H. Jalasto

Majanduslike nähtuste ajalise muutumise uurimise põhimeetodid

Tallinn 1969

TALLINNA POLÜTEHNILINE INSTITUUT
Statistika ja raamatupidamise kateeder

NSV LIIDU TA MAJANDUSMATEMAATIKA KESKINSTITUUDI
EESTI FILIAAL

Hans Jalasto

MAJANDUSLIKE NÄHTUSTE AJALISE MUUTUMISE UURIMISE PÕHIMEETODID

Tallinn
1969

ТАЛЛИНСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
Кафедра статистики и бухгалтерского учета
ЭСТОНСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ ЦЕНТРАЛЬНОГО
ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА АН СССР

Яласто Ханс Рейнхольдович

ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИЗУЧЕНИЯ ДИНАМИКИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ

На эстонском языке

Vastutav toimetaja U. Mereste

Trükkimisele antud 2.VI 69. Paber 60x84/16
Trükipg. 2,75. Tingpg. 2,55. Tiraaž 500
MB-06060. TPI rotaprint, Tallinn, Pikk jalg 14
Tell. 246 Hind 10 kop.

S i s u k o r d

Majanduslikud nähtused muutuvad ajaliselt, nad on dünaamilised. Materiaalseid väärtusi toodetakse ja kulutatakse pidevalt muutuval hulgal. Muutub ka töötajate arv nii ettevõtetes kui ka kogu rahvamajanduses. Tehnika ja töö parema organiseerimise tulemusena kasvab tööviljakus.

Majanduslikke nähtusi iseloomustatakse nende tunnuste väärtustega teataval momendil või perioodil. Mitme momendi või perioodi andmed moodustavad andmete rea (järjendi, jada), mis võimaldab hinnata selle nähtuse muutumist ajas. Mõnel juhul on võimalik teha järeldusi nähtuse ajalise muutumise intensiivsuse ja üldise arengutendentsi kohta juba pealiskaudselgi tutvumisel rea liikmetega. Tavaliselt eeldab nähtuse ajalise muutumise uurimine siiski spetsiaalsete meetodite rakendamist, aegridade analüüsimist.

Käesolevas töös on püütud anda ülevaade majanduslike nähtuste esitamisest aegridadena, aegridade elementaaranalüüsist ning üldise arengutendentsi uurimise mõnedest meetoditest.

1. AEGREA MÕISTE JA AEGRIDADE LIIGITUS

1.1. Aegrea mõiste ja elemendid

Aegreaks nimetatakse nähtuse ajalist muutumist iseloomustavate arvandmete rida. Aegridu nimetatakse teisiti ka kronoloogilisteks ehk dünaamikaridadeks[1].

Aegrea elementideks on nähtust iseloomustava tunnuse väärtused ning neile vastavad ajamomendid või perioodid. Ühe nähtuse iseloomustamisel mitme tunnuse läbilõikes tekib niisama palju aegridu, kui on uurimisega hõlmatud tunnuseid.

---

[1] Eestikeelses tõlkekirjanduses on neid nimetatud ka dünaamilisteks ridadeks. See on ebasoovitav, sest siin vaadeldud read ainult väljendavad dünaamikat, olles ise muutumatud (s.t. mittedünaamilised).

Aegread on kõrvuti variatsioonridadega statistiliste ridade tähtsamaid põhiliike[1].

1.2. Aegridade liigitus

Aegread liigitatakse moment- ja perioodridadeks. Nende range eristamine on oluline eeskätt keskmiste arvutamisel.

Nähtuse tunnuse iseloomu järgi aegread liigitatakse veel absoluut- ja suhtarvude ning keskmiste ridadeks. Aegridade analüüsimisel arvutatavad suhtarvud moodustavad uue, lähtereast erineva aegrea.

1.2.1. Momentread

Momentrida on aegrida, mille iga element on seotud teatud ajamomendiga - kuupäevaga, mingi aasta alguse või lõpuga jne. Momentrea näiteks on andmed Eesti NSV rahvaarvu kohta (tabel 1).

Tabel 1

Eesti NSV rahvaarv (praegustes piirides)[2]

Kuupäev	1.I 1940	1.I 1950	1.I 1955	1.I 1960	1.I 1965	1.I 1967
Rahvaarv (tuh.)	1054,4	1096,7	1157,3	1209,4	1272,6	1294,4

Momentrea oluliseks iseärasuseks on asjaolu, et nähtust iseloomustava tunnuse väärtuste summal ei ole reaalset sisu. Nii näiteks ei ole mingit mõtet tabelis 1 toodud rahvaarvude liitmisel.

[1] Statistilistest ridadest vt. U.Mereste, Statistika üldteooria, Tallinn 1967, lk. 77-81.

[2] Eesti NSV nõukogude võimu aastail. Lühike statistiline kogumik, Tallinn 1967, lk. 49.

1.2.2. Perioodread

Perioodrida on aegrida, mille iga element on seotud mingi ajavahemikuga, perioodiga (kuu, kvartal, aasta). Neid ridu nimetatakse mõnel juhul ka intervallridadeks.

Perioodridu võib liigitada pidevateks ja sõredateks.

Pidevate perioodridade perioodid järgnevad vahetult üksteisele. Pideva perioodrea näiteks on andmed ettevõtte "K" kaubatoodangu kohta 1968.aastal kvartalite lõikes (tabel 2).

T a b e l 2

Ettevõtte "K" kaubatoodang 1968.aastal (milj.rbl.)

Kvartal	I	II	III	IV
Kaubatoodang	24,2	25,0	30,0	31,8

Pideva perioodrea elementide väärtuste summal on majanduslik sisu - nad väljendavad sama tunnuse väärtust pikema perioodi kohta. Tabelis 2 toodud nelja kvartali kaubatoodangute summa on ettevõtte "K" kaubatoodang 1968. aastal.

Sõredates (ehk vahemlikes) perioodridades on tunnuse väärtused perioodide kohta, mis ei järgne vahetult üksteisele. Sõredate perioodridade perioodid võivad olla eraldatud üksteisest korrapäraste, s.t. võrdsete intervallidega või hoopis suvaliselt võetud intervallidega. Sõreda perioodrea näiteks on andmed Eesti NSV riigieelarve tulude kohta (tabel 3), kus perioodidevahelised intervallid on 4, 4, 4, 4 ja 0 aastat.

T a b e l 3

Eesti NSV riigieelarve tulud (miljonites rublades)[1]

Aasta	1945	1950	1955	1960	1965	1966
Tulud	57,8	118,3	124,4	343,4	471,3	482,8

[1] Eesti NSV nõukogude võimu aastail. Lühike statistiline kogumik, Tallinn 1967, lk.57.

2. AEGRIDADE ELEMENTAARANALÜÜS

2.1. Aegridade elementaaranalüüsi mõiste

Majanduslike nähtuste ajalise muutumise uurimisel võib eristada kahte astet:

1) aegridade elementaaranalüüs,
2) üldise arengutendentsi uurimine.

Elementaaranalüüs seisneb aegridade lihtsamate karakteristikute arvutamises. Sellisteks karakteristikuteks on: absoluutne juurdekasv, kasvutempo, juurdekasvutempo, keskmine kasvutempo ja keskmised. Täiendava karakteristikuna kasutatakse veel ühele juurdekasvuprotsendile osanevat absoluutset juurdekasvu. Nende karakteristikute abil on võimalik anda nähtuse muutumise üldine iseloomustus. Lihtsamate aegridade puhul on arvutatud karakteristikute abil võimalik teha järeldusi ka üldise arengutendentsi kohta. Pikemate ja keerulisemate aegridade puhul tuleb aga üldise arengutendentsi hindamiseks kasutada eri meetodeid.

Majandusalastes kirjutistes ja käsiraamatutes piirdutakse tavaliselt eespool märgitud aegridade karakteristikutega. Aegridade põhjalikuma analüüsimise näidetega võib kohtuda peamiselt spetsiaalsetes uurimistöödes.

2.2. Aegridade lihtsamad karakteristikud

2.2.1. Absoluutne juurdekasv

Nähtuste, täpsemalt väljendatult - nähtusi iseloomustavate tunnuste väärtuste absoluutset muutumist iseloomustab aegrea kahe elemendi väärtuse vahe. Seda nimetatakse absoluutseks juurdekasvuks. Absoluutne juurdekasv võib olla ka negatiivne ning iseloomustada seega tunnuse väärtuse vähenemist ehk kahanemist.

Pikemate aegridade puhul võib absoluutse juurdekasvu leida eelneva või mingi teise aluseks (baasiks) võetud elemendi väärtusega võrreldes.

Aegrea elemendi väärtust nimetatakse majandusalases kirjanduses sageli ka tasemeks ja absoluutset juurdekasvu iseloomustatakse kui kahe absoluutse taseme vahet. Ehkki absoluutne tase on võrdlemisi üldkasutatav, on ta siiski mittesoovitav. Otstarbekam on piirduda sellega, et nimetada tasemeteks ainult nn. suhtelisi tasemeid.

Absoluutne juurdekasv aegrea eelmise elemendi väärtusega võrreldes ehk nn. aheljuurdekasv (d^a) leitakse valemiga:

$$d^a = y_t - y_{t-1},$$

kus y_t on aegrea elemendi väärtus vaadeldaval momendil (perioodil);

y_{t-1} - aegrea elemendi väärtus eelmisel momendil (perioodil).

