Tartu Ülikool

Loodus- ja täppisteaduste valdkond

Matemaatika ja statistika instituut

Siim Kasemets

Lipschitzi-vaba ruumi $\mathcal{F}(M)$ eelruumi olemasolu, kui M on ultrameetriline

Matemaatika eriala

Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendajad: Rainis Haller

Andre Ostrak

Tartu 2026

Lipschitzi-vaba ruumi $\mathcal{F}(M)$ eelruumi olemasolu, kui M on ultrameetriline

Bakalaureusetöö

Siim Kasemets

Lühikokkuvõte

Käesolevas bakalaureusetöös esitatakse järgmise artikli põhitulemuse üksikasjalik tõestus:

T. A. Abrahamsen, V. Lima ja A. Ostrak, *Duality of Lipschitz-free spaces over ultrametric spaces* (2025).

CERCS teaduseriala: P140 Jadad, Fourier' analüüs, funktsionaalanalüüs

Märksõnad: Normeeritud ruumid, Banachi ruumid, Lipschitzi funktsioonid, Lipschitzi-vabad ruumid.

The duality of Lipschitz-free spaces over ultrametric spaces

Bachelor's thesis

Siim Kasemets

Abstract

In this bachelor's thesis, a detailed proof is given for the main theorem from the following paper:

T. A. Abrahamsen, V. Lima and A. Ostrak, *Duality of Lipschitz-free spaces over ultrametric spaces* (2025).

CERCS research specialisation: P140 Series, Fourier analysis, functional analysis

Keywords: Normed spaces, Banach spaces, Lipschitz functions, Lipschitz-free spaces

Sisukord

Sissejuhatus

Käesolev bakalaureusetöö on funktsionaalanalüüsi valdkonda kuuluv referatiivne uurimus, mille eesmärgiks on esitada Abrahamseni, Lima ja Ostraku artikli [ALO25] põhiteoreemi üksikasjalik tõestus.

Põhiteoreem. *Olgu M täielik separaabel ultrameetriline ruum. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *Lipschitzi-vaba ruum $\mathcal{F}(M)$ on kaasruum;*

(ii) *$\mathcal{F}(M)$ on 1-täiendatav oma teises kaasruumis $\mathcal{F}(M)^{**}$;*

(iii) *M on sfääriliselt täielik.*

Bakalaureusetöö koosneb kolmest osast. Esimeses antakse vajalikud mõisted ja abitulemused ning põhjendatakse põhiteoreemi implikatsioon (i)⇒(ii) (teoreem 1.34). Teises tõestatakse implikatsioon (ii)⇒(iii). Täpsemalt näidatakse, et see implikatsioon kehtib üldisemalt, ruumilt M separaablust eeldamata (lause 2.1). Kolmandas tõestatakse implikatsioon (iii)⇒(i) (lause 3.10).

Kõiki normeeritud ruume vaatleme üle reaalarvude korpuse. Normeeritud ruumi X kinnist ühikkera, ühiksfääri ja kaasruumi tähistame vastavalt B_X, S_X ja X^*.

Töös vaatleme ainult mittetriviaalseid meetrilisi ruume. Eeldame läbivalt, et igas vaadeldavas meetrilises ruumis M on fikseeritud punkt $0 \in M$. Meetrilise ruumi kinnist ja lahtist kera keskpunktiga x raadiusega r tähistame vastavalt $\overline{B}(x, r)$ ja $B(x, r)$.

1 Eelteadmised

Olgu (M, d) meetriline ruum.

1.1 Lipschitzi-vaba ruum

Definitsioon 1.1. Funktsioon $f\colon M \to \mathbb{R}$ on **Lipschitzi funktsioon**, kui leidub $L \geq 0$ nii, et iga $x, y \in M$ korral

$$|f(x) - f(y)| \leq Ld(x, y).$$

Vähimat sellist arvu L nimetame funktsiooni f **Lipschitzi konstandiks** ja tähistame $\mathrm{Lip}(f)$.

Tähistame

$$\mathrm{Lip}_0(M) = \{f\colon M \to \mathbb{R} : f \text{ on Lipschitzi funktsioon ja } f(0) = 0\}.$$

Hulk $\mathrm{Lip}_0(M)$ on vektorruum punktiviisi defineeritud tehete suhtes ja Banachi ruum (vt nt [Wea18, lause 2.3]) normiga

$$\|f\| := \sup\left\{\frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)} : x, y \in M,\ x \neq y\right\} = \mathrm{Lip}(f) \qquad (f \in \mathrm{Lip}_0(M)).$$

Näide 1.2. Olgu $y \in M$. Funktsioon $f\colon M \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = d(x, y) - d(0, y),$$

on Lipschitzi funktsioon, kusjuures $f(0) = 0$ ja $\mathrm{Lip}(f) = 1$. Seega $f \in S_{\mathrm{Lip}_0(M)}$.

Definitsioon 1.3. Lipschitzi funktsioon $f\colon M \to \mathbb{R}$ on

(i) **ühtlaselt lokaalselt lame**, kui iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $\delta > 0$ nii, et iga $x, y \in M$ korral

$$d(x, y) < \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon d(x, y);$$

(ii) **lame lõpmatuses**, kui iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $r > 0$ nii, et iga $x, y \in M$ korral

$$\{x, y\} \not\subset \overline{B}(0, r) \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon d(x, y).$$

Tähistame

$$\mathrm{lip}_0(M) = \{f \in \mathrm{Lip}_0(M) : f \text{ on ühtlaselt lokaalselt lame ja lame lõpmatuses}\}.$$

Näide 1.4. Ühtlaselt diskreetsel ruumil M, s.t juhul $\inf_{x \neq y} d(x, y) > 0$, on iga Lipschitzi funktsioon $M \to \mathbb{R}$ ühtlaselt lokaalselt lame.

Näide 1.5. Tõkestatud ruumil M on iga Lipschitzi funktsioon $M \to \mathbb{R}$ lame lõpmatuses.

Näide 1.6. Lipschitzi funktsioon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arctan(x)$, on lame lõpmatuses.

Teoreem 1.7 (McShane'i jätkuteoreem, vt nt [Wea18, teoreem 1.33])**.** *Ruumi M iga meetrilise alamruumi A ja Lipschitzi funktsiooni $f\colon A \to \mathbb{R}$ korral leidub funktsiooni f jätk $\hat{f}\colon M \to \mathbb{R}$ nii, et* $\mathrm{Lip}(f) = \mathrm{Lip}(\hat{f})$.

Olgu $\delta\colon M \to \mathrm{Lip}_0(M)^*$, $x \mapsto \delta_x$, kus $\delta_x(f) = f(x)$ iga $f \in \mathrm{Lip}_0(M)$ korral. Banachi ruumi

$$\mathcal{F}(M) := \overline{\mathrm{span}}\, \delta(M) \subset \mathrm{Lip}_0(M)^*$$

nimetame **Lipschitzi-vabaks ruumiks** üle meetrilise ruumi M.

Tähistame iga $x, y \in M$, $x \neq y$, korral $m_{x,y} = \frac{\delta_x - \delta_y}{d(x,y)}$. Paneme tähele, et iga $x, y \in M$, $x \neq y$, korral $||\delta_x - \delta_y|| = d(x, y)$, sest ühelt poolt

$$||\delta_x - \delta_y|| = \sup_{f \in B_{\mathrm{Lip}_0(M)}} |f(x) - f(y)| = d(x, y) \sup_{f \in B_{\mathrm{Lip}_0(M)}} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)} \leq d(x, y),$$

ning teiselt poolt saame $f \in S_{\mathrm{Lip}_0(M)}$,

$$f(z) = d(z, y) - d(0, y),$$

korral $f(x) - f(y) = d(x, y)$.

