.-3. kohal. Esimesel kohal oli matemaatika lõpueksam.

Kirjalik jagamine on õpilastele raske, sest traditsiooniline algoritm eeldab mitmeid üksikoskusi – põhiliste aritmeetiliste faktide meenutamist (korrutus- ja jagamistabeli) ja toimingute järjestamist mälus (Anghileri, 2001; Lucangeli jt, 2003;) ning oskust see ka kirjalikult vormistada (Chinn, 2008). Lisaks algab jagamise algoritm vasakult (erinevus teistest kirjaliku arvutamise algoritmidest – liitmine, lahutamine, korrutamine), kõige suuremast järgust, mis tekitab raskusi vastuses suurusjärkude määramisel (Lee, 2007). Kirjaliku jagamise mitmeetapiline algoritm koosneb õiges järjekorras sooritatud üksikoskustest (toimingutest) ja õpetajad õpetavad seda mehhaaniliselt “jaga-korruta-lahuta-too alla” ning õpilastel on raske mõista nende toimingute sisu algoritmilisel arvutamisel (Hickendorff jt, 2010; Lee, 2007; Anghileri, 2006)

Algoritmilise arvutamise omandamiseks on oluline aritmeetiliste faktide teadmine (Fuchs, L., Fuchs, D., Compton, Powell, Seethaler, Capizzi, Schatschneider & Fletcher, 2006), Lucangeli jt (2003) järgi nende meenutamine (*retrieval*)⁴.

⁴ Uute omandatud teadmiste taastamine mälust meenutuse (*retrieval*) vormis (Tulving, 2002, lk 35).

Korrutus- ja jagamistabeli omandamine

Korrutus- ja jagamistabeli õppimist alustatakse meil II klassis 20 piires (tulemuseks 20). Kolmanda klassi lõpuks õpilane teab ja tunneb peast korrutustabelit ja oskab arve korrutada ja jagada 100 piires (Põhikooli ja gümnaasiumi riiklik õppekava, vastu võetud 25.01.2002). Kognitiivses psühholoogias on tehtud arvukalt uurimusi aritmeetiliste baastehete omandamise kohta.

Uurimustest on selgunud, et korrutus- ja eriti jagamistabeli faktide omandamine toimub mitme aasta jooksul (Gampbell & Graham, 1985; Siegler, 1988; Lemaire & Siegler, 1995). Kõige efektiivsem tabeliliste ülesannete lahendamise strateegia on otsene meenutamine (*direct retrieval*). Kui meenutamine ei õnnestu, siis kasutatakse varustrateegiaid (*backup strategies*). Korrutus- ja jagamistabeli omandamise algusjärgus kasutavad õpilased mitmeid erinevaid varustrateegiaid. Korrutamisel kasutatakse peamise varustrateegiana korduvat liitmist ($2 \times 3 = 3 + 3$), vähem paberile objektide loendamiseks märkmete tegemist ja vastamata jätmist (Siegler, 1988; Lemaire & Siegler, 1995). Tabelilisel jagamisel kasutatavad varustrateegiad on peamiselt korrutamise kasutamine ($56 : 8 = ?$, $_ \times 8 = 56$) ja korduv liitmine (Mauro, LeFevre, Morris, 2003; Robinson, Arbuthnott, Rose, McCarron, Globa & Phonexay, 2005; Robinson & Dube, 2008). Vastamise kiirus ja täpsus parenesid seoses kasutatavate strateegiatega, eriti meenutamise kui efektiivseima strateegia osakaalu suurenemisega seoses. Keskmise ühe korrutustabeli tehetele vastamise aeg lühenes 3. kuni 5. klassini 3,83 sekundilt 1,87 sekundini ja täiskasvanutel oli keskmine ühe tehete lahendusaaeg 0,8 sekundit (Gampbell & Graham, 1985). Vigade arv samade autorite uuringus vähenes 3.-5. klassini 30%-lt 17%-ni, täiskasvanutel esines vigu 8%. Robinson ja Dube (2008) said ühe jagamistabeli tehete lahendamisajaks õpilastel 5. klassi lõpuks keskmiselt 3,9 sekundit ja vigu esines 5,7%.

Vigu tabelilisel arvutamisel liigitatakse mitmeti. Üldistatult jagatakse korrutustabeli meenutamise vigu tabelilisteks ($3 \times 4 = \underline{14}$, vastus sobib mõnele teisele tegurite paarile; $4 \times 8 = \underline{24}$, vastus on seotud ühega teguritest) ja mittetabelilisteks vigadeks ($3 \times 4 = \underline{11}$, sellist vastust korrutustabelis pole) (Gampbell, 1997; Gampbell & Graham, 1985; Siegler, 1988). Korrutustabeli faktide omandamise algul oli suurem mittetabeliliste vigade osa. Lisaks neile vigadele määras Siegler (1988) veel vale toiminguid, kus korrutamise asemel sooritatakse mõni muu aritmeetiline tehe ($3 \times 4 = 7$ *pro* 12, sooritati korrutamise asemel liitmine), neid esines 4. klassil 22% korrutustabeli vigadest. Siegler (1988) märkis veel tegurite paaris-paaritu staatusega seotud vigu, mis tulenesid korrutamisel liitmise strateegia kasutamisest. Õpilased alateadlikult 5 (paaritu arv) x 4 (paarisarv) tulemuseks pakkusid paaritut arvu, mis liitmisel

oleks õige ($4+5=9$), sama seaduspära ei kehti aga korrutamisel (paaritu-paaris= paaritu / paaritu x paaris= paaris; paaritu-paaritu=paaris / paaritu x paaritu=paaritu).

Mazzoco, Devlin & McKenny (2008) ning Mabott & Bisanz (2008) uurisid korrutus- ja jagamistabeli omandamist matemaatiliselt madalama võimekusega ja matemaatika õpiraskustega õpilastel. Need õpilased olid lahendamisel oluliselt aeglasemad ja tegid rohkem vigu võrreldes eakohase arenguga õpilastega. Samuti jätsid nad sageli vastamata.

Kirjalikul korrutamisel ja jagamisel esinevad vead

Kirjaliku korrutamise ja eriti kirjaliku jagamise algoritmid on keerulised, koosnevad erinevatest üksikostest, mis tuleb õigesti ja õiges järjekorras sooritada ning seetõttu esineb õpilastel hulgaliselt erinevaid vigu.

Burrows (1976) esitas õpilaste kirjalikul arvutamisel (liitmisel, lahutamisel, korrutamisel, jagamisel) esinevatest vigadest mahuka ja kokkuvõtliku ülevaate, mis põhines mitmete erinevate autorite ulatuslikel uurimistöodel. Ülevaatest ei selgu alati täpsemalt erinevatel uuringutel kasutatud tüüpülesanded, läbiviimise tingimused ega vigade liigitamise põhimõtted, piiratud on sageli vigade lakoonilise nimetamise ja esinemissagedusega. Burrowsi (1976) ülevaates tutvustatud uurimustest käsitletakse vigade liigitamisel järgmiste autorite tulemusi: Buswell ja John (1926); Williams ja Whitaker (1937); Schonell (1937); Burge (1932); Grossnickle (1936, 1939).

Eri autorid olid kokku eristanud õpilaste kirjalikul korrutamisel 51 ja jagamisel 71 erinevat viga. Õpilasi osales uuringutes 3.-8. klassini. Järgnevalt käsitletakse nende autorite poolt uuringutes erinevaid vigade grupeerimise võimalusi ning ühtlasi kõige sagedamini esinenud vigu õpilastel.

Kirjalikul korrutamisel tehtud vigadest paigutasid mitmed autorid (Buswell, John, 1926; Williams, Whitaker, 1937, viidatud Burrows, 1976) esimesele kohale

- korrutamise vigade kombinatsioonid (korrutustabeli ja liitmise vead).

Schonelli (1937, viidatud Burrows, 1976) uuringus asetisid õpilastel kirjalikul korrutamisel ülekaalukalt esimesele kohale;

- korrutustabeli vead.

Mitmetel autoritel (Buswell, John, 1926; Williams, Whitaker, 1937; Burge, 1932; Schonell, 1937, viidatud Burrows, 1976) olid sarnaselt välja toodud järgnevad vead:

- vead meeldejäetavate järguühikutega nii korrutamisel kui ka osakorrutiste liitmisel (vead meeldejäetavate ühikute liitmisel; meelde on jäetud vale arv; meelde jäetud arv unustatakse; jäetakse meelde, kui pole vaja);
- vead seoses nullidega (tegurites);
- vead osakorrutiste liitmisel;
- vead tegurite paigutamisel.

Burge (1932, viidatud Burrows, 1976) tõi korrutamise vigade nimekirja veel eraldi

- muud vead, mille seas eraldi nimetatud vead, kui õpilased ajavad segi tehteid.

Kirjalikul jagamisel nimetasid autorid (Buswell, John, 1926; Williams, Whitaker, 1937; Schonell, 1937, viidatud Burrows, 1976) järgnevaid vigade tüüpe:

- jagamise vigade kombinatsioonid (korrutus- ja jagamistabeli, lahutamise vead);
- vead lahutamisel;
- vead korrutamisel;
- null puudu jagatisest;
- jäägiga jagamisel jääk suurem jagajast.

Grossnickle (1936, viidatud Burrows, 1976) täpsustas vigade iseloomu kirjalikul jagamisel seose nulliga. Null puudu – jagatise lõpust, jagatava ja jagatise lõpus, jagatise keskelt (jagatavas puuduva järguühiku ja väikese osajagatava korral).

Kahekohalise arvuga jagades (Grossnickle, 1939, viidatud Burrows, 1976) tegid IV klassi õpilased kokku 7257 viga. 26 ülesandes esines 113 erinevat viga. Analüüsi jäeti vead, mida esines vähemalt 52 korral. Vead grupeeriti kuude gruppi esinemissageduse järgi:

- 1) vead korrutamisel (30%) (vale kombinatsioon – valed arvud; meelde on jäetud vale arv; ei jäeta meelde; jäetakse meelde, kui pole vaja),
- 2) vead ümardamisel (24%),
- 3) vead lahutamisel (22%) (vale kombinatsioon; unustatakse, et võeti^{**}; unustatakse võtta; võetakse, kui pole vaja),
- 4) vead toimingutes (11%) (lahutatakse väiksemast suurem (alt üles); esimene arv jagatises paigutatakse valele kohale; kolmekohalise osajagatava asemel kahekohaline),
- 5) vead jäägiga jagamisel (10%),
- 6) tähelepanu vead (4%) (osajagatis liiga väike, lahutamine on vahele jäänud; ülesanne lõpetamata; õige osajagatis, kuid vale arv jagatises; kirjutatakse jagatisse lisaarv)

^{**}Varem nimetati *võtmist* järgmisest järgust *laenamiseks*.

Cox (1974) uuris kirjalikul arvutamisel esinevaid süsteemseid algoritmi vigu. Selleks analüüsis ta 2.-6. klassi õpilaste ja hariduslike erivajadustega õpilaste (HEV) (*Learning Problem, Educable Mentally Retarded*) tulemusi kahe aasta jooksul. Valimisse kuulusid õpilased, kes teadsid enamikku korrutustabeli faktidest*. Coxi vigade üldine jaotus oli järgmine.

Süsteemsed vead (*Systematic error*) – kui kolmel korral viiest esineb ülesande lahendamisel sama veatüüp. Juhuslikud vead (*Random error*) – õpilane eksib kolmel korral viiest, kuid vead pole samatüübilised. Hooletusvead (*Careless error*) – eksib ühel või kahel korral viiest, praktiliselt teab algoritmi. Muud vead (*Incomplete data sheet*), mis ei sobinud teiste tüüpide alla. Süsteemsed vead kordusid arvutamisprotsessis kolmel korral viiest, olid samatüübilised, seega eristatavad juhuslikest ning hooletusvigadest. Süsteemsed vead olid algoritmi vead.

Cox (1974) leidis, et algoritmi vastu eksimise vigu kirjalikul korrutamisel ja jagamisel esines 5-6% õpilastest ning HEV õpilastel oli neid vigu vastavates tehetes kolm korda rohkem. Süsteemsed vead olid pikaajalised. Aasta hiljem tegi 23% süsteemseid vigu teinud õpilastest kas samu või teisi süstemaatilisi vigu. Osal õpilastest olid vead samad, teistel muutusid ja kolmandatel ei olnud sarnasust eelmiste vigadega. Korrutamisel ja jagamisel esines vigu rohkem 3.-5. klassi, vähem 6. klassi õpilastel ja oluliselt rohkem HEV õpilastel.

Cox (1974) nimetas korrutamise vigade analüüsimisel probleemseks olukorra, kui õpilased tegid samaaegselt süsteemsete vigadega ka hooletusvigu ja juhuslikke vigu. Olenevalt veast, võis see näidata, et laps oskas liita, teadis korrutustabelit, arvude kümnendkoostist, mõistis kirjaliku korrutamise algoritmi, meelde jätmist ja selle rakendamist ning osakorrutiste paigutamist, kuid eksis vahel mõnes neist. Sel juhul määrati need juhuslikeks vigadeks. Juhuslike vigade osakaal ülesannetes oli suurem, võrreldes süsteemsete vigade esinemisega. Juhuslikest vigadest esines enim liitmisvigu.

Algoritmi vead korrutamisel. Kõige suurem vigade osakaal oli seotud **meelde jäetavate järguühikutega**: meelde jäetav arv jäeti arvestamata; korrutamine oli õigesti toimunud ühelistega, kuid kümneline korrutati läbi meelde jäetava kümnelisega; selle asemel, et meelde jäetud kümneline liita korrutisele, hoopis korrutati sellega; meelde jäetud kümneline liideti järgmisele järgule enne korrutamist; meelde jäetaval arvul kirjutati vastusesse kümneline, mitte üheline ja sajaliste kohale märgiti üheline.

* Cox-i (1974) väljend

Vead **korrutamise algoritmi mitte mõistmisest**: korrutamist ei toimunud, vastusesse kirjutati üks teguritest; ühe järguga oli läbi korrutatud õigesti, teisega oli jäänud korrutamata; ei korrutatud läbi kõigi järkudega, vaid ainult selle järguga, mis asus otse arvu kohal.

Esines veel vigu osakorrutiste paigutamisel ning vale tehte valikuid. Algoritmi vigu põhjustas arvukaimalt “0” esinemine tegurites (nt ühe teguri keskel; lõpus – kui null on teguri lõpus, jäeti see sageli korrutamata).

Kirjalikul korrutamisel kõige vigaderohkemateks kujunesid ülesanded, mis eeldasid mitmeid järguühikute meeldejätmisi (mitme järgu ületamisega). Süsteemsed vead olid seotud meelde jäetavate ühikute ja nulliga teguri keskel. Lisaks oli neil ülesannetel ka suur hooletusvigade osakaal. Õpilaste poolt edukamatelt lahendatud ülesannete puhul olid ülekaalus hooletusvead, s.t üksikud erinevad vead.

Süsteemsed algoritmi vead jagamisel Coxi (1974) järgi. **Vead jagamise algoritmi mitte mõistmisest**: jagatava iga arv jagati eraldi, ei arvestatud kogu arvu; jäeti tegemata mõni tehe (korrutamine, lahutamine) ja järgmine osajagatav oli selle tõttu vale; kasutati vale tehet osajagatava leidmisel; jäeti jagatavas mõni järk jagamata; jääk jäi märkimata; mõnda järku jagati korduvalt ($494 : 7 = 49 : 7$, seejärel $9 : 7 =$, $24 : 7 =$); määrati valesti osajagatav; jääk jäi märkimata; jagatisse (keskele) jäi null kirjutama – juhtudel, kui tekkinud osajagatav oli väiksem kui jagaja; osajagatava jäägile oli lisamata järgmine järguühik (alla toomata); jagatisest oli mõni arv (järk) puudu; lisati jagatisse liigne null; vead ümardamisel; korrutamise- ja lahutamisevead. Mittesüsteemsetest vigadest esines enim ülesande lõpetamata jätmist.

Kirjaliku jagamise ülesannetes tekitasid kõige rohkem vigu ülesanded, milles jagaja oli kahekohaline. Suur osa vigadest oli seotud korrutamisega – need ei klassifitseerunud süsteemseteks vigadeks. Juhtivaks süsteemseks veaks oli puuduv 0 jagatisest (juhul, kui kujunenud osajagatav oli väiksem kui jagaja). Paljud süsteemsed vead olid jagamisel seotud teiste puudujääkidega – jagamise mõistmine, korrutamine, lahutamine, ebaõige osajagatava paigutamine, kümnendkoostise ja jäägi mõistmine. Paljud juhuslikud vead olid sarnased süsteemsetele vigadele – näiteks vead osajagatava vormistamisega seoses.