Absoluutne juurdekasv mingi varasema aluseks (baasiks) võetava väärtusega võrreldes (d^b) ehk nn. alusjuurdekasv leitakse valemiga:

$$d^b = y_t - y_1,$$

kus y_1 on aegrea elemendi väärtus aluseks võetaval momendil (perioodil).

Absoluutsete juurdekasvude arvutamist selgitab järgmine näide Eesti NSV-s tehtud teenindustööde kogumahu muutumise analüüsimise kohta aastatel 1960 - 1965 (tabel 4).

Viimase aasta absoluutne alusjuurdekasv on võrdne kõigi aheljuurdekasvude summaga. See iseloomustab absoluutset juurdekasvu kogu vaadeldaval perioodil.

Eespool oli märgitud, et absoluutne juurdekasv võib olla ka negatiivne ning väljendada nähtust iseloomustava tunnuse (aegrea elemendi) väärtuse vähenemist. Konkreetne näide selle kohta on toodud tabelis 5, mis iseloomustab Eesti NSV mööbliteenindustööde (mööbli valmistamine ja parandamine elanike individuaaltellimuste järgi) mahu muutumist aastatel 1961 - 1965.

T a b e l 4

Eesti NSV teenindustööde maht 1960.-1965. aastal ja selle juurdekasv 1961-st kuni 1965-nda aastani[1]

Aasta	Tööde maht (tuh. rbl.)	Absoluutne juurdekasv (tuh.rbl.)	
		eelmise aastaga võrreldes (aheljuurdekasvud)	1960.aastaga võrreldes (alusjuurdekasvud)
1	2	3	4
1960	11.055	-	-
1961	12.663	1.608	1.608
1962	14.186	1.523	3.131
1963	15.356	1.170	4.301
1964	17.870	2.514	6.815
1965	22.917	5.047	11.862
Kokku		11.862	x

T a b e l 5

Eesti NSV mööbliteenindustööde maht 1960.-1965. aastal ja juurdekasv aastatel 1961 - 1965[2]

Aasta	Tööde maht (tuh.rbl.)	Absoluutne juurdekasv (tuh.rbl.)	
		eelmise aastaga võrreldes	1960.aastaga võrreldes
1	2	3	4
1960	795	-	-
1961	896	101	101
1962	871	-25	76
1963	414	-457	-381
1964	514	100	-281
1965	523	9	-272

[1,2] Eesti NSV rahvamajanduse areng. Lühike statistiline kogumik, Tallinn 1967, lk.73.

Absoluutse juurdekasvu arvutamisega ei saa nähtuste ajalise muutumise uurimisel piirduda. Absoluutsete juurdekasvude reast ei piisa alati, sest tihtipeale on vaja uurida ka nähtuse suhtelist muutumist.

2.2.2. Kasvutempo

Nähtuste suhtelist muutumist ajas iseloomustab kasvutempo, mille all mõistame nähtust iseloomustava tunnuse (resp. aegrea elemendi) vaadeldava momendi (perioodi) väärtuse ja mingi eelmise momendi (perioodi) väärtuse suhet.

Kasvutempo on aegridade spetsiifiline näitarv (vene keeles темп роста, saksa keeles Wachstumstempo). Statistika üldteooria teistes osades, näiteks indeksiteoorias, nimetatakse kasvutempot indeksiks. Indeksi ja tempo vahel ei ole sisulist vahet. Kasvutempo on lihtindeks.

Kasvutempot nimetatakse kirjanduses vahel ka kasvukoefitsiendiks. Mõned autorid on püüdnud termineid "indeks" ja "koefitsient" piiritleda nii: vahetu suhtena arvutatud suhtarv on koefitsient (kasvutempo), protsentides väljendatult aga indeks. Seda siiski ei saa pidada õigustatuks. Mõiste sisu ju ei muutu. Erinevate nimetuste kasutamist samade näitarvude kohta võib seletada vaid kui teatavat traditsiooni.

Kasvutempo võib leida kas eelmise momendi (perioodi) või mingi muu aluseks (baasiks) võetud momendi (perioodi) suhtes. Vastavalt sellele eristame ahel- ja aluskasvutempot (vrd. ahel- ja alusindeksid[1,2]). Nende selgitamisel ongi otstarbekam kasutada indeksiteoorias kasutatavaid mõisteid ja tähiseid.

Ahelindeksid (i^a) leitakse valemiga:

$$i^a = \frac{y_t}{y_{t-1}},$$

kus y_t on aegrea elemendi väärtus vaadeldaval momendil (perioodil);

y_{t-1} - aegrea elemendi väärtus eelmisel momendil (perioodil).

---

[1] U.Mereste, Statistika üldteooria I, Tallinn 1967, lk.111.
[2] U.Mereste, Statistika üldteooria III, Tartu 1967, lk.15.

Alusindeksid (i^b) leitakse valemiga:

$$i^b = \frac{y_t}{y_1},$$

kus y_1 on aegrea elemendi väärtus alusmomendil (-perioodil).

Kui $i > 1$, siis on meil tegemist sõna otseses mõttes kasvu tempoga. Kui aga kasvutempo $i < 1$, siis nähtust iseloomustava tunnuse väärtus on vähenenud ning tegemist on õigupoolest kahanemise tempoga.

Kasvutempo (ehk indeks) võib olla väljendatud nii vahetu suhtena kui ka protsentides või promillides. Viimasel juhul korrutatakse vahetu suhtena leitud kasvutempo vastavalt 100 või 1000-ga.

Kasvutempo arvutamist selgitab näide Eesti NSV teenindustööde kogumahu suhtelise muutumise kohta (tabel 6).

Tabel 6

Eesti NSV teenindustööde maht 1960 - 1965 ja kasvutempo aastatel 1961-1965[1]

Aasta	Tööde maht (tuh.rbl.)	Kasvutempo			
		ahelindeksina		alusindeksina	
		vahetu suhtena	protsentides	vahetu suhtena	protsentides
1	2	3	4	5	6
1960	11.055	-	-	-	-
1961	12.663	1,14	114	1,14	114
1962	14.186	1,12	112	1,28	128
1963	15.356	1,08	108	1,39	139
1964	17.870	1,13	113	1,62	162
1965	22.917	1,28	128	2,07	207

Ahelindeksite korrutis annab viimase alusindeksi. Tabelis 6 toodud ahelindeksite korrutis annab seega 1965. aasta

[1] Eesti NSV rahvamajanduse areng. Lühike statistiline kogumik, Tallinn 1967, lk.73.

alusindeksi. Seda on oluline teada keskmise kasvutempo arvutamisel.

Lünklike aegridade täiendamiseks on oluline teada ka seda, et mistahes perioodi (momendi) ahelindeks võrdub sama perioodi alusindeksi ja eelmise perioodi alusindeksi jagatisega.[1]

2.2.3. Juurdekasvutempo

Kasvutempo kõrval kasutatakse nähtuste ajalise muutumise intensiivsuse iseloomustamiseks ka juurdekasvutempot, mis on absoluutse juurdekasvu ning selle arvutamisel aluseks võetud aegrea elemendi väärtuse suhe. Juurdekasvutempo võib leida nii aegrea eelmise elemendi kui ka mingi teise aluseks võetud elemendi suhtes.

Juurdekasvutempo aegrea eelmise elemendi väärtuse suhtes (j^a) leitakse valemiga:

$$j^a = \frac{d^a}{y_{t-1}},$$

kus d^a on absoluutne juurdekasv aegrea eelmise elemendi väärtusega võrreldes;

y_{t-1} – aegrea elemendi väärtus eelmisel momendil (perioodil).

Juurdekasvutempo aluseks võetud aegrea elemendi väärtuse suhtes (j^b) leitakse valemiga

$$j^b = \frac{d^b}{y_1},$$

kus d^b on absoluutne juurdekasv aegrea aluselemendi väärtusega võrreldes;

y_1 – aegrea elemendi väärtus alusmomendil (-perioodil).

Juurdekasvutempo võib, nagu kasvutempogi, väljendada nii vahetu suhtena kui ka protsentides või promillides. Viimasel juhul vahetu suhtena arvutatud juurdekasvutempo korrutatakse 100 või 1000-ga.

---

[1] U.Mereste, Statistika üldteooria III. Indeksid, Tartu 1967, lk. 18-20.

Juurdekasvutempo arvutamist iseloomustab tabelis 7 toodud näide Eesti NSV teenindustööde mahu juurdekasvutempo kohta 1961.-1965.aastal.

Tabel 7

Eesti NSV teenindustööde mahu juurdekasvutempo 1961.-1965. aastal[1]

Aasta	Tööde maht (tuh. rbl.)	Absoluutne juurdekasv (tuh.rbl.)		Juurdekasvutempo			
		eelmise aastaga võrreldes	1960.aastaga võrreldes	eelmise aastaga võrreldes		1960.aastaga võrreldes	
				vahetu suhtena	protsentides	vahetu suhtena	protsentides
1	2	3	4	5	6	7	8
1960	11.055	-	-	-	-	-	-
1961	12.663	1.608	1.608	0,14	14	0,14	14
1962	14.186	1.523	3.131	0,12	12	0,28	28
1963	15.356	1.170	4.301	0,08	8	0,39	39
1964	17.870	2.514	6.815	0,13	13	0,62	62
1965	22.917	5.047	11.862	0,28	28	1,07	107

Kui kasvutempo on juba leitud, siis võib juurdekasvutempo leida, lahutades kasvutempost vastavalt 1,0, 100% või 1000‰. Analoogiliselt võib juurdekasvutempo alusel leida kasvutempo, liites 1,0, 100 protsenti või 1000 promilli (vrd. tabeleid 6 ja 7).

