A-9421

LANG-ERLEMANN

A 9/D.

FÜÜSIKA

KESKKOOLILE

III

Mehaanika

A 1
Tüld-m. t.

Tartu, 1926

J. LANG JA V. ERLEMANN

A 9/IV.

FÜÜSIKA

ÕPPERAAMAT KESKKOOLILE

III

Mehaanika humanitaar- ja reaalharu IV ja V kl. ulatuses

A 1.

9898

Autori kirjastus — Tartu, 1926

2
Tartu Riikliku Ülikooli
Raamatukogu
57801

A.-S. „Varrak'u“ trükk, Tartus, 1926

I. Liikumine ja tung.

Ühtlane sirgjooneline liikumine.

1. Mehaanika ja selle jaotamine. Mehaanikaks nimetatakse õpetus kehade liikumisest ja tasakaalust.

See osa mehaanikast, kus õpitakse tundma kehade liikumise nähtusi ja püütakse neid sellekohaste mõistete abil võimalikult lühidalt ja täpselt kirjeldada, kannab kinemaatika nime (kreeka keeles *kinema* — liikumine). Kinemaatika vaatleb kehade liikumist vastava aja suhtes, kuid jätab hoopis kõrvale nende põhjuste käsitlemise, millest liikumine oleneb; viimase küsimusega teeb tegemist dünaamika (kr. k. *dünamis* — tung, jõud). See mehaanika osa, kus käsitletakse kehasse mõjuvate tungide tasakaalu-tingimusi, nimetatakse staatikaks (kr. k. *statikos* — paigal seisev, tasakaalus).

Missuguses tähenduses veel tarvitatakse sõna „mehaanika" ja „mehaanik"?

2. Liikumine ja paigalolek. Keha, mis oma asukohta teise keha suhtes muudab, **liigub** selle teise keha suhtes. Keha, mis mõne teise keha suhtes oma asukohta mitte ei muuda, **on** selle teise keha suhtes **paigal.** Sama keha võib ühe keha suhtes liikuda, teise keha suhtes olla paigal; nii näiteks reisija võib olla raudtee-vagunis paigal vaguni suhtes, kuid liikuda Maa suhtes jne. Liikumisest ja paigalolekust rääkides peame alati küsima, missuguse keha suhtes toimub antud liikumine või paigalolek, sest meie tunneme ainult suhtelist ehk relatiivset liikumist ja suhtelist paigalolekut.

Iga liikumine, kui keha asukoha muutumine ruumis, ei sünni mitte silmapilkselt, vaid nõuab selleks teatud aega. Tähendab, täpseks liikumise kirjelda-

miseks peame tarvitama ruumi ja aja mõõtmise üksusi (cm ja sek). Et kõik füüsikalised nähtused on seotud liikumisega, sellega kuuluvad ka ruumi ja aja mõisted füüsika põhimõistete hulka.

1. Too näiteid suhtelise liikumise ja paigaloleku kohta!
2. Mispärast ei või meie rääkida absoluutsest paigalolekust?
3. Nimeta meile tuttavad Maa liikumised!

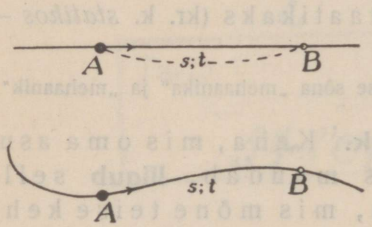
3. Liikumiste liigitamine. Looduses ja igapäevases elus paneme tähele miitmesuguste kehade (Päike, inimene, kivi, püssikuul jne.) liikumist.

Et keha kui terviku liikumine on võrdlemisi keeruline nähtus, siis on kasulik alata liikumise tundmaõppimist n. n. ainepunkti liikumisega. Ainepunkti all mõeldakse ruumalalt niivõrt väikest keha, et võime tegelikult selle keha ruumala lugeda võrdseks nulliga, kuna ainehulk võib olla suuruselt missugune tahes. Lühidalt: lõplik mass lõpmata väikeses ruumalas. Iga keha võime enestele kujutella koosnevana üksikuist ainepunktest. Teades keha üksikute punktide liikumist võime otsustada kogu keha liikumise üle.

Iga liikumise tundmaõppimisel tuleb meil tähele panna: 1. liikumise teed, 2. liikumise sihti, 3. käidud tee pikkust ja 4. sellele vastavat aega.

Kuidas liigitatakse liikumised tee kuju ja sihi suhtes? Too näiteid!

Liikumine on täiesti määratud, kui teame tee kuju, liikumise sihi ja seose (valemi), mille abil võime kindlaks määrata iga momendi kohta liikuva keha kauguse teatud tee punktist, näiteks liikumise alguspunktist, milles keha asub meie vaatluse alul.



1. joon. Sirg- ja kõverjooneline liikumine.

Kui näiteks (1. joon.) keha liigub mööda sirget noole sihis ja ta kaugus s punktist A on määratud valemiga $s = 3\,t$, siis võime kergesti määrata keha asukoha igal momendil.

1. Olgu kaugus s mõõdetud cm-tes, kui aeg t mõõtub sek-tes. Kus kohal asub keha 1., 5., 10., — 8. jne. sekundi lõpul?
2. Määra täiesti enese liikumine kodust kooli!

Arvesse võttes liikumisel käidud tee pikkust ja sellele vastavat aega võime jagada kõik liikumised ühtlasteks ja mitteühtlasteks. Liikumist, kus keha mistahes võrdsetes ajavahemikkudes, näiteks sekundites,

ära käib võrdsed teeosad, näiteks 80 cm, nimet. **ühtlaseks** liikumiseks. Liikumist aga, kus keha mistahes võrdsetes ajavahemikkudes mitte-võrdsed teeosad ära käib, nimet. **mitteühtlaseks** liikumiseks.

Inimesel on võimatu sünnitada kauemat aega kestvat täitsa ühtlast liikumist. Looduses on ühtlastest liikumistest meile kõige rohkem tuntud Maa pöörlemine telje ümber.

Too näiteid ühtlase ja mitteühtlase liikumise kohta!

4. Ühtlase sirgjoonelise liikumise kiirus. Kui jalamees ühtlaselt kõndides igas tunnis 5 km ära käib, siis ütleme, et jalamehe liikumise **kiiruse suurus** on 5 km tunnis (lühidalt kirjutatud: $5\ \frac{km}{h}$; lugeda: 5 km tunnis); kui vesi jões igas sekundis 80 cm edasi voolab, siis on jõevoolu kiiruse suurus 80 cm sekundis (lühidalt: $80\frac{cm}{sek}$) jne. Üldse nimetame kiiruse suuruseks tee pikkust, mis keha ühe ajaüksuse jooksul ära käib.

Sellest järgneb, et ühtlaselt liikuva keha

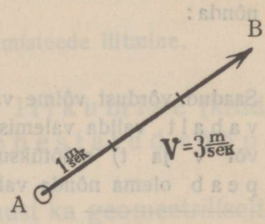
$$\textbf{kiiruse suurus} = \frac{\textbf{käidud tee pikkus}}{\textbf{vastav aeg}}.$$

Tähistame üldises kujus vastavais üksustes mõõdetud kiiruse suuruse tähega **v** (ladina keeles *velocitas* — kiirus), käidud tee pikkuse tähega **s** (l. k. *spatium* — ruum, kaugus) ja aja tähega **t** (l. k. *tempus* — aeg), siis võime eelmise reegli lühidalt järgmiselt üles kirjutada:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{t}},\ \text{millest järgneb:}\ \mathbf{s} = \mathbf{vt}\ \text{ja}\ \mathbf{t} = \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{v}}.$$

Sõnasta need valemid!

Ainult kiiruse suuruse põhjal ei saa veel otsustada, kus kohal asub liikuv keha liikumise aja lõpul; selleks on tarvis veel teada, missugust teed mööda liigub keha. Keha liikumise siht loetakse ühtlasi ka **kiiruse sihiks.**



2. joon. Kiiruse graafiline kujutamine.

Kiiruse sihi ja suuruse näitlikult kujutamiseks tarvitatakse noolt (2. joon.), kus

noole siht (AB) näitab kiiruse sihti ja noole pikkus on võrdeline kiiruse suurusega, näiteks kiirus AB ehk $v = 3\frac{m}{sek}$.

1. Jalamees käib ühtlaselt 15 minutiga 1,25 km. Kui suur on tema kiirus $\frac{km}{h}$, $\frac{m}{min}$ ja $\frac{cm}{sek}$-tes?

2. Valguse kiirus on 300 000 $\frac{km}{sek}$. Mitme minutiga jõuab valgus Päikeselt Maani, kui Päikese kaugus Maast on 149 500 000 km? Vasta sama küsimus Kuu kohta, kui Kuu kaugus Maast on 384 400 km.

3. Mitu km liigub edasi 5 tunniga laev, mille sõidukiirus on 20 sõlme (1 sõlm $= 1852\frac{m}{h}$)?

4. Hääle kiirus on 342 $\frac{m}{sek}$. Millal kuuldub müristamine, kui välk sähvatas 3 km kaugusel?

5. Väljenda valguseaasta km-tes!

*** 5. Kiiruse mõiste ja üksuse tuletamine** [1]). Ühtlase liikumise kiirus on suurus, mille abil meie seda liikumist iseloomustame, kirjeldame. Meie kõigi otsekohese arusaamise järele on kiiruse suurus, k u i k õ i k t e i s e d t i n g i m u s e d e i m u u t u, võrdeline käidud teepikkusega ja pöördvõrdeline selleks kulutatud ajaga. Tarvitades endisi tähistusi, võime selle kiiruse omaduse üles kirjutada järgmiselt:

$$v = k\frac{s}{t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

kus k on n. n. v õ r d e t e g u r. Nagu näha, esineb valemis (1) kolm isesugust suurust: kaugus (s), aeg (t) ja kiirus (v). Et kõik need suurused on igaüks täiesti ise liiki ja me võime nende mõõtüksusi vabalt valida, siis ei tarvitse valemi (1) ühe poole arvsuurus sugugi igal juhul võrduda teise poole arvsuurusega. Võrdeteguri k, kui n i m e t a arvu, ülesanne seisabki selles, et valemi (1) mõlemate poolte arvsuurusi võrrandada. Ilma võrdetegurita pole meil võimalust üles kirjutada võrdelisust võrdusmärgi abil.

Tahame, et valem (1) omaks hästi lihtsat kuju, siis anname võrdetegurile k kõige lihtsama väärtuse, nimelt 1. Nüüd võime valemi (1) kirjutada ümber nõnda:

$$v = \frac{s}{t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Saadud võrdust võime vaadelda kui võrrandit ühe otsitavaga. Järjelikult võime v a b a l t valida valemis esinevate mistahes kahe suuruse (kas s ja t, s ja v või v ja t) mõõtüksused, kuna ülejäänud kolmanda suuruse mõõtüksus p e a b olema nõnda valitud, et võrdus jääks püsima. Muidugi on siin kõige

[1]) M ä r k u s. Tähekesega (*) märgitud § § või nende osad on mõeldud käsitlemiseks ainult reaalharus.

otstarbekohasem vabalt valida meile juba varemini tuntud kauguse ja aja mõõtüksused.

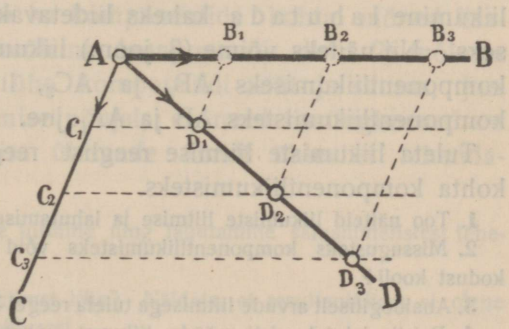
Valemist (2) järgneb: kui $s=1$ ja $t=1$, siis peab olema ka $v=1$. Tähendab: kiiruse üksuseks on niisuguse keha kiirus, kus keha ühe ajaüksuse jooksul ühe kauguseüksuse võrra edasi läheb.

Niisugune üksustevalik osutub väga otstarbekohaseks, sest ta võimaldab meil uue suuruse, antud juhul kiiruse, mõõtüksust tuletada juba varemini tuntud suuruste, antud juhul kauguse ja aja, mõõtüksuste abil.

Ka kiiruse üksuse nimetus tuletatakse kauguse ja aja üksuste nimetuste abil. Kui näiteks kiiruse suuruse leidmisel on kaugus mõõdetud cm-tes ja aeg sek-tes, siis mõõtub kiirus $\frac{cm}{sek}$-tes, see tähendab, et kiiruse mõõtmisel on selj uhul võetud üksuseks niisuguse keha kiirus, kus keha iga sekundi jooksul ühe cm võrra edasi läheb. Peab kindlasti meeles pidama, et kiirust võib mõõta ainult kiiruse üksusega, kaugust kauguse üksusega jne.

Sedaviisi tuletatud liitüksustega võib käia ümber kui matemaatiliste suurustega ja teha nendega samasuguseid tehteid kui arvudega. Näiteks: kui keha kiirus on $v\frac{cm}{sek}$, siis t sek jooksul liigub see keha edasi $vt\ \frac{cm \cdot sek}{sek} = vt$ cm jne.

6. Liikumisteede liitmine ning lahutamine. Teeme järgmise katse. Tõmbame kriidiga ühtlaselt mööda joonlaua äärt AB noole sihis alates A otsast (3. joon.). Joonlauda aga nihutame edasi ühtlaselt ning rööbiti oma esialgsele sihile AB nõnda, et joonlaua ots A asuks alati sirgel AC. Kui mõlemad liikumised samal momendil algavad, siis näeme, et kriidi tee tahvli suhtes, nii suuruse kui sihi poolest, on sirge AD, mille määrab ära kahe antud liikumise (kriidi ja joonlaua) kui külgede põhjal joonestatud rööpküliku diagonaal.

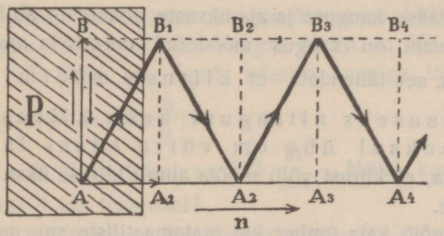


3. joon. Liikumisteede liitmine.

Samale tulemusele jõuame käsitledes küsimust ka geomeetriliselt. Kui joonlaud paigal seisaks, siis oleks kriiditükk edasi liikudes

esimese ajavahemiku lõpul punktis B_1, joonlaud aga liigub ja kannab kriiditüki esimese ajavahemiku lõpuks punkti D_1; samuti võime näidata, et teise ajavahemiku lõpul peab kriiditükk asuma punktis D_2 jne.

Kõikide kriiditüki asendite (D_1, D_2, D_3, jne.) geom. kohaks on sirge AD. Tõenda seda kolmnurkade sarnasuse põhjal!



4. joon. Liikumisteede liitmine liikuval parvel.

Liikumisteede liitmise näitena vaatame veel järgmise juhu. Parv P (4. joon.) liigub ühtlaselt noole n sihis. Parvel jalutab reisija ühtlaselt edasi-tagasi joonel AB. Selle aja sees, kui reisija jõuab A-st B-sse, liigub parv edasi AA_1 võrra ja reisija ei asu selle tõttu enam mitte B-s, vaid punktis B_1. Sedaviisi edasi arutades näita, et reisija tee jõe suhtes on $AB_1A_2B_3A_4$.

Kui on võimalik kaks antud liikumist liita üheks liit- ehk resultantliikumiseks, siis ümberpöördult on samuti võimalik antud liikumine l a h u t a d a kaheks liidetavaks ehk komponentliikumiseks. Nii näiteks võime (3. joon.) liikumise AD_3 lahutada kaheks komponentliikumiseks AB_3 ja AC_3, liikumise AB_1 (4. joon.) komponentliikumisteks AB ja AA_1 jne.

Tuleta liikumiste liitmise reeglist reegel liikumiste lahutamise kohta komponentliikumisteks.

1. Too näiteid liikumiste liitmise ja lahutamise kohta!

2. Missugusteks komponentliikumisteks võid lahutada oma liikumise tee kodust kooli?

3. Analoogiliselt arvude liitmisega tuleta reegel 3, 4 jne. liikumise liitmise kohta!

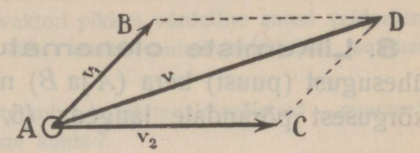
4. Reisija jalutab risti mööda liikuvat vagunit edasi-tagasi. Missugune on reisija tee vaguni suhtes?

5. Näidata, et ühtlaste sirgjooneliste liikumiste liitmisel saadud resultantliikumine on samuti ühtlane ja sirgjooneline.

7. Kiiruste liitmine ning lahutamine. Jõe voolu kiirus on $0{,}6\ \frac{m}{sek}$, sõudja kiirus seisvas vees $1{,}8\ \frac{m}{sek}$. Leida sõudja kiirus kalda suhtes päri- ja vastuvett sõudes.

Too näiteid sama- ja vastusihiliste liikumiste liitmise kohta ning tuleta reegel nende liitmiseks!

Et kiirus näitab ühe ajaüksuse jooksul liikumisel käidud teed oma sihi ja suuruse poolest, siis on liikumisteede liitmise reegel maksev ka kiiruste liitmisel, s. o. kahest liikumisest koosneva liit- ehk resultantliikumise kiirus (v) võrdub alati oma suuruse ja sihi poolest liidetavate ehk komponentliikumiste kiiruste (v_1 ja v_2) kui külgede põhjal joonistatud rööpküliku diagonaaliga (5. joon.).



5. joon. Kiiruste rööpkülik.

Ümberpöördult liitmisele on vahel tarvis lahutada antud kiirus (v) kaheks komponendiks, s. o. leida kaks niisugust kiirust (v_1 ja v_2), mille resultant oleks antud kiirus (5. joon.). Nagu liitmise reeglist selgub, tuleb kiiruse lahutamisel, kui liitmisele ümberpöördud tegevusel, ehitada rööpkülik antud diagonaali AD põhjal. Tipust A väljaminevad küljed AB ja AC ongi otsitavad komponentkiirused. Et antud diagonaali põhjal, kui pole teisi lisatingimusi, saab ehitada lõpmata palju rööpkülikuid, siis tuleb ülesande piiramiseks anda ka komponentide kohta mõned lisatingimused. Näiteks: 1) mõlema komponendi siht; 2) mõlema komponendi suurus; 3) ühe komponendi siht ja suurus, jne. Näita kolmnurkade ehitamise põhjal, et need lisatingimused on piisavad kiiruse lahutamise ülesande ainult ühteviisi lahendamiseks.

1. Mispoolest erineb kiiruste liitmine ning lahutamine samanimelistest tehetest aritmeetikas?

2. Kuidas tuleks 3, 4 jne. kiirust liita? Näidata, et resultantkiirus ei olene komponentkiiruste liitmise järjekorrast.

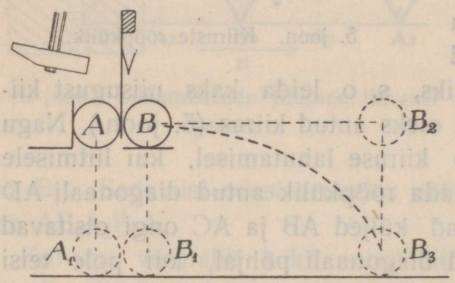
3. Kõva läänetuulega ($v_1 = 15 \frac{m}{sek}$) sõidab aeroplan lõuna sihis kiirusega $v = 40 \frac{m}{sek}$. Leida aeroplani omaliikumise siht ja kiirus!

4. Kas on võimalik ujuda risti üle jõe, kui voolu kiirus on $5 \frac{km}{h}$, ujuja kiirus seisvas vees aga $4 \frac{km}{h}$?

5. Jõe laius on 72 m, voolu kiirus 1,2 $\frac{m}{sek}$, sõudja kiirus seisvas vees 1,5 $\frac{m}{sek}$. Kui palju tarvitab sõudja aega, et kõige lühemat teed pidi kord üle jõe ja tagasi sõita? Mis sihis tuleks hoida lootsik, et kõige kiiremini (mitme sekundiga?) teisele kaldale jõuda? Missugune on viimasel juhul sõudja tee kalda suhtes?

6. Antud kiirus lahutada kaheks komponendiks, mis oleksid suuruselt antud kiirusega ühesugused.

8. Liikumiste olenematuse printsiip. Võtame kaks ühesugust (puust) kera (*A* ja *B*) ning laseme neil mõlemil samast kõrgusest põrandale langeda (6. joon.). Kera *A* laseme vabalt püsti alla langeda, kuna kera *B*-le anname langemise alguse momendil rõhtsihilise tõuke, mille mõjul kera *B* liigub mööda kõverjoont BB_3. Katse näitab, et mõlemad kerad jõuavad põrandale samal momendil. Sellest järeldame, et keha liikumine püstsihis (langemine) ei olene sama keha liikumisest rõhtsihis, üks liikumine ei sega teist. Ka liikumiste (kiiruste) liitmisel rööpküliku reegli põhjal on aluseks sama n. n. liikumiste olenematuse põhimõte ehk printsiip, mille järele keha liikumine mõne teise keha suhtes ei olene sellest, missugustest teistest liikumistest see keha osa võtab. Näiteks ühtlaselt liikuval laeval (rongil) võib sama hästi palli mängida, märki lasta jne. nagu seisvalgi. Samuti ei olene liikumised meie Maa suhtes viimase liikumisest.



6. joon. Liikumiste olenematus.

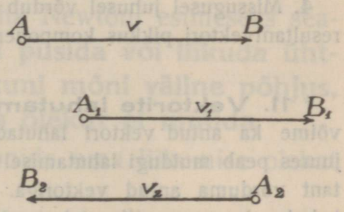
9. Skalaarsed ja vektorilised suurused. Kõik füüsikalised suurused võime jagada kahte liiki: skalaarseteks ja vektorilisteks suurusteks. Esimeste hulka kuuluvad näiteks: mass, erisoojus, valgustuse tugevus jne. Nende väärtuste täpseks määramiseks on küllalt vastusest küsimusele: kui palju? Keha mass on 5 kg, aine erisoojus on 0,03 kalorit grammi kohta, pinna valgustuse tugevus 10 meeterküünalt jne. Teiste, s. o. vektoriliste suu-

ruste väärtuste täpseks määramiseks on vähe vastusest küsimusele „kui palju?“, vaid peame sellele lisaks veel andma vastuse küsimusele „mis sihis?“ Niisuguste suuruste hulka kuuluvad kiirus, kiirendus, tung jne. Tõepoolest, sellest on veel vähe, kui teame, et tuule kiirus on $5\frac{m}{sek}$, tarvis ka teada, mis sihis tuul puhub; samuti ei olene tungi mõju kehasse mitte ainult tungi suurusest, vaid ka tungi mõjumise sihist jne.

Skalaarsete suuruste väärtuste täpne tähistamine on võimalik arvude abil, vektoriliste suuruste väärtuste tähistamiseks kasutatakse *nooli* ehk n. n. *vektoreid*. Selle juures võetakse vektori pikkus võrdeline antud vektorilise suuruse arvsuurusega, kuna vektori siht vastab antud vektorilise suuruse sihile.

Kas on võimalik skalaarsete suuruste kohta tarvitatavaid mõisteid: „suurem“, „vähem“ üle kanda vektoriliste suuruste kohta?

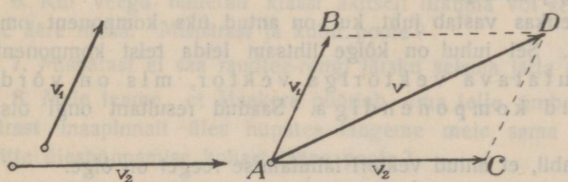
***10. Vektorite liitmine.** Olgu näiteks (7. joon.) meile antud vektor AB ehk v. Punkt A loetakse vektori alguseks, B — lõpuks. Nimetame kaks vektorit, näiteks AB ja A_1B_1 *võrdseteks* ehk *ühevääriliseks*, kui nad on: *rööpsed*, *samasihilised* ja *ühepikkused*, hoolimata sellest, kus asub nende vektorite alguspunkt. *Võrdvastupidisteks* nimetame vektorid, mis on *rööpsed*, *vastassihilised* ja *ühepikkused*, näiteks AB ja A_2B_2.



7. joon. Võrdsed ja võrdvastupidised vektorid.

Kahe antud *vektori summaks* ehk resultandiks nimetatakse antud vektorite ehk komponentide kui külgede põhjal joonistatud rööpküliku diagonaal. Nii näiteks (8. joon.) on selle definitsiooni põhjal vektor v_1 ja vektor v_2 summaks vektor v, s. o.

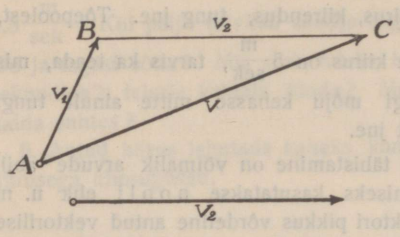
$$v_1 + v_2 = v.$$



8. joon. Vektorite summa.

Joonisest selgub, et diagonaali AD määramiseks pole mitte tarvis ehitada täit rööpkülikut, vaid selleks jätkub △-st ABD ehk △-st ACD. △ ABD on kõige hõlpsam ehitada, kui punktist B (vektori v_1 lõpust) joonistame vektori BD, mis on võrdne teise antud vektoriga v_2. Sellega saame kahe vektori liitmiseks väga lihtsa n. n. *kolmnurga reegli* (9. joon.):

Kahe antud vektori (v_1 ja v_2) summa leidmiseks ehitame ühe antud vektori, näiteks v_1, lõpust (B) vektori, mis on võrdne teise antud vektoriga (v_2). Selle lõpu (C) ühendame esimese vektori algusega (A). Sedaviisi saadud vektor (v) ongi otsitav summa ehk resultantvektor.



9. joon. Vektorite summa leidmine kolmnurga reegli abil.

Mitme antud vektori liitmisel liidame neist kaks esimest, saadud summaga liidame kolmanda vektori jne.

Vektorite liitmine nimet. sagedasti ka geomeetriliseks liitmiseks vastandina aritmeetilisele liitmisele.

1. Näidata, et vektorite liitmise resultaat ei olene liitmise järjekorrast.

2. Võrrelda aritmeetilist liitmist geomeetrilise liitmisega!

3. Kuidas on võimalik kasutada kolmnurga reeglit hulga vektorite liitmisel?

4. Missugusel juhusel võrdub kahe pikkuselt võrdse vektori liitmisel saadud resultantvektori pikkus komponentide pikkusega?

* **11. Vektorite lahutamine.** Analoogiliselt lahutamisele aritmeetikas võime ka antud vektori lahutada kaheks või rohkem komponendiks. Selle juures peab muidugi lahutamisel saadud komponentvektorite summa ehk resultant võrduma antud vektoriga. Geomeetrilisest küljest pole antud vektori kaheks komponendiks lahutamine muud midagi kui rööpküliku ehitamine, mille diagonaal võrduks antud vektoriga; antud vektori algusest välja minevad rööpküliku küljed ongi otsitavad komponendid.

Et antud diagonaali põhjal on võimalik ehitada lõpmata hulk rööpkülikuid, siis tuleb antud vektori komponentideks lahutamisel anda komponentide kohta mõned lisatingimused, mis küsimust ainult ühteviisi lubavad lahendada; näiteks: komponentide siht, pikkus jne.

Lahutamisele aritmeetikas vastab juht, kui on antud üks komponent oma sihi ja suuruse poolest. Sel juhul on kõige lihtsam leida teist komponenti järgmiselt: liita lahutatava vektoriga vektor, mis on võrdvastupidine antud komponendiga. Saadud resultant ongi otsitav teine komponent.

Näidata rööpküliku abil, et antud vektori lahutamise reegel on õige.

Harjutada △-reegli abil vektorite liitmist ja lahutamist.

Lahutada antud vektor kaheks komponendiks, kui on antud: a) komponentide sihid; b) komponentide suurused; kas on sel juhul ülesanne alati võimalik? c) ühe komponendi siht ja teise suurus.

Tung ja selle liitmine ning lahutamine.

12. Inerts. Igapäevaste nähtuste tähelepanemisest teame, et ükski paigalolev keha ei hakka liikuma ilma põhjuseta — iseenesest. Nii, näiteks, paigalolev raamat laual või kivi põllul ei hakka enne liikuma, kui ta saab mingisuguse tõuke, mis ta paigalolekust välja viib; jaamaesisel seisev rong ei hakka enne liikuma, kui vedur teda tõmbab, jne.

Samuti teame, et ükski liikuv keha ei jää seisma iseenesest, ilma põhjuseta, ega muuda oma liikumissihti ega kiirust. Tahame kiire jooksu pääl äkki seisma jääda või kõrvale pöörduda, peame tarvitama kaunis tugevat lihaste pingutust; raudtee-rongi seismajätmiseks tarvitatakse pidurit; maad mööda veerev kivi jääb seisma hõõrumise mõjul jne.

Need kaks kehade omadust võttis Newton kokku järgmises lauses, mida nimetatakse inertsi ehk Newtoni esimeseks seaduseks: **iga keha püüab kas paigal püsida või liikuda ühtlaselt ja sirgjooneliselt niikaua, kuni mõni väline põhjus, mille meie tungiks nimetame, seda olekut ei muuda.**

See üldine kehade omadus alal hoida oma liikumise olekut nimet. **inertsiks.**

1. Kui sõiduriist äkitselt liikuma hakkab, langevad reisijad tahapoole. Äkitselt seismajäämisel sünnib vastupidine nähtus. Mispärast?
2. Kuidas tuleb liikuvalt sõiduriistalt maha hüpata?
3. Mispärast tuleb tolm kloppimisel riiete seest välja?
4. Mispärast koputatakse varre pihta kirvest või luuda varre otsa pannes?
5. Mispärast on hobusel raske paigalolevat koormat liikuma tõmmata?
6. Kui veega täidetud klaasi äkitselt liikuma või seisma panna, läheb vett üle ääre maha. Mispärast ja kuhu poole?
7. Mispärast ei saa raudtee-rongi järsku seisma jätta ega liikuma panna?
8. Meie teame, et Maakera pöörleb oma telje ümber läänest idasse. Mispärast maapinnalt üles hüpates langeme meie sama koha pääle tagasi, aga mitte üleshüppamise kohast lääne poole?

13. Tung ja selle mõõtmine. Inertsiseaduse põhjal püüab iga keha oma liikumise olekut alal hoida.

Kui siiski keha liikumise olek muutub, siis peab selleks põhjus olema. Inertsi seaduse põhjal nimetame tungiks põhjuse, mis paigaloleva keha liikuma paneb või juba

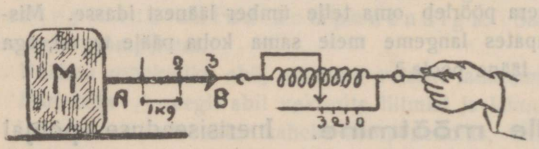
olemasolevat liikumist sihi või kiiruse suuruse poolest muudab.

Meile tuntud liikumise muutumise põhjused ehk tungid on: inimeste ja loomade lihaste tung, raskustung, magneti- ja elektritung, vetruvustung, hõõrumistung jne.

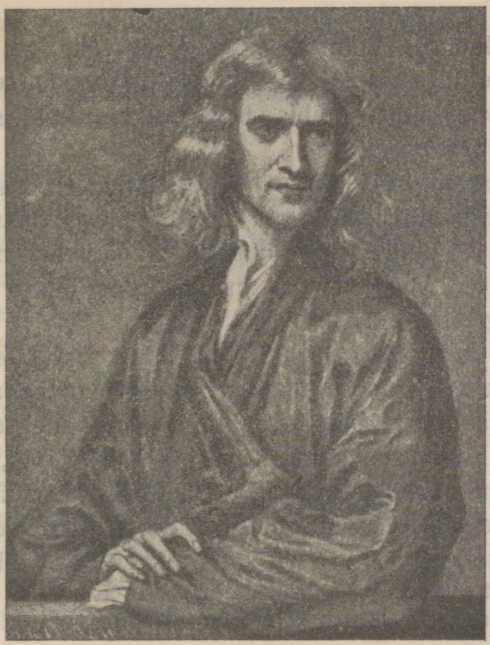
Tung ei muuda ainult keha liikumise olekut, vaid tungi mõjul võib muutuda ka keha kuju, s. o. tung võib tekitada kehas deformatsiooni. Nii näiteks võime tungi mõjul keha pikemaks venitada, kokku suruda, painutada jne. Deformatsiooni suuruse põhjal otsustame ka deformeeriva tungi suuruse üle. Sellel omadusel põhjenebki raskustungi mõõtmine vedrukaalu abil, sest teatud piirides on vedru pikenemine võrdeline venitava tungi suurusega. Nagu teame, mõõdetakse raskustungi suurust kaaluüksuste (kg, g jne.) abil. Kõiki teisi tunge aga võime raskustungiga võrrelda, järjelikult kaaluüksustes mõõta. Nii näiteks võime ütelda, et antud magnetitungi suurus teatud kaugusel oleva rauatüki külgetõmbamisel on 10 g, hõõrumistungi suurus kelgu liugumisel 5 kg, lihastetungi suurus kivitõstmisel 10 kg jne.