Teoreem 1.8 (vt nt [Wea18, teoreem 3.3])**.** *Lipschitzi-vaba ruum $\mathcal{F}(M)$ on ruumi $\mathrm{Lip}_0(M)$ eelruum, s.t $\mathcal{F}(M)^* = \mathrm{Lip}_0(M)$.*

Lemma 1.9 ([AP20, lemma 2.1])**.** *Olgu $\phi \in \mathcal{F}(M)$. Iga $\varepsilon > 0$ korral leiduvad jadad (p_n), (q_n) ruumis M ja reaalarvude jada (a_n) nii, et $\phi = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n m_{p_n,q_n}$ ja $\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n| < ||\phi|| + \varepsilon$.*

Järeldus 1.10. *Olgu $\phi \in \mathcal{F}(M)$. Leiduvad jadad (p_n), (q_n) ruumis M ja reaalarvude jada (a_n) nii, et $\phi = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n m_{p_n,q_n}$, kusjuures $a_n \geq 0$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral ja $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n < \infty$.*

Tõestus. Lemma 1.9 põhjal leiduvad jadad (p'_n), (q'_n) ruumis M ja reaalarvude jada (a'_n) nii, et $\phi = \sum_{n \in \mathbb{N}} a'_n m_{p'_n,q'_n}$ ja $\sum_{n \in \mathbb{N}} |a'_n| < ||\phi|| + 1$. Iga $n \in \mathbb{N}$ korral tähistame $a'_n \geq 0$ korral $a_n = a'_n$, $p_n = p'_n$ ja $q_n = q'_n$, ning $a'_n < 0$ korral $a_n = -a'_n$, $p_n = q'_n$ ja $q_n = p'_n$. Nähtavasti $a_n \geq 0$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral. Kui $a'_n \geq 0$, siis $a'_n m_{p'_n,q'_n} = a_n m_{p_n,q_n}$. Kui $a'_n < 0$, siis

$$a'_n m_{p'_n,q'_n} = -a_n m_{q_n,p_n} = -a_n \frac{\delta_{q_n} - \delta_{p_n}}{d(q_n, p_n)} = a_n \frac{\delta_{p_n} - \delta_{q_n}}{d(p_n, q_n)} = a_n m_{p_n,q_n}.$$

Järelikult $a_n m_{p_n,q_n} = a'_n m_{p'_n,q'_n}$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral ning seega

$$\phi = \sum_{n\in\mathbb{N}} a'_n m_{p'_n,q'_n} = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n m_{p_n,q_n}.$$

Ilmselt $a_n = |a'_n|$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral. Seega

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} |a'_n| < \|\phi\| + 1 < \infty. \qquad \square$$

Lause 1.11. *Olgu S kõikjal tihe hulk ruumis M nii, et $0 \in S$. Siis $\mathcal{F}(S) = \mathcal{F}(M)$.*

Tõestus. Piisab näidata, et iga $\mu \in \operatorname{span}\delta(M)$ ja $\varepsilon > 0$ korral leidub $\nu \in \operatorname{span}\delta(S)$ nii, et $\|\mu - \nu\| < \varepsilon$. Olgu antud $\mu \in \operatorname{span}\delta(M)$ ja $\varepsilon > 0$ suvaline. Siis $\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \delta_{x_k}$, kus $n \in \mathbb{N}$, $a_k \in \mathbb{R}$ ja $x_k \in M$. Iga $k \in \mathbb{N}$ korral leidub $y_k \in S$ nii, et $|a_k| \cdot d(x_k, y_k) < \varepsilon/2^k$ ehk $|a_k| \cdot \|\delta_{x_k} - \delta_{y_k}\| < \varepsilon/2^k$. Tähistame $\nu = \sum_{k=1}^{n} a_k \delta_{y_k}$. Siis

$$\begin{aligned}
\|\mu - \nu\| &= \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k \delta_{x_k} - \sum_{k=1}^{n} a_k \delta_{y_k} \right\| = \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k (\delta_{x_k} - \delta_{y_k}) \right\| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} |a_k| \cdot \|\delta_{x_k} - \delta_{y_k}\| \\
&< \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2^k} < \varepsilon.
\end{aligned} \qquad \square$$

Järeldus 1.12. *Kui M on separaabel, siis $\mathcal{F}(M)$ on separaabel.*

1.2 Ultrameetriline ruum

Definitsioon 1.13. Meetriline ruum M on **ultrameetriline ruum**, kui iga $x, y, z \in M$ korral kehtib tugev kolmnurga võrratus

$$d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(y, z)\}.$$

Näide 1.14. Diskreetse meetrikaga ruum on ultrameetriline ruum.

Näide 1.15 ([ALO25, näide 3.2]). Olgu $M = \mathbb{N} \cup \{0\}$ ja iga $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m \neq n$, korral

$$d(m, n) = 1 + \frac{1}{2^{\min\{m,n\}}}.$$

Siis M on ultrameetriline ruum.

Lemma 1.16. *Olgu M ultrameetriline ruum, $x, y, z \in M$ ja $0 < r < R$. Kehtivad järgmised väited:*

(1) *kui $d(x, z) \neq d(y, z)$, siis $d(x, y) = \max\{d(x, z), d(y, z)\}$;*

(2) *kui $d(x, y) < r$, siis $B(x, r) = B(y, r)$;*

(3) *kera $B(x, r)$ on kinnine;*

(4) *kui $B(x, r) \subset B(y, R)$, siis $d(A, M \setminus A) \geq r$, kus $A = B(y, R) \setminus B(x, r)$.*

Tõestus. (1) Eeldame üldisust kitsendamata, et $d(x, z) < d(y, z)$. Siis

$$d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(y, z)\} = d(y, z)$$

ja

$$d(y, z) \leq \max\{d(x, y), d(x, z)\} = d(x, y).$$

Seega $d(x, y) = d(y, z) = \max\{d(x, z), d(y, z)\}$.

(2) Olgu $d(x, y) < r$ ja olgu $z \in B(x, r)$. Siis $d(x, z) < r$ ning

$$d(y, z) \leq \max\{d(x, y), d(x, z)\} < r.$$

Seega $B(x, r) \subset B(y, r)$. Analoogiliselt saame $B(y, r) \subset B(x, r)$. Seega $B(x, r) = B(y, r)$.

(3) Olgu (y_n) jada hulgas $B(x, r)$ ja $y_n \to y$. Leidub $N \in \mathbb{N}$ nii, et $d(y_N, y) < r$. Osa (2) põhjal $B(x, r) = B(y_N, r) = B(y, r)$. Seega $y \in B(x, r)$.

(4) Olgu $z \in A$ ja $w \in M \setminus A$. Kui $w \in B(x, r)$, siis osa (2) kohaselt $B(w, r) = B(x, r)$. Saame, et $d(z, w) \geq r$, sest $z \notin B(x, r) = B(w, r)$. Kui $w \notin B(y, R) = B(z, R)$, siis $d(z, w) \geq R > r$. □

1.3 Sfääriline täielikkus

Definitsioon 1.17. Ultrameetriline ruum M on **sfääriliselt täielik**, kui iga üksteisesse sisestatud kerade jada $B_1 \supset B_2 \supset \cdots$ ühisosa on mittetühi, s.t $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n \neq \varnothing$.

Kui M on sfääriliselt täielik, siis teoreemi üksteisesse sisestatud keradest kohaselt on M täielik.

Lemma 1.18 ([ALO25, lemma 2.10])**.** *Olgu M ultrameetriline ruum, mis ei ole sfääriliselt täielik. Siis leidub üksteisesse sisestatud kerade jada*

$$B(x_1, r_1) \supsetneq B(x_2, r_2) \supsetneq \cdots,$$

mille ühisosa on tühi ja (r_n) on rangelt kahanev jada. Kui M on täielik, siis lisaks $\lim_n r_n > 0$.