Juurdekasvutempo võib olla ka negatiivne. Seda siis, kui absoluutne juurdekasv on negatiivne. Tabelis 5 toodud näites vähenes mööbliteenindustööde maht 1963. aastal 1962. aastaga võrreldes 457 000 rubla võrra. Juurdekasvutempo on seega

$$\frac{-457}{871} = -0,525 \text{ ehk } -52,5\%,$$

[1] Vt. tabel 4.

mis tähendab, et mööbliteenindustööde maht vähenes 52,5 protsenti.

Juurdekasvutempost rääkides tuleb protsendi mõistet kasutada korrektselt. Kui aruandeperioodil toodeti ettevõttes 300 tonni lõnga, baasiperioodil aga 200 tonni, siis võib ütelda, kas "juurdekasvutempo on 50 protsenti" või "toodang on suurenenud 50 protsenti", ei saa aga ütelda, et "toodang suurenes 50 protsendi võrra". Toodetakse ju lõnga, mitte protsente.[1]

Majandusalastes kirjutistes on sageli juttu majanduse arengust. Seda võidakse iseloomustada kas absoluutarvude või suhtarvudega - kasvu- ja juurdekasvutempoga. Kahjuks kasutatakse üsna sageli kasvutempot juurdekasvutempo tähenduses. See on võrdlemisi elementaarne viga, ehkki üldine tekst iseloomustab enamasti majandusliku arengu suunda ja suurust niivõrd selgesti, et terminoloogiline eksitus jääb märkamatuks. Sama terminoloogiline viga võib aga põhjustada mõnel juhul ka informatsiooni väära tõlgendamist. Väide, et toodangu kasvutempo on 5 protsenti, tähendab ju seda, et toodang vähenes 95 protsenti. Seda esineb üliharva, enamasti on tegu väära sõnastusega. Kirjutaja mõtleb, et toodangu juurdekasvutempo on 5%, nagu tulekski väljendada (võiks öelda ka "toodang kasvas 5%")!

Kui aga kirjutatakse, et toodangu kasvutempo on 105 protsenti, sellal kui 105 protsenti on hoopis toodangu juurdekasvutempo, siis on küll lugu kurjasti. Tegelik kasvutempo on ju 205 protsenti! Kiiresti arenevate tootmisharude puhul on selline kasvutempo täiesti mõeldav. Nii võib lugeja või kuulaja saada kirjeldatavast majanduslikust nähtusest hoopis väära ettekujutuse.

Eespool toodud tabelites (4-7) on aegridade karakteristikute veergudes ühe võrra vähem elemente kui analüüsitavas aegreas. Seda asjaolu on oluline silmas pidada, Mida tähendab näiteks väide, et toote "A" toodangu juurdekasvutempo on

---

[1] U.Mereste, Poolaritmeetilisi ääremärkusi, ("Keel ja Kirjandus", 1963, nr.1, lk. 33-37.

viisaastakul 75 protsenti? Kui me teame, et viisaastaku viimasel aastal toodeti seda toodet 350 miljonit tonni, kas võime siis leida nende andmete põhjal viisaastaku esimese aasta toodangu? Ei. Viisaastaku juurdekasvutempo arvutatakse viisaastakule eelneva aasta suhtes, peab ta ju hõlmama ka viisaastaku esimese aasta juurdekasvutempo. Toodud andmete põhjal võime järelikult leida viisaastaku esimesele aastale eelneva aasta toodangu, mis oli 350:1,75 = 200 tonni. Siit järeldub, et nähtuse ajalise muutumise intensiivsuse iseloomustamiseks tuleb teada vastava tunnuse väärtust ka käsitletavale ajavahemikule eelneval aastal.

Majandusliku nähtuse mahu suurenedes osutub tempo pidev suurendamine ja mõnigi kord ka selle säilitamine raskeks. Nähtuse ajalise muutumise intensiivsust iseloomustavad suhtarvud (eelmise elemendi väärtuse suhtes) muutuvad seetõttu järk-järgult väiksemaks. Siit ei saa aga teha järeldust, et viimaste perioodide tulemused on ka absoluutselt halvemad kui eelmistel perioodidel. Objektiivse hinnangu võib anda, arvutades juurdekasvutempo ühele protsendile osaneva absoluutse juurdekasvu (△). Toome selle kohta näite (tabel 8).

Tabel 8

Ühe juurdekasvuprotsendi absoluutväärtuse arvutus

Aasta	1964	1965	1966	1967	1968
d^a	100	200	200	250	250
j^a %	10	18	15,4	16,7	14,3
$\triangle = \frac{d^a}{j^a}$	10,0	11,1	13,0	15,0	17,5

Vaatamata juurdekasvutempo vähenemisele 1966. ja 1968. aastal on ühele juurdekasvutempo protsendile osanev absoluutne juurdekasv pidevalt suurenenud.

2.2.4. Keskmine kasvutempo

Uuritava nähtuse ajalise muutumise keskmise intensiivsuse iseloomustamiseks leitakse keskmine kasvutempo. Keskmine kasvutempo $\bar{i}$ arvutatakse ahelindeksite (ahelkasvutempode) geomeetrilise keskmisena:

$$\bar{i} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} i_k^a} = \sqrt[n]{i_1^a \cdot i_2^a \cdot \ldots \cdot i_n^a},$$

kus i_k^a - ahelindeksid (ahelkasvutempod).

Valemi kasutamine ülaltoodud kujul on arvutustehniliselt küllalt tülikas, mistõttu seda kasutatakse enamasti logaritmitud kujul:

$$\log \bar{i} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \log i_k^a .$$

Viimasel kujul on geomeetrilist keskmist kirjanduses nimetatud ka logaritmkeskmiseks.

Eespool toodud Eesti NSV teenindustööde mahu (tabelid 4 ja 6) keskmise kasvutempo leiame järgmiselt:

$$\bar{i} = \sqrt[5]{1,14 \cdot 1,12 \cdot 1,08 \cdot 1,13 \cdot 1,28} = \sqrt[5]{2,07} = 1,16.$$

Keskmise kasvutempo arvutamine geomeetrilise keskmise valemi järgi on otstarbekas siis, kui kõik kasvutempod (ahelindeksitena) on eelnevalt arvutatud. Kui aga lähteandmeteks on absoluutarvud või mingi baaselemendi väärtuse suhtes arvutatud kasvutempod (alusindeksid), siis pole ei tavaline geomeetriline ega logaritmkeskmine otstarbekas, sest see eeldab kõigi ahelkasvutempode leidmist.

Meenutame, et ahelindeksitena arvutatud kasvutempode korrutis on viimane kasvutempo alusindeksina. See omakorda pole midagi muud kui aegrea viimase ja esimese elemendi väärtuse jagatis. Seega saab aegrea keskmise kasvutempo leida kahe nimetatud absoluutväärtuse alusel. See on geomeetrilise keskmise arvutamise lihtsam erijuhtum[1]:

[1] U.Mereste, Statistika üldteooria I, Tallinn 1967, lk.65-66.

$$\bar{i} = \sqrt[t-1]{\frac{y_t}{y_1}},$$

kus $\bar{i}$ on keskmine kasvutempo,

y_t - aegrea viimase elemendi absoluutväärtus,

y_1 - aegrea esimese elemendi absoluutväärtus,

t - elementide arv aegreas.

Siin tuleb tähele panna, et antud juhtumil leitakse (t-1)-juur, geomeetrilise keskmise arvutamisel tavaliste valemite järgi aga n-juur. Siin tähistab n kasvutempode arvu, t aga absoluutväärtuste arvu. Esimesi on alati ühe võrra vähem, n=t-1.

Eelmises näites arvutatud keskmise kasvutempo võiksime siis leida ka järgmiselt:

$$\bar{i} = \sqrt[6-1]{\frac{22\cdot917}{11.055}} = \sqrt[5]{2,07} = 1,16.$$

Kui keskmist kasvutempot tahetakse leida selle valemiga mingi eelnevalt kindlaksmääratud pikema perioodi kohta, näiteks viisaastaku kohta, siis tuleb rangelt jälgida, et murru nimetajas oleks selle perioodi esimese elemendi väärtusele eelneva elemendi väärtus. Toodud näites on keskmine kasvutempo arvutatud aastate 1961 - 1965 kohta 1960. ja 1965. aasta andmete alusel.

2.2.5. Aegrea elementide keskmised

Aegridade iseloomustamisel on sageli vaja arvutada aegrea elementide keskmine väärtus. Selle arvutamisel kasutatav keskmine oleneb aegrea liigist.

Momentrea andmetel ei saa arvutada aritmeetilist keskmist; ainuõige on siin kronoloogiline keskmine:

$$\bar{y}_k = \frac{\frac{y_1}{2} + y_2 + \ldots y_{t-1} + \frac{y_t}{2}}{t-1},$$

kus y_i on aegrea elementide väärtused (i = 1,2,...,t),

t - aegrea elementide arv (ka ajamomentide arv).

Näitena arvutame kombinaadi "K" töötajate keskmise nimestikulise arvu 1968. aasta I ja II kvartalis tabelis 9 toodud andmete alusel.