Riistu, mille abil saab tungi suurust mõõta, nimet. dünamomeetriteks. Selleks otstarbeks võib tarvitada iga kaalu.

14. Tungi graafiline kujutamine. Katsed näitavad, et tungi mõju kehasse oleneb tungi suurusest ja ka sellest, kus kohas ja missuguses sihis antud tung mõjub kehasse. Keha punkti, milles tung otsekohe mõjub, püüdes teda liikuma panna või olemasolevat liikumist muuta, nimet. **tungi rakenduspunktiks;** sihti, milles tung rakenduspunkti liikuma püüab panna — **tungi sihiks.** Nii siis, tung on täiesti teada, kui on antud tema **rakenduspunkt, siht** ja **suurus.** Kõiki neid kolme tungi tunnust on võimalik näitlikult kujutada graafiliselt. Selleks valime noole AB (10. joon.), mille algus asub antud tungi rakenduspunktis A, siht näitab antud tungi sihti ja pikkus mahutab eneses nii mitu mõõtu, kui mitu tungiüksust on antud tungi suuru-



10. joon. Tungi graafiline kujutamine.



Isaac Newton, 1643—1727.

Kuulus inglise matemaatik ja füüsik. Õppis Cambridge'i ülikoolis matemaatikat, pärast 30 aastat matemaatika professoriks säälsamas. Hiljemini kuni surmani Kuningliku Rahapaja ülem Londonis ja Kuningliku Seltsi *(Royal Society)* president. Newtoni pääteos *„Philosophiae naturalis principia mathematica"*, milles ta põhjendab mehaanika liikumisseadustega ja gravitatsiooniseadusega paneb aluse taeva mehaanikale, ilmus 1686. Valguse emanatsiooniteooria ja differentsiaal- ja integr.-arvutuse põhjendaja, peegelteleskoobi ja sekstandi leiutaja.

ses. 10. joon. kujutab nool AB tungi, mille suurus on 3 kg ja mis mõjub antud kehasse M rakenduspunktis A noole AB sihis.

Eelöeldust järgneb, et tung on vektoriline suurus, järjelikult peab ka tungide liitmine ja lahutamine sündima vektorite liitmise ja lahutamise jaoks antud reeglite põhjal.

15. Tasakaal. Võtame kätte kivi. Kivi tungib raskuse mõjul Maa poole, kuid ei saa mitte alla langeda, sest käe lihaste tung mõjub vastupidises sihis ja hoiab **tasakaalus** kivi raskustungi. Kivi jääb paigale.

Raudtee-rong liigub ühtlaselt ja sirgjooneliselt. Vedur tõmbab järjest ühteviisi, kuid kiirus ei suurene, sest veduri tõmbetung kulub selleks, et hoida tasakaalus kõiki rongi liikumise takistusi, nagu hõõrumist, õhu takistust jne., ja rong liigub inertsi mõjul ühtlaselt ning sirgjooneliselt.

T u n g i d o n t a s a k a a l u s, k u i n a d e i m u u d a k e h a l i i k u m i s e o l e k u t: paigalolev keha jääb tungide mõju pääle vaatamata paigale, ühtlaselt sirgjooneliselt liikuv keha jätkab oma liikumist samal viisil. — Kaks tungi, mis hoiavad tasakaalus ehk tasakaalustavad teineteist vastastikku, peavad olema võrdsed suuruse poolest, sihi poolest aga otse vastupidised ning nimet. sellepärast v õ r d v a s t u p i d i s t e k s.

1. Too näiteid tasakaalustatud tungide kohta!
2. Kuidas kujutada graafiliselt võrdvastupidiseid tunge?

16. Newtoni mõju ja vastumõju seadus. Päkaga vastu lauda rõhudes (tee seda!) tunneme, et ka laud päkka rõhub. Vedrukaalu abil teist vedrukaalu välja venitades näeme, et mõlemad vedrud on alati sama tugevasti välja venitatud. Kui lootsikul olles teist lootsikut nööriga esimese poole tõmmata, siis hakkab ka esimene teise poole liikuma. Kõik need katsed näitavad, et meie e i s a a a i n u l t ü h t t u n g i t e k i t a d a. Iga kord kui mõnda kehasse hakkab mõjuma mingisugune tung (aktsioon), siis tingimata peab kuskil leiduma mõni t e i n e keha, millesse mõjub teine tung, mis on suuruselt esimesega ühesugune, kuid sihilt otse vastupidine (reaktsioon). Lühidalt kokku võttes võime öelda: **igale mõjule (aktsioon) on alati olemas võrdvastupidine vastumõju (reaktsioon).**

See tungide üldine omadus kuulub mehaanika põhilausete hulka ja on tuntud Newtoni III seaduse nime all.

1. Kumb tõmbab tugevamini teist oma poole: kas Maa kivi või kivi Maad? Vasta sama küsimus Päikese ja Maa ning Maa ja Kuu kohta!

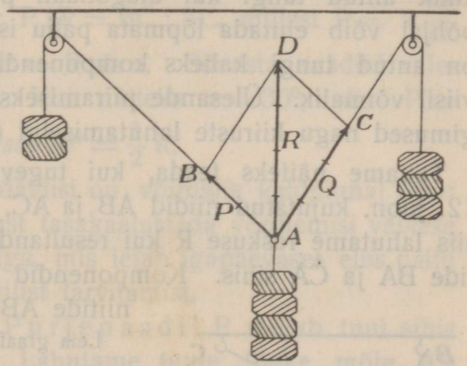
2. Kas võib üks keha anda teisele tugevama hoobi, kui ta ise suudab välja kannatada?

3. Kas on aktsioon ja reaktsioon rakendatud samas punktis või mitte?

4. Püssilaskmisel põrkab pära tagasi. Millest see tuleb?

5. Jälgi aktsiooni ja reaktsiooni koormavedamisel!

17. Tungide liitmine. Kui mitu tungi samas sihis mõjuvad, siis on neid kerge liita, s. o. leida niisugune tung, mis üksinda antud kehasse samasugust mõju avaldab kui kõik antud tungid kokku. Antud tungid nimet. **liidetavateks** ehk **komponentideks,** liitmise resultaat — **resultandiks.** On selge, et ühes sihis mõjuvate 2 kg ja 3 kg kui komponentide resultant on 2+3, s. o. 5 kg. Järjelikult, samasihiliste komponentide resultant võrdub komponentide summaga.



11. joon. Tungide rööpkülik.

Võtame nüüd kaks tungi: P = 2 kg ja Q = 3 kg, mis on rakendatud mõlemad samas punktis A (11. joon.), kuid nende sihid moodustavad nurga BAC. Katse näitab, et niisugusel juhul on antud tungide P ja Q resultant R oma sihi ja suuruse poolest P ja Q kui külgede põhjal joonistatud rööpküliku diagonaal.

1. Näita, et 11. joon. kujutatud katse vastab sellele reeglile.

2 Kuidas oleneb resultandi R suurus komponentide vahel olevast nurgast?

3. Kuidas tuleks samas punktis rakendatud 3 ja enam tungi liita?

4. Näita graafiliselt, et mitme komponendi liitmisest saadud resultant ei olene komponentide liitmise järjekorrast.

5. Leia graafiliselt järgmiste komponentide P ja Q resultandid, kui komponentide ja nende vahel oleva nurga A suurused on:

a) $P = 3$ kg, $Q = 4$ kg, $A = 90^0$;

b) $P = Q = 5$ kg, $A = 120^0$;

c) $P = 5$ g, $Q = 12$ g, $A = 90^0$;

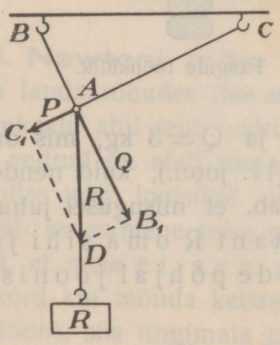
d) $P = 4$ kg, $Q = 6$ kg, $A = 60^0$.

6. Rakenduspunktis A mõjuvad 4 tungi: põhjasihis $P_1 = 17$ kg, idasihis $P_2 = 12$ kg, lõunasihis $P_3 = 13$ kg ja läänesihis $P_4 = 9$ kg. Leia sihi ja suuruse poolest nende resultant P.

7. Jälgi, kuidas muutub samas punktis rakendatud kahe võrdse komponendi resultant nende vahel oleva nurga muutudes.

18. Tungide lahutamine. Antud tungi kui resultandi lahutamisel kaheks komponendiks ehk liidetavaks tuleb talitada täiesti analoogiliselt kiiruste lahutamisele, s. o. joonistada rööpkülik antud tungi kui diagonaali põhjal. Et sama diagonaali põhjal võib ehitada lõpmata palju isesuguseid rööpkülikuid, siis on antud tungi kaheks komponendiks lahutamine väga mitmel viisil võimalik. Ülesande piiramiseks tuleb anda mõned lisatingimused nagu kiiruste lahutamiselgi (missugused nimelt?).

Tahame näiteks teada, kui tugevasti on pingule tõmmatud 12. joon. kujutatud niidid AB ja AC, mille otsas ripub raskus R, siis lahutame raskuse R kui resultandi kaheks komponendiks niitide BA ja CA sihis. Komponendid P ja Q näitavadki otsitavat niitide AB ja AC pingulolekut.



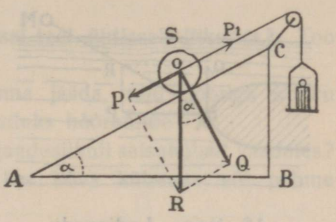
12. joon. Tungi lahutamine.

Leia graafiliselt P ja Q suurus, kui $R = 13$ kg.

Nagu nägime, võib tungi väga mitmel viisil lahutada komponentideks; üldise reeglina tuleb juhul, kui keha liigub tungi mõjul, antud tung lahutada harilikult kaheks komponendiks nõnda, et ühe komponendi sihiks on võetud keha liikumissiht, kuna teise komponendi siht on sellega risti.

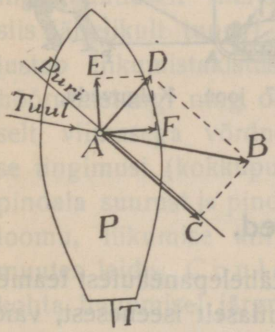
Tungide liitmise ja lahutamisega tuleb füüsikas väga sagedasti teotseda. Näitena rakendame saadud teadmised mõne meile tuntud nähtuse seletamiseks.

a. Olgu kaldpinnal AC, mis moodustab rõhtpinnaga AB nurga α (13. joon.), raske silinder S. Lahutame silindri raskustungi R kui resultandi kaheks komponendiks: P ja Q. Komponent P on kaldpinnaga paralleelne ja püüab alla veerema panna silindrit mööda kaldpinda, komponent Q on kaldpinnaga risti ja rõhub ainult silindrit vastu kaldpinda. Tahame, et silinder kaldpinnal paigal püsiks, tuleb meil tasakaalustada ainult komponenti P, kuna komponent Q kaldpinna vasturõhumisega isegi on tasakaalustatud. Kolmnurkade sarnasuse põhjal (täisnurksed kolmnurgad, mille üks teravnurk võrdne) võime kirjutada: $P : R = BC : AC$, millest $P = R\frac{BC}{AC}$ ehk $P = R \sin \alpha$. Sõnasta saadud valemid! Kui näiteks $\alpha = 30^0$, siis $P = R \sin 30^0 = \frac{1}{2} R$.



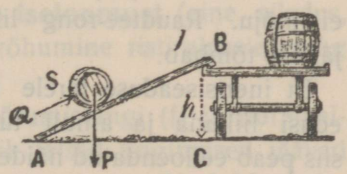
13. joon. Kaldpind.

Sedaviisi on võimalik kaldpinnal suurt raskust tasakaalustada võrdlemisi väikese tungiga, mis leiab igapäevases elus palju praktilist tarvitamist.



14. joon.

b. Purjepaadil P mõjub tuul sihis AB. Lahutame tuule tõuke mõju AB kaheks komponendiks: purje sihis (AC) ja sellega risti (AD). Paati edasi viia võib ainult purjega risti komponent AD. Lahutame viimase omakorda kaheks komponendiks: paadi sihis (AE) ja sellega risti (AF). Viimase mõju hävib kiili ja tüüri vastumõjuga, kuna komponent AE lootsiku liikuma paneb.

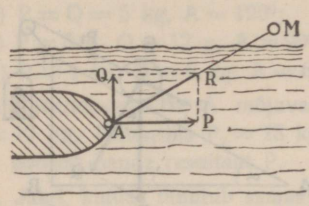


15. joon. Vaadi veeretamine.

1. Mõõda ära 15. joon. kujutatud kaldpinna pikkus ja kõrgus ning arvuta, kui suur peab olema tung Q, mis hoiaks tasakaalus vaadi S, mille raskus $P = 160$ kg.

2. Lodjamees veab lotja vastuvett üles (16. joon.). Selleks tõmbab ta kaldal (M) nöörist. Lahutame lodjamehe tõmbetungi R komponentideks P ja Q.

Kuidas oleneb komp. P suurus Q-ga võrreldes lodja liikumise sihi ja nööri sihi vahel olevast nurgast? Mis sihis oleks kõige kasulikum tõmmata?



16. joon. Lodjavedu.

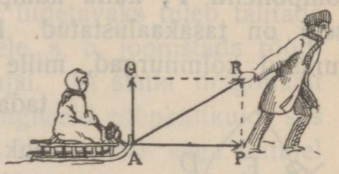
3. Analoogiliselt eelmisele ülesandele seleta 17. joon. kujutatud kelguvedu. Leia graafiliselt P ja Q suurus, kui R = 6 kg. Mis sihis oleks kõige kergem vedada? Kas komponent Q kergendab liikumist?

Kuidas tuleb hobune vankrile rakendada, et kõige kergem oleks vedada? Kas tuleb siin arvestada teed?

4. Tung 10 kg lahutada kaheks vastastikku risti komponendiks, milledest üks oleks 6 kg.

5. Pilt ripub vertikaalselt seinal kahe niidi abil naela otsas. Leida niidi pinevus, kui pilt kaalub 2 kg ja niidid moodustavad pildi ülemise äärega võrdkülgse kolmnurga.

6. Tung 8 kg lahutada kaheks vastastikku risti komponendiks, milledest üks oleks teisest 3 korda suurem.



17. joon. Kelguvedu.

Liikumise takistused.

19. Hõõrumistung. Igapäevase elu tähelepanekutest teame, et ükski liikuma pandud keha ei liigu ühtlaselt iseenesest, vaid liikumise kiirus kahaneb järjest ja keha jääb varssi seisma. Nii näiteks tasast maapinda mööda visatud kivi, rõhtsal pinnal rööbastel liikuma pandud vagun, uisutaja, pöörlev hooratas, veepinnal liikuma tõugatud paat jne. -- kõik nad kaotavad varssi oma liikumise ja jäävad seisma, kui liikuma panev tung enam ei mõju. Raudtee-rong liigub ühtlaselt ainult siis, kui vedur järjest tõmbab.

Et inertsiseaduse järele iga liikuv keha püüab sama kiirusega edasi liikuda ja ainult tung võib keha liikumise olekut muuta, siis peab eelloendatud näidetes mõjuma tung, mis liikumist takistab. Kui tahame, et keha, mis mööda teise keha pinda liigub või veereb, liiguks ühtlaselt, siis peame ületama selle keha liikumistakistused ehk n. n. hõõrumistungi. Tuleb silmas pidada, et hõõrumistung tekib ainult kehade liikumisel ja

on alati sihitud vastu liikumissihile. Ta on tingitud kehade kokkupuute-pindade konarusest, mis tungivad üksteise vahele ja takistavad liikumist.

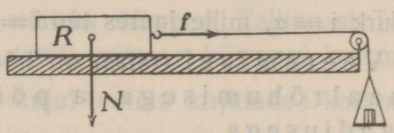
1. Mis ületab hobune koormavedamisel rõhtsal teel ühtlaselt liikudes? Too veel samalaadilisi näiteid!

2. Kas oleks võimalik liikuma hakata, seisma jääda, asju nööriga kokku siduda, naelu ja kruvisid tarvitada jne., kui puuduks hõõrumine?

3. Mis tähtsus on häädel maanteedel rahvamajanduslikult seisukohalt vaadates?

4. Millal on hõõrumistung talvel väiksem: kas kõva külmaga või pehme ilmaga ja mispärast?

20. Hõõrumisseadused. Asetame ühtlasele rõhtsale pinnale rööptahuka (R), mille raskus N, ja vaatame, kui suurt tungi (f) läheb tarvis, et rööptahukas väikese tõuke mõjul hakkaks ühtlaselt liikuma mööda aluspinda (18. joon). Kui rööptahukas liigub ühtlaselt inertsi mõjul, siis järjelikult tung f tasakaalustab liikumistakistused ehk hõõrumistungi ning on suuruselt viimasega võrdne. Katse tingimusi (kokkupuutumise pindala suurust ja pindade iseloomu, liikumise kiirust, normaalrõhumise suurust) mitut viisi muutes leidis Coulomb (1736—1806) katseliselt hõõrumise kohta liugumisel järgmised seadused:



18. joon. Hõõrumine liugumisel.

Hõõrumistungi suurus liugumisel:

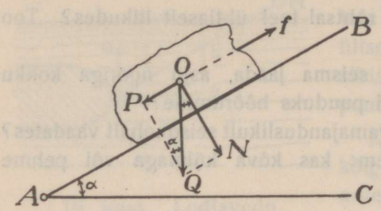
1. **ei olene** hõõruvate kehade kokkupuute **pindadest** ning liikumise **kiirusest,** küll aga on liikumise kestel hõõrumistung vähem kui liikumahakkamise momendil;

2. **oleneb kokkupuute- pindade iseloomust** (aine, siledus, määrimine) ja **normaalrõhumisest** (rõhumine risti alusele) ning on sellega **võrdeline.**

Viimasest seadusest järgneb, et hõõrumistungi (f) ja normaalrõhumise (N) suhe on jääv, kui kõik teised tingimused jäävad samaks. Nimetame selle jääva suhte suuruse (k) **hõõrumiskoeffitsiendiks,** s. o.

$$\frac{f}{N} = k, \text{ millest } f = kN.$$

Hõõrumiskoeffitsienti on kerge määrata n. n. h õ õ r u m i s n u r g a i abil (19. joon.). Olgu hõõrutav pind AB asetatud kaldu horisondile nurgi α. Lahutame keha raskuse Q kaheks komponendiks: normaalseks (N) ja paralleelseks (P). On selge, et $N = Q \cos \alpha$ ja $P = Q \sin \alpha$. Nurga α suurenedes suureneb ühtlasi komponent P. Suurendame nurka α seni, kui keha mööda kaldpinda hakkab ühtlaselt alla liuguma. Sel juhusel on hõõrumistung $f = P = Q \sin \alpha$ ja hõõrumiskoeffitsient



19. joon.

$$k = \frac{f}{N} = \frac{Q \cdot \sin \alpha}{Q \cdot \cos \alpha} = \tan \alpha.$$

Nurk $i = \alpha$, mille juures $\tan i = k$, nimet. hõõrumisnurgaks.

V e e r e m i s e l (ratas) on hõõrumistung v õ r d e l i n e n o r m a a l r õ h u m i s e g a ja p ö ö d v õ r d e l i n e veereva keha r a a d i u s e g a.

Üldse on hõõrumiskoeffitsient liugumisel (umbes 0,2 — 0,5) märksa suurem hõõrumiskoeffitsiendist veeremisel (umbes 0,01 — — 0,03).

Kokkupuute-pindade siledaks tegemise (poleerimise) ja määrimise abil on võimalik hõõrumiskoeffitsienti tublisti vähendada.

1. Kelk ühes kelgutajaga kaalub 80 kg. Kui tugevasti tuleb tasasel teel ühtlaselt edasi liikudes vedada, kui $k = 0{,}025$? Kas oleneb tõmbetugevus nurgast, mis moodustab nöör liikumissihiga?

2. Keha liigub ühtlaselt kaldlauda mööda alla, kui kaldenurk $\alpha = 20^0$. Leida hõõrumiskoeffitsient.

3. Liiva hõõrumiskoeffitsient vastu liiva on umbes 0,8. Kui järsku liivahunnikut saab sellest teha?

21. Keskkonna takistus. Õhk, vesi, samuti teised gaasid ja vedelikud, takistavad kehade liikumist neis. Juhul, kui keha liigub mõnes keskkonnas, räägime selle k e s k k o n n a t a k i s t u s e s t liikumisele. Keskkonna takistuse põhjuseks on keskkonna aineosakeste inerts, mis tuleb ületada, ja n. n. sisemine hõõrumine, mis tekib keskkonna aineosakeste liikumisel.

Keskkonna takistus oleneb keskkonnast enesest, samuti ka liikuva keha suurusest, kujust ja kiirusest. Üldse on keskkonna takistuse seadused võrdlemisi keerulised. Väikeste kiiruste puhul on keskkonna takistus enam-vähem võrdeline liikuva keha kiirusega, suuremate kiiruste puhul selle ruuduga, veel suuremate kiiruste puhul vähem kui ruuduga.

Mispärast langeb tolm väga aeglaselt alla?

Mitteühtlane sirgjooneline liikumine.

22. Keskmine kiirus. Mitteühtlasel liikumisel käib keha võrdsetes ajavahemikkudes (sek) mittevõrdsed teeosad. Selle liikumise iseloomustamiseks leiame n. n. **keskmise kiiruse,** jagades kogu käidud tee pikkuse tema ärakäimiseks tarvitatud ajaga. Kui näiteks kiirrong Tallinnast Tartu (190 km) sõitmiseks tarvitab 5 tundi, siis on kiirrongi keskmine kiirus $\frac{190}{5}$ ehk 38 $\frac{km}{h}$. Üldisel kujul võime kirjutada: keskmine kiirus $v_k = \frac{s}{t}$, millest $s = v_k t$ ja $t = \frac{s}{v_k}$. On selge, et keskmine kiirus iseloomustab liikumist ainult antud kauguse (Tallinna — Tartu) või aja (5 tundi) vahemikus. Ta näitab meile, missuguse kiirusega peaks liikuma keha ühtlaselt, et sama ajaga sama kaugust ära käia.

Järgnevas tabelis toome mõnede liikumiste keskmised kiirused:

Aeroplan	$\sim 180 \frac{km}{h}$	Kõva tuul	$\sim 12 \frac{m}{sek}$
Auto	$\sim 70 \frac{km}{h}$	Maa ümber Päikese	$\sim 30 \frac{km}{sek}$
Hobune sammu käies	$\sim 4 \frac{km}{h}$	Pääsuke	$\sim 60 \frac{m}{sek}$
Jalakäija	$\sim 5 \frac{km}{h}$	Tigu	$\sim 1{,}5 \frac{mm}{sek}$
Kahurikuul .	$\sim 600-800 \frac{m}{sek}$	Torm kuni	$\sim 50 \frac{m}{sek}$
Kiirrong	$\sim 80 \frac{km}{h}$	Traavel kuni . . .	$\sim 25 \frac{m}{sek}$

1. Leia enese hariliku käimise keskmine kiirus $\left(\frac{m}{sek}\right)$!
2. Kui palju tarvitaks kahurikuul aega Maa päält Päikeseni liikumiseks?

3. Leia enese tasku- või seinakella tunni- ja minutirao otsa liikumise keskmine kiirus!

4. Mitu korda liigub jalakäija teost kiiremini?

5. Kui palju liigub edasi tuul tormis 1 tunni jooksul?

6. Väljenda kõik eelmises tabelis antud kiirused $\frac{km}{h}$-is ja võrdle neid isekeskis!

23. Kiirus antud punktis. a. Vaba keha, millesse ei mõju mingi tung või millesse mõjuvad tungid on tasakaalus, püsib inertsiseaduse järele kas paigal või liigub ühtlaselt ja sirgjooneliselt. Järjelikult mitteühtlaselt võib keha liikuda ainult tungide mõjul, näiteks rong jaamast välja sõites veduri tõmbel, kivi alla langedes raskuse mõjul jne.

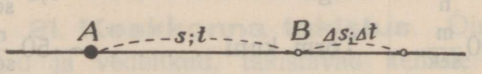
Liikugu antud keha tungide mõjul mitteühtlaselt. Oletame, et antud momendil lõpeks tungide mõju kehasse. Siis hakkaks keha edasi liikuma ainult inertsi mõjul ühtlaselt ja sirgjooneliselt kiirusega, mis oli kehal sel momendil, mil lõppes tungide mõju kehasse. Nimetame sedaviisi saadud kiiruse mitteühtlase liikumise kiiruseks antud momendil ehk antud teepunktis, sest igale momendile vastab teatud teepunkt.

Näitena võiksime vaadelda raudtee-rongi liikumist mõnel momendil ehk teepunktis. Kui sel momendil veduri tegevus seisma panna, liiguks rong ainult inertsi mõjul ühtlaselt kiirusega, mis oli rongil veduri tõmbe lõppemise momendil. Tegelikult ei ole see mitte päris õige, sest meie ei saa ühegi liikumise puhul täiesti vabaneda liikumise takistustest, mis kiirust vähendavad.

Nimetame liikumise, kus kiirus järjest kasvab, kiirenevaks, liikumist, kus kiirus järjest kahaneb — tasanevaks liikumiseks.

Too näiteid kiireneva ja tasaneva liikumise kohta!

*b. Tahame lähemalt määrata mitteühtlase liikumise iseloomu mõnes tee punktis, näiteks B, siis leiame esiteks keha liikumise keskmise kiiruse selle punkti läheduses (20. joon.). Selleks oletame, et keha liikus B-st alates ajavahemiku Δt jooksul edasi kauguse Δs võrra. Siis saame punkt B läheduses keha liikumise iseloomustamiseks keskmise kiiruse $v_k = \frac{\Delta s}{\Delta t}$. Sedaviisi



20. joon. Kiirus antud punktis.

leitud keskmine kiirus iseloomustab liikumist punktis B seda enam, mida vähem on aja kasv Δt ja sellele vastav kauguse kasv Δs. **Kiiruseks** antud punktis (B) nimetatakse kauguse kasvu (Δs) ja sellele vastava aja kasvu (Δt) suhte piiri, kui aja kasv lõpmata ligineb nullile, s. o.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_k = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

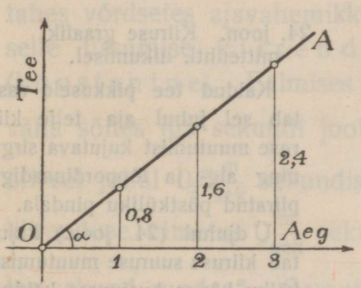
Valem (1) võimaldab leida kiiruse suuruse igas tee punktis ehk vastaval momendil, kui on teada funktsionaalne side s ja t vahel. Kiiruse sihi määrab liikumise tee siht vastavas punktis.

1. Kas on mõlemad selles § antud kiiruse definitsioonid ühevääri lised?
2. Keha vabal langemisel on $s = 5t^2$. Leida langeva keha kiirus 1., 2., 3., 4. ja 5.-da sekundi alul. Missugune korrapärasus siin valitseb?
3. Rakenda valem (1) ühtlase liikumise kiiruse määramiseks valemist $s = vt$.

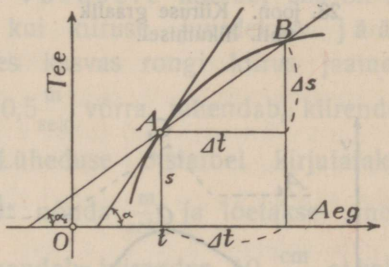
24. Käidud tee pikkuse muutumise graafiline kujutamine.

a. Jalutaja kõnnib ühtlaselt kiirusega 80 $\frac{cm}{sek}$. Mõõtes aega sek-tes ja käidud tee pikkust meetrites, võime üles kirjutada tee pikkuse (s) olenevuse ajast (t) üldisel kujul valemiga $s = 0{,}8\,t$. Saadud valemi graafiliseks kujutamiseks märgime rõhtteljel aja- ja püstteljel vastavad käidud tee pikkuse väärtused (21. joon.):

t	0	1	2	3	4	. . .
s	0	0,8	1,6	2,4	3,2	. . .



21. joon. Teegraafik ühtl. liikumisel.



22. joon. Teegraafik mitteühtl. liikumisel.

Sedaviisi leitud punktid ühendame sileda joonega. Saame sirge, mis läheb läbi teljestiku alguspunkti ning moodustab rõhtteljega nurga α. Nagu joonisest näha, on $\tan \alpha = 0{,}8$. Et aga 0,8 mõõdab ühtlase liikumise kiirust vastavates üksustes (missugustes?), siis võime öelda, et sirge OA tõusunurga (α) tangens võrdub kiiruse suurusega.

b. Mitteühtlase liikumise juhul (22. joon.) saame tee graafikuks kõvera (AB). Keskmine kiirus ajavahemikus Δt, s. o. $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, võrdub sirge AB ja ajatelje vahel oleva nurga (α_1) tangensiga, kuna kiirus punktis A võrdub selles punktis (A) tee kõverale tõmmatud puutuja tõusunurga tangensiga (α).

1. Missugune joon kujutab ühtlasel liikumisel käidud tee pikkuse muutumise käiku? Kuidas väljendub selle juures kiiruse suurus ja algkiirus?

2. Ehita järgmiste liikumiste tee graafikud: $s = 1{,}5\,t$; $s = 3 + 0{,}2\,t$; $s = 5 - t$.

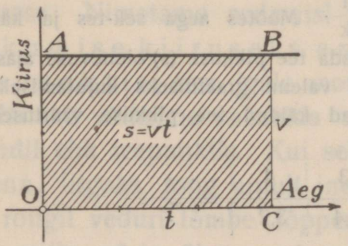
3. Missugused liikumised vastavad teegraafikule, kui viimane on sirge rööpne aja- või teeteljega?

4. Kahe keha ühtlane liikumine samal sirgel on antud valemitega: $s = 28 - 4\,t$ ja $s = -35 + 5\,t$. Leida graafiliselt nende kehade kokkupuutumise aeg ja koht.

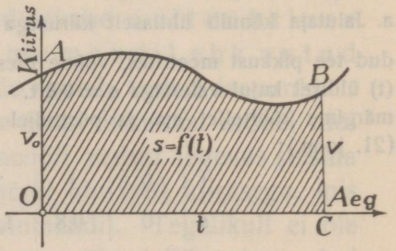
25. Kiiruse suuruse muutumise graafiline kujutamine.

Analoogiliselt teegraafikule võime joonistada ka kiiruse suuruse muutumise graafiku, tähistades rõhtteljel aja, püsteljel vastavad kiiruse suuruse väärtused.

Ühtlasel liikumisel on kiiruse suurus jääv, näiteks $v = 2\,\frac{m}{sek}$. Sel juhul saame kiiruse graafikuna sirge, mis on rööpne ajateljega (23. joon.).



23. joon. Kiiruse graafik ühtl. liikumisel.

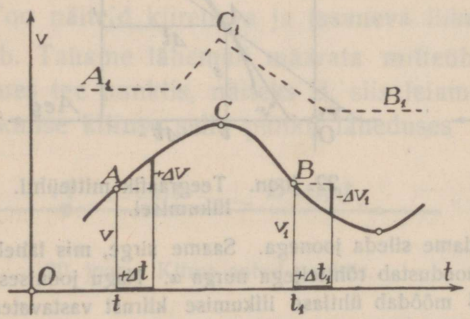


24. joon. Kiiruse graafik mitteühtl. liikumisel.

Käidud tee pikkusele vastab sel juhul aja telje kiiruse muutumist kujutava sirge ning alg- ja lõppordinaadiga piiratud püstküliku pindala.

Ü djuhul (24. joon.) kujutab kiiruse suuruse muutumise käiku kõver, kusjuures käidud tee pikkusele endiselt vastab kiiruse kõveraga ning alg- ja lõppordinaadiga piiratud kujundi pindala.

1. Ehitada liikumise $s = 2\,t + 3\,t^2$ kiiruse suuruse muutumise graafik!



25. joon.

2. Eritle 25. joonisel kõverate AB ja A_1B_1 abil kujutatud liikumisi! Millal on kiirus kõige suurem ja millal kõige vähem? Missugused on Δt ja Δv märgid kiireneva ja tasaneva liikumise puhul?