Anghileri (2001) uuris 5. klassi õpilastel kirjaliku jagamise traditsioonilise algoritmi kasutamist ja tõi välja ka enim esinenud vead. Õpilastel esines enim probleeme neljakohalise jagatava ja kahekohalise jagajaga. Samuti 10-ga jagamine ($802 : 10 = 80$ jääk 2, $604 : 10$) osutus raskeks, vähem kui pooled õpilased vastasid õigesti. Osa õpilasi lahendas ülesande peast ja see tõi 0 ning jäägi vead. Suure osa vigadest moodustasid nulli puudumine jagatisest ($1256 : 6 = 209$ jääk 3), kui osajagatav oli väiksem kui jagaja ja jäägiga jagamine. Mõned

õpilased sooritasid jagamise asemel lahutamise tehte ja olid selles järjekindlad mõlemas testis, kuid nende vigade koguhulk ei ületanud 4%.

Kirjaliku arvutamise oskuste uurimine

Kirjaliku arvutamise uurimine sõltub eesmärkidest. Õpilaste poolt kasutatavate erinevate lahendusstrateegiatega uurimisel nii korrutamisel kui ka jagamisel esitatakse neile lahendamiseks ülesanded ja õpilased valivad ise, mil viisil nad iga ülesande lahendavad (peastarvutamise või kirjaliku arvutamise algoritme kasutades). Tulemustes hinnatakse strateegiatega kasutamissagedust ja efektiivsust (Lucangeli jt, 2003; Hickendorff jt. 2010; Anghileri, 2001, 2006). Kirjalikul arvutamisel esinevate vigade uurimiseks lahendavad õpilased ülesandeid traditsioonilise kirjaliku arvutamise algoritme kasutades. Tulemustes liigitavad autorid vigu erinevalt (Cox, 1974; Burrows, 1976; Anghileri, 2001).

Ülesannete valikul testidesse arvestatakse nende raskusastmetega. Raskusastet kirjaliku arvutamise ülesannetes muudavad mitmed tingimused. Korrutamise ülesannetes: kohtade arv (ühe- või mitmekohalisus) tegurites; mitme järgu ületamisega (meelde jätmisega) või ilma; 0 olemasolu tegurites (keskel, lõpus) (Cox, 1974; Burrows, 1976; Lucangeli jt, 2003). Kirjaliku jagamise ülesannetes: kohtade arv (ühe- või mitmekohalisus) jagatavas, jagajas ja jagatises; järgu ületamine (osajagatava jäägile lisatakse järk – tuuakse alla); 0 olemasolu jagatavas, jagajas või jagatises; jäägi olemasolu vastuses (Cox, 1974; Burrows, 1976; Anghileri, 2001, 2006; Lucangeli jt, 2003; Hickendorff, 2010).

Mõnedes uuringutes on kirjaliku arvutamise uuringutes valimi koostamisel arvestatud õpilaste tulemustega riiklikult korraldavates testides. Anghileri'l (2001) kuulusid valimisse koolid, mille õpilastel olid riiklikus testis üle keskmise tulemused ja lisaks sooritasid õpilased veel kiirtesti (*speedtest*), millega hinnati nende peast arvutamise oskusi (liitmise, lahutamise ja korrutustabeli meenutamist). Hickendorff jt (2010) kasutasid õpilaste valimi koostamisel standardtesti matemaatikas, samuti Fuchs jt (2006) valisid õpilased arvutustesti tulemuste alusel. Cox (1974) kaasas valimisse õpilased, kes teadsid enamikku korrutustabeli faktidest.

Eestis ei ole õpetajatel igapäevaselt kasutusel standardiseeritud matemaatika aineteste õpilaste erinevate arvutusoskuste hindamiseks. Vabariiklikud tasemetööd annavad ülevaate õpilaste matemaatikaalastest teadmistest ja oskustest I ja II kooliastme lõpus, vastavalt III ja VI klassis. VI klasside tasemetööde tulemused on ajast aega olnud madalamad kui III klassi õpilastel. Matemaatika tasemetöö/ülesannete edukaks sooritamiseks on vajalik korrektne arvutamine. Seetõttu huvitavad mind II kooliastmes õpitavate uute arvutusoskuste – kirjaliku korrutamise ja jagamise oskused.

Käesolevas töös uurin II kooliastme IV ja V klassi õpilaste kirjaliku korrutamise ja jagamise oskusi sama testimaterjali põhjal. Sama testimaterjali kasutamine annab võimaluse võrrelda IV ja V klassi õpilaste vastavaid oskusi. V klassi õpilased on kirjaliku arvutamise oskusi rakendanud ühe õppeaasta võrra rohkem ning nii on võimalus analüüsida nende arvutusoskusi võrdlevalt IV klassi õpilastega.

Ülesannete lahendamisel esinevate vigade erinevus võimaldab analüüsida kirjaliku arvutamise veaohlikke kohti ja kirjaliku arvutamise algoritmide omandatust klassides. Missuguseid vigu teevad IV ja V klassi õpilased ning millised on erinevused?

Õpilaste individuaalsed tulemused kirjalikul arvutamisel annavad ülevaate õpilaste hulgast, kes on omandanud kirjaliku arvutamise oskused ja kui suurele osale õpilastest kirjalik arvutamine raskusi valmistab.

Uurimustöö meetod

Uurimustöö eesmärk

Käesoleva töö eesmärk on kirjeldada tavakooli IV ja V klassi õpilaste kirjaliku korrutamise ning kirjaliku jagamise ülesannete lahendamise oskusi. Töös soovin leida vastused järgmistele uurimisküsimustele: (1) mille poolest erineb samade ülesannete lahendamise edukus IV ja V klassi õpilastel, (2) mille poolest erineb IV ja V klassi õpilaste ülesannete lahendamisel tehtavate vigade muster ning (3) millised on õpilaste individuaalsed sooritustulemused.

Katseisikute kirjeldus

Uuringus osales kokku 159 IV ja V klassi õpilast viiest erinevast üldhariduskoolist Ida- ja Lääne-Virumaal (linna gümnaasium, linna algkool, maa keskkool, maa keskkool liitklassidega, maa põhikool). Valimisse kuulusid kõik valitud koolide IV ja V klassi õpilased, kes õppisid põhikooli ja gümnaasiumi riikliku õppekava (k.a. sellest lähtuvate individuaalsete õppekavade) järgi. IV klassi õpilasi oli 83 (40 tüdrukut ja 43 poissi) ja V klassi õpilasi 76 (tüdrukuid 49 ja poisse 27). Õpilaste keskmine vanus oli IV klassis 10a2k, V klassis 11a4k.

Uurimustöö mõõtvahendid ja protseduur

Käesolevas töös uuriti õpilaste kirjaliku korrutamise ja jagamise ülesannete lahendamise oskusi autori poolt koostatud ülesannete komplektiga. IV ja V klassi õpilased lahendasid samu ülesandeid.

Õpilaste kirjaliku korrutamise oskuste uurimiseks oli koostatud 10 ülesannet (vt lisa 1). Koostatud ülesannetes oli üks teguritest neljakohaline ja teine kahekohaline. Ülesanded erinesid järgu ületamiste kordade, 0 asukoha poolest.

Õpilaste kirjaliku jagamise oskuste uurimiseks oli koostatud 12 ülesannet (vt lisa 1). Kõigis ülesannetes oli jagatav neljakohaline, neljas ülesandes oli jagaja ühekohaline ja kaheksas ülesandes kahekohaline. Raskusastet mõjutas veel jagatav tulev null, järgu ületamised, 0 asukoht jagatavas.

Korrutamise ja jagamise ülesanded (kokku 22) olid jaotatud kahte rühma (A osa/variant ja B osa/variant – lisad 2 ja 3). Kummaski variandis oli 5 korrutamise ja 6 jagamise ülesannet. Õpilased lahendasid ülesandeid kahes rühmas, ühed A ja teised B osa. 2-3 päeva pärast lahendasid vastavalt teise variandi. Seega lahendasid kõik õpilased kahe testimise jooksul 22 kirjaliku arvutamise ülesannet (10 korrutamise ja 12 jagamise ülesannet).

Kirjaliku arvutamise ülesannete lahendamine viidi klassides läbi rühmakatsetena ajavahemikul 19. – 30. aprillini 2010. Testid viis läbi käesoleva töö autor matemaatika ainetundides, 2.-4. tunni ajal. Töö tegemiseks oli planeeritud terve õppetund.

Tulemuste arvestamine/hindamine

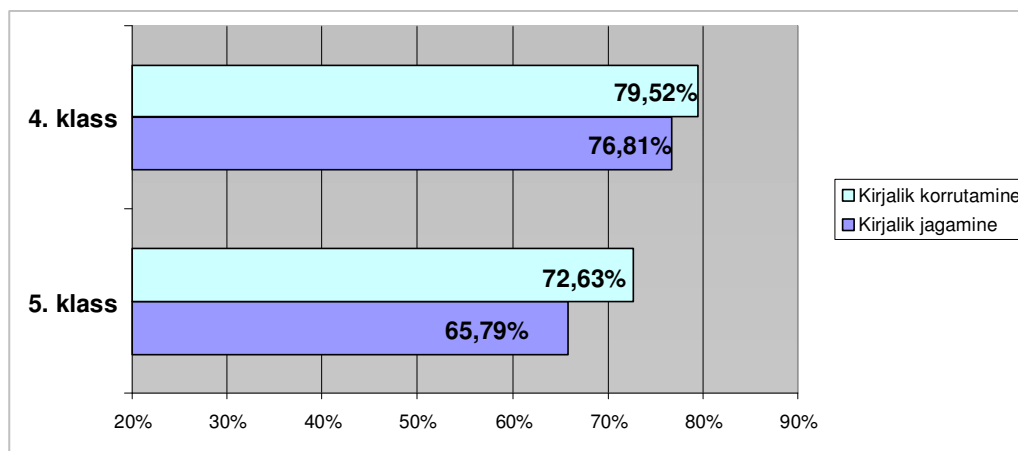
Läbi viidud testiülesannete tulemusi kontrollis ja skooris töö autor. Iga õigesti lahendatud ülesanne andis 1 punkti. Maksimaalselt oli võimalik saada kirjaliku korrutamise ülesannete lahendamise eest 10 punkti ja jagamise ülesannete eest 12 punkti. Kõik ülesannete lahendamisel esinenud vead grupeeriti ja loendati. Andmetöötlus toimus tarkvara Microsoft Excel 2003 ja SPSS Statistics 17.0 programmi abil.

Uurimustöö tulemused

Kirjaliku korrutamise ja jagamise ülesannete lahendamise edukus

Kirjaliku korrutamise ja jagamise ülesannete uurimuses lahendasid 83 IV klassi õpilast 830 korrutamise ja 996 jagamise ülesannet. V klassis lahendasid 76 õpilast vastavalt 760 korrutamise ja 912 jagamise ülesannet.

Testi tulemuste analüüsist selgus, et IV klassi õpilased olid lahendamisel olnud protsentuaalselt edukamad kui V klassi õpilased (vt joonis 1). Statistiliselt oluline oli IV klassi õpilaste paremus kirjaliku jagamise ülesannete lahendamisel ($p=0,013$) ja olulisus piiripealne korrutamise ülesannete ($p=0,049$) osas. Korrutamise ja jagamise ülesannete lahendamise tulemusi klasside siseselt võrreldes (vt joonis 1), on näha, et kirjaliku korrutamise ülesanded olid lahendatud edukamalt kui jagamisülesanded, kuid see erinevus pole statistiliselt oluline (t-testiga $p>0,05$).

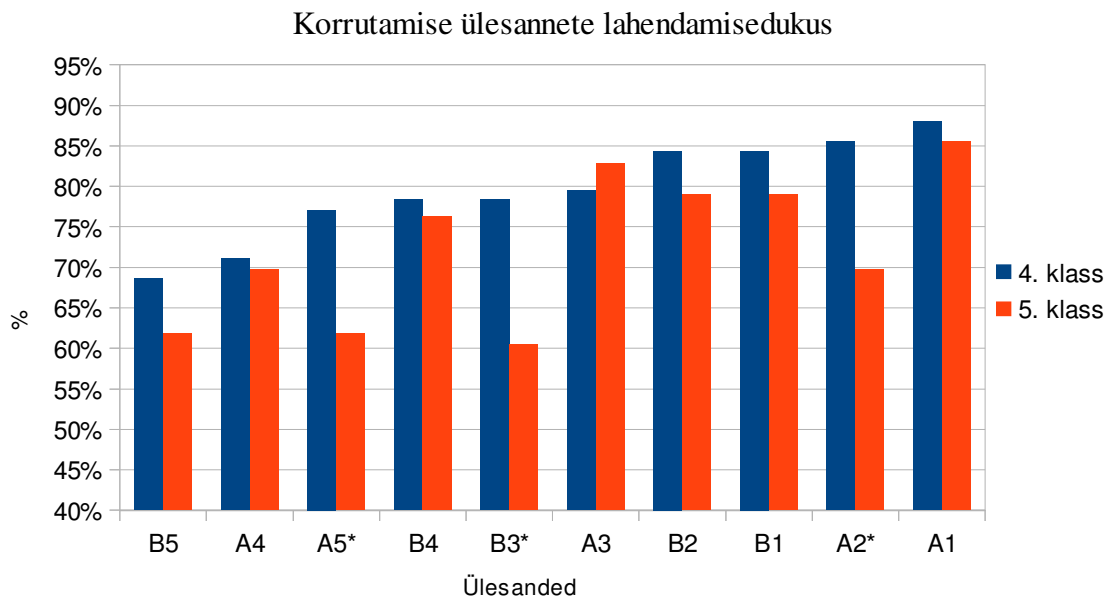


Joonis 1. Kirjaliku arvutamise ülesannete üldine lahendamise edukus IV ja V klasside õpilastel.

Analüüsides (t-testiga) poiste ja tüdrukute tulemusi, ei selgunud olulist erinevust klasside siseselt ega klasside vahel ja seetõttu edaspidi soolise jaotuvuse alusel tulemusi ei vaatle.

Kirjaliku korrutamise ülesannete lahendamine

Kirjalikul korrutamisel oli IV klassi õpilastel kaheksa ülesannet kümnest sooritatud üle 75% edukusega ja V klassil vastavalt viis ülesannet.



Joonis 2. Korrutamise ülesannete lahendamise edukus klassides.

Märkus. Tärniga (*) on tähistatud statistiliselt oluline erinevus klasside võrdluses ($p < 0,05$). Ülesannete tähistused vt lisas 1.

Kuigi ülesannete edukusprotsente arvestades olid IV klassi õpilased korrutanud üldiselt edukamalt kui V klassi õpilased, oli erinevus suurim ja statistiliselt oluline kolme ülesande – A2, A5 ja B3 lahendamisel (vt joonis 2). Nende lahendamine oli V klassi õpilastele valmistanud rohkem raskusi kui IV klassi õpilastele. Ülejäänud ülesanded olid lahendatud sarnase edukusega. Õpilaste kirjaliku korrutamise ülesannete lahendamise edukust analüüsin täpsemalt seoses ülesannetes esinenud vigadega.

Kirjalikul korrutamisel esinenud vead

Kirjalikul korrutamisel esinenud vead kodeeriti, saadi 11 veatüüpi (vt tabel 1). Ülesannete lahendamisel, milles osakorrutiste arvutamisel olid vajalikud järgu ületamised, eksisid õpilased korrutustabeli meenutamisel ja/või meeldejäetud järguühiku liitmisel või unustasid selle liita – nt $7 \times 8 + 1$ (meeldejäetud kümneline) = 61 pro 57. Seetõttu said need vead liigitatud **kombineeritud veaks** (tähis **1**, vt tabel 1) – korrutustabeli ja/või meeldejätmise viga. Kombineeritud vigadeks nimetamisel oli kaks põhjust. Esiteks sisaldab järgu ületamine kahte erinevat oskust (korrutustabeli meenutamist ja sellele meeldejäetud ühiku liitmist) ning vastavad vead liigitasin arvutusvigadeks. Teisel juhul tekib õpilasel viga seoses meeldejäetava järguühikuga, mille ta unustab liita või teostab sellega mõne muu operatsiooni (tehte). Neil juhtudel võib vastava vea korrutamisel liigitada algoritmi veaks s.t

puudulikult on omandatud algoritmi (ala)oskused. Õpilasel võivad üheaegselt olla nii arvutus- kui ka algoritmi vead. Kombineeritud vigade täpsemat määramist takistasid asjaolud, et kõik õpilased ei märkinud kirjalikul arvutamisel meeldejäetavaid ühikuid või tegid ülesandes korruga mitmeid vigu (nt eksisid korrutustabeli meenutamisel ja sellele järguühiku liitmisel). Ülesannetes, kus järgu ületamisi oli vähe või esinesid õpilasel üksikud vead ja arvutamisel meeldejäetavad järguühikud olid märgitud, said tuvastatud eraldi korrutustabeli meenutamise vead – **korrutustabeli vead (2)**. Testiülesanded võimaldasid jälgida ka **nulliga korrutamise viga (3)**. Osakorrutiste liitmisel tehtud vead on liigitatud **liitmisvigadeks (4)**. Eraldi on välja toodud osakorrutiste **liitmisel vead meeldejäetavate ühikutega (5)** – õpilased unustasid need liita või lisasid liigselt. Loetletud vead (1, 2, 3, 4, 5) on liigitatud arvutusvigadeks ja töödes esinenud ülejäänud vigu nimetatud – muudeks vigadeks.