T a b e l 9

Kombinaadi "K" töötajate nimestikuline arv

1967. aasta I poolaastal

Kuupäev	1.I	1.II	1.III	1.IV	1.V	1.VI	1.VII
Töötajate arv	410	415	430	420	420	460	460

$$\bar{y}_{Ikv} = \frac{205 + 415 + 430 + 210}{3} = 420,$$

$$\bar{y}_{IIkv} = \frac{210 + 420 + 460 + 430}{3} = 440.$$

Kolmest alamperioodist (kuust) koosnevat perioodi (kvartalit) iseloomustava momentrea elementide keskmise väärtuse leidmiseks vajame andmeid nelja momendi kohta. Aasta keskmise leidmiseks vajaksime seega 13 momendi andmeid - iga kuu esimese kuupäeva ja järgmise aasta 1.jaanuari kohta.

Perioodrea andmetel arvutatakse lihtne aritmeetiline keskmine:

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{t},$$

kus y_i on aegrea elementide väärtused ($i = 1,2,\ldots,t$),

t - perioodide (intervallide arv).

Eelmises näites leitud töötajate keskmine nimestikuline arv I ja II kvartalis moodustab kahe elemendiga perioodrea. Töötajate keskmise nimestikulise arvu I poolaastal võime seega leida aritmeetilise keskmisena:

$$\bar{y}_{Ip.a.} = \frac{420 + 440}{2} = 430.$$

Juhul kui töötajate keskmist nimestikulist arvu I ja II kvartalis poleks eelnevalt leitud, siis tulnuks töötajate keskmine nimestikuline arv I poolaastal leida kronoloogilise keskmise valemi järgi.

3. ÜLDISE ARENGUTENDENTSI UURIMINE

3.1. Üldise arengutendentsi mõiste ja uurimise meetodid

Nähtuse üldise arengutendentsi (ingl.k. trend) all mõistame eelkõige nähtuse arenemise suunda - nähtust iseloomustava tunnuse väärtuste suurenemist või kahanemist. Paljude nähtuste puhul võib arengutendentsi üldise iseloomustuse anda juba aegrea elementaaranalüüsi alusel. Sageli on aga selleks vaja eri meetodeid, seda eriti siis, kui arengutendentsile tahetakse anda matemaatiline hinnang.

Nähtuse tunnuse väärtused kujunevad pikemas ajavahemikus paljude eri tegurite mõjul. Need tegurid mõjuvad sageli erinevas suunas ja on erisuguse mõjujõuga ning tunnuse väärtused hälbivad suuremal või vähemal määral neist väärtustest, mis vastavad üldisele arengutendentsile. Seetõttu osutubki üldise arengutendentsi hindamine sageli raskendatuks.

Nähtuse üldine arengutendents ei tarvitse olla pidevalt tõusev või langev. Ta võib väljenduda ka kõverana. See raskendab arengutendentsi hindamist veelgi.

Statistika üldteoorias on välja töötatud rida nähtuste üldise arengutendentsi uurimise meetodeid. Üheks üldise arengutendentsi uurimise meetodiks on aegridade esitamine arvjoonistena. Väga lihtne on aegridade koondamise võte. Aegridade teisendamist üldise arengutendentsi väljaselgitamiseks nimetatakse tasandamiseks. Üheks kasutatavamaks aegridade tasandamise meetodiks on tasandamine libiseva keskmisega. Kõige täiuslikumaks aegridade tasandamise viisiks on tasandamine vähimruutude meetodil. Üldise arengutendentsi uurimise meetodeid on käsitletud põhjalikumalt järgmistes punktides.

3.2. Aegridade esitamine arvjoonistena

Aegridade analüüsimisel on üheks põhimeetodiks nende esitamine arvjoonistena. Arvjoonis on alati tunduvalt ilmekam kui algandmete read. Sellelt võib jämedates joontes kindlaks määrata aegrea peamised karakteristikud, nähtuse ajalise muutumise üldtendentsi ning hooajalised võnked. Nii saadud järeldused ei ole aga alati kvantitatiivselt väljendatavad ning võrdlused on esialgsed ja ligikaudsed.

Arvjooniste koostamist käsitleb statistika üldteooria eriosa.[1]

Kui arvjoonistest siiski ei piisa nähtuse ajalise muutumise iseloomustamiseks, siis tuleb kasutada muid aegridade analüüsimise meetodeid.

3.3. Aegridade tasandamine

Üldise arengutendentsi uurimise põhimeetodiks on aegridade tasandamine. Tasandamisel moodustatakse uus sujuv aegrida, mis võimalikult hästi iseloomustab üldist arengutendentsi. Aegridade tasandamise meetodid jagunevad:

1) mehaanilise tasandamise meetodid,
2) analüütilise tasandamise meetodid.

Mehaanilise tasandamise põhimeetodideks on

1) aegridade koondamine,
2) tasandamine libiseva keskmisega.

Aegridade koondamisel saadakse uus aegrida perioodide rühmitamise (koondamise) või momentrea väiksemaks perioodreaks muutmise teel. Aegridade koondamine on üheks lihtsaimaks üldise arengutendentsi uurimise võtteks.

Rea tasandamisel libiseva keskmise meetodil saadakse uus rida keskmiste arvutamise teel, kusjuures iga uue keskmise arvutamisel ei vahetu kõik elemendid, vaid osa neist. Libiseva keskmise meetod on üks tuntumaid. Mõned autorid nimetavad rea tasandamist libiseva keskmisega rea silumiseks.

Aegridade analüütilise tasandamise meetodid tuginevad vähimruutude meetodile. Põhiprobleemiks on leida valem, mis seoks tasandatud rea elementide väärtused empiirilise rea elementide väärtustega. Analüütilise tasandamise meetodid jagunevad:

1) tasandamine sirgega,
2) tasandamine kõverjoonega (parabooliga, hüperbooliga).

---

[1] L.Mendel ja U.Mereste, Arvjoonised, Tartu 1963.

Kas tasandusjooneks valida sirge või mõni kõver, seda saab otsustada nn. diferentside meetodi abil.

3.3.1. Aegridade mehaaniline tasandamine

3.3.1.1. Aegridade koondamine

Perioodrea koondamisel rühmitatakse selle perioodid ümber pikemateks perioodideks ning rea elementide kohta arvutatakse absoluutväärtused (või keskmised) uue jaotusega perioodidel.

Nii näiteks võivad kuutoodangud üldist tendentsi mitte kajastada, sellal kui kvartalitoodangud seda kajastavad. Tabelis 10 on toodud ettevõtte "Z" kuutoodangud 1968. aastal. Tabelis 11 on need andmed koondatud kvartaliandmete ridadeks, ühe rea moodustavad kvartalitoodangu absoluutväärtused ja teise keskmised kuutoodangud kvartalis. Koondatud rea andmetel kujuneb toodangu üldisest arengutendentsist tunduvalt ülevaatlikum pilt.

T a b e l 10

Ettevõtte "Z" toodang 1968.a. (tuh.rbl.)

Kuu	Toodang	Kuu	Toodang
Jaanuar	230	Juuli	280
Veebruar	190	August	240
Märts	220	September	260
Aprill	250	Oktoober	290
Mai	240	November	300
Juuni	270	Detsember	260

T a b e l 11

Ettevõtte "Z" toodang 1968.a. (tuh.rbl.)

	I kv	II kv	III kv	IV kv
1	2	3	4	5
Kvartalitoodang	640	760	780	850
Keskmine kuutoodang	213	253	260	283

Momentrea elemente ei saa liita. Siin tuleb rea koondamisel piirduda keskmiste arvutamisega. Vastav näide on toodud ettevõtte "M" käibevahendite jääkide kohta (tabel 12).

T a b e l 12

Ettevõtte "M" käibevahendite varud 1968.a.
I poolaastal (tuh.rbl.)

Kuupäev	1.I	1.II	1.III	1.IV	1.V	1.VI	1.VII
Käibevahendite varu	314	310	330	326	330	330	334

Arvutades käibevahendite varude kronoloogilised keskmised, saame käibevahendite keskmised varud I ja II kvartalis, vastavalt 320 ja 330 tuhat rubla. Nii kujuneb esialgsest momentreast kaheelemendiline perioodrida. Uus rida iseloomustab käibevahendite keskmise varu suurenemist, mis lähtereast ei selgu.

3.3.1.2. Tasandamine libiseva keskmisega

Rea tasandamisel libiseva keskmisega arvutatakse rea elementide väärtuste keskmised pikemate ajavahemikkude kohta, kusjuures iga järgmise keskmise arvutamisel üks rea element jäetakse arvutusest välja ning üks uus element võetakse sisse. Leitud keskmistest saadakse uus rida, mis on n - 1 elemendi võrra lühem kui algandmete rida, kus n on elementide arv libisevate keskmiste arvutamisel.

Libisev keskmine arvutatakse lihtsa aritmeetilise keskmise valemiga:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}.$$

Aegreas y_1, y_2, $y_3 \dots y_m$ leitakse kolme elemendi libisev keskmine järgmiselt:

$$\bar{y}_1 = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3};$$

$$\bar{y}_2 = \frac{y_2 + y_3 + y_4}{3};$$

....

$$y_{m-2} = \frac{y_{m-2} + y_{m-1} + y_m}{3}.$$

Et rea tasandamisel libiseva keskmise meetodil rida lüheneb empiirilise (tegeliku) reaga võrreldes, peetakse selle meetodi oluliseks puuduseks.

