



TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

E. TIIT

MATEMAATILINE STATISTIKA

I

TARTU  1971

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

Arvutusmatemaatika kateeder

E. TIIT

MATEMAATILINE STATISTIKA

I

Tartu 1971

9. Trüht

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

I

На эстонском языке

Vastutav toimetaja T. Veldre

Korrektor E. Oja

TRÜ rotaprint 1971. Paljundamiseks antud
21.VI 1971. Trükipeogmaid 18,63 + 5,63
trpg. lisa. Tingtrükipeogmaid 17,33 + 5,24
tingtrpg. lisa. Arvestuspeogmaid 13,0. Trü-
kiarv 1000. Paber 30 x 42. 1/4. MB 06439.
Tell. nr. 559

Hind 65 kop.

E e s s õ n a .

Käesolev matemaatilise statistika konspekt on mõeldud kasutamiseks niihästi õppevahendina üliõpilastele, kelle õppeprogrammis esineb matemaatiline statistika (kas iseseisva distsipliinina või mõne distsipliini osana), aga samuti ka käsiraamatuna teaduslikele töötajatele ja aspirantidele, kes oma töös kasutavad matemaatilise statistika meetodeid.

Õppevahend esitab elementaarsel kujul põhilise osa ühe-mõõtmelisest matemaatilisest statistikast, piirdudes sealjuures nn. klassikaliste meetoditega punkt- ja vahemikhinnangute ning statistiliste hüpoteeside kontrolli teoorias, mis kaasajal kõige mitmekesisemates teadusharudes laialdast rakendamisest leiavad.

Mitmemõõtmeline statistiline analüüs (sealhulgas ka dispersioonanalüüs) jäi käesolevast konspektist välja, kuna seda on kavas käsitleda õppevahendi järgnevas osas. Ruuminappuse tõttu jäi käsitlemata ka rida uuemaid meetodeid ühe-mõõtmelises statistikast, nagu enamus mitteparameetrilisi ning nn. lihtsustatud meetodeid, järjendanalüüs jt. Osaliselt püüame seda puudujääki tasa teha plaanis oleva "Matemaatilise statistika tabelite" väljaandmisega.

Selle tõttu, et konspekt on määratud laiale kasutajate ringkonnale, ei eeldata lugejalt erilisi eelteadmisi: isegi põhimõisted juhusliku suuruse teooriast ning enam levinud jaotuste käsitus; mis küll sisuliselt kuuluvad tõenäosusteooria valdkonda, on käesolevas konspektis (I ptk.) eraldi esitatud. Raamatu kasutamist käsiraamatuna peaks hõlbustama näiteülesannete rohkus (neid on esitatud kõigi vaadeldavate meetodite kohta), samuti kasutatavamate valemite esiletõstmine raamiga (V ptk.). Samuti on konspekti lisas antud kõik

vajalikud statistilised tabelid. Ka materjali järjestus vastab pigem käsiraamatu kui süstemaatilise õpiku omale: aineosad on konspekti paigutatud lahendatavate ülesannete, mitte kasutatavate meetodite loogilisest järjestusest lähtudes.

Et aga konspekti oleks võimalik ka õpikuna kasutada, on oluline osa materjalist esitatud koos enam või vähem range matemaatilise põhjendusega. Kui osa tõestusi on (kas vajaliku aparatuuri komplitseerituse või tehnilise töö suure mahu tõttu) välja jäetud, on viidatud monograafilisele kirjandusele, kust vajalikud tõestused võib leida. Olemasolevatest tõestustest keerukamad, samuti kõik mõttekäigud, mis nõuavad kõrgema matemaatika aparatuuri, on konspektis paigutatud tärnide vahele (algus *, lõpp - * -). Lugeja, kes meetoditega sisuliselt tutvuda ei soovi, võib need osad vahele jätta.

Konspektis esitatav materjal on jaotatud peatükkideks ja paragrahvideks, millest pikemad jagunevad omakorda alapunktideks. Valemite numeratsioon on toodud peatükkide kaupa, samuti kui paragrahvidegi numeratsioon. Juhul kui viidatakse valemile teises peatükis, lisatakse valemi numbrile ka peatüki number. Nii tähendab viide (3.17) valemit(17), mis paikneb III peatükis. Konspekti tekstis olevad tabelid on nummerdatud araabia numbritega, lisas paiknevad tabelid aga rooma numbritega. Lisasse paigutatud tabelid on tehnilistel põhjustel üsnagi ebaühtlase välimusega: nimelt ei õnnestunud leida ühtki teost, milles kõik vajalikud tabelid piisava täpsuse ja tihedusega oleksid esitatud, ning seetõttu on tabelid võetud reast eriilmelistest teostest (alliketeoste loetelu on lisatud eraldi).

Tahan siin tänu avaldada selle konspekti valmimisel suurt abi osutanud kolleegidele: prof. Ü.Lepikule, T.Mölsile, S.Veldrele, L.-M.Toodingule, L.Laaneväljale ning J.Tuldavale mitmete kasulike näpunäidete eest, T.Veldrele suure töö eest käsikirja läbivaatamisel ning J.Torokoffile käsikirja lõpliku viimistlemise ning jooniste tegemise eest. Tehnilist abi konspekti valmimisel osutasid veel L.Karu, H.Tera, M.Vanem ja T.Prikko. Kõigile abilistele suur aitäh!

S i s s e j u h a t u s .

Kaasaegset teadust iseloomustab matemaatiliste meetodite kasutuselevõtt kõige mitmekesisemates uurimissuundades. Üks esimesi matemaatika meetodeid, mida "mittematemaatilistes" teadustes (humanitaar- ja rakendusteadused) kasutatakse, on matemaatiline statistika.

Tõepoolest, kõige üldisemalt võiks uurimistöö käiku loodusteadustes kirjeldada järgmiste etappidena:

- 1^o materjali kogumine;
- 2^o materjali korrastamine, süstematiseerimine;
- 3^o materjali klassifitseerimine;
- 4^o hüpoteeside püstitamine;
- 5^o hüpoteeside kontrollimine;
- 6^o edasise töö planeerimine.

Et teaduslik uurimistöö on üldiselt jätkuv protsess, järgneb etapile 6^o reeglina etapp 1^o (täiendava materjali kogumine) jne. Tuleb muidugi märkida, et sageli võivad etapid omavahel põimuda (näiteks 2^o ja 3^o või 3^o ja 4^o), vahetuda (4^o ja 5^o) või mõned neist hoopiski puududa.

On iseloomulik, et etappide 2^o-6^o teostamisel on enamasti tarvis rakendada matemaatilise statistika meetodeid, kusjuures mitmete nimetatud ülesannete lahendamiseks on välja kujunenud nimetatud distsipliini spetsiaalsed harud. Olu-

lisemad nendest on:

- 1^o vaatlusandmete töötlemise teooria;
- 2^o klassifitseerimise (kujundite eristamise) teooria;
- 3^o mitmemõõtmeline statistika;
- 4^o hinnangute teooria;
- 5^o hüpoteeside kontrollimise teooria;
- 6^o katse planeerimise teooria;
- 7^o statistiliste otsustuste teooria.

Teadusliku uurimistöö teisele etapile - materjali korrastamisele - vastab vaatlusandmete töötlemise teooria (kitsamas mõttes). Vaatlusandmete töötlemise teooria on vanim osa matemaatilisest statistikast (pärib XIX sajandi algusest), mis küllalt pika aja jooksul ühtis kogu matemaatilise statistika kui teooriaga. Kaasajal sisaldab vaatlusandmete töötlemise teooria ühelt poolt lähteandmete korrastamise ja esialgse informatsiooni saamise (suhteliselt elementaarseid) meetodeid, teiselt poolt hinnangute teooriat, mis kuulub matemaatilise statistika uusimate saavutuste hulka.

Kolmandale etapile - klassifitseerimisele - vastab sama ninetusega matemaatilise statistika haru. Klassifitseerimise teooriaga on tihedasti seotud ka teoreetilise küberneetika üks huvipakkuvamaid probleeme - kujundite eristamine; osutub, et sisuliselt on mõlemad probleemid taandatavad mingi p-dimensionaalse (p-klassifitseeritavate indiviidide või kujundite tunnuste arv) ruumi osadeks jaotamisele. Kuigi klassifitseerimise probleem (eriti bioloogias) on küllalt vana, on seni saavutatud vaid erijuhtudele sobivaid tulemusi ning intensiivne uurimistöö jätkub.

Järgmisel teadusliku uurimistöö etapil - hüpoteeside püstitamisel - on kasutatavad niihästi statistiliste hinnangute teooria kui ka mitmemõõtmelise statistika meetodid. Eriti viimane võimaldab avastada seoseid mitmesuguste tunnuste muutmise vahel, teha oletusi muutlikkust põhjustavate faktorite ning muutumise iseloomu kohta.

Matemaatilise statistika mõlemad nimetatud harud on käesoleva sajandi algusaastaist peale intensiivselt arenenud ning muutunud käesolevaks ajaks kompaktseteks, süstemaatilisteks ja matemaatiliselt täiesti rangeteks teooriateks.

Hüpoteeside kontrollimise teooria - nagu nimetuski näitab - on meetodiks, mis võimaldab statistilise materjali¹ põhjal kontrollida mitmesugustes teadusharudes tehtavaid hüpoteese; ka see matemaatilise statistika haru on viimase paarikümne aasta jooksul kujunenud rangeks teaduslikult põhjendatud teooriaks.

Esimesed sammud katse planeerimise teooria valdkonnas ulatuvad käesoleva sajandi algusesse. Kaasajal areneb see matemaatilise statistika haru intensiivselt, kuid ühtne, kompaktne teooria esialgu veel puudub.

Statistiliste otsustuste teooria on katseks käsitleda kõiki ülalloeletatud statistika harusid ühest vaatekohast. Nimelt võib uurimistöö kõiki etappe käsitleda teatud otsustusprobleemidena, sest igal etapil tuleb vastu võtta üks või teine otsustus (paigutada uuritav indiviid ühte või teise klassi, püstitada mingi hüpotees, lugeda üks või teine hüpotees tões-

¹ Statistilise materjali all mõistame katse-, vaatlus- ja mõõtmistulemuste hulka.

tatuks või kummutatuks, jätkata katseid (vaatlusi) mingil konkreetsel viisil jne.). Kõiki neid otsustusi tuleb teha vastavalt konkreetsele statistilisele materjalile. Niisiis, valides vaadeldava probleemi jaoks sobivalt nn. otsustuste ruumi (kõigi arvesse tulevate otsustuste hulga) ja omistades otsustustele sobivalt kaofunktsioonid (s.o. arvud, mis iga otsustuse jaoks kokkuleppeliselt väljendavad kahju, mida tekitab selle otsustuse ebaõige vastuvõtmine), saame kõiki statistika meetodeid formaalselt viia otsustuste teooria alla. Tuleb aga märkida, et statistiliste otsustuste teoorias, mis on arenema hakanud alles viimaste aastakümnete jooksul, puudub esialgu veel ühtne teoreetiline esitus. Häid tulemusi on otsustuste teooria abil seni saavutatud eeskätt hüpoteeside kontrollimisel.

Matemaatilise statistika põhiliseks meetodiks on tõenäosusteooria, sest mistahes vaatlustulemused ja katseandmed on alati juhuslikud suurused (kui mitte muudel põhjustel, siis vähemasti vaatlusvigade tõttu). Tavaliselt ei ole võimalik arvesse võtta kõiki uuritavat nähtust kirjeldavaid tegureid, faktoreid, ning kirjeldamata jäänud tegurite mõju ongi vaatlustulemuste juhuslikkuse põhjuseks.

Ajalooliselt areneski matemaatiline statistika esialgu tõenäosusteooria osana, erinedes viimasest erineva probleemiasetuse poolest. Kui tõenäosusteoorias lähtutakse mitmesugustest tuntud jaotusega juhuslikest suurustest ja leitakse nende juhuslike suuruste või teiste, nende kaudu määratud juhuslike suuruste arvulisi või funktsionaalseid karakteristikuid, siis matemaatilises statistikas on juhuslikud suuru-

sed reeglina tundmatud (nende kohta teatakse vaid üksikväärtusi) ning kõik järeldused tuleb teha neile üksikväärtustele baseerudes.

Peale tõenäosusteooria rakendab matemaatiline statistika ka mitmete teiste matemaatikaharude (geomeetria, matemaatiline loogika, kaasaegne algebra, matemaatiline analüüs jne.) saavutusi. Eriti väärib märkimist matemaatilise statistika tihe seos arvutusmatemaatikaga. Selle põhjuseks on ühelt poolt vajadus ulatuslikeks arvutustöödeks matemaatilise statistika ülesannete lahendamise käigus, teiselt poolt aga ka matemaatilise statistika rakendamise võimalus mõningate keerukamate arvutuslike ülesannete lahendamisel (nn. Monte-Carlo ehk statistiliste katsetuste meetod). Sisuliselt tegeldakse ka arvutusmatemaatikas juhuslike suurustega - kõik arvutustulemused on paratamatute arvutus- (ümardamis-) vigade tõttu juhuslikud suurused.

I. JUHUSLIK SUURUS.

§ 1. J u h u s l i k u s u u r u s e m õ i s t e .

Statistika uurimisobjektiks on juhuslik suurus. Juhusliku suuruse mõiste konkreetne matemaatiline määratlus kuulub tõenäosusteooriasse (vt. näiteks [3]). Elementaarse matemaatilise statistika seisukohalt piisava kujutluse juhuslikust suurusest saame, käsitledes teda muutuva suurusena, mis sõltuvalt juhusest, s.t. meile tundmatute ja kontrollimatute faktorite mõjul võib omandada mitmesuguseid erinevaid väärtusi. Üldiselt ei tarvitse "suuruse" väärtus olla arvuline, vaid see võib väljenduda kasvõi näiteks värvusena. Lihtsuse mõttes käsitleme aga käesolevas paragrahvis üksnes arvuliste väärtustega juhuslikke suurusi.

Väga suur osa suurustest, millega me looduse uurimisel kokku puutume, on juhuslikud. Vaatleme, mis on selle põhjuseks

1) Osa suurusi esineb looduses põhimõtteliselt muutumatu või muutub äärmiselt aeglaselt (näiteks valguse kiirus, elektroni laengu suurus jne.), kuid kuna meie käsutuses on nende kohta vaid mõõtmistulemused, mis paratamatult sisaldavad ka mõõtmisvigu, siis saame nende konstantsete suuruste kohta informatsiooni vaid juhuslike suuruste kaudu. Juhus ei mõjuta siin mitte uuritavat objekti, vaid selle objekti tunnetamist meie poolt, meieni jõudvat informatsiooni.

2) Suurused, mis kuuluvad elusa looduse või ühiskondlike nähtuste sfääri, on juba oma põhiolemuselt muutuvad, sõltudes väga paljudest (nii tuntud kui ka tundmatutest) faktoritest. Et paratamatult on osa faktoreid meile tundmata, nende mõju on raskesti kontrollitav või antud probleemi uurimisel mitteoluline, siis tuleb neid kirjeldada juhusena, mis mõjutab uuritavat objekti. Seetõttu on uurimisobjekt oma olemuselt juhuslik. Samuti võib ka siin lisanduda veel mõõtmisviga, s.o. juhuslikkus, mis tuleneb objekti tunnetamisest.

Matemaatilise statistika meetodid, mida rakendatakse mõlemat liiki vaatlustulemuste uurimisel, on suurelt osalt ühised. Ometi tuleb tulemuste tõlgendamisel tähele panna, kumba liiki juhuslike suurustega on tegemist. Näiteks mõõtmistulemuste suur hajuvus (tugev erinevus üksteisest) on kaheldamatult ebasoovitav, näidates väikest mõõtmistäpsust. Samal ajal aga näiteks sotsioloogiliste küsitluste puhul vastuste hajuvus - antud vastuste tugev erinevus üksteisest - võib näidata antud küsimusele otstarbekalt valitud vastusevariantide hulka.

§ 2. Diskreetseid ja pidevaid juhuslikud suurused.

Metoodiliselt on otstarbekas käsitleda eraldi kahte tüüpi juhuslikke suurusi - diskreetseid ning pidevaid. Põhimõtteliselt leidub ka selliseid juhuslikke suurusi, mis kumagi vaadeldava klassi alla ei mahu, kuid matemaatilise statistika probleemide lahendamisel ei kohtu me sellistega peaaegu mitte kunagi.

Diskreetsete juhuslike suuruste hulka kuuluvad kõigepealt sellised juhuslikud suurused, millel on ainult lõplik hulk väärtusi (näiteks täringuviskel võime saada 6 erinevat tulemust). Väga sageli on diskreetse juhusliku suuruse väärtusteks naturaalarvud (positiivsed täisarvud), näiteks laste arv perekonnas; päikesepaisteliste päevade hulk aastas, inimeste arv maakeral. Viimasest näitest näeme, et diskreetse juhusliku suuruse väärtuste arv võib olla ka väga suur. Kui juhusliku suuruse väärtuseks võib olla ükskõik missugune naturaalarv (positiivne täisarv) või ükskõik missugune täisarv, siis ütleme, et juhuslikul suurusel on lõpmata palju väärtusi.

Rangelt matemaatiliselt defineerides tuleks öelda, et diskreetsel juhuslikul suurusel on lõplik või loenduv² hulk väärtusi. Need väärtused võivad olla ka naturaalarvudest erinevad, kuid oluline on, et neid saab järjekorras nummerdada (vt. näiteks tabel 1).

Tabel 1.

Jrk. nr.	1	2	3	4	5	6	...
Juhusliku suuruse väärtus	1	2	4	8	16	32	...

Diskreetne juhuslik suurus muutub alati hüppeliselt. Nii suureneb laste arv perekonnas tingimata ühe (või koguni enama) ühiku võrra, väiksem muutus ei ole võimalik.

Pidev juhuslik suurus võib omandada kõiki reaalarvulisi väärtusi mingis piirkonnas, kusjuures tema muutumine ei ole hüppeline, vaid võib olla kuitahes väike. Näiteks temperatuur

² Loenduv hulk on selline lõpmatu hulk, mille igale indiviidile on põhimõtteliselt võimalik anda (erinev) järjekorranumber (vt. näiteks [1]).

võib muutuda $0,1^{\circ}$, $0,01^{\circ}$ või ka $0,001^{\circ}$ võrra - iseküsimus on, kas me seda saame registreerida. Ja ka selline suurus ei ole piiriks - võib kujutleda veelgi väiksemaid temperatuurimuutusi.

Mõõtmiste ebatäpsuse tõttu ei saa me tegelikult ühegi suuruse puhul vahetult kontrollida, kas ta muutub pidevalt, sest katse- või vaatlusandmed saadakse enamasti diskreetsel kujul (kui välja arvata isekirjutaja graafikud). See aga ei takista meid kasutamast paljude mõõtmistulemuste kirjeldamisel pidevaid juhuslikke suurusi; veelgi enam, mõnikord lähendatakse pidevate juhuslike suurustega isegi ilmselt diskreetseid, kui see mõnes mõttes otstarbekaks osutub.

§ 3. J u h u s l i k u s u u r u s e t ä h t s u s n i n g v ä ä r t u s t e h u l k.

Edaspidiseks lepime kokku, et tähistame juhuslikke suurusi suurte tähtedega tähestiku lõpust: X, Y, Z jne.

Kõige esimeseks huviobjektiks juhusliku suuruse uurimisel on kahtlemata tema võimalike väärtuste hulk. On juhuslike suurusi, mis võivad omandada väärtusi mingist vahemikust (inimkeha temperatuur), seda tähistame sümbolsealt $a \leq X \leq b$, kus a ja b on selle juhusliku suuruse minimaalne ja maksimaalne väärtus, või $a < X < b$, kus a ja b on vastavalt suurim ja vähim väärtus, mida see juhuslik suurus enam ei saa omandada.

On ka selliseid juhuslikke suurusi, mille võimalike väärtuste hulk on väga suur (taevakehade temperatuurid), nii et me sageli võime lihtsuse mõttes öelda - juhuslik suurus

võib omandada kõiki reaalarvulisi väärtusi. Seda märgime sümbooliga $-\infty < X < \infty$. Sama sümboolikat kasutame ka siis, kui me ei tea tõkete a ja b väärtusi.

Kahtlemata ei ole juhusliku suuruse kirjeldamisel enamasti kõik tema väärtused võrdväärsed: mõned neist võivad esineda sagedamini, mõned harvemini. Sellest seisukohast lähtudes tuleb meil aga eraldi käsitleda diskreetseid ning pidevaid juhuslikke suurusi.

§ 4. Diskreetse juhusliku suuruse jaotus.

1. Jaotustabel.

Diskreetse juhusliku suuruse puhul on põhiliseks karakteristikuks tema jaotus, mis näitab selle juhusliku suuruse mingil väärtuse esinemise tõenäosust. Jaotuse võib esitada tabelina. Näitena esitame siin tabeli täringuviske tulemuste jaotuse jaoks (vt. tabel 2).

Tabel 2.

Juhusliku suuruse väärtus	1	2	3	4	5	6
Selle esinemise tõenäosus	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Paneme tähele, et tabelis 2 võrdub tõenäosuste summa ühega: $1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 = 1$. Edaspidi näeme, et see on nii iga jaotuse korral.

Tõenäosus, et juhuslik suurus X omandab väärtuse k , kirjutatakse sümboolselt $P(X = k)$. Seega oleks praegu õige kirjutada

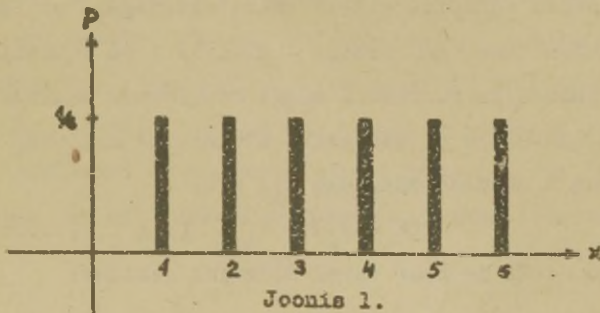
$$P(X = 1) = 1/6,$$

$$P(X = 2) = 1/6,$$

.....

$$P(X = 6) = 1/6.$$

Tabelit on sageli otstarbekas illustreerida graafikuga (vt. joon.1).



2. Jaotusvalem.

Mõnikord võib jaotuse esitada ka valemina. Praegu kirjelatud juhusliku suuruse jaotus cleks valemina esitatav järgmiselt:

$$P(X = k) = 1/6, \quad k = 1, 2, \dots, 6,$$

mis tähendab, et juhuslik suurus X omendab väärtused 1, 2, 3, 4, 5 ja 6 kõik tõenäosusega $1/6$. Enamasti aga on valemina esitatavad jaotused mõnevõrra keerukamad (vt. näiteks valem (1)).

Nende esitamiseks on meil tarvis kokku leppida veel mõningastes tähistustes.

Üldiselt tähistame edaspidi diskreetse juhusliku suuruse X kõik väärtused järjest sümboolitega

$$x_1, x_2, \dots, x_n \quad \text{või} \quad x_1, x_2, \dots$$

(sõltuvalt sellest, kas neid on lõplik hulk - n tükki- või lõpmata palju). Erijuhul, kui meil on aga teada, et juhusliku suuruse väärtusteks on järjestikused naturaalarvud, märgime lihtsalt

$$k = 1, 2, \dots, n \text{ või } k = 1, 2, \dots$$

Determineeritud, s.t. juhusest sõltumatuid suurusi tähistame edaspidi alati väiketähtedega, et neid eristada juhuslikest suurustest - niisiis X on juhuslik suurus, x - juhusliku suuruse X mingi konkreetne väärtus.

Sümboliga p_i tähistame tõenäosuse selleks, et juhuslik suurus X omandab väärtuse x_i , s.t.

$$P(X = x_i) = p_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Seega oleks jaotuse tabel üldkujul selline:

Tabel 3.

X	x_1	x_2	x_n
P	p_1	p_2	p_n

Et juhuslik suurus X kindlasti omandab parajasti ühe väärtustest x_1, \dots, x_n , siis võrdub tõenäosuste liitmise teoreemi põhjal (vt. [3]) jaotust määravate tõenäosuste summa alati ühega, s.t.

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1,$$

mida edaspidi lühemalt märgime

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

Kui aga juhuslikul suurusel on lõpmata palju väärtusi, siis kirjutame

$$P(X = x_i) = p_i, \quad i = 1, 2, \dots ;$$

sel juhul kehtib seos $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.

Järgnevalt esitame ühe konkreetse juhusliku suuruse jaotuse valemi. Selleks vaatleme näitena üht tegelikkuses küllaltki sageli esinevat jaotust - binomiaaljaotust. Binomiaaljaotuse puhul on juhusliku suuruse X väärtuseks mingi sündmuse esinemise arv n katse vältel, kui igal katsel esineb see sündmus tõenäosusega p . Ilmselt on X võimalikeks väärtusteks arvud $0, 1, 2, \dots, n-1, n$. Seos $X = 0$ tähendab, et meid huvitav sündmus ei esinenud katseseeria vältel ühtegi korda, $X = n$ aga tähendab, et see sündmus esines igal katsel - kokku n korda.

3. Binomiaaljaotus.

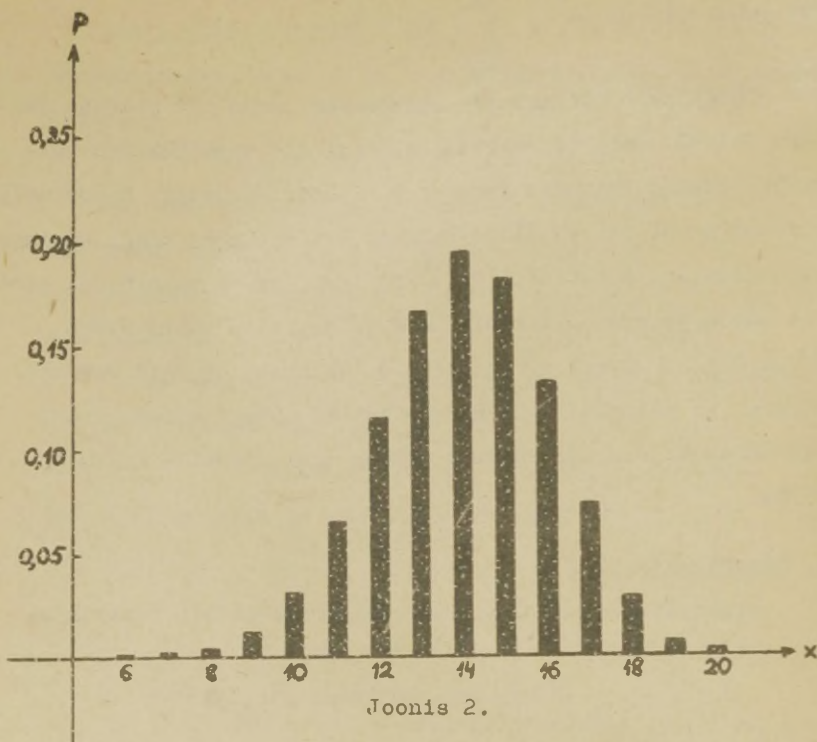
Binomiaaljaotus on esitatav valemiga (selle tuletamist vt. näiteks [3]):

$$P(X = k) = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Tähistades $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k = k!$ (k faktoriaal ja vt. tabel XVIII lisas) $\frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k$ (kombinatsioonide arv n elemendist k kaupa, vt. tabel XVII) ning kirjutades lihtsuse mõttes $1 - p = q$, saame samale valemile kuju

$$P(X = k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}. \quad (1)$$

Ka valemiga esitatud jaotust saab esitada graafikuna, niipea kui on teada nn. parameetrite - antud juhul arvude p ja n täpsed väärtused. Näiteks juhul $n = 20$, $p = 0,7$ näeks valemiga (1) esitatud jaotuse graafik välja nii, nagu on kirjeldatud joonisel 2.



Näeme, et sündmuste $X = 0$ ja $X = n$ esinemise tõenäosused on suhteliselt väikesed võrreldes vahepealsete väärtuste esinemise tõenäosustega.

Tõsiasi, et juhuslik suurus X on binomiaaljaotusega, märgime sümboliliselt $X \sim B(n, p)$, kus n ja p asemele märgime nende parameetrite konkreetset väärtust. Näiteks joonisel 2 on esitatud juhuslik suurus jaotusega $B(20; 0,7)$.

§ 5. Pideva juhusliku suuruse jaotusfunktsioon.

Pideva juhusliku suuruse iseloomustamiseks ei ole meil hästi võimalik jaotust kasutada, sest pideva juhusliku suuruse iga üksiku väärtuse esinemise tõenäosus on null:

$$P(X = k) = 0 \quad (\text{iga } k \text{ korral}).$$

Küll aga võime rääkida tõenäosusest selleks, et juhusliku suuruse väärtus oleks väiksem mingist antud arvust x :

$$P(X < x).$$

Näiteks tõenäosus selleks, et Tartus 1. jaanuari ööl on temperatuur alla -20°C , on $1/10$ (s.t. selline temperatuur esineb keskmiselt kord 10 aasta jooksul). Tõenäosust $P(X < x)$ nimetatakse juhusliku suuruse X jaotusfunktsiooniks ning tähistatakse sümboliga³ $F_X(x)$, s.t.

$$F_X(x) = F(x) = P(X < x). \quad (2)$$

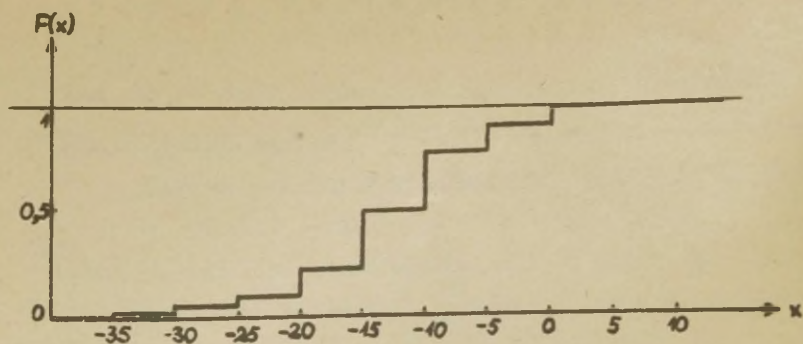
Teades jaotusfunktsiooni $F(x)$ väärtusi terve rea erinevate argumentide korral, saame uuritava juhuslikku suurust X kaunis hästi iseloomustada. Oletame näiteks, et 1. jaanuari temperatuuri X jaotusfunktsiooni väärtused oleksid esitatavad järgmise tabelina:

Tabel 4.

x	-35	-30	-25	-20	-15	-10	-5	0	+5	10
$F_X(x)$	0	0,01	0,05	0,10	0,23	0,50	0,79	0,91	1,00	1,00

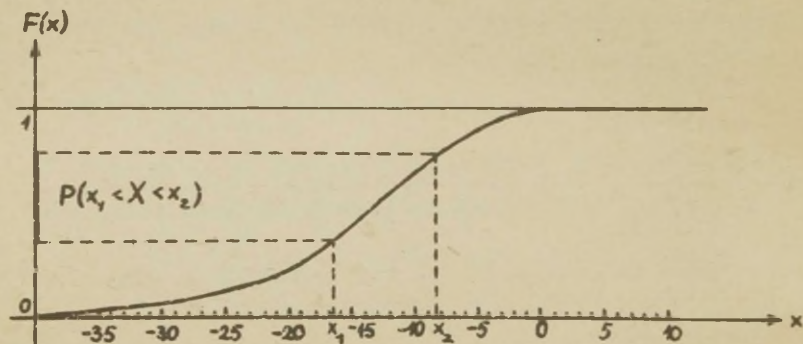
Graafikuna saaksime seda tabelit esitada nii, nagu näeme joonisel 3.

³ Kui pole karta segadust, siis loobume jaotusfunktsiooni tähistamisel juhuslikku suurust X märkivast indeksist ja kirjutame lihtsalt $F(x)$.



Joonis 3.

Et aga juhuslik suurus on tegelikult pidev, peaks graafikul olema pidev kõver (s.t. selline, mis muutub pidevalt, hüpeteta; pidevuss kohta vt. [1]). Asendades tabeli 4 tihedamaga (kus on näiteks x väärtusi vaadeldud iga kraadi või koguni kraadi kümnendiku tagant), saaksime graafiku, millel on murdjoon hoopis väiksemate hüpetega, s.o. hoopiski lähedasem pidevale kõverale (vt. joon.4).



Joonis 4.

Kujutledes aga, et me kõigile x väärtustele vastavaid funktsiooni väärtusi teaksime (tabel on lõpmata tihe), saaksime joonestada pideva kõvera, mis kirjeldab pideva juhusliku suuruse jaotusfunktsiooni.⁴

Sageli huvitab meid, kui suur on tõenäosus selleks, et juhusliku suuruse väärtused paikneksid mingi kahe arvu x_1 ja x_2 vahel, s.t.

$$P(x_1 < X < x_2).$$

Näiteks, kui suur on tõenäosus selleks, et uusaastaööl on temperatuur -10° ja -20° vahel? Tabelist 4 saaksime leida sellele küsimusele vastuse järgmise arutelu tulemusena:

Temperatuur peab olema väiksem kui -10° . Sellise sündmuse esinemise tõenäosus on 0,5. Kuid temperatuur ei tohi olla alla -20° ; niisugune temperatuur esineb aga tõenäosusega 0,1. Järelikult püsib temperatuur vahemikus -10° kuni -20° tõenäosusega $0,5 - 0,1 = 0,4$.

Sama mõttekäiku sümbolites esitades saaksime valemi

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) \quad (3)$$

juhusliku suuruse X väärtuste vahemikku (x_1, x_2) sattumise tõenäosuse leidmiseks. Muide, suuruse $F(x_2) - F(x_1)$ võime leida ka graafiliselt (vt. joonis 4).

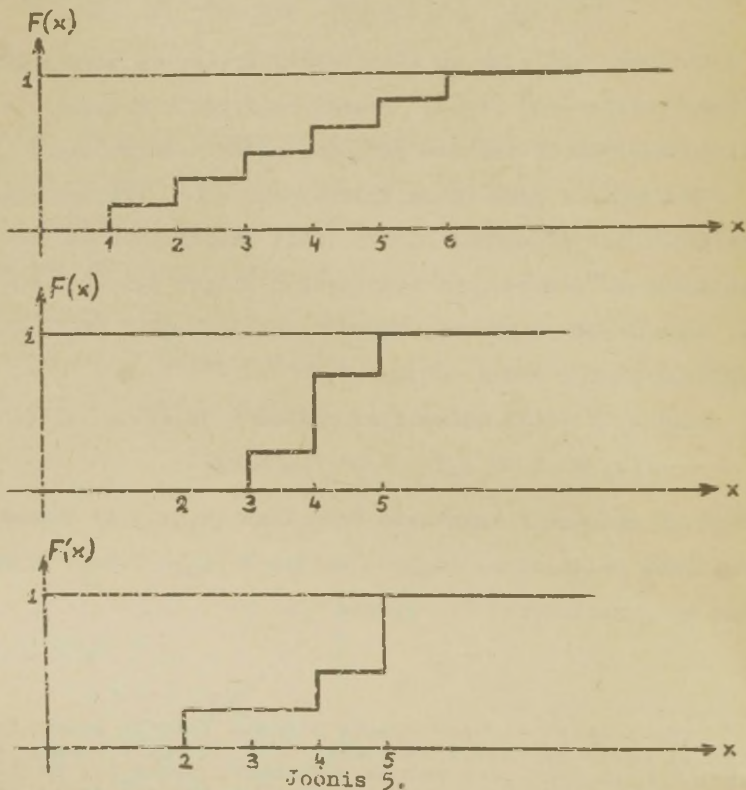
⁴ Praktiliselt ei ole lõpmata tihedat tabelit loomulikult võimalik koostada ega ka kasutada. Küll on aga mõningal juhul võimalik $F(x)$ väärtus arvutada suvalise x jaoks (vt. näiteks ühtlane jaotus paragrahv 14 käesolevas peatükis). Sageli joonestatakse $F(x)$ kirjeldamiseks pidev kõver n.-ö. silma järgi, kasutades suuremat või väiksemat hulka jaotuse teadsolevaid väärtusi.

§ 6. Diskreetse juhusliku suuruse jaotusfunktsioon.

Diskreetse juhusliku suuruse jaoks võib defineerida jaotusfunktsiooni, kasutades sama seost (2) mis pideva juhusliku suuruse jaotusfunktsiooni puhulgi:

$$F(x) = F(X < x).$$

Diskreetse juhusliku suuruse jaotusfunktsioon on aga alati treppfunktsioon (vt. joon. 5).



Joonis 5.

Siin vastab esimene jaotusfunktsiooni graafik tabeliga 2 esitatud juhuslikule suurusele, teine ja kolmas aga tabelitega 9 ja 10 (vt. § 10) antud juhuslikele suurustele.

Jaotusfunktsiooni võime välja kirjutada ka diskreetse juhusliku suuruse korral mistahes argumendi x jaoks: näiteks tabelile 2 vastava juhusliku suuruse korral $F_X(1,1) = F_X(1,95) = F_X(2) = 1/6$, aga $F_X(2,001) = F_X(2,5) = F_X(3) = 1/3$ jne.

Valemiga (3) analoogiline valem on aga diskreetse juhusliku suuruse puhul pisut erinev:

$$P(x_1 \leq X < x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1). \quad (4)$$

Tõepoolest, kuna diskreetse jaotuse korral iga üksikväärtuse esinemise tõenäosus erineb nullist, tuleb arvestada ka vahemiku otspunktide tõenäosusi. Kokkuleppeliselt loetakse siis vahemiku vasakpoolne otspunkt vahemikku kuuluvaks, parempoolne aga mittekuuluvaks, s.t. vaadeldakse nn. poollõiku $[x_1, x_2)$.⁵

Näide 1.

Olgu antud diskreetne juhuslik suurus järgmise jaotustabeliga (vt. joonis 6).

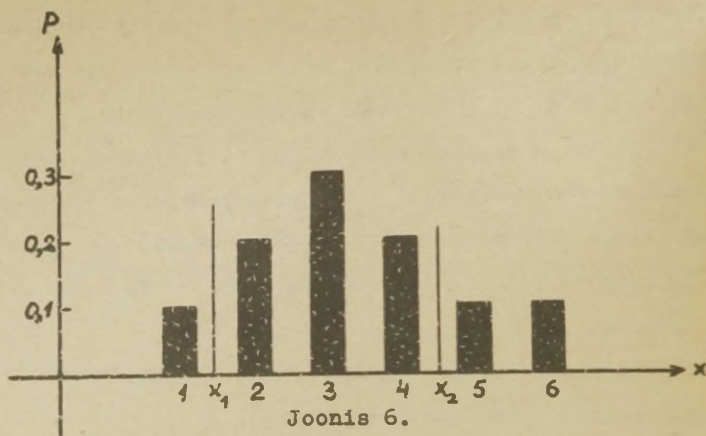
X	1	2	3	4	5	6
P	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1	0,1

Tabel 5.

⁵Eristame järgmisi punktihulki sirgel:
vahemik (a, b) , mis sisaldab kõiki punkte a ja b vahel, otspunkte kaasa arvamata: $(a < x < b)$;

lõik $[a, b]$, mis sisaldab kõiki punkte a ja b vahel, kaasa arvatud otspunktid: $(a \leq x \leq b)$;

poollõigud $[a, b)$ ja $(a, b]$, mis sisaldavad kõiki punkte a ja b vahel, kusjuures esimesel juhul on kaasa arvatud vasakpoolne otspunkt a ($a \leq x < b$), teisel juhul parempoolne otspunkt b ($a < x \leq b$).



Et X -l on ainult täisarvulisi väärtusi, siis muutub jaotusfunktsioon $F(x)$ ainult nendes punktides, mujal on aga konstantne. Esitamegi jaotusfunktsiooni niisuguse tabelina, kus ülemises reas on märgitud piirkonnad, milles jaotusfunktsiooni väärtused on konstantsed (nendeks on poollõigud, mille parempoolne otspunkt on kaasa arvatud, vasakpoolne aga mitte). Tabeli alumises reas paiknevad aga vastavad jaotusfunktsiooni väärtused.

Tabel 6.

x	$(-\infty, 1]$	$(1, 2]$	$(2, 3]$	$(3, 4]$	$(4, 5]$	$(5, 6]$	$(6, \infty)$
$F(x)$	0	0,1	0,3	0,6	0,8	0,9	1,0

Jaotusfunktsiooni väärtused saame jaotuse väärtuste e. tõenäosuste (vt. tabel 5) summeerimisel. Siit tabelist saame kõigi x väärtuste jaoks leida jaotusfunktsiooni väärtused. Näiteks olgu tarvis leida jaotusfunktsiooni väärtus kohal 0,3, s.o.

$$F(0,3).$$

Kuna arv 0,3 kuulub poollõiku $(-\infty, 1]$, siis saame tabelist 6 tulemuseks $F(0,3) = 0$. Samal viisil võime leida

$$F(2,1) = 0,3;$$

$$F(2,0) = 0,1 \text{ jne.}$$

Nihästi tabeli 5 kui ka tabeli 6 abil saame arvutada juhusliku suuruse X mistahes poollõiku sattumise tõenäosuse.

Leiame näiteks

$$P(2,5 \leq X < 5,5).$$

Tabelit 5 kasutades saame

$$P(2,5 \leq X < 5,5) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) = 0,3 + 0,2 + 0,1 = 0,6.$$

Tabelit 6 kasutades leiame sama tõenäosuse

$$P(2,5 \leq X < 5,5) = F(5,5) - F(2,5) = 0,9 - 0,3 = 0,6.$$

Tabelit 6 on hõlpsam kasutada eriti sel juhul, kui uuritav vahemik on pikk ning sisaldab palju tabeli 5 jaotisi.

Võrreldes diskreetse juhusliku suuruse jaotuse graafikut (joonis 6) ning valemit (4) näeme, et valemit (4) arvutatav tõenäosus võrdub graafikul punktide x_1 ja x_2 vahelisse ossa jäävate tulpade pikkuste summaga.

Siinjuures paneme tähele, et erineva pikkusega vahemikudesse juhusliku suuruse väärtuste sattumise tõenäosus ei sõltu sugugi mitte üksnes vahemiku pikkusest, vaid ka jaotusest - sellest, kui suured on vahemiku üksikutele punktidele x_i vastavad tõenäosused p_i , ehk sellest, kui kiiresti kasvab jaotusfunktsioon selles piirkonnas.

§ 7. Tõenäosuse tihedus.

Seda asjaolu, et diskreetse juhusliku suuruse jaotus määrab jaotusfunktsiooni kasvukiiruse (ning vastupidi), saame kasutada selleks, et defineerida ka pidevale juhuslikule suurusele jaotusega sarnane karakteristik - tõenäosuse tihedus.

Funktsiooni $F(x)$ muutumiskiirust iseloomustab tema tuletis $\frac{d}{dx} F(x)$. Pidevateks loeme oma kursuses ainult selliseid juhuslikke suurusi X , mille jaotusfunktsioon $F(x)$ on pidev ning millel eksisteerib ka tuletis

$$f_X(x) = f(x) = \frac{d}{dx} F(x). \quad (5)$$

Funktsiooni $f_X(x)$ nimetatakse juhusliku suuruse X tõenäosuse tiheduseks.⁶ Seosest (5) ilmneb ühtlasi, et jaotusfunktsioon $F(x)$ on tõenäosuse tiheduse integraaliks:

$$F(a) = \int_{-\infty}^a f(x) dx,$$

see aga tähendab ühtlasi, et vahe $F(x_2) - F(x_1)$, mis esines valemis (3) ja (4), on arvutatav integreerimise teel:

$$F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx.$$

Seega saame nii valemi (3) kui ka valemi (4) esitada kujul:

$$P(x_1 < X < x_2) = P(x_1 \leq X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx. \quad (6)$$

Et määratud integraali väärtus võrdub integrandis oleva funktsiooni graafiku aluse pinnaosa pindalaga, saame siit ka geomeetrilise tõlgenduse tõenäosuse tihedusele. Tõenäosus selleks, et juhuslik suurus X omandab mingi väärtuse vahemikust (x_1, x_2) , võrdub tõenäosuse tiheduse graafiku aluse pinnaosa pindalaga, mida piiravad x -telg ning sellega ristuvad sirged läbi punktide x_1 ja x_2 (vt. joonis 7).

⁶ Vt. allviide 3.

Intuitiivselt võiksime tõenäosuse tihedust kujutleda jaotuse piirväärtusena juhusliku suuruse erinevate väärtuste arvu lõpmatul suurenemisel ja mastaabi muutmisel.

On selge, et juhusliku suuruse erinevate väärtuste x_1, \dots, x_n arvu n suurenemisel väheneb iga üksikväärtuse (välja arvatud võib-olla ainult lõplik hulk väärtusi) esinemise tõenäosus, sest nende summa jääb konstantseks:

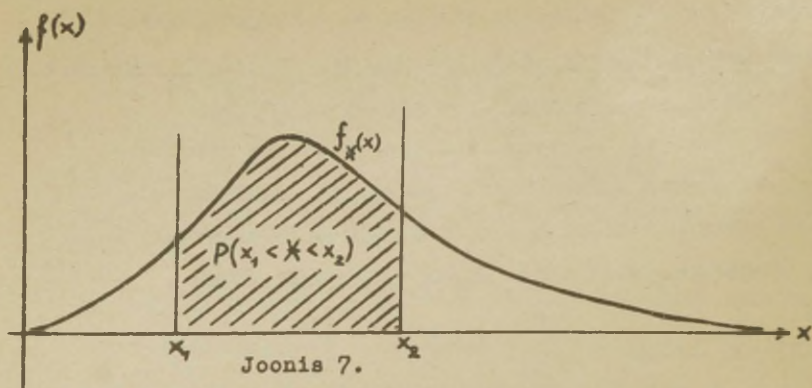
$$\sum_{i=1}^n P(x_i) = 1.$$

Kui n saab lõpmata suureks, siis läheneb (peaaegu) iga üksikväärtuse tõenäosus nullile. Sellisel juhul on aga sobivam tõenäosuste asemel kasutada suhtelisi tõenäosusi $\frac{P(x_i)}{x_i}$, kus $x_i = x_{i+1} - x_i$ on juhusliku suuruse kahe naaberväärtuse vaheline kaugus. Väga paljudel juhtudel läheneb selline suhe n kasvades lõplikule nullist erinevale piirväärtusele

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(x_i)}{\Delta x_i} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{F(x_{i+1}) - F(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = F'(x_i).$$

(Vt. näiteks jooniseid 11-13, kus $x_i = 1/\sqrt{n}$). Saadud piirväärtust (mis osutub jaotusfunktsiooni $F(x)$ tauletiseks punktis x_i), nimetamegi juhusliku suuruse tõenäosuse tiheduseks (ka tihedusfunktsiooniks) punktis x_i ning tähistame sümboliga $f(x_i)$.

Paneme tähele analoogiat joonisel 6 kujutatud juhusliku suurusega, kus vahemikku sattunud tõenäosus määrati jaotuste summuna; sobiva mastaabi korral võiks ka selle tõenäosuse pindalana esitada.



Vaatleme järgnevalt tõenäosuse tiheduse omadusi.

1^o Tõenäosuse tihedus on alati mittenegatiivne (s.t. positiivne või võrdub nulliga) - tema graafik paikneb alati ülalpool x-telge:

$$f_X(x) \geq 0.$$

2^o Tõenäosuse tiheduse graafiku alune pindala võrdub alati ühe ühikuga:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1.$$

§ 8. Juhusliku suuruse kvantiliid.

Pideva juhusliku suuruse iseloomustamiseks kasutatakse tihti tema kvantiile.

Olgu p reaalarv, $0 < p < 1$. Juhusliku suuruse X p -kvantiiliks nimetatakse niisugust selle juhusliku suuruse väärtust x_p , millest väiksemaid väärtusi omandab juhuslik suurus X tõenäosusega p :

$$P(X < x_p) = p. \quad (8)$$

Siis on juhuslik suurus X väärtusest x_p suurem tõenäosusega $1-p$:

$$P(X > x_p) = 1-p,$$

sest väärtuse x_p omandab juhuslik suurus X pidevuse tõttu tõenäosusega 0:

$$P(X = x_p) = 0.$$

Tähtsaimaks juhusliku suuruse kvantiilik on mediaan, s.o. $1/2$ -kvantiil. Mediaaniks on seega punkt x_{med} , mis rahuldab tingimusi

$$P(X < x_{med}) = P(X > x_{med}) = \frac{1}{2}. \quad (9)$$

Niisiis, mediaaniks on selline punkt, millest juhusliku suuruse väärtused võrdse tõenäosusega langevad vasakule ja paremale.

Pideva juhusliku suuruse X alumiseks ja ülemiseks kvantiilik nimetatakse vastavalt punkte q_a ja $q_{\bar{u}}$, mille puhul kehtivad võrratused

$$P(X < q_a) = \frac{1}{4},$$

$$P(X > q_{\bar{u}}) = \frac{1}{4}.$$

Ülemiseks ja alumiseks sekstiilik nimetatakse punkte s_a ja $s_{\bar{u}}$, mille puhul kehtivad võrratused

$$P(X < s_a) = \frac{1}{6},$$

$$P(X > s_{\bar{u}}) = \frac{1}{6}.$$

§ 9. J u h u s l i k u s u u r u s e k e s k - v ä ä r t u s.

Kvantiilid on juhusliku suuruse arvulisteks karakteristikuteks. Sageli kasutatakse juhusliku suuruse iseloomustami-

seks tema jaotuse⁷ asemel paiknemise karakteristikuid. Üks selliseid on mediaan. Kõige sagedamini iseloomustatakse juhusliku suuruse paiknemist tema keskvaartuse EX (vahel ka MX) ehk m abil.

1. Diskreetse juhusliku suuruse keskvaartus.

Diskreetse juhusliku suuruse jaotuse keskvaartus arvutatakse järgmise valemi abil:

$$EX = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i. \quad (10)$$

Kui juhuslikul suurusel X on lõpmata palju väärtusi, siis tuleb leida lõpmata paljude liidetavate (nn. arvrea) summa⁸

$$EX = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i. \quad (11)$$

⁷ Kuigi pideva juhusliku suuruse iseloomustamisel praktikas tavaliselt kasutatakse tõenäosuse tihedust (ja jaotusfunktsiooni), on põhimõtteliselt ka pideva juhusliku suuruse jaoks jaotus defineeritud. Ainult et siin vaadeldakse mitte üksikväärtuste esinemise tõenäosusi (nagu diskreetse juhusliku suuruse puhul), vaid teatavatesse hulkadesse (näiteks vahemikku) kuuluvate väärtuste esinemise tõenäosusi. Seda märkust on tarvis silmas pidada siis, kui räägitakse üldiselt juhuslike suuruste esitamise jaotuste kaudu jne.-sel korral võidakse mõelda niihästi diskreetseid kui ka pidevaid juhuslikke suurusi.

⁸ Sellise lõpmatu arvrea summa jaoks on mitu võimalust (vt. näit. [2]).

Lõpmatu rea summa arvutamisel leitakse kõigepealt lõp-liku hulga liidetavate summad ehk nn. osasummad

$$\begin{aligned} S_1 &= x_1 p_1, \\ S_2 &= x_1 p_1 + x_2 p_2, \\ &\dots\dots\dots \\ S_k &= x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_k p_k. \end{aligned}$$

Ilmselt kehtib siin seos:

$$S_k = S_{k-1} + x_k p_k.$$

Kui osasummade jada

$$S_1, S_2, \dots, S_k, \dots$$

Kui arvrida (11) koondub absoluutselt, siis on juhuslikul suurusel X keskvärtus olemas. Vastasel korral see puudub.

Praktilises statistikas kohtume enamasti suurustega, millel keskvärtus on olemas. Kuid see pole nii päris alati. Leidub juhuslikke suurusi, millel keskvärtus puudub.

Arvutades ülaltoodud valemi järgi keskvärtuse näeme, et ta ei tarvitse olla täisarv isegi siis, kui juhuslik suurus ise omandab ainult täisarvulisi väärtusi (vt. näide 2).

Samuti võime saada keskmiseks laste arvuks perekonnas 1,95 jne., keskmiseks põrsaste arvuks emise kohta 12,43 jne.

2. Pideva juhusliku suuruse keskvärtus.

Pideva juhusliku suuruse keskvärtus arvutatakse tema tõenäosuse tiheduse kaudu. Selleks kasutame valemit

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf_x(x)dx \quad (12)$$

(muide, ka see integraal ei tarvitse alati eksisteerida;

siin on põhimõtteliselt samad võimalused kui arvrea summa

$\frac{S}{n}$ (järg)
läheneb mingile kindlale piirväärtusele S
 $S - S_k,$

(s.t. vahe saab kuidas väikeseks, kui valida indeks k küllalt suur), siis ütleme, et arvrea summaks on S .

Kui osasummade jada läheneb piirväärtusele S ka siis, kui liidetavate järjekord on ükskõik millisel viisil muudetud, siis ütleme, et rida koondub absoluutselt.

Osasummad võivad ka järjest suurenedä või väheneda, ilma et toimuks lähenemist ühelegi lõplikule arvule. Siis kirjutatakse

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \infty$$

või

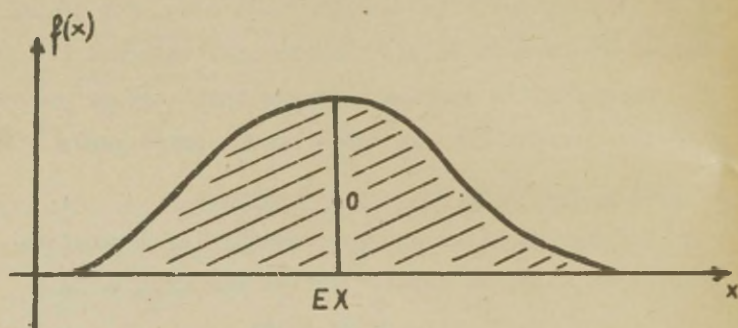
$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = -\infty$$

ning öeldakse, et arvreal puudub lõplik summa.

On aga ka võimalus, et mingit lõplikku ega lõpmatut arvu s , millele osasummad läheneksid, ei ole. Sel juhul öeldakse, et rida hajub.

puhul. Kui integraal ei eksisteeri, siis puudub juhuslikul suurusel keskvärtus).

Pideva juhusliku suuruse keskvärtuse mõiste illustreerimiseks kujutleme ühtlase paksusega metallplaati, mis on piiratud tõeäosuse tiheduse kõveraga ja x -teljega (vt. joonis 8). Kirjeldatud juhusliku suuruse keskvärtuseks on selle



Joonis 8.

plaadi raskuskeset O läbiva x -telje ristsirge ja x -telje löikepunkt. Paigutades plaadi punkte O ja EX läbivale varvale, jääks plaat sellele varvale toetudes tasakaaluasendisse. Sama kujutlust võiksime rakendada ka diskreetse juhusliku suuruse korral, vaadeldes tema jaotuse tulpgraafikut (vt. näiteks jooniseid 1, 2 ja 6).

Siit järeldub ühtlasi, et juhusliku suuruse keskvärtus on alati suurem selle juhusliku suuruse minimaalsest võimalikust väärtusest ning väiksem tema maksimaalsest võimalikust väärtusest, seega alati, kui

$$a \leq X \leq b \quad (a \neq b),$$

siis $a < EX < b$.

3. Keskväertuse omadusi.

Keskväertusel on ka mõned edaspidiseks olulised omadused, mida siin märgime:

1° Juhuslike suuruste summa keskväertus võrdub nende juhuslike suuruste keskväertuste summaga

$$E(X+Y) = EX + EY.$$

2° Juhusliku suuruse ja konstandi korrutise keskväertus võrdub konstandi ja selle juhusliku suuruse keskväertuse korrutisega

$$EcX = cEX.$$

3° Konstandi keskväertus võrdub sellesama konstandiga

$$Ec = c.$$

4° Kui juhuslik suurus X on suurem kui juhuslik suurus Y , siis on ka X keskväertus suurem kui Y keskväertus

$$X > Y \rightarrow EX > EY.$$

Märgime, et juhuslikku suurust X nimetatakse juhuslikust suurusest Y suuremaks siis, kui $P(X > Y) = 1$, s.t. et kindlasti (või peaaegu kindlasti, vt. [3]) esineb sündmus $X > Y$.

4. Näiteid.

Näide 2.

Olgu juhusliku suuruse X väärtuseks täringuviskel saadav silmade arv. Selle juhusliku suuruse jaotust kirjeldab tabel 2. Keskväertuseks saame

$$EX = 1/6 (1+2+3+4+5+6) = 3\frac{1}{2}.$$

Näide 3.

Arvutame näites 1 toodud juhusliku suuruse keskvaartuse, kasutades selleks valemit (10)

$$EX = 0,1 \cdot 1 + 0,2 \cdot 2 + 0,3 \cdot 3 + 0,2 \cdot 4 + 0,1 \cdot 5 + 0,1 \cdot 6 = 3,3.$$

Näide 4.

Leiame binomiaaljaotusega $B(n, p)$ juhusliku suuruse keskvaartuse. Selleks kasutame valemit (10)

$$EX = \sum_{k=0}^n k \cdot P(X=k).$$

Valemist (1) saame tõenäosuse $P(X=k)$ avaldise

$$EX = \sum_{k=0}^n k C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Kasutame siin asjaolu, et esimene liige summas võrdub nulliga ($k=0$), ning avaldame C_n^k faktoriaalide kaudu

$$EX = \sum_{k=1}^n \frac{k \cdot n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^n \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k q^{n-k}.$$

Tähistame $k-1=h$, $n-1=m$. Siis $k=h+1$, $n-k=n-1-h=m-h$, $n!=n \cdot m!$, ning kui $k=1$, siis $h=0$, kui $k=n$, siis $h=m$. Seda kasutades saame EX -i avaldise ümber kirjutada

$$EX = \sum_{h=0}^m \frac{n \cdot m!}{h!(m-h)!} \cdot p^h \cdot q^{m-h} = p \cdot n \sum_{h=0}^m \frac{m!}{h!(m-h)!} \cdot p^h q^{m-h}$$

Kasutades nüüd binoomvalemit (vt. [3])

$$\sum_{h=0}^m C_m^h p^h q^{m-h} = 1,$$

saame: $EX = p.n.1 = pn.$

* Näide 5.

Olgu juhuslikul suurusel X lõpmata palju väärtusi, kusjuures jaotus olgu esitatud tabeliga 7

Tabel 7.

x_1	1	2	4	8	...	2^{i-1}	...
$P(x_1)$	$3/4$	$3/16$	$3/64$	$3/256$		$3/4^i$...

Valemiga võiksime sama jaotuse esitada järgmiselt:

$$P(X = 2^{i-1}) = \frac{3}{4^i}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Keskväertuse arvutamise valem (11) järgi

$$\begin{aligned} EX &= 1 \cdot \frac{3}{4} + 2 \cdot \frac{3}{16} + 4 \cdot \frac{3}{64} + \dots + 2^{i-1} \cdot \frac{3}{4^i} + \dots = 3 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \right) = 3 \cdot \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{2}} = \\ &= \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Kasutasime siin asjaolu, et sulgudes olev rida on lõpmatu geomeetriline progressioon, mille esimene liige $a_1 = \frac{1}{4}$, tegur $q = \frac{1}{2}$, lõpmatu geomeetrilise progressiooni summa valemiks (kui $q < 1$) on $S = \frac{a_1}{1-q}$.

* Näide 6.

Olgu tabeliga 1 esitatud juhuslikul suurusel järgmine jaotus (vt. tabel 8):

Tabel 8.

x_1	1	2	4	8	...	2^{i-1}	...
$P(x_1)$	$1/2$	$1/4$	$1/8$	$1/16$...	2^{-i}	...

Selliseks juhuslikuks suuruseks on näiteks võidusumma järgmise kokkuleppega mündiviskemängus:

kui vapipool tuleb esmakordselt peale 1. viskel, saab viskaja 1 kop.,

kui vapipool tuleb esmakordselt peale 2. viskel, saab viskaja 2 kop.,

.....
kui vapipool tuleb esmakordselt peale i -ndal viskel, saab viskaja 2^{i-1} kop.

Jaotus B on valemiga esitatav järgmiselt:

$$P(X = 2^{i-1}) = \frac{1}{2^i}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (13)$$

Arvutame selle juhusliku suuruse X keskvaartuse

$$\begin{aligned} EX &= 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \dots + 2^{i-1} \cdot \frac{1}{2^i} + \dots = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots = \end{aligned}$$

Järelikult valemiga (13) esitatud juhuslikul suurusel ei eksisteeri keskvaartust.

* —
Näide 7.

*
Vaatleme pidevat juhuslikku suurust, mille tõenäosuse tihedus on antud valemiga

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b, \\ 0, & x > b, \end{cases} \quad (14)$$

kus a ja b ($a < b$) on suvalised reaalarvud. Niisugust jaotust nimetatakse ühtlaseks jaotuseks (vt. § 14). Arvutame keskvaartuse:

$$\begin{aligned} EX &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \\ &= \frac{b+a}{2}. \end{aligned}$$

Järelikult on ühtlase jaotuse keskvaartuseks tema ots-
punktide aritmeetiline keskmine.

§ 10. Juhusliku suuruse hajuvuse karakteristikud.

Üksnes keskväärtuse teadmine annab meile juhusliku suuruse uurimiseks siiski üsna vähe andmeid. Võrdleme näiteks kahte klassi, kus matemaatika hinnete jaotused on antud järgmiste tabelitega:

Tabel 9.

Y	1	2	3	4	5
	0	0	1/4	1/2	1/4

ja

Tabel 10.

Z	1	2	3	4	5
	0	1/4	0	1/4	1/2

Lihtne arvutus näitab, et hinnete keskmine on mõlemas klassis 4, kuid klassid on põhjalikult erinevad. Esimesel juhul võime kõnelda suhteliselt ühtlasest tasemest (statistiliselt ütleksime - hinnete hajuvus on väike), teisel juhul väga ebaühtlasest tasemest (hinnete hajuvus on suur); nende juhuslike suuruste jaotusfunktsioonid on kujutatud joonisel 5, 2 ja 3. graafikul.

Väga paljude probleemide puhul on otsustava tähtsusega juhusliku suuruse hajuvus; seetõttu on ka statistikas tarvis kasutada sobivaid karakteristikuid selle näitamiseks.

1. Dispersioon.

Tuntuimaks hajuvuse karakteristikuks on dispersioon, mis defineeritakse kui juhusliku suuruse X hälbe

$$X - EX$$

ruudu keskväärtus

$$DX = E(X - EX)^2. \quad (15)$$

Seda suurust nimetatakse ka juhusliku suuruse X ruutkeskmiseks hälbeks. Seega on diskreetse juhusliku suuruse dispersiooni arvutamiseks tarvis kõigepealt arvutada keskväärtus EX , siis leida kõik hälbed $x_1 - EX$, need ruutu tõsta ja lõpuks leida summa

$$DX = \sum_{i=1}^n p_i(x_i - EX)^2. \quad (16)$$

*

Lõpmata paljude väärtustega diskreetse juhusliku suuruse X dispersioon avaldub lõpmatu rea summuna

$$DX = \sum_{i=1}^{\infty} p_i(x_i - EX)^2,$$

mis võib mõningate juhuslike suuruste puhul saada lõpmata suureks. Sel juhul ütleme, et juhuslikul suurusel X puudub dispersioon. Pideva juhusliku suuruse dispersioon arvutatakse integreerimise teel:

$$DX = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(x - EX)^2 dx, \quad (17)$$

kusjuures on võimalik, et selline integraal osutub lõpmatuks, siis pideval juhuslikul suurusel X ei eksisteeri dispersiooni. Tuleb aga siiski märkida, et enamusel statistikas kasutatavatest juhuslikest suurustest dispersioon eksisteerib.

— * —

Tegelikuks arvutamiseks on aga hoopiski sobivam kasu-

tada valemiga (16) samaväärset (vt. näide 13) valemist

$$DX = \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - (\bar{KX})^2. \quad (18)$$

Lõpmata paljude väärtustega diskreetse juhusliku suuruse dispersioon arvutatakse valemist

$$DX = \sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i^2 - (\bar{KX})^2. \quad (19)$$

2. Dispersiooni omadusi.

Dispersioonil on mõningaid olulisi omadusi, mida on siin otstarbekas esitada:

1° Juhusliku suuruse dispersioon on alati positiivne suurus

$$DX > 0.$$

2° Konstandi dispersioon on 0

$$Dc = 0.$$

3° Dispersioon ei muutu, kui juhusliku suuruse kõigile väärtustele liidame (või neist lahutame) sama konstandi

$$D(X+a) = D(X-b) = DX.$$

4° Konstandi ja juhusliku suuruse korrutise dispersioon võrdub selle konstandi ruudu ning vaadeldava juhusliku suuruse dispersiooni korrutisega

$$D(cX) = c^2 DX.$$

3. Standardhälve.

Sageli kasutatakse juhusliku suuruse hajuvuse kirjeldamiseks ka ruutjuurt selle juhusliku suuruse dispersioonist - standardhälvet. Standardhälvet tähistatakse sageli

sümboliga σ (kreeka täht sigma), seega

$$\sigma = \sqrt{DX}, \quad (20)$$

ning

$$DX = \sigma^2.$$

Standardhälve, samuti kui dispersioongi, on alati positiivne.

4. Keskmine hälve.

Kolmandaks suhteliselt sageli kasutatavaks hajuvuse näitajaks on keskmine hälve ehk absoluutne hälve, mis arvutatakse kui juhusliku suuruse hälbe absoluutväärtuse keskväärus

$$k = E|X - EX|. \quad (21)$$

Keskmise hälbe leidmiseks saab diskreetsete juhuslike suuruste puhul kasutada valemeid

$$k = \sum_{i=1}^n p_i |x_i - EX| \quad (22)$$

või

$$k = \sum_{i=1}^{\infty} p_i |x_i - EX|; \quad (23)$$

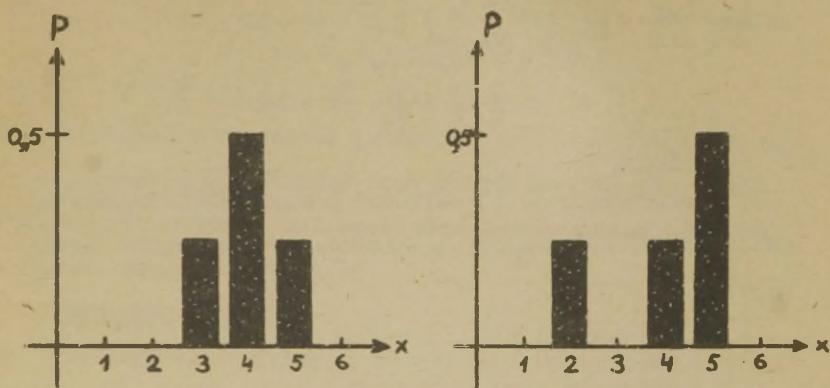
pideva juhusliku suuruse korral aga

$$k = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) |x - EX| dx.$$

Alati, kui juhuslikul suurusel eksisteerib keskväärus (aga see on eelduseks, et saaks üldse rääkida hälvetest!), on tal olemas ka keskmine hälve, kuigi võib juhtuda, et dispersiooni ja seega ka standardhälvet ei ole.

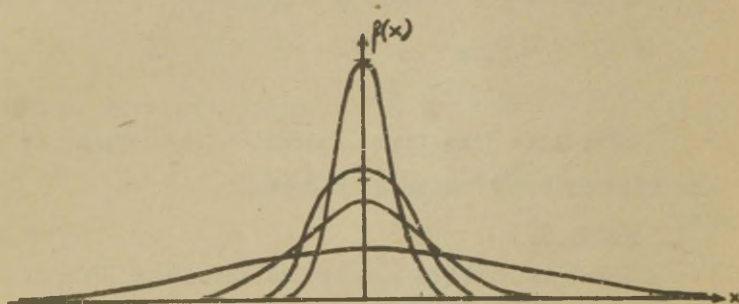
Sellegipärast kasutatakse keskmist hälvet standardhálbega võrreldes suhteliselt harva. Selle põhjuseks on, et tal puuduvad mitmed dispersiooni olulised omadused, millega hiljem tutvume.

Graafikul on lihtne vahet teha väikese ja suure hajuvusega juhuslike suuruste vahel (vt. joonised 9 ja 10).



Joonis 9.

Väikese ja suure hajuvusega diskreetsed juhuslikud suurused.



Joonis 10.

Mitmesuguse standardhälbega (hajuvusega) pidevad juhuslikud suurused.

5. Näiteid.

Näide 8.

Leiame täringuviske tulemuse dispersiooni (vt. tabel 2). Selleks rakendame valemit (18) ja näites 2 leitud keskvaartust $EX = 3\frac{1}{2}$.

$$DX = \frac{1}{6} (1+4+9+16+25+36) - (3\frac{1}{2})^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12} \approx 2,9.$$

Valemitest (20) ja (22) saame ka standardhälbe ja keskmise hälbe:

$$\begin{aligned}\sigma &= \sqrt{2,9} = 1,7, \\ k &= \frac{2}{6} (\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2}) = 1\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Näide 9.

Tabelitega 9 ja 10 esitatud juhuslikele suurustele (vt. joon. 9) saame hajuvuse karakteristikud leida järgnevalt:

$$1) \quad DY = \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{2},$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0,7,$$

$$k = \frac{1}{2}.$$

$$2) \quad DZ = \frac{1}{4} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 1 = 1\frac{1}{2},$$

$$\sigma \approx 1,22,$$

$$k = \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 1 = 1.$$

Võrreldes juhuslike suurusi Y ja Z näeme, et viimasel on kõik hajuvuse näitajad suuremad.

Näide 10.

Arvutame tabelis 7 esitatud juhusliku suuruse hajuvuse karakteristikud, kasutades selleks näites 5 leitud keskvaartust $EX = 1\frac{1}{2}$. Rakendame valemit (19)

$$\begin{aligned}DX &= (\frac{3}{4} \cdot 1^2 + \frac{3}{16} \cdot 2^2 + \frac{3}{64} \cdot 4^2 + \dots + \frac{3}{4^i} (2^{i-1})^2 + \dots - (1\frac{1}{2})^2) = \\ &= \frac{3}{4} (1 + 1 + 1 + \dots) - (1\frac{1}{2})^2 = \infty.\end{aligned}$$

Järelikult puudub uuritaval juhuslikul suurusel dispersioon ning samuti standardhälve. Absoluutse hälbe võime leida valemist (23)

$$\begin{aligned}
 k &= \frac{3}{4} \left| 1 - \frac{3}{2} \right| + \frac{3}{16} \left| 2 - \frac{3}{2} \right| + \frac{3}{64} \left| 4 - \frac{3}{2} \right| + \dots = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} + 3 \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \right) - \frac{3}{2} \left(\frac{3}{16} + \frac{3}{64} + \dots \right) \\
 &= \frac{3}{8} + \frac{3}{4} - \frac{3}{8} = \frac{3}{4}.
 \end{aligned}$$

Ka näites 6 vaadeldud juhuslikul suurusel (vt. tabel 8) ei eksisteeri dispersiooni, sest puudub keskväertus. See-tõttu ei ole mõtet ka hälvetel. Sellel juhuslikul suurusel ei ole ka absoluutset hälvet.

Näide 11.

Arvutame müüd ühtlase jaotusega juhusliku suuruse (vt. valem (14)) dispersiooni. Et tegemist on pideva juhusliku suurusel, tuleks kasutada valemit (17). Märgime aga, et valemi (17) võime teisendada ka kujule

$$DX = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)x^2 dx - (EX)^2 \quad (24)$$

(vt. näide 13). Arvutame suuruse

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)x^2 dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx = \frac{1}{b-a} \left. \frac{x^3}{3} \right|_a^b = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}.$$

Näite 7 põhjal

$$EX = \frac{a+b}{2}, \quad (EX)^2 = \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4}.$$

Nüüd leiamegi dispersiooni ja standardhälbe

$$DX = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12};$$

$$\sigma = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Standardhälbe leidmisel arvestasime, et $\sigma > 0$ ja $b > a$.

Näide 12.

Leiame binomiaaljaotusega juhusliku suuruse dispersiooni. Selleks kasutame valemit (18) ning näite 4 tulemust

$$PX = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k} k^2 - (np)^2.$$

Arvutame saadud summa

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k} k^2 &= \sum_{k=1}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} k(k-1+1) = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{n!k(k-1)}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} + \sum_{k=1}^n \frac{n!k}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \end{aligned}$$

Teise liidetava leidsime näites 4. Esimese liidetava leidmisel teeme näites 4 tehtutega sarnaseid teisendusi

$$\sum_{k=1}^n \frac{n!k(k-1)}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} = \sum_{k=2}^n \frac{n!k(k-1)}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}.$$

Tähistame $n-2=n'$, $k-2=k'$; siis $n-k=n'-k'$;

kui $k=2$, siis $k'=0$; kui $k=n$, siis $k'=n'$;

saame seega

$$\sum_{k=2}^n \frac{n!k(k-1)}{k!(n-k)!} = \sum_{k'=0}^{n'} \frac{n(n-1)n'!}{k'!(n-k')!} p^2 \cdot p^{k'} \cdot q^{n'-k'} = n(n-1)p^2.$$

Kokkuvõttes:

$$\sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k} k^2 = n(n-1)p^2 + np,$$

ning

$$DX = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = -np^2 + np = npq.$$

Näide 13.

Tõestame valemite (16) ja (18) ning (17) ja (24) samaväärsuse. Selleks teisendame avaldist (16):

$$\begin{aligned}
 DX &= \sum_{i=1}^n p_i(x_i - EX)^2 = \sum_{i=1}^n p_i(x_i^2 - 2EX \cdot x_i + (EX)^2) = \\
 &= \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - 2EX \sum_{i=1}^n p_i x_i + (EX)^2 = \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - 2EX \cdot EX - \\
 &\quad - (EX)^2 = \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - (EX)^2.
 \end{aligned}$$

Kasutasime siin teisenduste juures diskreetse juhusliku suuruse keskvaartuse avaldist (10).

Et tõestada valemite (17) ja (24) samaväärsust, teisendame selleks pideva juhusliku suuruse dispersiooni avaldist

$$\begin{aligned}
 DX &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(x-EX)^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(x^2 - 2EXx + (EX)^2) dx = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)x^2 dx - 2EX \int_{-\infty}^{\infty} f(x)x dx + (EX)^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)x^2 dx - 2EX \cdot EX + (EX)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)x^2 dx - (EX)^2.
 \end{aligned}$$

Siin kasutasime pideva juhusliku suuruse keskvaartuse avaldist, asjaolu, et EX on konstant, mis ei sõltu x -st, ning seost (7).

§ 11. J u h u s l i k u s u u r u s e
m o m e n d i d.

Olulisteks arvulisteks karakteristikuteks juhuslikele suurustele on momendid ja tsentraalsed momendid. Juhusliku suuruse X k -järku momendiks m_k nimetatakse selle juhusliku

suuruse k -nda astme keskvaartust

$$m_k = EX^k.$$

Näeme, et keskvaartus on juhusliku suuruse 1. järku momendiks, dispersiooni võime aga avaldada 2. järku momendi kaudu

$$DX = m_2 - m_1^2.$$

Diskreetse juhusliku suuruse k -järku momendi saab arvutada valemist

$$m_k = \sum_k x_1^k p_1,$$

kus i omandab lõpliku või lõpmatu hulga väärtusi, pideva juhusliku suuruse k -järku momendi saame aga leida integreerimise teel

$$m_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx.$$

Kui juhuslikul suurusel on lõpmata palju väärtusi, ei tarvitse tal momente (alates mingist k väärtusest) eksisteerida.

Kui juhuslikust suurusel X on lahutatud tema keskvaartus EX , saame tsentreeritud juhusliku suuruse

$$X - EX.$$

Tsentreeritud juhusliku suuruse momente nimetatakse vaadeldava juhusliku suuruse tsentraalseteks momentideks ning tähistatakse sümboliga \bar{m}_k

$$\bar{m}_k = E(X - EX)^k.$$

Iga juhusliku suuruse korral

$$\bar{m}_1 = 0,$$

$$\bar{m}_2 = DX.$$

Momente saab kasutada ka jaotuse kuju uurimiseks.

Diskreetsset juhuslikku suurust nimetatakse sümmeetriliseks, kui iga arvu C korral kehtib seos

$$P(EX - C) = P(EX + C)$$

(see tõenäosus võib ka null olla).

Pidev juhuslik suurus on sümmeetriline siis, kui tema tõenäosuse tiheduse funktsioon $f(x)$ on sümmeetriline, kusjuures sümmeetriatelg läbib keskvaärtust EX .

Sümmeetrilise juhusliku suuruse puhul

$$\bar{m}_3 = 0.$$

Tsentraalsed momendid saame arvutada (vastavalt diskreetsete ja pidevate juhuslike suuruste puhul) valemitest

$$\bar{m}_k = \sum_1 p_i (x_i - EX)^k,$$

$$\bar{m}_k = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(x-EX)^k dx.$$

Tsentraalsetel momentidel on omadus, et nad ei sõltu nihkest, s.t. juhusliku suuruse X ja $X+a$ või $X-b$ tsentraalsed momendid on samad. Tõestame selle.

$$\text{Kuna } E(X+a) = EX+a, \quad E(X-b) = EX-b,$$

$$\text{siis } E(X+a-E(X+a))^k = E(X-b-E(X-b))^k = E(X-EX)^k.$$

Näide 14.

Arvutame tabeliga 9 antud juhusliku suuruse k -nda momendi

$$m_k = \frac{1}{4} \cdot 3^k + \frac{1}{2} \cdot 4^k + \frac{1}{4} \cdot 5^k;$$

kui $k = 3, 4$ ja 5 , saame

$$m_3 = \frac{1}{4}(3^3 + 2 \cdot 4^3 + 5^3) = 70,$$

$$m_4 = \frac{1}{4}(3^4 + 2 \cdot 4^4 + 5^4) = 304\frac{1}{2},$$

$$m_5 = \frac{1}{4}(3^5 + 2 \cdot 4^5 + 5^5) = 1354.$$

Näide 15.

Leiame üntlase jaotusega juhusliku suuruse k -nda momenti

$$m_k = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^k dx = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{(k+1)(b-a)} = \frac{1}{k+1} (b^k + ab^{k-1} + \dots + a^k),$$

samuti k -nda tsentraalse momendi

$$\bar{m}_k = \frac{1}{b-a} \int_a^b \left(x - \frac{b+a}{2}\right)^k dx = \frac{1}{b-a} \int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} t^k dt = \begin{cases} \frac{(b-a)^k}{2^k(k+1)}, & \text{kui } k \text{ on paaris-} \\ & \text{arv} \\ 0, & \text{kui } k \text{ on paaritu arv.} \end{cases}$$

§ 12. Normaaljaotus.

1. Normaaljaotus kui binomiaaljaotuse piirjaotus.

Vaatleme katseid, millel on 2 võimalikku tulemust A ja B (näiteks mündiviskel kirja- ja vapipoolle pealejäämine).

Lepime kokku, et olgu⁹

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{2}.$$

Kui me oleme teinud mingi hulga n_1 katseid, siis kirjeldab katsetulemuse A esinemiste arvu binomiaaljaotus $B(n_1, \frac{1}{2})$ ning

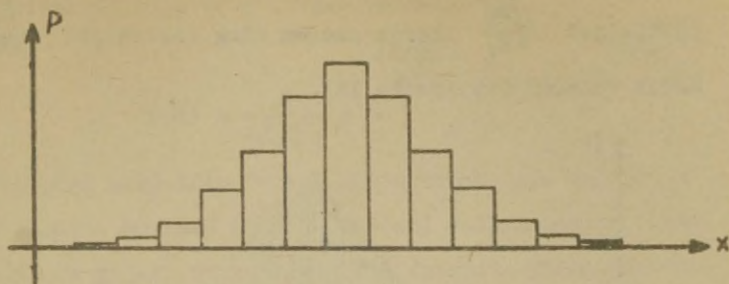
$$P(X = k) = C_{n_1}^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n_1},$$

kus $k = 0, 1, \dots, n_1$.

Arvutanud või leidnud tabelist (vt. tabel XIII) kõik $P(X=k)$ väärtused, võime selle binomiaaljaotuse esitada graafikuna (vt. joonis 11).

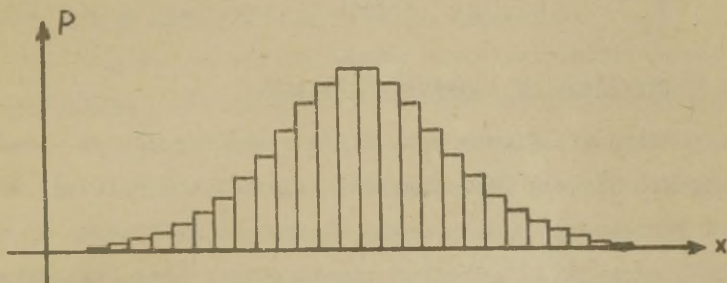
Jätkame katseid seni, kuni oleme neid kokku teinud n_2 ($n_2 > n_1$). Katsetulemuste A esinemiste arvu kirjeldab nüüd

⁹ Kogu järgnev arutelu peab paika ka iga teise fikseeritud p väärtuse korral.



Joonis 11.

binomiaaljaotus $B(n_2, \frac{1}{2})$, millele vastab graafik joonisel 12.

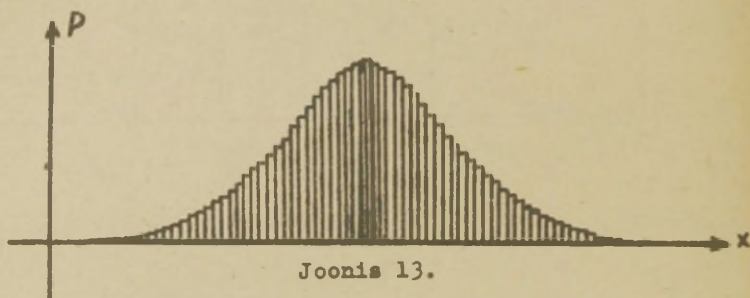


Joonis 12.

Et graafikuid saaks võrrelda, mudame joonisel 12 (võrreldes joonisega 11) mastaapi, suurendades vertikaaltelje ühikuid $\frac{n_2}{n_1}$ korda ning vähendades sama palju kordi horisontaaltelje ühikuid (vt. paragrahv 7). Selle tagajärjel on graafikualune pindala mõlemal joonisel mõõdetav samades ühikutes.

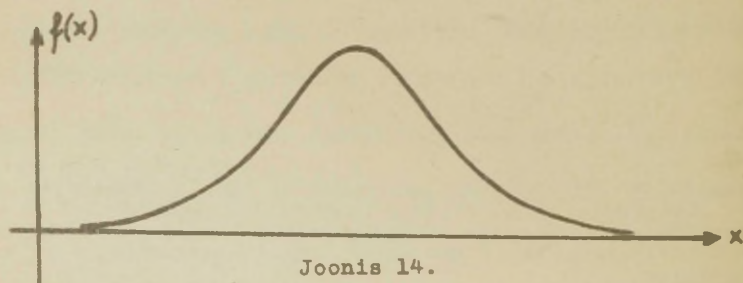
Vaadeldes järjest suurema pikkusega n_1, n_2, \dots, n_k katseeriid, saame rea binomiaaljaotusega juhuslikke suurusi, kusjuures igähele neist võime joonestada ka jaotuse graafiku, kasutades mastaapi, mis joonisel 11 kirjeldatust on

püstteljel $\sqrt{\frac{n_k}{n_1}}$ korda suurem ning rõhtteljel $\sqrt{\frac{n_k}{n_1}}$ korda väiksem (vt. joonis 13).



2. Normaaljaotuse tihedusfunktsioon.

Näeme graafikute muutumises teatud korrapära - need muutuvad järjest "siledamaks", "hüpped" ehk "astmed" muutuvad järjest väiksemaks, ning lõpuks, küllalt suure n_k väärtuse korral ei ole üksikud astmed enam silmaga eraldatavad. Murdjoont asendab graafikul sile kõver (vt. joonis 14).



Iga tasandiline kõver on aga matemaatiliselt esitatav mingi valemiga

$$y = f(x).$$

Joonisel 14 kujutatud kõvera valemiks on

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (25)$$

See valem kirjeldab juhuslikku suurust, mis on saadud lõpmata paljude katsete kaudu. Sellisel viisil saadud juhuslik suurus on pidev ning valem (25) on selle juhusliku suuruse tõenäosuse tihedus.

Valemiga (25) esitatud pidevat juhuslikku suurust nimetatakse normaaljaotusega juhuslikuks suuruseks.

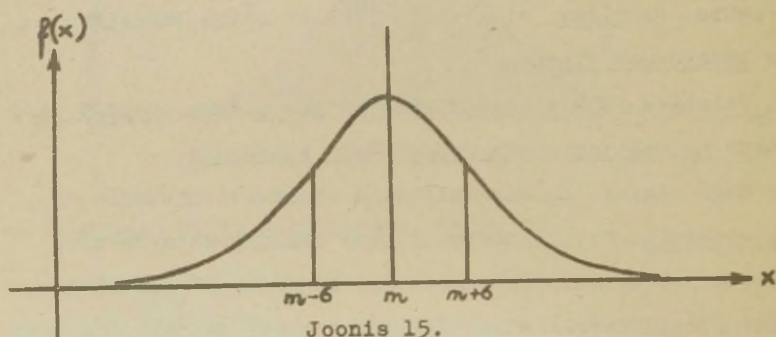
Nagu nägime, on normaaljaotus binomiaaljaotusele nn. piirjaotuseks, s.t. binomiaaljaotus läheneb katsete arvu suurenemisel normaaljaotusele. See asjaolu on rangelt tõestatud nn. piirteoreemides (vt. näiteks [3] ja [4]). On tõestatud ka seda, et juhuslikud suurused, mis alluvad väga paljude väikese mõjuga faktorite toimele, on väga sageli normaaljaotusega (või sellele lähedase jaotusega).

Et aga praktikas esineb selline olukord väga sageli, eriti näiteks mõõtmisel (mõõtmistulemusi mõjutavad temperatuuri-, valguse, õhurõhu jm. muutused), siis võime tihti lugeda mõõtmistulemuse jaotuseks normaaljaotuse. Üldiselt on normaaljaotus kõige levinum ning statistikas kõige sagedamini kasutatav jaotus.

Järgnevalt analüüsime lähemalt normaaljaotuse tõenäosuse tiheduse valemit (25).

Valemis (25) on konstandid π (ringjoone pikkuse ja raadiuse suhe, $\pi = 3,14$) ja e (naturaallogaritmi alus

$e = 2,72$) ning konkreetsed jaotused iseloomustavad parameetrid σ ja m - argument x võib omandada kõiki võimalikke reaalarvulisi väärtusi. Selle funktsiooni graafik on kujutatud joonisel 15. Selgub, et m on normaaljaotusega juhusliku suuruse keskvärtus ja σ - standardhälve (vt. näited 16 ja 17).



Jooniselt (15) näeme, et normaaljaotus on keskpunkti m suhtes sümmeetriline (see järeldub ka valemist (25), kuna $f(a+m) = f(-a+m)$ iga n korral). Niihästi vasakul kui ka paremal läheneb kõver x -teljele kiiresti, kuid ei lõiku sellega. Standardhälve suuruse σ näitab kõvera lamedust, kuid punktid $m - \sigma$ ja $m + \sigma$ on käänupunktideks (s.t. punktideks, kus kumerus läheb üle nõgususeks ja vastupidi).

Parameetri väärtuste $m=0$ ja $\sigma=1$ korral on normaaljaotuse tihedusfunktsioon ning jaotusfunktsioon tabuleeritud (vt. tabelid I ja II lisas).

Asjaolu, et juhuslik suurus on normaaljaotusega (vastavalt parameetritega m ja σ), tähistame sümboliga $X \sim N(m, \sigma)$

3. Näiteid.

* Näide 16.

Arvutame normaaljaotusega juhusliku suuruse keskväär-
tuse

$$EX = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Teostame muutuja vahetuse

$$t = \frac{x-m}{\sigma};$$

$$dt = \frac{dx}{\sigma},$$

$$x = \sigma \cdot t + m.$$

$$\begin{aligned} EX &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma t + m) e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \sigma \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-\frac{t^2}{2}} dt + m \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \end{aligned}$$

$$\text{Kuna } \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \int_{-\infty}^0 t e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \int_0^{\infty} t e^{-\frac{t^2}{2}} dt;$$

teeme esimeses integraalis muutuja vahetuse:

$$t' = -t;$$

$$\text{siis } t e^{-\frac{t^2}{2}} dt = t' e^{-\frac{t'^2}{2}} dt' = - t' e^{-\frac{t'^2}{2}} dt',$$

seega võrdub esimene liidetav keskväär-
tuse avaldises nulli-
ga, ning kuna

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1,$$

saame

$$EX = m.$$

* Näide 17.

Arvutame normaaljaotusega juhusliku suuruse dispersi-
ooni. Et dispersioon ei sõltu nihkest, võime vaadelda tsentree-

ritud normaaljaotust $N(0, \sigma^2)$; sel juhul $\bar{m}_2 = m_2$, ning me võime arvutada lihtsalt 2. järku momendi

$$DX = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Integreerime ositi $-\frac{x^2}{2\sigma^2} dx = dv$; $v = e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$;

$$-\sigma^2 x = u; \quad du = -\sigma^2 dx;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = -\sigma^2 x e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Esimese liidetava puhul näeme, et

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = 0;$$

seega saame

$$DX = \sigma^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma^2.$$

— * —

Näide 18.

*

Arvutame veel normaaljaotusega juhusliku suuruse neljanda tsentraalse momendi. Vaatleme selleks tsentreeritud normaaljaotust $N(0, \sigma^2)$.

Leiame tema neljanda momendi

$$EX^4 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Kasutame arvutamisel ositi integreerimist, võttes

$$-\frac{x^2}{2\sigma^2} dx = dv,$$

$$u = -\sigma^2 x^3.$$

Siis saame

$$v = e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}},$$

$$du = -3\sigma^2 x^2 dx,$$

ning integraal on esitatav kujul

$$EX^4 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \left(-\sigma^2 x^3 \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \right) \Big|_{-\infty}^{\infty} - (-3\sigma^2) \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Et aga

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = 0,$$

mida on lihtne kontrollida näiteks L'Hospitali reegli abil:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^{\frac{x^2}{2\sigma^2}}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{\frac{2x}{2\sigma^2} \cdot e^{\frac{x^2}{2\sigma^2}}} = 3\sigma^2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{\frac{x^2}{2\sigma^2}}} = \\ &= 3\sigma^2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{2x}{2\sigma^2} \cdot e^{\frac{x^2}{2\sigma^2}}} = 0, \end{aligned}$$

ning et tsentreeritud juhusliku suuruse teine moment EX^2 võrdub dispersiooniga, siis saame lihtsalt arvutada

$$\begin{aligned} EX^4 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \left(0 + 3\sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \right) = 3\sigma^2 EX^2 = 3\sigma^2 DX = \\ &= 3\sigma^4. \end{aligned}$$

— * —

§ 13. Normaaljaotuse iseloomustamine parameetrite abil.

Oletame, et oleme mingil viisil täiesti kindlasti saanud kindlaks määrata, et uuritav juhuslik suurus on normaaljaotusega, $X \sim N(m, \sigma')$, kusjuures tema parameetrid m ja σ' on täpselt teada.

Kasutades normaaljaotuse tabelit (vt. tabel II), saame siis lihtsalt ennustada, millisesse piirkonda satuvad selle juhusliku suuruse üksikväärtused.

1. Normaaljaotuse normeerimine ja tsentreerimine.

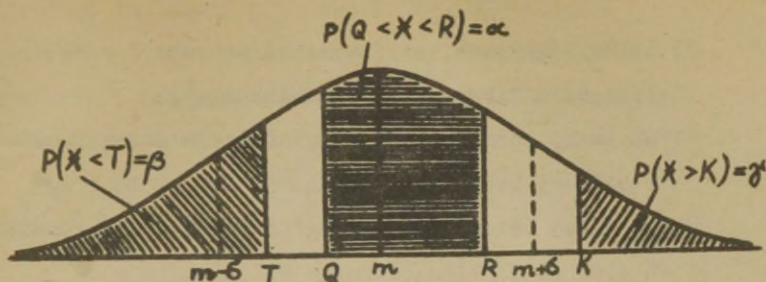
Normaaljaotuse tabeli II abil sündmuste tõenäosuste arvutamisel kasutame mõningaid teisendusi, mis asendavad sündmused nendega samaväärsetega. Nii näiteks on järgmised sündmuste paarid samaväärsed:

$$\begin{aligned} X < a & \quad \text{ja} \quad X+b < a+b; \\ X < a & \quad \text{ja} \quad CX < Ca; \\ X < a & \quad \text{ja} \quad \frac{X-d}{e} < \frac{a-d}{e} \quad \text{jne.} \end{aligned}$$

Siis on ka nende sündmuste tõenäosused võrdsed

$$\begin{aligned} P(X < a) &= P(X+b < a+b); \\ P(X < a) &= P(CX < Ca); \\ P(X < a) &= P\left(\frac{X-d}{e} < \frac{a-d}{e}\right). \end{aligned}$$

Selleks, et normaaljaotuse tabeli abil (kus on antud tsentreeritud ja normeeritud normaaljaotuse, s.t. jaotuse $N(0,1)$ väärtused) leida suvaliste parameetritega normaaljaotuse väärtusi, tuleb uuritav suurus samuti tsentreerida ja normeerida (vt. joonis 16).