Muudeks vigadeks olid järgmised eksimused: **lõpetamata ülesanne** – ülesanne oli lahendatud õigesti, kuid jäänud lihtsalt pooleli (6). Näiteks olid osakorrutised arvutatud, kuid nende liitmine oli pooleli jäänud. Eraldi veana said välja toodud lõpetamata ülesanded, mille lahendamisel teguri lõpus olev **null**, mis jäeti esialgu arvutamisel kõrvale, **unustati** korrutise lõppu lisada (7). Muude vigade hulka kuulusid veel – **lahendamata ülesanne (8)**, mille lahendamist õpilane polnud proovinudki ning **tõlgendamatu viga (9)** – nt mahakirjutamise viga, mis tekkis ülesande paigutamisel testi ruudulisele osale või seoses loetamatu käekirjaga või arusaamatuks jäänud toimingud korrutamisel. **Vale algoritmi (10)** viga sai määratud juhtudel, kui õpilane alustas korrutamist vale järguühikuga või õige järguühikuga valest järgust. **Vormistamisveaks (11)** liigitusid vead, kui õpilane paigutas tegurid ebaõigesti, kuid korrutamist teostas õiges järjekorras ja õigete järkudega. Kui õpilase lahendatud ülesandes oli võimalik tuvastada rohkem kui üks viga, loeti kõik vead eraldi kokku. Kui ülesande lahendamisel oli õpilane eksinud osakorrutiste arvutamisel, kontrolliti õpilase saadud osakorrutiste liitmise õigsust eraldi.

Kokku esines IV klassi õpilaste 830 vastuses 204 viga ning V klassi õpilastel 760 vastuses 232 viga. Arvutusvead moodustasid vigadest enamiku, nende osakaal IV klassis oli 86% (muid vigu 14%) ja V klassis oli 76% (muid vigu 33%) kõikidest vigadest (vt tabel 1).

Kirjaliku korrutamise ülesannetes olid esikohal mõlemas klassis kombineeritud vead (viga 1), kus õpilased eksisid osakorrutiste arvutamisel järgu ületamisega ülesannetes (IV klassis 39,7% ja V klassis 33,1% kõikidest vigadest).

Tabel 1. Kirjalikul korrutamisel esinenud veatüübid ja nende osakaalud klassides

Tähis	Veatüüp	4. klass %	5.klass %
1	Kombineeritud viga ⁵ – korrutustabeli ja/või meeldejäetava järguühikuga opereerimise viga, nt $7 \times 4 + 5 = 34$ või unustatakse meeldejäetav ühik lisamata (osakorrutiste arvutamisel järgu ületamisega ülesannetes)	39,71% ⁶	33,19%
2	Korrutustabeli (faktide) meenutamise viga	22,06%	21,12%
3	Nulliga korrutamise viga	2,45%	0,43%
4	Liitmisviga – osakorrutiste liitmisel viga lõppvastuse arvutamisel	14,71%	5,17%
5	Liitmisel meeldejätmise viga – viga lõppvastuse arvutamisel, kus osakorrutiste liitmisel on meeldejäetav järk unustatud liita või liigselt lisatud	7,35%	7,33%
	<u>KOKKU ARVUTUSVIGU</u>	<u>86,28%</u>	<u>67,24%</u>
6	Lõpetama ülesanne – lahendatud õigesti, kuid oli jäänud pooleli	2,45%	6,90%
7	Lõpetamata ülesanne – lahendatud õigesti, kuid teguri lõpus asuv null, mis esialgu jäetakse arvutamisel kõrvale, on jäänud korrutise lõppu lisamata	1,69%	9,91%
8	Lahendamata ülesanne – lahendamist pole proovitudki	-	6,47%
9	Tõlgendamatu viga – loetamatu käekiri, mahakirjutamisviga, suvaliselt kirjutatud numbrid	3,43%	4,31%
10	Vale algoritm – korrutamist alustatakse nt kümnelisega, mitte ühelistega	0,98%	1,72%
11	Vormistamisviga – teise osakorrutise paigutamise viga (järgud pole kohakuti), kuigi korrutatud ja liidetud on õigesti.	4,90%	3,45%
	<u>KOKKU MUID VIGU</u>	<u>13,45%</u>	<u>32,76%</u>
	Kõik vead kokku	100%	100%

⁵ Rasvaselt on trükitud enim esinenud veatüübid⁶ Punaselt on trükitud enim esinenud vead veagruppides

Korrutustabeli vead (2) olid mõlemas klassis sarnase sagedusega esinev teine veatüüp, mis õpilastel esines (IV klassis 22,1% ja V klassis 21,12% vigadest). Siinkohal peab märkima, et klassides 40% korrutustabeli vigadest tekkisid tehete segi ajamisest ($2 \times 1 = 1$ *pro* 2), korrutamise asemel sooritati lahutamine või sagedamini sooritati korrutamise asemel liitmine – $3 \times 3 = 6$ *pro* 9; $4 \times 4 = 8$ *pro* 16; $3 \times 2 = 5$ *pro* 6). Enim olid jälgitavad tehete segi ajamise vead ülesannetes, kus mõlemad tegurid koosnesid valdavalt arvudest alla 5 (A1 – 31x2012, B1 – 23x1232, A3 – 21x1473).

Erinevalt V klassi õpilastest seostus ülesannetega B1 ja A3 IV klassi õpilastel ka sageduselt kolmas veatüüp, selleks oli osakorrutiste liitmisel esinevad liitmisvead (vt lisa 5). Liitmisvigadest kolmandik kuulus nimetatud ülesannete arvele. Liitmisvigade vaatlusel võis samuti märgata tehete segi ajamist, kus liitmise asemel sooritati nt korrutamine ($2+0=0$ *pro* 2). Liitmisvigade osakaal oli IV klassi õpilastel vigade üldisest osakaalust umbes kolm korda suurem kui V klassil (IV klassil 14,7% ja V klassil 5,1%). V klassi õpilastel sageduselt kolmandal kohal olev viga seostus tegelikult ühe ülesandega (A2 – 2421 x 40), mil ülesanne oli jäänud lõpetamata (7), sest esialgselt korrutamisel kõrvale jäetud 0 oli unustatud korrutise lõppu lisamata. IV klassi õpilastel esines seda viga üksikute õpilastel. Tabelist (vt tabel 1) on näha, et erinevused IV ja V klassi õpilastel olid veel vigade 6 (ülesanne oli jäänud lõpetamata) ja 8 (ülesanne oli lahendamata) osas. Lõpetamata jäänud ülesandeid oli IV klassis 2,45% ja V klassis 6,9% ning lahendamata ülesandeid IV klassis polnud ühtegi. V klassis koondus enamus lahendamata ülesannetest tegelikult kahe õpilase arvele.

Väiksema sagedusega vealiikidest esines IV ja V klassi õpilastel sarnaselt liitmisvigu meeldejäetava järguühikuga (5), kus osakorrutiste liitmisel oli jäetud arvestamata meeldejäetav järguühik või lisatud liigselt (mõlemas klassis 7,3% vigadest). Sarnane oli klassides ka vormistamisvigade (11) ja tõlgendamata vigade (9) esinemine. Need veatüübid koondusid klassides üksikute õpilaste arvele nagu ka nulliga korrutamise vead (3) ja vale algoritmi (10) kasutamine korrutamisel. IV klassis oli kaks õpilast, keda korrutamise algoritmi kasutamisel ajasid segadusse nullid (5300×14) ja V klassis oli üks õpilane, kes eksis neljas ülesandes korrutamise algoritmi vastu (ei korrutanud läbi kõigi järkudega).

Kokkuvõtvalt korrutamisel esinenud vigadest. Vigadest kõige suurema osa moodustavad arvutusvead (IV klassis 86% ja V klassis 67%). Arvutusvigadest esikohal olid õpilastel mõlemas klassis kombineeritud vead (IV klassis on neid vigu 7% rohkem) ja teisel kohal klassides esines õpilastel võrdselt korrutustabeli meenutamise vigu. Klassides võrdse osakaaluga oli vigu osakorrutiste liitmisel meeldejäetava järguühikuga, mis olid V klassis osatähtsusest kolmandal kohal, aga IV klassis neljandal kohal. IV klassi õpilastel olid

kolmandal kohal liitmisvead, mille osakaal oli 10% suurem võrreldes V klassiga. V klassis oli arvutusvigade üldine osatähtsus väiksem kui IV klassis. Selle arvelt oli V klassis suurem lõpetamata (ka lahendamata) ülesannete osakaal (IV klassis 4,41% ja V klassis 23,28%). Võrdselt esines klassides vormistamise ja tõlgendamatu vigu (kokku 8% kummaski) ja ülejäänud vigadele jäi mõlemas klassis alla 2%.

Vigade jagunemine kirjaliku korrutamise ülesannetes.

Analüüsid (t-testiga) klasside siseselt korrutamise üksikülesannete lahendamise edukust, on moodustatud üksikülesannetest kaks gruppi (vt lisa 4). Esimese grupi moodustasid oluliselt edukamalt lahendatud ülesanded ja teise grupi moodustasid vähemedukalt lahendatud ülesanded. IV klassil kuulusid esimesse gruppi ülesanded A1, A2, B1, B2 ja teise, vähemedukalt lahendatud ülesannete gruppi, ülejäänud – A3, B3, B4, A5, A4, B5. Mis tähendab seda, et kuigi ainult kahe ülesande (A4 ja B5) lahendamisedukus jäi alla 75% (vt tabel 2), ei ole siiski teised sellesse gruppi kuuluvad ülesanded IV klassi õpilaste poolt statistiliselt oluliselt paremini lahendatud. V klassis õpilaste poolt oluliselt edukamalt lahendatud ülesannete gruppi kuuluvad A1, B1, B2, A3, B4 (need on ühtlasi ka kõik üle 75% lahendusedukusega) ja vähemedukalt lahendatud ülesannete gruppi kuuluvad – A2, B3, A5, A4, B5 (vt tabel 2). Seega, V klassi õpilased on üle 75% lahendusedukusega ülesanded lahendanud oluliselt edukamalt kui alla 75% edukusega ülesanded.

Madalama edukusprotsendiga ülesanded mõlemas klassis olid B5, B3, A5 ja A4 (IV kl 69% kuni 78% ja V kl 61% kuni 70%) (vt tabel 2). Samuti olid need ülesanded kõige vigaderohkemad, nende ülesannete arvele kuulus IV klassis 51% ja V klassis 55% kõigist korrutamisesülesannetes tehtud vigadest (vt lisa 5). B5 (1435 x 58), B3 (1580 x 14), A5 (1482 x 17) ja A4 (36 x 2407) ülesannetes oli osakorrutiste arvutamisel tegemist mitme järgu ületamisega ja sellest ka vead – ülekaalukalt eksisid neis ülesannetes õpilased korrutamisel korrutustabeli meenutamisel ja/või meelde jäetud järguühikute liitmisel (kombineeritud viga). Võib öelda, et korrutamisel oli õpilastele veaohlikuks kohaks järgu ületamine osakorrutiste arvutamisel. Ülesanne A5 oli IV klassi õpilastel oluliselt paremini lahendatud kui V klassil (IV kl 77,11% ja V kl 61,84%, $p < 0,05$), vigade poolest tulenes erinevus V klassi õpilastel erinevate teiste vigade suuremast osakaalust ülesandes (vt lisa 5).

Tabel 2. Kirjaliku korrutamise ülesannete sooritamise edukusprotsendid klassides

Tähis	Ülesanne	Raskusastmed ülesannetes		“0” asukoht tegurites	Lahendamisedukuse %	
		Järgu ületamine osakorrutistes (korda)	Järgu ületamine osakorrutiste liitmisel		4. klass	5.klass
B5	1435 x 58	3+3	2		68,67%	61,84%
A4	36 x 2407	2+2		Suurema teguri keskel	71,08%	69,74%
A5*	1482 x 17	3	1		77,11%	61,84%
B4	6051 x 42	2		Suurema teguri keskel	78,31%	76,32%
B3*	1580 x 14	2	2	Suurema teguri lõpus	78,31%	60,53%
A3	21 x 1473	1	2		79,52%	82,89%
B2	5300 x 28	1		Suurema teguri lõpus	84,34%	78,95%
B1	23 x 1232		2		84,34%	78,95%
A2*	2421 x 40	1		Väiksema teguri lõpus	85,54%	69,74%
A1	31 x 2012			Suurema teguri keskel	87,95%	85,53%

Märkus: tärniga (*) ja rasvases kirjas on märgitud ülesannete lahendamisel statistiliselt oluline erinevus ($p < 0,05$) klasside vahel ja punasega on märgitud alla 75% lahendamisedukusega ülesanded.

Ülesannetele A4 (2+2 järgu ületamist) ja B3 (2 järgu ületamist) kuulub üle veerandi kombineeritud vigadest ja lisanduvad ka korrutustabeli vead. Ülesande B3 puhul oli V klassil vastavate vigade osakaal suurem, lisandusid veel erinevad üksikud vead ja kokku võttes oli IV klassil ka see ülesanne oluliselt paremini lahendatud (IV kl 78,31% ja V kl 60,53%, $p < 0,05$).

Ülesanne A2 (2421x40) oli IV klassil kolmas oluliselt paremini lahendatud ülesanne võrdluses V klassiga. Valdav viga ülesande lahendamisel seisnes selles, et V klassi õpilastest viiendik jätsid ülesande lõpetamata (lõppkorrutisse jäi 0 kirjutamata). Kui seda viga poleks olnud, oleks arvutuslikult ülesande edukus V klassil olnud 92% (praegu oli V klassil 69,74% ja IV klassil 85,54%, $p < 0,05$). Testi ülesannetest kolme puhul oli ühe teguri lõpus 0 – B2 (5300x28), B3 (1580x14) ja A2 (2421x40). Kuid tüüpviga, kui ülesande lõppu jäi 0

kirjutamata, väljendus valdavalt (3/4 vastavatest vigadest) ülesande A2 puhul (korrutamisel täiskümnelisega).

Õpilaste sooritusedukus kirjalikul korrutamisel

Kirjaliku korrutamise ülesannete lahendamisel oli õpilasel võimalik saada maksimaalselt 10 punkti. Iga õigesti lahendatud ülesanne andis ühe punkti ja valesti lahendatud ülesanne null punkti. Õpilaste kirjaliku korrutamise ülesannete lahendamise sooritusedukus klassirühmade siseselt on järgnevas tabelis (vt tabel 3).

Õpilased on jaotatud ülesannete lahendamise alusel kahte edukusgruppi – edukad ja vähemedukad õpilased (piiriks 70% edukus ülesannete lahendamisel s.o. tasemetöodes soorituse kvaliteet ehk hindele “4” ja “5” sooritanute osakaal).

Tabel 3. *Õpilaste sooritusedukus kirjalikul korrutamisel*

Grupp	4. klass			5. klass			
	Punkte	Õpilaste arv n=83	%	Kumu- leeruv %	Õpilaste arv n=76	%	Kumu- leeruv %
Edukad	10 punkti	16	19%		10	13%	
	8-9 punkti	42	51%	70%	31	41%	54%
	7 punkti	13	16%	86%	12	16%	70%
Vähemedukad	6 punkti	4	5%		10	13%	
	5 punkti	3	4%	9%	4	5%	18%
	4-0 punkti	5	5%	14%	9	13%	30%

Üldiselt lahendasid õpilased korrutamise ülesandeid edukalt. Vähemalt 70% ülesannetest sooritas õigesti 86% IV klassi ja 70% V klassi õpilastest. Kahe edukusgrupi piiril (tulemus 6 punkti) oli IV klassis 5% ja V klassis 13%. Edukate ja vähemedukate õpilaste sooritustulemused erinesid oluliselt ($p < 0,05$). Kirjalik korrutamine valmistas raskusi õpilastele, kes lahendasid kuni viis ülesannet õigesti (s.o pool ülesannetest) – IV klassis oli neid 9% ja V klassis 18%. Järgnevas tabelis (vt tabel 4) on ülevaade kirjaliku korrutamise ülesannetes tehtud vigade jagunemisest vastavalt õpilaste edukusgrupile.

