TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

ALUSTATUD 1893. a. VIHIK 192 ВЫПУСК ОСНОВАНЫ в 1893 г.

MATEMAATIKA- JA MEHHAANIKAALASEID TÖID

ТРУДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ И МЕХАНИКЕ

VI

TARTU 1966

TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ALUSTATUD 1893. a. VIHIK 192 ВЫПУСК ОСНОВАНЫ в 1893 г.

11006

MATEMAATIKA- JA MEHHAANIKAALASEID TÖID

ТРУДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ И МЕХАНИКЕ

VI

TARTU 1966

Redaktsioonikolleegium:

G. Kangro (esimees), S. Baron, Ü. Kaasik, Ü. Lepik, Ü. Lumiste, E. Reimers (vast. toimetaja).

Редакционная коллегия:

Г. Кангро (председатель), С. Барон, Ю. Каазик, Ю. Лепик, Ю. Лумисте, Э. Реймерс (отв. редактор).

Ω-КОЛЬЦОИДЫ, Ω-КОЛЬЦА И ИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Я. Хион

Кафедра алгебры и геометрии

Пусть $A = \{a, b, \ldots\}$ является Ω-алгеброй, т. е. универсальной алгеброй с системой операций $\Omega = \{\omega, \varphi, \ldots\}$. Результат применения n-арной операции ω к элементам $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ обозначим через [1]

$$a_1 a_2 \ldots a_n \omega = \Sigma a_i,$$

элемент, отмечаемый 0-арной операцией ν, через 0_ν.

При этом Ω-алгебра A называется *Ω-кольцоидом* (Ω-ringoid), если в A дополнительно определена ассоциативная операция умножения и выполняются условия

$$b(\Sigma a_i) = \Sigma b a_i, \quad b 0_\nu = 0_\nu$$

для любых n-арных ($n > 0$) операций ω, любых 0-арных операций ν и всяких a_i, $b \in A$. Элемент b данного Ω-кольцоида A называется *дистрибутивным*, если

$$(\Sigma a_i) b = \Sigma a_i b, \quad 0_\nu b = 0_\nu$$

для любой $\omega \in \Omega$ ($n > 0$), любого 0_ν и любых $a_1, \ldots, a_n, \in A$. Совокупность всех дистрибутивных элементов из A обозначим через $D(A)$. Множество $D(A)$ является всегда подполугруппой в A. При этом A называется *Ω-квазикольцом* $\langle A, X \rangle$, если X-подполугруппа в $D(A)$ и $\{X\}_\Omega = A$, где $\{X\}_\Omega$ означает Ω-подалгебру, порожденную X. Если $D(A) = A$, то Ω-кольцоид A называется *Ω-кольцом*,

Примерами Ω-кольцоидов являются кольца, полугруппы, полукольца, дистрибутивные структуры, линейные алгебры, почти кольца (near rings), неокольца (neorings). Пять первых из них являются Ω-кольцами. Под другим названием Ω-кольцоиды и

---

[1] Во всей статье Σ означает $\overset{\omega}{\underset{i}{\Sigma}}$.

Ω-кольца рассматривались также Б. И. Плоткиным [6]. Почти кольца и неокольца изучались Берманом и Сильверманом [8, 9], а также рядом других авторов. Через A^{Ω} мы обозначаем Ω-кольцоид A, рассматриваемый без умножения (аддитивную алгебру для A). Класс всех колец можно задать как класс всех Ω-колец A с фиксированным Ω, причем A^{Ω} принадлежит к определенному примитивному классу Ω-алгебр (примитивному классу абелевых групп). Аналогично можно задавать и другие примеры.

В случае, когда Ω состоит только из 0-арных и 1-арных операций ($\Omega = \Omega_0 \cap \Omega_1$, где Ω_0, Ω_1 — соответствующие множества операций), можно дать описание всех Ω-кольцоидов, сводящее изучение последних к теории полугрупп.

Элемент z полугруппы M называется ее *правым нулем*, если $xz = z$ для всех $x \in M$. Совокупность всех правых нулей для M обозначим через $Z_R(M)$. Преобразование a в M назовем *правым сдвигом*, если $(xy)a = x(ya)$ для всех x, $y \in M$. Совокупность всех правых сдвигов для M обозначим через $T_R(M)$.

Теорема 1. *Пусть дана полугруппа M, непересекающиеся множества Ω_0, Ω_1 и отображения $\alpha_0 : \Omega_0 \to Z_R(M)$, $\alpha_1 : \Omega_1 \to T_R(M)$. Положив*

$$0_\nu = \nu\alpha_0, \quad x\omega = x(\omega\alpha_1),$$

мы превращаем M в Ω-кольцоид $(M, \Omega_0, \Omega_1, \alpha_0, \alpha_1)$, у которого $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1$. Наоборот, любой Ω-кольцоид A, у которого $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1$, изоморфен одному из таких Ω-кольцоидов.

Нетрудно дать условие изоморфизма для Ω-кольцоидов $(M, \Omega_0, \Omega_1, \alpha_0, \alpha_1)$ и $(M', \Omega_0, \Omega_1, \alpha'_0, \alpha'_1)$. Аналогичные утверждения имеют место и для Ω-колец.

Пусть $M = \{x, y, \ldots\}$ является Ω-алгеброй и $S(M) = \{a, b, \ldots\}$ есть совокупность всех отображений M в себя. Рассмотрим в $S(M)$ обычное умножение преобразований и введем в $S(M)$ операции из Ω формулами

$$x(\Sigma a_i) = \Sigma x a_i, \; x0_\nu = 0_\nu.$$

Лемма 1 (см. [6]). *Для любой Ω-алгебры M множество $S(M)$ является Ω-кольцоидом. Если $M \in \Lambda$, где Λ-примитивный класс Ω-алгебр, то $S^{\Omega}(M) \in \Lambda$.*

Ясно, что Ω-подкольцоиды B из $S(M)$ являются также Ω-кольцоидами и при $M \in \Lambda$ будет $B^{\Omega} \in \Lambda$.

Теорема 2. *Любой Ω-кольцоид A изоморфен Ω-подкольцоиду симметрического Ω-кольцоида $S(M)$ для подходящей Ω-алгебры M. При $A^{\Omega} \in \Lambda$ можно выбрать и $M \in \Lambda$.*

Из этой теоремы следует, что симметрические Ω-кольцоиды $S(M)$ являются в некотором смысле универсальными среди всех Ω-кольцоидов. Поэтому представляет интерес изучить их несколько подробнее. Как заметил А. Г. Курош, можно дать следующую абстрактную характеристику симметричных Ω-кольцоидов.

Теорема 3. *Ω-кольцоид A тогда и только тогда изоморфен симметричному Ω-кольцоиду $S(M)$ для подходящей Ω-алгебры M, если:*

1) *из того, что $ac = bc$ для всех $c \in Z_R(A)$, следует $a = b$ (различные элементы из A не равнодействуют на $Z_R(A)$),*

2) *не существует Ω-надкольцоида $B \supset A$, так что $Z_R(B) = Z_R(A)$ и различные элементы из B не равнодействуют на $Z_R(A)$.*

Очевидно, что Ω-кольцоид $S(M)$ содержит единицу e и поэтому можно говорить об обратимых элементах из $S(M)$.

Теорема 4. *Для Ω-алгебр M, N $S(M) \cong S(N)$ тогда и только тогда, если $M \cong N$. В этом случае любой изоморфизм $\beta : S(M) \to S(N)$ задается формулой $a \to a\beta$, где $x(a\beta) = [(x\alpha^{-1})(b^{-1}ab)]\alpha$ и $\alpha : M \to N$ какой-нибудь изоморфизм между M и N, а b-обратимый дистрибутивный элемент из $S(M)$.*

Следствие 1. *Любой автоморфизм β данного Ω-кольцоида $S(M)$ является внутренним, т. е. задается формулой $a\beta = b^{-1}ab$, где b — обратимый дистрибутивный элемент.*

Следствие 2. *Группы автоморфизмов M и $S(M)$ изоморфны, т. е. $\mathrm{Aut}\, M \cong \mathrm{Aut}\, S(M)$.*

Теоремы 3, 4 и следствия 1, 2 обобщают некоторые результаты А. И. Мальцева [5].

Из теоремы 2 следует, что у любого Ω-кольцоида существуют расширения с единицей (унитарные расширения). Представляет интерес выделить из них минимальные и выяснить их единственность. Все они оказываются гомоморфными образами одного из них (свободного унитарного расширения). Пусть A есть Ω-кольцоид ($A^{\Omega} \in \Lambda$). Тогда Ω-кольцоид B, где $B^{\Omega} \in \Lambda$, называется *Λ-свободным унитарным расширением для A,* если

1) найдется мономорфизм $\alpha : A \to B$,

2) B имеет единицу e, не содержащуюся в $A\alpha$,

3) для любого гоморфизма $\beta : A \to C$, где Ω-кольцоид C при $C^{\Omega} \in \Lambda$ имеет единицу f, найдется точно один гоморфизм $\gamma : B \to C$, так что $e\gamma = f$, $\beta = \alpha\gamma$.

Теорема 5. *Если примитивный класс Λ не абсолютно вырожден, то для любого Ω-кольцоида A, где $A^{\Omega} \in \Lambda$, найдется Λ-свободное унитарное расширение $F(A, \Lambda)$, единственное с точностью до изоморфизма.*

В случае, когда примитивный класс Λ состоит из всех Ω-алгебр, $F(A, \Lambda)$ обозначим через $F(A)$.

Теорема 6. *Для Ω-кольцоидов A, B будет $F(A) \cong F(B)$ тогда и только тогда, если $A \cong B$. Если известны все изоморфизмы между A и B, то можно описать все изоморфизмы между $F(A)$ и $F(B)$.*

Следствие 3. $\operatorname{Aut} A \cong \operatorname{Aut} F(A)$.

Понятие Λ-свободного унитарного расширения оказывается полезным при изучении произвольных представлений Ω-кольцоидов преобразованиями Ω-алгебр. Будем говорить, что задано *представление* $(M, A)^{\Omega}$ (Ω-кольцоида A преобразованиями Ω-алгебры M), если всегда

П1. любому $x \in M$ и любому $a \in A$ соответствует $xa \in M$,

П2. $x(ab) = (xa)b$,

П3. $x(\Sigma a_i) = \Sigma xa_i$,

П4. $x0_\nu = 0_\nu$.

Примеры представлений:

1) $(M, S(M))^{\Omega}$ для любой Ω-алгебры M,

2) $(B^{\Omega}, A)^{\Omega}$, где A есть Ω-подкольцоид в B, xa равно произведению в B.

Представление $(M, A)^{\Omega}$ назовем точным, если из $xa = xb$ для любого $x \in M$ следует $a = b$. Представление $(M, A)^{\Omega}$ называется Λ-представлением, если $M \in \Lambda$, $A^{\Omega} \in \Lambda$. В теореме 2 утверждалось, что для любого Ω-кольцоида A с $A^{\Omega} \in \Lambda$ существует точное Λ-представление. Из данного представления $(M, A)^{\Omega}$ можно получить новые представления. В этом случае можно M рассматривать как $\Omega \cup A$-алгебру, где элементом $a \in A$ поставлены в соответствие унарные операции (правые умножения на M). Поэтому можно говорить о подпредставлениях, циклических представлениях, фактор-представлениях и гоморфизмах представлений. *Правой конгруенцией* α данного Ω-кольцоида A называется конгруенция в A^{Ω} такая, что из $b \equiv a(\alpha)$ следует $ac \equiv bc(\alpha)$ (таковы конгруенции в представлении (A^{Ω}, A) примера 2).

Теорема 7. *Для Ω-кольцоида A, где $A^{\Omega} \in \Lambda$, и любой правой конгруэнции α в $F(A, \Lambda)$ представление $(F(A, \Lambda)^{\Omega}/\alpha, A)^{\Omega}$ является циклическим Λ-представлением. Наоборот, любое циклическое Λ-представление $(M, A)^{\Omega}$ изоморфно одному из этих представлений.*

Пользуясь этим результатом, можно дать обозрение всех

Λ-представлений $(M, A)^{\Omega}$ для данного A с $A^{\Omega} \in \Lambda$, имеющих множество образующих мощности $\leqslant m$ (m — кардинальное число). Для этого следует образовать Λ-свободное объединение представлений $(F(A, \Lambda)^{\Omega}/\alpha, A)^{\Omega}$ (m экземпляров) и взять его всевозможные гомоморфные образы. Весьма частным случаем этих утверждений является теорема В. В. Вагнера [2], дающая описание всех представлений полугруппы преобразованиями (в этом случае $\Omega = \varnothing$).

С Ω-кольцоидами связан и вопрос о представлении полугрупп преобразованиями Ω-алгебр. Будем говорить, что задано *представление* (M, A) полугруппы A преобразованиями Ω-алгебры M, если выполнены условия П1 и П2. Так как здесь M можно опять считать $\Omega \cup A$-алгеброй, основные понятия определяются как для представлений $(M, A)^{\Omega}$. Представление (M, A) называется *Λ-представлением*, если $M \in \Lambda$. Для изучения таких представлений потребуется понятие свободного полугруппового Ω-кольцоида.

Пусть Ω — система операций (сигнатура), для каждой из которых указано число мест, и Λ-примитивный класс Ω-алгебр. Данный Ω-кольцоид B с $B^{\Omega} \in \Lambda$ называется *Λ-свободным полугрупповым Ω-кольцоидом* полугруппы A, если:

1) существует мономорфизм полугрупп $\alpha : A \to B$,

2) для любого гомоморфизма $\beta : A \to C$, где C есть Ω-кольцоид и $C^{\Omega} \in \Lambda$, существует единственный гомоморфизм Ω-кольцоидов $\gamma : B \to C$, так что $\beta = \alpha\gamma$.

Теорема 8. *Для любой полугруппы A, сигнатуры Ω и любого не абсолютно вырожденного Λ существует единственный Λ-свободный полугрупповой Ω-кольцоид $S(A, \Omega, \Lambda)$.*

Если Λ есть класс всех Ω-алгебр, то обозначим $S(A, \Omega, \Lambda)$ через $S(A, \Omega)$.

Теорема 9. *Для полугрупп A, B и любой сигнатуры Ω тогда и только тогда $S(A, \Omega) \cong S(B, \Omega)$, если $A \cong B$. В последнем случае можно описать все изоморфизмы между $S(A, \Omega)$ и $S(B, \Omega)$.*

Следствие 4. $\operatorname{Aut} A \cong \operatorname{Aut} S(A, \Omega)$.

Следствие 5. *Пусть полугруппа A свободна над множеством M. Тогда Ω-кольцоид $S(A, \Omega, \Lambda)$ свободен над $M\alpha$ в классе всех Ω-кольцоидов B, у которых $B^{\Omega} \in \Lambda$.*

Следствие 6. *При любой сигнатуре Ω не все Ω-подкольцоиды свободного Ω-кольцоида с одним образующим свободны.*

Теорема 10. *Любое Λ-представление (M, A) можно продолжить до Λ-представления Ω-кольцоидов $(M, S(A, \Omega, \Lambda))^{\Omega}$. Вся-*

кий изоморфизм $(M, A) \cong (N, A)$ является также изоморфизмом предложенных представлений

$$(M, S(A, \Omega, \Lambda))^{\Omega} \cong (N, S(A, \Omega, \Lambda))^{\Omega}.$$

Опираясь на эту теорему, можно получить все циклические представления полугруппы A преобразованиями в Ω-алгебрах класса Λ. Можно указать и все представления со множеством образующих мощности $\leqslant m$.

Рассмотрим теперь Ω-квазикольца и Ω-кольца.

Обозначим через $E(M)$ совокупность всех эндоморфизмов Ω-алгебры M. Очевидно $E(M) \subset S(M)$ и по лемме 1 $S(M)$ является Ω-кольцоидом. Вообще говоря, $E(M)$ не замкнуто относительно операций из Ω, но можно взять $Q(M) = \{E(M)\}_{\Omega}$. Преобразования из $Q(M)$ назовем *квазиэндоморфизмами* [6].

Лемма 2 (см. [6]). *Для любой Ω-алгебры M множество $< Q(M), E(M) >$ является Ω-квазикольцом.*

Назовем Ω-алгебру M *абелевой* [10, 11], если для любых не 0-арных $\omega, \varphi \in \Omega, x_{11}, \ldots, x_{1n}, \ldots, x_{m1}, \ldots, x_{mn} \in M$ выполняется

$$\overset{\varphi}{\underset{i}{\Sigma}} (\overset{\omega}{\underset{j}{\Sigma}} x_{ij}) = \overset{\omega}{\underset{j}{\Sigma}} (\overset{\varphi}{\underset{i}{\Sigma}} x_{ij}),$$

$$0_{\nu} = 0_{\mu}, \quad \Sigma 0_{\nu} = 0_{\nu},$$

(ν, μ любые 0-арные операции из Ω). Для одной бинарной операции абелевость сводится к медиальному закону $(x + y) + (z + u) = (x + z) + (y + u)$, играющую важную роль, например, в теории квазигрупп.

Лемма 3 (см. [6]). *Если Ω-алгебра M абелева, то $E(M)$ есть Ω-кольцо с абелевой аддитивной алгеброй. Если $M \in \Lambda$, то $E^{\Omega}(M) \in \Lambda$.*

Естественно попытаться установить, всякое ли Ω-кольцо можно представить как Ω-кольцо $E(M)$ для подходящего M или его Ω-подкольцо. Возникает также вопрос о том, всякие ли Ω-квазикольца можно представить квазиэндоморфизмами некоторой Ω-алгебры (при этом естественно потребовать, чтобы дистрибутивным элементам отвечали эндоморфизмы).

Будем говорить, что задано *представление* $<M, A, X>^{\Omega}$ данного Ω-квазикольца $<A, X>$ квазиэндоморфизмами Ω-алгебры M, если выполнены условия П1—П4 и

П5. $(\Sigma x_i) y = \Sigma x_i y$,

П6. $0_{\nu} y = 0_{\nu}$ (для любого $y \in X$).

Обозначим $<M, A, A>^{\Omega} = [M, A]^{\Omega}$ и назовем его представлением Ω-кольца A эндоморфизмами Ω-алгебры M.

Пусть дан символ x. *Левые A-выражения* (где A есть Ω-кольцоид) определим так:

1) x и ax при любом $a \in A$ являются левыми выражениями,

2) если $u_1, \ldots, u_n$ суть левые выражения, ω любая n-арная операция из Ω, то Σu_i есть левое выражение.

Всякое левое выражение $x\varrho$ задает некоторое преобразование в A. При этом $\langle A, X\rangle$ называется *квазиабелевым слева*, если из соотношения $\overset{\varphi}{\underset{i}{\Sigma}} x_i = \overset{\psi}{\underset{i}{\Sigma}} x_i$, где φ, ψ любые главные производные операции (см. [3]) для Ω, следует соотношение $\overset{\varphi}{\underset{i}{\Sigma}} x_i\varrho = \overset{\psi}{\underset{i}{\Sigma}} x_i\varrho$ для любого левого выражения ϱ и всяких $x_i \in X$.

Теорема 11. *Для Ω-квазикольца $\langle A, X\rangle$, где $A^{\Omega} \in \Lambda$, тогда и только тогда существует точное Λ-представление $\langle M, A, X\rangle^{\Omega}$, когда $\langle A, X\rangle$ квазиабелево слева.*

Теорема 12. *Для того, чтобы у Ω-кольца A существовало точное Λ-представление $[M, A]^{\Omega}$, необходимо и достаточно, чтобы $(\Sigma a_i)\varrho = \Sigma a_i\varrho$ при любом $\omega \in \Omega$, всяких $a_i \in A$ и любом левом выражении ϱ.*

Замечание 1. Существуют почти кольца и неокольца, не удовлетворяющие условию теоремы 12, которое назовем условием *слабой абелевости слева*.

Из теоремы 12 и замечания 1 следует, что неверны следующие утверждения Бермана и Сильвермана [9]: любое ассоциативное неокольцо изоморфно вкладывается в систему эндоморфизмов некоторой лупы, любое полукольцо (с не обязательно коммутативным сложением) изоморфно вкладывается в систему эндоморфизмов некоторой полугруппы.

Далее можно указать общий вид циклических представлений $[M, A]^{\Omega}$ для данного A, слабо абелевого слева, и показать, как из них можно получить все представления (со множеством образующих мощности $\leqslant m$).

В связи с рассмотренными проблемами естественно возникает вопрос о том, у каких Ω-колец существуют унитарные расширения. Необходимым и достаточным условием для этого оказывается слабая абелевость Ω-кольца (и слева и справа). При этом условии существует единственное Λ-свободное унитарное расширение.

Аналогично можно определить и исследовать понятие Λ-свободного полугруппового Ω-кольца полугруппы A для данной сигнатуры Ω и примитивного класса Λ. Если класс абелевых Ω-алгебр из Λ не абсолютно вырожден, то оказывается, что соответствующее Λ-свободное полугрупповое Ω-кольцо

$R(A, \Omega, \Lambda)$ существует и единственно. Его можно использовать для исследования представлений $[M, A]$ полугруппы A эндоморфизмами Ω-алгебры M (они задаются условиями П1, П2, П5, П6), при которых образ A порождает в $S(M)$ даже Ω-подкольцо (это всегда так, если M абелева). Частным случаем этого являются представления групп эндоморфизмами векторных пространств.

Далее рассмотрены Ω-кольца и Ω-кольцоиды, близкие к кольцоидам с делением. Оказывается, что их можно охарактеризовать наличием представлений специального вида.

Данный Ω-кольцоид A называется *инверсным*, если его мультипликативная полугруппа инверсна [1, 12], т. е. для любого $a \in A$ существует единственный $a^{-1} \in A$, так что $aa^{-1}a = a$ и $a^{-1}aa^{-1} = a^{-1}$.

Теорема 13. *Ω-кольцоид A тогда и только тогда инверсен, если для него существует точное Λ-представление $(M, A)^{\Omega}$, причем для любого $a \in A$ найдется единственный $a' \in A$, так что*

1) *отображения $a : Ma' \to Ma$, $a' : Ma \to Ma'$ взаимно однозначны и взаимно обратны,*

2) *если $a, b \in A$, $a \neq b$, $Ma = Mb$, то a и b задают на Ma' различные отображения.*

Аналогично характеризуются инверсные Ω-кольца.

Такие же теоремы имеют место и для инверсных вполне регулярных Ω-колец или Ω-кольцоидов (задаваемых дополнительным условием $aa^{-1} = a^{-1}a$) и для коммутативных Ω-колец идемпотентов (определяемых условиями $ab = ba$, $a^2 = a$).

Литература

1. Вагнер В. В., Обобщенные группы. Докл. АН СССР, 1952, **84**, 1119—1122.
2. Вагнер В. В., Представления упорядоченных полугрупп. Матем. сб., 1956, **38**, 203—240.
3. Курош А. Г., Лекции по общей алгебре. Москва, 1961.
4. Мальцев А. И., Свободные топологические алгебры. Изв. АН СССР, сер. матем., 1957, **21**; 171—198.
5. Мальцев А. И., Симметрические группоиды. Матем. сб., 1952, **31**, 136—151.
6. Плоткин Б. И., Ω-полугруппы, Ω-кольца и представления. Докл. АН СССР, 1963, **149**, 1037—1040.
7. Adler I., Composition rings. Duke Math. J., 1962, **29**, 607—623.
8. Bergman G., Silverman R. J., Near-rings. Amer. Math. Monthly, 1959, **66**, 23—34.
9. Bergman G., Silverman R. J., Embeddings of algebraic systems. Pacif. J. Math., 1960, **10**, 777—786.

10. E v a n s T., Abstract mean values. Duke Math. J., 1963, **30**, 331—347.
11. E v a n s T., Endomorphisms of abstract algebras. Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1962, **66**, 53—64.
12. P r e s t o n G., Inverse semi-groups. J. London. Math. Soc., 1954, **29**, 396—403.

Поступило
10 II 1965

Ω-RINGOIDID, Ω-RINGID JA NENDE ESITUSED

J. Hion

R e s ü m e e

Defineeritakse Ω-ringoidid (Ω-ringid), s. o. universaalsed algebrad operatsioonide süsteemiga Ω (e. Ω-algebrad), kus on täiendavalt defineeritud binaarne assotsiatiivne korrutamine, mis on Ω tehete suhtes vasakult (ja paremalt) distributiivne. Näidatakse, et igal Ω-ringoidil leidub täpne esitus sobiva Ω-algebra teisenduste abil. Vaadeldakse antud Ω-ringoidi kõigi selliste esituste saamist, milleks tuleb uurida Ω-ringoidide ühikuga laiendeid. Analoogilisi küsimusi käsitletakse Ω-ringide puhul.

Ω-RINGOIDS, Ω-RINGS AND THEIR REPRESENTATIONS

J. Hion

S u m m a r y

There are defined Ω-ringoids (Ω-rings), i. e. universal algebras with a system Ω of operations (Ω-algebras) in which additionally a binary associative multiplication is defined which is left (and right) distributive in respect to operations of Ω. It is shown that for any Ω-ringoid there exists a faithful representation by mappings of a suitabele Ω-algebra. It is studied how to get all such representations for a given Ω-ringoid (for this unitary extensions of Ω-ringoids are considered). Analogical questions are considered for Ω-rings.

К ТЕОРИИ МНОГООБРАЗИЙ ПЛОСКОСТЕЙ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

Ю. Лумисте
Кафедра алгебры и геометрии

Введение

1. Многообразием m-плоскостей евклидова пространства называется диффеоморфный образ $B_n(m, N)$ некоторого n-мерного дифференцируемого многообразия B_n в грассмановом многообразии m-плоскостей в R_N. Основы локальной дифференциальной геометрии таких многообразий $B_n(m, N)$ были даны в работах В. В. Вагнера [27] и Б. А. Розенфельда [12]. В этих работах главное внимание уделялось инвариантным образам и величинам, присоединенным, наглядно говоря, к двум бесконечно близким m-плоскостям многообразия $B_n(m, N)$ (как образам симметрии в R_N), или, точнее, к m-плоскости $\alpha \in B_n(m, N)$ и к касательному к B_n 1-направлению в ее прообразе $x \in B_n$. Их усреднение в существующей на B_n инвариантной римановой метрике дает присоединенные к α иварианты и образы, уже не зависящие от направления на B_n в x.

В евклидовой теории многообразий $B_n(m, N)$ отражаются также результаты Р. М. Гейдельмана [4, 5], полученные при изучении многообразий плоскостей в неевклидовых пространствах и сфер в конформных пространствах. Р. М. Гейдельман значительно продвинул исследование фокальных свойств конгруэнции ($N = m + n$) и псевдоконгруэнции ($n = m + 1$) плоскостей. Обобщая некоторые результаты В. И. Коровина [6], он выделил класс так называемых вполне фокальных псевдоконгруэнций и показал их особую роль в задаче расслоения пар псевдоконгруэнций. Им указан принцип классификации многообразий плоскостей по их фокальным свойствам [4, 5].

2. Новые возможности в изучении геометрии многообразия $B_n(m, N)$ в R_N открываются при рассмотрении расслоенного пространства E_{m+n} пар (x, X) точек $x \in B_n$ и $X \in \alpha(x)$, и связности, естественным образом определяемой в E_{m+n}. Базой расслоенного пространства E_{m+n} является многообразие B_n, типовым слоем —

m-мерное евклидово пространство R_m, структурной группой — группа движения в R_m, изоморфная полупрямому произведению $T_m * O(m)$ векторной группы T_m и ортогональной группы $O(m)$. Связность в E_{m+n} определяется распределением n-направлений на E_{m+n}, вполне ортогональных к слоям в метрике пространства R_N (наглядно говоря, ортогональным проектированием бесконечно близких m-плоскостей многообразия $B_n(m, N)$ друг на друга). Возникает группа голономии этой связности, называемая *группой голономии многообразия* $B_n(m, N)$.

Кроме того, для каждой m-плоскости $\alpha \in B_n(m, N)$ можно определить минимальную подалгебру в алгебре Ли L структурой группы $T_m * O(m)$, натянутую на всевозможные значения L-значной 2-формы кривизны этой связности в репере, фиксированной в заданной m-плоскости α. Эта подалгебра в L определяется для заданной $\alpha \in B_n(m, N)$ с точностью до преобразований присоединенной группы в L и называется в дальнейшем *алгеброй кривизны* многообразия $B_n(m, N)$ в его m-плоскости α.

Открывается возможность классифицировать многообразия $B_n(m, N)$ в R_N по их группам голономии и, более подробно, по их алгебрам кривизны в m-плоскостях $\alpha \in B_n(m, N)$.

3. Расслоенное пространство E_{m+n} было введено в некоторых работах, изучающих топологию многообразия $B_n(m, N)$ (см., например, [25]). Указанная выше связность была частично рассмотрена В. В. Вагнером [27] именно в части, касающейся только векторного расслоения над B_n (слоями которого являются линейные пространства векторов в m-плоскостях $\alpha \in B_n(m, N)$, а структурной группой — ортогональная группа $O(m)$). С чисто внутренней точки зрения связности в расслоениях со структурной группой $T_m * GL(m)$, несколько более общие, чем рассматриваемые здесь, исследовал А. Швец [26].

Следует отметить также евклидовы связности (с кручением), которые в R_{m+n} к конгруэнции $B_n(m) \equiv B_n(m, m+n)$ с фиксированной в E_{m+n} секущей поверхностью присоединил О. Гальвани [24] (см. также [18]).

4. Настоящая статья содержит, кроме построений общего характера в §§ 1 и 2, исследование некоторых классов конгруэнций $B_n(m)$ в R_{n+m}, алгебры кривизны которых во всех m-плоскостях $\alpha \in B_n(m)$ являются алгебрами Ли некоторых специальных подгрупп в $T_m * O(m)$. Именно в § 3 рассматриваются случаи, когда эта подгруппа совпадает 1) со стационарной подгруппой двух точек в R_m, 2) стационарной подгруппой p-плоскостей некоторой связки параллельных p-плоскостей в R_m. В этих случаях конгруэнция $B_n(m)$ в R_N имеет, с точки зрения внешней геометрии, некоторые специфические свойства, относящиеся, в частности, к ее фокальному многообразию.

Наиболее простой частный класс составляют конгруэнции

$B_n(m)$ в R_{n+m} с нулевой алгеброй кривизны. Такие конгруэнции $B_n(m)$ называются *вполне нормальными*, потому что они допускают m-параметрические семейства n-мерных поверхностей, ортогонально пересекающих все m-плоскости $\alpha \in B_n(m)$. Их группы голономии совпадают с фундаментальными группами многообразий B_n. С точки зрения внешней геометрии они являются вполне фокальными, т. е. их фокальные гиперповерхности в каждой m-плоскости вырождаются в n $(m-1)$-плоскостей, каждой из которых в ортогональном n-направлении соответствует единственное фокальное 1-направление.

Вполне нормальные конгруэнции $B_n(m)$ в R_{m+n} являются аналогами конгруэнций m-плоскостей в неевклидовых пространствах, расслояющих свои полярные псевдоконгруэнции (псевдоконгруэнции R; см. [3]). Рассмотренные в настоящей статье два более общих класса конгруэнций $B_n(m)$ в R_{m+n} имеют также некоторые аналоги в неевклидовых и конформных пространствах, изучение которых, однако, выходит за рамки настоящей статьи.

Результаты, полученные для этих классов в евклидовой теории, применяются в § 3 при решении задачи специальной поднормализации n-мерной поверхности V_n в R_{m+n}, которая в несколько иной формулировке была поставлена в [17], но решена лишь при $m=n=2$. В заключительных параграфах 4 и 5 общая теория иллюстрируется на примере конгруэнций $B_2(2)$ в R_4. В частности, определяются и характеризуются геометрически все конгруэнции $B_2(2)$ с нулевой аффинорной 2-формой кривизны (т. е. с абсолютным параллелизмом векторов по В. В. Вагнеру [27]) в R_4.

§ 1. Кривизна и кручение

1. Пусть дифференцируемое многообразие B_n, диффеоморфизм которого в грассманово многообразие m-плоскостей в R_N определяет многообразие $B_n(m, N)$, покрыто областями U, снабженными системами корепероов $\{\theta^i\}$ $(i, j, \ldots = m+1, \ldots, m+n)$. Тогда пфаффова система $\theta^i=0$ вполне интегрируема в каждой U. Следовательно,

$$d\theta^i = \theta^j \wedge \theta_j^{\,i},$$

и первые интегралы системы $\theta^i=0$ представляют собой локальные координаты точки $x \in U \subset B_n$, т. е. при фиксации точки x имеем $\theta^i=0$.

Пусть в R_N введен подвижный репер, начало X_0 и первые m векторов $\boldsymbol{e}_a$ $(a, b, \ldots = 1, \ldots, m)$ которого принадлежат m-плоскости $\alpha \in B_n(m, N)$, а остальные $N-m$ векторов $\boldsymbol{e}_\varrho$ $(\varrho, \sigma, \ldots =$

$= m+1, \ldots, N$) ортогональны к ней. Тогда в формулах инфинитезимального перемещения репера

$$dX_0 = \boldsymbol{e}_J \omega^J,$$
$$d\boldsymbol{e}_J = \boldsymbol{e}_K \omega_J{}^K, \quad (J, K, \ldots = 1, \ldots, N),$$

и в условиях их интегрируемости — в структурных уравнениях Маурера—Картана для группы евклидовых движений $T_N * O(N)$ —

$$d\omega^J = \omega^K \wedge \omega_K{}^J,$$
$$d\omega_K{}^J = \omega_K{}^L \wedge \omega_L{}^J$$

имеют место (в силу уравнений инвариантности метрики

$$dg_{JK} = g_{LK}\omega_J{}^L + g_{JL}\omega_K{}^L \tag{1.2}$$

на метрический тензор $g_{JK} = (\boldsymbol{e}_J, \boldsymbol{e}_K)$ пространства R_N и того, что $g_{a\varrho} = 0$) следующие соотношения

$$\omega_\varrho{}^a = - g_{\varrho\sigma}\, g^{ab} \omega_b{}^\sigma.$$

С другой стороны, при фиксации плоскости $\alpha \in B_n(m, N)$ имеем

$$\theta^i = 0 \quad \omega^\varrho = 0, \ \omega_a{}^\varrho = 0,$$

так что

$$\omega^\varrho = \Lambda_i{}^\varrho \theta^i, \tag{1.3}$$
$$\omega_a{}^\varrho = \Lambda_{ai}{}^\varrho \theta^i. \tag{1.4}$$

Теперь

$$d\omega^a = \omega^b \wedge \omega_b{}^a + \Sigma^a, \tag{1.5}$$
$$d\omega_b{}^a = \omega_b{}^c \wedge \omega_c{}^a + \Omega_b{}^a, \tag{1.6}$$

где

$$\Sigma^a = \omega^\varrho \wedge \omega_\varrho{}^a = \frac{1}{2} T_{ij}{}^a \theta^i \wedge \theta^j, \tag{1.7}$$

$$\Omega_b{}^a = \omega_b{}^\varrho \wedge \omega_\varrho{}^a = \frac{1}{2} R_{bij}{}^a \theta^i \wedge \theta^j, \tag{1.8}$$

$$T_{ij}{}^a = 2 g_{\varrho\sigma}\, g^{ab} \Lambda_b{}^\varrho{}_{[i} \Lambda_{j]}{}^\sigma, \tag{1.7'}$$

$$R_{bij}{}^a = 2 g_{\varrho\sigma}\, g^{ac} \Lambda_c{}^\varrho{}_{[i} \Lambda_{|b|j]}{}^\sigma. \tag{1.8'}$$

Уравнения (1.5), (1.6) представляют собой *структурные уравнения Картана* вышеуказанной связности в E_{m+n} (ср. [16], стр. 57), Σ^a и $\Omega_b{}^a$ являются ее *формами кручения* и *кривизны*. Так как при преобразованиях репера

$$'X_0 = X_0 + x^b \boldsymbol{e}_b,$$
$$'\boldsymbol{e}_a = A_a{}^b \boldsymbol{e}_b,$$

имеем

$$'\omega^\varrho = \omega^\varrho + x^b \omega_b{}^\varrho,$$
$$'\omega_b{}^\varrho = A_b{}^c \omega_c{}^\varrho,$$
$$'\omega_\varrho{}^a = \omega_\varrho{}^d \tilde{A}_d{}^a,$$

где $A_a{}^c \tilde{A}_c{}^b = \delta_a{}^b$, то 2-формы Σ^a и $\Omega_b{}^a$ преобразуются следующим образом:

$$'\Sigma^a = (\Sigma^c + x^b \Omega_b{}^c) \tilde{A}_c{}^a, \tag{1.9}$$

$$'\Omega_b{}^a = A_b{}^c \Omega_c{}^d \tilde{A}_d{}^a. \tag{1.10}$$

Таким образом, $\Omega_b{}^a$ являются 2-формами, значения которых образуют некоторые аффиноры в каждой m-плоскости $\alpha \in B_n(m, N)$. Совокупность форм $\Omega_b{}^a$ называется *аффинорной 2-формой кривизны* Ω многообразия $B_n(m, N)$ в R_N. Следует отметить, что система коэффициентов $R_{bij}{}^a$ в формах $\Omega_b{}^a$ (тензор кривизны) была введена уже В. В. Вагнером [27]. Что касается 2-форм Σ^a, то их значения составляют векторы только в фиксированных точках X_0 расслоенного пространства E_{m+n}. Совокупность этих форм Σ^a называется *векторной 2-формой кручения* Σ многообразия $B_n(m, N)$ в точке X_0.

Аффинорная 2-форма кривизны Ω, как видно, не зависит от выбора точки X_0 в заданной m-плоскости $\alpha \in B_n(m, N)$ и связана только с этой плоскостью α. Кроме того, из (1.9) следует, что значения векторной 2-формы кручения Σ в какой-либо точке X_0 данной m-плоскости α вместе со значениями аффинорной 2-формы кривизны Ω в плоскости α определяют значения формы Σ в любой другой точке X плоскости α. Обратно, значения формы Σ в $m+1$ линейно независимых точках m-плоскости $\alpha \in B_n(m, N)$ определяют однозначно форму Ω в плоскости α.

2. Применение к данному конкретному случаю теоремы о голономии (впервые указанной Э. Картаном [22] и строго доказанной в [20]; см. также [10]) приводит к следующей теореме.

Теорема 1. *Алгебра Ли группы голономии многообразия $B_n(m, N)$ в R_N совпадает с линейным подпространством в алгебре Ли L группы $T_m{}^*O(m)$, натянутым на элементы $(\Sigma, \Omega) \in L$, составленные из значений 2-форм Σ и Ω в реперах m-плоскостей $\alpha \in B_n(m, N)$, определяющие $m+1$ точек которых соединяемы с фиксированными $m+1$ линейно независимыми точками в заданной $\alpha_0 \in B_n(m, N)$ кривыми, ортогонально пересекающими m-плоскости из $B_n(m, N)$ и проектирующими на B_n в одну и ту же кривую.*

Группа голономии характеризует глобальные внутренние свойства многообразия $B_n(m, N)$ в R_N. Более детальную локальную характеристику этого многообразия можно получить, если в алгебре Ли L рассматривать минимальную подалгебру, натянутую на всевозможные значения 2-формы Ω в заданной m-плоскости $\alpha \in B_n(m, N)$ и 2-формы Σ в какой-нибудь точке $X_0 \in \alpha$. Эта подалгебра зависит от выбора точки X_0 в α весьма несущественным образом: при замене точки X_0 она подвергается преобразованию присоединенной группы в L. Она называется *алгеброй кривизны* многообразия $B_n(m, N)$ в заданной m-плоскости $\alpha \in B_n(m, N)$.

Алгебра Ли группы голономии многообразия $B_n(m, N)$ содержит (с точностью до преобразований присоединенной группы в L) алгебры кривизны во всех m-плоскостях $\alpha \in B_n(m, N)$, но в общем случае не совпадает с ними. Можно указать один весьма специальный случай, когда такое совпадение имеет место.

Пусть алгебра кривизны многообразия $B_n(m, N)$ обращается в нуль во всех m-плоскостях $\alpha \in B_n(m, N)$, Многообразие $B_n(m, N)$ называется тогда *вполне нормальным*. Группа голономии такого $B_n(m, N)$ является гомоморфным образом фундаментальной группы многообразия B_n (см. [10]). Распределение n-направлений на E_{m+n}, вполне ортогональных к m-плоскостям $\alpha \in B_n(m, N)$ в метрике пространства R_N, является в случае вполне нормального $B_n(m, N)$ инволютивным (потому что пфаффова система $\omega^a = 0$ при $\Omega = 0$, $\Sigma = 0$ является в силу (1.5) вполне интегрируемой), и определяет на E_{m+n} некоторое слоение коразмерности n. Максимальные интегральные многообразия этого слоения образуют m-параметрическое семейство n-мерных поверхностей в R_N, вполне ортогональных к m-плоскостям $\alpha \in B_n(m, N)$ (ср. [15], стр. 177).

3. Указанный класс вполне нормальных многообразий $B_n(m, N)$ в R_N является наиболее специальным в классификации многообразий $B_n(m, N)$ по алгебрам кривизны в их m-плоскостях. В настоящем параграфе ограничимся некоторыми общими указаниями, связанными с этой классификацией.

Интересный класс составляют многообразия $B_n(m, N)$ с нулевой аффинорной 2-формой кривизны Ω (с абсолютным параллелизмом векторов по В. В. Вагнеру [27]). Их группа голономии является группой параллельных переносов в R_m или некоторой ее подгруппой. Последний случай подвергается более подробному исследованию в § 3 при предположении что $N = m + n$ (когда $B_n(m, N)$ называется, следуя В. В. Вагнеру [27], *конгруэнцией*). В § 5 определяются, в частности, все $B_2(2, 4)$ в R_4 с $\Omega = 0$.

Интерес представляют также классы многообразий $B_n(m, N)$, у которых E_{m+n} обладает секущими поверхностями, в точках которых обращается в нуль векторная 2-форма кручения Σ. Для них справедлива следующая

Теорема 2. *Если $\Sigma = 0$ в некоторых точках m-плоскости α многообразия $B_n(m, N)$ в R_n, то Σ обращается в нуль во всех точках плоскости наименьшей размерности l, натянутой на эти точки, а во всех других точках $X \in \alpha$ ее значения ортогональны к $(l + 1)$ — плоскости, натянутой на эту l-плоскость и точку X. При $l = m - 1$ обращается в нуль также аффинорная 2-форма кривизны Ω в m-плоскости $\alpha \in B_n(m, N)$.*

Доказательство. Алгебра кривизны многообразия $B_n(m, N)$ в m-плоскости α является алгеброй Ли некоторой подгруппы в $T_m * O(m)$, действующей в α с сохранением указанных точек. Эта подгруппа сохраняет все точки указанной l-плоскости в α, а при $l = m - 1$ сводится к единице.

Аналитически можно доказать теорему с помощью формул (1. 9) и соотношений

$$g_{cb}\Omega_a{}^c + g_{ac}\Omega_b{}^c = 0,$$

получаемых внешним дифференцированием из уравнений

$$dg_{ab} = g_{cb}\omega_a{}^c + g_{ac}\omega_b{}^c,$$

вытекающих из (1. 2).

Аналогичные теоремы имеют место и в других случаях, когда алгебра кривизны многообразия $B_n(m, N)$ в m-плоскости α является алгеброй Ли некоторой подгруппы в $T_m * O(m)$, приводимым образом действующей в R_m (см. напр. теорему 3 в § 3, п. 2).

4. Точка $X = X_0 + x^a e_a$ в E_{m+n}, в которой $\Sigma = 0$, определяется в произвольном репере из системы

$$\Sigma^a + x^b\Omega_b{}^a = 0,$$

где Σ^a — компоненты Σ в начале X_0 репера, т. е. из системы

$$T_{ij}{}^a + x^b R_{bij}{}^a = 0. \tag{1. 11}$$

В общем случае такие точки могут и не существовать.

Среди секущих поверхностей, в точках которых $\Sigma = 0$, наиболее специальными являются следующие.

1) Секущие n-мерные поверхности в E_{m+n}, которые ортогонально пересекают все m-плоскости $\alpha \in B_n(m, N)$. В их точках $\omega^a = 0$ и поэтому, в силу (1. 5), $\Sigma^a = 0$. Если E_{m+n} имеет хотя бы одну такую секущую поверхность, то $B_n(m, N)$ в R_N называется *нормальным*. (Он состоит тогда из m-плоскостей, нормальных к этой поверхности.)

2) Секущие n-мерные поверхности в E_{m+n}, касательные плоскости к которым принадлежат m-плоскостям $\alpha \in B_n(m, N)$. Они возможны только при $m \geqslant n$. Если X_0 совпадает с точкой такой поверхности, то $\omega^\varrho = 0$ и поэтому, в силу (1. 3) и (1. 7), имеет место $\Sigma^a = 0$. Среди многообразий $B_n(m, N)$ с такими секущими поверхностями в E_{m+n} наиболее специальными являются многообразия $B_n(n, N)$ с огибающей поверхностью, состоящие из касательных n-плоскостей некоторой n-мерной поверхности V_n в R_N. Такие $B_n(n, N)$ называются *касательными*, их класс является проективно-инвариантным.

Результаты исследований многобразий $B_2(2)$ в R_4, проведенных в § 5, показывают, что этими случаями охватываются далеко не все возможные секущие поверхности в E_{m+n} с $\Sigma = 0$.

§ 2. Стрикционные свойства

1. Две m-плоскости в R_n имеют (см. [13], стр. 127—132) следующие числовые инварианты и геометрические коварианты: 1) расстояние и основания общих перпендикуляров (по крайней мере одного, в частности, в случае пересечения нулевой длины) между которыми оно осуществляется, 2) стационарные углы и 1-направления, между которыми они осуществляются (основания общих перпендикулярных 2-направлений).

Пусть в многообразии B_n задан путь x_t, где $0 \leqslant t \leqslant 1$, с началом в точке $x_0 \in B_n$. Для m-плоскости $\alpha(x_0) \in B_n(m, N)$ определяются предельные положения указанных оснований относительно m-плоскости $\alpha(x_t)$ при $t \to 0$, также предельные значения отношений числовых инвариантов, которые, как оказывается, зависят только от касательного направления выбранного пути в точке $x_0 \in B_n$.

Их усреднение с помощью некоторой римановой метрики, определяемой естественным образом на многообразии B_n, приводит к инвариантным взаимно ортогональным направлениям в каждой плоскости $\alpha \in B_n(m, N)$, а также к ряду инвариантов, связанных с α.