26. Ühtlaselt kiirenev ja ühtlaselt tasanev sirgjooneline liikumine. Kiirendus. Mitteühtlasest sirgjoonelisest liikumisest on tähtsam n. n. **ühtlaselt kiirenev ja ühtlaselt tasanev sirgjooneline liikumine,** s. o. niisugune, kus keha kiirus mistahes võrdsetes ajavahemikkudes võrdselt kasvab või kahaneb.

Kui näiteks rongi kiirus jaamast välja sõites on 1. sek lõpul $0{,}5\ \frac{m}{sek}$, 2. sek. lõpul $1\ \frac{m}{sek}$, 3. sek lõpul $1{,}5\ \frac{m}{sek}$ jne. ning kogu aeg kiiruse kasvamine sünnib ühtlaselt, siis on see liikumine ühtlaselt kiirenev, sest kiirus kasvab iga sekundi jooksul sama suuruse, antud juhul $0{,}5\ \frac{m}{sek}$, võrra.

Ühtlaselt tasaneva sirgjoonelise liikumise näitena võiksime tuua rongi liikumist jaama sissesõidul.

Too veel mõned näited enam-vähem ühtlaselt kiireneva ja ühtlaselt tasaneva sirgj. liikumise kohta!

Ühtlaselt kiirenevat (vst. tasanevat) sirgjoonelist liikumist iseloomustab n. n. **kiirendus,** milleks nimetame kiiruse juurdekasvu (vst. kahanemist) ühe ajaüksuse jooksul. Et ühtlaselt kiirenevas liikumises keha kiirus mistahes võrdsetes ajavahemikkudes võrdselt kasvab, siis on ka selle liikumise kiirendus kui kiiruse juurdekasv jääv (konstantne). Eelmises näites kasvas rongi kiirus jaamast välja sõites iga sekundi jooksul $0{,}5\frac{m}{sek}$ võrra, tähendab, kiirendus oli sel juhul $0{,}5\frac{m}{sek}$ sekundis. Lüheduse otstarbel kirjutatakse kiirenduse nimetus „$\frac{m}{sek}$ sekundis" nõnda $\frac{m}{sek^2}$ ja loetakse „meeter sekund ruudus". Samuti tähendab kiirendus $10\ \frac{cm}{sek^2}$, et keha liikumise kiirus igas sekundis $10\frac{cm}{sek}$ võrra kasvab; kui kiirendus on $3\frac{km}{min^2}$, siis kasvab kiirus igas minutis $3\frac{km}{min}$ võrra jne. Edaspidi tähistame kiirenduse suurust üldisel kujul „a" tähega (lad. k. *acceleratio* — kiirendus).

Ühtlaselt tasaneva liikumise kiirendus tuleb lugeda negatiivseks.

Meie teame, et keha võib liikuda mitteühtlaselt ainult tungi mõjul. Oletame, näiteks, et kehasse mõjub kogu aeg jääv tung 5 kg ja selle mõjul keha kiirus kasvas 1 sekundi jooksul $10\frac{m}{sek}$ võrra. On selge, kui tungi suurus ja siht ei muutu, siis ka iga järgmise sekundi jooksul selle tungi mõjul peab kiirus suurenema samal määral, s. o. $10\frac{m}{sek}$ võrra, sest kiiruse muutumise põhjus, tungi suurus ja siht, on endine. Kasvab aga kiirus igas sekundis sama palju, siis on liikumine ühtlaselt kiirenev. Tähendab, **keha liigub ühtlaselt kiirenevalt siis, kui temasse mõjub jääv tung.**

1. Kas on antud ühtlaselt kiireneva liikumise definitsioon õige, kui sellest sõna „mistahes" välja jätta?
2. Missuguse tungi mõjul liigub keha ühtlaselt tasanevalt?
3. Väljenda kiirendus $10\frac{m}{sek^2}$ üksustes: $\frac{cm}{sek^2}$, $\frac{cm}{min^2}$ ja $\frac{m}{sek.\,min}$.

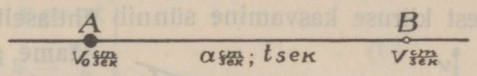
***27. Kiirenduse mõiste ja üksuse tuletamine.** Kiirenduse mõiste ja üksuse tuletamisel võime käia sama teed kui kiirusegi juures. Kiirenduse suurus on võrdeline kiiruse juurdekasvuga ja pöördvõrdeline sellele vastava aja juurdekasvuga, s. o.

$$a = k\frac{\Delta v}{\Delta t},$$

kus k on võrdetegur. Kui $k = 1$, siis $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$. Sellest näeme, et kõige lihtsam on tuletada kiirenduse mõõtmise üksus kiiruse ja aja mõõtmise üksuste abil. Eelmisest valemist saame: kui $\Delta v = 1$ ja $\Delta t = 1$, siis ka $\mathbf{a = 1}$. Järjelikult **kiirenduse üksuseks on sel juhul võetud niisuguse keha kiirendus, mille kiirus kasvab (vst. kahaneb) ühe ajaüksuse jooksul 1 kiiruseüksuse võrra.** Edasi selgub valemist $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$: kui $\mathbf{\Delta t = 1}$, siis $\mathbf{a = \Delta v}$, s. o. **kiirendus võrdub arvuliselt kiiruse juurdekasvuga ühe ajaüksuse jooksul.** Tuleb kindlasti meeles pidada, et kiirendust võib mõõta ainult kiirenduse-üksustega. Kuigi, nagu nägime, arvuliselt kiirenduse suurus, kui üksused on vastavalt valitud, võrdub kiiruse juurdekasvu suurusega, ei ole meil siiski õigust samastada kiirendust kiirusega.

Võrdle massi- ja kaalu-üksuste (kg, g) tarvitamist kiirenduse- ja kiiruse-üksuste tarvitamisega!

28. Kiiruse valemi tuletamine. Asugu vaatluse alul ühtlaselt kiirenevalt liikuv keha tee punktis A (26. joon.) ja olgu tema kiirus selles punktis, n. n. algkiirus, $v_o \frac{cm}{sek}$. Sama keha kiiruse t sek hiljemini, n. n. lõppkiirus, tähistame v-ga. Kui liikumise kiirendus on $a \frac{cm}{sek^2}$, siis kasvab keha kiirus igas sekundis a kiiruse-üksuse võrra, t sek jooksul aga at võrra, järjelikult lõppkiirus



26. joon. Andmed kiiruse arvutamiseks.

$$v = v_o + at \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Saadud valem annab võimaluse leida ühtlaselt kiireneva liikumise kiiruse suuruse igal momendil pärast liikumise algust, kui on teada algkiirus ja kiirendus. Ühtlaselt tasaneva liikumise puhul tuleb kiirendus a võtta negatiivne.

Juhul kui keha algkiirus $v_o = 0$, saame valemi (1) jaoks lihtsama kuju:

$$v = at \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

1. Missugune on valemite (1) ja (2) geomeetriline väljendus?

2. Rong sõidab jaamast välja ühtlaselt kiirenevalt kiirendusega $a = 30 \frac{cm}{sek^2}$. Leida rongi kiirus 5., 10., 15. ja 30.-da sekundi lõpul pärast liikumise algust. Mitme sekundi pärast on rongi kiirus $15 \frac{m}{sek}$?

3. Rong liigub kiirusega $17 \frac{m}{sek}$. Piduri mõjul saab ta jääva kiirenduse — $80 \frac{cm}{sek^2}$. Leida rongi kiirus 5 sek pärast piduri pealelaskmist.

4. Keha liikumise algkiirus on $30 \frac{m}{sek^2}$, lõppkiirus 12 sek pärast $6 \frac{m}{sek}$. Leida kiirendus.

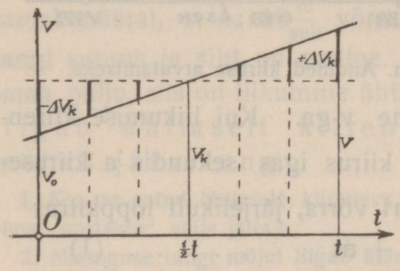
5. Keha kiirendus on $10 \frac{m}{sek}$ ja lõppkiirus 25 sek pärast $150 \frac{m}{sek}$. Leida algkiirus.

29. Tee valemi tuletamine. Mitteühtlasel liikumisel käidud tee pikkuse võime arvutada selle liikumise keskmise kiiruse abil. Kui algkiirus on $v_o \frac{cm}{sek}$ ja lõppkiirus t sek pärast

$v \frac{cm}{sek}$, siis on ühtlaselt kiireneva liikumise korral keskmine kiirus alg- ja lõppkiiruse aritmeetiline keskmine, s. o.

$$v_k = \frac{v_o + v}{2} = \frac{v_o + v_o + at}{2} = \left(v_o + \frac{at}{2}\right),$$

sest kiiruse kasvamine sünnib ühtlaselt. Selle tõendamiseks ehitame graafiku, mis näitab meile ühtlaselt kiireneva liikumise kiiruse muutumist (27. joon.); siin on rõhtteljel märgitud aja ja püstteljel vastavad kiiruse suuruse väärtused. Nagu joonisest näha, on keskmisele ajaväärtusele ($^1/_2\,t$) vastav kiirus v_k tõepoolest kogu liikumise keskmiseks kiiruseks, sest igale temast vähemale kiirusele leidub teisel pool sümmeetriliselt samavõrra suurem kiirus.



27. joon. Ühtl. kiiren. liikumise keskmine kiirus.

Arvuline näide. Olgu keha ühtlaselt kiireneva liikumise algkiirus $2 \frac{m}{sek}$, lõppkiirus 8 sek pärast $10 \frac{m}{sek}$. Sellega on kiiruse kasv igas sekundis ehk kiirendus $(10 - 2) : 8$, s. o. $1 \frac{m}{sek}$. Järjelikult peab olema kiiruse suurus poole aja ehk 4 sek pärast $2 + 4.1$, s. o. $6 \frac{m}{sek}$, mis on aritmeetiliseks keskmiseks alg- ja lõppkiirusest $\left(\frac{2 + 10}{2}\right)$, samuti ka igast teisest keskajast sama palju mõlemale poole võetud kiiruste paarist (5 ja 7, 4 ja 8 jne.).

Teades keskmise kiiruse suurust, arvutame ühtlaselt kiireneval liikumisel käidud tee pikkuse järgmiselt:

$$s = v_k\, t = \left(\frac{v_o + at}{2}\right) t = v_o\, t + \frac{at^2}{2} \quad . \; . \quad (3)$$

Graafiliselt kujutab käidud tee pikkust s trapetsi pindala, mis on ühelt poolt alg- ja lõppkiiruse, teiselt poolt rõhttelje ning kiiruse muutumist kujutava sirge vahel (27. joon.). Tuleta sellest tee valem!

Erijuhul, kui $v_o = 0$, saame valemist (3):

$$s = \frac{at^2}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Kokkuvõttes on meil ühtlaselt kiireneva ja ühtlaselt tasaneva liikumise määramiseks kasutada valemid:

a) üldjuhul:
$$\left.\begin{aligned} v &= v_0 + at \\ s &= v_0 t + \frac{at^2}{2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

b) erijuhul, kui $v_0 = 0$:
$$\left.\begin{aligned} v &= at \\ s &= \frac{at^2}{2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Mõlemal korral tuleb meeles pidada, et ühtlaselt tasaneva liikumise korral kiirendus on negatiivne.

Valemeid (5) võime käsitada kui 2 võrrandit 5 otsitavaga (v_0, v, t, a, s). Sellepärast on alati võimalik 3 antud põhjal leida teised 2.

Valemite (5) ja (6) kasutamisel tuleb hoolega tähele panna, et neis esinevad suurused oleksid vastavalt valitud, s. o. kui näiteks t on mõõdetud sekundites, v_0 — $\frac{cm}{sek}$-tes ja s — cm-tes, siis v peab väljenduma $\frac{cm}{sek}$-tes ja a — $\frac{cm}{sek^2}$.

1. näide. Püssiraua pikkus on 75 cm. Kuul jookseb rauast välja kiirusega 500 $\frac{m}{sek}$. Leia kuuli kiirendus ja liikumise aeg raua sees, oletades, et liikumine on ühtlaselt kiirenev.

Valemite (6) abil saame: $500 = at$ ja $75 = \frac{at^2}{2} = \frac{at.t}{2} = \frac{500.t}{2}$, millest $t = 0{,}3$ (sek); $a = \frac{500}{0{,}3} = 1666{,}6\ldots \left(\frac{cm}{sek^2}\right)$. Vastus: $t = 0{,}3$ sek; $a = 16{,}6\ldots \frac{m}{sek^2}$.

2. näide. Rong sõidab välja jaamast jääva kiirendusega $20\frac{cm}{sek^2}$. Mitme minuti järele saab rong omale normaalkiiruse 16 $\frac{m}{sek}$? Kui kaugel on siis rong jaamast?

Asendades saame: $16 = 0{,}2\,.\,t$, millest $t = \frac{16}{0{,}2} = 80$ (sek); $s = \frac{0{,}2\,.\,80^2}{2} = 640$ (m). Vastus: $t = 80$ sek $= 1\frac{1}{3}$ min; $s = 640$ m.

1. Ehita valemite (5) ja (6) põhjal v ja s graafiline kujutis, kui $v_0 = 3\frac{cm}{sek}$ ja $a = 0{,}5\frac{cm}{sek^2}$. Võrdle saadud resultaate!

2. Mitu isesugust tüüpi ülesandeid võib kokku seada ühtlaseilt kiireneva (vst. tasaneva) liikumise kohta, silmas pidades valemite kui ka neis esinevate suuruste arvu?

3. Tuleta kiiruse valem kauguse valemist, lähtudes kiiruse definitsioonist: $v = \frac{ds}{dt}$.

4. Keha algkiirus on $10 \frac{m}{sek}$, lõppkiirus $40 \frac{m}{sek}$ ja kiirendus $6 \frac{m}{sek^2}$. Leida kaugus ja aeg.

5. Sõnastada ja lahendada järgmised ülesanded:

a) $v_0 = 2$, $a = 3$, $t = 6$; $v = ?$ ja $s = ?$

b) $a = -10$, $t = 25$, $v = 150$; $v_0 = ? s = ?$

c) $v_0 = 30$, $v = 6$, $s = 216$; $a = ?$ $t = ?$

d) $v_0 = 400$, $a = -10$, $s = 6875$; $t = ? v = ?$

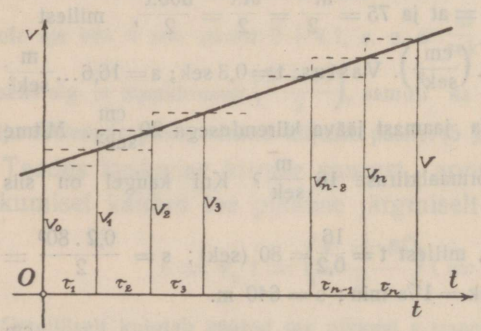
Üksused valida vastavalt!

***30. Ühtlaselt kiireneva liikumise tee valemi tuletamine analüüsi abil.** Lisaks eelmises § antud tee valemi tuletamisele toome siin selle valemi tuletamise analüüsi abil. Viimane mõttekäik on üldse väga tüübiline, sellepärast on tähtis tutvuda temaga põhjalikult.

a. Et oleks võimalik kasutada ühtlase liikumise tee valemit ($s = vt$), jagame kogu liikumise aja t n võrdseks osaks, kus n võib olla mistahes suur täisarv. Sedaviisi saadud väga väikesed võrdsed ajavahemikud ehk aja-elemendid tähistame tähega τ (tau). Nii siis:

$$\frac{t}{n} = \tau; \quad n\tau = t \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Järjekorra märkimiseks varustame kõik τ-d indeksitega, siis saame: τ_1, τ_2, τ_3 jne.



28. joon. Ühtl. kiireneva liikumise asendamine ühtlase liikumisega.

O l e t a m e nüüd, et keha liigub iga aja-elemendi jooksul ühtlaselt kiirusega, mis oli kehal selle aja-elemendi alul (28. joon.). Sellega teeme muidugi vea, kuid viga on seda vähem, mida suurem on n, järjelikult vähem on τ. Liidame selle oletuse juures üksikute aja-elementide jooksul käidud teede pikkused s_1, s_2, s_3 jne. Saadud summa piirväärtus kui $n \to \infty$ ongi otsitav õige tee pikkus s, s. o.

$$s = \lim_{n\to\infty} (s_1 + s_2 + \ldots + s_n)$$

Kiiruse ($v = v_0 + at$) ja tee ($s = vt$) valemite abil arvutame tehtud oletusel üksikute aja-elementide (τ_1, τ_2 jne.) jooksul käidud teede pikkused (s_1, s_2 . . .) ja korraldame saadud resultaadid järgnevasse tabelisse:

Aja-elemendid	Kiirus iga aja-elemendi alul	Üksikute aja-elementide jooksul käidud teede pikkused, oletades, et . . .
τ_1	v_0	$s_1 = v_0 \tau$
τ_2	$v_0 + a\tau$	$s_2 = (v_0 + a\tau)\tau = v_0\tau + a\tau^2$
τ_3	$v_0 + 2a\tau$	$s_3 = (v_0 + 2a\tau)\tau = v_0\tau + 2a\tau^2$
τ_4	$v_0 + 3a\tau$	$s_4 = (v_0 + 3a\tau)\tau = v_0\tau + 3a\tau^2$
. .	. . .	. . . . .
τ_n	$v_0 + (n-1)a\tau$	$s_n = (v_0 + (n-1)a\tau)\tau = v_0\tau + (n-1)a\tau^2$

Selle tabeli 3-dast tulbast saame:

$$s_1 + s_2 + s_3 + \ldots + s_n = nv_0\tau + (a\tau^2 + 2a\tau^2 + 3a\tau^2 + \ldots +$$
$$+ (n-1)a\tau^2) = v_0 n\tau + a\tau^2 [1 + 2 + 3 + \ldots (n-1)] = v_0 t +$$
$$+ a\tau^2 \frac{n(n-1)}{2} = v_0 t + \frac{a\tau^2 n^2}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = v_0 t + \frac{at^2}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Edasi teame, et õige tee $s = \lim_{n\to\infty} (s_1 + s_2 + \ldots + s_n) =$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[v_0 t + \frac{at^2}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right] = v_0 t + \frac{at^2}{2} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = v_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

Sama lõpptulemuse saame, kui oletame, et keha liigub ühtlaselt kiirusega, mis temal oli iga aja-elemendi lõpul. Tõenda seda!

Leia 28. joonisest toodud tõendusviisile vastavad geomeetrilised seletused. Mis vastab joonisel vea suurusele, kui võtta s asemel summa $s_1 + s_2 + \ldots + s_n$?

b. Kõige lihtsam on tuletada kiiruse ja tee valemit integreerimisreeglite abil. Meie nägime, et $a = \frac{dv}{dt}$, järjelikult $dv = adt$ ja $v = \int dv = \int adt = at + C$. Kui $C = v_0$, siis $v = v_0 + at$.

Valemist $s = vt$ saame: $ds = vdt$. Et v oleneb ajast, siis asendame v temale vastava suurusega $v_0 + at$. Nüüd $ds = (v_0 + at)\,dt$. Edasi $s = \int ds = \int (v_0 + at)\,dt = v_0 t + \frac{at^2}{2} + C$. Meie oletuse järgi on $s = 0$, kui $t = 0$, järjelikult $C = 0$ ja $s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$.

1. Keha liigub ühtlaselt kiirenedes ja läheb edasi kahe teineteisele järgneva 4-sekundilise ajavahemiku jooksul vastavalt kaugused: 24 m ja 64 m. Leida algkiirus ja kiirendus.

Tung ja kiirendus.

31. Mass. Keha massiks nimetame aine hulka, millest koosneb keha. Iga massi põhiomaduseks on tung Maa poole ehk **raskus,** mis on võrdeline massiga. Raskuse suurust mõõdame kaalu-üksustes. Et kaalu-üksuseks on võetud ühe massi-üksuse kaal, siis väljendub keha mass ja kaal, vastavates üksustes mõõdetud (kg, g jne.), alati sama arvuga. Pääle selle on massi põhiomaduseks vastupanu liikumisemuutumisele ehk **inerts.** Iga mass on inertne.

1. Nimeta meil tarvitusel olevad massi-üksused!

2. Mis vahe on keha massi ja kaalu vahel?

32. Side tungi, kiirenduse ja massi vahel. Inertsi mõjul püsib keha kas paigal või liigub ühtlaselt sirgjooneliselt, s. o. ilma kiirenduseta. Keha liikumise kiirus võib muutuda ainult tungide mõjul. Keha kiiruse muutumist iseloomustab liikumise kiirendus, järjelikult kiirendus tekib tungi mõjul, tung on kiirenduse tekkimise põhjuseks. Tõuseb küsimus: kuidas on seotud üksteisega tung (põhjus) ja kiirendus (järeldus)? Kiirenduse olenevuse tungist väljendab n. n. Newtoni II seadus järgmiselt:

Keha liikumise kiirendus on võrdeline ja samasihiline sesse kehasse mõjuva tungiga.

Kiirendus, kui kiiruse juurdekasv ühe aja-üksuse jooksul, on sihiga suurus ehk vektor. Tungi siht Newtoni II seaduse järele on ühesugune kiirenduse sihiga, tähendab ka tung on sihiga suurus ehk vektor.

Tähistades tungi suuruse f-ga (prantsuse k. *force* — tung),

kiirenduse suuruse a-ga võime Newtoni II seaduse põhjal kirjutada:

$$f = k_1 a, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

kus k_1 on võrdetegur.

Katseist teame, et sama kiirenduse andmiseks läheb suuremale massile tarvis suuremat tungi, nimelt: sama kiirenduse puhul on tungi suurus võrdeline massiga, s. o.

$$f = k_2 m, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

kus m mõõdab keha massi ja k_2 on võrdetegur.

Valemeid (1) ja (2) ühisesse valemisse kokku võttes saame

$$f = k\,m\,a, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

kus k on võrdeteguriks.

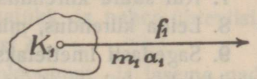
Tungi, massi ja kiirenduse üksusi vastavalt valides võime võtta $k = 1$, siis

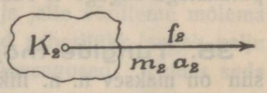
$$f = m\,a, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

s. o. **tungi suurus (f) mõõtub massi (m) ja kiirenduse (a) korrutisega.**

Valem (4) seob kolm suurust: f, m ja a. Kahe suuruse teades on alati võimalik leida kolmandat.

33. Liikumine jääva tungi mõjul. Varemini (§ 26) nägime, et keha liigub ühtlaselt kiirenevalt siis, kui temasse mõjub jääv tung. Sama järgneb ka valemist $f = m\,a$, millest $a = \frac{f}{m}$. Kui f ja m on jäävad, siis peab ka kiirendus a olema jääv, s. o. keha (mass m) liigub ühtlaselt kiirenevalt.





29. joon. Võrdsete tungide mõju kiirendusele.

Teiselt poolt järgneb valemist $f = ma$, et sama tung annab erisugustele massidele kiirendused, mis on pöördvõrdelised massidega. Olgu kahe keha massid m_1 ja m_2 ning vastavad tungi suurused ja kiirendused f_1, a_1, f_2 ja a_2 (29. joon.). Siis võime valemi $f = m\,a$ põhjal kirjutada

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= m_1 a_1 \\ f_2 &= m_2 a_2 \end{aligned}\right\} \text{ kui } f_1 = f_2, \text{ siis } m_1 a_1 = m_2 a_2, \text{ millest } \frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}.$$

Too näiteid tõendatud tungi omaduse illustreerimiseks!

34. Tungi-üksused. Newtoni II seaduse põhjal saadud valem $f = ma$ on väga tähtis, sest ta võimaldab mõõta tungi suurust massi ja kiirenduse abil. Valemist $f = ma$ järgneb: kui $m = 1$ ja $a = 1$, siis ka $f = 1$, s. o. *tungimõõtmise üksuseks on otstarbekohane võtta niisugune tung, mis ühte massi-üksusesse mõjudes annab temale ühe üksuse kiirendust.* Olgu $m = 1$ g ja $a = 1 \frac{cm}{sek^2}$, siis $f = 1 \frac{g \cdot cm}{sek^2}$ ehk **düün,** s. o. *tung, mis massile 1 g annab kiirenduse* $1 \frac{cm}{sek^2}$.

Et düün on väga väike tungi-üksus, siis tarvitatakse suurema üksusena *megadüüni*, mis on düünist miljon korda suurem.

1. Kui suur tung annab massile 3-g kiirenduse $20 \frac{cm}{sek^2}$?

2. Missugune tung annab massile 0,5 kg kiirenduse $4 \frac{m}{sek^2}$?

3. Kui suure jääva tungi mõjul liigub mass $m = 10$ g $t = 40$ sek jooksul edasi maa $s = 0{,}48$ km?

4. Missugune tung annab massile 1 kg kiirenduse $1 \frac{m}{sek^2}$?

5. Missugusele massile annab tung 240 düüni kiirenduse $20 \frac{cm}{sek^2}$?

6. Leida mass, mis jääva tungi $f = 1$ megadüün mõjul liigub $t = 10$ sek jooksul edasi maa $s = 1$ km.

7. Kui suure kiirenduse annab tung 480 düüni massile 16 g?

8. Leida kiirendus, mis annab tung 1 megadüüni massile 1 tonn.

9. Sagedasti imetletakse putukate (rohusirts, kirp jne.) hüppamise kõrgust ja avaldatakse kahetsust, et inimene võrreldes oma suurusega hüppamise suhtes putukatega sugugi ei suuda võistelda. Kas on see arvamine põhjendatud?

35. Tungide mõju olenematus. Liikumiste liitmisest teame, et siin on maksev n. n. liikumiste olenematuse printsiip, s. o. üks liikumine ei sega teist. Et tung on alati samasihiline ja võrdeline kiirendusega, siis maksab tungide kohta sama olenematuse printsiip; nimelt: *tungi mõju kehasse ei olene keha esialgsest liikumise olekust.* Sama tung annab kehale alati sama kiirenduse hoolimata sellest, kas keha on paigal või liigub. Näiteks (§ 8) vabal langemisel liigub keha teatud aja jooksul sama palju allapoole, ükskõik kas oli keha liikumise alul paigal või omas mõnesugust rõhtsat kiirust.

36. Mehaanika põhiseadused. Newtoni kolm seadust (inertsi, tungi ja kiirenduse võrdelisuse ning mõju ja vastumõju seadused) on mehaa-

nika põhiseadusteks, millele on rajatud kogu mehaanika ehitus. Meie võime neid põhiseadusi üksikutel näidetel demonstreerida, mitte aga üldisel kujul tõendada. Nende seaduste kõige suuremaks tõenduseks on asjaolu, et kõik nendest põhiseadustest tuletatud järeldused on kooskõlas katse ja vaatluse teel saadud tulemustega. Juba Galilei ja Huygens olid enam-vähem tuttavad nende seadustega. Newtoni suureks teenuseks tuleb lugeda seda, et ta oma töös „*Philosophiae naturalis Principia mathematica*" (Loodusteaduse matemaatilised printsiibid), mis ilmus aastal 1686, esimesena nad selgesti väljendas ja kaugeleulatuvalt arendas.

Keha liikumine raskustungi mõjul.

37. Keha vaba langemine. Galilei seadused. Vanaaja teadusemehed (Aristoteles, 384—322) arvasid, et rasked kehad langevad kiiremini kui kerged. Sellele otsusele tuldi igapäevastest tähelepanekutest, milledest teame, et näiteks kivitükk langeb kiiremini kui paberileht, paberileht kiiremini kui udusulg jne. Kuid siin jäeti arvestamata õhu mõju langemisse, mis kergeid võrdlemisi suure pinnaga kehi (paberileht) palju suuremal määral langemisel takistab kui väikesi ja raskeid kehi (kivitükk). Olles õhu takistava mõju kõrvaldanud, näeme, et nii kerged kui rasked kehad langevad täiesti ühteviisi. Esimesena sellele otsusele tuli kuulus G a l i l e i (1564—1642), kes avastas kehade vaba langemise seadused.

Teeme mõned katsed, mis näitavad, et õhutakistuse kõrvaldamisel kõik kehad langevad ühteviisi.

a. Katame metallraha (10-margaline) paberist ringiga nõnda, et paberi ääred üle rahatüki äärte ei ulatuks. Üheskoos langevad rahatükk ja paber ühteviisi, lahus langedes jõuab rahatükk paberist ette. Mispärast?

b. Võtame kaks ühesuurust paberilehte, näiteks poolpoognat, ja laseme nad langeda. Nad langevad enam-vähem ühteviisi. Nüüd lõikame ühe paberitüki näiteks 16-ks võrdseks osaks, paneme nad kõik ühte ja jälle võrdleme mõlema poolpoogna langemist. Katse näitab, et kokkupandud paberitükk langeb palju kiiremini, hoolimata sellest, et mõlema raskused on ühesugused. Kuidas seda seletada?

c. Kõige selgemini võime näha õhu takistavat mõju kehade langemisel järgmises katses, mille korraldas esimesena J. N e w t o n. Pikas klaastorus on tinakuulike, korgitükk ja udusulg (30. joon.). Toru äkki ümber pöörates näeme, et korgitükk ja udusulg jäävad langemisel tinakuulist maha. Hõrendame õhupumba abil torus oleva õhu. Nüüd võime tähele panna, et mahajäämine muutub seda vähemaks, mida suurem on torus oleva õhu hõrendus. On hõrendus küllalt suur, siis langevad tinakuulike, korgitükk ja udusulg täitsa ühteviisi. Uuesti õhu torusse laskmisel saame jällegi udusule ja korgitüki mahajäämise.

Kõigist neist katsetest võime järeldada, et **tühjas ruumis langevad kõik kehad ühteviisi** (Galilei I seadus).

Keha langemise põhjuseks on raskustung. Et keha raskuse võime lugeda maapinna lähedal tegelikult jäävaks, siis liigub vabalt langev keha jääva tungi mõjul. Varemini nägime (§ 33), et jääva tungi mõjul liigub keha ühtlaselt kiirenevalt, järjelikult ka **vabalt langev keha liigub ühtlaselt kiirenevalt** (Galilei II seadus).



30. joon. Kehad langevad tühjas ruumis ühteviisi.

Kokku võttes võime öelda, et tühjas ruumis langevad kõik kehad ühtlaselt kiirenevalt sama jääva kiirendusega (ühteviisi).

Et kõik kehad langevad sama kiirendusega, võime tuletada ka järgmiselt. Olgu esimese keha kaal düünides p_1, mass grammides m_1 ja langemise kiirendus $g_1 \frac{cm}{sek^2}$. Siis saame: $p_1 = m_1 g_1$, millest $g_1 = \frac{p_1}{m_1}$. Analoogiliselt võime kirjutada, et teise keha langemise kiirendus $g_2 = \frac{p_2}{m_2}$. Et kehade kaal on võrdeline massiga, siis $\frac{p_1}{m_1} = \frac{p_2}{m_2}$, järjelikult ka $g_1 = g_2$, mis oligi tarvis tõendada.

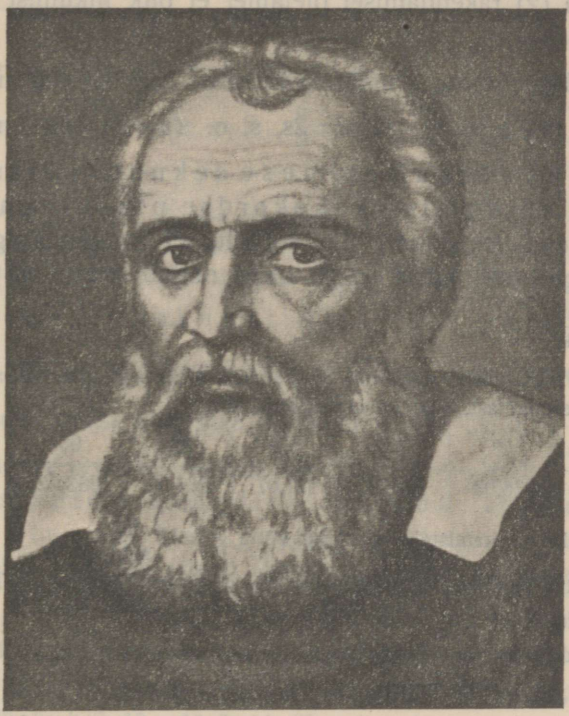
38. Vaba langemise valemid ja kiirendus. Teades, et vabal langemisel liigub keha ühtlaselt kiirenevalt, võime kõik ühtlaselt kiireneva liikumise valemid rakendada ka vaba langemise käsitlemiseks. Tähistades nagu harilikult vaba langemise kiirenduse g tähega (lad. k. *gravitas* — raskus) saame vaba langemise jaoks valemid:

$$\left.\begin{aligned} v &= v_0 + gt \\ s &= v_0 t + \frac{gt^2}{2} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (1)$$

Juhul, kui $v_0 = 0$, siis

$$\left.\begin{aligned} v &= gt \\ s &= \frac{gt^2}{2} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (2)$$

Valemid (1) on maksvad ka algkiirusega v_0 püsti ülesvisatud keha liikumise määramiseks. Siis on liikumine ühtlaselt tasanev ja kiirendus g tuleb võtta negatiivne (—).