Aegridade tasandamist libiseva keskmisega iseloomustab tabelis 13 toodud näide. Tabeli 2. veerus on toodud andmed ettevõtte "K" toodangu kohta 1968.aastal. Need andmed ei anna selget ülevaadet toodangu üldisest arengutendentsist. Tabeli 3. ja 4.veerus on arvutatud libisev keskmine vastavalt kolme ja viie elemendi kaupa, millest ilmneb üldine kasvutendents tunduvalt selgemini.

Libiseva keskmise meetodi kasutamine on eriti otstarbekas pikkade ridade puhul. Lühikestes ridades mõjub tasandatud rea lühenemine empiirilise reaga võrreldes eriti häirivalt.

T a b e l 13

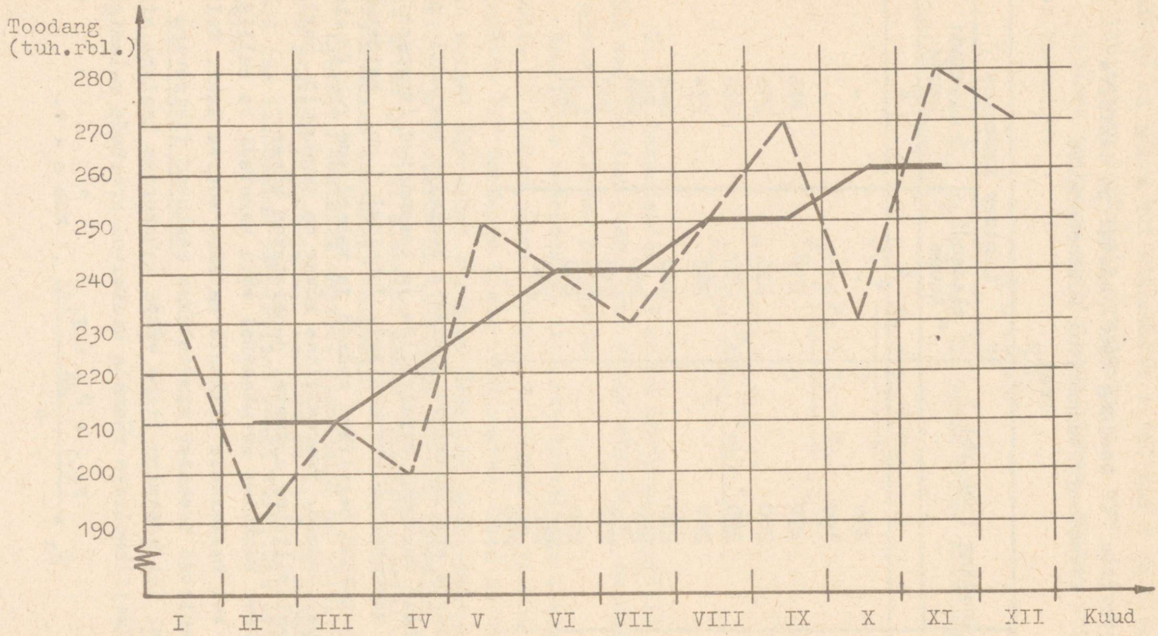
Ettevõtte "K" toodang 1968. aastal ja libiseva keskmisega tasandatud kuutoodangute read

Kuu	Toodang (tuh.rbl.)	Libisev keskmine	
		3 elemendi kaupa	5 elemendi kaupa
1	2	3	4
Jaanuar	230	-	-
Veebruar	190	210	-
Märts	210	210	216
Aprill	200	220	216
Mai	250	230	226
Juuni	240	240	234
Juuli	230	240	248
August	250	250	244
September	270	250	252
Oktoober	230	260	260
November	280	260	-
Detsember	270	-	-

Aegridade analüüsimisel libiseva keskmise meetodil annab väga häid tulemusi empiirilise ja tasandatud (teoreetilise) rea kõrvutamine arvjoonisel. Joonisel 1 on esitatud tabelis 13 toodud tegelikud andmed ja tasandatud rea (3 elemendi kaupa) andmed. Teoreetiline kõver on tunduvalt ühtlasem kui empiirilistel andmetel joonistatud kõver.

Libiseva keskmise arvutamisel võib kasutada ka sellist meetodit, kus keskmisele liikmele antakse suurem kaal. Selliselt arvutatud keskmist nimetatakse kaalutud libisevaks keskmiseks. Kui keskmine liige võtta kahekordse kaaluga, siis tuleks kolmeliikmeliste rühmade keskmised arvutada valemiga:

$$\bar{y}_i = \frac{y_{i-1} + 2y_i + y_{i+1}}{n}, \quad \text{kus } n = 4.$$



Joon.1. Ettevõtte "K" toodangu empiiriline (- - -)ja teoreetiline (——) kõver 1968. aastal.

Analoogiliselt tuletatakse valemid ka teistsuguste kaalutud libisevate keskmiste arvutamiseks. Kui kolmeliikmeliste rühmade puhul äärmised liikmed võtta kahekordselt ja keskmine liige kolmekordselt, siis n = 7.

3.3.2. Aegridade analüütiline tasandamine

3.3.2.1. Vähimruutude meetod

Aegridade analüütiline tasandamine tugineb vähimruutude meetodile. Vähimruutude meetod on tegelike suuruste või funktsiooni parima lahendi leidmise viis vaatlusandmete kogumi alusel. Statistikas kasutatakse seda funktsiooni leidmiseks, mis tasandamisel võimalikult vähe erineks empiirilistest andmetest. See kehtib ka aegridade tasandamise kohta.

Moodustagu aegrea elemendid tunnuse y väärtuste rea

$$y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n,$$

mis vastavad teatavatele momentidele või perioodidele

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n.$$

Vähimruutude meetodit kasutatakse funktsiooni $y = f(x)$ leidmiseks, kusjuures funktsiooni arvutuslike ehk teoreetiliste väärtuste

$$f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots, f(x_n)$$

ja empiiriliste väärtuste $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ hälvete ruutude summa peab olema minimaalne, s.o.

$$S = \sum_{i=1}^{n} [y_i - f(x_i)]^2 = \min.$$

Meetodi konkreetses rakendamises on erisusi, olenevalt funktsiooni iseloomust: kas see vastab sirgele, teist järku paraboolile või mõnele muule kõverale. Sobiva tasandusfunktsiooni iseloomu leidmist soodustab diferentside ehk vahede meetod.

3.3.2.2. Diferentside meetod

Diferentsid ehk vahed on järgmised seosed:

$\Delta f(x_n) = f(x_{n+1}) - f(x_n)$; (1. järku diferents);

$\Delta^2 f(x_n) = \Delta f(x_{n+1}) - \Delta f(x_n)$;   (2. järku diferents); ...

$\Delta^k f(x_n) = \Delta^{k-1} f(x_{n+1}) - \Delta^{k-1} f(x_n)$; (k-ndat järku diferents),

kus $x_n = x_o + nh$: h on konstant ja n on täisarv.

Diferentsidega uuritakse funktsioone diskreetsete argumentide korral. Eeldades, näiteks, et kahe järjestikuse x vahe on 1 ning teades funktsiooni f(x) väärtusi, saame järgmised diferentsid:

x	f(x)	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$
0	1				
		2			
1	3		2		
		4		6	
2	7		8		0
		12		6	
3	19		14		0
		26		6	
4	45		20		
		46			
5	91				

Diferentside meetodit võib kasutada aegrea uurimisel, võttes argumendiks aja ja funktsiooniks sellele vastavad elementide väärtused. Kasutades omadust, mille järgi n-astme funktsiooni puhul n + 1 ja kõrgemat järku diferentsid on võrdsed nulliga ja n-järku diferentsid konstantsed, võib diferentside analüüsimise alusel teha järeldusi teatavat liiki valemite sobivuse kohta aegrea üldise arengutendentsi kindlaksmääramiseks. Lineaarfunktsioon sobib juhul, kui esimest järku diferentsid on püsivad ja teist järku diferentsid on nullid. Teist järku parabool sobib tasanduskõveraks, kui teist järku diferentsid on püsivad ning kolmandat järku diferentsid võrduvad nulliga. Kolmandat järku parabool sobib, kui kolmandat järku diferentsid on püsivad ja 4-ndat järku diferentsid on nullid.

Diferentsi ja tuletise vahel on teatav analoogia. Üleminek diferentsidelt tuletistele toimub järgmise valemi järgi:

$$\lim_{n \to 0} \frac{\Delta^n f(x)}{h^n} = f^{(n)}(x) ,$$

kus h on kahe naaberargumendi väärtuse vahe.

3.3.2.3. Tasandamine sirgega

Tasandamisel sirgega leitakse aegrea elementide sujuvalt muutuvad väärtused eeldusel, et nad muutuvad mööda sirget

$$y_t = a_o + a_1 t,$$

kus y_t on võrrandi järgi leitud elementide väärtused;

a_o ja a_1 on võrrandi parameetrid, mis leitakse vähimruutude meetodil;

t on aeg või mõni muu argument.

Tasandamist sirgega on õige kasutada siis, kui absoluutsed juurdekasvud on püsivad. Võrrandi parameetrite arvutamise lihtsuse tõttu kasutatakse seda meetodit aga ka siis, kui absoluutsed juurdekasvud ei ole täiesti püsivad (või on seda vaid tinglikult).