Настоящий параграф в основном воспроизводит (в новом изложении и с небольшими дополнениями) нужные в дальнейшем результаты В. В. Вагнера [27].

2. Для точки $X = X_0 + x^a \boldsymbol{e}_a$ в m-плоскости $\alpha \in B_n(m, N)$ имеем:

$$d\boldsymbol{X} = \boldsymbol{e}_a(\nabla x^a + \omega^a) + (\boldsymbol{l}_i + x^a \boldsymbol{l}_{ai})\theta^i, \tag{2.1}$$

где

$$\nabla x^a = dx^a + x^b \omega_b{}^a, \tag{2.1'}$$

$$\boldsymbol{l}_i = \Lambda_i{}^\varrho \boldsymbol{e}_\varrho, \quad \boldsymbol{l}_{ai} = \Lambda_{ai}{}^\varrho \boldsymbol{e}_\varrho .$$

Обозначим

$$g_{ij} = (\boldsymbol{l}_i, \boldsymbol{l}_j), \quad \Lambda_{aij} = (\boldsymbol{l}_{ai}, \boldsymbol{l}_j), \quad \Lambda_{abij} = (\boldsymbol{l}_{ai}, \boldsymbol{l}_{bj}). \tag{2.2}$$

Из

$$d\boldsymbol{X} = \boldsymbol{e}_a \omega^a + \boldsymbol{l}_i \theta^i,$$
$$d\boldsymbol{e}_a = \boldsymbol{e}_b \omega_b{}^a + \boldsymbol{l}_{ai} \theta^i$$

получаем внешним дифференцированием, используя (1.1), (1.5) и (1.6):

$$\nabla \boldsymbol{l}_i = \boldsymbol{l}_{ai} \omega^a (\operatorname{mod} \theta^j),$$
$$\nabla \boldsymbol{l}_{ai} = O (\operatorname{mod} \theta^j),$$

где

$$\nabla \boldsymbol{l}_i = d\boldsymbol{l}_i - \boldsymbol{l}_j \theta_i{}^j,$$
$$\nabla \boldsymbol{l}_{ai} = d\boldsymbol{l}_{ai} - \boldsymbol{l}_{bi} \omega_a{}^b - \boldsymbol{l}_{aj} \theta_i{}^j$$

(аналогичное значение имеет дифференциальный оператор ∇ и в других случаях; см. также (2. 1')). Поэтому

$$\nabla g_{ij} = 2\Lambda_{a(ij)}\omega^a (\mathrm{mod}\ \partial^k), \tag{2. 3}$$

$$\nabla \Lambda_{aij} = \Lambda_{abij}\omega^b (\mathrm{mod}\ \partial^k), \tag{2. 4}$$

$$\nabla \Lambda_{abij} = O (\mathrm{mod}\ \partial^k). \tag{2. 5}$$

3. Векторы $\boldsymbol{x} = X^a \boldsymbol{e}_a$ и $'\boldsymbol{x} = 'X^{a\prime}\boldsymbol{e}_a$, между направлениями которых осуществляются стационарные углы двух m-плоскостей с направляющими векторами $\boldsymbol{e}_a$ и $'\boldsymbol{e}_a$ $(a = 1, \ldots, m)$, определяются из системы (см. [19], стр. 393; [13], стр. 129)

$$\boldsymbol{e}_a ('\boldsymbol{x} - \sigma \boldsymbol{x}) = 0,$$

$$'\boldsymbol{e}_a (\boldsymbol{x} - \sigma' \boldsymbol{x}) = 0,$$

где σ — косинус угла φ между $\boldsymbol{x}$ и $'\boldsymbol{x}$. Подставляя сюда

$$'\boldsymbol{e}_a = \boldsymbol{e}_a + d\boldsymbol{e}_a + \frac{1}{2} d^2\boldsymbol{e}_a + \varepsilon_a,$$

$$'X^a = X^a + dX^a + \frac{1}{2} d^2 X^a + \xi^a,$$

$$\sigma = 1 - \frac{\varphi^2}{2} + \vartheta,$$

и приравнивая нулю суммы членов одного порядка, находим:

$$\nabla X^a = 0,$$

$$(\boldsymbol{e}_a, d^2\boldsymbol{x}) = -\varphi^2 X^b g_{ba},$$

$$X^b (\varphi^2 g_{ab} - \Lambda_{abij}\partial^i\partial^j) = 0.$$

Последняя система определяет для каждой m-плоскости $\alpha(x) \in B_n(m, N)$ и для каждого касательного к B_n направления в точке $x \in B_n$, вообще говоря, m взаимно ортогональных направлений — главных направлений аффинора

$$g^{ac}\Lambda_{cbij}\partial^i\partial^j.$$

След этого аффинора

$$\gamma_{ij}\partial^i\partial^j = g^{ab}\Lambda_{abij}\partial^i\partial^j$$

представляет собой главную часть квадрата угла между двумя бесконечно близкими m-плоскостями в многообразии $B_n(m, N)$ — сумму собственных значений аффинора (квадратов главных частей стационарных углов; см. [19], стр. 341, 396; [4]) и определяет на B_n некоторую риманову метрику. Для соответствующих ко- и контравариантных метрических тензоров

$$\gamma_{ij} = g^{ab}\Lambda_{abij}$$

и γ^{ij} имеем, в силу $g^{ab} = 0 (\mathrm{mod}\ \partial^i)$ и (2. 5),

$$\nabla \gamma_{ij} = 0 (\mathrm{mod}\ \partial^k), \qquad \nabla \gamma^{ij} = 0 (\mathrm{mod}\ \partial^k).$$

В этой римановой метрике можно усреднить пучок тензоров Λ_{abij}, т. е. образовать тензор

$$\Lambda_{ab} = \Lambda_{abij}\gamma^{ij},$$

для которого

$$\nabla \Lambda_{ab} = 0 \,(\mathrm{mod}\, \theta_i),$$

и теперь собственные значения и направления аффинора $g^{ac}\Lambda_{cb}$ являются некоторыми инвариантными величинами и направлениями для m-плоскости $\alpha \in B_n(m, N)$.

4. Аналогичным образом можно на каждой m-плоскости $\alpha \in B_n(m, N)$ определить инвариантную точку.

Основания $X = X_0 + x^a \boldsymbol{e}_a$ и $X + \Delta \boldsymbol{X}$ общего перпендикуляра двух m-плоскостей многообразия $B_n(m, N)$ определяются из системы

$$(\Delta \boldsymbol{X}, \boldsymbol{e}_a) = 0, \quad (\Delta \boldsymbol{X}, \Delta \boldsymbol{e}_a) = 0.$$

Подставляя здесь

$$\Delta \boldsymbol{e}_a = d\boldsymbol{e}_a + \varepsilon'_a$$
$$\Delta \boldsymbol{X} = d\boldsymbol{X}_0 + dx^b \boldsymbol{e}_b + x^b d\boldsymbol{e}_b + \Xi$$

и приравнивая нулю суммы членов одного порядка, получим:

$$\nabla x^a = -\omega^a,$$

$$(x^a \Lambda_{abij} + \Lambda_{bij}) \theta^i \theta^j = 0. \tag{2.6}$$

Отсюда для каждой m-плоскости $\alpha \in B_n(m, N)$ и каждого направления $\theta^i = X^i dt$ на B_n в соответствующей точке определяется, вообще говоря, однозначно инвариантная точка X, называемая *стрикционной точкой* в этом направлении. При этом возможно, конечно, что для некоторых направлений стрикционные точки или не существуют (т. е. они бесконечно удалены), или заполняют некоторую k-плоскость в данной m-плоскости α.

Все стрикционные точки в данной m-плоскости $\alpha \in B_n(m, N)$ образуют в ней некоторую алгебраическую рациональную поверхность, называемую *стрикционной индикатрисой*.

Усреднением в римановой метрике γ_{ij} на B_n из (2.6) получается система

$$x^a \Lambda_{ab} + \Lambda_a = 0, \tag{2.7}$$

где

$$\Lambda_a = \Lambda_{aij} \gamma^{ij}.$$

В общем случае $\det |\Lambda_{ab}| \neq 0$ и можно ввести Λ^{ab} так, что $\Lambda^{ab}\Lambda_{bc} = \delta_c{}^a$. Тогда для

$$w^a = -\Lambda^{ab}\Lambda_b$$

имеем

$$\nabla w^a = -\omega^a \,(\mathrm{mod}\, \theta_i),$$

потому что

$$\nabla \Lambda^{ab} = 0 \,(\mathrm{mod}\, \theta^i),$$

а из (2.4)

$$\nabla \Lambda_b = \Lambda_{bc}\omega^c \,(\mathrm{mod}\, \theta^i).$$

Следовательно, точка

$$W = X_0 + w^a \boldsymbol{e}_a$$

инвариантно связана с данной плоскостью $\alpha \in B_n(m, N)$. Она называется *центром Вагнера*, так как она была впервые построена В. В. Вагнером [27].

5. Стрикционная индикатриса многообразия $B_n(m, N)$ в каждой m-плоскости $\alpha \in B_n(m, N)$ является чисто евклидовым понятием. С нею тесно связан некоторый проективно инвариантный образ — так называемая *фокальная поверхность* [27, 4] в $\alpha \in B_n(m, N)$, которая может быть определена как подповерхность стрикционной индикатрисы, состоящая из точек, расстояния которых от соответствующих им бесконечно близких m-плоскостей в $B_n(m, N)$ являются бесконечно малыми высшего порядка. Другими словами, фокальная поверхность в $\alpha \in B_n(m, N)$ состоит из точек, называемых фокусами, через которые в E_{m+n} проходят кривые, касательные к которым принадлежат m-плоскости α. Проекции этих кривых в многообразии B_n — в базе расслоенного пространства E_{m+n} — имеют в точке, являющейся проекцией m-плоскости α, некоторые касательные к B_n направления, которые называются *фокальными направлениями* многообразия $B_n\ (m, N)$.

Если точка $X = X_0 + x^a \boldsymbol{e}_a$ в m-плоскости $\alpha \in B_n(m, N)$ является фокусом, и направление, определяемое на B_n некоторыми значениями форм ϑ^i кобазиса, — соответствующим фокальным направлением, то вектор $d\boldsymbol{X}$ для этого направления принадлежит α, т. е. в (2.1) имеют место равенства

$$(\boldsymbol{l}_i + x^a \boldsymbol{l}_{ai}) \vartheta^i = 0.$$

Следовательно, фокальная поверхность в $\alpha \in B_n(m, N)$ выделяется уравнениями, выражающими линейную зависимость векторов $\boldsymbol{l}_i + x^a \boldsymbol{l}_{ai}$ в $(N - m)$-направлении, вполне ортогональном к α в метрике пространства R_n. Следовательно, фокальная поверхность является нетривиальной только при $N - m \geqslant n$.

Если $N = m + n$, то многообразие $B_n(m, m + n)$ называется, следуя В. В. Вагнеру [27], *конгруэнцией* и обозначается просто $B_n(m)$. Фокальная поверхность конгруэнции $B_n(m)$ в каждой m-плоскости $\alpha \in B_n(m)$ является некоторой алгебраической гиперповерхностью порядка n. По крайней мере гиперповерхностью является, следовательно, и стрикционная индикатриса в каждой $\alpha \in B_n(m)$, потому что она содержит фокальную гиперповерхность.

§ 3. Конгруэнции со специальными алгебрами кривизны

1. В случае конгруэнции $B_n(m)$ в R_{m+n} индексы $\varrho, \sigma, \ldots$ и $i, j, \ldots$ в формулах (1.3) и (1.4) пробегают те же самые значения $m + 1, \ldots, m + n$ и их можно отождествить. Если начало X_0 подвижного репера не лежит на фокальной гиперповерхности в m-плоскости $\alpha \in B_n(m)$, то матрица $\|\Lambda_i^{\,j}\|$ является неособой квадратной матрицей и базисные формы θ^i можно с помощью (1.3) заменить формами ω^i. Тогда

$$\Lambda_i{}^j = \delta_i{}^j, \tag{3.1}$$

и уравнения (1.4) принимают вид

$$\omega_a{}^j = \Lambda_{ai}{}^j \omega^i.$$

Фокальная гиперповерхность конгруэнции $B_n(m)$ в m-плоскости $\alpha \in B_n(m)$ имеет уравнение

$$\det | \delta_i{}^j + x^a \Lambda_{ai}{}^j | = 0 \tag{3.2}$$

(условие линейной зависимости векторов $\boldsymbol{l}_i + x^a \boldsymbol{l}_{ai} = (\delta_i{}^j + x^a \Lambda_{ai}{}^j) \boldsymbol{e}_j$; см. § 2, п. 5). Так как

$$d\omega^i = \omega^a \wedge \omega_a{}^i + \omega^j \wedge \omega_j{}^i,$$

то в формулах, приведенных в предыдущих параграфах, следует считать

$$\theta_j{}^i = \omega_j{}^i - \Lambda_{aj}{}^i \omega^a.$$

Кроме того, в (2.2) имеют место $\boldsymbol{l}_i = \boldsymbol{e}_i$ и $\boldsymbol{l}_{ai} = \Lambda_{ai}{}^j \boldsymbol{e}_j$, и поэтому

$$\Lambda_{aij} = \Lambda_{ai}{}^k g_{kj}, \quad \Lambda_{abij} = \Lambda_{ai}{}^k \Lambda_{bj}{}^l g_{kl}. \tag{3.3}$$

Если ввести новый дифференциальный оператор $\triangle$, отличающийся от оператора ∇ только тем, что матрица $\|\theta_j{}^i\|$ заменена матрицей $\|\omega_j{}^i\|$, то формулы (2.3—5) можно в данном случае переписать следующим образом:

$$\triangle g_{ij} = 0 \pmod{\omega^k}, \tag{3.4}$$

$$\triangle \Lambda_{aij} = -\Lambda_{akj} \Lambda_{bi}{}^k \omega^b \pmod{\omega^l}, \tag{3.5}$$

$$\triangle \Lambda_{abij} = -\Lambda_{abkj} \Lambda_{ci}{}^k \omega^c - \Lambda_{abik} \Lambda_{cj}{}^k \omega^c \pmod{\omega^l}. \tag{3.6}$$

2. Пусть в некоторой m-плоскости $\alpha \in B_n(m)$ фиксированы начало X_0 репера и еще одна точка $X = X_0 + x^a \boldsymbol{e}_a$. Тогда для этой m-плоскости α справедливы

$$\omega^a = 0 \pmod{\omega^i},$$

$$\triangle x^a = -\omega^a \pmod{\omega^i}$$

(последнее в силу (2.1)). Если теперь образовать систему величин $L_{ij} = x^a \Lambda_{aij}$, то для нее

$$\triangle L_{ij} = 0 \pmod{\omega^k}.$$

Этот результат показывает, что величины L_{ij}, составленные с помощью пары фиксированных точек (X_0, X) заданной m-плоскости $\alpha \in B_n(m)$, образуют для n-направления, ортогонального в R_{m+n} к α, некоторый двухвалентный тензор.

Этот тензор L_{ij} можно геометрически истолковать следующим образом. Пусть точка X_0 описывает в E_{m+n} путь, ортогональный к m-плоскости $\alpha \in B_n(m)$, так что касательный вектор $\boldsymbol{x} = x^i \boldsymbol{e}_i$ этого пути является единичным в метрике пространства R_{m+n}. Тогда точка $X = X_0 + x^a \boldsymbol{e}_a$ также описывает некоторый путь, касательный вектор к которому имеет в силу (2. 1) некоторую ортогональную к α компоненту

$$\boldsymbol{x}' = x^i(\boldsymbol{e}_i + x^a \boldsymbol{l}_{ai}),$$

зависящую только от X. Отклонение $\Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}$ имеет на векторе $\boldsymbol{x}$ проекцию, выражающуюся формулой

$$(\Delta\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}) = (x^a x^i \boldsymbol{l}_{ai},\ x^j \boldsymbol{e}_j) = x^a \Lambda_{aij} x^i x^j = L_{ij} x_i x_j.$$

К каждой паре $(X_0,\ X)$ точек m-плоскости $\alpha \in B_n(m)$ присоединяется некоторая квадрика

$$L_{ij} x^i x^j = 1,$$

характеризующая в ней распределение этой проекции по 1-направлениям[1]. Эта квадрика называется *индикатрисой* конгруэнции $B_n(m)$ в упорядоченной паре $(X_0,\ X)$ точек заданной m-плоскости $\alpha \in B_n(m)$.

Если точку $X = X_0 + x^a \boldsymbol{e}_a$ заменить другой точкой $X' = X_0 + \lambda x^a \boldsymbol{e}_a$ прямой X_0X, то индикатриса подвергается гомотетическому преобразованию. Несколько более сложное преобразование индикатрисы происходит, если точку X_0 заменить некоторой другой точкой $X'_0 = X_0 + \lambda_0 x^a \boldsymbol{e}_a$ этой же прямой X_0X, где $\lambda_0 \neq 1$. Тогда

$$'\omega^i = (\delta_j{}^i + \lambda_0 x^a \Lambda_{aj}{}^i)\,\omega^j,$$

и потому из

$$'\Lambda_{ai}{}^{j'}\omega^i = \Lambda_{ai}{}^j \omega^i$$

следует, что

$$'\Lambda_{akj}(\delta_i{}^k + \lambda_0 x^b \Lambda_{bi}{}^k) = \Lambda_{aij}.$$

Кроме того,

$$'x^a = (1 - \lambda_0)\,x^a.$$

Отсюда

$$L_{ij} = \frac{1}{1-\lambda_0}\,'L_{kj}(\delta_i{}^k + \lambda_0 L_{il} g^{kl}). \tag{3. 7}$$

Теорема 3. *Если в m-плоскости $\alpha \in B_n(m)$ существует прямая, в точке X_0 которой векторная 2-форма кручения Σ ортогональна к этой прямой, то Σ ортогональна к ней в любой ее точке, причем индикатрисы конгруэнции $B_n(m)$ в парах $(X_0,\ X)$ точек этой прямой имеют общие главные направления. Каждое из них является фокальным; на прямой X_0X ему соответствует фокус X_i (точка пересечения фокальной гиперповерхности с прямой X_0X; $i = 1, \ldots, n$), так что простое отношение $(X_i X X_0)$ равно квадрату полуоси индикатрисы на этом главном направлении.*

Доказательство. Пусть направление прямой определяется вектором $x^a \boldsymbol{e}_a$. Если Σ ортогональна к этому вектору в начале X_0 репера, то

---

[1] Если $B_n(m)$ является нормальной конгруэнцией в R_{m+n} и X_0 описывает ее ортогональную поверхность, то эта квадрика совпадает с индикатрисой Дюпена ортогональной поверхности относительно вектора $x^a \boldsymbol{e}_a$ (см. [15]).

$$g_{ab}x^a T_{ij}{}^b = 0,$$

или, в силу (1. 7), (3. 1) и (3. 3),

$$x^a \Lambda_{a[ij]} = 0.$$

Следовательно, тензор L_{ij}, присоединенный к паре (X_0, X) точек X_0 и $X = X_0 + x^a\boldsymbol{e}_a$ этой прямой, является симметричным, и векторы $\boldsymbol{e}_i$ репера можно выбрать так, чтобы

$$g_{ij} = \delta_{ij}, \ L_{ij} = 0 \ \ (i \neq j), \tag{3. 8}$$

т. е. чтобы единичные векторы $\boldsymbol{e}_i$ были направлены по главным направлениям индикатрисы конгруэнции $B_n(m)$ в паре (X_0, X).

В силу (3. 7) в любой другой паре (X'_0, X') точек этой же прямой также

$$'L_{ij} = 0 \ \ (i \neq j),$$

вследствие чего Σ является ортогональной к $x^a\boldsymbol{e}_a$ в любой точке X'_0 рассматриваемой прямой.

Индикатрисы конгруэнции $B_n(m)$ в парах точек прямой X_0X, действительно, имеют общие главные направления. Квадрат полуоси индикатрисы $\Sigma L_{ii}(x^i)^2 = 1$ на i-ом главном направлении определяется величиной $(L_{ii})^{-1} = (x^a\Lambda_{ai}{}^i)^{-1}$.

Точки $X_i = X_0 + \lambda_i x^a\boldsymbol{e}_a$ пересечения прямой X_0X с фокальной гиперповерхностью (3. 2) (фокусы) определяются n корнями уравнения

$$\det | \delta_j^i + \lambda x^a \Lambda_{aj}{}^i | = 0,$$

имеющего в данном случае вид $\Pi(1 + \lambda L_{ii}) = 0$, т. е. величинами $\lambda_i = -(L_{ii})^{-1}$. Каждая из них X_k соответствует направлению вектора $\omega^i e_i$, определенному, в силу (1. 12), системой

$$(\delta_j^i + \lambda_k x^a \Lambda_{aj}{}^i)\,\omega^j = 0,$$

которая в данном случае, действительно, выделяет главные направления индикатрисы $\Sigma L_{ii}(x^i)^2 = 1$.

Простое отношение (X_iXX_0), в котором X_0 делит пару точек $X_i = X_0 + \lambda x^a\boldsymbol{e}_a$ и $X = X_0 + x^a\boldsymbol{e}_a$, равно $-\lambda_i$. Теорема доказана.

Из теоремы 3 вытекает непосредственно следующее

Следствие. *Общие главные направления индикатрис в парах точек прямой X_0X разбиваются одинаково на группы направлений с равными полуосями.*

Этот же результат можно получить с помощью (3. 8) прямо из (3. 7):

$$L_{ii} = \frac{1}{1 - \lambda_0}\, 'L_{ii}(1 + \lambda_0 L_{ii}).$$

Совпадение p полуосей указанных индикатрис $(p \leqslant n)$ означает геометрически, что прямая X_0X имеет с фокальной гиперповерхностью (3. 2) касание $(p-1)$-порядка.

Следует отметить, что первая часть теоремы 3 имеет более общий характер и относится к числу теорем, о которых говорится в § 1, п. 3.

3. Пусть алгебра кривизны конгруэнции $B_n(m)$ в каждой m-плоскости $\alpha \in B_n(m)$ является алгеброй Ли подгруппы вращений вокруг прямой в группе $T_m * O(m)$. Выделяется некоторый класс конгруэнций $B_n(m)$, внешняя геометрия которых в R_{m+n} описывается следующей теоремой.

Теорема 4. *Пусть векторная 2-форма кручения Σ конгруэнции $B_n(m)$ обращается в нуль в двух точках m-плоскости $\alpha \in \in B_n(m)$. Тогда она обращается в нуль в произвольной точке соединяющей их прямой. Фокальная гиперповерхность конгруэнции $B_n(m)$ в m-плоскости $\alpha \in B_n(m)$ распадается на q компонент порядков $p_1, \ldots, p_q$ $(p_1 + \ldots + p_q = n)$, каждая из которых имеет с этой прямой касание $(p_r - 1)$-го порядка $(r = 1, \ldots, q)$. Индикатрисы конгруэнции $B_n(m)$ в парах точек этой прямой имеют общие главные направления, одинаково разбивающиеся на q групп 1-направлений с равными полуосями. Значения аффинорной 2-формы кривизны Ω могут отличаться от нуля только на векторах, принадлежащих p_r-направлению главных направлений одной группы. Фокальные 1-направления, соответствующие каждой из компонент фокальной гиперповерхности, принадлежат одному из этих p_r-направлений.*

Доказательство. Первое утверждение теоремы является непосредственным следствием из теоремы 2. Кроме того, можно использовать теорему 3.

Пусть репер выбран так, чтобы начало X_0 и вектор $\boldsymbol{e}_1$ принадлежали указанной прямой, а векторы $\boldsymbol{e}_i$ были направлены по главным направлениям индикатрисы конгруэнции $B_n(m)$ в паре (X_0, X) точек X_0 и $X = X_0 + \boldsymbol{e}_1$. Тогда $\Sigma^a = 0$, $\Omega_1{}^a = 0$, из которых, в силу (1. 7' — 8'), (3. 1) и (2. 8), следует, что

$$\Lambda_{1ij} = 0 \quad (i \neq j),$$

$$\Lambda_{a[ij]} = 0,$$

$$\Lambda_{1ik}\Lambda_{aj}{}^k - \Lambda_{1jk}\Lambda_{ai}{}^k = 0.$$

Отсюда

$$(\Lambda_{1ii} - \Lambda_{1jj})\Lambda_{aj}{}^i = 0. \tag{3.9}$$

Пусть главные направления индикатрисы конгруэнции $B_n(m)$ в паре точек (X_0, X) разбиты на q групп, так что главные направления одной группы имеют равные полуоси, а главные направления разных групп — разные полуоси. Пусть i_r пробегает значения индекса i, соответствующие полуосям r-ой группы. Тогда

$$\Lambda_{1i_ri_r} = \Lambda_{1j_rj_r}, \quad \Lambda_{1i_ri_r} = \Lambda_{1j_sj_s} \quad (r \neq s),$$

и из (3.9) следует, что

$$\Lambda_{ajs}{}^{i_r} = 0 \quad (r \neq s). \tag{3.10}$$

Уравнение фокальной гиперповерхности (3.2) распадается в данном случае, в силу (3.10), на q уравнений

$$\det|\delta_{j_r}{}^{i_r} + x^a \Lambda_{aj_r}{}^{i_r}| = 0, \tag{3.11}$$

каждое из которых имеет порядок p_r $(r = 1, \ldots, q)$. Следовательно, происходит указанное в теореме распадение фокальной гиперповерхности. Прямая X_0X имеет с каждой компонентой p_r совпадающих между собой общих точек (см. теорему 3, в которой нужно учитывать равенство полуосей на главных направлениях одной группы), и поэтому имеет с ней касание $(p_r - 1)$-го порядка.

Из (3.10), в силу (1.8), (1.8′), следует, что

$$\Omega_b{}^a = \sum_r g^{ac} \Lambda_{ci_r}{}^{k_r} \Lambda_{bj_r}{}^{k_r} \omega^{i_r} \wedge \omega^{j_r}.$$

Фокальные направления $\omega^i \boldsymbol{e}_i$, соответствующие одной из компонент фокальной гиперповерхности, определяются, в силу (1.12) и (3.10), системой, матрица которой имеет блок-диагональный вид. Уравнение (3.11) каждой компоненты фокальной гиперповерхности получается приравниванием нулю определителя лишь одного диагонального блока. Следовательно, для соответствующих фокальных направлений $\omega^{i_s} = 0$ $(s \neq r)$, а ω^{i_r} определяются из системы

$$(\delta_{j_r}{}^{i_r} + x^a \Lambda_{aj_r}{}^{i_r}) \omega^{j_r} = 0.$$

Теорема доказана.

4. Пусть алгебра кривизны конгруэнции $B_n(m)$ в каждой m-плоскости $\alpha \in B_n(m)$ определяет в $T_m * O(m)$ подгруппу движений, сохраняющих в R_m параллельные между собой p-плоскости некоторой связки. Выделяется класс конгруэнций, внешняя геометрия которых в R_{m+n} описывается следующей теоремой.

Теорема 5. *Пусть в m-плоскости $\alpha \in B_n(m)$ существует связка параллельных p-плоскостей, так что в любой точке $X \in \alpha$ векторная 2-форма кручения Σ принадлежит p-плоскости связки, проходящей через X. Тогда каждая $(m-p-1)$-мерная поверхность порядка n, являющаяся пересечением фокальной гиперповерхности конгруэнции $B_n(m)$ в m-плоскости $\alpha \in B_n(m)$ с произвольной $(m-p)$-плоскостью, вполне ортогональной к p-плоскостям связки, распадается на n гиперплоскостей в этой $(m-p)$-плоскости. Каждая из них соответствует одному из главных направлений индикатрисы конгруэнции $B_n(m)$ в какой-нибудь паре (X_0, X) точек ортогональной $(m-p)$-плоскости.*

Доказательство. Пусть ортонормированный подвижный репер в R_{m+n} выбран так, что его начало X_0 и векторы $\boldsymbol{e}_A$ $(A, B, \ldots = m-p+1, \ldots, m)$ перемещаются свободно в некоторой фиксированной p-плоскости связки в α, а векторы $\boldsymbol{e}_\alpha$ $(\alpha, \beta, \ldots = 1, \ldots, m-p)$ принадлежат плоскости α. Тогда

$$\omega^\alpha = 0 \ (\mathrm{mod}\, \omega^i), \ \omega_A{}^\alpha = 0 \ (\mathrm{mod}\, \omega^i). \tag{3.12}$$

Условие теоремы требует, чтобы при произвольных x^a $(a = 1, \ldots, m)$ имели место

$$'\Sigma^\alpha \equiv \Sigma^\alpha + x^a \Omega_a{}^\alpha = 0,$$

т. е. чтобы

$$\Sigma^\alpha = 0, \ \Omega_a{}^\alpha = 0,$$

или, в силу (1.7′—8′) и (3.1),

$$\Lambda_{\alpha j}{}^i = \Lambda_{\alpha i}{}^j, \tag{3.13}$$

$$\Lambda_{ai}{}^k \Lambda_{\alpha j}{}^k = \Lambda_{aj}{}^k \Lambda_{\alpha i}{}^k. \tag{3.14}$$

Векторы $\boldsymbol{e}_i$ подвижного репера можно выбрать так, чтобы они были направлены по главным направлениям индикатрисы конгруэнции $B_n(m)$ в паре (X_0, X) точек X_0 и $X = X_0 + x^1 \boldsymbol{e}_1$ m-плоскости α. Тогда

$$\Lambda_{1j}{}^i = 0 \ (i \neq j), \tag{3.15}$$

и из (3.14) следует, что

$$(\Lambda_{1i}{}^i - \Lambda_{1j}{}^j) \Lambda_{\alpha j}{}^i = 0. \tag{3.16}$$

Оказывается, что всегда

$$\Lambda_{\alpha j}{}^i = 0 \ (i \neq j). \tag{3.17}$$

Действительно, если $\Lambda_{1i}{}^i \neq \Lambda_{1j}{}^j$, то это следует из (3.16). Если же в выбранном подвижном репере, т. е. при независимых ω^k, ω^A, $\omega_B{}^A$ и $\omega_\beta{}^\alpha$, для каких-либо значений i и j имеет место тождество

$$\Lambda_{1i}{}^i \equiv \Lambda_{1j}{}^j, \tag{3.18}$$

то из (3.5) вытекает, в силу (3.12) и (3.15), что

$$\Lambda_{\alpha j}{}^i \omega_1{}^\alpha = -\Lambda_{1i}{}^i \Lambda_{Aj}{}^i \omega^A + (\ldots)_{jk}{}^i \omega^k \ (i \neq j),$$

$$(\Lambda_{\alpha i}{}^i - \Lambda_{\alpha j}{}^j) \omega_1{}^\alpha = -\Lambda_{1i}{}^i (\Lambda_{Ai}{}^i - \Lambda_{Aj}{}^j) \omega^A + (\ldots)_{ijk} \omega^k.$$

Отсюда

$$\Lambda_{\alpha j}{}^i = 0 \ (i \neq j), \ \Lambda_{\alpha i}{}^i = \Lambda_{\alpha j}{}^j, \tag{3.19}$$

т. е. опять удовлетворяется (3.17).

Поверхность в m-плоскости α, являющаяся пересечением фокальной гиперповерхности

$$\det | \delta_j{}^i + x^a \Lambda_{aj}{}^i | = 0$$

и $(m-p)$-плоскости $x^A=0$, определяется в данном случае уравнениями

$$\prod_i (1+x^\alpha \Lambda_{\alpha i}{}^i)=0,\ x^A=0,$$

т. е. распадается на n плоскостей размерности $m-p-1$. Каждая из этих $(m-p-1)$-плоскостей соответствует одному из главных направлений индикатрис конгруэнции $B_n(m)$ в паре $(X_0,\ X)$ точек $(m-p)$-плоскости $x^A=0$. Теорема доказана.

5. Обе доказанные теоремы имеют существенное значение при рассмотрении класса конгруэнций $B_n(m)$, у которых алгебра кривизны в каждой m-плоскости $\alpha \in B_n(m)$ определяет в $T_m * O(m)$ подгруппу вращений вокруг некоторой $(m-p)$-плоскости.

Теорема 6. *Пусть в m-плоскости $\alpha \in B_n(m)$ существует $m-p+1$ линейно независимых точек, в которых векторная 2-форма кручения Σ обращается в нуль. Тогда Σ обращается в нуль во всех точках $(m-p)$-плоскости τ, натянутой на эти точки, а в остальных точках m-плоскости α она ортогональна к $(m-p)$-плоскости τ. Пересечения фокальной гиперповерхности в α с $(m-p)$-плоскостями, параллельными к τ, распадаются на n плоскостей размерности $m-p-1$, каждая из которых соответствует одному из главных направлений индикатрисы конгруэнции $B_n(m)$ в паре точек этой $(m-p)$-плоскости. Пусть $(m-p-1)$-плоскости на фокальной гиперповерхности, лежащие на каждой из этих $(m-p)$-плоскостей, разбиваются одинаково на q группы так, что p_r плоскостей r-ой группы $(r=1,\ \ldots,\ q)$ совпадают между собой. Тогда фокальная гиперповерхность распадается на q компонент порядков $p_1, \ldots, p_q$ $(p_1+\ldots+p_q=n)$.*

Доказательство во многом повторяет рассуждения, с помощью которых были доказаны теоремы 4 и 5. Если X_0 и $\boldsymbol{e}_\alpha$ располагаются в τ и $\boldsymbol{e}_A$ в α, то

$$\Sigma^a=0,\ \Omega_\alpha{}^a=0,$$

и потому

$$\Lambda_{aj}{}^i=\Lambda_{ai}{}^j,\ \Lambda_{\alpha i}{}^k\Lambda_{aj}{}^k=\Lambda_{\alpha j}{}^k\Lambda_{ai}{}^k.$$

Всегда можно выбрать $\boldsymbol{e}_i$ так, чтобы $\Lambda_{1j}{}^i=0$ при $i\neq j$, сохраняя свободными формы ω^α и $\omega_\beta{}^\alpha$. Оказывается, что вместе с тем $\Lambda_{\alpha j}{}^i=0$ при $i\neq j$, вследствие чего

$$(\Lambda_{\alpha j}{}^i-\Lambda_{\alpha j}{}^j)\Lambda_{Aj}{}^i=0.$$

Дальнейшее повторяет соответствующую часть доказательства теоремы 4.

Следует отметить, что и без того длинную формулировку теоремы 6 можно было бы еще дополнить некоторыми утверждениями, аналогичными соответствующим утверждениям теоремы 4.

6. Рассмотренные выше классы конгруэнций $B_n(m)$ содержат в качестве весьма специального крайнего случая класс конгруэнций $B_n(m)$ с нулевой алгеброй кривизны.

Пусть во всех точках m-плоскости $\alpha \in B_n(m)$ векторная 2-форма кручения Σ обращается в нуль. Из теоремы 5 (в которой следует считать $p=0$) вытекает, что фокальная гиперповерхность конгруэнции в m-плоскости α распадается на n плоскостей размерности $m-1$. Каждой из них соответствует фокальное направление, совпадающее с одним из главных направлений индикатрисы конгруэнции в какой-нибудь паре (X_0, X) точек m-плоскости α. Пересечению каких-нибудь l из этих $(m-1)$-плоскостей соответствует фокальное l-направление, натянутое на соответствующие главные направления.

Пусть Σ обращается в нуль во всех точках всех плоскостей $\alpha \in B_n(m)$. Тогда распределение n-направлений на E_{m+n}, вполне ортогональных в R_{m+n} к m-плоскостям $\alpha \in B_n(m)$, является инволютивным (потому что определяющая его система $\omega^a=0$ является в силу $\Sigma=0$ вполне интегрируемой). Максимальные интегральные многообразия этого распределения образуют семейство n-мерных поверхностей в R_{m+n}, ортогонально пересекающих m-плоскости $\alpha \in B_n(m)$. Поэтому конгруэнцию $B_n(m)$ в R_{m+n} с векторной 2-формой кручения Σ, тождественно обращающейся в нуль, естественнно называть *вполне нормальной.* Группа голономии такой конгруэнции $B_n(m)$ является гомоморфным образом фундаментальной группы многообразия B_n.

Вполне нормальная конгруэнция $B_n(m)$ в R_{m+n} имеет весьма специальное фокальное строение.

Если $m \geqslant n$, то n гиперплоскостей в каждой m-плоскости $\alpha \in B_n(m)$, на которые распадается фокальная гиперповерхность в α, пересекаются по $(m-n)$-плоскости, для которой любое ортогональное к α направление является фокальным. Следовательно, эта $(m-n)$-плоскость описывает в R_{n+m} некоторую m-мерную поверхность ранга n, для которой m-плоскости $\alpha \in B_n(m)$ являются касательными. Эта m-мерная огибающая поверхность вполне нормальной конгруэнции $B_n(m)$ $(m \geqslant n)$ имеет, кроме того, нулевую риманову кривизну.

Если $m \leqslant n$, то каждые m из $(m-1)$-плоскостей, образующих фокальную гиперповерхность в $\alpha \in B_n(m)$, пересекаются, в общем случае, в некоторой точке. Число таких точек равно $\binom{n}{m}$ Каждая из них описывает n-поверхность, называемую *фокальной*, касательные n-плоскости которой содержат m-плоскости конгруэнции $B_n(m)$. Конгруэнция $B_n(m)$ состоит из общих касательных m-плоскостей $\binom{n}{m}$ фокальных n-мерных поверхностей. Таким образом, вполне нормальная конгруэнция $B_n(m)$ в R_{m+n} является *вполне фокальной* (по терминологии Б. А. Розенфельда и Р. М. Гейдельмана).

Если конгруэнция (не обязательно вполне нормальная) имеет ортогональную поверхность, то величины $g^{ab}\Lambda_{aij}$ в точках этой поверхности образуют систему коэффициентов ее асимптотических форм. Из (3.17), где α можно теперь заменить на a, следует, что все ортогональные поверхности вполне нормальной конгруэнции $B_n(m)$ в R_{m+n} несут ортогональную сеть из n попарно сопряженных семейств линий, касательных к главным направлениям индикатрисы конгруэнции.

Известны условия, гарантирующие голономность сопряженной сети [1]. Если указанная ортогональная сопряженная сеть на ортогональной поверхности вполне нормальной конгруэнции $B_n(m)$ голономна, то при $m \leqslant n$ любая ее m-поверхность выделяет из конгруэнции $B_n(m)$ многообразие касательных m-плоскостей некоторой m-мерной поверхности нулевой римановой кривизны, принадлежащей одной из $\binom{n}{m}$ фокальных n-мерных поверхностей.

Вполне нормальные конгруэнции $B_n(m)$ являются в евклидовой теории аналогами тех конгруэнций m-плоскостей в неевклидовых пространствах, которые расслояют свои полярные псевдоконгруэнции (псевдоконгруэнции R). Последние были исследованы Р. М. Гейдельманом [3]. Содержание настоящего п. 6 показывает, что его результаты переносятся на евклидовый случай без существенных изменений.

7. Результатами настоящего параграфа тесно связана задача специальной поднормализации n-мерной поверхности $V_n = B_n(0)$ в евклидовом пространстве R_{m+n}.

С каждой поверхностью $V_n \subset R_{m+n}$ естественным образом ассоциируется конгруэнция $B_n(m)$ m-плоскостей, вполне ортогональных к касательным n-плоскостям поверхности V_n — так называемая *нормализующая конгруэнция* $B_n(m)$ для $V_n \subset R_{m+n}$. Пусть в каждой точке $X_0 \in V_n$ выбрана p-нормаль — p-плоскость $(p < m)$, проходящая через X_0 и принадлежащая m-плоскости $\alpha \in B_n(m)$. Возникает некоторое многообразие $B_n(p, m+n)$ p-плоскостей, которое называется *поднормализующим* $B_n(p, m+n)$ для $V_n \subset R_{m+n}$. С проективной точки зрения наиболее простое строение имеют многообразия $B_n(p, m+n)$ ранга n — такие $B_n(p, m+n)$, что определяемые ими расслоенные пространства E_{p+n} как поверхности в R_{m+n} имеют во всех точках произвольно фиксированной p-плоскости $\pi \in B_n(p, m+n)$ совпадающие между собой касательные плоскости (см. [2]).

Лемма. *Если поднормализующее $B_n(p, m+n)$ для $V_n \subset R_{m+n}$ имеет ранг n, то поднормализующее $B_n(m-p, m+n)$ для V_n, состоящее из $(m-p)$-плоскостей τ, ортогонально дополняющих p-плоскости $\pi \in B_n(p, m+n)$ в m-плоскостях $\alpha \in B_n(m)$, имеет также ранг n.*

Доказательство. К любой точке $X_0 \in V_n$ можно присоединить ортонормированный подвижный репер так, чтобы e_i $(i, j, \ldots = m+1, \ldots, m+n)$ были в касательной к V_n плоскости и e_A $(A, B, \ldots = 1, \ldots, p)$ — в p-плоскости $\pi \in B_n(p, m+n)$. Тогда e_α $(\alpha, \beta, \ldots = p+1, \ldots, m)$ принадлежат $(m-p)$-плоскости $\tau \in B_n(m-p, m+n)$. Касательная $(p+n)$-плоскость к поверхности E_{p+n} в произвольной ее точке $X = X_0 + x^A e_A$ натянута, в силу

$$dX = \omega^i e_i + dx^A e_A + x^A de_A,$$
$$de_A = \omega_A{}^B e_B + \Lambda_{Ai}{}^\alpha \omega^i e_\alpha + \Lambda_{Ai}{}^j \omega^i e_j,$$

на векторы e_A и $e_i + x^A(\Lambda_{Ai}{}^\alpha e_\alpha + \Lambda_{Ai}{}^j e_j)$. Если $B_n(p, m+n)$ имеет ранг n, то эта $(p+n)$-плоскость не зависит от выбора x^A, т. е. $\Lambda_{Ai}{}^\alpha = 0$, или

$$\omega_A{}^\alpha = 0.$$

Касательная плоскость к поверхности E_{m-p+n}, определяемой многообразием $B_n(m-p, m+n)$, в произвольной ее точке $X' = X_0 + x^\alpha e_\alpha$ натянута, в силу $\omega_\alpha{}^A = -\omega_A{}^\alpha = 0$, на векторы e_α e_i, т. е. не зависит от выбора x^α. Лемма доказана.

Возникает следующая задача специальной поднормализации: выделить и описать класс поверхностей $V_n \subset R_{m+n}$, допускающих поднормализующее $B_n(p, m+n)$ ранга n (в целом или в некоторой окрестности каждой точки).

Ниже эта задача рассматривается только при $p = 1$ с локальной точки зрения. Тогда она, в силу леммы, совпадает с задачей двойственной нормализации, которая была сформулирована в [17] следующим образом: изучить строение поверхностей $V_n \subset R_{m+n}$, допускающих касательную гиперполосу (многообразие $B_n(m+n-1, m+n)$ касательных к V_n гиперплоскостей), характеристические $(m-1)$-плоскости которой принадлежат m-плоскостям $\alpha \in B_n(m)$. Эта задача была в [17] решена лишь для $V_2 \subset R_4$, когда ее решениями являются V_2 с ортогональной сопряженной сетью. Общее решение задачи дается следующей теоремой.

Теорема 7. *Поверхность $V_n \subset R_{m+n}$ с нормализующей конгруэнцией $B_n(m)$ допускает локально поднормализующую $B_n(1, m+n)$ ранга n тогда и только тогда, когда либо*

I $m = 2$ *и $B_n(2)$ является вполне нормальным, либо*

II $m > 2$ *и*

1) *V_n несет полную невырожденную сопряженную систему [14] ортогональных полей p_r-направлений Δ_r $(r, s = 1, \ldots, q;$ $1 \leqslant q \leqslant n;$ $p_1 + \ldots p_q = n;$ $\Delta_r \cap \Delta_s = \varnothing$ при $r \neq s$, каждое Δ_r вполне ортогонально и сопряжено с каждым Δ_s при $s \neq r)$;*

2) *в каждой $\alpha \in B_n(m)$ существует по крайней мере одна 1-нормаль, имеющая с каждой компонентой p_r-го порядка, на которые распадается фокальная гиперповерхность конгруэнции $B_n(m)$ в этой $\alpha \in B_n(m)$, касание максимального порядка $p_r - 1$;*

3) *если не все p_r равны 1, то среди поднормализующих $B_n(1, m+n)$, составленных из этих прямых, имеется хотя бы одно $B_n(1, m+n)$ ранга n.*

Доказательство. Если существует поднормализующая $B_n(1, m+n)$ ранга 1, то в точках прямых $\pi \in B_n(1, m+n)$ векторная 2-форма кручения Σ конгруэнции $B_n(m)$ обращается в нуль. В самом деле, если ортонормированный подвижный репер присоединить к точке $X_0 \in V_n$ так, как указано в доказательстве леммы (считая $p=1$), то $\omega_1{}^a=0$. Отсюда в силу (1.6) следует, что $\Omega_1{}^a=0$. Так как $\Sigma=0$ в точке X_0 (см. § 1, п. 3), то в точке $X=X_0+x^1\boldsymbol{e}_1$, в силу (1.9), действительно

$$'\Sigma^a=\Sigma^a+x^1\Omega_1{}^a=0.$$

При $m=2$ из теоремы 2 следует, что $\Sigma\equiv 0$, $\Omega\equiv 0$ на E_{m+n} и поэтому $B_n(m)$ вполне нормальна, т. е. условие I является при $m=2$ необходимым.

Достаточность условия I (и вместе с тем условий II 1)—3) при $p_1=\ldots=p_n=1$) доказывается следующим образом. Пусть $B_n(m)$ является вполне нормальной. Тогда $\Omega\equiv 0$ и в E_{m+n} существует (по крайней мере локально) абсолютный параллелизм векторов. Каждый нормальный к V_n вектор $x_0{}^a\boldsymbol{e}_a$ в заданной точке $X_0 \in V_n$ определяет локально на V_n поле параллельных ему векторов, определяемых решением вполне интегрируемой системы

$$dx^a+x^b\omega_b{}^a=0,$$

соответствующим начальным условиям $(x^a)_{X_0}=x_0{}^a$. Поднормализующее $B_n(1, m+n)$, составленное из прямых, проходящих через точки $X \in V_n$ в направлениях векторов этого поля, имеет ранг n. В самом деле, касательная плоскость линейчатой поверхности E_{1+n}, определяемой многообразием $B_n(1, m+n)$, в ее точке $X=X_0+\lambda x^a\boldsymbol{e}_a$ натянута, в силу

$$dX=d\lambda\,(x^a\boldsymbol{e}_a)+\omega^i(\boldsymbol{e}_i+\lambda x^a\Lambda_{ai}{}^j\boldsymbol{e}_j),$$

на векторы $x^a\boldsymbol{e}_a$ и $\boldsymbol{e}_i$ и не зависит от λ.