Galileo Galilei, 1564—1642.

Kuulus Itaalia füüsik, astronoom ja matemaatik, katselise loodusteaduse põhjendaja. Sündis Piisa linnas kaupmehe pojana. Õppis Piisa ülikoolis isa soovil arstiteadust, selle kõrval aga eraviisil loodusteadust ja matemaatikat. Pärast füüsika- ja astronoomiaprofessor Piisa ja Paadua ülikoolis. Avastas vaba langemise ja pendli võnkumisseaduse, inertsiseaduse ja tungide rööpküliku. Ehitas termoskoobi ja pikksilma, millega avastas Päikese laigud, Jupitri kaaslased, Veenuse faasid, Kuu mäed jne. Kopernikuse õpetuse pooldamise eest inkvisitsioonikohtu poolt mitmeti vintsutatud.

Muidugi, saadud valemid maksavad ainult keha liikumise kohta tühjas ruumis. Mitmesugused liikumise takistused muudavad liikumise iseloomu ja sellepärast on näiteks õhus liikumisel eespool-toodud valemid ainult ligikaudselt õiged. Edaspidisel valemite (1) ja (2) rakendamisel oletame, et õhk liikumist tunduvalt ei takista.

Ligikaudselt võime g määrata valemist $s = \frac{gt^2}{2}$ järgmiselt. Kui $t = 1$ sek, siis $s = \frac{g}{2}$ ja $g = 2s$, s. o. arvuliselt raskuse kiirendus võrdub esimese sekundi jooksul langemisel käidud tee kahekordse pikkusega. Laseme langeda keha (tinakuuli) nii kõrgelt, et langemisaeg võrduks 1 sekundiga; sel juhul, nagu katse näitab, $s \approx 5$ m, järjelikult $g \approx 10 \frac{m}{sek^2}$.

Täpsemad mõõtmised näitavad, et g suurus oleneb geograafilisest laiusest ja kõrgusest merepinnast. Nii on merepinnal, kui

$\varphi =$	0^0	30^0	50^0	60^0	90^0
$g =$	978,03	979,32	981,07	981,91	983,22

Ligikaudseteks arvutamisteks on küllalt võtta $g = 10 \frac{m}{sek^2}$.

1. Leida interpoolides eelmise tabeli abil g suurus Tallinnas ja Tartus.
2. Mitu düüni on 1 g, 1 kg, 200 g jne.?
3. Väljenda oma kaal düünides!
4. Võrdle mg-raskust düüniga!
5. Missugune tung (kg-des) annab massile 1 kg kiirenduse 1 $\frac{m}{sek^2}$? Väljenda oma raskus neis üksustes!
6. Kui suure kiirenduse annab tung 1 kg massile 1 tonn?

39. Vaba langemise valemite rakendused. Valemitest (2) § 38 näeme, et vabal langemisel on keha kiirus võrdeline ajaga ja käidud tee pikkus võrdeline aja ruuduga. Vaatame nüüd, palju langeb keha allapoole iga sekundi jooksul. Valemist $s = \frac{gt^2}{2}$ saame: esimese sekundi jooksul langeb keha $s_1 = \frac{g}{2}$, kahe esimese sek jooksul $s_2 = 4 \cdot \frac{g}{2}$, kolme esimese sek jooksul $s_3 = 9 \cdot \frac{g}{2}$ jne.

Siit võime arvutada iga üksiku sekundi jooksul käidud tee pikkuse. Resultaadid rakendame tabelisse:

$$s_1 = 1 \cdot \frac{g}{2}$$

$$s_2 - s_1 = 4 \cdot \frac{g}{2} - 1 \cdot \frac{g}{2} = 3 \cdot \frac{g}{2}$$

$$s_3 - s_2 = 9 \cdot \frac{g}{2} - 4 \cdot \frac{g}{2} = 5 \cdot \frac{g}{2}$$

$$s_4 - s_3 = 16 \cdot \frac{g}{2} - 9 \cdot \frac{g}{2} = 7 \cdot \frac{g}{2}$$

— — — — — — — — —

$$s_t - s_{t-1} = t^2 \cdot \frac{g}{2} - (t-1)^2 \cdot \frac{g}{2} = (2t-1) \cdot \frac{g}{2}$$

Saadud tabelit silmitsedes näeme, et vabalt langev keha liigub esimesel sekundil $\frac{g}{2}$ ja igal järgmisel $2 \cdot \frac{g}{2}$ ehk g võrra rohkem. Üldse aga langeb keha t-ndal sekundil pärast liikumise algust $(2t-1)\frac{g}{2}$, s. o. $\frac{g}{2}$ korrutatud t-nda paaritu arvuga. Sellest järgneb, et vabal langemisel üksikutel sekunditel käidud teede pikkused suhtuvad kui neile vastavad paarita arvud. Selle omaduse põhjal on kerge leida üksikute sekundite jooksul käidud teede pikkusi. Kuidas?

Näited. 1. Esimese sekundi jooksul langeb keha $\frac{g}{2}$ ehk 5 m, teise sek jooksul $5+10$, s. o. 15 m, kolmanda sek jooksul $15+10$ ehk 25 m, kümnenda sekundi jooksul $(2 \cdot 10 - 1) \cdot 5$ ehk 95 m jne.

2. Keha visati püsti üles algkiirusega $v_o = 30 \frac{m}{sek}$. Kui kõrgele tõuseb see keha? Tõusu lõppkiirus on 0, järjelikult $v_o - gt = 0$, millest tõusu aeg $t = \frac{v_o}{g}$. Asetame tõusu aja tee valemisse, saame:

$$s = v_o t - \frac{gt^2}{2} = v_o \cdot \frac{v_o}{g} - \frac{g}{2} \cdot \left(\frac{v_o}{g}\right)^2 = \frac{v_o^2}{2g} = \frac{30^2}{2 \cdot 10} = 45 \text{ (m)}.$$

3. Püsti ülesvisatud keha tõusuaeg (t) võrdub uuesti mahalangemis-ajaga (t_1).

Eelmises ülesandes leidsime, et tõusuaeg $t = \frac{v_o}{g}$ ja tõusukõrgus $s = \frac{v_o^2}{2g}$. Oletame, et kõrguselt s keha langeb alla t_1 sek, siis $s = \frac{gt_1^2}{2} = \frac{v_o^2}{2g}$, millest $t_1 = \frac{v_o}{g} = t$.

Et tõusuaeg $t = \frac{v_0}{g}$, siis $v_0 = gt$. Sama valemiga $v = gt$ väljendub ka lõppkiirus langemisel t sek jooksul, järjelikult püsti ülesvisatud keha jõuab tagasi sama lõppkiirusega, millega ta oli visatud.

1. Leida vabalt langeva keha kiirus 1., 2., 3., 10.-da sekundi lõpul, kui $v_0 = 0$.

2. Kui kõrgelt peaks keha alla langema, et langemise lõppkiirus oleks $20 \frac{m}{sek}$?

3. Kui palju tarvitab keha aega Oleviste kiriku tornist (138,7 m) allalangemiseks? Vastata sama küsimus Eiffeli torni kohta (300 m).

4. Mitme sekundiga langeks 1 km kõrgel olevast pilvest vihmapiisk maapinnale, kui õhk langemist ei takistaks?

5. Vabalt alla langedes liikus keha viimasel sekundil 24,5 m edasi. Kui kõrgelt ja kui kaua langes see keha?

6. Vabalt langedes jõuab keha 4 sek pärast maapinnale. Kui ruttu jõuaks keha samalt kõrguselt langedes maapinnale, kui teda algkiirusega $29{,}4 \frac{m}{sek}$ maha tõugata?

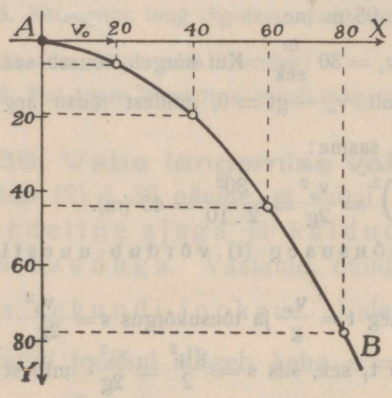
7. Keha visati püsti üles algkiirusega $v_0 = 60 \frac{m}{sek}$. Leida keha kiirus 4 sek pärast liikumise algust. Kui kõrgel on siis keha?

8. Kui kõrgele tõuseks püsti üleslastud kahurikuul, mille algkiirus $v_0 = 600 \frac{m}{sek}$, kui õhk liikumist ei takistaks?

9. Missuguse püsti-algkiiruse juures on meil võimalik 1 m kõrgusele hüpata? Kas oleneb hüppe kõrgus sama algkiiruse juures massist?

10. Püsti ülesvisatud keha langes 10 sek pärast uuesti maapinnale tagasi. Kui kõrgele tõusis see keha ja kui suur oli tema kiirus 20 m kõrgusel?

40. Visatud kehade liikumine. a. Teatud algkiirusega püsti üles või alla visatud keha liikumise määravad ühtlaselt kiireneva või tasaneva liikumise valemid (§ 29).



31. joon. Rõhtsalt horisondile visatud keha liikumine.

Vaatame nüüd, kuidas liigub keha, mis ei ole visatud risti horisondile.

Olgu keha visatud punktist A rõhtsalt horisondile (31. joon.), algkiirusega $v_0 = 20 \frac{m}{sek}$. Kui raskuse mõjul keha ei langeks allapoole, liiguks keha esialgse tõuke mõjul kogu aeg ühtlaselt sirge AX sihis, käies igas sekundis 20 m. Keha kauguse (x) punk-

tist A üldisel kujul määrab valem: $x = 20$ t. Samuti kui keha ei oleks saanud esialgset tõuget sihis AX, vaid langeks vabalt, siis liiguks ta püstjoone AY sihis ja keha kauguse (y) punktist A määraks valem $y = \frac{gt^2}{2}$. Arvutame x ja y väärtused 1., 2., 3-da jne. sek lõpul pärast liikumise algust, saame:

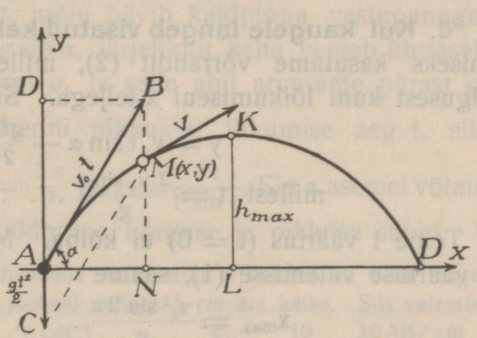
t sek	0	1	2	3	4	5
x m	0	10	20	30	40	50
y m	0	4,9	19,6	44,1	78,4	97,5

Ehitame saadud koordinaatidele vastavad punktid ja ühendame nad sileda joonega. Sedaviisi ehitatud kõver näitab meile visatud keha liikumist antud tingimusil.

1. Kuidas mõjub algkiiruse suurus ja siht langemiskõvera kujusse? Tee vastavad joonised!

2. Tee 31. joonisele vastav punkti A ümber pöörduv mudel, mille abil on võimalik näidata liikumise tee kuju olenevust algkiiruse sihist. Tarvisminev materjal: 2 sirget liistu, tinakuulikesed, niit.

*b. **Keha on visatud kaldu horisondile** sihis AB (32. joon.) algkiirusega v_0. Keha asendi määramiseks t sekundit pärast liikumise algust tuleb liita ühtlasel liikumisel käidud tee $AB = v_0 t$ vabal langemisel käidud teega $AC = \frac{gt^2}{2}$. Saame AB ja AC kui külgede põhjal ehitatud rööpküliku tipu M, mille koordinaadid x ja y. Joonisest määrame: $x = AN = AB\cos\alpha = v_0 t\cos\alpha$; $y = MN = BN - BM = BN - AC = v_0 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}$.



32. joon. Kaldu horisondile visatud keha liikumise tee.

Saadud valemid:

$$\left.\begin{aligned} x &= v_0 t\cos\alpha \text{ ja} \\ y &= v_0 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\ldots\ldots\ldots (1) \\ &\ldots\ldots\ldots (2) \end{aligned}$$

määravad keha asendi igal momendil pärast liikumise algust. Tahame teada, missugust kõverat mööda keha liigub, siis eliminеerime valemi (1) abil valemist (2) aja t, saame

$$y = x \tan \alpha - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Valem (3) näitab, et kaldu nurgi α visatud keha liikumistee on teise astme kõver, nimelt p a r a b o o l.

Ehita üksikute punktide abil keha tee, mis on visatud algkiirusega $v_0 = 100 \frac{m}{sek}$, kui $\alpha = 60°$.

*c. **Kui kõrgele tõuseb visatud keha?** Selle määramiseks leiame liikumise kiiruse y-telje sihis (tõusu kiiruse) v_y. Valemi (2) abil saame:

$$v_y = \frac{dy}{dt} = v_0 \sin \alpha - gt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Kõige kõrgemas punktis on $v_y = 0$, järjelikult ka $v_0 \sin \alpha - gt = 0$, millest tõusu aeg $t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$. Asetades saadud t väärtuse valemisse (2) saame tõusu kõrguse

$$y_{max.} = \frac{(v_0 \sin \alpha)^2}{2g} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Valemist (5) näeme, et tõusu kõige suurem kõrgus on võrdeline algkiiruse ja viskenurga sin ruuduga.

Võrdle saadud tõusu kõrgust püsti ülesvisatud keha tõusu kõrgusega!

*d. **Kui kaugele langeb visatud keha?** Viskekauguse määramiseks kasutame võrrandit (2), millest määrame aja liikumise algusest kuni lõikumiseni x-teljega. Siis

$$y = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2} = 0,$$

$$\text{millest } t = \frac{2 v_0 \sin \alpha}{g} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Teine t väärtus ($t = 0$) ei kõlba. Mispärast? Asetame saadud t väärtuse valemisse (1), saame

$$x_{max.} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Valemist (7) näeme, et viskekaugus samuti kui kõrguski oleneb algkiirusest v_0 ja viskenurgast.

Et sin 2α kõige suurem väärtus on 1, millele vastab $\alpha = 45^0$, järjelikult ka kõige suurem viskekaugus antud algkiiruse juures on siis, kui viskenurk on 45^0.

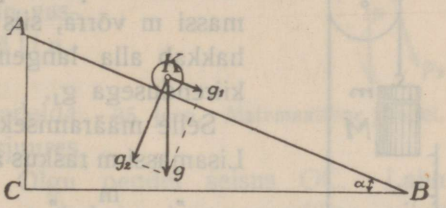
1. Valemite (5) ja (7) põhjal võrdle kõige suuremat tõusu kõrgust kõige suurema viskekaugusega!

2. Näidata, et nurgi α ja $90\text{-}\alpha$ visatud kehade viskekaugus on ühesugune.

3. Kui kaugele lendab ja kui kõrgele tõuseb kivi, mis on visatud kaldu horisondile nurgi $\alpha = 30°$ algkiirusega $v_0 = 15 \frac{m}{sek}$?

4. Kui suur peaks olema kahuri viske- (tõste-) nurk α, et kuul langeks $s = 5$ km kaugusel oleva torni pihta $h = 20$ m kõrgusel, kui kuuli algkiirus $v_0 = 600 \frac{m}{sek}$?

41. Liikumine kaldpinnal. Et vaba langemise kiirendus (g) on võrdlemisi suur ja selle tõttu liigub keha liiga kiiresti, siis kasutame kaldpinda langeva keha kiiruse ja kiirenduse vähendamiseks. Sile kera veereb mööda kaldrenni, mille kaldenurk on α (33. joon.). Lahutame kiirenduse vabal langemisel (g) kaheks komponendiks g_1 ja g_2, millest esimene (g_1) on rööpne liikumise sihiga, teine (g_2) sellega risti. Muidugi, kera mööda kaldpinda allaliikumisel mõjub ainult kiirendus g_1, kuna g_2 mõju hävib kaldpinna vastupanuga. Joonisest näeme, et $g_1 = g \sin \alpha$, järjelikult keha veereb ühtlaselt kiirenevalt. Määrame katsest g_1 ja selle abil arvutame pärast g, sest $g = \frac{g_1}{\sin \alpha}$. Olgu kaldrenni pikkus s, liikumise aeg t, siis saame: $s = \frac{g_1 t^2}{2}$, millest $g_1 = \frac{2s}{t^2}$ ja $g = \frac{2s}{t^2 \sin \alpha}$. Sin α asemel võime tarvitada temaga võrdset kaldpinna kõrguse ja pikkuse suhet.



33. joon. Langemine kaldpinnal.

Katsetegemisel on kasulik vähendada kaldenurka α niikaua, et keha langedes mööda kaldpinda 1. sekundi jooksul näiteks 5 cm ära käiks. Siis valemist $s = \frac{g_1 t^2}{2}$ saame $g_1 = 2s = 2 \cdot 5 = 10 \left(\frac{cm}{sek^2}\right)$ ja $g = \frac{g_1}{\sin \alpha} = \frac{10}{\sin \alpha} = \frac{10 AB}{AC} \left(\frac{cm}{sek^2}\right)$

1. Missugune on mööda kaldpinda ülesvisatud keha liikumine?

2. Kaldpinna pikkus on 1 m, kõrgus 10 cm. Leida kiirendus ja aeg.

3. Mitme sekundiga veereb kera alla mööda kaldpinda, mille pikkus on 5 m ja kaldenurk $\alpha = 30°$?

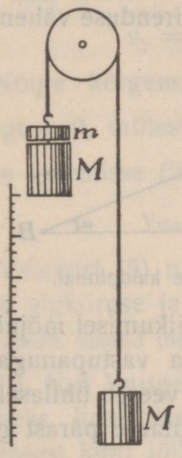
4. Näidata, et mööda kaldpinda langeva keha lõppkiirus oleneb ainult kaldpinna kõrgusest ja raskuse kiirendusest.

5. Kui suur peaks olema kelgumäe kõrgus h, et temast allasõidu lõppkiirus oleks $v = 20 \frac{m}{sek}$?

6. Liumäe kõrgus on 6 m. Leida kelgutaja lõppkiirus.

7. Ringi vertikaaldiameetri ülemisest otsast hakkavad samal momendil nii diameetrit kui ka selle diameetri otsast väljaminevaid kõõlusid mööda ainepunktid alla veerema. Missugune neist ainepunktest jõuab kõige enne ringjooneni?

***42. Atwoodi masin.** Keha langemise kiirenduse vähendamiseks võib tarvitada ka n. n. Atwoodi masinat, mille ehituse põhimõte selgub skemaatilisest 34. joonisest. Üle plokiratta käiva nööri abil on tasakaalustatud võrdsed massid M. Kui näiteks pahempoolset massi suurendada lisamassi m võrra, siis kaob tasakaal ja pahem pool hakkab alla langema ning parem tõusma jääva kiirendusega g_1.



34. joon. Atwoodi masina skeem.

Selle määramiseks harutame järgmiselt.

Lisamassi m raskus annab massile m kiirenduse g;

„ m „ „ „ 2M+m „ g_1.

Et sama tung annab erisugustele massidele kiirendused, mis on pöördvõrdelised massidega (§ 33), siis võime kirjutada:

$$mg = (2M + m)\, g_1, \text{ millest}$$

$$g_1 = \frac{mg}{2M + m}.$$

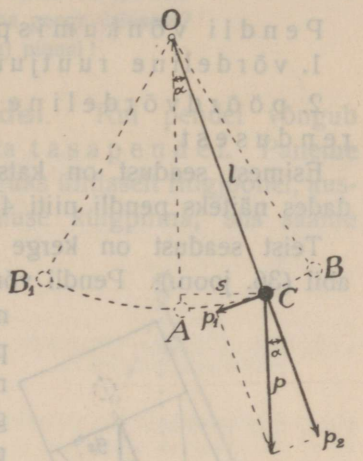
Saadud valemist näeme, et lisamassi m suurust sellekohaselt valides võime langemise kiirendust Atwoodi masinal tarvilikult vähendada. Liikumistakistuste mõjul erinevad ühtlaselt kiireneva liikumise valemite põhjal arvutatud suurused teatud määral katsete tulemustest.

1. Missuguse lisamassi mõjul sünnib langemine Atwoodi masinal kiirendusega 10 $\frac{cm}{sek^2}$, kui mass M = 291 g?

43. Pendel. Matemaatiliseks pendliks nimetatakse ainepunkt, mis on kinnistatud mitteveniva ja kaalutu niidi külge ning võib vabalt võnkuda vertikaal-tasapinnas raskustungi mõjul. Meil ei ole tegelikult võimalik niisugust pendlit valmis-

tada. Enam-vähem neile tingimustele vastab **füüsiline pendel**, milleks on kõva peenikese niidi otsa riputatud tinakuulike.

Viime pendli tasakaalu-seisust OA välja seisu OB ja laseme lahti (35. joon.). Pendel hakkab **võnkuma** vertikaal-tasapinnas ühest äärmisest seisust (OB) keskseisu OA ning saadud hoo arvel edasi teise äärmisse seisu (OB_1) ja tagasi. Nimetame pendli äärmise seisu kauguse tasakaalu-seisust (AB) pendli **amplituudiks**, liikumise ühest äärest teise ja tagasi pendli **täisvõnguks** ning sellele vastava aja **täisvõngu vältuseks** ehk **perioodiks**.



35. joon. Matemaatiline pendel.

Pendli võnkumist võime vaadelda kui liikumist kaldpinnal, kusjuures kaldenurk järjest muutub. Olgu pendel seisus OC. Lahutame pendli massi raskuse p kaheks komponendiks: pikuti pendli niidiga (p_2) ja sellega risti (p_1). Komponent p_2 tõmbab pendli niiti pingule, kuna komponent p_1 pendli liikuma paneb. Nagu 35. joonisest näha, on:

$$p_1 = p \sin \alpha \text{ ja } p_2 = p \cos \alpha, \quad \ldots \quad (1)$$

s. o. pendlit liikuma panev tung kui ka niidi pinevus oleneb pendli asendist tasakaalu-seisu suhtes, mille määrab nurk α.

Valemist $p_1 = p \sin \alpha$ saame sideme vastavate kiirenduste vahel: $g_1 = g \sin \alpha = g \frac{s}{l} = \frac{g}{l} . s$, s. o. **pendli liikumise kiirendus on võrdeline kaugusega tasakaalu-seisust.**

Õhk takistab pendli võnkumist, selle tõttu pendli võnkumise amplituud järjest väheneb, kuna periood enam-vähem samaks jääb. Väikeste amplituudide juures väljendub pendli võnkumise poolperiood t valemiga

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

kus l on pendli pikkus ja g raskusekiirendus.

44. Mat. pendli võnkumisseadused. Sekundpendel. Valemist $t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ järeldame:

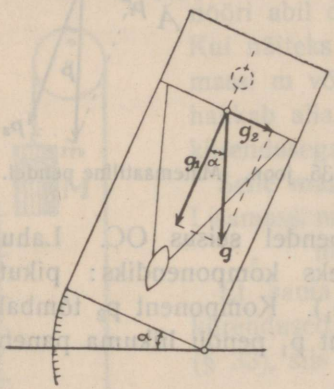
Pendli võnkumisperiood on

1. võrdeline ruutjuurega pendli pikkusest (l) ja

2. pöördvõrdeline ruutjuurega raskusekiirendusest.

Esimest seadust on katseliselt kerge demonstreerida: pikendades näiteks pendli niiti 4 korda, suureneb t 2 korda jne.

Teist seadust on kerge demonstreerida n. n. Mach'i pendli abil (36. joon.). Pendli võnkumis-tasapinda vertikaal-tasapinnast nurga α võrra kõrvale viies ei mõju pendli võnkumisel mitte enam kogu raskusekiirendus g, vaid komponent $g_1 = g \cos \alpha$. Mis mõju avaldab komponent g_2? Nurka α vastavalt muutes võime jälgida t olenevust kiirendusest. Näiteks kui $\alpha = 75{,}5^0$, siis $\cos \alpha = \frac{1}{4}$ ja $g_1 = \frac{g}{4}$, ning t suureneb 2 korda.



36. joon. Mach'i pendli skeem.

Et pendli valem ei sisalda pendli massi ega amplituudi, sellest järeldame: Pendli võnkumisperiood ei olene pendli massist ega amplituudist. Kuidas on võimalik seda katseliselt tõendada?

Pendli abil on kerge määrata raskusekiirendust g, sest valemist $t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ $g = \frac{\pi^2 l}{t^2}$. Pendli pikkus ja võnkumisperiood on kergesti mõõdetavad, järjelikult ka g.

Määra sel teel g niidi otsa riputatud tinakuulikesega ja võrdle saadud resultaat teisel teel saadud g suurusega.

Pendel, mille poolvõngu vältus on 1 sek, nimet. sekundpendliks. Sekundpendli pikkuse saame valemist $1 = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$, millest

$$l = \frac{g}{\pi^2} = \frac{981}{9{,}87} = \mathbf{99{,}4}\ (\text{cm}).$$

Nagu siit näeme, on sekundpendli pikkus umbes 1 m.

1. Mitu täisvõnku sekundis teeb mat. pendel, mille pikkus on 50 cm?

2. Foucault oma kuulsas katses Pariisi Panthéonis a. 1851 tarvitas pendlit, mille pikkus oli 67 m ja mass 28 kg. Leia täisvõngu vältus!

3. Arvuta pendli pikkus, mille poolvõngu vältus on 0,5 sek.

4. Kuidas oleneb sekundpendli pikkus koha geogr. laiusest?

5. Leia sekundpendli pikkus Päikese (Kuu) pinnal!

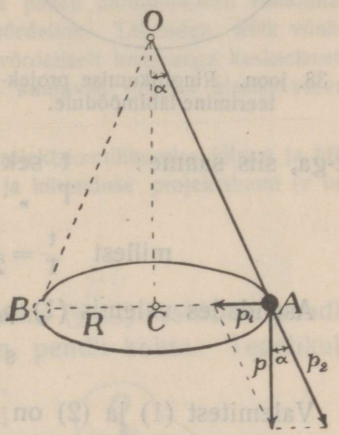
***45. Tasa- ja koonuspendel.** Kui pendel võngub samas vertikaal-tasapinnas, siis on ta tasapendel. Paneme pendli liikuma nõnda, et ta mass liiguks ühtlaselt ringjoonel, kusjuures pendli niit moodustab koonuse külgpinna, siis saame koonuspendli (37. joon.). Lahutame koonuspendli massi m raskuse p komponentideks p_1 ja p_2 vastavalt ringi keskpunkti ja niidi sihis. Neist p_1 tasakaalustab kesktõmbetungi, kuna p_2 tõmbab pinguli niiti OA. Kui ringi raadius BC = R, pendli pikkus AO = l ja täisperiood on T, siis

$$p_1 = p \tan \alpha = \frac{4\pi^2 mR}{T^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Et $p = mg$ ja $\tan \alpha = \frac{AC}{OC} \approx \frac{AC}{AO} = \frac{R}{l}$, kui amplituud on väike, siis asetades valemisse (1) saame:

$$p_1 = mg \cdot \frac{R}{l} = \frac{4\pi^2 mR}{T^2},$$ millest

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$



37. joon. Koonuspendel.

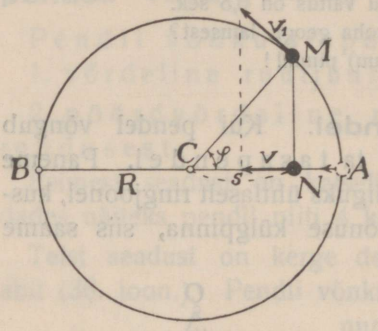
Siit näeme, et väikese amplituudi juures koonuspendli periood võrdub sama pikkusega tasapendli perioodiga (sest T = 2t).

1. Tuleta valemist (2) koonuspendli võnkumisseadused!

2. Leida koonuspendli võnkumisperiood, kui $l = 1$ m.

***46. Harmooniline võnkliikumine.** Kujutagu ringjoon AMB (38. joon.) koonuspendli massi liikumise teed. Kuna koonuspendli mass liigub ringjoonel AMB ühtlaselt, liigub selle massi (M) projektsioon (N) läbimõõdul AB kord kiirenevalt, kord tasanevalt. Nimetame koonuspendli massi pro-

jektsiooni liikumise läbimõõdul harmoonili-seks võnkliikumiseks. Harmoonilise võnkliikumise periood T ja amplituud R võrduvad koonuspendli vastavate suurustega. Nurk ACM = φ, mis näitab raadiuse CM seisu algseisu CA suhtes, nimet. võnkumisfaasiks (38. joon.). Kui nüüd punkt M teeb alates A-st ühe täistiiru, siis tema projektsioon N liigub A-st B-sse ja tagasi. Projektsiooni N kaugus keskseisust C ehk



38. joon. Ringliikumise projekteerimine läbimõõdule.

$$s = CM \cos \varphi = R \cos \varphi. \quad (1)$$

Tähistades nurgale φ vastava aja t-ga, siis saame:

t sek vastab nurk φ
T „ „ „ 2π,

millest $\frac{t}{T} = \frac{\varphi}{2\pi}$ ja $\varphi = \frac{2\pi}{T} t$.

Asendades valemis (1) φ, saame

$$s = R \cos \frac{2\pi}{T} t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Valemitest (1) ja (2) on kerge leida harmoonilise võnkliikumise kiirus (v) ja kiirendus (a)

$$v = \frac{ds}{dt} = -\frac{2\pi R}{T} \sin \frac{2\pi}{T} t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -\frac{4\pi^2}{T^2} R \cos \varphi = -\frac{4\pi^2}{T^2} . s \quad . \quad . \quad (4)$$

Siit näeme, et harmoonilise võnkliikumise kiirendus on võrdeline kaugusega (s) keskseisust. Varemini (§ 43) leidsime, et tasapendli liikumisel maksab sama omadus ($g_1 = \frac{g}{l} . s$), järjelikult ka tasapendli võnkumine on harmooniline liikumine. Tähendab, meie võime vaadelda tasapendli liikumist kui sama pikkuse (*l*), amplituudi (R) ja perioodiga (T) koonuspendli massi projektsiooni liikumist läbimõõdul. Võrrandades kahel viisil saadud kiirenduste absoluutsed suurused ($a = g_1$) saame:

$$\frac{4\pi^2}{T^2} s = \frac{g}{l} . s, \text{ millest} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Kui $T = 2t$, siis

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

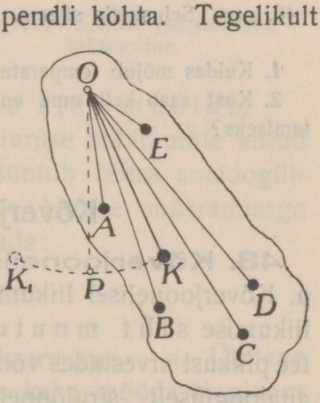
Saadud valem määrab matem. tasapendli poolvõngu vältuse. Ta on õige ainult võrdlemisi väikeste amplituudide juures ($\sim 5^0$), sest ainult sel tingimusel on õige valem (5).

Valemist (4) näeme, et harmoonilise vônkliikumise kiirendus oleneb kaugusest keskseisust ja on sellega võrdeline. Et kiirendus on võrdeline kehasse mõjuva tungiga, järjelikult ka tung, mis keha paneb harmooniliselt vônkuma, oleneb kaugusest keskseisust ja on sellega võrdeline. Tähendab, kõik vônkliikumised, kus mõjuva tungi suurus muutub võrdeliselt kaugusega keskseisust, on harmoonilised vônkliikumised. Siia hulka kuuluvad näiteks elastse varva ja vedru, puu latvade vônkumine jne.

1. Tuletada valemid (3) ja (4), vaadeldes projektsioonliikumise kiirust ja kiirendust kui projekteeritava liikumise kiiruse ja kiirenduse projektsiooni (v on v_1 projektsioon, 38 joon.).