Joonis 16 (ülem.pool).

Olgu $X \sim N(m, \sigma)$. Tabuleeritud normaaljaotuse tähistamise sümboliga Y , s.t. $Y \sim N(0,1)$.

Seos

$$P(X < a) = B$$

on samaväärne seosega

$$P\left(\frac{X-m}{\sigma} < \frac{a-m}{\sigma}\right) = B,$$

kuid juhuslik suurus $\frac{X-m}{\sigma} = Y$ on normaaljaotusega $N(0,1)$, seega on selle jaoks võimalik kasutada tabelit ning leida vastavalt etteantud B väärtusele suurus a' nii, et

$$P(Y < a') = B,$$

millest seose $a' = \frac{a-m}{\sigma}$ abil saame leida ka otsitava suuruse a :

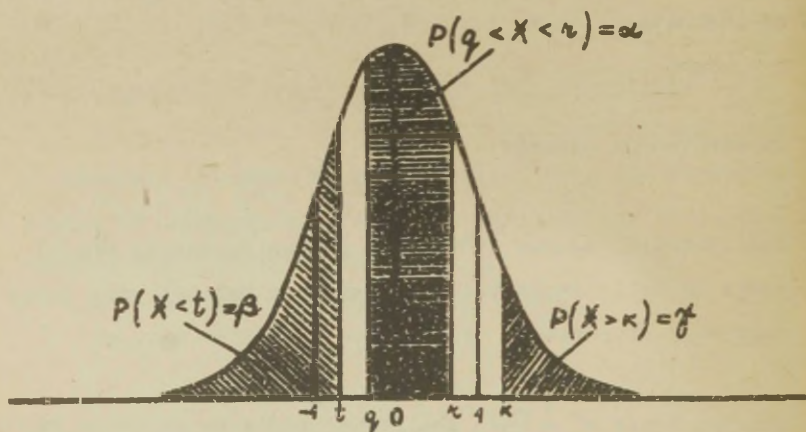
$$a = a' \sigma + m. \quad (26)$$

2. Normaaljaotuse tabelite abil lahendatavate ülesannete tüübid.

Kasutades normaaljaotuse tabelleid ning teadaolevaid m ja σ väärtusi, saame lahendada järgmisi ülesandeid:

- 1) Leida tõenäosus, et $X > K$, kus K on fikseeritud konstant.
- 2) Leida tõenäosus, et $X < T$, kus T on fikseeritud konstant.

- 3) Leida tõenäosus, et juhusliku suuruse X väärtused langeksid fikseeritud vahemikku (Q, R) .
- 4) On antud tõenäosus β ning nõutakse leida konstant T nii, et kehtiks võrratus $P(X < T) = \beta$.
- 5) On antud tõenäosus γ ning nõutakse leida konstant K nii, et kehtiks võrratus $P(X > K) = \gamma$.
- 6) Leida vastavalt antud tõenäosusele α konstandid Q ja R nii, et kehtiks võrratus $P(Q < X < R) = \alpha$.



Joonis 16 (alum. pool).

Suvalise normaaljaotuse taandamine tsentreeritud ja normeeritud normaaljaotuseks.

3. Näiteid.

Näide 19.

On teada, et inimeste jalapöia pikkus on normaaljaotusega.¹⁰ Oletame, et mehe jala suurus (saapanumbrites väl-

¹⁰ Arvukate statistiliste uurimuste põhjal on leitud, et enamus antropomeetrilisi tunnuseid (kaal, kasv, kehaosade mõõtmised) on ligikaudu normaaljaotusega. Seda asjaolu kasutatakse ka käesolevas paragrahvis toodud näidetes. Olgu märgitud, et toodud andmeid ei saa kasutada kui usaldatavaid Tartu

jendatuna) on juhuslik suurus X , $X \sim N(42; 1,5)$.

Olgu tarvis lahendada ülesanne - kui palju on Tartu linnas mehi, kes kannavad saapaid nr.46 (ja suuremaid).

Selleks tuleb meil leida

$$P(X > K) = 1 - P(X < K) = 1 - P\left(\frac{X-m}{\sigma} < \frac{K-m}{\sigma}\right).$$

Arvutame suuruse

$$\frac{K-m}{\sigma} = k = \frac{46-42}{1,5} = 2,67.$$

Tabelist saame leida tõenäosuse

$$P(Y < \frac{K-m}{\sigma}) = B.$$

Meie otsitav tõenäosus on siis $1 - B$.

Näeme, et B väärtuseks on (vaatame tabelist II $\Phi(x)$, võttes $x = 2,66$) $0,9961$; järelikult on otsitav tõenäosus $1 - 0,9961 = 0,0039$ ning Tartu linna 40 000 mehe hulgas on keskmiselt $40\ 000 \cdot 0,0039 = 156$ meest, kelle saapanumber on 46 või üle selle.

Näide 20.

Analoogiliselt võiksime leida ka, kui palju on tarvis meestesaapaid, mille number on 39 või alla selle.

Üldkujul oleks see ülesanne järgmine: on antud suurus T . Leida tõenäosus, et juhuslik suurus X omandaks väärtuse, mis on väiksem kui T :

$$P(X < T) = P\left(\frac{X-m}{\sigma} < \frac{T-m}{\sigma}\right).$$

Leiame

$$\frac{T-m}{\sigma} = t = \frac{39-42}{1,5} = -2 < 0.$$

meeste saapanumbri, naisüliõpilaste kaalu jm.kohta (andmed on saadud liiga väikese arvu väljavõtete põhjal), vaid üksnes kui lihtsaid arvutuslikke näiteid.

Kuid tabelites ei ole tavaliselt juhusliku suuruse negatiivsetele väärtustele vastavaid jaotusfunktsiooni väärtusi.

Kasutame asjaolu, et normaaljaotus on sümmeetriline, seetõttu

$$P(X < t) = P(X > -t) = P(X > |t|), \text{ sest } t < 0, \text{ siis} \\ -t = |t|, P(X > |t|) = 1 - P(X < |t|).$$

Seega võime otsitava tõenäosuse leida järgmisel viisil:

$$P(Y < -2) = 1 - P(Y < 2) = 1 - 0,9772 = 0,0288.$$

Võime öelda, et Tartus on umbes

$$40\ 000 \cdot 0,0288 = 1152$$

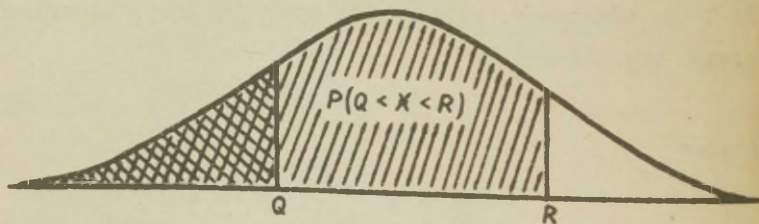
meest, kelle saapanumber on 39 või väiksem.

Näide 21.

Ka võiks meid huvitada, kui palju mehi kannab saapaid nr. 40-43. See on ülesanne tüüpi 3; meil tuleb leida tõenäosus

$$P(Q < X < R) = P(X < R) - P(X < Q).$$

Siin peab X olema väiksem kui R , kuid ei tohi olla väiksem kui Q (vt. joonist 17; otsitav pindala on ühekordse



Joonis 17.

viirutusega: joonest R vasakul olevast pindalast on lahutatud joonest Q vasakule jääv pindala (kahekordselt viirutatud pinnaosa).

Selleks tuleb meil arvutada

$$q = \frac{Q - m}{\sigma}; \quad r = \frac{R - m}{\sigma}$$

ning leida normaaljaotuse tabelist

$$\beta = P(Y < r);$$

$$\gamma = P(Y < q),$$

otsitavaks tõenäosuseks saame $\beta - \gamma$.

Meie näites

$$q = \frac{40 - 42}{1,5} = -1,33; \quad r = \frac{43 - 42}{1,5} = 0,67$$

$$\beta = 0,7486$$

$$\gamma = 1 - 0,9082 = 0,0918;$$

$$\beta - \gamma = 0,7486 - 0,0918 = 0,6568,$$

seega kannab Tartus elavatest meestest umbes 66%, s.o.

26 300, kingi nr.40-43.

Näide 22.

Oletame,¹⁰ et naisüliõpilaste kehakaal on normaaljaotusega $N(m, \sigma)$; $m = 63$ kg, $\sigma = 8$. Leida T nii, et

$$P(X < T) = 0,90.$$

Selleks leiame vastavalt normaaljaotusele $Y \sim N(0,1)$ t nii, et

$$P(Y < t) = 0,90.$$

Tabelist (võttes x väärtuse kohalt, kus $\Phi(x)$ on võimalikult lähedal arvule 0,90 - see on 0,8997) näeme, et $t = 1,28$.

Et

$$t = \frac{T - m}{\sigma},$$

saame siit

$$T = m + t\sigma = 63 + 1,28 \cdot 8 = 63 + 10,2 = 73,2.$$

Näide 23.

Olgu meil tarvis leida arv K nii, et keskmiselt 80% naisüliõpilaste kaal rahuldaks seost $X > K$ ehk

$$P(X > K) = 0,8.$$

Selleks leiame K nii, et

$$P(Y > k) = 0,8;$$

ilmselt peab seline k väärtus olema negatiivne, seetõttu on meil sobivam leida $k' = -k$, nii et

$$P(Y < k') = 0,8.$$

Tabelist näeme (võttes $0.8 \approx 0,7995$), et $k' = 0,84$; seega $k = -0,84$, ning

$$K = 63 - 0,84 \cdot 8 = 63 - 6,7 = 56,3.$$

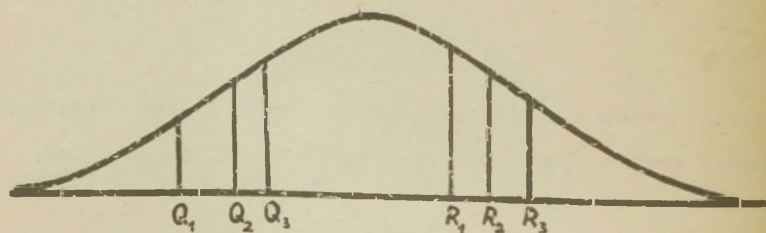
Näide 24.

Olgu tarvis määrata vahemik, millesse kuulub 95% naisüliõpilaste kaal.

Märgime, et see ülesanne ei ole üheselt lahendav, selliseid Q ja R väärtusi, mis rahuldavad võrratust

$$P(Q < X < R) = 0,95$$

on võimalik määrata lõpmata palju (vt. joonis 18).



Joonis 18.

Tavaliselt, kui pole antud mingeid lisatingimusi, määratakse Q ja R nii, et

$$P(X < Q) = \frac{1-\alpha}{2}; \quad P(X > R) = \frac{1-\alpha}{2}.$$

Sellisel juhul õnnestub Q ja R määrata üheselt. Käesoleval juhul tuleb määrata Q ja R nii, et

$$P(X < Q) = 0,025; \quad P(X > R) = 0,025.$$

Ilmselt siis $P(X < R) = 0,975$.

Määrane vastavalt r

$$P(Y < r) = 0,975.$$

Võttes tabelist $\Phi(x) = 0,975$ vastava x väärtuse, saame

$$r = 1,96;$$

seega saame (kasutades normaaljaotuse sümmeetriat):

$$R = m + 1,96 \sigma' = 63 + 1,96 \cdot 8 = 63 + 15,7 = 78,7;$$

$$Q = m - 1,96 \sigma' = 63 - 1,96 \cdot 8 = 63 - 15,7 = 47,3.$$

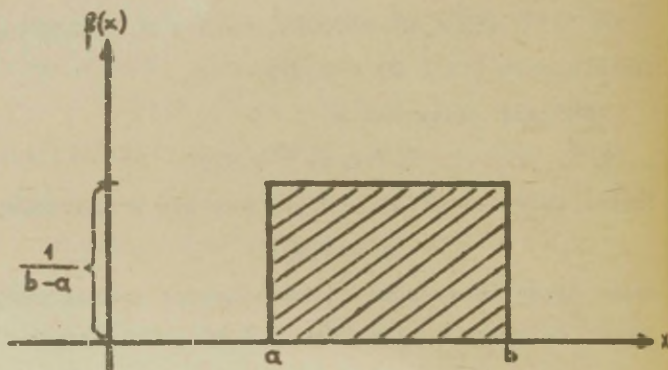
§ 14. Ühtlane jaotus.

Fraktikas esineb mõnikord olukord, kus juhusliku suuruse kohta on teada vaid seda, et tema väärtused peiknevad mingis vahemikus, kuid midagi lähemast selle juhusliku suuruse kohta teada ei ole.

Näiteks oletame, et läheme juhuslikul ajamomendil bussi-peatusesse, teades vaid, et sellel liinil liiguvad bussid 10 minuti vahedega. Siis tuleb meil bussi oodata 0 kuni 10 minutit, kusjuures mingit ooteaega ei saa ühestki teisest tõenäosemaks lugeda. Sellist olukorda kirjeldab ühtlane jaotus. Ühtlase jaotusega juhusliku suuruse tõenäosuse tihe-
dus on määratud valemiga

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 0, & x > b, \end{cases} \quad (27)$$

s.t. lõigul $[a, b]$ on tõenäosuse tihedus konstantne, mujal aga võrdub nulliga (vt. joonis 19).



Joonis 19.

Ühtlase jaotuse keskväärtuse, dispersiooni ja k-nda momendi arvutasime näidetes 7,11 ja 15; nägime, et ühtlase jaotuse puhul

$$EX = \frac{a+b}{2};$$

$$DX = \frac{(b-a)^2}{12};$$

$$G' = \frac{b-a}{2\sqrt{3}};$$

suvalised kvantilid aga saame leida valemist

$$x_p = a + p(b-a);$$

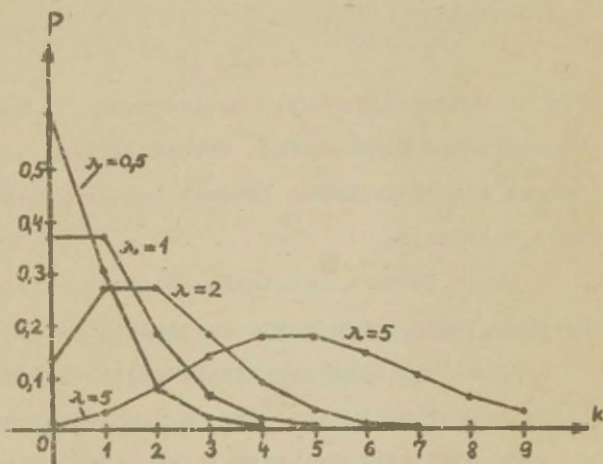
siit näeme, et mediaan langeb ühte keskväärtusega, kvantilid aga avalduvad järgmiselt:

$$q_a = \frac{3a+b}{4}; \quad q_{ii} = \frac{a+3b}{4}.$$

§ 15. Poissoni jaotus.

Üheke sagedamini esinevaks lihtsaks jaotuseks on veel Poissoni jaotus (vt. joonis 20). Poissoni jaotus on diskreetne ning selle korral võib juhuslik suurus X omandada väärtused $0, 1, 2, \dots$, kusjuures väärtuse k esinemise tõenäosus avaldub valemiga

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad (28)$$



Joonis 20.

kus λ on Poissoni jaotust iseloomustav parameeter (λ võib olla suvaline positiivne arv). Asjaolu, et juhuslik suurus X on Poissoni jaotusega parameetriga λ , tähistame sümboliliselt

$$X \sim P(\lambda).$$

Poissoni jaotusega on kirjeldatav näiteks radioaktiivne lagunemine. Igas ajahükkus lagunenud aatomite arv on juhuslik

suurus, mis sõltub vaid uuritavast ainest ning selle aine kogusest. Analoogiline on olukord ka näiteks telefonikõnede hulga telefonikeskjaamas mingi ajavahemiku vältel, trüki- vigade esinemise arvuga mingis tekstiosas jne. Kõik need on juhuslikud suurused, mida iseloomustab Poissoni jaotus.

Poissoni jaotusega on sobiv lähendada ka binomiaaljaotust sel juhul, kui n on küllalt suur, p (või q) aga väike. Sellise lähendamise lubatavus järeldub nn. Poissoni piirteoreemist (vt. näit. [3]), mis väidab, et n kasvamisel esineb piirprotsess

$$pn \rightarrow \lambda,$$

(pn on binomiaaljaotuste keskväertus, vt. näide 4, λ - Poissoni jaotuse keskväertus, vt. näide 25), siis binomiaaljaotusega juhuslik suurus läheneb Poissoni jaotusega juhuslikule suurusele.

Selle tõttu nimetatakse mõnikord Poissoni jaotust ka harva esinevate sündmuste jaotuseks.

Praktikas lähendatakse Poissoni jaotust mõnikord omakorda normaaljaotusega. See on õigustatud sel korral, kui n on väga suur ning p ei ole liiga väike (nii et ka np on küllalt suur arv, vt. näide 61 IV peatükis).

Näide 25.

Leiame Poissoni jaotuse keskväertuse

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda \cdot e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \\ &= \lambda \cdot e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda, \end{aligned}$$

sest

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^\lambda.$$

(vt.näiteks [2]).

Näide 26.

Leiame Poissoni jaotuse dispersiooni. Selleks arvutame teise momendi

$$\begin{aligned} m_2 = EX^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} [k(k-1) + k] \frac{\lambda^k}{k!} = \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \\ &= e^{-\lambda} \cdot \lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda = e^{-\lambda} \cdot e^\lambda \cdot \lambda^2 + \lambda = \lambda^2 + \lambda; \end{aligned}$$

$$DX = m_2 - m_1^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

Näide 27.

Olgu raamatu 100-l leheküljel 50 trükiviga. Kui suur on tõenäosus, et ühel leheküljel on üle 3 trükivea?

Olgu X trükivigade arv leheküljel. Ilmselt $EX = \lambda = \frac{50}{100} = 0,5$, seega on meil tegemist Poissoni jaotusega $P(0,5)$.

Meilt küsitakse tõenäosust

$$\begin{aligned} P(X > 3) &= P(X = 4) + P(X = 5) + \dots = \\ &= 1 - P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3). \end{aligned}$$

Leiame tõenäosused $P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ tabelist (vt.tabel X):

$$k=0 \quad 0,60653$$

$$k=1 \quad 0,30327$$

$$k=2 \quad 0,07581$$

$$k=3 \quad 0,01263.$$

Seega $P(X > 3) = 1 - 0,99824 = 0,00176$; sama tulemuse saaksime veelgi lihtsamalt tabelist XI.

Ligikaudse vastuse võiksime saada ka Poissoni jaotuse lähendamisel normaaljaotusega.

Selleks tuleb meil jälle uuritav juhuslik suurus X tsentreerida ning normeerida, et

$$EX = DX = \lambda, \text{ ssame}$$

$$Y = \frac{X-m}{\sigma} = \frac{X-0,5}{\sqrt{0,5}},$$

$$\text{ning } P(X > 3) = P\left(Y > \frac{3-0,5}{\sqrt{0,5}}\right) = P(Y > 3,54) = 1 - 0,9998 =$$

$= 0,0002$. Näeme, et tulemus tuli mõnevõrra erinev. Arvutades ka tõenäosuse

$$P(Z > 2) = 0,01439$$

normaaljaotuse abil, saame tulemuseks $0,0170$; seega on suhteline viga lähendamisel suur nimelt keskvärtusest kaugete K väärtuste korral.

Näide 28.

Keskmiselt 5% meestest ja 0,25% naistest on värvipimedad. Valiti 100 meest ja 100 naist. Arvutada järgmised tõenäosused:

- 1) valitute hulgas ei ole üle 5 värvipimedat meest
- 2) valitute seas on üle 2 värvipimedat naist.

Esimese ülesande lahendamiseks leiame parameetri λ väärtuse $\lambda = EX = 0,05 \cdot 100 = 5$; tabelist XI saame

$$P(X \leq 5) = 0,61595.$$

Teisel juhul saame parameetri väärtuseks

$$\lambda = 0,0025 \cdot 100 = 0,25 \approx 0,3$$

$$P(X > 2) = 1 - [P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)] = 1 - 0,9964 = 0,0036.$$

§ 16. J u h u s l i k e s u u r u s t e
s ö l t u m a t u s.

Lõpuks puudutame veel üsna põgusalt üht küsimust, mis on seotud kahe juhusliku suuruse üheaegse vaatlemisega. Põhjalikumalt käsitleme neid probleeme käesoleva konspekti II osas.

Igapäevase elu praktikast on hästi teada, et mõningad juhuslikud suurused on tihedasti seotud (näiteks õhurõhk ja sademete hulk; lapse vanus ja kehakaal), teised aga ei mõjuta üksteist märkimisväärselt või üldse mitte (inimese sünnikuupäev ja kehakaal; kahel järjestikusel täringuviskel saadavate silmade arvud). Selliate juhuslike suuruste paaride kohta öeldakse, et nad on sõltumatud (vt. [3]). Kuigi juhuslike suuruste sõltumatuse mõiste rangeks matemaatiliseks esitamiseks on tarvis täiendavaid lisamõisteid, on selle sisu intuiitiivselt hästi arusaadav.

Diskreetsete juhuslike suuruste jaoks võime siin esitada ka sõltumatuse definitsiooni.

Olgu X diskreetne juhuslik suurus väärtustega x_1, \dots, x_n , Y - diskreetne juhuslik suurus väärtustega y_1, \dots, y_m ; kusjuures olgu $P(X=x_i) = p_i$ ($i=1, \dots, n$), $P(Y=y_j) = q_j$ ($j=1, \dots, m$). Juhuslikud suurused X ja Y on sõltumatud siis, kui tõenäosus selleks, et X omandab väärtuse x_i ning ühtlasi Y omandab väärtuse y_j , võrdub korrutisega $p_i q_j$, s.t.

$$P(X=x_i, Y=y_j) = P(X=x_i) \cdot P(Y=y_j) = p_i q_j. \quad (29)$$

Seega on siin valemina kirja pandud tõsiasi, et juhusliku suuruse Y poolt suvalise väärtuse y_j omandamise tõenäosus ei

sõltu sellest, millise väärtuse omandas juhuslik suurus X (ja vastupidi). Näiteks visates korraga punast ja sinist taringut võime olla kindlad, et (kui taringud on korralikud) saame tulemuse 6; 6 tõenäosusega $\frac{1}{36}$ (selle tulemuseni jõuaksime, kui analüüsiksime üksikhaaval kõiki võimalikke silmade kombinatsioone). Et aga niihästi punasel kui ka sinisel taringul on 6 silma saamise tõenäosus $\frac{1}{6}$, kehtib üntlasi seos (29):

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$$

Esitame ka mõned seosed sõltumatute juhuslike suuruste karakteristikute vahel (siin võivad X ja Y olla niihästi pidevad kui ka diskreetsed).

1^o Sõltumatute juhuslike suuruste X ja Y korrutise keskväärts on võrdne tegurite keskväärtsuste korrutisega

$$E(XY) = EX \cdot EY. \quad (30)$$

2^o Sõltumatute juhuslike suuruste X ja Y summa dispersioon on võrdne liidetavate dispersioonide summaga

$$D(X+Y) = DX + DY. \quad (31)$$

II. VÄLJAVÕTE, SELLE ESIALGNE TÖÖLEMINE.

§ 1. Üldkogum ja väljavõte.

Teaduslikul uurimisel on lähtematerjaliks tavaliselt mingi tunnusega¹¹(tunnustega) objektide või ka übe objekti mõõtmistulemuste hulk. Enamasti on kõigi vaadeldava tunnusega objektide hulk väga suur, nii et sageli pole uurijale selge, kui suur see kõikvõimalike objektide hulk siie üldse on. Näiteks oletame, et ihtüloogi huvitab kilude kaal. On selge, et kilude hulk on suur (nii suur, et nende kõigi kaalumise oleks mõeldamatu), aga selle täpsed suurust me ei tea. Samuti ei tea arstiteadlane, kes uurib gripihaigete temperatuuri, kui palju inimesi põeb grippi antud momendil. Selle asemel on uurija käsutuses andmed mingi väikses hulga kilude kaalu ning mingi haigete kontingendi temperatuuri kohta.

Statistikas väljendatakse seda asjaolu järgmiselt: on olemas väljavõtte üldkogumist, kusjuures üldkogumi all mõeldakse kõigi võimalike antud tunnusega indiviidide hulka. väljavõtte all aga mingil kindlal viisil üldkogumist valitud objektide hulka. Nii näiteks on kõigi kilude hulk üldkogum,

¹¹ Käesolevas peatükis me vaatleme lihtsuse mõttes üheainsa tunnuse uurimist, kuna mitme tunnuse üheaegset uurimist käsitleme konspekti II osas.

kaalumiseks väljavalitute hulk - väljavõte, kõigi gripihai-
gete hulk - üldkogum, antud arsti poolt uuritute hulk - väl-
javõte.

Paneme tähele, et uurija ülesandeks on teha väljavõtte
põhjal järeldusi üldkogumi kohta.

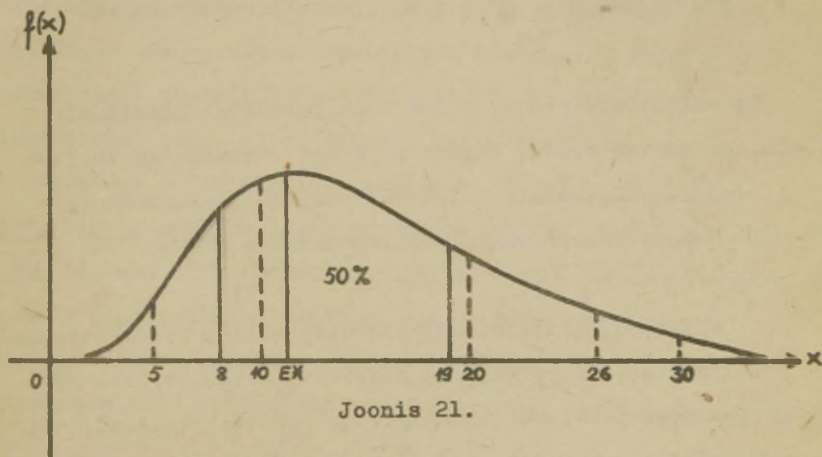
Siinjuures on enamasti üldkogumi kohta teada vaid see,
et ta on (väljavõttega võrreldes) väga suur, kuid tema täpne
arvukus pole teada. Sel juhul on sageli otstarbekas lugeda
üldkogum lõpmata suureks. Kõik meetodid, mida me järgnevas
käsitleme, on tuletatud eeldusel, et üldkogumit võib lugeda
lõpmata suureks. Ilmselt pole see eeldus enamasti täpselt
täidetud, sest tegelikult on niibästi kilude hulk meres kui
ka inimeste hulk (liiatigi siis gripihaigete hulk) lõplik.
Kuid erinevused, mis on tingitud üldkogumi lõplikkuse arves-
tamisest, on niivõrd tühised, et neid praktiliselt arvestada
pole tarvis. Seetõttu on peaaegu alati õige rakendada eel-
dust üldkogumi lõpmatusest.

Samasugune on ka olulised, kui me vaatleme mingi objekti
mõõtmisel saadud tulemusi. Kuigi mõõdetav objekt on ise ühene
(ja isegi ei muutu¹²), on mõõtmistulemused (vigade tõttu)
erinevad; uurija käsutuses olevaid mõõtmistulemusi võib
käsitada väljavõttena kõikvõimalike seni tehtud ning tege-
mata mõõtmistulemuste hulgast; arusaadavalt on sel korral
täiesti õigustatud jällegi üldkogumi lugemine lõpmata suu-
reks.

¹² Käesoleva konsekti ulatuses käsitleme üksnes ajas
muutumatuid tunnuseid.

§ 2. Üldkogumi kirjeldamine juhusliku suuruse abil.

Kui me teaksime meid huvitava tunnuse väärtusi terves üldkogumis, saaksime neid kirjeldada juhusliku suurusega X , mille väärtuste hulgaks on kõigi üldkogumis esinevate indiviidide vaadeldava tunnuse väärtuste hulk ning mille jaotus (tõenäosuse tihedus) on määratud üksikväärtuste esinemise sagedusega. Näiteks võiks kilude kaalu jaotus olla kirjeldatav järgmise tõenäosuse tiheduse graafiku abil. (vt. joonis 21). Kui me sellist graafikut teaksime, oleks meil ühtlasi teada täielik informatsioon kilude kaalu kohta. Iga üksiku juhuslikult meie kätte sattuva kilu kohta võiksime siis kinditada, et tema kõige tõenäosem kaal on 11-12 g, et 50% kiludest on kaaluvahemikus 8-19 g ning 90% kaaluvahemikus 5-26 g (vt. joonis 21).



Kahjuks me kilude kaalu tõenäosuse tihedust ei tea. Seetõttu ongi statistika ülesandeks püüda väljavõtte põhjal saada

võimalikult palju teada juhusliku suuruse X jaotuse kohta.

Niisiis, lähtume sellest, et X (uuritav tunnus üldkogumi ulatuses) on tundmatu jaotusega; märgime seda sümboliliselt

$$X \sim P_X .$$

Meie käsutuses on mingi väljavõte, s.o. teatav hulk juhusliku suuruse X väärtusi:

$$x_1, x_2, \dots, x_n .$$

Siinjuures ei tarvitse sugugi iga väärtus x_1 olla erinev, võib esineda ka, et mingite indeksite i ja j korral $x_i = x_j$ (s.t. kaks väljavõttesse sattunud kilu on meie mõõtmistäpsuse piires võrdse kaaluga).

Kui erinevate indiviidide hulk väljavõttes (kellele vastavad saadud juhuslike suuruste väärtused) on n , siis me ütleme, et väljavõtte maht on n .

§ 3. V ä l j a v õ t t e r e p r e s e n t a - t i i v s u s .

Et väljavõtte põhjal tuleb teha järeldusi üldkogumi kohta, on tarvis teada, kuidas on kõige otstarbekam väljavõtet valida. Täpsemini, tuleb vastata kahele küsimusele:

1) kui suur peab olema väljavõtte maht n ?

ja

2) millised indiviidid üldkogumist valida väljavõttesse?

Väljavõtet, mille maht on piisav selleks, et teha nõutava täpsusega järeldusi, ning mis on sobivalt valitud, nii et tema põhjal tehtud järeldused ühtivad (nõutava täpsuse piires) olukorraga üldkogumis, nimetatakse representatiivseks (ehk esinduslikuks).

Esimesele küsimusele on võimalik vastata, kasutades statistika tulemusi, kui on teada:

- 1) üldkogumi jaotus P_X ;
- 2) küsimus üldkogumi kohta, millele tuleb väljavõtte põhjal vastus anda;
- 3) eksimise tõenäosuse suurus.

Ilmselt tekib siin loogiline ring - esimesele küsimusele me ju ei tea vastust - muidu ei teekski me statistilisi uurimusi. Siit aga järeldub tõsiasi, et pole võimalik midagi ette öelda vajaliku väljavõtte kohta, kui me üldkogumi kohta mitte midagi ei tea. Küll aga saame me väga sageli juba suhteliselt väikese väljavõtte põhjal (mis ilmselt pole piisav meile vajalike nõutava täpsusega järelduste tegemiseks) hinnata ka nõutava informatsiooni saamiseks vajaliku täiendava väljavõtte mahtu.

Vastused küsimustele 2) ja 3) on meil tavaliselt uurimise algul teada; siinjuures sõltub küsimuse 3) vastus muide konkreetsest uurimisobjektist, vaadeldava teadusharu uurimiste tavast jne., olles suurelt osalt suvaline.

Muidugi tuleb märkida, et sageli on võimalik mingite varem tehtud analoogiliste uurimuste põhjal anda teatav aprioorne hinnang ka uuritava juhusliku suuruse jaotusele, seega vastata ligikaudselt ka küsimusele 1) ning selle põhjal hinnata ette ka vajaliku väljavõtte mahtu. Nii näiteks on kokkuleppelised väljavõtte mahud kasutusel keelestatistikas jne.

Teine küsimus - millised inividid valida väljavõttesse - on väga oluline, kuid samal ajal ka hoopis keerukam.

Kahtlemata annab valesti tehtud väljavõtte moonutatud pildi üldkogumi kohta. Teisest küljest puuduvad aga statistilised kriteeriumid, mille järgi oleks lihtne kontrollida, kas väljavõtte esindab üldkogumit õigesti - väljavõtte õigsuse määramine kuulub suurel määral selle konkreetse teadusharu kompetentsi, mille valdkonnas toimub uurimine.

Statistiliselt on väljavõtte valikuprintsiip õige siis, kui igal üldkogumi indiviidil on võrdne tõenäosus sattuda väljavõttesse.

On lihtne tuua näiteid väljavõtete kohta, kus ilmselt see nõue ei ole täidetud.

Näiteks kui kilude kaalu määramisel väljavõtteks võetakse mingi väljapüük suurte aukudega võrgu või noodaga, siis ilmselt on väikestel kaladel (kes läbi võrgu silmade mahuvad) hoopiski väike tõenäosus väljavõttesse sattuda.

Gripihaigete uurimisel ei sobi väljavõtteks mingi arsti poole pöördunute hulk, sest kergelt haigetel (madala temperatuuriga) on ilmselt väiksem tõenäosus sellesse väljavõttesse sattuda (sellised haiged ei pöördu arsti poole).

Sageli sobib väljavõtte tegemisel kasutada mingit teist tunnust, mis uuritavast ei sõltu, ning valida selle tunnuse teatud väärtusele vastavad indiviidid väljavõttesse.

Näiteks, kui oletada, et kilude kaal ei sõltu sellest, millise mere piirkonnas nad liiguvad (s.t. igasuguse suurusega kilusid leidub kõigis mere piirkondades, ning nende arvulised vahekorrad on igal pool ühesugused), siis oleks õige püüda teatavast piirkonnast (mingil viisil) välja kõik kilud ning saadud väljavõtte võiks osutada representatiivseks.

Omaette küsimus on, kas tehtud eeldus on õige (sellele saab vastata üksnes täiendav uurimine või vaadeldavas teadusharus varem kindlakstehtud seaduspärasused) ning kas valik toodud printsiibil on põhimõtteliselt võimalik.

Näiteks rahvaküsitlusel (sotsioloogilistel uurimistel) valitakse uuritavasse väljavõttesse iga elanik teatava majaanvõi korterinumbriga korterist (majast), oletades, et arvamus ühe või teise nähtuse kohta ei sõltu majaanvõnumbrist (korterinumbrist). Samuti, tehes väljavõtet mingist isikute nimekirjast, võib valida näiteks kõik K tähega algava nimega isikud - oletades, et uuritav tunnus on sõltumatu nime algustähest jne.

Lisaks sellele on õige nõuda, et iga üksik vaatlustulemus oleks igast ülejäänust sõltumatu. Seetõttu ei ole õige võtta üht indiviidi korduvalt väljavõttesse (näiteks kala, kes on kord mõõdetud, kaalutud, vette lastud ning teistkordselt mõõtmisele sattunud, tuleks kõrvale heita). Tavaliselt välistab juba valikuprintsiip seda, kuid mõnikord tuleb sellele erilist tähelepanu pöörata. Näiteks uurides antropoloogilisi tunnuseid isikutel ning võttes väljavõtteks ühe tähega algavate nimedega indiviidide hulga võime sattuda kogemata sugulastele, kellel on uuritava tunnuse väärtused valdavalt ühesugused, s.t. üksikindiviidid on sõltuvad; samuti ei sobi nime algustähe järgi tehtud valik näiteks indiviidi rahvusliku jaotuse uurimiseks, kuna tunnused on sõltuvad (vrd. nimesid algustähtedega B ja Ö).

Edaspidi käsitledes väljavõtet eeldame alati, et ta on representatiivne, s.t. indiviidid on väljavõttesse valitud

nii, et igal üksikul on võrdne tõenäosus sellesse väljavõttesse sattuda ning et üksikindiviidid on sõltumatud.

§ 4. Väljavõtte korrastamine.

1. Variatsioonrida.

Olgu meil antud väljavõtte mahuga n :

$$x_1, x_2, \dots, x_n. \quad (1)$$

Sageli on enne selle töötlemise algust otstarbekas teda mingil viisil korrastada.

Üks tavalisemaid mooduseid on väljavõtte järjestamine (kas kasvavas või kahanevas järjestuses). Nii saame lähteväljavõtte (1) asemele järjestatud väljavõtte ehk variatsioonrea

$$x_1', x_2', \dots, x_n',$$

kus

$$x_1' \leq x_2' \leq \dots \leq x_n' \quad \text{või} \quad x_1' \geq x_2' \geq \dots \geq x_n'.$$

Et kasvava ja kahaneva variatsioonrea käsitlemisel ei ole põhimõttelist erinevust, siis vaatleme edaspidi nimelt kasvavat variatsioonrida. Küll aga tuleb käsitluses vahet teha, kas veadeldavas variatsioonreas on kõik indiviidid erinevad (vt. § 6, p.1), a.t. kas kehtivad võrratused

$$x_1' < x_2' < \dots < x_n', \quad (2)$$

või on ka ühtelangevaid väärtusi (vt. § 6, p.3), s.t. saaksime variatsioonreas ainult m ($m < n$) erinevat väärtust

$$\begin{cases} x_1'', x_2'', \dots, x_m'', \\ x_1'' < x_2'' < \dots < x_m'', \end{cases} \quad (3)$$

kusjuures i -s väärtus x_i esineb n_i korda ($i=1,2,\dots,m$),

s.t. saaksime moodustada tabeli:

Tabel 11.

x_1	x_2	...	x_m
n_1	n_2	...	n_m

kusjuures

$$n_1 + n_2 + \dots + n_m = n.$$

(muidugi võivad mõned sagedused n_i olla ka võrdsed ühega).

2. Variatsioonirea ulatus ja mediaan.

Variatsioonirea uurimisel pakub erilist huvi variatsioonirea maksimaalne ning minimaalne element

$$\max_i x_i = x_n',$$

$$\min_i x_i = x_1'$$

ning samuti nende erinevus - variatsiooni ulatus ehk haare

$$h = x_n' - x_1'.$$

Samuti on vahel kasulik määrata variatsioonires keskmine liige - väljavõtte mediaan. Kui n on paaritu arv: $n = 2p-1$, siis on mediaaniks variatsioonirea liige järjekorranumbriaga p ;

$$\text{med} = x_p. \quad (4)$$

Kui aga n on paarisarv $n=2p$, siis loetakse mediaaniks kahe keskmise liikme poolsummat

$$\text{med} = \frac{x_p + x_{p+1}}{2}. \quad (5)$$

Näide 29.

Oletame, et mõõtsime õpilaste pikkusi ja saime mõõtmistulemuse (cm-tes)

147, 152, 138, 144, 150, 139, 143.

Saadud väljavõtte maht $n=7$, variatsioonrida ja selle kaudu leitavad karakteristikud on järgmised:

138, 139, 143, 144, 147, 150, 152.

$$\max_i x_i = 152,$$

$$\min_i x_i = 138,$$

$$h = 152 - 138 = 14,$$

$$\text{med} = 144.$$

3. Variatsioonrea kvartiilid ja sekstiilid.

Vaatleme veel, kuidas leida variatsioonrea kvartiile ja sekstiile.

Ilmselt on alumiseks kvartiiliksi \bar{q}_a niisugune element variatsioonreas, millest $\frac{1}{4}$ elementidest jääb vasakule, kuna alumisest sekstiilist peab vasakule jääma $\frac{1}{6}$ elementidest; samuti peab ülemisest kvartiilist ning sekstiilist paremale jääma vastavalt $\frac{1}{4}$ ning $\frac{1}{6}$ kõigist elementidest. Kuna sageli täpselt sellist elementi ei leidu, võetakse selleks lähim element ning arvutatakse linnang selle järgi.

Näide 30. Olgu meil variatsioonreas 40 elementi. Leiame selle väljavõtte kvartiilid ja sekstiilid.

10. element jagab variatsioonrea suhtes $9:30=0,30$, 11. element aga suhtes $10:29=0,345$. Et alumine kvartiil peaks variatsioonrea jagama suhtes $\frac{1}{4} : \frac{3}{4} = 0,333$, siis on teine suhe õigele lähemal ning 11. element alumiseks kvartiiliksi sobivam.

Teine kvartiil tuleks valida nii, et kahe kvartiili vahela jääks just pool variatsioonrea elementidest. Selles mõttes on sobiv 31. element, sest 11. ja 31. elemendi vahel

elemendid 12, 13, ..., 29, 30, kokku 19; väljapoole kvartile jääb samuti 19 elementi - nimelt 1, ..., 10 ja 32, ..., 40.

Seega saame

$$\bar{q}_a = x'_{11} \quad \bar{q}_u = x'_{31} .$$

Samuti leiame sekstiilid. Valides 7. elemendi alumiseks sekstiiliks, saame suhte $6:33 = 0,182$; valides 8. elemendi, saame $7:32 = 0,219$. Vajalikule suhtele $\frac{1}{6} : \frac{5}{6} = 0,200$ on mõlemad praktiliselt võrdsel kaugusel. Valinud

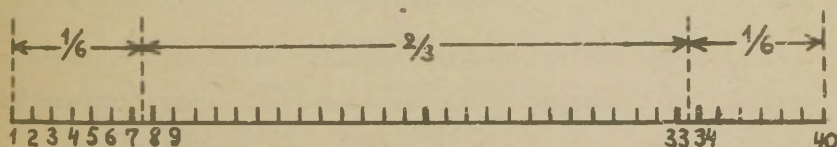
$$\bar{s}_a = x'_7 ,$$

tuleb määrata \bar{s}_u nii, et \bar{s}_a ja \bar{s}_u vahele jääks $\frac{5}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$ elementidest. Et ülejäänud elemente on $38, \frac{2}{3} \cdot 38 = 25,33 \approx 25$, siis on ülemiseks sekstiiliks element järjekorranumbri-
ga $7+25+1 = 33$, seega

$$\bar{s}_u = x'_{33} .$$

* Märkime, et toodud eeskiri sekstiilide (aga samuti ka kvartiilide) arvutamiseks ei ole ühene.

Alumiseks sekstiiliks sobib võrdselt kas 7. või 8. element. Kuna sekstiilid paiknevad sümmeetriliselt, siis sobib ülemiseks sekstiiliks võrdselt lõpust 7. või 8. element, seega element järjekorranumbri-
ga 33 või 34 (vt. joonis 22).



Joonis 22.

Kokkuvõttes on 4 võimalust sekstiilide valikuks:

1) $S_a = x'_7$, $S_{\bar{u}} = x'_{33}$;

(mõlemad sekstiilid on alahinnatud, nende vahe aga hinnatud võimalikult täpselt);

2) $S_a = x'_8$, $S_{\bar{u}} = x'_{34}$;

(mõlemad sekstiilid on ülehinnatud, nende vahe aga hinnatud võimalikult täpselt);

3) $S_a = x'_7$, $S_{\bar{u}} = x'_{34}$;

(alumine sekstiil on alahinnatud, ülemine ülehinnatud; nende vahe on ülehinnatud);

4) $S_a = x'_8$, $S_{\bar{u}} = x'_{33}$;

(alumine sekstiil on ülehinnatud, ülemine sekstiil alahinnatud; sekstiilide vahe on alahinnatud).

Et sekstiile (ja kvartile) kasutatakse tavaliselt juhusliku suuruse hajuvuse määramisel ning sealjuures on oluline nimelt nende vahe, siis on sobivaimad sellised võimalused, kus sekstiilide vahe on hinnatud võimalikult täpselt, s.o. kombinatsioonid 1) ja 2). Need omavahel on aga teoreetiliselt võrdväärsed.

— * —

§ 5. V ä l j a v õ t t e k l a s s i f i t s e e r i m i n e .

Juhul kui variatsioonrida sisaldab väga palju erinevaid väärtusi, on otstarbekas väärtused sobivalt klassifitseerida. Informatsiooni kaotamiseks on tühine, kui 50-100 erineva väärtuse asemel töötada 10-15 klassiga, võit tööjõudluses aga oluline.

Väga sageli on aga otstarbekas materjal kohe koguda klassifitseerituna; siis tuleb aga klasside piirid enne materjali kogumist ette määrata.

Klasside piiride määramiseks on järgmised võimalused:

1^o on teada $\max_i x_i$ ja $\min_i x_i$ ning on ette antud klasside arv m . Leiame siis klassi pikkuse:

$$\frac{\max_i x_i - \min_i x_i}{m} = d$$

ning määrame seejärel klasside otspunktid:

$$a_0 = \min_i x_i; \quad a_1 = a_0 + d, \dots, \quad a_m = a_0 + md = \max_i x_i.$$

Esimesse klassi kuuluvaks loeme kõik indiviidid x_i , mis rahuldavad tingimusi

$$a_0 \leq x_i < a_1,$$

klassi j kõik indiviidid, mis rahuldavad tingimusi

$$a_{j-1} \leq x_i < a_j, \quad j = 1, 2, \dots, m-1$$

ning viimasesse klassi kõik indiviidid, mille puhul kehtivad võrratused

$$a_{m-1} \leq x_i \leq a_m.$$

Sellisel klassifitseerimisel on aga puudusi:

- 1) $\max_i x_i$ ja $\min_i x_i$ väärtusi on tarvis ette teada;
- 2) klasside piirideks a_j ei tule ümmargused arvud, mistõttu nendega on tülikas opereerida.

2^o Teine võimalus klasside valikuks on järgmine.

Määrame ligikaudu piirkonna, kuhu vaadeldavad väärtused võivad sattuda; valime seal klasside piirideks sobivad ümmargused arvud (täiskümned, viielised, ühikud) selliselt, et kõik vahe-
mikud oleksid võrdsed ning nende arv oleks enam-vähem sobiv.

Muu mõttekäik on analoogiline eelnevale juhule. Muidugi tuleb sellisel juhul arvestada võimalust, et mõni äärmine klass jääb tühjaks (siis võib ilmselt klasside arvu vähendada) või mõni indiid tuleb väljapoole klasse (siis tuleb klasside arvu suurendada). Kui aga mõni vahepealne klass tühjaks jääb, tuleb see igal juhul säilitada - väljavõtet iseloomustab ka see fakt, et sellesse klassi indiidide ei sattunud.

3^o Mõningal juhul osutub otstarbekaks ka ebavõrdsete klasside kasutamine. Selliste variatsiooniridade puhul tuleb aga järelduste tegemisel ettevaatlik olla, siis ei saa vahetult üle kanda kõiki tulemusi, mis on õiged võrdsete klasside juhu jaoks.

§ 6. E m p i i r i l i n e j a o t u s .

Väljavõtte iseloomustamiseks on sobiv kasutada väljavõtte jaotust ehk nn. empiirilist jaotust. Empiiriline jaotus defineeritakse kui sellise diskreetse juhusliku suuruse jaotus, mis rahuldab järgmisi tingimusi:

- 1) juhusliku suuruse väärtusteks on parajasti väljavõtte indiidide väärtused

$$x_1, x_2, \dots, x_n;$$

- 2) kõigi väärtuste esinemise tõenäosused on võrdelised nende esinemisarvudega väljavõttes:

$$P(X = x_i) = \frac{n_i}{n},$$

kui väärtus x_i esineb väljavõttes n_i korda.

1. Kordumatute väärtustega variatsioonrea empiirilise jaotus.

Seega juhul, kui meil on väljavõtte esitatav kordumatute väärtustega variatsioonreana¹³(1), on selle väljavõtte jaotus esitatav valemiga

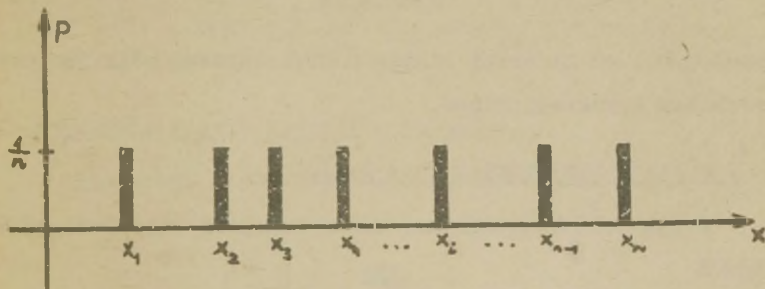
$$P(X = x_i) = \frac{1}{n} \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

tabeli kujul

Tabel 12.

X	x_1	x_2	...	x_n
P	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$...	$\frac{1}{n}$

ning graafikuna (vt. joonis 23).



Joonis 23.

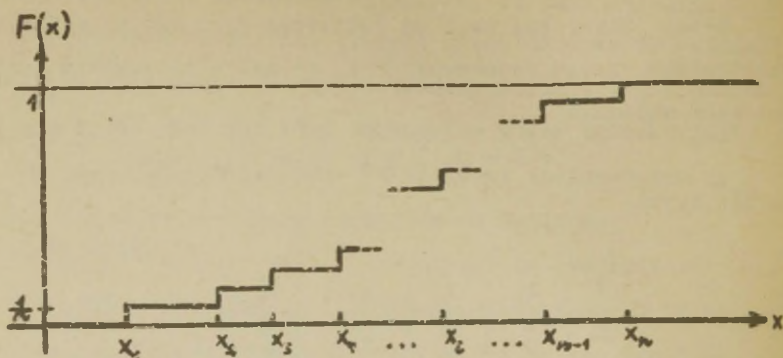
Toodud andmete järgi on ilmselt lihtne esitada ka empiirilist jaotusfunktsiooni $F(x)$ valemina¹⁴

$$F(x) = \frac{k}{n}, \text{ kui } x_k < x \leq x_{k+1}.$$

¹³ Käesoleva paragrahvi ulatuses tähistame variatsioonrea i -ndat elementi x_i lihtsuse mõttes sümboliga x_i ning kordumatute väärtustega variatsioonrea i -ndat elementi x_i samuti sümboliga x_i .

¹⁴ Kui ei ole karta väljavõtte empiirilise jaotusfunktsiooni $F(x)$ segiminekut juhusliku suuruse X tegeliku jaotusfunktsiooniga $F(x)$ (mis tavaliselt on tundmata), siis märgime lihtsuse mõttes empiirilise jaotusfunktsiooni sümboliga $F(x)$.

ning graafikuna (vt. joonis 24).



Joonis 24.

Antud juhul on ka eriti lihtsalt arvestatavad kõik jaotuse arvulised karakteristikud.

2. Arvuliste karakteristikute leidmine.

Väljavõtte keskväärtus, mille edaspidi tähistame sümboliga \bar{x}

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (6)$$

ühtib väljavõtte aritmeetilise keskmisega. Kirjutame välja ka avaldise väljavõtte dispersiooni

$$G^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2, \quad (7)$$

standardhälbe

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (8)$$

ja absoluutse hälbe

$$\tilde{k} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}| \quad (9)$$

arvutamiseks.

3. Korduvate väärtustega variatsioonrea empiiriline jaotus.

Korduvate väärtustega variatsioonrea jaotus on esitatav järgmise tabelina

Tabel 13.

x_1	x_2	...	x_m
$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$...	$\frac{n_m}{n}$

Siin on väärtuse x_i esinemise tõenäosus seda suurem, mida suurem on tema sagedus väljavõttes. Empiiriline jaotusfunktsioon on sel juhul kujuga

$$F(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n_i, \text{ kui } x_k < x \leq x_{k+1}.$$

4. Arvuliste karakteristikute leidmine.

Väljavõtte keskvärtus arvutatakse vaadeidaval juhul valemist

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n_i x_i \quad (10)$$

ja väljavõtte dispersiooni avaldis on

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n_i (x_i - \bar{x})^2, \quad (11)$$

5. Näiteid.

Näide 31.

Arvutame näites 29 esitatud väljavõtte jaoks keskvärtuse ja hajuvuse karakteristikud.

Arvutamisel võime kasutada nn. "ajutise keskmise võtet", mis baseerub keskvärtuse omadustele 1^o ja 3^o. Kõik vaatlustulemused x_i võime esitada kujul

$$x_i = c + y_i.$$

Siis

$$\bar{x} = c + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = c + \bar{y}$$

ja dispersiooni omaduse 3^o põhjal

$$DX = DY = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2.$$

Valime konstandiks $c = 140$. Nüüd saame arvutused teostada hoopiski väiksemate arvudega y_i :

$$-2, -1, 3, 4, 7, 10, 12.$$

$$\bar{y} = \frac{1}{7} (-2-1+3+4+7+10+12) = 33:7 = 4,7,$$

$$DY = \frac{1}{7} (4+1+9+16+49+100+144) - 4,7^2 = 46,1-22,1 = 24,0.$$

$$\text{Seega } \bar{x} = 140 + \bar{y} = 144,7,$$

$$\sigma^2 = 24, \quad \sigma = \sqrt{24} = 4,9.$$

Arvestades juba leitud EX väärtust, oleksime võinud DY arvutamist veelgi lihtsustada, valides $x'_i = c' + z_i$, kus $c' = 145$; siis ilmselt $\bar{z} = -0,3$ ja z_i väärtused on

$$-7, -6, -2, -1, 2, 5, 7$$

ning

$$DZ = DX = \frac{1}{7} (49+36+4+1+4+25+49) - 0,3^2 = \frac{168}{7} - 0,09 = 24.$$

Saadud DX väärtus on isegi täpsem, sest EX ümardamisviga mõjutab tulemust vähem.

Näide 32.

Kirjeldagu järgnev tabel ühe algkooli õpilaste vanuseid.

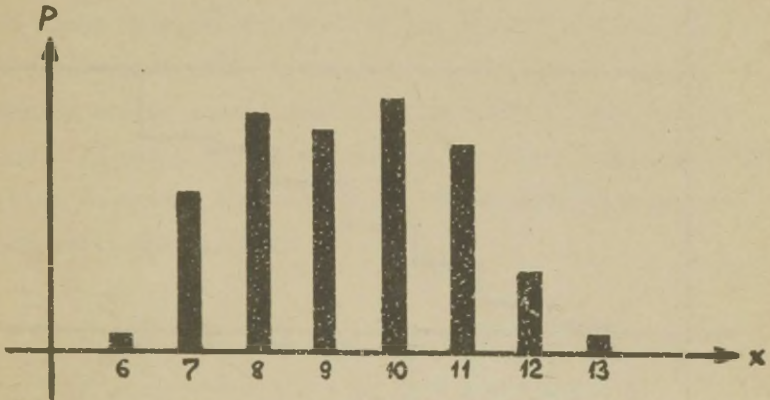
Tabel 14.

6	7	8	9	10	11	12	13
1	10	15	14	16	13	5	1

Ilmselt jaotuse tabeliks on siin tabel 15, sellele vastav graafik aga on esitatud joonisel 25.

Tabel 15.

6	7	8	9	10	11	12	13
$\frac{1}{75}$	$\frac{10}{75}$	$\frac{15}{75}$	$\frac{14}{75}$	$\frac{16}{75}$	$\frac{13}{75}$	$\frac{5}{75}$	$\frac{1}{75}$



Joonis 25.

Jaotusfunktsiooni (tabel 16) graafikut kujutab joonis 26.

Tabel 16.

x_1	6	7	8	9	10	11	12	13
$F(x_1)$	$\frac{1}{75}$	$\frac{11}{75}$	$\frac{26}{75}$	$\frac{40}{75}$	$\frac{56}{75}$	$\frac{69}{75}$	$\frac{74}{75}$	1

Näeme, et erinevalt joonisel 24 kujutatud graafikust on siin hüpped erineva pikkusega (vrd. hüpet kohal 6, 7 ja 8).

Arvutame nüüd ka keskväärtuse

$$\bar{x} = 9 + \frac{1}{75} \cdot 1 \cdot (-3) + 10 \cdot (-2) + 15 \cdot (-1) + 16 \cdot 1 + 13 \cdot 2 + 5 \cdot 3 +$$

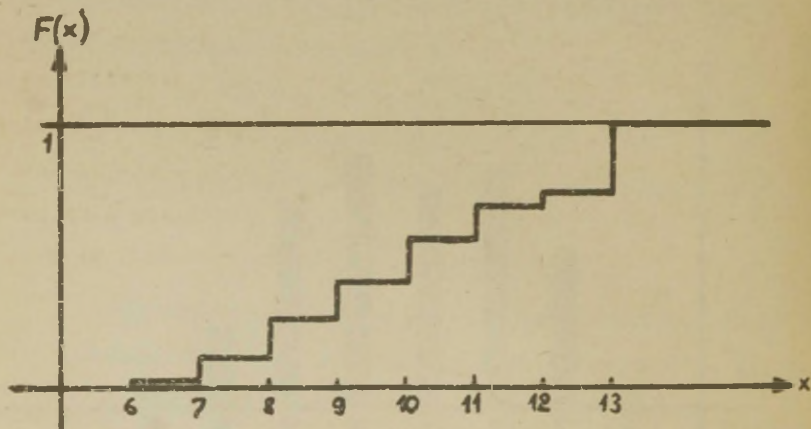
$$+ 1 \cdot 4 = 9 + \frac{1}{75} 3(5-1) + 2(13-10) + 1 \cdot (16-15) + 4 \cdot 1 =$$

$$= 9 + \frac{1}{75} 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 1 + 1 \cdot 4 = 9 + \frac{23}{75} \approx 9,31;$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{75} 3^2(5+1) + 2^2(13+10) + 1^2(16+15) + 4^2 \cdot 1 - 0,31^2 =$$

$$= \frac{193}{75} - 0,10 \approx 2,48,$$

$$\sigma = 1,58.$$



Joonis 26.

Lihtne on leida selles näites ka mediaani. Et $75 = 2 \cdot 38 - 1$, siis on mediaaniks variatsioonirea 38. liige. Loendame variatsioonirea liikmed ja esitame ülevaatlikkuse mõttes loendamise tulemuse tabelina (vt. tabel 16).

Tabel 17.

x_i väärtus	6	7	8	9	10	11	12	13
Järjekorranumb- rid	1	2-11	12-26	27-40	41-56	57-69	70-74	75

Seega on mediaaniks variatsioonirea 38. liige, mille väärtuseks on 9.

Kasutades näites 29 toodud metoodikat, võime leida ka kvartiilid. Saame

$$\frac{1}{4}(75-1) = 18,5 \approx 18; \quad 18+1 = 19; \quad q_a = 8;$$

$$\frac{1}{2}(75-2) = 36,5 \approx 37; \quad 19+37+1 = 57; \quad q_{ii} = 11;$$

$$\frac{1}{6}(75-1) = 12,33 \approx 12; \quad 12+1 = 13; \quad s_a = 8;$$

$$\frac{2}{3}(75-2) = 48,67 \approx 49; \quad 13+49+1 = 63; \quad s_{ii} = 11.$$

Ülemise kvartiili puhul annaksid 56. ja 57. element mõlemad võrdse veaga kvartiilide vahe. Et aga ülemist kvartiili mitte liiga palju alahinnata, loeme selleks 57. elemendi. Kui meid ei rahulda saadud kaunis jäme hinnang sekstiilidele ja kvartiilidele (jämedus ilmneb sellestki, et sekstiilid ning kvartiilid on vastavalt võrdsed!), siis võime arvestada ka elementide paiknemist klassis (vt. § 7).

§ 7. E m p i r i l i n e j a o t u s k l a s s i -
f i t s e e r i t u d v ä ä r t u s t e
k o r r a l.

1. Võrdsed klassid.

Olgu meil klassifitseeritud jaotused antud kujul

Tabel 18.

Klasside piirid	$[a_0, a_1)$	$[a_1, a_2)$	$[a_2, a_3)$...	$[a_{m-1}, a_m]$
Sagedus	n_1	n_2	n_3	...	n_m
Tõenäosus	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	$\frac{n_3}{n}$...	$\frac{n_m}{n}$

Näeme, et tabel on formaalselt sarnane korduvate väärtus-
tega variatsioonrea jaotustabelile, ainsaks erinevuseks on, et
siin kuulub poolõigu $[a_{i-1}, a_i)$ n_i indiviidi, seal aga olid
 n_i indiviidi võrdsed väärtusega x_i^n .

Vastavalt sellele tekib siin küsimus, kuidas paiknevad
need n_i indiviidi klassis $[a_{i-1}, a_i)$.

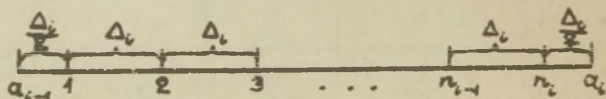
Sageli on täiesti piisav, kui loeme kõik need indiviidid
paiknevateks poolõigu keskpunktis $\frac{a_{i-1} + a_i}{2}$. Sel korral
taandub vaadeldav jaotus täpselt paragrahvis 6 kirjeldatud
jaotuseks; analoogiliselt võib esitada tema jaotuse ning
jaotusfunktsiooni graafikud, samuti saab arvutada arvulised
karakteristikud:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m \frac{a_{i-1} + a_i}{2} n_i, \quad (12)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m n_i \left(\frac{a_{i-1} + a_i}{2} - \bar{x} \right)^2. \quad (13)$$

2. Indiviidide paigutus klassis.

Mõningate ülesannete lahendamisel on aga vaja täpsemalt
analüüsida indiviidide paigutust klassis. Sel korral eelda-
takse tavaliselt, et kõik indiviidid paiknevad klassis üht-
laste vahedega (vt. joonis 27), kusjuures erinevates klassi-
des on indiviidide vahekaugused loomulikult erinevad.



Joonis 27.

Sel korral arvutatakse indiviidide vahekaugus

$$\Delta_i = \frac{d}{n_i}, \quad (14)$$

kus d on klassi pikkus, $d = a_i - a_{i-1}$ ning paigutatakse klassi $[a_{i-1}, a_i)$ kuuluvad n_i indiviidi järgmistesse punktidesse:

$$a_{i-1} + \frac{\Delta_i}{2}, a_{i-1} + \frac{3\Delta_i}{2}, \dots, a_{i-1} + \frac{(2n_i-1)\Delta_i}{2} = a_i - \frac{\Delta_i}{2}. \quad (15)$$

Saadud valemit on sobiv kasutada $\max_i x_i$ ja $\min_i x_i$ arvutamiseks juhul, kui nende väärtused ei ole teada (andmed koguti kohe klassifitseerituna). Samuti saab valemi (15) abil leida mediaani, kvartiilide, sekstiilide jt. kvantiilide täpsenaid väärtusi (vrd. näiteid 32 ja 33).

Kasutades valemit (15) elementide paiknemise määramiseks, on meil võimalik täpsustada ka jaotusfunktsiooni graafikut (vt. joonis 29). Näeme, et küllaltki hea lähendi empiirilise jaotusfunktsiooni graafikule saame, ühendades klassifitseeritud jaotuse jaotusfunktsiooni tabelid (vt. tabel 20). Leitud punktid (joonisel tähistatud ringikestega) ühendatakse mitte treppjoonega, vaid kaldlõikudest koosneva murdjoonega.

3. Arvuliste parameetrite leidmine, Sheppardi parandus.

Arvutame ka keskväärtuse, seeldades, et igas klassis jagunevad elemendid ühtlaselt. Selleks arvutame kõigepealt klassi i kuuluvate elementide keskmise

$$\begin{aligned} \bar{x}_i &= \frac{1}{n_i} (a_{i-1} + \frac{\Delta_i}{2} + a_{i-1} + \frac{3\Delta_i}{2} + \dots + a_{i-1} + \frac{2n_i-1}{2} \Delta_i) = \\ &= \frac{1}{n_i} n_i a_{i-1} + \frac{1}{2n_i} \Delta_i (1+3+\dots+(2n_i-1)) = a_{i-1} + \frac{n_i(1+2n_i-1)}{2} \Delta_i \\ & \quad \times \frac{\Delta_i}{2n_i} = a_{i-1} + \frac{n_i \Delta_i}{2} = \frac{a_{i-1} + a_i}{2}. \end{aligned}$$

Arvutuse juures kasutatakse aritmeetilise progressiooni valemite ja Δ_1 definitsiooni (vt. valem (14)).

Üldkeskmine on klassikeskmiste kaalutud keskmine

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^m n_i}{n} \bar{x}_i = \sum_{i=1}^m \frac{n_i}{n} \left(\frac{a_{i-1} + a_i}{2} \right).$$

Seega saame üksikindviidide paiknemist arvestades sama kesk-
väärtuse kui sel juhul, kui oletaksime, et kõik antud klassi
kuuluvad indiviidid asuvad klassi keskpunktis $\frac{a_{i-1} + a_i}{2}$.

Väljavõtte dispersioon sõltub aga ka indiviidide paigutamise klassis. Eeldades, et elemendid jagunevad klassis ühtlaselt, saaksime mõnevõrra hajuvama jaotuse, seetõttu suureneb ka sellisel korral veidi dispersioon. Juhuks kui kõigi klasside pikkused on võrdsed

$$a_i - a_{i-1} = d,$$

on tuletatud parandus (vt. näiteks 5), mis võimaldab klassikeskmiste järgi arvutatud dispersiooni hinnangut korrigeerida. Selle nn. Šneppardi paranduse väärtuseks on

$$\frac{1}{12}d^2,$$

seega parandatud dispersiooni väärtuseks oleks

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^m \left(\frac{a_i + a_{i-1}}{2} - \bar{x} \right)^2 \cdot n_i + \frac{1}{12}d^2.$$

Näide 33.

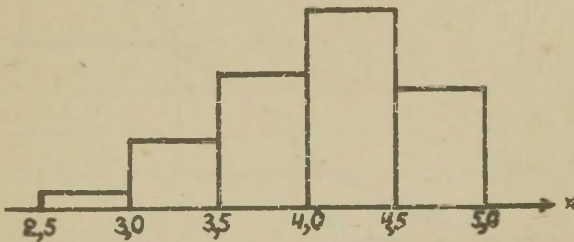
Olgu antud klassifitseeritud materjal järgneva tabeli¹⁵ näol.

¹⁵ Sümboli [2,50; 3,00) asemel kasutatakse praktikas sageli ka sümbolit 2,50-2,99, kusjuures sellega on näidatud ühtlasi mõõtmistäpsus (2 kümnendkohta) ning see, et maksimaalne indiviid vaadeldavast klassist on suurusega 2,99.

Tabel 19.

Hinnete keskmine	2,50-2,99	3,0-3,49	3,50-3,99	4,00-4,49	4,50-5,00
Õpilaste arv	1	5	10	15	9
Tõenäosus	0,025	0,125	0,25	0,375	0,225

Jaotuse illustreerimiseks esitame järgmise graafiku (vt. joonis 28).



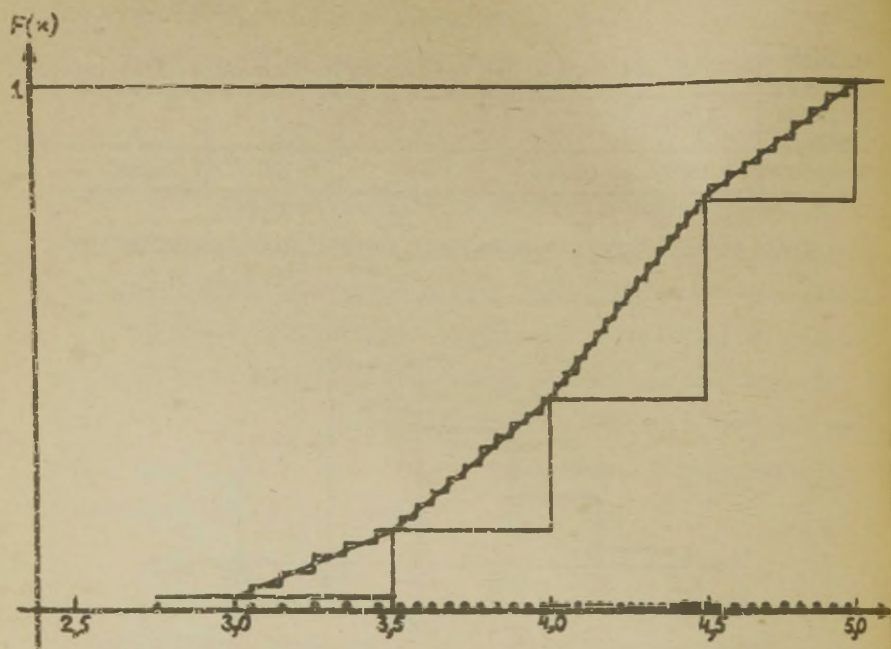
Joonis 28.

Tabeli 19 põhjal saame koostada ka empiirilise jaotusfunktsiooni tabeli (vt. tabel 20).

Tabel 20.

x	3,00	3,50	4,00	4,50	5,00
$F(x)$	0,025	0,150	0,400	0,775	1,00

Et saada täpsemaid tulemusi, leiame nüüd ka valemi (14) abil üksikindiviidide kohad klassis ning täpsustame vastavalt jaotusfunktsiooni graafikut (vt. joonis 29).



Joonis 29.

Klassi parima, halve ja keskmise õpilase hinded aga saaksime arvutada järgmiselt:

$$d = a_i - a_{i-1} = 3,00 - 2,50 = \dots = 5,00 - 4,50 = 0,50;$$

$$n_1 = 1, \quad \Delta_1 = \frac{d}{n_1} = 0,50;$$

$$x'_1 = a_0 + \frac{\Delta_1}{2} = 2,50 + 0,25 = 2,75$$

$$n_m = 9, \quad \Delta_m = \frac{d}{n_1} = 0,056;$$

$$x'_n = x'_{40} = a_m - \frac{\Delta_m}{2} = 5,00 - 0,028 = 4,97.$$

Keskmise õpilasi on praegu 2, need on järjekorras 20. ja 21. Mõlemate hinded on vahemikus 4,00 - 4,49, kusjuures nad on

vastavalt 4. ja 5. õpilane sellest hinnete rühmast. Mediaani arvutame vastavalt valemile (5).

$$\Delta_4 = \frac{0,50}{15} = 0,033 ;$$

$$x'_{20} = 4,00 + \frac{7}{2} \cdot 0,033 = 4,116;$$

$$x'_{21} = 4,00 + \frac{9}{2} \cdot 0,033 = 4,149$$

ning mediaaniks on

$$\frac{4,116 + 4,149}{2} = 4,133,$$

seega on keskmise õpilase hindeks 4,133.

Arvutame veel ka keskmise hinde kogu klassi jaoks (mitte keskmise õpilase hinde). See on

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{40} (1 \cdot 2,75 + 5 \cdot 3,25 + 10 \cdot 3,75 + 15 \cdot 4,25 + 9 \cdot 4,75) = \\ &= 4 + \frac{1}{40} (-1,25 - 5 \cdot 0,75 - 10 \cdot 0,25 + 15 \cdot 0,25 + 9 \cdot 0,75) = 4,075. \end{aligned}$$

Leiame ka hinnete hajuvust näitava dispersiooni ja standardhälbe

$$\sigma^2 = \frac{1}{40} (1,25^2 + 14 \cdot 0,75^2 + 25 \cdot 0,25^2) - 0,075^2 = 0,27.$$

$$\sigma' = 0,52.$$

Arvestades Sheppardi parandust saaksime aga dispersiooni

$$*\sigma^2 = 0,29$$

ja standardhälbeks

$$*\sigma = \sqrt{*\sigma^2} = 0,54.$$

4. Ebavõrdsed klassid.

Järgnevalt vaatleme näidet ebavõrdsete klassidega klassifitseeritud jaotuse kohta.

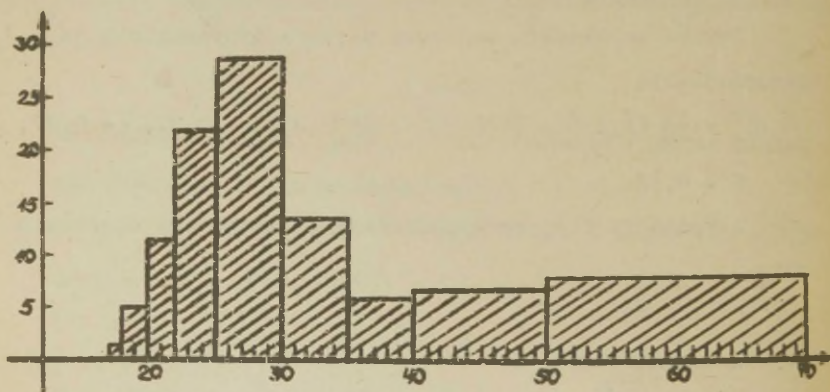
Näide 34. Tabelis 21 on antud mingi ajavahemiku vältel abiellunute vanused.

Tabel 21.

17	18-19	20-21	22-24	25-29	30-34	35-39	40-49	50-69
1	5	12	23	30	14	6	7	8
0,009	0,047	0,113	0,217	0,283	0,132	0,057	0,066	0,076

Sellise tabeli tõlgendamisel tuleb olla tähelepanelik, et mitte kinnitada, et abiellumus vanusevahemikus 30-34 on kõrgem kui vanusevahemikus 20-21 või koguni vanusevahemikus 50-69 on kõrgem kui vanusevahemikus 18-19.

Ka jaotuse graafikut ei ole õige teha mehhaaniliselt tõenäosuste järgi (vt. joonis 30), sest sellisel graafikul ei ole üksikute rühmade erinevuse tõenäosused võrdelised



Joonis 30.

graafikul kirjeldatud pindaladega ning seetõttu tekib tõsine valesti mõistmise oht (mida, muide, sageli võib kasvõi aja- kirjanduses kohata).

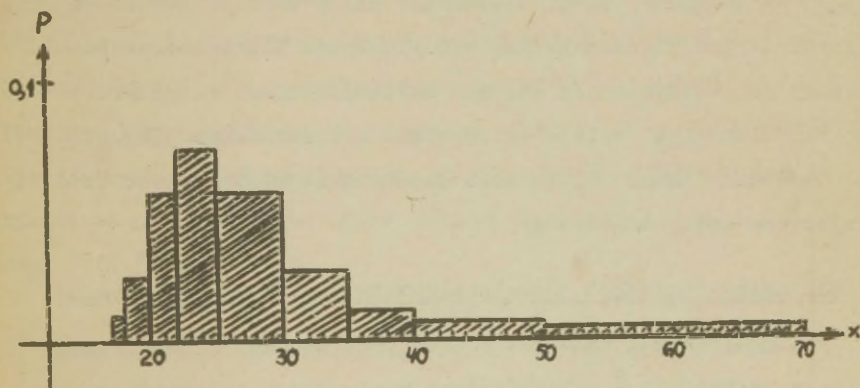
Õigem oleks arvutada igas rühmas abiellumise tõenäosus 1 aasta kohta. Teemegi seda tabelis 22, kus teise ritta on märgitud igale vahemikule vastav aastate arv.

Tabel 22.

17	18-19	20-21	22-24	25-29	30-34	35-39	40-49	50-69
1	2	2	3	5	5	5	10	20
0,0094	0,0236	0,0566	0,0724	0,0566	0,0264	0,0113	0,0066	0,0038

Tabeli 22 järgi koostatud graafik on esitatud joonisel

31.



Joonis 31.

Joonisel 31 näitab iga tulba kõrgus vastavasse vanuserühma kuuluvate isikute tõenäosust abielluda ühe aasta jooksul, iga tulba pindala aga on võrdeline vastavasse rühma kuuluvate isikute abiellumise tõenäosusega aja vältel, mil nad sellesse rühma kuuluvad.

Kuna arvilised parameetrid leitakse käesoleval juhul samuti kui võrdsetegi klasside juhul, siis seda me käesolevas näites ei tarvitse teha.

§ 8. "Valed" individide eristamine väljavõttes.

Sageli võib väljavõttesse sattuda elemente, mis ei kuulu uuritavasse üldkogumisse, nn. "valesid" elemente. Nii võib bioloogilise materjali uurimisel ühe liigi individide hulka sattuda isendeid teisest liigist, mingi füüsikalise konstandi mõõtmisel on mõni mõõtmine tehtud ilmsest korrast ära oleva instrumendiga jne.

Uurimistulemusi mõjutavad tugevasti eriti niisugused "valed" elemendid, mis ülejäanud individidel oluliselt erinevad. Niisugused "valed" elemendid, mille uuritav tunnus on ligikaudu sama väärtusega kui vaadeldavasse üldkogumisse kuulvatel individidel, ei mõjusta uurimistulemust kuigivõrd. Uurimistulemustes "valede" elementide arvestamisest põhjustatud jämedate vigade vältimiseks kasutatakse mitmeid meetodeid. Kirjeldame neist mõningaid.

1. Mõningate tugevasti kõrvalekalduvate elementide eristamine.

Normaaljaotuse tabelist on näha, et normaaljaotuse korral paikneb keskmiselt $\frac{2}{3}$ väljavõttesse kuuluvatest individidest vahemikus

$$(m - \sigma, m + \sigma),$$

kuna $\frac{1}{6}$ elementidest on väiksem kui $m - \sigma$, $\frac{1}{6}$ elementidest - suurem kui $m + \sigma$. Vahemikku $(m - 2\sigma, m + 2\sigma)$ kuulub ümmarguselt 95% väljavõttes sisalduvatest individidest ning vahemikku $(m - 3\sigma, m + 3\sigma)$ praktiliselt kõik (üle 99,9%) individid. See annabki õigustuse väljavõttest "välja visata" vä-

ga tugevasti keskmisest erinevaid indiviide, mille kohta me oletame, et nad kuuluvad normaaljaotusega üldkogumisse. On ju äärmiselt vähe tõenäone, et need vaadeldavasse üldkogumisse kuuluvad - tegemist on kas teisest üldkogumist pärinevate indiviidide või mõõtmisvigadega. Tuleb aga arvestada, et juba 100-indiivilises väljavõttes on tõenäosus selleks, et esineb vähemalt üks vahemikku ($m - 3\sigma$), $m + 3\sigma$) mittekuuluv indiivid $1 - 0,999^{100} \approx 0,1$. See aga tähendab, et kümnest sellisest väljavõttest keskmiselt ühes esineb nii suur (või suurem) kõrvalekaldumisega indiivid. Seetõttu tuleb olla suurte väljavõtete puhul väljaviskamisega ettevaatlik. Eriti suurte kõrvalekaldumiste (4σ ja rohkem) puhul tuleb aga kindlasti väljaselgitada, kas ei ole tegemist väärade elementidega, sest niisuguste kõrvalekaldumiste esinemise tõenäosus on ka suurte väljavõtete puhul tühiselt väike. Näiteks 1000-indiivilises väljavõttes on 4σ suuruse hälbe esinemise tõenäosus ligikaudu võrdne (vt. [8])

$$1000 \cdot 3,17 \cdot 10^{-5} = 0,0317,$$

s.t. umbes üks kord 30 väljavõtte kohta võib esineda nii suur kõrvalekaldumine.

Loomulikult tuleb peale "valede" elementide kõrvaldamist arutada kõik jaotuse karakteristikud uuesti.

2. Jaotuse "sabade mahalõikamine".

Kui on põhjust arvata, et jaotuse hulgas leidub "valesid" elemente, kuid need ei eraldu ülejäänutest väga tugevasti (näiteks on sama keskväärtuse, kuid mõnevõrra suurema dispersiooniga), siis kasutatakse sageli nn. "sabade mahalõikamist",

s.t. materjali uurimisel jäetakse välja 1-10% materjalist variatsioonid otstes (näiteks 2,5% kummastki otsast).

3. "Valede" elementide suhtes vähemtundlike meetodite kasutamine.

Kui ühel või teisel põhjusel ei ole võimalik "valesid" elemente eristada, kuid on siiski alust arvata, et neid väljavõttes leidub, siis võib kasutada tavaliste keskvaartuste ja dispersiooni asemel näiteks mediaani, kvartiile, keskmiist hälvet jne. Kuigi need nn. järkstatistikud on mõned omaduste poolest halvema kui keskvaartus ja dispersioon (vt. järgmine peatükk), on nad vähem tundlikud valede elementide esinemise suhtes.

III. PUNKTHINNANGUD.

§ 1. Parameetrite hindamise üldprobleem.

Sageli võime eeldada, et meid huvitava juhusliku suuruse X jaotus kuulub teatavasse tuntud klassi P_X . Nii näiteks on teada, et mõõtmisvead jaotuvad enamasti normaaljaotuse kohaselt, radioaktiivset lagunemist kirjeldab Poissoni jaotus jne. Et aga uuritavat jaotust täpselt kindlaks teha, on tarvis teada ka jaotust iseloomustavate konstantide - parameetrite arvulisi väärtusi. Nii on normaaljaotust iseloomustavateks parameetriteks keskvärtus m ja standardhälve σ (vt. valem (1.25)), Poissoni jaotust iseloomustab teatavasti üks parameeter λ , mis on üheaegselt keskvärtuseks ning dispersiooniks (vt. valem (1.28)).

Matemaatilise statistika ülesandeks on sel juhul määrata väljavõtte, s.t. uuritava juhusliku suuruse mingi väärtuste hulga põhjal tundmatutele parameetritele mingis mõttes sobivaimad väärtused. Seda on võimalik teha kahel viisil - punkt- ja vahemikhinnangute abil. Vaatleme kõigepealt punkthinnanguid kui mõnevõrra lihtsamaid.

§ 2. Funkthinnangud ja nende omadused.

Üks võimalus meie ülesande sõnastamiseks on järgmine:

Muritava juhusliku suuruse X jaotus P_X kuulub jaotuste klassi P_X . Jaotus P_X sõltub teatud hulgast parameetritest $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ (tavaliselt $k = 1, 2$ või 3). Selleks, et määrata juhusliku suuruse X jaotus täpselt, tuleb väljavõtte

$$x_1, x_2, \dots, x_n \quad (1)$$

põhjal anda parameetritele $\theta_1, \theta_2, \dots$ ja θ_k teatud mõttes sobivad väärtused.

Selline on probleemiseade punkthinnangute ülesande puhul.

Nagu näha, tuleb meil parameetrite hindamiseks moodustada väljavõttest testavad funktsioonid, mida tähistame sümboolitega v_1, v_2, \dots, v_k ,

s.t.

$$\begin{aligned} v_1 &= v_1(x_1, \dots, x_n), \\ v_2 &= v_2(x_1, \dots, x_n), \\ &\dots \dots \dots \\ v_k &= v_k(x_1, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (2)$$

lugesdes hinnatavad parameetrid võrseteks nende funktsioonide väärtustega:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= v_1(x_1, \dots, x_n), \\ \theta_2 &= v_2(x_1, \dots, x_n), \\ &\dots \dots \dots \\ \theta_k &= v_k(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

funktsioone v_1, v_2, \dots, v_k nimetatakse hinnanguteks. Et hinnangud sõltuvad väljavõttest, siis on nad juhuslikud suurused. Ilmselt ei saa juhuslikud suurused võrduda konstantidega

parameetrid on ju juhusest sõltumatud konstandid - seetõttu on ilmne, et võrdustega (2) leitud parameetri väärtused kindlasti (või täpsemalt: peaaegu kindlasti) erinevad parameetrite tegelikest väärtustest $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$.

Et siiski neid hinnanguid saaks kasutada ja valida kõikvõimalike hinnangute seast välja teatud mõttes parimad hinnangud, esitame hinnangutele järgmised nõuded:

1. Nihutamatus.

Hinnang peab olema nihutamata, s.t. hinnangu keskväertus peab võrduma hinnatava parameetri õige väärtusega:

$$\begin{aligned} E \hat{\nu}_1(x_1, \dots, x_n) &= \theta_1, \\ E \hat{\nu}_2(x_1, \dots, x_n) &= \theta_2, \\ \dots & \\ E \hat{\nu}_k(x_1, \dots, x_n) &= \theta_k. \end{aligned} \quad (3)$$

See tähendab seda, et hinnang ei sisalda süstemaatilist viga, me ei ala- ega ülehinda (süstemaatiliselt) oma uuritavat parameetrit ning keskmiselt osutub meie hinnang õigeks.

2. Efektiivsus.

Teiseks on loomulik nõuda, et hinnang hajuks võimalikult vähe (sel korral on ju iga kord hindamisviga suhteliselt väike), s.t. et hinnangu dispersioon oleks võimalikult väike.

* Valemina saaksime selle nõude esitada järgmiselt:

$$\begin{aligned} D(\hat{\nu}_1(x_1, \dots, x_n)) &= \min, \\ D(\hat{\nu}_2(x_1, \dots, x_n)) &= \min, \\ \dots & \\ D(\hat{\nu}_k(x_1, \dots, x_n)) &= \min, \end{aligned} \quad (4)$$

kusjuures miinimum on leitud kõigi võimalike hinnangute hulgast, mis on saadud sama mahuga väljavõtte põhjal. Niisuguste

hinnangute olemasolu kontrollimine on omaette matemaatiline probleem, millel me käesolevas pikemalt ei peatu (vt. näiteks [6] või [7]). Praktikas kasutatavatel juhtudel on enamasti siiski niisugused hinnangud.

Hinnangut, mis on nihutamata ning minimaalse dispersiooniga, nimetatakse efektiivseks. Efektiivsed hinnangud võimaldavad saavutada hindamisel nõutavat täpsust kõige väiksema mahuga väljavõtte korral.

Et efektiivseid hinnanguid pole alati võimalik kasutada (iga parameetri jaoks ei tarvitse selliseid üldse eksisteerida), siis on sobiv võtta kasutusele suurus, mis näitab, kui palju mingi nihutamata hinnang erineb efektiivsest hinnangust. Selliseks suurusena on hinnangu efektiivsus e , mis on defineeritud suhtena

$$e(\hat{\theta}) = \frac{D^*}{D\hat{\theta}}, \quad (5)$$

kus D^* on vaadeldava parameetri θ jaoks (antud väljavõtte põhjal) saadav minimaalne põhimõtteliselt võimalik dispersioon (efektiivse hinnangu dispersioon), aga $D\hat{\theta}$ on parasjagu uuritava hinnangu $\hat{\theta}$ dispersioon. Näeme seega, et efektiivse hinnangu efektiivsus on 1, iga teise hinnangu efektiivsus aga väiksem kui 1. Siinjuures mida suurem on hinnangu efektiivsus, seda lähemal efektiivsele on uuritav hinnang ning ühtlasi seda "ökonomsem" ta on. On võimalik näidata, (vt. [6], [7]) et kui efektiivset hinnangut kasutades saame uuritavat parameetrit vajaliku täpsusega hinnata väljavõtte põhjal, mille maht on n , siis kasutades hinnangut $\hat{\theta}$, mille efektiivsus on e , läheb sama täpsuse saavutamiseks vaja väljavõtet, mille

mahuks on

$$\frac{n}{e} .$$

Hinnangute "sama täpsuse" all mõistame seda, et hinnangute dispersioonid (või ka standardhälbed) on võrdsed.

3. Konsistentsus.

Kolmas loomulik nõue seisneb selles, et väljavõtte mahu suurenedes läheneks hinnangu väärtus (ükskõik missuguse väljavõtte korral) hinnatavale parameetrile.

* Matemaatiliselt saab selle nõude esitada selliselt:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_1(x_1, x_n) &\xrightarrow{P} \theta_1, \\ \mathcal{V}_2(x_1, \dots, x_n) &\xrightarrow{P} \theta_2, \\ &\dots\dots\dots \\ \mathcal{V}_k(x_1, \dots, x_n) &\xrightarrow{P} \theta_k, \end{aligned} \quad (6)$$

kus sümboliga \xrightarrow{P} on tähistatud koonduvust tõenäosuse järgi (vt. näiteks [3]), mis tähendab seda, et see koonduvus esineb mitte päris kindlasti, vaid kuitahes suure tõenäosusega (näiteks 1000 väljavõtte hulgast 999 juhul jne.). Hinnangut, mille korral kehtivad seosed (6), nimetatakse konsistentseks (veenvaks).

— * —

§ 3. P u n k t h i n n a n g u t e a s ü m p t o o - * t i l i s e d o m a d u s e d .

Et praktikas tuleb kasutada hinnanguid, mis ei ole niहुtamata või ei ole efektiivsed, esitame nõuete (3) ja (4) asemele mõnevõrra nõrgemad nõuded, mille täidetus sageli osutub praktiliste ülesannete lahendamiseks piisavaks.

Olgu n -indiviidilise väljavõtte põhjal arvutatud hinnang

$$\hat{y}(x_1, \dots, x_n) = \hat{y}^{(n)}.$$

Nimetame suurust

$$b_n(\hat{y}) = E(\hat{y}^{(n)}) - e \quad (7)$$

hinnangu $\hat{y}^{(n)}$ nihkeks (väljavõtte mahu n korral).

Juhul kui hinnang $\hat{y}^{(n)}$ on nihutamata, siis ilmselt $b_n(\hat{y}) = 0$ iga n korral.

1° Hinnang $\hat{y}^{(n)}$ on asümptootiliselt nihutamata, kui

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n(\hat{y}) = 0, \quad (8)$$

s.t., kui väljavõtte mahu lõpmatul suurenemisel läheneb hinnangu nihe nullile (ja seega hinnang läheneb nihutamata hinnangule).

2° Hinnang $\hat{y}^{(n)}$ on asümptootiliselt efektiivne, kui see hinnang on nihutamata (või asümptootiliselt nihutamata) ning tema efektiivsus läheneb ühele

$$e(\hat{y}^{(n)}) = \frac{D^2}{D(\hat{y}^{(n)})} \rightarrow 1. \quad (9)$$

Et sageli efektiivsus sõltub väljavõtte mahust, siis on väljavõtte mahu n lõpmatul suurenemisel otstarbekas hinnangu omaduste uurimisel peale efektiivsuse kasutada ka asümptootilist efektiivsust, mis on defineeritud efektiivsuse e piirväärtusena väljavõtte mahu n lõpmatul kasvamisel:

$$\bar{e} = \lim_{n \rightarrow \infty} e(\hat{y}^{(n)}).$$

Asümptootiliselt efektiivse hinnangu asümptootiline efektiivsus on 1.

— * —

§ 4. Keskväärtuse hinnangud.

Käesolevas, samuti ka kahes järgmises punktis, käsitleme peamiselt klassifitseerimata jaotusi, s.t. variatsioonritta on paigutatud juhusliku suuruse enese väärtused, (ükskõik, kas võrdsed või erinevad). Oletame, et parameetriks, mida meil tuleb hinnata, on keskväärtus m . Keskväärtuse hindamine osutub vajalikuks väga mitmesugustes statistika ülesannetes.

Näiteks mõõtmisteoorias eeldatakse tavaliselt, et puudub süstemaatiline viga (selle väite õigsuse kontroll kuulub mõõtmise metoodika valdkonda) ning et mõõtmisvead on normaaljaotusega, kusjuures süstemaatilise vea puudumise tõttu selle normaaljaotuse keskväärtuseks on 0. Et mõõtmistulemus võrdub mõõdetava suuruse ja mõõtmisvea summaga, siis on ka mõõtmistulemus normaaljaotusega, kusjuures selle normaaljaotuse keskväärtuseks on mõõdetava suuruse õige väärtus. Arusaadavalt on siis mõõdetava suuruse õigele väärtusele sobivaks hinnanguks mõõtmistulemuste keskväärtuse hinnang.

Et keskväärtus on üks juhuslikku suurust kõige paremini iseloomustavatest karakteristikutest, siis on keskväärtuse hindamine probleemiks ka mitmete teiste ülesannete korral, kus küll keskväärtusel ei tarvitse olla sellist sisulist tähendust nagu mõõtmise ülesandes.

1. Keskväärtuse hinnangute erinevaid kujusid.

Keskväärtusele võib konstrueerida mitmeid erinevaid hinnanguid. Toome siin näitena mõned:

Näide 35.

Keskväärtuseks loetakse lihtsalt esimene vaatlustulemus

$$m = x_1. \quad (10)$$

Näide 36.

Keskväärtuseks loetakse väljavõtte mediaan:

$$m = \text{med}(x_1, \dots, x_n) = \text{med}. \quad (11)$$

Näide 37.

Keskväärtuseks loetakse väljavõtte keskväärtus:

$$m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$
$$m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m n_i x_i^n,$$

märgime, et viimased kaks valemit võib esitada ka ühtsel kujul

$$m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (12)$$

Siin on võetud aritmeetiline keskmine kõigist vaatlustest (ilma neid variatsiooniritta järjestamata), mis täpselt võrdub valemitega (2,6) ning (2.10) antud väljavõtte keskväärtustega.

Näide 38.

Keskväärtuseks loetakse väljavõtte kaalutud keskmine

$$m = \sum_{i=1}^n x_i g_i, \quad (13)$$

kus kaalud g_i on suvalised arvud (tavaliselt $g_i \geq 0$), mis peavad rahuldama üksnes tingimust $\sum_{i=1}^n g_i = 1$. Paneme tähele, et valem (13) on kõige üldisem; kaalude g_i sobival valikul tulenevad sellest valemist valemid (10) ja (12).

Näide 39.

Klassifitseeritud jaotuste korral kasutatakse keskvaartuse arvutamiseks valemit

$$EX \approx \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m n_i \frac{a_{i-1} + a_i}{2} \quad (14)$$

(vt. valem 2.12).

Vaatame nüüd, missugused omadused on valemitega (10)-(14) saadud hinnangutel.

2. Üksikvaatlus keskvaartuse hinnanguna.

Näide 35 (järg).