Tabel 4. Korrutamise ülesannetes esinevate vigade osakaal õpilaste edukusgruppides

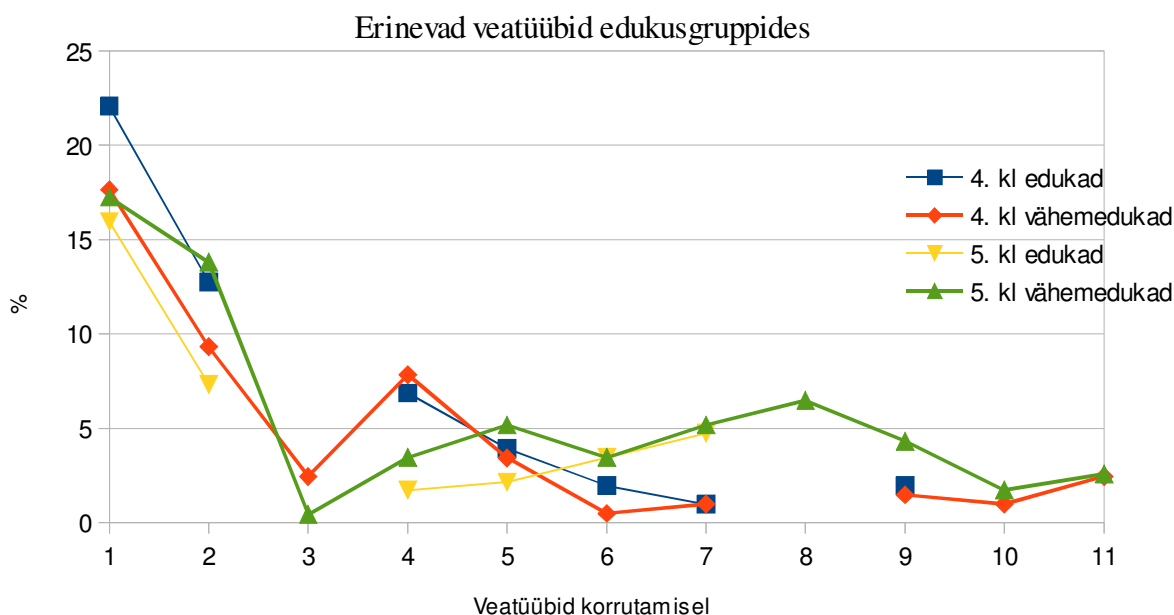
	Punkte	4. klass				5. klass			
		Vigade arv	Vigu õpilase kohta (keskm)	%	Kumu-leeruv %	Vigade arv	Vigu õpilase kohta (keskm)	%	Kumu-leeruv %
Edukad	10	0		0,00%		0		0,00%	
	8-9	65		31,86%		44		18,96%	
	7	43	3,3	21,08%	52,94%	40	3,3	17,24%	36,2%
Vähemedukad	6	17	4,25	8,33%		47	4,7	20,26%	
	5	18	6,0	8,82%	17,15%	22	5,5	9,48%	29,74%
	4-0	61	12,2	29,90%	47,05%	79	8,7	34,05%	63,79%
	Kokku vigu	204		100%		232		100%	

IV ja V edukad olid klassides sarnased ($p>0,05$). IV klassi edukatel oli vigu keskmiselt 1,52 (SD 1,1) ja V klassil vastavalt 1,58 (SD 1,2). Vähemedukate õpilaste gruppides oli vigu keskmiselt IV klassis 8 (SD 4,1) ja V klassis 6,5 (SD 2,5). IV klassi vähemedukate grupis olid erinevused suuremad, kuid V klassis oli ühtlasemalt lapsi, kes tegid palju vigu. Seda näitas ka õpilaste punktisumma ja keskmise vigade hulga võrdlus. Kahe edukusgrupi piiril (õpilased, kel tulemus 6 punkti) olevatel IV klassi õpilastel esines neljas valessti lahendatud ülesandes keskmiselt 4,25 viga (vt tabel 4), s.t. keskmiselt üks viga ülesandes. Vastavatel V klassi õpilastel aga keskmiselt 4,7 viga, s.t. et vähemalt ühes ülesandes esines korraga kaks viga. Sellise jaotuse alusel võiksid IV klassi 6 punktiga õpilased kuuluda edukate gruppi, kus õpilased tegid reeglina ühe vea ülesande kohta. Sama ei kehti aga V klassi kahe edukusgrupi piiril olevate õpilaste kohta. Vähemedukate grupis oli õpilasi, kel esines ühes ülesandes kuni kolm eraldi määratavat viga.

Kahe tabeli andmeid (vt tabel 3 ja tabel 4) kõrvutades võib üldstatult öelda, et IV klassis 39% kogu ülesannetes tehtud vigadest läks 9% vähemedukate õpilaste arvele ja V klassis 64% vigadest jäi 30% vähemedukate õpilaste arvele. IV ja V klassi vähemedukad olid sarnased ülesannete sooritamise edukuse ja vigade hulga poolest ($p>0,05$). Mõlemas klassis oli märgata, et kandva osa vigadest vähemedukate grupis tegid õpilased, kel 0-5 punkti õigete vastuste eest ja neid oli IV klassis 9% (5 õpilast) ning V klassis 18% (9 õpilast). Arvestades vigade hulka ja nende jagunemist edukusgruppides, võib öelda, et V klassis oli rohkem õpilasi, kellele korrutamine valmistas tõsiseid raskusi.

Kuidas jagunesid erinevad vealiigid edukusgruppide vahel, on näha järgmiselt jooniselt (vt joonis 3).

Kaks kõige sagedamini esinevat vealiiki olid kõigis IV ja V klassi õpilaste edukusgruppides samad – kombineeritud vead (1) ja korrutustabeli vead (2). IV ja V klassi (mõlemaid gruppe) eristab V klassi õpilaste väiksem liitmisvigade (4) osakaal ja IV klassi õpilaste väiksem lõpetamata ülesannete osakaal (vead 6 ja 7). IV klassi edukate ja vähemedukate õpilaste grupid olid vigade esinemise poolest sarnased (nii vealiikide kui nende osakaalude suhtes). Ainukese erinevusena esinesid IV klassi vähemedukate grupis – vead korrutamisel nulliga (valmistas raskusi kolmele õpilasele) ja vale algoritm (kaks õpilast seoses ülesandega B2).



Joonis 3. Erinevate veatüüpide osakaal õpilaste edukusgruppides.

Märkus. Joonisel esinevad veatüübid: 1 – kombineeritud viga

2 – korrutustabeli viga

3 – nulliga korrutamine

4 – liitmisviga

5 – liitmisel meeldejätmise

6 – lõpetamata

7 – lõpetamata (0 puudu)

8 – lahendamata ülesanne

9 – tõlgendamatu viga

10 – vale algoritm

11 – vormistamise viga

Enim erines teistest võrdlusgruppidest erinevate vigade esinemise poolest V klassi vähemedukate õpilaste grupp. Nende arvel olid ainsad tegemata ülesanded korrutamisel (kolm õpilast), rohkem tõlgendamata vigu ning vale algoritmi kasutamist (1 õpilane). V klassi vähemedukate grupi õpilastel oli rohkem korrutustabeli vigu ja vigu osakorrutiste liitmisel meeldejäetavate järguühikutega.

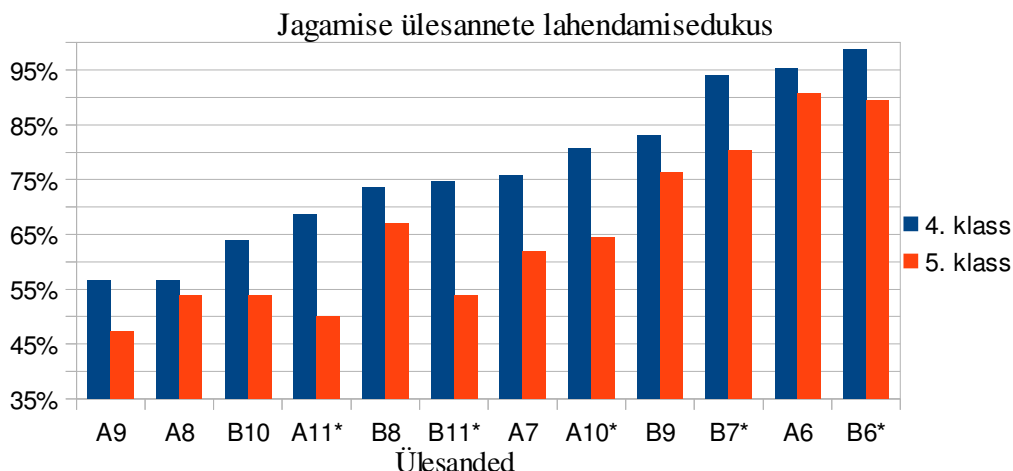
IV ja V klassi õpilaste kirjaliku korrutamise oskused

Käesoleva töö korrutamise ülesannete lahendamise põhjal võib järeldada, et kirjaliku korrutamise oskused olid omandanud 86% IV klassi ja 70% V klassi õpilastest. Kõige sagedamini esinevateks veatüüpideks olid kombineeritud vead ja korrutustabeli meenutamise vead. Kombineeritud viga tähistas osakorrutiste arvutamisel järgu ületamisega ülesannetes vähemalt ühte järgmistest vigadest: (1) eksiti korrutustabeli meenutamisel, (2) eksiti meeldejäetud järguühiku liitmisel sellele või (3) viga seoses meeldejäetava järguühikuga (unustati liita või teostati meeldejäetud järguühikuga mõni teine tehe).

Cox (1974) grupeeris korrutamisel järgu ületamise vead meeldejäetavate ühikutega süstemaatilisteks algoritmi vigadeks, kui samaliigiline viga esines viiest tüüpülesandest kolmes. Käesoleva uurimustöö testülesannetes oli osakorrutiste arvutamisel kokku 20 järgu ületamist. Arvestades õpilaste ülesannete lahendamist edukusgruppides ja üldist vigade hulka, tegid edukama grupi õpilased keskmiselt 1,5 viga. Võib öelda, et need õpilased olid omandanud kirjaliku korrutamise algoritmi ning kombineeritud vead olid juhuslikku laadi vead. Küll võib aga osade vähemedukate grupi õpilaste puhul eeldada süstemaatilisi algoritmi vigu, Coxi (1974) järgi on need küllaltki püsiva iseloomuga. Õpetamise seisukohalt oleks oluline vähemedukate grupi õpilaste individuaalne uurimine korrutamise oskuste kindlaks tegemiseks, et leida iga õpilase probleemsed kohad arvutamisel.

Kirjaliku jagamise ülesannete lahendamine

Kirjalikul jagamisel oli IV klassil kuus ülesannet 12-st sooritatud üle 75% edukusega ja V klassil vastavalt neli ülesannet.



Joonis 4. Jagamise ülesannete lahendamise edukus klassides.

Märkus. Tärniga (*) on tähistatud statistiliselt oluline erinevus klasside võrdluses ($p < 0,05$). Ülesannete tähised lisas 1.

Kirjaliku jagamise ülesannete lahendamisel olid IV klassi õpilased oluliselt paremate tulemustega viie ülesande lahendamisel – A10, A11, B6, B7 ja B11. Kõige raskemateks ülesanneteks olid mõlemas klassis A9, A8, B10, A11 (lahendamise edukus IV klassis 57% - 69% ja V klassis 47% - 54%). Kõige edukamalt lahendatud ühised ülesanded mõlemas klassis olid B6, A6, B7, B9 (lahendamise edukus IV klassis 83% - 99% ja V klassis 76% - 91%). Neist kolme puhul oli jagaja ühekohaline.

Kirjalikul jagamisel esinenud vead

Kirjalikul jagamisel esinenud vead kodeeriti, saadi 14 vealiiki. Vealiigid on grupeeritud kolme rühma: (a) algoritmi vead, (b) arvutusvead ja (c) muud vead.

Jagamise algoritmi vastu eksimise vead olid järgmised (vt tabel 5). **Esimene jagatav osa** arvust valiti liiga suur või liiga väike, eksiti jagatava osa järkude määramisel (viga **4**) – kahekohalise asemel kolmekohaline või vastupidi, kahekohalise asemel ühekohaline (näide: $4144 : 56 =$, esimene jagatav osa 41 ja selle alla kirjutatud 56). Esinesid vead, kus osajagatava järgud määrati küll õigesti, kuid eksiti **osajagatava** suuruse valikul (**3**) – see oli väike või liiga suur (näide: $1560 : 39 = 3$, esimene jagatav osa 156, selle alla kirjutatud 117, jagatises 3, on õigesti arvutatud – $3 \times 39 = 117$, kuid liiga väike). Algoritmi vigadeks liigitusid ka vead, kui

õpilased tõid alla korruga kahe järgu ühikud ja jätsid jagatisse 0 kirjutamata – **null puudu jagatisest (1)**. Näiteks: $2266 : 22 = 1(0)3$, jagatakse $22 : 22$ ja jagatisse 1, seejärel jagatakse $66 : 22$ ja saadakse jagatisse 3. Sama veana sai tähistatud ka siis, kui jagatavas oli mõni järk puudu ja jagatisse jäi 0 kirjutamata (näide $2408 : 4 = 6(0)2$). Mõnikord lisati ka **liigne 0 jagatisse (2)**. Näiteks: $4144 : 56 = 7(0)4$. Üksikud õpilased üritasid kasutada kirjalikul jagamisel korrutamise algoritmi, need on liigitatud **algoritmi vigadeks (5)**. Sel juhul paigutasid nad jagatava ja jagaja nagu tegurid paigutatakse korrutamisel.

Arvutusvigadeks olid peamiselt vead **osajagatava kontrollimisel (6)**, mis nõuab korrutamist. Näide: $7208 : 34 = 2$, 72 alla kirjutati 64 *pro* 68 ($2 \times 34 = 68$). Esines ka eksimisi **osajagatava lahutamisel (7)**. Näide: $4144 : 56 = 76$, korrutatud õigesti $7 \times 56 = 392$, lahutamisel $414 - 392 = 32$ *pro* 22. Mõne ülesande puhul oli jälgitav ka otseselt **korrutus- ja jagamistabeli vastu eksimine (8)**. Näide: $2408 : 4 = 802$ ($24 : 4 = 6$).

Muudeks vigadeks liigitusid järgmised vead: **õige arv osajagatava kontrollimisel**, kuid **jagatistes oli vale arv (9)**. Näide: $6912 : 64 = 109$, esimene osajagatav 64, jääk 5, sellele kirjutatakse kõrvale 1 ja 2, $512 : 64 = 9$ *pro* 8. **Lõpetamata (11)** ülesanne on õigesti lahendatud, kuid jäänud pooleli. **Lahendamata ülesanne (12)** oli liigitatud, kui õpilane polnud lahendamist proovinudki. **Vormistamise viga** määrati, kui osajagatavad ei olnud kohakuti või oli kujunev jääk vale koha peal (**10**) ja lisaks **tõlgendamatud vead (13)**.

IV klassi õpilastel esines jagamise ülesannete lahendamisel kokku 242 viga (996 vastuses) ning V klassil 329 viga (912 vastuses).

Kirjalikul jagamisel olid mõlemas klassis esikohal algoritmi vead, kus jagatisest puudub 0 (viga 1) (vt tabel 5). Viga tekkis, kui õpilased jagamisel tõid jagatavast alla korruga kaks järku ning 0 jäi vahepeal jagatisse kirjutamata. IV klassis esines neid vigu vastavalt 35,95% ja V klassil 30,70% jagamisel esinevatest vigadest. Teisel kohal olid mõlemas klassis sarnase sagedusega arvutusvead, kui õpilased eksisid arvutamisel (korrutamisel) osajagatava kontrollimisel (6) (IV kl 14,88% ja V kl 16,41%). Kolmandal kohal olid klassides lahendamata ülesanded (13), IV klassis osakaaluga 11,57% ja V klassis 16,11% kogu vigadest (erinevus 4%). Pooled lahendamata ülesannetest olid testide viimased ülesanded (A11 ja B11). Ja teisest poolest valdav osa oli klassides seotud mõne õpilasega. Testimise ajal õpilasi vaadeldes ei olnud märgata, et õpilastel jäi ajast puudu. Üldiselt lahendasid õpilased ülesanded (kokku 22, neist 10 korrutamise ja 12 jagamise ülesannet) hinnanguliselt 6-20 minuti jooksul.