Необходимость условий II 1) и II 2) вытекает из теоремы 4 и соотношения (3.10), полученного при ее доказательстве. При этом нужно учитывать, что в ортонормированном репере

$$\omega_i{}^a=-\omega_a{}^i=-\Lambda_{aj}{}^i\omega^j,$$

и поэтому асимптотическими формами поверхности V_n являются $\omega_i{}^a\omega^i=\Lambda_{ij}{}^a\omega^i\omega^j$, где $\Lambda_{ij}{}^a=-\Lambda_{aj}{}^i$.

Условие II 3), которое очевидно является необходимым, превращает вместе с тем совокупность условий II 1)—3) в достаточную. Теорема доказана.

Следует отметить, что поверхность $V_n \subset R_{m+n}$ с вполне нормальной нормализующей $B_n(m)$, несущая ортогональную сеть сопряженных линий (см. п. 6), допускает, как вытекает из доказательства теоремы 7, бесконечно много поднормализующих $B_n(1, m+n)$ ранга n — каждая 1-нормаль поверхности V_n содержится в одном таком $B_n(1, m+n)$. Следующие примеры показывают, что при $m>2$ могут существовать также поверхности $V_n \subset R_{m+n}$, нормализующие $B_n(m)$ которых не являются вполне нормальными и которые, следовательно, описываются условиями II 1)—3) теоремы 7.

Примеры. 1. Пусть $V_n \subset R_{m+n}$ принадлежит гиперсфере S_{m+n-1} пространства R_{m+n}. Тогда все m-плоскости $\alpha \in B_n(m)$ проходят через неподвижный центр C гиперсферы и 1-нормаль X_0C в произвольной точке $X_0 \in V_n$ описывает поднормализующее $B_n(1, m+n)$ ранга n (с конической E_{1+n}).

Поверхность $V_n \subset R_{m+n}$, принадлежащая гиперсфере, получается всегда, когда в теореме 7 имеет место случай II при $q=1$. В самом деле, если $\boldsymbol{e}_1$ имеет направление 1-нормали, имеющей с фокальной гиперповерхностью касание $(n-1)$-го порядка, то $\Lambda_{1j}{}^i=0$ $(i \neq j)$ и все $\Lambda_{1i}{}^i$ равны между собой (см. теорема 3). Кроме того, в силу теоремы 7, удовлетворяются уравнения $\omega_1{}^a=0$. Из $\omega_1{}^i=a\omega^i$ внешним дифференцированием получается $da \wedge \omega^i=0$, т. е. $a=\mathrm{const}$, и теперь для точки $C=$ $=X_0-\frac{1}{a}\boldsymbol{e}_1$ справедливо $d\boldsymbol{C}=0$.

В итоге можно сказать, что $V_2 \subset R_{m+2}$ допускает поднормализующую $B_2(1, m+2)$ ранга 2 тогда и только тогда, когда или (I) V_2 несет ортогональную сеть сопряженных линий или (II) $m>2$ и V_2 принадлежит гиперсфере пространства R_{m+2}.

2. В случае поверхностей $V_3 \subset R_{m+3}$ к указанным двум классам прибавляется еще один класс, состоящий из V_3, удовлетворяющих условиям II 1)—3) теоремы 7 при $q=2$. Если ортонормированный подвижный репер выбрать так, чтобы $\boldsymbol{e}_1$ был направлен по 1-нормали, указанной в II 2), то V_3 определяется следующей пфаффовой системой

$$\begin{gathered}\omega^1=0,\ \omega^\alpha=0\ (\alpha=2,\dots,m),\\ \omega_1{}^\lambda=a\omega^\lambda\,(\lambda=m+1,\ m+2),\ \omega_1{}^{m+3}=b\omega^{m+3},\\ \omega_\alpha{}^\lambda=\Lambda_{\alpha\mu}{}^\lambda\,\omega^\mu\ (\Lambda_{\alpha\mu}{}^\lambda=\Lambda_{\alpha\lambda}{}^\mu),\ \ \omega^{\alpha\, m+3}=\Lambda_\alpha\,\omega^{m+3},\\ \omega_1{}^\alpha=0.\end{gathered}$$

Система ковариантов имеет вид

$$\begin{aligned}da\wedge\omega^\lambda+(a-b)\,\omega_\lambda{}^{m+3}\wedge\omega^{m+3}&=0,\\ (a-b)\,\omega_\lambda{}^{m+3}\wedge\omega^\lambda+db\wedge\omega^{m+3}&=0,\\ \nabla\Lambda_{\alpha\mu}{}^\lambda\wedge\omega^\mu+(\Lambda_{\alpha\lambda}{}^\mu-\Lambda_\alpha\delta_\lambda{}^\mu)\,\omega_\mu{}^{m+3}\wedge\omega^{m+3}&=0,\\ (\Lambda_{\alpha\mu}{}^\lambda-\Lambda_\alpha\delta_\mu{}^\lambda)\,\omega_\lambda{}^{m+3}\wedge\omega^\mu+\nabla\Lambda_\alpha\wedge\omega^{m+3}&=0.\end{aligned}$$

Здесь имеется $3m$ квадратичных уравнений, содержащих $4m$ вторичных форм: da, $\omega_\lambda{}^{m+3}$, db, $\nabla\Lambda_{\alpha\mu}{}^\lambda$, $\nabla\Lambda_\alpha$. Характеры системы равны $s_1 = 3m$, $s_2 = m$. Развертывание приводит к добавочным уравнениям продолженной системы:

$$da = A\omega^{m+3},$$
$$(a-b)\,\omega_\lambda{}^{m+3} = A\omega^\lambda + B_\lambda\,\omega^{m+3},$$
$$db = B_\lambda\,\omega^\lambda + C\omega^{m+3},$$
$$\nabla\Lambda_{\alpha\mu}{}^\lambda = \Lambda_{\alpha\mu\nu}{}^\lambda\,\omega^\nu + \frac{A}{a-b}\,(\Lambda_{\alpha\mu}{}^\lambda - \Lambda_\alpha\,\delta_\mu{}^\lambda)\,\omega^{m+3},$$
$$\nabla\Lambda_\alpha = \frac{1}{a-b}\,(\Lambda_{\alpha\mu}{}^\lambda - \Lambda_\alpha\,\delta_\mu{}^\lambda)\,B_\lambda\,\omega^\mu + D_\alpha\,\omega^{m+3}$$

с $N = 5m-1$ новыми величинами: A, B_λ, C, $\Lambda_{\alpha\mu\nu}{}^\lambda$ $(\Lambda_{\alpha\mu\nu}{}^\lambda = \Lambda_{\alpha\nu\mu}{}^\lambda)$, D_α. Так как $Q = s_1 + 2s_2 = 5m \neq N$, то нужно исследовать также систему ковариантов этих добавочных уравнений. Оказывается, что для этой системы $s_1 = 4m$, $s_2 = m-1$ и $N = Q = 2(3m-1)$. Следовательно, поверхности $V_3 \subset R_{m+3}$ рассматриваемого класса существует с произволом $m-1$ функций 2 аргументов.

Так как для них пфаффово уравнение $\omega^{m+3} = 0$ вполне интегрируемо, то в полной сопряженной системе двух полей направлений, которую несет каждая V_3 этого класса, поле 2-направлений (2-распределение) инволютивно. На его интегральных двумерных поверхностях $d(X_0 - \frac{1}{a}\boldsymbol{e}_1) = 0 \pmod{\omega^{m+3}}$, т. е. эти поверхности лежат в гиперсферах пространства R_{m+3}.

В итоге можно сказать, что $V_3 \subset R_{m+3}$ допускает поднормализующую $B_3(1,\ m+3)$ ранга 3 тогда и только тогда, когда либо (I) V_3 несет ортогональную сеть сопряженных линий, либо (II) $m > 2$ и V_3 или принадлежит гипесфере пространства R_{m+3}, или расслаивается на 1-параметрическое семейство принадлежащих гиперсферам поверхностей V_2, образующих вместе со своими ортогальными траекториями полную сопряженную систему на V_3.

§ 4. Конгруэнции 2-плоскостей в R_4

1. Последние два параграфа 4 и 5 настоящей статьи имеют цель иллюстрировать материал, изложенный в предыдущих параграфах, на примере конгруэнций $B_2(2)$ в R_4 и дополнить его некоторыми специфическими для этого случая результатами. В частности решается задача: определить и характеризовать геометрически все конгруэнции $B_2(2)$ нулевой кривизны (с абсолютным параллелизмом векторов).

Фокальные гиперповерхности конгруэнции $B_2(2)$, являющиеся квадриками в 2-плоскостях $\alpha \in B_2(2)$, позволяют произвести проективную классификацию конгруэнций $B_2(2)$. Так как в R_4 любые две 2-плоскости имеют непустое пересечение (собственное или несобственное), то получается четыре класса конгруэнций $B_2(2)$. В классах конгруэнций $B_2(2)$ с распадающимися фокальными квадриками выделяются подклассы конгруэнций касательных плоскостей к 2-мерным поверхностям в R_4, характеризуемых наличием на B_2 для каждой α двух направлений (вещественных, мнимых или совпадающих), в которых 2-плоскости, бесконечно близкие к α, пересекаются с α по прямой (вполне фокальные конгруэнции $B_2(2)$, по терминологии Р. М. Гейдельмана [4]). Если эти прямые не совпадают, то они пересекаются в точке огибающей поверхности и проходят в ее сопряженных направлениях (ср. [7]).

2. Аффинные классы конгруэнций $B_2(2)$ определяются расположением фокальных квадрик относительно бесконечно удаленных прямых 2-плоскостей конгруэнций. Всего получается три класса конгруэнций с нераспадающимися фокальными квадриками (эллипс, гипербола, парабола) и семь классов конгруэнций с распадающимися фокальными квадриками (пары вещественных, мнимых или совпадающих собственных, или несобственных прямых с собственными, или несобственными точками пересечения).

Во всех случаях можно в R_4 выбрать ортонормированный подвижный репер так, чтобы в уравнении фокальной квадрики в каждой 2-плоскости α конгруэнции $B_2(2)$ отсутствовал член с произведением x_1x_2. Кроме того, в случае $B_2(2)$ целесообразно в качестве кобазисов $\{\vartheta^i\}$ в точках многообразия B_2 выбрать пары $\{\omega_1{}^3, \omega_1{}^4\}$ форм инфинитезимального перемещения репера. Этим исключаются из рассмотрения те конгруэнции 2-плоскостей $B_2(2)$, у которых оба главные направления фокальной квадрики (или, если главные направления неопределены, все 1-направления в 2-плоскости $\alpha \in B_2(2)$) описывают линии в бесконечно удаленной эллиптической S_3. Определяем эллиптическое изображение конгруэнции $B_2(2)$ как конгруэнцию бесконечно удаленных прямых 2-плоскостей $\alpha \in B_2(2)$ в бесконечно удаленной эллиптической гиперплоскости S_3. У исключенных конгруэнций $B_2(2)$ эти эллиптические изображения сводятся к линейчатым поверхностям и их, по аналогии с трехмерным случаем, естественно называть *цилиндрическими* конгруэнциями 2-плоскостей $B_2(2)$.

При таком выборе репера в формулах (1.4) при $a=1$:

$$\omega_1{}^\varrho = \Lambda_{1i}{}^\varrho \vartheta^i$$

имеем $\Lambda_{1i}{}^\varrho = \delta_i{}^\varrho$ $(i, \varrho = 3, 4)$ и (1.3), (1.4) запишутся в виде

$$\begin{aligned} \omega^3 &= \pi\omega_1{}^3 + \varrho\omega_1{}^4, & \omega_2{}^3 &= \varkappa\omega_1{}^3 + z\omega_1{}^4, \\ \omega^4 &= \sigma\omega_1{}^3 + \tau\omega_1{}^4, & \omega_2{}^4 &= \zeta\omega_1{}^3 + k\omega_1{}^4. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Здесь для $\Lambda_{2i}{}^\varrho$ выбраны обозначения, использованные в [9] при исследовании прямолинейных конгруэнций трехмерного эллиптического пространства S_3, т. е. образов, являющихся эллиптическими изображениями конгруэнции $B_2(2)$.

В этих обозначениях фокальная квадрика в каждой 2-плоскости $\alpha \in B_2(2)$ имеет уравнение

$$x_1^2 + (k+\varkappa)x_1x_2 + (k\varkappa - z\zeta)x_2^2 + (\pi+\tau)x_1 + \\ + (k\pi + \varkappa\tau - \varrho\varsigma - \sigma z)x_2 + (\pi\tau - \varrho\sigma) = 0, \qquad (4.2)$$

и при нашем выборе репера

$$k + \varkappa = 0.$$

Кроме того, векторы $\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_4$ репера можно, как показано в [9], всегда поворачивать так, чтобы [2]

$$k = \varkappa = 0. \qquad (4.3)$$

Тогда (4.2) сводится к

$$x_1^2 - z\zeta x_2^2 + (\pi+\tau)x_1 - (\varrho\zeta + \sigma z)x_2 + (\pi\tau - \varrho\sigma) = 0. \qquad (4.4)$$

3. Если фокальные квадрики конгруэнции $B_2(2)$ не имеют вещественных асимптотических направлений, то все вещественные точки стрикционных индикатрис принадлежат фокальным квадрикам. В остальных случаях в каждой 2-плоскости $\alpha \in B_2(2)$ в асимптотических направлениях проходят прямолинейные компоненты стрикционной индикатрисы, состоящие из оснований общих перпендикуляров данной 2-плоскости α и соответствующей бесконечно близкой 2-плоскости в $B_2(2)$ (ср. [13], стр. 128). Эти прямые естественно называть *стрикционными прямыми* на 2-плоскости $\alpha \in B_2(2)$.

Нетрудно получить их уравнения. Асимптотические направления фокальной квадрики (4.4) определяются равенством

$$X_1 : X_2 = \pm\sqrt{z\zeta} : 1,$$

и так как $d(\pm\sqrt{z\zeta}\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2)$ имеет в ортогональном 2-направлении компоненту

$$(\pm\sqrt{z\zeta}\omega_1^3 + z\omega_1^4)\boldsymbol{e}_3 + (\zeta\omega_1^3 \pm \sqrt{z\zeta}\,\omega_1^4)\boldsymbol{e}_4,$$

то в соответствующих направлениях на B_2

$$\omega_1^3 : \omega_1^4 = \pm\sqrt{z} : \sqrt{\zeta}.$$

С другой стороны, систему (2.6) для определения стрикционной точки в данном направлении можно в рассматриваемом случае записать в виде

$$x^a(\omega_a^3\omega_b^3 + \omega_a^4\omega_b^4) + \omega^3\omega_b^3 + \omega^4\omega_b^4 = 0.$$

Отсюда для стрикционных прямых получается следующая пара уравнений

$$(x_1 \pm x_2\sqrt{z\zeta})(z+\zeta) + \pi z + \tau\zeta \pm (\varrho+\sigma)\sqrt{z\zeta} = 0. \qquad (4.5)$$

---

[2] Правда, в [9] исключаются случаи $z+\zeta=0$, $1+z\zeta=0$, но причина исключения состоит не в том, что (4.3) невозможны, а в том, что репер при этом не канонизируется.

Если $z\zeta \neq 0$, $z + \varsigma \neq 0$, то эти прямые не совпадают и пересекаются в вещественной точке

$$Z\left(-\frac{\pi z + \tau\zeta}{z+\zeta},\ -\frac{\varrho + \sigma}{z+\zeta}\right) \tag{4.6}$$

даже тогда, когда сами прямые — мнимые (т. е. когда $z\zeta < 0$).

Точку Z естественно называть *стрикционным центром* на плоскости $\alpha \in B_2(2)$.

4. Так как при $\theta^i = \omega_1{}^i$, $k = \varkappa = 0$ имеет место, в силу (4.1),

$$\boldsymbol{l}_3 = \pi \boldsymbol{e}_3 + \sigma \boldsymbol{e}_4,\ \ \boldsymbol{l}_4 = \varrho \boldsymbol{e}_3 + \tau \boldsymbol{e}_4,$$
$$\boldsymbol{l}_{13} = \boldsymbol{e}_3,\ \ \boldsymbol{l}_{14} = \boldsymbol{e}_4,\ \ \boldsymbol{l}_{23} = \zeta \boldsymbol{e}_4,\ \boldsymbol{l}_{24} = z\boldsymbol{e}_3,$$

то из (2.3—5)

$$\|g_{ij}\| = \begin{pmatrix} \pi^2 + \sigma^2 & \pi\varrho + \sigma\tau \\ \pi\varrho + \sigma\tau & \varrho^2 + \tau^2 \end{pmatrix},\quad \|A_{1ij}\| = \begin{pmatrix} \pi & \varrho \\ \sigma & \tau \end{pmatrix},\quad \|A_{2ij}\| = \begin{pmatrix} \sigma\zeta & \tau\zeta \\ \pi z & \varrho z \end{pmatrix},$$

$$\|A_{11ij}\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \|A_{12ij}\| = \|A_{21ij}\| = \begin{pmatrix} 0 & z \\ \zeta & 0 \end{pmatrix},\quad \|A_{22ij}\| = \begin{pmatrix} \zeta^2 & 0 \\ 0 & z^2 \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$\|\gamma_{ij}\| = \begin{pmatrix} 1+\zeta^2 & 0 \\ 0 & 1+z^2 \end{pmatrix},\quad \|\gamma^{ij}\| = \begin{pmatrix} (1+\zeta^2)^{-1} & 0 \\ 0 & (1+z^2)^{-1} \end{pmatrix},$$

и

$$\|A_{ab}\| = \frac{1}{\gamma}\begin{pmatrix} 2+z^2+\zeta^2 & 0 \\ 0 & z^2+\zeta^2+2z^2\zeta^2 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \frac{1}{\gamma}\left[\pi(1+z^2) + \tau(1+\zeta^2)\right], \tag{4.7}$$

$$A_2 = \frac{1}{\gamma}\left[\sigma\zeta(1+z^2) + \varrho z(1+\zeta^2)\right], \tag{4.8}$$

где

$$\gamma = (1+z^2)(1+\zeta^2).$$

Этим найдено все необходимое для составления системы (2.7), определяющей центр Вагнера W.

5. Для 2-форм кручения и кривизны конгруэнции 2-плоскостей $B_2(2)$ в R_4 из (1.5), (1.6), (4.1) вытекают

$$\Sigma^1 = \omega^\varrho \wedge \omega_\varrho{}^1 = (\varrho - \sigma)\,\omega_1{}^3 \wedge \omega_1{}^4,$$
$$\Sigma^2 = \omega^\varrho \wedge \omega_\varrho{}^2 = (\tau\zeta - \pi z)\,\omega_1{}^3 \wedge \omega_1{}^4,$$
$$\Omega_1{}^2 = -\Omega_2{}^1 = \omega_1{}^\varrho \wedge \omega_\varrho{}^2 = (\zeta - z)\,\omega_1{}^3 \wedge \omega_1{}^4,\ \ \Omega_1{}^1 = \Omega_2{}^2 = 0.$$

Поэтому в выбранном репере

$$T^1 = T_{34}{}^1 = \frac{1}{2}(\varrho - \sigma), \tag{4.9}$$

$$T^2 = T_{34}{}^2 = \frac{1}{2}(\tau\zeta - \pi z), \tag{4.10}$$

$$K = R_{134}{}^2 = \frac{1}{2}(\zeta - z). \tag{4.11}$$

Система (1.10) для определения точек с нулевым кручением принимает вид

$$T^1 - x^2 K = 0,$$
$$T^2 + x^1 K = 0,$$

и при $K \neq 0$ определяет однозначно точку

$$T\left(-\frac{1}{K} T^2, \ \frac{1}{K} T^1\right).$$

Установление того, к какому типу относится описываемая ею секущая поверхность, требует дополнительного анализа. В частности, нетрудно получить алгоритм, позволяющий выяснить, является ли данная конгруэнция $B_2(2)$ нормальной или конгруэнцией касательных плоскостей, и найти ее ортогональную (соответственно, огибающую) поверхность.

Для конгруэнции $B_2(2)$ нулевой кривизны в R_4 (т. е. при $K = 0$) возможны два случая: или одна из T^1, T^2 отлична от нуля и $B_2(2)$ не является нормальной, или $T^1 = T^2 = 0$ и $B_2(2)$ вполне нормальна.

§ 5. Некоторые специальные классы конгруэнций $B_2(2)$

1. Выше на каждой 2-плоскости $\alpha \in B_2(2)$ были определены фокальная квадрика, ее центр C, стрикционный центр Z и центр Вагнера W. Кроме того, с каждой $\alpha \in B_2(2)$ была связана кривизна K конгруэнции B_2 и с каждой точкой X_0 в α — вектор кручения $\boldsymbol{t} = T^a \boldsymbol{e}_a$. При $K \neq 0$ в $\alpha \in B_2(2)$ существует единственная точка T, в которой $\boldsymbol{t} = 0$. В общем случае точки C, Z, W и T — различные.

В настоящем параграфе с помощью этих образов и величин выделяются некоторые специальные классы конгруэнций 2-плоскостей $B_2(2)$ в R_4; при этом опускаются несложные доказательства существования конгруэнций этих классов.

Теорема 8. *Если конгруэнция $B_2(2)$ с центральными фокальными квадриками в R_4 имеет нулевую кривизну $K = 0$, то на каждой ее 2-плоскости $\alpha \in B_2(2)$ точки C, Z и W совпадают между собой.*

Доказательство. Начало репера X_0 можно поместить в точку C. Тогда

$$\pi + \tau = \varrho\zeta + \sigma z = 0, \ z\zeta \neq 0.$$

Если теперь $K = 0$, то

$$z = \zeta \neq 0, \ \varrho + \sigma = 0,$$

и центры Z и W действительно совпадают с C. Теорема доказана.

Легко видеть, что фокальные квадрики при $K = 0$ — гиперболы. Оказывается, что не все необходимые условия в теореме 8 являются достаточными для $K = 0$.

2. Рассмотрим сначала случай центральных нераспадающихся фокальных квадрик.

Теорема 9. *Если конгруэнция $B_2(2)$ в R_4 имеет центральные нераспадающие фокальные квадрики, то*

a) *$Z=C$ тогда и только тогда, когда $K=0$,*

b) *$W=C$ тогда и только тогда, когда либо $K=0$, либо $K\neq 0$ и $T=C$,*

c) *$Z=W$ тогда и только тогда, когда либо $K=0$, либо фокальные квадрики — равнобочные гиперболы.*

Доказательство. *a*) Если $X_0=C=Z$, то к

$$\pi+\tau=0,\ \varrho\zeta+\sigma z=0,\ z\zeta\neq 0,\ \pi\tau-\varrho\sigma\neq 0,$$

прибавляются

$$\varrho+\sigma=0,\ \pi z+\tau\zeta=0;$$

следовательно, $z-\zeta=0$, т. е. $K=0$.

b) Если $X_0=C=W$, то прибавляются

$$\pi z^2+\tau\zeta^2=0,\ \sigma\zeta+\varrho z=0;$$

следовательно,

$$\pi(z^2-\zeta^2)=0,\ \varrho^2-\sigma^2=0.$$

Получаются два случая: либо

$$\varrho+\sigma=0,\ z-\zeta=0,$$

либо

$$\varrho-\sigma=0,\ z+\zeta=0.$$

В первом случае $K=0$, во втором случае $\boldsymbol{t}=0$ в X_0, т. е. $T=C=W$. Верно и обратное (см. следующая теорема).

c) Если $X_0=Z=W$, то

$$\varrho+\sigma=0,\ \pi z+\tau\zeta=0,$$

$$\pi(1+z^2)+\tau(1+\zeta^2)=0,\ \sigma\zeta(1+z^2)+\varrho z(1+\zeta^2)=0.$$

Так как $z\neq 0$, $\zeta\neq 0$, то отсюда

$$\sigma=-\varrho,\ \pi=\lambda\zeta,\ \tau=-\lambda z,$$
$$\lambda(z-\zeta)(1-z\zeta)=0,$$
$$\varrho(z-\zeta)(1-z\zeta)=0.$$

Здесь $\lambda=\varrho=0$ привело бы к распадению фокальной квадрики, поэтому либо $z=\zeta$, либо $z\zeta=1$. В первом случае $K=0$, во втором случае фокальная квадрика — равнобочная гипербола. Верно и обратное. Теорема доказана.

Следует заметить, что в случае $T=C$ фокальные квадрики — эллипсы, а стрикционные прямые совпадают с бесконечно удаленной прямой. Интересный подкласс составляют здесь конгруэнции $B_2(2)$, у которых $T=C$ описывает ортогональную поверхность. Эта поверхность является тогда минимальной — получается естественное обобщение класса прямолинейных конгруэнций Гишара—Пито в R_3 (см. [23]).

Теорема 10. *Если конгруэнция $B_2(2)$ в R_4 имеет центральные нераспадающиеся фокальные квадрики, то*

1) *T и Z всегда различны,*

2) *из $T=C$ следует $K\neq 0$, $W=C$,*

3) *из $T = W$ следует, что либо $K \neq 0$, $W = C$, либо фокальные квадрики — окружности. Обратно, если фокальные квадрики — окружности, то всегда $T = W$.*

Доказательство. 1) Из допущения $X_0 = T = Z$ следовало бы

$$\varrho - \sigma = 0,\ \tau\zeta - \pi z = 0,\ \varrho + \sigma = 0,\ \pi z + \tau\zeta = 0,$$

а это привело бы к распадению фокальной квадрики.

2) Из $X_0 = T = C$ следует

$$\varrho - \sigma = 0,\ \tau\zeta - \pi z = 0,\ \pi + \tau = 0,\ \varrho\zeta + \sigma z = 0;$$

отсюда

$$z + \zeta = 0,$$

т. е. $W = X_0$

3) Из $X_0 = T = W$ вытекает

$$\begin{gathered} \varrho - \sigma = 0,\ \tau\zeta - \pi z = 0, \\ \pi(1 + z^2) + \tau(1 + \zeta^2) = 0, \\ \sigma\zeta(1 + z^2) + \varrho z(1 + \zeta^2) = 0. \end{gathered}$$

Отсюда, в силу $z \neq 0$, $\zeta \neq 0$, имеем

$$\begin{gathered} \sigma = \varrho,\ \pi = \lambda\zeta,\ \tau = \lambda z, \\ \lambda(z + \zeta)(1 + z\zeta) = 0, \\ \varrho(z + \zeta)(1 + z\zeta) = 0. \end{gathered}$$

Здесь λ и ϱ оба не равны нулю; поэтому либо $z + \zeta = 0$, либо $z\zeta = -1$. В первом случае $K \neq 0$, $W = C$ (см. теорему 9), во втором случае фокальные квадрики — окружности. Обратно, если фокальные квадрики — окружности, то $z\zeta = -1$, и из $X_0 = T$ следует $W = X_0$. Теорема доказана.

Вполне возможно, что одновременно $T = C = W$ и фокальные квадрики — окружности. Примерами являются конгруэнции нормальных плоскостей к комплексно-аналитическим минимальным поверхностям V_2 в R_4 (см., например, [8]). Они получаются всегда, когда $T = C$ описывает ортогональную поверхность и фокальные квадрики — окружности.

3. Пусть фокальные квадрики конгруэнции 2-плоскостей $B_2(2)$ — параболы. Тогда $z\zeta = 0$ и $\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_4$ можно всегда нумеровать так, чтобы $\zeta = 0$. Уравнение параболы принимает вид

$$x_1^2 + (\pi + \tau)x_1 - \sigma z x_2 + (\pi\tau - \varrho\sigma) = 0.$$

Следовательно, $\sigma z \neq 0$. Вершина A параболы имеет координаты

$$A\left(-\frac{\pi + \tau}{2},\ -\frac{(\pi - \tau)^2 + 4\varrho\sigma}{4\sigma z}\right).$$

Стрикционные прямые сливаются в прямую s:

$$x_1 + \pi = 0,$$

параллельную оси фокальной параболы и пересекающую ее в точке

$$S\left(-\pi, -\frac{\varrho}{z}\right).$$

Центр Вагнера W и точка нулевого кручения T имеют координаты

$$W\left(-\frac{\pi+\tau+\pi z^2}{2+z^2}, -\frac{\varrho}{z}\right), \quad T\left(-\pi, -\frac{\varrho-\sigma}{z}\right),$$

т. е. T находится всегда на стрикционной прямой s внутри фокальной параболы, а W проектируется на прямую s в точку S ее пересечения с фокальной параболой. Следовательно, T никогда не может совпадать ни с A ни с W.

Теорема 11. *Стрикционная прямая s совпадает с осью u фокальной параболы тогда и только тогда, когда на ней находится центр Вагнера W (который тогда попадает в вершину фокальной параболы).*

Доказательство. Пусть $s=u$ выбрана за ось $x_1=0$. Тогда $\pi=0$ и в уравнении фокальной параболы:

$$\pi+\tau=0, \quad \pi\tau-\varrho\sigma=0;$$

следовательно, $\pi=\tau=\varrho=0$, и $W(0, 0)$.

Обратно, пусть $X_0=W$ находится на s. Тогда

$$\pi+\tau+\pi z=0, \quad \varrho=0, \quad \pi=0$$

и уравнение фокальной параболы принимает канонический вид. Теорема доказана.

Заметим, что в рассматриваемом случае всегда

$$K \neq 0.$$

4. Остается исследовать конгруэнции $B_2(2)$ с распадающимися фокальными квадриками. Рассмотрим сначала случай центральных распадающихся фокальных квадрик. Теорема 8 также относится к ним, т. е. из $K=0$ следует, что $C=Z=W$.

Однако, в теореме 9 происходят некоторые изменения.

Теорема 12. *Если конгруэнция $B_2(2)$ в R_4 имеет центральные распадающиеся фокальные квадрики, то*

a) $Z=C$ тогда и только тогда, когда либо $K=0$, либо C описывает огибающую поверхность конгруэнции $B_2(2)$,

b) $W=C$ тогда и только тогда, когда либо $K=0$, либо $K \neq 0$ и $T=C$,

c) $Z=W$ тогда и только тогда, когда либо $K=0$, либо фокальная квадрика состоит из взаимно ортогональных прямых, либо $Z=W$ совпадает с C, описывая огибающую поверхность конгруэнции $B_2(2)$.

Доказательство с небольшими изменениями повторяет доказательство теоремы 9.

Заметим, что, кроме указанных изменений, имеется еще следующее различие в случае b), по сравнению с соответствующим случаем в теореме 9. Там при $K \neq 0$ можно было сказать, что стрикционные прямые обязательно сливаются на бесконечно удаленной прямой и Z остается неопределенной. Здесь возможно еще именно в случае, когда C описывает огибающую поверхность, что $Z=C=T=W$.

Это замечание показывает, что изменений требует также теорема 10. В ее формулировке во всех случаях следует прибавить, в качестве одной возможности, конгруэнции касательных 2-плоскостей, у которых $C=Z=T=W$ (при этом вполне возможно, что $K=0$). Вместо окружностей нужно говорить о точках — об окружностях нулевого радиуса.

Пусть теперь фокальные квадрики конгруэнции $B_2(2)$ в R_4 — пары параллельных прямых. Тогда в уравнении (4. 4) имеем

$$\zeta=0, \ \sigma z=0.$$

Основным является здесь случай $\sigma=0$, когда фокальная квадрика определяется уравнением $x_1{}^2+(\pi+\tau)x_1+\pi\tau=0$, дискриминант которого равен $(\pi-\tau)^2 \geqslant 0$.

Это уравнение определяет две вещественных параллельных прямых, совпадающих при $\pi=\tau$. Их средняя прямая имеет уравнение

$$x_1+\frac{1}{2}(\pi+\tau)=0.$$

Если $K=z \neq 0$, то стрикционные прямые сливаются в прямую s:

$$x_1+\pi=0.$$

Точка T находится на s и является проекцией точки W (ср. п. 3). Прямая s совпадает со средней прямой тогда и только тогда, когда фокальная квадрика — пара сливающихся прямых. Этот случай характеризуется еще тем, что $W \in s$ и $W=T$.

Если $K=z=0$, то векторы $\boldsymbol{e}_3$ и $\boldsymbol{e}_4$ остаются свободными и их подходящим выбором можно всегда добиться, чтобы $\sigma=0$. Теперь стрикционные прямые вместе с точкой T удаляются в бесконечность, из (2. 7) вместо центра Вагнера получим среднюю прямую. Оказывается, что в этом случае у всех 2-плоскостей $\alpha \in B_2(2)$ фокальные прямые параллельны одному фиксированному направлению. В самом деле, при внешнем дифференцировании уравнений

$$\omega_2{}^3=\omega_2{}^4=0$$

имеем

$$\omega_2{}^1 \wedge \omega_1{}^3=0, \ \omega_2{}^1 \wedge \omega_1{}^4=0,$$

и отсюда

$$\omega_2{}^1=0,$$

т. е.

$$d\boldsymbol{e}_2=\omega_2{}^1\boldsymbol{e}_1+\omega_2{}^3\boldsymbol{e}_3+\omega_2{}^4\boldsymbol{e}_4=0.$$

Конгруэнция $B_2(2)$ в R_4 состоит из 2-плоскостей, описываемых нормалями к гиперплоскости $R_3 \subset R_4$ вдоль прямых конгруэнций $B_2(1)$ в этой R_3.

5. В заключение выделяем класс вполне нормальных конгруэнций 2-плоскостей $B_2(2)$ в R_4. Из вышеизложенного следует, что конгруэнции $B_2(2)$ этого класса обязательно имеют распадающиеся фокальные квадрики.

Теорема 13. *Вполне нормальная конгруэнция 2-плоскостей $B_2(2)$ в R_4 является или конгруэнцией касательных 2-плоскостей поверхности V_2 нулевой гауссовой кривизны в R_4, или же ее вырожденным случаем, когда огибающая поверхность вырождается в линию или точку, которая может при этом оказаться бесконечно удаленной.*

Доказательство. Начало X_0 репера в случае распадающих фокальных квадрик можно всегда выбрать так, чтобы

$$\pi + \tau = 0, \quad \varrho\zeta + \sigma z = 0.$$

Если $B_2(2)$ вполне нормальна, то $K = T^1 = T^2 = 0$, т. е.

$$\zeta = z, \quad \sigma = \varrho, \quad \tau\zeta - \pi\zeta = 0.$$

Отсюда или $\varrho = \sigma = \pi = \tau = 0$, или $z = \zeta = 0$. В первом случае X_0 описывает огибающую поверхность, которая либо имеет нулевую гауссову кривизну, либо вырождается в линию или точку. Второй случай приводит в силу п. 4 к тому случаю, когда эта точка бесконечна удалена. Теорема доказана.

Справедливо, очевидно, и обратное утверждение: конгруэнция касательных 2-плоскостей поверхности нулевой гауссовой кривизны в R_4 — вполне нормальна.

Заметим, что поверхности V_2 в R_4 с вполне нормальной нормализующей конгруэнцией $B_2(2)$ несут ортогональную сеть сопряженных линий (см. [17], а также § 3, п. 6 и теорему 7).

Геометрическое строение поверхностей V_2 нулевой гауссовой кривизны в пространствах R_n подробно исследовал Э. Бомпиани [21]. Оказывается, что в R_4 вещественными среди них являются поверхности с вещественной сетью сопряженных линий, и они характеризуются тем, что гиперплоскости, натянутые на касательную 2-плоскость и на соприкасающиеся 2-плоскости линий сети, взаимно ортогональны.

Этот результат (который следует также из предложения в [11], стр. 254) допускает следующее обобщение:

Теорема 14. *Гиперплоскости в R_4, касательные к двум трехмерным конусам, описываемым асимптотическими направлениями фокальных квадрик конгруэнции 2-плоскостей $B_2(2)$, и взятые в направлениях любой 2-плоскости $\alpha \in B_2(2)$, являются ортогональными тогда и только тогда, когда $B_2(2)$ имеет нулевую кривизну.*

Доказательство. Асимптотические направления фокальных квадрик определяются векторами

$$\pm \sqrt{z\zeta}\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$$

(см. § 3, п. 3), дифференциалы которых имеют на ортогональном 2-направлении следующие компоненты

$$(\sqrt{\zeta}\omega_1{}^3 \pm \sqrt{z}\omega_1{}^4)(\pm\sqrt{z}\boldsymbol{e}_3 + \sqrt{\zeta}\boldsymbol{e}_4).$$

Векторы

$$\sqrt{z}\boldsymbol{e}_3 + \sqrt{\zeta}\boldsymbol{e}_4, \quad -\sqrt{z}\boldsymbol{e}_3 + \sqrt{\zeta}\boldsymbol{e}_4$$

ортогональны тогда и только тогда, когда $K = z - \zeta = 0$.

Получено новое характеристическое условие для конгруэнции 2-плоскостей $B_2(2)$ нулевой кривизны в R_4 (ср. с теоремами 8, 9, и 12).

Литература

1. Акивис М. А., О многомерных поверхностях, несущих сеть сопряженных линий. Докл. АН СССР, 1961, **139**, 1279—1282.
2. Акивис М. А., Рыжков В. В., Многомерные поверхности специальных проективных типов. Тр. 4-го Всес. матем. съезда, 1961. Т. 2. Ленинград, 1964, 159—164.
3. Гейдельман Р. М., К теории псевдоконгруэнций и конгруэнций плоскостей многомерного гиперболического пространства и конгруэнций сфер многомерного конформного пространства. Мат. сб., 1955, **36** (78), 209—232.
4. Гейдельман Р. М., К теории семейств плоскостей в неэвклидовых пространствах. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1959, № 3(10), 30—41.
5. Гейдельман Р. М., Лумисте Ю. Г., Геометрия семейств m-мерных плоскостей в n-мерных пространствах. Тр. 4-го Всес. матем. съезда, 1961, Т. 2. Ленинград, 1964, 201—206.
6. Дуничев К. И., Коровин В. И., Расслоение многообразий. Тр. 4-го Всес. матем. съезда, 1961. Т. 2. Ленинград, 1964, 206—209.
7. Карапетян С. Е., Проективно-дифференциальная геометрия двупараметрических семейств прямых и плоскостей четырехмерного пространства (I). Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-матем. н., 1962, **15**, № 2, 25—43.
8. Лумисте Ю. Г., К теории двумерных минимальных поверхностей IV. Поверхности с окружностями кривизны. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1962, **129**, 90—102.
9. Машанов В. И., К теории конгруэнций прямых трехмерного пространства Римана. Тр. Томского ун-та, сер. мех.-матем., 1962, **161**, 154—163.
10. Номидзу К., Группы Ли и дифференциальная геометрия. Москва, 1960.
11. Риманова геометрия в ортогональном репере. По лекциям Эли Картана. Москва, 1960.
12. Розенфельд Б. А., Дифференциальная геометрия семейств многомерных плоскостей. Изв. АН СССР, сер. матем., 1947, **11**, 283—308.
13. Розенфельд Б. А., Неевклидовы геометрии. Москва, 1955.
14. Рыжков В. В., Сопряженные системы на многомерных поверхностях. Тр. Моск. матем. о-ва, 1958, **7**, 179—226.
15. Схоутен И. А., Стройк Д. Дж., Введение в новые методы в дифференциальной геометрии, т. II. Москва, 1948.
16. Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. Москва, 1964.
17. Чакмазян А. В., Эволютные поверхности двумерной двойственно нормализованной D_2 в E_4. Докл. АН СССР, 1962, **144**, 1233—1236.
18. Широков А. П., Внутренняя геометрия цилиндрических конгруэнций. Уч. зап. Казанск. ун-т, 1951, **111**, № 10, 15—19.
19. Широков П. А., Тензорное исчисление. Казань, 1961.
20. Ambrose, W., Singer, I., A theorem on holonomy. Trans. Amer. Math. Soc., 1953, **75**, 428—443.
21. Bompiani, E., Geometrische Kennzeichnung der Flächen mit der Krümmung Null. Jahresb. Deutsch. Math. Verein., 1941, **51**, Abt. 1, 82—100.
22. Cartan, E., Les groupes d'holonomie des espaces généralisés. Acta math., 1926, **48**, 1—42.

23. Dubnow, J., Die Differentialgeometrie der Strahlenkongruenzen in tensorieller Darstellung. Тр. Семинара по векторн. и тензорн. анализу, 1933, **1**, 223—303.
24. Galvani, O., Sur la realisation des espaces ponctuels à torsion en géométrie euclidienne. Ann. Sci. École Norm. Sup. (3), 1945, **62**, 1—92.
25. Robertson, S. A., On filling n-space with r-planes. J. London Math. Soc., 1961, **36**, 111—121.
26. Švec, A., Au sujet de la définition des variétés de König. Чехосл. матем. ж., 1964, **14**, 222—234.
27. Wagner, V., Differential geometry of the family of R_k's in R_n and of the family of totally geodesic S_{k-1}'s in S_{n-1} of positive curvature. Матем. сб., 1942, **10**(52), 165—212.

Поступило
12 III 1965

EUKLEIDILISE RUUMI TASANDIMUUTKONDADE TEOORIAST

Ü. Lumiste

Resümee

Eukleidilise ruumi tasandimuutkondade üldine teooria sai alguse V. V. Vagneri [27] ja B. A. Rozenfeldi [12] töödest. Käesolevas artiklis võetakse tasandimuutkondade uurimisel kasutusele nende poolt määratud kihtruumides loomulikul viisil indutseeritud seostused. Defineeritakse tasandimuutkonna holonoomiarühma ja kõveruse algebra mõisted ning esitatakse printsiip muutkondade klassifitseerimiseks nende järgi. Üldist teooriat täiendatakse mõnevõrra ka tasandimuutkondade striktsiooniomadusi puudutavas osas. Lähemalt käsitletakse tasandikongruentse, mille kõveruse algebra igas tasandis ühtib 1) kahe punkti statsionaarsuserühma või 2) paralleelsete p-tasandite sidumisse kuuluvate p-tasandite statsionaarsuserühma Lie algebraga. Selgitatakse diskreetse holonoomiarühmaga kongruentside geomeetriline ehitus.

Üldise teooria illustreerimiseks uuritakse üksikasjalikult kahemõõtmeliste tasandite ~~kongruentse eukleidilises~~ ruumis R_4. Eraldatakse välja nullkõverusega kongruentsid ja antakse nende geomeetriline iseloomustus.

ZUR THEORIE DER EBENENMANNIGFALTIGKEITEN IM EUKLIDISCHEN RAUM

Ü. Lumiste

Zusammenfassung

Die allgemeine Theorie der Ebenenmannigfaltigkeiten in einem euklidischen R_n nimmt ihren Anfang in Arbeiten von V. V. Wagner [27] und B. A. Rosenfeld [12]. In dem vorliegenden Artikel werden die mit diesen Mannigfaltigkeiten bestimmten Faserräume, welche die euklidische Bewegungsgruppe als ihre Strukturgruppe besitzen (Euklidraumbündel), eingeführt und die naturgemäß induzierten Zusammenhänge in diesen Faserräumen behandelt. Die Holonomiegruppen und Krümmungsalgebras (Torsion- und Krümmungsformen) ermöglichen ein neues Klassifikationsprinzip der Ebenenmannigfaltigkeiten durchzuführen. Die allgemeine Theorie wird auch im Teile der Striktionseigenschaften der Ebenenmannigfaltigkeiten ergänzt. Eingehend werden die Ebenenkongruenzen behandelt, deren Krümmungsalgebras in jeder Ebene mit der Lieschen Algebra der Stationärgruppe von 1) zwei Punkten oder von 2) p-dimensionalen Ebenen in das Parallelebenenbündel zusammenfällt. Es werden die Ebenenkongruenzen mit diskreten Holonomiegruppen geometrisch beschrieben.

Die Konstruktionen der allgemeinen Theorie werden mit einer ausführlichen Untersuchung der Kongruenzen von zweidimensionalen Ebenen im euklidischen R_4 illustriert. Speziell werden die Kongruenzen mit Krümmung Null ausgesucht und geometrisch charakterisiert.

ИНДИКАТРИСЫ КРИВИЗНЫ И ОГИБАЮЩИЕ НОРМАЛЬНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ ДЛЯ V_m В ЕВКЛИДОВОМ R_n. I

Р. Муллари

Вычислительный центр

Введение

Проблемы, изучаемые в настоящей статье, стоят несколько в стороне от основных направлений развития современной дифференциальной геометрии. Однако, применение идей метода подвижного репера Картана открывает и здесь возможности продвинуть далее исследования, почти прекратившиеся, по-видимому, из-за технической сложности использовавшегося ранее математического аппарата.

Одной из тем статьи (§ 2) является присоединение к точке M поверхности V_m инвариантных многообразий, с помощью которых можно характеризовать строение поверхности V_m вблизи M. В качестве таких многообразий рассматриваются индикатрисы кривизны различных порядков. Из них индикатриса первой кривизны совпадает с известной индикатрисой нормальной кривизны (см., например, [5]). Доказывается ряд общих свойств этих индикатрис.

Второй темой статьи (§ 3) является изучение семейства нормальных к V_m плоскостей R_{n-m}. Этим путем на многомерный случай обобщается тот известный результат классической теории поверхностей, что нормали к поверхности, взятые вдоль линии кривизны, образуют развертывающуюся поверхность. Другим более важным результатом является найденный простой необходимый и достаточный признак, позволяющий судить по локальному строению поверхности V_m о существовании огибающего для семейства нормальных к V_m плоскостей R_{n-m}. Существование огибающего для семейства нормальных плоскостей R_{n-m} для частного случая двойственно нормализуемых поверхностей V_m доказано А. В. Чакмазяном [6].

Исследования проводятся при помощи формул Бартельса—Френе для многомерной поверхности, выведенных в первом параграфе. Эти формулы существенно отличаются от соответствующих формул, полученных ранее И. А. Схоутеном и Е. Р. Кампеном в [8] (см. также [5, 9]). Основное различие заключается в том, что в нормальной к V_m плоскости R_{n-m} в точке M вместо векторов некоторого линейно независимого базиса используются проекции пфаффовых производных от векторов касательного к V_m репера. Эти проекции могут быть и линейно зависимыми — зато они более тесно связаны со строением поверхности V_m вблизи M. Это облегчает получение и интерпретацию инвариантных результатов.

Название «формулы Бартельса—Френе» (вместо «формулы Френе») оправдывается тем, что М. Бартельс, как выяснено (см. [1]), применял сопровождающий трехгранник при изучении кривых уже за 17 лет до Ф. Френе.