Hinnang on nihutamata. Tõepoolest, väljavõtte esimese indiviidi keskvaartus võrdub uuritava juhusliku suuruse keskvaartusega

$$Ex_1 = EX = m.$$

Samuti võrdub selle esimese indiviidi dispersioon uuritava juhusliku suuruse dispersiooniga

$$Dx_1^n = \sigma^2.$$

Et väljavõtte esimese indiviidi väärtus ei sõltu väljavõtte mahust n , siis ei saa selline hinnang väljavõtte mahu suurenemisel ka hinnatava parameetri väärtusele läheneda, seega ei ole konsistentne. Selletõttu polegi hinnang (10), kuigi nihutamata, kuigi sobiv kasutamiseks.

3. Väljavõtte mediaan keskvaartuse hinnanguna.

Näide 36 (järg).

Väljavõtte mediaani kohta on teada (vt. näiteks [5,6]), et ta on nihutamata hinnang uuritava juhusliku suuruse mediaanile (vt. § 1.8).

Seega sobib väljavõtte mediaan selliste juhuslike suuruste keskvaartuse hindamiseks, millel keskväärtus ja mediaan ühtivad. Nii on see sümmeetriliste¹⁶ juhuslike suuruste puhul (nagu normaaljaotus, ühtlane jaotus, binomialjaotus, kui $p = \frac{1}{2}$ jne.) - siis on väljavõtte mediaan keskvaartuse nihutamata hinnanguks:

$$E(\text{med}) = m.$$

Väljavõtte mediaani dispersioon sõltub uuritava suuruse konkretselt jaotusest (vt. [6,7]) ning väljavõtte mahust N . Juhul, kui X on normaaljaotusega $N(m, \sigma^2)$, läheneb väljavõtte mediaani dispersioon väljavõtte mahu n kasvamisel suurusele

$$\frac{\sigma^2}{2n} \quad (15)$$

Seega näeme, et mediaani dispersioon on oluliselt väiksem kui juhusliku indiviidi dispersioon.

On tõestatud ka [7] , et väljavõtte mahu suurenemisel koondub väljavõtte mediaan juhusliku suuruse mediaaniks, seega hinnang (11) on konsistentne.

Tuleb kohe märkida, et kui võib eeldada uuritava juhusliku suuruse sümmeetrilisust (sel puhul on ka väljavõtte ligilähedaselt sümmeetriline), siis sobib väljavõtte mediaan suhteliselt hästi keskvaartuse hinnanguks; tema eeliseks on, et ta ei nõua sageli üldse arvutustööd (vt. valemid (2.4), (2.5) või nõuab seda suhteliselt vähe.

4. Väljavõtte keskvaartus keskvaartuse hinnanguna.

Näide 37 (järg).

Kõige tavalisemaks hinnanguks keskvaartusele on välja-

¹⁶ Leidub ka mittesümmeetrilisi jaotusi, millel mediaan ja keskvaartus ühtivad, kuid praktikas esineb selliseid harva.

võtte keskvärtus. Vaatame, kas selle kasutamine on õigustatud. Selleks arvutame hinnangu keskvärtuse, kasutades keskvärtuse omadusi $1^{\circ}-3^{\circ}$.

$$E \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i' \right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E x_i' = \frac{1}{n} \cdot n E X = E X = m. \quad (16)$$

Näeme, et hinnang on nihutamata. Arvutame ka hinnangu dispersiooni. Selleks kasutame dispersiooni omadust 4° ja (vt. § 1.10) eeldust väljavõtte üksikindiviidide sõltumatusest.

$$D \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i' \right] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D x_i' = \frac{1}{n^2} \cdot n \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}. \quad (17)$$

Küsimusele hinnangu (12) konsistentsuse kohta annab vastuse suurte arvude seadus, mis väidab, et väljavõtte keskvärtus (aritmeetiline keskmine) koondub (tõenäosuse järgi) juhusliku suuruse keskvärtuseks (vt. näiteks [3]).

5. Hinnangute võrdlus.

Võrreldes hinnanguid (11) ja (12) näeme, et hinnang (12) on üldiselt parem: ta on kasutatav igasuguse jaotuse korral (ei ole tarvis teha eeldust sümmeetrisuse kohta) ning samuti on dispersioon väiksem - kuigi erinevus ei ole väga suur (vrd. valemeid (15) ja (17)). Selleks, et saada mediaani abil hinnangut, mille dispersioon oleks fikseeritud suurus

$$\frac{\sigma^2}{n^*},$$

tuleks kasutada väljavõtet, mille maht on $\tilde{n} = \frac{\sigma}{\sigma^*} n^* = 1,57 n^*$. Niisiis, selleks et saavutada väljavõtte mediaani abil keskvärtusele sama täpsusega hinnangut kui väljavõtte aritmeetilise keskmise abil, tuleb väljavõtte mahtu suurendada 1,57 korda.

Sellegipärast on väljavõtte mediaani kasutamine hinnanguga õigustatud siis, kui väljavõtte maht on piisavalt suur ning mediaani leidmine on oluliselt lihtsam kui aritmeetilise keskmise leidmine (nii on olukord eriti kordumatute väärtustega variatsioonrea korral).

Näide 38 (järg).

Kaalutud keskmine (vt. valem (13)) annab samuti keskvaertusele nihutamata hinnangu

$$E \sum_{i=1}^n g_i x_i = \sum_{i=1}^n g_i Kx_i = K E \sum_{i=1}^n g_i = K E.$$

Samuti on kaalutud keskmine ka konsistentne hinnang. Osutub aga, et alati, kui kaaludki erinevad üksteisest, on hinnangu (13) dispersioon suurem hinnangu (12) dispersioonist.

* Tõepoolest

$$D \sum_{i=1}^n g_i x_i = \sum_{i=1}^n g_i^2 D x_i = \sigma^2 \sum_{i=1}^n g_i^2.$$

$$\text{Oletame, et } g_1 = \frac{1}{n} + \varepsilon, g_2 = \frac{1}{n} - \varepsilon, g_3 = \dots = g_n = \frac{1}{n}.$$

Siis

$$g_1^2 + g_2^2 = \frac{1}{n^2} + \frac{2\varepsilon}{n} + \varepsilon^2 + \frac{1}{n^2} - \frac{2\varepsilon}{n} + \varepsilon^2 = \frac{2}{n^2} + 2\varepsilon^2 > \frac{2}{n^2},$$

seega juba niipea, kui kaks kaalu g_1 ja g_j erinevad väärtusest $\frac{1}{n}$, suureneb dispersioon suuruse $2\varepsilon^2$ võrra. Samal viisil arutledes näeme, et hinnangul (12) on minimaalne dispersioon võrreldes kõigi teiste hinnangutega, millel on kuju (13), s.t. lineaarsete hinnangutega. Veelgi enam, on võimalik näidata,

et hinnang (12) on väga paljude jaotuste korral ka üldise minimaalse dispersiooniga, s.o. efektiivne hinnang.

* Seega näeme, et tava kasutada keskväertuse jaoks hinnangut (12), on igati õigustatud.

Hinnangut (13) on mõtet kasutada sel juhul, kui mõningate vaatlustulemuste kohta on kaheldav, kas nad kuuluvad üldse uuritavasse üldkogumisse; sellistele vaatlustulemustele tuleb siis suhteliselt väiksemad kaalud omistada (või anda neile kaal 0, s.t. "välja visata". Seda tehakse tavaliselt vaatlustulemustega, mis ülejäänutest väga tugevasti erinevad (vt. § 2.8).

6. Näiteid.

* Näide 39 (järg).

Kui me eeldame, et igas klassis $[a_{i-1}, a_i)$ on juhuslik suurus X ühtlase jaotusega vastavalt parameetritega a_{i-1}, a_i , s.t.

$$X_i \sim u(a_{i-1}, a_i)$$

ning juhuslik suurus X on defineeritud lineaarse kombinatsioonina

$$X = \sum_{i=1}^m p_i X_i, \quad \left(\sum_{i=1}^m p_i = 1 \right)$$

siis, kasutades ühtlase jaotuse keskväertuse avaldist (vt. näide 7)

$$EX_i = \frac{a_{i-1} + a_i}{2},$$

saame X keskväertuseks (kasutame keskväertuse omadusi 1^0 ja 2^0 , vt. § 1.9)

$$EX = \sum_{i=1}^m p_i EX_i = \sum_{i=1}^m \frac{a_{i-1} + a_i}{2} p_i.$$

Arvutame nüüd hinnangu (14) keskvärtuse

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^m E\left(\frac{n_i}{n}\right) \frac{a_{i-1} + a_i}{2} = \sum_{i=1}^m p_i \frac{a_{i-1} + a_i}{2},$$

kus suhteliste sageduste $\frac{n_i}{n}$ keskmiisteks on (suurte arvude seaduse põhjal, vt. näiteks [3]) tõenäosused p_i .

Seega on valemiga (14) antud hinnang nihutamata hinnanguks keskvärtuste niisuguse jaotuse puhul, mis koosneb ositi ühtlastest jaotustest.

Suvalise jaotuse korral aga hinnangu (14) nihutamata tõeštada ei saa. Küll aga osutub iga jaotuse korral hinnang (14) asümptootiliselt nihutamatuks klasside arvu m piiramatu suurendamisel.

Näide 40.

Olgu meil antud väljavõtte juhusliku suuruse väärtustest:

$$x_1 = 144; x_2 = 137; x_3 = 129; x_4 = 153; x_5 = 120; x_6 = 131; x_7 = 147.$$

Leiame keskvärtuse hinnanguid:

1° $m \approx 144$ (võtsime lihtsalt esimese liikme väljavõttest);

2° moodustame variatsioonrea:

$$120; 129; 131; 137; 144; 147; 153.$$

Väljavõtte mediaaniks on liige järjekorranumbriga $\frac{7+1}{2} = 4$, seega $\bar{m} = 137$.

3° arvutame väljavõtte keskmise:

$$\bar{x} = 130 + \frac{1}{7}(-10-1+1+7+14+17+23) = 137,3.$$

Selleks, et leida keskvärtuse hinnangute dispersioone, peame enne tutyuma dispersiooni hindamise meetoditega, mida teemegi järgmises paragrahvis ning jätkame käesolevat näidet näites

42.

§ 5. Juhusliku suuruse dispersiooni hinnang.

Teiseks oluliseks parameetriks, mida sageli tuleb hinnata, on uuritava juhusliku suuruse dispersioon $DX = \sigma^2$. Et dispersioon avaldub keskvärtuse kaudu, siis saame erinevad hinnangud sõltuvalt sellest, kas keskvärtus on teada või mitte.

1. Dispersiooni hinnang m kaudu.

Eeldame kõigepealt, et keskvärtus m on teada. Kõige loomulikumaks dispersiooni hinnanguks on sel juhul väljavõtte dispersioon

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2. \quad (18)$$

Kontrollime, kas saadud hinnang on nihutamata. Arvutame selleks

$$E(\tilde{\sigma}^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(x_i - m)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X - m)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma^2 = \sigma^2.$$

Näeme, et hinnang $\tilde{\sigma}^2$ on nihutamata. Lihtne on arvutada ka selle hinnangu dispersioon

$$D(\tilde{\sigma}^2) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D(x_i - m)^2 = \frac{1}{n} D(X - m)^2 = \frac{1}{n} \left\{ E(X - m)^4 - [E(X - m)^2]^2 \right\}.$$

Hinnangu $\tilde{\sigma}^2$ dispersioon avaldub uuritava juhusliku suuruse 4. tsentraalse momendi $\bar{m}_4 = E(X - m)^4$ kaudu (vt. § 1.11):

$$D(\tilde{\sigma}^2) = \frac{1}{n} (\bar{m}_4 - \sigma^4), \quad (19)$$

see aga sõltub konkreetsest jaotusest.

* Näide 41.

Arvutame näitena hinnangu $\tilde{\sigma}^2$ dispersiooni juhuks, kui X on normaaljaotusega. Et dispersioon ja neljas tsentraalne moment ei sõltu nihkest (vt. § 1.10, omadus 3^o § 1.11), võime lihtsuse mõttes vaadelda tsentreeritud normaaljaotust. Nii-sis, olgu X normaaljaotusega, $X \sim N(0, \sigma^2)$. Leiame tema neljanda momendi

$$EX^4 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Kasutame arvutamisel ositi integreerimist, võttes

$$u = -\sigma^2 x^3; \quad du = -3\sigma^2 x^2 dx,$$

$$dv = -\frac{x}{2\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx; \quad v = e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

Siis saame arvutatavale integraalile anda järgmise kuju:

$$EX^4 = \left[-\sigma^2 x^3 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \right]_{-\infty}^{\infty} - (-3\sigma^2) \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Et aga

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = 0,$$

mida on lihtne kontrollida näiteks L'Hospitali reegli abil:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{e^{\frac{x^2}{2\sigma^2}}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2}{\frac{2x}{2\sigma^2} e^{\frac{x^2}{2\sigma^2}}} = 3\sigma^2 \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{e^{\frac{x^2}{2\sigma^2}}} =$$

$$= 3^2 \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{\frac{2x}{2\sigma^2} e^{\frac{x^2}{2\sigma^2}}} = 0,$$

ja tsentreeritud juhusliku suuruse teine moment EX^2 võrdub dispersiooniga, saame lihtsalt arvutada otsitava neljanda mo-

nendi

$$EX^4 = 0 + 3\sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \frac{-x^2}{2\sigma^2} dx = 3\sigma^2 EX^2 = 3\sigma^2 DX = 3\sigma^4.$$

Paigutades leitud EX^4 väärtuse valemisse (19), saame normaaljaotusega juhusliku suuruse väljavõtte dispersiooni $\tilde{\sigma}^2$ dispersiooniks

$$D(\tilde{\sigma}^2) = \frac{1}{n}(3\sigma^4 - \sigma^4) = \frac{2\sigma^4}{n}. \quad (20)$$

On võimalik näidata, et see dispersioon on ühtlasi minimaalne, järelikult osutub saadud hinnang efektiivseks.

Ka hinnangu $\tilde{\sigma}^2$ konsistentsust on lihtne tõestada, arvestades, et see hinnang avaldub aritmeetilise keskmise kaudu ning seetõttu on võimalik rakendada suurte arvude seadust.

— * —

2. Dispersiooni hinnang \bar{x} kaudu.

Kahjuks ei ole eelmises punktis saadud tulemus praktikas tavaliselt kasutatav, sest enamasti ei ole meil keskvärtus teada ning parameetri m enese asemel tuleb kasutada tema mingit hinnangut. Kõige loomulikum on kahtlemata kasutada keskvärtuse hinnanguna väljavõtte keskvärtust \bar{x} , sest see on nihutamata, konsistentne ning väga paljude jaotuste korral ka efektiivne hinnang.

3. Väljavõtte dispersioon $\bar{\sigma}^2$.

Vaatleme dispersiooni hinnanguna väljavõtte dispersiooni

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2. \quad (21)$$

Kontrollime saadud hinnangu omadusi. Selleks arvutame tema keskvärtuse

$$E(\bar{\sigma}^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(x_i - \bar{x})^2.$$

Keskväertuse arvutamiseks teeme kunstliku võtte - liidame

* ning lahutame sulgavaldisest suuruse n

$$E(\bar{\sigma}^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(x_i - \bar{x} + \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[(x_i - \bar{x}) - (\bar{x} - \bar{x})]^2.$$

Arvutame nüüd vahe ruudu

$$E(\bar{\sigma}^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[(x_i - \bar{x})^2 - 2(x_i - \bar{x})(\bar{x} - \bar{x}) + (\bar{x} - \bar{x})^2].$$

Kasutame väljavõtte keskväertuse \bar{x} definitsiooni ning asendame selle väärtuse saadud valemisse

$$E(\bar{\sigma}^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[(x_i - \bar{x})^2 - 2(x_i - \bar{x})\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j - \bar{x}\right) + \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j - \bar{x}\right)^2].$$

Summast $\sum_{j=1}^n x_j$ eraldame liikme indeksiga 1; sama teeme ka viimase liikmega; ühtlasi paneme tähele, et $\bar{x} = n \cdot \frac{1}{n} \bar{x}$, mistõttu kehtib võrdus

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j - \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x}).$$

Võttes kõiki teisendusi arvesse, saame

$$E(\bar{\sigma}^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E\left[(x_i - \bar{x})^2 - \frac{2}{n} (x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x}) - \frac{2}{n} (x_i - \bar{x}) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (x_j - \bar{x}) + \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})(x_j - \bar{x}) + \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (x_j - \bar{x})(x_k - \bar{x})\right].$$

Kasutame nüüd keskväertuse omadust 1° , asjaolu, et sõltumatute juhuslike suuruste korrutise keskväertus võrdub nende juhuslike

suuruste keskväärtuste korrutisega, ning peame silmas, et väljavõtte kohta tehtud kokkuleppe põhjal (vt. § 2.3) on x_1 ja x_j sõltumatud, niipea kui $x_1 \neq x_j$.

Saame siis

$$E(\bar{\sigma}^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ E(x_{1-m})^2 - \frac{2}{n} E(x_{1-m})^2 - \frac{2}{n} E(x_{1-m}) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^n E(x_{j-m}) + \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n E(x_{j-m})^2 + \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n E(x_{j-m}) E(x_{k-m}) \right\}.$$

Arvestame nüüd, et

$$E(x_1 - m)^2 = E(x_j - m)^2 = E(X - m)^2 = \sigma^2 ;$$

$$E(x_1 - m) = E x_1 - m = m - m = 0.$$

Seega jõudsime tulemuseni:

$$E(\bar{\sigma}^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ \left(1 - \frac{2}{n}\right) \sigma^2 - 0 + \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n \sigma^2 + 0 \right\} =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{n}{n^2}\right) \sigma^2 \right\} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{n-1}{n} \sigma^2 = \frac{n-1}{n} \sigma^2 .$$

Osutub, et väljavõtte dispersioon on nihutatud hinnang üldkogumi dispersioonile

$$E(\bar{\sigma}^2) = \frac{n-1}{n} \sigma^2. \quad (22)$$

4. Nihutamata hinnang s^2 .

Kasutades üldkogumi dispersiooniks väljavõtte dispersiooni, me alahindame seda süstemaatiliselt. Selletõttu on otsustav tarbekas võtta dispersiooni jaoks kasutusele nihutamata hinnang. Selleks "parandame" hinnangu $\bar{\sigma}^2$ nihke ning defineerime uue hinnangu

$$s^2 = \frac{n}{n-1} \bar{\sigma}^2 ;$$

asendades valemisse lähtesuurused, saame

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2. \quad (23)$$

Ilmselt on s^2 nihutamata hinnang

$$E(s^2) = \frac{n}{n-1} E(\bar{\sigma}^2) = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} \sigma^2 = \sigma^2.$$

Erinevus hinnangute $\bar{\sigma}^2$ ja s^2 vahel muutub tühiseks, kui n on väga suur. Arvutame hinnangu $\bar{\sigma}^2$ nihke $b_n(\bar{\sigma}^2)$

$$b_n(\bar{\sigma}^2) = E(\bar{\sigma}^2) - \sigma^2 = \frac{n-1}{n} \sigma^2 - \sigma^2 = -\frac{1}{n} \sigma^2.$$

Näeme, et n lähenemisel lõpmatusele läheneb nihe nullile

$$b_n(\bar{\sigma}^2) \rightarrow 0, \text{ kui } n \rightarrow \infty.$$

Seega on hinnang $\bar{\sigma}^2$ asümptootiliselt nihutamata.

5. Hinnangute $\bar{\sigma}^2$ ja s^2 omadusi.

* Vaatleme nüüd hinnangute $\bar{\sigma}^2$ ja s^2 teisi omadusi.

Arvutades hinnangu $\bar{\sigma}^2$ dispersiooni, saame elementaarse-
te, kuid kaunis tülikate arvutuste tulemusena (vt. näiteks [6])

$$D(\bar{\sigma}^2) = \frac{\bar{m}_4 - \sigma^4}{n} - 2 \frac{(\bar{m}_2 - 2\sigma^2)^2}{n^2} + \frac{\bar{m}_4 - 3\sigma^4}{n^3}. \quad (24)$$

Võrreldes hinnangu $\bar{\sigma}^2$ dispersiooni hinnangu $\tilde{\sigma}^2$ dispersiooniga (valem (19)) näeme, et dispersioonide erinevus väheneb n kasvamisel ligikaudu võrdeliselt teguriga $\frac{1}{n^2}$, s.t. dispersioonide erinevus $D(\bar{\sigma}^2) - D(\tilde{\sigma}^2)$ on kõrgemat järku lõpmata väike suurus võrreldes dispersioonide $D(\bar{\sigma}^2)$ ja $D(\tilde{\sigma}^2)$ endi väärtustega. On võimalik näidata, et väga mitmete jaotuste (sealhulgas normaaljaotuse, vt. [6] või [7]) korral on valemiga (21) antud dispersiooni hinnangu $\bar{\sigma}^2$ dispersioon minimaalne kõigi selliste dispersiooni hinnangute seas, mille

puhul kasutatakse m tegeliku väärtuse asemel tema hinnangut.

Lihtne on leida ka hinnangu s^2 dispersiooni; selleks tuleb kasutada vaid dispersiooni omadust 4^o:

$$D(s^2) = D\left(\frac{n}{n-1} \bar{\sigma}^2\right) = \frac{n^2}{(n-1)^2} (D\bar{\sigma}^2). \quad (25)$$

Seega on hinnangu s^2 dispersioon ilmselt suurem kui hinnangu $\bar{\sigma}^2$ dispersioon ning kumbki saadud hinnangutest - ei $\bar{\sigma}^2$ ega ka s^2 pole efektiivne - üks on nihutatud, teisel on dispersioon "liiga suur". Märgime aga, et n lähenemisel lõpmatus-
le läheneb hinnangu s^2 dispersioon, samuti ka hinnangu $\bar{\sigma}^2$ dispersioon hinnangu $\tilde{\sigma}^2$ dispersioonile. Seetõttu osutuvad mõlemad hinnangud - $\bar{\sigma}^2$ ja s^2 - asümptootiliselt efektiivseteks.

Mis puutub hinnangute konsistentsusesse, siis on hinnangu $\bar{\sigma}^2$ konsistentsust lihtne järeldada suurte arvude seadusest (ta avaldub aritmeetilise keskmise kaudu). Et n lähenemisel lõpmatus-
le läheneb s^2 läheneb $\bar{\sigma}^2$ -le, tuleneb siit ka hinnangu s^2 konsistentsus.

Niisiis kokkuvõttes: dispersiooni hinnanguks on sobivaim

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2,$$

kuna see on nihutamata ja suhteliselt väikese dispersiooniga;

kui aga väljavõtte maht on nii suur, et suurus

$$\frac{\bar{\sigma}^2}{n}$$

on väiksem kui lubatav arvutusviga, siis võib väga hästi kasutada ka hinnangut

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

6. Standardhälbe hinnangud.

Standardhälbe hinnanguteks on vastavalt

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\bar{\sigma}^2} \quad \text{ja} \quad s = \sqrt{s^2}.$$

Märgime tõestamata nende hinnangute tähtsamad omadused:

1^o Hinnang s on asümptootiliselt nihutamata ja paljude jaotuste korral asümptootiliselt efektiivne hinnang. Normaalkaotuse $N(m, \sigma)$ puhul alahindab s pisut standardhälbe väärtust. Nihutamata hinnangu σ jaoks σ^2 saame valemist

$$\sigma^2 = \frac{s}{H_n}, \quad (26)$$

kusjuures suurused H_n on antud tabelis VII (n on väljavõtte maht).

2^o $\bar{\sigma}$ on samuti asümptootiliselt nihutamata ning paljude jaotuste korral minimaalse dispersiooniga, seega kokkuvõttes asümptootiliselt efektiivne hinnang. Mõlema hinnangu dispersioon läheneb n kasvamisel suurusele $\frac{\sigma^2}{2n}$ (vt. näiteks [6]), mis on ühtlasi hinnangu $\bar{\sigma}$ dispersiooniks.

Väikeste väljavõtete korral tuleb eelistada hinnangut s ; kui n on nii suur, et $\frac{s}{\sqrt{n}}$ on väiksem arvutusveast, siis on ükaskõik, kumba hinnangutest kasutada.

Märgime, et vaadeldavate hinnangute arvutamisel ei teinud me mingit eeldust selle kohta, missuguse kujuga on uuritava juhusliku suuruse jaotus.

7. Hinnangute $\bar{\sigma}^2$ ja s^2 dispersioon eeldusel $X \sim N(m, \sigma)$.

Täpsemaid tulemusi on aga võimalik saada sel juhul, kui fikseerime ka konkreetse jaotuse.

Arvutame näiteks hinnangute $\bar{\sigma}^2$ ja s^2 dispersiooni normaaljaotuse korral. Kasutades näites 41 leitud \bar{m}_4 väärtust,

saame valemist (24) ja (25):

$$D(\bar{\sigma}^2) = \frac{3\sigma^4 - \sigma^4}{n} - \frac{2(3\sigma^4 - 2\sigma^4)}{n^2} + 0 = \frac{2(n-1)}{n^2} \sigma^4 ;$$

$$D(s^2) = \frac{n^2}{(n-1)^2} \cdot \frac{2(n-1)}{n^2} \sigma^4 = \frac{2}{n-1} \sigma^4 .$$

8. Dispersiooni hinnangud klassifitseeritud väljavõtete puhul.

Dispersiooni hinnangute vaatlemisel tuleb pöörata tähelepanu ka klassifitseeritud väljavõtete põhjal saadud dispersiooni hinnangute omadustele. Klassifitseeritud väljavõtete puhul sõltub dispersiooni hinnang samuti kui keskvaertuse hinnangki konkreetsetest jaotustest.

Lugedes esialgu kõik n_i klassi $[a_{i-1}, a_i)$ kuuluvat elementi paiknevateks punktis $b_i = \frac{a_{i-1} + a_i}{2}$, saaksime dispersiooni hinnangud

$$\bar{\sigma}_0^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m (b_i - \bar{x})^2 n_i$$

ning

$$s_0^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^m (b_i - \bar{x})^2 n_i,$$

milledest viimane kui nihutamata on eelistatum, kui n on väike; et aga klassifitseeritud jaotuste korral sageli n on küllalt suur, siis võime kasutada mõlemaid hinnanguid.

Kui aga eeldada, et iga klassi piires on meil tegemist ühtlase jaotusega, siis saaksime dispersioonile nihutamata hinnangu, kasutades Sheppardi parandust (vt. [5])

$$\sigma^{*2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^m (b_i - \bar{x})^2 n_i - \frac{1}{12} d^2, \quad (27)$$

$$E \sigma^{*2} = \sigma^2,$$

kus d on klassi pikkus: $d = a_i - a_{i-1}$.

Edaspidi vaatleme veel mõningaid standardhälbe hindamise võimalusi normaaljaotusega juhusliku suuruse puhul.

9. Näiteid.

Näide 42.

Vaatleme näites 40 antud väljavõtet ja leiame selle dispersiooni ja standardhälbe, seejärel aga keskvaartuse hinnangute dispersioonid. Selleks arvutame s^2 , kasutades mõne võrra teisendatud valemit

$$s^2 = \frac{n}{n-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2 \right) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{n}{n-1} \bar{x}^2. \quad (28)$$

Valime $y_1 = x_1 - 137$; siis $\bar{y} = 0,3$ ning $s^2(x) = s^2(y)$. Saame seega

$$s^2 = \frac{1}{6} (17^2 + 8^2 + 6^2 + 0 + 7^2 + 10^2 + 16^2) - \frac{7}{6} \cdot 0,09 = \frac{794}{6} - \frac{0,63}{6} = 132,23.$$

Ilmselt ei ole käesoleval juhul õige kasutada dispersiooni arvu amiseks hinnangut $\hat{\sigma}^2$, sest n on suhteliselt väike, $\hat{\sigma}$ aga suur.

Standardhälbe hinnangu s leiame

$$s = \sqrt{132,23} = 11,5.$$

Et hinnang s on nihutatud (alahinnatud), parandame nihke, kasutades selleks tabelit VII ($n=7$)

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{11,5}{0,888} = 12,95.$$

Hinnangu (10) $m = x_1$ dispersioon ongi 132,23 (standardhälve 11,5); hinnangu $m = \bar{x}$ dispersiooni leiame aga valemist (17), seega

$$D(\bar{x}) = \frac{132,23}{7} = 18,89 \text{ ning standardhälve} \\ \hat{\sigma}(\bar{x}) = 4,35.$$

Mediaani dispersiooni on võimalik valemi (15) järgi arvutada ainult sel juhul, kui eeldame, et vaadeldav suurus on normaaljaotusega; sel korral saaksime (kaunis ligikaudselt, hinnanguks mediaani dispersioonile

$$D(\overline{med}) = \frac{\pi}{2} \cdot 18,89 = 29,7.$$

Paneme aga tähele, et suhe \bar{x} ja \overline{med} dispersioonide vahel on asümptootiline, s.t. kehtib suurte n väärtuste korral, kuna väikeste n väärtuste puhul ei ole see seos kuigi täpne.

Näide 43.

Olgu tarvis leida sama juhusliku suuruse keskväärtusele hinnang m , mille standardhälve on 41. Selleks tuleks meil vaatluste arvu suurendada.

Oletades, et väljavõtte suurendamisel jääb väljavõtte hajuvus umbes samasuguseks, tuleb valida n nii, et

$$D(\bar{x}) = 1 \quad (\text{siis ka } \sigma(\bar{x}) = 1).$$

Et $D(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n}$, $\sigma^2 \approx 133$, siis peaksime valima uue väljavõtte mahuks ≈ 133 . Et aga väljavõttesse tulevad ka juba kasutatud iniviidid, oleks tarvis vaadelda veel ainult $133 - 7 = 126$ iniviidi. Kui me aga arvestame, et edaspidi saadav dispersiooni hinnang võib ka mõnevõrra suureneka (sisaldab ju ka see viga!), siis peame valima väljavõtte mahu mõnevõrra suuremana, näiteks 150.

Näide 44.

Teine võimalus ülesande püstitamiseks on järgmine: määrata väljavõtte maht tingimusel, et keskväärtuse suhteline viga oleks väiksem kui 1%.

Keskväärtuse suhtelise vea arvutame seosest

$$\frac{\sigma(\bar{x})}{m} \approx \frac{\sigma(\bar{x})}{\bar{x}} = 1\%,$$

s.t. $G(\bar{x}) < 0,01 \bar{x} = 1,373.$

Siit

$$D(\bar{x}) < 1,373^2 = 1,89,$$

millest järeldub võrratus n jaoks

$$n > \frac{132}{1,89} = 71.$$

Märgime, et toodud näidetes ei oleks õige kasutada kaalutud keskmiisi, sest puudub täiendav informatsioon kaalude valimiseks.

Näide 45.

Olgu meil antud jaotustabel

Tabel 23.

120 - 129,9	130 - 139,9	140 - 149,9	150 - 159,9
13	27	41	9

$$\begin{aligned} \bar{x} &= 140 + \frac{1}{90} [13 \cdot (-15) + 27 \cdot (-5) + 41 \cdot 5 + 9 \cdot 15] = \\ &= 140 + \frac{5}{90} [13 \cdot (-3) + 27 \cdot (-1) + 41 + 9 \cdot 3] = 140 + \frac{10}{90} = \\ &= 140,11. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^2 &= \frac{1}{90} \cdot 25 [13 \cdot (-3)^2 + 27 \cdot (-1)^2 + 41 \cdot 1 + 9 \cdot 3^2] - 0,11^2 = \\ &= \frac{25}{90} [22 \cdot 9 + 68] - 0,11^2 = 73,88. \end{aligned}$$

Et jaotustabel oli esitatud klassifitseerituna, intervalli pikkus $d = 10$, suure nihutamata hinnangu dispersioonile, kasutades Sheppardi parandust (27)

$$*\bar{\sigma}^2 = 73,88 - \frac{10^2}{12} = 73,88 - 8,33 = 65,55$$

$$\bar{\sigma} = \sqrt{65,55} = 8,1.$$

§ 6. Normaalkaotuse standardhälbe hinnangud.

1. Normaalkaotuse standardhälbe hinnang keskmise hälbe kaudu.

Arvutame väljavõtte keskmise hälbe keskvaartuse:

$$E(k) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - m|\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E|x_i - m| = E|X - m| = k,$$

seega väljavõtte keskmine hälve on juhusliku suuruse X keskmise hälbe $E|X - m|$ (vt. valem 1.21) nihutatata hinnanguks.

Kui keskmine hälve on avaldatav dispersiooni (või standardhälbe) kaudu, siis võib keskmise hälbe hinnangust arvutada hinnangu k ka dispersiooni (või standardhälbe) jaoks.

Näide 46.

* Arvutame normaalkaotuse keskmise hälbe $E|X - m|$. Selle asemel, et arvutada juhusliku suuruse $X \sim N(m, \sigma^2)$ jaoks $E|X - m|$, võime leida juhusliku suuruse $X \sim N(0, \sigma^2)$ absoluutse momendi

$$E|X| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} |x| e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$$

(kasutasime siin integreeritava funktsiooni sümmeetrilisust).

Edasi teeme muutuja vahetuse:

$$\frac{x^2}{2\sigma^2} = t; \quad dt = \frac{x dx}{\sigma^2},$$

mille tulemusena saame

$$\int_0^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma^2 \int_0^{\infty} e^{-t} dt = -\sigma^2 e^{-t} \Big|_0^{\infty} = \sigma^2.$$

Saadud integraali vaartuse asendamine annabki meile

$$E|X| = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \sigma^2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma.$$

Seega saime üldise normaaljaotuse puhul

$$E|X - m| = \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad (29)$$

ning vastupidi:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\pi}{2}} E|X - m|,$$

seega on suurus

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - m| \quad (30)$$

nihutamata hinnanguks normaaljaotusega juhusliku suuruse standardhälbele.

Selle hinnangu dispersiooniks on (vt. näiteks [5,6])

$$D\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} \tilde{k}\right) = (\pi - 2) \frac{\sigma^2}{2n}.$$

Et hinnangu $\tilde{\sigma}$ dispersioon, mis on ühtlasi minimaalne, nagu nägime eelmises paragrahvis, avaldub järgmiselt

$$D(\tilde{\sigma}) = \frac{\sigma^2}{2n},$$

siis näeme, et absoluutse hälbe abil saadud hinnangu efektiivsus (vt. valem (5)) on küllaltki kõrge

$$e\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} \tilde{k}\right) = \frac{\frac{\sigma^2}{2n}}{(\pi - 2) \frac{\sigma^2}{2n}} = \frac{1}{\pi - 2} = 0,876.$$

Seega näeme, et väljavõtte keskmise hälbe \tilde{k} kasutamisel standardhälbe hindamisel on tarvis väljavõtte mahtu kõigest $\frac{1}{0,876} = 1,14$ korda suurendada võrreldes hinnangu s kasutamisega standardhälbe hindamiseks. Peale selle tuleb märkida, et hinnang, mis kasutab keskmist hälvet, ei ole nii tundlik mõningate võõraste, suure hajuvusega elementide sattumisele väljavõttesse kui hinnang s . Seetõttu juhul, kui on arvata, et

väljavõttes võib sisalduda vööraid, sellesse üldkogumisse mittekuuluvaid elemente (vt. § 2.8) mida ühel või teisel põhjusel ei ole võimalik eraldada, on sobivam kasutada standardhälbe hinnanguna hinnangut väljavõtte keskmise hälbe \tilde{k} kaudu

$$\sigma \approx \sqrt{\frac{\pi}{2}} \tilde{k}.$$

Näide 47.

Arvutame näites 40 antud väljavõtte põhjal standardhälbe hinnangu ka väljavõtte absoluutse hälbe kaudu.

Arvutame väljavõtte absoluutse hälbe (kasutades näites 40 leitud keskväärtuse hinnangut)

$$\tilde{k} = \frac{1}{7} (17,3 + 8,3 + 6,3 + 0,3 + 6,7 + 9,7 + 15,7) = \frac{64,3}{7} = 9,2.$$

Selle abil arvutame hinnangu standardhälbele

$$\sigma \approx \sqrt{\frac{\pi}{2}} \tilde{k} = 1,25 \tilde{k} = 11,5.$$

Näeme, et tulemus ühtis väga hästi paragrahvis 5 (näites 42) leitud standardhälbe hinnanguga.

2. Normaaljaotuse standardhälbe hindamine väljavõtte kvartiilide ja sekstiilide abil.

Normaaljaotuse kvantiilide tabelist (vt. tabel III) on lihtne leida normaaljaotuse $N(0,1)$ alumised ning ülemised kvartiilid ja sekstiilid (vt. § 1.8))

$$q_a = -0,6745,$$

$$q_{\bar{u}} = 0,6745,$$

$$s_a = -0,9670,$$

$$s_{\bar{u}} = 0,9670.$$

Üldise normaaljaotuse korral aga saame seosed

$$\begin{aligned}
 q_a &= m - 0,6745 \quad , \\
 q_{\bar{u}} &= m + 0,6745 \quad , \\
 s_a &= m - 0,9670 \quad , \\
 s_{\bar{u}} &= m + 0,9670 \quad .
 \end{aligned}$$

Siit järeldub, et teades normaaljaotusega juhusliku suuruse sekstiile või kvartiile, on lihtne arvutada ka selle standardhälvet:

$$\begin{aligned}
 0,6745 \sigma &= \frac{q_{\bar{u}} - q_a}{2} \quad ; \quad \sigma = \frac{q_{\bar{u}} - q_a}{2 \cdot 0,6745} \approx \frac{q_{\bar{u}} - q_a}{1,35} \quad ; \\
 0,9670 \sigma &= \frac{s_{\bar{u}} - s_a}{2} \quad ; \quad \sigma = \frac{s_{\bar{u}} - s_a}{2 \cdot 0,967} \approx \frac{s_{\bar{u}} - s_a}{2} \quad .
 \end{aligned}$$

Et kõik väljavõtte kvantiilid on üldkogumi kvantiilidele nihutamata hinnanguks (vt. näit. [6]), siis on võimalik väljavõtte sekstiilide ja kvartiilide kaudu saada ka hinnanguid standardhälbele. Tähistades sümbolitega \bar{q}_a , $\bar{q}_{\bar{u}}$, \bar{s}_a , $\bar{s}_{\bar{u}}$ vastavalt väljavõtte sekstiilid ja kvartiilid, saame normaaljaotusega juhusliku suuruse standardhälbele järgmised hinnangud:

$$\sigma = \frac{\bar{q}_{\bar{u}} - \bar{q}_a}{1,35} \quad ; \quad (31)$$

$$\sigma = \frac{\bar{s}_{\bar{u}} - \bar{s}_a}{2} \quad . \quad (32)$$

Mõlemad hinnangud on nihutamata. Selleks, et kontrollida saadud hinnangute efektiivsust, tuleb arvutada nende dispersioonid. Täeme seda järgnevas näites.

3. Leitud hinnangute efektiivsus.

* Näide 48.

Arvutame hinnangute (31) ja (32) efektiivsuse. Selleks kasutame asjaolu, et normaaljaotusega $N(m, \sigma)$ juhusliku suuruse väljavõtte p-kvantiil on asümptootiliselt normaal-

jaotusega $N(x, \frac{1}{f(x)} \sqrt{\frac{pq}{n}})$, kus x on selle juhusliku suuruse p -kvantil ning $f(x)$ - tõenäosuse tihedus kohal x , s.t.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (\text{vt. näiteks [7]}) .$$

kvantilide vahe dispersiooni, on meil terviz kaautada seost

$$D(X-Y) = E(X-Y-E(X-Y))^2 = E((X-EX)-(Y-EY))^2 = E(X-EX)^2 - 2E(X-EX)(Y-EY) + E(Y-EY)^2 .$$

Suurust $E(X-EX)(Y-EY)$ nimetatakse juhuslike suuruste X ja Y kovariatsiooniks ning tähistatakse sümboliga $cov(X, Y)$. Kovariatsioon mõõdab juhuslike suuruste ühist muutumist (vt. näiteks [3], [9]); kui X ja Y on sõltumatud, siis

$$cov(X, Y) = E[(X-EX)(Y-EY)] - E(X-EX)E(Y-EY) = 0 .$$

Kasutades kovariatsiooni mõistet saame vahe dispersiooni jaoks avaldise

$$D(X-Y) = DX + DY - 2cov(X, Y) .$$

Ülaltoodud seosest leiame p -kvantili dispersiooni (vaheks oli võetud standardhälve) jaoks väärtuse $\frac{pq}{f^2(x)n}$?

p_1 -kvantili ja p_2 -kvantili kovariatsioonika saame aga

$$\frac{p_1 q_2}{f(x_1)f(x_2)n} .$$

Ülaltoodud valemist leiame niisil

$$D\left(\frac{\bar{q}_u - \bar{q}_a}{c}\right) = \frac{1}{c^2} [D(q_u) + D(q_a) - 2cov(q_u, q_a)] =$$

$$= \frac{1}{c^2 n} \left[\frac{p_1 q_1}{f^2(x_1)} - \frac{2p_1 q_2}{f(x_1)f(x_2)} + \frac{p_2 q_2}{f^2(x_2)} \right] .$$

Kasutame nüüd asjaolu, et meil on tegemist kvartiilide,

s.o. $\frac{1}{4}$ -ja $\frac{3}{4}$ -kvantiilidega. Selletõttu

$$f(x_1) = f(q_a) = f(m-0,6745\sigma) = \frac{1}{\sigma} f_Y(0,6745) = \frac{0,3177}{\sigma};$$

$$f(x_2) = f(q_{\bar{u}}) = f(m+0,6745\sigma) = \frac{1}{\sigma} f_Y(0,6745) = \frac{0,3177}{\sigma},$$

kus f_Y on normaaljaotuse $N(0,1)$ tõenäosuse tihedus, mille leiame tabelist I, ning

$$p_1 = \frac{1}{4}, \quad q_1 = \frac{3}{4}, \quad p_2 = \frac{3}{4}, \quad q_2 = \frac{1}{4}, \quad c = 2 \cdot 0,6745.$$

Paigutame nüüd leitud suurused dispersiooni avaldisse:

$$\begin{aligned} D\left(\frac{\bar{q}_{\bar{u}} - \bar{q}_a}{c}\right) &= \frac{1 \cdot \sigma^2 \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} - 2 \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}\right)}{4 \cdot 0,6745^2 \cdot n \cdot 0,3177^2} = \\ &= \frac{\sigma^2}{4^2 \cdot 0,6745^2 \cdot n \cdot 0,3177^2} = \frac{\sigma^2}{n} \cdot 1,36. \end{aligned}$$

Analoogiliselt leiame sekstiilide kaudu arvatatud hinnangu normaaljaotuse dispersioonile

$$\begin{aligned} D\left(\frac{\bar{s}_{\bar{u}} - \bar{s}_a}{c}\right) &= \frac{1}{c^2 f^2(s)n} \left(\frac{5}{36} + \frac{5}{36} - \frac{2}{36}\right) = \\ &= \frac{\sigma^2}{n} \frac{1}{4 \cdot 0,967^2 \cdot 0,242^2} \cdot \frac{2}{9} = \frac{\sigma^2}{n} \cdot 1,01 = \frac{\sigma^2}{n}. \end{aligned}$$

Kokkuvõttes saame

$$D\left(\frac{\bar{s}_{\bar{u}} - \bar{s}_a}{2 \cdot 0,967}\right) = \frac{\sigma^2}{n} \cdot 1,01; \quad D\left(\frac{\bar{q}_{\bar{u}} - \bar{q}_a}{2 \cdot 0,6745}\right) = \frac{\sigma^2}{n \cdot 0,857} = \frac{\sigma^2}{n} \cdot 1,36;$$

seega on hinnangute (31) ja (32) efektiivsusteks vastavalt

$$e = \frac{\sigma^2}{2n} : \left(\frac{\sigma^2}{n} \cdot 1,36\right) = \frac{1}{2 \cdot 1,36} = 0,368 \text{ ja}$$

$$e = \frac{\sigma^2}{2n} : \left(\frac{\sigma^2}{n} \cdot 1,01\right) = 0,495.$$

— * —

4. Standardhälbe hinnangute võrdlus.

Hinnangute (31) ja (32) kasutamisel on oluliseks eelduseks uuritava juhusliku suuruse X normaalsus. Mittenormaalsete (normaalsest oluliselt erinevate) juhuslike suuruste puhul ei ole hinnangud sekstiilide ning kvartiilide kaudu rakendatavad.

Nägime, et viimati leitud hinnangute dispersioon on mõnevõrra suurem kui hinnangute \bar{G} ja s dispersioon (vt. § 5 valemid (24) ja (25)). Hinnangute (31) ja (32) eeliseks on aga lihtne leitavus, eriti juhul, kui on tegemist suurte väljavõtetega, mis on variatsioonritta järjestatud.

Kui väljavõttesse on sattunud üksikuid keskmisest väga kaugel asuvaid indiviide (vt. § 2.8) (võib-olla on tegemist jämeda veaga, võib-olla juhusega), siis mõjutavad sellised vead väga tugevasti hinnanguid \bar{G} ja s ning vähem, nagu nägime, hinnanguid keskmise hälbe kaudu. Hinnanguid väljavõtte kvantiilide kaudu mõjutavad tugevasti kõrvalekalduvad väärtused kõige vähem.

See võimaldab mõningatel juhtudel eelistada standardhälbe hinnanguid väljavõtte kvantiilide kaudu või kasutada neid teisel viisil saadud hinnangute kontrolliks.

§ 7. Binomiaaljaotusega juhusliku suuruse parameetri p hindamine.

1. Tõenäosuse p hinnang.

Olgu juhuslik suurus X binomiaaljaotusega $X \sim B(n, p)$, kusjuures katsete arv n olgu teada, kuid parameeter p - sündmuse A esinemise tõenäosus üksikkatsel olgu tundmatu.

Olgu meil teada katsetulemuse A esinemiste arv k (n katse vältel). Siis on sündmuse A esinemise suhteline sagedus

$$\frac{k}{n},$$

ning nagu teada suurte arvude seadusest ($[3]$) läheneb see suhteline sagedus katsete arvu suurenemisel tõenäosusele p , seega on

$$\tilde{p} = \frac{k}{n}$$

konsistentseks hinnanguks parameetrile p .

Et juhusliku suuruse $X \sim B(n, p)$ keskväärts on $EX = np$ (vt. näide 4), käesoleval juhul on aga X väärtus tähistatud tähega k , siis

$$Ek = np,$$

seega

$$E\frac{k}{n} = p \quad (33)$$

ning hinnang on ühtlasi ka nihutamata.

2. Hinnangu \tilde{p} dispersioon.

Samasugune mõttekäik võimaldab meil leida ka hinnangu \tilde{p} dispersiooni. Tõepoolest, binomiaaljaotusega juhusliku suuruse dispersioon on

$$DX = npq,$$

seega $Dk = npq$, ning

$$D(\tilde{p}) = D\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n^2} Dk = \frac{npq}{n^2} = \frac{pq}{n}. \quad (34)$$

On võimalik tõestada (vt. näiteks [6] või [7]), et see dispersioon on minimaalne võimalik, ning seega on hinnang \tilde{p} efektiivne.

Praktiliselt ei ole hinnangu \tilde{p} dispersiooni hinnang (34) aga rakendatav, sest ta sisaldab meile tundmatuid p ja q väärtusi. Asendame p ja q nende hinnangutega \tilde{p} ja $(1-\tilde{p})$, saame

$$D(\tilde{p}) = \frac{\tilde{p}(1-\tilde{p})}{n}.$$

*
Kontrollime, kas see hinnang on nihutatud. Selleks arvutame

$$E \left[\tilde{G}^2(\tilde{p}) \right] = \frac{1}{n} E\tilde{p} - E\tilde{p}^2; \quad (35)$$

Nagu nägime, $E\tilde{p} = p$. Tuleb veel leida $E\tilde{p}^2 = E \frac{k^2}{n^2} = \frac{1}{n^2} EX^2$.

Selleks, et saada EX^2 väärtust, meenutame juhusliku suuruse X dispersiooni avaldist

$$DX = EX^2 - (EX)^2;$$

siin on teada $DX = npq$, $(EX)^2 = n^2 p^2$, seega saame

$$EX^2 = npq + n^2 p^2.$$

Asendades saadud tulemuse avaldisesse (35), saame

$$\begin{aligned} E \left[\tilde{G}^2(\tilde{p}) \right] &= \frac{1}{n} \left[p - \frac{1}{n^2} (npq + n^2 p^2) \right] = \frac{1}{n} \left[p - \frac{pq}{n} - p^2 \right] = \\ &= \frac{n-1}{n^2} pq. \end{aligned}$$

— * —

Järelikult on dispersiooni hinnang (34) nihutatud ja nihutamata hinnanguks saaksime

$$s^2(\tilde{p}) = \frac{n}{n-1} \tilde{G}^2(\tilde{p}) = \frac{\tilde{p}(1-\tilde{p})}{n-1} = \frac{k(n-k)}{n^2(n-1)}. \quad (36)$$

3. Hinnangu \tilde{p} dispersiooni ligikaudne hinnang.

Kui dispersiooni hinnangu puhul ei ole tarvis taotleda suurt täpsust, võime selle anda sõltumatult \tilde{p} väärtusest.

Et alati $p q \leq \frac{1}{4}$,¹⁷ siis järeldub seosest (34), et alati kehtib võrratus

$$D(\tilde{p}) \leq \frac{1}{4n}. \quad (37)$$

Saadud hinnang dispersioonile on huvitav seetõttu, et ta ei sõltu hinnatava parameetri p konkreetsest väärtusest. Osutub aga, et saadud dispersiooni hinnang (35-37) on täpne ainult siis, kui $p = q = \frac{1}{2}$, ning seda ebatäpsem (üle hinnatum), mida lähemal on p (või q) nullile.¹⁷ Tõepoolest, juhul kui $p = 0,01$, saame valemit (34) kasutades hinnangu \tilde{p} dispersiooniks

$$D(\tilde{p}) \leq \frac{1}{100n}.$$

Seega seosega (37) saadud dispersioonihinnang ülehindab dispersiooni 25-kordselt!

Samuti saame hinnata ka parameetri p hinnangu \tilde{p} standardhälvet

$$\sigma(\tilde{p}) = \sqrt{\frac{pq}{n}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \quad (38)$$

ehk

$$s(\tilde{p}) = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{k(n-k)}{(n-1)}} = \sqrt{\frac{\tilde{p}(1-\tilde{p})}{n-1}}. \quad (39)$$

¹⁷ Tõepoolest, kui $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$, siis $p \cdot q = \frac{1}{4}$. Muudame p ja q väärtusi - olgu $p' = \frac{1}{2} + \varepsilon$, $q' = \frac{1}{2} - \varepsilon$, kusjuures $|\varepsilon|$ peab olema 0 ja $\frac{1}{2}$ vahel, nii et p' ja q' rahuldaksid tingimust $0 \leq p', q' \leq 1$. Siis $p' \cdot q' = (\frac{1}{2} + \varepsilon)(\frac{1}{2} - \varepsilon) = \frac{1}{4} - \varepsilon^2 < \frac{1}{4}$.

4. Hinnangu \tilde{p} suhteline viga.

Sageli on otstarbekas kasutada ka tõenäosuse p hinnangu \tilde{p} täpsuse näitajana nn. suhtelist viga, s.o. hinnangu standardhälbe ja hinnatava parameetri suhet

$$\frac{\sigma(\tilde{p})}{\tilde{p}} = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{q}{np}}; \quad (40)$$

nihutamata hinnanguks suhtelisele veale saame

$$\frac{s(\tilde{p})}{\tilde{p}} = \sqrt{\frac{1-\tilde{p}}{(n-1)\tilde{p}}} = \sqrt{\frac{n-k}{k(n-1)}}. \quad (41)$$

Näeme, et kuigi väikese p väärtuse korral standardhälve $\sigma(\tilde{p})$ võib olla üsna väike, on suhteline viga küllaltki suur, sest see sõltub peale n väärtuste k, q ja p omavahelisest suhtest.

5. Tõenäosuse p hinnang katseseeria põhjal.

Vaatleme nüüd olukorda, kus meil on tehtud seeria katseid sama tõenäosuse p määramiseks. Olgu nende katseseeriade pikkused vastavalt n_1, n_2, \dots, n_m ning olgu tulemuse A esinemiste arv vastavalt k_1, k_2, \dots, k_m . Lugeses kõiki katseid ühte katseseeriasse kuuluvateks, saaksime suhtelise sageduse hinnanguks

$$p \approx \tilde{p} = \frac{k_1 + k_2 + \dots + k_m}{n_1 + n_2 + \dots + n_m}. \quad (42)$$

Ka see hinnang on nihutamata: tähistades

$$n_1 + n_2 + \dots + n_m = N$$

saame lihtsalt arvutada tõenäosuse p hinnangu \tilde{p} keskvaartuse

$$E \tilde{p} = \frac{1}{N} (Ek_1 + \dots + Ek_m) = \frac{1}{N} (n_1 p + n_2 p + \dots + n_m p) = \frac{p \sum_{i=1}^m n_i}{N} = p.$$

Hinnangu \tilde{p} dispersiooni arvutame summa dispersiooni valemist:

$$D_{\tilde{p}} = \frac{1}{N^2} (Dk_1 + \dots + Dk_m) = \frac{1}{N^2} (n_1 pq + \dots + n_m pq) = \frac{Npq}{N^2} = \frac{pq}{N} \quad (43)$$

Osutub, et hinnang \tilde{p} on efektiivne ning konsistentne.

Olgu märgitud, et hinnangu \tilde{p} võime saada, kasutades üksikseeriatest leitud p hinnanguid. Tähistame

$$\tilde{p}_1 = \frac{k_1}{n_1}, \quad \tilde{p}_2 = \frac{k_2}{n_2}, \quad \dots, \quad \tilde{p}_m = \frac{k_m}{n_m}.$$

Kui katseseeriad on erineva pikkusega ($n_1 \neq n_2 \neq \dots \neq n_m$), siis ei ole õige lugeda p hinnanguks \tilde{p} üksikseeriatest saadud p hinnangute \tilde{p}_1 aritmeetilist keskmist, vaid tuleks kasutada kaalusid, mis on võrdelised üksikkatsete mahtudega n_1, n_2, \dots, n_m (sest mahukamast katsest saame p jaoks täpsema hinnangu). Selleks defineerime kaalud

$$\varepsilon_1 = \frac{n_1}{N}, \quad \varepsilon_2 = \frac{n_2}{N}, \quad \dots, \quad \varepsilon_m = \frac{n_m}{N}$$

ning määrame tõenäosuse hinnangu \tilde{p}

$$\tilde{p} = \varepsilon_1 \tilde{p}_1 + \dots + \varepsilon_m \tilde{p}_m.$$

On lihtne kontrollida, et saadud hinnang langeb ühte hinnanguga (42). Hinnangu \tilde{p} dispersiooni saame leida üksikseeriatest saadud hinnangute \tilde{p}_1 dispersioonide kaudu

$$D(\tilde{p}) = \varepsilon_1^2 D(\tilde{p}_1) + \dots + \varepsilon_m^2 D(\tilde{p}_m).$$

Arvutades saame siit jälle seose (43); tõepoolest,

$$D(\tilde{p}) = \frac{1}{N^2} (n_1^2 \frac{pq}{n_1} + n_2^2 \frac{pq}{n_2} + \dots + n_m^2 \frac{pq}{n_m}) = \frac{pq}{N}.$$

Märgime veel, et \tilde{p} standardhälbe avaldamiseks üksik-hinnangute \tilde{p}_1 standardhälvete kaudu saame

$$\sigma(\tilde{p}) = \sqrt{\frac{pq}{N}} = \sqrt{\varepsilon_1^2 [\sigma(\tilde{p}_1)]^2 + \dots + \varepsilon_m^2 [\sigma(\tilde{p}_m)]^2}$$

ning ilma p ja q konkreetseid väärtusi teadmata saame kasutada hinnanguid

$$D(\tilde{p}) \leq \frac{1}{4N}, \quad G(\tilde{p}) \leq \frac{1}{2\sqrt{N}}.$$

Hinnangu \tilde{p} dispersiooni jaoks saaksime nihutamata hinnanguks analoogiliselt valemiga (36)

$$s^2(\tilde{p}) = \frac{\tilde{p}(1-\tilde{p})}{N} = \frac{K(N-K)}{N(N-1)}, \quad (44)$$

kus $K = \sum_{i=1}^m k_i$.

Standardhälbe nihutamata hinnanguks on sel juhul

$$s(\tilde{p}) = \frac{1}{N} \sqrt{\frac{K(N-K)}{(N-1)}} \quad (45)$$

ning suhtelise vea nihutamata hinnanguks

$$\frac{s(\tilde{p})}{\tilde{p}} = \sqrt{\frac{(N-K)}{K(N-1)}}. \quad (46)$$

Märgime siin veel, et juhul kui N on küllalt suur, nii et

$\frac{1}{4N^2}$ on väiksem kui lubatud arvutusviga, võime valemite

(44)–(46) $N-1$ asemel kasutada suurust N , mis sageli hõlbustab arvutamist.

6. Tõenäosuse p hinnangu \tilde{p} dispersiooni leidmine üksikväljavõtete hajuvuse kaudu.

Kui katseseeria sisaldab küllaldase arvu m katseid, kusjuures üksikkatsete mahud n_1, \dots, n_m on ligikaudu võrdsed, siis võime vaadelda üksiktulemusi $\tilde{p}_i = \frac{k_i}{n_i}$ väljavõtena. Selle väljavõtte põhjal saaksime leida hinnangute \tilde{p}_i dispersioonid $D(\tilde{p}_i)$

$$D(\tilde{p}_i) = \frac{\sum_{i=1}^m (\tilde{p}_i - \tilde{p})^2}{m-1}$$

ning hinnangu \tilde{p} dispersiooni

$$D(\tilde{p}) = \frac{\sum_{i=1}^n (\tilde{p}_i - \tilde{p})^2}{(n-1)n}.$$

Juhul kui katsed on oluliselt erinevate mahtudega, tuleb kasutada kaalusid

$$D(\tilde{p}_1) = \frac{\sum (\tilde{p}_1 - \tilde{p})^2 n_1}{N - n}$$

$$D(\tilde{p}) = \frac{\sum (\tilde{p}_1 - \tilde{p})^2 n_1}{(N-n)n}.$$

§ 5. Binomiaaljaotuse lähendamine normaaljaotusega.

Kui binomiaaljaotuse puhul on vaatluste arv n väga suur, siis osutub otstarbekaks binomiaaljaotuse lähendamine normaaljaotusega (õigustuse selleks annab klassikaline piirteoreem, vt. näiteks [3] või [4]). Selleks tuleb määrata normaaljaotuse parameetrid m ja σ nii, et nad oleksid võrdsed uuritava binomiaaljaotuse vastavate parameetritega (nende jaoks saadud hinnangutega). Võtame

$$m = \tilde{E}X = n\tilde{p} = k;$$

$$\sigma = \sqrt{DX} = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{\frac{k(n-k)}{n}}.$$

Siis on juhuslik suurus

$$\frac{X - m}{\sigma} = \frac{(X-k) \sqrt{n}}{\sqrt{k(n-k)}} = \frac{(X - n\tilde{p})}{\sqrt{n\tilde{p}(1-\tilde{p})}}$$

normaaljaotusega $N(0,1)$ ning tema jaotusfunktsiooni võime leida normaaljaotuse tabelist (vt. tabel II) ning kasutada mitmesuguste ülesannete ligikaudseks lahendamiseks.

Näide 49.

Rea aastate jooksul on linnas registreeritud 25 000 sündi. Osutus, et nende seas oli 12 900 poisulast. Leida, kui suur on tõenäosus selleks, et aasta jooksul linnas sündiva 1000 lapse hulgas on

- 1) vähemalt 500 tütarlast;
- 2) alla 450 tütarlast;
- 3) piirid Q ja R, mille vahel on tütarlaste arv tõenäosusega 0,95.

Lahendus. Leiame kõigepealt tütarlaste sündimise tõenäosusele p hinnangu $\tilde{p} = \frac{25\,000 - 12\,900}{25\,000} = 0,484$. Tähistame vastsündinud tütarlaste arvu tähega X. X on binomiaaljaotusega $B(1000, p)$ juhuslik suurus, kus $p \approx 0,484$.

Leiame hinnangud $EX = m$ ja $\sqrt{DX} = \sigma$ jaoks:

$$m \approx np = 484$$

$$\sigma \approx \sqrt{npq} = \sqrt{516 \cdot 0,484} = 15,80$$

$$\begin{aligned} 1) P(X \geq 500) &= P(Y \geq \frac{500-484}{15,80}) = P(Y \geq 1,01) = \\ &= 1 - P(Y < 1,01) = 1 - 0,8438 = 0,1562; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) P(X < 450) &= P(Y < -\frac{34}{15,75}) = P(Y < -2,15) = \\ &= P(Y > 2,15) = 1 - P(Y < 2,15) = \\ &= 1 - 0,9846 = 0,0154; \end{aligned}$$

$$3) P(Y > R) = 0,025;$$

$$R = 484 + 1,96 \cdot 15,80 = 484 + 31 = 515;$$

$$Q = 484 - 31 = 453.$$

Märgime siin, et tõenäosuse p hinnang on saadud suure väljavõtte põhjal ning seetõttu jätsime hinnangu ebatäpsuse

arvestamata. Väiksemate väljavõtete põhjal saadud \tilde{p} väärtuste kasutamisel tuleb arvestada ka \tilde{p} viga, seega tuleb kasutada vahemikhinnanguid (vt. IV ptk.).

§ 9. Poissoni jaotusega juhusliku suuruse parameetri hindamine.

Olgu juhuslik suurus X Poissoni jaotusega, $X \sim P(\lambda)$ (vt. § 1.15).

Poissoni jaotuse kirjeldamiseks on tarvis määrata üksainus parameeter λ , mis teatavasti (vt. § 1.15) on ühtlasi selle jaotuse keskväertuseks

$$EX = \lambda.$$

Siit järeldubki, et λ jaoks saame nihutamata hinnanguks väljavõtte keskväertuse \bar{x} .

Olgu meil tehtud n katsed, kusjuures saadud väljavõtteks on x_1, x_2, \dots, x_n (s.t., n asjaühiku vältel on loendatud meid huvitava sündmuse esinemiste arvud ning saadud väärtused x_1, \dots, x_n , mis on ksheldamatult mittenegatiivsed täisarvud). Siis saame λ jaoks hinnangu $\tilde{\lambda}$

$$\tilde{\lambda} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}. \quad (47)$$

See hinnang on nihutamata (vt. § 4) ning tema dispersiooniks on

$$D(\tilde{\lambda}) = \frac{DX}{n} = \frac{\lambda}{n}, \quad (48)$$

(kasutatakse siin asjaolu, et $DX = x_1$ (vt. § 1.15)

ning standardhälbeks

$$\sigma(\tilde{\lambda}) = \sqrt{\frac{\lambda}{n}}.$$

* Et saada $D(\tilde{\lambda})$ hinnangut väljavõtte põhjal, asetame seosesse (48) λ asemele tema hinnangu $\tilde{\lambda}$; saame siis hinnangu

$$D(\tilde{\lambda}) = \frac{\tilde{\lambda}}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (49)$$

Kontrollime, kas see hinnang on nihutamata

$$ED(\tilde{\lambda}) = \frac{1}{n} E(\tilde{\lambda}) = \frac{\lambda}{n}.$$

Näeme, et hinnangu $\tilde{\lambda}$ nihutamatuses järeldub, et ka hinnang (49) $\tilde{\lambda}$ dispersioonile on nihutamata. On võimalik näidata (vt. [6,7]), et saadud λ hinnang $\tilde{\lambda}$ on efektiivne ning suurte arvude seadusest järeldub tema konsistentsus.

Kuna sageli on vaatluste teostamise ajavahemiku valik suvaline λ , hinnang $\tilde{\lambda}$ aga sõltub valitud ajavahemikust, tekib küsimus, millist ajavahemikku valida, et saada võimalikult täpset hinnangut $\tilde{\lambda}$ parameetri λ jaoks.

Täpsuse hindamiseks sobib sageli parameetri λ hinnangu $\tilde{\lambda}$ suhteline viga

$$\frac{\sigma(\tilde{\lambda})}{\lambda} = \frac{\sqrt{\frac{\lambda}{n}}}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{n\lambda}}.$$

Näeme, et suhteline viga on väike suure n ning λ väärtuse korral, s.t. siis, kui katseseeriaid on tehtud palju ning igas seerias vaatlusaeg küllaldaselt pikk.

Näide 50.

5 tunni jooksul registreeriti kosmilise kiirguse loendaja abil 80 kosmilist osakest. On teada, et kosmilise kiirguse puhul ajavahemiku vältel täheldatav osakeste arv on Poissoni jaotusega. Leida seda iseloomustav parameeter λ , võttes ajaühikuks tunni.

Lahendus.

Võttes ajavahemikuks 5 tundi, saame $\lambda = EX$ jaoks hinnangu $\tilde{\lambda} = 80$, siis ka $\tilde{DX} = 80$, $\tilde{\sigma} \approx 9$ ja suhteline viga on $\frac{9}{80} \approx 0,1$.

Võttes ajavahemikuks 1 tunni, saame $\tilde{\lambda} = \tilde{EX} = 80:5 = 16$, $\tilde{DX} = 16$, $\tilde{\sigma} = 4$; kuid hinnangu $\tilde{\lambda}$ standardhälve on $\sigma(\tilde{\lambda}) = \frac{4}{5} = 1,8$ ning suhteline viga on samuti $\frac{1,8}{16} \approx 0,1$.

§ 10. Ühtlase jaotusega juhusliku suuruse parameetrite aja b hindamine.

Oletame, et juhuslik suurus X on ühtlase jaotusega, $X \sim U(a, b)$. Parameetrid a ning b tähistavad ühtlasi selle juhusliku suuruse väärtuste piirkonna otspunkte, s.t. $a \leq X \leq b$.

1. Hinnangud keskvaartuse ja standardhälbe kaudu.

Meenutades ühtlase jaotuse keskvaartuse ja dispersiooni avaldisi (vt. § 1.14), saame

$$EX = \frac{a+b}{2},$$

$$DX = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Oletame, et meil on teada väljavõte

$$x_1, x_2, \dots, x_n.$$

Üks võimalus parameetrite a ja b määramiseks oleks järgmine: leiame väljavõtte keskvaartuse \bar{x} ning dispersiooni nihutamata hinnangu s^2 ning võrrutame

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{a+b}{2}, \\ s^2 = \frac{(b-a)^2}{12}; \quad s = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}. \end{cases} \quad (50)$$

Võrrandisüsteemi lahendamisel saaksime määrata a ja b hinnangute \bar{x} ning s kaudu

$$\begin{cases} a = \bar{x} - \sqrt{3} s \\ b = \bar{x} + \sqrt{3} s. \end{cases} \quad (51)$$

Meenutades, et $D(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n}$, $D(s) > D(\sigma) = \frac{\sigma^2}{2n}$ (vt. §-d 4 ja 5 käesolevas ptk.) näeme, et $D(a)$ ja $D(b)$ on ligikaudu võrdelised suurusega $\frac{1}{n}$.

2. Hinnangud variatsioonrea elementide kaudu.

Püüame leida ka teise võimaluse a ja b hindamiseks. Selleks võtame lihtsalt a ja b võrdseks variatsioonrea esimese ja viimase liikmega:

$$a = x_1', \quad b = x_n'. \quad (52)$$

Ilmselt on tegemist nihutatud hinnangutega: a peab kindlasti olema väiksem kui x_1' , b aga suurem kui x_n' . Arvutame saadud hinnangute nihked:

3. Nihutamata hinnangud.

* Selleks, et leida variatsioonrea äärmiste elementide keskväärtused, tuleb meil leida nende jaotusfunktsioon ning tõenäosuse tihedus.

Arvutame kõigepealt jaotusfunktsioonid

$$\begin{aligned} F_{x_n'}(x) &= P(x_n' < x) = \prod_{i=1}^n P(x_i < x) = \prod_{i=1}^n F_{x_i}(x) = \\ &= (F_X(x))^n = \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^n; \end{aligned}$$

$$f_{x_n}' = \frac{d}{dx} F_{x_n}'(x) = \frac{n}{(b-a)^n} (x-a)^{n-1};$$

$$\begin{aligned}
 F_{x_1'}(x) &= P(x_1' < x) = 1 - P(x_1' > x) = 1 - \prod_{i=1}^n P(x_i > x) = \\
 &= 1 - \prod_{i=1}^n [1 - F_{x_i}(x)] = 1 - (1 - F_X(x))^n = 1 - \left(1 - \frac{x-a}{b-a}\right)^n = \\
 &= 1 - \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^n;
 \end{aligned}$$

$$f_{x_1'}(x) = \frac{n}{(b-a)^n} (b-x)^{n-1}.$$

Keskväertuste arvutamiseks tuleb meil leida integraalid

$$\begin{aligned}
 E x_n' &= \int_a^b x f_{x_n'}(x) dx = \frac{n}{(b-a)^n} \int_a^b (x-a)^{n-1} x dx = \\
 &= \frac{n}{(b-a)^n} \int_a^b (x-a)^n dx + \frac{an}{(b-a)^n} \int_a^b (x-a)^{n-1} dx = \\
 &= \frac{n}{(b-a)^n} \left. \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} \right|_a^b + \frac{an}{(b-a)^n} \left. \frac{(x-a)^n}{n} \right|_a^b = \\
 &= \frac{n(b-a)}{n+1} + a = b - \frac{b-a}{n+1};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E x_1' &= \frac{n}{(b-a)^n} \int_a^b (b-x)^{n-1} x dx = \frac{n}{(b-a)^n} \left. \frac{(b-x)^{n+1}}{n+1} \right|_a^b - \\
 &- \frac{bn}{(b-a)^n} \left. \frac{(b-x)^n}{n} \right|_a^b = \frac{n}{n+1} (b-a) + a = a + \frac{b-a}{n+1}.
 \end{aligned}$$

Seega saime

$$E(x_n') = b - \frac{b-a}{n+1},$$

$$E(x_1') = a + \frac{b-a}{n+1}.$$

Tõepoolest, oletades, et kõik punktid x_i paiknevad lõigul $[a, b]$ ühtlaste vahede järel, saamegi väljavõtte iga kahe punkti vahekauguseks (sealhulgas ka otspunktide ning väljavõtte äärmiste punktide vahekauguseks) suuruse $\frac{b-a}{n+1}$.

Et saada nihutamata hinnangut a ja b jaoks, võtame

$$\begin{cases} a \approx \bar{a} = \frac{nx'_1 - x'_n}{n-1}; \\ b \approx \bar{b} = \frac{nx'_1 - x'_1}{n-1}. \end{cases} \quad (53)$$

Tõepoolest, arvutame hinnangute \bar{a} ja \bar{b} keskvaartused

$$E\bar{a} = \frac{1}{n-1} \left[n \cdot Ex'_1 - Ex'_n \right] = \frac{1}{n-1} \left[n \cdot \frac{na+b}{n+1} - \frac{nb+a}{n+1} \right] = \\ = \frac{n^2a - a}{(n-1)(n+1)} = a,$$

$$E\bar{b} = \frac{1}{n-1} \left[n \cdot Ex'_n - Ex'_1 \right] = \frac{1}{n-1} \left[n - \frac{nb+a}{n+1} - \frac{na+b}{n+1} \right] = \\ = \frac{n^2b - b}{(n-1)(n+1)} = b.$$

Kuna nihästi \bar{a} kui ka \bar{b} nihke absoluutväärtuseks on $\frac{b-a}{n+1}$, siis on mõlemad hinnangud asümptootiliselt nihutamata; samuti on võimalik näidata ka hinnangute konsistentsust.

Arvutades hinnangute dispersiooni näeme, et

$$D(x'_n) = D(x'_1) = \frac{n(b-a)^2}{(n+2)(n+1)^2}, \quad (54)$$

siit aga järeldub, et saadud a ning b hinnangute dispersioon on ligikaudu võrdeline suurusega $\frac{1}{(n+1)^2}$, seega on saadud hinnangud oluliselt paremad kui valemitega (51) saadud hinnangud a ja b jaoks.

Paneme ühtlasi tähele, et nii väikese dispersiooniga hinnanguid pole meil seni õnnestunud ühelegi parameetrile leida. Selle põhjuseks on asjaolu, et ühtlase jaotus on teatud mõttes teist tüüpi kui seni vaadeldud jaotused - ta on nn. mitteregulaarne jaotus, mille üheks omapäraks on see, et vaadeldava juhusliku suuruse väärtused on tõkestatud, kus-

juures tõketeks ongi otsitavad parameetrid (üldisem nõue -
tõkked sõltuvad otsitavatest parameetritest).

Näide 51.

Kodanik A läks igal hommikul autobussiga tööle ning registreeris töölemineku ajad 10 päeva jooksul:

23 min., 27 min., 31 min., 28 min., 25 min., 30 min., 22 min.,
27 min., 30 min., 24 min.

Oletades lihtsuse mõttes, et käigu- ning sõiduajad on ligi-
kaudu konstantsed ning bussi ooteaeg on ühtlase jaotusega
juhuslik suurus, määrata käigu ning sõiduaja summa ja oote-
aega iseloomustavad parameetrid.

Lanendus. Võtame esialgseks hinnanguks (valemist (32))

$$\bar{a} = \min x_i = 22 \text{ min}; \quad \bar{b} = \max x_i = 31 \text{ min};$$

tabustatud väärtused a ja b jaoks saaksime valemist (53)

$$\begin{cases} a \approx 22 - \frac{31 - 22}{9} = 21; \\ b \approx 31 + \frac{31 - 22}{9} = 32. \end{cases}$$

Arvestades, et reaalselt minimaalne ooteaeg on 0, järeldub
siit, et käigu- ja sõiduaja summa on 21 min. ning ooteaja
jaotus $u(0, 11)$; keskmine ooteaeg on seega $\frac{0+11}{2} = 5,5$ min.
ning keskmine töölemineku aeg $21 + 5,5 = 26,5$ min.

— * —

IV. VAHEMIKHINNANGUD.

§ 1. V a h e m i k h i n n a n g u t e ü l e s a n n e.

Et punkthinnang annab hinnatavale parameetrile peaaegu kindlasti vale väärtuse, kusjuures pole ka täpselt selge, kui palju on saadud väärtus vigane, siis on sageli otstarbekas kasutada vahemikhinnanguid. Vahemikhinnangute teoorias leitakse igale hinnatavale parameetrile mitte üks arvuline väärtus, vaid määratakse väljavõtte põhjal vahemik, millesse otsitav parameeter teatud tõenäosusega kuulub (vt. joonis 32). Kuna vahemik sõltub väljavõttest, siis on ta juhuslik, see, kas see juhuslik vahemik katab otsitavat parameetrit või mitte, sõltub juhusest, kuid loomulikult on parameetri katmise tõenäosus seda suurem, mida pikem on vaadeldav vahemik (vrd. vahemikke $(\underline{\Theta}_{(1)}, \bar{\Theta}_{(1)})$ ja $(\underline{\Theta}_{(2)}, \bar{\Theta}_{(2)})$ joonisel 33, kus Θ tähistab otsitava parameetri õiget (kuid tundmata väärtust). Teisest küljest - mida pikem on vaadeldav vahemik, seda vähem täpne on hinnang, sest hinnatavaks väärtuseks võime lugeda ju vahemiku mistahes punkti.

1. Usalduspiirkond.

Põhimõisteks vahemikhinnangute teoorias on usalduspiirkond; esitame järgnevalt selle definitsiooni.

Olgu juhusliku suuruse X kohta teada tema jaotuse üldkuju, kuid jaotust määrava parameetri Θ konkreetne väärtus

olgu tundmata ning kuulugu hindamisele. Olgu antud arv γ ($0 \leq \gamma \leq 1$; tavaliselt on γ küllalt väike, näiteks 0,01 või 0,05) ning väljavõtte juhusliku suuruse X väärtustest x_1, x_2, \dots, x_n .

Parameetri θ usalduspiirkonnaks vastavalt usaldusniivoole $1 - \gamma$ nimetatakse juhuslikku vahemikku $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$, kui kehtib võrratus

$$P(\underline{\theta} < \theta < \bar{\theta}) \geq 1 - \gamma, \quad (1)$$

kus $\underline{\theta} = \underline{\theta}(x_1, \dots, x_n)$ ja $\bar{\theta} = \bar{\theta}(x_1, \dots, x_n)$ on väljavõtte funktsioonid. Lühidalt: usalduspiirkond katab hinnatava parameetri θ tõenäosusega $1 - \gamma$ ehk hinnatav parameeter satub usalduspiirkonda tõenäosusega $1 - \gamma$ (siinjuures tuleb aga silmas pidada, et mitte parameetri väärtus θ , vaid usalduspiirkond sõltub juhusest!)

Ilmselt on iga γ puhul võimalik leida lõpmata palju usalduspiirkondi. Selleks valime vaid meelevaldsed suurused $\underline{\theta}' < \underline{\theta}$ ja $\bar{\theta}' > \bar{\theta}$ ning saame uue usalduspiirkonna $(\underline{\theta}', \bar{\theta}')$, sest

$$P(\underline{\theta}' < \theta < \bar{\theta}') \geq P(\underline{\theta} < \theta < \bar{\theta}) = 1 - \gamma.$$

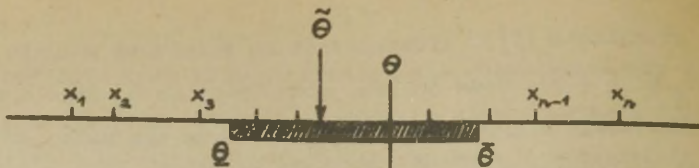
(vt. joonis 34).

2. Täpseim usalduspiirkond.

Enemasti pakub aga huvi leida parameetri θ jaoks täpseim usalduspiirkond $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$, s.o. selline, millesse iga parameetri õigest väärtusest θ erinev väärtus $\theta_0 \neq \theta$ kuuluks võimalikult väikese tõenäosusega, s.t.

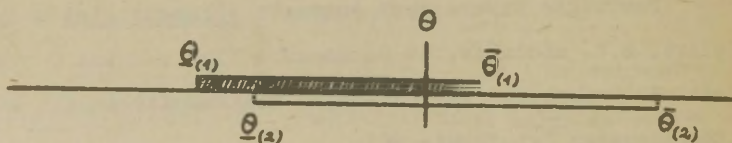
$$P\{\theta \in (\underline{\theta}, \bar{\theta})\} \geq 1 - \gamma,$$

$$P\{\theta_0 \in (\underline{\theta}, \bar{\theta})\} = \min, \text{ kui } \theta_0 \neq \theta.$$

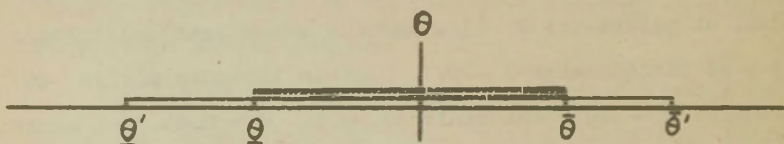


Joonis 32.

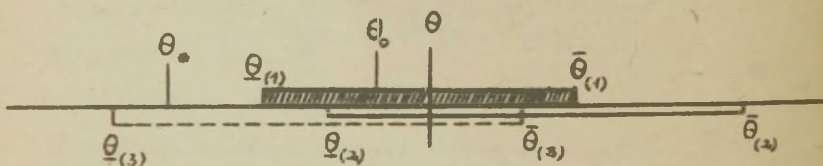
Väljavõtte x_1, \dots, x_n põhjal saadud punkthinnang $\tilde{\theta}$ ja vahemikhinnang $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$ tundmatule parameetrile θ .



Joonis 33.



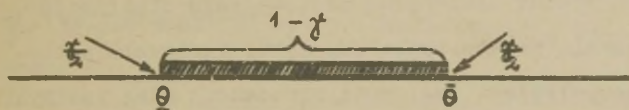
Joonis 34.



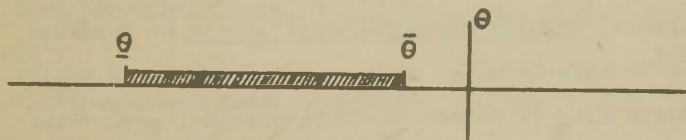
Joonis 35.

Õigete parameetri väärtusele θ lähedast väärtust θ_0 katab usalduspiirkond $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$ suurema tõenäosusega kui θ -st kaugel asetsevat väärtust θ_* .

Erinevad usalduspiirid $(\underline{\theta}_{(1)}, \bar{\theta}_{(1)})$, $(\underline{\theta}_{(2)}, \bar{\theta}_{(2)})$ jne. on saadud erinevate väljavõtete põhjal, kuid vastavad samale usaldusnivoole.



Joonis 36.
Sümmeetriline usalduspiirkond.



Joonis 37.

Usalduspiirkond ei kata õiget parameetrit tõenäosusega γ ning leides iga sellise väljavõtte puhul usalduspiirkonnad $(\underline{\theta}_{(1)}, \bar{\theta}_{(1)})$, $(\underline{\theta}_{(2)}, \bar{\theta}_{(2)})$, ..., $(\underline{\theta}_{(100)}, \bar{\theta}_{(100)})$, saame keskmiselt 5 (s.o. $100\gamma\%$ väljavõtete arvust N - praegu $N = 100$; üldiselt keskmiselt γN tükki) niisuguseid usalduspiirkondi, mis ei kata parameetri θ õiget väärtust (vt. joonis 37).

Sageli saab vahemikhinnanguid konstrueerida punkthinnanguite abil, kuid selleks on tarvis teada punkthinnangut määrava juhusliku suuruse jaotust. Et viimast on võimalik teada üldiselt üksnes siis, kui on teada uuritava juhusliku suuruse X jaotus (selle klass), siis ei ole võimalik anda eeskirju

täpsemate usalduspiiride arvutamiseks ükskõik milliste jaotuste jaoks, vaid tuleb alati arvestada, millise konkreetse jaotuse klassiga on tegemist.¹⁸

§ 2. Ühepoolsed usalduspiirid.

Mõningate ülesannete lahendamisel ei ole aga tarvis leida usalduspiirkondi ülaltoodud mõttes, vaid oluline on määrata hinnatavale parameetrile üks tõke. Vastavalt sellele kõneleme ühepoolsetest usalduspiirkondadest ning vastavalt ühepoolsest ülemisest ja ühepoolsest alumisest usalduspiirist.

Näide 52.

Ravimi toksilisuse määramiseks manustatakse seda katseloomade rühmale. Tegelik keskmine toksilisus m on tundmatu, kuid tarvis on katseloomadel saadud mõõtmistulemuste põhjal määrata piir \bar{m} nii, et etteantud tõenäosusega $1 - \alpha$ võime kinnitada, et kehtib võrratus

$$m < \bar{m}.$$

¹⁸ Teades ainult juhusliku suuruse dispersiooni, on võimalik leida Tšebõšovi võrratuse (vt. [3])

$$P(|X-EX| > \varepsilon) < \frac{DX}{\varepsilon^2} \text{ ehk } P(|X-EX| > \sqrt{DX} \varepsilon) < \frac{1}{\varepsilon^2}$$

abil usalduspiirid suvalise juhusliku suuruse keskvärtuse jaoks; võttes $\frac{1}{\varepsilon^2} = 0,05$, saame $\varepsilon \approx 4,5$, seega saaksime keskvärtuse EX 95%-listeks usalduspiirideks

$x - 4,5 DX$, $x + 4,5 DX$, kus x on vaatlustulemus, ehk

$$\bar{x} - 4,5 \frac{DX}{\sqrt{n}}, \quad \bar{x} + 4,5 \frac{DX}{\sqrt{n}}, \quad \text{kus } \bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i.$$

Kui \bar{m} ei ületa etteantud standardit, võib ravimi luge-
da tarvitamiskõlblikuks, vastasel korral mitte.

Näide 53.

Konstruksiooni vastupidavuse määramiseks tehakse rida katseid (näiteka survetugevuse mõõtmisi). Tegelikku (kesk-
mist) tugevust sel viisil täpselt teada saada ei ole võimalik, kuid on võimalik määrata vastavalt etteantud usaldusnivoole $1 - \alpha$ väljavõttest sõltuv juhuslik suurus \underline{r} nii, et tõenäosusega $1 - \alpha$ esineb võrratus

$$r > \underline{r}.$$

Leitud suuruse \underline{r} võrdlemine etteantud normatiiviga võimaldab otsustada konstruktsiooni kasutamiskõlblikkuse üle.

Üldkujul võiksime käsitletud ülensanded sõnastada järgmiselt.

Olgu juhuslik suurus X jaotusega $P_X(\theta)$, hindamist vajab parameeter θ . Olgu teada väljavõtte

$$x_1, \dots, x_n$$

ning antud usaldusnivoo $1 - \alpha$. Parameetri θ ülemiseks ühepoolseks usalduspiiriks vastavalt usaldusnivoole $1 - \alpha$ nimetame väljavõttest sõltuvat juhuslikku suurust $\bar{\theta}(x_1, \dots, x_n) = \bar{\theta}$, mis rahuldab võrratust

$$\theta < \bar{\theta}$$

tõenäosusega $1 - \alpha$, s.t.

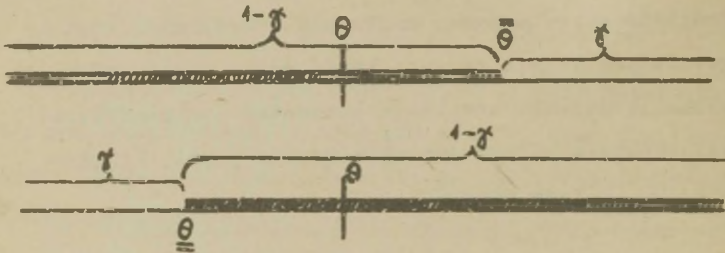
$$P(\theta < \bar{\theta}) = 1 - \alpha. \quad (4)$$

Parameetri θ alumiseks ühepoolseks usalduspiiriks vastavalt usaldusnivoole $1 - \alpha$ nimetame väljavõttest sõltuvat juhuslikku suurust $\underline{\theta}(x_1, \dots, x_n) = \underline{\theta}$, mis rahuldab võrratust

$$\theta > \underline{\theta}$$

tõenäosusega $1 - \gamma$, s.t.

$$P(\theta > \underline{\theta}) = 1 - \gamma. \quad (5)$$



Ühepoolsed usalduspiirid.

Joonis 38.

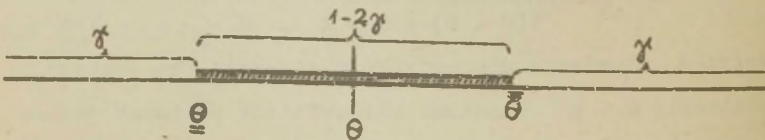
Nagu näeme jooniselt 38, on täpsemad ühepoolsed usalduspiirid üheselt määratud. Paneme tähele, et ühtlasi kehtivad võrdused

$$\begin{cases} P(\theta < \underline{\theta}) = \gamma, \\ P(\theta > \bar{\theta}) = \gamma \end{cases} \quad (6)$$

ja seega

$$P(\underline{\theta} < \theta < \bar{\theta}) = 1 - 2\gamma. \quad (7)$$

Niisiis, ühepoolne alumine ning ühepoolne ülemine usalduspiir vastavelt usaldusnivoole $1 - \gamma$ määravad koos usalduspiirkonna usaldusnivooaga $1 - 2\gamma$ (vt. joonis 39).

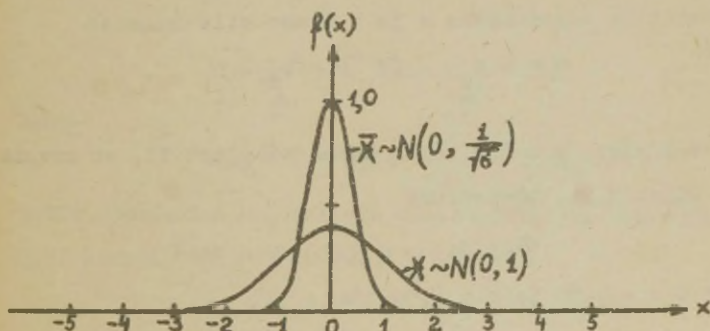


Joonis 39.

§ 3. Normaaljaotusega juhusliku suuruse keskvärtuse usalduspiirid.

1. Kahepoolsete usalduspiiride avaldis σ kaudu.

Lähtume eeldusest, et muutuv juhuslik suurus X on normaaljaotusega, $X \sim N(m, \sigma^2)$. Olgu standardhälve σ teada ning me soovime hinnata keskvärtust m . Parim hinnang m jaoks on \bar{x} . Leiame nüüd \bar{X} jaotuse. Et \bar{X} on normaaljaotusega juhuslike suuruste lineaarne kombinatsioon, siis on ka \bar{X} normaaljaotusega. Peale selle on meil teada, et $E\bar{X} = m$ ja $D\bar{X} = \frac{\sigma^2}{n}$ (vt. valemid (3.16) ja (3.17)). Seega $\bar{X} \sim N(m, \frac{\sigma^2}{n})$ (vt. joonis 40).



Joonis 40.

\bar{x} on arvatud σ -indiviidise väljavõtte põhjal.

Normeerides ja tsentreerides juhusliku suuruse \bar{x} saame

$$Z = \frac{\bar{x} - m}{\sigma} \sqrt{n} \sim N(0, 1).$$

Normaaljaotuse $N(0, 1)$ jaoks on aga jaotusfunktsiooni väärtused tabuleeritud, seetõttu on lihtne leida väärtusi a ja b nii, et $P(a \leq Z \leq b) = 1 - \gamma$ iga suvalise γ korral.

Olgu msile antud näiteks $\gamma = 5\%$, millele vastaks 95 %-line usalduspiirkond. Sel juhul tuleb leida normaaljaotuse tabelist arv $p_{\gamma/2}$ nii, et

$$\Phi(p_{\gamma/2}) = P(Z < p_{\gamma/2}) = 1 - \frac{\gamma}{2}.$$

Ilmselt on siis täidetud ka seosed (arvestame, et normaaljaotus on pidev, nii et $P(Z = a) = 0$ iga a korral).

$$P(Z \geq p_{\frac{\gamma}{2}}) = P(Z > p_{\frac{\gamma}{2}}) = \frac{\gamma}{2}$$

ja

$$P(Z \leq -p_{\frac{\gamma}{2}}) = P(Z < -p_{\frac{\gamma}{2}}) = \frac{\gamma}{2}.$$

Otsitavateks väärtusteks a ja b saame siis

$$a = -p_{\frac{\gamma}{2}} \quad \text{ja} \quad b = p_{\frac{\gamma}{2}}.$$

Kuna valisime $\gamma = 5\%$, siis näeme tabelist II, et arvaks $p_{\frac{\gamma}{2}}$ tuleb 1,96; tõepoolest

$$\Phi(1,96) = 0,975 = 1 - \frac{0,05}{2}.$$

Seega $a = -1,96$ ja $b = 1,96$ ning

$$P(-1,96 < \frac{\bar{x} - m}{\sigma} \sqrt{n} < 1,96) = 0,95.$$

Lihtsa teisendusega saame siit ühtlasi

$$P(\bar{x} - 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < m < \bar{x} + 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 0,95.$$

Seega saime parameetrile m määrata 95 %-lised usalduspiirid \underline{m} ja \bar{m} seostega:

$$\underline{m} = \bar{x} - 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

$$\bar{m} = \bar{x} + 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Näeme nüüd, et normaaljaotusega juhusliku suuruse keskvaartuse usalduspiirid paiknevad punkthinnangu \bar{x} suhtes sümmeetriliselt.¹⁹

2. Ühepoolsete usalduspiiride avaldis σ kaudu.

Leiame nüüd ka ühepoolsed usalduspiirid samuti usaldusnivoole 0,95 vastavalt. Ilmselt peame selleks leidma punkti p_γ nii, et

$$P(Z > p_\gamma) = \gamma, \\ \Phi(p_\gamma) = P(Z < p_\gamma) = 1 - \gamma;$$

γ väärtusele 0,05 vastavaks p_γ väärtuseks saame tabelist 1,65.

Seosest

$$P\left(\frac{\bar{x} - m}{\sigma/\sqrt{n}} < 1,65\right) = 0,95$$

saame

$$P(m > \bar{x} - 1,65 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 0,95,$$

seega alumiseks ühepoolseks usalduspiiriks (usaldusnivoo 0,95 korral) keskvaartusele m on

$$\underline{m} = \bar{x} - 1,65 \frac{\sigma}{\sqrt{n}};$$

analoogilise aruteluga saaksime ülemiseks ühepoolseks usalduspiiriks

$$\bar{m} = \bar{x} + 1,65 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Näeme, et kui meid sisuliselt huvitab parameetri väärtuste jaoks ainult üks tõke, siis on otstarbekam kasutada ühepoolset usalduspiiri, kuna see annab ökonoomsema

¹⁹ Märkime siin, et sümmeetrilised usalduspiirid, mis on määratud seosega (3), ei paikne sugugi alati punkthinnangu \bar{x} suhtes sümmeetriliselt; nii on see vaid sel juhul, kui punkthinnangu \bar{x} jaotus on sümmeetriline.

tulemuse (\underline{m} on punkthinnangule \bar{x} lähemal kui \underline{m} , samuti ka \bar{m} on lähemal kui \bar{m}).

Näide 54.

Vaatleme väljavõtet juhusliku suuruse X , $X \sim N(m, 2)$

väärtuste hulgast:

1; 2; 2,5; 3; 3; 3,5; 3,5; 3,5; 4,5; 6.

Leiame $X = \frac{1}{10} (1+2+2,5+2,3 + 3,3,5 + 4,5 + 6) = 3,25$.