Võrrandi parameetrid a_o ja a_1 leitakse võrrandisüsteemi järgi:

$$\begin{cases} na_o + a_1 \sum t = \sum y \\ a_o \sum t + a_1 \sum t^2 = \sum yt. \end{cases}$$

Kui $\sum t = 0$, siis $a_o = \frac{\sum y}{n}$ ja $a_1 = \frac{\sum yt}{\sum t^2}$,

kus n on aegrea elementide arv.

Tasandamist sirgega iseloomustab tabelis 14 toodud näide kolhoosi "N" teraviljasaagikuse tasandamise kohta. Veergudes 3-5 on toodud võrrandi parameetrite leidmiseks vajalikud arvutused. 6. veerus on y_t teoreetilised väärtused.

T a b e l 14

Kolhoosi "N" teraviljasaagikuste aegrea tasandamine sirgega[1]

Aasta	Saagikus	t	t^2	y^t	y_t
1	2	3	4	5	6
1957	8,5	-7	49	-59,5	8,74
1958	9,7	-5	25	-48,5	9,10
1959	8,3	-3	9	-24,9	9,46
1960	10,5	-1	1	-10,5	9,82
1961	10,4	1	1	10,4	10,18
1962	11,4	3	9	34,2	10,54
1963	9,2	5	25	46,0	10,90
1964	12,0	7	49	84,0	11,26
$\sum$	80,0	0	168	31,2	

$$a_0 = \frac{\sum y}{n} = \frac{80}{8} = 10,0; \qquad a_1 = \frac{\sum yt}{\sum t^2} = \frac{31,2}{168} = 0,18;$$

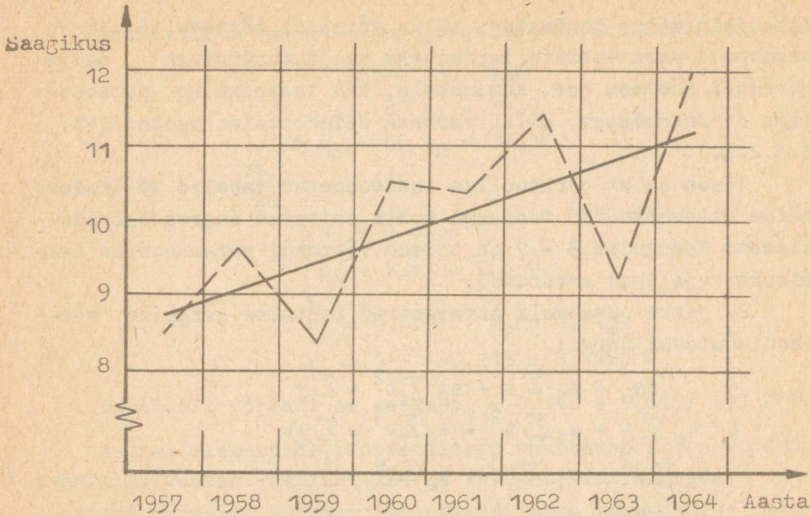
$$y_t = 10,00 + 0,18\ t.$$

Juhime tähelepanu arvutusvõttele, kus t_0 on võetud rea keskele. Kuna reas on paarisarv elemente, siis t_0 on tinglikult kahe aasta vahel, mistõttu kõik täisaastad tähistatakse paaritute arvudega üle ühe.

Empiirilist ja teoreetilist aegrida on soovitav võrrelda arvjoonisel. Tabelis 14 esitatud saagikuse tegelikke ja teoreetilisi väärtusi on võrreldud joonisel 2.

---

[1] Näide on võetud raamatust "Статистический словарь". "Статистика", Москва 1965, lk. 80.



Joon.2. Kolhoosi "N" teraviljasaagikuse empiiriline (- - -) ja teoreetiline (——) aegrida.

3.3.2.4. Tasandamine parabooliga

Tasandamisel parabooliga leitakse aegrea elementide sujuvalt muutuvad väärtused eeldusel, et nad muutuvad paraboolselt.

Parabool võib olla 2.,3.,... n-indat järku. Võrrandid on vastavalt järgmised:

2. järku parabool – $y = a_0 + a_1t + a_2t^2$,

3. järku parabool – $y = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3$,

. . . .

n-indat järku parabool – $y = a_0 + a_1t + a_2t^2 + ... + a_nt^n$.

Aegrea tasandamisel parabooliga on seega põhiprobleemiks parameetrite a_0, a_1, a_2,...,a_n leidmine.

Vähimruutude meetodi kasutamisel tuleb selleks lahendada võrrandisüsteem, milles võrrandite arv oleneb parabooli järgust. Nii tuleb 2. järku parabooli parameetrite leidmiseks lahendada kolme tundmatuga kolme võrrandi süsteem, 3. järku parabooli parameetrite leidmiseks nelja tundmatuga nelja võrrandi süsteem jne. Küsimusele, kas tasandamine paraboo-liga on rakendatav, aitab vastata diferentside meetod (vt. 3.3.2.2.).

Tasandamist parabooliga iseloomustab tabelis 15 toodud näide ettevõtte "K" toodangu kohta esitatud aegrea tasandamisest. Veergudes 3 - 7 on toodud võrrandi parameetrite leidmiseks vajalikud arvutused.

2. järku parabooli parameetrid leitakse järgmise võrrandisüsteemi järgi:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum t + a_2 \sum t^2 = \sum y \\ a_0 \sum t + a_1 \sum t^2 + a_2 \sum t^3 = \sum yt \\ a_0 \sum t^2 + a_1 \sum t^3 + a_2 \sum t^4 = \sum yt^2. \end{cases}$$

Kui t väärtused valida nii, et $\sum t = 0$ ja $\sum t^3 = 0$, siis võrrandisüsteemi lahendamine lihtsustub (vrd. eelmine näide).

T a b e l 15

Ettevõtte "K" toodangu aegrea tasandamine 2. järku parabooliga[1]

Aasta	Toodang (milj. rbl.) y	t	t^2	t^4	yt	yt^2	y_t
1	2	3	4	5	6	7	8
1958	2,3	-3	9	81	-6,9	20,7	2,04
1959	3,1	-2	4	16	-6,2	12,4	3,22
1960	5,6	-1	1	1	5,6	5,6	5,67
1961	9,2	0	0	0	0	0	8,15
1962	10,0	1	1	1	10,0	10,0	11,04
1963	14,8	2	4	16	29,6	59,2	13,92
1964	18,0	3	9	81	54,0	162,0	18,09
$\sum$	63,0	0	28	196	74,9	269,9	

[1] Näide on võetud raamatust "Статистический словарь". "Статистика", Москва 1965, lk. 80.

Antud näite puhul saame järgmise võrrandisüsteemi:

$$\begin{cases} 7\,a_0 + 28\,a_2 = 63{,}0 \\ 28\,a_1 = 74{,}9 \\ 28\,a_0 + 196\,a_2 = 269{,}9. \end{cases}$$

Siit saame $a_1 = \frac{74{,}9}{28} = 2{,}675$

$$\begin{cases} a_0 + 4\,a_2 = 9 \\ a_0 + 7\,a_2 = 9{,}639; \end{cases}$$

$$3\,a_2 = 0{,}639; \quad a_2 = 0{,}213;$$

$$a_0 = 9 - 4 \cdot 0{,}213 = 8{,}148.$$

Parabooli võrrand on seega $y_t = 8{,}148 + 2{,}675t + 0{,}213t^2$.

Aegrea elementide teoreetilised väärtused y_1 on toodud tabeli 8. veerus. Empiirilist ja teoreetilist aegrida on soovitav võrrelda arvjoonisel (samuti nagu tasandamisel sirgega).

3.4. Üldise arengutendentsi üldistamine

3.4.1. Interpoleerimine

Üldise arengutendentsi uurimine võimaldab teha oletusi aegrea vahepealsete tundmatute elementide väärtuste kohta. Aegrea puuduvate elementide leidmist nimetatakse aegrea interpoleerimiseks. Üldiselt mõistetakse interpoleerimise all funktsiooni vahepealsete väärtuste arvutamist mitme teadaoleva väärtuse järgi.

Interpoleerimiseks kasutatakse nii aegridade elementaarkarakteristikuid (kasvutempo, keskmine kasvutempo) kui ka tasandamise meetodeid. Kasutatakse ka graafilist interpoleerimist, kus vahepealsed väärtused leitakse arvjoonise järgi.

Interpoleerimist eeldusel, et elementide väärtused muutuvad lineaarselt, iseloomustab järgmine näide. Ettevõte tootis jaanuaris 18 000 toodet, aprillis 27 000 toodet. Leiame veebruari ja märtsi toodangu.

Eeldame lineaarset seost

$$y_t = a_0 + a_1 t\ ,$$

kus y_t on t-nda kuu toodang:

a_o - baasiperioodi (antud juhul eelmise aasta detsembrikuu toodang);

a_1 - toodangu juurdekasv;

t - kuu järjekorranumber.

Võime kirjutada järgmise võrrandisüsteemi:

$$\begin{cases} a_o + a_1 \cdot 1 = 18\ 000 \\ a_o + a_1 \cdot 4 = 27\ 000. \end{cases}$$

Lahendades võrrandisüsteemi saame:

$$a_o = 15\ 000, \qquad a_1 = 3\ 000.$$

Märtsi toodang (y_2) oli seega 15 + 2·3 000 = 21 000 ja aprilli toodang (y_3) 15 + 3·3 000 = 24 000 toodet.