Tabel 5. Kirjalikul jagamisel esinenud veatüübid ja nende osakaalud klassides

Tähis	Vigade iseloomustus	4.klass %	5.klass %
1	Jagatisest on null puudu – enamasti seoses allatoomisega, korruga võib alla tuua (jäägi kõrvale) ainult ühe järgu ühikud, kui allatoodud järguühikuga jagada ei saa, tuleb jagatisse null ja seejärel tuuakse kõrvale järgmise järgu ühikud.	35,95%	30,70%
2	Liigne null jagatises või null jagatises vale koha peal	4,13%	2,74%
3	Osajagatav on liiga väike, harva liiga suur	1,65%	3,34%
4	Esimene jagatav osa arvust valitakse suur või väike, eksitakse järkude määramisel (kolmekohalise asemel kahekohaline või vastupidi)	5,37%	9,42%
5	Vale algoritm – jagamisel paigutatakse arvud nagu kirjalikul korrutamisel	5,37%	2,43%
	<u>KOKKU ALGORITMI VIGU</u>	<u>52,47%</u>	<u>48,63%</u>
6	Osajagatava kontrollimisel arvutusviga (korrutamine)	14,88%	16,41%
7	Viga osajagatavast lahutamisel, st jäägi leidmisel	4,96%	3,04%
8	Korrutus- ja jagamistabeli faktide meenutamise viga (24:4=8)	0,83%	0,91%
	<u>KOKKU ARVUTUSVIGU</u>	<u>20,59%</u>	<u>20,36%</u>
9	Õige arv osajagatava kontrollimisel, kuid jagatises vale arv	7,85%	7,29%
10	Vormistamisviga – osajagatavad ei ole kohakuti, jääk vale koha peal (nihkunud kõrvale)	0,83%	2,13%
11	Lõpetamata – ülesanne on tehtud õigesti, kuid jagatisse on viimane arv lisamata või jäänud lihtsalt pooleli	4,13%	3,95%
12	Lahendamata ülesanne – lahendamist pole proovitudki.	11,57%	16,12%
13	Tõlgendamatu viga – mahakirjutamisviga, arusaamatu käekiri, suvaliselt kirjutatud numbrid	2,80%	1,52%
	<u>KOKKU MUID VIGU</u>	<u>27,18%</u>	<u>31,01%</u>
	Kõik vead kokku	100 %	100%

Märkus: rasvaselt on trükitud enim esinenud veatüübid ja punaselt on trükitud on enim esinenud vead veagruppide siseselt.

Umbes 4% erinevus IV ja V klassi vigade esinemisel oli ka 4. vea osas, mille puhul õpilased eksisid esimese jagatava osa järkude määramisega (V kl 9,42% ja IV kl 5,37%).

Ülejäänud viga esineb klassides sarnaselt, vead on igauks esindatud 3-5% osakaaluga – viga osajagatava lahutamisel (7), liigne null jagatises (2), liiga väike osajagatav (3) ja lõpetamata ülesanne (11). Kummiski klassis oli ka üks õpilane, kes jagamise algoritmi ei osanud üldse. Kirjalik jagamine vormistati nende poolt nagu kirjalik korrutamine ja ühes ilma järgu ületamiseta ülesandes õnnestus isegi õige vastus saada (töö parandamisel seda õigeks vastuseks ei loetud).

Kokkuvõtvalt kirjalikul jagamisel esinenud vigadest. Kirjaliku jagamise algoritmiga seotud vead moodustasid poole kogu vigadest – jagatise 0 puudu (1), liigne null (2), vale esimene osajagatav (4), väike osajagatav (3), vormistamisviga (10), vale algoritm (5). Nende vigade osakaal IV klassil oli 52% ja V klassil 49%.

Arvutusvigu esines klassides sarnaselt (IV klassil 21% ja V klassil 20%) ja kolm neljandikku neist moodustasid arvutusvead osajagatava kontrollimisel (6), viga osajagatavast lahutamisel (7) ja (korrutus)- ja jagamistabeli vead (8) moodustasid ülejäänud neljandiku.

Muudest vigadest esines enim lõpetamata või lahendamata ülesandeid, mida V klassi õpilastel esines 6% võrra rohkem (IV klassis 16% ja V klassis 22%). Sarnaselt esines klassides (7% ja 8%) viga, kui osajagatav oli õige, aga jagatises oli vale arv.

Vigade jagunemine kirjaliku jagamise ülesannetes.

Kirjaliku jagamise ülesannete sooritamise edukus on tabelis 6. Kirjalikul jagamisel osutusid kõige raskemateks ülesanneteks mõlemale klassile ühiselt A8, A9, B10, A11 ja V klassile lisaks ülesanne B11 (võrdlus klasside siseselt t-testiga, vt lisa 6). Ülesanded A8 (2266 : 22), A9 (6912 : 64) ja B10 (2100 : 20) kujunesid ka kõige vearohkemateks (vt lisa 7). Nende arvele kuulus IV klassis 46% ja V klassis 37% kõigist jagamisel tehtud vigadest. Nende ülesannete ühine valdav viga oli seotud järgmise järgu alla- toomisega, kui tekkinud osajagatav oli väike ja enne järgmise järgu allatoomist tuli kirjutada jagatise null. Õpilased tõid alla korraga kaks järku ja null jäi jagatise kirjutamata (viga 1). Ülesannete A8 (2266 : 22) ja B10 (2100 : 20) puhul soodustasid seda viga ka arvude valik tehes, sest neid taheti ilmselt peast arvutada ja jagamise algoritmi arvestamine/jälgimine (et alla võib tuua korraga ainult ühe järgu ühikud) jäi kõrvale. A8 (2266 : 22) puhul ilmnes sellele ülesandele iseloomulik viga, kus tekkis segadus esimese osajagatava määramisel (4). Esimese osajagatava 22 alla oli vaja kirjutada 22, kuid kirjutati 2. V klassil ilmnes neid viga 7% võrra rohkem.

Tabel 6. Kirjaliku jagamise ülesannete sooritamise edukusprotsendid klassides

Tä his	Ülesanne	Raskusastmed ülesannetes			Lahendamis-edukuse %	
		Osa- jaga- tava- te arv	Kohti osajagatavas	“0” asukoht	4. klass	5. klass
A9	6912 : 64 =108	2	Kahe- ja kolmekohaline	Saadakse jagatisse	56,63%	47,37%
A8	2266 : 22 = 103	2	kahekohalised	Saadakse jagatisse	56,63%	53,95%
B10	2100 : 2 = 105	2	Ühe- ja kahekohaline	Jagatava lõpus, Saadakse jagatisse	63,86%	53,95%
A11*	4144 : 56 = 74	2	kolmekohalised		68,67%	50,00%
B8	2232 : 18 =124	3	kahekohalised		73,49%	67,11%
B11*	2898 : 63 = 46	2	kolmekohalised		74,70%	53,95%
A7	9018 : 9 = 1002	2	Ühe- ja kahekoaline	Jagatava keskel, saadakse jagatisse	75,90%	61,84%
A10*	1560 : 39 = 40	1	kolmekohaline	Jagatava lõpus, saadakse jagatisse	80,72%	64,47%
B9	7208 : 34 =212	3	kahekohalised	Jagatava keskel	83,13%	76,32%
B7*	2408 : 4 =602	2	Ühe- ja kahekohaline	Jagatava keskel, saadakse jagatisse	93,98%	80,26%
A6	2488 : 2 = 1244	4	ühekohalised		95,18%	90,79%
B6*	6369 : 3 = 2123	4	ühekohalised		98,80%	89,47%

Märkus: tärniga (*) ja rasvases kirjas on märgitud üksikülesannetes statistiliselt oluline erinevus ($p < 0,05$) klasside vahel ja punasega on märgitud alla 75% lahendamisedukusega ülesanded.

Ülesande A9 puhul on mõlemas klassis sarnaselt nulli puudumine jagatisest veidi väiksema osakaaluga viga kogu ülesandes tehtud vigadest, kuna lisandusid viga 9 (õige osajagatav, jagatises vale arv) ning ka arvutamisevead (viga 6) ning teised erinevad üksikud vealiigid

Ülesanne A11 (4144 : 56) puhul oli põhiliseks veaks mõlemas klassis arvutamiseviga osajagatava leidmisel (viga 6), V klassil ilmnis seda veidi rohkem nagu ka ülesannete tegemata jätmist (viga 12) ning seetõttu oli selle ülesande lahendamisedukus oluliselt madalam (IV klassil 68,67% ja V klassil 50,00%, $p < 0,05$). Ülesanne B11 (2898 : 63) oli samuti IV klassil oluliselt paremini sooritatud (74,70% ja 53,95%, $p < 0,05$). Nagu ülesande A11 puhul, oli ka sellele ülesandele iseloomulik osajagatava kontrollimisel arvutusviga, mida esines suhteliselt võrdselt mõlemas klassis (46% ja 43% vigadest selles ülesandes) ning vastamata jätmine. Peamine erinevus tulenes V klassi puhul lahendamata jäetud ülesannete suuremast osakaalust ning vigadest esines neil veel rohkem jagatisse liigse nulli asetamist (viga 2).

A11 ja B11 olid mõlemad testide viimased ülesanded ja nende arvel oli enim tegemata ülesandeid. Kuigi testi üleannete lahendamiseks oli aega tunni lõpuni, märkisid mitmed õpetajad töödele lahendamiseks kulunud aja. Ajad näitavad, et õpilased lõpetasid tavaliselt enne tunni lõppu ja paljud lahendasid ülesanded veerand tunni jooksul. Seega neid, kellel tuli ajast tõesti puudus, oli mõni üksik.

Keskmiselt edukalt lahendati klassirühmades sarnaselt ülesanded B8 (2232 : 18), A7 (9018 : 9), A10 (1560 : 39) ja B9 (7208 : 34). Neist A10 oli IV klassil oluliselt paremini sooritatud (edukus 80,72% ja 64,47%, $p = 0,022$), vastavat tulemust mõjutas V klassi õpilaste poolt suurem lõpetamata (viga 11) ja lahendamata ülesannete osakaal (viga 12). Ühiselt oli klassides märgata selle ülesande lahendamisel arvutusvigu osajagatava kontrollimisel (viga 4).

Ülesande A7 puhul oli mõlemas klassis õpilastel ülekaalukas viga nulli kirjutamata jätmine jagatisse (viga 1). Ülesannete B8 ja B9 tulemuste ja vigade võrdlemisel oli näha, et V klassil esines neis ülesandeis mitmeid erinevaid vigu (arvutamisevigu osajagatava kontrollimisel, vale arv jagatises, lõpetamata ülesanded, vead osajagatava lahutamisel, liigne 0 jagatises), kuid IV klassil ilmnis enim vigu osajagatava lahutamisel ning liigse 0 lisamist.

Kõige edukamad olid õpilased ülesannete B7 (IV kl 93,98% ja V kl 80,26%, $p = 0,011$), B6 (IV kl 98,8% ja V kl 89,47%, $p = 0,015$) ja A6 (95,18% ja V kl 90,79%) sooritamisel. IV klassi õpilastel oli ülesandes B6 (6369 : 3) ainult üks vale vastus (V kl kaheksa vale vastust)

ja B7 ($2408 : 4$) esines üksikuid vigu. V klassil oli selle rühma ülesannetes ühtlaselt mitmeid erinevaid üksikuid vigu, kusjuures ülesandes B7 oli null kolmel õpilasel jagatisest puudu (IV klassil polnud ühtegi sellist viga). Testi ülesannetest neljas (A6, B6, B7, A7) oli jagatav neljakohaline ja jagaja ühekohaline. Neist A6, B6 ja B7 oli IV ja V klassi õpilastel lahendatud edukalt ja oluliselt paremini kui A7 ($9018 : 9=1002$) (rühmasisese t-testiga). Selle ülesande tulemust mõjutas mõlemas klassis juhtiv viga – 0 puudus jagatisest (1). Ühekohalise jagajaga ülesanded olid testis mõeldud peale korrutamist häälestamiseks jagamisülesannete lahendamisele, et tuletaks jagamise algoritmi meelde.

Veatiüüpide jagunemine kirjaliku jagamise ülesannetes

12-st testi ülesandest kuues tuleb jagatisse 0. Ülesannetes **B7** ($2408 : 4=602$) ja **A10** ($1560 : 39=40$) tuleb jagatisse kirjutada 0, kuna vastav järk on jagatavas puudu. Ülesandes **A7** ($9018 : 9=1002$) on jagatises kaks 0, kuna (a) sajaliste järk on jagatavas puudu ja (b) järgmine järk (jagatav osa) on jagamiseks väike ($1:9$ ei saa). Seega tuleb kirjutada jagatisse 0 enne järgmise järgu (arvu 8) alla toomist. Sama on ka järgmiste ülesannetega **B10** ($2100 : 20=105$), **A8** ($2266 : 22=103$), **A9** ($6912 : 64=108$), kus ühe järgu ühikud on jagamiseks väikesed ja enne järgmise järgu alla toomist tuleb jagatisse kirjutada 0. Analüüsisides klassirühmade siseselt (t-testiga) nende ülesannete lahendusedukusi, selgus, et nii IV kui ka V klassi õpilased lahendasid B7 oluliselt edukamalt kui ülesande A7 ($p<0,05$ vt lisa 6) ja A10 oluliselt paremini kui A9 (rühmasisese t-testiga $p<0,05$). Võib teha järelduse, et õpilased lahendasid oluliselt paremini ülesanded, milles jagatisse kirjutatakse 0 olukorras, kui üks järkudest on jagatavas puudu. Ülesanded B10, A8 ja A9 ja A7 olid võrdselt vigaderohked 0 jagatisest puudumise osas. Kuid IV klassi õpilased lahendasid neist A7 oluliselt paremini võrdluses ülejäänutega ja V klassi õpilased lahendasid A7 paremini ainult võrdluses ülesandega A9. Vastavat tulemust mõjutasid V klassi õpilaste suurem muude vigade esinemine lahendamisel ning arvutusvead osajagatava sobivuse kontrollimisel.

Vead osajagatava sobivuse kontrollimisel (sisuliselt korrutamisel) (viga 6) esinesid õpilastel valdavalt ülesannetes, kus osajagatavatest vähemalt üks oli kolmekohaline. Kõige rohkem arvutusvigu oli A11 ja B11 lahendamisel (mõlemas kaks kolmekohalist osajagatavat), seejärgi ülesannetes A9 (üks osajagatav kolmekohaline, teine kahekohaline) ja A10 (üks kolmekohaline osajagatav). A10 oli mõlemal klassil lahendatud paremini kui ülesanne A11 ja A9. Osajagatava arvutamine nõuab korrutamise oskusi (korrutustabeli meenutamine, vajadusel meeldejäätmine ja selle liitmine), mis kirjaliku korrutamise ülesannete lahendamisel olid kõige sagedasema osakaaluga (arvutus)veaks.

Osajagatav korrutamises kolm korda väiksema osakaaluga esines lahutamisvigasid. Lahutamisvead väljendusid peamiselt ülesannetes (B8, B9), kus tekib jagamisel kolm (kahekohalist) osajagatavat, enim nendes testiülesannetes.

Õpilaste sooritusedukus kirjalikul jagamisel

Kirjaliku jagamise ülesannete lahendamisel oli õpilasel võimalik saada maksimaalselt 12 punkti. Iga õigesti lahendatud ülesanne andis ühe punkti ja valesti lahendatud ülesanne null punkti. Õpilaste kirjaliku jagamise ülesannete lahendamise sooritusedukus klassirühmade siseselt on järgnevas tabelis (vt tabel 7).

Õpilased on jaotatud ülesannete lahendamise alusel kahte edukusgruppi nagu korrutamises ülesannete analüüsi juures. Edukate ja vähemedukate õpilaste piiriks on 70% edukus jagamisülesannete lahendamisel. Mõlemas klassis erinevad oluliselt edukate ja vähemedukate õpilaste grupid nii sooritusedukuse kui vigade hulga poolest ($p < 0,05$).

Tabel 7. *Õpilaste sooritusedukus kirjalikul jagamisel*

	Punkte	4 klass			5 klass		
		Õpilaste arv n=83	%	Kumu-leeruv %	Õpilaste arv n=76	%	Kumu-leeruv %
Edukad	12	21	25,30%		16	21,05%	
	10-11	27	32,53%	58%	17	22,37%	43%
	9	7	8,43%	66%	6	7,89%	51%
Vähem-edukad	8	7	8,43%	75%	6	7,89%	59%
	7	6	7,23%		5	6,58%	
	6	3	3,61%	11%	6	7,89%	15%
	5	3	3,61%	14%	6	7,89%	22%
	4 - 0	9	10,84%	25%	14	18,42%	41%

Edukate grupis oli 75% IV klassi õpilastest ja 59% V klassi õpilastest. Enim raskusi tekitas kirjalik jagamine 14,45% ja 26,31% V klassi õpilasele (0-5 punkti). Seega veerandile V klassi õpilastest tekitas jagamine probleeme.