Kahepoolsed usalduspiirid vastavalt usaldusnivoole

0,95 on:

$$\begin{cases} \underline{m} = 3,25 - 1,96 \frac{2}{\sqrt{10}} = 3,25 - 1,24 = 2,01 \\ \bar{m} = 3,25 + 1,24 = 4,49. \end{cases}$$

Ühepoolsed usaldusnivooga 0,95 usalduspiirid saaksime aga arvutada järgmiselt:

$$\underline{m} = 3,25 - 1,65 \cdot \frac{2}{\sqrt{10}} = 3,25 - 1,04 = 2,21$$

$$\bar{m} = 3,25 + 1,04 = 4,29.$$

Peame meeles, et ühepoolsed usalduspiirid \underline{m} ja \bar{m} ühekoos ei anna usalduspiirkonda nivooga $1 - \gamma$, vaid nivooga $1 - 2\gamma$.

Usaldusnivoole 0,99 vastavad usalduspiirid saaksime järgmiselt:

$$\underline{m} = 3,25 - 2,58 \frac{2}{\sqrt{10}} = 3,25 - 1,03 = 2,62;$$

$$\bar{m} = 3,25 + 2,58 \frac{2}{\sqrt{10}} = 3,25 + 1,63 = 4,88;$$

$$\underline{m} = 3,25 - 2,33 \frac{2}{\sqrt{10}} = 3,25 - 1,47 = 1,78;$$

$$\bar{m} = 3,25 + 2,33 \frac{2}{\sqrt{10}} = 3,25 + 1,47 = 4,72.$$

§ 4. χ^2 -jaotus ja F-jaotus.

1. χ^2 -jaotus.

Väga mitmete statistikaülesannete lahendamisel on otsustav tarbekas rakendada nn. χ^2 -jaotust. Defineerime selle jaotuse ning esitame (tõestuseta) mõned tema olulisemad omadused.

Olgu X_1, X_2, \dots, X_k sõltumatud normaaljaotusega juhuslikud suurused:

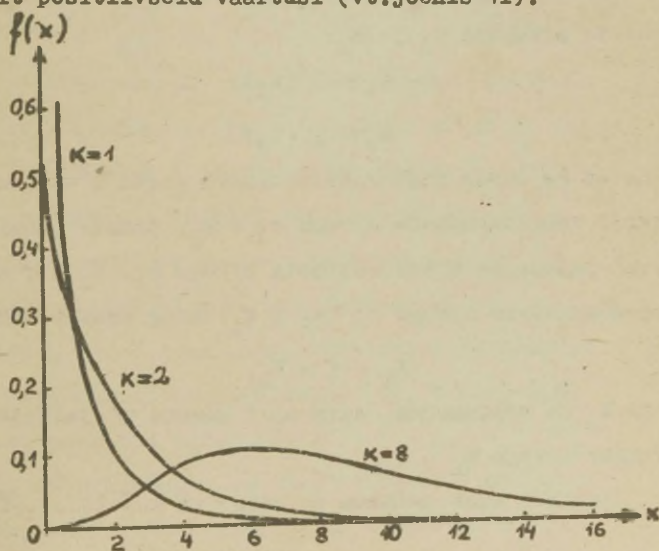
$$X_i \sim N(0,1) \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Defineerime juhusliku suuruse Z

$$Z = \sum_{i=1}^k X_i^2.$$

Juhusliku suuruse Z kohta ütleme, et ta on χ^2 -jaotusega vabadusastmete arvuga k .

Näeme, et χ^2 -jaotusega juhuslik suurus on pidev ja võib omandada ainult positiivseid väärtusi (vt. joonis 41).



Joonis 41.

χ^2 -jaotusega juhuslike suuruste kohta on koostatud kaunis tihedad tabelid mitmesuguste vabadusastmete arvude puhul (vt. tabel V). Enamasti pole neis tabelites esitatud mitte juhusliku suuruse Z jaotusfunktsiooni, vaid selle täiendi väärtused:

$$P(Z > x) = P(Z \geq x) = 1 - P(Z < x) = 1 - F(x).$$

Selletõttu moodustavad tabelis esitatud tõenäosused argumenti suhtes kahaneva jada (jaotusfunktsioon on kasvav).

Olgu Z_k χ^2 -jaotusega (vabadusastmete arvuga k) juhuslik suurus. On tõestatud, et

$$E(Z_k) = k,$$

$$D(Z_k) = 2k$$

ning χ^2 -jaotuse tihedusfunktsioonil on maksimum (mood) punktis $x = k - 1$.

Huvitav on ka χ^2 -jaotuse aditiivsus. Olgu antud kaks sõltumatut χ^2 -jaotusega juhuslikku suurust vastavalt vabadusastmete arvudega k_1 ja k_2 :

$$X_1 \sim \chi^2(k_1),$$

$$X_2 \sim \chi^2(k_2).$$

Siis on ka nende juhuslike suuruste summa χ^2 -jaotusega vastavalt vabadusastmete arvuga $k_1 + k_2$. Samuti juhul, kui X_1 on χ^2 -jaotusega vabadusastmete arvuga k_1 , $X_2 - \chi^2$ -jaotusega vabadusastmete arvuga k_2 ($k_2 < k_1$) ning kehtib seos

$$X_1 = Y + X_2,$$

Y ja X_2 on sõltumatud, siis on Y samuti χ^2 -jaotusega vabadusastmete arvuga $k_1 - k_2$.

Ühtlasi saab näidata ka seda, et kui X_1, \dots, X_n on nor-

maaljaotusega, $X_1 \sim N(0,1)$ ning

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$

siis on juhuslik suurus

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

χ^2 -jaotusega vabadusastmete arvuga $n-1$ (s.o. nn.Cochrani teoreemi erijuht, vt. näit. [6]).

Vabadusastmete arvu k kasvamisel muutub χ^2 -jaotus järjest sümmeetrilisemaks ning läheneb järjest normaaljaotusele (vastavalt parameetritega $EX = k$ ning $DX = 2k$).

2. F-jaotus.

Olgu juhuslik suurus X_1 χ^2 -jaotusega vabadusastmete arvuga n_1 , X_2 χ^2 -jaotusega vabadusastmete arvuga n_2 .

Vaatleme suhet

$$Y = \frac{n_2 X_1}{n_1 X_2}.$$

See on omakorda juhuslik suurus, mis sõltub kahest täisarvulisest parameetrist - nendeks on vabadusastmete arvud n_1 ja n_2 . Saadud juhusliku suuruse Y jaotust nimetatakse F-jaotuseks (ka Fisheri jaotuseks), vabadusastmete arvudega n_1 (lugeja vabadusastmete arv) ja n_2 (nimetaja vabadusastmete arv). F-jaotust kasutatakse mitmete statistikaülesannete lahendamisel, millest käesolevas konspektis tuleb vaatlusele 2 normaaljaotuse dispersioonide võrdlemine (vt. V ptk. § 9). Vastavad tabelid on esitatud lisas (VIII).

Märgime veel, et erijuhtul $n_2 \rightarrow \infty$ läheneb F-jaotus $\chi^2_{n_1}$ -jaotusele (mis on jagatud vabadusastmete arvuga n_1),

kui aga $n_1 = 1$, siis on F-jaotus t-jaotuse ruut (vabadusastmete arvu n_2 korral). F-jaotust kasutatakse ka binomiaaljaotuse täpsete usalduspiiride leidmiseks (vt. § 13).

§ 5. Normaalkaotusega juhusliku suuruse standardhälbe σ usalduspiirkond.

Olgu X normaaljaotusega, $X \sim N(m, \sigma^2)$, kusjuures eeldame, et m on teada. Siis on σ^2 jaoks efektiivseks hinnanguks

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2.$$

Et teha kindlaks juhusliku suuruse $\hat{\sigma}^2$ jaotust, vaatleme teoreetilist väljavõtet X_1, X_2, \dots, X_n , kusjuures juhuslikud suurused X_1, \dots, X_n on sõltumatud ja $X_i \sim N(m, \sigma^2)$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Teoreetilise väljavõtte kaudu avaldub juhuslik suurus $\hat{\sigma}^2$ järgmiselt:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2.$$

Teisendame saadud juhuslikku suurust, korrutades teda teguriga $\frac{n}{\sigma^2}$ (siin σ^2 on uuritava parameetri õige, kuid meile tundmatu väärtus). Siis saame

$$\frac{n \cdot \hat{\sigma}^2}{\sigma^2} = Z = \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - m}{\sigma} \right)^2. \quad (8)$$

Ilmselt on juhuslikud suurused $\frac{x_i - m}{\sigma}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) sõltumatud, $\frac{x_i - m}{\sigma} \sim N(0, 1)$. Seega on juhuslik suurus Z sõltumatute normaaljaotusega $N(0, 1)$ juhuslike suuruste ruutu-

de summa ning χ^2 -jaotuse definitsiooni kohaselt

$$Z \sim \chi^2,$$

kusjuures Z on pidev juhuslik suurus, seega $P(Z < x) = P(Z \leq x)$ iga x korral.

Seega on χ^2 -jaotuse tabelist lihtne leida arvud \underline{x} ja \bar{x} vastavalt etteantud usaldusnivoole $1 - \gamma$ nii, et

$$P(\underline{x} < Z < \bar{x}) = 1 - \gamma, \quad (9)$$

selleks tuleb vaid valida tabelist $p_{\frac{\gamma}{2}}$ ja $p_{1 - \frac{\gamma}{2}}$,

mis rahuldavad võrdusi

$$P(Z > p_{\frac{\gamma}{2}}) = \frac{\gamma}{2},$$

$$P(Z > p_{1 - \frac{\gamma}{2}}) = 1 - \frac{\gamma}{2},$$

ning võtta $\underline{x} = p_{1 - \frac{\gamma}{2}}$, $\bar{x} = p_{\frac{\gamma}{2}}$; sellisel viisil leitud \underline{x} ja \bar{x} väärtused rahuldavadki seost (9).

Leitud sobivad \underline{x} ja \bar{x} väärtused, saame Z asendamisel tema väärtusega seosest (8)

$$P(\underline{x} < \frac{n \bar{\sigma}^2}{\sigma^2} < \bar{x}) = 1 - \gamma,$$

millest teisendamisel leiame

$$P\left(\frac{n \bar{\sigma}^2}{\bar{x}} < \sigma^2 < \frac{n \bar{\sigma}^2}{\underline{x}}\right) = 1 - \gamma.$$

Seega on parametri σ^2 usalduspiirkonnaks vahemik (\underline{d}, \bar{d}) , kus

$$\begin{cases} \underline{d}^2 = \frac{n \bar{\sigma}^2}{\bar{x}} = \frac{n \bar{\sigma}^2}{p_{\frac{\gamma}{2}}}; \\ \bar{d}^2 = \frac{n \bar{\sigma}^2}{\underline{x}} = \frac{n \bar{\sigma}^2}{p_{1 - \frac{\gamma}{2}}} \end{cases} \quad (10)$$

Standardhälbe usalduspiirideks on vastavalt $\underline{d} = \sqrt{\frac{n}{z^2}}$ ja $\bar{d} = \sqrt{\frac{n}{z^2}}$. Paneme tähele, et need usalduspiirid ei paikne sümmeetriliselt hinnangu $\bar{\sigma}^2$ (või $\bar{\sigma}$) suhtes. Selle põhjuseks on see, et χ^2 -jaotus ei ole sümmeetriline. Ühepoolsed usalduspiirid \underline{d}^2 ja \bar{d}^2 saame analoogiliselt: leiame vastavalt antud usaldusnivoole $1 - \gamma$ χ^2 -jaotuse tabelist väärtused p_γ ja $p_{1-\gamma}$:

$$P(Z > p_\gamma) = P(Z > p_\gamma) = \gamma,$$

$$P(Z > p_{1-\gamma}) = P(Z > p_{1-\gamma}) = 1 - \gamma,$$

ning seejärel saame, arvestades, et $P(Z < p_\gamma) = 1 - \gamma$ ja võttes $Z = \frac{n \bar{\sigma}^2}{\sigma^2}$, võrratused:

$$P\left(\frac{n \bar{\sigma}^2}{\sigma^2} < p_\gamma\right) = 1 - \gamma,$$

$$P\left(\frac{n \bar{\sigma}^2}{\sigma^2} > p_{1-\gamma}\right) = 1 - \gamma,$$

millest tulenevad võrratused

$$P\left(\sigma^2 > \frac{n \bar{\sigma}^2}{p_\gamma}\right) = 1 - \gamma,$$

$$P\left(\sigma^2 < \frac{n \bar{\sigma}^2}{p_{1-\gamma}}\right) = 1 - \gamma.$$

Seega saame ühepoolseks alumiseks ja ülemiseks usalduspiiriks parameetrile σ^2 vastavalt:

$$\begin{aligned} \underline{d}^2 &= \frac{n \bar{\sigma}^2}{p_\gamma}, \\ \bar{d}^2 &= \frac{n \bar{\sigma}^2}{p_{1-\gamma}}. \end{aligned} \tag{11}$$

Näide 55.

Vaatleme § 3 käsitletud näidet, eeldades, et väljavõte kuulub normaaljaotusega $N(3, \sigma)$ üldkogumisse, s.t. vaatleme

juhtu, kus m on teada, σ aga mitte.

Siis on σ^2 hinnanguks
$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 =$$

$$= \frac{1}{10}((-2)^2 + (-1)^2 + (-0,5)^2 + 0 + 3 \cdot 0,5^2 + 1,5^2 + 3^2) =$$

$$= 1,725; \sqrt{1,725} = 1,313.$$
 Arvutame usalduspiirkonna ($\underline{d}^2, \bar{d}^2$) vastavalt usaldusnivoole 0,95.

Selleks leiame tabelist V vastavalt vabastastmete arvule 10 suurused $P_{0,025}$ ja $P_{0,975}$:

$$P(Z > P_{0,975}) = 0,975; P_{0,975} = 3,25,$$

$$P(Z > P_{0,025}) = 0,025; P_{0,025} = 20,5;$$

$$\underline{d}^2 = \frac{10 \cdot 1,725}{20,5} = 0,841; \sqrt{0,841} = 0,917;$$

$$\bar{d}^2 = \frac{10 \cdot 1,725}{3,25} = 5,30; \sqrt{5,30} = 2,30.$$

Seega saame 95%-liseks usalduspiirkonnaks σ^2 jaoks (0,841; 5,30). Vastav usalduspiirkond σ jaoks on (0,917; 2,30) (vt. joonis 42). Arvutame ka ühepoolsed usalduspiirid vastavalt usaldusnivoole 0,95 ning 0,99. Selleks leiame tabelitest $P_{0,99} = 2,56; P_{0,95} = 3,94; P_{0,05} = 18,3; P_{0,01} = 23,2;$ ning saame ühepoolseks alumiseks usalduspiiriks usaldusnivoo 0,99 korral

$$\underline{d}^2 = \frac{17,25}{23,2} = 0,744; \underline{d} = \sqrt{0,744} = 0,863,$$

usaldusnivoo 0,95 korral

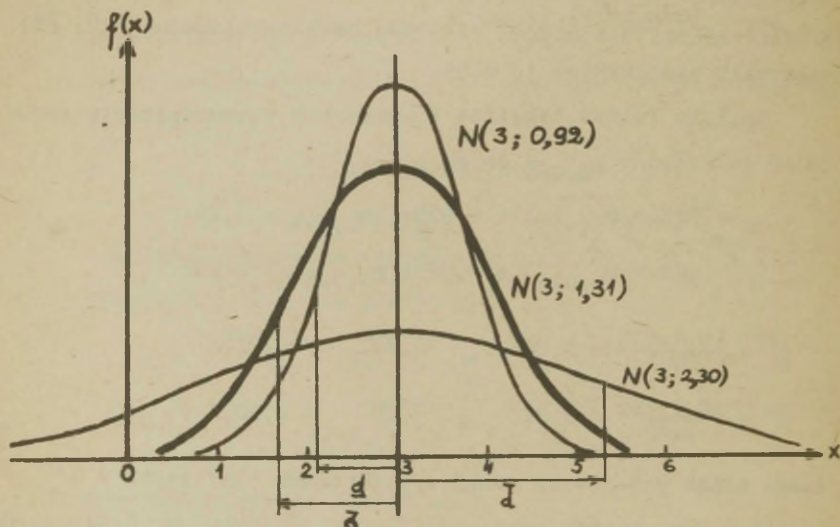
$$\underline{d}^2 = \frac{17,25}{18,3} = 0,943; \underline{d} = \sqrt{0,943} = 0,971,$$

ühepoolseks ülemiseks usalduspiiriks aga usaldusnivoo 0,99 korral

$$\bar{a}^2 = \frac{17,25}{2,56} = 6,74 ; \quad \bar{a} = \sqrt{6,714} = 2,596;$$

$$\bar{a}^2 = \frac{17,25}{3,94} = 4,38 ; \quad \bar{a} = \sqrt{4,38} = 2,09;$$

(vt. joonis 42).



Joonis 42.

§ 6. Normaalkaotusega juhusliku suuruse standardhälbe usalduspiirkond (keskväärtus ei ole teada).

Loobume nüüd üldiselt ebareaalsest eeldusest, et juhusliku suuruse X keskväärtus on teada. Sel korral on meil tarvis leida dispersiooni hinnang, mis kasutab keskväärtuse asemel selle hinnangut \bar{x} . Nagu nägime §-s 3.5, on dispersiooni nihutamatuks hinnanguks sel juhul

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

Ka selle juhusliku suuruse jaotust on võimalik kindlaks teha. Nimelt on näidatud (vt. näiteks [6] või [7]), et juhuslik suurus

$$Z' = \frac{n-1}{\sigma^2} s^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} \right)^2, \quad (12)$$

kus X_1, X_2, \dots, X_n on sõltumatud normaaljaotusega $N(m, \sigma^2)$ juhuslikud suurused, on χ^2 -jaotusega vabadusastmete arvuga $n-1$:

$$Z' \sim \chi_{n-1}^2. \quad (13)$$

Selleks, et leida dispersiooni σ^2 usalduspiirkonda statistiku s^2 abil, tuleb meil vastavalt antud usaldusnivoole $1 - \alpha$ leida χ^2 -jaotuse tabelist (vabadusastmete arvu $n-1$ kohalt) väärtused $p_{\frac{\alpha}{2}}$ ja $p_{1-\frac{\alpha}{2}}$ nii, et

$$P(Z' > p_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2}; \quad (14)$$

$$P(Z' > p_{\frac{\alpha}{2}}) = \frac{\alpha}{2}. \quad (15)$$

Parameetri σ^2 usalduspiirkonna ($\underline{d}^2, \bar{d}^2$) leiame siis seostest

$$\underline{d}^2 = \frac{(n-1) s^2}{p_{\frac{\alpha}{2}}};$$

$$\bar{d}^2 = \frac{(n-1) s^2}{p_{1-\frac{\alpha}{2}}}.$$

Standardhälbe σ usalduspiirkonnaks vastavalt usaldusni-
voole $1 - \alpha$ on sel juhul (\underline{d} , \bar{d}).

Samal viisil on võimalik leida ka ühepoolsed ülemised
ning ühepoolsed alumised usalduspiirid \underline{d}^2 ja \bar{d}^2 vastavalt
usaldusniivoole $1 - \alpha$, võttes selleks χ^2 -tabelist (vasta-
valt vabadusastmete arvule $n-1$) p_α ja $p_{1-\alpha}$ nii, et

$$P(Z' > p_\alpha) = \alpha, \quad (16)$$

$$P(Z' > p_{1-\alpha}) = 1 - \alpha. \quad (17)$$

Arvutuste lihtsustamiseks on aga tabuleeritud ka väärtused
 $\sqrt{\frac{n-1}{p_{1-\alpha}}}$, mis võimaldavad standardhälbe usalduspiire leida
mõnevõrra väiksema tööhulgaga (vt. tabelid VI).

Näide 56.

Arvutame nüüd §-s 3 esitatud materjali põhjal disper-
siooni ja standardhälbe usalduspiirid, arvestades, et nii-
hästi m kui ka σ on tundmata.

Selleks arvutame $m \approx \bar{x} = 3,25$ ning s^2 :

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 \right) = \frac{1}{9} 122,25 - 105,63 = \frac{16,62}{9} = 1,847,$$

$$s = 1,36.$$

Kasutades nüüd χ^2 -tabeleid vastavalt vabadusastmete
arvule $n-1=9$ ning usaldusniivood $1 - \alpha = 0,95$, saame leida
seostele (14) - (17) vastavad võrratused järgmiselt:

$$p_{0,975} = 2,70, \quad p_{0,95} = 3,33,$$

$$p_{0,025} = 19,0, \quad p_{0,05} = 16,9,$$

millest järelduvad kahepoolsed usalduspiirid \underline{d}^2 , \bar{d}^2

$$\underline{d}^2 = \frac{16,62}{19,0} = 0,875; \quad \bar{d}^2 = \frac{16,62}{2,70} = 6,16;$$

$$\sqrt{0,875} = 0,935; \quad \sqrt{6,16} = 2,48;$$

ühepoolne alumine usalduspiir \underline{d}^2 :

$$\underline{d}^2 = \frac{16,62}{16,9} = 0,983; \quad \sqrt{0,983} = 0,992$$

ning ühepoolne ülemine usalduspiir \bar{d}^2 :

$$\bar{d}^2 = \frac{16,62}{3,33} = 4,99; \quad \sqrt{4,99} = 2,23.$$

Kasutades tabelleid VI saaksime aga ülesande teise poole lahendada järgmiselt:

vabadusastmete arv $n-1=9$; tabelist VI leiame:

$$\nabla_{0,95} = 1,6; \quad s \cdot \nabla_{0,95} = 1,36 \cdot 1,6 = 2,18$$

$$\nabla_{0,05} = 0,7; \quad s \cdot \nabla_{0,05} = 1,36 \cdot 0,7 = 0,95.$$

Erinevus tulemustes on tingitud tabeli VI väiksemast täpsusest.

§ 7. t - j a o t u s .

Enamasti ei ole normaaljaotusega $N(m, \sigma)$ juhusliku suuruse X standardhälve teada ning selle hinnanguna kasutatakse statistikut s (vt. § 6). Keskväärtuse m usalduspiiri-de määramisel ei saa me sel juhul kasutada normaaljaotusega $N(0,1)$ statistikut $\frac{\bar{x} - m}{\sigma} \sqrt{n}$ (vt. § 3), vaid tuleb võtta kasutusele statistik $\frac{\bar{x} - m}{s} \sqrt{n}$. See aga ei ole normaaljaotusega, sest nimetajas on konstandi σ asemel juhuslik suurus s . Järgnevalt seame endale eesmärgiks uurida statistiku $\frac{\bar{x} - m}{s} \sqrt{n}$ jaotust. Selleks defineerime nn. t - (ehk Studenti) jaotuse.

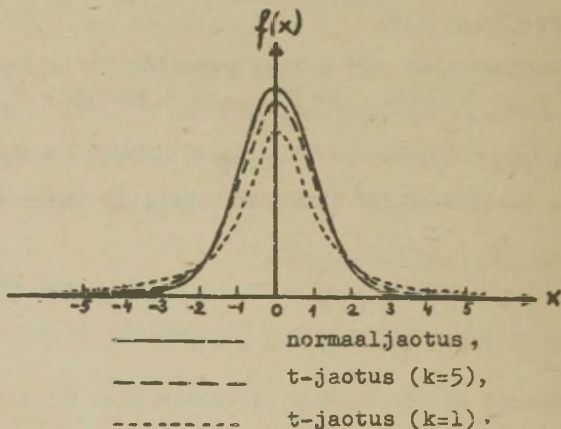
Olgu X_0, X_1, \dots, X_n sõltumatud normaaljaotusega juhuslikud suurused

$$X_i \sim N(0,1) \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

Defineerime juhusliku suuruse

$$T = \frac{X_0}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2}} .$$

Sellist juhuslikku suurust nimetatakse t-jaotusega juhusli-
kuks suuruseks vabadusastmete arvuga n. (vt.joonis 43).



Joonis 43.

Märgime, et t-jaotust saaks defineerida ka χ^2 -jaotuse
kaudu. Täpsemalt, olgu juhuslik suurus X_0 normaaljaotusega
 $N(0,1)$ ja U_n χ^2 -jaotusega vabadusastmete arvuga n. Näeme,
et siis saab T defineerida ka seosega

$$T = \frac{X_0}{\sqrt{\frac{1}{n} U_n}} . \quad (18)$$

Ka t-jaotus, samuti kui χ^2 -jaotuski, on tabuleeritud rea
vabadusastmete arvude jaoks, kusjuures märgime, et tabelites
ei ole tavaliselt antud mitte jaotusfunktsioon, vaid tõenäo-
sus

$$P(|T| > x) .$$

(vt. näiteks tabelit nr.IV).

Näeme, et t-jaotus on nullpunkti suhtes sümmeetriline, sest lugeja on (eelduse kohaselt, vt. § 1.12) nullpunkti suhtes sümmeetriline, nimetaja omandab aga üksnes positiivseid väärtusi. Selletõttu on ka

$$ET = 0$$

ning on piisav, kui tabelis anda argumendi väärtused x muutuvatenäena vaid piirkonnas $[0, \infty)$.

Et nimetaja on standardhälbe hinnanguks $\tilde{\sigma}$ normaaljaotusega $N(0,1)$ juhuslikule suurusele, siis (arvestades hinnangu konsistentsust, vt. § 3.5), läheneb n kasvamisel nimetaja standardhälbe tegelikule väärtusele, milleks on käesoleval juhul $\sigma = 1$. Järelikult läheneb t-jaotus vabadusastmete arvu suurenemisel normaaljaotusele. Seda on lihtne näha ka t-jaotuse tabelitest, kus sageli on piirjaotusena märgitud normaaljaotus, millele sümboolselt vastaks vabadusastmete arv $n = \infty$.

§ 8. Normaaljaotusega juhusliku suuruse keskvaartuse usalduspiirid /juhul, kui standardhälve ei ole teada/.

1. t-jaotusega statistiku leidmine.

* Vaatleme kõigepealt statistiku

$$Z' = \frac{\bar{x} - m}{s} \sqrt{n}$$

jaotust.

Märgime, et juhuslik suurus

$$X_0 = \frac{\bar{x} - m}{\sigma} \sqrt{n}$$

on normaaljaotusega $N(0,1)$. Paragrahvis 6 nägime, et

$$U_{n-1} = \frac{s^2}{\sigma^2} (n-1)$$

on aga χ^2 -jaotusega vabadusastmete arvuga $n-1$ (vt. valem (12)). Avaldame veel ruutjuure

$$\sqrt{\frac{1}{n-1} U_{n-1}} = \frac{s}{\sigma}$$

Siit näeme, et valemist (18) saame

$$Z' = \frac{\frac{\bar{x} - m}{\sigma} \sqrt{n}}{\frac{s}{\sigma}} = \frac{X_0}{\sqrt{\frac{1}{n-1} U_{n-1}}} = T_{n-1}, \quad (19)$$

s.t. juhuslik suurus Z' on t -jaotusega vabadusastmete arvuga $n-1$.

2. Kahepoolsete usalduspiiride leidmine.

Järelikult on t -tabelite abil võimalik vastavalt antud usaldusnivoole $1 - \gamma$ leida arv t_γ nii, et

$$P(|T| > t_\gamma) = \gamma.$$

Siis kehtib ka võrdus

$$P(-t_\gamma < T < t_\gamma) = 1 - \gamma.$$

Asendades T väärtuse seosest (19), saame

$$P(-t_\gamma < \frac{\bar{x} - m}{s} \sqrt{n} < t_\gamma) = 1 - \gamma$$

ning teisendades sulgudes asetsevaid võrratusi, järeldame siit

$$P(\bar{x} - t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} < m < \bar{x} + t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}) = 1 - \gamma.$$

Seega on normaaljaotusega juhusliku suuruse keskväärtuse usalduspiirideks

$$\underline{m} = \bar{x} - t_{\gamma} \frac{s}{\sqrt{n}} ,$$

$$\bar{m} = \bar{x} + t_{\gamma} \frac{s}{\sqrt{n}} ,$$

kus t_{γ} on leitud vabadusastmete arvu $n - 1$ puhul.

3. Ühepoolsete usalduspiiride leidmine.

Pisut tülikam on leida t-jaotuse abil ühepoolseid usalduspiire normaaljaotuse keskväertuse jaoks. Selleks arvestame, et ühepoolne alumine usalduspiir vastavalt usaldusnivoole $1 - \gamma$ ning ühepoolne ülemine usalduspiir vastavalt usaldusnivoole $1 - \gamma$ annavad kokku kahepoolsed usalduspiirid vastavalt usaldusnivoole $1 - 2\gamma$. Niisiis, selleks et leida ühepoolseid usalduspiire \underline{m} ja \bar{m} , leiame t-tabelist (vabadusastmete arvuga $n - 1$) arvu $t_{2\gamma}$ nii, et

$$P(|T| > t_{2\gamma}) = 2\gamma .$$

Siis on õige ka võrdus

$$P(|T| < t_{2\gamma}) = P(-t_{2\gamma} < T < t_{2\gamma}) = 1 - 2\gamma$$

ning t-jaotuse sümmeetrilisuse tõttu järeldub siit (vt. joonis

43)

$$P(T < -t_{2\gamma}) = \gamma ,$$

$$P(T > t_{2\gamma}) = \gamma ,$$

seega saame ühepoolseteks usalduspiirideks usaldusnivoo

$1 - \gamma$ korral vastavalt

$$\underline{m} = \bar{x} - t_{2\gamma} \frac{s}{\sqrt{n}} ;$$

$$\bar{m} = \bar{x} + t_{2\gamma} \frac{s}{\sqrt{n}} .$$

Näide 57.

Kasutame jällegi paragrahvis 3 esitatud väljavõtet, mille kohta eeldame (samuti kui paragrahvis 6), et see on normaaljaotusega, kusjuures m ja σ on mõlemad tundmatud. Kasutame seda, et meil on juba leitud

$$\bar{x} = 3,25,$$

$$s = 1,36.$$

Selleks et leida \bar{x} usalduspiirid vastavalt usaldusnivoole 0,95 (ehk, nagu öeldakse, 95%-lised usalduspiirid), leiame t -jaotuse tabelist (IV) vastavalt vabadusastmete arvule $10 - 1 = 9$ kohalt 5% t väärtuse $t_{0,05} = 2,26$; saame siis usalduspiirid

$$\underline{m} = 3,25 - 2,26 \cdot \frac{1,36}{10} = 3,25 - 0,97 = 2,28;$$

$$\bar{m} = 3,25 + 2,26 \cdot \frac{1,36}{10} = 3,25 + 0,97 = 4,22;$$

99%-lised usalduspiirid oleksid

$$\underline{m} = 3,25 - 3,25 \cdot \frac{1,36}{10} = 3,25 - 1,40 = 1,85;$$

$$\bar{m} = 3,25 + 3,25 \cdot \frac{1,36}{10} = 3,25 + 1,40 = 4,65.$$

Ühepoolsed usalduspiirid vastavalt usaldusnivoole 0,95 ja 0,99 saame t väärtuste $t_{0,05} = 1,83$ ja $t_{0,01} = 2,82$ abil

$$\underline{m} = 3,25 - 1,83 \cdot \frac{1,36}{10} = 3,25 - 0,79 = 2,46;$$

$$\underline{m} = 3,25 - 2,82 \cdot \frac{1,36}{10} = 3,25 - 1,21 = 2,04;$$

$$\bar{m} = 3,25 + 1,83 \cdot \frac{1,36}{10} = 3,25 + 0,79 = 4,04;$$

$$\bar{m} = 3,25 + 2,82 \cdot \frac{1,36}{10} = 3,25 + 1,21 = 4,46.$$

§ 9. Normaaljaotusega juhuslike suuruste lineaarse kombinatsiooni keskvärtuse usalduspiirid.

Olgu meil tegemist kahe sõltumatu normaaljaotusega juhusliku suurusega

$$X_1 \sim N(m_1, \sigma_1^2); \quad X_2 \sim N(m_2, \sigma_2^2),$$

kusjuures pakkugu meile huvi funktsiooni

$$Y = aX_1 + bX_2$$

keskväärtuse usalduspiiride määramine.

Teatavasti Y on samuti normaaljaotusega, kusjuures

$$EY = am_1 + bm_2,$$

$$DY = a^2 \sigma_1^2 + b^2 \sigma_2^2.$$

Kui meil on teada m_1 ning m_2 hinnangud

$$m_1 \approx \bar{x}_1, \quad m_2 \approx \bar{x}_2,$$

mis on leitud väljavõtete

$$x_{11}, \dots, x_{1n}; \quad x_{21}, \dots, x_{2n}$$

põhjal ning σ_1^2 ja σ_2^2 on täpselt teada (seda eeldust võime kasutada ka sel juhul, kui väljavõtted on küllalt suured, kuna siis on $\frac{s_1^2}{\sigma_1^2} \approx \frac{s_2^2}{\sigma_2^2} \approx \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2}$ üksteisele küllaltki lähedased),

siis saame juhusliku suuruse Y keskvärtusele EY hinnangu \bar{x}

$$EY \approx \bar{x} = a\bar{x}_1 + b\bar{x}_2.$$

Et aga \bar{x}_1 ja \bar{x}_2 dispersioonid avalduvad σ_1^2 ja σ_2^2 kaudu

$$D(\bar{x}_1) = \frac{\sigma_1^2}{n}; \quad D(\bar{x}_2) = \frac{\sigma_2^2}{n},$$

sie saame lihtsalt avaldada ka \bar{x} dispersiooni

$$D(\bar{x}) = D(a\bar{x}_1 + b\bar{x}_2) = a^2 \frac{\sigma_1^2}{n} + b^2 \frac{\sigma_2^2}{n},$$

ja standardhälbe

$$G(\bar{x}) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{a^2 \sigma_1^2 + b^2 \sigma_2^2}.$$

Viimase põhjal leiame EY usalduspiirid \underline{m} ja \bar{m} vastavalt antud usaldusnivoole $1 - \gamma$:

$$\underline{m} = a\bar{x}_1 + b\bar{x}_2 - \frac{p_{\frac{\gamma}{2}}}{\sqrt{n}} \sqrt{a^2 \sigma_1^2 + b^2 \sigma_2^2};$$

$$\bar{m} = a\bar{x}_1 + b\bar{x}_2 + \frac{p_{\frac{\gamma}{2}}}{\sqrt{n}} \sqrt{a^2 \sigma_1^2 + b^2 \sigma_2^2},$$

kus $p_{\frac{\gamma}{2}}$ on vastavalt usaldusnivoole $1 - \gamma$ leitud normaaljaotuse tabelist:

$$\Phi(p_{\frac{\gamma}{2}}) = 1 - \frac{\gamma}{2}.$$

Analoogiliselt on võimalik leida juhusliku suuruse $Y = aX_1 + bX_2$ keskvärtuse EY = $am_1 + bm_2$ jaoks ka ühepoolsed usalduspiirid \underline{m} ja \bar{m} vastavalt usaldusnivoole $1 - \gamma$:

$$\underline{m} = a\bar{x}_1 + b\bar{x}_2 - \frac{p_{\gamma}}{\sqrt{n}} \sqrt{a^2 \sigma_1^2 + b^2 \sigma_2^2},$$

$$\bar{m} = a\bar{x}_1 + b\bar{x}_2 + \frac{p_{\gamma}}{\sqrt{n}} \sqrt{a^2 \sigma_1^2 + b^2 \sigma_2^2},$$

kus p_{γ} on vastavalt usaldusnivoole $1 - \gamma$ leitud normaaljaotuse tabelist.

$$\Phi(p_{\gamma}) = 1 - \gamma.$$

Juhul kui väljavõtete mahud on erinevad, näiteks juhusliku

suuruse X_1 väärtusi on väljavõttes n_1 tükki, juhusliku suuruse X_2 väärtusi aga n_2 tükki, saame keskvaartuste dispersioonidele väärtused

$$D(\bar{x}_1) = \frac{\sigma_1^2}{n_1}; \quad D(\bar{x}_2) = \frac{\sigma_2^2}{n_2}.$$

$$D(\bar{x}) = a^2 \frac{\sigma_1^2}{n_1} + b^2 \frac{\sigma_2^2}{n_2}.$$

Usalduspiiride avaldised tulevad sel korral järgmised:

$$\underline{m} = a\bar{x}_1 + b\bar{x}_2 - p_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{a^2 \sigma_1^2}{n_1} + \frac{b^2 \sigma_2^2}{n_2}};$$

$$\bar{m} = a\bar{x}_1 + b\bar{x}_2 + p_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{a^2 \sigma_1^2}{n_1} + \frac{b^2 \sigma_2^2}{n_2}};$$

$$\underline{m} = a\bar{x}_1 + b\bar{x}_2 - p_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{a^2 \sigma_1^2}{n_1} + \frac{b^2 \sigma_2^2}{n_2}};$$

$$\bar{m} = a\bar{x}_1 + b\bar{x}_2 + p_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{a^2 \sigma_1^2}{n_1} + \frac{b^2 \sigma_2^2}{n_2}}.$$

Erijuhul, kui $a = 1$, $b = -1$, on võimalik ülaltoodud valemite abil leida ka kahe normaaljaotusega juhusliku suuruse X ja Y vahe $X - Y$ keskvaartuse usalduspiirid:

$$\underline{m} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 - p_{\frac{\alpha}{2}} \sigma(\bar{x}),$$

$$\bar{m} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + p_{\frac{\alpha}{2}} \sigma(\bar{x}),$$

$$\underline{m} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 - p_{\frac{\alpha}{2}} \sigma(\bar{x}),$$

$$\bar{m} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + p_{\frac{\alpha}{2}} \sigma(\bar{x}),$$

kus

$$\sigma(\bar{x}) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

võrdeets väljavõtete puhul ja

$$\sigma(\bar{x}) = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

juhul, kui X_1 väärtustest on väljavõte mahuga n_1 , X_2 väärtustest väljavõte mahuga n_2 .

§ 10. Vahe keskväärtuse usalduspiiride leidmine väikese väljavõtte põhjal.

Oletame nagu eelmiseski paragrahvis, et X_1 ja X_2 on normaaljaotusega, $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1)$, $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2)$. Olgu antud väljavõtted

X_1 väärtustest

$$x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n_1},$$

X_2 väärtustest

$$x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n_2}.$$

Loobume eeldusest, et väljavõtted on nii suured, et nende põhjal saadud σ hinnangud võrduvad ligikaudu σ õige väärtusega. Sel juhul saame usalduspiirid leida järgmistel erijuhtudel:

1. Võrdse mahuga väljavõtted.

Eeldame, et väljavõtete mahud on võrdsed: $n_1 = n_2 = n$. Moodustame vahede väljavõtte

$$d_1 = x_{11} - x_{21}, d_2 = x_{12} - x_{22}, \dots, d_n = x_{1n} - x_{2n}.$$

Siinjuures on tingimata tarvis, et väljavõtted oleksid vaatluste teostamise järjekorras mitte variatsiooniõnneti järjes-

tatud, sest vastasei korral saaksime vale tulemuse (vähendatud usalduspiirid). Vahed on samuti normaaljaotusega,

$d \sim N(m_1 - m_2, \sigma_d)$, ning vale keskvaertuse $m_1 - m_2$ usalduspiirid saame leida paragrahvis 8 antud eeskirja kohaselt, kus

$$\bar{d} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 ;$$

$$\sigma_d \approx s_d = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (d_i - \bar{d})^2} ;$$

$$\underline{m} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 - t_{\gamma} \frac{1}{\sqrt{n}} s_d$$

$$\bar{m} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + t_{\gamma} \frac{1}{\sqrt{n}} s_d ,$$

$$\underline{m} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 - t_{2\gamma} \frac{1}{\sqrt{n}} s_d ,$$

$$\bar{m} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + t_{2\gamma} \frac{1}{\sqrt{n}} s_d ,$$

kus t_{γ} ja $t_{2\gamma}$ leitakse t-jaotuse tabelist vastavalt vabadusastmete arvule $n - 1$:

$$P(|T| > t_{\gamma}) = \gamma ,$$

$$P(|T| > t_{2\gamma}) = 2\gamma .$$

2. Erinevate mahtudega väljavõtted.

Vaatleme nüüd juhtu, mil väljavõtete mahud on erinevad, kuid dispersioonid σ_1^2 ja σ_2^2 on võrdsed,

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2 .$$

(seda, kas dispersioone saab võrdseks lugeda, on võimalik statistiliselt kontrollida, vt. § 5.9).

Dispersioonile σ^2 saame hinnangu s_1^2 väljavõtte

x_{11}, \dots, x_{1n_1} põhjal:

$$\sigma^2 \approx s_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} (x_{1i} - \bar{x}_1)^2,$$

ning teise hinnangu s_2^2 väljavõtte x_{21}, \dots, x_{2n_2} põhjal:

$$\sigma^2 \approx s_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{i=1}^{n_2} (x_{2i} - \bar{x}_2)^2.$$

Ühiseks hinnanguks, mille tähistame s^2 , sobib mõlema hinnangu kaalutud keskmine, kusjuures kaalud on võrdelised väljavõtete vabadusastmete arvudega (s.o. ligikaudu võrdelised mahtudega).

$$\begin{aligned} \sigma^2 \approx s^2 &= \frac{1}{n_1 + n_2 - 2} \left(\sum_{i=1}^{n_1} (x_{1i} - \bar{x}_1)^2 + \sum_{i=1}^{n_2} (x_{2i} - \bar{x}_2)^2 \right) \\ &= \frac{(n_1 - 1) s_1^2 + (n_2 - 1) s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}. \end{aligned}$$

Arvestades, et $D(\bar{x}_1) = \frac{\sigma^2}{n_1}$, $D(\bar{x}_2) = \frac{\sigma^2}{n_2}$ ning

$D(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = D(\bar{x}_1) + D(\bar{x}_2)$, saame

$$D(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) \left(\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \right),$$

ning

$$\sigma(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \approx s(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}} \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}.$$

Kahe- ja ühepoolsed usalduspiirid keskvaartuste vahele

$m_1 - m_2$ saame määrata nüüd järgmiselt:

$$\underline{m} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 - t_{\chi} s (\bar{x}_1 - \bar{x}_2),$$

$$\bar{m} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + t_{\chi} s (\bar{x}_1 - \bar{x}_2),$$

$$\underline{\underline{m}} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 - t_{2\chi} s (\bar{x}_1 - \bar{x}_2),$$

$$\bar{\bar{m}} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + t_{2\chi} s (\bar{x}_1 - \bar{x}_2),$$

kus t_{χ} ja $t_{2\chi}$ võetakse t-jaotuse tabelist vastavalt vabadusastmete arvule $n_1 + n_2 - 2$.

3. Näiteid.

Näide 58.

Olgu meil antud lisaks §-s 3 toodud väljavõttele veel väljavõte

$$1; -1; 0; 1,5; 0,5; -2,$$

mille kohta oletame samuti, et see on normaaljaotusega

$N(m_2, \sigma_2^2)$. Leiame vahe $m_1 - m_2$ 95%-lise kahepoolse usalduspiirkonna.

Selleks arvutame lisaks teadaolevatele suurustele

$$\bar{x}_1 = 3,25; \quad s_1^2 = 1,847$$

veel

$$\bar{x}_2 = 0; \quad s_2^2 = \frac{1}{5} \cdot 8,5 = 1,7.$$

Peame silmas, et $n_1 = 10$; $n_2 = 6$, ning leiame vahe standardhälbe hinnangu

$$G'(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \approx \sqrt{\frac{16}{60} \cdot \frac{16,62 + 8,5}{14}} = \sqrt{\frac{25,12 \cdot 4}{210}} =$$

$$= \sqrt{0,478} = 0,691.$$

Otsitavateks usalduspiirideks on niisiis $3,25 - 0 \pm 1,48$,

seega saame usalduspiirkonnaks

(1,77; 4,73).

Näide 59.

Olgu X_1 väärtustest antud väljavõte

0,35; 0,27; 0,50; 0,42; 0,34; 0,23;

x_2 väärtustest väljavõte

0,48; 0,46; 0,57; 0,42; 0,53; 0,55.

Leida $E(X_1 - X_2)$ 95%-lised kahepoolsed usalduspiirid. Et väljavõtete mahud on võrdsed, saame leida vahed; arvutuse hõlbustamiseks arvutame $x_{2i} - x_{1i}$, kuna need on enamasti positiivsed:

0,13; 0,19; 0,07; 0,00; 0,19; 0,32.

Arvutusteks võtame $d_i = (d_1 - 0,15) \cdot 100$:

-2; 4; -8; -15; 4; 17;

$$\bar{d} = \frac{1}{6} \cdot 0 = 0; \quad \bar{x}_1 - \bar{x}_2 = -0,15;$$

$$d_i^2 = 4 + 2 \cdot 16 + 64 + 225 + 289 = 614;$$

$$s_d^2 = \frac{1}{100^2} \cdot \frac{614 - 0}{5} = \frac{1}{100^2} \cdot 123;$$

$$s_d = \frac{1}{100} \sqrt{123} = 0,111.$$

Leiame nüüd t-jaotuse tabelist vabadusastmete arvu $6 - 1 = 5$ kohalt

$$t_{0,05} = 2,57.$$

Usalduspiirideks saame

$$\underline{m} = -0,15 - \frac{2,57 \cdot 0,111}{\sqrt{6}} = -0,15 - 0,115 \approx -0,27$$

$$\bar{m} = -0,15 + \frac{2,57 \cdot 0,111}{\sqrt{6}} = -0,03.$$

Et näha, millise vale järelduseni võiks viia väljavõtete järjestamine antud ülesandes, teeme vastavad arvutused.

Variatsioonriidadeks saame

$$0,23; 0,27; 0,34; 0,35; 0,42; 0,50;$$

$$0,42; 0,46; 0,48; 0,53; 0,55; 0,57.$$

Vahed tuleksid nüüd hoopiski väiksema varieeruvusega:

$$0,19; 0,19; 0,14; 0,18; 0,13; 0,07.$$

Nagu varemgi, saame

$$\bar{d} = \bar{x}_2 - \bar{x}_1 = 0,15,$$

kuid

$$d_1^2 = 2 \cdot 16 + 1 + 9 + 4 + 64 = 110;$$

$$s_d = \frac{1}{100} \sqrt{\frac{110}{5}} = 0,047$$

ning saaksime ilmselt ebaõiged usalduspiirid

$$\underline{m} = -0,15 - \frac{2,57 \cdot 0,047}{\sqrt{6}} = -0,15 - 0,049 \approx -0,20$$

$$\bar{m} = -0,15 + \frac{2,57 \cdot 0,047}{\sqrt{6}} = -0,15 + 0,049 \approx -0,10.$$

§ 11. Poissoni jaotuse parameetri λ usalduspiiride määramine.

Olgu juhusliku suuruse X väärtuseks mingi pikkusega t katse- või vaatlusseeria vältel uuritava sündmuse A esinemiste arv. Kui sündmuse A mitteesinemiste arvu ei ole võimalik määrata (see on sündmuse A esinemiste arvuga võrreldes liiga suur), siis on juhuslik suurus X Poissoni jaotusega (näiteks - trükivigade arv raamatu teataval leheküljel -

kõigi potentsiaalsete triikivea võimaluste loendamine oleks mõeldamatu). Arusaadavalt sõltub X katseseeria pikkusest. Iga Poissoni jaotusega juhuslikku suurust võib kirjeldada mitme erineva parameetriga Poissoni jaotuse abil. Olgu X_{t_1} katseseeria pikkusele t_1 vastav sündmuse A esinemiste arv $X_{t_1} \sim P(\lambda_1)$ ($1 = 1, 2, \dots$). Kehtib seos

$$\frac{\lambda_1}{t_1} = \text{const.},$$

s.t. parameetrid λ_1 on võrdelised vastavate katseseeriade kestustega.

Fikseerime mingi ajavahemiku t . Väljavõtte väärtuseks on siis sündmuse A esinemiste arv selle ajavahemiku vältel; tähistame selle tähega k .

1. λ usalduspiiride täpne arvutamine.

Parameetri λ jaoks saame vastavalt nõutavale usaldusnivoole $1 - \alpha$ usalduspiirid $\underline{\lambda}$, $\bar{\lambda}$ arvutada vahetult definitsioonist tulenevatest seostest, kasutades Poissoni jaotuse valemit (vt. valem (1.28))

$$\sum_{v=0}^k e^{-\bar{\lambda}} \frac{\bar{\lambda}^v}{v!} = \frac{1}{2} \quad (20)$$

$$\sum_{v=k}^{\infty} e^{-\underline{\lambda}} \frac{\underline{\lambda}^v}{v!} = \frac{1}{2}$$

ehk

$$\sum_{v=0}^{k-1} e^{-\underline{\lambda}} \frac{\underline{\lambda}^v}{v!} = 1 - \frac{1}{2} \quad (21)$$

2. Usalduspiiride leidmine tabelitest.

Nagu näha, avalduvad λ ja $\bar{\lambda}$ küllaltki keeruka kujuga eksponentsiaalvõrrandi lahenditena, mistõttu nende valemit järgi λ ja $\bar{\lambda}$ arvutamine on üsna tülikas. Lõigikaudu on võimalik λ ja $\bar{\lambda}$ määrata Poissoni jaotuse väärtuste järgi, mida saab leida vastavatest tabelitest.

Veelgi hõlpsam on määrata Poissoni jaotuse usalduspiire tabelitest, mis on koostatud spetsiaalselt Poissoni jaotuse usalduspiiride leidmiseks (tavaliselt antakse neis kahepoolsed usalduspiirid vastavalt usaldusnivoole 0,99 ja 0,95).

Näide 60.

Olgu telefoni keskjaamas ühes minutis registreeritud 10 väljakutset. Leida 95%-lised usalduspiirid keskmisele väljekutsete arvule minutis. Et väljakutsete arv ajaühikus on Poissoni jaotusega ning $EX = \lambda$, tuleb leida λ jaoks 95%-lised usalduspiirid λ , $\bar{\lambda}$.

Kasutades valemeid (20) ja (21) ning Poissoni jaotuse tabeleid (vt. tabelid X ja XI) arvutame näiteks lõigikaudse ülemise piiri (kahepoolsest usalduspiirkonnast). Võttes

$\lambda = 18$, saaksime tabelist X

$$1 - P(\lambda \leq 10) = 0,9596;$$

$$P(\lambda \leq 10) = 0,0304 \quad \text{ehk}$$

$$\sum_{\nu=0}^{10} P(\lambda = \nu) = 0,0304 ;$$

ilmselt $0,0304 > \frac{\alpha}{2} = 0,025$, seetõttu tuleb võtta $\bar{\lambda} > 18$.

Võttes $\lambda = 19$, saame

$$1 - 0,9817 =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{10} P(\lambda = \nu) = 0,0183 < 0,025.$$

Seega õige $\bar{\lambda}$ väärtus on 18 ja 19 vahel. Analoogiliselt saame leida ka $\underline{\lambda}$ väärtuse:

$$\lambda = 4 \text{ puhul}$$

$$\sum_{\nu=10}^{\infty} P(\lambda = \nu) = 1 - \sum_{\nu=0}^9 P(\lambda = \nu) = 0,00811 < 0,025$$

$$\lambda = 5 \text{ puhul}$$

$$\sum_{\nu=10}^{\infty} P(\lambda = \nu) = 0,0318 > 0,025.$$

Ilmselt paikneb $\underline{\lambda}$ 4 ja 5 vahel. Täpsemad väärtused $\underline{\lambda}$ ja $\bar{\lambda}$ jaoks saaksime lineaarse interpolatsiooni tulemusena.

Olgu selgunud, et

$$\lambda_1 < \underline{\lambda} < \lambda_2,$$

$$P_{\lambda_1}(\nu \geq k) = p_1; \quad P_{\lambda_2}(\nu \geq k) = p_2; \quad (22)$$

$$p_1 < \frac{p}{2} < p_2$$

$$\lambda_3 < \bar{\lambda} < \lambda_4,$$

$$P_{\lambda_3}(\nu \leq k) = p_3; \quad P_{\lambda_4}(\nu \leq k) = p_4; \quad (23)$$

$$p_3 > \frac{p}{2} > p_4.$$

Täpsustatud $\underline{\lambda}$ ja $\bar{\lambda}$ väärtusteks saame

$$\underline{\lambda} = \lambda_1 + \frac{\frac{x}{2} - p_1}{p_2 - p_1},$$

$$\bar{\lambda} = \lambda_3 + \frac{p_3 - \frac{x}{2}}{p_3 - p_4}.$$

Käesoleval juhul saaksime täpsustatud usalduspiirideks

$$\underline{\lambda} = 4 + \frac{0,01690}{0,02369} = 4,71,$$

$$\bar{\lambda} = 18 + \frac{0,00532}{0,01203} = 18,44.$$

Põhimõtteliselt samal viisil võiksime leida ka ühepool-
sed usalduspiirid $\underline{\lambda}$ ja $\bar{\lambda}$ vastavalt usaldusnivoole $1 - \gamma$.

Leiame λ_1 ja λ_2 või λ_3 ja λ_4 nii, et

$$p_1 < \gamma < p_2,$$

$$p_3 > \gamma > p_4,$$

kus p_1, p_2, p_3 ja p_4 on määratud seostega (22) ja (23).

Lineaarse interpolatsiooni teel saaksime $\underline{\lambda}$ ja $\bar{\lambda}$ jaoks väärtused

$$\underline{\lambda} = \lambda_1 + \frac{\frac{x}{2} - p_1}{p_2 - p_1};$$

$$\bar{\lambda} = \lambda_3 + \frac{p_3 - \frac{x}{2}}{p_3 - p_4}.$$

Kahepoolsed usalduspiirid usaldusnivooga 0,95 võime

leida ka tabelist XII. Näeme, et

$$\underline{\lambda} = 4,80, \quad \bar{\lambda} = 18,39;$$

seega osutub, et me lineaarsel interpolatsioonil ei teinud

viga, vaid saime pisut liiga laia usalduspiirkonna, mis on aga alati kasutamiseks lubatav.

§ 12. Poissoni jaotuse parameetri λ usalduspiirkonna ligikaudne arvutamine.

1. Lähendamine normaaljaotusega.

Suhteliselt suurte k väärtuste korral ei ole ükski silskirjeldataud meetoditest λ usalduspiiride määramiseks kasutatav, sest tabuleeritud on Poissoni jaotus piiratud λ väärtusteni (näiteks $\lambda = 50$). Samuti ei ole suurte k väärtuste jaoks arvutatud ja tabuleeritud usalduspiire. Hoopiski ei ole suure k väärtuse korral rakendatav $\bar{\lambda}$ ja $\underline{\lambda}$ vahetu leidmine võrrandite (20) ja (21) lahendina ülesande suure töömabukuse tõttu. Kasutame järgnevas asjaolu, et λ suurenemisel läheneb Poissoni jaotus normaaljaotusele $N(m, \sigma^2)$ kus $m = \lambda$, $\sigma = \sqrt{\lambda}$. Lugesime ligikaudu

$$Y \sim N(\lambda, \sqrt{\lambda})$$

ning arvestades, et λ hinnanguks on $\tilde{\lambda} = k$, $D(\tilde{\lambda}) = DX = \lambda$, mille hinnanguks on osakorda k , saaksime keskväertuse standardhälbe hinnanguks $-\sqrt{k}$. Usalduspiiride arvutamiseks kehtivad seega järgalsed eeskirjad:

$$\underline{\lambda} = k - p_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{k}, \quad \bar{\lambda} = k + p_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{k};$$

$$\underline{\lambda} = k - p_{\gamma} \sqrt{k}, \quad \bar{\lambda} = k + p_{\gamma} \sqrt{k},$$

kus $p_{\frac{\alpha}{2}}$ ja p_{γ} leiame normaaljaotuse tabelist, $\Phi(p_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$,

$$\Phi(p_{\gamma}) = 1 - \gamma.$$

Näide 61.

Arvutame eelmise näite materjali põhjal 95%-lised ligi-kaudsed usalduspiirid λ jaoks:

$$\underline{\lambda} = 10 - 1,96 \sqrt{10} = 10 - 6,2 = 3,8;$$

$$\bar{\lambda} = 10 + 6,2 = 16,2.$$

Näeme, et selliselt arvutatud usalduspiirid on küllaltki ebatäpsed, sest Poissoni jaotus on tugevasti ebasümmeetriline, normaaljaotus aga sümmeetriline; suuremate λ (ja vastavalt k) väärtuste korral aga läheneb Poissoni jaotus sümmeetrilisele. Normaaljaotuse abil täpsema lähendi võib saada keerukamast valemist, vt. [5].

2. Poissoni jaotuse lähendamine χ^2 -jaotuse abil.

Paremini lähendab Poissoni jaotust χ^2 -jaotus; valides $X \sim \chi^2(k)$ (kuna χ^2 -jaotuse keskvaärtuseks on parajasti vabadusastmete arv k , mis on ühtlasi Poissoni jaotuse parameetri hinnanguks, tuleb valida vabadusastmete arvuks k sündmuse A esinemiste arv), saaksime leida usalduspiirid vastavalt usaldusnivoole $1 - \gamma$:

$$\underline{\lambda} = P_{1-\frac{\gamma}{2}}, \quad \bar{\lambda} = P_{\frac{\gamma}{2}},$$

$$\underline{\lambda} = P_{1-\gamma},$$

$$\bar{\lambda} = P_{\gamma},$$

kus $P_{1-\frac{\gamma}{2}}$, $P_{1-\gamma}$, P_{γ} ja $P_{\frac{\gamma}{2}}$ võtame χ^2 -tabelist vastavalt

vabadusastmete arvule k :

$$P(Z > P_{1-\frac{\gamma}{2}}) = 1 - \frac{\gamma}{2}; \quad P(Z > P_{\frac{\gamma}{2}}) = \frac{\gamma}{2};$$

$$P(Z > P_{1-\gamma}) = 1 - \gamma; \quad P(Z > P_{\gamma}) = \gamma.$$

Näide 62.

Näite 60 materjali põhjal saaksime kahepoolseteks 95%-listeks usalduspiirideks χ^2 -tabeli põhjal

$$\underline{\lambda} = 3,25 ; \quad \bar{\lambda} = 20,5.$$

Võrreldes õige tulemusega näeme, et usalduspiirid on liiga laiad, mis on ka arusaadav, sest χ^2 -jaotuse dispersioon ($2k$) on suurem kui Poissoni jaotuse dispersioon (k). Et aga usalduspiiride laienemine ei põhjusta vigu, on selline hinnang vajaduse korral rakendatav.

§ 13. Binomiaaljaotuse parameetri p usalduspiiride täpne määramine.

Olgu juhuslik suurus X binomiaaljaotusega $B(n, p)$, kus parameeter p on sündmuse A esinemise tõenäosus üksikkatsel ja n katsete arv. X -i väärtuseks on siis sündmuse A esinemiste arv n katsest koosneva seeria puhul.

1. Usalduspiiride määramine binomiaaljaotuse valemist.

Väljavõtte väärtuseks olgu k , s.t. ühe konkreetse katse-seeria puhul olgu sündmus A esinenud k korda. Täpsed kahepoolsed usalduspiirid \underline{p} ja \bar{p} vastavalt usaldusnivoole $1 - \alpha$ on arvutatavad iga konkreetse n , k ja α väärtuste kombinatsiooni jaoks valemitest

$$\sum_{v=0}^k \binom{n}{v} \bar{p}^v (1 - \bar{p})^{n-v} = \frac{\alpha}{2}, \quad (24)$$

$$\sum_{v=k}^n \binom{n}{v} p^v (1-p)^{n-v} = \gamma^k. \quad (25)$$

Ühepoolsed usalduspiirid \underline{p} ja \bar{p} saame leida valemitest

$$\sum_{v=0}^k \binom{n}{v} \bar{p}^v (1-\bar{p})^{n-v} = \gamma^k,$$

$$\sum_{v=k}^n \binom{n}{v} \underline{p}^v (1-\underline{p})^{n-v} = \gamma^k.$$

Olgu näiteks $n = 3$, $k = 2$ ja $1 - \gamma = 0,95$. Saame siis p kahepoolsete usalduspiiride määramiseks kaks kuupvõrrandit:

$$(1-\bar{p})^3 + 3\bar{p}(1-\bar{p})^2 + 3\bar{p}^2(1-\bar{p}) = 0,025,$$

mis annab lahendina p ülemise usalduspiiri \bar{p} ning

$$3\bar{p}^2(1-p) + p^3 = 0,025,$$

mille lahendiks on p alumine usalduspiir \underline{p} .

On selge, et võrrandite (24) ja (25) lahendite hulgast sobivad usalduspiirideks vaid sellised p ja \bar{p} väärtused, mis on reaalsed ning rahuldavad tingimusi

$$0 \leq p < \bar{p} \leq 1.$$

Ilmselt peavad täidetud olema ka järgmised võrratused:

$$\text{kui } \gamma_1 = \gamma_2 \quad \text{ja } k_1 < k_2, \text{ siis } p_1 \leq p_2 \quad \bar{p}_1 \leq \bar{p}_2$$

ning

$$\text{kui } \gamma_1 < \gamma_2, \quad k_1 = k_2, \text{ siis } p_1 < p_2 \quad \text{ja } \bar{p}_2 < \bar{p}_1.$$

Samuti iga k , γ ja n korral

$$p < \underline{p} \quad \text{ja } \bar{p} < \bar{p}.$$

Et p ja \bar{p} (samuti \underline{p} ja \bar{p}) arvutamine võrranditest

(24) ja (25) on tülikas, võime need leida (samuti kui Poissoni jaotuse parameetri λ usalduspiirid $\underline{\lambda}$, $\bar{\lambda}$, $\underline{\lambda}$ ja $\bar{\lambda}$) binomiaaljaotuse väärtuste või jaotusfunktsiooni tabelitest XIII ja XIV. Samuti on ka binomiaaljaotuse usalduspiiride p ja \bar{p} leidmiseks koostatud mitmeid tabeleid (vt. XV).

2. Usalduspiiride määramine F-jaotuse abil.

Tabelite koostamisel on kasutatud binomiaaljaotuste seost F-jaotusega (vt. [8]) mille põhjal saadakse

$$p = \frac{p(n, k) \frac{1}{2^k}}{k + (n-k+1) \frac{1}{2^k}} ;$$

$\frac{1}{2^k}, 2n-2k+2, 2k$

$$\bar{p} = \bar{p}(n, k) \frac{1}{2^k} = 1 - p(n, n-k) \frac{1}{2^k} ,$$

kus n on väljavõtte maht, k - tulemuse esmane arv, $1 - \alpha$ - usaldusnivoo (2-poolsete usalduspiiride jaoks) ning F_{β, k_1, k_2} - tabelist VIII vastavalt nivoole β ning vabadusastmete arvudele k_1 ja k_2 leitav väärtus.

Sama valemit on võimalik kasutada ka ühepoolsete usalduspiiride leidmiseks.

Näide 63.

Olgu teostatud 12 katset, kusjuures sündmuse A esinemisega lõppes neist 5. Leida 95- ja 99%-lised usalduspiirid sündmuse A esinemise tõenäosusele p .

Tabelitest XV leiame juhul $\alpha = 1\%$:

$$p = 12,1\% ; \quad \bar{p} = 76,5\% ,$$

juhul $\alpha = 5\%$ aga saaksime

$$p = 20,5\% ; \quad \bar{p} = 69,8\% .$$

Ühepoolseid usalduspiire vastavalt 95- ja 99%-lisele usaldusnivoole nendest tabelitest ei ole võimalik leida.

§ 14. Binomiaaljaotuse parameetri p usalduspiiride ligikaudne määramine.

Suurte n väärtuste puhul läheneb binomiaaljaotus samade parameetritega normaaljaotusele $X \sim N(m, \sigma^2)$, (vt. § 1.12). Siin $m = np$ ja $\sigma^2 = npq$.

Juhul kui n on küllalt suur ja k ei ole väga väike ega väga suur (orienteeruvalt $k \geq 10$), võime parameetri p usalduspiiride arvutamiseks kasutada normaaljaotuse keskväärtuse usalduspiiride arvutamise eeskirja.

Et tõenäosuse p parimaks punkthinnanguks on suhteline sagedus (vt. § 3.7)

$$p \approx \bar{p} = \frac{k}{n}$$

ning k on meie eelduse kohaselt ligikaudu normaaljaotusega,

$k \sim N(np, \sqrt{npq})$, siis on ka \tilde{p} ligikaudu normaaljaotusega,

$$E\tilde{p} = \frac{Ek}{n} = \frac{np}{n} = p, \quad D(\tilde{p}) = \frac{Dk}{n^2} = \frac{npq}{n^2} = \frac{pq}{n}, \quad \text{järelikult}$$

$\tilde{p} \sim N(p, \sqrt{\frac{pq}{n}})$. Parameetri p hinnangu \tilde{p} standardhälve

$\sigma(\tilde{p}) = \sqrt{\frac{pq}{n}}$ avaldub aga tundmatu parameetri enese kaudu,

asendades p ja q hinnangutega \tilde{p} ja $1 - \tilde{p}$, saaksime $\sigma(\tilde{p})$

jaoks nihutatud hinnangu. Nihutamata hinnanguks p hinnangu

\tilde{p} standardhälbele $\sigma(\tilde{p})$ on

$$s(\tilde{p}) = \sqrt{\frac{\tilde{p}(1-\tilde{p})}{n-1}} = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{k(n-k)}{n-1}}. \quad (26)$$

Parameetri p usaldusnivoole $1 - \alpha$ vastavate usalduspiiride

leidmiseks kasutame asjaolu, et juhuslik suurus

$$\frac{\tilde{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n-1}}}$$

on ligikaudu t-jaotusega (vabadusastmete arvuga n-1), ning seega saame usalduspiiride jaoks järgmised avaldised:

$$\underline{p} = \frac{k}{n} - t_{\gamma} \frac{1}{n} \sqrt{\frac{k(n-k)}{n-1}} ;$$

$$\bar{p} = \frac{k}{n} + t_{\gamma} \frac{1}{n} \sqrt{\frac{k(n-k)}{n-1}} ;$$

$$\underline{p} = \frac{k}{n} - t_{2\gamma} \frac{1}{n} \sqrt{\frac{k(n-k)}{n-1}} ;$$

$$\bar{p} = \frac{k}{n} + t_{2\gamma} \frac{1}{n} \sqrt{\frac{k(n-k)}{n-1}} ,$$

kus t_{γ} ja $t_{2\gamma}$ on võetud t-jaotuse tabelist vastavalt vabadusastmete arvule $n - 1$; $P(|T| > t_{\gamma}) = \gamma$, $P(|T| > t_{2\gamma}) = 2\gamma$

Juhul kui k või $n - k$ on väga lähedal nullile, kusjuures n on küllalt suur, on binomiaaljaotuse lähendamiseks otstarbekas kasutada Poissoni jaotust (loomulikult ainult siis, kui Poissoni jaotuse usalduspiire on vastavate tabelite abil võimalik küllalt täpselt määrata) või teisendada p hinnang nn. Fisheri φ -teisendusega (vt. [8]) normaalseks.

§ 15. Väljavõtte ulatuse jaotus ja selle kasutamine normaaljaotuse standardhälbe usalduspiiride leidmiseks.

Olgu juhuslik suurus X normaaljaotusega, $X \sim N(0,1)$, ning olgu

$$x_1, \dots, x_n$$

n -indiviidiline väljavõte selle juhusliku suuruse väärtuste hulgast. Eeldame, et see väljavõte on esitatud kasvava

variatsioonrea kujul. Juhuslikku suurust

$$R_n = x_n - x_1,$$

kus x_n on variatsioonrea maksimaalne ja x_1 - minimaalne element (vt. § 2.4), nimetame variatsioonrea (väljavõtte) ulatuseks ehk haardeks. Juhusliku suuruse R_n jaotust nimetame R -jaotuseks parameetriga n (ka normeeritud variatsioonil ulatuse jaotuseks, viidates sellele, et tegevust on normeeritud normaaljaotusega $N(0,1)$). Selle jaotuse jaotusfunktsioon on tabuleeritud (vt. tabelleid IX).

Ilmselt saame suvalise normaaljaotusega juhusliku suuruse $Z \sim N(m, \sigma^2)$ väljavõtte ulatuse esitada R_n -jaotuse kaudu. Normeerime juhusliku suuruse Z ; $\frac{Z}{\sigma} \sim N(m, 1)$. Et keskvärtuse muutmine juhusliku suuruse hajuvust ei muuda, on ka juhusliku suuruse $\frac{Z}{\sigma}$ väärtuste hulga n -indiviidise väljavõtte ulatus R_n -jaotusega. Juhusliku suuruse Z n -indiviidise väljavõtte ulatus on juhuslik suurus R'_n , mille jaotust kirjeldab σR_n .

Vaatleme nüüd, kuidas saab väljavõtte ulatuse tabelite järgi hinnata väljavõtte standardhälvet.

R_n -jaotuse tabelis on antud iga n väärtuse jaoks

$$E(R_n) = \alpha_n;$$

vaadeldava juhusliku suuruse $Z \sim N(m, \sigma^2)$ jaoks saame

$$E\left(\frac{R'_n}{\sigma}\right) = \alpha_n,$$

järelikult ka

$$E(R'_n) = \alpha_n \sigma,$$

kus R'_n on uuritava juhusliku suuruse n -indiviidise väljavõtte ulatus.

Arvutame suuruse

$$\frac{R'_n}{\alpha_n} = \sigma^* \quad (27)$$

Osutub, et see on oodatava standardhälbe σ nihutamata hinnanguks

$$E \sigma^* = \frac{1}{\alpha_n} E(R'_n) = \frac{\alpha_n \sigma}{\alpha_n} = \sigma.$$

Vaatleme nüüd, kuidas leida R-jaotuse tabeli abil standardhälbe σ usalduspiire vastavalt usaldusnivoole $1 - \gamma$.

Selleks leiame R-jaotuse tabelist arvud $r_{\frac{\gamma}{2}}$ ja $r_{1-\frac{\gamma}{2}}$, nii et

$$P(R_n < r_{\frac{\gamma}{2}}) = \frac{\gamma}{2},$$

$$P(R_n < r_{1-\frac{\gamma}{2}}) = 1 - \frac{\gamma}{2}.$$

Siis

$$P(r_{\frac{\gamma}{2}} < R_n < r_{1-\frac{\gamma}{2}}) = 1 - \gamma$$

ning asendades R_n tema väärtusega, saame

$$P\left(r_{\frac{\gamma}{2}} < \frac{R'_n}{\sigma} < r_{1-\frac{\gamma}{2}}\right) = 1 - \gamma,$$

millest järeldub ühtlasi

$$P\left(\frac{R'_n}{r_{1-\frac{\gamma}{2}}} < \sigma < \frac{R'_n}{r_{\frac{\gamma}{2}}}\right) = 1 - \gamma.$$

Seega avalduvad standardhälbe σ kahepoolsed usalduspiirid $\underline{\sigma}$ ja $\bar{\sigma}$ R-jaotuse kaudu järgmiselt:

$$\underline{\sigma} = \frac{R'_n}{r_{1-\frac{\gamma}{2}}}; \quad \bar{\sigma} = \frac{R'_n}{r_{\frac{\gamma}{2}}};$$

ühepoolsed usalduspiirid $\underline{\sigma}$ ja $\bar{\sigma}$ aga tuleb leida R-tabelist r_{α} ja $r_{1-\alpha}$ kaudu ($P(R_n < r_{\alpha}) = \alpha$; $P(R_n < r_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$):

$$\underline{\sigma} = \frac{R'_n}{r_{1-\alpha}}; \quad \bar{\sigma} = \frac{R'_n}{r_{\alpha}}.$$

Näide 64.

Paragrahvis 3 käsitletud näite puhul on $R'_n = 5$, $n = 10$.
 Proovime R'_n järgi leida σ jaoks 95- ja 99%-lised usalduspiirid ning $\bar{\sigma}$ hinnangu.

Selleks leiame tabelist

$$\alpha_{10} = 3,078;$$

ning $\bar{\sigma}$ nihutamata hinnanguks on

$$\bar{\sigma}^* = \frac{R'_n}{\alpha_n} = \frac{5}{3,078} = 1,62.$$

Tabelist IX saame ka

$$r_{0,005} = 1,00; \quad r_{0,025} = 1,67;$$

$$r_{0,975} = 4,47; \quad r_{0,995} = 5,42.$$

Siit leiame kahepoolsed usalduspiirid vastavalt usaldusniivoole 0,95

$$\underline{\sigma} = \frac{5}{4,47} = 1,12; \quad \bar{\sigma} = \frac{5}{1,67} = 3,00$$

ja vastavalt usaldusniivoole 0,99

$$\underline{\sigma} = \frac{5}{5,42} = 0,92; \quad \bar{\sigma} = \frac{5}{1,00} = 5,00.$$

Tuleb märkida, et suurte väljavõtete korral osutub $\bar{\sigma}$ hinnang R'_n järgi väheefektiivseks, seetõttu kasutatakse seda enamasti väikeste väljavõtete põhjal ($n \leq 20$, eriti, kui $n < 10$). Foodud meetodi eeliseks on aga arvutustöö väike maht: $\bar{\sigma}$ hinnangu ja usalduspiiride leidmiseks on tarvis teha vaid üks lahutamis- ning kolm jagamistehet.

Suuremahulise väljavõtte korral võib kasutada R-jaotust korduvalt: väljavõttest eraldatakse juhuslikult seeria väikese-mahulisi (näiteks 10-indiviidilisi) osaväljavõtteid, neist igähe jaoks leitakse σ_1^* ning saadakse summaarne hinnang viimaste aritmeetilise keskmisena.

Näide 65.

Olgu teostatud 100 vaatlust herneste arvu kohta hernekaunas. Vaatlustulemused olgu juhuslikus järjestuses:

3,7,11,4,6,8,12,10,9,7, 7,5,4,2,8,13,11,9,3,2,...

Eraldame 10-lised alamrühmad ning leiame igähest variatsiooni ulatused

$R_1^i = 12-3 = 9$; $R_2^i = 13-2=11$; olgu järgmised R_1^i väärtused:
12,8,8,7,10,9,7,9.

Ligikaudsed hinnangud σ jaoks saame: $\sigma^* = \frac{R}{3,078} \approx \frac{R}{3}$; summaarseks hinnanguks aga $\sigma^* \approx \frac{\sum R_1^i}{3k}$, kus k on osaväljavõtete arv. Käesoleval juhul saame

$$\sigma^* = \frac{90}{30} = 3.$$

V. STATISTILISTE HÜPOTEESIDE KONTROLLIMINE.

§ 1. Hüpoteeside kontrolli ülesanne.

Niihästi tootmistegevuses kui ka teaduslikus uurimistöös on sageli tarvis teha alternatiivseid otsustusi - valida välja üks kahest võimalikust käitumisviisist. Nii tuleb näiteks toodangu kontrollimisel tunnistada iga toode kas kvaliteetseks või praagiks, mingi teadusliku hüpoteesi kontrollimisel tuleb see hüpotees kas tunnistada õigeks või kummutada.

1. Statistiline hüpotees.

Et niisuguste hüpoteeside kontrollimisel on enamasti lähtealuseks statistiline materjal - mingi vaatlus-, mõõtmis- või katsetulemuste hulk, siis on osutunud otstarbekaks töötada välja spetsiaalne metodika alternatiivsete otsustuste tegemiseks statistilise materjali põhjal. Selliseid meetodeid käsitlebki statistiliste hüpoteeside kontrolli teooria.

Kõige üldisemalt võime statistiliste hüpoteeside kontrollimise ülesande sõnastada järgmiselt.

Olgu X mingi juhuslik suurus, mille jaotus ei ole meile täielikult teada (s.t. me ei tea jaotuse kohta kas üldse mitte midagi või teame jaotuse üldkuju, aga mitte tema parameetrite konkreetseid väärtusi). Olgu X väärtuste

hulgast antud väljavõtte mahuga n :

$$(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Kontrollimist vajab hüpotees H_0 , mille alternatiiviks on hüpotees H_1 :

$$H_0 : X \in A,$$

$$H_1 : X \in \bar{A},$$

kus A on mingi omadusega B juhuslike suuruste hulk, \bar{A} on aga selliste juhuslike suuruste hulk, millel omadus B puudub.

2. Kriteerium.

Väljavõtte (x_1, \dots, x_n) analüüsimise tulemusena peame vastu võtma (õigeaks tunnistama) ühe hüpoteesidest H_0 ja H_1 . Et saada üldist eeskirja (nn. kriteeriumi), mis võimaldaks mistahes väljavõtte põhjal ühe hüpoteesidest H_0 ja H_1 vastu võtta, jaotame kõigi võimalike väljavõtete hulga

$$\{(x_1, \dots, x_n)\} = R$$

kaheks osaks S_0 ja S_1 nii, et hulgad S_0 ja S_1 on teineteist välistavad (ükski väljavõtte ei tohi kuuluda mõlemasse osasse korraga) ja nende summa moodustab kogu hulga R (iga väljavõtte kuulub ühte neist hulkadest). Jaotamise aluseks on mingi väljavõtte funktsioon. Näiteks võib hulgaks S_1 olla kõigi väljavõtete hulk, mille puhul $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i < C$, S_0 - kõigi selliste väljavõtete hulk, mille puhul $\bar{x} \geq C$, kusjuures punkt C määratakse spetsiaalselt vastavalt ülesande tingimustele (vt. näiteid 66,69).

Hüpoteeside H_0 ja H_1 kontrollimise kriteeriumi saame siis sõnastada järgmiselt (vt. joonis 44):

Kui väljavõtte (x_1, \dots, x_n) kuulub hulka S_0 , siis võtame vastu hüpoteesi H_0 ;

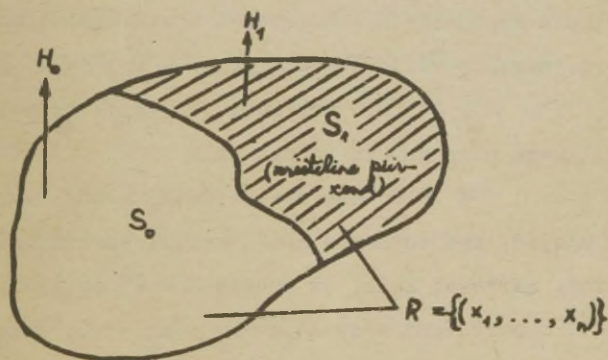
kui väljavõte (x_1, \dots, x_n) kuulub hulka S_1 , siis võtame vastu hüpoteesi H_1 (vt. joonis 44).

Sümbolite abil saaksime kriteeriumi üles märkida nii- viisi:

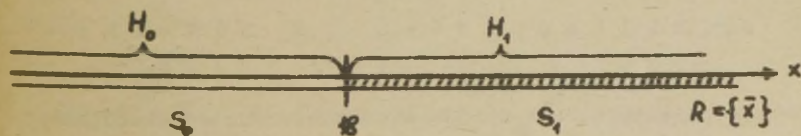
$$(x_1, \dots, x_n) \in S_0 \Rightarrow H_0;$$

$$(x_1, \dots, x_n) \in S_1 \Rightarrow H_1.$$

Hulka S_0 nimetatakse hüpoteesi H_0 vastuvõtmise piirkonnaks, hulka S_1 - hüpoteesi H_0 kummutamise piirkonnaks ehk kriitiliseks piirkonnaks. Seega taandub hüpoteeside kontrollimise ülesanne nende piirkondade määramisele. Tegelikult piisab vaid kriitilise piirkonna S_1 määramisest, sest $S_0 = R - S_1$.



Joonis 44.



Joonis 45.

Näide 66.

Olgu tarvis selgitada, kas tööruumi keskmine temperatuur on normi piires (vähemalt $+18^{\circ}\text{C}$) või alla normi. Sõnastame kaks hüpoteesi:

H_0 : Tööruum on liiga külm.

H_1 : Tööruum on piisavalt soe.

Nende hüpoteeside kontrollimiseks teeme seeria temperatuurimõõtmisi, mis moodustavad väljavõtte (x_1, x_2, \dots, x_n) . Lihtsa konstruktsiooniga kriteeriumi saame järgmisel viisil.

Arvutame
$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Kui $\bar{x} < 18^{\circ} \Rightarrow H_0$;

Kui $\bar{x} \geq 18^{\circ} \Rightarrow H_1$.

Järelikult moodustab nullhüpoteesi vastuvõtmise hulga S_0 kõigi niisuguste väljavõtete (x_1, \dots, x_n) hulk, mille puhul

$$\bar{x} < 18^{\circ} \text{ ehk } x_1 + x_2 + \dots + x_n < 18 \cdot n ;$$

kriitiliseks piirkonnaks on aga hulk

$$\bar{x} \geq 18^{\circ} \text{ ehk } x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq 18n \text{ (vt. joonis 45).}$$

Need lugejad, kes tunnevad n -mõõtmelist analüütilist geometriat, märkavad kohe, et ruumis $R = R^n$ eraldab piirkondi S_0 ja S_1 hüpertasand võrrandiga $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 18n$.

§ 2. Nullhüpotees ja alternatiiv. I ja II liiki vigad.

Tavaliselt ei ole uurija otsustuste suhtes ükskõikne, vaid tema jaoks on üks otsustus soodsam kui teine (toote kvaliteetseks tunnistamine on soodsam kui selle praagiks

lugemine; uurijat huvitava hüpoteesi vastuvõtmine on soodsam kui selle kummutamine jne.). See aga tähendab seda, et enamasti soovib uurija tõestada üht teatavat statistilist hüpoteesi.

Statistilise hüpoteesi tõestamine toimub harilikult "eituse eitamise" teel, s.t. hüpoteesi tõestamiseks kummutatakse selle alternatiiv. Tavaliselt nimetatakse tõestatava hüpoteesi alternatiivi nullhüpoteesiks. Edaspidi tähistame tõestatava hüpoteesi (nullhüpoteesi alternatiivi) sümboliga H_1 , nullhüpoteesi aga sümboliga H_0 .

Statistilise materjali põhjal ei ole üldiselt võimalik ühtegi hüpoteesi absoluutselt kindlasti tõestada; peasegu alati tuleb arvestada võimalust, et otsustamisei tehakse viga. Hüpoteeside kontrollimisel esineb järgmisi vigu:

1) Õige on nullhüpotees, kuid väljavõte kuulub hulka S_1 ning seetõttu nullhüpotees kummutatakse; sel juhul tehakse I liiki viga.

2) Õige on nullhüpoteesi alternatiiv, kuid väljavõte kuulub hulka S_0 ning seetõttu võetakse vastu nullhüpotees; sel juhul tehakse II liiki viga.

Arvestades seda, et alternatiivile H_1 vastav olukord on uurijale soodsam nullhüpoteesile vastavast olukorrast, ei ole I ja II liiki vead võrdse tähtsusega. See selgub kasvõi järgmisest näitest.

Näide 67. Oigu tarvis selgitada, kas katsetatav ravim on kasutamiseks liiga mürgine või on tema mürgisus vastu võetav (küllalt madal). Sõnastame nullhüpoteesi (uurijaie ebasoodsa väite) kujul:

H_0 : ravim on liiga mürgine.

I liiki viga tekiks siis, kui tegelikult mürgine ravim tunnistatakse tarvitamiskõlblikuks. Niisugusel veal on väga rasked, isegi traagilised tagajärjed, mistõttu I liiki vea tekkimist tuleb igati vältida.

II liiki viga tehakse aga sel juhul, kui tegelikult vastuvõetav ravim tunnistatakse mürgiseks. Ka II liiki viga tekitab ebameeldivusi - täiendav ravimi uurimine, tootmis- tehnoloogia täiustamine jne., kuid selle tagajärjed ei ole nii rasked kui I liiki veal.

Näide 68. Olgu tarvis kontrollida silla kandetugevust.

Sõnastame hüpoteesid:

H_0 : sild on liiga nõrk ;

H_1 : sild on piisavalt tugev.

I liiki viga - liiga nõrga silla tunnistamine piisavalt tugevaks - võib põhjustada katastroofi, II liiki viga - küllalt tugeva silla ettevaatuse mõttes nõrgaks tunnistamine põhjustab vaid täiendavaid materiaalseid kulutusi silla tugevdamiseks. II liiki viga, kuigi ebameeldiv, on siiski vastuvõetavam kui I liiki viga.

§ 3. Olulisuse nivoo ja kriteeriumi võimsus.

Nagu nägime eelmises punktis, on paljude ülesannete puhul oluline hoiduda I liiki veast. Selleks tuleb kriteerium (s.t. kriitiline piirkond S_1) valida nii, et I liiki vea tõenäosus oleks küllalt väike. Siinjuures oleneb konkreetsest ülesandest,

kui suure tõenäosusega tohib I liiki viga esineda.

Näidetes 67 ja 68 toob I liiki viga kaasa tõsise katastroofi, seetõttu peab tema tõenäosus olema tühiselt väike, näiteks 0,001 (s.t. keskmiselt 1000 silla kohta üks osutub mõõtmise ebatäpsuse tulemusena lubatust nõrgemaks ning üks ravim tuhandest on normatiivist mürgisem). Seevastu aga näiteks mõningat liiki detailide kvaliteedi kontrollimisel põhjustab I liiki viga (praakdetail tunnistatakse kvaliteetseks) suhteliselt väiksemat kahju, mistõttu selle esinemise tõenäosus võiks olla suurem, näiteks 0,05, s.t. keskmiselt kahekümnest praakdetailist üks tunnistatakse kvaliteetseks.

1. Olulisuse nivoo.

Matemaatilises statistikas määratakse ülesande formuleerimisel koos nullhüpoteesi ja alternatiivi sõnastamisega kohe kindlaks ka I liiki vea maksimaalne lubatav tõenäosus, mida nimetatakse olulisuse nivooks (riski protsendiks) ning tähistatakse tähega α . Praktiliselt kasutatakse enamasti väärtusi 0,05 (5%), 0,01 (1%), 0,001 (0,1%).

Vastavalt etteantud α väärtustele tuleb määrata kriitrium (kriitiline piirkond S_1) nii, et tõenäosus selleks, et väljavõte kuulub piirkonda S_1 , juhul kui õige on H_0 , oleks tõkestatud suurusega α (märgime siin, et vaadeldav tõenäosus on sisuliselt tinglik tõenäosus tingimusel, et õige on hüpotees H_0 , seetõttu kasutame ka siin tingliku tõenäosuse sümboolit, vt. [3]).

$$P(\text{I liiki viga}) = P[(x_1, \dots, x_n) \in S_1 / H_0] \leq \alpha \quad (1)$$

(Vt. joonist 47). Niisuguseid kriitilisi piirkondi S_1 , mis

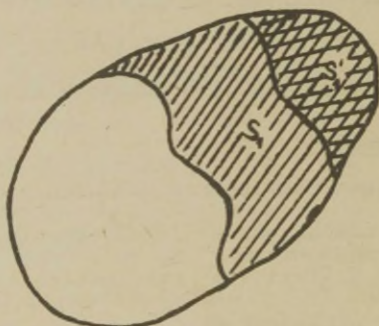
rahuldavad tingimust (1), on võimalik iga hüpoteeside paari H_0 ja H_1 ning olulisuse nivoo α korral määrata lõpmata palju (vt. joon. 46).

Tõepoolest, olgu S_1 mingi kriitiline piirkond, s.t.

$$P[(x_1, \dots, x_n) \in S_1 / H_0] \leq \alpha.$$

Valime hulga $S'_1 \subset S_1$. Siis kehtib tõenäosuse monotoonsuse tõttu (vt. näiteks [3]) võrratus

$$P[(x_1, \dots, x_n) \in S'_1 / H_0] \leq P[(x_1, \dots, x_n) \in S_1 / H_0] \leq \alpha.$$



Joonis 46.

Kui $S'_1 \subset S_1$, siis

$P[(x_1, \dots, x_n) \in S'_1] \leq P[(x_1, \dots, x_n) \in S_1] \leq \alpha$, järelikult on iga hulk S'_1 , mis kuulub kriitilisse piirkonda S_1 , samuti kriitiliseks piirkonnaks olulisuse nivoo α .

Loomulik on nimetada sama olulisuse nivoo α kõigi kriitriumide seast parimaks niisugust, mille puhul II liiki vea tõenäosus on võimalikult väike.

2. Võimsus.

Tõenäosust selleks, et II liiki viga ei tehta, nimetatakse kriteeriumi võimsuseks ning tähistatakse tähega β .

Valemi β määramiseks leiame järgmiselt:

$$\beta = 1 - P(\text{II liiki viga}) = 1 - P[(x_1, \dots, x_n) \in S_0/H_1] = P[(x_1, \dots, x_n) \in S_1/H_1].$$

Märgime, et alati on võimalik leida kriteerium, mille puhul kehtib võrratus

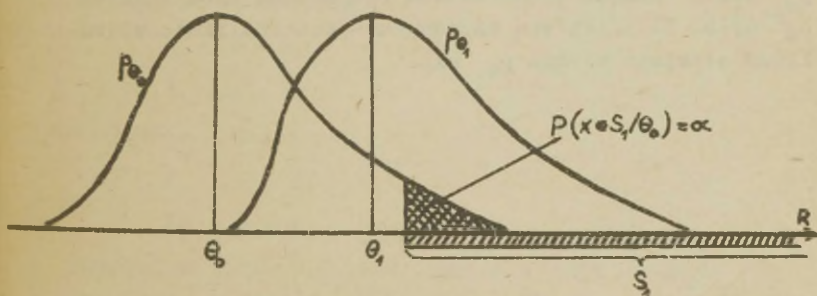
$$\beta \geq \alpha \quad (2)$$

(selle tõestust vt. § 5), vt. joonis 48. Siit aga järeldub, et põhimõtteliselt võib II liiki viga olla küllaltki suur - ulatudes kuni 0,95 või 0,99-ni.

Võimsaimate ning ühtlaselt võimsaimate kriteeriumide teooriaga on asjast huvitatud lugejal võimalik tutvuda monograafia [7] kaudu, ühel kitsamal erijuhul peatume põgusalt veel ka käesoleva konspekti paragrahvis 5.

$$H_0 : \theta = \theta_0,$$

$$H_1 : \theta = \theta_1.$$

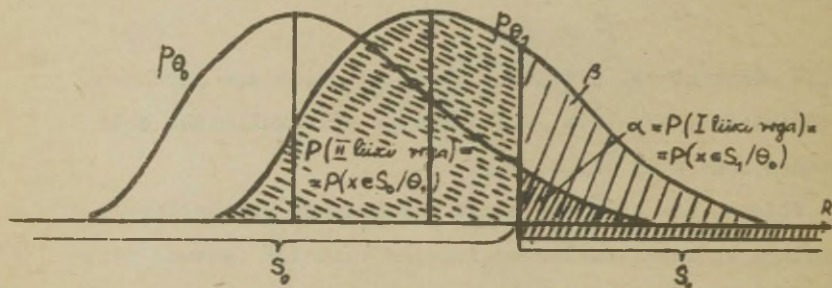


Joonis 47.

Kriitilise piirkonna S_1 valime vastavalt antud olulisuse ni-
voole α . Tõenäosuse tiheduse kõver p_{θ_0} vastab nullhüpotee-
sile, kõver p_{θ_1} - hüpoteesile H_1 . Kriitiline piirkond S_1 on
lõpmatu poollõik teljel R ning viirutatud pindala kõvera
 p_{θ_0} all on $P(x \in S_1/\theta_0)$, s.o. I liiki vea tõenäosus.

$$H_0 : \theta = \theta_0,$$

$$H_1 : \theta = \theta_1.$$



Joonis 48.

p_{θ_0} - nullhüpoteesile vastava jaotuse tiheduskõver,

p_{θ_1} - alternatiivile H_1 vastav tiheduskõver.

Olulisuse nivoo α (tihedalt viirutatud pindalakõvera
 p_{θ_0} all), võimsus β (hõredasti viirutatud pindalakõver
 p_{θ_1} all). II liiki vea tõenäosus - katkendlikult viiru-
tatud piirkond kõvera p_{θ_1} all.

§ 4. Hüpoteesid jaotuse parameetrite kohta.

Paragrahvis 1 esitasime hüpoteeside kontrollimise ülesande kõige üldisemal kujul. Järgnevalt konkretiseerime seda üldkujulist ülesannet ning defineerime praktikas kõige sagedamini esineva hüpoteeside kontrolli ülesannete tüübi.

Väga sageli tehakse hüpoteeside kontrollimisel eeldus, et juhusliku suuruse X jaotuse üldkuju (jaotuse klass) on teada ning tuleb kontrollida hüpotees jaotust iseloomustavate arvuliste parameetrite kohta. Enamasti oletatakse, et tegemist on normaal- või binomiaaljaotusega, harvem Poissoni jaotusega, käsitledes siinjuures olukorda, mil kontrollimist vajab ainult üks parameeter. Tegelikult võib tarvis olla otsustusi ka mitme parameetri kohta (näiteks normaaljaotuse parameetrid m ja σ), kuid seda on enamasti võimalik teha järjest enne ühe ja seejärel teise parameetri jaoks.