2. Analüüsida v ja a olenevust faasist φ.

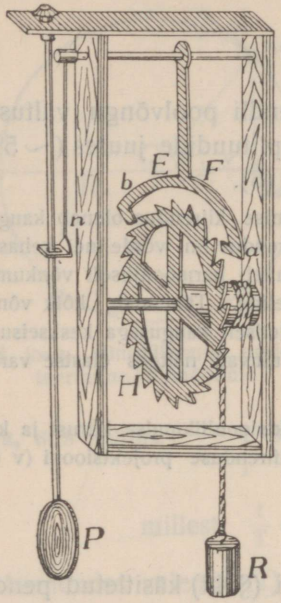
***47. Füüsiline pendel.** Varemini (§ 44) käsitletud pendli võnkumisseadused on maksvad matem. pendli kohta. Tegelikult ei ole meil võimalik ehitada matem. pendlit, vaid tarvitame selle asemel n. n. füüsilist pendlit, mis vastab enam-vähem mat. pendlile. Üldse võime nimetada füüsiliseks pendliks iga keha, mis võib oma raskuse mõjul võnkuda punkti või rõhtsa telje ümber (39. joon.). Olgu füüsilise pendli telg punktis O. Kujutame füüsilise pendli koosnevana üksikutest ainepunktidest A, B, C jne., mis on seotud nägematu niidiga sama teljega O. Sedaviisi võime mõttes lahutada füüsilise pendli üksikuteks mat. pendliteks, mis pikkuselt väga mitmesugused. Lühemad neist püüavad vähendada, pikemad suurendada füüsilise pendli võnkumisperioodi. Kahtlemata leidub nende matemaatiliste pendlite hulgas üks, näiteks OK, mille periood võrdub füüsilise pendli



39. joon. Füüsiline pendel.

TRÜ Raamatukogu

võnkumisperioodiga. Pikkus OK nimet. füüsilise pendli taandatud ehk redutseeritud pikkuseks ja punkt K füüsilise pendli võnkumistsentriks. Tähendab, füüsiline pendel võngub samuti kui matem. pendel, mille pikkus võrdub füüsilise pendli taandatud pikkusega. Selle füüsilise pendli omaduse põhjal võime kõik matemat. pendli võnkumisseadused üle kanda ka füüsilise pendli kohta.



40. joon. Seinakella skeem.

Teooria ja katse näitavad, et kui füüsilise pendli võnkumistsenter teha kinnituspunktiks, siis endine kinnituspunkt muutub võnkumistsentriks. Selle omaduse põhjal on võimalik füüsilise pendli taandatud pikkust määrata. Füüsiline pendel leiab laialdast kasutamist raskustungi kiirenduse määramisel ja kella käigu reguleerimisel (40. joon.). Iga poolvõngu juures laseb pendel hammasrattal, mis rippuva koorma või vedru abil ümber veetakse, ainult ühe hamba võrra edasi liikuda. Pendli pikkust muutes võime hammasratta liikumist kiiremaks või aeglasemaks teha. Pendli seismajäämist takistavad tõuked, mis hammasratas talle annab.

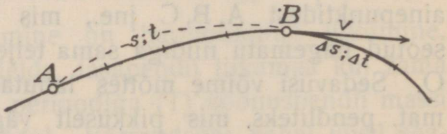
1. Kuidas mõjub temperatuuri muutus kella käigusse?

2. Kust saab kell oma energia kõigi käimisel ettetulevate takistuste ületamiseks?

Kõverjooneline liikumine.

48. Kõverjoonelise liikumise kiirus ja kiirendus.

a. Kõverjoonelisel liikumisel on liikumistee kõverjoon ja selle tõttu liikumise siht muutub alatasa (41. joon.). Ainult käidud tee pikkust arvestades võime analoogiliselt sirgjoonelise liikumisega rääkida ühtlasest ja mitteühtlasest kõverjoonelisest liikumisest. Defineeri nad! Kiiruse suuruse saamiseks tuleb käidud tee pikkus (s) jagada vastava ajaga (t).

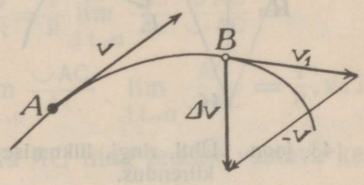


41. joon. Kõverjoonelise liikumise kiirus.

Sirgjoonelise liikumise juures võtsime kiiruse sihiks keha liikumise sihi. Kõverjoonelise liikumise sihi määramiseks mõnes tee punktis, näiteks B, tõmbame kõverjoonele selles punktis puutuja. Et puutuja kõverjoonega puutumispunktis hästi ühte langeb, siis määrab kõverjoonelise liikumise kiiruse sihi antud teepunktis liikumisteele selles puntkis tõmmatud puutuja siht.

Inertsiseadusest järgneb, et kõverjooneline liikumine võib tekkida ainult tungi mõjul. Oletame, et tungi mõju kehasse lõppes näiteks teepunktis B. Siis hakkab keha liikuma sellest punktist pääle edasi ainult inertsi mõjul ühtlaselt ja sirgjooneliselt kiirusega (v), mis oli kehal tungi mõju lõppemismomendil. See ongi keha kiirus punktis B.

Tahame leida keha liikumise kiirendust ehk kiiruse juurdekasvu ühe ajaüksuse jooksul, siis tuleb lõppkiirusest (v_1) lahutada algkiirus v (42. joon.). Sedaviisi saadud kiiruste vahe ongi otsitav kiiruse juurdekasv. Kuigi kõverjooneline liikumine on käidud tee pikkuse suhtes ühtlane ja kiirus suuruselt jääv, on kõverjoonelisel liikumisel alati kiirendus, sest liikumise ja ühes sellega kiiruse siht muutub.



42. joon. Kiiruse juurdekasvu määramine.

*b. Kõverjoonelise liikumise kiiruse suuruse määramine antud teepunktis, näiteks punkt B 41. joon., sünnib täitsa analoogiliselt § 23 näidatud mitteühtlase liikumise kiiruse määramisega antud punktis. Selle järele võime kirjutada:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}.$$

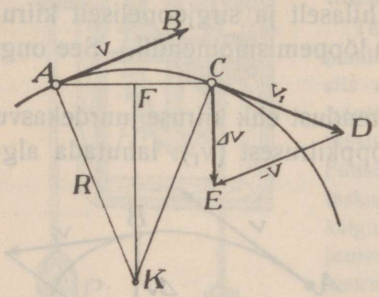
49. Ühtlane ringjooneline liikumine. a. Ühtlane ringjooneline liikumine on niisugune, kus keha mööda ringjoont liikudes mistahes võrdsetes ajavahemikkudes ära käib võrdsed kaared. See liikumine on täiesti määratud, kui on antud ringjoone raadius R ja ühe täistiiru vältus ehk periood T. Siit võime otsekohe määrata kiiruse suuruse:

$$v = \frac{2\pi R}{T} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Nagu definitsioonist näha, on ühtl. ringjoonelise liikumise kiiruse suurus jääv, kuna kiiruse siht muutub järjest, sest ringjoone puutujad on igas punktis isesihilised.

Et kiiruse siht kogu aeg muutub, on meil siin tegemist kiiruse muutumise ehk kiirendusega, mille tekitab kestev tung. Leiame kiirenduse nii suuruse kui sihi poolest.

Olgu keha mööda ringjoont liikudes antud momendil punktis A (43. joon.) ja tema kiirus sel momendil AB ehk v. Oletame, et Δt sek jooksul keha käib ära kaare AC ja jõuab punkti C, milles tema kiirus on CD ehk v_1. Et teada saada Δt sekundile vastavat kiiruse juurdekasvu (Δv), selleks lahutame lõppkiirusest v_1 algkiiruse v, saame kiiruse juurdekasvu CE ehk Δv. Joonisest näeme, et $\triangle CDE \sim \triangle ACK$, kui võrdhaarsed kolmnurgad, milledel $\angle D = \angle K$ (vastastikku $\perp$ külgedega, mispärast?). Selle põhjal $\frac{\Delta v}{AC} = \frac{ED}{AK}$, millest



43. joon. Ühtl. ringj. liikumise kiirendus.

$$\Delta v = \frac{AC \cdot ED}{AK} = \frac{AC \cdot v}{R}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

sest ED võrdub kiiruse suurusega v ja AK ringi raadiusega R. Kui Δt on küllalt väike, siis võime ilma suurema veata lugeda kõõlu AC pikkuse võrdseks kaare AC pikkusega, viimane pikkus aga väljendub tee valemist ($s = vt$) nõnda: $\smile AC = v\,\Delta t$. Asetades AC asemele valemisse (2) temale vastava väärtuse, saame:

$$\Delta v = \frac{v\,\Delta t\, v}{R} = \frac{v^2\,\Delta t}{R} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Et kiirenduseks nimetatakse kiiruse juurdekasvu ühe aja-üksuse jooksul, siis saame ühtlase ringjoonelise liikumise kiirenduse (a) suuruse jaoks valemi:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2\,\Delta t}{R\,\Delta t} = \frac{v^2}{R} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Asendades kiiruse suuruse v valemist (1) temaga võrdse $\frac{2\pi R}{T}$-ga, saame valemist (4):

$$a = \frac{(2\pi R)^2}{T^2 \cdot R} = \frac{4\pi^2 R}{T^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Valemitest (4) ja (5) järgneb, et ühtlase ringjoonelise liikumise kiirenduse suurus on jääv (mispärast?).

Ühtl. ringjoonelise liikumise kiirenduse sihi leidmiseks harutame järgmiselt. Kiiruse juurdekasvu Δv ehk CE siht on ühtlasi kiirenduse sihiks. CE $\perp$ AC, sest $\angle$ ACK = $\angle$ ECD (mispärast?) ja $\angle$ KCD = 90°. KF on $\angle$ K poolitaja, järjelikult KF $\perp$ AC, sellega siis, KF $\parallel$ CE. Et aja juurdekasvu Δt vähenedes punkt C lõpuks liitub punkt A-ga, siis peab ka FK liituma AK-ga, samuti ka temaga alati rööpne CE. Järjelikult, kiiruse juurdekasv ja kiirendus on sihitud ringi keskpunkti. Sellepärast nimet. sagedasti ühtl. ringjoonelise liikumise kiirendust ka **kesktõmbe-** ehk **tsentripetaalkiirenduseks** (ladina k. *centrum* — keskpunkt ja *petere* — sihtima, püüdma).

*b. Lähtudes valemist (2) võime analüüsi abil kiiruse suuruse järgmiselt tuletada:

$$a = \lim_{\Delta t \to o} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to o} \frac{AC \cdot v}{R \cdot \Delta t} = \frac{v}{R} \lim_{\Delta t \to o} \frac{AC \cdot \smile AC}{\Delta t \cdot \smile AC} =$$

$$= \frac{v}{R} \lim_{\Delta t \to o} \left[\frac{\smile AC}{\Delta t} \cdot \frac{AC}{\smile AC} \right] = \frac{v}{R} \cdot \lim_{\Delta t \to o} \frac{\smile AC}{\Delta t} \cdot \lim_{\Delta t \to o} \frac{AC}{\smile AC} = \frac{v}{R} \cdot v \cdot 1 =$$

$$= \frac{v^2}{R},$$ sest $\smile AC = v \cdot \Delta t$ ja kõõlu AC ning temale vastava kaare ($\smile$ AC) suhte piir on 1, kui $\Delta t \to o$.

1. Sõnastada valemite (4) ja (5) põhjal kesktõmbe kiirenduse suuruse olenevus kiirusest v, perioodist T ja raadiusest R.

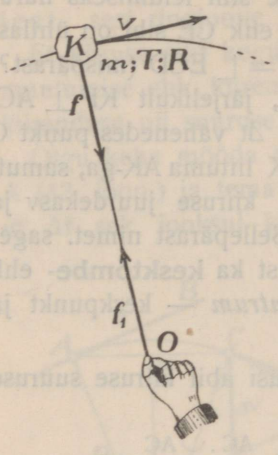
2. Lingu pikkus on 80 cm ja ta teeb 2 tiiru sekundis. Leida lingukivi kiirus ja kiirendus.

3. Hooratta läbimõõt on 1,2 m ja ta teeb 300 tiiru minutis. Leida hooratta välise ääre kiirus ja kiirendus.

4. Leida Maa ekvaatoril asuvate punktide kesktõmbe kiirendus $\left(\frac{cm}{sek^2}\right)$ pöörlemisel Maa telje ümber. Lahendada sama küsimus Tallinna ($\varphi = 59^0\,26'$) ja Tartu ($\varphi = 58^0\,23'$) kohta.

50. Kesktõmbe- ja kesktõuke- tung. Seome kõvasti nööri otsa mõne keha (kivi, kartul jne.) ning hakkame teda kiiresti ringi tiirutama (44. joon.). Me tunneme tiirutades, et nöör on tublisti pingul. Nööri pingulolek tõmbab ühelt poolt keha K ringi tsentri O sihis, teiselt poolt tõmbab nöör sama tugevasti kätt sihis OK. Tee see katse tingimata! Tung f hoiab keha

K ringliikumisel, sest ilma selleta liiguks keha inertsi mõjul puutuja sihis, mis tõmmatud ringjoonele tungi f mõju lõppemismomendil. Nööri lahti lastes või selle katkedes näeme, et keha liigub edasi tõepoolest puutuja sihis.



44. joon.

Varemini (49. §) nägime, et ühtlaselt ringjoonel liikuval kehal on alati olemas keskpunkti sihitud n. n. kesktõmbe- ehk tsentripetaalkiirendus. Newtoni II seaduse järele on sinna sihitud ka tung, mis selle kiirenduse tekitab. Nimetame tungi, mis on kesktõmbe-kiirenduse põhjuseks, **kesktõmbe-** ehk **tsentripetaal-tungiks.** Eelmises katses moodustas kesktõmbe-tungi niidi pinevus f. Kesktõmbe-tungi (f) suuruse saame, kui korrutame liikuva keha massi (m) kiirendusega (a), s. o.

$$f = \frac{mv^2}{R} = \frac{4\pi mR}{T^2} \quad . \quad . \quad (1)$$

Tung f mõõtub düünides, kui m mõõtub grammides, v — $\frac{cm}{sek}$, R — cm-tes ja T — sek-tes.

Kesktõmbe-tungiga Newtoni III seaduse põhjal võrd-vastupidine tung nimetatakse **kesktõuke-** ehk **tsentrifugaal-tungiks.** Eelmises katses oli selleks tung f_1. Kesktõuke-tung ei ole millalgi rakendatud ringjoonel liikuva keha külge, sest siis häviks tema mõju kesktõmbe-tungiga, nende summa oleks null.

Kesktõmbe-tungi suuruse olenevus massist, kiirusest, raadiusest ja perioodist on väljendatud valemites (1). Sõnasta need olenevused! Katseliselt võib neid olenevusi demonstreerida sellekohaste riistade abil.

Näited. 1. Lingu pikkus on 60 cm ja tema otsas mass 196 g. Missuguse kiirusega tuleb lingu tiirutada, et lingunöör oleks 1,2 kg tugevuselt pingul?

Valemist $f = \frac{mv^2}{R}$ saame: $v^2 = \frac{f \cdot R}{m} = \frac{1{,}2 \cdot 1000 \cdot 980 \cdot 60}{196} = 600^2$, millest $v = 600 \left(\frac{cm}{sek}\right)$. Mitu tiiru teeb ling seejuures sekundis?

2. Kui suur vähemalt peaks olema jalgratta-sõitja kiirus v, et oleks võimalik ringi sõita püst-tasapinnas?

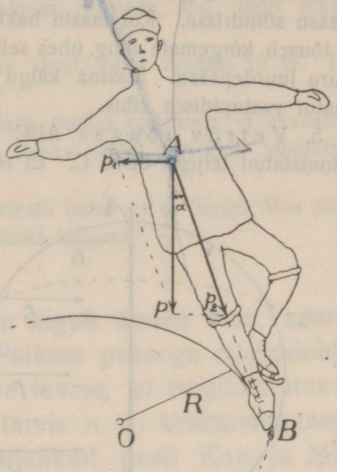
Olgu püstringi raadius R. Selles ringis sõitmine on võimalik, kui kogu raskus kulub kesktõmbe-tungiks. See tingimus on täidetud, kui kesktõmbe-kiirendus võrdub raskuse kiirendusega, s. o. $\frac{v^2}{R} = g$, millest $v^2 = Rg$ ja $v = \sqrt{Rg}$. Olgu $R = 5$ m, siis $v = \sqrt{5 \cdot 9{,}8} \approx 7$ (m).

3. Kui suure nurga (α) võrra peab uisutaja ennast kaldu laskma vertikaal-tasapinna suhtes, tehes $T = 10$ sekundiga ühe ringi, mille raadius $R = 10$ m?

Ringi joostes peame hoidma kehaga ringi tsentri poole, sest siis saame enese raskusest rõhtsa komponendi (p_1), mis on kesktõmbe-tungiks. Samuti on lugu uisutajaga, jalgratta-sõitjaga jne. — Olgu uisutaja raskus p rakendatud punktis A (45. joon.). Lahutame raskuse kaheks komponendiks: rõht- (p_1) ja toetuspunkti (B) sihis (p_2). Viimane (p_2) tasakaalustub sõidutee vasturõhumisega, kuna esimene (p_1) moodustab kesktõmbe-tungi, s. o. hoiab uisutaja ringliikumisel. Olgu uisutaja mass m, siis $p_1 = p \tan \alpha = mg \tan \alpha$. Tasakaalu korral võrdub p_1 kesktõmbe-tungiga, s. o.

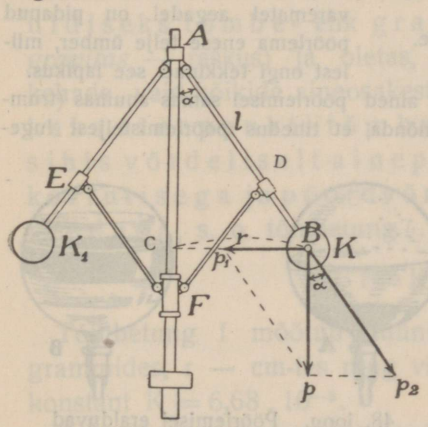
$$mg \tan \alpha = \frac{4\pi^2 mR}{T^2},$$ millest $\tan \alpha =$

$$= \frac{4\pi^2 R}{gT^2} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot 10}{9{,}8 \cdot 10^2} = 0{,}4 \text{ ja } \alpha = 22^0.$$



45. joon. Tasakaal uisutamisel.

4. Kesktõmbe-tungi omadusel põhjeneb n. n. Watti tsentrifugaal-regulaatori tarvitamine (46. joon.). Pöörleva püst-teljega AF on ühendatud varvadest kaldruut AEFD, mis muhvi F abil võib üles ja alla liikuda. Varvade AD ja AE otsas on massiivsed kerad K ja K_1. Mida suurem on regulaatori pöörlemise kiirus, seda suurem peab olema kesktõmbe-tung ja seda kõrgemale tõusevad tasakaalustamiseks kerad K ja K_1.



46. joon. Tsentrifugaalregulaator.

Lahendame järgmise ülesande: mitu tiiru sekundis (n) peab tegema regulaator, et varb AB moodustaks püstteljega nurga α?

Lahutame kera K raskuse p kaheks komponendiks: risti pöörlemisteljega (p_1) ja varva AB sihis (p_2). Komponent p_1 peab võrduma kesktõmbe-tungiga, s. o.

$$p_1 = p \tan \alpha = \frac{4\pi^2 mr}{T^2}.$$

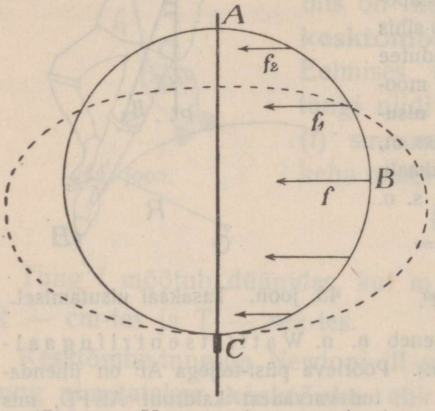
Et $p = mg$, $r = AB \cdot \sin\alpha = l \cdot \sin\alpha$ ja $T = \frac{1}{n}$, siis asendades saame: $mg \tan\alpha = 4\pi^2 m\, l \sin\alpha \cdot n^2$, millest

$$n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l\cos\alpha}}.$$

Kui $l = 20$ cm ja $\alpha = 30^0$, siis $n \approx 1{,}5$.

Aurumasina juures ühendatakse muhv F klapiga, mis reguleerib auru juurdepääsu silindrisse. Kui masin hakkab käima kiiremini, suureneb nurk α, muhv F tõuseb kõrgemale ning ühes sellega klapp asetub enam risti, takistades seega auru juurdepääsu. Masina käigu aeglasemaks muutumise korral mõjub regulaator vastupidises sihis.

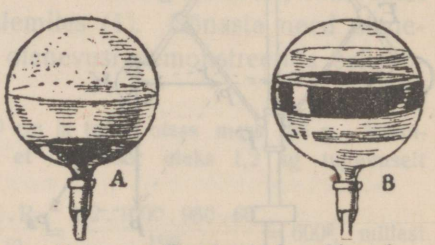
5. Vetruv rõngas ABC pöörleb telje ümber AC (47. joon.), olles kinnistatud teljega otsas C. Et rõnga osade tiirlemisperioodid on võrdsed, siis oleneb kesktõmbe-tung ainult kaugusest pöörlemisteljest, suurenedes keskkoha B sihis. Kesktõmbetungi moodustab antud juhul rõnga deformeerumisel tekkinud pinevus, mis on seda suurem, mida kiiremini pöörleb rõngas. Tõepoolest, rõngas muutub pöörlemisel lapikuks (punktiirjoon).



47. joon. Vetruva rõnga pöörlemine.

Täpsem Maa kuju uurimine näitab, et Maa on lapik pöörlemistelje sihis. Sellest järeldame, et Maa, kui ta mitte praegu ei peaks pöörlema, siis ta vähemalt varematel aegadel on pidanud pöörlema enese telje ümber, millest ongi tekkinud see lapikus.

6. Mitmesuguse tihedusega vedelad ained pöörlemisel samas anumas (trumlis) asetuvad kontsentriliste kihtidena nõnda, et tihedus pöörlemisteljest lugedes järjest suureneb (48. joon., B). Nii näiteks elavhõbeda, vee ja petrooleumi pöörlemisel moodustab sisemise kihi petrooleum, keskmise vesi ja välise elavhõbe. Sel nähtusel põhjeneb mitmesuguste separaatorite ehitamine. Näiteks koorelahutaja trumlis koguneb koor kui kergem osa trumli keskpaika, kuna piim kui raskem osa trumli äärtele koguneb ja säält välja juhitakse.



48. joon. Pöörlemisel eralduvad vedelikud tiheduse järjekorras.

1. Seleta, kuidas töötab meevurr, kuidas kasutatakse tsentrifugaal-masinat piima rasvaprotsendi määramisel, pesu kuivatamisel, terade sortimisel jne.

2. Millest tuleb veskikivide lõhkemine?

3. Mitu tiiru vähemalt peaks tegema sekundis, veepange käe otsas ($R = 70$ cm) püst-tasapinnas ringi tiirutades, et vesi mitte välja ei voolaks?

4. Lingunööri pikkus on 60 cm ja otsasoleva kivi mass 100 g. Leida lingunööri pinevus, kui ling teeb $2^1/_2$ tiiru sekundis.

5. Nööri pinevus katkemismomendil on 10 kg. Kui kiiresti võib selle nööri otsa seotud 200-grammilist massi püst-tasapinnas tiirutada, kui nööri pikkus on 1 m?

6. Jalgratta-sõitja teeb 10 sekundiga ühe ringi, mille raadius 10 m. Kui suure nurga moodustab ta püst-tasapinnaga?

7. Mitu korda kiiremini peaks Maa oma telje ümber pöörlema, et ekvaatoril asuvad kehad midagi ei kaaluks? Kuidas tuleks sama küsimus lahendada Tartu suhtes?

8. Kui suure rõhtsa algkiirusega tuleks visata keha, et ta enam Maa pääle ei langeks, vaid trabandina Maa ümber hakkaks liikuma?

51. Gravitatsioonitung. Kuu liigub ümber Maa, samuti Maa ja teised planeedid ümber Päikese peaaegu ringjoonelisi (õigemini elliptilisi) teid mööda. Me teame, et ringliikumine ei sünni iseenesest, vaid selleks läheb tarvis n. n. kesktõmbe-tungi, mis hoiab keha ringliikumisel. Järjelikult peab Kuu ja Maa, Maa ning Päikese jne. vahel mõjuma mingisugune tung, mis on võrdne kesktõmbe-tungiga, sest muidu kaoks tasakaal ja planeedid läheksid oma teedelt kõrvale. Newton nimetas selle tungi üldiseks tõmbe- ehk gravitatsioonitungiks (lad. k. *gravitas* — raskus) ja oletas, et ta ei mõju mitte ainult taevakehade, vaid kõikide aineosakeste (ainepunktide) vahel järgmiselt: kaks ainepunkti tõmbuvad neid ühendava sirge sihis võrdeliselt ainepunktide masside (m_1 ja m_2) korrutisega ja pöördvõrdeliselt nende kauguse (r) ruuduga, s. o. tõmbetung

$$f = K\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}.$$

Tõmbetung f mõõtub düünides, kus m_1 ja m_2 on mõõdetud grammides, r — cm-tes ning võrdetegur ehk n. n. gravitatsioonikonstant $K = 6{,}68 \cdot 10^{-8}$.

Selle järele pole meile tuntud keha tung Maa poole ehk raskus muud midagi kui gravitatsioonitung keha massi ja Maa massi vahel. Et mõju ja vastumõju on võrdsed, siis tungib näiteks kivi Maa poole sama tugevasti kui

Maa kivi poole. Tegelikult aga langeb kivi Maa poole, sest sama tungi mõjul on kiirendused pöördvõrdelised massidega, järjelikult Maa kiirendus tegelikult null, võrreldes kivi kiirendusega.

1. Kivi (1 kg) langeb Maa poole kiirendusega $9{,}8\frac{m}{sek^2}$. Kui suur $\left(\frac{m\mu}{sek^2}\right)$ on Maa ($d = 5{,}5\frac{g}{cm^3}$) kiirendus kivi poole? sinu keha massi poole?

2. Kui palju kaalub inimene (75 kg) Kuu kaugusel Maast?

3. Kui tugevasti (g) tõmbuvad teineteise poole kaks ühesugust tinakera, mille raadiused on 50 cm ja keskpunktide kaugus 2 m?

4. Mitu mg väheneb 1 kg (sinu) kaal 1 m võrra kõrgemale tõstmisel?

5. Kui suur peaks olema Maa kaaslase tiirlemisperiood, kui see kaaslane liiguks ümber Maa keskpunktist kahe Maa raadiuse kaugusel?

6. Kui kõrgel maapinnast kaotavad ekvaatoril asuvad kehad, mis ühes Maaga pöörlevad, oma kaalu?

52. Kuu liikumine seletub Maa tõmbega. Newton rakendas gravitatsiooniseaduse kõige esiti Kuu liikumise seletamiseks. Ta harutas järgmiselt: kui gravitatsioonitung on loomult ühesugune raskusega ja väheneb pöördvõrdeliselt kauguse ruuduga, siis peaks Maa raskusekiirendus Kuu tee kaugusel (g_1) olema $60{,}3^2$ korda vähem kui maapinnal, sest Kuu kaugus Maast on $60{,}3$ Maa raadiust. Järjelikult

$$g_1 = \frac{g}{60{,}3^2} = 0{,}27\left(\frac{cm}{sek^2}\right)$$

Teiselt poolt Kuu keskmise kauguse (384 400 km) ja tiirlemisperioodi (27,3 päeva) põhjal arvutades Kuu kesktõmbe-kiirenduse leiame samuti $0{,}27\frac{cm}{sek^2}$. Tähendab, gravitatsioonikiirendus võrdub kesktõmbe-kiirendusega, järjelikult Kuu kohta on gravitatsiooniseadus õige. Ka teiste taevakehade liikumiste seletamisel on gravitatsiooniseadus annud faktidega kooskõlas resultaadid.

Oma suure ulatuse poolest kuulub gravitatsiooniseadus üldisemate ja viljakamate looduseseaduste hulka.

Väljendada Kuu kaugus Maast Kuu tiirlemisperioodi (T), Maa raadiuse (R) ja gravitatsioonikiirenduse abil maapinnalt (G).

53. Maa pöörlemise mõju kehade kaalu kohta. a. Maa pöörleb enese telje ümber, tehes 24 tähetunni jooksul ühe täistiiru (tähe öö-päev on $\sim$ 4 min lühem keskmisest Päikese öö-päevast). Ühes Maaga liiguvad ka kõik maapinnal asuvad

kehad ümber Maa telje ringjoonelisi teid mööda. Selleks tarvismineva kesktõmbe-tungi saavad kehad raskustungist. Kui raskustungist kesktõmbe-tungiks kuluva osa ära lahutame, siis järelejäänud osa ongi see, mida meie nimetame kehade kaaluks. Järjelikult sama keha kaal ei ole igal pool maapinnal mitte ühesugune, vaid oleneb koha geograafilisest laiusest, sest kesktõmbetungi suurus Maa pöörlemisel telje ümber väheneb ekvaatorilt pooluse poole minnes. Mispärast?

*b. Oletame, et Maa on ühtlane kera, mille raadius R ja mass M, ning tema pinnal asub keha (ainepunkt) massiga m. Siis on Maa ja antud keha vahel mõjuv gravitatsiooni- (raskus-) tung $F = K\frac{mM}{R^2}$ kogu Maa pinnal sama. Tähistame selle keha kaalu ja kesktõmbe- tungi ekvaatoril p_o ja f_o, laiusel φ vastavalt p_φ ja f_φ. Et ekvaatoril F ja f_o mõjuvad samas sihis, siis on

$$p_o = F - f_o, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

millest $F = p_o + f_o$.

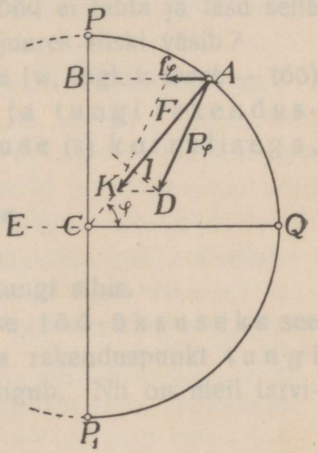
Valemist (1) näeme, et keha kaal ekvaatoril on gravitatsiooni- ja kesktõmbe-tungi vahe.

Kesktõmbe-tungi f_o arvutamiseks tuleb leida vastav kiirendus, s. o.

$$a_o = \frac{4\pi^2 R}{T^2} = \frac{4\pi^2 . 6378 . 10^5}{(24^h - 4^m)^2 . 60^4} \approx 3{,}39 \left(\frac{cm}{sek^2}\right).$$

Sellega on iga massi 1 g kaal ekvaatoril 3,39 düüni võrra vähem gravitatsioonitungist.

Üldisel juhul laiusel φ lahutame grav.-tungi F kaheks komponendiks f_φ ja p_φ, milledest f_φ oleks võrdne kesktõmbe-tungiga kohas A (49. joon.). Siis on komponent p_φ antud keha kaaluks.



49. joon.

Tõmbame punktist A raadiusega AD kaare, siis saame

$$p_\varphi = AK - JK$$
$$= F - f_\varphi \cos\varphi$$

Et $AB = AC\cos\varphi$, siis ka $f_\varphi = f_o \cos\varphi$ ja

$$p_\varphi = F - f_o \cos\varphi \cos\varphi = F - f_o \cos^2\varphi$$

$$= F - f_0 (1 - \sin^2 \varphi)$$
$$= (F - f_0) + f_0 \sin^2 \varphi$$
$$= p_0 + f_0 \sin^2 \varphi$$
$$= p_0 \left(1 + \frac{f_0}{p_0} \sin^2 \varphi \right)$$

$$\frac{f_0}{p_0} = \frac{m\, a_0}{m\, g_0} = \frac{a_0}{g_0} = \frac{3{,}39}{978} = \frac{1}{289} = 0{,}0035.$$

Järjelikult

$$p_\varphi = p_0 (1 + 0{,}0035 \sin^2 \varphi)$$
ehk $$g_\varphi = g_0 (1 + 0{,}0035 \sin^2 \varphi).$$

Viimane teoreetiliselt leitud valem annab g_φ jaoks liiga väikesed arvud, sest Maa ei ole mitte päris kerakujuline ja ühtlane, nagu alguses oletasime, vaid lapik pooluste sihis. Empiiriliselt on leitud, et katsetele kõige vastavamad resultaadid annab valem

$$g_\varphi = g_0 (1 + 0{,}0053 \sin^2 \varphi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

1. Leia valemi (2) põhjal g Tallinna ($\varphi = 59°26'$) ja Tartu ($\varphi = 58°23'$) kohta.

2. Mitu g kaalub keskmine inimene (75 kg) poolusel rohkem kui ekvaatoril?

3. Kas oleks tegelikult võimalik, arvesse võttes kaalu muutust, hangeldama hakata, ostes kaupasid põhja pool (Tallinnas) ja müües lõuna pool (Tartus)?