§ 1. Формулы Бартельса-Френе для многомерной поверхности

1. Пусть на поверхности V_m евклидова пространства R_n задан подвижный касательный репер $R = (M, \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m)$ и соответствующий корепер $\Omega = (\omega^1, \ldots, \omega^m)$. Параллельное инфинитезимальное перенесение репера R на V_m описывается уравнениями

$$\begin{aligned} d'\boldsymbol{M} &= \omega^c \boldsymbol{e}_c, \\ d'\boldsymbol{e}_a &= \omega^c \boldsymbol{e}_{ac}, \end{aligned} \tag{1}$$

где векторы $\boldsymbol{e}_{ac}$ определяют первую нормальную плоскость к V_m в M, а символом d' обозначается соответствующее дифференцирование $(\Delta \boldsymbol{e}_a = 0)$.

Далее можно писать

$$d'\boldsymbol{e}_{ab} = \omega^c (\boldsymbol{A}_{abc} + \boldsymbol{B}_{abc} + \boldsymbol{e}_{abc}).$$

Здесь векторы $\boldsymbol{A}_{abc}$ и $\boldsymbol{B}_{abc}$ лежат соответственно в касательной и первой нормальной плоскостях к V_m в M, а векторы $\boldsymbol{e}_{abc}$ определяют вторую нормальную плоскость. Продолжая таким образом, получим уравнения

$$d'\boldsymbol{e}_{a_0 \ldots a_l} = \omega^c (\boldsymbol{A}_{a_0 \ldots a_l c} + \boldsymbol{B}_{a_0 \ldots a_l c} + \boldsymbol{e}_{a_0 \ldots a_l c}), \tag{2}$$

где $l = 1, 2, \ldots,$ векторы $\boldsymbol{A}_{a_0 \ldots a_l c}$ и $\boldsymbol{B}_{a_0 \ldots a_l c}$ лежат соответственно в $(l-1)$-ой и l-ой нормальных плоскостях к V_m в M, а векторы $\boldsymbol{e}_{a_0 \ldots a_l c}$ определяют $(l+1)$-ую нормальную плоскость к V_m в M.

Дифференцируя (1) и (2) внешним образом, нетрудно установить, что векторы $\boldsymbol{e}_{a_0 \ldots a_l}$ симметричны по всем индексам. Тем самым векторы $\boldsymbol{A}_{a_0 \ldots a_l c}$ и $\boldsymbol{B}_{a_0 \ldots a_l c}$ симметричны по $l+1$ первым индексам.

Назовем $\boldsymbol{e}_{a_0 \ldots a_l}$ *векторами l-ой кривизны* поверхности V_m в M, а $\boldsymbol{A}_{a_0 \ldots a_l c}$ и $\boldsymbol{B}_{a_0 \ldots a_l c}$ *векторами отражения l-ой кривизны* и *векторами l-ого кручения* соответственно. Очевидно, что все эти векторы определены при заданном касательном репере R однозначно.

Так как пространство R_n имеет конечную размерность n, то найдется такая минимальная величина k, что все векторы $\boldsymbol{e}_{a_0 \ldots a_{k+1}}$ равны нулю. Поэтому в (2) достаточно взять $l=1, \ldots, k$. Эту величину k назовем *порядком кривизны* поверхности V_m.

Подвергнем векторы $\boldsymbol{e}_a$ в M линейному преобразованию $\boldsymbol{e}'_a = A^c{}_a \boldsymbol{e}_c$. Тогда, в силу линейности операторов дифференцирования и проектирования, векторы $\boldsymbol{e}_{a_0 \ldots a_l}$ подвергаются преобразованию

$$\boldsymbol{e}'_{a_0 \ldots a_l} = A^{c_0}{}_{a_0} \ldots A^{c_l}{}_{a_l} \boldsymbol{e}_{c_0 \ldots c_l}.$$

Если используемое преобразование является инфинитезимальным, т. е. матрица $(A^b{}_a)$ имеет вид $(\delta^b{}_a + \omega^b{}_a)$, то получаем

$$d'' \boldsymbol{e}_{a_0 \ldots a_l} = \sum_i \omega^c{}_{a_i} \boldsymbol{e}_{a_0 \ldots a_{i-1} c a_{i+1} \ldots a_l}. \tag{3}$$

Здесь символом $d'' = d (\operatorname{mod} \Omega)$ обозначается дифференцирование при фиксированной точке M. Произвольное дифференцирование разлагается тогда в «компоненты» $d = d' + d''$. Поэтому, в силу (1), (2) и (3), можно написать

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{M} &= \omega^c \boldsymbol{e}_c, \\ d\boldsymbol{e}_a &= \omega^c \boldsymbol{e}_{ac} + \omega^c{}_a \boldsymbol{e}_c, \\ d\boldsymbol{e}_{a_0 \ldots a_l} &= \omega^c (\boldsymbol{A}_{a_0 \ldots a_l c} + \boldsymbol{B}_{a_0 \ldots a_l c} + \boldsymbol{e}_{a_0 \ldots a_l c}) + \\ &+ \sum_i \omega^c{}_{a_i} \boldsymbol{e}_{a_0 \ldots c \ldots a_l}, \end{aligned} \tag{4}$$

где $l=1, \ldots, k$ и $\boldsymbol{e}_{a_0 \ldots a_{k+1}} = 0$. Эту систему естественно назвать *формулами Бартельса—Френе для многомерной поверхности* V_m, так как векторы отражения кривизны и векторы кручения, очевидно, разлагаются по векторам кривизны, т. е.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}_{a_0 \ldots a_l c} &= A^{c_0 \ldots c_{l-1}}{}_{a_0 \ldots a_l c} \boldsymbol{e}_{\langle c_0 \ldots c_{l-1} \rangle}, \\ \boldsymbol{B}_{a_0 \ldots a_l c} &= B^{c_0 \ldots c_l}{}_{a_0 \ldots a_l c} \boldsymbol{e}_{\langle c_0 \ldots c_l \rangle}, \end{aligned}$$

и тем самым устанавливается близкое сходство с соответствующими формулами для кривой [1].

2. К уравнениям (4) следует в соответствующей форме добавить еще уравнения инвариантности метрики

[1] Условимся, что все индексы, заключенные в скобки $<\ldots>$, могут принимать значения только в неубывающей последовательности.

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{A}_{a_0 \dots a_l b_l} \boldsymbol{e}_{b_0 \dots b_{l-1}} = -\boldsymbol{e}_{a_0 \dots a_l} \boldsymbol{e}_{b_0 \dots b_l}, \\
&d(\boldsymbol{e}_a \boldsymbol{e}_b) = \omega^c{}_a \boldsymbol{e}_c \boldsymbol{e}_b + \omega^c{}_b \boldsymbol{e}_a \boldsymbol{e}_c, \qquad\qquad (5)\\
&d(\boldsymbol{e}_{a_0 \dots a_l} \boldsymbol{e}_{b_0 \dots b_l}) = \omega^c (\boldsymbol{B}_{a_0 \dots a_l c} \boldsymbol{e}_{b_0 \dots b_l} + \\
&+ \boldsymbol{B}_{b_0 \dots b_l c} \boldsymbol{e}_{a_0 \dots a_l}) + \sum_i \omega^c{}_{a_i} \boldsymbol{e}_{a_0 \dots c \dots a_l} \boldsymbol{e}_{b_0 \dots b_l} + \\
&+ \sum_i \omega^c{}_{b_i} \boldsymbol{e}_{b_0 \dots c \dots b_l} \boldsymbol{e}_{a_0 \dots a_l}
\end{aligned}
$$

и условия интегрируемости, которые получаются из (4) внешним дифференцированием:

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{B}_{a[cd]} = 0, \\
&\{B^{c_0 \dots c_l}{}_{a_0 \dots a_l c} \boldsymbol{e}_{c_0 \dots c_l d} + \boldsymbol{B}_{a_0 \dots a_l cd}\} [cd] = 0, \\
&\{B^{c_0 \dots c_l}{}_{a_0 \dots a_l c, d} \boldsymbol{e}_{c_0 \dots c_l} + B^{c_0 \dots c_l}{}_{a_0 \dots a_l c} \boldsymbol{B}_{c_0 \dots c_l d} + \\
&+ \boldsymbol{A}_{a_0 \dots a_l cd} + A^{c_0 \dots c_{l-1}}{}_{a_0 \dots a_l c} \boldsymbol{e}_{c_0 \dots c_{l-1} d} - \\
&- \sum_i A^g{}_{a_i cd} \boldsymbol{e}_{a_0 \dots g \dots a_l}\} [cd] = 0, \\
&D\omega^a = \omega^c \wedge \omega^a{}_c, \\
&D\omega^b{}_a = \omega^c{}_a \wedge \omega^b{}_c + \omega^c \wedge \omega^d A^b{}_{acd}.
\end{aligned}
$$

Здесь символ $[cd]$ обозначает альтернацию предшествующего выражения по индексам c, d, а $B^{c_0 \dots c_l}{}_{a_0 \dots a_l c, d}$ — производную по форме ω^d от величины $B^{c_0 \dots c_l}{}_{a_0 \dots a_l c}$.

§ 2. Индикатрисы кривизны

1. При помощи векторов l-ой кривизны с каждым касательным направлением (т. е. единичным касательным вектором)

$$\boldsymbol{x} = x^c \boldsymbol{e}_c \quad (x^c x^d \boldsymbol{e}_c \boldsymbol{e}_d = 1)$$

к V_m в M можно инвариантно связать вектор

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}^{l+1}) = x^{c_0} \dots x^{c_l} \boldsymbol{e}_{c_0 \dots c_l},$$

лежащий в соответствующей l-ой нормальной плоскости $R^l{}_m$. Назовем $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}^{l+1})$ *вектором l-ой кривизны поверхности V_m в направлении $\boldsymbol{x}$*. В случае $l = 1$ он совпадает с известным вектором нормальной кривизны (см., например, [5]).

В качестве примера укажем на вектор $\boldsymbol{e}_{\underbrace{a \dots a}_{l+1}}$, который является $|\boldsymbol{e}_a|^{l+1}$-кратным вектором l-ой кривизны поверхности V_m в направлении вектора $\boldsymbol{e}_a$. Если репер R ортонормирован, то $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{e}^{l+1}{}_a) = \boldsymbol{e}_{\underbrace{a \dots a}_{l+1}}$.

Пусть направление $\boldsymbol{x}$ вращается свободно в касательной плоскости R_m. Тогда конец вектора $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}^{l+1})$, отложенного из M, описывает в $R^l{}_m$ некоторое точечное множество I^l, которое будем называть *индикатрисой l-ой кривизны поверхности* V_m в M. В случае $l=1$ эта индикатриса совпадает с известной индикатрисой нормальной кривизны (см., например, [5]).

Введем обозначение

$$X^{a_0 \ldots a_l} = \frac{(l+1)!}{\alpha_1! \ldots \alpha_m!} x^{a_0} \ldots x^{a_l},$$

где α_a — число индексов a в комбинации $a_0 \ldots a_l$. Тогда имеем

$$x^{c_0} \ldots x^{c_l} \boldsymbol{e}_{c_0 \ldots c_l} = X^{c_0 \ldots c_l} \boldsymbol{e}_{\langle c_0 \ldots c_l \rangle},$$

в силу чего система

$$\begin{gathered} X^{a_0 \ldots a_l} - \frac{(l+1)!}{\alpha_1! \ldots \alpha_m!} \sqrt[l+1]{X^{a_0 \ldots a_0} \ldots X^{a_l \ldots a_l}} = 0, \\ \sqrt[l+1]{X^{c \ldots c} X^{d \ldots d}}\, \boldsymbol{e}_c \boldsymbol{e}_d - 1 = 0 \end{gathered} \tag{6}$$

представляет индикатрису I^l в аффинной координатной системе $(M, \boldsymbol{e}_{a_0 \ldots a_l})$, определяемой векторами l-ой кривизны $\boldsymbol{e}_{a_0 \ldots a}$ (будем считать их пока линейно независимыми). Отсюда видно, что индикатриса I^l является в общем случае $(m-1)$-мерной алгебраической поверхностью.

Случай линейной зависимости векторов $\boldsymbol{e}_{a_0 \ldots a_l}$ не приводит здесь к принципиальным осложнениям, так как на эти векторы можно смотреть как на результат предельного перехода от некоторых линейно независимых векторов $\boldsymbol{e}'_{a_0 \ldots a_l}$. С другой стороны, строение индикатрисы I^l находится, очевидно, в непрерывном соответствии с расположением векторов $\boldsymbol{e}_{a_0 \ldots a_l}$. Поэтому все, что относится к случаю линейно зависимых векторов l-ой кривизны, можно будет выяснить в результате предельного перехода от линейно независимых векторов l-ой кривизны. Однако ниже в большинстве случаев мы для краткости изложения будем предполагать линейную независимость векторов l-ой кривизны $\boldsymbol{e}_{a_0 \ldots a_l}$.

2. Так как конкретный вид индикатрисы I^l и ее расположение относительно точки M поверхности V_m, очевидно, в определенной мере характеризуют локальное строение V_m вблизи M, то для теории поверхностей V_m имеет значение и самостоятельное изучение индикатрис I^l, а также конфигураций $F^l = M + I^l$, т. е. пар, состоящих из начала координат M и точечного многообразия I^l, представляемого системой (6). В силу того, что эта система (6) одинакова для всех индикатрис I^l, мы получаем представление о разнообразии множества всевозможных видов конфигураций F^l. Все они, очевидно, получаются из одной и той же конфигурации F^l_0 при помощи линейных отображений в r_{ml}-мерном пространстве. Здесь $r_{ml}=\frac{1}{(l+1)!}m(m+1)\dots(m+l)$ равна максимальной возможной размерности плоскости R^l_m, а для F^l_0 предполагается, что она не помещается в пространство размерности, меньшей r_{ml}. Верно, также, что произвольное линейное отображение переводит конфигурацию F^l_0 опять-таки в некоторую конфигурацию F^l.

Множество U линейных преобразований, оставляющих заданную конфигурацию F^l неизменной, содержит группу G, изоморфную ортоногальной группе $O(m)$ пространства R_m (выбор касательного к V_m в M репера R при заданном метрическом тензоре $\boldsymbol{e}_a\boldsymbol{e}_b$ остается произвольным). Из теоремы 4 (см. ниже) непосредственно следует, что если F^l не помещается в пространство размерности, меньшей r_{ml}, то обязательно $U=G$.

3. Для определения порядка индикатрисы I^l как алгебраической поверхности выделим в плоскости R^l_m произвольно некоторую плоскость R_s, где $s=r_{ml}-(m-1)$ и найдем число точек (действительных и комплексных), в которых плоскость R_s пересекается с индикатрисой I^l. Искомые точки являются решениями системы, состоящей из (6) и $m-1$ линейных уравнений плоскости R_s. Исключая из этой системы величины $X^{a_0\dots a_l}$ у которых не все индексы равны, получаем для определения m величин $X^{a\dots a}$ некоторую новую систему, которую мы условно обозначим через (*). Введя в (*) обозначения $x^a=\sqrt[l+1]{X^{a\dots a}}$, получим систему

$$\begin{aligned}&b^i{}_{(c_0\dots c_l)}\,x^{c_0}\dots x^{c_l}+b^i=0,\\ &x^cx^d\boldsymbol{e}_c\boldsymbol{e}_d-1=0\\ &(i=1,\ \dots\ ,\ m-1),\end{aligned}\tag{7}$$

состоящую из одного квадратного уравнения и $m-1$ уравнений $(l+1)$-ой степени. Такая система (7) имеет $2(l+1)^{m-1}$ решений. Однако порядок индикатрисы I^l, как алгебраической поверхности, равен числу решений не системы (7), а системы (*). Поэтому будем сопоставлять множества решений этих систем.

Если $\boldsymbol{x}_0=(x^1{}_0,\ \dots\ ,\ x^m{}_0)$ является решением системы (7), то $\boldsymbol{X}_0=((x^1{}_0)^{l+1},\ \dots\ ,\ (x^m{}_0)^{l+1})$ является решением системы (*). Все решения системы (7), соответствующие указанным образом одному и тому же $\boldsymbol{X}_0$, должны, очевидно, иметь вид $\boldsymbol{x}'_0=$ $=(p_1x^1{}_0,\ \dots\ ,\ p_mx^m{}_0)$, где $p_a=\sin\left(\frac{2q_a}{l+1}\pi\right)+i\cos\left(\frac{2q_a}{l+1}\pi\right)$ — корни единицы, а q_a — целые числа. Так как величины $b^i{}_{c_0\dots c_l}$

и b^i в (7) (и в (*)) могут, в силу произвольности выбора плоскости R_s, приобрести произвольные вещественные значения, то нетрудно установить равенства $q_1 = \ldots = q_m = q$. Далее, видим, что $q = r(l+1)$ или, в случае только нечетного l, $q = \frac{1}{2} r(l+1)$, где r — произвольное целое число. Следовательно, каждому решению $\boldsymbol{X}_0$ системы (*), в зависимости от четности или нечетности величины l, соответствует в общем или одно или два решения $\boldsymbol{x}_0$ системы (7).

В результате получается

Теорема 1. *Индикатриса l-ой кривизны I^l поверхности V_m в M является или $(m-1)$-мерной конечной алгебраической поверхностью порядка $2(l+1)^{m-1}$, когда l четно, и порядка $(l+1)^{m-1}$, когда l нечетно, или же конечной фигурой, получаемой из такой алгебраической поверхности предельным переходом.*

Теорема согласуется с результатами, полученными в [5] для случая $l=1$, а также с результатами О. Борувка (см. [7]) для $m=2$.

4. Пусть касательное направление $\boldsymbol{x}$ к V_m в M вращается не во всей касательной плоскости R_m, а в некоторой двумерной плоскости R_2, содержащейся в R_m и проходящей через точку поверхности. При подходящем выборе ортонормированного подвижного репера R траекторию конечной точки вектора $\boldsymbol{x}$ можно задавать следующими формулами Бартельса—Френе:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}'_1 &= \boldsymbol{e}_2, \\ \boldsymbol{e}'_2 &= -\boldsymbol{e}_1; \end{aligned} \tag{8}$$

здесь $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{x}$, а запятая над вектором означает производную по углу поворота α направления $\boldsymbol{x}$. Эти формулы Бартельса—Френе равносильны системе

$$\begin{aligned} \omega^2{}_1 &= -\omega^1{}_2 = d\alpha, \\ \omega^b{}_a &= 0, \end{aligned} \tag{9}$$

где $\binom{b}{a} \neq \binom{2}{1}$, $\binom{b}{a} \neq \binom{1}{2}$.

При вращении $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1$ в R_2 конец вектора $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}^{l+1}) = \mathbf{e}_{\underbrace{1\ldots1}_{l+1}}$ описывает на индикатрисе I^l некоторое точечное многообразие L^l, которое назовем сечением индикатрисы I^l для R_2. В случае $m=2$ сечение L^l совпадает с I^l.

Займемся изучением строения сечения L^l. Для этого введем обозначение

$$\boldsymbol{e}_{a_0 \ldots a_l} = \{\alpha_1, \ \ldots, \ \alpha_m\},$$

где α_a — число индексов a среди комбинации $a_0 \ldots a_l$. Очевидно, что $\sum\limits_a \alpha_a = l+1$. Если учесть к тому же еще ортонормированность R, то (3) можно записать в следующем виде

$$d''\{a_1, \ldots, a_m\} = \\ = \sum_{i<j} \omega^j{}_i (a_i\{a_1, \ldots, a_i - 1, \ldots, a_j + 1, \ldots, a_m\} - \\ - a_j\{a_1, \ldots, a_i + 1, \ldots, a_j - 1, \ldots, a_m\}), \tag{10}$$

откуда при помощи (9) получается

$$\frac{d''}{d\alpha}\{l+1-s, s, 0, \ldots, 0\} = (l+1-s)\{l-s, s+1, 0, \ldots, 0\} - \\ - s\{l+2-s, s-1, 0, \ldots, 0\}, \tag{11}$$

где $s = 0, 1, \ldots, l+1$ и

$$\{-1, l+2, 0, \ldots, 0\} = \{l+2, -1, 0, \ldots, 0\} = 0.$$

Назовем *эллипсом l-ой степени* кривую, описываемую конечной точкой вектора $\boldsymbol{a}_0(\alpha)$, являющегося решением системы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}'_0(\alpha) &= (l+1)\boldsymbol{a}_1(\alpha), \\ \boldsymbol{a}'_1(\alpha) &= l\boldsymbol{a}_2(\alpha) - \boldsymbol{a}_0(\alpha), \\ \boldsymbol{a}'_s(\alpha) &= (l+1-s)\boldsymbol{a}_{s+1}(\alpha) - s\boldsymbol{a}_{s-1}(\alpha), \\ \boldsymbol{a}'_{l+1}(\alpha) &= -(l+1)\boldsymbol{a}_l(\alpha) \end{aligned} \tag{12}$$

при произвольных линейно независимых начальных значениях векторов $\boldsymbol{a}_0, \ldots, \boldsymbol{a}_{l+1}$. В частности, нетрудно убедиться, что понятия «эллипс» и «эллипс первой степени» совпадают. Легко также проверить, что вид системы (12) сохраняется только при преобразовании параметра вида $\alpha' = \pm\alpha + \alpha_0$, где α_0 — постоянная. Поэтому параметр α является для эллипса l-ой степени каноническим.

Если сравнивать (11) с (12) и учесть то, что векторы $\boldsymbol{e}_{1\ldots12\ldots2}$ в точке M в зависимости от строения и расположения поверхности V_m вблизи этой точки могут иметь, очевидно, любые значения, то нами доказана следующая

Теорема 2. *Любое сечение L^l индикатрисы l-ой кривизны I^l для двумерной плоскости является или эллипсом l-ой степени, или его конечной вырожденной формой. С другой стороны, каждый эллипс l-ой степени или его конечная вырожденная форма может быть сечением L^l некоторой индикатрисы I^l.*

5. Выясним, может ли на индикатрисе I^l существовать эллипс l-ой степени, не являющийся сечением индикатрисы для некоторой двумерной плоскости R_2.

Пусть конец единичного вектора $\boldsymbol{x}$ описывает в плоскости R_m, касательной к V_m в M, некоторую кривую L. Аналогично (8) для L можно выписать формулы Бартельса—Френе

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}'_1 &= \boldsymbol{e}_2, \\ \boldsymbol{e}'_2 &= -\boldsymbol{e}_1 + \varkappa_2\boldsymbol{e}_3, \\ \boldsymbol{e}'_a &= -\varkappa_{a-1}\boldsymbol{e}_{a-1} + \varkappa_a\boldsymbol{e}_{a+1}, \\ \boldsymbol{e}'_m &= -\varkappa_{m-1}\boldsymbol{e}_{m-1}, \end{aligned} \tag{13}$$

где $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{x}$, или, что то же самое, систему

$$\begin{aligned} \omega^{a+1}{}_a &= \varkappa_a da, \\ \omega^{a+s}{}_a &= 0 \end{aligned} \tag{14}$$

при произвольном $s > 1$. Надо еще выяснить, при каких значениях величин $\varkappa_a$ соответствующий вектор $\underbrace{\boldsymbol{e}_{1\ldots 1}}_{l+1} = \{l+1,\ 0,\ \ldots,\ 0\}$ можно представить в виде решения системы (12), если учесть (10) и (14).

В данном случае имеем

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_0 &= \{l+1,\ 0;\ \ldots,\ 0\}, \\ \boldsymbol{a}'_0 &= (l+1)\{l,\ 1,\ 0,\ \ldots,\ 0\}, \end{aligned}$$

откуда получается

$$\boldsymbol{a}_1 = \{l,\ 1,\ 0,\ \ldots,\ 0\}.$$

Таким же образом

$$\boldsymbol{a}_2 = \frac{\varkappa_2}{l}\{l,\ 0,\ 1,\ 0,\ \ldots,\ 0\} + \{l-1,\ 2,\ 0,\ \ldots,\ 0\}.$$

Общее выражение для вектора $\boldsymbol{a}_s$ будет довольно сложным. Однако нетрудно найти коэффициент q_s вектора $\{l+2-s,\ s-2,\ 1,\ 0,\ \ldots,\ 0\}$ в выражении вектора $\boldsymbol{a}_s$. Для этого коэффициента получаем

$$q_s = \frac{s(s-1)}{2(l+2-s)}\varkappa_2.$$

Это означает, что в случае линейной независимости вектора $\{0,\ l,\ 1,\ 0,\ \ldots,\ 0\}$ от других векторов l-й кривизны необходимым условием того, чтобы согласно (12) имело место

$$\boldsymbol{a}'_{l+1} = -(l+1)\boldsymbol{a}_l,$$

является равенство

$$(l+2)(l+1)\varkappa_2 = 0,$$

т. е.

$$\varkappa_2 = 0.$$

Но тогда формулы (13) для L примут вид (8). Отсюда следует, что единичный вектор $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1$ вращается в двумерной плоскости, а кривая L, описываемая его концом, является окружностью с центром в M. Следовательно, эллипс l-ой степени, описываемый концом вектора $\{l+1,\ 0,\ \ldots,\ 0\}$, является сечением индикатрисы I^l для плоскости, в которой лежит окружность L.

Тем самым доказана

Теорема 3. *Пусть l-ая нормальная плоскость $R^l{}_m$ к поверхности V_m в ее точке M имеет максимальную возможную размерность r_{ml}. Тогда через произвольные точки P_1 и P_2 индикатрисы l-ой кривизны I^l, которые соответствуют неколлинеарным касательным направлениям $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$ к V_m в точке M, проходит на индикатрисе один и только один эллипс l-ой степени. Этот эллипс l-ой степени является сечением индикатрисы I^l для двумерной плоскости R_2, которая определяется направлениями $\boldsymbol{x}_1$* и $\boldsymbol{x}_2$.

6. Аргумент α в (8) имеет вполне конкретный смысл — это угол поворота вектора $\boldsymbol{x}$. С другой стороны, параметр α в (12) является для эллипса l-ой степени каноническим. Следовательно, разность значений параметра α в двух точках P_1 и P_2 сечения L^l равна углу между соответствующими касательными направлениями $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$ к V_m в M.

Теперь, в силу теоремы 3, может быть сформулирована

Теорема 4. *Пусть поверхности V_m и V'_m имеют в заданных точках M и M' конгруэнтные между собой индикатрисы l-ой кривизны I^l и I'^l, причем соответствующие l-ные нормальные плоскости $R^l{}_m$ и $R'^l{}_m$ имеют максимальную возможную размерность r_{ml}. Пусть P и P' — соответствующие при конгруэнтности точки индикатрис I^l и I'^l, а $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{x}'$ — касательные к V_m в M и к V'_m в M' направления, соответствующие точкам P и P'. Получаемое таким образом соответствие $\boldsymbol{x} \longleftrightarrow \boldsymbol{x}'$ между касательными направлениями к V_m в M и к V'_m в M' изометрично.*

7. Назовем вектор

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}^{s_1}{}_1, \ldots, \boldsymbol{x}^{s_t}{}_t) = \underbrace{x^{c_q}{}_1 \ldots x^{c_r}{}_1}_{s_1} \ldots \underbrace{x^{c_u}{}_t \ldots x^{c_v}{}_t}_{s_t} e_{c_q \ldots c_r \ldots c_u \ldots c_v}, \tag{15}$$

где $|\boldsymbol{x}_1| = \ldots = |\boldsymbol{x}_t| = 1$ и $\sum\limits_{i=1}^{t} s_i = l + 1$, *вектором l-ой кривизны поверхности V_m в направлениях $\boldsymbol{x}^{s_1}{}_1, \ldots, \boldsymbol{x}^{s_t}{}_t$*. Символом $\boldsymbol{x}^s$ обозначается система из s одинаковых направлений $\boldsymbol{x}$. Вектор $\mathbf{p}(\boldsymbol{x}^{s_1}{}_1, \ldots, \boldsymbol{x}^{s_t}{}_t)$, очевидно, симметричен относительно всех $\boldsymbol{x}^{s_i}{}_i$.

Заметим, например, что в случае ортнормированного касательного репера R к V_m в M можно написать

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{e}^{\alpha_1}{}_1, \ldots, \boldsymbol{e}^{\alpha_m}{}_m) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}.$$

Пусть направление $\boldsymbol{x}$ вращается свободно в касательной плоскости R_m к V_m в M. Конец вектора $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}^{s_1}{}_1, \ldots, \boldsymbol{x}^{s_t}{}_t, \boldsymbol{x}^s)$, $s + \sum_{i=1}^{t} s_i = l + 1$, отложенного из M, описывает при заданных $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_t$ в $R^l{}_m$ некоторое точечное многообразие $I^{l,s} = I^l(\boldsymbol{x}^{s_1}{}_1, \ldots, \boldsymbol{x}^{s_t}{}_t)$, которое назовем *индикатрисой l-ой кривизны поверхности V_m в направлениях* $\boldsymbol{x}^{s_1}{}_1, \ldots, \boldsymbol{x}^{s_t}{}_t$. Из (15) видно, что индикатриса $I^{l,s}$ имеет строение некоторой индикатрисы I^{s-1} и в общем случае имеет поэтому более простое строение, чем индикатриса I^l. Это обстоятельство позволяет в случае надобности ввести некоторые упрощения, если изучение локальной окрестности точки M поверхности V_m заменить изучением этой окрестности, так сказать, относительно некоторых заданных касательных направлений.

Представление о взаимном расположении индикатрис $I^{l,s}$ дает

Теорема 5. *Индикатриса $I^{l,s} = I^l(\boldsymbol{x}^{s_1}{}_1, \ldots, \boldsymbol{x}^{s_t}{}_t)$ огибается семейством индикатрис $I^{l,s-r} = I^l(\boldsymbol{x}^{s_1}{}_1, \ldots, \boldsymbol{x}^{s_t}{}_t, \boldsymbol{y}^r)$ при изменении направления $\boldsymbol{y}$. Точкой прикосновения индикатрис $I^{l,s}$ и $I^{l,s-r}$ является конец вектора $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}^{s_1}{}_1, \ldots, \boldsymbol{x}^{s_t}{}_t, \boldsymbol{y}^s)$.*

Теорема вытекает из соотношения

$$\frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial x^a} \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}^{s_1}{}_1, \ldots, \boldsymbol{x}^{s_t}{}_t, \boldsymbol{x}^s)\Big|_{x=y} = \\ = \frac{1}{s-r} \frac{\partial}{\partial x^a} \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}^{s_1}{}_1, \ldots, \boldsymbol{x}^{s_t}{}_t, \boldsymbol{y}^r, \boldsymbol{x}^{s-r})\Big|_{x=y}.$$

Простейшее строение из всех индикатрис кривизны $I^{l,s}$ имеют индикатрисы $I^{l,1}$, которые, как в этом нетрудно убедиться, являются или $(m-1)$-мерными эллипсоидами с центром в точке M, или вырожденными фигурами, получающимися из таких эллипсоидов при стремлении длин некоторых из их осей к нулю. При помощи предельного перехода к этим фигурам отнесем все понятия, связанные с эллипсоидами.

Несложные доказательства следующих теорем опускаем.

Теорема 6. *Индикатриса $I^{l,1} = I^l(\boldsymbol{x}^{s_1}{}_1, \ldots, \boldsymbol{x}^{s_t}{}_t)$ имеет столько осей, отличающихся по длине от нуля, сколько найдется линейно независимых среди векторов*

$$\boldsymbol{p}_a = \underbrace{x^{c_q}{}_1 \ldots x^{c_r}{}_1}_{s_1} \ldots \underbrace{x^{c_u}{}_t \ldots x^{c_v}{}_t}_{s_t} \boldsymbol{e}_{c_q \ldots c_r \ldots c_u \ldots c_v a}.$$

Теорема 7. *Векторы $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}^{s_1}{}_1, \ldots, \boldsymbol{x}^{s_t}{}_t, \boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}^{s_1}{}_1, \ldots, \boldsymbol{x}^{s_t}{}_t, \boldsymbol{y})$ являются сопряженными радиусами-векторами индикатрисы*

$I^{l,1} = I(\boldsymbol{x}^{s_1}{}_1, \ldots, \boldsymbol{x}^{s_t}{}_t)$ *тогда и только тогда, когда направления* $\boldsymbol{x}$ *и* $\boldsymbol{y}$ *ортогональны.*

Отметим, что содержание настоящего пункта 7 представляет собой обобщение результатов, полученных нами ранее в случае $l = 1$ (см. [2]).

§ 3. Огибающие нормальных плоскостей

1. Пусть в некоторой области U поверхности V_m задана система ортонормированных реперов, т. е. в каждой точке $M \in U$ выбран фиксированный ортонормированный репер R. Тогда в системе (4) имеем

$$\omega^b{}_a = P^b{}_{ac}\omega^c, \quad \omega^b{}_a = -\omega^a{}_b,$$

и тем самым (4) принимает вид

$$\begin{aligned} &d\boldsymbol{M} = \omega^c \boldsymbol{e}_c, \\ &d\boldsymbol{e}_a = \omega^c(\boldsymbol{P}_{ac} + \boldsymbol{e}_{ac}), \\ &d\boldsymbol{e}_{a_0 \ldots a_l} = \omega^c(\boldsymbol{A}_{a_0 \ldots a_l c} + \boldsymbol{P}_{a_0 \ldots a_l c} + \boldsymbol{e}_{a_0 \ldots a_l c}), \end{aligned} \tag{16}$$

где

$$\boldsymbol{P}_{a_0 \ldots a_l c} = \boldsymbol{B}_{a_0 \ldots a_l c} + \sum_i P^d{}_{a_i c} \boldsymbol{e}_{a_0 \ldots d \ldots a_l}.$$

Условимся для простоты, что линейное пространство, натянутое на все касательные векторы $\boldsymbol{e}_a$ и векторы кривизны $\boldsymbol{e}_{a_0 \ldots a_l}$ в (16), совпадает с пространством R_n. Это, очевидно, равносильно естественному требованию, чтобы поверхность V_m не помещалась в некоторой плоскости пространства R_n.

Тогда каждую точку M^* в плоскости, нормальной к поверхности V_m в точке M, можно представить радиусом-вектором

$$\boldsymbol{M}^* = \boldsymbol{M} + \sum_{l=1}^{k} x^{c_0 \ldots c_l} \boldsymbol{e}_{\langle c_0 \ldots c_l \rangle}.$$

Для изучения вопроса о существовании огибающего семейства нормальных к V_m плоскостей дифференцируем вектор $\boldsymbol{M}^*$ с учетом (16) и выясним, может ли дифференциал вектора $\boldsymbol{M}^*$ остаться в нормальной к V_m в M плоскости.

После дифференцирования получим

$$d\boldsymbol{M}^* = \omega^c(\boldsymbol{e}_c + x^{c_0 c_1}\boldsymbol{A}_{\langle c_0 c_1 \rangle c} + \boldsymbol{N}_c),$$

где векторы $\boldsymbol{N}_c$ ортогональны к плоскости R_m, касательной к V_m в точке M. Если учесть уравнения инвариантности метрики (5), ортонормированность касательного репера R и обозначить ортогональную проекцию точки M^* на первую нормальную плоскость $R^1{}_m$ к V_m в M через $M^*{}_1$, то получим

$$\boldsymbol{e}_c + x^{c_0c_1}\boldsymbol{A}_{c_0c_1c} = \sum_a \{\delta_{ca} - (\boldsymbol{M}^*{}_1 - \boldsymbol{M})\boldsymbol{e}_{ac}\}\boldsymbol{e}_a.$$

2. С каждым касательным направлением $\boldsymbol{x}$ можно в плоскости $R^1{}_m$ инвариантно связать некоторое многообразие $K(\boldsymbol{x})$, состоящее из точек $M^*{}_1$, для которых имеет место равенство

$$x^c \sum_a \{\delta_{ca} - (\boldsymbol{M}^*{}_1 - \boldsymbol{M})\boldsymbol{e}_{ac}\}\boldsymbol{e}_a = 0. \tag{17}$$

Многообразие $K(\boldsymbol{x})$, очевидно, является пересечением нормальной плоскости R'_{n-m} в точке M', полученной инфинитезимальным перемещением точки M в направлении $\boldsymbol{x}$, с первой нормальной плоскостью к V_m в точке M, а объединение многообразий $K(\boldsymbol{x})$,

$$K = \bigcup_{\boldsymbol{x}} K(\boldsymbol{x})$$

является многообразием K Д. И. Перепелкина (см. [3, 4]).

Теперь легко получается

Теорема 8. *Пусть через точку M на поверхности V_m проходит кривая L с касательным направлением $\boldsymbol{x}$. Точка M^* в нормальной к V_m в M плоскости R_{n-m} является фокальной для семейства нормальных к V_m плоскостей, взятых по кривой L, тогда и только тогда, когда соответствующий вектор $\boldsymbol{M}^*{}_1 - \boldsymbol{M}$ ортогонален к плоскости, касательной к индикатрисе первой кривизны I^1 в конечной точке вектора первой кривизны $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{y}^2)$, и, кроме того, имеет место равенство*

$$(\boldsymbol{M}^*{}_1 - \boldsymbol{M})\boldsymbol{p}(\boldsymbol{y}^2) = 1.$$

Для доказательства достаточно выбрать касательный репер R так, чтобы $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{y}$, и исходить из (17).

3. Направление $\boldsymbol{x}$, в котором вектор первой кривизны $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}^2)$ приобретает стационарную длину, называется главным направлением поверхности (см., например, [2]).

Пусть $\boldsymbol{y}$ — неасимптотическое касательное направление к V_m в M (т. е. $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{y}^2) \neq 0$). Конечная точка вектора $M_y = M + \frac{1}{\boldsymbol{p}^2(\boldsymbol{y}^2)}\boldsymbol{p}(\boldsymbol{y}^2)$ называется центром кривизны поверхности V_m в направлении $\boldsymbol{y}$.

При помощи теоремы 8 легко доказывается

Теорема 9. *Пусть через точку M на поверхности V_m проходит кривая L с касательным направлением $\boldsymbol{y}$. Направление $\boldsymbol{y}$ является неасимптотическим главным направлением поверхности V_m тогда и только тогда, когда центр кривизны поверхности V_m в направлении $\boldsymbol{y}$ является фокальной точкой семейства нормальных к V_m плоскостей, взятых вдоль кривой L.*

Нетрудно убедиться, что асимптотическое направление является главным только в случае тангенциального вырождения поверхности V_m в этом направлении. Это утверждение и теорема 9 в случае поверхности $V_2 \subset R_3$ сводятся к классическому результату: нормали, взятые в точках линии кривизны, образуют развертывающуюся поверхность.

4. Пересечение многообразий $K(\boldsymbol{x})$ для всех $\boldsymbol{x}$ представляет собой некоторое новое многообразие $K^* \subset K$. Из (17) следует, что M^*_1 является точкой многообразия K^* тогда и только тогда, когда

$$(\boldsymbol{M}^*_1 - \boldsymbol{M})\boldsymbol{e}_{ab} = \delta_{ab}$$

для всех a и b.

При помощи (3), принимая $l = 1$, можно установить, что плоскость S индикатрисы I^1 проходит через точки $M + \boldsymbol{e}_{aa}$ и параллельна векторам $\boldsymbol{e}_{ab} (a \neq b)$. Отсюда получается

Теорема 10. *Многообразие K^* или состоит из одной точки, или пусто. В первом случае вектор $\boldsymbol{K}^* - \boldsymbol{M}$ ортогонален к плоскости S индикатрисы I^1, а длина его равна $\frac{1}{r}$, где r — расстояние точки M от S. Во втором случае точка M находится в плоскости S (т. е. многообразие K^* удалено в бесконечность).*

Ниже, говоря о точке K^*, будем подразумевать, что многообразие K^* не пусто (не удалено в бесконечность).

Если плоскость S индикатрисы I^1 не проходит через точку M поверхности V_m, причем соответствующая первая нормальная плоскость $R^1{}_m$ имеет размерность $m_1 < \frac{1}{2} m(m+1)$, то M называется *полуомбилической точкой* поверхности V_m (см. [3, 4]). В принятой терминологии существование точки K^* равносильно требованию, чтобы или первая нормальная плоскость $R^1{}_m$ имела максимальную возможную размерность $m_1 = \frac{1}{2} m(m+1)$, или M была полуомбилической точкой поверхности V_m.

5. Обозначим многообразие всех точек M^*, для которых $M^*_1 = K^*$, через G. Многообразие G, в зависимости от отсутствия или существования точки K^*, или пусто, или образует $(n - m - m_1)$-мерную плоскость. Здесь m_1 — размерность первой нормальной плоскости $R^1{}_m$ к V_m в M.

Сумма всех многообразий G для всех $M \in V_m$ образует многообразие.

$$\Gamma = \bigcup_M G.$$

Это многообразие Γ, очевидно, является огибающим семейства нормальных к V_m плоскостей R_{n-m} и при непустых K^* образует m-параметрическое семейство $(n - m - m_1)$-мерных плоскостей. Разумеется, это семейство может быть и вырожденным (например, в случае гиперсферы).

Допустим, что пересечение

$$P = \bigcap_M G$$

всех многообразий G непусто и $M^* \in P$. Тогда для всех $M \in V_m$ вектор $\boldsymbol{M}^* - \boldsymbol{M}$ ортогонален к V_m в M. Следовательно, поверхность V_m находится на гиперсфере S_{n-1} пространства R_n с центром в M^*. Если P содержит несколько точек, то поверхность V_m должна находиться в пересечении нескольких гиперсфер и, тем самым, на некоторой плоскости пространства R_n. Последнее, однако, противоречит нашим предположениям. Следовательно, многообразие P или состоит из одной точки, или пусто в зависимости от того, находится ли поверхность V_m на гиперсфере S_{n-1} пространства R_n или нет. В частности, это означает, что при $n - m - m_1 \neq 0$ многообразие Γ не может вырождаться в одну $(n - m - m_1)$-мерную плоскость.

Из наших рассуждений вытекает

Теорема 11. *Пусть в пространстве R_n задана поверхность V_m. Семейство плоскостей R_{n-m}, нормальных к V_m в ее точках M, имеет огибающую Γ тогда и только тогда, когда точки M поверхности V_m (за исключением, может быть, точек некоторого подмногообразия поверхности V_m) не находятся в плоскостях S соответствующих им индикатрис первый кривизны I^1. (Те точки M, для которых это условие не выполнено, соответствуют бесконечно удаленным точкам огибающего Γ.) При этом, огибающая Γ состоит из $(n - m - m_1)$-мерных плоскостей и имеет размерность $m_\Gamma \leqslant n - m_1$, где m_1 — размерность первой нормальной плоскости R^1_m к V_m в ее общей точке M. Если $n - m - m_1 \neq 0$, то имеем $m_\Gamma > n - m - m_1$.*

Основные предположения теоремы могут быть выражены и в следующей форме:

Семейство плоскостей R_{n-m}, нормальных к V_m в ее точках M, имеет огибающую Γ тогда и только тогда, когда или первые нормальные к V_m плоскости R^1_m имеют максимальную возможную размерность $m_1 = \frac{1}{2} m(m+1)$, или поверхность V_m состоит из полуомбилических точек.

6. Пусть на гиперсфере S_n с радиусом r пространства R_{n+1} задана поверхность V_m, а (16) — соответствующие ей формулы Бартельса-Френе. Исходя из (16), составим для V_m другую систему

$$
\begin{aligned}
&d\boldsymbol{M}' = \omega^c \boldsymbol{e}_c, \\
&d\boldsymbol{e}_a = -\frac{1}{r^2}\omega^a \boldsymbol{M}' + \omega^c(\boldsymbol{P}'_{ac} + \boldsymbol{e}'_{ac}), \\
&d\boldsymbol{e}'_{a_0\ldots a_l} = \omega^c(\boldsymbol{A}'_{a_0\ldots a_l c} + \boldsymbol{P}'_{a_0\ldots a_l c} + \boldsymbol{e}'_{a_0\ldots a_l c}),
\end{aligned}
\tag{18}
$$

где $\boldsymbol{M}'$ — вектор, соединяющий центр P гиперсферы S_n с точкой M поверхности V_m, векторы $\boldsymbol{e}'_{a_0\ldots a_l}$ ортогональны со всеми векторами $\boldsymbol{e}_b$, $\boldsymbol{e}'_{b_0\ldots b_{l-s}}$ и существуют разложения $\boldsymbol{P}'_{ac} =$

$= P'^{d}{}_{ac}\boldsymbol{e}_d, \qquad \boldsymbol{A}'_{a_0\ldots a_l c} = A'^{c_0\ldots c_{l-1}}{}_{a_0\ldots a_l c}\boldsymbol{e}'_{(c\ldots c_{l-1})}, \qquad \boldsymbol{P}'_{a\ldots a_l c} =$
$= \boldsymbol{P}'^{c_0\ldots c_l}{}_{a\ldots a_l c}\boldsymbol{e}'_{(c_0\ldots c_l)}.$

Систему (18) можно, очевидно, истолковать как формулы Бартельса—Френе для поверхности V_m, рассматриваемой как поверхность в эллиптическом пространстве S'_n с кривизной $\frac{1}{r^2}$. При этом, аналогично случаю евклидова пространства, векторы $\boldsymbol{e}'_{a_0\ldots a_l}$ определяют l-ую нормальную плоскость к $V_m \subset S'_n$ в ее точке M. Аналогично определяется порядок кривизны поверхности $V_m \subset S'_n$ и другие введенные выше понятия.

В силу (16) и (18) верно соотношение

$$\boldsymbol{e}'_{ab} = \boldsymbol{e}_{ab} + \delta_{ab}\frac{1}{r^2}\boldsymbol{M}'. \tag{19}$$

Если $V_m \subset R_{n+1}$ имеет порядок кривизны, равный единице, то в силу результатов п. 5 имеет место $P = K^*$ и поэтому

$$\boldsymbol{M}' = \boldsymbol{M} - \boldsymbol{K}^*. \tag{20}$$

При помощи теоремы 10 теперь непосредственно устанавливается, что вектор $-\frac{1}{r^2}\boldsymbol{M}'$ соединяет точку M поверхности $V_m \subset R_{n+1}$ с ее ортогональной проекцией на плоскость S соответствующей индикатрисы первой кривизны I^1. Отсюда с учетом (19) получается, что плоскость S' индикатрисы первой кривизны I'^1 поверхности $V_m \subset S'_n$ в ее точке M проходит через точку M.