Järgnevalt vaatleme levinumaid hüpoteesi tüüpe, mille kontrollimiseks on töötatud välja kindel metoodika.

a) Ühepoolne hüpotees

$$H_0 : \theta \leq \theta_0,$$

$$H_1 : \theta > \theta_0.$$

b) Ühepoolne hüpotees

$$H_0 : \theta \geq \theta_0,$$

$$H_1 : \theta < \theta_0.$$

Ühepoolsed hüpoteesid on praktikas väga levinud. Ühepoolsete hüpoteeside hulka kuuluvad ka näidetes 67 ja 68 käsitletud hüpoteesid. Tuleb märkida, et kuigi hüpoteesi-

tüüpide a) ja b) käsitus on väga sarnane, vaatleme neid (ka edaspidi) eraldi, sest hüpoteeside H_0 ja H_1 sisulise erinevuse tõttu on piirkonnad S_1 ja S_0 juhul a) erinevad piirkondadest S_0 ja S_1 juhul b).

c) Kahepoolne hüpotees

$$H_0 : \theta = \theta_0,$$

$$H_1 : \theta \neq \theta_0,$$

$$\text{ehk } H_1 : \theta > \theta_0, \text{ või } \theta < \theta_0.$$

Kahepoolse hüpoteesi puhul on kahepoolne vaid tõestamist vajav alternatiiv, kuna nullhüpoteesiks on lihthüpotees. (Lihthüpoteesiks nimetame niisugust hüpoteesi, mille väide on sõnastatav võrdusena.) Kahepoolset hüpoteesi on tarvis tõestada näidetes 71,74 jt.

d) Lihthüpoteeside paar

$$H_0 : \theta = \theta_0,$$

$$H_1 : \theta = \theta_1.$$

Reaalselt esineb küll väga harva niisuguseid olukordi, et parameetril on ainult kaks võimalikku väärtust θ_0 ja θ_1 (vt. jooniseid 47 ja 48). Ometi on mõningaid ülesandeid võimalik teatud ligikaudsusega taandada lihthüpoteeside paari kontrollimise ülesandele (järjendanalüüs, vt. [7]).

* § 5. Võimsaimad ja ühtlaselt võimsaimad kriteeriumid.

1. Parameetri väärtuste ruum Ω .

Vaatleme olukorda, et tuleb kontrollida hüpoteese juhusliku suuruse X jaotuse parameetri θ kohta. Tähistame parameetri kõigi võimalike väärtuste hulga tähega Ω , seega

$$\{\theta\} = \Omega.$$

Hulgaks Ω (nn. parameetrite ruumiks) võib olla kõigi reaalarvude hulk $(-\infty, \infty)$ (parameeter m normaaljaotuse puhul), kõigi mittenegatiivsete reaalarvude hulk $[0, \infty)$ (parameeter σ normaaljaotuse korral, parameeter λ Poissoni jaotuse korral), kõigi reaalarvude hulk mingilt lõigult või vahemikust ($\Omega = [0, 1]$ binomiaaljaotuse parameetri p jaoks), kõigi naturaalarvude hulk N (binomiaaljaotuse parameeter n) jne.

Parameetri θ nende väärtuste hulga, mille korral on õige nullhüpotees H_0 , tähistame sümboliga Ω_0 , nende θ väärtuste hulga aga, mille korral on õige alternatiiv H_1 , tähistame sümboliga Ω_1 . Hulgad Ω_0 ja Ω_1 on teineteist välistavad (sest alati saab ainult üks hüpoteesidest olla õige) ning nende summa (s.o. hulgateoreetiline summa, vt. näiteks [3]) moodustab kogu ruumi Ω

$$\Omega_0 \cup \Omega_1 = \Omega.$$

Hüpoteesid H_0 ja H_1 võime siis kirjutada järgmiselt:

$$H_0 : \theta \in \Omega_0,$$

$$H_1 : \theta \in \Omega_1.$$

Täpsustamist vajavad vaid piirkonnad Ω_0 ja Ω_1 . Vaat-

leme näitena, millise kujuga on need piirkonnad juhul, kui $\Omega = (-\infty, \infty)$ ning tõestamist vajavad hüpoteesid tüüpi

a) - c):

$$a) H_0 : \theta \leq \theta_0, \quad \Omega_0 = (-\infty, \theta_0];$$

$$H_1 : \theta > \theta_0, \quad \Omega_1 = (\theta_0, \infty).$$

$$b) H_0 : \theta \geq \theta_0, \quad \Omega_0 = [\theta_0, \infty);$$

$$H_1 : \theta < \theta_0, \quad \Omega_1 = (-\infty, \theta_0).$$

$$c) H_0 : \theta = \theta_0, \quad \Omega_0 = \{\theta_0\};$$

$$H_1 : \theta \neq \theta_0, \quad \Omega_1 = (-\infty, \theta_0) \cup (\theta_0, \infty).$$

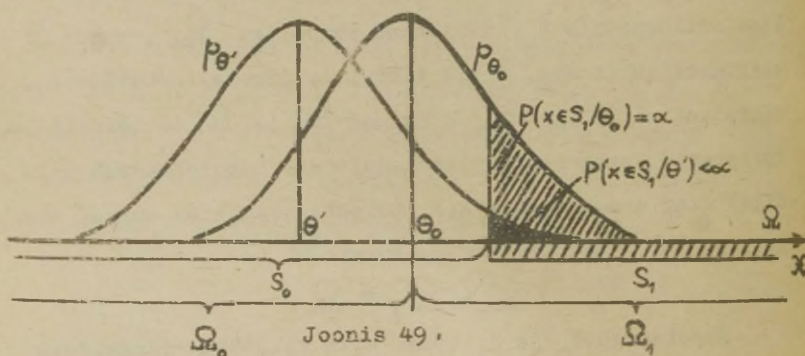
Lihthüpoteeside paari puhul koosneb nihkesti hulk Ω_0 kui ka hulk Ω_1 ühestainsast punktist

$$d) H_0 : \theta = \theta_0, \quad \Omega_0 = \{\theta_0\};$$

$$H_1 : \theta = \theta_1, \quad \Omega_1 = \{\theta_1\}.$$

$$E_0 : \theta \leq \theta_0,$$

$$E_1 : \theta > \theta_0.$$



Joonis 49.

Parameetri väärtus θ_0 on maksimaalne hulgas Ω_0 , parameetri väärtus θ' aga mingi suvaline väärtus hulgas Ω_0 , $\theta' < \theta_0$. Olulisuse nivoo α on viirutatud pindalakovera p_{θ_0} all, s.o. maksimaalne I liiki vea tõenäosus. I liiki vea tõenäosust juhul, kui parameetri õige väärtus on θ' , kujutab must piirkond kovera $p_{\theta'}$ all, ilmselt on see $< \alpha$.

2. Liht- ja liithüpotees ning alternatiiv.

Kui piirkond Ω_0 sisaldab rohkem kui ühe punkti, siis sõltub I liiki vea tõenäosus sellest, milline konkreetne väärtus $\theta \in \Omega_0$ vaadeldaval juhul esineb (vt. joonis 49). Tõepoolest, mida lähemale satub parameetri θ väärtus piirkondi Ω_0 ja Ω_1 eraldavale punktile θ_0 , seda suuremaks muutub eksimise tõenäosus,

$$P[(x_1, \dots, x_n) \in S_1 / \theta'] \leq P[(x_1, \dots, x_n) \in S_1 / \theta''] \quad (3)$$

kui $\theta' \leq \theta''$ ning $\Omega_0 = (-\infty, \theta_0]$. Siit järeldub, et

$$P[(x_1, \dots, x_n) \in S_1 / \theta] = P[(x_1, \dots, x_n) \in S_1 / \theta_0]$$

ning me võime määrata piirkonna S_1 selliselt, et leiaks aset võrdus

$$P[(x_1, \dots, x_n) \in S_1 / \theta_0] = \alpha.$$

Sel juhul on saadud kriteeriumi olulisuse nivooks tõepoolest α (vt. joonis 47, kus väljavõtte on 1-dimensionaalne, väljavõtteks on x).

3. Võimsusfunktsioon.

Samuti sõltub ka II liiki vea tõenäosus sellest, millise konkreetse väärtuse piirkonnast Ω_1 parameeter θ tegelikult omandab. Selletõttu tulebki juhul, kui Ω_1 sisaldab rohkem kui ühe punkti (tegemist on lihtalternatiiviga), kriteeriumi iseloomustamiseks võtta kasutusele nn. võimsusfunktsioon $\beta(\theta)$, mis defineeritakse järgmise seosega:

$$\beta(\theta) = P[(x_1, \dots, x_n) \in S_1 / \theta] \quad (\theta \in \Omega),$$

s.o. tõenäosus selleks, et väljavõtte kuulub kriitilisse piirkonda, kui parameetri tegelikuks väärtuseks on θ .

Sel juhul kui $\theta \in \Omega_0$, annab võimsusfunktsiooni väärtus

meile I liiki vea tõenäosuse. Siis, kui $\theta' \in \Omega_1$, annab võimsusfunktsioon aga tõenäosuse selleks, et II liiki viga ei tehta. Võrratus (3) näitab, et võimsusfunktsioon on monotonne (sõltumatult sellest, millisesse piirkonda kuuluvad punktid θ' ja θ'').

Erijuhul kui piirkonnad Ω_0 ja Ω_1 koosnevad ühest ainsast punktist, omandab võimsusfunktsioon ainult kaks võimalikku väärtust

$$\beta(\theta_0) = \alpha, \quad \beta(\theta_1) = \beta.$$

Seosest (3) järeldub siis ka (2) (kui $\theta_0 \in \Omega_1$; vastupidisel juhul kehtib võrratus (3) tingimusel $\theta' \geq \theta''$ ning ka sel juhul järeldub sellest (2)).

Lihthüpooteesi ja lihtalternatiivi korral defineeritakse võimsaim kriteerium olulisuse nivooga α kui kriteerium, mille võimsus β on suurim kõigi sama olulisuse nivooga kriteeriumide seas (s.t. võimsaima kriteeriumi võimsus β ei ole väiksem ühegi teise sama olulisuse nivooga kriteeriumi võimsusest). Rõhutame veel, et võimsaimast kriteeriumist on mõtet rääkida ainult sel juhul, kui tõestamist vajav alternatiiv H_1 on lihtne, s.t. hulk Ω_1 koosneb ühestainsast punktist θ_1 ning $\beta = \beta(\theta_1)$.

4. Ühtlaselt võimsaim kriteerium.

On võimalik näidata, et tingimus (3) on tarvilik selleks, et kriteerium oleks võimsaim (vt. näiteks [7]). Võimsaima kriteeriumi rakendamisel saavutatakse etteantud I liiki vea tõenäosuse korral minimaalne II liiki vea tõenäosus, seetõttu on alati (kui võimalik) otstarbekaim kasutada võimsaimat kriteeriumi.

Juhul kui Ω_1 sisaldab rohkem kui ühe punkti, võib esineda olukord, et mingi $\theta' \in \Omega_1$ korral on ühe kriteeriumi võimsus maksimaalne, mingi $\theta'' \in \Omega_1$ korral ($\theta' \neq \theta''$) aga on maksimaalne mingi teise kriteeriumi võimsus. Liitalternatiivi puhul on tarvis defineerida ühtlaselt võimsaima kriteeriumi mõiste.

Olgu mingi kriteeriumi olulisuse nivoo α . Kui selle kriteeriumi võimsus $\beta(\theta)$ ei ole väiksem ühegi teise sama olulisuse nivoo kriteeriumi võimsusest $\beta^*(\theta)$ iga $\theta \in \Omega_1$ korral, siis ütleme, et vaadeldav kriteerium on ühtlaselt võimsaim (olulisuse nivoo α).

Kaugeltki iga jaotuse ja iga hüpoteesi korral ei tarvitse eksisteerida ühtlaselt võimsaimaid kriteeriume. On aga tõestatud (vt. [7]), et normaal-, binomiaal- ja Poissoni jaotusega juhuslike suuruste jaotuse parameetrite kohta käivate ühepoolsete hüpoteeside kontrollimiseks eksisteerivad ühtlaselt võimsaimad kriteeriumid. Need minimiseerivad (antud olulisuse nivoo korral) II liiki vea tõenäosuse parameetri θ iga tegeliku väärtuse korral.

— * —

§ 6. Hüpoteeside kontrollimine usalduspiirkondade abil.

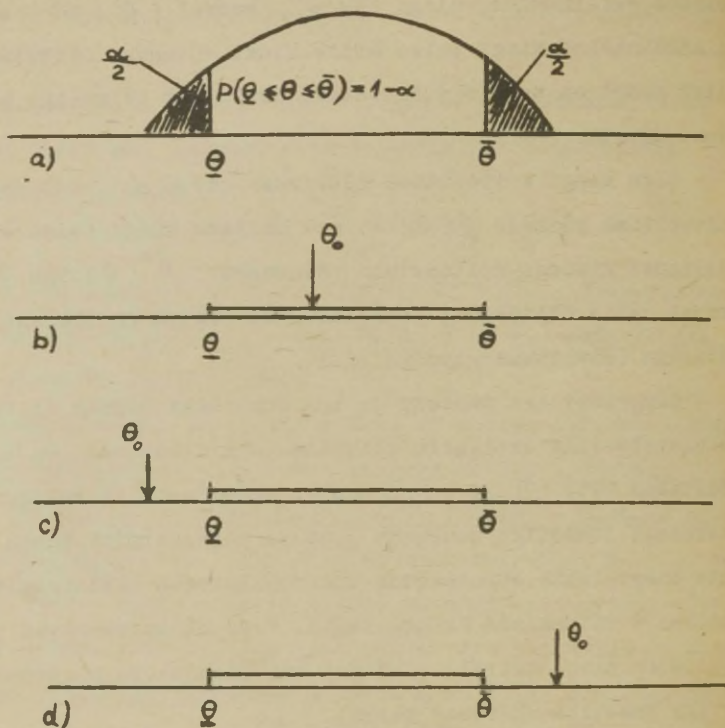
1. Kahepoolsete hüpoteeside kontrollimine.

Olgu juhuslik suurus X parameetrist θ sõltuva jaotusega P_X , $X \sim P_X(\theta)$. Kontrollida kahepoolset hüpoteesi

$$H_0 : \theta = \theta_0,$$

$$H_1 : \theta \neq \theta_0.$$

olulisuse nivooga α . Olgu antud juhusliku suuruse X väärtusest väljavõtte x_1, x_2, \dots, x_n .



Joonis 50.

Kahepoolse hüpoteesi kontrollimine usalduspiiride abil.

Selle ülesande lahendamiseks leiame väljavõtte põhjal parametri θ jaoks kahepoolsed usalduspiirid usaldusnivooga $1 - \alpha$ (vt. joonis 50^a)

$$P\left[\underline{\theta}(x_1, \dots, x_n) < \theta < \bar{\theta}(x_1, \dots, x_n)\right] = 1 - \alpha. (4)$$

Kriteeriumi hüpoteesi kontrollimiseks saame järgmiselt:²⁰

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{kui } \underline{\theta}(x_1, \dots, x_n) \leq \theta_0 \leq \bar{\theta}(x_1, \dots, x_n), \text{ siis võtame} \\ \text{vastu } H_0 \text{ (vt. joon. } 50^b); \text{ (5)} \\ \text{kui } \theta_0 < \underline{\theta}(x_1, \dots, x_n) \text{ või } \theta_0 > \bar{\theta}(x_1, \dots, x_n), \text{ siis} \\ \text{võtame vastu } H_1 \text{ (vt. joonis } 50^c \text{ ja } 50^d). \end{array} \right.$$

* Tõestame, et kriteerium (5) vastab tõesti olulisuse nivoole α , s.t., et I liiki vea tõenäosus on $\leq \alpha$.

Arvutame selleks olulisuse nivoo, s.o. tõenäosuse selleks, et võtame vastu hüpoteesi H_1 , kui tegelikult on õige H_0 : $P[(x_1, \dots, x_n) \in S_1/H_0]$. Kui nullhüpotees on õige, siis on juhusliku suuruse X jaotus täpselt teada: jaotuse parameetri θ väärtus on θ_0 . Tähistame tõenäosuse, mis on arvatud eeldusel $\theta = \theta_0$, tähisega P_0 . Siis saame I liiki vea tõenäosuse jaoks järgmise avaldise:

$$\begin{aligned} P[(x_1, \dots, x_n) \in S_1/H_0] &= P_0[(x_1, \dots, x_n) \in S_1] = \\ &= 1 - P_0[(x_1, \dots, x_n) \in S_0]. \end{aligned} \quad (6)$$

Kriteerium (5) määrab piirkonnad S_1 ja S_0 usalduspiiride kaudu: S_1 on kõigi niisuguste väljavõtete hulk, mille korral kehtib üks võrratustest

$$\theta_0 < \underline{\theta}(x_1, \dots, x_n) \text{ ja } \theta_0 > \bar{\theta}(x_1, \dots, x_n);$$

S_0 on kõigi niisuguste väljavõtete hulk, mille korral kehtivad võrratused

$$\underline{\theta}(x_1, \dots, x_n) \leq \theta_0 \leq \bar{\theta}(x_1, \dots, x_n).$$

²⁰ Mis puutub olukorrasse $\underline{\theta}(x_1, \dots, x_n) = \theta_0$ või $\bar{\theta}(x_1, \dots, x_n) = \theta_0$, siis teoreetiliselt niisugune võrdus esineb tõenäosusega 0. Praktiliselt see aga (tänu ümardamisele) võib esineda. Kui arvutusi analüüsides ei ole võimalik kindlaks teha, kumb võrratustest aset leiab, on tavaks võtta vastu n.-ö. ettevaatuse mõttes) hüpotees H_0 . Kasutame seda kokkulepet ka edaspidi.

Kuna sündmused

$$(x_1, \dots, x_n) \in S_0$$

ja

$$\underline{\theta}(x_1, \dots, x_n) \leq \theta_0 \leq \bar{\theta}(x_1, \dots, x_n)$$

on samaväärsed, siis on ka nende tõenäosused võrdsed:

$$P_0[(x_1, \dots, x_n) \in S_0] = P_0[\underline{\theta}(x_1, \dots, x_n) \leq \theta_0 \leq \bar{\theta}(x_1, \dots, x_n)] \quad (7)$$

Parempoolne tõenäosus on aga teada: tõepoolest, see on erijuht valemist (4) θ väärtuse puhul $\theta = \theta_0$ ning seega

$$P_0[\underline{\theta}(x_1, \dots, x_n) \leq \theta_0 \leq \bar{\theta}(x_1, \dots, x_n)] = 1 - \alpha.$$

Asendades leitud tõenäosuse võrrandisse (6) ja kasutades seost (7) saame

$$P[(x_1, \dots, x_n) \in S_1/H_0] = 1 - (1 - \alpha) = \alpha,$$

mida oligi tarvis tõestada.

2. Ühepoolsete hüpoteeside kontrollimine.

Järgnevalt vaatleme, kuidas leida kriteeriume ühepoolsete hüpoteeside kontrollimiseks.

Olgu X jaotusega F_X , mis sõltub parameetrist θ .

Olgu x_1, \dots, x_n väljavõtte selle juhusliku suuruse väärtuste hulgast. Kontrollimist vajab ühepoolne hüpotees

$$H_0 : \theta \leq \theta_0,$$

$$H_1 : \theta > \theta_0$$

olulisuse nivooaga α .

Leiame parameetri θ jaoks ühepoolse alumise usalduspiiri usaldusnivooaga $1 - \alpha$ (vt. joonis 51^a)

$$P[\underline{\theta}(x_1, \dots, x_n) < \theta] = 1 - \alpha \quad (8)$$

Kriteeriumi hüpoteesi kontrollimiseks konstrueerime²⁰ järgmiselt:

kui $\underline{\theta} \leq \theta_0$, siis võtame vastu H_0 ; (9)

kui $\underline{\theta} > \theta_0$, siis võtame vastu H_1 .

* Tõestame, et kriteeriumi (9) olulisuse nivooks on töö-
poolest α . Arvutame I liiki vea tegemise tõenäosuse

$$P[(x_1, \dots, x_n) \in S_1/H_0] \leq P_0[(x_1, \dots, x_n) \in S_1]. \quad (10)$$

Sümboliga P_0 tähistame, nagu varemgi, tõenäosuse eeldusel $\theta = \theta_0$. Tõenäosus võtta ekslikult vastu hüpoteesi H_1 , kui õige on H_0 , sõltub konkreetsest θ väärtusest ning on seda suurem, mida lähemal on θ väärtus nendele θ väärtustele, mille korral H_1 kehtiks. Järelikult on I liiki vea tegemise tõenäosus maksimaalne θ piirväärtuse θ_0 korral, mille puhul siiski oleks õige võtta vastu hüpoteesi H_0 .²¹ Seda asjaolu väljendabki võrratus (10). Edasine mõttekäik on sarnane eelmise tõestusega: kasutame ära kriteeriumiga (9) määratud piirkonna S_0 konstruktsiooni, mille põhjal

$$P_0[(x_1, \dots, x_n) \in S_0] = P_0[\underline{\theta}(x_1, \dots, x_n) \leq \theta_0]$$

ning usalduspiirkonna definitsiooni (8) erijuhul $\theta = \theta_0$.

Tulemusi kokku võttes saame

$$P[(x_1, \dots, x_n) \in S_1/H_0] = 1 - (1 - \alpha) = \alpha,$$

mida oligi tarvis tõestada.

* *

Vaatleme veel kriteeriumi konstruktsiooni vastassuunalise ühepoolse hüpoteesi kontrollimiseks. Olgu tarvis kontrollida olulisuse nivooga α hüpoteesi

$$H_0 : \theta \geq \theta_0,$$

$$H_1 : \theta < \theta_0.$$

²¹Selle väite range tõestuse võib lugeja leida mono-
graafiast [7].

Leiame parameetri θ jaoks ühepoolse ülemise usalduspiiri $\bar{\theta} = \theta(x_1, \dots, x_n)$ vastavalt olulisuse nivoole $1 - \alpha$:

$$P(\theta \leq \bar{\theta}(x_1, \dots, x_n)) = 1 - \alpha. \quad (11)$$

Kriteeriumi moodustame järgmiselt:

$$\begin{cases} \text{kui } \theta_0 \leq \underline{\theta}(x_1, \dots, x_n), \text{ siis võtame vastu } H_0, \\ \text{kui } \theta_0 > \underline{\theta}(x_1, \dots, x_n), \text{ siis võtame vastu } H_1. \end{cases} \quad (12)$$

Analoogiliselt eespool vaadeldud ühepoolse hüpoteesi juhuga on võimalik tõestada, et kriteeriumi (12) olulisuse nivoo on α .

§ 7. Hüpoteesid normaaljaotuse keskväärtuse kohta.

Olgu $X \sim N(m, \sigma^2)$. Kontrollida hüpoteesi

$$H_0 : m \leq m_0,$$

$$H_1 : m > m_0$$

olulisuse nivooga α . Olgu X väärtustest antud väljavõte x_1, \dots, x_n . Arvutame statistikud

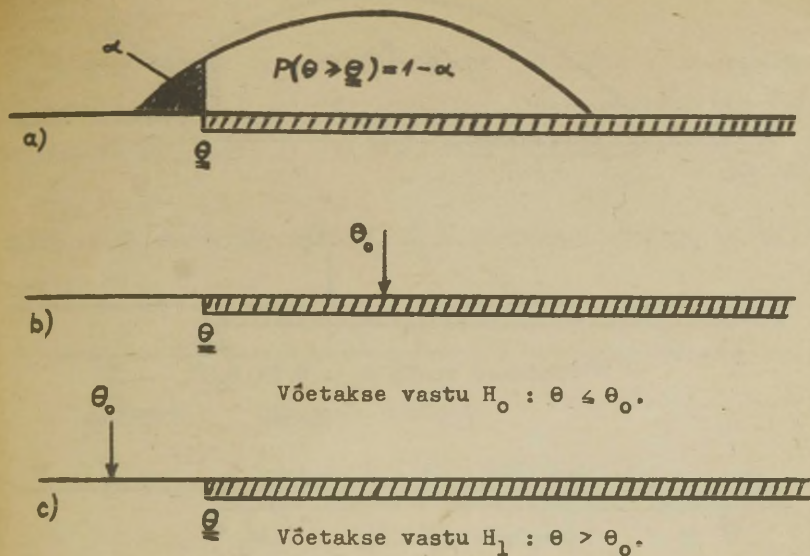
$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

Kriteeriumi leidmiseks kasutame §-s 6 esitatud mõttekäiku.

Selleks arvutame parameetri m jaoks ühepoolse alumise usalduspiiri usaldusnivooga $1 - \alpha$ (vt. joonis 51)

$$\underline{m} = \bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\alpha}; n - 1; \bar{u},$$



Joonis 51.

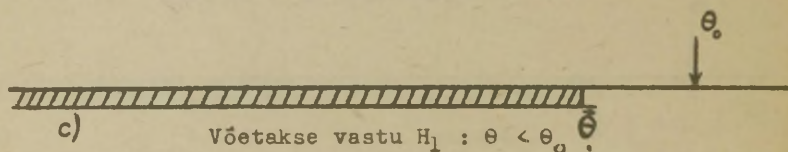
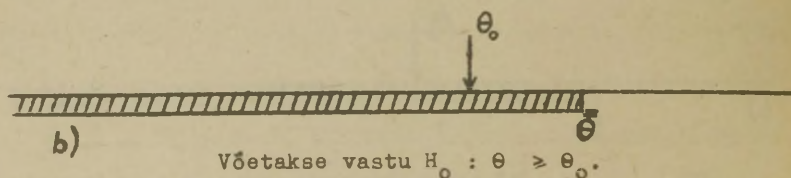
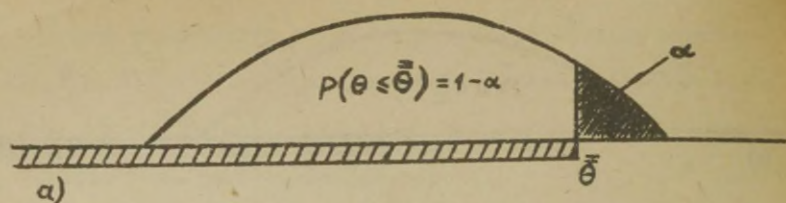
kus $P(T_{n-1} > t_{\alpha}; n-1; \bar{u}) = \alpha$, kui T_{n-1} on t -jaotusega juhuslik suurus vabadusastmete arvuga $n - 1$. Hüpooteesi H_1 saame vastu võtta siis, kui kehtib võrratus

$$\bar{x} > m_0.$$

Teisendame saadud kriteeriumi, asendades \bar{x} lähteandmetega

$$\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\alpha}; n-1; \bar{u} > m_0;$$

$$\bar{x} - m_0 > \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\alpha}; n-1; \bar{u}.$$



Joonis 52.

Kokkuvõtteks saame kriteeriumi

$$a) H_0 : m \leq m_0;$$

$$H_1 : m > m_0;$$

$$\frac{\bar{x} - m_0}{s} \sqrt{n} > t_{\alpha; n-1; \bar{u}} \Rightarrow H_1, \quad (13)$$

$$\frac{\bar{x} - m_0}{s} \sqrt{n} \leq t_{\alpha; n-1; \bar{u}} \Rightarrow H_0.$$

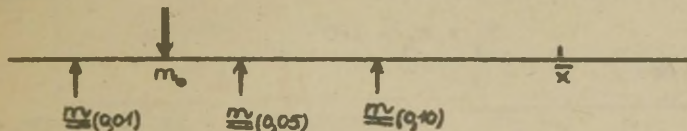
Siinjuures leiame t -jaotuse tabelist antud $n - 1$ korral maksimaalse arvu $t_{\alpha; n-1}^*$, mis rahuldab veel võrratust (13); see vastab minimaalsele α väärtusele, mille korral võrratus (13) on täidetud; tähistame vastava väärtuse $\alpha = \alpha^*$.

Võime nüüd hüpoteesi H_1 lugeda tõestatuks olulisuse nivooaga α^* (see aga tähendab, et I liiki vea tõenäosus on väiksem kui α^*). (Vt, joonis 53).

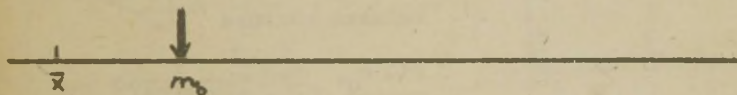
Paneme tähele (vt. joonis 53), et juhul kui \bar{x} on väiksem kui konstant m_0 , ei saa võrratus (13) üldse kehtida, ükskõik milline ka ei oleks s väärtus. Siit järeldame, et juhul

$$\bar{x} < m_0$$

tuleb võtta vastu hüpotees H_0 ilma ülejäänud suurusi arvutamata.



$H_1 : m > m_0$ saab tõestada olulisuse nivooga 0,05, kuid ei saa tõestada olulisuse nivooga 0,01.



$H_1 : m > m_0$ ei saa tõestada.
Tuleb võtta vastu
 $H_0 : m \leq m_0$.

Joonis 53.

Näide 69.

Olgu antud 10 meesüliõpilase pikkused:

1.80; 1.75; 1.83; 1.90; 1.74; 1.87; 1.72; 1.81; 1.89;

1.76.

Kontrollida, kas meesüliõpilaste keskmine pikkus ületab 1,75. Loeme selle väite tõestatuks, kui saame selle vastu võtta olulisuse nivooga 0,05.

Lahendus. Sõnastame hüpoteesid

$$H_1 : m > m_0 = 1,75;$$

$$H_0 : m \leq m_0.$$

Arvutame karakteristikud \bar{x} ja s . Selleks teisendame lähteandmeid, võttes nende väärtused sentimeetrites ning lahutades kõigist suuruse 180

$$y_1 = x_1 - 180.$$

Saame tabeli

1	y_1	y_1^2
1	0	0
2	-5	25
3	3	9
4	10	100
5	-6	36
6	7	49
7	-8	64
8	1	1
9	9	81
10	-4	16
	7	381

Leiame siit $\bar{x} = 180 + \bar{y} = 180,7$.

Et $180,7 > 175$, siis tuleb leida ka s^2 :

$$s^2 = \frac{1}{9}(381 - \frac{72}{10}) = \frac{376,1}{9} = 41,8.$$

Arvutame nüüd võrratuses (13)

esineva suuruse

$$\frac{\bar{x} - m_0}{s} \sqrt{n} = \frac{180,70 - 175}{6,47} \sqrt{10} = 2,78.$$

Leiame t-jaotuse tabelist vabadusastmete arvu $n - 1 = 9$ korral ühepoolse hüpoteesi jaoks suurused

$$t_{0,025;9,\bar{u}} = 2,26; \quad t_{0,01;9,\bar{u}} = 2,82.$$

Et $2,78 > 2,26$, kuid $2,78 < 2,82$, siis saame hüpoteesi H_1 tõestada olulisuse niivooga 0,025, kuid ei saa seda tõestada olulisuse niivooga 0,01. (Tihedamate t-jaotuse tabelite abil näeksime, et tegelikult on meie andmete põhjal hüpotees H_1 tõestatav olulisuse niivooga 0,015.)

Vastavalt ülesande tingimustele võime hüpoteesi H_1 tõestatuks lugeda.

Analoogiliselt ülaltoodud mõttekäigule saaksime leida kriteeriumid ka järgmiste hüpoteeside kontrollimiseks:

$$\begin{aligned}
 \text{b) } H_0 &: m \geq m_0; \\
 H_1 &: m < m_0. \\
 \frac{m_0 - \bar{x}}{s} \sqrt{n} > t_{\alpha; n-1, \bar{u}} &\Rightarrow H_1: m < m_0; \\
 \frac{m_0 - \bar{x}}{s} \sqrt{n} \leq t_{\alpha; n-1, \bar{u}} &\Rightarrow H_0: m \geq m_0.
 \end{aligned}$$

$$\text{Eriti: } m_0 < \bar{x} \Rightarrow H_0.$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } H_0 &: m = m_0; \\
 H_1 &: m \neq m_0. \\
 \frac{|\bar{x} - m_0|}{s} \sqrt{n} > t_{\alpha; n-1, k} &\Rightarrow H_1: m \neq m_0; \\
 -t_{\alpha; n-1, k} \leq \frac{\bar{x} - m_0}{s} \sqrt{n} \leq t_{\alpha; n-1, k} &\Rightarrow H_0: m = m_0.
 \end{aligned}$$

Erijuhul, kui meil normaaljaotuse standardhälve σ on varasematest arvutustest või teoreetilistest kaalutlustest teada, ei ole meil tarvis arvutada statistikut s ; hüpoteeside kontrollimisel tuleb sel juhul t -jaotuse asemel kasutada normaaljaotust. Kriteeriumideks saame

$$\begin{aligned}
 \text{a) } H_0 &: m \leq m_0; \\
 H_1 &: m > m_0. \\
 \frac{\bar{x} - m_0}{\sigma} \sqrt{n} > p_{\alpha} &\Rightarrow H_1: m > m_0; \\
 \frac{\bar{x} - m_0}{\sigma} \sqrt{n} \leq p_{\alpha} &\Rightarrow H_0: m \leq m_0.
 \end{aligned}$$

$$b) H_0 : m \geq m_0;$$

$$H_1 : m < m_0.$$

$$\frac{m_0 - \bar{x}}{\sigma} \sqrt{n} < p_{\alpha} \Rightarrow H_1; m < m_0;$$

$$\frac{m_0 - \bar{x}}{\sigma} \sqrt{n} \geq p_{\alpha} \Rightarrow H_0; m \geq m_0.$$

$$c) H_0 : m = m_0;$$

$$H_1 : m \neq m_0$$

$$\frac{|\bar{x} - m_0|}{\sigma} \sqrt{n} > p_{\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow H_1 : m \neq m_0;$$

$$- p_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{x} - m_0}{\sigma} \sqrt{n} \leq p_{\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow H_0 : m = m_0.$$

Siin $p_{\frac{\alpha}{2}}$ ja $p_{\frac{\alpha}{2}}$ leiame normaaljaotuse tabelist:

$$\Phi(p_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2};$$

$$\Phi(p_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

§ 8. Hüpoteesid normaaljaotuse dispersiooni kohta.

Olgu $X \sim N(m, \sigma^2)$. Kontrollida hüpoteesi

$$H_0 : \sigma \leq \sigma_0 \text{ ehk } \sigma^2 \leq \sigma_0^2$$

$$H_1 : \sigma > \sigma_0 \text{ ehk } \sigma^2 > \sigma_0^2$$

olulisuse nivooaga α . Olgu antud X väärtustest väljavõte x_1, \dots, x_n . Arvutame statistiku

$$(n-1) s^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

Kriteeriumi leidmiseks kasutame §-s 6 esitatud mõttekäiku.

Selleks arvutame parameetri σ^2 jaoks ühepoolse alumise usalduspiiri usaldusnivoo $1 - \alpha$ korral:

$$\underline{\sigma^2} = \frac{s^2(n-1)}{\chi_{\alpha; n-1}^2},$$

kus

$$P(Z_{n-1} > \chi_{\alpha; n-1}^2) = \alpha,$$

kui Z_{n-1} on χ^2 -jaotusega juhuslik suurus vabadusastmete arvuga $n-1$.

Hüpoteesi H_1 saame vastu võtta siis, kui kehtib võrratus

$$\underline{\sigma^2} > \sigma_0^2.$$

Teisendame saadud kriteeriumi, asendades σ^2 lähteandmetega:

$$\frac{s^2(n-1)}{\chi_{\alpha; n-1}^2} > \sigma_0^2$$

ehk

$$\frac{s^2(n-1)}{\sigma_0^2} > \chi_{\alpha; n-1}^2.$$

a)

$$H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2 ;$$

$$H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2 ;$$

$$\frac{s^2(n-1)}{\sigma_0^2} > \chi_{\alpha;n-1}^2 \Rightarrow H_1 \quad (14)$$

$$\frac{s^2(n-1)}{\sigma_0^2} \leq \chi_{\alpha;n-1}^2 \Rightarrow H_0.$$

Samuti kui §-s 7 vaadeldava ülesande puhulgi leiame χ^2 -jaotuse tabelist antud $n-1$ korral maksimaalse arvu $\chi_{\alpha;n-1}^{2*}$, mis veel rahuldab võrratust (14); see vastab minimaalsele α väärtusele $\alpha = \alpha^*$, mille korral võrratus (14) on täidetud, ning me võime siis lugeda hüpoteesi H_1 tõestatuse olulisuse nivooga α^* (s.t., I liiki vea tõenäosus hüpoteesi H_1 vastuvõtmisel on väiksem kui α^*).

Paneme tähele, et juhul kui $s^2 < \sigma_0^2$, tuleb vastu võtta nullhüpotees $H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2$ ilma täiendavate arvutusteta, sest hüpoteesi $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$ oleks sel juhul võimalik vastu võtta vaid olulisuse nivooga $\alpha > 0,5$, nii suur I liiki vea tõenäosus aga ei ole praktilistes ülesannetes lubatav.

Näide 70.

Olgu mingi instrumendi abil saadud seeria mõõtmistulemusi:

0,725; 0,731; 0,717; 0,742; 0,710.

On teada, et instrumendi korrasoleku puhul on $\sigma_0 = 0,005$. Kontrollida hüpoteesi, et mõõtmisviga antud seeria korral on liiga suur, s.t. instrument ei ole korras.

Lahendus. Sõnastame hüpoteesid

$$H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2 ;$$

$$H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2 = 0,005^2.$$

Teisendame vaatlustulemusi, korrutades neid tuhandega ning nihutades 730 võrra, s.t. võtame

$$y_i = 1000x_i - 730.$$

Saame tabeli

i	y_i	y_i^2
1	-5	25
2	1	1
3	-13	169
4	12	144
5	-20	400
	-25	739

$$\text{Et } s_y = 1000 s_x,$$

võime hüpoteesi H_1 esitada ka kujul

$$H_1 : \sigma_y^2 > 1000 \cdot \sigma_0^2 = 1000 \cdot 0,005^2 = 5,$$

seega

$$H_1 : \sigma_y^2 > 5.$$

$$\text{Arvutame } (n-1) s_y^2 = 739 - \frac{(-25)^2}{5} = 614;$$

$$\frac{(n-1) s_y^2}{(1000 \cdot \sigma_0)^2} = \frac{614}{25} = 24,56.$$

χ^2 -tabelist näeme

$$\chi^2_{0,01;4} = 13,3; \quad \chi^2_{0,001;4} = 18,5 < 24,56,$$

seega saame meid huvitava hüpoteesi H_1 tõestada olulisuse nivooga 0,001.

Analoogiliselt ülatoodud mõttekäigule saaksime leida kriteeriumid ka järgmiste hüpoteeside kontrollimiseks:

$$b) H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2$$

$$H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$$

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} < \chi_{1-\alpha; n-1}^2 \Rightarrow H_1 ; \quad (15)$$

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \geq \chi_{1-\alpha; n-1}^2 \Rightarrow H_0.$$

Siin tuleb χ^2 -tabelist vabadusastmete arvu $n-1$ korral leida väikseim selline väärtus $\chi_{1-\alpha; n-1}^{2*}$, mille korral võrratus (15) on veel täidetud; see tähendab, et (vt. § 4.4)

$$P(Z_{n-1} > \chi_{1-\alpha; n-1}^{2*}) = 1 - \alpha^*$$

ning

$$P(Z_{n-1} < \chi_{1-\alpha; n-1}^{2*}) = \alpha^*.$$

Minimaalsele $\chi_{1-\alpha; n-1}^{2*}$ väärtusele vastab ka minimaalne α väärtus, mis annab väikseima olulisuse nivoo (I liiki vea tõenäosuse). Juhul

$$s^2 < \sigma_0^2$$

tuleb $H_0 : \sigma^2 < \sigma_0^2$ võtta vastu ilma täiendavate arvutusteta (iga olulisuse nivoo $\alpha < 0,5$ korral).

$$c) H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 ;$$

$$H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2 .$$

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} < \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2 \quad (16)$$

$$\text{või} \quad \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} > \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2 \Rightarrow H_1, \quad (17)$$

$$\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \leq \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2 \Rightarrow H_0 .$$

Siin juhul, kui $s^2 < \sigma_0^2$, tuleb kontrollida, kas on täidetud võrratus (16), ning valida minimaalne selline $\frac{\alpha}{2}$ väärtus, mille korral see võrratus veel täidetud on; kui aga $s^2 > \sigma_0^2$, siis tuleb kontrollida võrratuse (17) täidetust; jälle tuleb valida väikseim $\frac{\alpha}{2}$ väärtus, mille korral (17) on täidetud. Juhul kui mingi $\alpha = \alpha^*$ korral on üks võrratustest (16) või (17) täidetud, siis ütleme, et hüpotees H_1 on tõestatud olulisuse nivooga $\alpha = \alpha^*$.

Näide 71. Olgu antud väljavõte

3,2; 3,1; 3,8; 3,7; 3,7; 3,6; 3,5; 3,3; 3,4.

Kontrollida hüpoteesi

$$H_0 : \sigma = 0,2,$$

$$H_1 : \sigma \neq 0,2$$

olulisuse nivooga 0,05.

Leiame vajalikud statistikud, tehes selleks teisenduse

$$y_1 = 10x_1 - 35.$$

i	y_1	y_1^2
1	-3	9
2	-4	16
3	3	9
4	2	4
5	2	4
6	1	1
7	0	0
8	-2	4
9	-1	1
	-2	48

$$(n-1)s^2 = 48 - \frac{4}{9} = 47,56;$$

Arvestades teisendust, saame

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 = 4;$$

$$\frac{(n-1)s^2}{4} = \frac{47,56}{4} = 11,89.$$

Kuna $s^2 = 47,56 : 8 > 4$, siis

tuleb χ^2 -jaotuse tabelist

vabadusastmete arvu $9 - 1 = 8$ puhul leida niisugune väärtus, millest 11,89 on parasjagu suurem. Näeme, et

$$\chi_{8; 0,2}^2 = 11,4; \quad \chi_{8; 0,1}^2 = 13,4,$$

seega $11,89 > 11,4$ ning $\frac{\alpha}{2} = 0,2$, $\alpha = 0,4$. Et olulisuse nivoo $0,4 > 0,05$, siis ei saa me hüpoteesi H_1 tõestatuks lugeda ning peame vastu võtma hüpoteesi H_0 .

§ 9. Kahe normaaljaotuse dispersioonide võrdlemine.

Üks sagedasemaid matemaatilise statistika ülesandeid taandub kahe normaaljaotuse võrdlemisele. Enamasti nõutakse küll normaaljaotuste keskväärtuste võrdlemist, kuid sageli on enne keskväärtuste võrdlemisele asumist otstarbekas võrrelda nende jaotuste dispersioone. Käesolevas paragrahvis vaatlemegi selle ülesande lahendamist.

Olgu $X_1 \sim N(m_1, \sigma_1^2)$, $X_2 \sim N(m_2, \sigma_2^2)$. Kontrollida

$$H_0 : \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2 ;$$

$$H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$$

olulisuse nivooaga α . On antud väljavõtted

$$X_1 \text{ väärtustest } x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n_1} ;$$

$$X_2 \text{ väärtustest } x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n_2} .$$

Esitatud ülesanne erineb varem vaadelduist selle poolest, et siin võrreldakse omavahel kaht tundmatut parameetrit, meil on aga olemas meetodika parameetri võrdlemiseks konstandiga. Et ülesannet sellisele kujule viia, asendame hüpoteesid H_0 ja H_1 nendega samaväärsetega (üldisust kitsendamata võime eeldada, et $\sigma_2^2 \neq 0$).

$$H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq 1 ; \tag{18}$$

$$H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1 .$$

Seejärel tuleb meil leida suhte $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ alumine ühepoolne usalduspiir vastavalt usaldusnivoole $1 - \alpha$, mille tähistame sümboliga $\underline{\alpha}$:

$$P\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \geq \underline{\alpha}\right) = 1 - \alpha.$$

Statistikuks suhte $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ määramisel on suhe $\frac{s_1^2}{s_2^2}$, kus

$$s_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} (x_{1i} - \bar{x}_1)^2, \quad s_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{i=1}^{n_2} (x_{2i} - \bar{x}_2)^2.$$

Selle suhte jaotus avaldub F-jaotuse (vt. §4.4) kaudu, nimelt

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \sim F_{n_1-1, n_2-1}.$$

Kasutades F-jaotuse tabeleid, saame vastavalt vabadusastmete arvudele $n_1 - 1$, $n_2 - 1$ ja antud arvule α leida väärtuse

$F_{\alpha; n_1-1, n_2-1}$ nii, et

$$P\left(\frac{s_1^2}{s_2^2} : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > F_{\alpha; n_1-1, n_2-1}\right) = \alpha,$$

ehk

$$P\left(\frac{s_1^2}{s_2^2} : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq F_{\alpha; n_1-1, n_2-1}\right) = 1 - \alpha.$$

Teisendades saadud avaldist, leiame:

$$P\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \geq \frac{s_1^2}{s_2^2} : F_{\alpha; n_1-1, n_2-1}\right) = 1 - \alpha,$$

seega $\underline{\alpha} = \frac{s_1^2}{s_2^2} : F_{\alpha; n_1-1, n_2-1}$.

Kriteeriumi hüpoteesi (18) kontrollimiseks saame § 6 põhjal avaldada $\underline{\alpha}$ kaudu:

$$\underline{\alpha} > 1 \Rightarrow H_1;$$

asendades $\frac{s_1^2}{s_2^2}$ tema väärtusega, saame kriteeriumile anda kuju

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} : F_{\alpha; n_1-1, n_2-1} > 1 \Rightarrow H_1$$

ehk

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} > F_{\alpha; n_1-1, n_2-1} \Rightarrow H_1 .$$

Kokkuvõtteks saame kriteeriumi

$$a) H_0 : \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2 ;$$

$$H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2 .$$

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} > F_{\alpha; n_1-1, n_2-1} \Rightarrow H_1; \quad (19)$$

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} \leq F_{\alpha; n_1-1, n_2-1} \Rightarrow H_0 .$$

Siinjuures tuleb valida F-jaotuse tabelitest (antud n_1-1 , n_2-1 korral) maksimaalne selline väärtus $F_{\alpha^*; n_1-1, n_2-1}$, mis rahuldab võrratust (19); sellele vastav α^* ongi olulisuse nivoo, millega me saame H_1 tõestada. Märkime, et juhul kui $s_1^2 < s_2^2$, tuleb hüpotees H_0 vastu võtta täiendavate arvutusteta.

Analoogiliselt saame ka järgmised kriteeriumid:

$$b) H_0 : \sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 ;$$

$$H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2 .$$

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} > F_{\alpha; n_2-1, n_1-1} \Rightarrow H_1 ;$$

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} \leq F_{\alpha; n_2-1, n_1-1} \Rightarrow H_0$$

ja

$$c) H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 ;$$

$$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 .$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{s_1^2}{s_2^2} > F_{\frac{\alpha}{2}; n_1-1, n_2-1} \\ \frac{s_1^2}{s_2^2} > F_{\frac{\alpha}{2}; n_2-1, n_1-1} \end{array} \right\} \Rightarrow H_1 ;$$

või

$$\frac{1}{F_{\alpha; n_2-1, n_1-1}} \leq \frac{s_1^2}{s_2^2} \leq F_{\alpha; n_1-1, n_2-1} \Rightarrow H_0 .$$

Näide 72.

Olgu 2 kartulisordi mugulate kaalud grammides:

X_1 : 150; 140; 135; 155; 160; 145; 150; 155; 170; 120; 160; 125;

X_2 : 200; 105; 115; 165; 130; 215; 185; 135; 155; 170; 220; 110.

Leida, kas kartulisordid erinevad oluliselt mugulate kaalude hajuvuse poolest (erinevust lugeda oluliseks, kui selle saab tõestada olulisuse nivooga 0,05).

Sõnastame hüpoteesid

$$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 ;$$

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 .$$

Arvutame dispersioonid. Et dispersioonid ei muutu nihke tagajärjel ja dispersioonide suhe ei muutu, kui korrutame mõlemaid uuritavaid juhuslikke suurusi sama konstandiga, võime võtta kasutusele uued juhuslikud suurused:

$$y_{1i} = \frac{x_{1i} - 150}{10} , \quad y_{2i} = \frac{x_{2i} - 150}{10} ;$$

i	y_{1i}	y_{1i}^2	y_{2i}	y_{2i}^2
1	0	0	5	25
2	-1	1	-4,5	20,25
3	-1,5	2,25	-3,5	12,25
4	0,5	0,25	1,5	2,25
5	1	1	-2	4
6	-0,5	0,25	6,5	42,25
7	0	0	3,5	12,25
8	0,5	0,25	-1,5	2,25
9	2	4	0,5	0,25
10	-3	9	2	4
11	1	1	7	49
12	-2,5	6,25	-4	16
	-3,5	25,25	10,5	189,75

$$s_1^2 = \frac{1}{11} (25,25 - \frac{3,5^2}{12}) = \frac{24,23}{11} ;$$

$$s_2^2 = \frac{1}{11} (189,75 - \frac{10,5^2}{12}) = \frac{189,75 - 9,18}{11} = \frac{180,56}{11}$$

Et ilmselt $s_1^2 < s_2^2$, tuleks kontrollida seost

$$\frac{s_2^2}{s_1^2} > F_{\frac{\alpha}{2}} ; n_2-1, n_1-1 .$$

Arvutame jagatise (kasutame siin asjaolu, et $n_1 = n_2$)

$$\frac{s_2^2}{s_1^2} = \frac{180,56}{24,23} = 7,45 .$$

F-jaotuse tabelist leiame

$$F_{0,01;11,11} = 4,46 ,$$

seega saame hüpoteesi $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ võtta vastu olulisuse nivooaga $2 \cdot 0,01 = 0,02$. Kasutades täpsemaid F-jaotuse tabe-

leid saaksime, et ka $F < 7,44$, seega on meil
 $0,005; 11; 11$
 hüpotees H_1 tõestatud olulisuse nivooaga $0,01$.

§ 10. Kahe normaaljaotuse kesk-
 väärtuste võrdlemine.

Olgu $X_1 \sim N(m_1, \sigma_1^2)$, $X_2 \sim N(m_2, \sigma_2^2)$. Nõutagu võrrelda
 juhuslike suuruste X_1 ja X_2 keskväärtusi, s.t. kontrollida
 hüpoteese

a) $H_0 : m_1 \leq m_2 ;$

$H_1 : m_1 > m_2 ;$

b) $H_0 : m_1 \geq m_2 ;$

$H_1 : m_1 < m_2 ;$

c) $H_0 : m_1 = m_2 ;$

$H_1 : m_1 \neq m_2 .$

Samuti kui eelnevalgi juhul saame vaadeldavad ülesanded
 taandada parameetri konstandiga võrdlemise ülesannetele;
 selleks võtame vaatlusele parameetrite vahe $m_1 - m_2$, mis on
 juhusliku suuruse $Y = X_1 - X_2$ keskväärtuseks.

Lahendusmeetodite valikul on aga sobiv eraldi vaadelda
 järgmisi juhte:

1° $n_1 = n_2 ;$

2° σ_1^2 ja σ_2^2 on teada;

3° $\sigma_1^2 \approx \sigma_2^2 ;$

4° üldjuht, kus $n_1 \neq n_2$ ja $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 .$

1. Võrdsete väljavõtted.

Vaatleme kõigepealt võrdsete väljavõtete juhtu $n_1 = n_2$.
Olgu vaatlusmaterjal esitatud juhuslikus järjestuses (näiteks andmete kogumise järjestus), mitte variatsiooniritta järjestatuna.

Kontrollida hüpoteesi

$$H_0 : m_1 \leq m_2 ;$$

$$H_1 : m_1 > m_2 \quad (20)$$

olulisuse nivooga α . Olgu antud väljavõtted

$$X_1 \text{ väärtustest: } x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n} ;$$

$$X_2 \quad \text{---} \quad : x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}.$$

Arvutame vahed $d_i = x_{1i} - x_{2i}$, $i = 1, 2, \dots, n$. (Paneme tähele, et järjekorras esimesest X_1 väärtusest tuleb lahutada järjekorras esimene X_2 väärtus jne.). Neid vahesid võime vaadelda väljavõttena juhuslikust suurusest $Y = X_1 - X_2$, kusjuures Y on samuti normaaljaotusega, $m = EY = EX_1 - EX_2 = m_1 - m_2$.

Hüpoteesi (20) võime asendada temaga samaväärsega:

$$H_0 : m \leq 0 ;$$

$$H_1 : m > 0 ,$$

mida saame kontrollida §-s 7 esitatud meetodil. Selleks tuleb meil leida juhusliku suuruse Y jaoks statistikud

$$\bar{d} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i, \quad (\bar{d} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2),$$

$$s_d^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (d_i - \bar{d})^2.$$

Kokkuvõtteks saame kriteeriumi

a)

$$H_0 : m_1 \leq m_2 ;$$

$$H_1 : m_1 > m_2 .$$

$$\frac{\bar{d}}{s_d} \sqrt{n} > t_{\alpha; n-1, \bar{u}} \Rightarrow H_1 ;$$

$$\frac{\bar{d}}{s_d} \sqrt{n} \leq t_{\alpha; n-1, \bar{u}} \Rightarrow H_0 .$$

Erijuhul $\bar{d} \leq 0 \Rightarrow H_0$ ilma s_d arvutamata.

Analoogiliselt saame leida kriteeriumid ka hüpoteeside b) ja

c) kontrollimiseks

b)

$$H_0 : m_1 > m_2 ;$$

$$H_1 : m_1 < m_2 .$$

$$\frac{\bar{d}}{s_d} \sqrt{n} < -t_{\alpha; n-1, \bar{u}} \Rightarrow H_1 ;$$

$$\frac{\bar{d}}{s_d} \sqrt{n} \geq -t_{\alpha; n-1, \bar{u}} \Rightarrow H_0 .$$

(siin \bar{d} peab olema negatiivne; $\bar{d} > 0 \Rightarrow H_0$
ilma s_d arvutamata).

c)

$$H_0 : m_1 = m_2 ;$$

$$H_1 : m_1 \neq m_2 .$$

$$\frac{|\bar{d}|}{s_d} \sqrt{n} > t_{\alpha; n-1, k} \Rightarrow H_1 ;$$

$$-t_{\alpha; n-1, k} \leq \frac{|\bar{d}|}{s_d} \sqrt{n} \leq t_{\alpha; n-1, k} \Rightarrow H_0 .$$

2. Teadaolevad dispersioonid.

Vaatleme juhtu, mil võime σ_1 ja σ_2 lugeda teadaolevaiks. Niisuguse eelduse võime teha siis, kui

A) σ_1 ja σ_2 on teada varasema uurimistöö põhjal piisava täpsusega;

B) vaatluste arvud n_1 ja n_2 on niivõrd suured, et s_1^2 ja s_2^2 kirjeldavad dispersioone σ_1^2 ja σ_2^2 küllaldase täpsusega.

Näide 73.

Arvutada σ_1^2 ja σ_2^2 täpsusega 0,1, s.t. lubatud arvutusviga ei tohi tõenäosusega 0,95 ületada suurust 0,05.

$$\text{Arvutame } D(s^2) = \frac{2\sigma^4}{n}, \quad \sqrt{D(s^2)} = \sigma^2 \sqrt{\frac{2}{n}} \approx s^2 \sqrt{\frac{2}{n}}.$$

Oletades, et arvutusviga $s^2 - \sigma^2$ on ligikaudselt normaaljaotusega, (keskväärtus on null, sest s^2 on nihutamata hinnang σ^2 jaoks), võime ligikaudu lugeda

$$P(|s^2 - \sigma^2| > 2\sqrt{D(s^2)}) \approx 0,05.$$

Esitades nõude $2\sqrt{D(s^2)} < 0,05$, saame väljavõtte mahu n jaoks võrratuse

$$s^2 \sqrt{\frac{2}{n}} < 0,025,$$

$$n > 3200 \cdot s^4.$$

Seega näeme, et tingimus B) on väga range ning täidetud üksnes väga suurte väljavõtete korral (näiteks rahvaloenduste andmed, kus n ulatub miljonitesse).

a) Kontrollida hüpoteesi

$$H_0 : m_1 \leq m_2,$$

$$H_1 : m_1 > m_2$$

(20')

olulisuse nivooga α . Olgu antud väljavõtted

$$x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n_1};$$

$$x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n_2}.$$

Leiame statistikud

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} x_{1i}, \quad \bar{x}_2 = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} x_{2i};$$

$$\sigma_1^2 \approx s_1^2 = \frac{1}{n_1-1} \sum_{i=1}^{n_1} (x_{1i} - \bar{x}_1)^2, \quad \sigma_2^2 \approx s_2^2 = \frac{1}{n_2-1} \sum_{i=1}^{n_2} (x_{2i} - \bar{x}_2)^2.$$

Hüpoteesi (20') esitame nagu ka punktis 1 kujul

$$H_0: m_1 - m_2 \leq 0;$$

$$H_1: m_1 - m_2 > 0.$$

Vahe $m_1 - m_2$ usalduspiiride arvutamiseks leiame statistiku

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \text{ jaotuse; et } \bar{x}_1 \sim N(m_1, \frac{\sigma_1^2}{\sqrt{n_1}}), \quad \bar{x}_2 \sim N(m_2, \frac{\sigma_2^2}{\sqrt{n_2}})$$

ning väljavõtted on sõltumatud, siis

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \sim N(m_1 - m_2, \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}).$$

Ühepoolne alumine usalduspiir \underline{u} vabele $m_1 - m_2$ (vastavalt usaldusnivoole $1 - \alpha$) on määratud seosega

$$P(m_1 - m_2 \geq \underline{u}) = 1 - \alpha.$$

Kasutades normaaljaotuse tabelleid, saame seose

$$P\left(\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - (m_1 - m_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\right) < p_\alpha = 1 - \alpha, \quad (21)$$

kus p_α rahuldab võrdust

$$\Phi(p_\alpha) = 1 - \alpha.$$

Seost (21) teisendades leiame

$$P\left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - (m_1 - m_2) < p_\alpha \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right) = 1 - \alpha,$$

ehk

$$P\left(m_1 - m_2 > \bar{x}_1 - \bar{x}_2 - p_\alpha \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right) = 1 - \alpha.$$

seega alumiseks ühepoolseks usalduspiiriks \underline{u} saame

$$\underline{u} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 - p_\alpha \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}.$$

Kriteeriumi saame § 6 põhjal, arvestades, et konstant, mille-ga parameetrite vahet $m_1 - m_2$ võrreldakse, on 0:

$$\underline{u} > 0 \Rightarrow H_1$$

ehk

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - p_\alpha \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} > 0 \Rightarrow H_1.$$

Siit saame kokkuvõtteks järgmise kriteeriumi:

<p>a) $H_0 : m_1 \leq m_2$. $H_1 : m_1 > m_2$</p> $\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} > p_\alpha \Rightarrow H_1 ;$ $\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \leq p_\alpha \Rightarrow H_0 .$

Analoogiliselt saame kriteeriumid ka hüpoteeside b) ja c) kontrollimiseks:

$$b) H_0 : m_1 \geq m_2 ,$$

$$H_1 : m_1 < m_2 .$$

$$\frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} > p_{\alpha} \Rightarrow H_1 ;$$

$$\frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \leq p_{\alpha} \Rightarrow H_0 .$$

$$c) H_0 : m_1 = m_2 ,$$

$$H_1 : m_1 \neq m_2 .$$

$$\frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} > p_{\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow H_1 ,$$

$$-p_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \leq p_{\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow H_0 .$$

3. Võrdsed dispersioonid.

Vaatleme juhtu, kus σ_1^2 ja σ_2^2 on küllalt lähedase suurusega, nii et meil on õigus lugeda neid ligikaudu võrdsseteks:

$$\sigma_1^2 \approx \sigma_2^2 \approx \sigma^2 . \quad (22)$$

Seose (22) õigsust saame kontrollida §-s 9 esitatud meetodil. Siinjuures tuleb märkida, et dispersioonide võrdsuse kontrollimisel ei ole õige kasutada väga väikest olulisuse nivood

(0,001 või 0,01), kuna see muudab II liiki vea tõenäosuse suureks ja tekib hädaoht, et me loeme võrdseteks liiga tugevasti teineteisest erinevad dispersioonid.

a) Kontrollida hüpoteesi

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu_1 \leq \mu_2, \\ H_1 &: \mu_1 > \mu_2 \end{aligned} \quad (20'')$$

olulisuse nivooga α . Olgu antud väljavõtted

$$\begin{aligned} x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n_1}; \\ x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n_2}. \end{aligned}$$

Leiame statistikud

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} x_{1i}, \quad \bar{x}_2 = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} x_{2i}; \\ s_1^2 &= \frac{1}{n_1-1} \sum_{i=1}^{n_1} (x_{1i} - \bar{x}_1)^2, \quad s_2^2 = \frac{1}{n_2-1} \sum_{i=1}^{n_2} (x_{2i} - \bar{x}_2)^2. \end{aligned}$$

Kuna vaseldaval juhul leiab aset võrdus (22), siis on niisasti s_1^2 kui ka s_2^2 hinnanguks juhuslike suuruste ühisele dispersioonile σ^2 . Dispersiooni hinnanguks, mis arvestab kõiki vaatlustulemusi, on hinnangute s_1^2 ja s_2^2 kaalutud keskmine

$$s^2 = g_1 s_1^2 + g_2 s_2^2,$$

kus kaalud g_1 ja g_2 valime võrdelistena vabadusastmete arvudega: mida suurema vaatluste arvu põhjal on hinnang saadud, seda usaldusväärsem ta on. Võttes

$$g_1 = \frac{n_1 - 1}{n_1 + n_2 - 2}, \quad g_2 = \frac{n_2 - 1}{n_1 + n_2 - 2},$$

näeme, et g_1 ja g_2 rahuldavad kaaludele esitatavaid tingimusi

$$\varepsilon_1 \geq 0, \quad \varepsilon_2 \geq 0, \quad \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 1.$$

Jaame seega

$$s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{1}{n_1 + n_2 - 2} \sum_{i=1}^{n_1} (x_{1i} - \bar{x}_1)^2 + \sum_{i=1}^{n_2} (x_{2i} - \bar{x}_2)^2.$$

Leitud hinnangu jaotust on lihtne leida: kuna

$$\frac{s_1^2 (n_1 - 1)}{\sigma^2} \sim \chi_{n_1 - 1}^2, \quad \frac{s_2^2 (n_2 - 1)}{\sigma^2} \sim \chi_{n_2 - 1}^2,$$

siis

$$\frac{s^2 (n_1 + n_2 - 2)}{\sigma^2} = \frac{s_1^2 (n_1 - 1)}{\sigma^2} + \frac{s_2^2 (n_2 - 1)}{\sigma^2} \sim \chi_{n_1 + n_2 - 2}^2,$$

sest väljavõtted on sõltumatud (kasutasime siin χ^2 -jaotuse aditiivsust, vt. § 4.4).

Hüpoteesi (20") esitame nagu punktides 1 ja 2 kujul

$$H_0 : m_1 - m_2 \leq 0;$$

$$H_1 : m_1 - m_2 > 0.$$

Vahe $m_1 - m_2$ usalduspiiride arvutamiseks on meil tarvis kasutada statistiku

$$\begin{aligned} \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (m_1 - m_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} &= \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (m_1 - m_2)}{\sigma \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}} = \\ &= \frac{(x_1 - x_2) - (m_1 - m_2)}{\sigma} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} \end{aligned}$$

asemel statistikut

$$\frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (m_1 - m_2)}{s} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}},$$

mis on t-jaotusega vabadusastmete arvuga $n_1 + n_2 - 2$.

Kasutades t-jaotuse tabelit, saame

$$P\left(\frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (m_1 - m_2)}{s} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} > t_{\alpha; n_1+n_2-2; \bar{u}}\right) = \alpha,$$

ehk

$$P(m_1 - m_2 \geq \bar{x}_1 - \bar{x}_2 - t_{\alpha; n_1+n_2-2; \bar{u}} s \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}) = 1 - \alpha,$$

seega ühepoolseks alumiseks usalduspiiriks \underline{u} on

$$\underline{u} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 - s \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}} t_{\alpha; n_1 + n_2 - 2; \bar{u}}.$$

Kriteeriumiks saame

a)

$$H_0 : m_1 \leq m_2,$$

$$H_1 : m_1 > m_2.$$

$$\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} > t_{\alpha; n_1+n_2-2, \bar{u}} \Rightarrow H_1;$$

$$\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} \leq t_{\alpha; n_1+n_2-2, \bar{u}} \Rightarrow H_0.$$

Sarnaselt saame leida kriteeriumid ka hüpoteeside b)

$$H_1 : m_1 < m_2$$

ja c)

$$H_1 : m_1 \neq m_2$$

kontrollimiseks:

$$b) H_0 : m_1 \geq m_2 ;$$

$$H_1 : m_1 < m_2 .$$

$$\frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}{s} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} > t_{\alpha; n_1 + n_2 - 2; u} \Rightarrow H_1$$

$$\frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}{s} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} \leq t_{\alpha; n_1 + n_2 - 2; u} \Rightarrow H_0 .$$

c)

$$H_0 : m_1 = m_2 ;$$

$$H_1 : m_1 \neq m_2 .$$

$$\frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{s} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} > t_{\alpha; n_1 + n_2 - 2; k} \Rightarrow H_1 ,$$

$$-t_{\alpha; n_1 + n_2 - 2; k} \leq \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} \leq t_{\alpha; n_1 + n_2 - 2; k} \Rightarrow H_0 .$$

4. Võrdlemine usalduspiiride abil (üldiselt rakendatav).

Vaatleme nüüd üldkujulist normaaljaotuste keskväärtuste võrdlemise ülesannet, kus ükski lihtsustavatest eeldustest $1^0 - 3^0$ ei ole täidetud.

a) Kontrollida hüpoteesi

$$H_0 : m_1 \leq m_2 ;$$

$$H_1 : m_1 > m_2$$

olulisuse nivooga α . Olgu antud väljavõtted

$$x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n_1} ;$$

$$x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n_2} ,$$

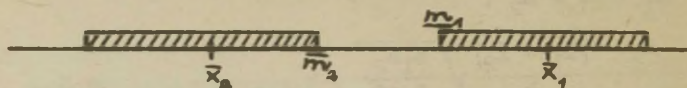
mille põhjal arvutame statistikud

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} x_{1i} ; \quad \bar{x}_2 = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} x_{2i}$$

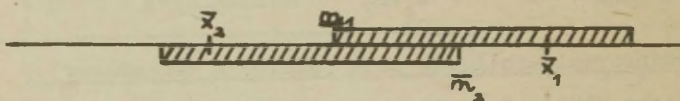
ja

$$s_1^2 = \frac{1}{n_1-1} \sum_{i=1}^{n_1} (x_{1i} - \bar{x}_1)^2, \quad s_2^2 = \frac{1}{n_2-1} \sum_{i=1}^{n_2} (x_{2i} - \bar{x}_2)^2.$$

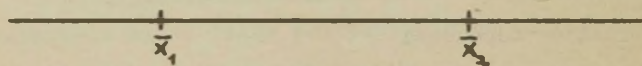
Moodustame m_2 jaoks kahepoolse ülemise usalduspiiri \bar{m}_2 (vastavalt usaldusnivoole $1 - \alpha$) ja m_1 jaoks kahepoolse alumise usalduspiiri \underline{m}_1 (vastavalt usaldusnivoole $1 - \alpha$). Kriteeriumi saame järgmisel kujul (vt. joon.54):



$H_1 : m_1 > m_2$ (usalduspiirkonnad ei lõiku);



$H_0 : m_1 < m_2$ (usalduspiirkonnad lõikuvad);



$H_0 : m_1 \leq m_2$ (usalduspiire ei ole tarvis arvutada).
arvutada.

Joonis 54.

$\bar{m}_2 < \underline{m}_1 \Rightarrow H_1$ (usalduspiirkonnad ei lõiku);

$\bar{m}_2 > \underline{m}_1 \Rightarrow H_0$ (usalduspiirkonnad lõikuvad).

*
Tõestame, et saadud kriteerium on tõepoolest olulisuse nivoo-
ga α .

Selleks vaatleme olukorda, kus kehtib võrratus $\bar{m}_2 < \underline{m}_1$,

nii et me kriteeriumi kohaselt võtame vastu hüpoteesi H_1 ning leiame, kui tõenäone niisugusel juhul on sündmus

$$m_1 \leq m_2. \quad (23)$$

Selleks vaatleme kaht olukorda (vt. joonis 55)

a) $m_2 \leq \bar{m}_2$;

b) $m_2 > \bar{m}_2$.

Usalduspiiri \bar{m}_2 definitsioonist järeldub, et

$$P(m_2 > \bar{m}_2) < \frac{\alpha}{2} .$$

Veelgi väiksem on aga tõenäosus selleks, et samaaegselt kehtiks ka võrratus $m_1 \leq m_2$.

Olgu $m_2 \leq \bar{m}_2$; selleks, et kehtiks võrratus (23), peab vastavalt kriteeriumi konstruktsioonile kehtima ahelvõrratus

$$m_1 \leq m_2 \leq \bar{m}_2 < \underline{m}_1 .$$

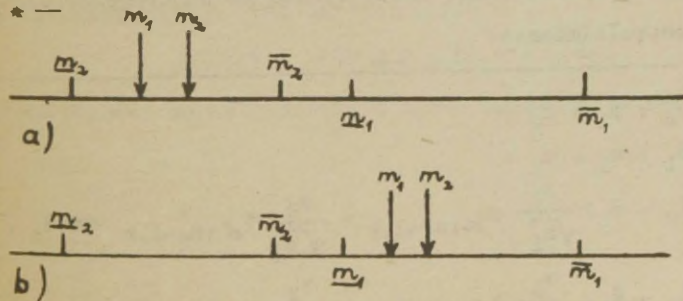
Sellise võrratuse kehtimise tõenäosuseks saame

$$P(m_1 \leq m_2 \leq \bar{m}_2 < \underline{m}_1) \leq P(m_1 < \underline{m}_1) < \frac{\alpha}{2} .$$

Järelikult saime

$$P(m_1 \leq m_2) = P(m_1 \leq m_2 / m_2 \leq \bar{m}_2) + P(m_1 \leq m_2 / m_2 > \bar{m}_2) \leq \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha .$$

ning toodud kriteeriumi olulisuse nivoo on tõepoolest α .



Joonis 55.

Arvestades usalduspiiride \underline{m}_1 ja \bar{m}_2 avaldisi, saame kriteeriumi

$$\bar{x}_2 + s_2 \frac{1}{\sqrt{n_2}} t_{\alpha; n_2-1; k} < \bar{x}_1 - s_1 \frac{1}{\sqrt{n_1}} t_{\alpha; n_1-1; k} \Rightarrow H_1$$

ehk

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 > \frac{s_2}{\sqrt{n_2}} t_{\alpha; n_2-1; k} + \frac{s_1}{\sqrt{n_1}} t_{\alpha; n_1-1; k} \Rightarrow H_1. \quad (24)$$

Kahjuks ei ole käesoleval juhul võimalik kriteeriumi esitada niisugusel kujul, et arvutatud statistikut saaks vahetult võrrelda tabeli andmetega. Sellegipoolest on võimalik leida α minimaalne väärtus, mille korral võrratus (24) on täidetud; see α väärtus annabki kriteeriumi olulisuse nivoo.

Kokkuvõtteks saame:

a)

$$H_0 : m_1 \leq m_2,$$

$$H_1 : m_1 > m_2.$$

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 > \frac{s_1}{\sqrt{n_1}} t_{\alpha; n_1-1; k} + \frac{s_2}{\sqrt{n_2}} t_{\alpha; n_2-1; k} \Rightarrow H_1,$$

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \leq \frac{s_1}{\sqrt{n_1}} t_{\alpha; n_1-1; k} + \frac{s_2}{\sqrt{n_2}} t_{\alpha; n_2-1; k} \Rightarrow H_0.$$

Analoogiliselt saame kriteeriumid ka hüpoteeside b)

ja c) kontrollimiseks:

b)

$$H_0 : m_1 \geq m_2,$$

$$H_1 : m_1 < m_2.$$

$$\bar{x}_2 - \bar{x}_1 > \frac{s_1}{\sqrt{n_1}} t_{\alpha; n_1-1; k} + \frac{s_2}{\sqrt{n_2}} t_{\alpha; n_2-1; k} \Rightarrow H_1,$$

$$\bar{x}_2 - \bar{x}_1 \leq \frac{s_1}{\sqrt{n_1}} t_{\alpha; n_1-1; k} + \frac{s_2}{\sqrt{n_2}} t_{\alpha; n_2-1; k} \Rightarrow H_0.$$

$$c) H_0 : m_1 = m_2 ,$$

$$H_1 : m_1 \neq m_2 .$$

$$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| > \frac{s_1}{\sqrt{n_1}} t_{\alpha; n_1-1, k} + \frac{s_2}{\sqrt{n_2}} t_{\alpha; n_2-1, k} \Rightarrow H_1 ,$$

$$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \leq \frac{s_1}{\sqrt{n_1}} t_{\alpha; n_1-1, k} + \frac{s_2}{\sqrt{n_2}} t_{\alpha; n_2-1, k} \Rightarrow H_0 .$$

§ 11. Hüpoteesid binomiaal- ja Poissoni jaotuse kohta.

1. Hüpoteeside kontrollimine usalduspiiride tabelite abil.

Kõige lihtsam on binomiaal- ja Poissoni jaotuse parameetrite kohta käivaid hüpoteese kontrollida nende parameetrite usalduspiiride tabelite abil.

Kontrollida hüpoteesi

$$c) H_0 : p = p_0 ,$$

$$H_1 : p \neq p_0$$

olulisuse nivooga α .

Antud on n (katsete üldarv) ja k (meid huvitava tulemuse esinemiste arv). Vastavalt n , k ja α väärtustele leiame tabelist kahepoolsed usalduspiirid

$$\underline{p} \text{ ja } \bar{p} , \quad P(\underline{p} \leq p \leq \bar{p}) = 1 - \alpha .$$

Kriteeriumiks saame (vastavalt §-s 6 esitatud meetodile)

c)

$$H_0 : p = p_0 ,$$

$$H_1 : p \neq p_0 .$$

$$p_0 < \underline{p} \quad \text{või} \quad p_0 > \bar{p} \Rightarrow H_1 ,$$

$$\underline{p} \leq p_0 \leq \bar{p} \Rightarrow H_0 .$$

Ühepoolsete hüpoteeside

a) $H_0 : p \leq p_0 ,$

$$H_1 : p > p_0$$

ja

b) $H_0 : p \geq p_0 ,$

$$H_1 : p < p_0$$

kontrollimiseks olulisuse nivooga α oleks tarvis kasutada ühepoolseid usalduspiire \underline{p} ja \bar{p} vastavalt usaldusnivoole $1 - \alpha$. Niisuguseid tabelleid aga tavaliselt ei esitata.

Kasutame siin asjaolu, et

$$P_\alpha = \underline{p}_{\frac{\alpha}{2}} , \quad \bar{p}_\alpha = \bar{p}_{\frac{\alpha}{2}} ,$$

s.t. alumine kahepoolne usalduspiir (nivoo α korral) annab alumise ühepoolse usalduspiiri (nivoo $\frac{\alpha}{2}$ korral) ning ülemine kahepoolne usalduspiir (nivoo α korral) annab ülemise ühepoolse usalduspiiri (nivoo $\frac{\alpha}{2}$ korral). Seega saaksime usalduspiiride tabelite abil ühepoolseid hüpoteese kontrollida olulisuse nivooga $\frac{\alpha}{2}$. Kokkuvõtteks:

a) $H_0 : p \leq p_0 ,$

$$H_1 : p > p_0 .$$

$$\underline{p} > p_0 \Rightarrow H_1 \left(\frac{\alpha}{2} \right) ,$$

$$\underline{p} \leq p_0 \Rightarrow H_0 .$$

b)

$$H_0 : p \geq p_0 ,$$

$$H_1 : p < p_0 .$$

$$\bar{p} < p_0 \Rightarrow H_1 \left(\frac{\alpha}{2} \right) ,$$

$$\bar{p} \geq p_0 \Rightarrow H_0 .$$

2. Tabelid binomiaaljaotuse tõenäosuse kohta käivate hüpoteeside kontrollimiseks.

On koostatud ka tabelleid vahetult binomiaaljaotuse tõenäosuse p kohta käivate hüpoteeside kontrollimiseks. Selliste tabelite puhul antakse vastavalt igale n ja p_0 väärtusele hüpoteesi

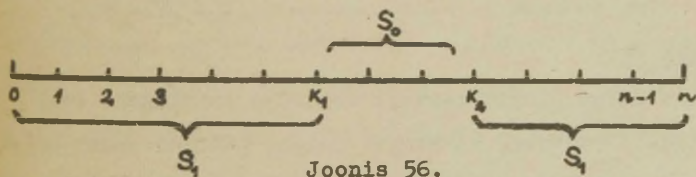
$$H_0 : p = p_0 ,$$

$$H_1 : p \neq p_0$$

kummutamise piirkond S_1 (tavaliselt kahe olulisuse nivoo $\alpha = 0,01$ ja $\alpha = 0,05$ jaoks). Et piirkond S_1 on kujuga

$$[0, k_1] \cup [k_2, n] ,$$

siis tavaliselt tabelites antakse vaid k_1 ja k_2 väärtused vastavalt α , n ja p väärtustele (vt. joonis 56).



Seega saame kriteeriumile kuju

$$H_0 : p = p_0 ,$$

$$H_1 : p \neq p_0 .$$

$$k \leq k_1 \quad \text{või} \quad k \geq k_2 \Rightarrow H_1 ,$$

$$k_1 < k < k_2 \Rightarrow H_0 .$$

3. Märgitest.

Kõige levinumad ülalkirjeldatud tabelitest on sellised, kus $p_0 = \frac{1}{2}$. Niisuguseid tabeleid nimetatakse sageli "märjitekti" tabeliteks. Et $B(n, \frac{1}{2})$ on sümmeetriline, siis paiknevad ka punktid k_1 ja k_2 juhul $p_0 = \frac{1}{2}$ sümmeetriliselt, ning kuna $k_2 = n - k_1$, ei esitata vahel märjitekti tabelites kahte väärtust k_1 ja k_2 , vaid ainult $k_0 = k_1$. Piirkonnaks S_1 on siis

$$[0, k_0] \cup [n - k_0, n] .$$

Saame sel juhul kriteeriumi

$$H_0 : p = \frac{1}{2} ,$$

$$H_1 : p \neq \frac{1}{2} .$$

$$k \leq k_0 \quad \text{või} \quad k \geq n - k_0 \Rightarrow H_1 ,$$

$$k_0 < k < n - k_0 \Rightarrow H_0 .$$

Näide 74.

Katsetatagu mingit ravimit vererõhu muutmiseks real patsientidel. Oletame, et mingil hulgal patsientidest toimus muutus soovitud suunas (näiteks vererõhk alanes), ülejäänutel aga toimus muutus vastassuunas (oletame, et mõõtmisi teostati niivõrd suure täpsusega, et igal patsiendil avastati kasvõi tühinegi muudatus). Tähistame muudatused soovitud suunas +-märgiga, muudatused ebasoovitavas suunas -märgiga (siit

pärinebki nimetus "märgitest"). Katsetulemused on sel juhul esitatavad järgmise tabelina:

Jrk.nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Muutus	-	+	+	+	-	+	-	+	+	+	-	+	+	+	+	+	+

Loendame positiivsete muutuste arvu ja tähistame selle tähega k ; $k = 13$. Arvestades katsete koguarvu $n = 17$ ja meditsiinilist traditsioonilist olulisuse nivood $\alpha = 0,05$, leiame märgitesti tabelist (tabel XVI, seal on antud k_1 ja k_2) $k_2 = 12$. Et vaadeldaval juhul $k = 13$, seega k on suurem kui k_2 , siis tuleb vastu võtta hüpotees H_1 .

Hüpoteesi H_0 vastuvõtmine käesoleval juhul tähendaks, et kõrvalekaldumised positiivses ja negatiivses suunas on võrdtõenäosed ($p = \frac{1}{2}$) ning seega tulenevad juhuslikest põhjustest, mitte ravimi mõjust soovitud suunas.

Hüpoteesi H_1 vastuvõtmine aga tähendab, et ravimil on teatav mõju, see muudab süstemaatiliselt vererõhku, nii et kõrvalekalded ühes suunas toimuvad suurema tõenäosusega kui teises suunas.

Näide 75.

Oletame, et meie mõõtmiste tulemusena täheldati vererõhu muutust ainult osal patsientidest, teatud hulgal m_0 patsientidest mingit muudatust ei olnud võimalik registreerida. Vaatlustulemuste tabeli saaksime sel juhul järgmisel kujul:

Jrk.nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Muutus	0	+	+	+	-	+	-	0	+	+	0	0	+	+	+	0	+

Kuidas sellisel juhul kasutada märgitesti?

On olemas kaks erinevat lahenduskäiku. Esitame need mõlemad.

I. Muutusi esines vaid 17-5 = 12-1 patsiendil. Vaatleme edaspidi ainult neid patsiente, kuna ülejäänud mingit informatsiooni ravimi toime kohta ei anna.

Seega saame $n' = 12$.

Positiivne mõju oli ravimil 10-le patsiendile, seega $k' = 10$. Kasutades tabelit XVI saame $k'_2 = 9$. Et $k' > k'_2$, võime hüpoteesi H_1 vastu võtta, s.t. lugeda ravimi mõjuvaks.

II. Oletame, et olukord, kus mingit muutust ei registreeritud, sisaldas siiski juhuslikke muutusi, mis olid aga niivõrd väikesed, et seda ei olnud võimalik märgata. Selliseid juhuslikke kõrvalekaldumisi esineb võrdselt niihästi positiivses kui ka negatiivses suunas, järelikult võime nullid jaotada pooleks ning asendada pooled neist +märgiga, pooled -märgiga (see, et vaatlustulemuste arv k'' võib tulla ka murruline, ei tähenda midagi ebaloomulikku).

Saame siis $k'' = k + \frac{m_0}{2}$.

Nii saaksime vaadeldavast tabelist

$$k'' = 10 + \frac{5}{2} = 12,5.$$

Kasutades asjaolu, et $k_2 = 12$, saame ka sellise lahenduskäigu puhul $k'' > k_2$, seega tuleb vastu võtta hüpotees H_1 .

Võrreldes lahenduskäiku I ja II näeme, et tulemus oli käesoleval juhul sama. Üldiselt aga võib esineda olukordi, kus lahendusmeetod I lubab hüpoteesi H_1 vastu võtta, II aga mitte.

Meetodite valikul tuleb vahet teha, kas vastus 0 sisu-

liselt tähendab kindlasti olukorra muutumatust (nii on olukord näiteks siis, kui võrreldakse diskreetseid muutujaid - laste arv perekonnas mingi vaatlusperioodi algul ja lõpul jne.). Sel juhul on õige kasutada meetodit I. Kui aga tege- mist on pidevalt muutuvate suurustega, mida mõõdetakse tea- tava täpsusega ka käesolevas näites, siis võib O tähendada väikest muudatust, ning õigem on rakendada meetodit II.

4. t-testi kasutamine.

Juhul kui binomiaaljaotuse tabelid puuduvad või ei ole neis vajalikke α , n või k väärtusi, tuleb hüpoteeside kontrollimiseks kasutada ligikaudseid meetodeid. Neist levinuim on binomiaaljaotuse lähendamine normaaljaotusega.

Arvestame, et kui $n \rightarrow \infty$, siis

$$\frac{X - np}{\sqrt{npq}} \rightarrow N(0,1), \text{ kui } X \sim B(n,p).$$

Sama seose võime kirjutada ümber ka kujul

$$\frac{\frac{X}{n} - p}{\sqrt{\frac{np}{n}}} \rightarrow N(0,1).$$

Siit aga järeldub, et binomiaaljaotuse tõenäosuse p kohta käivate hüpoteeside kontrollimiseks saame kasutada normaal- jaotuse keskvärtuse kohta käivate hüpoteeside kontrolli- meetodeid.

Kontrollida hüpoteesi

$$a) H_0 : p \leq p_0;$$

$$H_1 : p > p_0.$$

Ligikaudse alumise ühepoolse usalduspiiri \underline{p} (vastavalt usal-

dusnivoole $1 - \alpha$) saame parameetrile p leida järgmiselt (vt. § 4.14):

$$\underline{p} = \frac{k}{n} - \frac{1}{n} \sqrt{\frac{k(n-k)}{n-1}} t_{\alpha; n-1, \bar{u}}.$$

Rakendades § 6 esitatud meetodikat, saame järgmised kriteeriumid:²²

a)

$H_0 : p \leq p_0,$

$H_1 : p > p_0.$

$$\frac{k - p_0 n}{\sqrt{\frac{k(n-k)}{n-1}}} > t_{\alpha; n-1, \bar{u}} \Rightarrow H_1,$$

$$\frac{k - p_0 n}{\sqrt{\frac{k(n-k)}{n-1}}} \leq t_{\alpha; n-1, \bar{u}} \Rightarrow H_0.$$

²² Märgime, et t -jaotuse asemel kasutatakse neis ülesannetes sageli ka normaaljaotust. Kuna binomiaaljaotus on normaaljaotusega hästi lähendatav alles küllalt suurte n väärtuste korral ($n \geq 20$), nii suurte n väärtuste puhul aga t -jaotus on väga lähedane normaaljaotusele, siis võib võtta

$$t_{\alpha; n-1, k} = p_{\frac{\alpha}{2}} \left(\Phi(p_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2} \right),$$

$$t_{\alpha; n-1, \bar{u}} = p_{\alpha} \left(\Phi(p_{\alpha}) = 1 - \alpha \right).$$

$$b) H_0 : p \geq p_0;$$

$$H_1 : p < p_0.$$

$$\frac{p_0^n - k}{\sqrt{\frac{k(n-k)}{n-1}}} > t_{\alpha; n-1, \bar{u}} \Rightarrow H_1,$$

$$\frac{p_0^n - k}{\sqrt{\frac{k(n-k)}{n-1}}} \leq t_{\alpha; n-1, \bar{u}} \Rightarrow H_0.$$

$$c) H_0 : p = p_0 ;$$

$$H_1 : p \neq p_0.$$

$$\frac{|k - p_0^n|}{\sqrt{\frac{k(n-k)}{n-1}}} > t_{\alpha; n-1, k} \Rightarrow H_1 ;$$

$$-t_{\alpha; n-1, k} \leq \frac{k - p_0^n}{\sqrt{\frac{k(n-k)}{n-1}}} \leq t_{\alpha; n-1, k} \Rightarrow H_0.$$

5. χ^2 -jaotuse kasutamine.

Vaatleme veel üht võimalust eelmises punktis esitatud hüpoteeside kontrollimiseks.

Arvestades, et tsentraalse piirteoreemi kohaselt (vt. § 12) küllalt suure n väärtuse korral kehtib ligikaudselt seos:

$$\frac{X - np}{\sqrt{npq}} \sim N(0, 1),$$

saame asümptootilise seose

$$\frac{(X - np)^2}{npq} \sim \chi_{1, 2}^2.$$

(vt. § 4.4, kus defineeritakse χ^2 -jaotus).

Avaldise $\frac{(k - np)^2}{npq}$, kus k on juhusliku suuruse X mingi väärtus, võime ümber kirjutada ka kujul

$$\frac{(k - np)^2}{np} + \frac{(h - nq)^2}{nq},$$

kus $q = 1 - p$, $h = n - k$.

Siit saame kriteeriumi hüpoteesi c) kontrollimiseks:

<p>c)</p> <p>$H_0 : p = p_0,$</p> <p>$H_1 : p \neq p_0.$</p> <p>$\frac{(k - np)^2}{np} + \frac{(h - nq)^2}{nq} > \chi_{1;\alpha}^2 \Rightarrow H_1 ;$</p> <p>$\frac{(k - np)^2}{np} + \frac{(h - nq)^2}{nq} \leq \chi_{1;\alpha}^2 \Rightarrow H_0 .$</p>
--

Saadud kriteerium on §-s 13 esitatuga samaväärne.

§ 12. K a n e b i n o m i a a l j a o t u s e v ö r d l e m i n e.

Olgu antud kaks binomiaaljaotusega juhuslikku suurust,
 $X_1 \sim B(n_1, p_1)$, $X_2 \sim B(n_2, p_2)$. Kontrollida hüpoteese

a) $H_0 : p_1 \leq p_2 ,$

$H_1 : p_1 > p_2 ;$

b) $H_0 : p_1 \geq p_2 ,$

$H_1 : p_1 < p_2 ;$

c) $H_0 : p_1 = p_2 ,$

$H_1 : p_1 \neq p_2$

olulisuse nivooaga α . Juhuslikkude suuruste X_1 ja X_2 väärtustest olgu väljavõtted k_1 ja k_2 (s.t. X_1 puhul katse- seerias pikkusega n_1 esines tulemus A k_1 korda, X_2 puhul katseseerias pikkusega n_2 aga esines tulemus A k_2 korda).

1. Usalduspiiride tabelite kasutamine.

Kõige lihtsam on kontrollida märgitud hüpoteese usaldus- piiride tabelite abil. Olgu meil antud binomiaaljaotuse usal- duspiiride tabelid vastavalt usaldusnivoole $1 - \alpha$. Leiame sealt p_1 ja \bar{p}_1 (vastavalt parameetritele n_1 ja k_1) ning p_2 ja \bar{p}_2 (vastavalt parameetritele n_2 ja k_2).

Kriteeriumideks saame

a)

$$H_0 : p_1 \leq p_2 ;$$

$$H_1 : p_1 > p_2 .$$

$$p_1 > \bar{p}_2 \Rightarrow H_1 ;$$

$$p_1 \leq \bar{p}_2 \Rightarrow H_0 .$$

b)

$$H_0 : p_1 > p_2 ;$$

$$H_1 : p_1 < p_2 .$$

$$\bar{p}_1 < p_2 \Rightarrow H_1 ,$$

$$\bar{p}_1 > p_2 \Rightarrow H_0 .$$

c)

$$H_0 : p_1 = p_2 ,$$

$$H_1 : p_1 \neq p_2 .$$

$$p_1 > \bar{p}_2 \text{ või } \bar{p}_1 < p_2 \Rightarrow H_1 ;$$

$$p_1 \leq \bar{p}_2 \text{ või } \bar{p}_1 \geq p_2 \Rightarrow H_0 .$$

2. Binomiaaljaotuse lähendamine normaaljaotusega.

Kasutades binomiaaljaotuste lähendamist normaaljaotusega, saaksime rakendada §-s 7 väljatöötatud meetodit normaaljaotuse keskväärtuse kohta käivate hüpoteeside kontrollimiseks.

$$\text{Olgu } X_1 \sim B(n_1, p_1), \quad X_2 \sim B(n_2, p_2).$$

Kontrollida hüpoteesi

$$\text{a) } H_0 : p_1 \leq p_2,$$

$$H_1 : p_1 > p_2$$

olulisuse nivooga α . Väljavõtte väärtusteks olgu vastavalt k_1 ja k_2 (sündmuse A esinemiste arv katseseeriates pikkustega n_1 ja n_2). Saame ligikaudu normaaljaotusega suurused

$$\frac{X_1 - n_1 p_1}{\sqrt{n_1 p_1 q_1}} = \frac{\frac{X_1}{n_1} - p_1}{\sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1}}} \sim N(0, 1),$$

$$\frac{X_2 - n_2 p_2}{\sqrt{n_2 p_2 q_2}} = \frac{\frac{X_2}{n_2} - p_2}{\sqrt{\frac{p_2 q_2}{n_2}}} \sim N(0, 1),$$

$$\frac{X_1}{n_1} - \frac{X_2}{n_2} \sim N(p_1 - p_2, \sigma^2). \quad \sigma^2 = \sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}.$$

Juhul kui $p_1 = p_2$, saame tõenäosustele ühise hinnangu

$$p_1 \approx p_2 \approx p = \frac{k_1 + k_2}{n_1 + n_2}, \quad \tilde{q} = 1 - \tilde{p} = \frac{h_1 + h_2}{n_1 + n_2},$$

kus $h_1 = n_1 - k_1$, $h_2 = n_2 - k_2$.

Siis saame σ^2 jaoks hinnangu

$$\sigma = \sqrt{\tilde{p} \tilde{q} \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)} = \sqrt{\frac{(k_1+k_2)(h_1+h_2) n_1+n_2}{(n_1+n_2)^2 n_1 n_2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(k_1+k_2)(h_1+h_2)}{(n_1+n_2) n_1 n_2}}$$

ning leiame veel ühe ligikaudu normaaljaotusega juhusliku suuruse

$$\frac{\frac{X_1}{n_1} - \frac{X_2}{n_2} - (p_1 - p_2)}{\sigma} = \frac{\frac{X_1}{n_1} - \frac{X_2}{n_2} - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{(k_1+k_2)(h_1+h_2)}{(n_1+n_2) n_1 n_2}}} =$$

$$= \left[\frac{X_1}{n_1} - \frac{X_2}{n_2} - (p_1 - p_2) \right] \sqrt{\frac{(n_1+n_2) n_1 n_2}{(k_1+k_2)(h_1+h_2)}} \sim N(0,1).$$

Saadud normaaljaotusega juhuslikku suurust kasutades saamegi leida kriteeriumid hüpoteeside a), b) ja c) kontrollimiseks normaaljaotuse tabeli abil:

$$P(X < p_\alpha) = \Phi(p_\alpha) = 1 - \alpha, \quad (X \sim N(0,1)).$$

a)
 $H_0 : p_1 \leq p_2 ;$

$H_1 : p_1 > p_2 ;$

$$(k_1 n_2 - k_2 n_1) \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{(k_1 + k_2)(h_1 + h_2) n_1 n_2}} > p_\alpha \Rightarrow H_1,$$

$$(k_1 n_2 - k_2 n_1) \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{(k_1 + k_2)(h_1 + h_2) n_1 n_2}} \leq p_\alpha \Rightarrow H_0.$$

b)

$$H_0 : p_1 \geq p_2 ;$$

$$H_1 : p_1 < p_2 ;$$

$$(k_2 n_1 - k_1 n_2) \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{(k_1 + k_2)(h_1 + h_2) n_1 n_2}} > p_{\alpha} \Rightarrow H_1 ;$$

$$(k_2 n_1 - k_1 n_2) \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{(k_1 + k_2)(h_1 + h_2) n_1 n_2}} \leq p_{\alpha} \Rightarrow H_0 .$$

c)

$$H_0 : p_1 = p_2 ;$$

$$H_1 : p_1 \neq p_2 ;$$

$$|k_1 n_2 - k_2 n_1| \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{(k_1 + k_2)(h_1 + h_2) n_1 n_2}} > p_{\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow H_1 ;$$

$$-p_{\frac{\alpha}{2}} \leq (k_1 n_2 - k_2 n_1) \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{(k_1 + k_2)(h_1 + h_2) n_1 n_2}} \leq p_{\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow H_0 .$$

Käesoleva meetodi eeliseks, võrreldes binomiaaljaotuse täpsete usalduspiiride tabelite kasutamisega, on ühelt poolt võimalus laiemalt varieerida α , n ja k väärtusi, aga teiselt poolt ka kriteeriumi suurem võimsus - nimelt on võimalik käesoleva meetodi abil mõnikord ka siis hüpotees H_1 vastu võtta, kui usalduspiirid osaliselt kattuvad (vt. näide 77).