II. Töö ja energia

54. Töö ja selle mõõtmine. Töötegemisel ületame alati mõnesugust takistust, nagu raskustungi asjade tõstmisel, hõõrumist koormavedamisel jne. Kui ületatav takistus on 2—3 jne. korda suurem, siis on ka tehtud töö hulk sama palju kordi suurem. Üldse tööhulk on võrdeline ületatava takistuse suurusega. Näiteks 6 kg tõstmiseks 1 m võrra kõrgemale kulub tööd 3 korda rohkem kui 2 kg tõstmiseks samale kõrgusele. Teiselt poolt tehtud töö hulk oleneb tee pikkusest, millel takistus ületatud ja on sellega võrdeline. Too näiteid selle kohta!

Kui keha ei liigu, siis tung ei tee tööd. Näiteks hobune koormavedamisel: kui koorem on liiga raske ja hobune ei jõua teda paigast nihutada, siis tööd ei tehta ja tasu selle eest ei makseta. Mispärast hobune seejuures siiski väsib?

Kokkuvõttes võime öelda: töö hulka (w, ingl. k. *work* — töö) mõõdetakse tungi suuruse (f) ja tungi rakenduspunkti poolt käidud tee pikkuse (s) korrutisega, s. o.

$$\text{töö} = \text{tung} \cdot \text{tee}$$

ehk

$$w = f \cdot s,$$

kui tungi rakenduspunkt nihkub edasi tungi sihis.

Antud töödefinitsiooni põhjal võetakse töö-üksuseks see töö, mis teeb 1 tungi-üksus, kui tema rakenduspunkt tungi sihis 1 pikkuse-üksuse võrra edasi liigub. Nii on meil tarvitusel olevad töö-üksused:

1 kilogramm-meeter (kg-m) = 1 kilogramm . 1 meeter

1 erg = 1 düün . 1 cm

1 džoul (J) = 10^7 ergi.

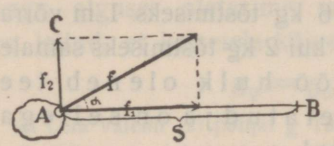
Kui näiteks 5 kg tõsta püsti 2 m võrra kõrgemale, siis teeme 5 . 2 ehk 10 kilogramm-meetrit tööd; kui 30-ergilise tungi rakenduspunkt nihkub edasi tungi sihis 20 cm võrra, siis on tehtud töö hulk sel juhul 30 . 20 ehk 600 ergi jne.

Prantsusmaal on seadusega 2. apr. 1919 kaubanduses ja tööstuses tungi põhi-üksusena võetud tarvitusele n. n. **steen** *(sthène)*, s. o. tung, mis ühes sekundis annab massile 1 tonn kiirenduse 1 $\frac{m}{sek^2}$.

Siit edasi minnes on töö-üksuseks võetud **kilodžoul** (kJ), s. o. töö, mis teeb tung 1 steen (sn), kui tema rakenduspunkt nihkub edasi tungi sihis 1 m võrra.

Võrdle neid tungi- ja tööüksusi teiste meile tuntud üksustega!

Sagedasti moodustab tungi (f) siht (50. joon.) rakenduspunkti edasiliikumise sihiga (AB) teatud nurga (α), näiteks lodja vedu nööriga kaldalt. Niisugusel juhul lahutame antud tungi f kaheks komponendiks: rakenduspunkti A edasiliikumise (AB) ja sellega risti (AC) sihis. Keha paneb liikuma ainult komponent f_1, kuna komponent f_2 mõjub edasiliikumise sihiga risti ja sellepärast ei aita kaasa liikumusele sihis AB (kasulik töö), küll aga suurendab külje hõõrumist (kahjulik töö). Et $f_1 = f \cos \alpha$, siis loeme sel juhul tungi f tööks



50. joon. Töö üldjuhul.

$$w = f_1 s = fs \cos \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Valem (2) väljendab töö suurust üldjuhul. Eritledes w olenevust nurgast α näeme, et töö tuleb lugeda positiivseks, kui $\alpha < 90^0$, negatiivseks, kui $90^0 < \alpha < 180^0$. Kivi käega üles tõstes teeb käe lihastetung positiivset, Maa* raskustung negatiivset tööd, alla langedes ümberpöördult.

*Tuleta töö üksus analoogiliselt kiiruse üksuse tuletamisele.

1. „Liikumata" paigal seistes, kätt kõrvale välja sirutatult hoides, vastu lauda rõhudes jne. väsime siiski sellest hoolimata, et füüsika mõttes seejuures tööd ei tee. Mispärast?

2. Mispärast ei tarvitata väsimustunnet tööhulga mõõtmisel?

3. Kui palju teeme tööd tõstes 5 kg 80 cm võrra kõrgemale?

4. Kui palju teeme tööd tõmmates 3 kg mööda rõhtsat lauda 80 cm võrra edasi?

5. Kuidas oleks võimalik mõõta tööd, mis teeb hobune koormavedamisel (sina kelguvedamisel jne.)?

6. Mitu kg-m tööd teed sina esimeselt korralt teisele minnes, kui kordade vahe on 4 m?

7. Väljenda kg-m ergides ja võrdle teda džouliga!

8. Kumb on suurem: kas mg-cm või erg?

9. Kas oleneb tungi töö ajast, mille jooksul tungi rakenduspunkt ühest punktist teise nihkub?

10. Kas on töö vektoriline või skalaarne suurus?

11. Kui suur on raskustungi töö 50 g-lise kivi langemisel 20 m võrra?

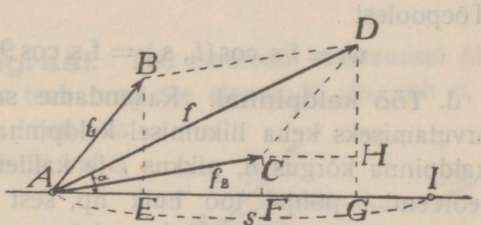
12. Mitu kg-m tööd kulub 1 pange vee tõstmiseks kaevust, mille sügavus 3 sülda?

13. Mitu kg-m tööd teeb raudtee vedur rongi Tallinnast Tartuni vedades, kui rong kaalub 360 tonni ja üldine liikumise takistus on 0,3% rongi raskusest?

14. Mitu kg-m tööd kulub selleks, et keha, mille mass 19,6 kg, 3 sek jooksul ühtlaselt kiirenedes 45 m edasi viia?

15. Mispärast on mööda konarlist teed koormavedamine (jalgrattaga sõitmine) palju raskem kui siledat teed mööda?

***55. Teoreemid tööhulga arvutamiseks.** a. **Resultanttungi töö** võrdub komponentide töö summaga. Olgu tung f tungide f_1 ja f_2 resultandiks ja moodustagu tungide sihid rakenduspunkti A edasinihkumise sihiga AJ vastavalt nurgad α, α_1 ja α_2 (51. joon.). Siis saame resultandi ja komponentide töö suuruse jaoks vastavalt avaldused:



51. joon. Resultandi töö.

$$w = f\,s\cos\alpha = AG\,.\,s$$
$$w_1 = f_1 s\cos\alpha_1 = AE\,.\,s$$
$$w_2 = f_2 s\cos\alpha_2 = AF\,.\,s$$

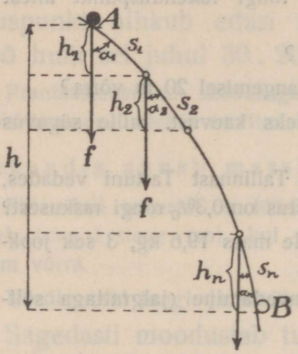
Et $AE + AF = AG$ (sest $AE = CH = FG$, mispärast?), siis $w_1 + w_2 = AE\,.\,s + AF\,.\,s = (AE + AF)\,.\,s = AG\,.\,s = w$.

*b. **Sihilt ja suuruselt jääva tungi töö** võrdub tungi suuruse ja tee projektsiooni korrutisega, kusjuures tungi rakenduspunkti poolt käidud tee projekteeritakse tungi sihile.

Olgu näiteks tarvis määrata töö suurust, mis teeb raskustung p keha allaveeremisel püst-tasapinnas mööda kõverat pinda AB (52. joon.). Lahutame kogu tee AB üksikuteks väikesteks osa-

deks s_1, s_2, ... s_n ja olgu sedaviisi saadud tee elementide ja tungi sihi vahel olevad nurgad vastavalt α_1, α_2, ... α_n. Kogu töö võrdub üksikutel tee elementidel tehtud töö summaga, järjelikult

$$w = f s_1 \cos\alpha_1 + f s_2 \cos\alpha_2 + \ldots + f s_n \cos\alpha_n = f(s_1 \cos\alpha_1 + s_2 \cos\alpha_2 + \ldots + s_n \cos\alpha_n) = f(h_1 + h_2 + \ldots + h_n) = f h.$$



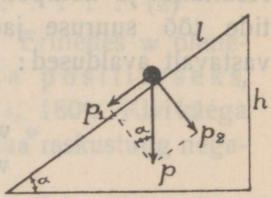
52. joon. Sihilt ja suuruselt jääva tungi töö.

Lõppresultaadist järeldub, et töö suurus antud juhul e i o l e n e m i t t e t e e k u j u s t, vaid ainult algus- ja lõpppunkti suhtelisest asendist.

c. **Tungi töö võrdub nulliga,** k u i t u n g i s i h t o n k o g u a e g r i s t i r a k e n d u s p u n k t i e d a s i l i i k u m i s e t e e g a, sest siis on igal tee-elemendil tehtud töö null. Tõepoolest

$$w_i = f_i s_i \cos(f_i, s_i) = f_i s_i \cos 90^0 = f_i s_i . 0 = 0.$$

d. **Töö kaldpinnal.** Rakendame saadud tulemused tööhulga arvutamiseks keha liikumisel kaldpinnal. Kui keha raskus on p, kaldpinna kõrgus h, pikkus l ja kaldenurk α (53. joon.), siis on teoreemi b põhjal töö hulk hp, sest kogu aeg on tungi suurus ja siht jääv ning kaldpinna kõrgus on kaldpinna pikkuse projektsiooniks tungi sihile.



53. joon. Töö kaldpinnal.

Teoreemi a rakendamiseks lahutame keha raskuse p komponentideks p_1 ja p_2 vst. pikuti ja risti kaldpinnaga. Komponendi p_1 töö võrdub $p_1 l = p \sin\alpha . l = ph$, kuna komponendi p_2 töö teoreemi c põhjal võrdub nulliga. Nagu näha, on mõlema teoreemi põhjal saadud tulemused samad ega olene kaldenurgast, vaid ainult k a l d p i n n a k õ r g u s e s t j a t u n g i s u u r u s e s t.

1. Millega võrdub gravitatsioonitungi töö Maa liikumisel ümber Päikese, Kuu liikumisel ümber Maa jne?

2. Pendel, mille pikkus 1 m ja mass 20 g, on viidud tasakaalu-asendist kõrvale 30⁰-lise nurga võrra. Leida raskustungi töö pendli massi liikumisel antud asendist tasakaalu-asendini.

***56. Tungi töö graafiline kujutamine.** Juhul, kui jääva tungi (f) siht on sama tungi rakenduspunkti edasiliikumissihiga (s), väljendub töö suurus (w) valemiga $w = fs$. Et see valem oma kuju poolest on täiesti analoogiline ühtlasel liikumisel käidud tee valemiga [$s = vt$], siis võime tööd kujutada graafiliselt sarnaselt käidud teepikkuse kujutamisega § 25. Siin vastab ajale kaugus, kiirusele tung ja käidud teepikkusele töö.

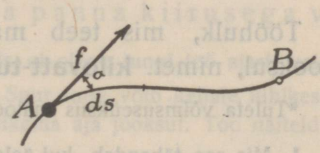
Üldjuhul väljendub töö valemiga: $w = fs\cos\alpha$. Asendame korrutise $f\cos\alpha$ ühe teguriga f_1 (tungi f projektsioon rakenduspunkti liikumissihile), saame üldise valemi kujul: $w = f_1 s$, mis väljendub graafiliselt analoogiliselt kiiruse muutumise graafikule üldjuhul (24. joon.),

1. Kujutada graafiliselt töö (kg-m), mis teeb raskustung 5 kg vabal langemisel 2 esimese sekundi jooksul.

2. Ehitada töö graafik harmoonilisel võnkliikumisel ja leida selle põhjal ühe perioodi jooksul tehtud töö hulk (ergides), kui amplituud $R = 10$ cm, periood $T = 2$ sek ja mass $m = 20$ g.

***57. Töö kui integraal.** Töö suuruse määramisel üldjuhul tuleb leida töö, mis teeb tung tee elemendil ds, ehk n. n. töö differentsiaal $dw = f\cos\alpha\, ds$ (54. joon.). Tehtud töö hulk vahemikus AB on siis

$$w = \int_A^B dw = \int_A^B f\cos\alpha\, ds.$$



54. joon.

Näide. Määrame töö harmoonilisel võnkliikumisel esimese veerandperioodi jooksul. Nagu § 46 nägime, on $a = -\frac{4\pi^2}{T^2} s$, järjelikult $f = ma = -\frac{4\pi^2 m}{T^2} s$ ja

$$w = \int_R^0 dw = \int_R^0 -\frac{4\pi^2 m}{T^2} s\, ds = -\frac{4\pi^2 m}{T^2} \int_R^0 s\, ds = -\frac{4\pi^2 m}{T^2} \cdot \int_R^0 \frac{s^2}{2} = \frac{4\pi^2 m}{T^2} \cdot \frac{R^2}{2} = \frac{2\pi^2 m}{T^2} R^2.$$

1. Kujutleme, et Maa keskpunktist kuni pinnani on tehtud sirge kanal. Leida töö, mis tuleb teha, et massi $m = 1$ g Maa keskpunktist ($R = 6371$ km) kuni pinnani tõsta, kui Maa keskmine tihedus on $d = 5{,}5 \frac{g}{cm^3}$. Kas oleneb see töö kanali kujust?

2. Kui palju tööd teeks Maa Kuu langemisel Maa pääle? Vasta sama küsimus Maa langemise puhul Päikese pääle!

58. Võimsus. Masinate kui ka iga teise töötõu tarvitamisel peame teadma, kui suur on antud masina või töötõu **võimsus**, milleks nimetame tööhulka, mis masin võib teha ühe ajaüksuse jooksul. Kui näit. t sek jooksul masin teeb w kg-m-it tööd, siis on selle masina keskmine võimsus $u = \frac{w}{t}\ \frac{\text{kg-m}}{\text{sek}}$. Saadud valemist järgneb, et $w = ut$, s. o. tehtud töö hulk võrdub võimsuse ja aja korrutisega.

Võimsust $75\frac{\text{kg-m}}{\text{sek}}$ nimetatakse **hobusejõuks** (HP, inglise k. horse — hobune ja power — jõud), sest tugeva hobuse võimsus pikemat aega töötades on ~ 1 HP, kuna inimese võimsus on $\sim 10\frac{\text{kg-m}}{\text{sek}}$.

Võimsust $1\frac{\text{džoul}}{\text{sek}}$ nimetatakse **vatiks (W)**. Tuhat vatti on **1 kilovatt (kW)**.

Tööhulk, mis teeb masin võimsusega 1 kilovatt ühe tunni jooksul, nimet. **kilovatt-tunniks (kWh)**.

*Tuleta võimsuseüksus analoogiliselt kiiruseüksuse tuletamisele!

1. Mis see tähendab, kui öelda: keha võimsus on $5\frac{\text{erg}}{\text{sek}}$, $3\frac{\text{kg-m}}{\text{min}}$, $20\frac{\text{džoul}}{\text{h}}$ jne.?

2. Mitu korda on hobuse võimsus inimese omast suurem?

3. Väljenda võimsus 1 HP vattides ja kilovattides!

4. Mitu kg-m-it on 1 kilovatt-tund?

5. Mitu kg-m-it tööd teeb tööline keskmiselt 8-tunnilise tööpäevaga?

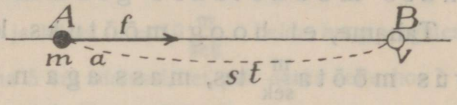
6. Mitme inimese tööjõu aset täidab aurukatel, mille võimsus on 6 HP?

7. Narva kose võimsus on ~ 75000 HP. Mitu töömeest suudavad teha 8-tunnilise tööpäeva juures sama palju tööd kui Narva kosk?

8. Arvesse võttes kohalisi inimese tööjõu (näiteks 40 mk. tund) ja elektrienergia (näiteks 16 mk. kilovatt-tund) hindasid, arvutada, kumb tööjõud on odavam.

9. Omnibus sõidab 50 min. keskmise võimsusega 15 HP ja tarvitab ära selle aja jooksul 20 naela bensiini. Leida: a) tehtud töö hulk kilovatt-tundides; b) mitu % energiast muondus tööks, kui bensiini küttevääртus on 11000?

59. Hoog. Paigalolevasse kehasse, mille mass m g, mõjub kogu aeg jääv tung f düüni. Selle mõjul hakkab keha liikuma ühtlaselt kiirenevalt kiirendusega a $\frac{cm}{sek^2}$ ja nihkub t sek jooksul edasi s cm võrra (55. joon.). Tungi f töö s cm ulatuselon



55. joon.

$w = fs = mas, \ldots (1)$

sest $f = ma$. Ühtlaselt kiireneva liikumise valemitest

$$v = at \text{ ja } s = \frac{at^2}{2} \text{ saame:}$$

$as = \frac{a^2t^2}{2} = \frac{(at)^2}{2} = \frac{v^2}{2}$. Asendades valemis (1) korrutise as temaga võrdse suurusega $\frac{v^2}{2}$ saame

$$fs = \frac{mv^2}{2}, \ldots (2)$$

s. o. tungi töö keha liikumapanemisel võrdub massi (m) ja lõppkiiruse ruudu (v^2) korrutise poolega. Nimetame avalduse $\frac{mv^2}{2}$ keha **hooks.** Sellega siis keha hoog $\frac{mv^2}{2}$ näitab töö hulka, mis teeb tung, et keha paigalolekust liikuma panna kiirusega v.

Et hoovalem $\left(\frac{mv^2}{2}\right)$ ei sisalda aega (t), siis ei olene tungi töö ajast, vaid ainult lõppkiirusest (v) ja keha massist (m). Suur tung võib kehale lühikese aja jooksul anda sama kiiruse kui vähem tung pikema aja jooksul. Too näiteid!

Olgu asendis A keha kiirus v_o, asendis B v $\frac{cm}{sek}$ (55. joon.). Siis on asendis A keha hoog $\frac{mv_o^2}{2}$ ja asendis B $\frac{mv^2}{2}$. Et hoog näitab töö hulka, mis on tung teinud liikumise algusest kuni antud momendini, siis on tungi f töö vahemikus AB lõpp- ja alghoo vahe, s. o.

$$fs = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} \ldots (3)$$

Viimane valem näitab, et üldjuhul tungi töö teatud teevahemikus võrdub hoo juurdekasvuga selles vahemikus.

Meie tuletasime hoo valemi erijuhul, kui tung f on jääv. Mehaanikas tõendatakse, et valemid (2) ja (3) on õiged igasuguse tungi juures. Hoo valem on oma rakenduste poolest mehaanikas üks viljakamaist. Hoogu nimetatakse vahest ka liikumisjõuks.

Et keha hoog mõõdab selle keha liikumapanemiseks kulutatud töö hulka, siis tuleb hoogu mõõta töö-üksustes: ergides, kg-m-tes jne. Valemist (2) selgub, et hoog mõõtub ergides, kui mass mõõdetakse grammides ja kiirus $\frac{cm}{sek}$-tes.

Tahame, et hoog mõõtuks kg-m-tes, siis tuleb kiirus mõõta $\frac{m}{sek}$-tes, mass aga n. n. tehnilistes üksustes, mis 9,8 korda kilogrammist suurem, sest tung 1 kg annab massile 9,8 kg kiirenduse 1 $\frac{m}{sek^2}$. Tõenda seda lähemalt!

60. Mõned hoo valemi rakendused. a. Keha suudab teha oma hoo arvel alati niipalju tööd, kui palju tööd on kulunud selle hoo tekitamiseks.

Olgu keha hoog $\frac{mv_o^2}{2}$. Kui kehasse hakkab mõjuma liikumisele vastassihis jääv tung f, siis teeb see tung kogu aja negatiivset tööd ja keha liikumine muutub ühtlaselt tasanevaks. Lõpuks jääb keha seisma ja $v = 0$. Rakendades hoo üldvalemi saame: $-fs = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_o^2}{2}$. Et lõpphoog $\frac{mv^2}{2} = 0$, siis $-fs = -\frac{mv_o^2}{2}$ ehk $fs = \frac{mv_o^2}{2}$. Et kehasse mõjuv tung ületatakse hoo arvel, siis näitab viimane valem, et keha suudab teha hoo arvel alati niipalju tööd, kui palju tööd on kulunud selle hoo tekitamiseks.

b. Raudtee-rong, mille mass m, liigub ühtlaselt kiirusega v. Leida side veduritõmbe (f) ja hõõrumistungi (f_1) vahel.

Rongi liikuma panev tung peab võrduma veduri tõmbe ja takistuste vahega, s. o. $f - f_1$. Järjelikult

$$(f - f_1)s = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_o^2}{2} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Et $v = v_o$, siis $(f - f_1)s = 0$, millest $f - f_1 = 0$ ja $f = f_1$, sest $s \neq 0$. Järjelikult rongi ühtlasel liikumisel võrdub veduri tõmme takistuste kogusummaga.

Eritle valemit (1) juhul kui: $v > v_o$ ja $v < v_o$.

c. Kui kõrgele tõuseb keha, mis on püsti üles visatud algkiirusega v_o?

Olgu tõusu kõrgus h ja keha mass m, siis $f = mg$ ning

$-mgh = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_o^2}{2}$. Et $v = 0$, siis $\frac{mv^2}{2} = 0$ ja $-mgh = -\frac{mv_o^2}{2}$, millest $h = \frac{v_o^2}{2g}$, s. o. sama tulemus, mis varemini (§ 39) leidsime teisel teel.

1. Tennispalli mass $m = 50$ g ja kiirus $v = 10 \frac{m}{sek}$. Leida hoog ergides. Missugune jääv tung peaks mõjuma 5 cm ulatusel, et pall saaks selle hoo?

2. Uisutaja (60 kg) sõidab kiirusega $4 \frac{m}{sek}$. Leida hoog kg-m : tes.

3. Kuuli mass on $m = 49$ g ja kiirus $v = 400 \frac{m}{sek}$. Leida hoog kg-m : tes

4. Raudtee-rong liigub kiirusega $60 \frac{km}{h}$. Palju maad läheb rong edasi rõht sal teel ainult endise hoo arvel, kui üldine takistuse koeff. on 0,004?

5. Kui suure algkiirusega on võimalik 1,5 m kõrgusele hüpata? Kas oleneb tarvisminev algkiirus hüppaja massist?

6. Vasarahoobi mõjul läks nael 2 cm puu sisse. Leida puu takistus, kui vasara mass on 0,8 kg ja lõppkiirus $2 \frac{m}{sek}$, oletades, et puu takistus on kogu aja ühesugune.

7. Raudtee-rong, mille mass 300 tonni, sõidab jaama kiirusega $10 \frac{m}{sek}$ ja jääb piduri mõjul seisma 10 sek jooksul. Leida piduri takistus.

8. Leida iga kg-massi (enese) hoog Maaga ümber Päikese liikudes.

61. Energia. Töötegemisel ületame keha liikumise takistusi, nagu raskustungi, hõõrumist, inertsi jne. Ilma takistuste ületamiseta ei ole tööd, samuti kui ei ole tööd ilma liikumiseta. Nagu eelmises § nägime, võib iga liikuv keha teha tööd enese hoo arvel, näiteks aurukatla hooratas ümber vedades masinaid, liikuv kahurikuul kindlustusi lõhkudes jne. Hoo valemist $\frac{mv^2}{2}$ järgneb, et liikuva keha võime teha tööd on võrdeline keha massiga ja kiiruse ruuduga. Too näiteid selle kohta!

Kuid võime teha tööd pole mitte ainult liikuvail kehadel, vaid ka inimese ja looma keha lihastel, ülestõstetud raskustel (kellapommid), kokkukeeratud vedrul (kellavedru), kokkusurutud aurul katlas, lõhkeainetel (püssirohi, dünamiit) jne.

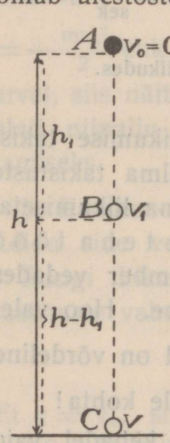
Keha võimet teha tööd nimet. keha **energiaks.** Kehas olevat energiat mõõdetakse selle tööhulgaga, mis keha

suudab teha. Nii siis on energia kehas olev töötagavara.

Too näiteid kehadest, milledes on energiat.

62. Kineetiline ja potentsiaalne energia. Mitmesugused energia liigid jagatakse harilikult kahte rühma: kineetiline ja potentsiaalne energia. Kineetiline ehk liikumis-energia on seotud liikumisega ühel või teisel kujul. Siia kuulub: liikuva keha energia (hoog), soojus, üldse igasuguste kiirte energia (hääle, valguse, soojuse jne. kiired) ja elektrivoolu energia. Potentsiaalne ehk asendi energia oleneb kehade või keha osade vastastikusest asendist, näiteks Maa — kivi jne. Siia kuulub: raskuse-, vetruvuse-, keemiline, elektrilaengu-, magneti- ning muskli-energia.

63. Näiteid energia moondumisest. a. Keha, mille mass m g, on tõstetud h cm Maa pinnast kõrgemale. Seejuures on tehtud mgh ergi tööd. Kui ülestõstetud keha on paigal, siis temal kineetilist energiat ei ole, sest hoog on null, küll aga omab ülestõstetud keha potentsiaalset energiat, mille hulk mõõtub keha raskuse ja tõstmise kõrguse korrutisega (mgh). Tõepoolest ülestõstetud ja lahtilastud keha langeb raskustungi mõjul Maa pääle ja võib seejuures teha tööd sama palju, kui palju tööd kulutati keha ülestõstmiseks. Kui näiteks 5 kg tõsta 2 m kõrgusele, siis teeme meie raskustungi ületamiseks 5.2 ehk 10 kg-m:it tööd. Lahtilastud keha raskustung teeb langemisel 10 kg-m:it tööd. Seejuures mida madalamale jõuab keha, seda vähemaks muutub tema potentsiaalne energia (mgh), kuna kineetiline energia langemisel järjest suureneb. Maa pinnale jõudes on potentsiaalne energia null, kineetiline energia aga kõige suurem.



56. joon.

Hoo valemi abil on kerge näidata, et langeva keha potentsiaalse ja kineetilise energia summa on alati jääv ning võrdub ülestõstmiseks kulutatud tööga.

Olgu keha kiirus asendis A $v_0 = 0$, asendis B — v_1 ja asendis C — v (56. joon.). Rakendades hoo valemi keha langemisele B-st C-sse, saame, kui $p = mg$:

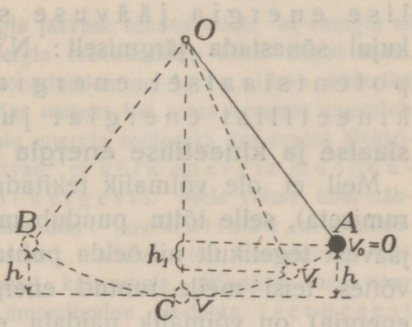
$$p(h - h_1) = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2},$$

millest $p(h-h_1) + \frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv^2}{2} = ph$, sest $ph = \frac{mv^2}{2}$.

Siit näeme, et keha langemisel sünnib alaline potentsiaalse energia moondumine kineetiliseks, nõnda et mõlema energialiigi summa on jääv. Püsti ülesvisatud keha juures sünnib ümberpöördud nähtus: kineetiline energia moondub potentsiaalseks.

Tõenda, et ka sel puhul on mõlema energia liigi summa jääv ja võrdub keha hooga liikumise alul.

b. Samuti võime kergesti näidata, et ka pendli võnkumisel on alati potentsiaalse ja kineetilise energia summa jääv (57. joon.). Pendli massi mg tasakaaluasendist C viies asendisse A teeme mgh ergi tööd, mis saab pendel potentsiaalse energia näol ning mis on pendli edaspidise võnkumise põhjuseks. Liikudes asendist A asendisse C langeb pendli mass järjest allapoole, potentsiaalne energia väheneb, kuid kineetiline energia sellevastu suureneb. Pendli massi kiiruse asendis C saame valemist $mgh = \frac{mv^2}{2}$, millest $h = \frac{v^2}{2g}$ ja $v^2 = 2gh$. Saadud hoo arvel tõuseb pendli mass teisel pool tasakaalu-asendit C samale kõrgusele, millest pendel lahti oli lastud, sest kineetiline energia moondub potentsiaalseks. Tõepoolest, olgu asendi B kõrgus C suhtes h_1. Siis hoovalemi põhjal kirjutame:



57. joon.

$-mgh_1 = -\frac{mv^2}{2}$, sest lõppkiirus on null. Siit leiame, et $h_1 = \frac{v^2}{2g} = h$.

Olgu mõnesuguses asendis pendli massi kiirus v_1 ja langemiskaugus algseisust h_1. Rakendades hoo valemit, saame:

$mg(h - h_1) = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}$, millest $mg(h - h_1) + \frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv^2}{2} =$

$= mgh = \text{const.}$

1. Näita, et keha mööda kaldpinda alla- või ülesveeremisel potentsiaalse ja kineetilise energia summa on jääv.

2. Tee riist, millega võib näidata, et pendli mass tõuseb alati kõrgusele, millest ta oli lahti lastud, hoolimata pendli pikkusest (Galilei pendel).

64. Energia jäävus. Eelmises § käsitletud näidetes võisime tähele panna, et keha potentsiaalne energia (ülestõstetud keha) võib moonduda kineetiliseks (kiirus) ja ümberpöördult, kusjuures mõlemate energiate kogusumma on alati jääv. Eeltingimuseks on, et nähtused sünnivad ilma liikumise takistusteta (hõõrumine, keskkonna takistus). Leitud side potentsiaalse ja kineetilise energia vahel mehaanikas on üldine ja nimet. mehaanilise energia jäävuse seaduseks, mille võime üldkujul sõnastada järgmiselt: Niipalju kui keha kaotab potentsiaalset energiat, sama palju peab ta kineetilist energiat juurde saama ehk: **potentsiaalse ja kineetilise energia summa on jääv.**

Meil ei ole võimalik tekitada liikumist ilma takistuseta (hõõrumiseta), selle tõttu puudub meil võimalus mehaanilise energia jäävust tegelikult nii-öelda puhtal kujul demonstreerida. Arvesse võttes teisi meile tuntud energia liikisid (soojuse-, elektri- jne. energia) on võimalik näidata, et energiajäävuse seadus on maksev kõigi füüsikaliste nähtuste kohta.

Töötamisel kulutatud energia ei hävi. Iga töö tagajärjena ilmub kuskil uus energia tagavara, kas sama või mõnd teist liiki; näiteks keha liikumapanemiseks ärakulutatud töö tagajärjena saame ülestõstetud keha potentsiaal-energia, hõõrumise ületamise tagajärjena soojuse energia jne.

Kui võrrelda töötegemisel äratarvitatud energia hulka selle töö hulgaga, mis ilmub töö tagajärjena, siis leiame, et mõlemad energia hulgad on võrdsed, s. o. mõlemate nende energia hulkade täielisel tööks moondumisel saaksime sama palju tööd. Selles seisabki n. n. **energia jäävuse seadus:** niivõrt kui

loodusenähtusi on järele uuritud, pole seni kuskil tähele pandud energia hävimist, vaid ainult tema ekvivalentset moondumist ühest liigist teise.

Täpsed mõõtmised näitavad, et mehaanilise energia soojuseks muutumisel annab iga 427 kg-m ühe kg-kalori soojust ja ümberpöördult. Selle põhjal võime alati välja arvutada, palju tööd on võimalik saada antud soojusehulga arvel.

1. Nimeta meile tuntud energia allikad!

2. Mispärast vasar ja alasi tagumisel soojaks lähevad, samuti saeleht saagimisel, puur puurimisel, traat painutamisel jne.?

3. Jälgi energia moondumist Päikese kiirte energiast kuni elektrivalguseni?

4. Mis sünniks siis, kui Maa oma liikumisel ümber Päikese jääks äkitselt seisma? Mitu kg-kalorit soojust vabaneks iga 1 kg-massi hoo arvel?