Tõestus. Kuna M ei ole sfääriliselt täielik, leidub üksteisesse sisestatud kerade jada $(B(y_n, s_n))_{n \in \mathbb{N}}$, mille ühisosa on tühi. Leiduvad osajadad $(y_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ ja $(s_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$

nii, et iga $k \in \mathbb{N}$ korral

$$B(y_{n_k}, s_{n_k}) \neq B(y_{n_{k+1}}, s_{n_{k+1}}),$$

sest $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B(y_n, s_n) = \varnothing$. Iga $k \in \mathbb{N}$ korral tähistame $x_k = y_{n_k}$ ja $r_k = s_{n_k}$ ning paneme tähele, et kuna $B(x_k, r_k) \subset B(y_k, s_k)$, siis

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} B(x_k, r_k) \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B(y_n, s_n) = \varnothing.$$

Seega $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} B(x_k, r_k) = \varnothing$. Nähtavasti

$$B(x_1, r_1) \supsetneq B(x_2, r_2) \supsetneq \cdots .$$

Iga $k \in \mathbb{N}$ ja $x \in B(x_k, r_k) \setminus B(x_{k+1}, r_{k+1})$ korral

$$r_{k+1} \leq d(x, x_{k+1}) \leq \max\{d(x, x_k), d(x_{k+1}, x_k)\} < r_k.$$

Seega on (r_k) rangelt kahanev jada.

Eeldame, et M on täielik, ja oletame, et $r_k \to 0$. Fikseerime $\varepsilon > 0$ ja olgu $N \in \mathbb{N}$ selline, et iga $k \geq N$ korral $r_k < \varepsilon$. Iga $m, n \geq N$ korral

$$d(x_m, x_n) < r_{\min\{m,n\}} < \varepsilon.$$

Seega (x_k) on Cauchy jada. Kuna M on täielik, siis $\lim x_k \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} B(x_k, r_k) = \varnothing$, mis on vastuolu. Järelikult $\lim r_k > 0$. □

Definitsioon 1.19. Ultrameetrilise ruumi M jada (x_n) on **pseudo-Cauchy jada**, kui iga $n_1 < n_2 < n_3$ korral $d(x_{n_3}, x_{n_2}) < d(x_{n_2}, x_{n_1})$.

Definitsioon 1.20. Ultrameetrilise ruumi M element $x \in M$ on pseudo-Cauchy jada (x_n) **pseudo-piirelement**, kui iga $n_1 < n_2$ korral $d(x_{n_2}, x) < d(x_{n_1}, x)$.

Lause 1.21. *Ultrameetriline ruum M on sfääriliselt täielik parajasti siis, kui igal pseudo-Cauchy jadal leidub pseudo-piirelement.*

Tõestus. ($\Rightarrow$) Eeldame, et M on sfääriliselt täielik, ja olgu (x_n) pseudo-Cauchy jada ruumis M. Tähistame iga $n \in \mathbb{N}$ korral $r_n = d(x_{n+1}, x_n)$ ja märkame, et

$$r_{n+1} = d(x_{n+2}, x_{n+1}) < d(x_{n+1}, x_n) = r_n.$$

Kuna $B(x_2, r_1) \supset B(x_3, r_2) \supset \cdots$ ja M on sfääriliselt täielik, leidub $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B(x_{n+1}, r_n)$. Iga $n_1 < n_2$ korral

$$d(x_{n_2}, x) < r_{n_1} = d(x_{n_2}, x_{n_1})$$

ja seega lemma 1.16 (1) põhjal $d(x, x_{n_1}) = d(x_{n_1}, x_{n_2}) = r_{n_1}$.

($\Leftarrow$) Oletame vastuväiteliselt, et igal pseudo-Cauchy jadal leidub pseudo-piirelement, aga M ei ole sfääriliselt täielik. Lemma 1.18 põhjal leidub üksteisesse sisestatud kerade jada $B(x_1, r_1) \supsetneq B(x_2, r_2) \supsetneq \cdots$, mille ühisosa on tühi ja (r_n) on rangelt kahanev. Valime iga $n \in \mathbb{N}$ korral $y_n \in B(x_n, r_n) \setminus B(x_{n+1}, r_{n+1})$ ja veendume, et (y_n) on pseudo-Cauchy jada. Iga $n_1 < n_2 < n_3$ korral saame lemma 1.16 (4) kohaselt

$$d(y_{n_1}, y_{n_2}) \geq r_{n_1+1} \geq r_{n_2}$$

ja lemma 1.16 (2) põhjal $B(y_{n_2}, r_{n_2}) = B(y_{n_3}, r_{n_2})$, sest $y_{n_2}, y_{n_3} \in B(x_{n_2}, r_{n_2})$, ning seega $d(y_{n_2}, y_{n_3}) < r_{n_2}$. Olgu $y \in M$ jada (y_n) pseudo-piirelement. Ilmselt $y \in B(x_n, r_n)$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral, sest $y_m \in B(x_n, r_n)$ iga $m \geq n$ korral. Seega $y \in \bigcap_n B(x_n, r_n) = \varnothing$, mis on vastuolu. $\square$

Näide 1.22 ([ALO25, näide 3.3]). Olgu $M = \mathbb{N} \cup \{0, \omega\}$ ja iga $m, n \in M$, $m \neq n$, korral

$$d(m,n) = \begin{cases} 1 + 1/2^n, & \text{kui } m = \omega; \\ 1 + 1/2^m, & \text{kui } n = \omega; \\ 1 + 1/2^{\min\{m,n\}}, & \text{teistel juhtudel.} \end{cases}$$

Siis M on separaabel ultrameetriline ruum, mis on sfääriliselt täielik.

Näide 1.23. Näites 1.15 toodud ultrameetriline ruum ei ole sfääriliselt täielik. Kui $x_n = n$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral, siis (x_n) on pseudo-Cauchy jada, millel puudub pseudo-piirelement.

Lemma 1.24. *Jada (x_n) ultrameetrilises ruumis M on Cauchy jada parajasti siis, kui $d(x_{n+1}, x_n) \to 0$.*

Tõestus. Kui (x_n) on Cauchy jada, siis $d(x_{n+1}, x_n) \to 0$.

Eeldame, et $d(x_{n+1}, x_n) \to 0$ ja fikseerime $\varepsilon > 0$. Leidub $N \in \mathbb{N}$ nii, et iga $n \geq N$ korral $d(x_{n+1}, x_n) < \varepsilon$. Iga $n \geq N$ ja $k \in \mathbb{N}$ korral

$$d(x_{n+k}, x_n) \leq \max\{d(x_{n+k}, x_{n+k-1}), d(x_{n+k-1}, x_{n+k-2}), \dots, d(x_{n+1}, x_n)\} < \varepsilon.$$

Seega (x_n) on Cauchy jada. □

1.4 Abitulemused

Olgu X normeeritud ruum ja Y tema alamruum.

Definitsioon 1.25. Kaasruumi X^* ***-nõrgaks topoloogiaks** nimetame vähimat sellist topoloogiat hulgal X^*, mille suhtes kujutus $X^* \to \mathbb{R}$, $x^* \mapsto x^*(x)$, on pidev iga $x \in X$ korral.

Teoreem 1.26 (Banach–Alaoglu teoreem, vt nt [Meg98, teoreem 2.6.18]). *Normeeritud ruumi kaasruumi kinnine ühikkera on *-nõrgalt kompaktne.*

Järeldus 1.27 ([Meg98, järeldus 2.6.19]). *Iga *-nõrgalt kinnine ja tõkestatud alamhulk on *-nõrgalt kompaktne.*

Definitsioon 1.28. Ruumi X **kanooniline sisestus oma teise kaasruumi** X^{**} on kujutus $J_X \colon X \to X^{**}$,

$$J_X(x)(x^*) = x^*(x) \qquad (x \in X,\ x^* \in X^*).$$

Definitsioon 1.29. Kaasruumi X^* alamruum E on **normeeriv**, kui iga $x \in X$ korral

$$\|x\| = \sup_{x^* \in B_E} |x^*(x)|.$$

Lause 1.30 ([Kal04, lause 3.3]). *Alamruum $E \subset \mathrm{Lip}_0(M)$ on normeeriv parajasti siis, kui iga punkti* 0 *sisaldava lõpliku meetrilise alamruumi $A \subset M$, iga $f \in \mathrm{Lip}_0(A)$ ja iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $g \in E$ nii, et $g(x) = f(x)$ iga $x \in A$ korral ja $\mathrm{Lip}(g) \leq (1+\varepsilon)\,\mathrm{Lip}(f)$.*

Teoreem 1.31 ([God87, teoreem IV.2]). *Olgu X separaabel Banachi ruum ja $E \subset X^*$ kinnine normeeriv alamruum. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *iga $x^* \in E$ saavutab oma normi;*

(ii) *ruum E on ruumi X eelruum, s.t $E^* = X$.*

Definitsioon 1.32. Pidev lineaarne kujutus $P \colon X \to X$ on **projektor**, kui $P^2 = P$.