Näide 76.

Olgu kahes paralleelklassis vastavalt 33 ja 37 õpilast. Veerandi lõpul oli puudulikke hindeid vastavalt 8 ja 5 õpilasel. Kas selle põhjal on alust öelda, et klasside õppe-

edukus on oluliselt erinev? (Oluliseks lugeda erinevust, kui selle saab tõestada 5%-lise olulisuse nivooaga).

Lahendus. Kontrollimist vajab hüpotees

$$H_0 : P_1 = P_2;$$

$$H_1 : P_1 \neq P_2;$$

kus $\alpha = 0,05$, $n_1 = 33$, $k_1 = 8$, $n_2 = 37$, $k_2 = 5$.

1) Tabelitest leiame

$$p_1 = 0,119, \quad \bar{p}_1 = 0,409;$$

$$p_2 = 0,061, \quad \bar{p}_2 = 0,277.$$

Et $p_1 < \bar{p}_2$ ja $p_2 < \bar{p}_1$, siis tuleb võtta vastu H_0 .

2) Proovime sama ülesannet lahendada ka normaaljaotuse abil.

Selleks arvutame:

$$k_1 n_2 = 8 \cdot 37 = 296$$

$$k_2 n_1 = 5 \cdot 33 = 165$$

$$k_1 n_2 - k_2 n_1 = 131$$

$$n_1 + n_2 = 70; \quad k_1 + k_2 = 13; \quad h_1 + h_2 = 57$$

$$\frac{(k_1 n_2 - k_2 n_1) \sqrt{n_1 + n_2}}{\sqrt{n_1 n_2 (k_1 + k_2) (h_1 + h_2)}} = \frac{131 \sqrt{70}}{\sqrt{33 \cdot 37 \cdot 13 \cdot 57}} = 1,152.$$

Et $\Phi(1,152) = 0,8749$, siis oleks meil hüpoteesi H_1 võimalik tõestada vaid olulisuse nivooaga $2(1 - 0,8749) = 2 \cdot 0,125 = 0,25$. Et see antud ülesande tingimusi ei rahulda, tuleb vastu võtta nullhüpotees: klasside õppeedukuse ei ole olulist erinevust.

Näide 77.

Olgu samades klassides järgmisel õppevõerandil tulemused nihkunud järgmiselt: teises klassis üks õpilane parandas

oma puuduliku hinde, esimeses halvenes kahe õpilase tunnis-
tus niivõrd, et nad said puuduliku. Kas erinevad nüüd klas-
sid õppeedukuse poolest?

Lahendus. Sama hüpoteesi kontrollimiseks mis eelnevaski
ülesandes saime nüüd uued algandmed:

$$k_1 = 10, \quad k_2 = 4;$$

$$k_1 n_2 = 10 \cdot 37 = 370,$$

$$k_2 n_1 = 4 \cdot 33 = 132,$$

$$k_1 n_2 - k_2 n_1 = 238$$

$$\frac{238 \quad 70}{\sqrt{33 \cdot 37 \cdot 14 \cdot 56}} = 2,04; \quad \Phi(2,04) = 0,9793;$$

$$\alpha = 2(1 - 0,9793) = 2 \cdot 0,0207 = 0,0414 < 0,05,$$

järelikult võime vastu võtta hüpoteesi H_1 ; nüüd on klassid
oma õppeedukuse poolest oluliselt erinevad.

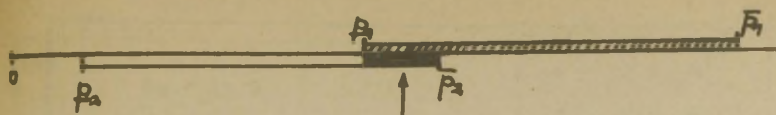
Tabelitest saaksime:

$$p_1 = 0,165; \quad \bar{p}_1 = 0,474;$$

$$p_2 = 0,043; \quad \bar{p}_2 = 0,240;$$

seega saame jälle: $p_1 < \bar{p}_2$, $p_2 < \bar{p}_1$ ning tabelite järgi
otsustades tuleks nagu hüpotees H_0 : $p_1 = p_2$ vastu võtta.

Näeme seega, et kriteerium usalduspiiride kaudu ei ole nii
võimas kui kriteerium, mis kasutab lähendamist normaaljao-
tusega mistõttu juhul, kui usalduspiirid kattuvad, kuid mitte
väga tugevasti (nende ühisosa pikkus on usalduspiiride endi
pikkusega võrreldes väike (vt. joonist 57)), on võimalik, et
kriteerium normaaljaotuse kaudu võimaldab hüpoteesi H_1 vastu
võtta.



usalduspiiride ühisosa

Joonis 57.

Näites 77 saaksime

$$\frac{(k_1 n_2 - k_2 n_1)(n_1 + n_2)}{n_1 n_2 (k_1 + k_2)(h_1 + h_2)} = 4,16,$$

$$\chi^2_{1;0,05} = 3,84 < 4,14 < 5,02 = \chi^2_{1; 0,025},$$

seega hüpotees H_1 on vastuvõetav olulisuse nivooiga 0,05.

3. χ^2 -jaotuse kasutamine.

Toodud kriteeriumiga samaväärse kriteeriumi hüpoteesi c) kontrollimiseks võime saada ka χ^2 -jaotuse abil. Tõepoolest, kui:

$$\left[\frac{X_1}{n_1} - \frac{X_2}{n_2} - (p_1 - p_2) \right] \sqrt{\frac{(n_1 + n_2) n_1 n_2}{(k_1 + k_2)(h_1 + h_2)}} \sim N(0,1),$$

siis selle juhusliku suuruse ruut on χ^2 -jaotusega:

$$\left[\frac{X_1}{n_1} - \frac{X_2}{n_2} - (p_1 - p_2) \right]^2 \cdot \frac{(n_1 + n_2) n_1 n_2}{(k_1 + k_2)(h_1 + h_2)} \sim \chi^2_1,$$

ning me saame kriteeriumile c) anda kuju:

$$c) H_0 : P_1 = P_2 ;$$

$$H_1 : P_1 \neq P_2 ;$$

$$\frac{(k_1 n_2 - k_2 n_1)^2 (n_1 + n_2)}{(k_1 + k_2)(h_1 + h_2)n_1 n_2} > \chi^2_{1; \alpha} \Rightarrow H_1 ;$$

$$\frac{(k_1 n_2 - k_2 n_1)^2 (n_1 + n_2)}{(k_1 + k_2)(h_1 + h_2)n_1 n_2} \leq \chi^2_{1; \alpha} \Rightarrow H_0 .$$

Näide 78.

Rakendame näidetes 76 ja 77 esitatud ülesannete lahendamiseks χ^2 -jaotust. χ^2 -kriteeriumi abil saaksime näites 76

$$\frac{(k_1 n_2 - k_2 n_1)(n_1 + n_2)}{n_1 n_2 (k_1 + k_2)(h_1 + h_2)} = \frac{131^2 \cdot 70}{33 \cdot 37 \cdot 13 \cdot 57} = 1,152^2 = 1,328.$$

$$\chi^2_{1; 0,30} = 1,07 < 1,328 < 2,71 = \chi^2_{1; 0,10} ,$$

siis oleks χ^2 -tabelite põhjal hüpoteesi H_1 võimalik tõestada olulisuse nivooga 0,30, mis ülesande tingimuste kohaselt on ebapiisav.

Märkus. Et vaadeldavas kriteeriumis esinevale statisti-
kule võib teisendamise teel anda mitmeid erinevaid kujusid,
on statistika-alases kirjanduses vaadeldaval kriteeriumil
sageli ülaltoodust erinev kuju. Märgime üles veel mõned sageli
esinevad kujud nn. χ^2 -kriteeriumile.

$$\begin{aligned} \frac{(k_1 n_2 - k_2 n_1)^2 (n_1 + n_2)}{(k_1 + k_2)(h_1 + h_2)n_1 n_2} &= \frac{(k_1 - \tilde{p}n_1)^2}{\tilde{p}\tilde{q}n_1} + \frac{(k_2 - \tilde{p}n_2)^2}{\tilde{p}\tilde{q}n_2} = \\ &= \frac{(k_1 - \tilde{p}n_1)^2}{\tilde{p}n_1} + \frac{(k_2 - \tilde{p}n_2)^2}{\tilde{p}n_2} + \frac{(h_1 - \tilde{q}n_1)^2}{\tilde{q}n_1} + \frac{(h_2 - \tilde{q}n_2)^2}{\tilde{q}n_2} ; \end{aligned}$$

c)

$$H_0 : p_1 = p_2 ;$$

$$H_1 : p_1 \neq p_2 ;$$

$$\frac{(k_1 - \tilde{p}n_1)^2}{\tilde{p}q\tilde{n}_1} + \frac{(k_2 - \tilde{p}n_2)^2}{\tilde{p}q\tilde{n}_1} > \chi_{1;\alpha}^2 \Rightarrow H_1 ;$$

$$\frac{(k_1 - \tilde{p}n_1)^2}{\tilde{p}q\tilde{n}_1} + \frac{(k_2 - \tilde{p}n_2)^2}{\tilde{p}q\tilde{n}_2} \leq \chi_{1;\alpha}^2 \Rightarrow H_0 .$$

c)

$$H_0 : p_1 = p_2 ;$$

$$H_1 : p_1 \neq p_2 ;$$

$$\frac{(k_1 - \tilde{p}n_1)^2}{\tilde{p}n_1} + \frac{(k_2 - \tilde{p}n_2)^2}{\tilde{p}n_2} + \frac{(h_1 - \tilde{q}n_1)^2}{\tilde{q}n_1} + \frac{(h_2 - \tilde{q}n_2)^2}{\tilde{q}n_2} > \chi_{1;\alpha}^2 \Rightarrow H_1 ;$$

$$\frac{(k_1 - \tilde{p}n_1)^2}{\tilde{p}n_1} + \frac{(k_2 - \tilde{p}n_2)^2}{\tilde{p}n_2} + \frac{(h_1 - \tilde{q}n_1)^2}{\tilde{q}n_1} + \frac{(h_2 - \tilde{q}n_2)^2}{\tilde{q}n_2} \leq \chi_{1;\alpha}^2 \Rightarrow H_0 .$$

χ^2 -kriteeriumi kasutamisel tuleb aga tähele panna, et see baseerub asümptootilisel jaotusel, seega annab õige tulemuse vaid küllalt suurte n väärtuste korral (samuti kui lähendamine normaaljaotusegagi).

§ 13. Sageduste võrdlemine etteantud tõenäosustega mitme rühma korral.

Olgu katsel m võimalikku tulemust

$$A_1, A_2, \dots, A_m,$$

kusjuures katsetulemuse A_i esinemise oletatav tõenäosus olgu p_i ($i = 1, 2, \dots, m$, $\sum_{i=1}^m p_i = 1$).

Väljavõtteks on n katsest koosnev seeria, mis andis katsetulemuse $A_1 - k_1$ korda, $A_2 - k_2$ korda jne., $A_m - k_m$ korda, kusjuures

$$\sum_{i=1}^m k_i = n. \quad (25)$$

Kontrollida hüpoteesi

$$H_0 : P(A_1) = p_1, \dots, P(A_m) = p_m;$$

$$H_1 : \text{leidub } A_i \text{ nii, et } P(A_i) \neq p_i$$

olulisuse nivooga α .

Oletame, et nullhüpotees on õige. Siis on statistikud

$$\frac{k_1 - np_1}{\sqrt{np_1q_1}}, \quad \frac{k_2 - np_2}{\sqrt{np_2q_2}}, \quad \dots, \quad \frac{k_m - np_m}{\sqrt{np_mq_m}}$$

tusega $N(0,1)$, kusjuures neid ühendab üks lineaarne seos

(25). Iga üksik liidetav

$$\frac{(k_1 - np_1)^2}{np_1q_1} \quad (26)$$

on χ_1^2 -jaotusega, kuid kuna need suurused on sõltuvad (seos (25)), siis tuleb teha sobiv teisendus, et saada teatav hulk sõltumatuid normaaljaotusega juhuslikke suurusi, mille ruutu-de summaks oleks χ^2 -jaotus. Osutub, et summa

$$\frac{(k_1 - np_1)^2}{np_1} + \frac{(k_2 - np_2)^2}{np_2} + \dots + \frac{(k_m - np_m)^2}{np_m} \sim \chi_{m-1}^2$$

on χ^2 -jaotusega vabadusastmete arvuga $m - 1$; selle tulemuse ni jöudmiseks on tarvis suurustega (26) teha teisendus, mis erijuhul $m = 2$ on tehtud § 12 lõpus.²³ Vabadusastmete arvuks saame liidetavate arvu - lineaarsete seoste arv = $m - 1$.

Seega saame kriteeriumi

$$H_0 : P(A_1) = p_1, \dots, P(A_m) = p_m;$$

$$H_1 : \text{Mingi } P(A_i) \neq p_i.$$

$$\frac{(k_1 - np_1)^2}{np_1} + \frac{(k_2 - np_2)^2}{np_2} + \dots + \frac{(k_m - np_m)^2}{np_m} > \chi_{m-1; \alpha}^2 \Rightarrow H_1;$$

$$\frac{(k_1 - np_1)^2}{np_1} + \frac{(k_2 - np_2)^2}{np_2} + \dots + \frac{(k_m - np_m)^2}{np_m} \leq \chi_{m-1; \alpha}^2 \Rightarrow H_0.$$

§ 14. Kahe tabeli võrdlemine.

Olgu katsel m võimalikku tulemust,

$$A_1, A_2, \dots, A_m,$$

ning olgu tehtud 2 katseseeriat. Esimese katseseeria tulemusteks olgu

$$k_{11}, k_{12}, \dots, k_{1m}, \quad \sum_{i=1}^m k_{1i} = n_1 \quad (27)$$

(s.t. sündmus A_i esines k_{1i} korda).

Teise katseseeria tulemusteks olgu

$$k_{21}, k_{22}, \dots, k_{2m}, \quad \sum_{i=1}^m k_{2i} = n_2. \quad (28)$$

²³ Vt. ka teoseid [6]

Kontrollida hüpoteesi

$$H_0 : P_1(A_1) = P_2(A_1) , \dots , P_1(A_m) = P_2(A_m);$$

$$H_1 : \text{Mingi } A_i \text{ korral } P_1(A_i) \neq P_2(A_i),$$

kus $P_1(A_i)$ on sündmuse A_i esinemise tõenäosus I katse-
vältel, $P_2(A_i)$ - sündmus A_i esinemise tõenäosus II katse-
seeria vältel. Olulisuse nivooks olgu α .

Oletame, et nullhüpotees on õige. Siis saame tõenäosus-
tele arvutada ühised hinnangud

$$P_1(A_i) = P_2(A_i) \approx \frac{k_{1i} + k_{2i}}{n_1 + n_2} = \tilde{p}_i; \quad \tilde{q}_i = 1 - \tilde{p}_i \quad (29)$$

ning juhuslikud suurused

$$\frac{k_{1i} - \tilde{p}_i n_1}{\sqrt{n_1 \tilde{p}_i \tilde{q}_i}} , \quad \frac{k_{2i} - \tilde{p}_i n_2}{\sqrt{n_2 \tilde{p}_i \tilde{q}_i}}$$

on ligikaudu normaaljaotusega, kusjuures neid seovad lineaar-
seosed (29) ning lisaks sellele veel seosed (27), (28). Tei-
sendades uuritavad juhuslikud suurused lineaarselt sõltumatu-
teks ning lihtsustades saadud avaldist, saame χ^2 -jaotusega
summa

$$\frac{(k_{11} - \tilde{p}_1 n_1)^2}{n_1 \tilde{p}_1} + \frac{(k_{21} - \tilde{p}_1 n_2)^2}{n_2 \tilde{p}_1} + \dots + \frac{(k_{1m} - \tilde{p}_m n_1)^2}{n_1 \tilde{p}_m} +$$

$$+ \frac{(k_{2m} - \tilde{p}_m n_2)^2}{n_2 \tilde{p}_m} \sim \chi_{m-1}^2 ,$$

kusjuures vabadusastmete arv on, samuti kui eelmises üles-
andes, $m-1 = 2m-m-1$.

Teisendame leitud avaldisi:

$$(k_{1i} - \tilde{p}_i n_1)^2 = (k_{1i} - n_1 \frac{k_{11} + k_{21}}{n_1 + n_2})^2 =$$

$$= \left(\frac{k_{11} n_1 + k_{1i} n_2 - n_1 k_{11} - n_1 k_{21}}{n_1 + n_2} \right)^2 = \frac{(k_{1i} n_2 - k_{21} n_1)^2}{(n_1 + n_2)^2};$$

$$(k_{2i} - \tilde{p}_i n_2)^2 = \left[\frac{k_{2i} (n_1 + n_2) - n_2 (k_{11} + k_{21})}{n_1 + n_2} \right]^2 = \frac{(k_{2i} n_1 - k_{11} n_2)^2}{(n_1 + n_2)^2};$$

$$\frac{(k_{1i} - \tilde{p}_i n_1)^2}{n_1 \tilde{p}_i} + \frac{(k_{2i} - \tilde{p}_i n_2)^2}{n_2 \tilde{p}_i} = \frac{1}{\tilde{p}_i} \frac{(k_{2i} n_1 - k_{11} n_2)^2}{(n_1 + n_2)^2} \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) =$$

$$= \frac{(k_{1i} n_2 - k_{21} n_1)^2 (n_1 + n_2) (n_1 + n_2)}{(n_1 + n_2)^2 (k_{11} + k_{21}) n_1 n_2} = \frac{(k_{1i} n_2 - k_{21} n_1)^2}{(k_{11} + k_{21}) n_1 n_2}.$$

Kokkuvõtteks saame kriteeriumi

$$H_0 : P_1(A_1) = P_2(A_1), \dots, P_1(A_m) = P_2(A_m);$$

$$H_1 : \text{Mingi } A_i \text{ korral } P_1(A_i) \neq P_2(A_i)$$

$$\frac{(k_{11} n_2 - k_{21} n_1)^2}{(k_{11} + k_{21}) n_1 n_2} + \frac{(k_{12} n_2 - k_{22} n_1)^2}{(k_{12} + k_{22}) n_1 n_2} + \dots + \frac{(k_{1m} n_2 - k_{2m} n_1)^2}{(k_{1m} + k_{2m}) n_1 n_2} > \chi_{\alpha; m-1}^2 \Rightarrow H_1;$$

$$\frac{(k_{11} n_2 - k_{21} n_1)^2}{(k_{11} + k_{21}) n_1 n_2} + \frac{(k_{12} n_2 - k_{22} n_1)^2}{(k_{12} + k_{22}) n_1 n_2} + \dots + \frac{(k_{1m} n_2 - k_{2m} n_1)^2}{(k_{1m} + k_{2m}) n_1 n_2} \leq \chi_{\alpha; m-1}^2 \Rightarrow H_0.$$

Ka tabelite võrdlemisel tuleb silmas pidada χ^2 -testi asümptootilist iseloomu ning vältida liialt väikesearvulisi rühmi. Kui mingi rühm i korral $k_{1i} + k_{2i} < 5$, tuleks tingimata rühm i mingi naaberrühmaga ühendada, nii et kokkuvõttes iga rühma korral oleks täidetud tingimus

$$k_{1i} + k_{2i} > 5 \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Empiirilise ja teoreetilise jaotuse võrdlemisel (§ 3)
on nõutav, et oleks täidetud tingimus

$$k_1 > 5 \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Näide 79.

Jagunegu sotsioloogilise ankeedi täitjad hariduse ja soo järgi järgmiselt:²⁴

	Mehed	Naised	Keskmine %
Algharidus (kuni 7 kl.)	980 36,5%	1517 39,4%	38,2
8 - 10 kl., kutseharidus 8 kl.baasil	577 21,5%	692 17,9%	19,4
Keskharidus, keskeri- haridus, kutseharidus keskk.baasil	670 25,0%	1130 29,3%	27,5
Lõpetamata kõrgem ja kõrgem haridus	457 17,0%	517 13,4%	14,9
Kokku	2684	3856	

Arvutused on koondatud alljärgnevasse tabelisse. Näeme, et kuigi protsentuaalselt ei ole erinevused eriti suured, saame tabelite erinevuse väga veenvalt (viga vähem kui 0,001) tõestada. Selle põhjuseks on materjali suur arv: $n = 6540$.

²⁴ Andmed pärinevad 1968.aasta valikküsitlusest Tartus, mis haaras 10% Tartu elanikkonnast.

$$n_1 = 2684; \quad n_2 = 3856; \quad n_1 n_2 = 1,035 \cdot 10^7$$

i	k_{1i}	k_{2i}	k_{1i+2i}	$Z_i = (k_{1i} + k_{2i}) n_1 n_2$	$k_{1i} n_2$	$k_{2i} n_1$	$d_i = k_{1i} n_2 - k_{2i} n_1$	d_i^2	$\frac{d_i^2}{Z_i}$
1	980	1517	2497	$2,584 \cdot 10^{10}$	$3,779 \cdot 10^6$	$4,072 \cdot 10^6$	$2,93 \cdot 10^5$	$8,58 \cdot 10^{10}$	3,32
2	577	692	1269	$1,313 \cdot 10^{10}$	$2,225 \cdot 10^6$	$1,857 \cdot 10^6$	$3,68 \cdot 10^5$	$13,54 \cdot 10^{10}$	10,31
3	670	1130	1800	$1,863 \cdot 10^{10}$	$2,584 \cdot 10^6$	$3,033 \cdot 10^6$	$4,49 \cdot 10^5$	$20,16 \cdot 10^{10}$	10,82
4	457	517	974	$1,008 \cdot 10^{10}$	$1,762 \cdot 10^6$	$1,388 \cdot 10^6$	$3,74 \cdot 10^5$	$13,99 \cdot 10^{10}$	13,88

2684 3856 6540

$$\frac{38,33}{2} > 16,3 =$$

$$= \chi_{3; 0,001}$$

§ 15. Empiirilise jaotuse võrdlemine ühtlase jaotusega.

Eelmises paragrahvis käsitletud meetodit saab rakendada ka empiirilise ja teoreetilise jaotuse võrdlemiseks. Vaatleme seda ülesannet juhul, kui teoreetiliseks jaotuseks on ühtlane jaotus.

Olgu antud väljavõtte

$$x_1, x_2, \dots, x_n.$$

Kontrollida hüpoteesi

$$H_0 : X \sim U(a, b);$$

$$H_1 : X \text{ on mingi muu jaotusega}$$

olulisuse nivooga α .

Vaatleme kahte erinevat võimalust.

1° Olgu väljavõtte antud klassifitseeritud kujul (võrdsed klassid), mis on esitatav tabelina

$[a_0, \dots, a_1)$	$[a_1, \dots, a_2)$	$[a_2, \dots, a_3)$	\dots	$[a_{m-1}, a_m]$
k_1	k_2	k_3	\dots	k_m

Tähistame klassi $[a_{i-1}, a_i)$ sattumise sündmusena A_i . Juhul kui jaotus on ühtlane (meie nullhüpoteesi), siis

$$P(A_i) = \frac{1}{m} \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Kasutades §-s 14 esitatud meetodit saame kriteeriumi

$$\frac{(k_1 - \frac{n}{m})^2}{\frac{n}{m}} + \frac{(k_2 - \frac{n}{m})^2}{\frac{n}{m}} + \dots + \frac{(k_m - \frac{n}{m})^2}{\frac{n}{m}} > \chi^2_{\alpha; m-1}.$$

Pärast lihtsat teisendamist saame kriteeriumile kuju:

$$H_0 : X \sim U(a_0, a_m);$$

H_1 : X on mingi muu jaotusega.

$$\frac{m}{n} \left[(k_1 - \frac{n}{m})^2 + (k_2 - \frac{n}{m})^2 + \dots + (k_m - \frac{n}{m})^2 \right] > \chi^2_{\alpha; m-1} \Rightarrow H_1; \quad (30)$$

$$\frac{m}{n} \left[(k_1 - \frac{n}{m})^2 + (k_2 - \frac{n}{m})^2 + \dots + (k_m - \frac{n}{m})^2 \right] \leq \chi^2_{\alpha; m-1} \Rightarrow H_0$$

2^o Olgu väljavõte klassifitseerimata kujul. Siis on meil kõigepealt tarvis hinnata vaadeldava ühtlase jaotuse parameetreid. Leiame

$$x'_1 = \min_i x_i ; \quad x'_n = \max_i x_i ; \quad d = x'_n - x'_1$$

$$\text{ning võtame } a = x'_1 - \frac{d}{n} ; \quad b = x'_n + \frac{d}{n} .$$

Seejärel määrame kindlaks sobiva klasside arvu

$m \approx \sqrt{n}$, ja arvutame klasside otspunktid

$$a_0 = a, \quad a_1 = a_0 + \frac{b-a}{m}, \quad a_2 = a_0 + 2 \frac{b-a}{m}, \quad \dots$$

$$\dots, \quad a_{m-1} = a_0 + (m-1) \frac{b-a}{m}, \quad a_m = b$$

ning sagedused k_i (s.o. igasse klassi kuulumise tõenäosused).

Kriteerium hüpoteesi

$$H_0 : X \sim U(a, b)$$

kontrollimiseks tuleb kujuga (30).

§ 16. Empiirilise jaotuse võrdlemine normaaljaotusega.

Küllalt sageli tekib probleem, kas võib vaadeldav väljavõte kuuluda normaaljaotusega juhuslikule suurusele (sest klassikalises matemaatilises statistikas kasutatakse tihti meetodeid, mis eeldavad jaotuste normaalsust). Paragrahvis 13 tuletatud meetodikat saab kasutada ka jaotuse normaalsuse kontrollimiseks.

Olgu antud väljavõte

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

mingi juhusliku suuruse X väärtuste hulgast. Kontrollida hüpoteesi

$$H_0 : X \sim (N(m, \sigma^2));$$

$$H_1 : X \text{ on mingi muu jaotusega.}$$

Selle ülesande lahendamiseks leiame kõigepealt tõenäosimad m ja σ^2 väärtused

$$m \approx \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i;$$

$$\sigma^2 \approx s^2 = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

Seejärel valime sobiva klasside arvu $m \approx \sqrt{n}$ (kui materjal on esitatud klassifitseeritud kujul, tuleb vajaduse korral äärmised - väikese indiviidide arvuga - klassid ühendada). Käesoleval juhul ei ole oluline, et klassid oleksid võrdse pikkusega, klassid võib valida ka erinevate pikkuste, kuid ligikaudu võrdsete elementide arvudega; määrame kindlaks

klassipiirid: $a_0 = -\infty$, $a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, a_m = \infty$.

Kui tabel on koostatud, tuleb leida teoreetilised tõenäosused. Need leiame normaaljaotuse tabeli abil:

$$p_1 = \Phi\left(\frac{a_1 - \bar{x}}{s}\right); \quad p_2 = \Phi\left(\frac{a_2 - \bar{x}}{s}\right) - \Phi\left(\frac{a_1 - \bar{x}}{s}\right), \dots, p_{m-1} = \Phi\left(\frac{a_{m-1} - \bar{x}}{s}\right) - \Phi\left(\frac{a_{m-2} - \bar{x}}{s}\right),$$

$$p_m = 1 - \Phi\left(\frac{a_{m-1} - \bar{x}}{s}\right).$$

Tõstatatud hüpoteesi kontrollimiseks saame kriteeriumi

$$H_0 : X \sim N(m, \sigma^2);$$

$H_1 : X$ on mingi muu jaotusega:

$$\frac{(k_1 - np_1)^2}{np_1} + \frac{(k_2 - np_2)^2}{np_2} + \dots + \frac{(k_m - np_m)^2}{np_m} > \chi_{\alpha; m-3}^2 \Rightarrow H_1;$$

$$\frac{(k_1 - np_1)^2}{np_1} + \frac{(k_2 - np_2)^2}{np_2} + \dots + \frac{(k_m - np_m)^2}{np_m} \leq \chi_{\alpha; m-3}^2 \Rightarrow H_0.$$

Tuleb aga märkida, et (eriti väikeste α väärtuste puhul)

H_0 vastuvõtmine ei tõesta veel veenvalt jaotuse normaalsust.

Veenvalt tõestamiseks peaksime kasutama χ^2 -jaotuse väärtusi kohal $1 - \alpha$:

$H_0 : X$ on mingi muu jaotusega;

$H_1 : X \sim N(m, \sigma^2)$.

$$\frac{(k_1 - np_1)^2}{np_1} + \frac{(k_2 - np_2)^2}{np_2} + \dots + \frac{(k_m - np_m)^2}{np_m} < \chi^2_{1-\alpha; m-3} \Rightarrow H_1;$$

$$\frac{(k_1 - np_1)^2}{np_1} + \frac{(k_2 - np_2)^2}{np_2} + \dots + \frac{(k_m - np_m)^2}{np_m} \geq \chi^2_{1-\alpha; m-3} \Rightarrow H_0.$$

Näide 80.

Olgu tarvis teada, kas teatud detailide, näiteks võllide diameetrid vastavad normaaljaotusele. Järgnevas sagedustabelis esitame diameetrite hälbed (tuhandikes millimeetrites) etteantud normatiivist:

(k_i on vastava hälbe detailide arv väljavõttes)

x_i	[20, 15)	[-15, -10)	[-10, -5)	[-5, 0)	[0, 5)	[5, 10)	[10, 15)	[15, 20)	[20, 25)	[25, 30)
k_i	7	11	15	24	49	41	26	17	7	3

Parameetrid \bar{x} ning s arvutame vastavalt järgmiste valemite abil:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m \frac{a_{i-1} + a_i}{2} k_i,$$

$$s = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^m k_i \left(\frac{a_{i-1} + a_i}{2} - \bar{x} \right)^2.$$

Saame

$$\bar{x} = 4,30,$$

$$s^2 = 94,73,$$

$$s = \sqrt{94,73} = 9,733.$$

Edasised arvutused on koostatud järgmise tabelisse:

i	k_i	a_i	$Z_i = \frac{a_i - \bar{x}}{s}$	$\Phi(Z_i)$	p_i	np_i	$k_i - np_i$	$(k_i - np_i)^2$	$\frac{(k_i - np_i)^2}{np_i}$
1	7	-15	- 1,98	0,0239	0,0239	4,78	2,22	4,928	1,03
2	11	-10	- 1,47	0,0708	0,0469	9,38	1,62	2,624	0,28
3	15	- 5	- 0,96	0,1685	0,0977	19,54	- 4,54	20,612	1,05
4	24	0	- 0,44	0,3300	0,1615	32,30	- 8,30	68,890	2,13
5	49	5	0,07	0,5279	0,1979	39,58	9,42	88,736	2,24
6	41	10	0,59	0,7224	0,1945	38,90	2,10	4,410	0,11
7	26	15	1,10	0,8643	0,1419	28,38	-2,38	5,664	0,20
8	17	20	1,61	0,9463	0,0820	16,40	0,60	0,360	0,02
9	7	25	2,13	0,9834	0,0537	10,74	-0,74	0,548	0,05
10	3								

7,11

\bar{x} arvutamisel $a_0 = -20$ ja $a_{10} = 30$, sest suuremaid hälbeid ei esinenud.

Kuna viimases klassis on vähe elemente (ainult 3), siis ühendasime ta eelmise klassiga. Seega $m = 9$. Et $7,11 < 7,23 = \chi^2_{0,30;6}$, siis tuleb vastu võtta nullhüpotees: detailide diameetrid on normaaljaotusega. Olulisuse tase 0,30 näitab siinjuures, et tehes hulgaliselt väljavõtteid normaaljaotusega üldkogumist, saaksime enam kui 30% juhtudest väljavõtted, mille empiiriline jaotus erineb normaaljaotusest sama palju või rohkem kui vaadeldavate detailide empiiriline jaotus.

KASUTATUD KIRJANDUS .

Teoreetilises osas kasutatud kirjandus .

1. Kangro, G. Matemaatiline analüüs I. Tallinn, 1965.
2. Kangro, G. Matemaatiline analüüs II. Tallinn, 1968.
3. Tiit, E. Tõenäosusteooria I. Tartu, 1968.
4. Tiit, E. Tõenäosusteooria II. Tartu, 1969.
5. Ван дер Варден, Б.Л. Математическая статистика. Москва, 1960.
6. Крамер, Г. Математические методы статистики. Москва, 1948.
7. Уилкс, С. Математическая статистика. Москва, 1967.
8. Weber, E. Grundriss der Biologischer Statistik. Jena, 1967.

Tabelite allikmaterjal .

9. Венцель, Е.С., Овчаров, Л.А. Теория вероятностей. Москва, 1969.
10. Дунин-Барковский, И.В., Смирнов, Н.В. Теория вероятностей и математическая статистика в технике. Москва, 1955.
11. Мостеллер, Ф., Рурке, Р., Томас Дж. Вероятность. Москва, 1969.
12. Лустыльник, Е.И. Статистические методы анализа и

обработки наблюдений. Москва, 1968.

13. Renyi, A. Wahrscheinlichkeitsrechnung. Berlin, 1962.

S i s u k o r d .

Eessõna	
Sissejuhatus	5
I. Juhuslik suurus	
1. Juhusliku suuruse mõiste	10
2. Diskreetsed ja pidevad juhuslikud suurused . .	11
3. Juhusliku suuruse tähtsus ning väärtuste hulk.	13
4. Diskreetse juhusliku suuruse jaotus.	14
1. Jaotustabel	14
2. Jaotusvalem	15
3. Binomiaajaotus	17
5. Pideva juhusliku suuruse jaotusfunktsioon . .	19
6. Diskreetse juhusliku suuruse jaotusfunktsioon	22
7. Tõenäosuse tihedus	26
8. Juhusliku suuruse kvantilid	28
9. Juhusliku suuruse keskvaärtus	29
1. Diskreetse juhusliku suuruse keskvaärtus . .	30
2. Pideva juhusliku suuruse keskvaärtus	31
3. Keskvaärtuse omadusi	33
4. Näiteid	33

10.	Juhusliku suuruse hajuvuse karakteristikud ..	37
	1. Dispersioon	38
	2. Dispersiooni omadusi	39
	3. Standardhälve	39
	4. Keskmise hälve	40
	5. Näiteid	41
11.	Juhusliku suuruse momendid	45
12.	Normaaljaotus	48
	1. Normaaljaotus kui binomiaaljaotuse piirjaotus	48
	2. Normaaljaotuse tihedusfunktsioon	50
	3. Näiteid	53
13.	Normaaljaotuse iseloomustamine parameetrite abil	56
	1. Normaaljaotuse normeerimine ja tsentreerimine	556
	2. Normaaljaotuse tabelite abil lahendatavate ülesannete tüübid	557
	3. Näiteid	58
14.	Uhtlane jaotus	63
15.	Poissoni jaotus	65
16.	Juhuslike suuruste sõltumatus	69
	II. Väljavõte, selle esialgne töötlemine	
	1. Uldkogum ja väljavõte	71
	2. Uldkogumi kirjeldamine juhusliku suuruse abil	73

3.	Väljavõtte representatiivsus	74
4.	Väljavõtte korrastamine	78
	1. Variatsioonrida	78
	2. Variatsioonrea ulatus ja mediaan	79
	3. Variatsioonrea kvartiilid ja sekstiilid.	80
5.	Väljavõtte klassifitseerimine	82
6.	Empiiriline jaotus	84
	1. Kordumatute väärtustega variatsioonrea empiiriline jaotus	85
	2. Arvuliste karakteristikute leidmine	86
	3. Korduvate väärtustega variatsioonrea empii- riline jaotus	87
	4. Arvuliste karakteristikute leidmine	87
	5. Näiteid	87
7.	Empiiriline jaotus klassifitseeritud väärtus- te korral	91
	1. Võrdsed klassid	91
	2. Indiviidide paigutus klassis	92
	3. Arvuliste parameetrite leidmine, Sheppardi parandus.	93
	4. Ebavõrdsed klassid.	97
8.	"Valede" indiviidide eristamine väljavõttest	100
	1. Mõningate tugevasti kõrvalekalduvate elementide eristamine	100
	2. Jaotuse "sabade mahalõikamine".	101
	3. "Valede" elementide suhtes vähetundlike meetodite kasutamine	102

III. Punkthinnangud

1.	Parameetrite hindamise üldprobleem	103
2.	Punkthinnangud ja nende omadused	104
1.	Nihutamatus	105
2.	Efektiivsus	105
3.	Konsistentsus	107
3.	Punkthinnangute asümptootilised omadused	107
4.	Keskväertuse hinnangud	109
1.	Keskväertuse hinnangute erinevaid kujusid	111
2.	Üksikvaatlus keskväertuse hinnanguna	111
3.	Väljavõtte mediaan keskväertuse hinnangu- na	111
4.	Väljavõtte keskväertus keskväertuse hinnanguna	112
5.	Hinnangute võrdlus	112
6.	Näiteid	115
5.	Juhusliku suuruse dispersiooni hinnang	117
1.	Dispersiooni hinnang m kaudu	117
2.	Dispersiooni hinnang \bar{x} kaudu	119
3.	Väljavõtte dispersioon $\bar{\sigma}^2$	119
4.	Nihutamata hinnang s^2	121
5.	Hinnangute $\bar{\sigma}^2$ ja s^2 omadusi	122
6.	Standardhälbe hinnangud	124
7.	Hinnangute $\bar{\sigma}^2$ ja s^2 dispersioon eeldusel $X \sim N(m, \sigma^2)$	124
8.	Dispersiooni hinnangud klassifitseeritud väljavõtte puhul	125

9. Näiteid	126
6. Normaaljaotuse standardhälbe hinnangud . . .	129
1. Normaaljaotuse standardhälbe hinnang keskmise hälbe kaudu	129
2. Normaaljaotuse standardhälbe hindamine väljavõtte kvartiilide ja sekstiilide abil	131
3. Leitud hinnangute efektiivsus	132
4. Standardhälbe hinnangute võrdlemine . . .	135
7. Binomiaaljaotusega juhusliku suuruse parameetri p hindamine	136
1. Tõenäosuse p hinnang	136
2. Hinnangu \hat{p} dispersioon	136
3. Hinnangu \hat{p} dispersiooni ligikaudne hinnang	138
4. Hinnangu \hat{p} suhteline viga	139
5. Tõenäosuse p hinnang katseseeria põhjal .	139
6. Tõenäosuse p hinnangu \hat{p} dispersiooni leidmine üksikväljavõtete hajuvuse kaudu . .	141
8. Binomiaaljaotuse lähendamine normaaljaotusega	142
9. Poissoni jaotusega juhusliku suuruse parameetri hindamine	144
10. Uhtlase jaotusega juhusliku suuruse parameetrite a ja b hindamine	145
1. Hinnangud keskväärtuse ja standardhälbe kaudu	146
2. Hinnangud variatsioonrea elementide kaudu .	147

3. Nihutamata hinnangud	147
-----------------------------------	-----

IV. Vahemikhinnangud .

1. Vahemikhinnangute ülesanne	151
1. Usalduspiirkond	151
2. Täpsem usalduspiirkond	152
3. Sümmetriline usalduspiirkond	153
2. Uhepoolsed usalduspiirid	156
3. Normaaljaotusega juhusliku suuruse keskväär- tuse usalduspiirid	159
1. Kahepoolsete usalduspiiride avaldis \bar{O} kau- du	159
2. Uhepoolsete usalduspiiride avaldis \bar{O} kaudu	161
4. χ^2 -jaotus ja F-jaotus	163
1. χ^2 - jaotus	163
2. F-jaotus	165
5. Normaaljaotusega juhusliku suuruse standard- hälbe \bar{O} usalduspiirkond	166
6. Normaaljaotusega juhusliku suuruse standardhäl- be \bar{O} usalduspiirkond (keskväärtus m ei ole teada).	170
7. t-jaotus	173
8. Normaaljaotusega juhusliku suuruse keskväär- tuse usalduspiirid (juhul, kui standardhälve ei ole teada)	175
1. t-jaotusega statistiku leidmine	175
2. Kahepoolsete usalduspiiride leidmine	176

3.	Uhepoolsete usalduspiiride leidmine	177
9.	Normaaljaotusega juhuslike suuruste lineaarse kombinatsiooni keskväertuse usalduspiirid	179
10.	Vahe keskväertuse usalduspiiride leidmine väikese väljavõtte põhjal	182
	1. Võrdse mahuga väljavõtted	182
	2. Erinevate mahtudega väljavõtted	183
	3. Näiteid	185
11.	Poissoni jaotuse parameetri λ usalduspiiride määramine	187
	1. λ usalduspiiride täpne arvutamine	188
	2. Usalduspiiride leidmine tabelitest	189
12.	Poissoni jaotuse parameetri λ usalduspiirkonna ligikaudne arvutamine	192
	1. Lähendamine normaaljaotusega	192
	2. Poissoni jaotuse lähendamine χ^2 -jaotuse abil	193
13.	Binomiaaljaotuse parameetri p usalduspiiride täpne määramine	194
	1. Usalduspiiride määramine binomiaaljaotuse valemist	194
	2. Usalduspiiride määramine F -jaotuse abil	196
14.	Binomiaaljaotuse parameetri p usalduspiiride ligikaudne määramine	197
15.	Väljavõtte ulatuse jaotus ja selle kasutamine normaaljaotuse standardhälbe usalduspiiride leidmiseks	198

V. Statistiliste hüpoteeside kontrollimine

1. Hüpoteeside kontrolli ülesanne	203
1. Statistiline hüpotees	203
2. Kriteerium	204
2. Nullhüpotees ja alternatiiv. I ja II liiki viga	206
3. Olulisuse nivoo ja kriteeriumi võimsus . . .	208
1. Olulisuse nivoo	209
2. Võimsus	211
4. Hüpoteesid jaotuse parameetrite kohta	213
5. Võimsaimad ja ühtlaselt võimsaimad kriteeriu- mid	215
1. Parameetri väärtuste ruum Ω	215
2. Liht- ja liithüpotees ning alternatiiv . .	217
3. Võimsusfunktsioon	217
4. Ühtlaselt võimsaim kriteerium	218
6. Hüpoteeside kontrollimine usalduspiirkondade abil -.	219
1. Kahepoolsete hüpoteeside kontrollimine .	219
2. Ühepoolsete hüpoteeside kontrollimine . .	222
7. Hüpoteesid normaaljaotuse keskvaärtuse kohta	224
8. Hüpoteesid normaaljaotuse dispersiooni koh- ta	231
9. Kahe normaaljaotuse dispersioonide võrdle- mine	236
10. Kahe normaaljaotuse keskvaärtuste võrdlemi- ne	241

1.	Võrdsed väljavõtted	242
2.	Teadaolevad dispersioonid	244
3.	Võrdsed dispersioonid	247
4.	Võrdlemine usalduspiiride abil (üldiselt rakendatav)	251
11.	Hüpooteesid binomiaal- ja Poissoni jaotuse kohta	255
1.	Hüpooteeside kontrollimine usalduspiiride tabelite abil	255
2.	Tabelid binomiaaljaotuse tõenäosuse kohta kõivate hüpooteeside kontrollimiseks . . .	257
3.	Märgitest	258
4.	t-testi kasutamine	261
5.	χ^2 -jaotuse kasutamine	263
12.	Kahe binomiaaljaotuse võrdlemine	264
1.	Usalduspiiride tabelite kasutamine	265
2.	Binomiaaljaotuse lähendamine normaaljaotuse- ga	266
3.	χ^2 -jaotuse kasutamine	271
13.	Sageduste võrdlemine etteantud tõenäosustega mitme rühma korral	273
14.	Kahe tabeli võrdlemine	275
15.	Empiirilise jaotuse võrdlemine ühtlase jaotuse- ga	280
16.	Empiirilise jaotuse võrdlemine normaaljaotuse- ga	282

Lisa. Tabelid.

I. Normaalkaotuse tõenäosuse tihedus

II. Normaalne kaotusfunktsioon

III. Normaalkaotuse kvantiilid (kaotusfunktsiooni pöõrdfunktsioon)

IV. t-kaotus

V. χ^2 -kaotus

VI. Normaalkaotuse standardhälbe nihutanata hinnang

VII. Normaalkaotuse standardhälbe kaotus

VIII. F- kaotus

IX. Normaalkaotuse variatsioonilulatus kaotus

X. Poissoni kaotus

XI. Poissoni kaotusfunktsioon

XII. Poissoni kaotuse keskvärtuse usalduspiirid

XIII. Binomiaalkaotus

XIV. Binomiaalne kaotusfunktsioon

XV. Binomiaalkaotuse tõenäosuste (protsentide) usalduspiirid

XVI. Märgitest

XVII. Faktoriaalid

Kasutatud kirjandus

Teoreetilises osas kasutatud kirjandus

Tabelite allikmaterjal

L I S A .

Tabelid .

I. Normaaljaotuse tõenäosuse tihedus.

Normaalse juhusliku suuruse $X \sim N(0,1)$ tõenäosuse
tihedus $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (0 \leq x \leq 3,9).$$

Tabel on võetud teosest [8].

<i>z</i>	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0.0	.39894	.39892	.39886	.39876	.39862	.39844	.39822	.39797	.39767	.39733
0.1	.39695	.39654	.39608	.39559	.39505	.39448	.39387	.39322	.39253	.39181
0.2	.39104	.39024	.38940	.38853	.38762	.38667	.38568	.38466	.38361	.38251
0.3	.38139	.38023	.37903	.37780	.37654	.37524	.37391	.37255	.37115	.36973
0.4	.36827	.36678	.36526	.36371	.36213	.36053	.35889	.35723	.35553	.35381
0.5	.35207	.35029	.34849	.34667	.34482	.34294	.34105	.33912	.33718	.33521
0.6	.33322	.33121	.32918	.32713	.32506	.32297	.32086	.31874	.31659	.31443
0.7	.31225	.31006	.30785	.30563	.30339	.30114	.29887	.29659	.29431	.29200
0.8	.28969	.28737	.28504	.28269	.28034	.27798	.27562	.27324	.27086	.26848
0.9	.26609	.26369	.26129	.25888	.25647	.25406	.25164	.24923	.24681	.24439
1.0	.24197	.23955	.23713	.23471	.23230	.22988	.22747	.22506	.22265	.22025
1.1	.21785	.21546	.21307	.21069	.20831	.20594	.20357	.20121	.19886	.19652
1.2	.19419	.19186	.18954	.18724	.18494	.18265	.18037	.17810	.17585	.17360
1.3	.17137	.16915	.16694	.16474	.16256	.16038	.15822	.15608	.15395	.15183
1.4	.14937	.14764	.14556	.14350	.14146	.13943	.13742	.13542	.13344	.13147
1.5	.12952	.12758	.12566	.12376	.12188	.12051	.11816	.11632	.11450	.11270
1.6	.11092	.10915	.10741	.10567	.10396	.10226	.10059	.09893	.09728	.09566
1.7	.09405	.09246	.09089	.08933	.08780	.08628	.08478	.08329	.08183	.08038
1.8	.07895	.07754	.07614	.07477	.07341	.07206	.07074	.06943	.06814	.06687
1.9	.06562	.06438	.06316	.06195	.06077	.05959	.05844	.05730	.05618	.05508
2.0	.05399	.05292	.05186	.05082	.04980	.04879	.04780	.04682	.04586	.04491
2.1	.04398	.04307	.04217	.04128	.04041	.03955	.03871	.03788	.03706	.03626
2.2	.03547	.03470	.03394	.03319	.03246	.03174	.03103	.03034	.02965	.02898
2.3	.02833	.02768	.02705	.02643	.02582	.02522	.02463	.02406	.02349	.02294
2.4	.02239	.02186	.02134	.02083	.02033	.01984	.01936	.01889	.01842	.01797
2.5	.01753	.01709	.01667	.01625	.01585	.01545	.01506	.01468	.01431	.01394
2.6	.01358	.01323	.01289	.01256	.01223	.01191	.01160	.01130	.01100	.01071
2.7	.01042	.01014	.00987	.00961	.00935	.00909	.00885	.00861	.00837	.00814
2.8	.00792	.00770	.00748	.00727	.00707	.00687	.00668	.00649	.00631	.00613
2.9	.00595	.00578	.00562	.00545	.00530	.00514	.00499	.00485	.00471	.00457
	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
3.0	.00443	.00327	.00238	.00172	.00123	.00087	.00061	.00042	.00029	.00020

II. Normaalne jaotusfunktsioon.

Normaalne juhusliku suuruse $X \sim N(0,1)$ jaotusfunktsioon

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = P(X \leq x) \\ (-3,9 \leq x \leq 0).$$

<i>u</i>	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
- 0,0	.500000	.496011	.492022	.488034	.484047	.480062	.476078	.472097	.468119	.464144
- 0,1	.460172	.456205	.452242	.448283	.444330	.440382	.436440	.432505	.428576	.424655
- 0,2	.420740	.416834	.412936	.409046	.405165	.401294	.397432	.393580	.389739	.385908
- 0,3	.382089	.378280	.374384	.370700	.366928	.363169	.359424	.355691	.351973	.348268
- 0,4	.344578	.340903	.337243	.333598	.329969	.326969	.322758	.319178	.315614	.312067
- 0,5	.308538	.305026	.301532	.297056	.294598	.291160	.287740	.284339	.280957	.277595
- 0,6	.274253	.270931	.267629	.264347	.261086	.257846	.254627	.251429	.248252	.245097
- 0,7	.241964	.238852	.235762	.232695	.229650	.226627	.223627	.220650	.217695	.214764
- 0,8	.211855	.208970	.206108	.203269	.200454	.197662	.194894	.192150	.189430	.186733
- 0,9	.184060	.181411	.178786	.176186	.173609	.171056	.168528	.166023	.163543	.161087
- 1,0	.158655	.156248	.153864	.151505	.149170	.146859	.144572	.142310	.140071	.137857
- 1,1	.135666	.133500	.131357	.129238	.127143	.125072	.123024	.121000	.119000	.117023
- 1,2	.115070	.113139	.111232	.109349	.107488	.105650	.103835	.102042	.100273	.098525
- 1,3	.096800	.095098	.093418	.091759	.090123	.088508	.086915	.085344	.083793	.082264
- 1,4	.080757	.079270	.077804	.076358	.074934	.073529	.072145	.070781	.069437	.068111
- 1,5	.066807	.065522	.064256	.063008	.061780	.060571	.059380	.058208	.057053	.055917
- 1,6	.054799	.053699	.052616	.051551	.050503	.049472	.048457	.047460	.046479	.045514
- 1,7	.044566	.043633	.042716	.041815	.040930	.040059	.039204	.038364	.037538	.036727
- 1,8	.035930	.035148	.034380	.033625	.032884	.032157	.031443	.030742	.030054	.029379
- 1,9	.028717	.028067	.027429	.026803	.026190	.025588	.024998	.024419	.023852	.023296
- 2,0	.022750	.022216	.021692	.021178	.020675	.020182	.019699	.019226	.018763	.018309
- 2,1	.017864	.017429	.017003	.016586	.016177	.015778	.015386	.015003	.014629	.014262
- 2,2	.013903	.013553	.013209	.012874	.012546	.012224	.011911	.011604	.011304	.011011
- 2,3	.010724	.010444	.010170	.009903	.009642	.009387	.009138	.008894	.008656	.008424
- 2,4	.008198	.007976	.007760	.007549	.007344	.007143	.006947	.006756	.006569	.006387
- 2,5	.006210	.006037	.005868	.005703	.005543	.005386	.005234	.005085	.004940	.004799
- 2,6	.004661	.004527	.004396	.004269	.004145	.004025	.003907	.003793	.003681	.003573
- 2,7	.003467	.003364	.003264	.003167	.003078	.002980	.002890	.002803	.002718	.002635
- 2,8	.002555	.002477	.002401	.002327	.002256	.002186	.002118	.002052	.001988	.001926
- 2,9	.001866	.001807	.001750	.001695	.001641	.001589	.001538	.001489	.001441	.001395
	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
- 3,0	.001350	.000968	.000687	.000483	.000337	.000243	.000159	.000080	.000020	.000048

Normaalse juhusliku suuruse $X \sim N(0,1)$ jaotus-
funktsioon

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = P(X < x)$$

$(0 \leq x \leq 3,9)$.

Tabel on võetud teosest [8].

<i>u</i>	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	.500000	.503989	.507978	.511966	.515953	.519938	.523922	.527903	.531881	.535856
0,1	.539828	.543795	.547758	.551717	.555670	.559618	.563560	.567495	.571424	.575345
0,2	.579260	.583166	.587064	.590954	.594835	.598706	.602568	.606420	.610261	.614092
0,3	.617911	.621720	.625616	.629300	.633072	.636831	.640576	.644309	.648027	.651732
0,4	.655422	.659097	.662757	.666402	.670031	.673645	.677242	.680822	.684386	.687933
0,5	.691462	.694974	.698468	.702944	.705402	.708840	.712260	.715661	.719043	.722405
0,6	.725747	.729069	.732371	.735653	.738914	.742154	.745373	.748571	.751748	.754903
0,7	.758036	.761148	.764238	.767305	.770350	.773373	.776373	.779350	.782305	.785236
0,8	.788145	.791030	.793892	.796731	.799546	.802338	.805106	.807850	.810570	.813267
0,9	.815940	.818589	.821214	.823814	.826391	.828944	.831472	.833977	.836457	.838913
1,0	.841345	.843752	.846136	.848495	.850830	.853141	.855428	.857690	.859929	.862143
1,1	.864334	.866500	.868643	.870762	.872857	.874928	.876976	.879000	.881000	.882977
1,2	.884930	.886861	.888768	.890651	.892512	.894350	.896165	.897958	.899727	.901475
1,3	.903200	.904902	.906582	.908241	.909877	.911492	.913085	.914656	.916207	.917736
1,4	.919243	.920730	.922196	.923642	.925066	.926471	.927855	.929219	.930563	.931889
1,5	.933193	.934478	.935744	.936992	.938220	.939429	.940620	.941792	.942947	.944083
1,6	.945201	.946301	.947384	.948449	.949497	.950528	.951543	.952540	.953521	.954486
1,7	.955434	.956367	.957284	.958185	.959070	.959941	.960796	.961636	.962462	.963273
1,8	.964070	.964852	.965620	.966375	.967116	.967843	.968557	.969258	.969946	.970621
1,9	.971283	.971933	.972571	.973197	.973810	.974412	.975002	.975581	.976138	.976704
2,0	.977250	.977784	.978308	.978822	.979325	.979818	.980301	.980774	.981237	.981691
2,1	.982136	.982571	.982997	.983414	.983823	.984222	.984614	.984997	.985371	.985738
2,2	.986097	.986447	.986791	.987126	.987454	.987776	.988089	.988396	.988696	.988989
2,3	.989276	.989556	.989830	.990097	.990358	.990613	.990862	.991106	.991344	.991576
2,4	.991802	.992024	.992240	.992451	.992656	.992857	.993053	.993244	.993431	.993613
2,5	.993790	.993963	.994132	.994297	.994457	.994614	.994766	.994915	.995060	.995201
2,6	.995339	.995473	.995604	.995731	.995855	.995975	.996093	.996207	.996319	.996427
2,7	.996533	.996636	.996736	.996833	.996928	.997020	.997110	.997197	.997282	.997365
2,8	.997445	.997523	.997599	.997673	.997744	.997814	.997882	.997948	.998012	.998074
2,9	.998134	.998193	.998250	.998305	.998359	.998411	.998462	.998511	.998559	.998605
	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
3,0	.998650	.999032	.999313	.999517	.999663	.999767	.999841	.999892	.999928	.999952

III. Normaaljaotuse kvantillid (jaotusfunktsiooni pöörd- funktsioon).

Normaalse juhusliku suuruse $X \sim N(0, 1)$ kvantillid.

Normaaljaotuse $N(0, 1)$ jaotusfunktsiooni $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ pöördfunktsioon.

Argumendiks on $\Phi(x)$; selle kaks esimest kümnendkohta määravad tabeli rea, kolmas kümnendkoht (0,000-0,009) tabeli veeru, kust leiame antud $\Phi(x)$ väärtusele vasta-va x väärtuse.

Tabel on võetud teosest [5].

$x \rightarrow$ ↓	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,00	$-\infty$	-3,09	-2,88	-2,75	-2,65	-2,58	-2,51	-2,46	-2,41	-2,37
0,01	-2,33	-2,29	-2,26	-2,23	-2,20	-2,17	-2,14	-2,12	-2,10	-2,07
0,02	-2,05	-2,03	-2,01	-2,00	-1,98	-1,96	-1,94	-1,93	-1,91	-1,90
0,03	-1,88	-1,87	-1,85	-1,84	-1,83	-1,81	-1,80	-1,79	-1,77	-1,76
0,04	-1,75	-1,74	-1,73	-1,72	-1,71	-1,70	-1,68	-1,67	-1,66	-1,65
0,05	-1,64	-1,64	-1,63	-1,62	-1,61	-1,60	-1,59	-1,58	-1,57	-1,56
0,06	-1,55	-1,55	-1,54	-1,53	-1,52	-1,51	-1,51	-1,50	-1,49	-1,48
0,07	-1,48	-1,47	-1,46	-1,45	-1,45	-1,44	-1,43	-1,43	-1,42	-1,41
0,08	-1,41	-1,40	-1,39	-1,39	-1,38	-1,37	-1,37	-1,36	-1,35	-1,35
0,09	-1,34	-1,33	-1,33	-1,32	-1,32	-1,31	-1,30	-1,30	-1,29	-1,29
0,10	-1,28	-1,28	-1,27	-1,26	-1,26	-1,25	-1,25	-1,24	-1,24	-1,23
0,11	-1,23	-1,22	-1,22	-1,21	-1,21	-1,20	-1,20	-1,19	-1,19	-1,18
0,12	-1,18	-1,17	-1,17	-1,16	-1,16	-1,15	-1,15	-1,14	-1,14	-1,13
0,13	-1,13	-1,12	-1,12	-1,11	-1,11	-1,10	-1,10	-1,09	-1,09	-1,09
0,14	-1,08	-1,08	-1,07	-1,07	-1,06	-1,06	-1,05	-1,05	-1,05	-1,04
0,15	-1,04	-1,03	-1,03	-1,02	-1,02	-1,02	-1,01	-1,01	-1,00	-1,00
0,16	-0,99	-0,99	-0,99	-0,98	-0,98	-0,97	-0,97	-0,97	-0,96	-0,96
0,17	-0,95	-0,95	-0,95	-0,94	-0,94	-0,93	-0,93	-0,93	-0,92	-0,92
0,18	-0,92	-0,91	-0,91	-0,90	-0,90	-0,90	-0,89	-0,89	-0,89	-0,88
0,19	-0,88	-0,87	-0,87	-0,87	-0,86	-0,86	-0,86	-0,85	-0,85	-0,85
0,20	-0,84	-0,84	-0,83	-0,83	-0,83	-0,82	-0,82	-0,82	-0,81	-0,81
0,21	-0,81	-0,80	-0,80	-0,80	-0,79	-0,79	-0,79	-0,78	-0,78	-0,78
0,22	-0,77	-0,77	-0,77	-0,76	-0,76	-0,76	-0,75	-0,75	-0,75	-0,74
0,23	-0,74	-0,74	-0,73	-0,73	-0,73	-0,72	-0,72	-0,72	-0,71	-0,71
0,24	-0,71	-0,70	-0,70	-0,70	-0,69	-0,69	-0,69	-0,68	-0,68	-0,68
0,25	-0,67	-0,67	-0,67	-0,67	-0,66	-0,66	-0,66	-0,65	-0,65	-0,65
0,26	-0,64	-0,64	-0,64	-0,63	-0,63	-0,63	-0,63	-0,62	-0,62	-0,62
0,27	-0,61	-0,61	-0,61	-0,60	-0,60	-0,60	-0,59	-0,59	-0,59	-0,59
0,28	-0,58	-0,58	-0,58	-0,57	-0,57	-0,57	-0,57	-0,56	-0,56	-0,56
0,29	-0,55	-0,55	-0,55	-0,54	-0,54	-0,54	-0,54	-0,53	-0,53	-0,53
0,30	-0,52	-0,52	-0,52	-0,52	-0,51	-0,51	-0,51	-0,50	-0,50	-0,50
0,31	-0,50	-0,49	-0,49	-0,49	-0,48	-0,48	-0,48	-0,48	-0,47	-0,47

$x \rightarrow$ ↓	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,32	-0,47	-0,46	-0,46	-0,46	-0,46	-0,45	-0,45	-0,45	-0,45	-0,44
0,33	-0,44	-0,44	-0,43	-0,43	-0,43	-0,43	-0,42	-0,42	-0,42	-0,42
0,34	-0,41	-0,41	-0,41	-0,40	-0,40	-0,40	-0,40	-0,39	-0,39	-0,39
0,35	-0,39	-0,38	-0,38	-0,38	-0,37	-0,37	-0,37	-0,37	-0,36	-0,36
0,36	-0,36	-0,36	-0,35	-0,35	-0,35	-0,35	-0,34	-0,34	-0,34	-0,33
0,37	-0,33	-0,33	-0,33	-0,32	-0,32	-0,32	-0,32	-0,31	-0,31	-0,31
0,38	-0,31	-0,30	-0,30	-0,30	-0,30	-0,29	-0,29	-0,29	-0,28	-0,28
0,39	-0,28	-0,28	-0,27	-0,27	-0,27	-0,27	-0,26	-0,26	-0,26	-0,26
0,40	-0,25	-0,25	-0,25	-0,25	-0,24	-0,24	-0,24	-0,24	-0,23	-0,23
0,41	-0,23	-0,23	-0,22	-0,22	-0,22	-0,21	-0,21	-0,21	-0,21	-0,20
0,42	-0,20	-0,20	-0,20	-0,19	-0,19	-0,19	-0,19	-0,18	-0,18	-0,18
0,43	-0,18	-0,17	-0,17	-0,17	-0,17	-0,16	-0,16	-0,16	-0,16	-0,15
0,44	-0,15	-0,15	-0,15	-0,14	-0,14	-0,14	-0,14	-0,13	-0,13	-0,13
0,45	-0,13	-0,12	-0,12	-0,12	-0,12	-0,11	-0,11	-0,11	-0,11	-0,10
0,46	-0,10	-0,10	-0,10	-0,09	-0,09	-0,09	-0,09	-0,08	-0,08	-0,08
0,47	-0,08	-0,07	-0,07	-0,07	-0,07	-0,06	-0,06	-0,06	-0,06	-0,05
0,48	-0,05	-0,05	-0,05	-0,04	-0,04	-0,04	-0,04	-0,03	-0,03	-0,03
0,49	-0,03	-0,02	-0,02	-0,02	-0,02	-0,01	-0,01	-0,01	-0,01	-0,00
0,50	0,00	0,00	0,01	0,01	0,01	0,01	0,02	0,02	0,02	0,02
0,51	0,03	0,03	0,03	0,03	0,04	0,04	0,04	0,04	0,05	0,05
0,52	0,05	0,05	0,06	0,06	0,06	0,06	0,07	0,07	0,07	0,07
0,53	0,08	0,08	0,08	0,08	0,09	0,09	0,09	0,09	0,10	0,10
0,54	0,10	0,10	0,11	0,11	0,11	0,11	0,12	0,12	0,12	0,12
0,55	0,13	0,13	0,13	0,13	0,14	0,14	0,14	0,14	0,15	0,15
0,56	0,15	0,15	0,16	0,16	0,16	0,16	0,17	0,17	0,17	0,17
0,57	0,18	0,18	0,18	0,18	0,19	0,19	0,19	0,19	0,20	0,20
0,58	0,20	0,20	0,21	0,21	0,21	0,21	0,22	0,22	0,22	0,23
0,59	0,23	0,23	0,23	0,24	0,24	0,24	0,24	0,25	0,25	0,25
0,60	0,25	0,26	0,26	0,26	0,26	0,27	0,27	0,27	0,27	0,28
0,61	0,28	0,28	0,28	0,29	0,29	0,29	0,30	0,30	0,30	0,30
0,62	0,31	0,31	0,31	0,31	0,32	0,32	0,32	0,32	0,33	0,33
0,63	0,33	0,33	0,34	0,34	0,34	0,35	0,35	0,35	0,35	0,36
0,64	0,36	0,36	0,36	0,37	0,37	0,37	0,37	0,38	0,38	0,38
0,65	0,39	0,39	0,39	0,39	0,40	0,40	0,40	0,40	0,41	0,41

$x \rightarrow$ ↓	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,66	0,41	0,42	0,42	0,42	0,42	0,43	0,43	0,43	0,43	0,44
0,67	0,44	0,44	0,45	0,45	0,45	0,45	0,46	0,46	0,46	0,46
0,68	0,47	0,47	0,47	0,48	0,48	0,48	0,48	0,49	0,49	0,49
0,69	0,50	0,50	0,50	0,50	0,51	0,51	0,51	0,52	0,52	0,52
0,70	0,52	0,53	0,53	0,53	0,54	0,54	0,54	0,54	0,55	0,55
0,71	0,55	0,56	0,56	0,56	0,57	0,57	0,57	0,57	0,58	0,58
0,72	0,58	0,59	0,59	0,59	0,59	0,60	0,60	0,60	0,61	0,61
0,73	0,61	0,62	0,62	0,62	0,63	0,63	0,63	0,63	0,64	0,64
0,74	0,64	0,65	0,65	0,65	0,66	0,66	0,66	0,67	0,67	0,67
0,75	0,67	0,68	0,68	0,68	0,69	0,69	0,69	0,70	0,70	0,70
0,76	0,71	0,71	0,71	0,72	0,72	0,72	0,73	0,73	0,73	0,74
0,77	0,74	0,74	0,75	0,75	0,75	0,76	0,76	0,76	0,77	0,77
0,78	0,77	0,78	0,78	0,78	0,79	0,79	0,79	0,80	0,80	0,80
0,79	0,81	0,81	0,81	0,82	0,82	0,82	0,83	0,83	0,83	0,84
0,80	0,84	0,85	0,85	0,85	0,86	0,86	0,86	0,87	0,87	0,87
0,81	0,88	0,88	0,89	0,89	0,89	0,90	0,90	0,90	0,91	0,91
0,82	0,92	0,92	0,92	0,93	0,93	0,93	0,94	0,94	0,95	0,95
0,83	0,95	0,96	0,96	0,97	0,97	0,97	0,98	0,98	0,99	0,99
0,84	0,99	1,00	1,00	1,01	1,01	1,02	1,02	1,02	1,03	1,03
0,85	1,04	1,04	1,05	1,05	1,05	1,06	1,06	1,07	1,07	1,08
0,86	1,08	1,09	1,09	1,09	1,10	1,10	1,11	1,11	1,12	1,12
0,87	1,13	1,13	1,14	1,14	1,15	1,15	1,16	1,16	1,17	1,17
0,88	1,18	1,18	1,19	1,19	1,20	1,20	1,21	1,21	1,22	1,22
0,89	1,23	1,23	1,24	1,24	1,25	1,25	1,26	1,26	1,27	1,28
0,90	1,28	1,29	1,29	1,30	1,30	1,31	1,32	1,32	1,33	1,33
0,91	1,34	1,35	1,35	1,36	1,37	1,37	1,38	1,39	1,39	1,40
0,92	1,41	1,41	1,42	1,43	1,43	1,44	1,45	1,45	1,46	1,47
0,93	1,48	1,48	1,49	1,50	1,51	1,51	1,52	1,53	1,54	1,55
0,94	1,55	1,56	1,57	1,58	1,59	1,60	1,61	1,62	1,63	1,64
0,95	1,64	1,65	1,66	1,67	1,68	1,70	1,71	1,72	1,73	1,74
0,96	1,75	1,76	1,77	1,79	1,80	1,81	1,83	1,84	1,85	1,87
0,97	1,88	1,90	1,91	1,93	1,94	1,96	1,98	2,00	2,01	2,03
0,98	2,05	2,07	2,10	2,12	2,14	2,17	2,20	2,23	2,26	2,29
0,99	2,33	2,37	2,41	2,46	2,51	2,58	2,65	2,75	2,88	3,09

IV. t-jaotus.

t-jaotuse täiendkvantiiidid ja hälbed.

$P(| X| > p_{\alpha}) = \alpha$ (kahepoolne hüpotees),

$P(X > q_{\alpha}) = \alpha'$ (ühepoolne hüpotees).

Tabel on võetud teosest [8].

V. χ^2 - jaotus.

χ^2 - jaotus.

Juhusliku suuruse χ^2_f täiendkvantiliid $p_{f,\alpha}$
(α on esitatud %-des)

$$P(\chi^2 > p_{f,\alpha}) = \alpha,$$

f on vabadusastmete arv.

Tabel on võetud teosest [8].

f	α											
	99,0	97,5	95	90	70	50	30	10	5	2,5	1	0,1
1	,0 ³ 157	,0 ³ 982	,0 ² 393	,0158	,148	,455	1,07	2,71	3,84	5,02	6,62	10,8
2	,0201	0506	,103	,211	,713	1,39	2,41	4,61	5,99	7,38	9,21	13,8
3	,115	,216	,352	,584	1,42	2,37	3,67	6,25	7,81	9,35	11,3	16,3
4	,297	,484	,711	1,06	2,19	3,36	4,88	7,78	9,49	11,1	13,3	18,5
5	,554	,831	1,15	1,61	3,00	4,35	6,06	9,24	11,1	12,8	15,1	20,5
6	,872	1,24	1,64	2,20	3,83	5,35	7,23	10,6	12,6	14,4	16,8	22,5
7	1,24	1,69	2,17	2,83	4,67	6,35	8,38	12,0	14,1	16,0	18,5	24,3
8	1,65	2,18	2,73	3,49	5,53	7,34	9,52	13,4	15,5	17,5	20,1	26,1
9	2,09	2,70	3,33	4,17	6,39	8,34	10,7	14,7	16,9	19,0	21,7	27,9
10	2,56	3,25	3,94	4,87	7,27	9,34	11,8	16,0	18,3	20,5	23,2	29,6
11	3,05	3,82	4,57	5,58	8,15	10,3	12,9	17,3	19,7	21,9	24,7	31,3
12	3,57	4,40	5,23	6,30	9,03	11,3	14,0	18,5	21,0	23,3	26,2	32,9
13	4,11	5,01	5,89	7,04	9,93	12,3	15,1	19,8	22,4	24,7	27,7	34,5
14	4,66	5,63	6,57	7,79	10,8	13,3	16,2	21,1	23,7	26,1	29,1	36,1
15	5,23	6,26	7,26	8,55	11,7	14,3	17,3	22,3	25,0	27,5	30,6	37,7
16	5,81	6,91	7,96	9,31	12,6	15,3	18,4	23,5	26,3	28,8	32,0	39,3
17	6,41	7,56	8,67	10,1	13,5	16,3	19,5	24,8	27,6	30,2	33,4	40,8
18	7,01	8,23	9,39	10,9	14,4	17,3	20,6	26,0	28,9	31,5	34,8	42,3
19	7,63	8,91	10,1	11,7	15,4	18,3	21,7	27,2	30,1	32,9	36,2	43,8
20	8,26	9,59	10,9	12,4	16,3	19,3	22,8	28,4	31,4	34,2	37,6	45,3
21	8,90	10,3	11,6	13,2	17,2	20,3	23,9	29,6	32,7	35,5	38,9	46,8
22	9,54	11,0	12,3	14,0	18,1	21,3	24,9	30,8	33,9	36,8	40,3	48,3
23	10,2	11,7	13,1	14,8	19,0	22,3	26,0	32,0	35,2	38,1	41,6	49,7
24	10,9	12,4	13,8	15,7	19,9	23,3	27,1	33,2	36,4	39,4	43,0	51,2
25	11,5	13,1	14,6	16,5	20,9	24,3	28,2	34,4	37,7	40,6	44,3	52,6
26	12,2	13,8	15,4	17,3	21,8	25,3	29,2	35,6	38,9	41,9	45,6	54,1
27	12,9	14,6	16,2	18,1	22,7	26,3	30,3	36,7	40,1	43,2	47,0	55,5
28	13,6	15,3	16,9	18,9	23,6	27,3	31,4	37,9	41,3	44,5	48,3	56,9
29	14,3	16,0	17,7	19,8	24,6	28,3	32,5	39,1	42,6	45,7	49,6	58,3

f	α											
	99,0	97,5	95	90	70	50	30	10	5	2,5	1	0,1
30	15,0	16,8	18,5	20,6	25,5	29,3	33,5	40,3	43,8	47,0	50,9	59,7
40	22,2	24,4	26,5	29,1	34,9	39,3	44,2	51,8	55,8	59,3	63,7	73,4
50	29,7	32,4	34,8	37,7	44,3	49,3	54,7	63,2	67,5	71,4	76,2	86,7
60	37,5	40,5	43,2	46,5	53,8	59,3	65,2	74,4	79,1	83,3	88,4	99,6
70	45,4	48,8	51,7	55,3	63,3	69,3	75,1	85,5	90,5	95,0	100,4	112,8
80	53,5	57,2	60,4	64,3	72,9	79,3	86,1	96,6	101,9	106,6	112,3	124,8
90	61,8	65,6	69,1	73,3	82,5	89,3	96,5	107,6	113,1	118,1	124,1	137,2
100	70,1	74,2	77,9	82,4	92,1	99,3	106,9	118,5	124,3	129,6	135,8	149,4

VI. Normaalse jaotuse standardhälbe nihutamata hinnang .

Normaalse juhusliku suuruse $X \sim N(m, \sigma)$

nihutamata hinnangu ja väljavõtte standard-
hälbe suhe. Nihutamata hinnang

$$\sigma^* = \frac{\sigma_n}{H_n}, \text{ kus } \tilde{\sigma}_n = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

Tabel on võetud teosest [10].

n	H_n	n	H_n	n	H_n	n	H_n
4	0,7979	13	0,9410	30	0,9748	75	0,9900
5	0,8407	14	0,9453	35	0,9784	80	0,9906
6	0,8686	15	0,9490	40	0,9811	85	0,9911
7	0,8882	16	0,9523	45	0,9832	90	0,9916
8	0,9027	17	0,9551	50	0,9849	95	0,9921
9	0,9139	18	0,9576	55	0,9863	100	0,9925
10	0,9227	19	0,9599	60	0,9874		
11	0,9300	20	0,9619	65	0,9884		
12	0,9359	25	0,9696	70	0,9892		

VII. Normaaljaotuse standardhälbe jaotus

$$\left(\sqrt{\frac{f}{\chi^2_{1-p}}} \right)$$

Normaaljaotusega $N(m, 1)$ juhusliku suuruse standardhälbe hinnangu s jaotuse kvantiilid.

$$X^{(f)} = \sqrt{\frac{f}{Y_f}} \quad , \quad Y_f \sim \chi_f^2$$

$$P(X^{(f)} < x_\alpha) = \alpha.$$

Tabel on võetud teosest [12].

Число степеней свободы <i>f</i>	Уровни значимости <i>p</i>							
	0,995	0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,70	0,30
1	160	79	41	16	7,9	3,9	2,6	0,97
2	14	10	7,1	4,4	3,1	2,1	1,7	0,91
3	6,5	5,1	4,0	2,9	2,3	1,7	1,4	0,91
4	4,4	3,7	3,1	2,4	1,9	1,6	1,4	0,90
5	3,5	3,0	2,6	2,1	1,8	1,5	1,3	0,91
6	3,0	2,6	2,3	1,9	1,6	1,4	1,3	0,91
7	2,7	2,4	2,1	1,8	1,6	1,4	1,2	0,91
8	2,4	2,2	2,0	1,7	1,5	1,3	1,2	0,92
9	2,3	2,1	1,9	1,6	1,5	1,3	1,2	0,92
10	2,2	2,0	1,8	1,6	1,4	1,3	1,2	0,92
11	2,1	1,9	1,7	1,5	1,4	1,3	1,2	0,92
12	2,0	1,8	1,7	1,5	1,4	1,2	1,2	0,92
13	1,9	1,8	1,6	1,5	1,4	1,2	1,1	0,93
14	1,9	1,7	1,6	1,5	1,3	1,2	1,1	0,93
15	1,8	1,7	1,6	1,4	1,3	1,2	1,1	0,93
16	1,8	1,7	1,6	1,4	1,3	1,2	1,1	0,93
17	1,7	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1	0,93
18	1,7	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1	0,94
19	1,7	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1	0,94
20	1,6	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1	0,94
21	1,6	1,5	1,5	1,3	1,3	1,2	1,1	0,94
22	1,6	1,5	1,4	1,3	1,3	1,2	1,1	0,94
23	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2	1,2	1,1	0,94
24	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2	1,2	1,1	0,94
25	1,5	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1	1,1	0,94
26	1,5	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1	1,1	0,94
27	1,5	1,4	1,4	1,3	1,2	1,1	1,1	0,94
28	1,5	1,4	1,4	1,3	1,2	1,1	1,1	0,94
29	1,5	1,4	1,4	1,3	1,2	1,1	1,1	0,94
30	1,5	1,4	1,4	1,3	1,2	1,1	1,1	0,94

Число степеней свободы, f	Уровни значимости p							
	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,005	0,002	0,001
1	0,78	0,61	0,51	0,43	0,39	0,36	0,32	0,30
2	0,79	0,66	0,58	0,51	0,47	0,43	0,40	0,38
3	0,80	0,69	0,62	0,55	0,51	0,48	0,45	0,43
4	0,82	0,72	0,64	0,59	0,56	0,52	0,49	0,46
5	0,83	0,74	0,67	0,61	0,58	0,55	0,52	0,49
6	0,84	0,75	0,69	0,63	0,60	0,57	0,54	0,52
7	0,84	0,76	0,71	0,65	0,62	0,59	0,56	0,54
8	0,85	0,77	0,72	0,66	0,63	0,60	0,57	0,55
9	0,86	0,78	0,73	0,68	0,64	0,62	0,59	0,57
10	0,86	0,79	0,74	0,69	0,66	0,63	0,60	0,58
11	0,87	0,80	0,75	0,70	0,67	0,64	0,61	0,59
12	0,87	0,81	0,76	0,71	0,68	0,65	0,62	0,60
13	0,87	0,81	0,76	0,71	0,68	0,66	0,63	0,61
14	0,88	0,81	0,77	0,72	0,69	0,67	0,64	0,62
15	0,88	0,82	0,77	0,73	0,70	0,68	0,65	0,63
16	0,88	0,82	0,78	0,74	0,71	0,68	0,66	0,64
17	0,89	0,83	0,79	0,74	0,71	0,69	0,66	0,65
18	0,89	0,83	0,79	0,75	0,72	0,69	0,67	0,65
19	0,89	0,84	0,80	0,75	0,72	0,70	0,68	0,66
20	0,89	0,84	0,80	0,76	0,73	0,71	0,68	0,66
21	0,89	0,84	0,80	0,76	0,74	0,71	0,69	0,67
22	0,90	0,84	0,81	0,76	0,74	0,72	0,69	0,67
23	0,90	0,85	0,81	0,77	0,74	0,72	0,69	0,68
24	0,90	0,85	0,81	0,77	0,75	0,73	0,70	0,68
25	0,90	0,85	0,81	0,78	0,75	0,73	0,71	0,69
26	0,91	0,85	0,82	0,78	0,76	0,73	0,71	0,69
27	0,91	0,86	0,82	0,78	0,76	0,74	0,71	0,70
28	0,91	0,86	0,82	0,79	0,76	0,74	0,72	0,70
29	0,91	0,86	0,82	0,79	0,76	0,75	0,72	0,71
30	0,91	0,86	0,83	0,79	0,77	0,75	0,72	0,71

VIII. F-jaotus.

F-jaotus. Juhusliku suuruse $X^{(f_1, f_2)}$ täiend -
kvantiilid p_{α} :

$$P(X > p_{0,05}) = 0,05$$

$$P(X > p_{0,01}) = 0,01.$$

Juhusliku suuruse $X^{(f_1, f_2)} \sim F_{f_1, f_2}$ täiend -
kvantiilid $p_{0,005}$.

$$P(X > p_{0,005}) = 0,005.$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞	f_n	
1	101 4052	200 1999	210 5403	225 5025	230 5704	234 5850	237 5923	239 5981	241 6022	242 6066	243 6082	244 6108	245 6142	246 6169	248 6203	249 6234	250 6268	251 6296	252 6362	253 6323	253 6384	254 6452	254 6561	254 6866	1	
2	18,51 93,49	19,00 99,00	19,16 99,17	19,25 99,25	19,30 99,30	19,33 99,33	19,36 99,34	19,37 99,36	19,38 99,38	19,39 99,40	19,40 99,41	19,41 99,42	19,42 99,43	19,43 99,44	19,44 99,45	19,45 99,46	19,46 99,47	19,47 99,48	19,48 99,49	19,49 99,49	19,49 99,50	19,50 99,50	19,50 99,50	19,50 99,50	2	
3	10,13 34,12	9,55 30,92	9,25 20,46	9,12 23,71	9,01 26,24	8,94 27,01	8,88 27,49	8,84 27,49	8,81 27,34	8,78 27,13	8,76 27,13	8,74 27,05	8,71 26,92	8,69 26,83	8,66 26,69	8,64 26,60	8,62 26,50	8,60 26,41	8,58 26,35	8,57 26,27	8,56 26,23	8,54 26,18	8,54 26,18	8,53 26,12	8,53 26,12	3
4	7,71 21,20	6,94 18,00	6,59 16,69	6,39 15,98	6,26 15,52	6,16 15,27	6,09 14,98	6,04 14,80	6,00 14,66	5,98 14,54	5,93 14,45	5,91 14,37	5,87 14,24	5,84 14,15	5,80 14,02	5,77 13,98	5,74 13,83	5,71 13,74	5,70 13,69	5,68 13,61	5,66 13,57	5,65 13,52	5,64 13,48	5,64 13,46	5,63 13,46	4
5	6,61 19,26	5,79 13,27	5,41 12,06	5,19 11,30	5,05 10,97	4,95 10,67	4,88 10,45	4,82 10,27	4,78 10,15	4,74 10,05	4,70 9,96	4,68 9,90	4,64 9,80	4,60 9,77	4,56 9,68	4,53 9,55	4,50 9,47	4,46 9,38	4,44 9,29	4,42 9,24	4,40 9,17	4,38 9,13	4,37 9,07	4,36 9,04	4,36 9,02	5
6	5,99 13,74	5,14 10,92	4,76 9,76	4,52 9,15	4,30 8,75	4,28 8,47	4,21 8,20	4,15 8,10	4,10 7,98	4,06 7,97	4,05 7,79	4,00 7,72	3,98 7,60	3,92 7,52	3,87 7,80	3,84 7,81	3,81 7,28	3,77 7,14	3,75 7,09	3,72 7,02	3,71 6,99	3,69 6,94	3,68 6,90	3,67 6,86	3,67 6,86	6
7	5,59 12,25	4,74 9,55	4,35 8,45	4,12 7,85	3,97 7,48	3,87 7,19	3,79 7,00	3,73 6,84	3,68 6,71	3,63 6,62	3,60 6,54	3,57 6,47	3,52 6,35	3,49 6,27	3,44 6,15	3,41 6,07	3,38 5,98	3,34 5,90	3,32 5,85	3,29 5,78	3,28 5,75	3,28 5,70	3,25 5,67	3,24 5,65	3,23 5,65	7
8	5,32 11,26	4,40 8,65	4,07 7,59	3,84 7,01	3,69 6,68	3,58 6,37	3,50 6,19	3,44 6,08	3,39 5,97	3,34 5,82	3,31 5,74	3,28 5,67	3,23 5,56	3,20 5,48	3,15 5,36	3,12 5,28	3,08 5,20	3,05 5,11	3,03 5,04	3,00 5,00	2,98 4,96	2,96 4,91	2,94 4,86	2,93 4,86	2,93 4,86	8
9	5,12 10,56	4,26 8,02	3,80 6,99	3,63 6,42	3,48 6,06	3,37 5,80	3,29 5,62	3,23 5,47	3,18 5,35	3,13 5,26	3,10 5,18	3,07 5,11	3,02 5,00	2,98 4,92	2,93 4,80	2,90 4,73	2,86 4,61	2,82 4,52	2,80 4,45	2,77 4,41	2,77 4,36	2,74 4,35	2,72 4,32	2,71 4,31	2,71 4,31	9
10	4,96 10,04	4,10 7,56	3,71 6,55	3,48 5,99	3,33 5,64	3,22 5,39	3,14 5,21	3,07 5,06	3,02 4,95	2,97 4,85	2,94 4,78	2,91 4,71	2,86 4,60	2,82 4,52	2,77 4,41	2,74 4,33	2,70 4,25	2,67 4,17	2,64 4,12	2,61 4,06	2,59 4,01	2,56 3,96	2,55 3,93	2,54 3,91	2,54 3,91	10
11	4,81 9,65	3,98 7,20	3,59 6,22	3,36 5,67	3,20 5,32	3,07 5,07	2,95 4,88	2,90 4,74	2,86 4,63	2,82 4,54	2,79 4,46	2,74 4,40	2,70 4,29	2,61 4,21	2,61 4,10	2,57 4,02	2,53 3,94	2,50 3,86	2,47 3,74	2,45 3,70	2,42 3,66	2,41 3,62	2,40 3,62	2,40 3,60	2,40 3,60	11
12	4,75 9,33	3,88 6,65	3,49 5,65	3,26 5,11	3,11 4,66	3,00 4,32	2,92 4,15	2,85 4,00	2,80 3,80	2,76 3,70	2,72 3,62	2,69 3,50	2,64 3,45	2,60 3,38	2,54 3,36	2,50 3,28	2,46 3,20	2,42 3,12	2,40 3,06	2,36 3,00	2,35 2,96	2,32 2,91	2,32 2,88	2,31 2,86	2,30 2,86	12
13	4,67 9,07	3,80 6,70	3,41 5,74	3,18 5,20	3,02 4,76	2,92 4,46	2,84 4,29	2,77 4,14	2,72 4,10	2,67 4,10	2,63 4,02	2,60 3,96	2,55 3,85	2,51 3,78	2,46 3,67	2,42 3,59	2,38 3,51	2,34 3,42	2,32 3,37	2,28 3,30	2,26 3,27	2,24 3,21	2,22 3,18	2,21 3,16	2,21 3,16	13
14	4,60 2,96	3,74 6,51	3,34 5,56	3,11 5,03	2,90 4,69	2,85 4,43	2,77 4,28	2,70 4,14	2,65 4,03	2,60 3,94	2,56 3,85	2,53 3,80	2,48 3,70	2,44 3,62	2,39 3,51	2,35 3,48	2,31 3,41	2,27 3,36	2,24 3,31	2,21 3,24	2,19 3,11	2,16 3,06	2,14 3,02	2,13 3,00	2,13 3,00	14
15	4,54 8,88	3,68 6,36	3,29 5,42	3,06 4,59	2,90 4,56	2,79 4,32	2,70 4,14	2,64 4,06	2,59 3,96	2,55 3,80	2,51 3,73	2,48 3,67	2,43 3,56	2,39 3,48	2,34 3,36	2,29 3,29	2,25 3,20	2,21 3,12	2,18 3,07	2,15 3,00	2,12 2,97	2,10 2,92	2,08 2,89	2,07 2,87	2,07 2,87	15

f_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.45	2.42	2.37	2.33	2.28	2.24	2.20	2.16	2.13	2.09	2.07	2.04	2.02	2.01
17	5.32	6.23	5.89	4.77	4.44	4.20	4.08	3.99	3.76	3.69	3.61	3.55	3.45	3.37	3.25	3.18	3.10	3.01	2.96	2.89	2.86	2.80	2.77	2.76
18	4.45	3.59	3.20	2.9	2.81	2.70	2.62	2.55	2.50	2.45	2.41	2.38	2.33	2.29	2.23	2.19	2.15	2.11	2.08	2.04	2.02	1.99	1.97	1.96
19	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.98	3.79	3.68	3.59	3.52	3.45	3.35	3.27	3.13	3.08	3.00	2.92	2.86	2.79	2.76	2.70	2.67	2.65
20	4.41	3.55	3.16	2.98	2.77	2.69	2.58	2.51	2.45	2.41	2.37	2.34	2.29	2.25	2.19	2.16	2.11	2.07	2.04	2.00	1.98	1.95	1.93	1.92
21	8.28	6.01	5.09	4.68	4.25	4.01	3.85	3.71	3.60	3.51	3.44	3.37	3.27	3.19	3.07	3.00	2.91	2.83	2.78	2.71	2.68	2.63	2.60	2.57
22	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.55	2.48	2.43	2.38	2.34	2.31	2.26	2.21	2.15	2.11	2.07	2.02	2.00	1.96	1.94	1.91	1.90	1.88
23	8.13	5.92	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.36	3.30	3.19	3.12	3.00	2.92	2.84	2.76	2.70	2.63	2.60	2.54	2.51	2.49
24	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.52	2.45	2.40	2.35	2.31	2.28	2.23	2.18	2.12	2.08	2.04	1.99	1.96	1.92	1.90	1.87	1.85	1.84
25	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.71	3.56	3.45	3.37	3.30	3.23	3.13	3.06	2.94	2.86	2.77	2.69	2.63	2.56	2.53	2.47	2.44	2.43
26	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.28	2.25	2.20	2.15	2.09	2.05	2.00	1.96	1.93	1.89	1.87	1.84	1.82	1.81
27	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.65	3.51	3.40	3.31	3.24	3.17	3.07	2.99	2.88	2.80	2.73	2.63	2.56	2.51	2.47	2.42	2.39	2.38
28	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.47	2.40	2.35	2.30	2.26	2.23	2.18	2.13	2.07	2.03	1.98	1.93	1.91	1.87	1.84	1.81	1.80	1.78
29	7.94	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.18	3.12	3.02	2.94	2.83	2.75	2.67	2.58	2.53	2.46	2.42	2.37	2.33	2.31
30	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.45	2.38	2.32	2.28	2.24	2.20	2.14	2.10	2.05	2.00	1.96	1.91	1.88	1.84	1.82	1.79	1.77	1.76
31	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.14	3.07	2.97	2.89	2.78	2.70	2.62	2.53	2.49	2.41	2.37	2.32	2.28	2.26
32	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.43	2.36	2.30	2.26	2.22	2.18	2.13	2.09	2.02	1.98	1.94	1.89	1.86	1.82	1.80	1.76	1.74	1.73
33	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.25	3.17	3.09	3.03	2.93	2.85	2.74	2.66	2.58	2.49	2.44	2.36	2.33	2.27	2.23	2.21
34	4.24	3.38	2.99	2.76	2.60	2.49	2.41	2.34	2.28	2.24	2.20	2.16	2.11	2.06	2.00	1.96	1.92	1.87	1.84	1.80	1.77	1.74	1.72	1.71
35	7.77	5.57	4.68	4.18	3.86	3.63	3.46	3.32	3.21	3.13	3.05	2.99	2.89	2.81	2.70	2.62	2.54	2.45	2.40	2.32	2.29	2.23	2.19	2.17
36	4.22	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.18	2.15	2.10	2.05	1.99	1.95	1.90	1.85	1.82	1.78	1.76	1.72	1.70	1.69
37	7.72	5.52	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.17	3.09	3.02	2.96	2.86	2.77	2.66	2.58	2.50	2.41	2.36	2.28	2.25	2.19	2.15	2.13
38	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.30	2.25	2.20	2.16	2.13	2.08	2.03	1.97	1.93	1.88	1.84	1.80	1.76	1.74	1.71	1.68	1.67
39	7.68	5.49	4.60	4.11	3.79	3.56	3.39	3.26	3.14	3.06	2.98	2.93	2.83	2.74	2.63	2.55	2.47	2.38	2.33	2.25	2.21	2.16	2.12	2.10
40	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.44	2.36	2.29	2.24	2.19	2.15	2.12	2.06	2.02	1.96	1.91	1.87	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69	1.67	1.65
41	7.64	5.45	4.57	4.07	3.76	3.53	3.36	3.23	3.11	3.03	2.95	2.90	2.80	2.71	2.60	2.52	2.44	2.35	2.30	2.22	2.18	2.12	2.09	2.06
42	4.18	3.33	2.93	2.70	2.54	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.14	2.10	2.05	2.00	1.94	1.90	1.85	1.80	1.77	1.73	1.71	1.68	1.65	1.64
43	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.08	3.00	2.92	2.87	2.77	2.68	2.57	2.49	2.41	2.32	2.27	2.19	2.15	2.10	2.06	2.03
44	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.34	2.27	2.21	2.16	2.12	2.08	2.04	1.99	1.93	1.89	1.84	1.79	1.76	1.72	1.69	1.66	1.64	1.62
45	7.56	5.39	4.51	4.01	3.70	3.47	3.30	3.17	3.06	2.98	2.90	2.84	2.74	2.66	2.55	2.47	2.38	2.29	2.24	2.16	2.12	2.07	2.03	2.01

f_0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞	f_1		
82	4.15 7.50	3.30 5.84	2.90 4.46	2.67 3.96	2.51 3.66	2.40 3.42	2.32 3.12	2.25 3.12	2.19 3.01	2.14 2.94	2.10 2.86	2.07 2.80	2.02 2.70	1.97 2.62	1.91 2.51	1.86 2.42	1.82 2.32	1.76 2.25	1.74 2.20	1.69 2.19	1.67 2.08	1.64 2.02	1.61 1.98	1.59 1.96	1.59	1.59	32
84	4.13 7.44	3.28 5.29	2.88 4.42	2.65 3.98	2.49 3.61	2.38 3.35	2.30 3.21	2.23 3.08	2.17 2.97	2.12 2.86	2.08 2.82	2.05 2.76	2.00 2.66	1.95 2.58	1.89 2.47	1.84 2.38	1.80 2.30	1.74 2.21	1.71 2.15	1.67 2.08	1.64 2.04	1.61 1.98	1.59 1.94	1.57 1.90	1.57	1.57	34
86	4.11 7.39	3.26 5.25	2.86 4.38	2.63 3.89	2.48 3.58	2.36 3.35	2.28 3.18	2.21 3.04	2.15 2.94	2.10 2.86	2.06 2.78	2.03 2.72	1.98 2.62	1.93 2.54	1.87 2.48	1.82 2.35	1.78 2.26	1.72 2.17	1.69 2.12	1.65 2.04	1.62 2.00	1.59 1.94	1.56 1.90	1.55 1.87	1.55	1.55	36
88	4.10 7.35	3.25 5.21	2.85 4.34	2.62 3.86	2.46 3.54	2.35 3.32	2.26 3.15	2.19 3.02	2.14 2.91	2.09 2.82	2.05 2.75	2.02 2.66	1.96 2.59	1.92 2.51	1.85 2.40	1.80 2.32	1.76 2.22	1.71 2.14	1.67 2.08	1.63 2.00	1.60 1.97	1.57 1.90	1.54 1.86	1.53 1.86	1.53	1.53	38
40	4.08 7.31	3.23 5.18	2.84 4.31	2.61 3.83	2.45 3.51	2.34 3.29	2.25 3.12	2.18 2.99	2.12 2.98	2.07 2.86	2.04 2.78	2.00 2.66	1.95 2.56	1.90 2.49	1.84 2.37	1.79 2.29	1.74 2.20	1.69 2.11	1.66 2.05	1.61 1.97	1.59 1.94	1.55 1.86	1.53 1.84	1.51 1.81	1.51	1.51	40
42	4.07 7.27	3.22 5.15	2.83 4.29	2.59 3.80	2.44 3.49	2.32 3.26	2.24 3.10	2.17 2.96	2.11 2.86	2.06 2.77	2.02 2.70	1.99 2.64	1.94 2.54	1.89 2.46	1.82 2.35	1.78 2.26	1.73 2.17	1.68 2.08	1.64 2.02	1.60 1.94	1.57 1.91	1.54 1.85	1.51 1.80	1.49 1.78	1.49	1.49	42
44	4.06 7.24	3.21 5.12	2.82 4.26	2.58 3.78	2.43 3.46	2.31 3.24	2.23 3.07	2.10 2.94	2.10 2.84	2.05 2.75	2.01 2.68	1.98 2.62	1.92 2.52	1.88 2.44	1.81 2.32	1.76 2.24	1.72 2.15	1.66 2.06	1.63 2.00	1.58 1.92	1.56 1.88	1.52 1.82	1.50 1.78	1.48 1.75	1.48	1.48	44
46	4.05 7.21	3.20 5.10	2.81 4.24	2.57 3.76	2.42 3.44	2.30 3.22	2.22 3.05	2.14 2.92	2.09 2.82	2.04 2.78	2.00 2.66	1.97 2.60	1.91 2.50	1.87 2.42	1.80 2.30	1.75 2.22	1.71 2.13	1.65 2.04	1.62 1.98	1.57 1.90	1.54 1.86	1.51 1.80	1.48 1.78	1.46 1.72	1.46	1.46	46
48	4.04 7.19	3.19 5.08	2.80 4.22	2.56 3.74	2.41 3.42	2.30 3.20	2.21 3.04	2.14 2.90	2.08 2.80	2.03 2.71	1.99 2.64	1.96 2.58	1.90 2.48	1.86 2.40	1.79 2.28	1.74 2.20	1.70 2.11	1.64 2.02	1.61 1.96	1.56 1.88	1.53 1.84	1.50 1.78	1.47 1.73	1.45 1.70	1.45	1.45	48
50	4.03 7.17	3.18 5.06	2.79 4.20	2.56 3.72	2.40 3.41	2.29 3.18	2.20 3.02	2.13 2.88	2.07 2.78	2.02 2.70	1.98 2.62	1.95 2.56	1.90 2.46	1.85 2.39	1.78 2.26	1.74 2.18	1.69 2.10	1.63 2.00	1.60 1.94	1.55 1.86	1.52 1.82	1.48 1.76	1.46 1.71	1.44 1.68	1.44	1.44	50
55	4.02 7.12	3.17 5.01	2.78 4.18	2.54 3.68	2.38 3.37	2.27 3.15	2.18 2.98	2.11 2.85	2.05 2.75	2.00 2.66	1.97 2.59	1.93 2.53	1.88 2.43	1.83 2.35	1.76 2.23	1.72 2.15	1.67 2.06	1.61 1.96	1.58 1.90	1.52 1.82	1.50 1.78	1.46 1.71	1.43 1.68	1.41 1.64	1.41	1.41	55
60	4.00 7.08	3.15 4.98	2.76 4.13	2.52 3.65	2.37 3.34	2.25 3.12	2.17 2.95	2.10 2.82	2.04 2.72	1.99 2.63	1.95 2.56	1.92 2.50	1.86 2.40	1.81 2.32	1.75 2.20	1.70 2.12	1.65 2.03	1.59 1.98	1.56 1.87	1.50 1.79	1.48 1.74	1.44 1.68	1.41 1.63	1.39 1.60	1.39	1.39	60
65	3.99 7.01	3.14 4.95	2.75 4.10	2.51 3.62	2.36 3.31	2.24 3.09	2.15 2.95	2.08 2.79	2.02 2.70	1.98 2.61	1.94 2.54	1.90 2.47	1.85 2.30	1.80 2.18	1.73 2.09	1.68 2.09	1.63 2.00	1.57 1.90	1.54 1.84	1.49 1.78	1.46 1.71	1.42 1.64	1.39 1.60	1.37 1.56	1.37	1.37	65
70	3.98 7.01	3.13 4.92	2.74 4.08	2.50 3.60	2.35 3.29	2.23 3.07	2.14 2.91	2.07 2.77	2.01 2.67	1.97 2.59	1.93 2.51	1.89 2.45	1.84 2.35	1.79 2.28	1.72 2.15	1.67 2.07	1.62 1.98	1.56 1.88	1.53 1.82	1.47 1.74	1.45 1.69	1.40 1.62	1.37 1.56	1.35 1.53	1.35	1.35	70
80	3.96 6.96	3.11 4.88	2.72 4.04	2.48 3.56	2.33 3.25	2.21 3.04	2.12 2.87	2.05 2.74	1.99 2.64	1.95 2.55	1.91 2.48	1.88 2.41	1.82 2.32	1.77 2.24	1.70 2.11	1.65 2.03	1.60 1.94	1.54 1.84	1.51 1.78	1.45 1.70	1.42 1.65	1.38 1.57	1.35 1.52	1.32 1.49	1.32	1.32	80

f_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞	f_2
100	3.94 6.90	3.06 4.82	2.70 3.08	2.46 3.51	2.30 3.20	2.19 2.90	2.10 2.82	2.03 2.69	1.97 2.59	1.92 2.51	1.88 2.45	1.85 2.38	1.79 2.26	1.75 2.16	1.78 2.08	1.83 1.98	1.57 1.80	1.51 1.79	1.48 1.78	1.42 1.64	1.39 1.58	1.34 1.51	1.39 1.48	1.29 1.48	100
125	3.02 6.84	3.07 4.72	2.68 3.04	2.44 3.47	2.29 3.17	2.17 2.95	2.08 2.79	2.01 2.65	1.95 2.56	1.90 2.47	1.86 2.40	1.83 2.38	1.77 2.28	1.72 2.15	1.72 2.08	1.65 1.94	1.60 1.85	1.49 1.75	1.45 1.68	1.39 1.59	1.36 1.54	1.31 1.46	1.27 1.40	1.25 1.37	125
150	3.91 6.81	3.03 4.75	2.67 3.01	2.43 3.44	2.27 3.14	2.16 2.92	2.07 2.73	2.00 2.62	1.94 2.58	1.89 2.44	1.85 2.37	1.82 2.30	1.76 2.20	1.71 2.12	1.64 2.00	1.59 1.91	1.54 1.88	1.47 1.72	1.44 1.66	1.37 1.56	1.34 1.51	1.29 1.48	1.25 1.37	1.22 1.33	150
200	3.89 8.70	3.04 4.71	2.65 3.00	2.41 3.41	2.26 3.11	2.14 2.90	2.05 2.78	1.98 2.60	1.92 2.50	1.87 2.41	1.83 2.34	1.80 2.28	1.74 2.17	1.69 2.00	1.62 1.97	1.57 1.96	1.52 1.79	1.45 1.69	1.42 1.62	1.35 1.58	1.32 1.48	1.26 1.39	1.22 1.33	1.16 1.28	200
400	3.86 6.70	3.02 4.66	2.62 3.02	2.39 3.36	2.23 3.06	2.12 2.85	2.03 2.69	1.96 2.55	1.90 2.46	1.85 2.37	1.81 2.29	1.78 2.23	1.72 2.12	1.67 2.04	1.60 1.92	1.54 1.84	1.49 1.74	1.42 1.64	1.38 1.57	1.32 1.47	1.28 1.42	1.22 1.32	1.16 1.24	1.13 1.19	400
1000	3.85 6.66	3.00 4.62	2.61 3.50	2.38 3.34	2.22 3.04	2.10 2.82	2.02 2.66	1.95 2.58	1.89 2.43	1.84 2.34	1.80 2.26	1.76 2.20	1.70 2.09	1.65 2.01	1.58 1.89	1.53 1.81	1.47 1.71	1.41 1.61	1.35 1.64	1.30 1.44	1.26 1.38	1.19 1.28	1.13 1.25	1.08 1.11	1000
∞	3.84 6.61	2.99 4.60	2.60 3.78	2.37 3.32	2.21 3.02	2.09 2.86	2.01 2.64	1.94 2.51	1.88 2.41	1.83 2.32	1.79 2.24	1.75 2.18	1.69 2.07	1.64 1.99	1.57 1.87	1.52 1.79	1.46 1.69	1.40 1.59	1.35 1.62	1.28 1.41	1.24 1.36	1.17 1.25	1.11 1.16	1.00 1.00	∞