5. Kui suur peaks olema vähemalt tinakuuli kiirus, et ta äkitselt seisma jäädes ära sulaks?

65. Energia hajumine. Energia jäävuse seadus ütleb, et energia ei hävi, vaid looduses toimub ainult energia moondumine ühest liigist teise. Nüüd tõuseb küsimus, kas energia moondumine on igas sihis ühteviisi võimalik või ei ole ta seda mitte? Kas näiteks töö sama kergesti moondub soojuseks kui soojus tööks, elektrivoolu energia soojuseks kui soojus elektrienergiaks jne. Vaatlus ja katse näitavad, et kõik energia moondumised ei sünni mitte ühteviisi kergesti. Meie võime kõik nähtused (energia moondumised) jagada kahte liiki: loomulikud, s. o. niisugused, mis sünnivad nii-öelda iseenesest, näiteks: töö moondumine soojuseks, soojuse liikumine kuumalt kehalt külmemale, diffusioon jne., ning mitteloomulikud, kus energia moondumine nii-öelda iseenesest ei sünni, nagu soojuse moondumine tööks jne. Sellest järeldame, et looduses on valitsemas teatud tendents, milles nähtused sünnivad. Mitteloomuliku nähtuse tekitamine (soojuse moondumine tööks aurumasina abil) on võimalik ainult siis, kui sellega nii-öelda vastutasuks käib kaasas loomulik nähtus (soojuse liikumine kuumalt kehalt jahedamale, aurumasinast jahutajasse).

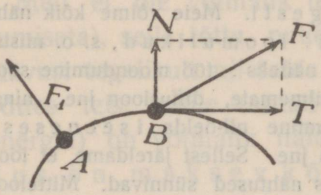
Selle kõigi loodusenähtuste üle valitseva tendentsi sõnastas *Lord Kelvin* († 1907) järgmiselt: Kõik energia liigid püüavad moonduda soojuseks, viimane aga püüab levida igale poole ühtlaselt ja lõpuks kiirgada maailma-ruumi laiali. Kõik energia põnevuste vahed püüavad tasanduda.

Et meil tegelikult on tähtis töö, iga energia liik aga mitte ühteviisi kergesti ei muutu tööks, sellepärast pole kasutamise mõttes mitte ükskõik, missugusel kujul teatud energia hulk meile on antud. Meie veekogud näiteks sisaldavad väga suured hulgad soojuse-energiat, kuid meie ei saa seda mitte kasutada.

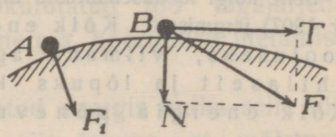
III. Tasakaal

66. Vaba ja mittevaba keha (ainepunkti) üldised tasakaalu tingimused. Keha on vaba, kui ta saab igas sihis vabalt liikuda, näiteks õhku ülesvisatud kivi, taevakeha (Maa, Päike) ilmaruumis jne. Kui keha võib liikuda ainult teatud sihis, näiteks arvelaua kuulikesed mööda traati, raudtee-rong mööda rööpaid jne., siis on meil tegemist mittevaba keha liikumisega. Dünaamikast teame, et vaba keha on tasakaalus, s. o. kas püsib paigal või liigub ühtlaselt ja sirgjooneliselt, siis kui temasse mõjuvate tungide resultant on null. Tõepoolest, vastasel korral annaks Newtoni II seaduse põhjal resultant-tung kehale kiirenduse, mis hävitaks tasakaalu.

Mittevaba keha võib olla tasakaalus, kui resultant-tung on kas null või mõjub niisuguses sihis, milles keha ei saa liikuda, näiteks risti võimaliku liikumissihiga. Oletame, et 58. joon. kujutatud keha võib liikuda ainult mööda varba AB. Asendis A on tung liikumissihiga risti, järjelikult keha on tasakaalus; asendis B lahutame mõjuva tungi BF komponentideks: liikumise sihis BT (tangentsiaalne) ja sellega risti BN (normaalne). Arusaadav, et sel juhul komponent BT mõjul keha hakkab liikuma. Samalaadiliselt tuleb käsitleda keha tasakaalu liikumisel mööda pinda, nagu 59. joon. näha. Kui keha on seotud mõne paigalpüsiva punktiga, näiteks pendli mass niidi abil kinnituspunktiga, siis peab tasakaalu korral resultandi siht minema läbi kinnituspunkti.



58. joon. Tasakaal varval.

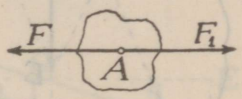


59. joon. Tasakaal pinnal.

67. Kõvva kehha mõjuva tungi tasakaalustamine. Mehaanikas mõeldakse kõva keha all niisugust keha, mille kuju ega suurus ei muutu mistahes suurte tungide mõjul. Tegelikult on meile tuntud n. n. kõvad kehad (kivi, teras jne.) ainult enam-vähem kõvad. Absoluutselt ehk päris kõva keha mehaanika mõttes meie ei tunne.

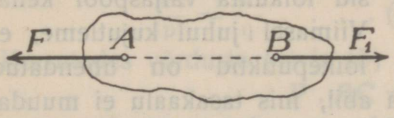
Kõva keha ehk lihtsalt keha tasakaalu-tingimuste tundmaõppimisel edaspidi kasutame järgmisi lihtsaid lauseid.

a. Keha tasakaal ei muutu samas punktis rakendatud võrdvastupidiste tungide mõjul, sest nende summa on null (60. joon.).



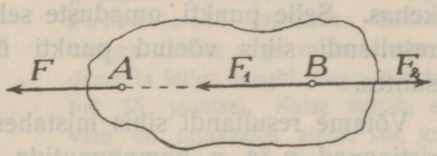
60. joon.

b. Keha tasakaal ei muutu samal sirgel rakendatud võrdvastupidiste tungide mõjul (61. joon.). Tõepoolest tungid F ja F_1 püüavad anda kehale võrdvastupidised kiirendused, järjelikult keha liikumise olek ei muutu.



61. joon.

c. Tungi mõju kehasse ei muutu, kui tungi rakenduspunkti kehas ümber asendada tungi sihis (62. joon.). Olgu antud tung F rakendatud punktis A. Rakendame tungi sihis punktis B kaks võrdvastupidist tungi F_1 ja F_2, mis suuruselt võrdsed F-ga. Lause b põhjal F ja F_2 tasakaalustuvad, jääb järele ainult tungi F_1 mõju tungi F asemel.



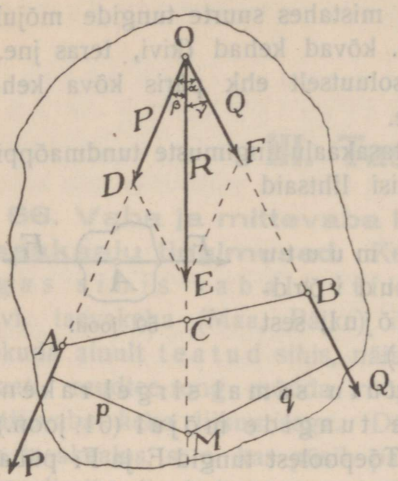
62. joon.

Tegelikult tasakaalustame tungi mõju kehasse sellega, et kinnitame paigale kas tungi rakenduspunkti või mõne punkti tungi sihis (lööme näiteks naela läbi).

Kuidas on tegelikult võimalik tungi rakenduspunkti edasi kanda tungi sihis?

68. Kõvva kehha mõjuvate tungide liitmine juhul, kui tungi sihid on ühes tasapinnas. a. Kuidas liidetakse sama sirge sihis või samas punktis rakendatud tungid,

seda nägime § 17. Kui punktides A ja B rakendatud tungide P ja Q sihid moodustavad üksteisega nurga α (63. joon.), siis pikendame tungide sihte kuni lõikumiseni punktis C ja kanname tungide rakenduspunktid ühisesse lõikepunkti. Nüüd võime kasutada tungide P ja Q liitmiseks rööpküliku reeglit; saame resultandi R, mille suuruse võime leida kas graafiliselt või arvutades. Viimasel juhul saame $\triangle$ ODE-st:



63. joon.

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha \quad (1)$$

Tarvitatud mõttekäik kõlbab ka siis, kui tungide sihid peaksid lõikuma väljaspool keha. Viimasel juhul kujutleme, et lõikepunktid on ühendatud kehaga „kaalutu" varva või keha abil, mis tasakaalu ei muuda.

Resultandi R leidnud, võime tema rakenduspunkti edasi kanda tungi sihis mistahes keha punkti selles sihis. Eriliselt tähtis on meile antud tungide P ja Q rakenduspunktide A ja B ühendava sirge ning resultandi sihi lõikepunkt C, mis asub harilikult antud kehas. Selle punkti omaduste selgitamiseks tõendame enne iga resultandi sihis võetud punkti üldise omaduse komponentide suhtes.

Võtame resultandi sihis mistahes punkti M ja tõmbame sellest ristjooned p ja q komponentide sihtidele. Joonisest näeme, et $p = OM \sin\beta$ ja $q = OM \sin\gamma$; edasi saame

$$\frac{p}{q} = \frac{OM \cdot \sin\beta}{OM \cdot \sin\gamma} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{Q}{P},$$

millest

$$Pp = Qq \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Nimetame tungi suuruse (P) ja antud punktist (M) tungi sihile tõmmatud ristjoone pikkuse (p) korrutise **tungi momendiks antud punkti suhtes.** Momendi mõiste abil võime valemi (3) sõnastada järgmiselt: komponentide mo-

mendid iga resultandi sihis võetud punkti suhtes on võrdsed.

b. Kui P ja Q sihid muutuvad rööpseteks, siis lõikepunkt O nihkub lõpmatusse ja $\alpha = 0$. Sel juhul saame valemist (1): $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ = (P + Q)^2$, millest

$$\mathbf{R = P + Q}, \text{ s. o. } \ldots\ldots (2)$$

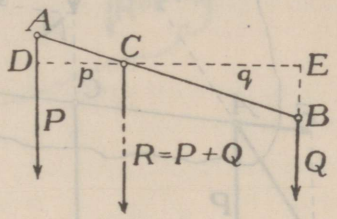
rööptungide resultant võrdub komponentide summaga.

Rakendame momendi lause rööptungide resultandi rakenduspunkti C kohta (64. joon.), siis saame:

$$Pp = Qq \ldots (4)$$

Et CD ja CE moodustavad sama sirge (mispärast?), siis $\triangle$ ACD $\sim$ $\sim$ $\triangle$ BCE ja

$$\frac{AC}{p} = \frac{BC}{q} \ldots\ldots (5)$$

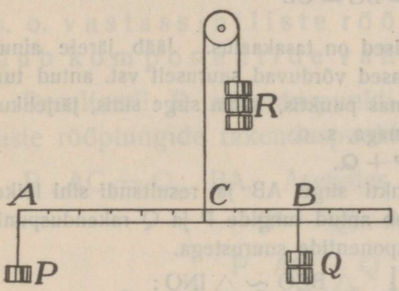


64. joon.

Korrutades võrduste (4) ja (5) vastavad pooled saame:

$$\mathbf{P \cdot AC = Q \cdot BC}, \ldots\ldots (6)$$

s. o. rööptungide resultandi siht jagab komponentide rakenduspunktide vahe pöördvõrdeliselt komponentide suurustega.



65. joon. Rööptungide liitmine.

Rööptungide resultandi suuruse ja rakenduspunkti omadusi on kerge katseliselt tõendada. Selleks võtame ühtlase sirge varva ja rakendame ta külge tungid, nagu kujutatud 65. joonisel. Katse näitab, et varb on tasakaalus ainult siis, kui $\mathbf{P + Q = R}$ ja $\mathbf{P \cdot AC = Q \cdot BC}$.

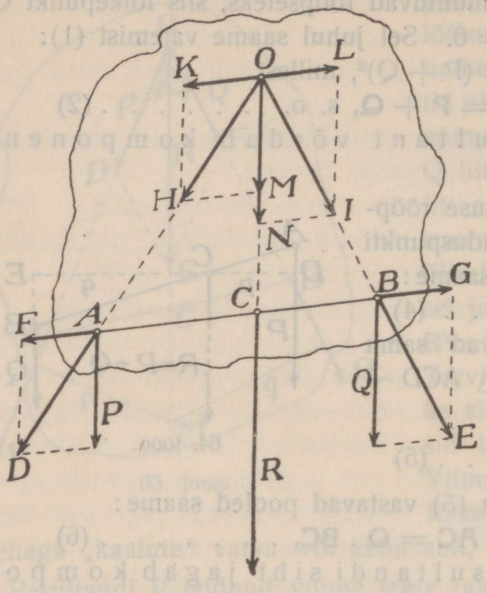
Katsetegemisel tuleb muidugi arvestada ka varva raskust.

1. Kõvasse kehasse punktes A ja B mõjuvad samas sihis vastavalt tungid $P = 3$ kg ja $Q = 5$ kg. Leida resultandi suurus ja rakenduspunkti C asukoht, kui $AB = 40$ cm.

2. Veekandja kannab kaelkookudega vett, täis pang kummaski otsas. Leida rõhumise suurus õlale, arvestades ka tühjade pangede ja kookude raskust.

3. Isa ja poeg kannavad vahepuus, mille pikkus 1,8 m, rukki vakka (48 kg). Mitu kg tuleb kanda isal ja mitu kg pojal, kui koti kaugus pojapoolsest otsast on 135 cm.

*69. **Samasihiliste rööptungide liitmine.** Endisele lisaks toome siin tuntud geomeetrilise viisi samasihiliste rööptungide resultandi leidmiseks. Olgu antud rööptungid P ja Q rakendatud punktes A ja B (66. joon.). Ühendame A ja B sirgega ning rakendame A-s ja B-s vördvastupidised tungid F ja G, sellest tasakaal ei muutu (§ 67). Liites P ja F ning Q ja G, saame antud rööptungide asemele samas tasapinnas asuvad lõikuvad tungid AD ja BE.



66. joon. Rööptungide liitmine.

Nüüd kanname nende rakenduspunktid ühisesse lõikepunkti O ja lahutame sedaviisi edasikantud tungid OH ja OI komponentideks antud tungide P ja Q ning nende rakenduspunktide A ja B ühendava sirge sihis (kaks antud sihti!). Saame OH asemele komponendid OK ja OM ning OI asemele komponendid OL ja ON. Et $\triangle OKH = \triangle AFD$ ja $\triangle OLI = \triangle BGE$ (mispärast?) siis

$$AF = OK = BG = OL$$

a $OM = P$ ning $ON = Q$.

Tungid OK ja OL kui vördvastupidised on tasakaalus. Jääb järele ainult komponentide OM ja ON mõju. Viimased vörduvad suuruselt vst. antud tungidega P ja Q ning on rakendatud samas punktis, sama sirge sihis, järjelikult nende resultant R vördub P ja Q summaga, s. o.

$$\mathbf{R = P + Q.}$$

Kanname resultandi R rakenduspunkti sirge AB ja resultandi sihi lõikepunkti C. Tõendame, et punkt C jagab antud tungide P ja Q rakenduspunktide A ja B vahe pöördvõrdeliselt komponentide suurustega.

$\triangle ACO \sim \triangle HMO$:	$\triangle BCO \sim \triangle INO$:
$\frac{AC}{HM} = \frac{OC}{OM}$	$\frac{BC}{IN} = \frac{OC}{ON}$

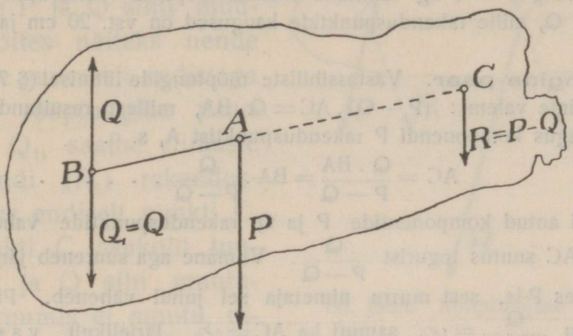
Jagades saame: $$\frac{AC \cdot IN}{HM \cdot BC} = \frac{OC \cdot ON}{OM \cdot OC}.$$

Et $IN = HM$ ja $ON = Q$ ning $OM = P$ võime valemi (3) lihtsustatult kirjutada nõnda:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{Q}{P}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

millest $$\mathbf{P \cdot AC = Q \cdot BC.}$$

70. Vastassihiliste rööptungide liitmine. Vastassihilised rööptungid P ja Q on rakendatud vastavalt punktides A ja B (67. joon.). Nende liitmiseks lahutame suurema tungi, s. o. P, kaheks rööpseks komponendiks Q_1 ja R nõnda, et kom-



67. joon. Vastassihiliste rööptungide liitmine.

ponent Q_1 oleks võrdvastupidine Q-ga. Tungid Q ja Q_1 tasakaalustuvad kui võrdvastupidised. Jääb järele ainult tung R, mis ongi otsitavaks resultandiks.

Et $Q_1 + R = Q + R = P$, siis

$$R = P - Q, \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

s. o. vastassihiliste rööptungide resultant võrdub komponentide vahega.

Resultandi R rakenduspunkti C määramiseks võime samasihiliste rööptungide rakenduspunkti omaduse põhjal kirjutada:

$R \cdot AC = Q_1 \cdot BA$. Asetades $R = P - Q$ ja $Q_1 = Q$, saame:

$$(P - Q) \cdot AC = Q \cdot BA; \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

$$P \cdot AC - Q \cdot AC = Q \cdot BA;$$

$$P \cdot AC = Q \cdot BA + Q \cdot AC = Q \cdot (BA + AC)$$

$$P \cdot AC = Q \cdot BC \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Nagu valemist (2) näha, on vastassihiliste rööptungide resultandi rakenduspunktil sama omadus, mis samasihilistelgi, s. o. komponentide rakenduspunktide kaugused resultandi rakenduspunktist on pöördvõrdelised komponentide suurustega.

§ 68 kirjeldatud katse on ühtlasi ka vastassihiliste rööptungide liitmise tõenduseks. Tõepoolest, tasakaalu korral (65. joon.) $P+Q=R$ ja $P.AC=Q.BC$. Võttes R ja P antud komponentideks, on $Q=R-P$ resultandiks.

1. Kõva keha punktes A ja B mõjuvad vastassihilised tungid $P=10$ kg ja $Q=15$ kg. Leida resultandi R suurus ja rakenduspunkti C asukoht, kui $AB=24$ cm.

2. Antud tung $R=3$ kg lahutada kaheks rööpseks vastassihiliseks komponendiks P ja Q, mille rakenduspunktide kaugused on vst. 20 cm ja 60 cm.

***71. Tungide paar.** Vastassihiliste rööptungide liitmisel (§ 70, 67 joon., valem 2.) saime valemi: $(P-Q).AC=Q.BA$, millest resultandi rakenduspunkti C kaugus komponendi P rakenduspunktist A, s. o.

$$AC=\frac{Q.BA}{P-Q}=BA.\frac{Q}{P-Q} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Et BA kui antud komponentide P ja Q rakenduspunktide vahe on jääv, siis oleneb AC suurus tegurist $\frac{Q}{P-Q}$. Viimane aga suureneb järjest Q suuruse lähenedes P-le, sest murru nimetaja sel juhul väheneb. Piirväärtuses, kui $Q=P$ on $\frac{Q}{P-Q}=\infty$, samuti ka $AC=\infty$. Järjelikult, *vastassihiliste võrdsete rööptungide resultant asub lõpmatuses ja on suuruselt null* ($P-Q=0$, sest $P=Q$). Teiste sõnadega, vastassihilistel võrdsetel rööptungidel ei ole resultanti, s. o. *üht* niisugust tungi, mis võiks antud kahe tungi mõju asendada. Järjelikult meil ei ole ka võimalik kaht niisugust tungi ühe tungi abil tasakaalustada.

Nimetame kaks vastassihilist võrdset rööptungi *tungide paariks*. Et tungide paaril puudub resultant, siis ei või tungide paar keha edasi liikuma, küll aga *pöörlema* panna. Näiteks magnetnõelasse mõjuvad Maa magnetismi tungid moodustavad paari ja püüavad magnetnõela pöörata nõnda, et ta asuks alati magnetimeridiaani sihis.

72. Hulga rööptungide liitmine. a. Hulga rööptungide liitmisel talitame samuti kui hulga vektorite liitmisel, s. o. liidame kaks tungi, saadud osaresultandiga liidame kolmanda tungi jne. kuni lõpuni. Lõplik resultant võrdub kõigi komponentide summaga ja ei olene liitmise järjekorrast.

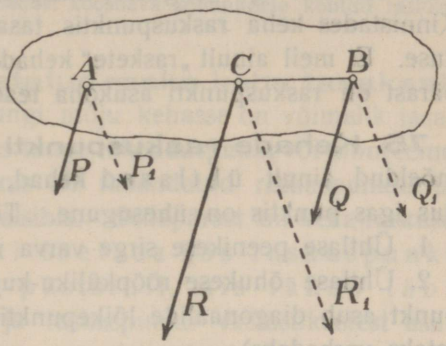
Kolmnurga tippudes mõjuvad järjest samas sihis rööpsed tungid 2 kg, 2 kg ja 4 kg. Leida resultandi suurus ja rakenduspunkt.

73. Rööptungide keskpunkt. Rööptungide liitmisel (§ 68) saime valemi, mis määrab resultandi rakenduspunkti C asukoha komponentide rakenduspunktide A ja B suhtes järgmiselt (64. joon.):

$$P.AC=Q.BC \text{ ehk}$$

$$\frac{P}{Q}=\frac{BC}{AC} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

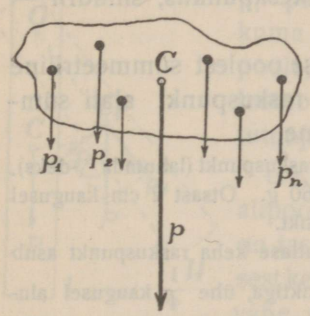
Nagu neist valemitest näha, oleneb resultandi R rakenduspunkti C asukoht *ainult komponentide* P ja Q *suurusest* ning nende rakenduspunktide A ja B kaugusest, *mitte aga komponentide* sihist. Järjelikult komponentide P ja Q sihti muutes, võttes näiteks nende asemele suuruselt endistega võrdse rööptungide paari P_1 ja Q_1, saame viimaste resultandi (R_1) rakenduspunktiks endiselt punkti C. Et punkti C asukoht tungide P ja Q sihi muutumisel ruumis ei muutu, nimetatakse seda punkti antud *rööptungide keskpunktiks*. Mitte ainult kahe, vaid mistahes hulga rööptungide kohta võime leida n. n. rööptungide keskpunkti, s. o. niisuguse punkti, milles on rakendatud rööptungide resultant ja mille asukoht ei muutu, kui antud rööptungide (komponentide) sihid ruumis muutuvad, suurused aga endiseks jäävad.



68. joon. Rööptungide keskpunkt.

Valemist (C) selgub ka, et rööptungide keskpunkt ei muutu, kui kõigi komponentide suurus samas suhtes muutub, sest selle tõttu komponentide suhe ei muutu (ühine tegur koondub).

74. Raskuspunkt. Iga keha võime kujutella koosnevana üksikutest aineosakestest ehk ainepunktidest. Gravitatsiooniseaduse põhjal tungib iga aineosake Maa keskpunkti poole. Et Maa keskpunkt on küllalt kaugel (6371 km) ja käsitletavad kehad võrdlemisi väikesed (ainult mõned meetrid), siis võime samade kehaosakeste Maa poole tungi sihid lugeda tegelikult rööpseteks. Keha raskus P pole muud midagi, kui üksikute aineosakeste raskuse $p_1, p_2 \ldots$ resultant (69. joon.). Selle rakendus-



69. joon. Raskuspunkt.

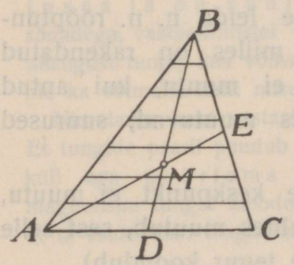
punkt, mis on üksikute aineosakeste raskuse kui rööptungide keskpunktiks, nimetatakse *raskuspunktiks*. Rööptungide keskpunkti omaduse põhjal ei olene keha raskuspunkti asukoht keha asendist ega kaugusest maapinnast, vaid on igal kehal jääv. Kinnistades keha raskuspunktis tasakaalustame sellega tema raskuse. Et meil ainult „raskete" kehadega tuleb tegemist teha, sellepärast on raskuspunkti asukoha teadmine tegelikult väga tähtis.

75. Kehade raskuspunkti määramine. Allpool on mõeldud ainult *ühtlased* kehad, s. o. niisugused, mille tihedus igas punktis on ühesugune. Tõenda, et:

1. Ühtlase peenikese sirge varva raskuspunkt on varva keskel.

2. Ühtlase õhukese rööpküliku-kujulise tasase plaadi raskuspunkt asub diagonaalide lõikepunktis (tõenduseks lahutada rööpseteks varbadeks).

3. Ühtlase õhukese kolmnurkse plaadi raskuspunkt on mediaanide lõikepunktis (70. joon.). Lahutame plaadi alusele AC tõmmatud rööpjoontega rööpseteks varbadeks. Iga varva raskuspunkt asub varva keskel, tähendab kogu plaadi raskuspunkt asub mediaanil BD, millel asuvad kõikide varbade keskpunktid. Samuti arutades külje BC suhtes leiame, et raskuspunkt peab asuma mediaanil AE, järjelikult ta asub nende lõikepunktis M.



70. joon. Kolmnurga raskuspunkt.

4. Ühtlase rõnga, ringi ja korrapärase hulknurga raskuspunkt asub nende geom. keskpunktis.

5. Ühtlase kera raskuspunkt asub kera keskpunktis, silindril — telje keskkohas jne.

Üldse, kui ühtlane keha on oma ehituse poolest sümmeetriline mõne punkti suhtes, siis asub selle keha raskuspunkt alati sümmeetria keskpunktis, näiteks kera, kuup jne.

1. Leida geomeetriliselt ühtlase nelinurkse plaadi raskuspunkt (lahutada△-deks).

2. Ühtlane sirge varb on 1 m pikk ja kaalub 60 g. Otsast 2 cm kaugusel on kinnistatud raskus 12 g. Leida varva raskuspunkt.

3. Tõendada, et kolmnurkse püramiiditaolise ühtlase keha raskuspunkt asub sirgel, mis ühendab tipu aluse mediaanide lõikepunktiga, ühe $\frac{1}{4}$ kaugusel alusest. Üldistada teoreem igasuguse püramiidi ja koonuse kohta.

4. Kolmnurkne ühtlane plaat, mille raskus 15 kg, toetub tippudes. Leida rõhumine igas tipus.

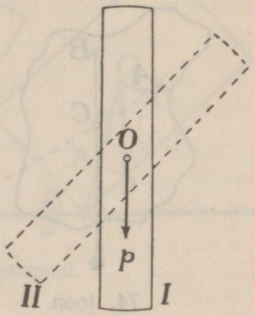
5. Leida: a) Päikese ja Maa, b) Maa ja Kuu raskuspunkt.

6. Leida ühtlastest rasketest varbadest koosneva kolmnurkse konturi raskuspunkt.

76. Ühes punktis toetatud raske keha tasakaal.

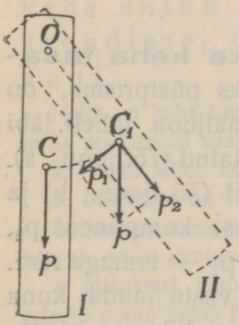
Varemini nägime (§ 67), et tungi mõju kehasse on võimalik tasakaalustada, kui kinnistada kas tungi rakenduspunkt või mõni teine punkt tungi sihis. Keha raskus on rakendatud raskuspunktis ja mõjub alati püst- ehk vertikaalsihis. Sellepärast on keha raskuse tasakaalustamiseks küllalt, kui toetada kas raskuspunkt või mõni teine punkt püstsihil, mis läheb läbi raskuspunkti. Toetus- ja raskuspunkti vastastikustest asukohtadest olenevad keha mitmesugused tasakaalu juhused.

a. Kui keha on toetatud raskuspunktis, siis on tasakaal ükskõikne, sest keha jääb tasakaalu igas asendis pöördumisel toetuspunkti (O) ümber (71. joon.).



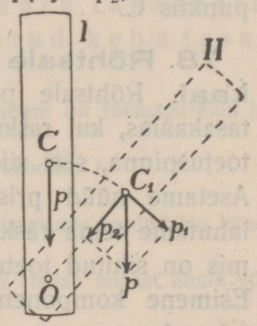
71. joon. Ükskõikne tasakaal.

b. Kui toetuspunkt asub püstjoonel ülevalpool raskuspunkti, siis on keha tasakaal püsiv, sest tasakaalust välja viidud keha tuleb ise jälle endisesse tasakaalu-seisu tagasi. Olgu õhukese plekiriba (papi- või lauatükk) toetuspunkt O ja raskuspunkt C (72. joon.). Asendis I on plekiriba püsivas tasakaalus. Lahutame asendis II raskuse p kaheks komponendiks: p_1 ja p_2, milledest p_1 paneb plekiriba liikuma tasakaalu-asendi poole, kuna p_2 tasakaalustub toetuspunkti O vastumõjuga.



72. joon. Püsiv tasakaal.

c. Kui toetuspunkt asub allpool raskuspunkti, siis on tasakaal mittepüsiv, sest keha tasakaalu-seisust vähe välja viies ei tule ta ise sinna mitte enam ta-



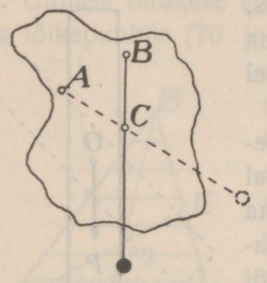
73. joon. Püsimatu tasakaal.

gasi, nagu 73. joon. tehtud raskustungi lahutamisest näha, vaid kaldub veel enam kõrvale püsiva tasakaalu-asendi sihis.

Keha potentsiaalenergia muutumise seisukohalt nimetatud tasakaalu-juhtusid hinnates näeme, et püsiva tasakaalu juhul on keha potentsiaalne energia kõige väiksem, sest raskuspunkt on kõige madalamal, mittepüsiva tasakaalu juhul — kõige suurem (mispärast?), ükskõikse tasakaalu korral jääb keha potentsiaalne energia igas asendis samaks (mispärast?).

Eritle sellelt seisukohalt ühtlase kera tasakaalu tingimusi a) rõhtsal, b) nõgusal ja c) kumeral pinnal. Võrdle siin esinevaid tasakaalu tingimusi eespoolkirjeldatud juhtudega.

77. Raskuspunkti määramine katseliselt. Eespool seletatud püsiva tasakaalu juhu põhjal on kerge katselisel teel keha raskuspunkti määrata. Selleks võtame antud keha, näiteks papitüki (74. joon.), ja toetame teda punktis A nõnda, et ta selle punkti ümber annaks vabalt pöörduda; nüüd laseme keha asuda püsiva tasakaalu-asendisse ja märgime ära vertikaaljoone AC, millel asub püsiva tasakaalu asendis raskuspunkt (C). Teises punktis B keha rippu lastes saame vertikaaljoone BC, millel samuti peab asuma raskuspunkt. Tähendab, otsitav raskuspunkt, mis asub ühtlasi mõlemail sirgjoontel AC ja BC, peab asumanende joonte lõikepunktis C.



74. joon.

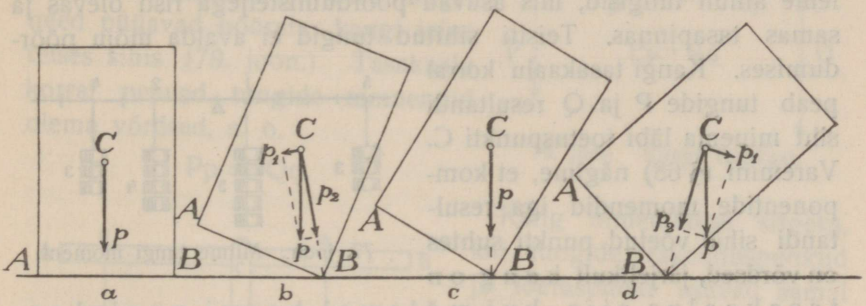
78. Rõhtsale pinnale toetuva raske keha tasakaal. Rõhtsale pinnale toetuv keha, näiteks püstprisma, on tasakaalus, kui raskuspunktist tõmmatud vertikaaljoon läheb läbi toetuspinna, sest siis on keha raskus tasakaalustatud (75. joon., a). Asetame nüüd prisma lauale kaldu servale B (75. joon., b) ja lahutame tema raskuse p kaheks komponendiks: komponent p_2, mis on sihitud toetusservale B, ja komponent p_1 — temaga risti. Esimene komponent rõhub prismat servapidi vastu lauda, kuna teine komponent prismat ta endisse seisu tagasi liikuma paneb. Prismat veel rohkem paremale poole kaldu pöörates (75. joon., c)

saame asendi, milles raskuspunktist C tõmmatud vertikaaljoon toetusservast otse läbi läheb. Tasakaal on küll olemas, kuid ta on püsimatu, sest sellest asendist vähe ühele või teisele poole kõrvale kaldudes ei tule keha enam oma endisse asendisse tagasi.