Пусть поверхность $V_m \subset S'_n$ имеет порядок кривизны, равный единице. Тогда дифференцирование (19) дает

$$\boldsymbol{A}'_{abc} + \boldsymbol{P}'_{abc} = \boldsymbol{A}_{abc} + \boldsymbol{P}_{abc} + \boldsymbol{e}_{abc} + \delta_{ab}\frac{1}{r^2}\boldsymbol{e}_c,$$

откуда следует

$$P'^{dg}{}_{abc}\left(\boldsymbol{e}_{dg} + \delta_{dg}\frac{1}{r^2}\boldsymbol{M}'\right) = P^{dg}{}_{abc}\boldsymbol{e}_{dg} + \boldsymbol{e}_{abc}. \tag{21}$$

Допустим, что плоскость S' индикатрисы первой кривизны I'^1 поверхности $V_m \subset S'_n$ в M проходит через точку M. Из (19) следует, что первая нормальная к $V_m \subset R_{n+1}$ в M плоскость $R^1{}_m$ натянута на плоскость S' и вектор $\boldsymbol{M}'$. Поэтому центр P гиперсферы $S_n \subset R_{n+1}$ находится в плоскости $R^1{}_m$, т. е. верно (20). Следовательно, в (21) имеет место $\boldsymbol{e}_{abc} = 0$.

В итоге может быть сформулирована.

Теорема 12. *Пусть в пространстве S_n постоянной положительной кривизны задана поверхность V_m. Погружаем S_n в пространство R_{n+1} в виде гиперсферы (у которой диаметрально противоположные точки отождествлены). Если при этом плоскость S'*

индикатрисы первой кривизны I'^1 поверхности $V_m \subset S_n$ в произвольной ее точке M проходит через эту точку M и поверхность V_m имеет в пространстве S_n порядок кривизны, равный единице, то поверхность V_m имеет в пространстве R_{n+1} также порядок кривизны, равный единице. С другой стороны, если поверхность V_m имеет в пространстве R_{n+1} порядок кривизны, равный единице, то плоскость S' индикатрисы I'^1 поверхности $V_m \subset S_n$ в произвольной ее точке M проходит через эту точку M.

Литература

1. Лумисте Ю. Г., Предвосхищение формул Френе в сочинении К. Э. Зенфа. В сб. «Вопр. истории физ.-матем. наук», Москва, 1963, 141—147.
2. Муллари Р. Р., О главных направлениях m-мерной поверхности. Докл. АН СССР, 1962, **144**, 989—992.
3. Перепелкин Д. И., Кривизна и нормальные пространства многообразия V_m в R_n. Матем. сб., 1935, **42**, 100—120.
4. Перепелкин Д. И., Исследования по теории многообразий в римановом пространстве. Диссертация, МГУ, 1942.
5. Схоутен И. А., Стройк Д. Дж., Введение в новые методы дифференциальной геометрии, т. II. Москва-Ленинград, 1948.
6. Чакмазян А. В., О поверхности D_m пространства E_{2m}. Докл. АН Арм. ССР, 1963, **37**, 49—53.
7. Borůvka, O., Recherches sur la courbure des surfaces dans des espaces á n-dimensions á courbure constante I. Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk 1932, **165**, 1—22.
8. Schouten, J. A., Kampen, E. R., Über die Krümmung einer V_m in V_n; eine Revision der Krümmungstheorie. Math. Ann., 1931, **105**, 144—159.
9. Wong, Y. Ch., On the Frenet formulae for a V_m in a V_n. Quart. J. Math. 1940, **11**, 146—160.

Поступило
25 XI 1964

KÕVERUSINDIKATRISSID JA NORMAALTASANDITE MÄHISPIND V_m PUHUL EUKLEIDILISES RUUMIS R_n. I

R. Mullari

Resümee

Pinna $V_m \subset R_n$ punkti M $(l+1)$-st järku diferentsiaalümbruse iseloomustamiseks seotakse töös punktiga M invariantselt l-nda kõveruse indikatriss I^l. Järgnevalt leitakse ja uuritakse rida indikatrissi I^l üldisi omadusi.

Teise teemana uuritakse töös pinna $V_m \subset R_n$ normaaltasandite R_{n-m} parve. Osutub, et selle parve mähispinna olemasoluks on tarvilik ja piisav, et pinna V_m punktid M ei asuks vastavate esimese kõveruse indikatrisside I^l tasanditel.

THE CURVATURE INDICATRIXES AND THE ENVELOPE OF NORMAL SPACES OF A V_m IN EUCLIDEAN R_n. I

R. Mullari

Summary

In the paper the differential neighbourhood of the $(l+1)$-st degree of a point M on a surface $V_m \subset R_n$ is characterized by means of the l-th curvature indicatrix I^l invariantly associated with the point M. Subsequently a number of properties of the indicatrix I^l are ascertained.

Secondly the family of the normal spaces R_{n-m} of a surface $V_m \subset R_n$ is examined. It is proved that the family has an envelope if and only if the points M of the surface V_m do not belong to the planes of the corresponding first curvature indicatrixes I^l.

T-ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ

М. Тыннов

Кафедра математического анализа

Настоящая статья представляет собой продолжение исследований, проведенных Гёсом в статьях [7—11]. Здесь рассматриваются T-дополнительные пространства коэффициентов Фурье, где T — треугольный метод суммирования Тёплица. Гёс изучает C^α-дополнительные пространства коэффициентов Фурье, где C^α — метод суммирования Чезаро порядка $\alpha \geqslant 0$. В настоящей статье результаты, полученные Гёсом, обобщаются на случай метода суммирования Тёплица.

Понятие T-дополнительного пространства важно для изучения коэффициентов Фурье и мультипликаторов рядов Фурье. Дополнительные пространства коэффициентов Фурье имеют многие аналогичные свойства с дуальными пространствами, которые были введены Кёте [12], Тёплицем [13], Матьюсом [14, 15], Чиллинуорсом [5, 6] и Монна [16].

1. Основные понятия

Пусть f, g и h — действительные функции от действительной переменной x, определенные почти везде на $[-\pi, \pi]$, периодические с периодом 2π и интегрируемые по Лебегу.

1. Обозначаем

$L_p (1 \leqslant p < \infty)$ — пространство[1] всех функций f, для которых

$$\|f\|_{L_p} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

M — пространство всех ограниченных функций с нормой

$$\|f\|_M = \sup_{x \in [-\pi, \pi]} |f(x)| < \infty,$$

[1] Если $p = 1$, то $L_1 = L$.

C — пространство всех непрерывных функций с нормой

$$\|f\|_C = \|f\|_M,$$

V — пространство всех функций с ограниченным изменением с нормой

$$\|f\|_V = \int_{-\pi}^{\pi} |df| < \infty,$$

A — пространство всех абсолютно непрерывных функций с нормой

$$\|f\|_A = \|f\|_V,$$

L_Φ — пространство (Орлича) всех функций f, для которых

$$\|f\|_\Phi = \sup_{g \in M_\psi} \int_{-\pi}^{\pi} |fg| dx < \infty,$$

где M_ψ есть множество всех функций g, удовлетворяющих условию

$$\int_{-\pi}^{\pi} \psi(|g|)\, dx \leqslant 1,$$

причем $\psi(v)$ есть дополнительная функция Юнга к функции $\Phi(u)$, а для $\Phi(u)$ существует такая постоянная $K > 0$, что $\Phi(2u) \leqslant K\Phi(u)$ при всех $u \geqslant u_0 \geqslant 0$ (см. [18], стр. 76—79),

L_ψ — пространство всех функций f, для которых

$$\|f\|_\psi = \sup_{g \in M_\Phi} \int_{-\pi}^{\pi} |fg| dx < \infty,$$

где M_Φ есть множество всех функций g, удовлетворяющих условию

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi(|g|)\, dx \leqslant 1.$$

Если $\Phi(u) = cu^p (1 \leqslant p < \infty)$, то $L_\Phi = L_p$.

Все эти обозначения сохраним и для пространств рядов Фурье, соответствующих всем перечисленным пространствам функций. Ряд Фурье, соответствующий функции f, обозначаем [2]

$$f^\circ = (a_k,\ b_k) = \sum (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \tag{1}$$

Мы предположим, что

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\, dx = 0,$$

так как это не будет ограничением общности в рассматривае-

---

[2] Если пределы изменения индексов не указаны, то они имеют все значения от 1 до $+\infty$.

мых проблемах. Если[3] E — нормированное функциональное пространство, то определяем $\|f^\circ\|_E = \|f\|_E$.

2. Через P обозначаем множество всех тригонометрических полиномов

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

3. Через dE обозначаем пространство всех $f^\circ = (a_k, b_k)$, для которых $F^\circ = \left(-\frac{b_k}{k}, \frac{a_k}{k}\right) \in E$. Если E — нормированное пространство, то и dE — нормированное пространство с нормой $\|f^\circ\|_{dE} = \|F^\circ\|_E$ (см. [7], стр. 347). Отметим, что $dA = L$ (см. [19], стр. 11; [3], стр. 266 и 271), а dV есть пространство всех рядов Фурье — Стилтьеса (см. [19], стр. 41).

2. Условия для того, чтобы тригонометрический ряд был рядом Фурье

В настоящем параграфе мы докажем несколько теорем, которые необходимы для изучения T-дополнительных пространств.

Через T обозначаем метод суммирования Тёплица, определенный матрицей (τ_{nk}), где $\tau_{nk} = 0$ при $n < k$ $(n, k = 0, 1, 2, \ldots)$. В этом параграфе мы предположим, что для T выполнено условие

$$K = \sup_n \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |K_n(u)|\, du = \sup_n \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left| \frac{\tau_{n0}}{2} + \sum_{k=1}^{n} \tau_{nk} \cos ku \right| du < \infty. \qquad \text{(K)}$$

Теорема 1. *Для того, чтобы $f^\circ \in L_\psi$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\|\sigma_n(f^\circ)\|_\psi = O(1), \qquad (2)$$

где

$$\sigma_n(f^\circ) = \sum_{k=1}^{n} \tau_{nk} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $f^\circ \in L_\psi$, тогда существуют постоянные $p > 0$ и $N > 0$, такие что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \psi(p|f|)\, dx < N$$

(см. [18], стр. 79—80, теоремы 1 и 2). Если K то же самое, что в условии (K), то, применяя неравенство Иенсена (см. [19], стр. 24), мы получаем:

[3] Везде через E, E_1 обозначены подмножества множества всех тригонометрических рядов (1).

$$\psi\left(\frac{p}{K}\left|\sigma_n(f^\circ)\right|\right) \leqslant \psi\left(\frac{p\cdot\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(x)||K_n(t-x)|\,dx}{\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}|K_n(u)|du}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\int\limits_{-\pi}^{\pi}\psi(p|f|)|K_n(t-x)|dx}{2\int\limits_{0}^{\pi}|K_n(u)|du}$$

и

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\psi\left(\frac{p}{K}\left|\sigma_n(f^\circ)\right|\right)dx \leqslant \frac{\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\psi(p|f|)|K_n(t-x)|dx\,dt}{2\int\limits_{0}^{\pi}|K_n(u)|du} =$$

$$= \frac{\int\limits_{-\pi}^{\pi}\psi(p|f|)dx\int\limits_{-\pi}^{\pi}|K_n(u)|du}{2\int\limits_{0}^{\pi}|K_n(u)|du} = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\psi(p|f|)dx.$$

Поскольку

$$\left\|\frac{p}{K}\sigma_n(f^\circ)\right\|_\psi \leqslant \int\limits_{-\pi}^{\pi}\psi\left(\frac{p}{K}\left|\sigma_n(f^\circ)\right|\right)dx + 1$$

(см. [18], стр. 79—80, теоремы 1 и 2), то

$$\left\|\frac{p}{K}\sigma_n(f^\circ)\right\|_\psi \leqslant N+1.$$

Следовательно, имеет место условие (2).

Достаточность. Пусть (2) выполнено. Тогда существуют подпоследовательность $\sigma_{n_m}(f^\circ)$ и функция $f_1 \in L_\psi$ такие, что[4]

$$\lim_m \int\limits_{-\pi}^{\pi}\sigma_{n_m}(f^\circ)\,dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f_1 g\,dx$$

при каждом $g \in L_\Phi$ (см. [18], стр. 159, теорема 9). Так как $\frac{1}{\pi}\cos kx \in L_\Phi$ и $\frac{1}{\pi}\sin kx \in L_\Phi$, то

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f_1(x)\cos k\,x\,dx = \lim_m \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sigma_{n_m}(f^\circ)\cos k\,x\,dx =$$

---

[4] Всюду $\lim\limits_n x_n$ означает $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

$$= \lim_m \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sum_{j=1}^{n_m} \tau_{n_m j} (a_j \cos jx + b_j \sin jx) =$$
$$= \lim_m \tau_{n_m k} a_k = a_k,$$

аналогично

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(x) \sin kx \, dx = b_k.$$

Следовательно, $f_1{}^\circ = (a_k, b_k) = f^\circ \in L_\Psi$.

Теорема 2. *Для того, чтобы $f^\circ \in L_\Phi$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\sigma_n(f^\circ)$ сходилась в L_Φ по норме.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $f^\circ \in L_\Phi$. Тогда по теореме 1

$$\sup_n \| \sigma_n(f^\circ) \|_\Phi < \infty.$$

Отметим, что $\sigma_n(f^\circ)$ является непрерывным оператором из L_Φ в L_Φ при каждом n. Действительно, коэффициенты a_k и b_k — непрерывные линейные функционалы в L_Φ, а $a_k \cos kx$ и $b_k \sin kx$ непрерывные линейные операторы из L_Φ в L_Φ. Следовательно, $\sigma_n(f^\circ)$ непрерывный линейный оператор из L_Φ в L_Φ. По принципу равномерной ограниченности

$$\sup_n \| \sigma_n(f^\circ) \|_\Phi \leqslant \beta \| f \|_\Phi, \tag{3}$$

где $\beta > 0$ не зависит от n и $f \in L_\Phi$. Множество всех тригонометрических полиномов P всюду плотно в L_Φ (см. [18], стр. 128), т. е. существует последовательность $g_\nu \in P$ и

$$\lim_\nu \| f - g_\nu \|_\Phi = 0.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ заданное число. Тогда по условию (3)

$$\| \sigma_n(f^\circ) - \sigma_{n+p}(f^\circ) \|_\Phi \leqslant \| \sigma_n(f^\circ) - \sigma_n(g^\circ{}_\nu) \|_\Phi +$$
$$+ \| \sigma_n(g^\circ{}_\nu) - \sigma_{n+p}(g^\circ{}_\nu) \|_\Phi + \| \sigma_{n+p}(g^\circ{}_\nu) - \sigma_{n+p}(f^\circ) \|_\Phi \leqslant$$
$$\leqslant \beta \| f^\circ - g^\circ{}_\nu \|_\Phi + \| \sigma_n(g^\circ{}_\nu) - \sigma_{n+p}(g^\circ{}_\nu) \|_\Phi + \beta \| f^\circ - g^\circ{}_\nu \|_\Phi <$$
$$< \frac{\varepsilon}{3} + \left\| \sum_{k=1}^{\nu} (\tau_{nk} - \tau_{n+p,\,k}) (c_k{}^\nu \cos kx + d_k{}^\nu \sin kx) \right\|_\Phi + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon,$$

если $\nu > \nu_0$ и $n > n_0$, ибо T регулярен. Поскольку L_Φ полное пространство (см. [28], стр. 83), то

$$\lim \|\sigma_n(f^\circ) - f_1^\circ\|_\Phi = 0.$$

Покажем, что $f_1^\circ = (a_k, b_k) = f^\circ$. Поскольку из сильной сходимости следует слабая сходимость, то

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_1(x)\cos kx\,dx = \lim_n \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sigma_n(f^\circ)\cos kx\,dx =$$
$$= \lim_n \tau_{nk} a_k = a_k,$$

аналогично

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_1(x)\sin kx\,dx = b_k.$$

Следовательно, $f_1^\circ = f^\circ$ и

$$\lim_n \|\sigma_n(f^\circ) - f\|_\Phi = 0.$$

Достаточность. Пусть $\sigma_n(f^\circ)$ сходится по норме в L_Φ к предельной функции f_1. Так как L_Φ полное банахово пространство (см. [18], стр. 83, теорема 1), то $f_1 \in L_\Phi$. Аналогично, как при доказательстве необходимости теоремы 2 мы можем убедиться в том, что $f^\circ_1 = (a_k, b_k) = f^\circ \in L_\Phi$.

Если $\Phi(u) = cu^p$ $(c > 0,\ 1 \leqslant p < \infty)$, то $L_\Phi = L_p$ и $L_\psi = L_q$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ p > 1,\ q > 1\right)$, а $L_\psi = M$ при $p = 1$. В силу этого получаем из теорем 1 и 2 следующие выводы.

Следствие 1. *Для того, чтобы $f^\circ \in L_p (1 < p < \infty)$, необходимо и достаточно, чтобы $\|\sigma_n(f^\circ)\|_{L_p} = O(1)$.*

Следствие 2. *Для того, чтобы $f^\circ \in M$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\|\sigma_n(f^\circ)\|_M = O(1). \tag{4}$$

Следствие 3. *Для того, чтобы $f^\circ \in L_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\sigma_n(f^\circ)$ сходилась по норме в L_p.*

Следствия 1—3 известны (см. [2], стр. 251—255).

Примечание 1. Если $p > 1$, то в следствии 3 условие (K) не является необходимым, потому что ряд Фурье для каждой $f \in L_p$ сходится в L_p по норме (см. [1], стр. 594, теорема 2).

Теорема 3. *Для того, чтобы $f^\circ \in C$, необходимо и достаточно, чтобы $\sigma_n(f^\circ)$ сходилась в C по норме (т. е. равномерно)* [5].

[5] Для случая $T = C^1$ теорема 3 известна (см. [1], стр. 165, теорема 1).

Доказательство. Необходимость. Так как T удовлетворяет условию (К), то ряд Фурье функции $f \in C$ равномерно T-суммируем (см. [4], стр. 94—95, теорема 70).

Достаточность. Если $\sigma_n(f^\circ)$ сходится равномерно, то предельная функция f непрерывна и

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\, dx = a_k, \quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\, dx = b_k.$$

Следовательно, $f^\circ \in C$.

Так как условие (4) необходимо для M, то оно не может быть достаточным для более узкого класса C.

Теорема 4. *Для того, чтобы $f^\circ \in dV$, необходимо и достаточно, чтобы*[6]

$$\|\sigma_n(f^\circ)\|_L = O(1). \tag{5}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $f^\circ \in dV$. Тогда

$$\sigma_n(f^\circ) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t-x)\, dF(t)$$

и

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\sigma_n(f^\circ)|dx \leqslant \int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|K_n(t-x)||dF(t)\, dx = \right.$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} |dF(t)|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|K_n(t-x)|dx \leqslant K\cdot\|f^\circ\|_{dV} = O(1).$$

Следовательно, условие (5) необходимо.

Достаточность. Определяем функции

$$F_n(x) = \int_{-\pi}^{x} \sigma_n(f^\circ)\, dx.$$

Поскольку

$$\sum_i |F_n(x_{i+1}) - F_n(x_i)| = \sum_i \left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} \sigma_n(f^\circ)\, dt\right| \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |\sigma_n(f^\circ)|dt = O(1)$$

для любого разбиения отрезка $[-\pi, \pi]$, то $F_n(x)$ — функции с ограниченным изменением, и, кроме того, $F_n(x)$ и их полные изменения ограничены одним числом. По теореме Хелли (см.

[6] Для случая $T = C^1$ теорема известна (см. [1], стр. 170, теорема 5).

[3], стр. 242) существуют такие подпоследовательность $F_{n_m}(x)$ и функция $F_1 \in V$, что

$$\lim_m F_{n_m}(x) = F_1(x)$$

для каждого $x \in [-\pi, \pi]$. По теореме Хелли (см. [3], стр. 254—255) имеем

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\, dF_1 = \lim_m \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\, dF_{n_m} =$$

$$= \lim_m \frac{1}{\pi}\left\{[F_{n_m}(\pi) - F_{n_m}(-\pi)]\cos k\pi + k\int_{-\pi}^{\pi} F_{n_m} \sin kx\, dx\right\} =$$

$$= \lim_m \frac{k}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_{n_m} \sin kx\, dx = \lim_m \frac{k}{\pi}\left\{[-F_{n_m}(\pi) + F_{n_m}(-\pi)]\frac{\cos k\pi}{k} +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{d}{dx} F_{n_m}(x)\right]\cos kx\, dx\right\} = \lim_m \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sigma_{n_m}(f^\circ)\cos kx\, dx =$$

$$= \lim_m \tau_{n_m\, k} a_k = a_k,$$

аналогично

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx\, dF_1 = b_k.$$

Следовательно, $(a_k, b_k) = f^\circ \in dV$.

Теорема 5. *Для того, чтобы $f^\circ \in V$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\left\| \frac{d}{dx}\sigma_n(f^\circ)\right\|_L = O(1).$$

Доказательство. Теорема 5 вытекает из теоремы 4, потому что ряд Фурье—Стилтьеса получается путем дифференцирования ряда Фурье функции с ограниченным изменением.

В дальнейшем понадобятся еще следующие необходимые и достаточные условия для того, чтобы тригонометрический ряд был рядом Фурье.

Теорема 6. *Для того, чтобы $f^\circ \in L_\psi$, необходимо и достаточно, чтобы ряд*

$$\sum (a_k c_k + b_k d_k) \tag{6}$$

был T-суммируемым при каждом $g^\circ \in L_\Phi$.

Доказательство. Необходимость. Если $f^\circ \in L_\psi$, то условие (2) выполнено. Последовательность

$$\sum_{k=1}^{n} \tau_{nk}(a_k c_k + b_k d_k) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sigma_n(f^\circ) g(x)\, dx \tag{7}$$

является последовательностью непрерывных линейных функционалов в L_Φ (см. [18], стр. 138, теорема 2), сходящаяся на P. Поскольку P всюду плотно в L_Φ и нормы функционалов (7) ограничены (в силу условия (2)), то по теореме Банаха—Штейнгауза последовательность (7) сходится всюду на L_Φ, т. е. ряд (6) будет T-суммируемым при каждом $g \in L_\Psi$.

Достаточность. Пусть ряд (6) будет T-суммируемым при каждом $g^\circ \in L_\Phi$, т. е. (7) сходится при каждом $g \in L_\Phi$. По теореме Банаха—Штейнгауза имеет место условие (2). По теореме 1 имеем $f^\circ \in L_\Psi$.

Теорема 7. *Для того, чтобы $f^\circ \in L_\Phi$, необходимо и достаточно, чтобы ряд* (6) *был T-суммируемым при каждом $g^\circ \in L_\Psi$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $f^\circ \in L_\Phi$; тогда из теоремы 2 вытекает, что

$$\lim_n \|\sigma_n(f^\circ) - f\|_\Phi = 0. \tag{8}$$

Последовательность (7) является последовательностью непрерывных линейных функционалов в L_Ψ (см. [18], стр. 124, примечание 2). Поскольку $\int_{-\pi}^{\pi} fg\,dx$ также есть непрерывный линейный функционал в L_Ψ (см. [18], стр. 142, примечание 2), то в силу условия (8) и неравенства

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sigma_n(f^\circ) g\,dx - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} fg\,dx\right| \leqslant \frac{1}{\pi}\|\sigma_n(f^\circ) - f\|_\Phi \cdot \|g\|_\Psi,$$

ряд (6) T-суммируем при каждом $g \in L_\Psi$.

Достаточность. Пусть последовательность (7) сходится при каждом $g^\circ \in L_\Psi$. Тогда в силу неравенства

$$\frac{1}{2}\|\sigma_n(f^\circ) - \sigma_{n+i}(f^\circ)\|_\Phi \leqslant \sup_{\|g^\circ\|_\Psi \leqslant 1} \left|\int_{-\pi}^{\pi} [\sigma_n(f^\circ) - \sigma_{n+i}(f^\circ)]\, g(x)\, dx\right|$$

(см. [18], стр. 142, примечание 2), $\sigma_n(f^\circ)$ является фундаментальной последовательностью в L_Φ. Так как L_Φ есть полное пространство (см. [18], стр. 83, теорема 1), то $\sigma_n(f^\circ)$ сходится в L_Φ по норме. Следовательно, по теореме 2 будет $f^\circ \in L_\Phi$.

Из теорем 6 и 7 получаем следующие выводы.

Следствие 4. *Для того, чтобы f° принадлежал L, L_p $(1 < p < \infty)$ или M, необходимо и достаточно, чтобы ряд (6) был T-суммируемым при каждом g° соответственно из M, L_q или L.*

Следствие 4 доказано Орличем и Штейнгаузом (см. [2], стр. 257—259, теорема 6.4.6) для ортогональных рядов.

Примечание 2. Следствие 4 для L_p $(1 < p < \infty)$ верно и тогда, когда T не удовлетворяет условию (K) (см. [1], стр. 594).

Теорема 8. *Для того, чтобы $f^\circ \in dV$, необходимо и достаточно, чтобы ряд (6) был T-суммируемым при каждом $g^\circ \in C$.*

Доказательство. Необходимость. Если $f^\circ \in dV$, то $F^\circ \in V$, и

$$\sum_{k=1}^{n} \tau_{nk}(a_k c_k + b_k d_k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_n(g^\circ)\, dF, \tag{9}$$

где $g^\circ \in C$. Поскольку для T выполнено условие (K), то по теореме 3 последовательность $\sigma_n(g^\circ)$ сходится равномерно в $[-\pi, \pi]$ для каждого $g^\circ \in C$. Тогда (9) сходится при каждом $g^\circ \in C$ (см. [3], стр. 254, теорема 2). Следовательно, ряд (6) T-суммируем при каждом $g^\circ \in C$.

Достаточность. Пусть ряд (6) T-суммируем для каждого $g^\circ \in C$. Тогда (9) сходится при каждом $g^\circ \in C$. Поскольку

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g \sigma_n(f^\circ)\, dx = \sum_{k=1}^{n} \tau_{nk}(a_k c_k + b_k d_k)$$

является непрерывным линейным функционалом в C, то по теореме Банаха—Штейнгауза и предельный функционал

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g\, dF \quad (F \in V)$$

непрерывен и линеен. Кроме того,

$$\lim_n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g \sigma_n(f^\circ)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} g\, dF$$

для каждого $g \in C$. Если $g = \frac{1}{\pi} \cos kx$, то

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dF=\lim_{n}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sigma_n(f^\circ)\cos kx\,dx=a_k.$$

Аналогично при $g=\frac{1}{\pi}\sin kx$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\,dF=b_k.$$

Итак,

$$(a_k,\ b_k)\in dV.$$

3. T-дополнительные пространства для некоторых пространств функций

Определение 1. *Пространство всех $(c_k,\ d_k)$, для которых ряд* (6) *является T-суммируемым при каждом $(a_k,\ b_k)\in E$, называем T-дополнительным к пространству E и обозначаем через $(E,\ T)$.*

Если при некоторых k все коэффициенты a_k или b_k или оба равны нулю для всех $(a_k, b_k)\in E$, то при тех же k полагаем соответственно c_k или d_k или оба равными нулю для всех $(c_k,\ d_k)\in(E,\ T)$ (ср. [7—11]).

Из теорем 6—8 и следствия 4 получается

Теорема 9. *Если T удовлетворяет условию* (K), *то*

$$(L_\Phi,\ T)=L_\psi;\ (L_\psi,\ T)=L_\Phi;\ (L,\ T)=M;\ (L_p,\ T)=L_q$$
$$\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ 1<p<\infty\right);\ (M,\ T)=L;\ (C,\ T)=dV.$$

Примечание 3. Если T не удовлетворяет условию (K), то в теореме 9 вместо равенств имеет лишь включения $(L_\Phi,\ T)\subset L_\psi$, $(L_\psi,\ T)\subset L_\Phi$, $(L,\ T)\subset M$, $(M,\ T)\subset L$, $(C,\ T)\subset dV$, кроме L_p $(1<p<\infty)$, для которого и тогда $(L_p,\ T)=L_q$.

Это следует из соответствующих теорем 6—8 и из следствия 4, поскольку там удовлетворение условию (K) методом T требуется только при доказательстве необходимости.

Теорема 10. *Для того, чтобы $f^\circ\in(V,\ T)$, необходимо и достаточно, чтобы $\sigma_n(F^\circ)$ сходилась ограниченно.*

Доказательство. Утверждение следует непосредственно из теоремы Орлича (см. [17], стр. 215, теорема 5): $\int_{-\pi}^{\pi}\sigma_n(f^\circ)g(x)\,dx$ сходится тогда и только тогда при каждом $g\in V$, если $\sigma_n(F^\circ)=\int_{-\pi}^{t}\sigma_n(f^\circ)\,dx$ ограниченно сходится в $[-\pi,\ \pi]$.

Лемма 1. *Для того, чтобы* $(a_k, b_k) \in (dE, T)$, *необходимо и достаточно, чтобы* $(-kb_k, ka_k) \in (E, T)$.

Доказательство. Ряд $(a_k, b_k) \in (dE, T)$ тогда и только тогда, если ряд (6) T-суммируем для каждого $(c_k, b_k) \in dE$, т. е., если

$$\sum \left[-\frac{d_k}{k}(-kb_k) + \frac{c_k}{k} ka_k\right]$$

T-суммируем для каждого $\left(-\frac{d_k}{k}, \frac{c_k}{k}\right) \in E$. Следовательно, $(a_k, b_k) \in (dE, T)$ тогда и только тогда, если $(kb_k, -ka_k) \in (E, T)$.

Примечание 4. Аналогично мы могли бы доказать, что $(a_k, b_k) \in (E, T)$ тогда и только тогда, если $\left(-\frac{b_k}{k}, \frac{a_k}{k}\right) \in (dE, T)$.

В силу леммы 1 из теоремы 10 получаем следующую теорему.

Теорема 11. *Для того, чтобы* $f^\circ \in (dV, T)$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\sigma_n(f^\circ)$ *сходилась ограниченно.*

4. Топологические свойства T-дополнительных пространств

В дальнейшем нам нужна следующая

Лемма 2. *Для пространств* $E_1 \subset E$ *имеет место соотношение*

$$(E, T) \subset (E_1, T).$$

Доказательство следует непосредственно из определения 1 (ср. [13], стр. 197, теорема 4).

Определение 2. *Если* E — *нормированное пространство, то нормой элемента* f° *в* (E, T) *называем функционал*

$$\|f^\circ\|_{(E,T)} = \pi \sup_n \sup_{\|g^\circ\|_E \leq 1} \left|\sum_k \tau_{nk}(a_k c_k + b_k d_k)\right| =$$

$$= \pi \sup_n \sup_{\|g^\circ\|_E \leq 1} |<\sigma_n(f^\circ), g^\circ>| =$$

$$= \pi \sup_n \sup_{\|g^\circ\|_E \leq 1} |<f^\circ, \sigma_n(g^\circ)>|.$$

Теорема 12. *Если* E *есть* BK*-пространство, то и* (E, T) *является* BK*-пространством.*

Доказательство для случая, когда T — метод сходимости, дано Гёсом (см. [7], стр. 351—352, теорема 2.1). В общем случае доказательство аналогично. Как видно из определения 2, норма элемента f° в (E, T) удовлетворяет всем аксиомам нормы. Остается показать, что если $f^\circ \in (E, T)$, то $\|f^\circ\|_{(E,T)} < \infty$. Действительно,

$$\varphi_n(g^\circ) = <\sigma_n(f^\circ), g^\circ> = \sum_{k=1}^{n} \tau_{nk}(a_k c_k + b_k d_k)$$

является непрерывным линейным функционалом в E. Если $f^\circ \in (E, T)$, то $\varphi_n(g^\circ)$ сходится при каждом $g^\circ \in E$ и по теореме Банаха—Штейнгауза имеем

$$\sup_n \|\varphi_n\| = \pi \sup_n \sup_{\|g^\circ\|_E \leqslant 1} |< \sigma_n(f^\circ),\ g^\circ >| < \infty.$$

Докажем, что (E, T) полное пространство. Пусть

$$f_p^\circ = (a_k^{(p)}, b_k^{(p)}) \in (E, T) \quad (p = 1, 2, \ldots)$$

и пусть для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число N, что

$$\|f^\circ_p - f^\circ_{p+i}\|_{(E,T)} = \pi \sup_n \sup_{\|g^\circ\|_E \leqslant 1} \left|\sum_{k=1}^{n} \tau_{nk}[(a_k^{(p)} - a_k^{(p+i)}) c_k + \right.$$

$$\left. + (b_k^{(p)} - b_k^{(p+i)}) d_k]\right| < \varepsilon \tag{10}$$

при $p > N$ и при каждом i. Если $g = c_k \cos kx$, то

$$|\tau_{nk}(a_k^{(p)} - a_k^{(p+i)}) c_k| \leqslant \|f^\circ_p - f^\circ_{p+i}\|_{(E,T)} < \varepsilon$$

при $p > N$ и всех i. Отсюда получаем $\lim\limits_p a_k^{(p)} = a_k$. Аналогично, $\lim\limits_p b_k^{(p)} = b_k$. Так как неравенство (10) имеет место для каждого i, то

$$\pi \sup_{\|g^\circ\|_E \leqslant 1} \left|\sum_{k=1}^{n} \tau_{nk}[(a_k^{(p)} - a_k) c_k + (b_k^{(p)} - b_k) d_k]\right| \leqslant \varepsilon \tag{11}$$

независимо от n и $p > N$. В силу неравенства (11)

$$\|f^\circ_p - f^\circ\|_{(E,T)} = \pi \sup_n \sup_{\|g^\circ\|_E \leqslant 1} \left|\sum_{k=1}^{n} \tau_{nk}[(a_k^{(p)} - a_k) c_k + \right.$$

$$\left. + (b_k^{(p)} - b_k) d_k]\right| \leqslant \varepsilon.$$

Покажем еще, что $f^\circ = (a_k, b_k) \in (E, T)$, т. е. что $< \sigma_n(f^\circ), g^\circ >$ сходится при каждом $g^\circ \in E$. Допустим обратное, что найдется $g_1 = (c_k^{(1)}, d_k^{(1)}) \in E$ такое, что $< \sigma_n(f^\circ),\ g^\circ_1 >$ не сходится. Так как $< \sigma_n(f^\circ),\ g^\circ >$ — непрерывный линейный функционал на E, то мы можем предполагать, что $\|g^\circ_1\|_E \leqslant 1$. Если $p > N$, то при каждом n в силу неравенства (11) имеем

$$\varepsilon \geqslant \pi \sup_{\|g^\circ\|_E < 1} |\sigma_n(f^\circ_p - f^\circ),\ g^\circ >| \geqslant \pi |< \sigma_n(f^\circ_p - f^\circ),\ g^\circ_1 >| \geqslant$$

$$\geqslant \pi |< \sigma_n(f^\circ_p),\ g^\circ_1 > - < \sigma_n(f^\circ),\ g^\circ_1 >| \geqslant$$

$$\geqslant \pi \big||< \sigma_n(f^\circ_p),\ g^\circ_1 >| - |< \sigma_n(f^\circ),\ g^\circ_1 >|\big|. \tag{12}$$

Поскольку последовательность $< \sigma_n(f^\circ_p),\ g^\circ_1 >$ сходится для каждого $p > N$, то в силу неравенства (12) также сходится $< \sigma_n(f^\circ),\ g_1 >$. Следовательно, $f^\circ \in (E, T)$.

Остается доказать сходимость по координатам в (E, T). Для этого:

$$|a_k^{(p)} - a_k||\tau_{nk}| = |< \sigma_n(f^\circ_p - f^\circ), \cos kx > | =$$
$$= \frac{1}{\|\cos kx\|_E} \cdot |< \sigma_n(f^\circ_p - f^\circ), \cos kx > | \cdot \|\cos kx\|_E \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{\|g^\circ\|_E \leqslant 1} \sup |< \sigma_n(f^\circ_p - f^\circ), g^\circ > | \cdot \|\cos kx\|_E \leqslant$$
$$\leqslant \sup_n \sup_{\|g^\circ\|_E \leqslant 1} \sup |< \sigma_n(f^\circ_p - f^\circ), g^\circ > | \cdot \|\cos kx\|_E =$$
$$= \frac{1}{\pi} \|f^\circ_p - f^\circ\|_{(E, T)} \cdot \|\cos kx\|_E.$$

Аналогично,

$$|b_k^{(p)} - b_k||\tau_{nk}| \leqslant \frac{1}{\pi} \|f^\circ_p - f^\circ\|_{(E, T)} \|\sin kx\|_E.$$

Из последних неравенств уже следует сходимость по координатам.

Теорема 13. *Если $E \cap P$ всюду плотно в E, и E есть ВК-пространство, то $f^\circ \in (E, T)$ тогда и только тогда, когда*

$$\|f^\circ\|_{(E, T)} = \pi \sup_n \sup_{\|g^\circ\|_E \leqslant 1} |< \sigma_n(f^\circ), g^\circ > | < \infty. \tag{13}$$

Доказательство. Необходимость условия (13) содержится в доказательстве теоремы 12, причем без предположения всюду плотности $E \cap P$ в E.

Достаточность. Пусть (13) выполнено. Тогда последовательность норм линейных непрерывных функционалов $\varphi_n(g^\circ) = < \sigma_n(f^\circ), g^\circ >$ ограничена. Если $g^\circ \in (E \cap P)$, то $g^\circ = \sum_{k=1}^{m} (c_k \cos kx + d_k \sin kx)$ и последовательность $< \sigma_n(f^\circ), g^\circ >$ сходится. Так как $E \cap P$ всюду плотно в E, то по теореме Банаха—Штейнгауза $< \sigma_n(f^\circ), g^\circ >$ сходится всюду в E, т. е. $f^\circ \in (E, T)$.

Лемма 3. *Если E равняется одному из пространств L_Φ, L_ψ $L_p (1 \leqslant p < \infty)$, M, C, V, A, то $(E, T) \subset E^*$ и для $f^\circ \in (E, T)$ и $g^\circ \in E$ имеет место равенство*[7]

$$\pi \sup_{\|g^\circ\|_E < 1} |< \sigma_n(f^\circ), g^\circ > | = \alpha \|\sigma_n(f^\circ)\|_{E^*}, \tag{14}$$

где α — число положительное, независящее от n.

---

[7] Равенство (14) для $E = V$ верно при $f^\circ \in [dC \cap (V, T)]$ и $g^\circ \in V$.

Доказательство. Соотношение $(E, T) \subset E^*$, кроме пространств V и A, следует из теоремы 9 и примечания 4. Поскольку $dA = L$, то по примечанию 4 имеем $(dA, T) \subset M$. Если $(a_k, b_k) \in \in (A, T)$, то $\left(-\frac{b_k}{k}, \frac{a_k}{k}\right) \in (dA, T) = (L, T) \subset M$, как следует из примечания 5. А если $\left(-\frac{b_k}{k}, \frac{a_k}{k}\right) \in M$, то $(a_k, b_k) \in dM$. Следовательно, $(A, T) \subset dM = A^*$.

Поскольку $A \subset V$, то по лемме 2

$$(V, T) \subset (A, T) \subset dM = A^* = V^*.$$

Для пространства L_Φ выражение $\pi < \sigma_n(f^\circ), g^\circ >$ является непрерывным линейным функционалом в L_Φ, причем

$$\frac{1}{2} \|\sigma_n(f^\circ)\|_\psi \leqslant \pi \sup_{\|g^\circ\|_\Phi \leqslant 1} |< \sigma_n(f^\circ), g^\circ >| \leqslant \|\sigma_n(f^\circ)\|_\psi,$$

т. е.

$$\pi \sup_{\|g^\circ\|_\Phi < 1} |< \sigma_n(f^\circ), g^\circ >| = \alpha \|\sigma_n(f^\circ)\|_\psi,$$

где $\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1$. Аналогичное равенство получим для пространства L_ψ (см. [18], стр. 142, примечание 2). Для пространств L_p $(1 \leqslant p < \infty)$ и M равенство (14) хорошо известно при $\alpha = 1$ в силу $(L_p, T) \subset L_q$, $(M, T) \subset L$ (см. [18], стр. 71—72, теорема 2). Поскольку $(C, T) \subset dV$, то (14) имеет место и для C, если только $\alpha = 1$. Так как $(V, T) \subset V^*$ и $[dC \cap (V, T)] \subset V^*$, то $\pi < \sigma_n(f^\circ), g^\circ >$ $(n = 1, 2, \ldots)$ есть непрерывный линейный функционал в V; при $f^\circ \in [dC \cap (V, T)]$ имеем

$$\pi \sup_{\|g^\circ\|_V \leqslant 1} |< \sigma_n(f^\circ), g^\circ >| = \sup_{\|g^\circ\|_V < 1} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_n(F^\circ)\, dg \right| = \|\sigma_n(F^\circ)\|_C =$$

$$= \|\sigma_n(f^\circ)\|_{dC} = \|\sigma_n(f^\circ)\|_{dM} = \|\sigma_n(f^\circ)\|_{V^*}.$$

Для пространства A (в силу соотношения $(A, T) \subset A^*$) имеем:

$$\pi \sup_{\|g^\circ\|_A \leqslant 1} |< \sigma_n(f^\circ), g^\circ >| = \sup_{\|g^\circ\|_A \leqslant 1} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_n(F^\circ)\, dg \right| = \|\sigma_n(f^\circ)\|_{dM} =$$

$$= \|\sigma_n(f^\circ)\|_{A^*}.$$

Следствие 5. *Если E — одно из пространств L_Φ, L_ψ, $L_p (1 \leqslant p < \infty)$, M, C, V или A, то имеет место равенство*

$$\|f^\circ\|_{(E, T)} = \alpha \sup_n \|\sigma_n(f^\circ)\|_{E^*} \left(\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1\right).$$

Действительно,

$$\|f^\circ\|_{(E,T)} = \pi \sup_n \sup_{\|g^\circ\|_E \leqslant 1} |\langle \sigma_n(f^\circ),\ g^\circ \rangle|,$$

а последнее по лемме 3 равно $\alpha \sup_n \|\sigma_n(f^\circ)\|_{E^*}$.

Теорема 14. *Для того, чтобы $f^\circ \in (E, T)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sup_n \|\sigma_n(f^\circ)\|_{E^*} < \infty,$$

где E есть L_Φ, $L_p (1 \leqslant p < \infty)$, C или A.

Доказательство. Так как P всюду плотно в L_Φ, L_p, C, A, то по теореме 13 имеем $f^\circ \in (E, T)$ тогда и только тогда, если $\|f^\circ\|_{(E,T)} < \infty$. Итак, из следствия 5 вытекает утверждение теоремы.

Теоремы 12, 13 и 14 и лемма 3 доказаны для метода $C^\alpha (\alpha \geqslant 0)$ Гёсом (см. [7], стр. 351—355).

Литература

1. Бари Н. К., Тригонометрические ряды. Москва, 1961.
2. Качмаж С., Штейнгауз Г., Теория ортогональных рядов. Москва, 1958.
3. Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной. Москва, 1957.
4. Харди Г. Х., Рогозинский В. В., Ряды Фурье. Москва, 1962.
5. Chillingworth, H. R., Generalised dual sequence spaces. Proc. Koninkl. nederl. akad. wet. A, 1958, **61**, 307—315.
6. Chillingworth, H. R., Some further results on generalised «dual» sequence spaces. Proc. Koninkl. nederl. akad. wet. A, 1959, **62**, 1—10.
7. Goes, G., BK-Räume und Matrixtransformationen für Fourirerkoeffizienten. Math. Z., 1959, **70**, 345—371.
8. Goes, G., Charakterisierung von Fourierkoeffizienten mit einem Summierbarkeitsfaktorentheorem und Multiplikatoren. Studia Math., 1960, **19**, 133—148.
9. Goes, G., Complementary Spaces of Fourier Coefficients, Convolutions, and Generalized Matrix Transformations and Operators between BK-spaces. J. Math. and Mech., 1961, **10**, 135—157.
10. Goes, G., Identische Multiplikatorenklassen und C_k-Basen in C_k-komplementären Fourierkoeffizientenräumen. Math. Nachr., 1960, **21**, 150—159.
11. Goes, G., Komplementäre Fourierkoeffizientenräume und Multiplikatoren. Math. Ann., 1957, **137**, 371—384.
12. Köthe, G., Neubegründung der Theorie der vollkommenen Räume. Math. Nachr., 1951, **4**, 70—80.
13. Köthe, G., Toeplitz, O., Lineare Räume mit unendlich vielen Koordinaten und Ringe unendlicher Matrizen. J. reine und angew. Math., 1934, **171**, 193—226.
14. Matthews, G., Generalised rings of infinite matrices. Proc. Koninkl. nederl. akad. wet. A, 1958, **61**, 298—306.
15. Matthews, G., Generalised rings of infinite matrices II. Proc. Koninkl. nederl. akad. wet. A,1959, **62**, 45—51.

16. M o n n a, A. F., Espaces linéaires à une infinité dénombrale de coordinnée. Proc. Koninkl. nederl. akad. wet. A, 1950, **53**, 1548—1559.
17. O r l i c z, W., On the convergence of functionals representable as integrals over some classes of bounded functions. Studia Math., 1953, **13**, 208—217.
18. Z a a n e n, A. C., Linear Analysis. Amsterdam-Groningen, 1953.
19. Z y g m u n d, A., Trigonometric Series, Vol. I. Cambridge, 1959.

Поступило
15 III 1965

FOURIER' KORDAJATE T-TÄIENDRUUMID

M. Tõnnov

R e s ü m e e

Artiklis üldistatakse Goesi töödes [7—11] vaadeldud C^α-täiendruumi mõistet, kus C^α on Cesàro menetlus järku $\alpha \geqslant 0$, üldisele Toeplitzi menetluse juhule. Käesolevas töös antakse põhiliste funktsiooniruumide korral vastavate täiendruumide kirjeldus.

T-KOMPLEMENTÄRE FOURIERKOEFFIZIENTENRÄUME

M. Tõnnov

Z u s a m m e n f a s s u n g

In dem vorliegenden Artikel werden die in [7—11] von Goes gegebenen C^α-komplementären Fourierkoeffizientenräume verallgemeinert für das Verfahren Toeplitzes.

Ist E eine Menge der trigonometrischen Reihen, dann ist T-komplementäre Raum (E, T) zu E der Raum der (a_k, b_k) bei denen für jedes $(c_k, d_k) \in E$ die Reihe $\sum (a_k c_k + b_k d_k)$ T-summierbar ist. Ist E dabei so beschaffen, daß gewisse der Koordinaten c_k, d_k Null sind für alle $(c_k, d_k) \in E$, so gelte dasselbe für die entsprechenden Koeffizienten a_k, b_k $(k = 1, 2, \ldots)$ aller für $(a_k, b_k) \in (E, T)$.