Interpoleerimiseks on matemaatikas tuletatud mitmesuguseid valemeid. Nii näiteks on Newtoni interpoleerimisvalem aegrea vahepealsete väärtuste leidmiseks järgmine:

$$y = y_o + n\Delta y_o + \frac{n(n-1)}{2\,!}\Delta^2 y_o + \frac{n(n-1)(n-2)}{3\,!}\Delta^3 y_o + \ldots,$$

kus y_o on aegrea esimese elemendi väärtus,

Δy_o - aegrea esimese elemendi esimest järku diferents;

$\Delta^2 y_o$ - aegrea esimese elemendi teist järku diferents;

$\Delta^3 y_o$ - aegrea esimese elemendi kolmandat järku diferents;

$$n = \frac{x - x_o}{h},$$

kus x on argument, mille jaoks arvutatakse funktsiooni y väärtus;

x_o- funktsiooni y argumendi algväärtus;

h - argumendi väärtuse intervall.

Majanduslikes uurimistöödes kasutatakse siiski peamiselt indeksiteooriale tuginevat interpoleerimist.

3.4.2. Ekstrapoleerimine

Ekstrapoleerimiseks nimetatakse nähtuse ühe osa vaatlemisel tehtud järelduste üldistamist tema vaatlemata osale,mônele teisele territooriumile või tulevasele perioodile.

Nähtuste ajalise muutumise ekstrapoleerimisel eeldatakse, et üldine arengutendents säilib ka tulevikus. Sellise järelduse tegemisel tuleb toetuda kvalitatiivsetele või koguni intuitiivsetele hinnangutele. On täiesti ilmne, et majanduslike nähtuste üldine arengutendents ei ole lõpmatult püsiv.

4. VÕNGETE UURIMINE NÄHTUSTE AJALISES MUUTUMISES

4.1. Võngete mõiste

Aegrea elementide väärtused muutuvad harva täiesti sujuvalt, enamasti esinevad reas mitmesugused võnked. Aegrea võngete all mõistame empiirilise aegrea elementide väärtuste hälbimist kas nende endi keskmisest või teoreetilise rea väärtustest.

Võnked võivad olla juhuslikud või süstemaatiliselt mõjuvatest põhjustest tingitud. Viimastest on eriti olulised hooajalised tegurid.

4.2. Juhuslike võngete uurimine

Enam-vähem püsiva arengutendentsiga aegridade võnkumist võib iseloomustada standardhälbega:

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum(y_i - \bar{y})^2}{n}},$$

kus y_i on aegrea elementide väärtused;

$\bar{y}$ - aegrea elementide keskmine väärtus;

n - aegrea elementide arv.

Kui aegrea elementide väärtused kõiguvad väga oluliselt, siis iseloomustatakse aegrea juhuslikku võnkumist standardhälbele analoogilise näitarvuga:

$$\sigma'_y = \sqrt{\frac{\sum(y_i - y_t)^2}{n}},$$

kus y_t on tasandatud aegrea elementide väärtused.

Aegridade võnkumist iseloomustavate näitarvude arvutamist selgitame kolhoosi "N" teraviljasaagikuste aegrea alusel (vt. tabel 14). Kaheksa aasta keskmine teraviljasaagikus on kolhoosis 10. Arvutused on koondatud tabelisse 16.

T a b e l 16

Kolhoosi "N" teraviljasaagikuse võnkumist iseloomustavate näitarvude arvutus

Aasta	Saagikus y_i	$y_i-\bar{y}$	$(y_i-\bar{y})^2$	y_t	y_i-y_t	$(y_i-y_t)^2$
1957	8,5	-1,5	2,25	8,74	-0,24	0,058
1958	9,7	-0,3	0,09	9,10	0,60	0,360
1959	8,3	-1,7	2,89	9,46	-1,16	1,346
1960	10,5	0,5	0,25	9,82	0,68	0,462
1961	10,4	0,4	0,16	10,18	0,22	0,048
1962	11,4	1,4	1,96	10,54	0,86	0,740
1963	9,2	-0,8	0,64	10,90	-1,70	2,890
1964	12,0	2,0	4,00	11,26	0,94	0,884
			12,24			6,788

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n}} = \sqrt{\frac{12,24}{8}} = \sqrt{1,53} = 1,237,$$

$$\sigma'_y = \sqrt{\frac{\sum (y_i - y_t)^2}{n}} \doteq \sqrt{\frac{6,788}{8}} = \sqrt{0,849} = 0,921.$$

Tasandatud aegrea suhtes on võnkumine väiksem kui keskmise saagikuse suhtes. See on ka loomulik, sest tasandatud aegrida on leitud vähimruutude meetodil.

4.3. Hooajaliste võngete uurimine

Hooajaliste võngete all mõistame aegrea elementide väärtuste aastasiseseid võnkumisi (suurenemist ja vähenemist), mis korduvad reeglipäraselt aastast aastasse. Hooajalised võnked on näiteks piimatoodangu vähenemine talvekuudel, müüdava puuvilja koguste suurenemine sügisel, turistide arvu kasv suvel jne. Hooajalised võnked mõjuvad sageli majanduslikule tegevusele negatiivselt. Neil juhtudel püütakse võnkeid vältida või vähendada.

Hooajalisuse kvantitatiivseks iseloomustamiseks kasutatakse hooajalisuse indeksit:

$$I_h = \frac{\bar{y}_i}{\bar{y}} ,$$

kus $\bar{y}_i$ on mitme aasta samade kuude keskmised väärtused,

$\bar{y}$ - aegrea kõigi elementide keskmine väärtus.

Hooajalisuse indeks väljendatakse tavaliselt protsentides. Ülaltoodud kujul kasutatakse hooajalisuse indeksit peamiselt siis, kui aegrea võnked ei ole eriti suured. Muudel juhtudel kasutatakse võrdlemiseks tasandatud ridade elementide väärtusi.

Hooajalisuse indeksite arvutamist selgitab tabelis 17 toodud arvnäide ühe rajooni elektrienergia tarbimise hooajalisuse uurimise kohta.

5. MITME NÄHTUSE SAMAAJALISE MUUTUMISE UURIMINE

5.1. Mitme nähtuse samaajalise muutumise uurimise eesmärk

Majanduslike nähtuste isoleeritud uurimine on väga tinglik. Ühe nähtuse uurimise alusel saab teha vaid piiratud järeldusi. Seetõttu uuritakse tihtipeale samaaegselt mitut nähtust või ühe kompleksnähtuse mitme tunnuse muutumist. Viimaseid võib aga käsitleda ka iseseisvate majanduslike nähtustena.

Nähtuste komplekssel uurimisel saame mitu aegrida. Nende võrdlemiseks tuleb silmas pidada mõningaid aegridade analüüsimise nõudeid ning seoste selgitamiseks rakendada vastavaid spetsiaalvõtteid. Allpool on käsitletud neist kahte - ridade viimist ühele alusele ja ridadevahelise korrelatsiooni uurimist.

Tabel 17

Rajooni elektrienergia tarbimise hooajalisuse indeksite arvutamine (absoluutarvud tuh.kwh)

Kuu / Aasta	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	Kokku
1966	69,4	56,3	38,3	31,4	26,7	28,3	21,5	19,9	25,7	47,7	76,9	116,4	558,5
1967	97,4	78,0	50,2	33,6	42,6	42,9	41,8	45,3	53,6	62,8	88,4	123,7	760,3
1968	111,6	98,6	92,8	61,0	76,5	80,2	82,3	84,6	93,6	121,2	149,4	225,2	1277,0
Kokku	278,4	282,9	181,3	126,0	145,8	151,4	145,6	149,8	172,9	231,7	314,7	465,3	2595,8
Kuu keskmine	92,8	77,6	60,4	42,0	48,6	50,5	48,5	49,9	57,6	77,2	104,9	155,1	72,1[1]
Hooajalisuse indeks (%)	128,7	107,6	83,8	58,3	67,4	70,0	67,4	69,2	79,9	107,1	145,5	215,1	x

[1] Üldine (36 kuu) keskmine elektrienergia tarbimine, 2595,8 : 36 = 72,1.

Samaaegset muutumist on mõtet uurida vaid omavahel kuidagi seotud nähtuste puhul. Täielikult isoleeritud nähtuste samaajalise muutumise uurimine ei võimalda mingisuguste põhjendatud järelduste tegemist. Nii näiteks oleks naiivne seostada odra saagi ja autobusside arvu dünaamikat. Samal ajal võib aga eeldada seost odrasaagi ja õlletoodangu ning autobusside arvu ja veetud reisijate arvu vahel.

5.2. Ridade viimine ühele alusele

Ridade viimisega ühele alusele saavutatakse mitme aegrea võrreldavus. See on eriti vajalik, kui rea elementide mõõtühikud on erinevad või kui rea elementide absoluutväärtused on küll samades mõõteühikutes, ent suuruselt väga erinevad.

Aegridade ühele alusele viimise põhieesmärgiks on välja selgitada nähtuste ajalise muutumise suuna ja intensiivsuse sarnasus või erinevused. Selleks võrdsustatakse aluseks võetava elemendi väärtus ühega või 100 protsendiga ning arvutatakse teiste elementide ja aluseks võetud elemendi väärtuse suhe. Kõikides ridades tuleb selline ümberarvutus teha eraldi.

Ühele alusele viimisel võib kasutada mitmesuguseid erinevaid aluseid, näiteks:

1) rea elemendi väärtus esimesel momendil või perioodil,
2) elemendi väärtus mistahes momendil või perioodil,
3) kõigi elementide keskmine väärtus,
4) elementide väärtuste summa.