Viimases, 75. joon. kujutatud asendis (d) on komponent p_1 sihitud endisest asendist väljapoole ja keha kukub ümber.

Nagu neist juhtudest näha, tuleb keha, mis püsiva tasakaalu asendist välja viidud, ainult siis oma endisse asendisse tagasi, kui raskuspunktist tõmmatud püstjoon läheb seespool toetus-piirjoont.

Püsimatu tasakaalu asendis (juht c) on keha raskuspunkt kõige kõrgemal. Tõenda seda geomeetriliselt! Sellest järgneb, et töö-



75. joon. Toetuva keha tasakaalu juhused.

hulk, mis kulub keha viimiseks sesse asendisse, lähtudes esialgsest asendist, on kõige suurem võrreldes teiste vahepäälsete asenditega. Mida rohkem tööd kulub selleks, et keha antud asendist viia püsimatu tasakaalu asendisse, seda püsivam on antud keha tasakaal.

Näita, et keha tasakaal on seda püsivam, mida suurem on toetuspiirjoon ja mida madalamal asub raskuspunkt.

1. Kumb läheb kergemini ümber: kas õle- või liivakoorem?

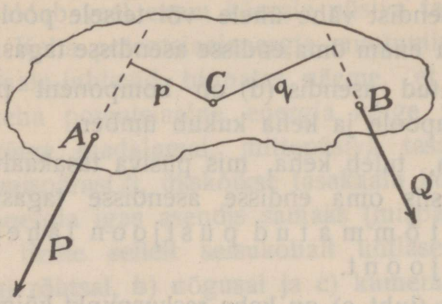
2. Mispärast on karkudel raske kõndida?

3. Mispärast mööda palki või latti kõndides meie tasakaalu hoidmiseks käed kõrvale välja sirutame?

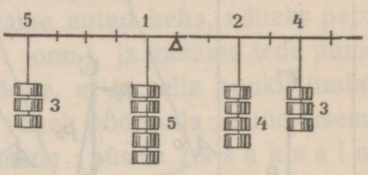
4. Mispärast inimene, kes mingit raskust kannab, hoiab ennast ühele või teisele poole kaldu?

5. Kumb lamp läheb kergemini ümber: kas tühi või petrooleumiga täidetud?

***79. Kang.** Võtame keha, mis annab vabalt pöörduda raskuspunktist (C) läbimineva telje ümber (76. joon.). Siis on keha raskus tasakaalustatud pöördumisteljega, mis on toetatud alusele. Olgu selle keha külge rakendatud punktes A ja B vastavalt tungid P ja Q, mis püüavad pöörata keha teine teises sihis. Nimetame niisuguse keha kangiks. Et keha ainult telje ümber võib pöörduda, siis vaatleme ainult tungisid, mis asuvad pöördumisteljega risti olevas ja samas tasapinnas. Teisiti sihitud tungid ei avalda mõju pöördumises. Kangi tasakaalu korral peab tungide P ja Q resultandi siht minema läbi toetuspunkti C. Varemini (§ 68) nägime, et komponentide momendid iga resultandi sihis võetud punkti suhtes on võrdsed, järjelikult kang on tasakaalus siis, kui mõlemal kangi poolel rakendatud tungide momendid toetuspunkti suhtes on võrdsed, s. o.



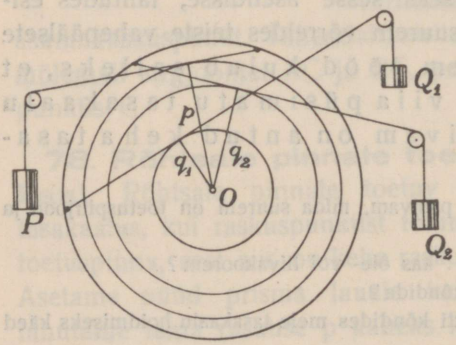
76. joon. Kang.



77. joon. Mitme tungi moment.

$$Pp = Qq.$$

Kui lugeda tungide momendid, mis püüavad pöörata keha päripäeva, positiivseteks, tungide momendid, mis püüavad pöörata keha vastupäeva, negatiivseteks, siis võime kangi tasakaalu tingimuse mistahes tungide arvu juures sõnastada järgmiselt: kang on tasakaalus, kui



78. joon. Tasakaal üldjuhul.

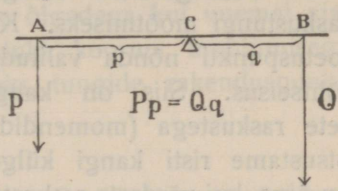
temasse mõjuvate tungide momentide summa toetuspunkti suhtes on null.

Viimast reeglit on lihtne tõendada katseliselt sirge kangi juhul, nagu 77. joon. näha. Üldjuhul on kasulik võtta ühtlane ketas, mis pöördub keskpunktist läbimineva telje ümber (78. joon.). Siis on ketta raskus tasakaalustatud. Plokkide abil ketta külge mitmesuguseid tunge rakendades ja ära mõõtes vastavad ristjoone pikkused p, q, p_1, q_1 jne. näeme, et tasakaalu korral on

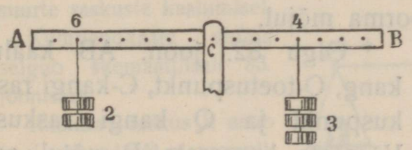
$$\sum_{i=1}^{n} P_i p_i = \sum_{i=1}^{n} Q_i q_i.$$

80. Ühe- ja kahepoolne kang. Harilikult nimetame kangiks varba, mis võib pöörduda toetuspunkti ümber samas tasapinnas ja mille külge on rakendatud pöördumis-tasapinnas kaks tungi; need püüavad pöörata kangi teine teises sihis (79. joon.). Tasakaalu korral peavad tungide momendid olema võrdsed, s. o.

$$Pp = Qq.$$

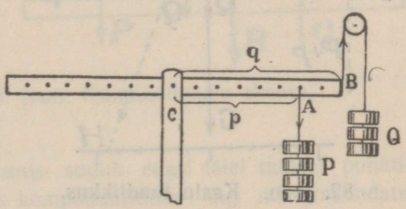


79. joon. Kangi tasakaal.



80. joon. Kahepoolne kang.

Kang nimetatakse sirgeks, kui tungide rakenduspunktid ja toetuspunkt asuvad samal sirgel, vastasel korral on meil tegemist kõvera või murtud kangiga. Kui tungid on rakendatud mõlemal pool toetuspunkti, siis nimetat. kang kahepoolseks (80. joon.), on aga tungid rakendatud ühel pool toetuspunkti, siis on kang ühepoolne (81. joon.). Kõikide kangi liikide kohta maksab sama tasakaalu tingimus, nimelt tungide momentide võrdus.



81. joo. Ühepoolne kang.

Vahel nimetatakse tungi rakenduspunkti kaugus toetuspunktist kangi õlaks. Sirge kangi ja rööpsete tungide juhul on võimalik väljendada kangi tasakaalu tingimusi ka kangi õlgade abil. Kuidas? Otstarbekohasem üldsuse mõttes on aga selle asemel rääkida tungi õlast, kui toetus-

punkti kaugusest tungisihist (p, q) ja väljendada kangi tasakaalu tingimus alati momentide lause abil. Juhul, kui kang on sirge ja rõhtsas asendis ning tungid mõjuvad vertikaalselt, langevad mõlemad tasakaalu tingimused ühte.

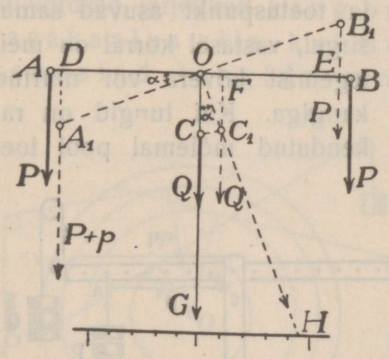
1. Too näiteid kangi tarvitamise kohta igapäevases elus! Nimeta kõik meile tuntud kangi põhimõttel ehitatud riistad!

2. Kahepoolse kangi õlgade pikkused on 15 cm ja 20 cm ning lühema õla otsas ripub raskus 2 kg. Missugune raskus tuleb tasakaalu korral suurema õla otsa riputada ja kui suur on rõhumine toetuspunktis?

3. Kahepoolse kangi õlgade pikkused on 50 cm ja 70 cm, rõhumine toetuspunktis 78 kg. Missugused tungid on tasakaalustatud?

4. Ühepoolse kangi abil, mille pikkus 52 cm, on tasakaalustatud kaks vastassihilist rööptungi: 4 kg ja 2,5 kg. Leida kangi õlgade pikkus.

81. Kangkaal. Kangkaal on sirge võrdõlgne kang kehade raskustungi mõõtmiseks. Kangi raskuspunkt peab olema allpool toetuspunkti nõnda valitud, et kang oleks püsivas tasakaalus rõhtseisus. Siis on kang rõhtseisus ka koormamisel võrdsete raskustega (momendid on võrdsed). Kangi rõhtseisu üle otsustame risti kangi külge kinnistatud rao näitamisega. Kaal on õige, kui võrdsete raskustega koormamisel kaalukang on rõhtus. Pääle õige näitamise on kaalu juures väga tähtis n. n. t u n d l i k k u s, s. o. rao võimalikult suur kõrvalekaldumine tasakaaluseisust õige väikese lisakoorma mõjul.



82. joon. Kaalu tundlikkus.

* Olgu 82. joon. AB kaalu kang, O-toetuspunkt, C-kangi raskuspunkt ja Q kangi raskus. Võrdsete koormate P mõjul on kang AB tasakaalus rõhtseisus. Pahema poole koormatist lisakoorma p võrra suurendades kaob endine tasakaal ja kang võtab uue tasakaalu-seisu A_1B_1. Et tungide momendid, mis kangi vastassihis püüavad pöörata, peavad olema võrdsed, siis saame:

$$(P + p) \cdot OD = P \cdot OE + Q \cdot OF$$

$$P \cdot OA_1 \cos\alpha + p \cdot OA_1 \cos\alpha = P \cdot OB_1 \cos\alpha + Q \cdot OC_1 \sin\alpha.$$

Et $OA_1 = OB_1 = OA$, saame pärast lihtsustamist

$$p \cdot OA \cos\alpha = Q \cdot OC_1 \sin\alpha, \text{ millest}$$

$$\tan\alpha = \frac{p \cdot OA}{Q \cdot OC} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Korrutades valemi (l) mõlemat poolt rao pikkusega OG = L ja asetades OA = l ning OC = d, saame rao otsa kõrvalekaldumise suuruse GH = OG . tg α jaoks valemi:

$$GH = \frac{P.l.L}{Q.d} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Valemist (2) näeme, et kaalu tundlikkus on:

1. võrdeline kangi õla (l) ja rao (L) pikkusega;

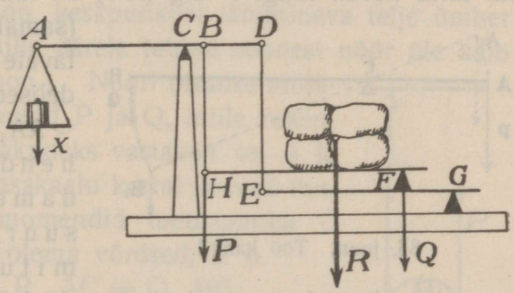
2. pöördvõrdeline kangi raskusega (Q), ja raskuspunkti kaugusega toetuspunktist (d).

Nende tingimuste teostamine ei ole sugugi kerge, sest näiteks õlgade pikkuste suurendamine suurendab ühtlasi ka kangi raskust jne. Vanasti ehitati kaalud pikemate õlgadega kui uuemal ajal. Ka on tähtis, et tundlikkus ei muutuks koorma muutumisega. Selleks on tarvis, et toetuspunkt asuks tungide rakenduspunkte ühendava sirge keskel.

82. Kümnend- ehk detsimaalkaal. Tegelikus elus on väga suure tähtsusega n. n. kümnendkaal. Nimi on tulnud sellest, et kaalutav raskus tasakaalustatakse kümme korda kergemate vihtidega, mis eriti tähtis suurte raskuste kaalumisel.

Kümnendkaalu ehitus selgub skemaatiliselt 83. joonisest.

Kaalutav raskus R asub kaalu alusel või platvormil. Lahutame asja koguraskuse R kaheks komponendiks P ja Q. Komponent P mõjub vahetult kangi AD punktis B, kuna komponent Q kaudselt aluse EG kaudu mõjub.



83. joon. Kümnendkaalu skeem.

Vaatame nüüd, missugustel tingimustel komponendi Q suurus andub edasi täiel määral punktile B. Lahutame Q omakorda rõõpseteks komponentideks: Q_1, mis rakendatud punktis E ja mille mõju varva ED kaudu andub edasi punktisse D, ning komponent Q_2, mis rakendatud punktis G ning tasakaalustub toetuspunktis (alusega). Et suuruselt $Q_1 = \frac{FG}{EG} . Q$, siis vaatame, missugusel tingimusel on Q_1 mõju punktis D ühevääriline Q mõjuga punktis B. Selleks on tarvis momentide võrdust, s. o.

$$Q . BC = Q_1 . CD \quad \text{ehk}$$

$$Q \cdot BC = Q \cdot \frac{FG}{EG} \cdot CD$$

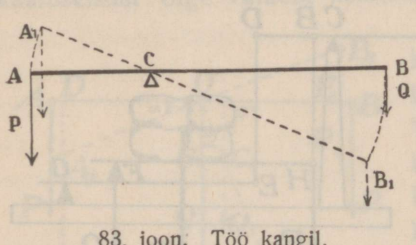
millest

$$\frac{BC}{CD} = \frac{FG}{EG} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Valemis (1) väljendatud tingimusel mõjuvad kangi punktis B kaalutava keha raskuse R komponendid P ja Q, järjelikult kogu keha raskus R. Kui nüüd $\frac{BC}{AC} = 0{,}1$, siis on raskuse R tasakaalustamiseks tarvis võtta vihtide raskus $x = 0{,}1$ R. Arusaadav, et samal põhimõttel on võimalik ehitada ka neljakümnend-, sajand- jne. kaalud.

Eelmine arvutus ei olenenud sellest, kus kohal platvormil asub raskus R, järjelikult tasakaal sellest ei olene. Ka võib näidata, et eelmise tingimuse täitmisel kaalu platvorm nihkub kogu aja rööpselt esialgsele asendile, mis väga tähtis loomade, koormaga vankrite jne. kaalumisel.

83. Töö kangil. Kangi tasakaalu tingimustest näeme, et kangi abil on võimalik tasakaalustada väikese tungiga suurt tungi ja ümberpöördult. Selleks on tarvis vastavalt valida (kuidas?) kangi õlgade pikkused. Nagu 83. joon. näha, käib kangi AB pöördumisel tungi P rakenduspunkt nii mitu korda lühema tee, kui mitu korda tungi P õlg (AC) on lühem tungi Q õlast (BC) (samale tsentraalnurgale vastavate kaarte pikkused on võrdelised raadiustega, s. o. $\smile AA_1 : \smile BB_1 = AC : BC$). Tähendab, mitu korda võidame kangi abil tungi suuruse poolest, nii mitu korda kaotame tungi rakenduspunkti poolt käidud tee pikkuse poolest. Et aga tungi suuruse ja selle rakenduspunkti edasinihkumise korrutis mõõdab tehtud töö hulka, siis järgneb sellest: tungide P ja Q poolt tehtud tööhulgad kangi nihkumisel ühest asendist teise on võrdsed. Tuleb kindlasti meeles pidada, et kangi ega ühegi teise masina abil ei saa luua tööd mitte millestki, vaid ainult edasi anda olemasolevat töö-tagavara ühest kehast teise, selle juures **võrdub töötava tungi töö alati takistuse tööga**. See on mehaanika põhiprintsiip, mis on maksev iga mehaanilise sisseseade kohta.



83. joon. Töö kangil.

84. Lihtmasinad. Inimesel tuleb töötegemisel suuruse poolest väga mitmesuguseid takistusi ületada, nagu: kive ja kände kaaluda, puid kanda, vaati vankrile veeretada, vett kaevust välja tõsta jne. Otsekohesest lihaste tungi tarvitamisest sagedasti ei jätku, sellepärast tarvitab inimene töötegemisel mitmesuguseid kunstlikke abinõusid, mida masinateks nimetatakse. Masinate abil on võimalik väikese tungiga suuri takistusi ületada ja ümberpöördult, üldse tungi mõju ühest kehast teise edasi anda, selle juures tarbekorral kas tungi rakenduspunkti, suurust või sihti muutes. Et tehtud töö hulk mõõtub tungi ja tee korrutisega, s. o.

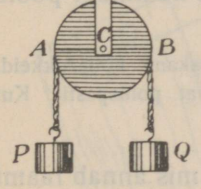
$$w = fs = f_1 s_1 = f_2 s_2 = \ldots,$$

siis on võimalik tungi rakenduspunkti kiire edasinihkumise juures (masina hooratas) võrdlemisi väikese tungiga teha palju tööd. Ükski masin ei suurenda töö hulka, küll aga kulub osa tööst hõõrumise ja teiste takistuste ületamiseks.

N. n. lihtmasinate hulka kuuluvad: kang, rihm, plokk, pöör, kaldpind, kiil ja kruvi.

Rihm, sagedasti ka nöör, annab hõõrumise abil edasi tungi rakenduspunkti. Sama otstarvet täidab ka varb.

85. Plokk. Plokk on keskpunktist läbimineva telje ümber vabalt pöörduv ketas, mille äärele tehtud soonest nöör üle käib (84. joon.). Nööri otsades mõjuvad tungid P ja Q, mille rakenduspunktideks vastavalt on A ja B. Tasakaalu korral peavad tungide momendid toetuspunkti C suhtes olema võrdsed, s. o.

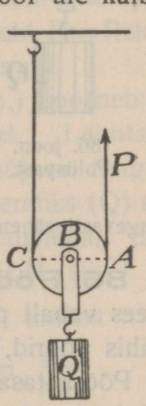


84. joon. Plokk.

$$P \cdot AC = Q \cdot BC.$$

Et $AC = BC$ kui ketta raadiused, siis $P = Q$,

s. o. tasakaalu korral on plokisse mõjuvad tungid võrdsed.



85. joon. Liikuv plokk.

Kirjeldatud plokk nimetatakse liikumatuks, sest ploki telg toetub liikumatult kinnistatud hargile. Annab aga hark ühes kettaga vabalt üles ja alla liikuda, siis nimet. niisugune plokk liikuvaks (85. joon.). Liikuvat plokki võime vaadelda kui ühepoolset kangi, mille toe-

tuspunkt asub C-s. Momentide lauset rakendades saame tasakaalu korral:

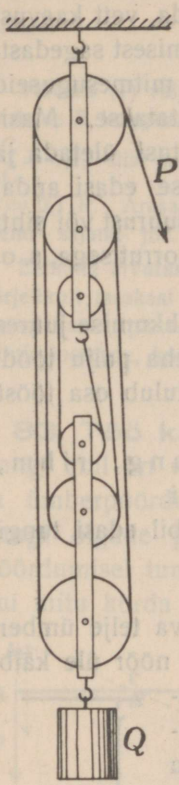
$$P \cdot AC = Q \cdot BC.$$

Et $AC = 2\,BC$, siis

$$P \cdot 2\,BC = Q \cdot BC, \text{ millest}$$

$$2P = Q \text{ ja } P = \frac{Q}{2},$$

s. o. liikuv plokk on tasakaalus, kui nööri vabas otsas mõjuv tung võrdub hargisse mõjuva tungi poolega.



86. joon. Polüspast.

Nagu näha, võidame liikuva ploki abil tungi suuruse poolest 2 korda, muidugi sama palju kaotades tee pikkuse poolest, nii et töö hulk jääb samaks.

Suurema võidu saamiseks tungi poolest tarvitatakse n. n. liitplokke ehk polüspaste. 86. joon. kujutab 3 liikumata ja 3 liikuva ploki ühendust. Et siin raskus Q ripub 6 nööri otsas, mis kõik ühteviisi pingul, siis on $P = \frac{1}{6}Q$. Üldse kui on seda liiki polüspastis ühes hargis kinnistatud plokkide arv n, siis on

$$P = \frac{1}{2n}Q.$$

Harilikult asetatakse polüspastis kummagi poole plokid samale teljele.

Veskil on tarvis laele vinnata 3-vakane kott rukkeid. Selleks tarvitatakse 4 plokist koosnevat polüspasti. Kui tugevasti vähemalt tuleb nöörist tõmmata?

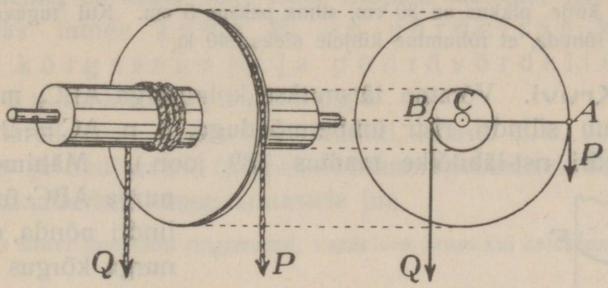
86. Pöör. Pöör koosneb kettast ja võllist, mis annab raami sees vabalt pöörduda. Ümber võlli ja ketta käivad vastupidises sihis nöörid, millede otsas rakendatud tungid P ja Q (87. joon.).

Pööra tasakaalu tingimusi võime kangi abil kergesti seletada. Kujutame tungid P ja Q mõjumas samas tasapinnas, siis saame kahepoolse kangi, mille toetuspunktiks on C ja õlgadeks võlli ja ratta raadiused CA ja CB.

Tasakaalu korral peab $P \cdot AC = Q \cdot BC$. Tähendab, pöör on tasakaalus, kui võllisse ja rattasse mõjuvad

tungid on pöördvõrdelised pööra võlli ja ratta raadiustega.

Ketta asemel tarvitatakse sagedasti võlliga ühendatud vänta.



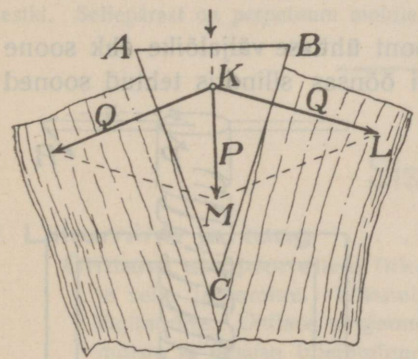
87. joon. Pöör.

Sagedasti tarvitatakse pöörade ühendust n. n. hammasrataste näol.

1. Kaevuratta võlli läbimõõt on 20 cm, vända pikkus 50 cm. Kui tugevasti vähemalt peab vändast lükkama veepange ülesvinnamisel?

2. Pööra võlli raadius on 0,2 m, ketta raadius 0,6 m. Missuguse tungiga on võimalik võlli nööri otsas rippuvat 180-kg raskust tasakaalustada?

87. Kaldpind. Kiil. Tungide lahutamisel (§ 18) nägime, et raskuse R tasakaalustamisel kaldpinnal kaldpinna pikkusega rööpne komponent $P = R\sin\alpha$, kus α on kaldenurk.



88. joon. Kiil.

Kiil (88. joon.) koosneb kahest kaldpinnast. Lahutame kiilu silmale mõjuva tungi P kaheks komponendiks (Q) risti kiilu külgpindadega. Et $\triangle ABC \sim \triangle KLM$, siis

$$\frac{P}{Q} = \frac{AB}{BC},$$ millest

$$Q = P \cdot \frac{BC}{AB},$$

s. o. kiilu külje rõhumine (Q) on nii mitu korda suurem rõhumisest silmale (P), kui mitu korda kiilu külje pikkus (BC) on suurem silma paksusest (AB).

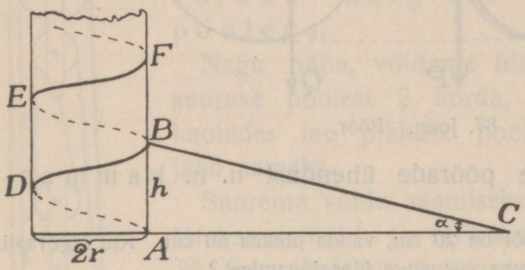
1. Kaldpinnal lasub koorem P, mida on võimalik tasakaalustada kas rööp-

selt kaldpinna pikkusega mõjuva tungiga $P_1 = 40$ kg või rööpselt kaldpinna alusega mõjuva tungiga $P_2 = 50$ kg. Kui suur on koorem P ja kaldenurk α?

2. Missuguse kaldenurga juures on kaldpinna pikkusega ja alusega rööpsed komponendid võrdsed?

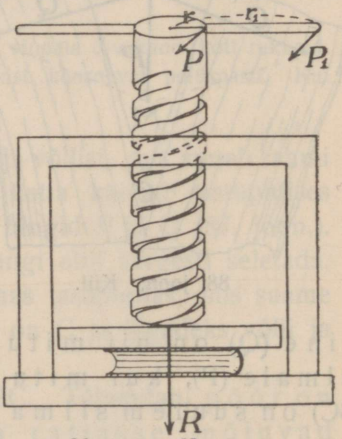
3. Kiilu külje pikkus on 30 cm, silma paksus 5 cm. Kui tugevasti tuleb kiilu silma rõhuda, et rõhumine küljele oleks 240 kg?

88. Kruvi. Võtame täisnurkse kolmnurga ABC, mille alus AC võrdub silindri risti ümbermõõduga, s. o. $AC = 2\pi r$, kus r on silindri rist-läbilõike raadius (89. joon.). Mähime kolmnurga ABC ümber silindri nõnda, et kolmnurga kõrgus $AB = h$ ühtuks mõne silindri moodustajaga, siis külg BC moodustab silindri pinnal kõverjoone ADB, mis nimetatakse kruvijooneks. Ühekordse kolmnurga ümbermähkimisega saame kruvijoonest ainult ühe käigu, mille kõrguseks on kolmnurga kõrgus h. Jätkates sedaviisi kolmnurga mähkimist, alates samast moodustajast, võime kruvijoont kui kaugele tahes pikendada.



89. joon. Kruvijoone tekitamine.

Tehes silindrile mööda kruvijoont ühtlase väljalõike ehk soone saame kruvi (90. joon.). Kui õõnsas silindris tehtud sooned vastavad kruvi omadele, siis on see mutter. Kruvi, samuti mutter, nihkub edasi ühe täispöördega kruvikäigu kõrguse võrra.



90. joon. Kruvi.

Kruvi tasakaalu tingimuste leidmiseks kasutame energia jäävuse lauset. Niipalju kui teeb tööd tung P_1 kruvi pööramisel, sama palju tööd peab tegema ka tung R kruvi edasiliikumisel, oletades, et ei ole teisi energia kaotusi, näiteks hõõrumise näol. Ühe täispöörde kohta võime kirjutada:

$$P_1 \cdot 2\pi r_1 = Rh, \text{ millest}$$

$$P_1 = R \cdot \frac{h}{2\pi r_1}.$$

Siit näeme, et kruvi telje sihis mõjuva takistuse (R) tasakaalustamiseks minev tung P_1 on võrdeline kruvikäigu kõrgusega (h) ja pöördvõrdeline rakenduspunkti kaugusega (r_1).

Kruvi tarvitatakse asjade ühendamisel, samuti n. n. lõpmata kruvi vee- ja õhulaevade (propeller) liikumapanemisel, võlli liikumise edasiandmisel hammasratastele jne.

1. Tuleta kruvi tasakaalu tingimused, vaadeldes kruvi kui kaldpinna ja pööra ühendust.

2. Kui suure rõhumise annab tungraud, mille kruvikäigu kõrgus on 1,2 cm ja mida pööratakse 24 cm kauguselt 40 kg tugevuselt.

3 Kui tugevasti tuleb pöörata kruvi, mille käigu kõrgus on 4 mm, 12 cm kaugusel teljest, et saavutada telje sihis 30-kg rõhumist?

89. Perpetuum mobile all mõeldakse masinat, mis ilma ühegi energia juurdetulekuta, nii-öelda iseenesest, igavesti liiguks ja mitte ainult ei liiguks, vaid ka tööd teeks. Perpetuum mobile ehitamine oli väga moodus ajal, kus ei tuntud veel energia jäävuse seadust. Ka meiegi päevil leidub lihtinimesi, kes enesele perpetuum mobilet püüavad ehitada, et siis temast lõpmata tööd ammutada. Perpetuum mobile käib energia jäävuse seaduse vastu, sest tööd võime teha ainult mõne teise töö-tagavara arvel, mitte aga ei millestki. Sellepärast on perpetuum mobile ehitamine võimatu.

Sisu

Lhk.

I. Liikumine ja tung 3

Ühtlane sirgjooneline liikumine (lk. 3—12). Mehaanika ja selle jaotamine. Liikumine ja paigalolek. Liikumiste liigitamine. Ühtlase sirgjoonelise liikumise kiirus. *Kiiruse mõiste ja üksuse tuletamine. Liikumisteede liitmine ning lahutamine. Kiiruste liitmine ning lahutamine. Liikumiste olenemituse printsiip. Skalaarsed ja vektorilised suurused. *Vektorite liitmine. *Vektorite lahutamine.

Tung ja selle liitmine ning lahutamine (lhk. 13—20). Inerts. Tung ja selle mõõtmine. Tungi graafiline kujutamine. Tasakaal. Newtoni mõju ja vastumõju seadus. Tungide liitmine. Tungide lahutamine.

Liikumise takistused (lhk. 20—23). Hõõrumistung. Hõõrumisseadused. Keskkonna takistus.

Mitteühtlane sirgjooneline liikumine (lhk. 23—34). Keskmine kiirus. Kiirus antud punktis. Käidud tee pikkuse muutumise graafiline kujutamine. Kiiruse suuruse muutumise graafiline kujutamine. Ühtlaselt kiirenev ja ühtlaselt tasanev sirgjooneline liikumine. Kiirendus. *Kiirenduse mõiste ja üksuse tuletamine. Kiiruse valemi tuletamine. Tee valemi tuletamine. *Ühtlaselt kiireneva liikumise tee valemi tuletamine analüüsi abil.

Tung ja kiirendus (lhk. 34—37). Mass. Side tungi, kiirenduse ja massi vahel. Liikumine jääva tungi mõjul. Tungi-üksused. Tungide mõju olenematus. Mehaanika põhiseadused.

Keha liikumine raskustungi mõjul (lhk. 37—52). Keha vaba langemine. Galilei seadused. Vaba langemise valemid ja kiirendus. Vaba langemise valemite rakendused. Visatud kehade liikumine. Liikumine kaldpinnal. *Atwoodi masin. Pendel. Mat. pendli võnkumisseadused. Sekundpendel. *Tasa- ja koonuspendel. *Harmooniline võnkliikumine. *Füüsiline pendel.

Kõverjooneline liikumine (lhk. 52—62). Kõverjoonelise liikumise kiirus ja kiirendus. Ühtlane ringjooneline liikumine. Kesktõmbe- ja kesktõuke-tung. Gravitatsioonitung. Kuu liikumine seletub Maa tõmbega. Maa pöörlemise mõju kehade kaalu kohta.

II. Töö ja energia 63

Töö ja selle mõõtmine. *Teoreemid tööhulga arvutamiseks. *Tungi töö graafiline kujutamine. *Töö kui integraal. Võimsus. Hoog. Mõned hoo valemi rakendused. Energia. Kineetiline ja potentsiaalne energia. Näiteid energia moondumisest. Energia jäävus. Energia hajumine.

III. Tasakaal 76

Vaba ja mittevaba keha (ainepunkti) üldised tasakaalu tingimused. Kõvva kehha mõjuva tungi tasakaalustamine. Kõvva kehha mõjuvate tungide liitmine juhul, kui tungi sihid on ühes tasapinnas. *Samasihiliste rööptungide liitmine. Vastassihiliste rööptungide liitmine. *Tungide paar. Hulga rööptungide liitmine. Rööptungide keskpunkt. Raskuspunkt. Kehade raskuspunkti määramine. Ühes punktis toetatud raske keha tasakaal. Raskuspunkti määramine katseliselt. Rõhtsale pinnale toetuva raske keha tasakaal. *Kang. Ühe- ja kahepoolne kang. Kangkaal. Kümnendehk detsimaalkaal. Töö kangil. Lihtmasinad. Plokk. Pöör. Kaldpind. Kiil. Kruvi. Perpetuum mobile.

A
4421
57801

Hind 100 marka

Sama õpperaamatu teised köited:

I. **Sissejuhatus, vedelikud, gaasid ja soojus.** Hind 130 mk.
II. **Hääl ja valgus.** Hind 140 mk.
IV. **Magnetism ja elekter.** Hind 165 mk.

Pääladu Kirjastus A.-S. „Varrak'u" juures Tartus, Rüütli tän. 24.