In dem Artikel beweist man, daß $(L\Phi, T) = L_\Psi$, $(L_\Psi, T) = L\Phi$, $(L_p, T) = L_q$ $(1 \leqslant p < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$, $(C, T) = dV$ usw., wenn für das Verfahren T die Bedingung (K) gilt. Diese Eigenschaften gebraucht man für die Charakterisierung von Fourierkoeffizienten.

МНОЖИТЕЛИ СУММИРУЕМОСТИ, КОЭФФИЦИЕНТЫ ФУРЬЕ И МУЛЬТИПЛИКАТОРЫ

М. Тыннов

Кафедра математического анализа

§ 1. Введение

Мур [30, 31] и Чезари [19] доказали, что если

$$a_k = o(1) \tag{1.1}$$

и для некоторого[1] $\alpha > 0$

$$\sum k^{\alpha} |\Delta^{\alpha+1} a_k| < \infty, \tag{1.2}$$

то косинус-ряд[2] $K^{\circ} = \sum a_k \cos kx$ является рядом Фурье[3]. Здесь обозначено

$$\Delta^{\alpha+1} a_k = \sum_{n=k}^{\infty} A_{n-k}^{-\alpha-2} a_n,$$

и, следовательно, $\Delta^1 a_k = \Delta a_k = a_k - a_{k+1}$, $\Delta^2 a_k = \Delta(\Delta a_k)$. В 1960 г. Гёс [22] дал новое доказательство этому предложению, исходя из множителей суммируемости для метода Чезаро порядка $\alpha \geqslant 0$ (см. также [11]).

Определение 1.1. *Последовательность $\{a_k\}$ называется последовательностью множителей суммируемости класса (T, T_1) (или (T_O, T_1) или $(|T|, T_1)$), если ряд $\sum a_k c_k$ является T_1-суммируемым при всех T-суммируемых (соответственно T-ограниченных или $|T|$-суммируемых) рядах $\sum c_k$.*

Последовательность $\{a_k\}$ принадлежит классу $(C_O^{\alpha}, C^{\alpha})$ при $\alpha \geqslant 0$ тогда и только тогда, когда выполнены условия (1.1) и (1.2) (см. [2, 18, 37]). Таким образом, если $\{a_k\} \in (C_O^{\alpha}, C^{\alpha})$ при $\alpha > 0$, то косинус-ряд K° есть ряд Фурье. Гёс устанавливает также, что если $\{a_k\} \in (C^{\alpha}, C^{\alpha})$, где $\alpha > 0$, то соответствующий

---

[1] Если пределы изменения индексов не указаны, то они имеют все значения от 1 до $+\infty$, lim означает $\lim\limits_{n\to\infty}$.

[2] Во всей статье применяем обозначения $K^{\circ} = \Sigma a_k \cos kx$ и $S^{\circ} = \Sigma a_k \sin kx$.

[3] Для случая $\alpha = 1$ эта теорема доказана А. Н. Колмогоровым [28].

косинус-ряд K° есть ряд Фурье—Стилтьеса [4]. Кроме того, Гёс получает некоторые аналогичные результаты при множителях сходимости: 1) если $\{a_k\} \in (C_O^0, C^0)$, то $K^\circ \in [(L, C^0), C^0]$; 2) если $\{a_k\} \in (C^0, C^0)$, то $K^\circ \in (V, C^0)$ и $K^\circ \in [(dV, C^0), C^0]$; 3) если $\{ka_k\} \in (C^0, C^0)$, то синус-ряд [2] $S^\circ = \sum a_k \sin kx \in [(V, C^0), C^0]$ и $S^\circ \in (dV, C^0) \subset (L, C^0) \subset M \subset L_p$ и $K^\circ \in L_q$ $(p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$.

При этом напоминаем [11].

Определение 1.2. *Пространство всех тригонометрических рядов* [5]

$$(c_k, d_k) = \sum (c_k \cos kx + d_k \sin kx), \tag{1.3}$$

для которых ряд

$$\sum a_k c_k + b_k d_k \tag{1.4}$$

является T-суммируемым при каждом тригонометрическом ряде [6] (a_k, b_k) *из пространства E, называем T-дополнительным к пространству E и обозначем через* [7] (E, T).

Если некоторые a_k, b_k для всех (a_k, b_k) из E равны нулю, то соответствующие им коффициенты (c_k, d_k) из (E, T) полагаем также равными нулю (ср. [20—24]).

Возникает вопрос: присуще ли это свойство коэффициентов Фурье, доказанное Гёсом, лишь для метода суммирования Чезаро? При помощи доказанных в статье [12] теорем о T-дополнительных пространствах в настоящей статье доказывается, что это свойство остается в силе и для других методов суммирования: а именно, если $\{a_k\} \in (T, T_1)$, то $K^0 \in dV$, если же $\{a_k\} \in (T_O, T_1)$, то $K^0 \in L$, где T и T_1 методы Тёплица с матрицами соответственно (τ_{nk}) и $(\tau^1{}_{nk})$, где $\tau_{nk} = \tau^1{}_{nk} = 0$ при $k > n$. Здесь T есть метод, суммирующий равномерно ряды Фурье всех непрерывных функций, т. е. T удовлетворяет условию

$$\sup_n \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |K_n(u)|\,du = \sup_n \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left| \frac{\tau_{no}}{2} + \sum_{k=1}^n \tau_{nk} \cos ku \right| du = K < \infty \tag{K}$$

(см. [7]). В статье доказывается ряд других теорем аналогичного типа. Доказываемые теоремы дают возможность получить

---

[4] Последовательность $\{a_k\} \in (C^\alpha, C^\alpha)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие (1.2) и $a_k = O(1)$ (см. [2, 18, 37]).

[5] Во всей статье предпологаем, что $c_0 = 0$ для всех тригонометрических рядов (1.3), и поэтому остается в силе сноска [1]. В этих проблемах такое предположение не является ограничением общности.

[6] Всюду применяем обозначение (1.3); везде через E и E_1 обозначены подмножества множества всех тригонометрических рядов (1.3); если E — пространство функций, то запись $(a_k, b_k) \in E$ означает, что (a_k, b_k) есть ряд Фурье функции пространства E

[7] Гёс изучает C^α — дополнительные пространства; C^α — дополнительное $E^{\alpha *}$ к пространству E Гёс обозначает через $(\alpha \geqslant 0)$, $E^{0*} = E^*$ (см. [20—24]).

условия для коэффициентов тригонометрического ряда, которым должен удовлетворять тригонометрический ряд, чтобы он являлся рядом Фурье из определенного класса, если известны достаточные условия для классов множителей суммируемости.

Кроме того, изучаются связи между классами мультипликаторов и множителей суммируемости.

Определение 1.3. *Последовательность* $\{\lambda_k\}$ *называется мультипликатором класса* (E, E_1), *если* $(\lambda_k a_k, \lambda_k b_k) \in E_1$ *при каждом* $(a_k, b_k) \in E$.

В данной статье получается ряд достаточных условий для классов мультипликаторов. Если T удовлетворяет условию (K), то получаются следующего типа результаты: если $\{\lambda_k\} \in (T, T_1)$, то $\{\lambda_k\}$ есть мультипликатор классов (dV, dV), (L_p, L_p), (M, M), (L_ψ, L_ψ), (L_Φ, L_Φ), а если $\{\lambda_k\} \in (T_O, T_1)$, то $\{\lambda_k\}$ есть мультипликатор классов (D, L), (V_1, L), (R, C) и т. п. Эти результаты и другие теоремы подобного рода, которые в статье доказываются, дают достаточные условия для многих классов мультипликаторов, если известны достаточные условия для классов множителей суммируемости.

Рассмотрение классов множителей суммируемости для методов Тёплица вместо метода Чезаро дает новые результаты, потому что соответствующие классы множителей суммируемости не совпадают. До сих пор найдены необходимые и достаточные условия для классов множителей суммируемости при методах Чезаро [2, 18, 36, 37] и Рисса [3, 6, 25—27, 35], в частном случае и при методе Вороного—Нёрлунда [5, 29].

§ 2 Обозначения и вспомогательные результаты

Везде f, g, F, G, и т. д. обозначают действительные функции от действительной переменной, определенные почти везде на $[-\pi, \pi]$, периодические с периодом 2π и интегрируемые по Лебегу.

1. В дальнейшем будем применять следующие пространства интегрируемых функций:[8] $L_p (1 \leqslant p < \infty)$, M, C, V, A, V_1, A_O, R и D (определения см. [11, 12]). Те же обозначения сохраняем и для пространств рядов Фурье, соответствующих всем перечисленным пространствам функций. Ряд Фурье, соответствующий функции f, обозначаем через $f^\circ = (a_k, b_k)$. Если же E — нормированное пространство функций, то соответствующее ему пространство последовательностей $f^\circ = (a_k, b_k)$ является также нормированным пространством с нормой $\|f^\circ\|_E = \|f\|_E$.

2. Через dE обозначаем пространство всех $f^\circ = (a_k, b_k)$, для которых $F^\circ = \left(-\frac{b_k}{k}, \frac{a_k}{k}\right) \in E$. Например, $dA = L$ (см. [3],

[8] Если $p = 1$, то $L_1 = L$.

стр. 25—26) и dV есть пространство всех рядов Фурье—Стилтьеса (см. [3] стр. 25—26). Если E — нормированное пространство, то и dE — нормированное пространство с нормой $\|f^\circ\|_{dE} = \|F^\circ\|_E$ (см. [20], стр. 347).

3. Через $\tilde{E}$ обозначаем множество сопряженных тригонометрических рядов множества E.

4. Через E_{TN} обозначаем (см. [23], стр. 152) пространство всех $f^\circ \in E$, для которых

$$\lim \|f^\circ - \sigma_n(f^\circ)\|_E = 0,$$

где

$$\sigma_n(f^\circ) = \sum_{k=1}^{n} \tau_{nk}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Примечание 2.1. Если E состоит из всех $(c_k, 0)$, для которых $\sum c_k$ является T-суммируемым (T-ограниченным или $|T|$-суммируемым), то T_1-дополнительное пространство (E, T_1) состоит из всех $K^\circ = (c_k, 0)$, для которых $\{a_k\} \in (T, T_1)$ [соответственно (T_O, T_1) или $(|T|, T_1)$], как вытекает из определений 1.2 и 1.1.

Лемма 2.1. *Если $E_1 \subset E$, то $(E, T) \subset (E_1, T)$.*

Лемма 2.2. *Пространство (C, T) состоит из всех f°, для которых*

$$\sup_n \|\sigma_n(f^\circ)\|_L = \sup_n \int_{-\pi}^{\pi} |\sigma_n(f^\circ)|\, dx < \infty,$$

где

$$\sigma_n(f^\circ) = \sum_{k=1}^{n} \tau_{nk}(a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

причем $(C, T) \subset dV$, а если T удовлетворяет условию (K), *то $(C, T) = dV$.*

Лемма 2.3. *Пространство (L, T) состоит из всех f°, для которых*

$$\sup_n \|\sigma_n(f^\circ)\|_M = \sup_n \sup_{x \in [-\pi, \pi]} |\sigma_n(f^\circ)| < \infty,$$

причем $(L, T) \subset M$, а если T удовлетворяет условию (K), *то $(L, T) = M$.*

Лемма 2.4. *Пространство (dV, T) состоит из всех f°, для которых $\sigma_n(f^\circ)$ ограниченно сходится, т. е.*

$$\sup_n \|\sigma_n(f^\circ)\|_M < \infty$$

и $\sigma_n(f^\circ)$ сходится для каждого $x \in [-\pi, \pi]$.

Лемма 2.5. *Пространство (V, T) состоит из всех f°, для которых $\sigma_n(F^\circ)$ ограниченно сходится.*

Лемма 2.6. *Пространство (M, T) состоит из всех $f^\circ \in L$, для* *которых $\sigma_n(f^\circ)$ сходится слабо к $f^\circ \in L$, причем $(M, T) = L$, если T удовлетворяет условию* (K).

Лемма 2.7. *Для того, чтобы $(a_k, b_k) \in (E, T)$, необходимо и достаточно, чтобы $\left(-\frac{b_k}{k}, \frac{a_k}{k}\right) \in (dE, T)$.*

Доказательства леммы 2.1—2.6 даны в статье [12].

Лемма 2.8. *Для того чтобы $(a_k, b_k) \in [(E, T), T_1]$, необходимо и достаточно, чтобы $(-kb_k, ka_k) \in [(dE, T), T_1]$.*

Доказательство. Для того чтобы $(a_k, b_k) \in [(E, T), T_1]$ необходимо и достаточно, чтобы ряд (1.4) был T_1-суммируемым при каждом $(c_k, d_k) \in (E, T)$, т. е. чтобы

$$\sum \left[(-kb_k)\frac{d_k}{k} + ka_k\left(\frac{c_k}{k}\right)\right]$$

был T_1-суммируемым при каждом $\left(-\frac{d_k}{k}, \frac{c_k}{k}\right) \in (dE, T)$. Итак, $(a_k, b_k) \in [(E, T), T_1]$ тогда и только тогда, когда

$$(-kb_k, ka_k) \in [(dE, T), T_1].$$

Лемма 2.9. *Если T удовлетворяет условию* (K), *то $(L_\Phi, T) = L_\psi$, $(L_\psi, T) = L_\Phi$, $(L, T) = M$ и $(M, T) = L$, Однако, $(L_p, T) = L_q\left(1 < p < \infty, \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$ даже в тех случаях, когда T не удовлетворяет условию* (K).

Доказательство дано в статье [12] (стр. 121, теорема 9).

§ 3. Множители суммируемости и коэффициенты Фурье

При помощи T-дополнительных пространств мы можем доказать следующие теоремы о принадлежности тригонометрических рядов к определенным пространствам рядов Фурье.

Теорема 3.1. *Если $\{a_k\} \in (T, T_1)$, то $K^\circ = [(dV, T), T_1]$.*

Доказательство. Если $\{a_k\} \in (T, T_1)$, то по примечанию 2.1 и леммам 2.1 и 2.4 имеем $K^\circ \in [(dV, T), T_1]$.

Следствие 3.1. *Если $\{a_k\} \in (T, T_1)$, где T удовлетворяет условию* (K), *то $K^\circ \in dV$.*

Доказательство. Так как метод T удовлетворяет условию (K), то $C \subset (dV, T)$ (см. [14] стр. 94—97, теорема 70). Из лемм 2.1 и 2.2 вытекает, что

$$[(dV, T), T_1] \subset (C, T_1) \subset dV.$$

По теореме 3.1, теперь получаем, что $K^\circ \in dV$.

Примечание 3.1. Следствие 3.1 можно дополнить следующим предложением.

Если $\{a_k\} \in (T, T_1)$, где T удовлетворяет условию (K), *то $K^\circ \in (C, T) \subset dV$, причем равенство $(C, T_1) = dV$ достигается лишь в том случае, когда и T_1 удовлетворяет условию* (K).

Заметим, что пространство (C, T_1) по лемме 2.2 состоит из всех тригонометрических рядов f°, для которых

$$\sup_n \|\sigma_n^1(f^\circ)\|_L < \infty.$$

Примечание 3.2. Если T не удовлетворяет условию (К), то следствие 3.1 становится неверным. Действительно, если $T = T_1$ есть метод сходимости, то $K^\circ \bar{\in} dV$ (см. [32], стр. 26).

Теорема 3.2. *Если* $\{ka_k\} \in (T, T_1)$, *то* $S^\circ \in [(V, T)\ T_1]$.

Доказательство. Из теоремы 3.1 следует, что $\sum ka_k \cos kx \in [(dV, T), T_1]$. Тогда $S^\circ \in [(V, T), T_1]$ по лемме 2.8.

Из теоремы 3.2 получаем следующие результаты.

Следствие 3.2. *Если* $\{ka_k\} \in (T, T_1)$, *то*

$$S^\circ \in (dV, T_1) \subset (L, T_1) \subset M \subset L_p \quad (1 \leqslant p < \infty),$$
$$K^\circ \in L_q \quad (1 \leqslant q < \infty).$$

Доказательство. Сперва покажем, что $dV \subset (V, T)$. Пусть $f^\circ \in dV$, тогда $F^\circ \in V$, и, следовательно, по признаку Жордана

$$s_n(F^\circ) = \sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{b_k}{k} \cos kx + \frac{a_k}{k} \sin kx\right)$$

сходится ограниченно на $[-\pi, \pi]$ (см. [14], стр. 71, теорема 57). Поскольку T — метод Тёплица, то

$$|\sigma_n(F^\circ)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |t_{nk}| |s_k(F^\circ)| = \sum_{k=1}^{n} |t_{nk}|\, O(1) = O(1),$$

где $t_{nk} = \tau_{nk} - \tau_{n,k+1}$. Следовательно, $\sigma_n(F^\circ)$ сходится ограниченно, и тогда по лемме 2.5 получаем, что $f^\circ \in (V, T)$. Теперь в силу леммы 2.1 из теоремы 3.2 заключаем

$$S^\circ \in [(V, T), T_1] \subset (dV, T_1).$$

Далее, поскольку $L \subset dV$, то из леммы 2.1 следует, что $(dV, T_1) \subset (L, T_1)$. Если учесть лемму 2.3, то

$$S^\circ \in (dV, T_1) \subset (L, T_1) \subset M \subset L_p \quad (1 \leqslant p < \infty).$$

Наконец, по теореме М. Рисса (см. [3], стр. 404, теорема 2.4), если $S^\circ \in L_p$ $(1 < p < \infty)$, то $K^\circ \in L_q$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Итак, следствие 3.2 доказано.

Следствие 3.3. *Если* $\{ka_k\} \in (T, T_1)$, *где T удовлетворяет условию* (К), *то* $S^\circ \in V$.

Доказательство. Имеем $\sum ka_k \cos kx \in dV$, т. е. $S^\circ \in V$, по следствию 3.1. Следствие 3.3 можно получить и непосредственно из теоремы 3.2.

Теорема 3.3. *Если* $\{a_k\} \in (T_O, T_1)$, *то* $K^\circ \in [(L, T), T_1]$.

Доказательство. Если $f^\circ \in (L, T)$, то по лемме 2.3 $\|\sigma_n(f^\circ)\|_M = O(1)$. Так как $\{a_k\} \in (T_O, T_1)$, то по примечанию 2.1 и в силу леммы 2.1 имеем $K^\circ \in [(L, T), T_1]$.

Следствие 3.4. *Если* $\{a_k\} \in (T_O, T_1)$, *где T удовлетворяет условию* (К), *то* $K^\circ \in L$.

Доказательство. Действительно, если T удовлетворяет условию (K), то $(L, T) = M$. В силу леммы 2.6 из теоремы 3.3 вытекает, что $K^\circ \in (M, T_1) \subset L$.

Примечание 3.3. Следствие 3.4 можно дополнить следующим предложением.

Если $\{a_k\} \in (T_O, T_1)$, где T удовлетворяет условию (K), *то $K^\circ \in (M, T_1) \subset L$, причем равенство $(M, T_1) = L$ достигается лишь в том случае, когда и T_1 удовлетворяет условию* (K).

Но пространство (L, T_1) по лемме 2.6 состоит из всех тригонометрических рядов $f^\circ \in L$, для которых $\sigma_n^1(f^\circ)$ сходится слабо к $f \in L$.

Примечание 3.4. Если T не удовлетворяет условию (K), то следствие 3.4 становится неверным. Если $T = T_1$ есть метод сходимости, то $|f|^p \in L$ при любом p с $0 < p < 1$, где функция f, определена рядом K° (см. [1], стр. 664, или [1.3]).

Теорема 3.4. *Если $\{ka_k\} \in (T_O, T_1)$, то $S^\circ \in [(A, T), T_1]$.*

Доказательство. Так как $L = dA$, то из теоремы 3.3 следует, что $\sum ka_k \cos kx \in [(dA, T), T_1]$. Итак, в силу леммы 2.8 получаем $S^\circ \in [(A, T), T_1]$.

Следствие 3.5. *Если $\{ka_k\} \in (T_O, T_1)$, где T удовлетворяет условию* (K), *то $S^\circ \in A$.*

Доказательство. Имеем $\sum ka_k \cos k \in L = dA$, т. е. $S^\circ \in A$, по следствию 3.4. Следствие 3.5 можно получить и непосредственно из теоремы 3.4.

Теорема 3.5. *Если $\{a_k\} \in (|T|, T_1)$, где $|T|$ абсолютно суммирует все $f^\circ \in V$, то $K^\circ \in (V, T_1)$.*

Доказательство. Так как по предположению все $f^\circ \in V$ суть $|T|$-суммируемы, то в силу леммы 2.1 и $K^\circ \in (V, T_1)$.

Теорема 3.6. *Если $\{ka_k\} \in (|T|, T_1)$, где $|T|$ абсолютно суммирует все $f^\circ \in V$, то $S^\circ \in (dV, T_1)$.*

Доказательство. Из теоремы 3.5 следует, что $\sum ka_k \cos kx \in (V, T_1)$. Отсюда в силу леммы 2.7 следует, что $S^\circ \in (dV_1, T_1)$.

Известно, что если $f^\circ \in V$, то f° является $|C^\alpha|$-суммируемым (см. [17]). Если метод абсолютного суммирования Вороного-Нёрлунда $|WN, p_k|$, определенный последовательностью $\{p_k\}$, удовлетворяет условиям:

$$\left.\begin{aligned} & p_k \geqslant 0, \\ & P_n = \sum_{k=0}^{n} p_k \to \infty \text{ при } n \to \infty, \\ & \sum \left| \Delta \frac{(n+1)p_n}{Pn} \right| < \infty, \\ & P_n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(k+2)P_k} = O(1), \end{aligned}\right\} \qquad (3.1)$$

то все $f^\circ \in V$ также $|WN, p_k|$-суммируемы [38, 33, 34].

Используя доказанные теоремы, можно вывести ряд достаточных условий для того, чтобы тригонометрический ряд из косинусов или из синусов был рядом Фурье определенного класса, если только известны теоремы множителей суммируемости. Необходимые и достаточные условия для классов (T, T_1), (T_O, T_1) $(|T|, T_1)$ множителей суммируемости изучены в случаях, когда $T = C^\alpha$ и $T_1 = C^\beta$ $(\alpha, \beta \geqslant 0)$ (см. [2, 18, 36, 37]), $T = (P, p_k)$, т. е. метод взвешенных средних Рисса, и T_1 — произвольный метод Тёплица (см. [3, 6, 25—27, 35], T — метод Вороного-Нёрлунда и T_1 — метод сходимости (см. [5, 29]).

Если $\{a_k\} \in (T_O, T_1)$, где T удовлетворяет условию (K), то $K^\circ \in L$. Но, вообще говоря, $S^\circ \bar{\in} L$. С. А. Теляковским (см. [10], стр. 427, теорема 1) доказано, что если $\{a_k\} \in (C_O{}^1, C^1)$, то для того, чтобы $S^\circ \in L$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum \frac{|a_k|}{k} < \infty.$$

Примеры. 1. Последовательность $\{a_k\}$, где $a_k = 1$, принадлежит классу (C^α, C^α) $(\alpha > 0)$, и потому, по следствию 3.1, ряд $\sum \cos kx$ есть ряд Фурье—Стилтьеса.

2. Последовательность $\{a_k\}$, где $a_k = \frac{k}{k+1}$, принадлежит классу (C^1, C^1), поскольку $\frac{k}{k+1} = O(1)$ и

$$\sum (k+1)\,|\Delta^2 a_k| = 2\sum \frac{1}{(k+2)(k+3)} < \infty.$$

По следствию 3.1 будет $\sum \frac{k}{k+1} \cos kx \in dV$.

3. Последовательность $\{a_k\}$, где $a_k = \frac{1}{\ln^\varepsilon (k+1)}$ $(\varepsilon > 0)$, принадлежит классу $(C_O{}^1, C^1)$. Действительно, $a_k = o(1)$, и, дважды применяя формулы конечных приращений, получаем

$$\Delta^2 a_k \sim \frac{1}{(k+1)^2 \ln^{1+\varepsilon}(k+1)} + \frac{1}{(k+1)^2 \ln^{\varepsilon+2}(k+1)},$$

откуда

$$\sum (k+1)\,|\Delta^2 a_k| < \infty.$$

По следствию 3.4 будет $\sum \frac{\cos kx}{\ln^\varepsilon (k+1)} \in L$.

§ 4. Теоремы о мультипликаторах

В настоящем параграфе дается некоторые необходимые и достаточные условия для классов мультипликаторов, связанных дополнительными пространствами.

Введем обозначения:

$$f_t^\circ = \sum [a_k \cos k(x-t) + b_k \sin k(x-t)],$$

$$< f^\circ,\ g_t^\circ > = \sum \{(a_k c_k + b_k d_k) \cos kt + (b_k c_k - a_k d_k) \sin kt\}.$$

Определение 4.1. *Нормированное пространство E называется инвариантным относительно сдвига, если для каждого $f^\circ \in E$ и $t \in [-\pi, \pi]$ ряд $f_t^\circ \in E$ и $\|f^\circ\|_E = \|f_t^\circ\|_E$.*

Отметим, что E, dE и (E, T) инвариантны относительно сдвига при $E = L_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$, M, C, V, A, L_Φ, L_ψ.

Теорема 4.1. *Если E есть инвариантное относительно сдвига BK-пространство*[9]*, то для того, чтобы последовательность $\{\lambda_k\}$ была мультипликатором класса $[E, (dV, T)]$, необходимо и достаточно, чтобы $K^\circ = \sum \lambda_k \cos kx \in (E, T)$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\{\lambda_k\}$ является мультипликатором класса $[E, (dV, T)]$. Тогда

$$< f^\circ,\ K_t^\circ > = \sum \lambda_k a_k \cos kt \in (dV, T)$$

при каждом $f^\circ \in E$. Из леммы 2.4 следует, что $< f^\circ,\ \sigma_n(K_t^\circ) >$ сходится при каждом $t \in [-\pi, \pi]$ и при каждом $f^\circ \in E$, но тогда $K^\circ \in (E, T)$.

Достаточность. Если $K^\circ \in (E, T)$ и $f^\circ \in E$, то ряд $< f^\circ, \sigma_n(K_t^\circ) >$ сходится при каждом $t \in [-\pi, \pi]$. Поскольку

$$|< f^\circ,\ \sigma_n(K_t^\circ) >| = |< f_t^\circ,\ \sigma_n(K^\circ) >| \leqslant$$
$$\leqslant \|f_t^\circ\|_E \cdot \|K^\circ\|_{(E,T)} = \|f^\circ\|_E \cdot \|K^\circ\|_{(E,T)} < \infty,$$

то

$$< f^\circ,\ \sigma_n(K_t^\circ) > = \sigma_n(< f^\circ,\ K_t^\circ >)$$

сходится ограниченно. Из леммы 2.4 следует, что $< f^\circ,\ K_t^\circ > \in (dV, T)$ и, следовательно, $\{\lambda_k\} \in [E, (dV, T)]$.

Если, кроме того, множество всех тригонометрических полиномов P всюду плотно в E, то получаем следующий результат.

Теорема 4.2. *Если E или (E, T) — инвариантное относительно сдвига BK-пространство и P всюду плотно в E, то для того, чтобы $\{\lambda_k\}$ была мультипликатором класса $[E, (dV, T)] = (E, C_{TN})$, необходимо и достаточно, чтобы $K^\circ \in (E, T)$.*

Доказательство. Согласно теореме 4.1 остается только доказать, что если P всюду плотно в E, то $\{\lambda_k\} \in (E, C_{TN})$ тогда и только тогда, если $K^\circ \in (E, T)$.

Необходимость. Если $\{\lambda_k\} \in (E, C_{TN})$, то $< \sigma_n(f^\circ),\ K_t^\circ >$ сходится равномерно на $[-\pi, \pi]$ при каждом $f^\circ \in E$. Следовательно, $K^\circ \in (E, T)$.

Достаточность. При $f^\circ \in P$ и $K^\circ \in (E, T)$ последовательность $< \sigma_n(f^\circ),\ K_t^\circ >$ сходится равномерно на $[-\pi, \pi]$. Если $f^\circ \in E$, то

---

[9] Пространство E называется BK-пространством, если E — банахово пространство и если из сходимости последовательности $\{f_n^\circ\}$, где $f_n^\circ = (a_k^{(n)}, b_k^{(n)}) \in E$, следует сходимость числовых последовательностей $\{a_k^{(n)}\}$, $\{b_k^{(n)}\}$.

$$\|\langle \sigma_n(f^\circ),\ K_t^\circ \rangle\|_C \leqslant \Big\| \|f^\circ\|_E \cdot \|K_t^\circ\|_{(E,\,T)} \Big\|_C =$$
$$= \|f^\circ\|_E \cdot \Big\| \|K_t^\circ\|_{(E,\,T)} \Big\|_C = \|f^\circ\|_E \cdot \|K^\circ\|_{(E,\,T)} < \infty.$$

Так как

$$\sup_n \sup_{\|f^\circ\|_E \leqslant 1} \|\langle \sigma_n(f^\circ),\ K_t^\circ \rangle\|_C < \infty,$$

то согласно теореме Банаха—Штейнгауза $\langle \sigma_n(f^\circ),\ K_t^\circ \rangle$ сходится равномерно на $[-\pi,\ \pi]$ при каждом $f^\circ \in E$. Следовательно, $\{\lambda_k\} \in (E,\ C_{TN})$.

Как известно, P всюду плотно в пространствах $L_p (1 \leqslant p < \infty)$, L_Φ, C. Поэтому из теоремы 4.2 для этих пространств получаем следующее.

Следствие 4.1. *Если T удовлетворяет условию* (K), *то последовательность $\{\lambda_k\}$ тогда и только тогда является мультипликатором класса*

$$\begin{array}{lll} (L_\Phi,\ C), & \textit{если} & K^\circ \in L_\psi, \\ (L_p,\ C), & ,, & K^\circ \in L_q, \\ (L,\ C), & ,, & K^\circ \in M, \\ (C,\ C), & ,, & K^\circ \in dV. \end{array}$$

Если не требовать, чтобы T удовлетворял условию (K), то в следствии 4.1 условия перестают быть необходимыми.

Определение 4.2. *Подмножество E_0^* сопряженного пространства E^* банахова пространства E называется определяющим многообразием, если для всех $f^\circ \in E$ имеет место*

$$\|f^\circ\|_E = \sup_{\|\varphi\|_{E_0^*} \leqslant 1} |\varphi(f^\circ)|$$

(см. [16], стр. 47, определение 2.8.2).

Например, C есть определяющее многообразие для пространства L, а L — определяющее многообразие для пространства C.

Теорема 4.3. *Если E есть BK-пространство, и P всюду плотно в E, а BK-пространства E_0, E_1 являются определяющими многообразиями для пространства E, то $[E_0,\ (E,\ T)] = [E_1,\ (E,\ T)]$.*

Доказательство. Для того, чтобы $\{\lambda_k\} \in [E_0,\ (E,\ T)]$ (или $[E_1,\ (E,\ T)]$), необходимо и достаточно, чтобы $\sup\limits_n \|T_n f^\circ\|_{E^*} < \infty$ при каждом $f^\circ \in E_0$ (соответственно $f^\circ \in E_1$) (см. [12], теорема 13), где $T_n f^\circ = \langle \sigma_n[f^\circ(x)],\ K(x-t) \rangle$. В силу теоремы Банаха—Штейнгауза отсюда получаем, что необходимое и достаточное условие для того, чтобы $\{\lambda_k\} \in [E_0,\ (E,\ T)]$ (или $\{\lambda_k\} \in [E_1,\ (E,\ T)]$) есть $\|T_n\|_{(E_0 \to E^*)} = O(1)$ (соответственно $\|T_n\|_{(E_1 \to E^*)} = O(1)$). Поскольку эти последовательности одновременно ограничены (см. [16], стр. 47, теорема 2.8.6), то утверждение доказано.

Следствие 4.2. *Если* $E=L_{\Phi}$, $L_p(1\leqslant p<\infty)$ *или* C, *то*

$$[M,\ (E,\ T)]=[C,\ (E,\ T)].$$

Доказательство. Если $E\subset L$, то $L^*\subset E^*$, а $L^*=M$. Пространства C и M являются определяющими многообразиями для пространства L, следовательно, и для всех пространств $E\subset L$, поскольку $C\subset M=L^*\subset E^*$. Теперь в силу всюду плотности P в L_{Φ}, $L_p(1\leqslant p<\infty)$ и C, из теоремы 4.3 следует, что $[M,\ (E,\ T)]=[C,\ (E,\ T)]$ для названных пространств.

В дальнейшем применяем обозначение $Uf^\circ=(\lambda_k a_k,\ \lambda_k b_k)$, где $f^\circ=(a_k,\ b_k)$.

Теорема 4.4. *Если* C — *инвариантное относительно сдвига BK-пространство, и* P *всюду плотно в* E, *то для того, чтобы* $\{\lambda_k\}\in[dV,\ (E,\ T)]=[L,\ (E,\ T)]$, *необходимо и достаточно выполнение условия* $K^\circ\in(E,\ T)$.

Доказательство. Поскольку $dV\supset L$, то

$$[dV,\ (E,\ T)]\subset[L,\ (E,\ T)].$$

Обратно, если $f^\circ\in L$, то $Uf^\circ\in(E,\ T)$ тогда и только тогда, когда (см. [12], стр. 121, теорема 13)

$$\sup_n\|T_nf^\circ\|_{E^*}=\sup_n\|\sigma_n(Uf^\circ)\|_{E^*}<\infty.$$

По принципу равномерной ограниченности (см. [16], стр. 38, теорема 2.5.5) $\sup\limits_n\|T_n\|_{(dV\to E^*)}=O(1)$. Итак, $\sup\limits_n\|T_nf^\circ\|_{E^*}<\infty$ для каждого $f^\circ\in dV$, т. е., если $\{\lambda_k\}\in[L,\ (E,\ T)]$, то $\{\lambda_k\}\in[dV,\ (E,\ T)]$.

Необходимость. Пусть $\{\lambda_k\}\in[dV,\ (E,\ T)]$. Поскольку $\{a_k\}\in(C^\alpha,\ C^\alpha)$ при $a_k=1$ и $\alpha>0$, то $\sum\cos kx\in dV$ по следствию 2.1. Следовательно, $\sum\lambda_k\cos kx\in(E,\ T)$.

Достаточность. Если $K^\circ\in(E,\ T)$, то $\|\sigma_n(K^\circ)\|_{E^*}=O(1)$ и

$$\sup_{\|f^\circ\|_L\leqslant1}\|T_nf^\circ\|_{E^*}=$$

$$=\sup_{\|f^\circ\|_L\leqslant1}\sup_{\|h^\circ\|_E\leqslant1}|<<\sigma_n(K_t^\circ),\ f^\circ>,\ h^\circ>|=$$

$$=\sup_{\|h^\circ\|_E<1}\sup_{\|f^\circ\|_L<1}|<<\sigma_n(K_t^\circ),\ h^\circ>,\ f^\circ>|=$$

$$=\frac{1}{\pi}\sup_{\|h^\circ\|_E<1}\|<\sigma_n[K_t^\circ],\ h^\circ>\|_C=\frac{1}{\pi}\|\sigma_n(K^\circ)\|_{E^*}=O(1).$$

Итак, $\sup\limits_n\|T_nf^\circ\|_{E^*}=O(1)$ при каждом $f^\circ\in L$. Поскольку P всюду плотно в E, то $Uf^\circ\in(E,\ T)$ (см. [12], стр. 112, теорема 13).

Следствие 4.3. *Если* $E=L_{\Phi}$, $L_p(1\leqslant p<\infty)$ *или* C, *то*

$$[dV,\ (E,\ T)]=[L,\ (E,\ T)].$$

Доказательство. Так как P всюду плотно в L_{Φ}, L_p $(1\leqslant p<\infty)$ и C, то по теореме 4.4 имеет место равенство.

Теорема 4.5. *Для любых E и E_1 имеет место*

$$(E,\ E_1) \subset [(E_1,\ T),\ (E,\ T)].$$

Доказательство. Пусть $f^\circ \in E$ и $g^\circ \in (E_1,\ T)$. Тогда $Uf^\circ \in E_1$. Как известно, $g^\circ \in (E_1,\ T)$ тогда и только тогда, когда $< g^\circ,\ h^\circ >$ T-суммируем при каждом $h^\circ \in E_1$. Поскольку $< Ug^\circ,\ f^\circ > = < g,\ Uf^\circ >$ и $Uf^\circ \in E_1$ при каждом $f^\circ \in E$, то $< g^\circ,\ Uf^\circ >$ T-суммируем. Следовательно, $< Ug^\circ,\ f^\circ >$ является T-суммируемым при каждом $f^\circ \in E$, т. е. $Ug^\circ \in (E,\ T)$.

Теорема 4.6. *Если E — BK-пространство и $E = E_{TN}$, то для каждого метода $T_1 \supset T$ имеет место $(E,\ T) = (E,\ T_1)$.*

Доказательство. Поскольку $T_1 \supset T$, то из определения 1.2 сразу вытекает, что $(E,\ T) \subset (E,\ T_1)$. Остается доказать; что $(E, T) \supset (E,\ T_1)$. Так как $E = E_{TN}$, $T_1 \supset T$, $f^\circ \in E$ и $g^\circ \in (E, T_1)$, то последовательность $< \sigma_n^1 (f^\circ),\ g^\circ >$ сходится, причем ее T_1-сумма является непрерывным линейным функционалом $\varphi(f^\circ)$ на пространстве E_{TN}. Докажем, что общий вид непрерывного линейного функционала в E_{TN} есть

$$\varphi(f^\circ) = \lim < \sigma_n(f^\circ),\ h^\circ >, \tag{4. 1}$$

где $f^\circ \in E$ и $h^\circ \in (E,\ T)$. Действительно, если $\varphi \in (E_{TN})^*$, то в силу того, что $f^\circ \in E_{TN}$ тогда и только тогда, когда

$$\lim ||f^\circ - \sigma_n(f^\circ)||_E = 0,$$

мы имеем

$$\varphi(f^\circ) = \lim \varphi[\sigma_n(f^\circ)] = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \tau_{nk}[a_k \varphi(\cos kx) + b_k \varphi(\sin kx)].$$

А это и значит, что (4. 1) доказана.

Ввиду (4. 1)

$$\lim < \sigma_n(f^\circ),\ h^\circ > = \lim < \sigma_n^1(f^\circ),\ g^\circ >,$$

т. е. $h^\circ = g^\circ \in (E,\ T)$, откуда $(E,\ T_1) \subset (E,\ T)$.

Из теоремы 4.6 можно сделать следующий вывод.

Следствие 4.5. *Если E и E_1 — BK-пространства, то*

$$(E,\ E_{1T_1N}) \subset [E_1,\ T),\ (E,\ T)]$$

для каждого $T \supset T_1$.

Полученные в параграфе 4 результаты о мультипликаторах при методе Чезаро известны (см. [20—24]).

§ 5. Множители суммируемости и мультипликаторы

В этом параграфе докажем некоторые теоремы, характеризующие связи между классами множителей суммируемости и мультипликаторов. В доказательствах пользуются теоремами о связи между множителями суммируемости и дополнительными пространствами.

Теорема 5.1. *Если* $\{\lambda_k\} \in (T, T_1)$, *то* $\{\lambda_k\}$ *является мультипликатором классов* $[(E, T), (E, T_1)]$ *и* $\{E, [(E, T), T_1]\}$ *для каждого* E.

Доказательство. Если $f^\circ \in (E, T)$, то $< \sigma_n(f^\circ), g^\circ >$ сходится при каждом $g^\circ \in E$. Если теперь $\{\lambda_k\} \in (T, T_1)$, то (по примечанию 2.1) $< \sigma_n^1(Uf^\circ), g^\circ > = < f^\circ, \sigma_n^1(Ug^\circ) >$ сходится при каждом $f^\circ \in (E, T)$ и $g^\circ \in E$. Поскольку $< \sigma_n^1(Uf^\circ), g^\circ >$ сходится для каждого $g^\circ \in E$, то $Uf^\circ \in (E, T)$, т. е.

$$\{\lambda_k\} \in [(E, T), (E, T_1)].$$

Так как $< f^\circ, \sigma_n^1(Ug^\circ) >$ сходится при каждом $f^\circ \in (E, T)$, то то $Ug^\circ \in [(E, T), T_1]$, т. е. $\{\lambda_k\} \in \{E, [(E, T), T_1]\}$.

Следствие 5.1. *Если* $\{\lambda_k\} \in (T, T_1)$, *где* T *удовлетворяет условию* (К), *то* $\{\lambda_k\}$ *есть мультипликатор классов:* $[dV, (C, T_1)]$, (L_p, L_p) $(1 < p < \infty)$, $[M, (L, T_1)]$, $[L, (M, T_1)]$, $[C, (dV, T_1)]$, $[L_\psi, (L_\Phi, T_1)]$, $[L_\Phi, (L_\psi, T_1)]$.

Это непосредственное следствие из теоремы 5.1 и лемм 2.2, 2.3, 2.6 и 2.9. В силу этих лемм имеем, если $\{\lambda_k\} \in (T, T_1)$, где T удовлетворяет условию (К), то $\{\lambda_k\}$ есть мультипликатор классов (dV, dV), (L_p, L_p) $(1 \leqslant p < \infty)$, (M, M), (L_Φ, L_Φ),

Примечание 5.1. Если $E_0 \subset E_1$ и $E_2 \subset E$, то из $\{\lambda_k\} \in (E_1, E_2)$ следует что $\{\lambda_k\} \in (E_0, E)$. Поэтому в теоремах § 5 опускаются те результаты, для которых включения пространств хорошо известны.

Теорема 5.2. *Если* $\{\lambda_k\} \in (T, T_1)$, *где* T *удовлетворяет условию* (К), *то* $\{\lambda_k\}$ *есть мультипликатор еще следующих классов:* (C, C), (C_N, C_N), (V_1, V_1), (A_0, A_0), (D, dV), (L, L_N).

Доказательство. Из следствия 3.1 вытекает, что $K^\circ \in dV$ и по следствию 4.1 имеем $\{\lambda_k\} \in (C, C)$. Условие $K^\circ \in dV$ является достаточным для того, чтобы $\{\lambda_k\}$ была мультипликатором классов (D, dV), (V_1, V_1), (A_0, A_0) (см. [8], теоремы 17, 2, 3), (C_N, C_N) (см. [15], теорема 4) и (L, L_N) (см. [20], стр. 356).

Теорема 5.3. *Если* $\{k\lambda_k\} \in (T, T_1)$, *то* $\{\lambda_k\}$ *есть мультипликатор классов* $(\tilde{R}, C)$, (R, C), (V_1, L), (D, L), $(L_p, C_{T_1N}) = [L_p, (dV, T_1)]$, *а если, кроме того,* T *удовлетворяет условию* (К), *то и класса* (dV, V).

Доказательство. Согласно следствию 3.2 имеем $S^\circ = \sum \lambda_k \sin kx \in L_p$ и $K^\circ \in L_q$ $(1 \leqslant p < \infty)$. Если $S^\circ \in L_p \subset L$, то $\{\lambda_k\}$ есть мультипликатор класса $(\tilde{R}, C)$ (см. [39]). Так как $K^\circ \in L$, то $\{\lambda_k\}$ есть и мультипликатор классов (V_1, L), (D, L) (см. [8], теоремы 15 и 17), (R, C) (см. [39]). Поскольку $K^\circ \in L_q$ $(1 < q < \infty)$, то, по следствию 4.1, $\{\lambda_k\} \in (L_q, C_{T_1N})$, а по теореме 4.2 $(L_q, C_{T_1N}) = [L_q, (dV, T_1)]$. По следствию 3.3, имеем $S^\circ \in V$, а это достаточное условие для того, чтобы $\{\lambda_k\} \in (dV, V)$ (см. [9], теорема 3).

Теорема 5.4. *Если* $\{\lambda_k\} \in (T_O, T_1)$, *где* T *удовлетворяет условию* (K), *то* $\{\lambda_k\}$ *есть мультипликатор классов* (D, L) (V_1, L), (R, C).

Доказательство. По следствию 3.4 будет $K^\circ \in L$, а это и является достаточным условием для того, чтобы $\{\lambda_k\}$ была мультипликатором классов (D, L), (V_1, L) и (R, C), как выяснилось при доказательстве теоремы 5. 3.

Теорема 5.5. *Если* $\{k\lambda_k\} \in (T_O, T_1)$, *где* T *удовлетворяет условию* (K), *то* $\{\lambda_k\}$ *есть мультипликатор класса* (dV, A).

Доказательство. Согласно следствию 3.5 будет $S^\circ \in A$. Условие $S^\circ \in A$ достаточно для того, чтобы $\{\lambda_k\}$ была мультипликатором класса (dV, A) (см. [9], теорема 3).

Теорема 5.6. *Если* $\{\lambda_k\} \in (|T|, T_1)$, *где* T *абсолютно суммирует все* $f^\circ \in V$, *то* $\{\lambda_k\} \in [V, (dV, T_1)]$.

Доказательство. Согласно теореме 3.5 имеем $K^\circ \in$ $\in (V, T_1)$. По теореме 4.1 это условие достаточно для того, чтобы $\{\lambda_k\} \in [V, (dV, T_1)]$.

Как уже отмечалось, таким методом T можем взять, например, C^α $(\alpha > 0)$ или (WN, p_k), удовлетворяющий условиям (3. 1).

Доказанные теоремы 5.1—5.6 дают возможность при помощи теоремы § 4 получать еще целый ряд других достаточных условий для мультипликаторов.

Литература

1. Бари Н. К., Тригонометрические ряды. Москва, 1961.
2. Барон С., Новые доказательства основных теорем о множителях суммируемости. Изв. АН Эст. ССР, сер. техн. и физ.-матем. наук 1960, **9**, 47—68.
3. Зигмунд А., Тригонометрические ряды, т. I. Москва, 1965.
4. Кангро Г., О множителях суммируемости. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1955, **37**, 191—232.
5. Кангро Г., Об обобщении одной теоремы Мура. Докл. АН СССР, 1958, **121**, 967—969.
6. Кангро Г., Вихманн Ф., Об абстрактных множителях суммируемости для метода взвешенных средних Рисса. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, **102**, 209—225.
7. Никольский С. М., О линейных методах суммирования рядов Фурье. Изв. АН СССР, сер. матем., 1948, **12**, 259—278.
8. Скворцова М. Г., К теории множителей, преобразующих ряды Фурье. Уч. зап. Кабардино-Балкарск. ун-та, 1959, **3**, 307—326.
9. Скворцова М. Г., О множителях преобразования рядов Фурье некоторых классов функций. Уч. зап. Кабардино-Балкарск. ун-та, 1961, **13**, 147—150.
10. Теляковский С. А., Некоторые оценки для тригонометрических рядов с квазивыпуклыми коэффициентами. Матем. сб., 1964, **63**, 426—444.
11. Тыннов М., О связи между множителями суммируемости, коэффициентами Фурье и мультипликаторами. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1964, **150**, 154—164.
12. Тыннов М., T-дополнительные пространства коэффициентов Фурье. Настоящий сборник, стр. 65—81.