Definitsioon 1.33. Ruum Y on **λ-täiendatav** ruumis X, kui leidub projektor $P \colon X \to X$ nii, et $\|P\| \leq \lambda$ ja $\operatorname{ran} P = Y$.

Teoreem 1.34 (vt nt [FHH+11, lk 221]). *Kaasruum X^*, täpsemalt $J_{X^*}(X^*)$, on* 1*-täiendatav oma teises kaasruumis X^{***}.*

2 Sfäärilise täielikkuse tarvilikkus

Lause 2.1 ([ALO25, lause 3.1]). *Olgu M täielik ultrameetriline ruum. Kui $\mathcal{F}(M)$ on 1-täiendatav oma teises kaasruumis $\mathcal{F}(M)^{**}$, siis M on sfääriliselt täielik.*

Tõestus. Eeldame, et $\mathcal{F}(M)$ on 1-täiendatav ruumis $\mathcal{F}(M)^{**}$. Olgu $P\colon \mathcal{F}(M)^{**} \to \mathcal{F}(M)^{**}$ selline projektor, et $\|P\| \le 1$ ja $\operatorname{ran} P = \mathcal{F}(M)$. Eeldame, et M ei ole sfääriliselt täielik, ja näitame, et nii tekib vastuolu. Lemma 1.18 põhjal leidub üksteisesse sisestatud kerade jada

$$B(x_1, r_1) \supsetneq B(x_2, r_2) \supsetneq \cdots ,$$

mille ühisosa on tühi, kus jada (r_n) on rangelt kahanev ja $\alpha := \lim_n r_n > 0$. Üldisust kitsendamata eeldame, et $0 \notin B(x_1, r_1)$. Nimelt, kuna $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B(x_n, r_n) = \varnothing$, siis leidub $N \in \mathbb{N}$ nii, et $0 \notin B(x_n, r_n)$ iga $n \ge N$ korral.

Ruumis $\mathcal{F}(M)^{**}$ on Banach–Alaoglu teoreemi kohaselt $\overline{B}(\delta_{x_1}, 2r_1)$ *-nõrgalt kompaktne ja tema alamhulgad $\overline{B}(\delta_{x_n}, r_n)$ *-nõrgalt kinnised. Mistahes $n_1 < \cdots < n_k$ korral $\delta_{x_{n_k}} \in \bigcap_{i=1}^k \overline{B}(\delta_{x_{n_i}}, r_{n_i})$, seega leidub $F \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{B}(\delta_{x_n}, r_n)$. Tähistame $\phi = P(F) \in \mathcal{F}(M)$. Paneme tähele, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$\left\|\delta_{x_n} - \phi\right\| = \left\|P(\delta_{x_n}) - P(F)\right\| \le \left\|P\right\| \left\|\delta_{x_n} - F\right\| \le \left\|\delta_{x_n} - F\right\| \le r_n.$$

Lemma 1.10 põhjal $\phi = \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i m_{p_i,q_i}$, kus $\lambda_i \ge 0$, $p_i, q_i \in M$ ja $\sum_i \lambda_i < \infty$. Tähistame iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$\begin{aligned} A_n &= B(x_n, r_n) \setminus B(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset M, \\ I_n &= \{i \in \mathbb{N} : p_i \in A_n\}, \\ J_n &= \{i \in \mathbb{N} : q_i \in A_n\} \end{aligned}$$

ja

$$\beta_n = \sum_{i \in I_n \setminus J_n} \frac{\lambda_i}{d(p_i, q_i)} - \sum_{i \in J_n \setminus I_n} \frac{\lambda_i}{d(p_i, q_i)}.$$

Näitame, et β_n definitsioonis

$$\sum_{i \in I_n \setminus J_n} \frac{\lambda_i}{d(p_i, q_i)} < \infty \qquad \text{ja} \qquad \sum_{i \in J_n \setminus I_n} \frac{\lambda_i}{d(p_i, q_i)} < \infty.$$

Olgu $i \in I_n \setminus J_n$. Siis $p_i \in A_n$ ja $q_i \in M \setminus A_n$. Lemma 1.16 (4) põhjal $d(p_i, q_i) > r_{n+1} > \alpha$ ehk $\frac{1}{d(p_i, q_i)} < \frac{1}{\alpha}$. Saame, et

$$\sum_{i \in I_n \setminus J_n} \frac{\lambda_i}{d(p_i, q_i)} \leq \sum_{i \in I_n \setminus J_n} \frac{\lambda_i}{\alpha} \leq \frac{1}{\alpha} \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_i < \infty.$$

Analoogiliselt saame, et

$$\sum_{i \in J_n \setminus I_n} \frac{\lambda_i}{d(p_i, q_i)} < \infty.$$

Seega $\beta_n \in \mathbb{R}$.

Väide. *Rida $\sum_{n \in \mathbb{N}} \beta_n$ koondub absoluutselt.*

Tõestus. Olgu $n \in \mathbb{N}$. Kui $i \in I_n \setminus J_n$, siis $p_i \in A_n$ ja $q_i \in M \setminus A_n$ ning lemma 1.16 (4) põhjal $d(p_i, q_i) > r_{n+1} > \alpha$. Sarnaselt kehtib iga $i \in J_n \setminus I_n$ korral $d(p_i, q_i) > \alpha$. Seega

$$\begin{aligned} |\beta_n| &\leq \sum_{i \in I_n \setminus J_n} \frac{\lambda_i}{d(p_i, q_i)} + \sum_{i \in J_n \setminus I_n} \frac{\lambda_i}{d(p_i, q_i)} \\ &\leq \sum_{i \in I_n \setminus J_n} \frac{\lambda_i}{\alpha} + \sum_{i \in J_n \setminus I_n} \frac{\lambda_i}{\alpha} \\ &\leq \sum_{i \in I_n} \frac{\lambda_i}{\alpha} + \sum_{i \in J_n} \frac{\lambda_i}{\alpha}. \end{aligned}$$

Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline. Kuna $\sum_i \lambda_i < \infty$, leidub $N \in \mathbb{N}$ nii, et

$$\sum_{i>N} \lambda_i < \frac{\varepsilon\alpha}{2}.$$

Iga $k \in \mathbb{N}$ korral

$$\bigcup_{n\geq k} A_n \subset \bigcup_{n\geq k} B(x_n, r_n) = B(x_k, r_k).$$

Eelduse kohaselt $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} B(x_k, r_k) = \varnothing$ ning seega

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq k} A_n = \varnothing.$$

Järelikult leidub $k \in \mathbb{N}$ nii, et iga $i = 1, \ldots, N$ korral $p_i, q_i \notin \bigcup_{n\geq k} A_n$ ehk $i \notin \bigcup_{n\geq k} I_n$ ja $i \notin \bigcup_{n\geq k} J_n$. Kuna iga $n \neq m$ korral $I_n \cap I_m = \varnothing = J_n \cap J_m$, siis

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq k} |\beta_n| &\leq \sum_{n\geq k} \left(\sum_{i\in I_n} \frac{\lambda_i}{\alpha} + \sum_{i\in J_n} \frac{\lambda_i}{\alpha} \right) = \sum_{i\in\bigcup_{n\geq k} I_n} \frac{\lambda_i}{\alpha} + \sum_{i\in\bigcup_{n\geq k} J_n} \frac{\lambda_i}{\alpha} \\
&\leq \sum_{i>N} \frac{\lambda_i}{\alpha} + \sum_{i>N} \frac{\lambda_i}{\alpha} = \frac{2}{\alpha} \sum_{i>N} \lambda_i < \frac{2}{\alpha} \cdot \frac{\varepsilon\alpha}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Seega $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\beta_n| < \infty$. ■