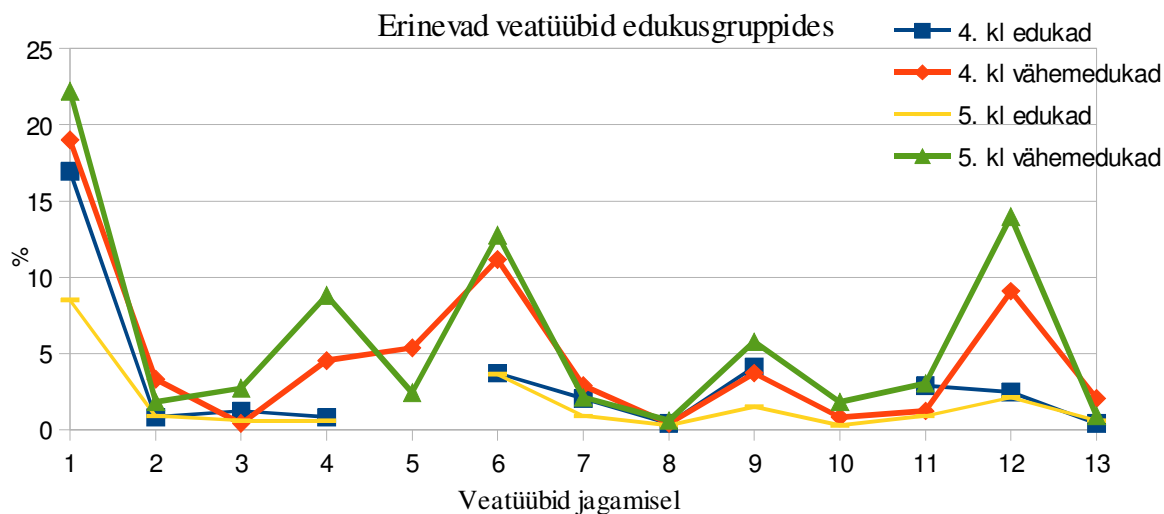
Järgnevas tabelis (vt tabel 8) on ülevaade kirjaliku jagamise ülesannetes tehtud vigade jagunemisest vastavalt õpilaste edukusgruppidele.

Tabel 8. Jagamise ülesannetes esinevate vigade osakaal õpilaste edukusgruppides

	Punkte	4 klass			5 klass		
		Vigade arv	%	Kumulatuur %	Vigade arv	%	Kumulatuur %
Edukad	12	0	0,00%		0	0%	
	10-11	37	15,29%		26	7,91%	
	9	21	8,68%	23,97%	18	5,47%	13,38%
	8	29	11,98%	35,86%	25	7,60%	20,98%
Vähemedukad	7	31	12,81%		27	8,21%	
	6	18	7,44%	20,25%	39	11,85%	20,06%
	5	23	9,50%	29,75%	47	14,29%	34,35%
	4 - 0	83	34,30%	64,05%	147	44,68%	79,03%
Kokku vigu		242	100%		329	100%	

Edukate grupid mõlemas klassis olid sarnased. IV klassi edukatel õpilastel oli vigu keskmiselt 1,6 (SD 1,4) ja V klassi õpilastel 1,7 (SD 1,5). Vähemedukate grupi IV klassi 25% õpilaste arvele jäi 64% vigadest ja V klassi 41% õpilaste arvele 79% vigadest. Eraldi võiks nimetada õpilaste hulka, kes sooritasid vähem kui pooled ülesannetest. 0-5 punkti saanud õpilasi oli IV klassis 14,45% (12 õpilast) ja V klassis 26,31% (20 õpilast), nende arvele läks IV klassis 44% ja V klassis 59% kogu vigadest. Neile õpilastele valmistis kirjalik jagamine tõsiseid raskusi ning V klassis oli neid rohkem.

Kuidas jagunesid kirjalikul jagamisel erinevad veatüübid edukusgruppide vahel, on näha järgmiselt jooniselt (vt joonis 4). Juhtiv veatüüp jagamisel kõigis IV ja V klassi õpilaste edukusgruppides oli algoritmi viga, kus 0 oli jagatisest puudu (1). V ja IV klassi edukate õpilaste grupid olid sarnased ($p < 0,05$), võrdselt esines IV ja V klassi edukatel arvutusvigu ja tegemata ülesandeid (vigade esinemine 2-4% vahel). IV ja V klassi vähemedukate õpilaste grupis vigade jagunemine oli samuti sarnane ($p > 0,05$), aga vigade osakaalud oluliselt suuremad võrreldes edukate gruppidega ($p < 0,05$). V klassi vähemedukatel esines kõige rohkem lahendamata ülesandeid ja vigu esimese osajagatava määramisel.



Joonis 4. Erinevate veatüüpide jagunemine õpilaste edukusgruppides.

Märkus. Joonisel esinevad veatüübid: 1 – jagatisest 0 puudu

2 – jagatises liigne 0

3 – osajagatav väike või suur

4 – viga esimese jagatava osa järgu määramisel

5 – vale algoritm

6 – osajagatava kontrollimisel arvutusviga

7 – viga lahutamisel (jäägi leidmisel)

8 – jagamistabeli viga

9 – õige osajagatav, jagatises vale arv

10 – vormistamisviga

11 – lõpetamata ülesanne

12 – lahendamata ülesanne

13 – tõlgendamatu viga

Õpilaste sooritusedukus kirjaliku korrutamise ja jagamise ülesannete lahendamisel

Kirjaliku korrutamise ja jagamise ülesannete lahendamise kokkuvõttes oli näha stabiilselt edukate ja vähemedukate ning staatusgruppides ebastabiilsete õpilaste hulk (vt tabel 9). Kuna kirjaliku jagamise oskuste omandamine on pikaajalisem ja keerulisem kui korrutamise oskuste omandamine, siis jagamisel edukate ja korrutamisel vähemedukate õpilaste puhul võib eeldada suuremat hooletusvigade hulka, mis mõjutab nende tulemust. Korrutamisel edukate, kuid jagamisel vähemedukate õpilaste puhul võib eeldada raskusi jagamise oskuste omandamisel. Stabiilselt vähemedukatel oli raskusi mõlema kirjaliku arvutamise oskuste omandamisel.

Tabel 9. Õpilaste liikumine staatusgruppides.

	4. klass	5. klass
Stabiilselt edukad korrutamisel ja jagamisel	72%	47%
Stabiilselt vähemedukad korrutamisel ja jagamisel	12%	17%
Ebastabiilsed õpilased, neist:	16%	36%
(a) korrutamisel edukad, jagamisel vähemedukad;	13%	24%
(b) jagamisel edukad, korrutamisel vähemedukad	3%	12%

Kokkuvõtlikult võib öelda, et IV klassis valmistas kirjalik arvutamine raskusi 25% ja V klassis 41% õpilastest.

Arutelu

Minu töö eesmärk oli kirjeldada tavakooli IV ja V klassi õpilaste kirjaliku korrutamise ja jagamise oskusi ning ülesannete lahendamisel esinevaid vigu. Kasutades mõlema klassi õpilaste uurimiseks sama ülesannete komplekti, uurisin (1) mille poolest erineb samade ülesannete lahendamise edukus IV ja V klassi õpilastel, (2) mille poolest erineb IV ja V klassi õpilaste ülesannete lahendamisel tehtavate vigade muster ning (3) õpilaste individuaalseid tulemusi.

Kirjaliku korrutamise ülesannete lahendamisel IV ja V klassi õpilaste lahendamisedukus ei erinenud enamiku ülesannete puhul. Kümnest ülesandest kolme puhul olid IV klassi õpilased lahendamisel oluliselt edukamad ($p < 0,05$), kuna V klassi õpilased tegid lahendamisel rohkem vigu. Sagedamini esinenud veatüübid ja nende osakaalud klassides kattusid. Kõige vearohkemateks kujunesid mõlema klassi õpilastele korduvaid järgu ületamisi nõudvad ülesanded nagu ka Coxi (1974) uuringutes. Kõige suurem osa vigadest tekkis korrutamisel järgu ületamisega ülesannetes, milles IV ja V klassi õpilased eksisid korrutustabeli meenutamisel ja/või sellele meeldejäetava ühiku liitmisel või unustasid meeldejäetava järguühiku lisada. Kombineeritud vead korrutamisel on esikohal olnud mitmetes uuringutes (Buswell, John, 1926; Williams, Whitaker, 1937, viidatud Burrows, 1976).

Sageduselt teisel kohal olid klassides võrdselt eraldi tuvastatud korrutustabeli vead. Kuna korrutustabeli vead esinesid nii järgu ületamisel (kombineeritud vea koosseisus) kui ka

eraldi, siis korrutustabeli vigu võib pidada klassides juhtivaks veatüübiks. Kirjalikul korrutamisel sageduselt esimesele kohale on korrutustabeli vead asetanud ka Schonell (1937, viidatud Burrows, 1976). Korrutustabeli eksimuste juures oli märgata tehete segiajamisi, kus korrutamise asemel sooritati teguritega mõni muu tehe (nt liitmine, vahel ka lahutamine). Eriti oli tehete segistamist märgata väiksemate tegurite korral (mõlemad alla viie). Korrutustabeli oskuste uuringutes on tulemustes tehete segistamisi nimetanud Siegler (1988) ja Burge (1932, viidatud Burrows, 1976).

Oluliseks erinevuseks IV ja V klassi õpilaste vigades oli lõpetamata ülesannete suurem osakaal V klassi õpilastel (IV klassil 4% ja V klassil 17% vigadest). Eriti ülesande 2421 x 40 lahendamisel, kus V klassi õpilased jätsid nulli korrutise lõppu kirjutamata. IV klass lahendas selle ülesande oluliselt paremini. Nulliga seotud vigu on nimetanud enamik uurijatest (Buswell, John, 1926; Williams, Whitaker, 1937; Burge, 1932; Schonell, 1937; Cox, 1974), kuigi täpsemalt ei selgu nende vigade olemus. Käesolevas uurimustöös võiks V klassi õpilaste vigu liigitada pigem hooletusvigadeks kiirustamisel. Eraldi nulliga korrutamise vigu esines üksikutel vähemedukate grupi õpilastel. Võib arvata, et nulliga korrutamise on enamik õpilastest omandanud. Hooletusvigade vähendamiseks võiks 0 markeerida (nt värviliseks), et ei unustatakse. Ka 0 asukohale suunatud korrektuurülesandeid võiks rakendada.

IV ja V klassi vigade võrdlemisel oli märgata veel osakorrutiste liitmisel IV klassi õpilastel 10% võrra suuremat liitmisvigade osakaalu (IV klassil 22% ja V klassil 12,5%), kusjuures osakorrutiste liitmisel vigu meeldejäetavaga (kas unustati või lisati liigselt) esines klassides võrdselt 7% ulatuses. Liitmise vigades olid samuti jälgitavad tehete segistamised nagu korrutamiselgi (nt liitmise asemel korrutati). Osakorrutiste liitmisel esinevaid vigu on nimetatud mitmetes uuringutes (Buswell, John, 1926; Williams, Whitaker, 1937; Burge, 1932; Schonell, 1937). Neist Burge (1932) on eraldi märkinud ka tehete segi ajamise vigu.

Oluliselt erinesid korrutamise ülesannete lahendamise edukus ja vigade hulk õpilaste edukusgruppides. Õpilaste jaotamisel klassides edukateks ja vähemedukateks oli piiriks 70% ülesannete lahendamine. Ülejäänud, väiksema sagedusega, vead esinesid klassides sarnaselt vähemedukate grupi õpilastel. Vähemedukate õpilaste grupp oli V klassis suurem kui IV klassis (V klassis 30% ja IV 14% õpilastest) ja mõjutas seega üldist V klassi õpilaste ülesannete lahendamise edukust.

Vähemalt 70% korrutamise ülesannetest (10-st ülesandest 7) sooritas õigesti 86% IV klassi ja 70% V klassi õpilastest. Võib öelda, et need õpilased olid omandanud korrutamise

algoritmi. Õpilasi, kes lahendasid alla 50% ülesannetest, oli IV klassis 5% (5 õpilast) ja V klassis 13% (9 õpilast).

Lucangeli jt (2003) uurimuses jätsid õpilased meeldejäetavad järgühikud kirjutamata, kui olid arvutamisel juba vilunud. Käesolevas uurimuses oli korrutamisel meeldejäetavate ühikute märkimine jälgitav klassiti ja seega võib arvata, et see sõltus matemaatikaõpetajast ning tema nõudmistest või soovitudest. Vestlustest selgus, et mitmed põhikooli II astme matemaatikaõpetajad ei soovita õpilastel enam neid märkida, sest õpilane peaks juba peast oskama arvutada. Arvestades uurimustöö tulemustes arvutamisel raskustes olevate õpilaste hulka ja nende vigu arvutamisel, oleks vajalik just nõuda õpilastelt meeldejäetavate ühikute täpset ja korrektset märkimist. Sealjuures õpetada arvutamisel ka enne järgmise osakorrutise meelde jäetavate ühikute märkimist eelmise osakorrutise arvutamisel kirjutatud (meelde jäetud) ühikute eelnevat mahatõmbamist.

Kirjaliku jagamise ülesannete lahendamisel olid IV klassi õpilased oluliselt edukamad viie ülesande puhul, kuna V klassi õpilastel esines lahendamisel rohkem vigu.

Kõige sagedamini ja suurima osakaaluga (IV klassis 36% ja V klassis 31% vigadest) esines klassides algoritmiga seotud viga, kus väikese osajagatava puhul enne järgmise ühiku allatoomist jäetavad õpilased nulli jagatisse kirjutamata. Õpilaste jagamisoskuste uurimisel on saanud sarnase tulemuse mitmed autorid Cox (1974), Anghileri (2001). Telgmaa ja Nurk (2002) soovivad kirjalikul jagamisel jagatise kohtade arvu märkimiseks kasutada jagatavas ülakoma ($232\ 4523 : 33 =$, jagatisse tuleb viis kohta). Ülakoma kasutamist oli märgata ainult ühe klassi õpilaste töödes ja sedagi ebaefektiivselt. Ülakoma oli märgitud õigesti, kuid jagatises oli kohti vähem (tavaliselt jagatisest 0 puudu).

Kaks järgnevat viga – arvutusvead ja lahendamata ülesanded esinesid klassides sarnase sagedusega (12% kuni 16%). Arvutusvead tekkisid osajagatava kontrollimisel, kui oli vaja leida jagatisse sobiv arv ja kontrollida selle sobivust (sisuliselt oli tegemist korrutamisega). Cox (1974) leidis, et jagamisel suur osa arvutusvigadest oli seotud korrutamisega. Õpilaste edukusgruppide võrdluses oli arvutusvigu ja lahendamata ülesandeid oluliselt rohkem vähemedukatel õpilastel mõlemas klassis.

Võrdse sagedusega (7%) esines klassides arvutusvigadele sarnast viga, kui osajagatava kontrollimisel oli saadud õige arv, aga jagatises oli vale arv. Grossnickle (1939) liigitab need tähelepanuvigadeks. Õpilane on arvutanud ja proovinud erinevaid arve, leidnud sobiva osajagatava, kuid jagatisse valib vale arvu. Siinkohal võiks eraldi rõhutada õpilaste enesekontrolli tõhustamist jagatisse saadud arvu kontrollimisel, piisaks jagatisse leitud arvu ja jagaja ühelistest korrutamisest.

Ülejäänud väiksema osakaaluga vigade jagunemine oli oluliselt suurem mõlema klassi vähemedukate õpilaste gruppides.

Kirjalikul jagamisel esinevate vigade ilmnemisel oli märgata järgmisi tendentse, mida saab arvestada jagamise õpetamisel. Arvutamisevead (korrutamise vead) ilmsid valdavalt ülesannetes, kus osajagatavaid oli kaks ja vähemalt üks või mõlemad neist olid kolmekohalised. Lahutamisevead osajagatavast ilmsid enim ülesannetes, kus oli kolm osajagatavat (kahekohalised).

Ülesannetes A8 ($2266 : 22 = 103$) ja B10 ($2100 : 2 = 105$) olevad sarnased ja lihtsad arvud kutsusid esile peast arvutamist ja see tõi vale vastuse. Hickendorff jt (2010) leidsid, et madalama matemaatilise võimekusega õpilased kalduvad rohkem kasutama peastarvutamise strateegiaid, kuid kasutades arvutamisel kirjaliku arvutamise algoritmi, on edukamad (rohkem õigeid vastuseid). Madalama matemaatilise võimekusega õpilasi tuleb järjekindlalt suunata eelistama kirjaliku arvutamise algoritmi.