13. Ульянов П. Л., Применение A-интегрирования к одному классу тригонометрических рядов. Матем. сб., 1954, **35**, 469—490.
14. Харди Г. Х., Рогозинский В. В., Ряды Фурье. Москва, 1962.
15. Харшиладзе Ф. И., Множители равномерной сходимости. Тр. Тбилисск. ун-та, 1960, **27**, 195—208.
16. Хилле Э., Филлипс Р., Функциональный анализ и полугруппы. Москва, 1962.
17. Bosaquet, L. S., Note on the absolute summability (C) of a Tourier series. J. London Math. Soc., 1936, **11**, 11—15.
18. Bosanquet, L. S., Note on convergence and summability factors (III). Proc. London Math. Soc., 1949, **50**, 482—496.
19. Cesari, L., Sulle condizioni sufficienti per la successione di Fourier. Ann. Scuola norm. super. Pisa. Sci fis. e mat., 1934, **3**, 105—134.
20. Goes, G., BK-Räume und Matrixtransformationen für Fourierkoeffizienten. Math. Z., 1959, **70**, 345—371.
21. Goes, G., Komplementäre Fourierkoeffizientenräume und Multiplikatoren. Math. Ann., 1959, **137**, 371—384.
22. Goes, G., Charakterisierung von Fourierkoeffizienten mit einem Summierbarkeitsfaktorentheorem und Multiplikatoren. Studia Math. 1960, **19**, 133—148.
23. Goes, G., Identische Multiplikatorenklassen und C_k-Basen in C_k-komplетären Fourierkoeffizientenräumen. Math. Nachr., 1960, **21**, 150—159.
24. Goes, G., Complementary Species of Fourier Coefficients, Convolutions, and Generalized Transformations and Operators between BK-spaces. J. Math. und Mech., 1961, **10**, 135—157.
25. Guha, U., Convergence factors for Riesz summability. J. London Math. Soc., 1956, **31**, 311—319.
26. Jurkat, W., Über Konvergenzfaktoren bei Rieszchen Mitteln. Math. Z., 1951, **54**, 262—271.
27. Jurkat, W., Peyerimhoff, A., Summierbarkeitsfaktoren. Math. Z., 1953, **58**, 186—203.
28. Kolmogoroff, A., Sur l'ordre de grandeur des coefficients de la série de Fourier-Lebesque. Bull. Acad. polon. sci Cl. III, 1923, 83—86.
29. Moore, C. N., Summable Series and Convergence Factors. New York, 1938.
30. Moore, C. N., On criteria for Fourier constants of L-integrabl functions. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1933, **19**, 846—848.
31. Moore, C. N., On the use of Cesàro-means in determining criteria for Fourier constants. Bull. Amer. Math. Soc. 1933, **39**, 907—913.
32. Orlicz, W., Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen I. Studia Math., 1929, **1**, 1—39.
33. Pati, T., On the absolute Nörlund summability of a Fourier series. J. London Math. Soc., 1959, **34**, 153—160.
34. Pati, T., Addendum: On the absolute Nörlund summability of a Fourier series. J. London Math. Soc., 1962, **37**, 256.
35. Peyerimhoff, A., Konvergenz- und Summierbarkeitsfaktoren. Math. Z., 1951, **55**, 23—54.
36. Peyerimhoff, A., Über Summierbarkeitsfaktoren und verwandte Fragen bei Cesàroverfahren I. Publs Inst. math. Acad. serbe sci., 1955, **8**, 139—156.
37. Schur, I., Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen. J. reine und angew. Math., 1921, **151**, 79—111.
38. Varshney, O. P., On the absolute Nörlund summability of a Fourier series. Math. Z., 1964, **83**, 18—24.
39. Verblunsky, S., On some classes of Fourier series. Proc. London Math. Soc., 1932, **33**, 287—327.

Поступило
15 III 1965

SUMMEERUVUSTEGURID, FOURIER' KORDAJAD JA MULTIPLIKAATORID

M. Tõnnov

Resümee

Käesolevas artiklis uuritakse põhiliselt kahte probleemi:

1) missuguseid tingimusi peavad rahuldama trigonomeetrilise rea kordajad, et see rida osutuks etteantud omadustega funktsiooni Fourier' reaks;

2) missugune peab olema arvjada $\{\lambda_k\}$, et ta oleks etteantud klassi multiplikaator.

Mõlema probleemi uurimiseks kasutatakse summeeruvustegurite ja täiendruumide mõisteid. Sama probleemi on varemalt uurinud Goes [22] Cesàro menetluse korral (vt. ka [11]). Käesolevas töös vaadeldakse üldiste Toeplitzi menetluste T, T_1 juhtu, kus T on menetlus, mis summeerib ühtlaselt pidevate funktsioonide Fourier' ridu. Tulemused on sellist laadi: kui arvud a_k on summeeruvustegurid tüüpi (T, T_1), siis $K^\circ = \sum a_k \cos kx$ on Fourier-Stieltjes-rida ja jada $\{a_k\}$ on järgmiste klasside (dV, dV), (L_p, L_p) $(1 \leqslant p < \infty)$, (M, M), (L_Φ, L_Φ), (L_ψ, L_ψ), (C, C), (C_N, C_N), (V_1, V_1), (A_0, A_0), (D, dV), (L, L_N) multiplikaator; kui arvud a_k on summeeruvustegurid tüüpi (T_O, T_1), siis K° on integreeruva funktsiooni Fourier' rida ja $\{a_k\}$ on multiplikaator klasside (V_1, L), (R, C), (D, L) jaoks.

FOURIERKOEFFIZIENTEN, SUMMIERBARKEITSFAKTOREN UND MULTIPLIKATOREN

M. Tõnnov

Zusammenfassung

In dem vorliegenden Artikel wird die in [11, 22] begonnene Charakterisierung von Fourierkoeffizienten und Multiplikatoren mit Summierbarkeitsfaktoren fortgesetzt, dazu gebraucht man Summierbarkeitsfaktoren für die allgemeinen Toeplitzen Verfahren T und T_1, wobei für das Verfahren T die Bedingung (K) gilt, und T-komplementäre Fourierkoeffizientenräume (s. [12]). Die Resultate sind derartig: wenn die Zahlen a_k Summierbarkeitsfaktoren des Typus (T, T_1) sind, dann ist $K^\circ = \sum a_k \cos kx$ eine Fourier-Stieltjes-Reihe und die Folge $\{a_k\}$ ist Multiplikator von Klassen (dV, dV), (L_p, L_p) $(1 \leqslant p < \infty)$, (M, M), (L_Φ, L_Φ), (L_ψ, L_ψ), (C, C), (C_N, C_N), (V_1, V_1), (A_0, A_0), (D, dV), (L, L_N). Wenn die Zahlen a_k Summierbarkeitsfaktoren des Typus (T_O, T_1) sind, dann ist K° eine Fourier-Reihe und die Folge $\{a_k\}$ ist Multiplikator von Klassen (V_1, L), (R, C), (D, L).

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ОБОБЩЕННЫХ ПОЛИНОМОВ АППЕЛЛЯ КЛАССА $A^{(k)}$ ПОСРЕДСТВОМ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Г. Согомонова

Ленинградский механический институт

1. В работе [2] автором были рассмотрены некоторые представления последовательности полиномов класса $A^{(2)}$ посредством интегралов Стилтьеса. В настоящей заметке получены аналогичные представления для последовательности обобщенных полиномов Аппелля класса $A^{(k)}$. Напомним, что согласно [1], последовательность полиномов $\{P_n(x)\}_0^\infty$ степени точно n называется *последовательностью обобщенных полиномов Аппелля класса* $A^{(k)}$, если при всех $n \geqslant k$ справедливо соотношение $P_n^{(k)}(x) = P_{n-k}(x)$. Это условие равносильно следующему: существуют (формально) степенные ряды [1]

$$A_j(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(j)} t^n, \tag{1}$$

такие, что (также формально)

$$\sum_{j=0}^{k-1} A_j(t) \exp \varepsilon_j tx = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n,$$

где

$$\varepsilon_j = \exp\left(j \cdot \frac{2\pi i}{k}\right).$$

Функции $A_j(t)$ называются *производящими функциями* последовательности полиномов класса $A^{(k)}$.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что полиномы последовательности $\{P_n(x)\}_0^\infty$ нормированы условием:

$$P_n^{(n)}(x) = 1, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

2. Пусть $\beta^{(j)}(t)$ — функции ограниченной вариации на $(0, \infty)$ и пусть $\{\delta_n^{(j)}(t)\}_{n=0}^\infty$ такие k последовательностей функций, что интегралы

$$I_{n,r}^{(j)} = \int_0^\infty \delta_n^{(j)}(t)\, t^r d\beta^{(j)}(t) \tag{3}$$

[1] Всюду в статье индекс j изменяется от 0 до $k-1$.

существуют и конечны, причем $I_{0,0}^{(j)} = \delta_{0j}$. Рассмотрим функции

$$K_n^{(j)}(t, x) = \sum_{l=0}^{n} \delta_l^{(j)}(t) \frac{(t+\varepsilon_j x)^{n-l}}{(n-l)!}. \tag{4}$$

Справедлива

Теорема 1. *Последовательность полиномов* $\{P_n(x)\}_0^\infty$, *где*

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{k-1} \int_0^\infty K_n^{(j)}(t, x)\, d\beta^{(j)}(t), \quad (n = k, k+1, \ldots), \tag{5}$$

принадлежит классу $A^{(k)}$.

Доказательство. Так как $\varepsilon_j^k = 1$, то

$$\frac{\partial^k K_n^{(j)}(t, x)}{\partial x^k} = \sum_{l=0}^{n-k} \delta_l^{(j)} \varepsilon_j^k \frac{(t+\varepsilon_j x)^{n-k-l}}{(n-k-l)!} = K_{n-k}^{(j)}(t, x).$$

Далее,

$$P_n^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{k-1} \int_0^\infty K_{n-k}^{(j)}(t, x)\, d\beta^{(j)}(t) = P_{n-k}(x),$$

откуда видно, что последовательность $\{P_n(x)\}_0^\infty$ принадлежит классу $A^{(k)}$, причем из (3) следует, что выполнено и условие (2).

Следствие 1. *Если* $\delta_n^{(j)}(t) = \delta_{n0}$, *то* (5) *принимает вид*

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{k-1} \int_0^\infty \frac{(t+\varepsilon_j x)^n}{n!}\, d\beta^{(j)}(t).$$

Отсюда, при $k = 2$ следует результат Ожегова [1]; при $k = 1$ мы получаем интегральное представление полиномов Аппелля, данное Шеффером [3].

Следствие 2. *Коэффициенты производящих функций* (1) *последовательности полиномов класса* $A^{(k)}$, *имеющих представление* (5), *вычисляются по формулам:*

$$a_n^{(j)} = \sum_{l=0}^{n} \frac{J_{n-l,\,l}}{l!} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{6}$$

Доказательство. Из (4) и (5) следует:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \{ \sum_{j=0}^{k-1} \int_0^\infty K_n^{(j)}(u, x)\, d\beta^{(j)}(u) \} t^n =$$

$$= \sum_{j=0}^{k-1} \{ \sum_{n=0}^{\infty} [\int_0^\infty \sum_{l=0}^{n} \delta_l^{(j)}(t) \frac{(u+\varepsilon_j x)^{n-l}}{(n-l)!}\, d\beta^{(j)}(u)] t^n \}.$$

Произведя над j-ым слагаемым последней суммы формальные преобразования, последовательно получаем:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big[\int_0^{\infty}\sum_{l=0}^{n}\delta_l^{(j)}(t)\,\frac{(u+\varepsilon_j x)^{n-l}}{(n-l)!}\,d\beta^{(j)}(u)\Big]\,t^n=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\Big[\sum_{l=0}^{n}\frac{1}{(n-l)!}\sum_{m=0}^{n-l}C^m{}_{n-l}(\varepsilon_j x)^m I_{l,\,n-l-m}{}^{(j)}\Big]\,t^n=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{(t\varepsilon_j x)^m}{m!}\,t^{n-m}\sum_{p=0}^{n-m}\frac{I_{n-m-p,\,p}}{p!}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{(t\varepsilon_j x)^m}{m!}\,a^{(j)}{}_{n-m}t^{n-m}.$$

Заметим далее, что:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{(\varepsilon_j tx)^m}{m!}\,a^{(j)}{}_{n-m}t^{n-m}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\varepsilon_j tx)^m}{m!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}a_n{}^{(j)}t^n=A_j(t)\exp\varepsilon_j tx.$$

Следовательно, числа $a_n{}^{(j)}$ действительно являются коэффициентами производящих функций $A_j(t)$ последовательности (5).

Замечание 1. Из (6) при $k=2$ получаем соответствующий результат работы [2].

Замечание 2. Если, как и прежде, положить $\delta_n{}^{(j)}(t)=\delta_{n0}$, то $I^{(j)}{}_{n-p,\,p}=\beta_n{}^{(j)}\delta_{pn}$, где $\{\beta_n{}^{(j)}\}_{n=0}^{\infty}$ — моментная последовательность функций $\beta^{(j)}(t)$. Тогда из (6) следует, что $a_n{}^{(j)}=\dfrac{\beta_n{}^{(j)}}{n!}$. Если положить здесь $k=2$, то получим результат Ожегова (см. [1]).

Введем обозначения

$${}_{r+1}F_r\{D_j,\ u\}={}_{r+1}F_r\left\{-n\,\begin{matrix}c_{1j},\ c_{2j},\ \dots\ c_{rj}\\ b_{1j},\ b_{2j},\ \dots\ b_{rj}\end{matrix};\ u\right\},$$

$${}_rF_r\{D_j,\ u\}={}_rF_r\left\{\begin{matrix}c_{1j},\ c_{2j},\ \dots\ c_{rj}\\ b_{1j},\ b_{2j},\ \dots\ b_{rj}\end{matrix};\ u\right\},$$

$$A^{(p)}{}_{r,\,j}=\frac{(c_{1j},\ p)(c_{2j},\ p)\dots(c_{rj},\ p)}{(b_{1j},\ p)(b_{2j},\ p)\dots(b_{rj},\ p)},$$

где $F_r\{D_j,\ u\}$ — обобщенная гипергеометрическая функция.

Теорема 2. *Для того, чтобы последовательность полиномов $\{P_n(x)\}_0^{\infty}$ принадлежала классу $A^{(k)}$, необходимо и достаточно, чтобы имело место следующее интегральное представление:*

$$P_n(x)=\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(\varepsilon_j x)^n}{n!}\int_0^{\infty}{}_{r+1}F_r\left\{D_j,\ -\frac{t}{\varepsilon_j x}\right\}d\beta^{(j)}(t),\qquad(7)$$

где $\beta^{(j)}(t)$ — функции ограниченной вариации на $(0,\ \infty)$, все моменты которых $\beta_n{}^{(j)}=\int_0^{\infty}t^n d\beta^{(j)}(t)$ существуют и конечны, причем $\beta_0{}^{(j)}=\delta_{0j}$.

Доказательство. Достаточность. Имеем:

$$\frac{(\varepsilon_j x)^n}{n!}\,{}_{r+1}F_r\left\{D_j;\ -\frac{t}{\varepsilon_j x}\right\} = \sum_{p=0}^{n} A_{r,j}^{(p)}\cdot\frac{(\varepsilon_j x)^{n-p}t^p}{(n-p)!\,p!} =$$

$$= \sum_{p=0}^{n} A_{r,j}^{(p)} \sum_{l=0}^{n-p} \frac{(t+\varepsilon_j x)^{n-p-l}}{(n-p-l)!}\cdot\frac{(-t)^l t^p}{l!\,p!} =$$

$$= \sum_{l=0}^{n} \frac{(t+\varepsilon_j x)^{n-l}}{(n-l)!}(-t)^l \sum_{p=0}^{l}(-1)^p A_{r,j}^{(p)}\frac{1}{p!\,(l-p)!} =$$

$$= \sum_{l=0}^{n} \delta_l^{(j)}(t)\frac{(t+\varepsilon_j x)^{n-l}}{(n-l)!} = K_n^{(j)}(t,\ x),$$

где

$$\delta_n^{(j)}(t) = (-i)^l \sum_{p=0}^{l}(-1)^p A_{r,j}^{(p)}\frac{1}{p!\,(l-p)!}. \tag{8}$$

Мы получили, что последовательность (7) имеет вид (5). Следовательно, на основании теоремы 1, можно заключить, что эта последовательность принадлежит классу $A^{(k)}$.

Необходимость. Предстоит показать, что если полиномы последовательности $\{P_n(x)\}_0^\infty$ принадлежат классу $A^{(k)}$, то существуют функции $\beta^{(j)}(t)$ ограниченной вариации на $(0,\ \infty)$ такие, что выполнено равенство (7). Пусть $\{\beta_n^{(j)}\}_{n=0}^\infty$ — произвольные k числовых последовательностей. По теореме Боаса [4] существуют (не обязательно единственные) функции ограниченной вариации $\beta^{(j)}(t)$ на $(0,\ \infty)$, моментными последовательностями которых соответственно являются последовательности $\{\beta_n^{(j)}\}_{n=0}^\infty$. По доказанному, последовательность полиномов $\{Q_n(x)\}_0^\infty$, где

$$Q_n(x) = \sum_{j=0}^{k-1}\frac{(\varepsilon_j x)^n}{n!}\int_0^\infty {}_{r+1}F_r\left\{D_j;\ -\frac{t}{\varepsilon_j x}\right\}d\beta^{(j)}(t), \tag{9}$$

принадлежит классу $A^{(k)}$. Покажем, что $\{Q_n(x)\}_0^\infty \equiv \{P_n(x)\}_0^\infty$ при соответствующем выборе последовательностей $\{\beta_n^{(j)}\}_{n=0}^\infty$.

Действительно, используя (9), получаем:

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x) z_n = \sum_{j=0}^{k-1}\sum_{n=0}^{\infty}\Big[\int_0^\infty \sum_{l=0}^{n}\delta_l^{(j)}(t)\frac{(t+\varepsilon_j x)^{n-l}}{(n-l)!}d\beta^{(j)}(t)\Big] z_n.$$

Из (8) вытекает

$$\delta_l^{(j)}(t) = t^l d_l^{(j)},$$

$$d_l^{(j)} = (-1)^l \sum_{p=0}^{l}(-1)^p A_{r,j}^{(p)}\frac{1}{p!\,(l-p)!}. \tag{10}$$

Подставив (10) в (3), при $l=n-p$, $r=p$ находим

$$I_{n-p,\,p}{}^{(j)}=\int_0^\infty d_{n-p}{}^{(j)}t^n d\beta^{(j)}(t)=d_{n-p}{}^{(j)}\beta_n{}^{(j)}.$$

С другой стороны, по теореме 2:

$$\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{n=0}^{\infty}\Big[\int_0^\infty\sum_{l=0}^{n}\delta_l{}^{(j)}(t)\,\frac{(t+\varepsilon_j x)^{n-l}}{(n-l)!}\,d\beta^{(j)}(t)\Big]z^n=\sum_{j=0}^{k-1}\exp\varepsilon_j zx\sum_{n=0}^{\infty}\bar a_n{}^{(j)}z^n,$$

$$\bar a_n{}^{(j)}=\sum_{p=0}^{n}\frac{I_{n-p,p}^{(j)}}{p!}=\beta_n{}^{(j)}\sum_{p=0}^{n}\frac{d_{n-p}^{(j)}}{p!}. \qquad (11)$$

Отсюда ясно, что для совпадения производящих функций последовательностей $\{Q_n(x)\}_0^\infty$ и $\{P_n(x)\}_0^\infty$, а, следовательно, и самих последовательностей, достаточно взять

$$\beta_n{}^{(j)}=\frac{a_n^{(j)}}{\sum\limits_{p=0}^{n}\frac{d_{n-p}^{(j)}}{p!}},\quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Наконец, замечание о том, что $a_0{}^{(j)}=\delta_{0j}$ завершает доказательство теоремы.

Следствие. *Для производящих функций $A_j(t)$ последовательности* (7) *справедливы интегральные представления:*

$$A_j(t)=\int_0^\infty {}_rF_r(D_j;\ ut)\,d\beta^{(j)}(u).$$

Доказательство. Из (10) и (11) имеем:

$$a_n{}^{(j)}=\beta_n{}^{(j)}\sum_{l=0}^{n}\frac{1}{l!}\sum_{p=0}^{n-l}(-1)^{n-l+p}A_{r,j}{}^{(p)}\frac{1}{p!\,(n-l-p)!}$$

и, после некоторых преобразований, $a_n{}^{(j)}=\beta_n{}^{(j)}A_{r,j}{}^{(n)}\dfrac{1}{n!}$.

Поэтому

$$A_j(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n{}^{(j)}t_n=\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n{}^{(j)}t^n\frac{A_{r,j}^{(n)}}{n!}=$$

$$=\int_0^\infty\sum_{n=0}^{\infty}(ut)^n\frac{A_{r,j}^{(p)}}{n!}\,d\beta^{(j)}(u)=$$

$$=\int_0^\infty {}_rF_r\{D_j;\ ut\}\,d\beta^{(j)}(u),$$

что и требовалось доказать.

Замечание. В частности, если $k=2$, $c_{lj}=b_{lj}$ $(l=\overline{1,\ r})$, то

$$A_q(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\beta_n^{(q)}}{n!}t^n,\ (q=0,\ 1),$$

и мы получаем выражения производящих функций последовательности обобщенных полиномов Аппелля класса $A^{(2)}$, найденные В. Ожеговым в работе [1].

Литература

1. Ожегов В. Б., Интегральное представление последовательности обобщенных полиномов Аппелля класса $A^{(2)}$. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1964. **150**, 182—187.
2. Согомонова Г. А., Об интегральном представлении последовательности обобщенных полиномов Аппелля класса $A^{(2)}$. Сб. «Исследования по некоторым современным проблемам конструктивной теории функций», Ленинград, 1965, стр. 21—23.
3. Sheffer, I. M., Note on Appel polinomials. Bull. Amer. Math. Soc., 1945, **51**, 739—744.
4. Widder, D. V., The Laplace transform. London, 1946.

Поступило
7 IV 1965

APPELLI ÜLDISTATUD KLASSI $A^{(k)}$ POLÜNOOMIDE JADA INTEGRAALNE ESITUS HÜPERGEOMEETRILISTE FUNKTSIOONIDE ABIL

G. Sogomonova

Resümee

Artiklis tuletatakse tarvilikud ja piisavad tingimused selleks, et jada $\{P_n(x)\}$ oleks Appelli üldistatud klassi $A^{(k)}$ polünoomide jada. Samuti leitakse klassi $A^{(k)}$ jadade tekitajate funktsioonide integraalne esitus.

INTEGRAL REPRESENTATION OF APPELL'S CLASS $A^{(k)}$ OF GENERALIZED POLYNOMIAL SEQUENCES

G. Sogomonova

Summary

The article deals with the problem of integral representation of class $A^{(k)}$ of the generalized Appel polynoms with generalized hypergeometrical functions.

A theorem is proved which gives the necessary and sufficient conditions that a sequence of polynoms belongs to the class $A^{(k)}$.

Also the integral representations of the generating function of the class $A^{(k)}$ are obtained.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭНТРОПИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРИ ПОМОЩИ МОМЕНТОВ

Р. Тамместе

Кафедра вычислительной математики

При изучении зависимости в многомерных статистических системах широкое применение нашли корреляционные методы. Хотя корреляционный, а также и факторный анализы базируются на вычислении моментов распределения первого и второго порядка, полученные результаты во многих случаях могут считаться удовлетворительными. Встречается, однако, множество задач, при решении которых корреляционные методы малоэффективны или даже бесполезны, так как нелинейные связи с их помощью, как правило, не устанавливаются. В связи с широким применением ЭВМ, практически при вычислении моментов распределения более высокого порядка трудности не возникают, но, по имеющимся данным, пока нет подходящего алгорифма для пользования им. В данной статье указывается метод, который может быть использован для вычисления коэффициента зависимости случайных величин при помощи моментов до порядка n. Пусть имеются все моменты зависимых случайных величин x и y до порядка n включительно. Будем считать, что все они конечные числа, и обозначим их символами m_{ik}, $i+k \leqslant n$. Задача состоит в нахождении функции этих моментов $I_n(m_{ik})$, которая может служить характеристикой зависимости. Для этого нужно прежде всего определить функцию $H_n(m_{ik})$, которую мы будем называть n-энтропией. При решении этой задачи осуществляем «информационный подход», предполагая, что из всех распределений с данными моментами m_{ik}, $i+k \leqslant n$, реализуется такое совместное распределение случайных величин x, y, энтропия которого максимальна, если такое распределение вообще существует.

Пусть S_n будет множество таких совокупностей моментов (в частности: моментов распределения) $\{m_{ik};\ i+k=0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$, что $m_{00} \neq 0$, которым соответствует неотрицательная функция (в частности: плотность распределения) $p(x, y)$ с моментами m_{ik}, $i+k \leqslant n$, и конечной энтропией

$H[p(x, y)]$ так, чтобы при этом не имелось других неотрицательных функций с теми же моментами и энтропией, превышающей $H[p(x, y)]$.

Если неотрицательная функция $p(x, y)$ интегрируема, энтропия и моменты ее определяются следующим образом:

$$-\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) \ln p(x, y)\, dx\, dy = H[p(x, y)], \tag{1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p(x, y)\, x^i y^k dx\, dy = m_{ik}. \tag{2}$$

Вместе с определением множества S_n на нем определяется функционал $H\{m_{ik};\ i+k \leqslant n\}$, который в дальнейшем будем обозначать $H_n(m_{ik})$. Для нахождения функций $p(x, y)$ и $H_n(m_{ik})$ составляем вариационную задачу

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) \ln p(x, y)\, dx\, dy = \min \tag{3}$$

с условиями (2). Складывая равенства (2), умноженные на неопределенные постоянные H_{ik}, с условием (3) и дифференцируя по $p(x, y)$ подынтегральные выражения, получаем:

$$\ln p(x, y) + 1 + \sum_{i+k\leqslant n} H_{ik} x^i y^k = 0,$$

$$p(x, y) = \exp\bigl(-1 - \sum_{i+k\leqslant n} H_{ik} x^i y^k\bigr). \tag{4}$$

После подстановки

$$P_n(x, y) = 1 + \sum_{i+k\leqslant n} H_{ik} x^i y^k$$

в соотношение (4) оно приобретает более подходящий вид:

$$p(x, y) = \exp[-P_n(x, y)], \tag{5}$$

где $P_n(x, y)$ — полином степени n. Для суммируемости интегралов (1) и (2) следует предположить, что

$$\liminf_{|x|+|y|\to\infty} P_n(x, y) = +\infty. \tag{6}$$

Достаточным условием суммируемости является положительная определенность n-формы $\sum_{i+k=n} H_{ik} x^i y^k$. Исходя из формулы (5), легко проверить, что при условии (6) существуют все моменты m_{ik} функции $p(x, y)$, которые, начиная с порядка $n+1$, являются функциями заданных моментов.

Для определения множителей H_{ik} воспользуемся соотношениями (4) и (2) и совершим следующие преобразования при помощи интегрирования по частям:

$$\sum_{\substack{i+k\leqslant n\\ i\geqslant 1}} iH_{ik}m_{i-1,\,k+l}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y^l\frac{\partial}{\partial x}P_n(x,y)\exp\left[-P_n(x,y)\right]dx\,dy=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} y^l\{\exp\left[-P_n(-\infty,y)\right]-\exp\left[-P_n(\infty,y)\right]\}dy=0,$$

$$(l=0,\ 1,\ldots,\ n,\ldots),$$

$$\sum_{i+k\leqslant n} iH_{ik}m_{i+j,\,k+l}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^{j+1}y^l\frac{\partial}{\partial x}P_n(x,y)\exp\left[-P_n(x,y)\right]dx\,dy=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(j+1)x^jy^l\exp\left[-P_n(x,y)\right]dx\,dy=(j+1)m_{jl},$$

$$(j,\ l=0,\ 1,\ \ldots,\ n,\ \ldots).$$

Аналогично выводятся соответствующие результаты относительно второго индекса. Приведем их вместе с полученными соотношениями:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{\substack{i+k\leqslant n\\ i\geqslant 1}} iH_{ik}m_{i-1,\,k+l}=0,\\ &\sum_{\substack{i+k\leqslant n\\ k\geqslant 1}} kH_{ik}m_{i+j,\,k-1}=0,\ (j,\ l=0,\ 1,\ 2,\ldots).\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i+k\leqslant n} iH_{ik}m_{i+j,\,k+l}=(j+1)m_{jl},\\ &\sum_{i+k\leqslant n} kH_{ik}m_{i+j,\,k+l}=(l+1)m_{jl},\ (j,\ l=0,\ 1,\ 2,\ldots)\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

После дифференцирования соотношений

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-P_n(x,\ y)\right]x^jy^ldx\,dy=m_{jl},\ \ j+l\leqslant n,$$

по аргументам m_{uv}, где $u+v\leqslant n$, имеем:

$$-\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-P_n(x,\ y)\right]\sum_{i+k\leqslant n}\frac{\partial H_{ik}}{\partial m_{uv}}x^{i+j}y^{k+l}dx\,dy=\delta_{ju}\cdot\delta_{lv},$$

$$\sum_{i+k\leqslant n}\frac{\partial H_{ik}}{\partial m_{uv}}m_{i+j,\,k+l}=-\delta_{ju}\cdot\delta_{lv},\tag{9}$$

где δ_{ju} — символ Кронекера. Если учесть, что

$$H_n(m_{ik})=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}P_n(x,\ y)\exp\left[-P_n(x,\ y)\right]dx\,dy=m_{00}+\sum_{i+k\leqslant n}m_{ik}H_{ik},$$

то легко выводится результат: $\dfrac{\partial H_n}{\partial m_{uv}}=H_{uv}$.

Действительно, $\dfrac{\partial H_n}{\partial m_{uv}}=\delta_{0u}\cdot\delta_{v0}+H_{uv}+\sum\limits_{i+k\leqslant n}m_{ik}\dfrac{\partial H_{ik}}{\partial m_{uv}}$, и по формуле (9) имеет место:

$$\sum_{i+k\leqslant n}\frac{\partial H_{ik}}{\partial m_{uv}}m_{ik}=-\delta_{u0}\delta_{v0}.$$

При введении следующих обозначений:

$$\frac{\partial^2 H_n}{\partial m_{ik}\partial m_{uv}}=\frac{\partial H_{ik}}{\partial m_{uv}}=\frac{\partial H_{uv}}{\partial m_{ik}}=H_{ik}{}^{uv}=H_{uv}{}^{ik}$$

формула (9) приобретает более простой вид:

$$\sum_{i+k\leqslant n}H_{ik}{}^{uv}m_{i+j,\,k+l}=-\delta_{ju}\cdot\delta_{lv};\quad (j+l\leqslant n,\ \ u+v\leqslant n). \qquad (10)$$

Соотношения (7), (8) и (10) оказываются дифференциальными уравнениями относительно функции $H_n(m_{ik})$. Уточнение значений неопределенных постоянных в решениях этих уравнений может осуществляться при помощи конкретных примеров.

Обращаем внимание на то, что при выведении дифференциальных уравнений не было фиксировано условие $m_{00}=1$, которое в теории вероятностей считается необходимым. Более того, m_{00} считалось переменным аргументом, по которому допускалось дифференцирование. Такой подход существенно облегчает вывод основных результатов. Вследствие этого, функция $H_n(m_{ik})$ будет определена на весьма общем множестве S_n, элементы которого не все являются совокупностями моментов распределений. В приложениях во всех формулах вместо m_{00} ставится его значение 1.

Решение уравнений (7), (8), (10) определяет, кроме того, функцию $p(x, y)$ при помощи соотношения (4). Если окажется, что условие (6) выполняется, то выбранная совокупность чисел $\{m_{ik};\ i+k\leqslant n\}$ входит в S_n и формулы (7), (8), (10) будут обоснованы. В противном случае вариационная задача (2), (3) не имеет решения, а функция $H_n(m_{ik})$ в качестве решения данных дифференциальных уравнений во многих случаях даже не определит верхнюю грань энтропии.

На то, что в случае $n=2$ в классе распределений с моментами m_{ik}, $i+k\leqslant 2$, всегда существует такое нормальное распределение с заданными моментами, которое реализует максимальное значение энтропии, указал К. Шеннон (см. [1], стр. 297—298). Ниже мы приводим без доказательства общую форму функции H_2, которая может быть получена решением указанных дифференциальных уравнений:

$$H_2(m_{ik})=m_{00}[\ln(2\pi e)-2\ln m_{00}+\frac{1}{2}\ln V], \qquad (11)$$

где

$$V=\begin{vmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{10}\\ m_{01} & m_{02} & m_{11}\\ m_{10} & m_{11} & m_{20}\end{vmatrix}.$$

Следует отметить, что в случае $m_{00}=1$ матрица, соответствующая определителю V, является матрицей моментов величин 1, x и y, определенной положительно, если x, y линейно независимы. Если же вся «вероятностная масса» плоскости xy сосредоточена на некоторой прямой, получается равенство $V=0$. Величина энтропии таких распределений отрицательно бесконечна и поэтому эти случаи мы опускаем. Так как неравенство $m_{00}>0$ следует из определения множества S_n, то функция $\frac{1}{m_{00}}p(x, y)$ является плотностью распределения с конечной энтропией и моментами $\frac{m_{ik}}{m_{00}}$ $(i, k=0, 1, \ldots)$. Из выполнимости условия $V>0$ при совокупности моментов $\frac{m_{ik}}{m_{00}}$, $i, k=0, 1, \ldots$ непосредственно следует, что то же самое условие удовлетворяется для всех совокупностей

$$\{m_{ik}\}\in S_2.$$

Из формулы (11) следует, что функция H_2 непрерывна на множестве S_2 вместе со всеми своими производными, которые непосредственно могут быть вычислены. В частности,

$$\left.\begin{aligned} H_{20}&=\frac{m_{00}}{2V}\begin{vmatrix} m_{00} & m_{01}\\ m_{01} & m_{02}\end{vmatrix},\\ H_{02}&=\frac{m_{00}}{2V}\begin{vmatrix} m_{00} & m_{10}\\ m_{10} & m_{20}\end{vmatrix},\\ H_{11}&=-\frac{m_{00}}{V}\begin{vmatrix} m_{00} & m_{10}\\ m_{01} & m_{11}\end{vmatrix}.\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

В данном случае условие (6) эквивалентно требованию положительной определенности квадратичной формы

$$H_{20}x^2+H_{11}xy+H_{02}y^2,$$

которое обеспечивается необходимыми и достаточными условиями

$$\begin{gathered} H_{20}>0,\\ 4H_{20}H_{02}-H_{11}{}^2>0,\end{gathered}\tag{13}$$

во всем множестве S_2.

Соотношения (4), (11) и (13) указывают на открытость множества S^2 в том смысле, что его каждому элементу $\{m^\circ_{ik}, i, k= =0, 1, \ldots\}$ соответствует такое число $\delta>0$, при котором его δ-окрестность $T\{m^\circ_{ik}\}$, определенная условием:

$$\{m_{ik}\}\in T\{m^\circ_{ik}\},\ \text{если}\ \sum_{i+k\leqslant n}|m_{ik}-m^\circ_{ik}|<\delta,$$

входит в S_2.

Такое положение не является правилом при всех значениях n. Окажется, что при $n\geqslant 3$ многие совокупности моментов двухмерных вероятностных распределений с конечной энтропией не входят в S_n, а верхняя грань энтропии $H_n^*(m_{ik})$ в классе неотрицательных функций с моментами m_{ik}, не совпадает с продолжением функции $H_n(m_{ik})$ при помощи дифференциальных уравнений. Для утверждения вышесказанного доказывается следующая

Теорема. *Пусть* $\{m_{ik};\ i,\ k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots;\ m_{00}\neq 0\}$ *будет совокупностью моментов некоторой неотрицательной функции* $q(x,\ y)$. *Тогда верхние грани энтропии в классе неотрицательных функций с моментами* m_{ik}, $i+k\leqslant 3$ *и в классе неотрицательных функций с моментами* m_{ik}, $i+k\leqslant 2$ *равны:* $H_3^*(m_{ik})=H_2^*(m_{ik})$.

Доказательство.[1] Неравенство

$$H_s^*(m_{ik})\leqslant H_t^*(m_{ik}),\ \text{если}\ s>t, \tag{14}$$

есть следствие того, что функция $H_s^*(m_{ik})$ является верхней гранью энтропии на подмножестве этого множества неотрицательных функций, на котором определяется верхняя грань энтропии $H_t^*(m_{ik})$. Если имеет место соотношение

$$H_2^*(m_{ik})=-\infty,$$

то утверждение теоремы следует из неравенства (14) и такие случаи не будут объектами дальнейшего рассмотрения.

Выше было отмечено, что совокупность моментов $\frac{m_{ik}}{m_{00}}$; $i, k=0, 1, 2,\ \ldots$, (плотности распределения $\frac{q(x,\ y)}{m_{00}}$) входит в S_2, если $V\neq 0$. Легко убедиться в том, что величины H_{20}, H_{02} и H_{11}, вычисляемые для обеих совокупностей $\{m_{ik};\ i,\ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\}$ и $\left\{\frac{m_{ik}}{m_{00}};\ i,\ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\right\}$ по формуле (12), соответственно совпадают, и условия (13) и (6) удовлетворяются одновременно. Из предположения конечности величины $H_2^*(m_{ik})$ следует условие $V\neq 0$. Поэтому совокупность $\{m_{ik}\}$ входит в S_2 и имеет место равенство:

$$H_2^*(m_{ik})=H_2(m_{ik}).$$

Пусть $p(x,\ y)$ будет решением вариационной задачи (2), (3), при $n=2$. Обозначая моменты третьего порядка функции $p(x,\ y)$ символами m_{uv}^*, $u+v=3$, будем учитывать, что все величины m_{uv}^* выражаются непрерывными функциями аргументов m_{ik}, $i+k\leqslant 2$, и могут быть вычислены, например, при помощи уравнений (8) или (10). Введем следующие обозначения:

$$m_{ik}-m_{ik}^*=M_{ik};\ \ i+k=3.$$

Пусть $\{a_j;\ j=1,\ 2,\ \ldots\}$ будет такая последовательность поло-

[1] При первом чтении статьи доказательство теоремы может быть опущено.

жительных чисел, что $a_{j+1} > a_j$ при всех $j = 1, 2, \ldots, a_1 \geqslant 31$ и $\lim\limits_{j\to\infty} a_j = \infty$. При каждом значении j составим функцию $F_j(x, y)$ так, чтобы

$$F_j(x, y) = \begin{cases} p_j^r, \text{ если } (x, y) \in K_j^r; \ (p_j^r; \geqslant 0), \\ 0, \text{ если } (x, y) \,\overline{\in}\, \bigcup\limits_{r=1}^{8} K_j^r. \end{cases}$$

где K_j^r обозначают квадраты с вершинами

$$\left(c_j^r + \frac{1}{2},\ d_j^r + \frac{1}{2}\right),\quad \left(c_j^r - \frac{1}{2},\ d_j^r + \frac{1}{2}\right),$$
$$\left(c_j^r - \frac{1}{2},\ d_j^r - \frac{1}{2}\right),\quad \left(c_j^r + \frac{1}{2},\ d_j^r - \frac{1}{2}\right),$$

которые, в свою очередь, определяются равенствами:

$$\begin{aligned} &c_j^1 = c_j^2 = c_j^8 = d_j^2 = d_j^3 = d_j^4 = a_j, \\ &c_j^3 = c_j^7 = d_j^1 = d_j^5 = 0, \\ &c_j^4 = c_j^5 = c_j^6 = d_j^6 = d_j^7 = d_j^8 = -a_j, \end{aligned}$$

а соответствующим выбором величин p_j^r добьемся выполнения равенств:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F_j(x, y)\, x^u y^v dx\, dy = M_{uv};\quad u + v = 3 \tag{15}$$

Соотношения:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F_j(x, y)\, x^i y^k dx\, dy = \sum_{r=1}^{8} p_j^r (c_j^r + \xi_{jir})^i (d_j^r + \eta_{jkr})^k =$$
$$= \sum_{r=1}^{8} p_j^r (c_j^r)^i \cdot (d_j^r)^k + R_{jik} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} M_{uv} = a_j^3[(p_j^1 - p_j^5)\delta_{u3} + (p_j^3 - p_j^7)\delta_{u0} + (p_j^2 - p_j^6) + \\ + (p_j^4 - p_j^8)(-1)^u] + R_{juv},\quad u + v = 3 \end{aligned} \tag{17}$$

где $|\xi_{jir}| \leqslant \frac{1}{2}$, $|\eta_{ikr}| \leqslant \frac{1}{2}$, $|R_{jik}| \leqslant a^{i+k-1}\left(\frac{3}{2}\right)^{i+k} \sum\limits_{r=1}^{k} p_j^r$, которые непосредственно следуют из определения функции $F_j(x, y)$ при помощи формулы о среднем значении, указывают на существование такого натурального N_1, что условия (14) могут быть удовлетворены при всех $j \geqslant N_1$. Для того, чтобы с увеличением индекса j стремились к нулю все величины

$$M_{ik}^j = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F_j(x, y)\, x^i y^k dx\, dy;\quad (i + k \leqslant 2),$$

предъявим дополнительное требование:

$$P_j = \sum_{r=1}^{8} p_j^r = \min.$$

Опуская подробные вычисления величин p_j^r и M_{ik}^j $(i+k\leqslant 2)$, укажем лишь их предельные выражения:

$$\lim_{j\to\infty} a_j^3 p_j^2 = \left(\frac{M_{21}+M_{12}}{2}\right)_+,$$
$$\lim_{j\to\infty} a_j^3 p_j^6 = \left(\frac{M_{21}+M_{12}}{2}\right)_-,$$
$$\lim_{j\to\infty} a_j^3 p_j^4 = \left(\frac{M_{21}-M_{12}}{2}\right)_+,$$
$$\lim_{j\to\infty} a_j^3 p_j^8 = \left(\frac{M_{21}-M_{12}}{2}\right)_-,$$
$$\lim_{j\to\infty} a_j^3 p_j^1 = (M_{30}-M_{12})_+,$$
$$\lim_{j\to\infty} a_j^3 p_j^5 = (M_{30}-M_{12})_-,$$
$$\lim_{j\to\infty} a_j^3 p_j^3 = (M_{03}-M_{21})_+,$$
$$\lim_{j\to\infty} a_j^3 p_j^7 = (M_{03}-M_{21})_-,$$
$$\lim_{j\to\infty} a_j M_{ik}^j = \frac{1}{2}|M_{21}+M_{12}| + \frac{1}{2}|M_{21}-M_{12}|(-1)^i +$$
$$+ |M_{30}-M_{12}|\delta_{i0} + |M_{03}-M_{21}|\delta_{i2},\quad i+k=2,$$
$$\lim_{j\to\infty} a_j^2 M_{ik}^j = M_{3i,\,3k},\quad i+k=1,$$
$$\lim_{j\to\infty} a_j^3 M_{00j} = \frac{1}{2}|M_{21}+M_{12}| + \frac{1}{2}|M_{21}-M_{12}| +$$
$$+ |M_{30}-M_{12}| + |M_{03}-M_{21}|.$$

Здесь символы $(Z)_+$ и $(Z)_-$ обозначают соответственно положительную и отрицательную часть действительного числа Z:

$$(Z)_+ = \frac{1}{2}(|Z|+Z),$$
$$(Z)_- = \frac{1}{2}(|Z|-Z),$$

Теперь обратим внимание на свойство непрерывной дифференцируемости моментов m_{uv}^*, $u+v=3$, по аргументам m_{ik}, $i+k\leqslant 2$. Это является следствием того, что совокупность $\left\{\frac{m_{ik}}{m_{00}}, \frac{m_{uv}}{m_{00}},\ i+k\leqslant 2,\ u+v=3\right\}$ оказывается совокупностью моментов двухмерного нормального распределения, а аналитические выражения для вычисления его моментов третьего порядка при помощи младших моментов известны. Поэтому существует такая δ-окрестность $T\{m_{ik}\}$ совокупности $\{m_{ik},\ i+k\leqslant 2\}$, в пределах которой удовлетворяется условие Липшица для функций m_{uv}^*, $u+v=3$, в следующей форме:

$$\sum_{u+v=3} |\Delta m_{uv}^*| \leqslant M \sum_{i+k\leqslant 2} |\Delta m_{ik}|,$$

где

$$\Delta m_{ik} = m_{ik}' - m_{ik}'',$$

$$\Delta m_{uv}^* = m_{uv}^*(m_{ik}',\ i+k\leqslant 2) - m_{uv}^*(m_{ik}'',\ i+k\leqslant 2),$$

если лишь $\{m_{ik}'\}$, $\{m_{ik}''\} \in T\{m_{ik}\}$.