Olgu $K = \{k \in \mathbb{N} : \beta_k > 0\}$ ja iga $n \in \mathbb{N}$ korral $K_n = K \cap \{1, \ldots, n-1\}$. Näitame, et $\sum_{k\in K} \beta_k \geq 1$. Defineerime iga $n \in \mathbb{N}$ korral $f_n \colon M \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} r_1 - r_{k+1}, & \text{kui } x \in A_k,\ k \in K_n; \\ r_1, & \text{kui } x \in B(x_1, r_1) \setminus \left(\bigcup_{k\in K_n} A_k\right); \\ 0, & \text{teistel juhtudel.} \end{cases}$$

Fikseerime $n \in \mathbb{N}$ ja näitame, et $f_n \in B_{\mathrm{Lip}_0(M)}$. Selleks fikseerime $x, y \in M$ ja veendume, et $|f_n(x) - f_n(y)| \leq d(x, y)$. Kui $x, y \notin B(x_1, r_1)$, siis $f_n(x) = f_n(y)$. Eeldame edasises, et $x \in B(x_1, r_1)$. Sellisel juhul leidub $l \in \mathbb{N}$ nii, et $x \in A_l$.

Vaatleme kolme juhtu.

(1) Kui $y \notin B(x_1, r_1) = B(x, r_1)$, siis

$$d(x, y) \geq r_1 \geq |f_n(x)| = |f_n(x) - f_n(y)|.$$

(2) Kui $y \in A_l$, siis $f_n(x) = f_n(y)$.

(3) Olgu $y \in A_m$, $m \neq l$. Eeldame üldisust kitsendamata, et $l < m$. Siis lemma 1.16 (4) põhjal $d(x, y) \geq r_{l+1}$. Kuna $f_n(x) \in \{r_1, r_1 - r_{l+1}\}$, $f_n(y) \in \{r_1, r_1 - r_{m+1}\}$ ja $r_{m+1} < r_{l+1}$, siis

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq r_{l+1} \leq d(x, y).$$

Seega $f_n \in B_{\mathrm{Lip}_0(M)}$. Fikseerime $n \in \mathbb{N}$. Saame, et

$$r_n \geq \left\|\delta_{x_n} - \phi\right\| \geq (\delta_{x_n} - \phi)(f_n) = f_n(x_n) - \phi(f_n) = r_1 - \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \frac{f_n(p_i) - f_n(q_i)}{d(p_i, q_i)}.$$

Hindame viimast summat ülevalt. Iga $i \in \mathbb{N}$ korral leidub ülimalt üks $k \in \mathbb{N}$ nii, et $i \in I_k$, sest $I_k \cap I_l = \varnothing$ iga $k \neq l$ korral. Kui sellist indeksi k ei leidu, siis $p_i \notin B(x_1, r_1)$ ja seega $f_n(p_i) = 0$. Analoogiliselt leidub iga $i \in \mathbb{N}$ korral ülimalt üks $k \in \mathbb{N}$ nii, et $i \in J_k$ või $f_n(q_i) = 0$. Kui $i \in I_k \cap J_k$, siis $f_n(p_i) = f_n(q_i)$. Seega

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \frac{f_n(p_i) - f_n(q_i)}{d(p_i, q_i)} &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i \in I_k \setminus J_k} \lambda_i \frac{f_n(p_i)}{d(p_i, q_i)} - \sum_{i \in J_k \setminus I_k} \lambda_i \frac{f_n(q_i)}{d(p_i, q_i)} \right) \\
&= \sum_{k \in K_n} \left(\sum_{i \in I_k \setminus J_k} \lambda_i \frac{f_n(p_i)}{d(p_i, q_i)} - \sum_{i \in J_k \setminus I_k} \lambda_i \frac{f_n(q_i)}{d(p_i, q_i)} \right) \\
&\quad + \sum_{k \in \mathbb{N} \setminus K_n} \left(\sum_{i \in I_k \setminus J_k} \lambda_i \frac{f_n(p_i)}{d(p_i, q_i)} - \sum_{i \in J_k \setminus I_k} \lambda_i \frac{f_n(q_i)}{d(p_i, q_i)} \right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k\in K_n}\left(\sum_{i\in I_k\setminus J_k}\lambda_i\frac{r_1-r_{k+1}}{d(p_i,q_i)}-\sum_{i\in J_k\setminus I_k}\lambda_i\frac{r_1-r_{k+1}}{d(p_i,q_i)}\right)\\
&\quad+\sum_{k\in\mathbb{N}\setminus K_n}\left(\sum_{i\in I_k\setminus J_k}\lambda_i\frac{r_1}{d(p_i,q_i)}-\sum_{i\in J_k\setminus I_k}\lambda_i\frac{r_1}{d(p_i,q_i)}\right)\\
&= \sum_{k\in K_n}(r_1-r_{k+1})\beta_k+\sum_{k\in\mathbb{N}\setminus K_n}r_1\beta_k\\
&\le \sum_{k\in K_n}(r_1-r_{k+1})\beta_k+\sum_{k\in K\setminus K_n}r_1\beta_k\\
&= \sum_{k\in K}r_1\beta_k-\sum_{k\in K_n}r_{k+1}\beta_k.
\end{aligned}
$$

Järelikult iga $n\in\mathbb{N}$ korral

$$
r_n\ge r_1-\sum_{k\in K}r_1\beta_k+\sum_{k\in K_n}r_{k+1}\beta_k.
$$

Kuna $r_n\to\alpha$, siis $\alpha\ge r_1-\sum_{k\in K}r_1\beta_k+\sum_{k\in K}r_{k+1}\beta_k$. Teisisõnu,

$$
\sum_{k\in K}(r_1-r_{k+1})\beta_k\ge r_1-\alpha.
$$

Kuna $r_{k+1}>\alpha$ ja $\beta_k>0$ iga $k\in K$ korral, siis

$$
(r_1-\alpha)\sum_{k\in K}\beta_k\ge\sum_{k\in K}(r_1-r_{k+1})\beta_k\ge r_1-\alpha.
$$

Seega $\sum_{k\in K}\beta_k\ge 1$.

Defineerime iga $n\in\mathbb{N}$ korral $g_n\colon M\to\mathbb{R}$,

$$
g_n(x)=\begin{cases} r_{k+1}, & \text{kui } x\in A_k,\ k\in K_n;\\ 0, & \text{teistel juhtudel.}\end{cases}
$$

Fikseerime $n\in\mathbb{N}$ ja näitame, et $g_n\in B_{\mathrm{Lip}_0(M)}$. Selleks fikseerime $x,y\in M$ ja veendume, et $|g_n(x)-g_n(y)|\le d(x,y)$. Kui $x,y\notin\bigcup_{k\in\mathbb{N}}A_k$, siis $g_n(x)=g_n(y)$.

Eeldame edasises, et $x \in A_l$ mingi $l \in K_n$ korral. Vaatleme kolme juhtu.

(1) Kui $y \notin \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$, siis lemma 1.16 (4) kohaselt $d(x, y) \geq r_{l+1}$ ning seega

$$|g_n(x) - g_n(y)| = r_{l+1} \leq d(x, y).$$

(2) Kui $y \in A_l$, siis $g_n(x) = r_{l+1} = g_n(y)$.