Uurimuses kasutatud ülesannete lahendamise põhjal oli kirjaliku korrutamise ja jagamise omandanud 72% IV ja 47% V klassi õpilastest. Ülesannete lahendamisel stabiilselt vähemedukaid oli IV klassis 12% ja V klassis 17% õpilastest. Staatusrühma vahetavaid õpilasi oli IV klassis 16% ja V klassis 36%. Suurema osa moodustasid neist õpilased, kes korrutasid edukalt, aga jagasid vähemedukalt. Kirjaliku korrutamise ülesannete lahendamisel olid juhtivaks veaks arvutusvead, millest suurema osa moodustasid korrutustabeli vead. Osad arvutusvead tulenesid tehete segi ajamisest. Kirjalikul jagamisel olid juhtivaks algoritmiga seotud vead, mis näitab jagamise algoritmi keerukust ja selle omandamise pikaajalisust. Jagamisel järgnevad kohe arvutusvead (osajagatava kontrollimine korrutamisega), mis sisuliselt on võrreldavad kirjalikul korrutamisel kõige sagedamini esineva veaga – korrutustabeli ja/või meeldejäetava järguühiku liitmise või selle unustamisega. Algoritmi ja arvutusvigu jagamisel peamiste vigadena on nimetanud ka Anghileri (2001).

Kuna nii korrutamisel kui ka jagamisel olid arvutusvead valdavalt seotud korrutamisoskustega, siis II kooliastmes matemaatika õpetamisel tuleb tähelepanu pöörata korrutustabeli oskuste arendamisele. Riiklik õppekava sätestab, et I kooliastme lõpetaja valdab korrutustabelit ja seetõttu on ilmselt põhikooli matemaatikaõpetajatel ka vastavad ootused õpilaste korrutustabeli oskustele II kooliastmes. Tuginedes mitmete autorite töödele (Gampbell & Graham, 1985; Siegler, 1988; Lemaire & Siegler, 1995), on selgunud, et korrutus- ja eriti jagamistabeli faktide omandamine toimub mitme aasta jooksul. Seda näitab ka käesolevas uurimuses korrutustabeli vigade suur osakaal kõigis edusgruppides. Kuigi IV ja V klassi edukate gruppide vahel statistilised erinevused puudusid, oli siiski märgata, et

kõige vähem vigu (sh korrutustabeli vigu) tegid V klassi edukad jagamisülesannete lahendajad. Fuchs jt (2006) on leidnud, et algoritmilise arvutamise omandamiseks on oluline aritmeetiliste faktide teadmine. Seetõttu tuleb eriti tähelepanelik olla nende õpilaste õpetamisel, kes tulevad I kooliastmest juba puudulike arvutusoskustega (Palu jt (2007) järgi umbes 6% õpilastest). Mazzoco jt (2008) ning Mabotti & Bisanzi (2008) uurimustes matemaatiliselt madalama võimekusega õpilased olid korrutus- ja jagamistabeli omandamisel oluliselt aeglasemad ning tegid rohkem vigu. Selle tõttu tuleks lubada õpiprobleemidega õpilastel kasutada korrutustabelit kirjalike arvutamise ülesannete lahendamisel.

Käesoleva uuringu tulemustest ei saa teha järeldust, et IV klassi õpilased arvutavad edukamalt ja V klassi jõudes arvutavad vähemedukamalt. V klassis stabiilselt vähemedukate gruppi kuuluvad õpilased olid ilmselt ka IV klassis kirjaliku arvutamise raskustes. Cox (1974) leidis, et süsteemsed algoritmi vead on püsiva iseloomuga ja võivad muutuda teisteks algoritmi vigadeks ning 23% õpilastest tegi süstemaatilisi vigu ka aasta hiljem. Samuti märkis Cox (1974), et HEV õpilastel esineb vigu oluliselt rohkem. Vabariiklike tasemetööde analüüsides selgub, et erinevatel aastatel on olnud soorituse kvaliteet 38%-67% vahel (edukate õpilaste grupp). Samuti on kõikuv ka puudulike hinnete osakaal. Tasemetööde tulemuste võrdlemisel on mitmeid muutujaid, kuid kindlasti on üks faktoritest ka õpilaskontingendi erinevus aastati. Et õpilaste tulemused oleks paremini võrreldavad, on mitmetes uuringutes autorid kasutanud valimi moodustamisel erinevaid (eel)teste (Anghileri, 2001; Cox, 1974; Fuchs jt, 2006; Hickendorff jt, 2010), mida käesolevas töös ei tehtud. Kuna Eestis puudub vastav standardiseeritud test õpilaste aritmeetiliste oskuste hindamiseks.

Käesolev uurimus andis ülevaate IV ja V klassi õpilaste kirjaliku korrutamise ja jagamise oskustest uurimuses kasutatud ülesannete lahendamise raames. V klassi õpilastelt oleks oodanud edukamat ülesannete lahendamist, kuna V klassis tegeletakse ümardamisega, õpitakse jaguvuse tunnuseid, arvutatakse kirjalikult kümnendmurdudega ja seega peaksid kirjaliku arvutamise kogemused olema suuremad. Osade ülesannete lahendamisel osutusid edukamateks IV klassi õpilased, sest V klassis oli rohkem õpilasi, kellele valmistas kirjalik arvutamine raskusi. Stabiilselt edukaid korrutamisel ja jagamisel oli IV klassis 72% ja V klassis 47%.

Kuigi peamised raskused õpilaste kirjalikul korrutamisel ja jagamisel on uurimistöös välja toodud, saaks täpsemad andmed IV ja V klassi (või ka VI klassi) õpilaste ülesannete lahendamise edukusest ja vigade mustri muutumisest, kui uurida ühte õpilaste gruppi vähemalt kahe aasta jooksul järjest. Teisalt, tehes põhjalikumaid uuringuid ja statistilisi

üldistusi, on siiski igapäevase õpetamise seisukohalt olulisem uurida konkreetse õpilase probleeme individuaalselt, et teha kindlaks ülesannete lahendamisel esinevad raskused. Võiks ehk proovida õpetamisel ka traditsioonilistest erinevaid kirjaliku arvutamise algoritme. Käesolevas töös on näiteks tutvustatud korrutamise tabelisse vormistamist, mille puhul pole vaja korrutamisel meeldejäetavaid ühikuid arvestada (Baker jt, 1995). Jagamisel aga jagaja kordsete lahutamise algoritmi, mille puhul pole osajagatava täpse suuruse määramine vajalik (Hickendorff jt, 2010).

Tulemusi ja antud soovitusi peaksid arvestama õpetajad matemaatikatunnis eriti õpiraskustes olevate õpilastega ning õpiabis vastava teema käsitlust ette valmistades või ülesannete lahendamist juhendades. Nii nagu matemaatikas saab ülesandel olla ainult üks õige vastus, nii piisab ka ainult ühest eksimusest, et kogu ülesanne oleks vale.

Kasutatud kirjandus

- Afanasjev, J. (2006). 6. klassi matemaatika tasemetöö analüüs 2006. Külastatud 15.04.2011 aadressil http://www.ekk.edu.ee/vvfiles/0/tasemetood_6kl_analuusid_2006.pdf.
- Anghileri, J. (2001). A study of progression in written calculation strategies for division. *Support for Learning Vol. 16 No. 1*. NASEN
- Anghileri, J. (2006). A study of the impact of reform on students' written calculation methods after five years' implementation of the National Numeracy Strategy in England. *Oxford Review of Education. Vol. 32, No. 3*, 363–380.
- Baker, D., Bland, P., Hogan, P., Holt, B., Job, B., Verity, R. & Wills, G. (1995). *Key Maths*. Stanley Thornes (Publishers) Ltd.
- Burrows, J. K. (1976). *A Review of the Literature on Computational Errors with Whole Numbers*. Vancouver: The University of British Columbia, Faculty of Education.
- Campbell, J. I. D. (1997). On the Relation Between Skilled Performance of Simple Division and Multiplication. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition Vol. 23. No. 5*, 1140-1159.
- Campbell, J. I. D. & Graham, D. J. (1985). Mental Multiplication Skill: Structure, Process, and Acquisition. *Canadian Journal of Psychology, 39(2)*, 338-366.
- Chinn, S. (2008). Mathematics Anxiety in Secondary Students in England. *Dyslexia 15*: 61–68.
- Cox, L. S. (1974). *Analysis, Classification, and Frequency of Systematic Error Computational Patterns in the Addition, Subtraction, Multiplication, and Division Vertical Algorithms for Grades 2 – 6 and Special Education Classes*. Kansas City: University of Kansas Medical Center.
- Eksamitööde ja tasemetööde analüüsid.
(<http://www.ekk.edu.ee/valdkonnad/uldharidusvalishindamine/eksamitoode-a-tasemetoode-analuusid>). 15.04.2011
- Fuchs, L. S., Fuchs, D., Compton, D. L., Powell, S. R., Seethaler, P. M., Capizzi, A. M., Schatschneider, C. & Fletcher, J. M. (2006). The Cognitive Correlates of Third – Grade Skill in Arithmetic, Algorithmic Computation, and Arithmetic Word Problems. *Journal of Educational Psychology: Vol. 98, No. 1*, 29–43.
- Hickendorff, M., van Putten, C. M., Verhelst, N. D. & Heiser, W. J. (2010) Individual Differences in Strategy Use on Division Problems: Mental Versus Written Computation. *Journal of Educational Psychology, Vol. 102, No. 2*, 438–452.

- Kaasik, K. (2005). *Matemaatika 4. klassile*, I ja II osa. Avita.
- Kaasik, K. (2009). *Matemaatika õpik 4. klassile*, I osa. Avita.
- Kaasik, K. (2010). *Matemaatika õpik 4. klassile*, II osa. Avita.
- Kaasik, K., Cibulskaitė, N., Strickiene, M. (2002). *Matemaatika 5. klassile*. Avita.
- Lee, J-E. (2007). Making sense of the traditional long division algorithm. *Journal of Mathematical Behavior*, 26, 48-59.
- Lemaire, P. & Siegler, R. S. (1995). Four Aspects of Strategic Change: Contributions to Children's Learning of Multiplication. *Journal of Experimental Psychology*, Vol. 124, No. 1, 83-97.
- Lucangeli, D., Tressoldi, P. E., Bendotti, M., Bonanomi, M. & Siegel, L. S. (2003). Effective Strategies for Mental and Written Arithmetic Calculation from the Third to the Fifth Grade. *Educational Psychology*, Vol. 23, No. 5, December.
- Mabbott, D. J. & Bisanz, J. (2008). Computational Skills, Working Memory, and Conceptual Knowledge in Older Children With Mathematics Learning Disabilities. *Journal of Learning Disabilities*. Vol 41, No 1, 15-28.
- Mazocco, M. M. M., Devlin, K. T. & McKenny, S. J. (2008). Is it a Fact? Timed Arithmetic Performance of Children With Mathematical Learning Disabilities (MLD) Varies as a Function of How MLD is Defined. *Developmental Neuropsychology*, (33), (318-444). Psychology Press, Taylor & Francis Group.
- Mauro, D. G., LeFevre, J-A. & Morris, J. (2003). Effects of Problem Format on Division and Multiplication Performance: Division Facts Are Mediated via Multiplication – Based Representations. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*. Vol. 29, No. 2, 163–170.
- Noor, E., Nurk, E., Telgmaa, A. (2002). *Matemaatika IV klassile*, 1.osa ja 2. osa. Kirjastus Koolibri, Tallinn.
- Palu, A., Afanasjev, J. & Vojevodova, K. (2007). Kolmanda klassi õpilaste matemaatikateadmistest rahvusvahelise uuringu IPMA testide põhjal. *Koolimatemaatika XXXIV*. Eesti Matemaatika Selts. Tartu Ülikool, Tartu.
- Põhikooli ja gümnaasiumi riiklik õppekava. Riigi Teataja, 2002, 51.317;
<https://www.riigiteataja.ee/ert/act.jsp?id=12888846>
- Põhikooli riiklik õppekava.
http://www.oppekava.ee/index.php/P%C3%B5hikooli_riiklik_%C3%B5ppekava

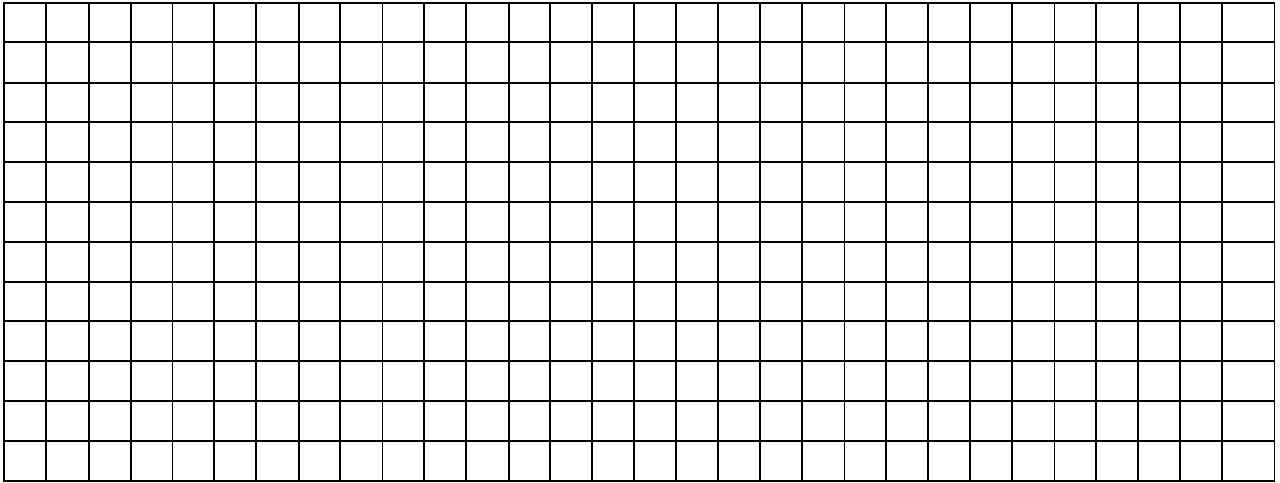
- Robinson, K. M., Arbuthnott, D. R., Rose, D., McCarron, M. C., Globa, C. A & Phonexay, S. D. (2006). Stability and change in children's division strategies. *Journal of Experimental Child Psychology*, 93, 224-238.
- Robinson, K. M. & Dube', A. K. (2008). A Microgenetic Study of Simple Division. *Canadian Journal of Experimental Psychology*, Vol. 62, No. 3, 156–162.
- Siegler, R.S. (1988). Strategy Choice Procedures and the Development of Multiplication Skill. *Journal of Experimental Psychology: Vol. 117, No. 3*, 258-275.
- Telgmaa, A. & Nurk, E. (2002). *Matemaatika V klassile*, I osa ja II osa. Kirjastus Koolibri, Tallinn.
- Tulving, E. (2002). *Mälu*. Tartu: TÜ Kirjastus.
- Veelmaa, A. (2006). Hindamisest matemaatika õpetamisel. *Õpitulemuste kontroll ja hindamine koolis*. Tallinn.