Juhusliku suuruse $X^{(f_1, f_2)} \sim F_{f_1, f_2}$ täiend-
kvantiilid $P_{0,025}$.

$$P(X > P_{0,025}) = 0,025.$$

Tabel on võetud teosest [8].

f_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	∞
1	16211	20000	21615	22500	23056	23437	23715	23925	24091	24224	24426	24630	24836	24940	25044	25148	25253	25465
2	198	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	200
3	55,6	49,8	47,5	46,2	45,4	44,8	44,4	44,1	43,9	43,7	43,4	43,1	42,8	42,6	42,5	42,3	42,1	41,8
4	31,3	26,3	24,3	23,2	22,5	22,0	21,6	21,4	21,1	21,0	20,7	20,4	20,2	20,0	19,9	19,8	19,6	19,3
5	22,8	18,3	16,5	15,6	14,9	14,5	14,2	14,0	13,8	13,6	13,4	13,1	12,9	12,8	12,7	12,5	12,4	12,1
6	18,6	14,5	12,9	12,0	11,5	11,1	10,8	10,6	10,4	10,3	10,0	9,81	9,59	9,47	9,36	9,24	9,12	8,88
7	16,2	12,4	10,9	10,1	9,52	9,16	8,99	8,68	8,51	8,38	8,18	7,97	7,75	7,65	7,53	7,42	7,31	7,08
8	14,7	11,0	9,60	8,81	8,30	7,95	7,69	7,50	7,43	7,21	7,01	6,81	6,61	6,50	6,40	6,29	6,18	5,95
9	13,6	10,1	8,72	7,96	7,47	7,13	6,88	6,69	6,54	6,42	6,23	6,03	5,83	5,73	5,62	5,52	5,41	5,19
10	12,8	9,43	8,08	7,34	6,87	6,54	6,30	6,12	5,97	5,85	5,66	5,47	5,27	5,17	5,07	4,97	4,86	4,64
11	12,2	8,91	7,60	6,88	6,42	6,10	5,86	5,68	5,54	5,42	5,24	5,05	4,86	4,76	4,65	4,55	4,45	4,23
12	11,8	8,51	7,23	6,52	6,07	5,76	5,52	5,35	5,20	5,09	4,91	4,72	4,53	4,43	4,33	4,23	4,12	3,90
13	11,4	8,19	6,93	6,23	5,79	5,48	5,25	5,08	4,94	4,82	4,64	4,46	4,27	4,17	4,07	3,97	3,87	3,65
14	11,1	7,92	6,68	6,00	5,56	5,26	5,03	4,86	4,72	4,60	4,43	4,25	4,06	3,96	3,86	3,76	3,66	3,44
15	10,8	7,70	6,48	5,80	5,37	5,07	4,85	4,67	4,54	4,42	4,25	4,07	3,88	3,79	3,69	3,58	3,48	3,26
16	10,6	7,51	6,30	5,64	5,21	4,91	4,69	4,52	4,38	4,27	4,10	3,92	3,73	3,64	3,54	3,44	3,33	3,11
17	10,4	7,35	6,16	5,50	5,07	4,78	4,56	4,39	4,25	4,14	3,97	3,79	3,61	3,51	3,41	3,31	3,21	2,98
18	10,2	7,21	6,03	5,37	4,96	4,66	4,44	4,28	4,14	4,03	3,86	3,68	3,50	3,40	3,30	3,20	3,10	2,87
19	10,1	7,09	5,92	5,27	4,85	4,56	4,34	4,18	4,04	3,93	3,76	3,59	3,40	3,31	3,21	3,11	3,00	2,78
20	9,94	6,99	5,82	5,17	4,76	4,47	4,26	4,09	3,96	3,85	3,68	3,50	3,32	3,22	3,12	3,02	2,92	2,69
21	9,83	6,89	5,73	5,09	4,68	4,39	4,18	4,01	3,88	3,77	3,60	3,43	3,24	3,15	3,05	2,95	2,84	2,61
22	9,73	6,81	5,65	5,02	4,61	4,32	4,11	3,94	3,81	3,70	3,54	3,36	3,18	3,08	2,98	2,88	2,77	2,55
23	9,63	6,73	5,58	4,95	4,54	4,26	4,05	3,88	3,75	3,64	3,47	3,30	3,12	3,02	2,92	2,82	2,71	2,48
24	9,55	6,66	5,52	4,89	4,49	4,20	3,99	3,83	3,69	3,59	3,42	3,25	3,06	2,97	2,87	2,77	2,66	2,43
25	9,48	6,60	5,46	4,84	4,43	4,15	3,94	3,78	3,64	3,54	3,37	3,20	3,01	2,92	2,82	2,72	2,61	2,38
30	9,18	6,35	5,24	4,62	4,23	3,95	3,74	3,58	3,45	3,34	3,18	3,01	2,82	2,73	2,63	2,52	2,42	2,18
40	8,83	6,07	4,98	4,37	3,99	3,71	3,51	3,35	3,22	3,12	2,95	2,78	2,60	2,50	2,40	2,30	2,18	1,93
60	8,49	5,80	4,73	4,14	3,76	3,49	3,29	3,13	3,01	2,90	2,74	2,57	2,39	2,29	2,19	2,08	1,96	1,69
120	8,18	5,54	4,50	3,92	3,55	3,28	3,09	2,93	2,81	2,71	2,54	2,37	2,19	2,09	1,98	1,87	1,75	1,43
∞	7,88	5,30	4,28	3,72	3,35	3,09	2,90	2,74	2,62	2,52	2,36	2,19	2,00	1,90	1,79	1,67	1,53	1,00

f_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	648	800	864	900	922	937	948	957	963	969	977	985	993	997	1001	1006	1010	1014	1018
2	38,5	39,0	39,2	39,2	39,3	39,3	39,4	39,4	39,4	39,4	39,4	39,4	39,4	39,5	39,5	39,5	39,5	39,5	39,5
3	17,4	16,0	15,4	15,1	14,9	14,7	14,6	14,5	14,4	14,3	14,3	14,2	14,2	14,1	14,1	14,0	14,0	13,9	13,9
4	12,2	10,6	9,98	9,60	9,36	9,20	9,07	8,98	8,90	8,84	8,75	8,66	8,56	8,51	8,46	8,41	8,36	8,31	8,26
5	10,0	8,43	7,76	7,39	7,15	6,98	6,85	6,76	6,68	6,62	6,52	6,43	6,33	6,28	6,23	6,18	6,12	6,07	6,02
6	8,81	7,26	6,60	6,23	5,99	5,82	5,70	5,60	5,52	5,46	5,37	5,27	5,17	5,12	5,07	5,01	4,96	4,90	4,85
7	8,07	6,54	5,89	5,52	5,29	5,12	4,99	4,90	4,82	4,76	4,67	4,57	4,47	4,42	4,36	4,31	4,25	4,20	4,14
8	7,57	6,06	5,42	5,05	4,82	4,65	4,53	4,43	4,36	4,30	4,20	4,10	4,00	3,95	3,89	3,84	3,78	3,73	3,67
9	7,21	5,71	5,08	4,72	4,48	4,32	4,20	4,10	4,03	3,96	3,87	3,77	3,67	3,61	3,56	3,51	3,45	3,39	3,33
10	6,94	5,46	4,83	4,47	4,24	4,07	3,95	3,85	3,78	3,72	3,62	3,52	3,42	3,37	3,31	3,26	3,20	3,14	3,08
11	6,72	5,26	4,63	4,28	4,04	3,88	3,76	3,66	3,59	3,53	3,43	3,33	3,23	3,17	3,12	3,06	3,00	2,94	2,88
12	6,55	5,10	4,47	4,12	3,89	3,73	3,61	3,51	3,44	3,37	3,28	3,18	3,07	3,02	2,96	2,91	2,85	2,79	2,72
13	6,41	4,97	4,35	4,00	3,77	3,60	3,48	3,39	3,31	3,25	3,15	3,05	2,95	2,89	2,84	2,78	2,72	2,66	2,60
14	6,30	4,86	4,24	3,89	3,66	3,50	3,38	3,28	3,21	3,15	3,05	2,95	2,84	2,79	2,73	2,67	2,61	2,55	2,49
15	6,20	4,77	4,15	3,80	3,58	3,41	3,29	3,20	3,12	3,06	2,96	2,86	2,76	2,70	2,64	2,59	2,52	2,46	2,40
16	6,12	4,69	4,08	3,73	3,50	3,34	3,22	3,12	3,05	2,99	2,89	2,79	2,68	2,63	2,57	2,51	2,45	2,38	2,32
17	6,04	4,62	4,01	3,66	3,44	3,28	3,16	3,06	2,98	2,92	2,82	2,72	2,62	2,56	2,50	2,44	2,38	2,32	2,25
18	5,98	4,56	3,95	3,61	3,38	3,22	3,10	3,01	2,93	2,87	2,77	2,67	2,56	2,50	2,44	2,38	2,32	2,26	2,19
19	5,92	4,51	3,90	3,56	3,33	3,17	3,05	2,96	2,88	2,82	2,72	2,62	2,51	2,45	2,39	2,33	2,27	2,20	2,13
20	5,87	4,46	3,86	3,51	3,29	3,13	3,01	2,91	2,84	2,77	2,68	2,57	2,46	2,41	2,35	2,29	2,22	2,16	2,09
21	5,83	4,42	3,82	3,48	3,25	3,09	2,97	2,87	2,80	2,73	2,64	2,53	2,42	2,37	2,31	2,25	2,18	2,11	2,04
22	5,79	4,38	3,78	3,44	3,22	3,05	2,93	2,84	2,76	2,70	2,60	2,50	2,39	2,33	2,27	2,21	2,14	2,08	2,00
23	5,75	4,35	3,75	3,41	3,18	3,02	2,90	2,81	2,73	2,67	2,57	2,47	2,36	2,30	2,24	2,18	2,11	2,04	1,97
24	5,72	4,32	3,72	3,38	3,15	2,99	2,87	2,78	2,70	2,64	2,54	2,44	2,33	2,27	2,21	2,15	2,08	2,01	1,94
25	5,69	4,29	3,69	3,35	3,13	2,97	2,85	2,75	2,68	2,61	2,51	2,41	2,30	2,24	2,18	2,12	2,05	1,98	1,91
30	5,57	4,18	3,59	3,25	3,03	2,87	2,75	2,65	2,57	2,51	2,41	2,31	2,20	2,14	2,07	2,01	1,94	1,87	1,79
40	5,42	4,05	3,46	3,13	2,90	2,74	2,62	2,53	2,45	2,39	2,29	2,18	2,07	2,01	1,94	1,88	1,80	1,72	1,64
60	5,29	3,93	3,34	3,01	2,79	2,63	2,51	2,41	2,33	2,27	2,17	2,06	1,94	1,88	1,82	1,74	1,67	1,58	1,48
120	5,15	3,80	3,23	2,89	2,67	2,52	2,39	2,30	2,22	2,16	2,05	1,95	1,82	1,76	1,69	1,61	1,53	1,43	1,31
∞	5,02	3,69	3,12	2,79	2,57	2,41	2,29	2,19	2,11	2,05	1,94	1,83	1,71	1,64	1,57	1,48	1,39	1,27	1,00

IX. Normaaljaotuse variatsioonilutuse jaotus.

Normaaljaotuse $N(0,1)$ variatsioonilutuse
keskväärtus, standardhälve ja kvantiilid.

Tabel on võetud teosest [10].

n	$M\left(\frac{R_n}{c}\right)$	$\sigma\left(\frac{R_n}{c}\right)$	$\sigma\left(\frac{R_n}{c}\right)$	Вероятность в процентах									
				$M\left(\frac{K_n}{c}\right)$	0,05	0,1	0,5	1,0	2,5	5,0	10,0	20,0	30,0
					τ_n	α_n	ξ_n	γ_n	δ_n	ϵ_n	ζ_n	η_n	θ_n
2	1,128	0,853	0,756	0,90	0,90	0,01	0,02	0,04	0,09	0,18	0,36	0,55	
3	1,693	0,888	0,525	0,04	0,06	0,13	0,19	0,30	0,43	0,62	0,90	1,14	
4	2,059	0,880	0,427	0,16	0,20	0,34	0,43	0,59	0,76	0,98	1,29	1,52	
5	2,326	0,864	0,371	0,31	0,37	0,55	0,65	0,85	1,03	1,26	1,57	1,82	
6	2,534	0,848	0,335	0,47	0,54	0,75	0,87	1,06	1,25	1,48	1,80	2,04	
7	2,704	0,833	0,308	0,61	0,69	0,92	1,05	1,25	1,44	1,68	1,99	2,22	
8	2,847	0,820	0,288	0,75	0,83	1,08	1,20	1,41	1,60	1,83	2,14	2,38	
9	2,970	0,808	0,272	0,88	0,96	1,21	1,34	1,55	1,74	1,97	2,28	2,51	
10	3,078	0,797	0,259	1,00	1,08	1,23	1,47	1,67	1,86	2,09	2,39	2,62	
11	3,173	0,787	0,248	1,10	1,20	1,45	1,58	1,78	1,97	2,20	2,50	2,72	
12	3,258	0,778	0,239	1,21	1,30	1,55	1,68	1,88	2,07	2,30	2,59	2,82	
13	3,336	0,770	0,231	1,30	1,39	1,64	1,77	1,97	2,16	2,39	2,68	2,90	
14	3,407	0,762	0,224	1,38	1,48	1,72	1,86	2,06	2,24	2,47	2,75	2,97	
15	3,472	0,755	0,217	1,46	1,56	1,80	1,93	2,14	2,32	2,54	2,83	3,04	
16	3,532	0,749	0,212	1,53	1,63	1,88	2,01	2,21	2,39	2,61	2,89	3,11	
17	3,588	0,743	0,207	1,60	1,69	1,94	2,07	2,27	2,45	2,67	2,95	3,17	
18	3,640	0,738	0,203	1,66	1,75	2,01	2,14	2,34	2,51	2,73	3,01	3,22	
19	3,689	0,733	0,199	1,72	1,82	2,07	2,20	2,39	2,57	2,79	3,06	3,27	
20	3,735	0,729	0,195	1,78	1,88	2,12	2,25	2,45	2,63	2,84	3,11	3,32	

n	Вероятность в процентах											
	40,0	50,0	60,0	70,0	80,0	90,0	95,0	97,5	99,0	99,5	99,9	99,95
2	0,74	0,95	1,20	1,47	1,81	2,33	2,77	3,17	3,61	3,97	4,65	4,92
3	1,36	1,59	1,83	2,09	2,42	2,99	3,31	3,58	4,12	4,42	5,06	5,31
4	1,76	1,98	2,21	2,47	2,78	3,24	3,62	3,95	4,40	4,69	5,31	5,56
5	2,04	2,26	2,48	2,75	3,04	3,48	3,86	4,20	4,60	4,89	5,48	5,72
6	2,26	2,47	2,69	2,94	3,23	3,66	4,02	4,36	4,76	5,03	5,62	5,86
7	2,44	2,65	2,86	3,10	3,39	3,81	4,17	4,49	4,88	5,15	5,73	5,96
8	2,59	2,79	3,00	3,24	3,52	3,93	4,29	4,61	4,99	5,26	5,82	6,04
9	2,71	2,92	3,12	3,35	3,63	4,04	4,39	4,76	5,08	5,34	5,90	6,12
10	2,83	3,02	3,23	3,46	3,73	4,13	4,47	4,79	5,16	5,42	5,97	6,19
11	2,93	3,12	3,32	3,55	3,82	4,21	4,55	4,86	5,23	5,49	6,04	6,25
12	3,01	3,21	3,41	3,63	3,96	4,29	4,62	4,92	5,29	5,54	6,09	6,31
13	3,09	3,29	3,48	3,70	3,97	4,35	4,69	4,99	5,35	5,60	6,14	6,36
14	3,17	3,36	3,55	3,77	4,03	4,41	4,74	5,04	5,40	5,65	6,19	6,40
15	3,23	3,42	3,62	3,83	4,09	4,47	4,80	5,09	5,45	5,70	6,23	6,45
16	3,30	3,48	3,67	3,89	4,14	4,52	4,85	5,14	5,49	5,74	6,28	6,49
17	3,35	3,54	3,73	3,94	4,19	4,57	4,89	5,18	5,54	5,79	6,32	6,52
18	3,41	3,59	3,78	3,99	4,24	4,61	4,93	5,22	5,57	5,82	6,35	6,56
19	3,46	3,64	3,83	4,05	4,29	4,65	4,97	5,26	5,61	5,86	6,38	6,59
20	3,51	3,69	3,87	4,08	4,33	4,69	5,01	5,30	5,65	5,89	6,41	6,62

X. Poissoni jaotus.

Poissoni juhusliku suuruse $P(\lambda)$ jaotus

$$P(X = x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

Tabel on võetud teosest [13].

$k \backslash \lambda$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0	0,90484	0,81873	0,74082	0,67032	0,60653
1	0,09048	0,16375	0,22225	0,26813	0,30327
2	0,00452	0,01637	0,03334	0,05362	0,07581
3	0,00015	0,00109	0,00333	0,00715	0,01263
4		0,00005	0,00025	0,00071	0,00158
5			0,00001	0,00005	0,00016
6					0,00001

$k \backslash \lambda$	0,6	0,7	0,8	0,9	
0	0,54881	0,49659	0,44933	0,40657	
1	0,32929	0,34761	0,35946	0,36591	
2	0,09878	0,12166	0,14379	0,16466	
3	0,01976	0,02838	0,03834	0,04939	
4	0,00296	0,00496	0,00766	0,01111	
5	0,00035	0,00069	0,00123	0,00200	
6	0,00003	0,00008	0,00016	0,00030	
7			0,00001	0,00003	

$k \backslash \lambda$	1	2	3	4	5
0	0,36788	0,13534	0,04978	0,01831	0,00673
1	0,36788	0,27067	0,14936	0,07326	0,03369
2	0,18394	0,27067	0,22404	0,14653	0,08422
3	0,06131	0,18045	0,22404	0,19537	0,14037
4	0,01532	0,09022	0,16803	0,19537	0,17547
5	0,00306	0,03609	0,10082	0,15629	0,17547
6	0,00051	0,01203	0,05040	0,10420	0,14622
7	0,00007	0,00343	0,02160	0,05954	0,10444
8		0,00085	0,00810	0,02977	0,06527
9		0,00019	0,00270	0,01323	0,03626
10		0,00003	0,00081	0,00529	0,01813
11			0,00022	0,00192	0,00824
12			0,00005	0,00064	0,00343
13			0,00001	0,00019	0,00132
14				0,00005	0,00047
15				0,00001	0,00015
16					0,00004
17					0,00001

λ	6	7	8	9	10
0	0,00247	0,00091	0,00033	0,00012	0,00004
1	0,01487	0,00638	0,00268	0,00111	0,00045
2	0,04461	0,02234	0,01073	0,00499	0,00227
3	0,08923	0,05212	0,02862	0,01499	0,00756
4	0,13385	0,09122	0,05725	0,03373	0,01891
5	0,18062	0,12772	0,09160	0,06072	0,03783
6	0,18062	0,14900	0,12214	0,09109	0,06305
7	0,13768	0,14900	0,13959	0,11712	0,09007
8	0,10326	0,13038	0,13959	0,13176	0,11260
9	0,06883	0,10140	0,12408	0,13176	0,12511
10	0,04130	0,07098	0,09926	0,11858	0,12511
11	0,02252	0,04517	0,07219	0,09702	0,11374
12	0,01126	0,02635	0,04812	0,07276	0,09478
13	0,00519	0,01418	0,02861	0,05037	0,07290
14	0,00222	0,00709	0,01692	0,03238	0,05207
15	0,00089	0,00331	0,00902	0,01943	0,03471
16	0,00033	0,00144	0,00451	0,01093	0,02169
17	0,00011	0,00059	0,00212	0,00678	0,01276
18	0,00003	0,00023	0,00094	0,00289	0,00709
19	0,00001	0,00008	0,00039	0,00137	0,00373
20		0,00003	0,00015	0,00061	0,00186
21			0,00006	0,00026	0,00088
22			0,00002	0,00010	0,00040
23				0,00004	0,00017
24				0,00001	0,00007
25					0,00002
26					0,00001

λ k	11	12	13	14	15
0	0,00001				
1	0,00018	0,00007	0,00002	0,00001	
2	0,00101	0,00044	0,00019	0,00008	0,00003
3	0,00370	0,00177	0,00082	0,00038	0,00017
4	0,01018	0,00530	0,00269	0,00133	0,00064
5	0,02241	0,01274	0,00699	0,00373	0,00193
6	0,04109	0,02548	0,01515	0,00869	0,00483
7	0,06457	0,04368	0,02814	0,01739	0,01037
8	0,08879	0,06552	0,04573	0,03043	0,01944
9	0,10853	0,08736	0,06605	0,04734	0,03240
10	0,11938	0,10484	0,08587	0,06628	0,04861
11	0,11938	0,11437	0,10148	0,08435	0,06628
12	0,10943	0,11437	0,10994	0,09841	0,08285
13	0,09259	0,10557	0,10994	0,10599	0,09560
14	0,07275	0,09048	0,10209	0,10599	0,10244
15	0,05335	0,07239	0,08847	0,09892	0,10244
16	0,03668	0,05429	0,07188	0,08655	0,09603
17	0,02373	0,03832	0,05497	0,07128	0,08473
18	0,01450	0,02555	0,03970	0,05544	0,07061
19	0,00839	0,01613	0,02716	0,04085	0,05574
20	0,00461	0,00968	0,01765	0,02859	0,04181
21	0,00241	0,00553	0,01093	0,01906	0,02986
22	0,00121	0,00301	0,00645	0,01213	0,02036
23	0,00057	0,00157	0,00365	0,00738	0,01328
24	0,00026	0,00078	0,00197	0,00430	0,00830
25	0,00011	0,00037	0,00102	0,00241	0,00498
26	0,00004	0,00017	0,00051	0,00129	0,00287
27	0,00002	0,00007	0,00024	0,00067	0,00159
28		0,00003	0,00011	0,00033	0,00085
29		0,00001	0,00005	0,00016	0,00044
30			0,00002	0,00007	0,00022
31				0,00003	0,00010
32				0,00001	0,00005
33					0,00002
34					0,00001

λ k	16	17	18	19	20
0					
1					
2	0,00001				
3	0,00007	0,00003			
4	0,00030	0,00014	0,00006	0,00003	0,00001
5	0,00098	0,00049	0,00024	0,00011	0,00005
6	0,00262	0,00138	0,00071	0,00036	0,00018
7	0,00599	0,00337	0,00185	0,00099	0,00052
8	0,01198	0,00716	0,00416	0,00236	0,00130
9	0,02131	0,01352	0,00832	0,00498	0,00290
10	0,03409	0,02300	0,01498	0,00946	0,00581
11	0,04959	0,03554	0,02452	0,01635	0,01057
12	0,06612	0,05035	0,03678	0,02588	0,01762
13	0,08138	0,06584	0,05092	0,03783	0,02711
14	0,09301	0,07996	0,06548	0,05135	0,03874
15	0,09921	0,09062	0,07857	0,06504	0,05165
16	0,09921	0,09628	0,08839	0,07724	0,06456
17	0,09338	0,09628	0,09359	0,08632	0,07595
18	0,08300	0,09093	0,09359	0,09112	0,08439
19	0,06989	0,08136	0,08867	0,09112	0,08883
20	0,05592	0,06915	0,07980	0,08656	0,08883
21	0,04260	0,05598	0,06840	0,07832	0,08460
22	0,03098	0,04326	0,05596	0,06764	0,07691
23	0,02155	0,03197	0,04380	0,05587	0,06688
24	0,01437	0,02265	0,03285	0,04423	0,05573
25	0,00919	0,01540	0,02365	0,03362	0,04458
26	0,00566	0,01007	0,01637	0,02456	0,03429
27	0,00335	0,00634	0,01091	0,01728	0,02540
28	0,00191	0,00385	0,00701	0,01173	0,01614
29	0,00105	0,00225	0,00435	0,00768	0,01251
30	0,00056	0,00127	0,00261	0,00486	0,00834
31	0,00029	0,00070	0,00151	0,00298	0,00538
32	0,00014	0,00037	0,00085	0,00177	0,00336
33	0,00007	0,00019	0,00046	0,00102	0,00203
34	0,00003	0,00009	0,00024	0,00057	0,00119
35	0,00001	0,00004	0,00012	0,00030	0,00068
36		0,00002	0,00006	0,00016	0,00038
37		0,00001	0,00003	0,00008	0,00020
38			0,00001	0,00004	0,00010
39				0,00002	0,00006
40					0,00002
41					0,00001

XI. Poissoni jaotusfunktsioon.

Poissoni juhusliku suuruse $P(\lambda)$ täiendjaotusfunktsioon

$$P(X > x) = 1 - \sum_{k=0}^x e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=x+1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Tabel on võetud teosest [9].

m	$a=0,1$	$a=0,2$	$a=0,3$	$a=0,4$	$a=0,5$
0	9,5163 ⁻²	1,8127 ⁻¹	2,5918 ⁻¹	3,2968 ⁻¹	8,9347 ⁻¹
1	4,6788 ⁻²	1,7523 ⁻²	3,6936 ⁻²	6,1552 ⁻²	9,0204 ⁻²
2	1,5465 ⁻⁴	1,1485 ⁻³	3,5995 ⁻³	7,9263 ⁻³	1,4388
3	3,8468 ⁻⁶	5,6840 ⁻⁵	2,6581 ⁻⁴	7,7625 ⁻⁴	1,7516 ⁻³
4		2,2592 ⁻⁶	1,5785 ⁻⁵	6,1243 ⁻⁵	1,7212 ⁻⁴
5				4,0427 ⁻⁶	1,4165 ⁻⁵
6					1,0024 ⁻⁶
m	$a=0,6$	$a=0,7$	$a=0,8$	$a=0,9$	
0	4,5119 ⁻¹	5,0341 ⁻¹	5,5067 ⁻¹	5,9343 ⁻¹	
1	1,2190	1,5580	1,9121	2,2752	
2	2,3115 ⁻²	3,4142 ⁻²	4,7423 ⁻²	6,2857 ⁻²	
3	3,3581 ⁻³	5,7535 ⁻³	9,0799 ⁻³	1,3459	
4	3,9449 ⁻⁴	7,8554 ⁻⁴	1,4113	2,3441 ⁻³	
5	3,8856 ⁻⁵	9,0026 ⁻⁵	1,8434 ⁻⁴	3,4349 ⁻⁴	
6	3,2931 ⁻⁶	8,8836 ⁻⁶	2,0747 ⁻⁵	4,3401 ⁻⁵	
7			2,0502 ⁻⁶	4,8172 ⁻⁶	

*) Вероятность $P(m, a) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}$ может быть найдена через вероятность $Q(m, a)$ следующим образом:

$$P(m, a) = Q(m-1, a) - Q(m, a) \quad (m > 0),$$

$$P(0, a) = 1 - Q(0, a).$$

m	$a=1$	$a=2$	$a=3$	$a=4$	$a=5$
0	6,3212 ⁻¹	8,6466 ⁻¹	9,5021 ⁻¹	9,8168 ⁻¹	9,9326 ⁻¹
1	2,6424	5,9399	8,0085	9,0842	9,5957
2	8,0301 ⁻²	3,2332	5,7681	7,6190	8,7535
3	1,8988	1,4288	3,5277	5,6653	7,3497
4	3,6598 ⁻²	5,2653 ⁻²	1,8474	3,7116	5,5951
5	5,9418 ⁻³	1,6564	8,3918 ⁻²	2,1487	3,8404
6	8,3241 ⁻³	4,5338 ⁻²	3,3509	1,1067	2,3782
7	1,0249	1,0967	1,1905	5,1134 ⁻²	1,3337
8	1,1252 ⁻²	2,3745 ⁻²	3,8030 ⁻²	2,1363	6,8094 ⁻²
9		4,6498 ⁻²	1,1025	8,1322 ⁻²	3,1828
10		8,3082 ⁻²	2,9234 ⁻²	2,8398	1,3695
11		1,3646	7,1387 ⁻²	9,1523 ⁻²	5,4531 ⁻²
12			1,6149	2,7372	2,0189
13			3,4019 ⁻²	7,6328 ⁻²	6,9799 ⁻²
14				1,9932	2,2625
15				4,8926 ⁻²	6,9008 ⁻²
16				1,1328	1,9869
17					5,4163 ⁻²
18					1,4017
m	$a=6$	$a=7$	$a=8$	$a=9$	$a=10$
0	9,9752 ⁻¹	9,9909 ⁻¹	9,9966 ⁻¹	9,9988 ⁻¹	9,9995 ⁻¹
1	9,8265	9,9270	9,9698	9,9877	9,9950
2	9,3803	9,7036	9,8625	9,9377	9,9723
3	8,4880	9,1823	9,5762	9,7877	9,8966
4	7,1494	8,2701	9,0037	9,4504	9,7075
5	5,5432	6,9929	8,0876	8,8431	9,3291
6	3,9370	5,5029	6,8663	7,9322	8,6986
7	2,5602	4,0129	5,4704	6,7610	7,7978
8	1,5276	2,7091	4,0745	5,4435	6,6718
9	8,3924 ⁻²	1,6950 ⁻¹	2,8338 ⁻¹	4,1259 ⁻¹	5,4207 ⁻¹
10	4,2621	9,8521 ⁻²	1,8411	2,9401	4,1696
11	2,0092	5,3350	1,1192	1,9699	3,0322
12	8,8275 ⁻²	2,7000	6,3797 ⁻²	1,2423	2,0844
13	3,6285	1,2811	3,4181	7,3851 ⁻²	1,3554
14	1,4004	5,7172 ⁻²	1,7257	4,1466	8,3458 ⁻²
15	5,0910 ⁻³	2,4066	8,2310 ⁻²	2,2036	4,8740
16	1,7488	9,5818 ⁻³	3,7180	1,1106	2,7042
17	5,6917 ⁻³	3,6178	1,5943	5,3196 ⁻²	1,4278
18	1,7597	1,2985	6,5037 ⁻³	2,4264	7,1865 ⁻²

m	$a=6$	$a=7$	$a=8$	$a=9$	$a=10$
19	5,1802 ⁻⁶	4,4402 ⁻⁶	2,5294	1,0560	3,4543
20	1,4551	1,4495	9,3968 ⁻⁶	4,3925 ⁻⁶	1,5883
21		4,5263 ⁻⁶	3,3407	1,7495	6,9965 ⁻⁶
22		1,3543	1,1385	6,6828 ⁻⁶	2,9574
23			3,7255 ⁻⁶	2,4519	1,2012
24			1,1722	8,6531 ⁻⁶	4,6949 ⁻⁶
25				2,9414	1,7680
26					6,4229 ⁻⁶
27					2,2535

m	$a=11$	$a=12$	$a=13$	$a=14$	$a=15$
0	9,9998 ⁻¹	9,9999 ⁻¹			
1	9,9980	9,9992	9,9997 ⁻¹	9,9999 ⁻¹	
2	9,9879	9,9948	9,9978	9,9991	9,9996 ⁻¹
3	9,9508	9,9771	9,9895	9,9953	9,9979
4	9,8490	9,9240	9,9626	9,9819	9,9914
5	9,6248	9,7966	9,8927	9,9447	9,9721
6	9,2139	9,5418	9,7411	9,8577	9,9237
7	8,5681	9,1050	9,4597	9,6838	9,8200
8	7,6801	8,4497	9,0024	9,3794	9,6255
9	6,5949	7,5761	8,3419	8,9060	9,3015
10	5,4011	6,5277	7,4832	8,2432	8,8154
11	4,2073	5,3840	6,4684	7,3996	8,1525
12	3,1130	4,2403	5,3690	6,4154	7,3239
13	2,1871	3,1846	4,2696	5,3555	6,3678
14	1,4596	2,2798	3,2487	4,2956	5,3435
15	9,2604 ⁻³	1,5558	2,3639	3,3064	4,3191
16	5,5924	1,0129	1,6451	2,4408	3,3588
17	3,2191	6,2966 ⁻²	1,0954	1,7280	2,5114
18	1,7687	3,7416	6,9833 ⁻²	1,1736	1,8053
19	9,2895 ⁻³	2,1280	4,2669	7,6505 ⁻²	1,2478
20	4,6711	1,1598	2,5012	4,7908	8,2972 ⁻³
21	2,2519	6,0651 ⁻³	1,4081	2,8844	5,3106
22	1,0423	3,0474	7,6225 ⁻³	1,6712	3,2744
23	4,6386 ⁻⁴	1,4729	3,9718	9,3276 ⁻³	1,9465
24	1,9871	6,8563 ⁻⁴	1,9943	5,0199	1,1165
25	8,2050 ⁻⁵	3,0776	9,6603 ⁻⁴	2,6076	6,1849 ⁻³
26	3,2693	1,3335	4,5190	1,3087	3,3119
27	1,2584	5,5836 ⁻⁵	2,0435	6,3513 ⁻⁴	1,7158
28	4,6847 ⁻⁶	2,2616	8,9416 ⁻⁵	2,9837	8,6072 ⁻⁴

m	$a=11$	$a=12$	$a=13$	$a=14$	$a=15$
29	1,6882	8,8701 ^{-a}	3,7894	1,3580	4,1845
30		3,3716	1,5568	5,9928 ^{-a}	1,9731
31		1,2432	6,2052 ^{-a}	2,5665	9,0312 ^{-a}
32			2,4017	1,0675	4,0155
33				4,3154 ^{-a}	1,7356
34				1,6968	7,2978 ^{-a}
35					2,9871
36					1,1910
m	$a=16$	$a=17$	$a=18$	$a=19$	$a=20$
0					
1					
2	9,9998 ⁻¹	9,9999 ⁻¹			
3	9,9991	9,9996	9,9998 ⁻¹	9,9999 ⁻¹	
4	9,9960	9,9982	9,9992	9,9996	9,9998 ⁻¹
5	9,9862	9,9933	9,9968	9,9985	9,9993
6	9,9599	9,9794	9,9896	9,9948	9,9974
7	9,9000	9,9457	9,9711	9,9849	9,9922
8	9,7801	9,8740	9,9294	9,9613	9,9791
9	9,5670	9,7388	9,8462	9,9114	9,9500
10	9,2260	9,5088	9,6963	9,8168	9,8919
11	8,7301	9,1533	9,4511	9,6533	9,7861
12	8,0688	8,6498	9,0833	9,3944	9,6099
13	7,2545	7,9913	8,5740	9,0160	9,3387
14	6,3247	7,1917	7,9192	8,5025	8,9514
15	5,3326	6,2855	7,1335	7,8521	8,4349
16	4,3404	5,3226	6,2495	7,0797	7,7893
17	3,4066	4,3598	5,3135	6,2164	7,0297
18	2,5765	3,4504	4,3776	5,3052	6,1858
19	1,8775	2,6368	3,4908	4,3939	5,2974
20	1,3183	1,9452	2,6928	3,5283	4,4091
21	8,9227 ⁻²	1,3853	2,0088	2,7450	3,5630
22	5,8241	9,5272 ⁻²	1,4491	2,0687	2,7939
23	3,6686	6,3296	1,0111	1,5098	2,1251
24	2,2315	4,0646	6,8260 ⁻²	1,0675	1,5677
25	1,3119	2,5245	4,4608	7,3126 ⁻²	1,1218
26	7,4589 ⁻³	1,5174	2,8234	4,8557	7,7857 ⁻²
27	4,1051	8,8335 ⁻³	1,7318	3,1268	5,2481
28	2,1886	4,9838	1,0300	1,9536	3,4334

Продолжение табл. 1

<i>m</i>	<i>a</i> =16	<i>a</i> =17	<i>a</i> =18	<i>a</i> =19	<i>a</i> =20
29	1,1312	2,7272	5,9443 ⁻³	1,1850	2,1818
30	5,6726 ⁻⁴	1,4484	3,3308	6,9819 ⁻³	1,3475
31	2,7620	7,4708 ⁻⁴	1,8133	3,9982	8,0918 ⁻³
32	1,3067	3,7453	9,5975 ⁻⁴	2,2267	4,7274
33	6,0108 ⁻⁵	1,8260	4,9416	1,2067	2,6884
34	2,6903	8,6644 ⁻⁵	2,4767	6,3674 ⁻⁴	1,4890
35	1,1724	4,0035	1,2090	3,2732	8,0366 ⁻⁴
36	4,9772 ⁻⁶	1,8025	5,7519 ⁻⁵	1,6401	4,2290
37	2,0599	7,9123 ⁻⁶	2,6684	8,0154 ⁻⁵	2,1708
38		3,3882	1,2078	3,8224	1,0875
39		1,4162	5,3365 ⁻⁶	1,7797	5,3202 ⁻⁵
40			2,3030	8,0940 ⁻⁶	2,5426
41				3,5975	1,1877
42				1,5634	5,4252 ⁻⁶
43					2,4243
44					1,0603

XII. Poissoni jaotuse keskvaertuse λ usalduspiirid .

Poissoni jaotuse keskvaertuse λ 99%-lised
usalduspiirid .

z	λ_z	$\bar{\lambda}_z$	z	λ_z	$\bar{\lambda}_z$
0	0,00	5,30	26	14,74	42,25
1	0,01	7,43	27	15,49	43,35
2	0,15	9,27	28	16,24	44,74
3	0,43	10,98	29	17,00	45,98
4	0,82	12,59	30	17,77	47,21
5	1,28	14,15	31	18,55	48,45
6	1,79	15,66	32	19,30	49,69
7	2,33	17,13	33	20,10	50,90
8	2,91	18,53	34	20,85	52,10
9	3,51	20,00	35	21,64	53,33
10	4,13	21,40	36	22,40	54,55
11	4,77	22,78	37	23,20	55,75
12	5,30	24,14	38	24,00	56,95
13	5,58	25,50	39	24,80	58,15
14	6,23	26,84	40	25,59	59,36
15	6,89	28,16	41	26,40	60,55
16	7,57	29,48	42	27,20	61,75
17	8,25	30,79	43	28,00	62,95
18	8,94	32,09	44	28,80	64,15
19	9,64	33,38	45	29,60	65,34
20	10,35	34,67	46	30,40	66,55
21	11,07	35,95	47	31,20	67,70
22	11,79	37,22	48	32,05	68,90
23	12,52	38,48	49	32,85	70,10
24	13,25	39,74	50	33,66	71,27
25	14,00	41,00			

Poissoni jaotuse keskväärtuse λ 95%-lised
usalduspiirid .

Tabel on võetud teosest [8].

z	λ_z	$\bar{\lambda}_z$	z	λ_z	$\bar{\lambda}_z$
0	0,00	3,69	26	16,98	38,10
1	0,05	5,57	27	17,79	39,28
2	0,36	7,22	28	18,01	40,47
3	0,82	8,77	29	19,42	41,65
4	1,37	10,24	30	20,24	42,83
5	1,97	11,67	31	21,05	44,00
6	2,61	13,06	32	21,90	45,15
7	3,29	14,42	33	22,70	46,35
8	3,69	15,76	34	23,55	47,50
9	4,12	17,08	35	24,38	48,68
10	4,80	18,39	36	25,20	49,85
11	5,49	19,68	37	26,05	51,00
12	6,20	20,96	38	26,90	52,15
13	6,92	22,23	39	27,75	53,30
14	7,65	23,49	40	28,58	54,47
15	8,40	24,74	41	29,40	55,60
16	9,15	25,98	42	30,25	56,75
17	9,90	27,22	43	31,10	57,90
18	10,67	28,45	44	31,95	59,05
19	11,44	29,67	45	32,82	60,21
20	12,22	30,86	46	33,70	61,35
21	13,00	32,10	47	34,55	62,50
22	13,79	33,31	48	35,40	63,65
23	14,58	34,51	49	36,25	64,80
24	15,38	35,71	50	37,11	65,92
25	16,18	36,90			

XIII. Binomiaaljaotus .

Binomiaalse juhusliku suuruse $X \sim B(n, p)$ jaotus

$$P(X = x) = C_n^x p^x q^{n-x} ,$$

kus $n = 2, 3, \dots, 25,$

$p = 0,01; 0,05, 0,10, \dots, 0,90,$

(vahe 0,10) 0,95; 0,99 $q = 1 - p;$

$x = 0, 1, \dots, n.$

Tabel on võetud teosest [11].

n	z	p													z
		.01	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95	.99	
2	0	980	982	810	640	490	360	250	160	090	040	010	002	0+	0
	1	020	095	180	320	420	480	500	480	420	320	180	095	020	1
	2	0+	002	010	040	090	160	250	360	490	640	810	962	980	2
3	0	970	857	729	512	343	216	125	064	027	008	001	0+	0+	0
	1	029	135	243	384	441	432	375	288	189	096	027	007	0+	1
	2	0+	007	027	096	189	288	375	432	441	384	243	135	029	2
4	3	0+	0+	001	008	027	064	125	216	343	512	729	857	970	3
	0	961	815	656	410	240	130	062	026	008	002	0+	0+	0+	0
	1	039	171	292	410	412	346	250	154	076	026	004	0+	0+	1
	2	001	014	049	154	265	346	375	346	265	154	049	014	001	2
5	3	0+	0+	004	026	076	154	250	346	412	410	292	171	039	3
	4	0+	0+	0+	002	008	026	062	130	240	410	656	815	961	4
	0	951	774	590	328	168	076	031	010	002	0+	0+	0+	0+	0
	1	048	204	328	410	369	259	156	077	028	008	0+	0+	0+	1
	2	001	021	073	205	309	346	312	230	132	051	008	001	0+	2
6	3	0+	001	008	051	132	230	312	346	309	205	073	021	001	2
	4	0+	0+	0+	006	028	077	156	259	360	410	328	204	048	4
	5	0+	0+	0+	0+	002	010	031	078	168	328	590	774	951	5
	0	941	735	531	262	118	047	016	004	001	0+	0+	0+	0+	0
	1	057	232	354	393	303	187	094	037	010	002	0+	0+	0+	1
	2	001	031	098	246	324	311	234	138	060	015	001	0+	0+	2
7	3	0+	002	015	082	185	276	312	276	185	082	015	002	0+	3
	4	0+	0+	001	015	060	138	234	311	324	246	098	031	001	4
	5	0+	0+	0+	002	010	037	094	187	303	393	354	232	057	5
	6	0+	0+	0+	0+	001	004	016	047	118	262	531	735	941	6
	0	932	698	476	210	082	028	008	002	0+	0+	0+	0+	0+	0
	1	066	257	372	367	247	131	055	017	004	0+	0+	0+	0+	1
	2	002	041	124	275	318	261	164	077	025	004	0+	0+	0+	2
8	3	0+	004	023	115	227	290	273	194	097	029	003	0+	0+	3
	4	0+	0+	003	029	097	194	273	290	227	115	023	004	0+	4
	5	0+	0+	0+	004	025	077	164	261	318	275	124	041	002	5
	6	0+	0+	0+	0+	004	017	055	131	247	367	372	257	066	6
	7	0+	0+	0+	0+	0+	002	008	028	082	210	478	698	932	7
	0	923	663	430	168	058	017	004	001	0+	0+	0+	0+	0+	0
	1	075	279	383	336	198	090	031	008	001	0+	0+	0+	0+	1
	2	003	051	149	294	296	209	109	041	010	001	0+	0+	0+	2
9	3	0+	005	033	147	254	279	219	124	047	009	0+	0+	0+	3
	4	0+	0+	005	046	136	232	273	232	136	046	005	0+	0+	4
	5	0+	0+	0+	009	047	124	219	279	254	147	033	005	0+	5
	6	0+	0+	0+	001	010	041	109	209	296	294	149	051	003	6
	7	0+	0+	0+	0+	001	008	031	090	198	336	383	279	075	7
	8	0+	0+	0+	0+	0+	001	004	017	058	168	430	663	923	8

n	z	p												z	
		.01	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95		.99
9	0	914	630	387	134	040	010	002	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0
	1	083	299	387	302	156	060	018	004	0+	0+	0+	0+	0+	1
	2	003	063	172	302	267	161	070	021	004	0+	0+	0+	0+	2
	3	0+	008	045	176	267	251	164	074	021	003	0+	0+	0+	3
	4	0+	001	007	066	172	251	246	167	074	017	001	0+	0+	4
	5	0+	0+	001	017	074	167	246	251	172	066	007	001	0+	5
	6	0+	0+	0+	003	021	074	164	251	267	176	045	008	0+	6
	7	0+	0+	0+	0+	004	021	070	161	267	302	172	063	003	7
	8	0+	0+	0+	0+	0+	004	018	060	156	302	387	299	083	8
9	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	010	040	134	387	630	914	9	
10	0	904	599	349	107	028	006	001	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0
	1	091	315	387	268	121	040	010	002	0+	0+	0+	0+	0+	1
	2	004	075	194	302	233	121	044	011	001	0+	0+	0+	0+	2
	3	0+	010	057	201	267	215	117	042	009	001	0+	0+	0+	3
	4	0+	001	011	088	200	251	205	111	037	006	0+	0+	0+	4
	5	0+	0+	001	026	103	201	246	201	103	026	001	0+	0+	5
	6	0+	0+	0+	006	037	111	205	251	200	088	011	001	0+	6
	7	0+	0+	0+	001	009	042	117	215	267	201	057	010	0+	7
	8	0+	0+	0+	0+	001	011	044	121	233	302	194	075	004	8
9	0+	0+	0+	0+	0+	002	010	040	121	268	387	315	091	9	
10	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	006	028	107	349	599	904	10	
11	0	895	569	314	086	020	004	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0
	1	099	329	384	236	093	027	005	001	0+	0+	0+	0+	0+	1
	2	005	087	213	295	200	089	027	005	001	0+	0+	0+	0+	2
	3	0+	014	071	221	257	177	081	023	004	0+	0+	0+	0+	3
	4	0+	001	016	111	220	236	161	070	017	002	0+	0+	0+	4
	5	0+	0+	002	009	132	221	226	147	057	010	0+	0+	0+	5
	6	0+	0+	0+	010	057	147	226	221	132	039	002	0+	0+	6
	7	0+	0+	0+	002	017	070	161	236	220	111	016	001	0+	7
	8	0+	0+	0+	0+	004	023	081	177	257	221	071	014	0+	8
9	0+	0+	0+	0+	001	005	027	089	200	295	213	087	005	9	
10	0+	0+	0+	0+	0+	001	005	027	093	236	384	329	099	10	
11	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	004	020	086	314	569	895	11	
12	0	886	540	282	069	014	002	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0
	1	107	341	377	206	071	017	003	0+	0+	0+	0+	0+	0+	1
	2	006	099	230	283	168	064	016	002	0+	0+	0+	0+	0+	2
	3	0+	017	085	236	240	142	054	012	001	0+	0+	0+	0+	3
	4	0+	002	021	133	231	213	121	042	008	001	0+	0+	0+	4
	5	0+	0+	004	053	158	227	193	101	029	003	0+	0+	0+	5
	6	0+	0+	0+	016	079	177	226	177	079	016	0+	0+	0+	6
	7	0+	0+	0+	003	029	101	193	227	158	053	004	0+	0+	7
	8	0+	0+	0+	001	008	042	121	213	231	133	021	002	0+	8
9	0+	0+	0+	0+	001	012	054	142	240	236	085	017	0+	9	

n	z	P												z	
		.01	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95		.99
12	10	0+	0+	0+	0+	0+	002	016	064	168	283	230	099	006	10
	11	0+	0+	0+	0+	0+	0+	003	017	071	206	377	341	107	11
	12	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	014	069	282	540	886	12
13	0	878	513	254	055	010	001	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0
	1	115	351	367	179	054	011	002	0+	0+	0+	0+	0+	0+	1
	2	007	111	245	268	139	045	010	001	0+	0+	0+	0+	0+	2
	3	0+	021	100	246	218	111	035	006	001	0+	0+	0+	0+	3
	4	0+	003	028	154	234	184	087	024	003	0+	0+	0+	0+	4
	5	0+	0+	006	069	180	221	157	066	014	001	0+	0+	0+	5
	6	0+	0+	001	023	103	197	209	131	044	006	0+	0+	0+	6
	7	0+	0+	0+	006	044	131	209	197	183	023	001	0+	0+	7
	8	0+	0+	0+	001	014	066	157	221	180	069	006	0+	0+	8
	9	0+	0+	0+	0+	003	024	087	184	234	154	028	003	0+	9
	10	0+	0+	0+	0+	001	006	035	111	218	246	100	021	0+	10
	11	0+	0+	0+	0+	0+	001	010	045	139	268	245	111	007	11
	12	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	011	054	179	367	351	115	12
13	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	010	055	254	513	878	13	
14	0	869	488	229	044	007	001	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0
	1	123	359	356	154	041	007	001	0+	0+	0+	0+	0+	0+	1
	2	008	123	257	250	113	032	006	001	0+	0+	0+	0+	0+	2
	3	0+	026	114	250	194	085	022	003	0+	0+	0+	0+	0+	3
	4	0+	004	035	172	229	155	061	014	001	0+	0+	0+	0+	4
	5	0+	0+	008	086	196	207	122	041	007	0+	0+	0+	0+	5
	6	0+	0+	001	032	126	207	183	092	023	002	0+	0+	0+	6
	7	0+	0+	0+	009	062	157	209	157	062	009	0+	0+	0+	7
	8	0+	0+	0+	002	023	092	193	207	126	032	001	0+	0+	8
	9	0+	0+	0+	0+	007	041	122	207	196	086	008	0+	0+	9
	10	0+	0+	0+	0+	001	014	061	155	229	172	035	004	0+	10
	11	0+	0+	0+	0+	0+	003	022	035	194	250	114	026	0+	11
	12	0+	0+	0+	0+	0+	001	006	032	113	250	257	123	008	12
	13	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	007	041	154	356	359	123	13
14	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	007	044	229	488	869	14	
15	0	860	463	206	035	005	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0
	1	130	366	313	132	031	005	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	1
	2	009	135	267	231	092	022	003	0+	0+	0+	0+	0+	0+	2
	3	0+	031	129	250	170	063	014	002	0+	0+	0+	0+	0+	3
	4	0+	005	013	188	219	127	042	007	001	0+	0+	0+	0+	4
	5	0+	001	010	103	206	186	092	024	003	0+	0+	0+	0+	5
	6	0+	0+	002	043	147	207	153	061	012	001	0+	0+	0+	6
	7	0+	0+	0+	014	081	177	196	118	035	003	0+	0+	0+	7
	8	0+	0+	0+	003	035	118	196	177	081	014	0+	0+	0+	8
	9	0+	0+	0+	001	012	061	153	207	147	043	002	0+	0+	9

n	r	p												r		
		.01	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95		.99	
15	10	0+	0+	0+	0+	004	034	151	403	722	939	998	1-	1-	10	
	11	0+	0+	0+	0+	001	009	059	217	515	836	987	999	1-		11
	12	0+	0+	0+	0+	0+	002	018	091	297	648	944	995	1-		12
	13	0+	0+	0+	0+	0+	0+	004	027	127	398	816	964	1-		13
	14	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	005	035	167	549	829	990		14
15	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	005	035	206	463	860	15		
16	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	
	1	149	560	815	972	997	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1	
	2	011	189	485	859	974	997	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	2	
	3	001	043	211	648	901	982	998	1-	1-	1-	1-	1-	1-	3	
	4	0+	007	068	402	754	935	989	999	1-	1-	1-	1-	1-	4	
	5	0+	001	017	202	550	833	962	995	1-	1-	1-	1-	1-	5	
	6	0+	0+	003	082	340	671	895	981	998	1-	1-	1-	1-	6	
	7	0+	0+	001	027	175	473	773	942	993	1-	1-	1-	1-	7	
	8	0+	0+	0+	007	074	284	598	858	974	999	1-	1-	1-	8	
	9	0+	0+	0+	001	026	142	402	716	926	993	1-	1-	1-	9	
	10	0+	0+	0+	0+	007	058	227	527	825	973	999	1-	1-	10	
	11	0+	0+	0+	0+	002	019	105	329	660	918	997	1-	1-	11	
	12	0+	0+	0+	0+	0+	005	038	167	450	798	983	999	1-	12	
	13	0+	0+	0+	0+	0+	001	011	065	246	598	932	993	1-	13	
	14	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	018	099	352	789	957	999	14	
	15	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	003	026	141	515	811	989	15	
16	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	003	028	185	440	851	16		
17	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	
	1	157	582	833	977	998	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1	
	2	012	208	518	882	981	998	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	2	
	3	001	050	238	690	923	988	999	1-	1-	1-	1-	1-	1-	3	
	4	0+	009	083	451	798	954	994	1-	1-	1-	1-	1-	1-	4	
	5	0+	001	022	242	611	874	975	997	1-	1-	1-	1-	1-	5	
	6	0+	0+	005	106	403	736	928	989	999	1-	1-	1-	1-	6	
	7	0+	0+	001	038	225	552	834	965	997	1-	1-	1-	1-	7	
	8	0+	0+	0+	011	105	359	685	908	987	1-	1-	1-	1-	8	
	9	0+	0+	0+	003	040	199	500	801	960	997	1-	1-	1-	9	
	10	0+	0+	0+	0+	013	092	315	641	895	989	1-	1-	1-	10	
	11	0+	0+	0+	0+	003	035	166	448	775	962	999	1-	1-	11	
	12	0+	0+	0+	0+	001	011	072	264	597	894	995	1-	1-	12	
	13	0+	0+	0+	0+	0+	003	025	126	389	758	978	999	1-	13	
	14	0+	0+	0+	0+	0+	0+	006	046	202	549	917	991	1-	14	
	15	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	012	077	310	762	950	999	15	
	16	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	019	118	482	792	988	16	
17	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	023	167	418	843	17		

n	z	p													z
		.01	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95	.99	
18	0	835	397	150	018	002	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0
	1	152	376	300	081	013	001	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	1
	2	013	168	284	172	046	007	001	0+	0+	0+	0+	0+	0+	2
	3	001	047	168	230	105	025	003	0+	0+	0+	0+	0+	0+	3
	4	0+	009	070	215	168	061	012	001	0+	0+	0+	0+	0+	4
	5	0+	001	022	151	202	115	033	004	0+	0+	0+	0+	0+	5
	6	0+	0+	005	082	187	166	071	015	001	0+	0+	0+	0+	6
	7	0+	0+	001	035	138	189	121	037	005	0+	0+	0+	0+	7
	8	0+	0+	0+	012	081	173	167	077	015	001	0+	0+	0+	8
	9	0+	0+	0+	003	039	128	185	128	039	003	0+	0+	0+	9
	10	0+	0+	0+	001	015	077	167	173	081	012	0+	0+	0+	10
	11	0+	0+	0+	0+	005	037	121	189	138	035	001	0+	0+	11
	12	0+	0+	0+	0+	001	015	071	166	187	082	005	0+	0+	12
	13	0+	0+	0+	0+	0+	094	033	115	202	151	022	001	0+	13
	14	0+	0+	0+	0+	0+	001	012	061	168	215	070	009	0+	14
	15	0+	0+	0+	0+	0+	0+	003	025	105	230	168	047	001	15
	16	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	007	046	172	284	168	013	16
	17	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	013	081	300	376	152	17
18	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	018	150	397	835	18	
19	0	826	377	135	014	001	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0	
	1	159	377	285	068	009	001	0+	0+	0+	0+	0+	0+	1	
	2	014	179	285	154	036	005	0+	0+	0+	0+	0+	0+	2	
	3	001	053	180	218	087	017	002	0+	0+	0+	0+	0+	3	
	4	0+	011	080	218	149	047	007	001	0+	0+	0+	0+	4	
	5	0+	002	027	164	192	093	022	002	0+	0+	0+	0+	5	
	6	0+	0+	007	095	192	145	052	008	001	0+	0+	0+	6	
	7	0+	0+	001	044	153	180	096	024	002	0+	0+	0+	7	
	8	0+	0+	0+	017	098	180	144	053	008	0+	0+	0+	8	
	9	0+	0+	0+	005	051	146	176	098	022	001	0+	0+	9	
	10	0+	0+	0+	001	022	098	176	146	051	005	0+	0+	10	
	11	0+	0+	0+	0+	008	053	144	180	098	017	0+	0+	11	
	12	0+	0+	0+	0+	002	024	096	180	153	044	001	0+	12	
	13	0+	0+	0+	0+	001	008	052	145	192	095	007	0+	13	
	14	0+	0+	0+	0+	0+	002	022	093	192	164	027	002	14	
	15	0+	0+	0+	0+	0+	001	007	047	149	218	080	011	0+	15
	16	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	017	087	218	180	053	001	16
	17	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	005	036	154	285	179	014	17
	18	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	009	068	285	377	159	18
19	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	014	135	377	826	19	
20	0	818	358	122	012	001	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0	
	1	165	377	270	058	007	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	1	
	2	016	189	285	137	028	003	0+	0+	0+	0+	0+	0+	2	
	3	001	060	190	205	072	012	001	0+	0+	0+	0+	0+	3	
	4	0+	013	090	218	130	035	005	0+	0+	0+	0+	0+	4	

n	z	p													z
		.01	.05	10	.20	30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95	.99	
20	5	0+	002	032	175	179	075	015	001	0+	0+	0+	0+	0+	5
	6	0+	0+	009	109	192	124	037	005	0+	0+	0+	0+	0+	6
	7	0+	0+	002	055	164	166	074	015	001	0+	0+	0+	0+	7
	8	0+	0+	0+	022	114	180	120	035	004	0+	0+	0+	0+	8
	9	0+	0+	0+	007	065	160	160	071	012	0+	0+	0+	0+	9
	10	0+	0+	0+	002	031	117	176	117	031	002	0+	0+	0+	10
	11	0+	0+	0+	0+	012	071	160	160	065	007	0+	0+	0+	11
	12	0+	0+	0+	0+	004	035	120	180	114	022	0+	0+	0+	12
	13	0+	0+	0+	0+	001	015	074	166	164	055	002	0+	0+	13
	14	0+	0+	0+	0+	0+	005	037	124	192	109	009	0+	0+	14
	15	0+	0+	0+	0+	0+	001	015	075	179	175	032	002	0+	15
	16	0+	0+	0+	0+	0+	0+	005	035	130	218	090	013	0+	16
	17	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	012	072	205	190	060	001	17
	18	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	003	028	137	285	189	016	18
19	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	007	058	270	377	165	19	
20	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	012	122	358	818	20	
21	0	810	341	109	009	001	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0	
	1	172	376	255	048	005	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	1	
	2	017	198	284	121	022	002	0+	0+	0+	0+	0+	0+	2	
	3	001	066	200	192	058	009	001	0+	0+	0+	0+	0+	3	
	4	0+	016	100	216	113	026	003	0+	0+	0+	0+	0+	4	
	5	0+	003	038	183	164	059	010	001	0+	0+	0+	0+	5	
	6	0+	0+	011	122	188	105	026	003	0+	0+	0+	0+	6	
	7	0+	0+	003	065	172	149	055	009	0+	0+	0+	0+	7	
	8	0+	0+	001	029	129	174	097	023	002	0+	0+	0+	8	
	9	0+	0+	0+	010	080	168	140	050	006	0+	0+	0+	9	
	10	0+	0+	0+	003	041	134	168	089	018	001	0+	0+	0+	10
	11	0+	0+	0+	001	018	089	168	134	041	003	0+	0+	0+	11
	12	0+	0+	0+	0+	006	050	140	168	080	010	0+	0+	0+	12
	13	0+	0+	0+	0+	002	023	097	174	129	029	001	0+	0+	13
14	0+	0+	0+	0+	0+	009	055	149	172	065	003	0+	0+	14	
15	0+	0+	0+	0+	0+	003	026	105	188	122	011	0+	0+	15	
16	0+	0+	0+	0+	0+	001	010	059	164	183	038	003	0+	16	
17	0+	0+	0+	0+	0+	0+	003	026	113	216	100	016	0+	17	
18	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	009	058	192	200	066	001	18	
19	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	022	121	284	198	017	19	
20	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	005	048	255	376	172	20	
21	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	009	109	341	810	21	
22	0	802	324	098	007	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0	
	1	178	375	241	041	004	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	1	
	2	019	207	281	107	017	001	0+	0+	0+	0+	0+	0+	2	
	3	001	073	208	178	047	006	0+	0+	0+	0+	0+	0+	3	
	4	0+	018	110	211	096	019	002	0+	0+	0+	0+	0+	4	

n	z	p												z	
		.01	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95		.99
22	5	0+	003	044	190	149	046	006	0+	0+	0+	0+	0+	0+	5
	6	0+	061	014	134	181	086	018	001	0+	0+	0+	0+	0+	6
	7	0+	0+	004	077	177	131	041	005	0+	0+	0+	0+	0+	7
	8	0+	0+	001	036	142	164	076	014	001	0+	0+	0+	0+	8
	9	0+	0+	0+	014	095	170	119	034	003	0+	0+	0+	0+	9
	10	0+	0+	0+	005	053	148	154	066	010	0+	0+	0+	0+	10
	11	0+	0+	0+	001	025	107	168	107	025	001	0+	0+	0+	11
	12	0+	0+	0+	0+	010	066	154	148	053	005	0+	0+	0+	12
	13	0+	0+	0+	0+	003	034	119	170	095	014	0+	0+	0+	13
	14	0+	0+	0+	0+	001	014	076	164	142	036	001	0+	0+	14
	15	0+	0+	0+	0+	0+	005	041	131	177	077	004	0+	0+	15
	16	0+	0+	0+	0+	0+	001	018	086	181	134	014	001	0+	16
	17	0+	0+	0+	0+	0+	0+	006	046	149	190	044	003	0+	17
	18	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	019	096	211	110	018	0+	18
	19	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	006	047	178	208	073	001	19
	20	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	017	107	281	207	019	20
	21	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	004	041	241	375	178	21
	22	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	007	098	324	802	22	
	23	0	794	307	089	006	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0
		1	184	372	226	034	003	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	1
		2	020	215	277	093	013	001	0+	0+	0+	0+	0+	0+	2
		3	001	079	215	163	038	004	0+	0+	0+	0+	0+	0+	3
4		0+	021	120	204	082	014	001	0+	0+	0+	0+	0+	4	
5		0+	004	051	194	133	035	004	0+	0+	0+	0+	0+	5	
6		0+	001	017	145	171	070	012	001	0+	0+	0+	0+	6	
7		0+	0+	005	088	178	113	029	003	0+	0+	0+	0+	7	
8		0+	0+	001	044	153	151	058	009	0+	0+	0+	0+	8	
9		0+	0+	0+	018	109	168	097	022	002	0+	0+	0+	9	
10		0+	0+	0+	006	065	157	136	046	005	0+	0+	0+	0+	10
11		0+	0+	0+	002	033	123	161	082	014	0+	0+	0+	0+	11
12		0+	0+	0+	0+	014	082	161	123	033	002	0+	0+	0+	12
13		0+	0+	0+	0+	005	046	136	157	065	006	0+	0+	0+	13
14		0+	0+	0+	0+	002	022	097	168	109	018	0+	0+	0+	14
15		0+	0+	0+	0+	0+	009	058	151	153	044	001	0+	0+	15
16		0+	0+	0+	0+	0+	003	029	113	178	088	005	0+	0+	16
17		0+	0+	0+	0+	0+	001	012	070	171	145	017	001	0+	17
18		0+	0+	0+	0+	0+	0+	004	031	133	194	051	004	0+	18
19		0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	014	082	204	120	021	0+	19
20		0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	004	038	163	215	079	001	20
21		0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	013	093	277	215	020	21
22		0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	003	034	226	372	184	22
23	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	006	089	307	794	23	

n	z	p													z
		.01	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95	.99	
24	0	786	292	080	005	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0
	1	190	369	213	028	002	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	1
	2	022	223	272	081	010	001	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	2
	3	002	086	221	149	031	003	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	3
	4	0+	024	129	196	069	010	001	0+	0+	0+	0+	0+	0+	4
	5	0+	005	057	196	118	027	003	0+	0+	0+	0+	0+	0+	5
	6	0+	001	020	155	160	056	008	0+	0+	0+	0+	0+	0+	6
	7	0+	0+	006	100	176	096	021	002	0+	0+	0+	0+	0+	7
	8	0+	0+	001	053	160	136	044	005	0+	0+	0+	0+	0+	8
	9	0+	0+	0+	024	122	161	078	014	001	0+	0+	0+	0+	9
	10	0+	0+	0+	009	079	161	117	032	003	0+	0+	0+	0+	10
	11	0+	0+	0+	003	043	137	149	061	008	0+	0+	0+	0+	11
	12	0+	0+	0+	001	020	099	161	099	020	001	0+	0+	0+	12
	13	0+	0+	0+	0+	008	061	149	137	043	003	0+	0+	0+	13
	14	0+	0+	0+	0+	003	032	117	161	079	009	0+	0+	0+	14
	15	0+	0+	0+	0+	001	014	078	161	122	024	0+	0+	0+	15
	16	0+	0+	0+	0+	0+	005	044	136	160	053	001	0+	0+	16
	17	0+	0+	0+	0+	0+	002	021	096	176	100	006	0+	0+	17
	18	0+	0+	0+	0+	0+	0+	008	056	160	155	020	001	0+	18
	19	0+	0+	0+	0+	0+	0+	003	027	118	196	057	005	0+	19
	20	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	010	069	196	129	024	0+	20
	21	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	003	031	149	221	086	002	21
	22	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	010	081	272	223	022	22
	23	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	028	213	369	190	223	23
24	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	005	080	292	786	24	
25	0	778	277	072	004	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0	
	1	196	365	199	024	001	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	1	
	2	024	231	266	071	007	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	2	
	3	002	093	226	136	024	002	0+	0+	0+	0+	0+	0+	3	
	4	0+	027	138	187	057	007	0+	0+	0+	0+	0+	0+	4	
	5	0+	006	065	196	103	020	002	0+	0+	0+	0+	0+	5	
	6	0+	001	024	163	147	044	005	0+	0+	0+	0+	0+	6	
	7	0+	0+	007	111	171	080	014	001	0+	0+	0+	0+	7	
	8	0+	0+	002	062	165	120	032	003	0+	0+	0+	0+	8	
	9	0+	0+	0+	029	134	151	061	009	0+	0+	0+	0+	9	
	10	0+	0+	0+	012	092	161	097	021	001	0+	0+	0+	10	
	11	0+	0+	0+	004	054	147	133	043	004	0+	0+	0+	11	
	12	0+	0+	0+	001	027	114	155	076	011	0+	0+	0+	12	
	13	0+	0+	0+	0+	011	076	155	114	027	001	0+	0+	13	
	14	0+	0+	0+	0+	004	043	133	147	054	004	0+	0+	14	
	15	0+	0+	0+	0+	001	021	097	161	092	012	0+	0+	15	
	16	0+	0+	0+	0+	0+	009	061	151	134	029	0+	0+	16	
	17	0+	0+	0+	0+	0+	003	032	120	165	062	002	0+	17	
	18	0+	0+	0+	0+	0+	001	014	080	171	111	007	0+	18	
19	0+	0+	0+	0+	0+	005	044	147	163	024	001	0+	19		

<i>n</i>	<i>x</i>	<i>p</i>													<i>x</i>
		.01	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95	.99	
25	20	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	020	103	196	065	006	0+	20
	21	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	007	057	187	138	027	0+	21
	22	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	024	136	226	093	002	22
	23	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	007	071	266	231	024	23
	24	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	024	199	365	196	24
25	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	004	072	277	778	25

XIV. Binomiaalne jaotusfunktsioon.

Binomiaalse juhusliku suuruse $X \sim B(n, p)$ täiend-
jaotusfunktsioon

$$P(X \geq x) = \sum_{k=x}^n C_n^k p^k q^{n-k},$$

kus $n = 2, 3, \dots, 25$;

$p = 0,01; 0,05, 0,10, \dots, 0,90$ (vahe $0,05$);

$0,95, 0,99; \quad q = 1-p$;

$x = 0, 1, \dots, n$.

Tabel on võetud teosest [11].

n	r	p												r	
		.01	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95		.99
2	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	1	020	098	190	360	510	640	750	840	910	960	990	998	1-	1
	2	0+	002	010	040	090	160	250	360	490	640	810	902	980	2
3	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	1	030	143	271	488	657	784	875	936	973	992	999	1-	1-	1
	2	0+	007	028	104	216	352	500	648	784	896	972	993	1-	2
	3	0+	0+	001	008	027	064	125	216	343	512	729	857	970	3
4	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	1	039	185	344	590	760	870	938	974	992	998	1-	1-	1-	1
	2	001	014	052	181	348	525	688	821	916	973	996	1-	1-	2
	3	0+	0+	004	027	084	179	312	475	652	819	948	986	999	3
	4	0+	0+	0+	002	008	026	062	130	240	410	656	815	961	4
5	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	1	049	226	410	672	832	922	969	990	998	1-	1-	1-	1-	1
	2	001	023	081	263	472	663	812	913	969	993	1-	1-	1-	2
	3	0+	001	009	058	163	317	500	683	837	942	991	999	1-	3
	4	0+	0+	0+	007	031	087	188	337	528	737	919	977	999	4
	5	0+	0+	0+	0+	002	010	031	078	168	328	590	774	951	5
6	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	1	059	265	469	738	882	953	984	996	999	1-	1-	1-	1-	1
	2	001	033	114	345	580	767	891	959	989	998	1-	1-	1-	2
	3	0+	002	016	099	256	456	656	821	930	983	999	1-	1-	3
	4	0+	0+	001	017	070	179	344	544	744	901	984	998	1-	4
	5	0+	0+	0+	002	011	041	109	233	420	655	886	967	999	5
	6	0+	0+	0+	0+	001	004	016	047	118	262	531	735	941	6
7	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	1	068	302	522	790	918	972	992	998	1-	1-	1-	1-	1-	1
	2	002	044	150	423	671	841	938	981	996	1-	1-	1-	1-	2
	3	0+	004	026	148	353	580	773	904	971	995	1-	1-	1-	3
	4	0+	0+	003	033	126	290	500	710	874	967	997	1-	1-	4
	5	0+	0+	0+	005	029	096	227	420	647	852	974	996	1-	5
	6	0+	0+	0+	0+	004	019	062	159	329	577	850	956	998	6
	7	0+	0+	0+	0+	0+	002	008	028	082	210	478	698	932	7
8	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	1	077	337	570	832	942	983	996	999	1-	1-	1-	1-	1-	1
	2	003	057	187	497	745	894	965	991	999	1-	1-	1-	1-	2
	3	0+	006	038	203	448	685	855	950	989	999	1-	1-	1-	3
	4	0+	0+	005	056	194	406	637	826	942	990	1-	1-	1-	4
	5	0+	0+	0+	010	056	174	363	594	806	944	995	1-	1-	5
	6	0+	0+	0+	001	011	050	145	315	552	797	962	994	1-	6
	7	0+	0+	0+	0+	001	009	035	106	255	503	813	943	997	7
	8	0+	0+	0+	0+	001	004	017	058	168	430	663	923	8	

n	r	p													r
		.01	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95	.99	
9	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	1	086	370	613	866	960	990	998	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1
	2	003	071	225	564	804	929	980	996	1-	1-	1-	1-	1-	2
	3	0+	008	053	262	537	768	910	975	996	1-	1-	1-	1-	3
	4	0+	001	008	086	270	517	746	901	975	997	1-	1-	1-	4
	5	0+	0+	001	020	099	267	500	733	901	980	999	1-	1-	5
	6	0+	0+	0+	003	025	099	254	483	730	914	992	999	1-	6
	7	0+	0+	0+	0+	004	025	090	232	463	738	947	992	1-	7
	8	0+	0+	0+	0+	0+	004	020	071	196	436	775	929	997	8
9	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	010	040	134	387	630	914	9	
10	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	1	096	401	651	893	972	994	999	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1
	2	004	086	264	624	851	954	989	998	1-	1-	1-	1-	1-	2
	3	0+	012	070	322	617	833	945	988	998	1-	1-	1-	1-	3
	4	0+	001	013	121	350	618	828	945	989	999	1-	1-	1-	4
	5	0+	0+	002	033	150	367	623	834	953	994	1-	1-	1-	5
	6	0+	0+	0+	006	047	166	377	633	850	967	998	1-	1-	6
	7	0+	0+	0+	001	011	055	172	382	650	879	987	999	1-	7
	8	0+	0+	0+	0+	002	012	055	167	383	678	930	988	1-	8
9	0+	0+	0+	0+	0+	002	011	046	149	376	736	914	996	9	
10	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	006	028	107	349	599	904	10	
11	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	1	105	431	686	914	980	996	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1
	2	005	102	303	678	887	970	994	999	1-	1-	1-	1-	1-	2
	3	0+	015	090	383	687	881	967	994	999	1-	1-	1-	1-	3
	4	0+	002	019	161	430	704	887	971	996	1-	1-	1-	1-	4
	5	0+	0+	003	050	210	467	726	901	978	998	1-	1-	1-	5
	6	0+	0+	0+	012	078	247	500	753	922	988	1-	1-	1-	6
	7	0+	0+	0+	002	022	099	274	533	790	950	997	1-	1-	7
	8	0+	0+	0+	0+	004	029	113	296	570	839	981	998	1-	8
9	0+	0+	0+	0+	001	006	033	119	313	617	910	985	1-	9	
10	0+	0+	0+	0+	0+	001	006	030	113	322	697	898	995	10	
11	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	004	020	086	314	569	895	11	
12	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	1	114	460	718	931	986	998	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1
	2	006	118	341	725	915	980	997	1-	1-	1-	1-	1-	1-	2
	3	0+	020	111	442	747	917	981	997	1-	1-	1-	1-	1-	3
	4	0+	002	026	205	507	775	927	985	998	1-	1-	1-	1-	4
	5	0+	0+	004	073	276	562	806	943	991	999	1-	1-	1-	5
	6	0+	0+	001	019	118	335	613	842	961	996	1-	1-	1-	6
	7	0+	0+	0+	004	039	158	387	665	882	981	999	1-	1-	7
	8	0+	0+	0+	001	009	057	194	438	724	927	996	1-	1-	8
9	0+	0+	0+	0+	002	015	073	225	493	795	974	998	1-	9	

n	r	p													r-
		.01	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95	.99	
12	10	0+	0+	0+	0+	0+	003	019	083	253	558	889	980	1-	10
	11	0+	0+	0+	0+	0+	0+	003	020	085	275	659	882	994	11
	12	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	014	069	282	540	886	12
13	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	1	122	487	746	945	990	999	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1
	2	007	135	379	766	936	987	998	1-	1-	1-	1-	1-	1-	2
	3	0+	025	134	498	798	942	989	999	1-	1-	1-	1-	1-	3
	4	0+	003	034	253	579	831	954	992	999	1-	1-	1-	1-	4
	5	0+	0+	006	099	346	647	867	968	996	1-	1-	1-	1-	5
	6	0+	0+	001	030	165	426	709	902	982	999	1-	1-	1-	6
	7	0+	0+	0+	007	062	229	500	771	938	993	1-	1-	1-	7
	8	0+	0+	0+	001	018	098	291	574	835	970	999	1-	1-	8
	9	0+	0+	0+	0+	004	032	133	353	654	901	994	1-	1-	9
	10	0+	0+	0+	0+	001	008	046	169	421	747	966	997	1-	10
	11	0+	0+	0+	0+	0+	001	011	058	202	502	866	975	1-	11
	12	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	013	064	234	621	865	993	12
13	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	010	055	254	513	878	13	
14	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	
	1	131	512	771	956	993	999	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1	
	2	008	153	415	802	953	992	999	1-	1-	1-	1-	1-	2	
	3	0+	030	158	552	839	960	994	999	1-	1-	1-	1-	3	
	4	0+	004	044	302	645	876	971	996	1-	1-	1-	1-	4	
	5	0+	0+	009	130	416	721	910	982	998	1-	1-	1-	1-	5
	6	0+	0+	001	044	219	514	788	942	992	1-	1-	1-	1-	6
	7	0+	0+	0+	012	093	308	605	850	969	998	1-	1-	1-	7
	8	0+	0+	0+	002	031	150	395	692	907	988	1-	1-	1-	8
	9	0+	0+	0+	0+	008	058	212	486	781	956	999	1-	1-	9
	10	0+	0+	0+	0+	002	018	090	279	584	870	991	1-	1-	10
	11	0+	0+	0+	0+	0+	004	029	124	355	698	956	996	1-	11
	12	0+	0+	0+	0+	0+	001	006	040	161	448	842	970	1-	12
	13	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	008	047	198	585	847	992	13
14	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	007	044	229	488	869	14	
15	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	
	1	140	537	794	965	995	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1	
	2	010	171	451	833	965	995	1-	1-	1-	1-	1-	1-	2	
	3	0+	036	184	602	873	973	996	1-	1-	1-	1-	1-	3	
	4	0+	005	056	352	703	909	982	998	1-	1-	1-	1-	4	
	5	0+	001	013	164	485	783	941	991	999	1-	1-	1-	1-	5
	6	0+	0+	002	061	278	597	849	966	996	1-	1-	1-	1-	6
	7	0+	0+	0+	018	131	390	696	905	985	999	1-	1-	1-	7
	8	0+	0+	0+	004	050	213	500	787	950	996	1-	1-	1-	8
9	0+	0+	0+	001	015	095	304	610	869	982	1-	1-	1-	9	

n	r	p												r	
		01	05	10	20	30	40	50	60	70	80	90	95		99
15	10	0+	0+	0+	0+	004	034	151	403	722	939	998	1-	1-	
	11	0+	0+	0+	0+	001	009	059	217	515	836	987	999	1-	1-
	12	0+	0+	0+	0+	0+	002	018	091	297	648	944	995	1-	1-
	13	0+	0+	0+	0+	0+	0+	004	027	127	398	816	964	1-	1-
	14	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	005	035	167	549	829	990	1-
15	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	005	035	206	463	860	1-	
16	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	1	149	560	815	972	997	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1
	2	011	189	485	859	974	997	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	2
	3	001	043	211	648	901	982	998	1-	1-	1-	1-	1-	1-	3
	4	0+	007	068	402	754	935	989	999	1-	1-	1-	1-	1-	4
	5	0+	001	017	202	550	833	962	995	1-	1-	1-	1-	1-	5
	6	0+	0+	003	082	340	671	895	981	998	1-	1-	1-	1-	6
	7	0+	0+	001	027	175	473	773	942	993	1-	1-	1-	1-	7
	8	0+	0+	0+	007	074	284	598	858	974	999	1-	1-	1-	8
	9	0+	0+	0+	001	026	142	402	716	926	993	1-	1-	1-	9
	10	0+	0+	0+	0+	007	058	227	527	825	973	999	1-	1-	10
	11	0+	0+	0+	0+	002	019	105	329	660	918	997	1-	1-	11
	12	0+	0+	0+	0+	0+	005	038	167	450	798	983	999	1-	12
	13	0+	0+	0+	0+	0+	001	011	065	246	598	932	993	1-	13
	14	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	018	099	352	789	957	999	14
	15	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	003	026	141	515	811	989	15
	16	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	003	028	185	440	851	16
17	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	1	157	582	833	977	998	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1
	2	012	208	518	882	981	998	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	2
	3	001	050	238	690	923	988	999	1-	1-	1-	1-	1-	1-	3
	4	0+	009	083	451	798	954	994	1-	1-	1-	1-	1-	1-	4
	5	0+	001	022	242	611	874	975	997	1-	1-	1-	1-	1-	5
	6	0+	0+	005	106	403	736	928	989	999	1-	1-	1-	1-	6
	7	0+	0+	001	038	225	552	834	965	997	1-	1-	1-	1-	7
	8	0+	0+	0+	011	105	359	685	908	987	1-	1-	1-	1-	8
	9	0+	0+	0+	003	040	199	500	801	960	997	1-	1-	1-	9
	10	0+	0+	0+	0+	013	092	315	641	895	989	1-	1-	1-	10
	11	0+	0+	0+	0+	003	035	166	448	775	962	999	1-	1-	11
	12	0+	0+	0+	0+	001	011	072	264	597	894	995	1-	1-	12
	13	0+	0+	0+	0+	0+	003	025	126	389	758	978	999	1-	13
	14	0+	0+	0+	0+	0+	0+	006	046	202	549	917	991	1-	14
	15	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	012	077	310	762	950	999	15
	16	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	019	118	482	792	988	16
17	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	023	167	418	843	17	

n	r	p												r		
		.01	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95		.99	
18	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	1	165	603	850	982	998	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1
	2	014	226	550	901	986	999	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	2
	3	001	058	266	729	940	992	999	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	3
	4	0+	011	098	499	835	967	996	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	4
	5	0+	002	028	284	667	906	985	999	1-	1-	1-	1-	1-	1-	5
	6	0+	0+	006	133	466	791	952	994	1-	1-	1-	1-	1-	1-	6
	7	0+	0+	001	051	278	626	881	980	999	1-	1-	1-	1-	1-	7
	8	0+	0+	0+	016	141	437	760	942	994	1-	1-	1-	1-	1-	8
	9	0+	0+	0+	004	060	263	593	865	979	999	1-	1-	1-	1-	9
	10	0+	0+	0+	001	021	135	407	737	940	996	1-	1-	1-	1-	10
	11	0+	0+	0+	0+	006	058	240	563	859	984	1-	1-	1-	1-	11
	12	0+	0+	0+	0+	001	020	119	374	722	949	999	1-	1-	1-	12
	13	0+	0+	0+	0+	0+	006	048	209	534	867	994	1-	1-	1-	13
	14	0+	0+	0+	0+	0+	001	015	094	333	716	972	998	1-	1-	14
	15	0+	0+	0+	0+	0+	0+	004	033	165	501	902	989	1-	1-	15
	16	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	008	060	271	734	942	999	1-	16
	17	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	014	099	450	774	986	1-	17
18	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	018	150	397	835	1-	18	
19	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	
	1	174	623	865	986	999	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1	
	2	015	245	580	917	990	999	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	2	
	3	001	067	295	763	954	995	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	3	
	4	0+	013	115	545	867	977	998	1-	1-	1-	1-	1-	1-	4	
	5	0+	002	035	327	718	930	990	999	1-	1-	1-	1-	1-	5	
	6	0+	0+	009	163	526	837	968	997	1-	1-	1-	1-	1-	6	
	7	0+	0+	002	068	334	692	916	988	999	1-	1-	1-	1-	7	
	8	0+	0+	0+	023	182	512	820	965	997	1-	1-	1-	1-	8	
	9	0+	0+	0+	007	084	333	676	912	989	1-	1-	1-	1-	9	
	10	0+	0+	0+	002	033	186	500	814	967	998	1-	1-	1-	10	
	11	0+	0+	0+	0+	011	088	324	667	916	993	1-	1-	1-	11	
	12	0+	0+	0+	0+	003	035	180	488	818	977	1-	1-	1-	12	
	13	0+	0+	0+	0+	001	012	084	308	666	932	998	1-	1-	13	
	14	0+	0+	0+	0+	0+	003	032	163	474	837	991	1-	1-	14	
	15	0+	0+	0+	0+	0+	001	010	070	282	673	965	998	1-	15	
	16	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	023	133	455	885	987	1-	16	
	17	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	005	046	237	705	933	999	17	
18	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	010	083	420	755	985	18		
19	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	014	135	377	826	19		
20	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	
	1	182	642	878	988	999	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1	
	2	017	264	608	931	992	999	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	2	
	3	001	075	323	794	965	996	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	3	
	4	0+	016	133	589	893	984	999	1-	1-	1-	1-	1-	1-	4	

n	r	P												r	
		.01	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95		.99
20	5	0+	003	043	370	762	949	994	1-	1-	1-	1-	1-	1-	5
	6	0+	0+	011	196	584	874	979	998	1-	1-	1-	1-	1-	6
	7	0+	0+	002	087	392	750	942	994	1-	1-	1-	1-	1-	7
	8	0+	0+	0+	032	228	584	868	979	999	1-	1-	1-	1-	8
	9	0+	0+	0+	010	113	404	748	943	995	1-	1-	1-	1-	9
	10	0+	0+	0+	003	048	245	588	872	983	999	1-	1-	1-	10
	11	0+	0+	0+	001	017	128	412	755	952	997	1-	1-	1-	11
	12	0+	0+	0+	0+	005	057	252	596	887	990	1-	1-	1-	12
	13	0+	0+	0+	0+	001	021	132	416	772	968	1-	1-	1-	13
	14	0+	0+	0+	0+	0+	006	058	250	608	913	998	1-	1-	14
	15	0+	0+	0+	0+	0+	002	021	126	416	804	989	1-	1-	15
	16	0+	0+	0+	0+	0+	0+	006	051	238	630	957	997	1-	16
	17	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	016	107	411	867	984	1-	17
	18	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	004	035	206	677	925	999	18
	19	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	008	069	392	736	983	19
	20	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	012	122	358	818	20
	21	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
		1	190	659	891	991	999	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1
		2	019	283	635	942	994	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	2
3		001	085	352	821	973	998	1-	1-	1-	1-	1-	1-	3	
4		0+	019	152	630	914	989	999	1-	1-	1-	1-	1-	4	
5		0+	003	052	414	802	963	996	1-	1-	1-	1-	1-	5	
6		0+	0+	014	231	637	904	987	999	1-	1-	1-	1-	6	
7		0+	0+	003	109	449	800	961	996	1-	1-	1-	1-	7	
8		0+	0+	001	043	277	650	905	988	999	1-	1-	1-	8	
9		0+	0+	0+	014	146	476	808	965	998	1-	1-	1-	9	
10		0+	0+	0+	004	068	309	668	915	991	1-	1-	1-	10	
11		0+	0+	0+	001	026	174	500	826	974	999	1-	1-	1-	11
12		0+	0+	0+	0+	009	035	322	691	932	996	1-	1-	1-	12
13		0+	0+	0+	0+	002	035	192	524	852	986	1-	1-	1-	13
14		0+	0+	0+	0+	001	012	095	350	723	957	999	1-	1-	14
15		0+	0+	0+	0+	0+	004	039	200	551	891	997	1-	1-	15
16		0+	0+	0+	0+	0+	001	013	096	363	769	986	1-	1-	16
17		0+	0+	0+	0+	0+	0+	004	037	198	586	948	997	1-	17
18		0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	011	086	370	848	981	1-	18
19		0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	027	179	648	915	999	19
20		0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	006	058	365	717	981	20
21	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	009	109	341	810	21	
22	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	
	1	198	676	902	993	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1	
	2	020	302	661	952	996	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	2	
	3	001	095	380	846	979	998	1-	1-	1-	1-	1-	1-	3	
	4	0+	022	172	668	932	992	1-	1-	1-	1-	1-	1-	4	

n	r	P												r	
		.01	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95		.99
22	5	0+	004	062	457	835	973	998	1-	1-	1-	1-	1-	1-	5
	6	0+	001	018	267	687	928	992	1-	1-	1-	1-	1-	1-	6
	7	0+	0+	004	133	506	842	974	998	1-	1-	1-	1-	1-	7
	8	0+	0+	001	056	329	710	933	993	1-	1-	1-	1-	1-	8
	9	0+	0+	0+	020	186	546	857	979	999	1-	1-	1-	1-	9
	10	0+	0+	0+	006	092	376	738	945	996	1-	1-	1-	1-	10
	11	0+	0+	0+	002	039	228	584	879	986	1-	1-	1-	1-	11
	12	0+	0+	0+	0+	014	121	416	772	961	998	1-	1-	1-	12
	13	0+	0+	0+	0+	004	055	262	624	908	994	1-	1-	1-	13
14	0+	0+	0+	0+	001	021	143	454	814	980	1-	1-	1-	14	
15	0+	0+	0+	0+	0+	007	067	290	671	944	999	1-	1-	15	
	0+	0+	0+	0+	0+	002	026	158	494	867	996	1-	1-	16	
	0+	0+	0+	0+	0+	0+	008	072	313	733	982	999	1-	17	
	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	027	165	543	938	996	1-	18	
	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	008	068	332	828	978	1-	19	
	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	021	154	620	905	999	20	
	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	004	048	339	698	980	21	
	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	007	098	324	802	22	
	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	007	098	324	802	22	
23	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	
	1	206	693	911	994	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1	
	2	022	321	685	960	997	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	2	
	3	002	105	408	867	984	999	1-	1-	1-	1-	1-	1-	3	
	4	0+	026	193	703	946	995	1-	1-	1-	1-	1-	1-	4	
	5	0+	005	073	499	864	981	999	1-	1-	1-	1-	1-	5	
	6	0+	001	023	305	731	946	995	1-	1-	1-	1-	1-	6	
	7	0+	0+	006	160	560	876	983	999	1-	1-	1-	1-	7	
	8	0+	0+	001	072	382	763	953	996	1-	1-	1-	1-	8	
	9	0+	0+	0+	027	229	612	895	987	999	1-	1-	1-	9	
	10	0+	0+	0+	009	120	444	798	965	998	1-	1-	1-	10	
	11	0+	0+	0+	003	055	287	661	919	993	1-	1-	1-	11	
	12	0+	0+	0+	001	021	164	500	836	979	999	1-	1-	12	
	13	0+	0+	0+	0+	007	081	339	713	945	997	1-	1-	13	
	14	0+	0+	0+	0+	002	035	202	556	880	991	1-	1-	14	
	15	0+	0+	0+	0+	001	013	105	388	771	973	1-	1-	15	
	16	0+	0+	0+	0+	0+	004	047	237	618	928	999	1-	16	
	17	0+	0+	0+	0+	0+	001	017	124	440	840	994	1-	17	
	18	0+	0+	0+	0+	0+	005	054	269	695	977	999	1-	18	
	19	0+	0+	0+	0+	0+	001	019	136	501	927	995	1-	19	
	20	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	005	054	297	807	974	1-	20
	21	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	016	133	592	895	998	21
	22	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	003	040	315	679	978	22
23	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	006	089	307	794	23	

n	r	P													r				
		.01	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95	.99					
24	0	1	1	L	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0		
	1	214	708	920	995	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1		
	2	024	339	708	967	998	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1	2	
	3	002	116	436	885	988	999	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1	3
	4	0+	030	214	736	958	996	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1	4
	5	0+	006	065	540	889	967	999	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1	5
	6	0+	001	028	344	771	960	997	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1	6
	7	0+	0+	007	189	611	904	989	999	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1	7
	8	0+	0+	002	089	435	809	968	998	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1	8
	9	0+	0+	0+	036	275	672	924	992	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1	9
	10	0+	0+	0+	013	153	511	846	978	999	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	10	
	11	0+	0+	0+	004	074	350	729	947	996	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	11	
	12	0+	0+	0+	001	031	213	581	886	988	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	12	
	13	0+	0+	0+	0+	012	114	419	787	969	999	1-	1-	1-	1-	1-	1-	13	
	14	0+	0+	0+	0+	004	053	271	650	926	996	1-	1-	1-	1-	1-	1-	14	
	15	0+	0+	0+	0+	001	022	154	489	847	987	1-	1-	1-	1-	1-	1-	15	
	16	0+	0+	0+	0+	0+	008	076	328	725	964	1-	1-	1-	1-	1-	1-	16	
	17	0+	0+	0+	0+	0+	002	032	192	565	911	998	1-	1-	1-	1-	1-	17	
	18	0+	0+	0+	0+	0+	001	011	096	389	811	993	1-	1-	1-	1-	1-	18	
	19	0+	0+	0+	0+	0+	0+	003	040	229	656	972	999	1-	1-	1-	1-	19	
	20	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	013	111	460	915	994	1-	1-	1-	1-	20	
	21	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	004	042	264	786	970	1-	1-	1-	1-	21	
	22	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	012	115	564	884	998	1-	1-	1-	22	
	23	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	033	292	661	976	1-	1-	1-	23	
24	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	005	080	292	786	1-	1-	1-	1-	24		
25	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0		
	1	222	723	928	996	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1		
	2	026	358	729	973	998	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1	2	
	3	002	127	463	902	991	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1	3	
	4	0+	034	236	766	967	998	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1	4	
	5	0+	007	098	579	910	991	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1	5	
	6	0+	001	033	383	807	971	998	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1	6	
	7	0+	0+	009	220	659	926	993	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1	7	
	8	0+	0+	002	109	488	846	978	999	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1	8	
	9	0+	0+	0+	047	323	726	946	996	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1	9	
	10	0+	0+	0+	017	189	575	885	987	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1	10	
	11	0+	0+	0+	006	098	414	788	966	998	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1	11	
	12	0+	0+	0+	002	044	268	655	922	994	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1	12	
	13	0+	0+	0+	0+	017	154	500	846	983	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1	13	
	14	0+	0+	0+	0+	006	078	345	732	956	998	1-	1-	1-	1-	1-	1	14	
	15	0+	0+	0+	0+	002	034	212	586	902	994	1-	1-	1-	1-	1-	1	15	
	16	0+	0+	0+	0+	0+	013	115	425	811	983	1-	1-	1-	1-	1-	1	16	
	17	0+	0+	0+	0+	0+	004	054	274	677	953	1-	1-	1-	1-	1-	1	17	
	18	0+	0+	0+	0+	0+	001	022	154	512	891	998	1-	1-	1-	1-	1	18	
	19	0+	0+	0+	0+	0+	0+	007	074	341	780	991	1-	1-	1-	1-	1	19	

n	r	p												r	
		.01	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95		.99
25	20	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	029	193	617	967	999	1-	20
	21	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	009	090	421	902	993	1-	21
	22	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	033	234	764	966	1-	22
	23	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	009	098	537	873	998	23
	24	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	027	271	642	974	24
25	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	004	072	277	778	25	

XV. Binomiaaljaotuse tõenäosuste (protsentide) usaldus-
piirid.

Binomiaaljaotuse $B(n, p)$ parameetri p (sündmuse A esinemise tõenäosuse (kahepoolsed) 99%-lised usalduspiirid (protsentides).

$$P(\underline{p} \leq p \leq \bar{p}) = 1 - \alpha = 0,99.$$

$n = 5, 6, \dots, 50$ (vahe 1) ; $60, \dots, 100$ (vahe 10)
 $150, 200, 300, 500.$

$x = 0, 1, \dots, n$ (x on uuritava sündmuse A esinemiste arv katseseerias, mille pikkus on n).