(3) Olgu $y \in A_m$, $m \in K_n$, $m \neq l$. Eeldame üldisust kitsendamata, et $l < m$. Siis lemma 1.16 (4) põhjal $d(x, y) \geq r_{l+1}$. Saame, et

$$|g_n(x) - g_n(y)| = r_{l+1} - r_{m+1} \leq d(x, y).$$

Seega $g_n \in B_{\mathrm{Lip}_0(M)}$. Siis

$$r_n \geq \left\| \phi - \delta_{x_n} \right\| \geq (\phi - \delta_{x_n})(g_n) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \frac{g_n(p_i) - g_n(q_i)}{d(p_i, q_i)}.$$

Sarnaselt arutelule leheküljel 17, saame

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \frac{g_n(p_i) - g_n(q_i)}{d(p_i, q_i)} &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i \in I_k \setminus J_k} \lambda_i \frac{g_n(p_i)}{d(p_i, q_i)} - \sum_{i \in J_k \setminus I_k} \lambda_i \frac{g_n(q_i)}{d(p_i, q_i)} \right) \\
&= \sum_{k \in K_n} \left(\sum_{i \in I_k \setminus J_k} \lambda_i \frac{g_n(p_i)}{d(p_i, q_i)} - \sum_{i \in J_k \setminus I_k} \lambda_i \frac{g_n(q_i)}{d(p_i, q_i)} \right) \\
&= \sum_{k \in K_n} \left(\sum_{i \in I_k \setminus J_k} \lambda_i \frac{r_{k+1}}{d(p_i, q_i)} - \sum_{i \in J_k \setminus I_k} \lambda_i \frac{r_{k+1}}{d(p_i, q_i)} \right) \\
&= \sum_{k \in K_n} r_{k+1} \beta_k.
\end{aligned}$$

Järelikult iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$r_n \geq \sum_{k \in K_n} r_{k+1}\beta_k.$$

Kuna $r_n \to \alpha$, siis $\alpha \geq \sum_{k \in K} r_{k+1}\beta_k$. Iga $k \in \mathbb{N}$ korral $r_{k+1} > \alpha$, seega

$$\alpha \geq \sum_{k \in K} r_{k+1}\beta_k > \sum_{k \in K} \alpha\beta_k = \alpha \sum_{k \in K} \beta_k.$$

Järelikult $\sum_{k \in K} \beta_k < 1$. Varasemalt saime aga, et $\sum_{k \in K} \beta_k \geq 1$. Seega oleme jõudnud vastuoluni. $\square$

3 Sfäärilise täielikkuse piisavus

Olgu M separaabel ultrameetriline ruum. Olgu $S = \{s_n \in M : n \in \mathbb{N}\}$ selline ruumi M kõikjal tihe alamhulk, et $s_1 = 0$ ja $s_i \neq s_j$, kui $i \neq j$. Tähistame iga $n \in \mathbb{N}$ ja $x \in M$ korral

$$\begin{aligned} S_n &= \{s_1, \dots, s_n\}, \\ I_n(x) &= \{k \leq n : d(x, S_n) = d(x, s_k),\ k \in \mathbb{N}\}, \\ i_n(x) &= \min I_n(x). \end{aligned}$$

Defineerime iga $n \in \mathbb{N}$ korral $r_n \colon M \to S_n$,

$$r_n(x) = s_{i_n(x)}.$$

Lemma 3.1 ([CD16, teoreemi 1 tõestus]). *Kujutus $r_n \colon M \to S_n$ on iga $n \in \mathbb{N}$ korral 1-Lipschitzi retraktsioon, s.t iga $x \in S_n$ korral $r_n(x) = x$ ja iga $x, y \in M$ korral*

$$d(r_n(x), r_n(y)) \leq d(x, y).$$

Kusjuures iga $m, n \in \mathbb{N}$ korral $r_n \circ r_m = r_{\min\{m,n\}}$.

Definitsioon 3.2. Olgu Y kõigi selliste funktsioonide $f \in \mathrm{Lip}_0(M)$ hulk, mille korral:

- iga $\varepsilon > 0$ puhul leidub $N \in \mathbb{N}$ nii, et iga $x, y \in M$ korral

$$r_N(x) = r_N(y) \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon d(x, y).$$

Märkus 3.3. Paneme tähele, et kui viimane implikatsioon kehtib mingi $\varepsilon > 0$, $N \in \mathbb{N}$ ja $x, y \in M$ korral, siis ta jääb ka kehtima, kui asendada N temast suurema naturaalarvuga n, sest kui $n \geq N$ ja $r_n(x) = r_n(y)$ korral

$$r_N(x) = r_N(r_n(x)) = r_N(r_n(y)) = r_N(y).$$

Märkus 3.4. Hulk Y sõltub hulgast S ja tema elementide järjestusest.

Lause 3.5 ([ALO25, lause 4.5]). *Kehtivad järgmised väited:*

(1) Y *on ruumi* $\mathrm{Lip}_0(M)$ *kinnine normeeriv alamruum;*

(2) Y *on* $\mathrm{lip}_0(M)$ *alamhulk.*

Tõestus. (1) Näitame esmalt, et Y on $\mathrm{Lip}_0(M)$ alamruum. Olgu $f, g \in Y$ ja $\alpha \in \mathbb{R}$. Veendume, et $\alpha f \in Y$ ja $f + g \in Y$. Olgu $\varepsilon > 0$. Kui $\alpha = 0$, siis $\alpha f = 0 \in Y$. Eeldame, et $\alpha \neq 0$. Kuna $f \in Y$, siis leidub $N \in \mathbb{N}$ nii, et iga $x, y \in M$ korral

$$r_N(x) = r_N(y) \implies |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{|\alpha|} d(x, y).$$

Kui $r_N(x) = r_N(y)$, siis

$$|\alpha f(x) - \alpha f(y)| = |\alpha||f(x) - f(y)| \leq |\alpha| \cdot \frac{\varepsilon}{|\alpha|} d(x, y) = \varepsilon d(x, y).$$

Seega $\alpha f \in Y$. Kuna $f, g \in Y$, siis leiduvad $N_f, N_g \in \mathbb{N}$ nii, et iga $x, y \in M$ korral

$$r_{N_f}(x) = r_{N_f}(y) \implies |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2} d(x, y)$$

ja

$$r_{N_g}(x) = r_{N_g}(y) \implies |g(x) - g(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2} d(x, y).$$

Tähistame $N = \max\{N_f, N_g\}$, siis $r_{N_f} \circ r_N = r_{N_f}$ ja $r_{N_g} \circ r_N = r_{N_g}$. Kui $r_N(x) =$

$r_N(y)$, siis

$$r_{N_f}(x) = r_{N_f}(r_N(x)) = r_{N_f}(r_N(y)) = r_{N_f}(y)$$

ja

$$r_{N_g}(x) = r_{N_g}(r_N(x)) = r_{N_g}(r_N(y)) = r_{N_g}(y).$$

Seega

$$\begin{aligned}
|(f+g)(x) - (f+g)(y)| &= |f(x) - f(y) + (g(x) - g(y))| \\
&\leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} d(x,y) + \frac{\varepsilon}{2} d(x,y) = \varepsilon d(x,y).
\end{aligned}$$

Järelikult $f + g \in Y$.

Näitame, et Y on kinnine. Olgu $f_k \to f$ ruumis $\mathrm{Lip}_0(M)$, kus $f_k \in Y$ iga $k \in \mathbb{N}$ korral. Näitame, et $f \in Y$. Olgu $\varepsilon > 0$ ja $n_0 \in \mathbb{N}$ selline, et $\|f - f_{n_0}\| \leq \varepsilon/2$. Kuna $f_{n_0} \in Y$, siis leidub $N \in \mathbb{N}$ nii, et

$$r_N(x) = r_N(y) \implies |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2} d(x,y).$$

Kui $r_N(x) = r_N(y)$, siis

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &= |f(x) - f_{n_0}(x) - f(y) + f_{n_0}(y) + f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| \\
&\leq |(f - f_{n_0})(x) - (f - f_{n_0})(y)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| \\
&\leq \|f - f_{n_0}\| d(x,y) + \frac{\varepsilon}{2} d(x,y) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} d(x,y) + \frac{\varepsilon}{2} d(x,y) = \varepsilon d(x,y).
\end{aligned}$$

Järelikult $f \in Y$ ja seega Y on kinnine alamruum.