Kõige rohkem kasutatakse aegridade esimese ühise momendi või perioodi alusele viimist. Mingi teine moment või periood võetakse aluseks siis, kui see on kuidagi eriti iseloomulik.

Elementide keskmist on otstarbekas rakendada ühise alusena peamiselt võngete uurimisel.

Elementide väärtuste summa võib aluseks võtta ainult juhul, kui elementide väärtused on liidetavad, s.t. järjestikuste perioodidega perioodrea puhul.

Ridade viimist ühele alusele iseloomustab tabelis 18 toodud näide Eesti NSV kõikide majandiliikide piimatoodangu ja toiduainetetööstuse võitoodangu võrdlemise kohta.

T a b e l 18

Eesti NSV piima ja või toodang

1945. - 1965.a.

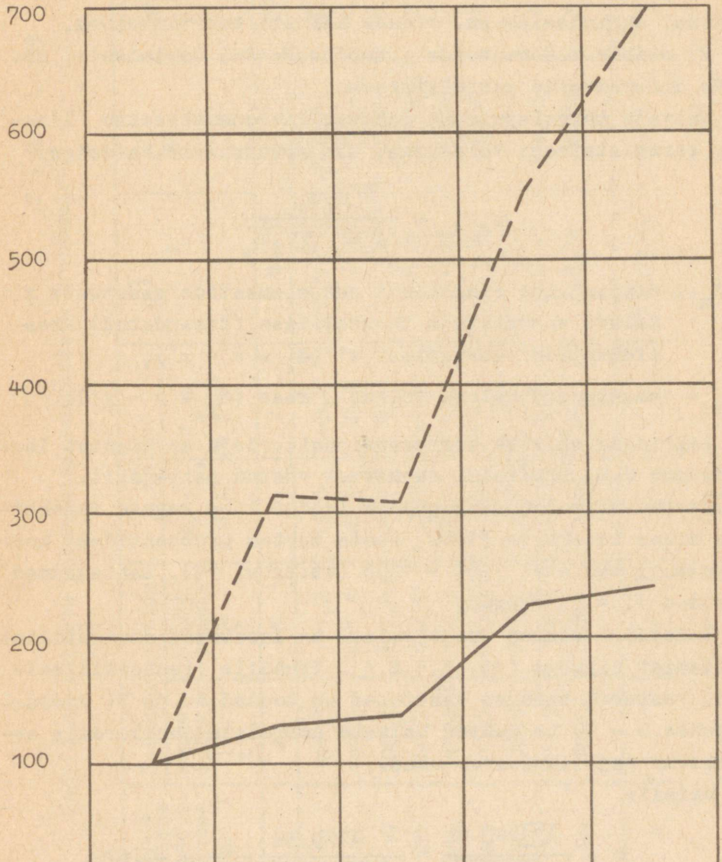
Aasta	Toodang (tuh. t)		Ühisele alusele viidud read (prots.)	
	piim	või	piim	või
1	2	3	4	5
1945	393,3	3,1	100	100
1950	508,0	9,5	127	307
1955	558,1	9,4	140	303
1960	856,6	17,2	215	555
1965	954,8	21,6	240	697

Piima ja või toodang on omavahel seotud nähtused, kuid tabeli andmetest selgub, et nende tootmine pole ajaliselt muutunud hoopiski ühesuguselt. Võitoodangu suurenemisele on peale piimatoodangu suurenemise avaldanud olulist mõju ka muud tegurid.

Olgu märgitud, et tabeli 4. ja 5. veeru 2.-5. reas toodud arvud on alusindeksid (aluskasvutempod). Ühisele alusele viidud aegridade võrdlemine tuginebki kasvutempode arvutamisele ühe aluse (baasi) suhtes. Väga ilmeka pildi nähtuste muutumise erinevusest võib saada vastavalt arvjooniselt - indeksidiagrammilt (joonis 3).

5.3. Ridadevahelise korrelatiivse seose uurimine

Mitme aegrea samaaegsel uurimisel tekib sageli küsimus nende ridade elementide väärtuste muutumise seose ranguse kohta. Kvalitatiivse analüüsi alusel kindlakstehtud seost tahame hinnata ka kvantitatiivselt.



Joon.3. Eesti NSV piimatoodangu (——) ja või-
toodangu (- - -) indeksidiagramm.

Statistika üldteoorias on aegridade vahelise korrelatiivse seose uurimiseks välja töötatud erilised meetodid, mis tuginevad:

1) empiiriliste ja teoreetiliste ridade hälvete korrelatsiooni uurimisele, nn. ridade hälvete korrelatsioon,

2) ridade diferentside (juurdekasvude) uurimisele, nn. ridade diferentside korrelatsioon.

Hälvete korrelatsiooni rangust iseloomustatakse lineaarse korrelatsiooni kordajaga, mis arvutatakse valemiga:

$$r_{d_x d_y} = \frac{\sum d_x d_y}{\sqrt{\sum d^2{}_x \cdot \sum d^2{}_y}},$$

kus d_x on empiirilise (tegeliku) rea elementide väärtuste x hälbed vastavatest teoreetilise (tasandatud) rea elementide väärtustest x' ($d_x = x - x'$);

d_y - samasugused hälbed teises reas ($d_y = y - y'$).

Aegridade hälvete korrelatsioonikordaja arvutamist iseloomustame N.K. Družinini raamatust võetud näite abil.[1] Analüüsitud on kolhoositurgudele toodud liha koguse indeksite ja hinna indeksite (1940. aasta suhtes protsentides) korrelatsiooni aastatel 1950 - 1958 (vt.tabel 19). Lähteandmed on toodud 1. - 3. veerus.

Indeksite aegrea tasandamisel on kasutatud analüütilist tasandamist sirgega (vt. 3.3.2.3). Trendile (teoreetilisele reale) vastavad tunnuse väärtused on toodud 4. ja 5. veerus. Veergudes 6 - 10 on tehtud hälvete korrelatsioonikordaja arvutamiseks vajalikud arvutused.

Niisiis

$$r = \frac{\sum d_x d_y}{\sqrt{\sum d_x^2 \sum d_y^2}} = \frac{-179,38}{\sqrt{278,4 \times 257,0}} = -0,672.$$

Siit järeldub, et kolhoositurgudele toodud liha koguse indeksite ja hinna indeksite vahel valitseb küllaltki range pöördvõrdeline korrelatiivne seos.

---

[1] Н.К. Дружинин, Основные математико-статистические методы в экономических исследованиях. "Статистика",Москва 1968,lk. 152.

T a b e l 19

Aegridade hälvete korrelatsioonikordaja arvutamine

Aasta	Koguse indeks 1940.a. suhtes %	Hinna indeks 1940.a. suhtes %	Tasandatud rida		Hälbed		$d_x d_y$	d_x^2	d_y^2
			koguse indeks % x'	hinna indeks % y'	$d_x = x-x'$	$d_y = y-y'$			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1950	114	93	101,0	101,2	13,0	-8,2	-106,60	169,00	67,24
1951	97	101	103,6	101,3	-6,6	-0,3	1,98	43,56	0,09
1952	100	109	106,1	101,4	-6,1	7,6	-46,36	37,21	57,76
1953	105	100	108,7	101,6	-3,7	-1,6	5,92	13,69	2,56
1954	111	105	111,2	101,7	-0,2	3,3	-0,66	0,04	10,89
1955	112	111	113,8	101,8	-1,8	9,2	-16,56	3,24	84,64
1956	117	98	116,3	101,9	0,7	-3,9	-2,73	0,49	15,21
1957	121	99	118,9	102,0	2,1	-3,0	-6,30	4,41	9,00
1958	124	99	121,4	102,1	2,6	-3,1	-8,06	6,76	9,61
Kokku	x	x	x	x	x	x	-179,38	278,40	257,00

Ridades diferentside[1] korrelatsioonikordaja arvutatakse valemiga:

$$r_{\Delta x \Delta y} = \frac{\sum \Delta x \quad \Delta y}{\sqrt{\sum \Delta_x^2 \cdot \sum \Delta_y^2}},$$

kus Δx on aegrea elementide väärtuste x esimest järku diferentsid;

Δy - aegrea elementide väärtuste y esimest järku diferentsid.

Esimest järku diferentside kasutamine korrelatsioonikordaja arvutamisel on õigustatud siis, kui uuritavad nähtused muutuvad lineaarselt, s.t. kui esimest järku diferentsid on püsivad. Kui nähtuse ajalist muutumist iseloomustab teist järku parabool, siis tuleb ridade diferentside korrelatsioonikordaja arvutada teist järku diferentside alusel.

Sageli ühe nähtuse muutumine avaldab mõju teise nähtuse muutumisele alles teatava aja möödudes. Laagerdamist vajava tooraine tootmine avaldab valmistoodangu valmistamisele mõju alles laagerdamisaja möödudes. Sellistel juhtudel arvutatakse korrelatsioonikordaja aegridade nihutamisega vastavalt mõjumisajale (laagerdamisajale). Sellist nihutamist võib rakendada ka mõjumisaja väljaselgitamiseks. Aegridu nihutatakse teineteise suhtes korduvalt ning arvutatakse korrelatsioonikordajad. Kõige suuremale korrelatsioonikordajale vastav nihe iseloomustabki mõjumisaega.

---

[1] Diferentside mõistet ja arvutamist on käsitletud eespool (vt.3.3.2.2).

Hind 10 kop.