Tabel on võetud teosest [8].

z	n = 5		n = 6		n = 7		n = 8		n = 9	
	\underline{p}_z	\bar{p}_z	\underline{p}_z	\bar{p}_z	\underline{p}_z	\bar{p}_z	\underline{p}_z	\bar{p}_z	\underline{p}_z	\bar{p}_z
0	0,0	60,2	0,0	53,6	0,0	50,0	0,0	45,0	0,0	41,5
1	0,2	77,5	0,2	70,6	0,1	64,4	0,1	59,0	0,1	55,5
2	3,2	89,5	2,6	82,7	2,2	76,4	2,0	70,7	1,7	65,6
3	10,5	96,8	8,4	91,6	7,1	85,8	6,1	80,2	5,3	75,0
4	22,5	99,8	17,3	97,4	14,2	92,9	12,1	87,9	10,5	82,9
5	39,8	100,0	29,4	99,8	23,6	97,8	19,8	93,9	17,1	89,5
6			46,4	100,0	35,6	99,9	29,3	98,0	25,0	94,7
7					51,8	100,0	41,0	99,9	34,4	98,3
8							55,0	100,0	44,5	99,9
9									58,5	100,0
z	n = 10		n = 11		n = 12		n = 13		n = 14	
	\underline{p}_z	\bar{p}_z	\underline{p}_z	\bar{p}_z	\underline{p}_z	\bar{p}_z	\underline{p}_z	\bar{p}_z	\underline{p}_z	\bar{p}_z
0	0,0	37,6	0,0	35,9	0,0	32,1	0,0	30,2	0,0	30,8
1	0,1	51,3	0,1	50,0	0,1	44,5	0,1	42,9	0,1	41,1
2	1,5	61,2	1,3	59,4	1,2	55,5	1,1	52,3	1,1	50,0
3	4,7	70,3	4,3	66,0	3,9	64,3	3,5	60,4	3,3	58,9
4	9,3	78,2	8,3	73,8	7,5	69,8	6,9	66,5	6,4	63,2
5	15,1	84,9	13,4	80,6	12,1	76,5	11,1	72,7	10,2	69,2
6	21,8	90,7	19,4	86,6	17,4	82,6	15,9	78,7	14,5	75,1
7	29,7	95,3	26,2	91,7	23,5	87,9	21,3	84,1	19,4	80,6
8	38,8	98,5	34,0	95,7	30,2	92,5	27,3	88,9	24,9	85,5
9	48,7	99,9	40,6	98,7	35,7	96,1	33,5	93,1	30,8	89,8
10	62,4	100,0	50,0	99,9	44,5	98,8	39,6	96,5	36,8	93,6
11			64,1	100,0	55,5	99,9	47,7	98,9	41,1	96,7
12					67,9	100,0	57,1	99,9	50,0	98,9
13							69,8	100,0	58,9	99,9
14									69,2	100,0
z	n = 15		n = 16		n = 17		n = 18		n = 19	
	\underline{p}_z	\bar{p}_z	\underline{p}_z	\bar{p}_z	\underline{p}_z	\bar{p}_z	\underline{p}_z	\bar{p}_z	\underline{p}_z	\bar{p}_z
0	0,0	28,2	0,0	26,5	0,0	26,8	0,0	25,5	0,0	24,3
1	0,1	37,3	0,1	35,8	0,1	34,7	0,1	34,2	0,1	31,9
2	1,0	46,2	0,9	45,3	0,8	42,7	0,7	39,7	0,6	38,4
3	3,1	53,8	2,9	52,8	2,7	50,0	2,5	46,6	2,3	45,6
4	6,0	62,7	5,5	58,1	5,2	57,3	4,9	53,4	4,5	51,5
5	9,4	67,2	8,8	64,0	8,2	61,9	7,7	60,3	7,2	56,5
6	13,4	71,8	12,5	70,6	11,7	66,2	11,0	65,8	10,3	61,1
7	18,0	77,1	16,6	73,9	15,5	73,2	14,5	68,7	13,4	68,1
8	22,9	82,0	21,2	78,8	19,7	75,8	18,4	74,5	17,3	70,7
9	28,2	86,6	26,1	83,4	24,2	80,2	22,6	77,4	21,2	75,7
10	32,8	90,6	29,4	87,5	26,8	84,5	25,5	81,6	24,3	78,8
11	37,3	94,6	36,0	91,2	33,8	88,3	31,3	85,5	29,2	82,7
12	46,2	96,9	41,9	94,5	38,1	91,8	34,2	89,0	31,9	86,6
13	53,8	99,0	47,2	97,1	42,7	94,8	39,7	92,3	38,9	89,7
14	62,7	99,9	54,7	99,1	50,0	97,3	46,6	95,1	43,5	92,7
15	71,8	100,0	64,2	99,9	57,3	99,2	53,4	97,5	48,5	95,5
16			73,5	100,0	65,3	99,9	60,3	99,3	54,4	97,7
17					73,2	100,0	65,8	99,9	61,6	99,4
18							74,5	100,0	68,1	99,9
19									75,7	100,0

z	n = 20		n = 21		n = 22		n = 23		n = 24	
	\bar{p}_z	\bar{p}_z	\bar{p}_z	\bar{p}_z	\bar{p}_z	\bar{p}_z	\bar{p}_z	\bar{p}_z	\bar{p}_z	\bar{p}_z
0	0,0	23,3	0,0	22,3	0,0	21,4	0,0	20,3	0,0	19,3
1	0,1	29,9	0,1	28,4	0,1	27,4	0,0	26,4	0,0	25,9
2	0,6	37,5	0,5	36,6	0,5	34,5	0,4	32,6	0,4	31,4
3	2,2	44,0	2,1	41,2	2,0	39,7	1,9	38,8	1,8	38,6
4	4,3	50,0	4,1	46,6	3,9	45,4	3,7	45,2	3,5	42,7
5	6,9	56,0	6,5	53,4	6,2	50,5	5,9	50,0	5,6	46,9
6	9,7	60,1	9,2	58,8	8,8	54,9	8,3	54,8	8,0	53,1
7	12,9	64,0	12,2	63,4	11,6	60,3	11,1	59,3	10,5	57,3
8	16,3	70,1	15,4	66,2	14,6	65,5	14,0	62,2	13,3	61,4
9	20,0	72,7	18,9	71,0	17,9	68,3	17,1	67,4	16,2	63,9
10	23,3	76,7	22,3	74,4	21,4	72,6	20,3	71,1	19,3	68,6
11	27,3	80,0	25,6	77,7	24,2	75,8	22,9	73,4	21,4	72,0
12	29,9	83,7	29,0	81,1	27,4	78,6	26,6	77,1	25,7	74,3
13	36,0	87,1	33,8	84,6	31,7	82,1	28,9	79,7	28,0	78,6
14	39,9	90,3	36,6	89,7	34,5	85,4	32,6	82,9	31,4	80,7
15	44,0	93,1	41,2	90,8	39,7	88,4	37,8	86,0	36,1	83,8
16	50,0	95,7	46,6	93,5	45,1	91,2	41,7	88,9	38,6	86,7
17	56,0	97,8	53,4	95,9	49,5	93,8	45,2	91,7	42,7	89,5
18	62,5	99,4	58,8	97,9	54,6	96,1	50,0	94,1	46,9	92,0
19	70,1	99,9	63,4	99,5	60,3	98,0	54,8	96,3	53,1	94,4
20	76,7	100,0	71,6	99,9	65,5	99,5	61,2	98,1	57,3	96,5
21			77,7	100,0	72,6	99,9	67,4	99,6	61,4	98,2
22					78,6	100,0	73,6	100,0	68,6	99,6
23							79,7	100,0	74,1	100,0
24									80,7	100,0

z	n = 25		n = 26		n = 27		n = 28		n = 29	
	\bar{p}_z	\bar{p}_z	\bar{p}_z	\bar{p}_z	\bar{p}_z	\bar{p}_z	\bar{p}_z	\bar{p}_z	\bar{p}_z	\bar{p}_z
0	0,0	18,4	0,0	17,6	0,0	16,9	0,0	16,4	0,0	16,0
1	0,0	26,1	0,0	24,9	0,0	23,8	0,0	22,8	0,0	21,9
2	0,4	30,5	0,4	29,8	0,3	30,0	0,3	28,7	0,3	27,6
3	1,7	36,6	1,7	34,9	1,6	33,3	1,6	32,5	1,4	31,7
4	3,4	40,5	3,2	39,4	3,1	38,5	3,0	38,3	2,9	36,8
5	5,4	45,2	5,2	44,2	5,0	43,9	4,8	41,9	4,6	40,1
6	7,6	50,0	7,3	48,7	7,0	47,8	6,7	45,4	6,5	43,9
7	10,1	54,8	9,6	52,7	9,3	52,2	8,9	50,0	8,6	47,8
8	12,7	59,5	12,3	56,4	11,7	56,1	11,2	54,6	10,8	52,2
9	15,5	63,4	14,9	59,8	14,2	58,8	13,7	58,1	13,2	56,1
10	18,4	65,6	17,6	65,1	16,9	61,9	16,3	61,7	15,6	59,9
11	20,4	69,5	19,4	67,8	18,4	66,7	17,3	63,7	16,7	63,2
12	24,4	73,9	23,3	70,3	22,3	70,0	21,4	66,5	20,6	65,7
13	26,1	75,6	24,9	75,1	23,8	71,7	22,8	71,3	21,9	67,9
14	30,5	79,6	29,7	76,7	28,3	76,2	27,1	72,9	26,0	72,4
15	34,4	81,6	32,2	80,6	30,0	77,7	28,7	77,2	27,6	74,0
16	36,6	84,5	34,9	82,4	33,3	81,6	33,5	78,6	32,1	78,1
17	40,5	87,3	40,2	85,1	38,1	83,1	36,3	82,7	34,3	79,4
18	45,2	89,9	43,6	87,7	41,2	85,8	38,3	83,7	36,8	83,3
19	50,0	92,4	47,3	90,4	43,9	88,3	41,9	86,3	40,1	84,4
20	54,8	94,6	51,3	92,7	47,8	90,7	45,4	88,8	43,9	86,8
21	59,5	96,6	55,8	94,8	53,2	93,0	50,0	91,1	47,8	89,2
22	63,4	98,3	60,6	96,8	56,1	95,0	54,6	93,3	52,2	91,4
23	69,5	99,6	65,1	98,3	61,5	96,9	58,1	95,2	56,1	93,5

z	n = 25		n = 26		n = 27		n = 28		n = 29	
	\underline{p}_z	\bar{p}_z	\underline{p}_z	\bar{p}_z	\underline{p}_z	\bar{p}_z	\underline{p}_z	\bar{p}_z	\underline{p}_z	\bar{p}_z
24	73,9	100,0	70,2	99,6	66,7	98,4	61,7	97,0	59,9	95,4
25	91,6	100,0	75,1	100,0	70,0	99,7	67,5	98,4	63,2	97,1
26			82,4	100,0	76,2	100,0	71,3	99,7	68,3	98,6
27					83,1	100,0	77,2	100,0	72,4	99,4
28							83,6	100,0	78,1	100,0
29									80,4	100,0

z	n = 30		n = 31		n = 32		n = 33		n = 34	
	\underline{p}_z	\bar{p}_z	\underline{p}_z	\bar{p}_z	\underline{p}_z	\bar{p}_z	\underline{p}_z	\bar{p}_z	\underline{p}_z	\bar{p}_z
0	0,0	16,2	0,0	15,8	0,0	15,3	0,0	14,8	0,0	14,5
1	0,0	21,1	0,0	20,3	0,0	19,7	0,0	19,0	0,0	18,7
2	0,3	26,5	0,3	25,5	0,2	24,6	0,2	23,8	0,2	23,1
3	1,4	31,0	1,3	30,9	1,3	29,8	1,2	28,8	1,2	27,8
4	2,8	35,3	2,7	33,9	2,5	32,6	2,5	32,8	2,4	31,6
5	4,4	38,7	4,3	38,0	4,2	37,4	4,0	37,0	3,9	35,7
6	6,2	43,0	6,1	43,1	5,9	41,5	5,6	39,9	5,4	38,4
7	8,3	46,9	8,0	46,4	7,7	44,5	7,4	42,9	7,2	41,9
8	10,4	50,4	10,1	50,0	9,7	47,8	9,4	46,2	9,1	45,0
9	12,7	53,8	12,2	53,6	11,8	52,2	11,4	50,0	11,1	48,6
10	15,1	57,0	14,5	56,9	14,0	55,5	13,4	53,8	13,1	51,8
11	16,2	61,3	15,8	58,9	15,3	58,5	14,8	57,1	14,5	55,0
12	19,7	64,7	19,0	62,0	18,3	61,0	17,6	60,1	17,0	58,1
13	21,1	67,1	20,3	66,1	20,0	63,3	19,6	63,0	18,7	61,6
14	24,9	69,3	24,0	69,1	23,0	67,4	22,1	64,8	21,2	64,3
15	26,5	73,5	25,5	70,5	24,6	70,2	23,8	67,2	23,1	66,3
16	30,7	75,1	29,5	74,5	28,3	71,7	27,2	71,2	26,2	68,4
17	32,9	78,9	30,9	76,0	29,8	75,4	28,8	72,8	27,0	73,0
18	35,3	80,3	33,9	79,7	32,6	77,0	32,8	77,2	31,6	73,8
19	38,7	83,8	38,0	81,0	36,7	80,0	35,2	77,9	33,7	76,9
20	43,0	84,9	41,1	84,2	39,0	81,7	37,0	80,4	35,7	78,8
21	46,2	87,3	43,1	85,5	41,5	84,7	39,9	82,4	38,4	81,3
22	49,6	89,6	46,4	87,8	44,5	86,0	42,9	85,2	41,9	83,0
23	53,1	91,7	50,0	89,9	47,8	88,2	46,2	86,6	45,0	85,5
24	57,0	93,8	53,6	92,0	52,2	90,3	50,0	88,6	48,2	86,9
25	61,3	95,6	56,9	93,9	55,5	92,3	53,8	90,6	51,4	88,9
26	64,7	97,2	62,0	95,7	58,5	94,1	57,1	92,6	55,0	90,9
27	69,0	98,6	66,1	97,3	62,6	95,8	60,1	94,4	58,1	92,8
28	73,5	99,7	69,1	98,7	67,4	97,5	63,0	96,0	61,6	94,6
29	78,9	100,0	74,5	99,7	70,2	98,7	67,2	97,5	64,3	96,1
30	83,8	100,0	79,7	100,0	75,4	99,8	71,2	98,8	68,4	97,6
31			84,2	100,0	80,3	100,0	76,2	99,8	72,2	98,8
32					84,7	100,0	81,0	100,0	76,9	99,8
33							85,2	100,0	81,3	100,0
34									85,5	100,0

z	n = 35		n = 36		n = 37		n = 38		n = 39	
	p_z	\bar{p}_z	p_z	\bar{p}_z	p_z	\bar{p}_z	p_z	\bar{p}_z	p_z	\bar{p}_z
0	0,0	14,0	0,0	13,7	0,0	13,4	0,0	13,0	0,0	12,7
1	0,0	18,3	0,0	17,9	0,0	17,6	0,0	17,1	0,0	17,6
2	0,2	22,7	0,2	22,2	0,2	21,8	0,2	21,5	0,2	21,6
3	1,2	26,9	1,1	26,0	1,1	25,3	1,1	24,8	1,1	24,4
4	2,3	31,1	2,3	30,8	2,2	29,9	2,2	28,9	2,1	28,1
5	3,7	34,5	3,6	33,4	3,5	32,5	3,4	31,8	3,3	31,3
6	5,3	37,6	5,2	36,8	5,0	36,1	4,9	36,1	4,7	35,0
7	7,0	41,1	6,8	41,2	6,6	39,8	6,4	38,6	6,2	37,3
8	8,8	44,9	8,5	43,9	8,3	42,4	8,1	41,0	7,9	40,3
9	10,7	48,4	10,4	46,7	10,1	45,2	9,8	43,9	9,5	43,2
10	12,7	51,6	12,3	50,0	12,0	47,9	11,6	47,0	11,3	46,1
11	14,0	54,0	13,7	53,3	13,4	52,1	13,0	50,0	12,7	49,0
12	16,4	56,6	16,0	56,1	15,4	54,8	15,0	53,0	14,5	51,8
13	19,0	58,9	18,3	58,8	17,9	57,6	17,3	56,1	16,8	54,1
14	20,5	62,4	19,7	60,6	19,1	60,2	18,3	59,0	17,6	56,8
15	22,7	65,5	22,2	63,2	21,8	62,1	21,3	61,4	20,7	59,7
16	25,2	67,9	24,3	66,6	23,5	64,2	22,3	63,9	21,6	62,7
17	26,9	69,2	26,0	69,2	25,3	67,5	24,8	65,5	24,4	65,0
18	30,8	73,1	29,4	70,6	28,4	70,1	27,5	68,2	26,4	66,7
19	32,1	74,8	30,8	74,0	29,9	71,6	28,9	71,1	28,1	68,7
20	34,5	77,3	33,4	75,7	32,5	74,7	31,8	72,5	31,3	71,9
21	37,6	79,5	36,8	77,8	35,8	76,5	34,5	75,2	33,3	73,6
22	41,1	81,0	39,4	80,3	37,9	78,2	36,1	77,7	35,0	75,6
23	43,4	83,6	41,2	81,7	39,8	80,9	38,6	78,7	37,3	78,4
24	46,0	86,0	43,9	84,0	42,4	82,1	41,0	81,7	40,3	79,3
25	48,4	87,3	46,7	86,3	45,2	84,6	43,9	82,7	43,2	82,3
26	51,6	89,3	50,0	87,7	47,9	86,6	47,0	85,0	45,9	83,2
27	55,1	91,2	53,3	89,6	52,1	88,0	50,0	87,0	48,2	85,5
28	58,9	93,0	56,1	91,5	54,8	89,9	53,0	88,4	51,0	87,3
29	62,4	94,7	58,8	93,2	57,6	91,7	56,1	90,2	53,9	88,7
30	65,5	96,3	63,2	94,8	60,2	93,4	59,0	91,9	56,8	90,5
31	68,9	97,7	66,6	96,3	63,9	95,0	61,4	93,6	59,7	92,1
32	73,1	98,8	69,2	97,7	67,5	96,5	63,9	95,1	62,7	93,8
33	77,3	99,8	74,0	98,9	70,1	97,8	68,2	96,6	65,0	95,3
34	81,7	100,0	77,8	99,8	74,7	98,9	71,1	97,8	68,7	96,7
35	86,0	100,0	82,1	100,0	78,2	99,8	75,2	98,9	71,9	97,9
36			86,3	100,0	82,4	100,0	78,5	99,8	75,6	98,9
37					86,6	100,0	82,9	100,0	78,4	99,8
38							87,0	100,0	82,4	100,0
39									87,3	100,0

z	n = 40		n = 41		n = 42		n = 43		n = 44		n = 45	
	\bar{p}_z	\bar{p}_z	\bar{p}_z	\bar{p}_z	\bar{p}_z	\bar{p}_z	\bar{p}_z	\bar{p}_z	\bar{p}_z	\bar{p}_z	\bar{p}_z	\bar{p}_z
0	0,0	12,4	0,0	12,2	0,0	11,9	0,0	11,7	0,0	11,4	0,0	11,1
1	0,0	17,1	0,0	16,6	0,0	16,2	0,0	15,8	0,0	15,4	0,0	15,0
2	0,2	21,1	0,2	20,4	0,2	20,0	0,1	19,4	0,1	18,9	0,1	18,4
3	1,1	24,0	1,1	23,7	1,0	23,8	1,0	23,2	1,0	22,6	1,0	22,0
4	2,1	27,3	2,0	26,5	2,0	25,8	1,9	25,4	1,9	25,0	1,8	24,1
5	3,2	31,0	3,2	30,8	3,1	29,9	3,1	29,1	3,0	28,3	2,9	27,6
6	4,6	33,9	4,4	33,0	4,4	32,1	4,2	31,3	4,2	30,9	4,1	30,4
7	6,1	36,4	6,0	35,8	5,8	35,1	5,6	35,4	5,4	34,5	5,3	33,6
8	7,6	39,6	7,4	39,0	7,2	38,6	7,1	37,6	6,9	36,6	6,7	35,6
9	9,3	43,4	9,1	42,2	8,8	41,0	8,6	39,8	8,4	38,8	8,2	38,0
10	11,0	46,0	10,7	44,6	10,4	43,3	10,2	42,1	10,0	41,5	9,7	40,9
11	12,4	48,5	12,2	47,1	11,9	46,7	11,7	44,4	11,4	44,1	11,1	44,2
12	14,1	51,5	13,7	50,0	13,3	48,1	13,0	47,4	12,6	46,8	12,3	46,6
13	16,3	54,0	15,8	52,9	15,4	51,9	15,1	50,0	14,7	49,1	14,3	48,8
14	17,1	56,6	16,6	55,4	16,2	54,3	15,8	52,6	15,4	51,7	15,0	51,2
15	20,6	58,1	19,5	57,8	19,0	56,7	18,5	55,6	18,0	53,8	17,5	53,6
16	21,1	60,4	20,4	59,9	20,0	59,0	19,4	57,9	18,9	55,9	18,4	55,8
17	24,0	63,6	23,5	61,6	22,9	61,4	22,2	60,2	21,6	59,0	21,1	56,7
18	25,6	66,1	24,9	64,2	23,8	62,9	23,2	62,4	22,6	61,2	22,0	59,2
19	27,3	67,9	26,5	67,0	25,8	64,9	25,4	64,6	25,0	63,4	24,1	62,0
20	30,5	69,5	29,6	69,2	28,7	67,9	27,9	65,8	27,0	65,5	26,2	64,4
21	32,1	72,7	30,8	70,4	29,9	70,1	29,1	68,7	28,3	66,8	27,6	66,4
22	33,9	74,4	33,0	73,5	32,1	71,3	31,3	70,9	30,9	69,1	30,4	67,8
23	36,4	76,0	35,8	75,1	35,1	74,2	34,2	72,1	33,2	71,7	32,2	69,6
24	39,6	78,9	38,4	76,5	37,1	76,2	35,4	74,6	34,5	73,0	33,6	72,4
25	41,9	79,4	40,1	79,6	38,6	77,1	37,6	76,8	36,6	75,0	35,6	73,8
26	43,4	82,9	42,2	80,5	41,0	80,0	39,8	77,8	38,8	77,4	38,0	75,9
27	46,0	83,7	44,6	83,4	43,3	81,0	42,1	80,6	41,0	78,4	40,8	78,0
28	48,5	85,9	47,1	84,2	45,7	83,8	44,4	81,5	44,1	81,1	43,3	78,9
29	51,5	87,6	50,0	86,3	48,1	84,6	47,4	84,2	46,2	82,0	44,2	81,6
30	54,0	89,0	52,9	87,8	51,9	86,7	50,0	84,9	48,3	84,6	46,4	82,5
31	56,6	90,7	55,4	89,3	54,3	88,1	52,6	87,0	50,9	85,3	48,8	85,0
32	60,4	92,4	57,8	90,9	56,7	89,6	55,6	88,3	53,2	87,4	51,2	85,7
33	63,6	93,9	61,0	92,6	59,0	91,2	57,9	89,8	55,9	88,6	53,4	87,7
34	66,1	95,4	64,2	94,0	61,4	92,9	60,2	91,4	58,5	90,0	55,8	88,9
35	69,0	96,8	67,0	95,6	64,9	94,2	62,4	92,9	61,2	91,6	59,1	90,3
36	72,7	97,9	69,2	96,8	67,9	95,6	64,6	94,4	63,4	93,1	62,0	91,8
37	76,0	98,9	73,5	98,0	70,1	96,9	68,7	95,8	65,5	94,6	64,4	93,3
38	78,9	99,8	76,3	98,9	74,2	98,0	70,9	96,9	69,1	95,8	66,4	94,3
39	82,9	100,0	79,6	99,8	76,2	99,0	74,6	98,1	71,7	97,0	69,6	95,9
40	87,6	100,0	83,4	100,0	80,0	99,8	76,8	99,0	75,0	98,1	72,4	97,1
41			87,8	100,0	83,8	100,0	80,6	99,9	77,4	99,0	75,9	98,2
42					88,1	100,0	84,2	100,0	81,1	99,9	78,0	99,0
43							88,3	100,0	84,6	100,0	81,6	99,9
44									88,0	100,0	85,0	100,0
45											88,9	100,0

z	n = 46		n = 47		n = 48		n = 49	
	p_z	\bar{p}_z	p_z	\bar{p}_z	p_z	\bar{p}_z	p_z	\bar{p}_z
0	0,0	10,9	0,0	10,7	0,0	10,5	0,0	10,3
1	0,0	14,6	0,0	14,3	0,0	14,0	0,0	13,7
2	0,1	18,0	0,1	17,5	0,1	17,2	0,1	16,8
3	0,9	21,5	0,8	21,0	0,8	20,5	0,8	20,0
4	1,7	24,1	1,7	24,5	1,6	23,9	1,6	23,3
5	2,8	27,0	2,7	26,3	2,7	25,7	2,6	25,3
6	4,0	29,9	3,9	30,0	3,8	29,3	3,7	28,6
7	5,2	32,7	5,1	31,9	5,1	31,2	4,9	30,4
8	6,6	34,8	6,4	34,2	6,3	32,7	6,2	33,2
9	8,0	37,6	7,8	37,8	7,6	36,9	7,4	36,0
10	9,4	40,9	9,2	39,9	9,1	38,9	8,9	38,0
11	10,9	43,1	10,7	42,9	10,5	40,9	10,3	39,9
12	12,0	45,2	11,7	44,1	11,4	43,0	11,3	42,3
13	14,0	47,4	13,2	46,2	13,4	45,3	13,1	44,8
14	14,6	50,0	14,3	48,3	14,0	47,5	13,7	46,9
15	17,1	52,6	16,7	51,7	16,4	50,0	16,0	49,1
16	18,0	54,8	17,5	53,8	17,2	52,5	16,8	51,2
17	20,5	56,9	20,1	55,9	19,6	54,7	19,1	52,3
18	21,5	59,1	21,0	58,0	20,5	57,0	20,0	55,2
19	24,1	60,5	23,6	60,1	23,2	59,1	22,5	57,7
20	25,2	62,4	24,5	62,2	23,9	61,1	23,3	60,1
21	27,0	65,2	26,3	63,6	25,7	63,1	25,3	62,0
22	29,8	67,3	29,1	65,8	28,2	64,3	27,5	64,0
23	31,1	68,9	30,0	68,1	29,3	66,3	28,6	65,5
24	32,7	70,2	31,9	70,0	31,2	68,8	30,4	66,8
25	34,8	73,0	34,2	70,9	33,7	70,7	33,2	69,6
26	37,6	74,8	36,4	73,7	35,6	71,8	34,5	71,4
27	39,5	75,9	37,8	75,5	36,9	74,2	36,0	72,5
28	40,9	78,5	39,9	76,4	38,9	76,1	38,0	74,7
29	43,1	79,5	42,0	79,0	40,9	76,8	39,9	76,7
30	45,2	82,0	44,1	79,9	43,0	79,5	42,3	77,5
31	47,4	82,9	46,2	82,5	45,3	80,4	44,8	80,0
32	50,0	85,4	48,3	83,3	47,5	82,9	47,7	80,9
33	52,6	86,0	51,7	85,7	50,0	83,6	48,8	83,2
34	54,7	88,0	53,8	86,8	52,5	86,0	50,9	84,0
35	56,8	89,1	55,9	88,3	54,7	86,6	53,1	86,3
36	59,1	90,6	58,0	89,3	57,0	88,6	55,2	86,9
37	62,4	92,0	60,1	90,8	59,1	89,5	57,7	88,7
38	65,2	93,4	62,2	92,2	61,1	90,9	60,1	89,7
39	67,3	94,8	65,8	93,6	63,1	92,4	62,0	91,1
40	70,1	96,0	68,1	94,9	66,3	93,7	64,0	92,6
41	73,0	97,2	70,0	96,1	68,8	94,9	66,8	93,8
42	75,9	98,3	73,7	97,3	70,7	96,2	69,6	95,1
43	78,5	99,1	75,5	98,3	74,2	97,3	71,4	96,3
44	82,0	99,9	79,0	99,2	76,1	98,4	74,7	97,4
45	85,4	100,0	82,5	99,9	79,5	99,2	76,7	98,4
46	89,1	100,0	85,7	100,0	82,8	99,9	80,0	99,7
47			89,3	100,0	86,0	100,0	83,2	99,9
48					89,5	100,0	86,3	100,0
49							89,7	100,0

z	n = 50		n = 60		n = 70		n = 80		n = 90	
	$\underline{p_z}$	$\overline{p_z}$	$\underline{p_z}$	$\overline{p_z}$	$\underline{p_z}$	$\overline{p_z}$	$\underline{p_z}$	$\overline{p_z}$	$\underline{p_z}$	$\overline{p_z}$
0	0,0	10,1	0,0	8,5	0,0	7,3	0,0	6,4	0,0	5,7
1	0,0	14,0	0,0	11,8	0,0	10,2	0,0	9,0	0,0	8,0
2	0,3	17,2	0,3	14,5	0,2	12,6	0,2	11,1	0,2	9,9
3	0,9	20,3	0,7	17,2	0,6	14,9	0,5	13,1	0,5	11,7
4	1,7	23,1	1,4	19,6	1,2	16,9	1,0	14,9	0,9	13,4
5	2,6	25,8	2,2	21,9	1,9	18,9	1,6	16,7	1,5	14,9
10	8,8	38,1	7,4	32,4	6,2	28,1	5,4	24,9	4,8	22,4
15	14,9	49,0	12,3	41,8	10,4	36,4	9,0	32,3	8,0	29,0
20	22,9	59,1	18,7	50,7	15,8	44,3	13,7	39,4	12,1	35,3
25	31,5	68,5	25,6	59,0	21,7	51,8	18,8	46,1	16,5	41,5
30	40,9	77,1	33,1	66,9	27,8	58,9	24,1	52,5	21,2	47,3
35	51,0	85,1	41,0	74,4	34,3	65,7	29,6	58,7	26,0	53,0
40	61,9	92,1	49,3	81,3	41,4	72,2	35,4	64,6	31,0	58,5
45	74,2	97,8	58,2	87,8	48,2	78,3	41,3	70,4	36,2	63,8
50	89,9	100,0	67,6	93,5	55,7	84,2	47,5	75,9	41,5	69,0
55			78,1	97,8	63,6	89,6	53,9	81,2	47,0	74,0
60			91,5	100,0	71,9	93,8	60,6	86,3	52,7	78,8
65					81,1	98,1	67,7	91,0	58,5	83,5
70					92,7	100,0	75,1	94,6	64,7	87,9
75							83,3	98,4	71,0	92,0
80							93,6	100,0	77,6	95,2
85									85,1	98,5
90									94,3	100,0

z	n = 100		n = 150		n = 200		n = 300		n = 500	
	$\underline{p_z}$	$\overline{p_z}$	$\underline{p_z}$	$\overline{p_z}$	$\underline{p_z}$	$\overline{p_z}$	$\underline{p_z}$	$\overline{p_z}$	$\underline{p_z}$	$\overline{p_z}$
0	0,0	5,2	0,0	3,5	0,0	2,6	0,0	1,8	0,0	1,1
1	0,0	7,2	0,0	4,9	0,0	3,7	0,0	2,5	0,0	1,5
2	0,1	8,9	0,1	6,0	0,1	4,6	0,0	3,1	0,0	1,8
3	0,4	10,6	0,3	7,1	0,2	5,4	0,1	3,6	0,1	2,2
4	0,8	12,1	0,6	8,2	0,4	6,2	0,3	4,1	0,2	2,5
5	1,3	13,5	0,9	9,2	0,6	6,9	0,4	4,6	0,3	2,8
10	4,3	20,3	2,8	13,7	2,1	10,4	1,4	7,0	0,8	4,2
15	7,2	26,3	4,7	18,0	3,5	13,7	2,3	9,2	1,4	5,5
20	10,9	32,1	7,1	21,9	5,3	16,7	3,5	11,3	2,1	6,8
25	14,8	37,6	9,7	25,9	7,2	19,7	4,7	13,4	2,8	8,1
30	18,9	43,0	12,3	29,6	9,1	22,5	6,0	15,3	3,6	9,3
35	23,2	48,2	15,1	33,2	11,2	25,3	7,3	17,2	4,4	10,4
40	27,6	53,4	17,9	36,9	13,3	28,2	8,7	19,1	5,2	11,6
45	32,3	58,3	20,9	40,4	15,4	30,3	10,1	21,1	6,0	12,8
50	36,9	63,1	23,9	44,0	17,5	33,8	11,5	23,4	6,8	13,9
60	46,6	72,4	29,8	50,7	22,0	39,0	14,3	26,5	8,5	16,3
70	57,0	81,1	36,2	57,4	26,5	44,2	17,4	30,2	10,3	18,5
80	67,9	89,1	42,6	63,8	31,2	49,3	20,4	33,9	12,1	20,7
90	79,7	96,2	49,3	70,2	35,9	54,4	23,5	37,3	13,8	22,8
100	94,8	100,0	56,0	76,2	40,7	59,3	26,5	40,7	15,5	25,0
150			96,5	100,0	66,2	82,5	42,6	57,4	24,9	35,6
200					97,4	100,0	59,3	73,5	34,4	46,0
250							77,7	88,5	44,2	55,8
300							98,2	100,0	54,0	65,6

z	n = 5		n = 6		n = 7		n = 8		n = 9	
	\underline{p}_z	\overline{p}_z	\underline{p}_z	\overline{p}_z	\underline{p}_z	\overline{p}_z	\underline{p}_z	\overline{p}_z	\underline{p}_z	\overline{p}_z
0	0,0	48,5	0,0	40,6	0,0	35,6	0,0	32,5	0,0	29,3
1	2,0	66,5	1,7	59,4	1,4	53,0	1,3	48,1	1,1	43,9
2	10,6	76,5	8,7	73,8	7,3	66,9	6,4	61,2	5,7	65,2
3	23,5	89,4	18,9	81,1	15,9	73,6	13,7	72,2	12,0	66,7
4	33,5	98,0	26,2	91,3	26,4	84,1	22,5	77,5	19,7	71,6
5	51,5	100,0	40,6	98,3	33,1	92,7	27,8	86,3	28,4	80,3
6			59,4	100,0	47,0	98,6	38,8	93,6	33,3	88,0
7					64,4	100,0	51,9	98,7	43,8	94,3
8							67,5	100,0	56,1	98,9
9									76,7	100,0

z	n = 10		n = 11		n = 12		n = 13		n = 14	
	\underline{p}_z	\overline{p}_z	\underline{p}_z	\overline{p}_z	\underline{p}_z	\overline{p}_z	\underline{p}_z	\overline{p}_z	\underline{p}_z	\overline{p}_z
0	0,0	26,8	0,0	24,7	0,0	23,4	0,0	21,5	0,0	20,0
1	1,0	40,4	0,9	37,4	0,8	34,8	0,8	32,5	0,8	30,8
2	5,1	51,9	4,5	48,3	4,2	45,4	3,9	42,3	3,6	39,7
3	10,8	62,0	9,7	57,8	8,9	54,5	8,1	50,9	7,5	48,0
4	17,5	70,9	15,8	66,4	14,3	62,3	13,1	57,7	12,2	55,6
5	25,2	74,8	22,5	70,0	20,5	69,8	18,7	65,9	17,3	62,4
6	29,1	82,5	30,0	77,5	23,4	76,6	21,5	72,6	20,0	69,2
7	38,0	89,2	33,6	84,2	31,2	79,5	27,4	78,5	25,1	74,9
8	48,1	94,9	42,2	90,3	37,7	85,7	34,1	81,2	30,8	80,0
9	59,6	99,0	51,7	95,5	45,4	91,1	42,3	86,9	37,6	82,7
10	73,2	100,0	62,6	99,1	54,5	95,8	49,1	91,9	44,4	87,8
11			75,3	100,0	65,2	99,2	57,7	96,1	52,0	92,5
12					76,6	100,0	67,5	99,2	60,3	96,4
13							78,5	100,0	69,2	99,2
14									80,0	100,0

z	n = 15		n = 16		n = 17		n = 18		n = 19	
	\underline{p}_z	\overline{p}_z	\underline{p}_z	\overline{p}_z	\underline{p}_z	\overline{p}_z	\underline{p}_z	\overline{p}_z	\underline{p}_z	\overline{p}_z
0	0,0	18,9	0,0	17,7	0,0	16,9	0,0	16,0	0,0	15,2
1	0,8	28,5	0,7	27,1	0,6	25,7	0,6	24,5	0,5	23,3
2	3,3	37,5	3,2	35,5	2,8	33,8	2,8	32,3	2,6	30,7
3	7,0	45,4	6,5	43,3	6,1	40,9	5,8	39,0	5,5	37,5
4	11,3	52,6	10,5	49,9	9,8	47,5	9,3	45,3	8,6	43,4
5	16,0	59,2	14,8	56,7	13,9	53,7	13,1	51,4	12,3	49,1
6	18,9	65,5	17,7	62,4	16,9	59,5	16,0	56,9	15,2	54,5
7	23,2	61,3	21,5	68,1	20,2	65,1	18,8	62,3	17,8	59,7
8	38,7	76,7	26,6	73,4	24,8	70,3	22,4	67,7	21,8	64,6
9	34,5	81,1	31,9	78,5	29,7	75,2	27,8	72,2	26,1	69,4
10	40,8	84,0	37,6	82,3	34,9	79,8	32,3	77,6	30,6	73,9
11	47,4	88,7	43,3	85,2	40,5	83,1	37,7	81,2	35,4	78,2
12	54,6	93,0	50,1	89,5	46,3	86,1	43,1	84,0	40,3	82,2
13	62,5	96,7	56,7	93,5	52,5	90,2	48,6	86,9	45,5	84,8
14	71,5	99,2	64,5	96,8	59,1	93,9	54,7	90,7	50,9	87,7
15	81,1	100,0	72,9	99,3	66,2	97,2	61,0	94,2	56,6	91,4
16			82,3	100,0	74,3	99,4	67,7	97,2	62,5	94,5
17					83,1	100,0	75,5	99,4	69,3	97,4
18							84,0	100,0	76,7	99,5
19									84,8	100,0

z	n = 20		n = 21		n = 22		n = 23		n = 24	
	\bar{p}_z	\bar{p}_z	\bar{p}_z	\bar{p}_z	\bar{p}_z	\bar{p}_z	\bar{p}_z	\bar{p}_z	\bar{p}_z	\bar{p}_z
0	0,0	14,5	0,0	13,9	0,0	13,4	0,0	12,8	0,0	12,4
1	0,5	22,3	0,5	21,4	0,5	20,5	0,5	19,7	0,4	18,9
2	2,5	29,3	2,3	28,1	2,3	26,9	2,2	25,9	2,1	25,0
3	5,3	35,6	4,9	34,1	4,7	32,8	4,5	31,8	4,3	30,5
4	8,3	41,5	7,9	39,8	7,5	38,6	7,2	36,8	6,8	35,5
5	11,6	47,4	11,1	45,2	10,6	43,5	10,1	41,8	9,7	40,3
6	14,5	52,6	13,9	50,0	13,4	48,3	12,8	46,6	12,4	44,9
7	16,8	57,3	15,9	55,1	15,2	53,1	14,4	51,1	13,3	49,4
8	20,6	62,1	19,5	59,8	18,6	57,6	17,7	55,6	16,7	53,7
9	24,6	66,7	23,4	64,6	22,1	61,4	21,1	59,8	20,1	57,8
10	28,9	71,1	27,3	68,6	25,9	66,1	24,6	63,9	23,5	61,8
11	33,3	75,4	31,4	72,7	29,8	70,2	28,3	68,2	27,0	65,7
12	37,9	79,4	35,4	76,6	33,9	74,1	31,8	71,7	30,5	69,5
13	42,7	83,2	41,2	80,5	38,6	77,9	36,1	75,4	34,3	73,0
14	47,4	85,5	44,9	84,1	42,4	81,4	40,2	78,9	38,1	76,5
15	52,6	88,3	50,0	86,1	46,9	84,8	44,4	82,3	42,2	79,9
16	58,5	91,7	54,8	88,9	51,7	86,6	48,9	85,6	46,3	83,3
17	64,4	94,7	60,2	92,1	56,5	89,4	53,4	87,2	50,6	86,2
18	70,7	97,5	65,9	95,1	61,4	92,5	58,2	89,9	55,1	87,6
19	77,7	99,5	71,9	97,7	67,2	95,3	63,2	92,8	59,7	90,3
20	85,5	100,0	78,6	99,5	73,1	97,7	68,2	95,5	64,5	93,2
21			86,1	100,0	79,5	99,5	74,1	97,8	69,5	95,7
22					86,5	100,0	80,2	99,5	75,0	97,7
23							87,2	100,0	81,1	99,6
24									87,6	100,0

z	n = 25		n = 26		n = 27		n = 28		n = 29	
	\bar{p}_z	\bar{p}_z	\bar{p}_z	\bar{p}_z	\bar{p}_z	\bar{p}_z	\bar{p}_z	\bar{p}_z	\bar{p}_z	\bar{p}_z
0	0,0	11,9	0,0	11,5	0,0	11,0	0,0	10,7	0,0	10,4
1	0,4	18,3	0,4	18,1	0,4	17,3	0,4	16,7	0,3	16,1
2	1,9	24,0	1,9	23,2	1,8	22,4	1,7	21,7	1,7	21,4
3	4,1	29,3	3,9	28,3	3,8	27,4	3,6	26,5	3,5	25,7
4	6,6	34,3	6,3	33,1	6,1	32,0	5,8	30,9	5,6	30,3
5	9,2	38,9	8,9	38,0	8,5	36,5	8,2	35,3	7,9	34,2
6	11,8	43,4	11,5	42,0	11,0	40,6	10,7	39,4	10,4	38,2
7	13,2	47,9	12,6	46,2	12,1	44,7	11,6	43,4	11,2	42,0
8	16,1	52,1	15,4	50,2	14,8	48,6	14,3	47,2	13,7	45,7
9	19,2	55,1	18,1	54,1	17,3	52,5	16,7	49,1	16,1	49,4
10	22,4	59,8	21,5	58,0	20,6	56,1	19,8	55,6	19,1	51,7
11	25,7	63,6	24,6	62,0	23,6	59,8	22,7	58,0	21,4	56,4
12	29,2	66,8	27,9	65,2	26,7	63,5	25,7	61,5	24,7	59,7
13	33,2	70,8	31,3	68,7	30,8	66,7	28,8	64,8	27,6	63,0
14	36,4	74,3	34,8	72,1	33,3	69,2	31,9	68,1	30,3	66,2
15	40,2	77,6	38,0	75,4	36,5	73,3	35,2	71,2	33,8	69,6
16	44,9	80,8	42,0	78,5	40,2	76,4	38,5	74,3	37,0	72,4
17	47,9	83,9	45,9	81,9	43,9	79,4	42,0	77,3	40,3	75,3
18	52,1	86,8	49,8	84,6	47,5	82,7	44,4	80,2	43,6	78,6
19	56,6	88,2	53,8	87,4	51,4	85,2	50,9	83,3	48,3	80,9
20	61,1	90,3	58,0	88,5	55,3	87,9	52,8	85,7	50,6	83,9
21	65,7	93,4	62,0	91,1	59,4	89,0	56,6	88,4	54,3	86,3
22	70,7	95,9	66,9	93,7	63,5	91,5	60,6	89,3	58,0	88,8
23	76,0	98,1	71,7	96,1	68,0	93,9	64,7	91,8	61,8	89,6

z	n = 25		n = 26		n = 27		n = 28		n = 29	
	P_z	\bar{P}_z	P_z	\bar{P}_z	P_z	\bar{P}_z	P_z	\bar{P}_z	P_z	P_z
24	81,7	99,6	76,8	98,1	72,6	96,2	69,1	94,2	63,8	92,1
25	88,1	100,0	81,9	99,6	77,6	98,2	73,5	96,4	69,6	94,4
26			88,5	100,0	82,7	99,6	78,5	98,3	74,5	96,5
27					89,0	100,0	83,3	99,6	78,5	98,3
28							89,3	100,0	83,9	99,7
29									89,6	100,0
z	n = 30		n = 31		n = 32		n = 33		n = 34	
	P_z	\bar{P}_z	P_z	\bar{P}_z	P_z	\bar{P}_z	P_z	\bar{P}_z	P_z	P_z
0	0,0	10,0	0,0	9,7	0,0	9,6	0,0	9,1	0,0	8,9
1	0,3	15,6	0,3	15,0	0,3	14,6	0,3	14,1	0,2	13,7
2	1,6	20,7	1,6	20,0	1,5	19,4	1,4	18,8	1,4	18,3
3	3,4	24,8	3,3	24,2	3,2	23,5	3,1	22,8	3,0	22,2
4	5,4	29,3	5,2	28,4	5,1	27,5	4,9	26,7	4,8	26,0
5	7,7	33,2	7,4	32,2	7,2	31,3	6,9	30,5	5,7	29,7
6	10,0	37,0	9,7	36,0	9,4	35,4	9,1	34,3	8,7	33,4
7	10,8	40,8	10,4	40,0	10,1	38,7	9,8	37,5	9,4	36,5
8	13,2	44,8	12,8	43,2	12,3	42,0	11,9	40,9	11,5	39,9
9	15,5	48,1	15,0	46,7	14,6	45,4	14,1	44,2	13,7	43,1
10	18,3	51,9	17,4	50,0	17,1	48,7	16,5	47,4	16,0	46,2
11	20,7	55,2	20,0	53,3	19,4	51,9	18,8	49,4	18,3	49,3
12	23,8	58,2	22,9	56,7	22,2	55,0	21,4	52,6	20,7	52,3
13	26,7	61,3	25,5	59,6	24,8	58,1	23,9	56,6	22,2	55,2
14	29,3	64,4	28,4	62,7	27,5	61,3	26,5	59,6	25,7	58,1
15	32,5	67,5	31,4	65,8	30,2	64,6	29,3	62,5	28,3	60,9
16	35,6	70,7	34,3	68,6	33,1	66,9	31,9	65,7	30,9	63,7
17	38,7	73,3	37,3	71,6	35,4	69,8	34,3	68,1	33,4	66,6
18	42,0	76,2	40,6	73,4	38,7	72,5	37,5	70,7	36,3	69,1
19	44,8	79,3	43,2	77,1	41,9	75,2	40,4	73,5	39,1	71,7
20	48,1	81,7	46,7	80,0	45,0	77,8	43,4	76,1	41,9	74,3
21	51,9	84,3	50,9	82,6	48,1	80,4	46,4	78,6	44,8	76,8
22	55,2	86,6	53,3	85,0	51,3	82,9	50,6	81,2	47,7	79,5
23	59,2	89,2	56,8	87,2	54,6	85,4	52,6	83,5	50,7	81,7
24	63,0	90,0	60,3	89,6	58,0	87,7	55,8	85,9	53,8	84,0
25	66,8	92,3	64,0	90,3	61,2	89,9	59,1	88,1	56,9	86,5
26	70,7	94,6	67,8	92,6	64,6	90,6	62,5	90,2	60,1	88,5
27	75,1	96,6	71,6	94,7	68,7	92,8	65,7	90,9	63,4	90,6
28	79,3	98,4	75,8	96,7	72,5	94,9	69,5	92,1	66,6	91,3
29	84,3	99,7	80,0	98,4	76,5	96,8	73,3	95,1	70,5	92,3
30	90,0	100,0	85,0	99,7	80,8	98,5	77,2	96,9	74,0	95,2
31			96,2	100,0	85,4	99,7	81,2	98,6	77,8	97,0
32					90,4	100,0	85,9	99,7	81,7	98,6
33							90,9	100,0	86,5	99,7
34									91,1	100,0

z	$n = 35$		$n = 36$		$n = 37$		$n = 38$		$n = 39$	
	p_z	\bar{p}_z	p_z	\bar{p}_z	p_z	\bar{p}_z	p_z	\bar{p}_z	p_z	\bar{p}_z
0	0,0	8,6	0,0	8,5	0,0	8,2	0,0	8,0	0,0	7,8
1	0,3	13,4	0,3	13,0	0,3	12,7	0,3	12,4	0,3	12,0
2	1,4	17,7	1,4	17,2	1,4	16,7	1,3	16,4	1,3	16,0
3	2,9	22,0	2,8	21,4	2,7	20,8	2,6	20,2	2,6	19,8
4	4,6	25,4	4,5	24,8	4,3	24,0	4,2	23,5	4,1	23,0
5	6,5	28,9	6,3	28,6	6,1	27,7	6,0	27,0	5,8	26,3
6	8,5	32,4	8,3	31,6	8,1	30,8	7,8	30,0	7,6	29,4
7	9,2	35,7	8,8	34,7	8,7	33,9	8,4	33,1	8,2	32,3
8	11,2	38,9	10,9	37,9	10,6	37,0	10,3	36,5	10,0	35,5
9	13,3	42,0	12,9	41,4	12,5	40,3	12,2	39,2	11,9	38,2
10	15,5	45,1	15,1	44,3	14,6	43,0	14,2	41,9	13,8	41,0
11	17,7	48,5	17,2	47,1	16,7	45,9	16,3	44,8	15,8	43,8
12	20,1	51,5	19,5	50,0	18,9	48,7	18,4	47,5	17,9	46,5
13	22,0	53,7	21,4	52,9	20,8	51,4	20,2	50,2	19,8	49,1
14	24,9	56,7	24,1	55,7	23,5	54,1	22,7	52,9	22,1	51,7
15	27,4	59,5	26,5	58,6	25,7	57,0	25,0	55,5	24,3	54,3
16	29,9	62,2	28,6	60,8	27,7	59,7	27,0	59,1	26,3	56,8
17	32,4	64,9	31,5	63,4	30,5	61,0	29,6	60,8	28,8	59,3
18	35,1	67,6	34,0	66,0	33,0	64,6	32,0	63,5	31,1	61,8
19	37,8	70,1	36,6	68,5	35,4	67,0	34,4	65,6	33,4	64,5
20	40,5	72,6	39,2	71,4	39,0	69,5	36,5	68,0	35,5	66,6
21	43,3	75,1	41,4	73,5	40,3	72,3	39,2	70,4	38,2	68,9
22	46,3	77,6	44,3	75,9	43,0	74,3	40,9	73,0	40,7	71,2
23	48,5	79,9	47,1	78,6	45,9	76,5	44,5	75,0	43,2	73,7
24	51,5	82,3	50,0	80,5	48,6	79,2	47,1	77,3	45,7	75,7
25	54,9	84,5	52,9	82,8	51,3	81,1	49,8	79,8	48,3	77,9
26	58,0	86,7	55,7	84,9	54,1	83,3	52,5	81,6	50,9	80,2
27	61,1	88,8	58,6	87,1	57,0	85,4	55,2	83,7	53,5	82,1
28	64,3	90,8	62,1	89,1	59,7	87,5	58,1	85,8	56,2	84,2
29	67,6	91,5	65,3	91,2	63,0	89,4	60,8	87,8	59,0	86,2
30	71,1	93,5	68,4	91,7	66,1	91,3	63,5	89,7	61,8	88,1
31	74,6	95,4	71,4	93,7	69,2	91,9	66,9	91,6	64,5	90,0
32	78,3	97,1	75,2	95,5	72,3	93,9	70,0	92,2	67,7	91,8
33	82,3	98,6	78,6	97,2	76,0	95,7	73,0	94,0	70,6	92,4
34	86,6	99,7	82,8	98,6	79,2	97,3	76,5	95,8	73,7	94,2
35	91,4	100,0	87,0	99,7	83,3	98,6	79,8	97,4	77,0	95,9
36			91,5	100,0	87,3	99,7	83,6	98,7	80,2	97,4
37					91,8	100,0	87,6	99,7	84,0	98,7
38							92,0	100,0	88,0	99,7
39									92,2	100,0

z	n = 40		n = 41		n = 42		n = 43		n = 44	
	\underline{p}_z	\bar{p}_z	\underline{p}_z	\bar{p}_z	\underline{p}_z	\bar{p}_z	\underline{p}_z	\bar{p}_z	\underline{p}_z	\bar{p}_z
0	0,0	7,6	0,0	7,5	0,0	7,3	0,0	7,1	0,0	6,9
1	0,2	11,8	0,2	11,5	0,2	11,2	0,2	11,0	0,2	10,8
2	1,2	15,6	1,2	15,3	1,2	14,9	1,1	14,6	1,1	14,3
3	2,5	19,2	2,4	18,8	2,4	18,3	2,3	17,9	2,3	17,5
4	4,1	22,4	3,9	21,9	3,8	21,4	3,7	20,9	3,6	20,6
5	5,7	25,7	5,5	25,0	5,4	24,5	5,3	23,9	5,1	23,6
6	7,4	28,7	7,2	28,0	7,1	27,4	7,0	26,8	6,7	25,3
7	8,0	32,0	7,8	30,9	7,6	30,5	7,4	29,7	7,2	29,1
8	9,7	34,8	9,5	33,8	9,2	33,0	9,1	32,4	8,8	31,7
9	11,5	37,3	11,3	36,5	11,0	35,7	10,7	35,0	10,5	34,3
10	13,4	40,1	13,1	39,2	12,8	38,4	12,4	37,6	12,2	37,2
11	15,4	42,8	15,0	41,8	14,6	41,4	14,3	40,4	13,9	39,5
12	17,4	45,5	16,9	44,5	16,5	43,9	16,1	42,9	15,7	41,9
13	19,2	48,0	18,8	47,0	18,4	46,3	17,9	45,2	17,5	44,2
14	21,5	50,6	20,9	50,0	20,4	48,8	19,8	47,6	19,4	46,6
15	23,6	53,1	23,0	52,0	22,4	51,2	21,8	50,0	21,3	48,9
16	25,7	55,6	25,0	54,5	24,4	53,7	23,8	52,4	23,3	51,2
17	28,0	58,1	27,2	56,8	26,5	56,1	25,8	54,8	25,3	53,5
18	30,2	60,5	29,4	59,3	28,6	58,6	27,9	57,1	27,2	55,8
19	32,0	62,9	31,6	61,5	30,5	60,4	29,7	59,6	29,1	58,1
20	34,8	65,2	33,8	63,9	32,9	62,6	32,1	61,4	31,3	60,5
21	37,1	68,0	36,1	66,2	35,1	64,9	34,3	63,6	33,3	62,8
22	39,5	69,7	38,5	68,4	37,4	67,1	36,4	65,7	35,5	64,5
23	41,9	72,0	40,7	70,6	39,6	69,5	38,6	67,9	37,2	66,7
24	44,4	74,3	43,2	72,8	41,4	71,4	40,4	70,3	39,5	68,7
25	46,9	76,4	45,5	75,0	43,9	73,5	42,9	72,1	41,9	70,9
26	49,4	78,5	48,0	77,0	46,3	75,6	45,2	74,2	44,2	72,8
27	52,0	80,8	50,0	79,1	48,8	77,6	47,6	76,2	46,5	74,7
28	54,5	82,6	53,0	81,2	51,2	79,6	50,0	78,2	48,8	76,7
29	57,2	84,6	55,5	83,1	53,7	81,7	52,4	80,2	51,1	78,7
30	59,9	86,6	58,2	85,0	56,1	83,5	54,8	82,1	53,4	80,6
31	62,7	88,5	60,8	86,9	58,6	85,4	57,1	83,9	55,8	82,5
32	65,2	90,3	63,5	88,7	61,0	87,2	59,6	85,7	58,1	84,3
33	68,0	92,0	66,2	90,5	64,3	89,0	62,4	87,6	60,5	86,1
34	71,3	92,6	69,1	92,2	67,0	90,8	65,0	89,3	62,8	87,8
35	74,3	94,3	72,0	92,8	69,5	92,4	67,6	90,9	65,7	89,5
36	77,6	95,9	75,0	94,5	72,6	92,9	70,3	92,6	68,3	91,2
37	80,8	97,5	78,1	96,1	75,5	94,6	73,2	93,0	70,9	92,8
38	84,4	98,8	81,2	97,6	78,6	96,2	76,1	94,8	74,7	93,3
39	88,2	99,8	84,7	98,8	81,7	97,6	79,1	96,3	76,4	94,9
40	92,4	100,0	88,5	99,8	85,1	98,8	82,1	97,7	79,4	96,4
41			92,5	100,0	88,8	99,8	85,4	98,9	82,5	97,7
42					92,7	100,0	89,0	99,8	85,7	98,9
43							92,9	100,0	89,2	99,8
44									93,1	100,0

z	n = 45		n = 46		n = 47		n = 48		n = 49	
	p_z	\bar{p}_z	p_z	\bar{p}_z	p_z	\bar{p}_z	p_z	\bar{p}_z	p_z	\bar{p}_z
0	0.0	6.8	0.0	6.7	0.0	6.6	0.0	6.4	0.0	6.3
1	0.2	10.6	0.2	10.3	0.2	10.1	0.2	9.9	0.2	9.7
2	1.1	14.0	1.1	13.7	1.1	13.4	1.1	13.1	1.0	12.9
3	2.2	17.1	2.2	16.8	2.2	16.5	2.1	16.1	2.1	15.8
4	3.5	20.5	3.5	20.0	3.4	19.5	3.3	19.1	3.3	18.7
5	5.1	22.9	4.9	22.5	4.8	21.8	4.7	21.6	4.5	21.2
6	6.5	25.4	6.4	25.5	6.3	25.0	6.1	24.5	6.1	24.0
7	7.1	28.4	6.9	27.9	6.7	27.3	6.6	26.8	6.4	26.2
8	8.6	31.0	8.4	30.4	8.2	29.8	8.1	29.3	7.9	29.3
9	10.2	33.6	10.0	33.3	9.8	32.6	9.5	31.9	9.3	31.3
10	11.9	36.3	11.6	35.6	11.5	34.8	11.1	34.0	10.8	33.5
11	13.6	38.7	12.3	37.8	13.0	37.1	12.6	36.4	12.4	35.7
12	15.3	41.0	15.0	40.1	14.6	39.4	14.3	38.7	14.0	37.9
13	17.1	43.4	16.7	42.5	16.3	41.7	15.9	40.9	15.6	40.6
14	18.9	45.7	18.4	44.8	18.1	44.0	17.7	43.8	17.3	42.7
15	20.5	48.0	20.0	47.1	19.5	46.2	19.1	45.7	18.7	44.8
16	22.7	50.2	22.1	49.3	21.8	48.4	21.1	47.9	20.7	47.0
17	24.6	52.5	24.0	51.5	23.4	50.6	22.9	50.0	22.4	48.8
18	26.6	54.7	25.5	53.7	25.0	52.7	24.5	52.1	24.0	49.2
19	28.4	56.9	27.8	55.8	27.2	54.8	26.6	54.3	26.0	53.0
20	30.5	59.1	29.8	58.0	29.1	56.8	28.5	56.2	27.7	55.2
21	32.5	61.3	31.7	60.1	31.0	59.0	30.3	57.9	29.2	57.3
22	34.6	63.7	33.3	62.2	32.6	61.1	31.9	59.9	31.3	59.4
23	36.3	65.4	35.6	64.4	34.8	62.9	34.0	61.9	33.3	60.9
24	38.7	67.5	37.8	66.7	37.1	65.2	36.1	63.9	35.3	62.8
25	40.9	69.5	39.9	68.3	38.9	67.3	38.1	66.0	37.2	64.7
26	43.1	71.6	42.0	70.2	41.0	69.0	40.1	68.1	39.1	66.7
27	45.3	73.4	44.2	72.2	43.2	70.9	42.1	69.7	40.6	68.7
28	47.5	75.4	46.3	74.5	45.2	72.8	43.8	71.5	42.7	70.8
29	49.7	77.2	48.5	76.0	47.3	75.0	45.7	73.4	44.8	72.3
30	52.0	79.5	50.7	77.9	49.4	76.6	47.9	75.5	47.0	74.0
31	54.3	81.1	52.9	80.0	51.6	78.2	50.0	77.1	50.8	76.0
32	56.6	82.9	55.1	81.6	53.8	80.5	52.1	78.9	51.2	77.6
33	59.0	84.7	57.5	83.3	56.0	81.9	54.3	80.9	53.0	79.3
34	61.3	86.4	59.9	85.0	58.3	83.7	56.2	82.3	55.2	81.3
35	63.7	88.1	62.2	86.7	60.6	85.4	59.1	84.1	57.3	82.7
36	66.4	89.8	64.4	88.4	62.9	87.0	61.3	85.7	59.4	84.4
37	69.0	91.4	66.7	90.0	65.2	88.5	63.6	87.4	62.1	86.0
38	71.6	92.9	69.6	91.6	67.3	90.2	66.0	88.9	64.3	87.6
39	74.6	93.5	72.1	93.1	70.2	91.8	68.1	90.5	66.5	89.2
40	77.1	94.9	74.5	93.6	72.7	93.3	70.7	91.9	68.7	90.7
41	79.5	96.5	77.5	95.1	75.0	93.7	73.2	93.4	70.8	92.1
42	82.9	97.8	80.0	96.5	78.2	95.2	75.5	93.9	73.7	93.6
43	86.0	98.9	83.2	97.8	80.5	96.6	78.4	95.3	76.0	93.9
44	89.4	99.8	86.3	98.9	83.5	97.8	80.9	96.7	78.8	95.5
45	93.2	100.0	89.7	99.8	86.6	98.9	83.9	97.9	81.3	96.7
46			93.3	100.0	89.9	99.8	86.9	98.9	84.2	97.9
47					93.4	100.0	90.1	99.8	87.1	99.0
48							93.6	100.0	90.3	99.8
49									93.7	100.0

z	n = 50		n = 60		n = 70		n = 80		n = 90	
	\underline{p}_z	\bar{p}_z	\underline{p}_z	\bar{p}_z	\underline{p}_z	\bar{p}_z	\underline{p}_z	\bar{p}_z	\underline{p}_z	\bar{p}_z
0	0,0	7,1	0,0	6,0	0,0	5,1	0,0	4,5	0,0	4,0
1	0,1	10,7	0,1	9,0	0,1	7,7	0,1	6,8	0,1	6,0
2	0,7	13,7	0,6	11,5	0,5	11,0	0,4	8,7	0,4	7,8
3	1,7	16,6	1,4	13,9	1,2	12,0	1,0	10,6	0,9	9,4
4	2,8	19,2	2,3	16,2	2,0	14,0	1,7	12,3	1,5	11,0
5	4,0	21,8	3,3	18,4	2,9	15,9	2,5	14,0	2,2	12,5
10	10,0	33,8	8,3	28,6	7,1	24,8	6,2	21,8	5,5	19,6
15	17,9	44,6	14,7	37,9	12,5	32,8	10,9	29,0	9,6	26,0
20	26,4	54,8	21,7	46,7	18,4	40,6	16,0	35,9	14,1	32,3
25	35,6	64,4	29,1	55,1	24,6	48,0	21,3	42,6	18,9	38,3
30	45,2	73,6	36,8	63,2	31,1	55,2	26,9	49,0	23,7	44,1
35	55,4	82,1	44,9	70,9	37,8	62,2	32,7	55,3	28,7	49,7
40	66,2	90,0	53,3	78,3	44,8	68,9	38,6	61,4	34,0	55,3
45	78,2	96,7	62,1	85,3	52,0	75,4	44,7	67,3	39,3	60,7
50	92,9	100,0	71,4	91,7	59,4	81,6	51,0	73,1	44,7	66,0
55			81,6	96,7	67,2	87,5	57,4	78,7	50,3	71,3
60			94,0	100,0	76,2	92,9	64,1	84,0	55,9	76,3
65					84,1	97,1	71,0	89,1	61,7	81,1
70					94,9	100,0	78,2	93,8	67,7	86,9
75							86,0	97,5	74,6	90,4
80							95,5	100,0	80,4	94,5
85									87,5	97,8
90									96,0	100,0

z	n = 100		n = 150		n = 200		n = 300		n = 500	
	\underline{p}_z	\bar{p}_z	\underline{p}_z	\bar{p}_z	\underline{p}_z	\bar{p}_z	\underline{p}_z	\bar{p}_z	\underline{p}_z	\bar{p}_z
0	0,0	3,6	0,0	2,4	0,0	1,8	0,0	1,2	0,0	0,7
1	0,1	5,4	0,0	3,7	0,0	2,8	0,0	1,8	0,0	1,1
2	0,4	7,0	0,2	4,7	0,2	3,6	0,1	2,4	0,1	1,4
3	0,8	8,5	0,5	5,7	0,4	4,3	0,3	2,9	0,2	1,7
4	1,4	9,9	0,9	6,7	0,7	5,0	0,5	3,4	0,3	2,0
5	2,0	11,3	1,3	7,6	1,0	5,7	0,7	3,8	0,4	2,3
10	4,9	17,6	3,1	11,9	2,4	9,0	1,6	6,0	1,0	3,6
15	8,6	23,6	5,7	15,9	4,2	12,1	2,8	8,2	1,7	4,9
20	12,6	29,2	8,3	19,9	6,2	15,1	4,1	10,1	2,5	6,1
25	16,9	34,7	11,1	23,5	8,2	17,8	5,5	12,1	3,3	7,3
30	21,3	39,9	13,9	27,2	10,3	20,7	6,8	13,9	4,1	8,5
35	25,7	44,9	16,8	30,9	12,5	23,5	8,3	15,9	4,9	9,5
40	30,3	50,3	19,8	34,4	14,7	26,3	9,7	17,8	5,8	10,7
45	35,0	55,3	22,8	38,0	16,9	28,9	11,2	19,6	6,6	11,9
50	39,8	60,2	25,9	41,5	19,1	31,6	12,6	21,5	7,5	13,0
60	49,7	69,7	32,5	48,1	23,7	36,7	15,6	25,0	9,3	15,2
70	60,1	78,7	38,5	54,9	28,5	41,9	18,7	28,5	11,1	17,3
80	70,8	87,4	45,1	61,5	33,2	47,1	21,8	32,0	12,9	19,4
90	82,4	95,1	51,9	67,5	38,1	52,2	25,0	35,5	14,7	21,6
100	96,4	100,0	58,5	74,1	42,9	57,1	28,0	39,5	16,5	23,8
150			97,6	100,0	68,4	80,9	44,3	55,7	25,9	34,1
200					98,2	100,0	60,5	72,0	35,5	44,6
250							78,5	87,4	45,6	54,4
300							98,8	100,0	55,4	64,5

XVI. Märgitest.

Märgitesti kriitiline piirkond.

Kui vaatlustulemus x paikneb antud piirkonnas,
võetakse vastu nullhüpotees $H_0: P(+) = P(-)$;
kui väljaspool, siis kustutatakse nullhüpotees.

Tabel on võetud teosest [5].

n	Односторонние границы			n	Односторонние границы					
	2,5%	1%	0,5%		2,5%	1%	0,5%			
5	0	5	0	5	16	29	15	30	14	31
6	1	5	0	6	16	30	15	31	14	32
7	1	6	1	6	17	30	16	31	15	32
8	1	7	1	7	17	31	16	32	15	33
9	2	7	1	8	18	31	16	33	16	33
10	2	8	1	9	18	32	17	33	16	34
11	2	9	2	9	19	32	17	34	16	35
12	3	9	2	10	19	33	18	34	17	35
13	3	10	2	11	19	34	18	35	17	36
14	3	11	3	11	20	34	19	35	18	36
15	4	11	3	12	20	35	19	36	18	37
16	4	12	3	13	21	35	19	37	18	38
17	5	12	4	13	21	36	20	37	19	38
18	5	13	4	14	22	36	20	38	19	39
19	5	14	5	14	22	37	21	38	20	39
20	6	14	5	15	22	38	21	39	20	40
21	6	15	5	16	23	38	21	40	21	40
22	6	16	6	16	23	39	22	40	21	41
23	7	16	6	17	24	39	22	41	21	42
24	7	7	6	18	24	40	23	41	22	42
25	7	17	7	18	25	40	23	42	22	43
26	7	18	7	19	25	41	24	42	23	43
27	8	19	8	19	26	41	24	43	23	44
28	9	19	8	20	26	42	24	44	23	45
29	9	20	8	21	26	43	25	44	24	45
30	10	20	9	21	27	43	25	45	24	46
31	10	21	9	22	27	44	26	45	25	46
32	10	22	9	23	28	44	26	46	25	47
33	11	22	10	23	28	45	27	46	26	47
34	11	23	10	24	29	45	27	47	26	48
35	12	23	11	24	29	46	27	48	26	49
36	12	24	11	25	29	47	28	48	27	49
37	13	24	11	26	30	47	28	49	27	50
38	13	25	12	26	30	48	29	49	28	50
39	13	26	12	27	31	48	29	50	28	51
40	14	26	13	27	31	49	30	50	29	51
41	14	27	13	28	32	49	30	51	29	52
42	15	27	14	28	32	50	31	51	29	53
43	15	28	14	29	33	50	31	52	30	53
44	16	28	14	30	33	51	31	53	30	54
n	5%	2%	1%	n	5%	2%	1%			
	Двусторонние границы				Двусторонние границы					

л	Односторонние границы			л	Односторонние границы		
	2,5%	1%	0,5%		2,5%	1%	0,5%
85	33 52	32 53	31 54	93	37 56	35 58	34 59
86	34 52	32 54	31 55	94	38 56	36 58	35 59
87	34 53	33 54	32 55	95	38 57	36 59	35 60
88	35 53	33 55	32 56	96	38 58	37 59	35 61
89	35 54	34 55	32 57	97	39 58	37 60	36 61
90	36 54	34 56	33 57	98	39 59	38 60	36 62
91	36 55	34 57	33 58	99	40 59	38 61	37 62
92	37 55	35 57	34 58	100	40 60	38 62	37 63
л	Двусторонние границы			л	Двусторонние границы		
	5%	2%	1%		5%	2%	1%

XVII. Binoomkordajad .

Binoomkordajad

$$C_n^x = \frac{n!}{x! (n-x)!}$$

Tabel on võetud teosest [13].

9	10	11	12	13	14	15	n	k
								2
								3
								4
								5
								6
								7
								8
								9
1								10
10	1							11
55	11	1						12
220	66	12	1					13
715	286	78	13	1				14
2002	1001	364	91	14	1			15
5005	3003	1365	455	105	15	1		16
11440	8008	4368	1820	560	120	16		17
24310	19448	12376	6188	2380	680	136		18
48620	43758	31824	18564	8568	3060	816		19
92378	92378	75582	50388	27132	11628	3876		20
167960	184756	167960	125970	77520	38760	15504		21
293930	352716	352716	293930	203490	116280	54264		22
497420	646646	705432	646646	497420	319770	170544		23
817190	1144066	1352078	1352078	1144066	817190	490314		24
1307504	1961256	2496144	2704156	2496144	1961256	1307504		25
2042975	3268760	4457400	5200300	5200300	4457400	3268760		26
3124550	5311735	7726160	9657700	10400600	9657700	7726160		27
4686825	8436285	13037895	17383860	20058300	20058300	17383860		28
6906900	13123110	21474180	30421755	37442160	40116600	37442160		29
10015005	20030010	34597290	51895935	67863915	77558760	77558760		30
14307150	30045015	54627300	86493225	119759850	145422675	155117520		

$k \backslash \lambda$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0	0,90484	0,81873	0,74082	0,67032	0,60653
1	0,09048	0,16375	0,22225	0,26813	0,30327
2	0,00452	0,01637	0,03334	0,05362	0,07581
3	0,00015	0,00109	0,00333	0,00715	0,01263
4		0,00005	0,00025	0,00071	0,00158
5			0,00001	0,00005	0,00016
6					0,00001

$k \backslash \lambda$	0,6	0,7	0,8	0,9	
0	0,54881	0,49659	0,44933	0,40657	
1	0,32929	0,34761	0,35946	0,36691	
2	0,09878	0,12166	0,14379	0,16466	
3	0,01976	0,02838	0,03834	0,04939	
4	0,00296	0,00496	0,00766	0,01111	
5	0,00035	0,00069	0,00123	0,00200	
6	0,00003	0,00008	0,00016	0,00030	
7			0,00001	0,00003	

$k \backslash \lambda$	1	2	3	4	5
0	0,36788	0,13534	0,04978	0,01831	0,00673
1	0,36788	0,27067	0,14936	0,07326	0,03369
2	0,18394	0,27067	0,22404	0,14653	0,08422
3	0,06131	0,18045	0,22404	0,19537	0,14037
4	0,01532	0,09022	0,16803	0,19537	0,17547
5	0,00306	0,03609	0,10082	0,15629	0,17547
6	0,00051	0,01203	0,05040	0,10420	0,14622
7	0,00007	0,00343	0,02160	0,05954	0,10444
8		0,00085	0,00810	0,02977	0,06527
9		0,00019	0,00270	0,01323	0,03626
10		0,00003	0,00081	0,00529	0,01813
11			0,00022	0,00192	0,00824
12			0,00005	0,00064	0,00343
13			0,00001	0,00019	0,00132
14				0,00005	0,00047
15				0,00001	0,00015
16					0,00004
17					0,00001

$k \backslash \lambda$	6	7	8	9	10
0	0,00247	0,00091	0,00033	0,00012	0,00004
1	0,01487	0,00638	0,00268	0,00111	0,00045
2	0,04461	0,02234	0,01073	0,00499	0,00227
3	0,08923	0,05212	0,02862	0,01499	0,00756
4	0,13385	0,09122	0,05725	0,03373	0,01891
5	0,18062	0,12772	0,09160	0,06072	0,03783
6	0,16062	0,14900	0,12214	0,09109	0,06305
7	0,13768	0,14900	0,13959	0,11712	0,09007
8	0,10326	0,13038	0,13959	0,13176	0,11260
9	0,06883	0,10140	0,12408	0,13176	0,12511
10	0,04130	0,07098	0,09926	0,11858	0,12511
11	0,02252	0,04517	0,07219	0,09702	0,11374
12	0,01126	0,02635	0,04812	0,07276	0,09478
13	0,00518	0,01418	0,02961	0,05037	0,07290
14	0,00222	0,00709	0,01692	0,03238	0,05207
15	0,00089	0,00331	0,00902	0,01943	0,03471
16	0,00033	0,00144	0,00451	0,01093	0,02169
17	0,00011	0,00059	0,00212	0,00578	0,01276
18	0,00003	0,00023	0,00094	0,00289	0,00709
19	0,00001	0,00008	0,00039	0,00137	0,00373
20		0,00003	0,00015	0,00061	0,00186
21			0,00006	0,00026	0,00088
22			0,00002	0,00010	0,00040
23				0,00004	0,00017
24				0,00001	0,00007
25					0,00002
26					0,00001

λ k	11	12	13	14	15
0	0,00001				
1	0,00018	0,00007	0,00002	0,00001	
2	0,00101	0,00044	0,00019	0,00008	0,00003
3	0,00370	0,00177	0,00082	0,00038	0,00017
4	0,01018	0,00530	0,00269	0,00133	0,00064
5	0,02241	0,01274	0,00699	0,00373	0,00193
6	0,04109	0,02548	0,01515	0,00889	0,00453
7	0,06457	0,04368	0,02814	0,01738	0,01037
8	0,08879	0,06552	0,04573	0,03043	0,01944
9	0,10853	0,08736	0,06605	0,04734	0,03240
10	0,11938	0,10484	0,08587	0,06628	0,04861
11	0,11938	0,11437	0,10148	0,08435	0,06628
12	0,10943	0,11437	0,10994	0,09841	0,08285
13	0,09250	0,10557	0,10994	0,10599	0,09560
14	0,07275	0,09048	0,10209	0,10599	0,10244
15	0,05335	0,07239	0,08847	0,09892	0,10244
16	0,03668	0,05429	0,07188	0,08655	0,09003
17	0,02373	0,03832	0,05497	0,07128	0,06473
18	0,01450	0,02555	0,03070	0,05544	0,07061
19	0,00839	0,01613	0,02716	0,04085	0,05574
20	0,00461	0,00968	0,01735	0,02859	0,04181
21	0,00241	0,00553	0,01093	0,01906	0,02986
22	0,00121	0,00301	0,00645	0,01213	0,02036
23	0,00057	0,00157	0,00365	0,00738	0,01328
24	0,00026	0,00078	0,00197	0,00430	0,00830
25	0,00011	0,00037	0,00102	0,00241	0,00498
26	0,00004	0,00017	0,00051	0,00129	0,00287
27	0,00002	0,00007	0,00024	0,00067	0,00159
28		0,00003	0,00011	0,00033	0,00085
29		0,00001	0,00005	0,00016	0,00044
30			0,00002	0,00007	0,00022
31				0,00003	0,00010
32				0,00001	0,00005
33					0,00002
34					0,00001

λ k	16	17	18	19	20
0					
1					
2	0,00001				
3	0,00007	0,00003			
4	0,00030	0,00014	0,00006	0,00003	0,00001
5	0,00098	0,00049	0,00024	0,00011	0,00005
6	0,00262	0,00138	0,00071	0,00036	0,00018
7	0,00599	0,00337	0,00185	0,00099	0,00052
8	0,01198	0,00716	0,00416	0,00236	0,00130
9	0,02131	0,01352	0,00832	0,00498	0,00290
10	0,03409	0,02300	0,01498	0,00946	0,00581
11	0,04959	0,03554	0,02452	0,01635	0,01057
12	0,06612	0,05035	0,03678	0,02588	0,01762
13	0,08138	0,06584	0,05092	0,03783	0,02711
14	0,09301	0,07996	0,06543	0,05135	0,03874
15	0,09921	0,09062	0,07857	0,06504	0,05165
16	0,09921	0,09628	0,08839	0,07724	0,06456
17	0,09338	0,09628	0,09359	0,08632	0,07595
18	0,08300	0,09093	0,09359	0,09112	0,08439
19	0,06989	0,08136	0,08867	0,09112	0,08883
20	0,05592	0,06915	0,07980	0,08656	0,08883
21	0,04260	0,05598	0,06840	0,07832	0,08460
22	0,03098	0,04326	0,05596	0,06764	0,07691
23	0,02155	0,03197	0,04380	0,05587	0,06688
24	0,01437	0,02265	0,03285	0,04423	0,05573
25	0,00919	0,01540	0,02365	0,03362	0,04458
26	0,00566	0,01007	0,01637	0,02456	0,03429
27	0,00335	0,00634	0,01091	0,01728	0,02540
28	0,00191	0,00385	0,00701	0,01173	0,01814
29	0,00105	0,00225	0,00435	0,00768	0,01251
30	0,00056	0,00127	0,00261	0,00486	0,00834
31	0,00029	0,00070	0,00151	0,00298	0,00538
32	0,00014	0,00037	0,00085	0,00177	0,00336
33	0,00007	0,00019	0,00046	0,00102	0,00203
34	0,00003	0,00009	0,00024	0,00057	0,00119
35	0,00001	0,00004	0,00012	0,00030	0,00068
36		0,00002	0,00006	0,00016	0,00038
37		0,00001	0,00003	0,00008	0,00020
38			0,00001	0,00004	0,00010
39				0,00002	0,00005
40					0,00002
41					0,00001

XVIII. Faktoriaalid .

Naturaalarvude faktoriaalid $n!$ ja nende
kümneendlogaritmid $\log n$ ($n=1, 2, \dots, 50$).

Tabel on võetud teosest [13].

n	$n!$	$\log n!$	n	$n!$	$\log n!$
1	1	0,00000000	26	$40329146 \cdot 10^{19}$	26,60561903
2	2	0,30103000	27	$10888869 \cdot 10^{21}$	28,03698279
3	6	0,77815125	28	$30488834 \cdot 10^{22}$	29,48414082
4	24	1,38021124	29	$83417620 \cdot 10^{23}$	30,94653882
5	120	2,07918125	30	$26525286 \cdot 10^{25}$	32,42366007
6	720	2,85733250	31	$82228387 \cdot 10^{26}$	33,91502177
7	5040	3,70243054	32	$26313684 \cdot 10^{28}$	35,42017175
8	40320	4,60552052	33	$86833176 \cdot 10^{30}$	36,93868569
9	362880	5,55976303	34	$29523280 \cdot 10^{31}$	38,47016460
10	3628800	6,55976303	35	$10333148 \cdot 10^{33}$	40,01423265
11	39916800	7,60115572	36	$37199333 \cdot 10^{34}$	41,57053515
12	$47900160 \cdot 10$	8,68033696	37	$13763753 \cdot 10^{36}$	43,13873687
13	$62270208 \cdot 10^2$	9,79428032	38	$52302262 \cdot 10^{37}$	44,71852047
14	$87178291 \cdot 10^3$	10,94046835	39	$20397882 \cdot 10^{39}$	46,30958508
15	$13076744 \cdot 10^5$	12,11649961	40	$81591528 \cdot 10^{40}$	47,91164507
16	$20922790 \cdot 10^6$	13,32061959	41	$33452527 \cdot 10^{42}$	49,52442892
17	$35568743 \cdot 10^7$	14,55106852	42	$14050061 \cdot 10^{44}$	51,14767822
18	$64023737 \cdot 10^8$	15,80634102	43	$60415263 \cdot 10^{45}$	52,78114667
19	$12164510 \cdot 10^{10}$	17,08509462	44	$26582716 \cdot 10^{47}$	54,42459635
20	$24329020 \cdot 10^{11}$	18,38612462	45	$11962222 \cdot 10^{49}$	56,07781186
21	$51090942 \cdot 10^{12}$	19,70834391	46	$55026222 \cdot 10^{50}$	57,74056699
22	$11240007 \cdot 10^{14}$	21,05076659	47	$25862324 \cdot 10^{52}$	59,41266755
23	$25852017 \cdot 10^{15}$	22,41249443	48	$12413916 \cdot 10^{54}$	61,09390879
24	$62044840 \cdot 10^{16}$	23,79270567	49	$60828186 \cdot 10^{55}$	62,78410487
25	$15511210 \cdot 10^{18}$	25,19064568	50	$30414093 \cdot 10^{57}$	64,48307487

Hind 65 kop. .