Näitame, et Y on normeeriv. Olgu $A \subset S$ lõplik ja $0 \in A$, $f \in \mathrm{Lip}_0(A)$ ja $\varepsilon >$

0. Lause 1.11 põhjal $\mathcal{F}(S) = \mathcal{F}(M)$ ning $\mathrm{Lip}_0(S) = \mathcal{F}(S)^* = \mathcal{F}(M)^* = \mathrm{Lip}_0(M)$. Lause 1.30 põhjal piisab näidata, et leidub $g \in Y$ nii, et $g(x) = f(x)$ iga $x \in A$ korral ja $\mathrm{Lip}(g) \leq \mathrm{Lip}(f)$. Kuna A on lõplik ja $A \subset S$, leidub $N \in \mathbb{N}$ nii, et $A \subset S_N$. McShane'i jätkuteoreemi kohaselt leidub kujutuse f jätk $\hat{f} \colon S_N \to \mathbb{R}$ nii, et $\mathrm{Lip}(\hat{f}) = \mathrm{Lip}(f)$. Tähistame $g = \hat{f} \circ r_N \in \mathrm{Lip}_0(M)$. Paneme tähele, et $\mathrm{Lip}(g) \leq \mathrm{Lip}(f)$, sest $\mathrm{Lip}(r_N) = 1$. Kui $r_N(x) = r_N(y)$, siis $g(x) = g(y)$. Seega $g \in Y$.

(2) Olgu $f \in Y$ ja $\varepsilon > 0$. Kui $f = 0$, siis ilmselt $f \in \mathrm{lip}_0(M)$. Seega eeldame, et $f \neq 0$. Kuna $f \in Y$, leidub $N \in \mathbb{N}$ nii, et $N\varepsilon \geq 2\|f\|$ ja iga $x, y \in M$ korral

$$r_N(x) = r_N(y) \implies |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2} d(x, y).$$

Näitame, et f on ühtlaselt lokaalselt lame. Tähistame

$$\delta = \min\{d(x, y) : x, y \in S_N,\ x \neq y\}.$$

Olgu $x, y \in M$ sellised, et $d(x, y) < \delta$. Siis

$$d(r_N(x), r_N(y)) \leq d(x, y) < \delta.$$

Kuna $r_N(x), r_N(y) \in S_N$, siis $r_N(x) = r_N(y)$ ja seega

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2} d(x, y) \leq \varepsilon d(x, y).$$

Näitame, et f on lame lõpmatuses. Selleks piisab leida $r > 0$ nii, et iga $x, y \in M$ korral, mille puhul $x \notin \overline{B}(0, r)$ või $y \notin \overline{B}(0, r)$, kehtib

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon d(x, y).$$

Tähistame $R = \max_{s \in S_N} d(s, 0)$. Iga $z \in M \setminus \overline{B}(0, R)$ ja $s \in S_N$ korral $d(s, 0) \leq R < d(z, 0)$, järelikult

$$d(z, s) = \max\{d(z, 0), d(s, 0)\} = d(z, 0).$$

Seega $d(z, S_N) = d(z, 0)$ ning $r_N(z) = s_{i_N(z)} = s_1 = 0$. Olgu $r > NR$ ja $x, y \in M$ sellised, et x või y ei ole keras $\overline{B}(0, r)$. Üldisust kitsendamata eeldame, et $x \notin \overline{B}(0, r)$.

Kui $d(y, 0) \leq R$, siis lemma 1.16 (1) põhjal

$$d(x, y) = \max\{d(x, 0), d(y, 0)\} = d(x, 0) > NR$$

ja seetõttu

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &\leq |f(x)| + |f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2} d(x, 0) + \|f\| d(y, 0) \leq \frac{\varepsilon}{2} d(x, 0) + \|f\| R \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} d(x, y) + \frac{\|f\|}{N} d(x, y) \leq \frac{\varepsilon}{2} d(x, y) + \frac{\|f\| \varepsilon}{2\|f\|} d(x, y) \\
&= \varepsilon d(x, y).
\end{aligned}$$

Kui $d(y, 0) > R$, siis $r_N(y) = 0 = r_N(x)$ ja

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2} d(x, y) \leq \varepsilon d(x, y). \qquad \square$$

Lemma 3.6 ([ALO25, lemma 4.6]). *Olgu $f \in Y$, (x_k) tõkestatud jada ruumis M ja (n_k) rangelt kasvav naturaalarvude jada. Siis*

$$\lim_k \big(f(x_k) - f(r_{n_k}(x_k)) \big) = 0.$$

Tõestus. Tähistame $R = \sup_{k \in \mathbb{N}} d(x_k, s_1)$ ja fikseerime $\varepsilon > 0$. Kui $R = 0$, siis

$x_k = s_1$ iga $k \in \mathbb{N}$ korral ja väide kehtib ilmselt. Eeldame, et $R > 0$. Leidub $N \in \mathbb{N}$ nii, et

$$r_N(x) = r_N(y) \implies |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{R} d(x, y).$$

Kui $k \geq N$, siis $r_N(r_{n_k}(x_k)) = r_N(x_k)$ ning

$$\begin{aligned}
|f(x_k) - f(r_{n_k}(x_k))| &\leq \frac{\varepsilon}{R} d(x_k, r_{n_k}(x_k)) \leq \frac{\varepsilon}{R} \max\{d(x_k, s_1), d(r_{n_k}(x_k), s_1)\} \\
&= \frac{\varepsilon}{R} \max\{d(x_k, s_1), d(r_{n_k}(x_k), r_{n_k}(s_1))\} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{R} d(x_k, s_1) \leq \frac{\varepsilon}{R} \cdot R = \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Lemma 3.7 ([ALO25, lemma 4.7]). *Olgu M sfääriliselt täielik ja olgu osajada (s_{n_j}) pseudo-Cauchy jada ja iga $j \in \mathbb{N}$ korral $r_{n_j}(s_{n_{j+1}}) = s_{n_j}$. Siis (s_{n_j}) on Cauchy jada.*

Tõestus. Fikseerime $\varepsilon > 0$. Kuna M on sfääriliselt täielik, leidub jada (s_{n_j}) pseudo-piirelement $x \in M$. Kuna S on kõikjal tihe ruumis M, leidub $N \in \mathbb{N}$ nii, et $d(s_N, x) < \varepsilon$. Iga $j \in \mathbb{N}$ korral $d(x, s_{n_{j+1}}) < d(x, s_{n_j})$, seega

$$d(s_{n_{j+1}}, s_{n_j}) = \max\{d(s_{n_{j+1}}, x), d(s_{n_j}, x)\} = d(x, s_{n_j}).$$

Iga $j > N$ korral $d(s_{n_{j+1}}, s_{n_j}) < d(s_{n_{j+1}}, s_N)$, sest $n_j > N$ ja $r_{n_j}(s_{n_{j+1}}) = s_{n_j}$, ning

$$\begin{aligned}
d(s_{n_{j+1}}, s_N) &\leq \max\{d(s_N, x), d(s_{n_{j+1}}, x)\} < \max\{\varepsilon, d(s_{n_j}, x)\} \\
&= \max\{\varepsilon, d(s_{n_{j+1}}, s_{n_j})\}
\end{aligned}$$

ja seega $d(s_{n_{j+1}}, s_{n_j}) < \max\{\varepsilon, d(s_{n_{j+1}}, s_{n_j})\} = \varepsilon$. Järelikult (s_{n_j}) on Cauchy jada lemma 1.24 põhjal. □

Lemma 3.8 ([ALO25, lemma 4.8]). *Olgu M sfääriliselt täielik. Igal jadal (x_k) ruumis M leidub osajada (x_{k_n}) nii, et $(r_n(x_{k_n}))_{n\in\mathbb{N}}$ koondub ja $r_l(x_{k_n}) = r_l(x_{k_l})$ iga $l \leq n$ korral.*

Tõestus. Defineerime iga $n \in \mathbb{N}$ korral jada $(x_k^n)_{k\in\mathbb{N}}$ nii, et $(x_k^{n+1})_{k\in\mathbb{N}}$ on $(x_k^n)_{k\in\mathbb{N}}$ osajada ja $r_n(x_k^n) = r_n(x_1^n)$ iga $k \in \mathbb{N}$ korral. Olgu $x_k^1 = x_k$ iga $k \in \mathbb{N}$ korral. Nähtavasti $r_1(x_k^1) = s_1 = 0$ iga $k \in \mathbb{N}$ korral.