Lisa 1. Kirjaliku arvutamise ülesanded ja nende tähistused

	Tähis	Ülesanne
Kirjaliku korrutamise ülesanded	A1	31 x 2012
	A2	2421 x 40
	A3	21 x 1473
	A4	36 x 2407
	A5	1482 x 17
	B1	23 x 1232
	B2	5300 x 28
	B3	1580 x 14
	B4	6051 x 42
	B5	1435 x 58
Kirjaliku jagamise ülesanded	A6	2488 : 2
	A7	9018 : 9
	A8	2266 : 22
	A9	6912 : 64
	A10	1560 : 39
	A11	4144 : 56
	B6	6369 : 3
	B7	2408 : 4
	B8	2232 : 18
	B9	7208 : 34
	B10	2100 : 2
B11	2898 : 63	

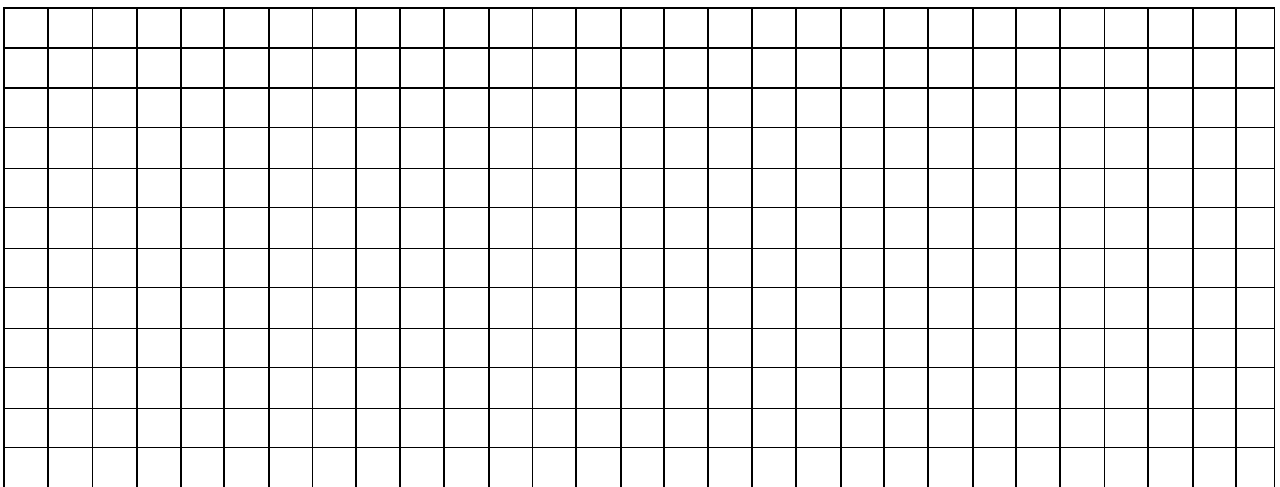
$2488 : 2$

$9018 : 9$



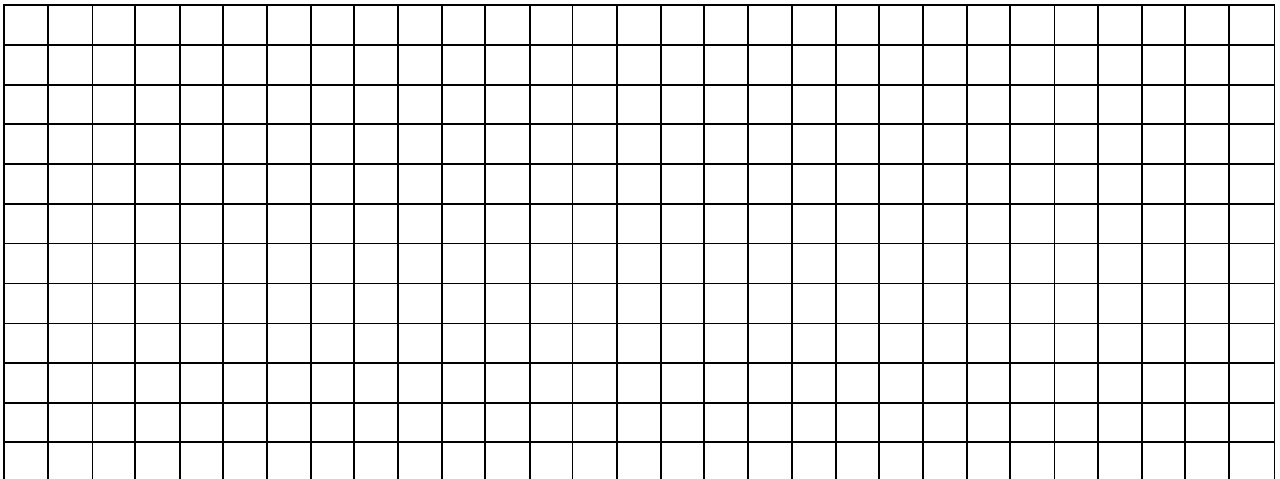
$2266 : 22$

$6912 : 64$



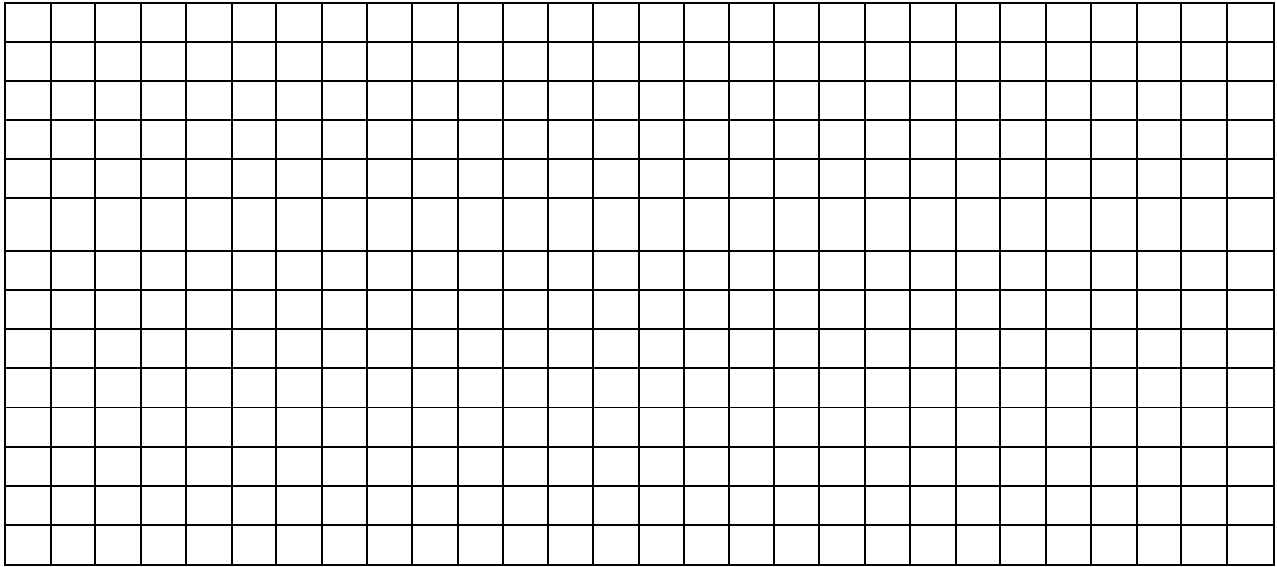
$1560 : 39$

$4144 : 56$



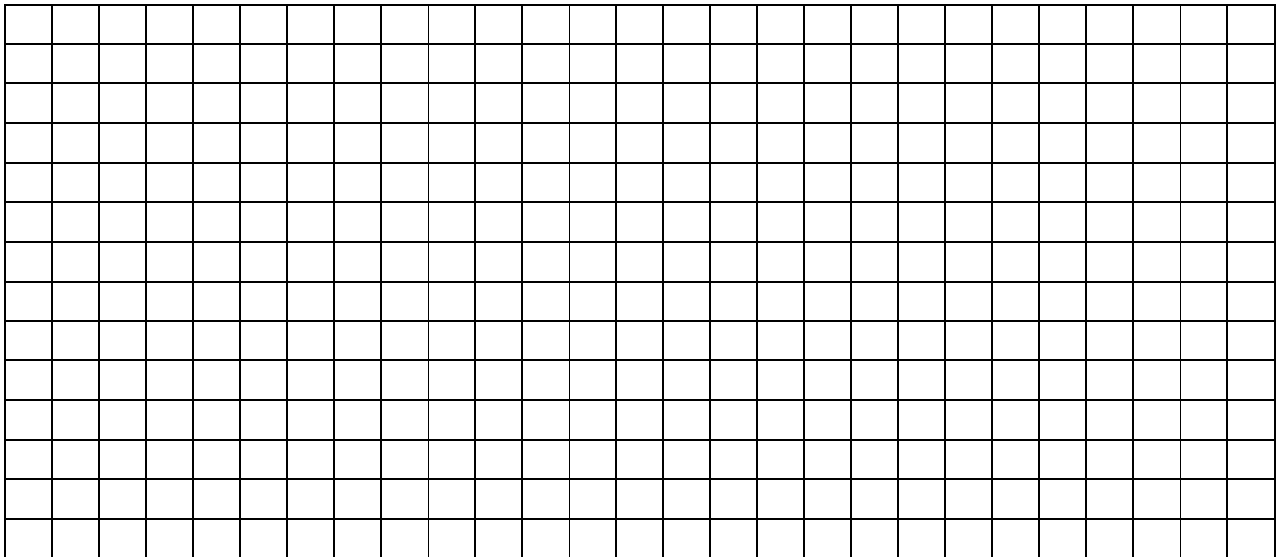
$6369 : 3$

$2408 : 4$



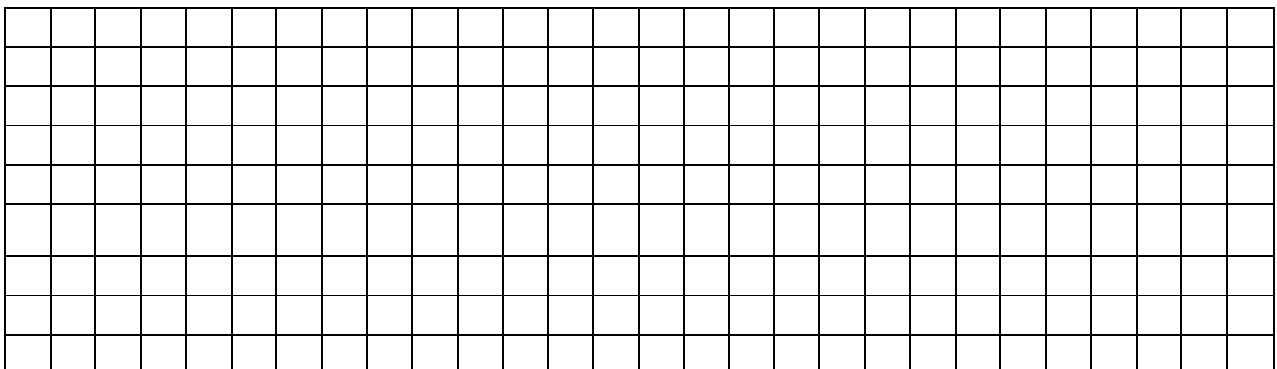
$2232 : 18$

$7208 : 34$



$2100 : 20$

$2898 : 63$



Lisa 4. Statistiliselt olulised seosed kirjaliku korrutamise ülesannete vahel

4 klass			Korrutamisülesanded							
	B5	A4	A5	B3	B4	A3	B1	B2	A2	A1
B5	Protsentuaalsed erinevused ülesannete vahel pole statistiliselt olulised.						*	*	*	*
A4							*	*	*	*
A5										*
B3										
B4										
A3										
B1	*	*				Protsentuaalsed erinevused ülesannete vahel pole statistiliselt olulised.				
B2	*	*								
A2	*	*								
A1	*	*	*							

5 klass			Korrutamisülesanded								
	B5	A5	B3	A4	A2	B4	B1	B2	A3	A1	
B5	Protsentuaalsed erinevused ülesannete vahel pole statistiliselt olulised.						*	*	*	*	*
A5							*	*	*	*	*
B3							*	*	*	*	*
A4										*	*
A2										*	*
B4	*	*	*			Protsentuaalsed erinevused ülesannete vahel pole statistiliselt olulised.					
B1	*	*	*								
B2	*	*	*								
A3	*	*	*	*	*						
A1	*	*	*	*	*						

* - märgitud statistiliselt oluline erinevus vastavate ülesannete vahel ($p < 0,05$)

Lisa 5. Vigade jagunemine korrutamise ülesannetes

4. klass

Ülesanded

5. klass

Ülesanded

Vea liik	4. klass										Arv		5. klass										Arv		
	A1	A2	A3	A4	A5	B1	B2	B3	B4	B5		%	A1	A2	A3	A4	A5	B1	B2	B3	B4	B5		%	
1 -kombineeritud viga		3	2	17	21		4	8	6	20	81	39,71%	1		1	1	9	21		2	12	8	23	77	37,75%
2 -korrutustabeli viga	7	3	8	8	1	3	5	2	7	1	45	22,06%	2	5	2	6	8	3	10	4	7	2	2	49	24,02%
3 -0 korrutamise viga		3		2							5	2,45%	3	1										1	0,49%
4 -liitmisviga	2	2	5	2		6	1	4	4	4	30	14,71%	4	1			2	1		2	4	1	1	8	3,92%
5 -liitmisviga meeldejätmisega		1	4	1	2	1		3		3	15	7,35%	5	1	1	4			4		3		4	17	8,33%
6 -lõpetamata ülesanne		1			1	1			1	1	5	2,45%	6	1			2	4	2	1	1	3	2	16	7,84%
7 - lõpetamata (0 puudu)		3					1				4	1,96%	7		17				1	3	2			23	11,27%
8 -lahendamata													8		1	1	3	3	1	2	1	1	2	15	7,35%
9 -tõlgendamatu	1						2	1	2	1	7	3,43%	9	1	2	1	2	2		1		1		10	4,90%
10 - vale algoritm							2				2	0,98%	10		1	1	1	1						4	1,96%
11 - vormistamisviga		2	1			2	3	1	1		10	4,90%	11	1	1	1				1	1	3		8	3,92%

Ülesandes viga **10 18 20 30 25 13 18 19 21 30** 204

11 26 15 27 35 18 16 31 19 34 229

% 4,9 8,8 9,8 14,7 12,3 6,37 8,8 9,3 10,3 14,7

 4,7 11,2 6,5 11,6 15,1 7,8 7,0 13,4 8,2 14,7

Lisa 6. Statistiliselt olulised seosed kirjaliku jagamise ülesannete vahel

4 klass				Jagamisülesanded								
	A8	A9	B10	A11	B8	B11	A7	A10	B9	B7	A6	B6
A8	Protsentuaalsed erinevused ülesannete vahel pole statistiliselt olulised.				*	*	*	*	*	*		*
A9		*			*	*	*	*	*	*	*	*
B10							*	*	*	*	*	*
A11		*							*	*	*	*
B8	*	*			Protsentuaalsed erinevused ülesannete vahel pole statistiliselt olulised.					*	*	*
B11	*	*								*	*	*
A7	*	*	*							*	*	*
A10	*	*	*	*						*	*	*
B9	*	*	*	*						*	*	*
B7	*	*	*	*	*	*	*	*	*			*
A6		*	*	*	*	*	*	*	*			
B6	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*		

5 klass				Jagamisülesanded									
	A9	A11	A8	B10	B11	A7	A10	B8	B9	B7	B6	A6	
A9	Protsentuaalsed erinevused ülesannete vahel pole statistiliselt olulised.					*	*	*	*	*	*	*	
A11							*	*	*	*	*		
A8								*	*	*	*		
B10								*	*	*	*		
B11			*	*	*	*	*						
A7	*					Protsentuaalsed erinevused ülesannete vahel pole statistiliselt olulised.					*	*	*
A10	*	*									*	*	*
B8	*	*	*	*	*						*	*	*
B9	*	*	*	*	*						*	*	*
B7	*	*	*	*	*	*	*	*			*	*	
B6	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*			
A6	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*			

* - märgitud statistiliselt oluline seos vastavate ülesannete vahel (p<0,05)

Lisa 7. Vigade jagunemine jagamise ülesannetes

	4. klass											Arv		5. klass											Arv			
	A6	A7	A8	A9	A10	A11	B6	B7	B8	B9	B10	B11	%	A6	A7	A8	A9	A10	A11	B6	B7	B8	B9	B10	B11	%		
1- jagatisest 0 puudu	18	28	20								20	86	35,54%	21	25	22				3			26	97	29,48%			
2- liigne 0			1		1			2	3	1	2	10	4,13%							2		1	1	5	9	2,74%		
3- osajagatav suur või väike				1	2						1	4	1,65%				3	4			1	1		2	11	3,34%		
4- esimene osajagatav vale		3	2	1				3	4			13	5,37%	2	3	7	3	2	3	3	1	3		2	2	31	9,42%	
5- vale algoritm	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	13	5,37%	1	2	1	1	1	1	1						8	2,43%	
6- osajagatava kontroll valesti arvutatud	1		3	2	6	10		1		2	4	7	36	14,88%				8	6	15	1	1	4	4	4	11	54	16,41%
7- viga lahutamisel						2		6	3		1	12	4,96%			1						4	3		2	10	3,04%	
8- jagamistabeli vead								2				2	0,83%								3				0	3	0,91%	
9- osajagatav õige, jagatistes vale arv		1	7	2	1			5		1	2	19	7,85%	1		1	6	4	3			6	2	1		24	7,29%	
10- vormistamisviga			1								1	2	0,83%	1		2	2				1		1			7	2,13%	
11- lõpetamata	2		4	1				2		1	1	11	4,55%	1	1		4	4		1	1	5				17	5,17%	
12- lahendamata		2	2	5	9			2	1	2	5	28	11,57%	2	3	1	1	8	12	2	3	3	4	3	11	53	16,11%	
13- tõlgendamatu			2					1	1	1	1	6	2,48%	1									2		2	5	1,52%	
Ülesandes vigu %	4	20	38	42	17	26	1	5	22	15	31	21	242	100%	8	31	37	48	28	38	8	15	26	18	37	35	329	100%
		1,7	8,3	15,7	17,4	7,0		10,7	0,4	2,1	9,1	6,2	12,8	8,7		2,4	9,4	11,2	14,6	8,5		11,6	2,4	4,6	7,9	5		