Olgu $n \in \mathbb{N}$. Kuna S_{n+1} on lõplik, leidub jada $(x_k^n)_{k\in\mathbb{N}}$ osajada $(x_k^{n+1})_{k\in\mathbb{N}}$ nii, et $r_{n+1}(x_k^{n+1}) = r_{n+1}(x_1^{n+1})$ iga $k \in \mathbb{N}$ korral. Paneme tähele, et iga $l, n \in \mathbb{N}$, $l \leq n$, korral on $(x_k^n)_{k\in\mathbb{N}}$ jada $(x_k^l)_{k\in\mathbb{N}}$ osajada ning seega $r_l(x_k^n) = r_l(x_l^l)$ iga $k \in \mathbb{N}$ korral.

Tähistame $y_n = r_n(x_n^n)$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral. Näitame, et jada (y_n) koondub. Kui tegu on statsionaarse jadaga, siis on tema koondumine ilmne. Oletame, et tegu pole statsionaarse jadaga. Võtame $n_1 = 1$ ja iga $k \in \mathbb{N}$ korral

$$n_{k+1} = \min\{n_k + i : i \in \mathbb{N},\ y_{n_k} \neq y_{n_k+i}\}.$$

Piisab näidata, et (y_{n_k}) on Cauchy jada. Nähtavasti $y_{n_k} \neq y_{n_{k+1}}$ iga $k \in \mathbb{N}$ korral. Iga $i < j < k$ korral

$$r_{n_i}(y_{n_j}) = r_{n_i}(r_{n_j}(x_{n_j}^{n_j})) = r_{n_i}(x_{n_j}^{n_j}) = r_{n_i}(x_{n_i}^{n_i}) = y_{n_i}$$

ja

$$r_{n_i}(y_{n_k}) = y_{n_i} \neq y_{n_j} = r_{n_j}(y_{n_k}),$$

sest võrduse korral

$$y_{n_i} = r_{n_{i+1}}(y_{n_i}) = r_{n_{i+1}}(y_{n_j}) = y_{n_{i+1}},$$

mis on vastuolu sellega, et $y_{n_i} \neq y_{n_{i+1}}$. Seega

$$d(y_{n_i}, y_{n_k}) = d(r_{n_i}(y_{n_k}), y_{n_k}) > d(r_{n_j}(y_{n_k}), y_{n_k}) = d(y_{n_j}, y_{n_k}).$$

Järelikult (y_{n_k}) on pseudo-Cauchy jada, kusjuures iga $k \in \mathbb{N}$ korral

$$r_{n_k}(y_{n_{k+1}}) = y_{n_k}.$$

Lemma 3.7 kohaselt (y_{n_k}) on Cauchy jada. □

Lause 3.9 ([ALO25, lause 4.9]). *Olgu M sfääriliselt täielik. Iga $f \in Y$ saavutab oma normi.*

Tõestus. Fikseerime $f \in S_Y$ ja olgu (x_k) ja (y_k) sellised ruumi M jadad, et

$$\lim_k \frac{f(x_k) - f(y_k)}{d(x_k, y_k)} = 1$$

ja $f(x_k) \geq f(y_k)$ iga $k \in \mathbb{N}$ korral. Kuna $f \in \mathrm{lip}_0(M)$, siis (x_k) ja (y_k) on tõkestatud ning leiduvad $\delta > 0$ ja $N \in \mathbb{N}$ nii, et $d(x_k, y_k) \geq \delta$ iga $k \geq N$ korral. Lemma 3.8 kohaselt leidub osajada (x_{k_l}) nii, et jada $(r_l(x_{k_l}))_{l\in\mathbb{N}}$ koondub ja $r_m(x_{k_l}) = r_m(x_{k_m})$ iga $m \leq l$ korral. Samuti leidub osajada $(y_{k_{l_m}})$ nii, et $(r_m(y_{k_{l_m}}))_{m\in\mathbb{N}}$ koondub. Tähistame $x = \lim_l r_l(x_{k_l})$ ja $y = \lim_m r_m(y_{k_{l_m}})$. Lemma 3.6 kohaselt

$$\lim_m f(x_{k_{l_m}}) = \lim_m f(r_{l_m}(x_{k_{l_m}})) = f(x)$$

ja

$$\lim_m f(y_{k_{l_m}}) = \lim_m f(r_m(y_{k_{l_m}})) = f(y).$$

Siis

$$0 < \delta \leq \lim_m d(x_{k_{l_m}}, y_{k_{l_m}}) = \lim_m (f(x_{k_{l_m}}) - f(y_{k_{l_m}})) = f(x) - f(y) \leq d(x, y)$$

ja

$$
\begin{aligned}
f(x) - f(y) &= \lim_m d(x_{k_{l_m}}, y_{k_{l_m}}) \geq \lim_m d(r_m(x_{k_{l_m}}), r_m(y_{k_{l_m}})) \\
&= \lim_m d(r_m(x_{k_m}), r_m(y_{k_{l_m}})) \\
&= d(x, y).
\end{aligned}
$$

Seega $f(x) - f(y) = d(x, y)$ ning $f(m_{x,y}) = \|f\|$. □

Lause 3.10. *Kui M on sfääriliselt täielik, siis $\mathcal{F}(M)$ on kaasruum.*

Tõestus. Kuna M on separaabel, siis järelduse 1.12 põhjal on $\mathcal{F}(M)$ separaabel. Lause 3.5 (1) järgi on Y ruumi $\mathrm{Lip}_0(M) = \mathcal{F}(M)^*$ kinnine normeeriv alamruum ja lause 3.9 põhjal saavutab iga $f \in Y$ oma normi. Seega teoreemi 1.31 kohaselt $Y^* = \mathcal{F}(M)$. □

Viited

[ALO25] Trond A. Abrahamsen, Vegard Lima ja Andre Ostrak, *Duality of Lipschitz-free spaces over ultrametric spaces*, arXiv preprint arXiv: 2509.22328v2, 2025, doi:10.48550/arXiv.2509.22328.

[AP20] Ramón J. Aliaga ja Eva Pernecká, *Supports and extreme points in Lipschitz-free spaces*, Rev. Mat. Iberoam. **36** (2020), no. 7, 2073–2089, doi:10.4171/rmi/1191.

[CD16] Marek Cúth ja Michal Doucha, *Lipschitz-Free Spaces Over Ultrametric Spaces*, Mediterr. J. Math. **13** (2016), no. 4, 1893–1906, doi:10.1007/s00009-015-0566-7.

[FHH+11] Marián Fabian, Petr Habala, Petr Hájek, Vicente Montesinos ja Václav Zizler, *Banach Space Theory: The Basis for Linear and Nonlinear Analysis*, CMS Books in Mathematics, Springer New York, 2011, doi:10.1007/978-1-4419-7515-7.

[God87] Gilles Godefroy, *Boundaries of a convex set and interpolation sets*, Math. Ann. **277** (1987), no. 2, 173–184, doi:10.1007/BF01457357.

[Kal04] Nigel J. Kalton, *Spaces of Lipschitz and Hölder functions and their applications*, Collect. Math. **55** (2004), no. 2, 171–217, doi:10.1007/978-3-319-18799-0_9.

[Meg98] Robert E. Megginson, *An Introduction to Banach Space Theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 183, Springer-Verlag, New York, 1998, doi:10.1007/978-1-4612-0603-3.

[Wea18] Nik Weaver, *Lipschitz Algebras*, second ed., World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2018, doi:10.1142/9911.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Siim Kasemets,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose

   „Lipschitzi-vaba ruumi $\mathcal{F}(M)$ eelruumi olemasolu, kui M on ultrameetriline",

   mille juhendajad on Rainis Haller ja Andre Ostrak, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas DSpace digitaalarhiivi kaudu Creative Commonsi litsentsiga CC BY NC ND 3.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Siim Kasemets
27.05.2026