Если учесть, что квадраты K_j^r и K_j^{r+4}, $r\leqslant 4$ расположены попарно симметрично относительно начала координат, то из условий (15) следует, что неравенства $p_j^r \neq 0$ и $p_j^{r+4}\neq 0$ не будут удовлетворены одновременно для $r=1, 2, 3, 4$ (кстати, это обеспечивается условием $P_j=\min$, при всех j). Из этого вытекает соотношение:

$$P_j = \sum_{r=1}^{8} p_j^r = |p_j^1 - p_j^5| + |p_j^2 - p_j^6| + |p_j^3 - p_j^7| + |p_j^4 - p_j^8|,$$

а при помощи формул (17) имеем:

$$a_j^3 P_j = |M_{30} - R_{j30} - M_{12} + R_{j12}| + \frac{1}{2}|M_{21} - M_{j21} + M_{12} - R_{j12}| +$$

$$+ |M_{03} - R_{j03} - M_{21} + R_{j21}| + \frac{1}{2}|M_{21} - R_{j21} - M_{12} + R_{j12}| \leqslant$$

$$\leqslant |M_{30}| + |M_{03}| + 2|M_{21}| + 2|M_{12}| + 6\left(\frac{3}{2}\right)^3 a_j^2 \sum_{r=1}^{8} p_j^r \leqslant$$

$$\leqslant 2\sum_{u+v=3} |M_{uv}| + 20,25\, a_j^2 P^j,$$

$$P_j \leqslant \frac{2}{a_j^3\left(1 - \frac{20,25}{a_j}\right)} \sum_{u+v=3} |M_{uv}| \leqslant \frac{6}{a_j^3} \sum_{u+v=3} |M_{uv}|.$$

Учитывая полученный результат и соотношение (16), имеем следующую оценку:

$$\sum_{i+k\leqslant 2} |M_{ik}^j| \leqslant \sum_{i+k\leqslant 2}\left(\sum_{r=1}^{8} p_j^r |c_j^r|^i |d_j^r|^k + |R_{jik}|\right) \leqslant$$

$$\leqslant 6a_j^2 P_j + 6a_j\left(\frac{3}{2}\right)^2 P_j \leqslant 6\, a_j^2 P_j\left(1 + \frac{2,25}{a_j}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{40}{a_j} \sum_{u+v=3} |M_{uv}|,$$

которое указывает, что совокупности моментов $\{m_{ik} - M_{ik}^j;\ i+k\leqslant 2\}$ входят в $T\{m_{ik}\}$, если индекс j достаточно большой: $j\geqslant N_2 \geqslant N_1$. Обозначив соответствующие этим совокупностям моменты третьего порядка символами $m_{uv}^* - M_{uv}^j$, $u+v=3$, воспользуемся условием Липшица:

$$\sum_{u+v=3} |M_{uv}^j| \leqslant M \sum_{i+k\leqslant 2} |M_{ik}^j| \leqslant \frac{40M}{a_j} \sum_{u+v=3} |M_{uv}|.$$

Теперь составим неотрицательную функцию $F_{j1}(x, y)$ по примеру функции $F_j(x, y)$. Для этого используем те же самые квадраты K_j^r, $r = 1, 2, \ldots, 8$, ставя в соотношения (15) вместо M_{uv} соответственно M_{uv}^j. Обозначая младшие моменты функции $F_{j1}(x, y)$ символами M_{ik}^{j1}, $i+k \leqslant 2$, обратим внимание на существование такого натурального $N_3 \geqslant N_2$, что совокупности $\{m_{ik} - M_{ik}^j - M_{ik}^{j1};\ i+k \leqslant 2\}$ входят в S_2 при значениях индексов $j \geqslant N_3$. Это следует из соотношения:

$$\sum_{i+k\leqslant 2} |M_{ik}^{j1}| \leqslant \frac{40}{a_j} \sum_{u+v=3} |M_{uv}^j|.$$

Обозначим моменты третьего порядка, соответствующие вышеуказанным совокупностям моментов символами:

$$m_{uv}^* - M_{uv}^j - M_{uv}^{j1},\ u+v=3,\ j \geqslant N_3.$$

Снова составляем неотрицательную функцию $F_{j2}(x, y)$ по примеру функции $F_j(x, y)$, подставляя в соотношения (15) вместо M_{uv} соответственно M_{uv}^{j1}. Вычисляя младшие моменты M_{ik}^{j2}, $i+k \leqslant 2$, функции $F_{j2}(x, y)$, повторяем затем указанную процедуру бесконечно много раз, если только совокупности моментов $\{m_{ik} - M_{ik}^j - \sum_{l=1}^{t} M_{ik}^{jl}\}$ входят в $T\{m_{ik}\}$ при всех значениях $t = 1, 2, \ldots$. Для удобства записи воспользуемся в дальнейшем следующими обозначениями:

$$F_{j0}(x, y) = F_j(x, y),$$
$$M_{ik}^{j0} = M_{ik}^j,\ i+k \leqslant 3.$$

Индукцией могут быть доказаны следующие соотношения:

$$\sum_{u+v=3} |M_{uv}^{jl}| \leqslant \left(\frac{40M}{a_j}\right)^{l+1} \sum_{u+v=3} |M_{uv}|,$$

$$\sum_{i+k\leqslant 2} |M_{ik}^{jl}| \leqslant \left(\frac{40M}{a_j}\right)^{l+1} \sum_{u+v=3} |M_{uv}|, \qquad (l = 0, 1, 2, \ldots),$$

для всех j, при которых величины M_{ik}^{jl} вообще вычисляются. Суммы рядов $\sum_{i+k\leqslant 2} \left|\sum_{l=0}^{t} M_{ik}^{jl}\right|$ $(t = 0, 1, 2, \ldots)$ неограниченно уменьшаются абсолютно с увеличением индекса j; это следует из выражения:

$$\sum_{i+k\leqslant 2} \left|\sum_{l=0}^{t} M_{ik}^{jl}\right| \leqslant \sum_{l=0}^{t} \sum_{i+k\leqslant 2} |M_{ik}^{jl}| \leqslant \frac{1}{M} \sum_{u+v=3} |M_{uv}| \sum_{l=0}^{t} \left(\frac{40M}{a_j}\right)^{l+1} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{40}{a_j\left(1 - \frac{40M}{a_j}\right)} \sum_{u+v=3} |M_{uv}|, \text{ если } a_j > 40M.$$

Поэтому существует такое конечное число N_∞, что условия

$\{m_{ik}-\sum_{l=0}^{t} M_{ik}{}^{jl}\}\in T\{m_{ik}\}$ будут выполнены при всех t, если $j\geqslant N_\infty$. Обозначим решения вариационной задачи (2), (3), соответствующие вышеприведенным совокупностям моментов при $t=\infty$, символами $p_j(x, y)$. Функция $\Phi_j(x, y)$, определенная равенством:

$$\Phi_j(x, y)=p_j(x, y)+\sum_{l=0}^{\infty} F_{jl}(x, y)$$

неотрицательна, а ее моменты до порядка 3 равны m_{ik} соответственно (по ее конструкции).

Легко убедиться в справедливости соотношений:

$$F_{jl}(x, y)\leqslant M_{00}{}^{jl}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F_{jl}(x, y)\,dx\,dy,$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} F_{jl}(x, y)\leqslant\sum_{l=0}^{\infty} M_{00}{}^{jl}\leqslant\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{i+k<2}|M_{ik}{}^{jl}|,$$

а из них выводится равенство:

$$\lim_{j\to\infty}\sum_{l=0}^{\infty} F_{jl}(x, y)=0.$$

Из свойства непрерывности функции $H_2(m_{ik})$ и всех ее производных на множестве S_2 следует, с учетом формулы (4), что последовательность функций $\{p_j(x, y);\ j\geqslant N_\infty\}$ сходится равномерно к функций $p(x, y)$ на всей плоскости xy, а функционалы $\max_{x,y} p_j(x, y)$, $(x, y)\in\bigcup_{r=1}^{8} K_j{}^r$ приобретают бесконечно малые значения при увеличении индекса j. Поэтому существует такое число $N\geqslant N_\infty$, при котором неравенства

$$p_j(x, y)+\sum_{l=0}^{\infty} F_{jl}(x, y)<\frac{1}{e},\ \text{если}\ (x, y)\in\bigcup_{r=1}^{8} K_j{}^r,$$

выполняются при всех $j\geqslant N$. Учитывая, что функция $-x\ln x$ является монотонно возрастающей в промежутке $\left(0, \frac{1}{e}\right)$, получим для предела энтропии функции $\Phi_j(x, y)$ следующее неравенство:

$$\lim_{j\to\infty} H[\Phi_j(x, y)]\geqslant\lim_{j\to\infty} H[p_j(x, y)]=\lim_{j\to\infty} H_2(m_{ik}-\sum_{l=0}^{\infty} M_{ik}{}^{jl})=$$

$$=H_2[\lim_{j\to\infty}(m_{ik}-\sum_{l=0}^{\infty} M_{ik}{}^{jl})]=H_2(m_{ik}).$$

Верхняя грань энтропии $H_3{}^*(m_{ik})$ не может быть меньше энтропии любого распределения с моментами m_{ik}, $i+k \leqslant 3$; поэтому имеем неравенство:

$$H_3^*(m_{ik}) \geqslant H_2(m_{ik}) = H_2^*(m_{ik}).$$

Имея в виду соотношение (13), получим доказываемый результат:

$$H_3^*(m_{ik}) = H_2^*(m_{ik}).$$

Теорема доказана.

Аналогичные выводы получаются для некоторых функций $H_n^*(m_{ik})$ и с бо́льшим индексом n, но подробный разбор этого вопроса не является задачей этой статьи. Доказанная теорема, однако, указывает, что во многих случаях значения некоторых высших моментов оказываются ненужными при вычислении функции $H_n^*(m_{ik})$. С другой стороны, при изучении зависимости моменты третьего порядка, например, не могут быть неинформативными. Функция $H_n(m_{ik})$ может быть продолжена при помощи дифференциальных уравнений (7), (8) и (10) за пределы области S_n. Легко проверить, что тождества

$$\frac{\partial H_n(m_{ik})}{\partial m_{uv}} \equiv 0, \quad u+v=n,$$

которые иногда удовлетворяются для функции $H_n^*(m_{ik})$ (например, если $n=3$), в данном виде не имеют место. Действительно, в противном случае дифференциальные уравнения функций $H_{-n1}(m_{ik})$ и $H_n(m_{ik})$ совпадали бы, а моменты m_{uv} порядка n были бы функциями моментов m_{ik} с $i+k<n$, что противоречит предположениям. Поэтому кажется предпочтительнее выбор функций $H_n(m_{ik})$ и вне области S_n в качестве функции n-энтропии, при помощи которой могут вычисляться коэффициенты зависимости.

Ниже следует вывод основных формул для этой функции при независимости случайных величин x и y. В таком случае имеют место равенства

$$\begin{gathered} m_{ik} = m_{i0} \cdot m_{0k}, \\ H_n(m_{ik}) = h_{(n)}(m_{i0}) + h_{(n)}(m_{0k}), \end{gathered} \tag{18}$$

где $h_{(n)}$ есть функция $n+1$ моментов (индекс n иногда опускаем). Мы не будем проводить всех рассуждений, которые приводят к дифференциальным уравнениям относительно функции $h_{(n)}$, все они мало отличаются от приведенных в начале статьи при получении формул (8) и (10).

При опускании второго индекса у моментов m_{i0} и введении обозначений

$$h_i = \frac{\partial h}{\partial m_i}, \quad h_i^u = \frac{\partial^2 h}{\partial m_i \partial m_u},$$

имеем следующие уравнения для $n \geqslant 2$:

$$\sum_{i=1}^{n} ih_i m_{i-1} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} ih_i m_{i+j} = (j+1) m_j, \quad (j = 0, 1, \ldots) \tag{19}$$

$$\sum_{i=0}^{n} h_i^u m_{i+j} = -\delta_{ju}, \quad (j, u = 0, 1, \ldots, n).$$

Не умаляя общности, можно считать, что $m_1 = 0$; в противном случае в качестве аргументов функции h взамен начальных моментов подставим соответственные центральные моменты.

Формула

$$h(1, 0, m_2, m_3, \ldots, m_n) = \frac{1}{2} \ln m_2 + h\left(1, 0, 1, \frac{m_3}{m_2^{\frac{3}{2}}}, \ldots, \frac{m_n}{m_2^{\frac{n}{2}}}\right) \tag{20}$$

легко доказывается при помощи замены случайной переменной $z = \frac{x}{\sqrt{m}}$, что позволяет ограничиться случаем $m_2 = 1$. Нулевой момент m_0 считается равным единице.

Простейший случай $n = 2$ разбирается во многих учебниках теории информации. Известный результат

$$h(1, 0, m_2) = \frac{1}{2} \ln m_2 + h(1, 0, 1)$$

в данном рассмотрении получается тривиально. При прямом вычислении энтропии оказывается, что

$$h(1, 0, 1) = \frac{1}{2} \ln 2\pi e.$$

Формулы (19) существенно упрощаются, если иметь в виду сделанные замечания о моментах m_0, m_1, m_2. Легко выводятся следующие дифференциальные уравнения относительно функции $h(1, 0, 1, \ldots, m_n)$; $n > 2$:

$$\left.\begin{aligned} h_1 &= -\sum_{k=3}^{n} m_{k-1} \cdot kh_k, \\ h_2 &= \frac{1}{2}\left(1 - \sum_{k=3}^{n} m_k \cdot kh_k\right), \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

$$\sum_{j=1}^{n} h_j^k (m_{i+j} - m_i m_j) = \delta_{ik}, \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n), \tag{22}$$

а при помощи подстановки величин h_1 и h_2 из (21) в (19) имеем:

$$\sum_{k=3}^{n} (m_{i+k} - m_{k-1} \cdot m_{i+1} - m_k \cdot m_{i+2}) kh_k = (i+1) m_i - m_{i+2}, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{23}$$

Частные производные второго порядка вида h_1^k и h_2^k, $k=3, 4, \ldots, n$, могут быть вычислены при помощи соотношений (21) и подставлены в уравнения (22). Вследствие этого получается система дифференциальных уравнений относительно функции $h(1, 0, 1, m_3, \ldots, m_n)$, в которых фигурируют лишь частные производные по аргументам $m_3, \ldots, m_n$.

В частности, при $n=3$ из этих уравнений следует:

$$3h_3(m_4-1-m_3^2)+m_3=0,$$

$$h_3^3\left(m_4-3-\frac{3}{2}m_3^2\right)-\frac{3}{2}m_3h_3=0,$$

а после исключения неизвестного момента m_4 получается обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$h_3^3=-\frac{3m_3(h_3)^2}{h_3(m_3^2+4)+\frac{2}{3}m_3}.$$

Имея в виду, что в случае $m_3=0$ значение функции h реализуется в качестве энтропии нормального распределения N (0, 1), моменты которого, кроме того, удовлетворяют соотношению:

$$m_4-1-m_3^2=2,$$

получаем условия:

$$h_3=0, \text{ если } m_3=0,$$
$$h_3\neq 0, \text{ если } m_3\neq 0,$$

которые определяют решение уравнения. При введении обозначения:

$$h_3(1, 0, 1, m_3)=f(m_3),$$

имеем следующие легко проверяемые равенства:

$$\left.\begin{aligned} f'(x)&=-\frac{3xf^2(x)}{(x^2+4)f(x)+\frac{2}{3}x}, \\ h(1, 0, 1, m_3)&=\frac{1}{2}\ln 2\pi e+\int_0^{m_3} f(x)\,dx, \\ &\text{и} \\ h(1, m_1, m_2, m_3)&=\frac{1}{2}\ln 2\pi e+\int_0^{A} f(x)\,dx, \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

где

$$A=\frac{m_3-3m_2m_1+2m_1^2}{(m_2-m_1^2)^{3/2}}.$$

Вопросы существования и единственности решения дифференциальных уравнений, однако, нами не разобраны.

Функции $f(x)$ и $h(1, 0, 1, m_3)$, по-видимому, элементарно не представляются, их значения могут быть табулированы при помощи ЭВМ или вычисляться непосредственно в ходе исчислений. Укажем разложение в ряд Тейлора в окрестности нуля функции $f(x)$:

$$f(x) = x\left(-\frac{1}{6}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{12}+\ldots\right).$$

Для вычисления значений функции $h(1, 0, 1, \ldots, m_n)$ при $n>3$ в общем случае пока подходящий алгорифм не найден. Однако, в частном случае $n=4$ и $m_3=0$ функция h представляется следующим образом:

$$h(1, 0, 1, 0, m_4) = \frac{1}{2}\ln 2\pi e + \int\limits_3^{m_4}\varphi(x)\,dx,$$

где $\varphi(x)$ есть решение дифференциального уравнения:

$$\varphi'(x) = -\frac{8(x-1)\varphi^2(x)}{x-3+4x(x-1)\varphi(x)}$$

при условиях $\varphi(3)=0$ и $\varphi(x)\neq 0$, если $x\neq 3$.

При исследовании функции $H_n(m_{ik})$ можно предполагать, что равенства

$$m_{00}=m_{20}=m_{02}=1,$$
$$m_{01}=m_{10}=m_{11}=0$$

выполнены, в противном случае воспользуемся линейным преобразованием случайных величин x, y:

$$u = ax+by+e,$$
$$v = cx+dy+f,$$

с подходяще выбранными константами a, b, c, d, e, f. При помощи соотношений (7) и (8) все частные производные типа H_{ik} и H_{ik}^{uv}, где $i+k=1, 2$, $u+v\leqslant n$, могут быть исключены из системы уравнений, а затем и частные производные типа H_{00}^{uv}, $(u+v\leqslant n)$, вследствие чего система дифференциальных уравнений (7), (8), (10) существенно упрощается. Такая система, содержащая лишь производные по моментам третьего порядка, получена нами в случае $n=3$, но из-за громоздкости мы ее здесь не приводим.

По примеру теории информации мы предлагаем для определения функции $I_n(m_{ik})$ следующую формулу:

$$I_n(m_{ik}) = H_n(m_{i0}\cdot m_{0k}) - H_n(m_{ik}),\quad n=2,\ 3,\ \ldots \tag{25}$$

и будем называть ее n-информацией. Учитывая соотношение (15), получаем другое выражение этой функции:

$$I_n(m_{ik}) = h_{(n)}(m_{i0}) + h_{(n)}(m_{0k}) - H_n(m_{ik}).$$

При довольно общих условиях совокупность всех моментов распределения $\{m_{ik};\ i,\ k=0,\ 1,\ \ldots\}$ определяет функцию распределения полностью. Следует ожидать, что, по меньшей мере в таких случаях, удовлетворяется равенство:

$$\lim_{n \to \infty} I_n(m_{ik}) = I,$$

где I есть количество информации этого распределения в смысле теории информации.

Как известно, 2-информация выражается проще через коэффициент корреляции ϱ:

$$I_2(m_{ik}) = -\frac{1}{2} \ln (1 - \varrho^2),$$

которая, в свою очередь, вычисляется при помощи моментов первого и второго порядка. Функция I_2 монотонно возрастает с увеличением ϱ^2, поэтому сравнение 2-информаций случайных величин попарно может быть заменено сравнением соответствующих коэффициентов корреляции.

Однако, вопрос о том, в какой мере функция $I_n(m_{ik})$ характеризует зависимость при разных n, требует дальнейших исследований.

Литература

1. Шеннон К., Работы по теории информации и кибернетике. Москва, 1963.

Поступило
16 I 1965

JAOTUSE ENTROOPIA ARVUTAMINE MOMENTIDE ABIL

R. Tammeste

Resümee

Olgu antud kahedimensionaalse tõenäosusjaotuse kõik momendid järguni n. Momentidega m_{ik}, $i + k \geqslant n$, määratud jaotusfunktsioonide klassis on Shannoni entroopial üldiselt lõpmatu palju väärtusi, entroopia ülemine raja on aga küllaltki avaratel eeldustel lõplik suurus. Juhul, kui antud jaotusfunktsioonide klassis leidub jaotus, mille korral realiseerub ülemise rajaga võrdne entroopia väärtus, siis osutub see entroopia maksimaalne väärtus $H_n(m_{ik})$ resümeeritavas artiklis esitatud osatuletistega diferentsiaalvõrrandite (7), (8), (10) lahendiks. Funktsiooni $H_n(m_{ik})$ analüütilist jätku kõigile jaotusfunktsiooni momentide süsteemidele nimetatakse n-entroopiaks. Juhuslike suuruste vastastikuse sõltuvuse hindamiseks soovitatakse kasutada suurust $I_n(m_{ik})$, mis määratakse valemiga (25) ja mida nimetatakse n-informatsiooniks.

DIE BERECHNUNG DER VERTEILUNGSENTROPIE MIT DER HILFE DER MOMENTE

R. Tammeste

Zusammenfassung

Es seien alle Momente der zweidimensionalen Wahrscheinlichkeitsverteilung bis zur Ordnung n gegeben. Die Menge der Verteilungen wird durch die Momente m_{ik}, $i+k \leqslant n$, bestimmt. Wenn diese Menge die Verteilung mit der größten Entropie $H_n(m_{ik})$ enthält, dann wird der Wert dieser Entropie als eine Funktion dieser Momente durch Differentialgleichungen (7), (8) und (10) dargestellt. Die analytische Fortsetzung der Funktion $H_n(m_{ik})$ über alle Systeme der Verteilungsmomente wird n-Entropie genannt. Die Charakteristik der Abhängigkeit $I_n(m_{ik})$ der zufälligen Größen wird durch die Formel (25) berechnet und n-Information genannt.

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ СПЕЦИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОГО ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Ю. Каазик и Э. Тамме

Кафедра вычислительной математики

1. Рассмотрим следующую часто встречающуюся задачу. Требуется найти такое неотрицательное целочисленное решение системы неравенств

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{1}$$

которое дает наименьшее значение целевой функции

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j(x_j).$$

При этом предположим, что

$$a_{ij} > 0, \qquad b_i > 0, \qquad c_j(x) \geqslant 0$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots n;\ x = 0, 1, \ldots)$$

и что как $c_j(x)$, так и

$$d_j(x+1) = c_j(x) - c_j(x+1)$$

не возрастают при возрастании x.

Задачи такого типа возникают при решении некоторых проблем надежности, причем, например,

$$c_j(x) = -\ln[1 - (1 - e^{-\lambda_j})^{x+1}],$$

где λ_j — малые положительные постоянные.

Отметим, что рассматриваемая задача является обобщением т. н. задачи о ранце (или о загрузке; см., например, [1], стр. 177), которая получается при $m = 1$ и добавочных ограничениях $x_j \leqslant 1$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

Для координат x_j допустимого решения поставленной задачи легко указать конечные границы:

$$0 \leqslant x_j \leqslant \min_i \left[\frac{b_i}{a_{ij}} \right]$$

(через $[a]$ обозначается целая часть от a). Поэтому задача имеет конечное число допустимых решений. Следовательно, всегда существует и оптимальное целочисленное решение

$$\xi^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*),$$

причем минимальное значение целевой функции

$$z^* = \sum_{j=1}^{n} c_j(x_j^*) = \min \sum_{j=1}^{n} c_j(x_j)$$

удовлетворяет неравенствам

$$0 \leqslant z^* \leqslant z_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j(0).$$

Оптимальное решение ξ^* в принципе можно найти методом перебора всех допустимых решений. Ниже мы рассмотрим некоторые приемы, позволяющие значительно сократить такой перебор. С этой целью вычислим более точные границы для минимального значения целевой функции и координат оптимального решения.

В процессе вычислений мы обозначим наилучшие известные к данному моменту границы для этих величин следующим образом:

$$\underline{z} \leqslant z^* \leqslant \bar{z}, \quad \underline{x}_j \leqslant x_j^* \leqslant \bar{x}_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

В начале алгоритма имеем

$$\underline{z} = 0, \qquad \bar{z} = z_0, \qquad \underline{x}_j = 0, \qquad \bar{x}_j = \min_i \left[\frac{b_i}{a_{ij}} \right].$$

З а м е ч а н и е. Если требуется найти лишь такое приближение к оптимальному решению, при котором значение целевой функции z отличается от z^* не больше, чем на ε (т. е. $|z - z^*| \leqslant \varepsilon$), то часто оказывается возможным улучшить верхние границы $\bar{x}_j$. Именно, если при некоторых $x'_j \geqslant 0$ имеем

$$\sum_{j=1}^{n} c_j(x'_j) - \sum_{j=1}^{n} c_j(\bar{x}_j) < \varepsilon,$$

то в качестве новых значений для $\bar{x}_j$ можем взять

$$\bar{x}_j = \min \left(x'_j, \min_i \left[\frac{b_i}{a_{ij}} \right] \right).$$

2. Из неравенств (1) в качестве направляющего выбираем некоторое p-ое неравенство $(1 \leqslant p \leqslant m)$. Обозначим

$$\delta_j(k) = \frac{d_j(k)}{a_{pj}} \quad (j = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, \bar{x}_j)$$

(эти величины являются своего рода весами, характеризующими «полезность» увеличения неизвестного x_j от $k-1$ до k) и расположим $\delta_j(k)$ в порядке убывания:

$$\delta_{j_1}(k_1) \geqslant \delta_{j_2}(k_2) \geqslant \ldots \geqslant \delta_{j_N}(k_N) \qquad (N = \sum_{j=1}^{n} \bar{x}_j).$$

При этом пропустим $\delta_j(k)$ с $k > \bar{x}_j$, и будем считать, что $k_\nu < k_\mu$, если $j_\nu = j_\mu$ и $\nu < \mu$ (последнее требование учитывается только при $\delta_{j_\nu}(k_\nu) = \delta_{j_\mu}(k_\mu)$, в остальных случаях оно автоматически выполняется). В дальнейшем считаем, что

$$\delta_{j_\nu}(k_\nu) = 0 \text{ при } \nu > N.$$

3. При вычислении нижней границы для целевой функции определяем по возможности большую величину t так, чтобы было

$$r_p = b_p - \sum_{\nu=1}^{t} a_{pj_\nu} \geqslant 0.$$

Тогда нетрудно убедиться, что нижней границей для целевой функции является

$$\underline{z} = z_0 - \sum_{\nu=1}^{t} d_{j_\nu}(k_\nu) - r_p \delta_{j_{t+1}}(k_{t+1})$$

(даже тогда, если из ограничений (1) учесть лишь p-ое).

З а м е ч а н и е. Нижные границы для целевой функции можно вычислить при всех $p = 1, 2, \ldots, m$, а в дальнейших вычислениях в качестве индекса можно взять такое значение p, которое дало наибольшую нижнюю границу.

4. Для уточнения верхней границы $\bar{z}$ минимального значения целевой функции прежде всего найдем наибольшее s, при котором

$$\varrho_s = \beta - \sum_{\nu=1}^{s} a_{j_\nu} \geqslant 0,$$

где

$$\beta = (b_1, b_2, \ldots, b_n), \ a_j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}).$$

Обозначим

$$\tau = \nu_\tau \text{ при } \tau = 1, 2, \ldots, s.$$

Попытаемся найти еще такие индексы $\nu_{s+1}, \nu_{s+2}, \ldots, \nu_t$ $(s < \nu_{s+1} < \nu_{s+2} < \ldots < \nu_t \leqslant N)$, чтобы было

$$\varrho_t = \beta - \sum_{\tau=1}^{t} a_{j_{\nu_\tau}} \geqslant 0.$$

Тогда вектор

$$\xi' = (x_1', x_2', \ldots, x_n'),$$

где

$$x_j' = \max_{\substack{j_{\nu_\tau} = j \\ \tau = 1, 2, \ldots, t}} (0, k_{\nu_\tau}),$$

является допустимым решением поставленной в пункте 1 задачи. Этот вектор ξ' дает целевой функции значение

$$z' = z_0 - \sum_{\tau=1}^{t} d_{j_{\nu_\tau}}(k_{\nu_\tau}).$$

Так как $z' \geqslant z^*$, то можем взять $\bar{z} = z'$.

Замечание. В некоторых случаях можно ограничиться построением вектора ξ' и взять его за приближенное оптимальное решение задачи. В статье [2] для приближенного решения задачи о ранце предложен алгоритм, который близок к предлагаемому здесь алгоритму вычисления вектора ξ'. Этот алгоритм обычно дает почти такое же хорошее приближение, но связан с большей вычислительной работой.

5. Попытаемся для координат оптимального решения найти возможно меньшие верхние границы. Для этого возьмем подряд индексы $\mu = s+1, s+2, \ldots, N$ (можно пропустить $\mu = \nu_{s+1}, \nu_{s+2}, \ldots, \nu_t$) и при помощи описанного в пункте 3 приема найдем нижные границы для целевой функции в предположении, что $x_{j_\mu} = k_\mu$. Если при таком фиксировании x_{j_μ} нижняя граница целевой функции не меньше, чем $\bar{z}$, то при $x_{j_\mu} = k_\mu$ нельзя получить лучшего приближения к оптимальному решению, чем ξ'. Следовательно, можно взять

$$\bar{x}_{j_\mu} = k_\mu - 1$$

и в дальнейших вычислениях пропускать все индексы $j_\nu = j_\mu$ с $\nu > \mu$.

6. Для уточнения нижних границ для координат оптимального решения возьмем подряд индексы $\mu = 1, 2, \ldots, s$ и вычислим нижние границы для целевой функции в предположении, что $x_{j_\mu} = k_\mu - 1$. Если при некоторых μ эта нижняя граница окажется не меньше, чем $\bar{z}$, то при таких μ можно взять

$$\underline{x}_{i\mu} = k_\mu.$$

7. Если приемами предыдущих пунктов нам удалось улучшить границы оптимального решения ξ^*:

$$\underline{x}_j \leqslant x_j^* \leqslant \bar{x}_j,$$

то возможно сужение поставленной в пункте 1 задачи. Мы можем исключить те неизвестные, для которых $\underline{x}_j = \bar{x}_j$, ибо такие координаты оптимального решения уже однозначно определены:

$$x_j^* = \underline{x}_j = \bar{x}_j.$$

Для получения остальных координат оптимального решения необходимо найти величины $y_j^* = x_j^* - \underline{x}_j$, удовлетворяющие системе неравенств (1), в которой правые части b_i заменены невязками

$$r_i^{(0)} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\underline{x}_j,$$

образующими вектор

$$\varrho_0 = (r_1^{(0)},\ r_2^{(0)},\ \ldots,\ r_m^{(0)}).$$

После вычисления вектора ϱ_0 может быть сделана попытка уменьшения верхних границ оптимального решения еще с помощью следующего приема. Если некоторые координаты вектора

$$\varrho_0 - (\bar{x}_j - \underline{x}_j)\,\alpha_i$$

отрицательны, то при таком j возьмем

$$\bar{x}_j = \underline{x}_j + \min_i \left[\frac{r_i^{(0)}}{a_{ij}}\right].$$

В последующих вычислениях мы пользуемся лишь такими соотношениями

$$\delta_j(k) = \frac{d_j(k)}{a_{pj}},$$

при которых $\underline{x}_j + 1 \leqslant k \leqslant \bar{x}_j$. Эти величины расположим в порядке убывания:

$$\delta_{j_1}(k_1) \geqslant \delta_{j_2}(k_2) \geqslant \ldots \geqslant \delta_{j_{N'}}(k_{N'}) \quad \left(N' = \sum_{j=1}^{n} (\bar{x}_j - \underline{x}_j)\right),$$

считая при этом, что $k_\nu < k_\mu$, если $j_\nu = j_\mu$ и $\nu < \mu$.

З а м е ч а н и е. С целью улучшения границ $\underline{x}_i$, $\bar{x}_i$, $\bar{z}$ и соответствующего последнего приближения $\xi' = (x_1', x_2', \ldots, x_n')$ к оптимальному решению можно провести уточнение этих границ при нескольких p или даже при всех $p = 1, 2, \ldots, m$. При этом можно, конечно, рассматривать сокращенную задачу.

8. Оптимальное решение рассматриваемой задачи целочисленного программирования найдем, перебирая допустимые решения $\xi = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющие неравенствам

$$\underline{x}_i \leqslant x_i \leqslant \bar{x}_i.$$

Перебор можно осуществить, например, следующим образом.

Вначале просматриваем подряд индексы $\nu = 1, 2, \ldots, N'$ и выбираем из них по возможности меньшие $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_t$ $(\nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_t \leqslant N')$ так, чтобы было

$$\varrho_t = \varrho_0 - \sum_{\tau=1}^{t} \alpha_{j_{\nu_\tau}} \geqslant 0.$$

Если при некотором t

$$z' - r_p^{(t)} \delta_{j_{\nu_t+1}}(k_{\nu_t+1}) \geqslant \bar{z},$$

где $r_p^{(t)}$ есть p-ая координата вектора ϱ_t и

$$z' = z_0 - \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{\underline{x}_j} d_j(k) - \sum_{\tau=1}^{t} d(k_{\nu_\tau}),$$

то можно прекратить процесс образования набора индексов ν_τ и сразу перейти к образованию нового набора. Если же выбирание индексов ν_τ не прекращается, то мы просматриваем все $\nu = 1, 2, \ldots, N'$, а при $z' \geqslant \bar{z}$ переходим также к образованию нового набора индексов. В случае, если $z' < \bar{z}$, возьмем новое $\bar{z} = z'$ и образуем новое приближение к оптимальному решению

$$\xi' = (x_1', x_2', \ldots, x_n'),$$

взяв

$$x_j' = \max_{\substack{j_{\nu_\tau} = j \\ \tau = 1, 2, \ldots, t}} (\underline{x}_j, k_{\nu_\tau}).$$

Для образования нового набора индексов ν_τ исключим из набора $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_t$ последний индекс ν_t и попытаемся вместо него включить подряд индексы $\nu_t + 1, \nu_t + 2, \ldots, N'$, так, чтобы при новом наборе

$$\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{t'}$$

было

$$\varrho_{t'} = \varrho_0 - \sum_{\tau=1}^{t'} \alpha_{j_{\nu_\tau}} \geqslant 0.$$

В случае, если при исходном наборе

$$\nu_t = N' \text{ или } z' - r_p^{(t)} \delta_{j_{\nu_t+1}}(k_{\nu_t+1}) \geqslant \bar{z}$$

и

$$\nu_t = \nu_{t-1} + 1 = \nu_{t-2} + 2 = \ldots = \nu_{t-q+1} + q - 1 > \nu_{t-q} + q \quad (q \geqslant 1),$$

то кроме ν_t исключим еще индексы $\nu_{t-1}, \nu_{t-2}, \ldots, \nu_{t-q}$. Вместо последних попытаемся включить в набор ν индексы $\nu_{t-q}+1$, $\nu_{t-q}+2, \ldots, N'$. Дальше поступаем так же, как и раньше: если соответствующее новому набору индексов значение целевой функции $z' < \bar{z}$, то возьмем $\bar{z} = z'$ и вычислим новый вектор ξ', в других случаях перейдем к образованию следующего набора индексов ν_τ.

После конечного числа таких шагов мы получим набор индексов $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_t$ при котором

$$\nu_t = \nu_{t-1} + 1 = \ldots = \nu_1 + t - 1$$

и

$$\nu_t = N' \text{ или } z' - r_p^{(t)} \delta_{j_{\nu_t+1}}(k_{\nu_t+1}) \geqslant \bar{z}.$$

Тогда перебор окончен, т. е. найдено оптимальное целочисленное решение задачи:

$$\xi^* = \xi' = (x_1', x_2', \ldots, x_n')$$

и минимальное значение целевой функции $z^* = \bar{z}$.

Эффективность описанного алгоритма существенно зависит от того, в какой мере удается сузить задачу за счет уточнения границ координат оптимального решения.

Литература

1. Гейл Д., Теория линейных экономических моделей. Москва, 1963.
2. Гулиев Ю. Э., Мамед-заде Н. А., Алгоритм решения одной задачи выбора. Кибернетика, 1965, № 1, 68—70.

Поступило
13 XII 1965

ERIKUJULISTE MITTELINEAARSETE TÄISARVULISTE PLANEERIMIS-ÜLESANNETE LAHENDAMISE ALGORITM

Ü. Kaasik ja E. Tamme

Resümee

Artiklis esitatakse lõplik algoritm, mis on kasutatav lineaarsete kitsenduste ning monotoonselt kahaneva sihifunktsiooniga täisarvuliste planeerimisülesannete lahendamiseks.

AN ALGORITHM FOR SOLVING NONLINEAR INTEGER PROGRAMMING PROBLEMS OF A SPECIAL KIND

Ü. Kaasik and E. Tamme

Summary

An integer programming problem with linear constraints and nonlinear objective function (to be minimized) is considered. In constraints (1) all a_{ij} and b_i are positive. All the parts $c_j(x)$ of the objective function

$$\sum_{j=1}^{n} c_j(x_j)$$

and the differences $d_j(x+1) = c_j(x) - c_j(x+1)$ are non-negative and non-increasing.

A finite algorithm is proposed for finding the optimal solution of the problem.

К РАСЧЕТУ ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ БИМЕТАЛЛИЧЕСКОЙ ПОЛОСЫ

Э. Йыги

Кафедра теоретической механики

В настоящей заметке рассматривается изгиб равномерно нагретой первоначально прямолинейной биметаллической упругой полосы, жестко заделанной на обоих краях. В работах [1, 2] Э. И. Григолюка выработана теория расчета пологих биметаллических полос с учетом больших упругих деформаций. Им приведен ряд примеров, в том числе задача о прямолинейной жестко заделанной полосы. При этом предполагается, что $\dot{N}=0$ (т. е. в уравнении (1) пренебрегают членом, содержащим поперечную силу, как членом высшего порядка малости). В данной заметке отказываемся от этого ограничения.

Постановка задачи и все обозначения взяты из статьи [2]. При решении пользуемся следующим условием Вилларсо

$$E_1\delta_1{}^2 = E_2\delta_2{}^2.$$

Основная система задачи состоит из следующих уравнений:

$$\dot{N} = \frac{Q}{l}\ddot{w}, \tag{1}$$

$$\dot{Q} = -\frac{N}{l}\ddot{w}, \tag{2}$$

$$\dot{M} = Ql, \tag{3}$$

$$N = B\varepsilon - F, \tag{4}$$

$$M = -\frac{D}{l^2}\ddot{w} - L, \tag{5}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{l}\left(\dot{u} + \frac{1}{2l}\dot{w}^2\right), \tag{6}$$

где

$$B = \delta\sqrt{E_1E_2}, \quad D = \frac{\delta^3}{3\left(\frac{1}{\sqrt{E_1}} + \frac{1}{\sqrt{E_2}}\right)^2},$$

$$F=\delta t\sqrt{E_1E_2}\,\frac{\beta_1+\beta_2\sqrt{\frac{E_2}{E_1}}}{1+\sqrt{\frac{E_2}{E_1}}},\quad L=\frac{1}{2}\,\delta^2 t\,\frac{\beta_1-\beta_2}{\left(\frac{1}{\sqrt{E_1}}+\frac{1}{\sqrt{E_2}}\right)^2}.$$

Подставляя уравнения (3), (4) и (5) в уравнения (1) и (2), получаем систему

$$\dot{\varepsilon}=-\frac{D}{Bl^4}\,\ddot{w}\,\dddot{w}, \tag{7}$$

$$w^{\mathrm{IV}}+\frac{(F-B\varepsilon)\,l^2}{D}\,\ddot{w}=0. \tag{8}$$

Интегрируя уравнение (7) найдем, что

$$\varepsilon=-\frac{D}{2Bl^4}\,\ddot{w}^2+C, \tag{9}$$

где C — постоянная интегрирования.

Используя полученный результат, можно уравнение (8) переписать в виде

$$w^{\mathrm{IV}}+\frac{1}{2l^2}\,\ddot{w}^3+\frac{(F-CB)\,l^2}{D}\,\ddot{w}=0. \tag{10}$$

Из уравнений (6) и (9), учитывая граничные условия $u\left(\pm\frac{1}{2}\right)=0$, выводим второе основное уравнение

$$\frac{D}{Bl^2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\ddot{w}^2d\xi+\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\dot{w}^2d\xi-2l^2C=0. \tag{11}$$

Для решения уравнений (10) и (11) воспользуемся методом малого параметра. Для этого разложим все интересующие нас величины по степеням параметра $\eta=\frac{w(0)}{l}$, тогда имеем

$$\begin{aligned} w&=w_1\eta+w_2\eta^2+w_3\eta^3+w_4\eta^4+\ldots, \\ C&=C_2\eta^2+C_3\eta^3+C_4\eta^4+\ldots, \\ F&=F_0+F_1\eta+F_2\eta^2+F_3\eta^3+F_4\eta^4+\ldots. \end{aligned} \tag{12}$$

При помощи этих разложений вместо уравнения (10) получаем следующие уравнения для определения функции w_1, w_2, ...:

$$w_1{}^{\mathrm{IV}}+\frac{F_0l^2}{D}\,\ddot{w}_1=0, \tag{13}$$

$$w_2{}^{\mathrm{IV}}+\frac{F_0l^2}{D}\,\ddot{w}_2=-\frac{F_1l^2}{D}\,\ddot{w}_1, \tag{14}$$

$$w_3{}^{\mathrm{IV}}+\frac{F_0l^2}{D}\,\ddot{w}_3=-\frac{1}{2l^2}\,\ddot{w}_1{}^3-\frac{(F_2-C_2B)\,l^2}{D}\,\ddot{w}_1-\frac{F_1l^2}{D}\,\ddot{w}_2,$$

и т. д.; а вместо (11) получаем:

$$\frac{D}{Bl^2}\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ddot{w}_1{}^2 d\xi + \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \dot{w}_1{}^2 d\xi - 2l^2 C_2 = 0, \tag{15}$$

$$\frac{D}{Bl^2}\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ddot{w}_1 \ddot{w}_2 d\xi + \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \dot{w}_1 \dot{w}_2 d\xi - l^2 C_3 = 0,$$

$$\frac{D}{Bl^2}\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (\ddot{w}_2{}^2 + 2\ddot{w}_1\ddot{w}_3) d\xi + \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (\dot{w}_2{}^2 + 2\dot{w}_1\dot{w}_3) d\xi - 2l^2 C_4 = 0,$$

и т. д.

Удовлетворяя граничным условиям $w_1(\pm\frac{1}{2}) = \dot{w}_1(\pm\frac{1}{2}) = 0$ и $w_1(0) = l$ (граничное условие $w_1(0) = l$ вытекает из определения малого параметра), находим из уравнения (13), что

$$F_0 = \frac{4\pi^2 D}{l^2} \quad \text{и} \quad w_1 = \frac{l}{2}(1 + \cos 2\pi\xi).$$

Из уравнения (15) заключаем, что

$$C_2 = \frac{\pi^2(4\pi^2 D + Bl^2)}{4Bl^2}.$$

Уравнение (14) решаем методом вариации постоянных. Затем, удовлетворяя граничным условиям $w_2(\pm\frac{1}{2}) = \dot{w}_2(\pm\frac{1}{2}) = 0$ и $w_2(0) = 0$ видим, что $w_2 = 0$ и $F_1 = 0$.

Аналогично решаем и другие уравнения, что приводит к следующим результатам:

$$F_2 = \frac{\pi^2(Bl^2 - 2\pi^2 D)}{4l^2}, \quad F_3 = 0, \quad F_4 = -\frac{\pi^4(25\pi^2 D + Bl^2)}{1152 l^2},$$

$$w_3 = \frac{\pi^2 l}{1152}(\cos 6\pi\xi - \cos 2\pi\xi), \qquad w_4 = 0,$$

$$C_3 = 0, \qquad C_4 = -\frac{\pi^4(4\pi^2 D + Bl^2)}{1152 Bl^2}.$$

Подставляя найденные величины в (12) находим, что прогиб w имеет вид

$$w = \frac{w_0}{2}(1 + \cos 2\pi\xi) + \frac{\pi^2 w_0{}^3}{1152 l^2}(\cos 6\pi\xi - \cos 2\pi\xi) + \\ + \frac{\pi^4 w_0{}^5}{1024 l^4}\left[\frac{1}{200}(\cos 10\pi\xi - \cos 2\pi\xi) + \right. \\ \left. + \frac{1}{27}(\cos 6\pi\xi - \cos 2\pi\xi)\right] + \ldots,$$

а зависимость между прогибом в середине полосы и температурой получим из выражения

$$F = \frac{4\pi^2 D}{l^2} + \frac{\pi^2(Bl^2 - 2\pi^2 D)}{4l^4} w_0{}^2 - \frac{\pi^4(25\pi^2 D + Bl^2)}{1152 l^6} w_0{}^4 + \ldots . \quad (16)$$

Вычисления по формуле (16) проведены при исходных данных $E_1 = E_2$, $\beta_1 = 2 \cdot 10^{-5}$ град$^{-1}$, $\beta_2 = 10^{-5}$ град$^{-1}$ и $B = 12D$. Сравнивая вычисления по формуле (16) с вычислениями по формуле

$$w_0 = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{Fl^2 - 4\pi^2 D}{B}}$$

из [2], убеждаемся, что постановка Э. И. Григолюка дает результаты, отличающиеся меньше, чем на 1% от истинных.

Литература

1. Григолюк Э. И., О равновесии и устойчивости биметаллических полос. Инженерный сб., 1950, 7, 69—90.
2. Григолюк Э. И., О перемещениях пологих биметаллических полос (к расчету некоторых типов терморегуляторов). Тр. МВТУ им. Н. Э. Баумана, 1950, **11**, 82—97.

Поступило
27 XI 1964

BIMETALLIST SIRGE VARDA ARVUTAMISEST

E. Jõgi

Resümee

Käesolevas artiklis lahendatakse jäigalt kinnitatud bimetallist sirge varda painde ülesanne ühtlase temperatuuri puhul üldisemalt kui töös [2]. Selleks kasutatakse väikese parameetri meetodit. Arvutused näitavad, et töös [2] kasutatud eeldus ($\dot{N} = 0$) on õigustatud.

ZUR BERECHNUNG EINES GERADEN BIMETALLSTABES

E. Jõgi

Zusammenfassung

In dem vorliegenden Aufsatz wird die Biegung eines geraden Bimetallstabes unter gleichmäßiger Temperatur in einer allgemeineren Weise betrachtet als in der Arbeit [2]. Die Differentialgleichungen werden mit Hilfe der Störungsmethode gelöst. Die ausgeführten Berechnungen beweisen, daß die in der Arbeit [2] benutzte Voraussetzung $\dot{N} = 0$ vollkommen begründet ist.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОГОЙ БИМЕТАЛЛИЧЕСКОЙ СИНУСОИДАЛЬНОЙ ПОЛОСЫ

Э. Йыги

Кафедра теоретической механики и астрономии

Вопросы прощелкивания биметаллических полосок при равномерном нагреве впервые рассматривал С. П. Тимошенко [6], решая эту задачу приближенно методами сопротивления материалов. Д. Ф. Пановым [5] составлена основная система уравнений задачи в нелинейной постановке, но решается она приближенно, чтобы сравнить результаты с решением С. П. Тимошенко. В статье Э. И. Григолюка [3] приводятся дифференциальные уравнения таких полос при произвольных нагрузке и нагреве. В работах [1, 2] изучаются два случая полосы с шарнирно опертыми краями: 1) полоса равномерно нагрета и подвержена взаимодействию равномерного давления, 2) только равномерно нагрета. Обе эти задачи решены методом Галеркина. В результате получено кубическое уравнение для определения относительного прогиба в середине полосы. В статье [4] В. И. Заборов в приближенной постановке приходит к заключению, что биметаллическая полоса при ее равномерном нагреве вообще не может потерять устойчивости.

В настоящей статье на основе общей теории пологих биметаллических полос Э. И. Григолюка [3] подробнее разработан вопрос об устойчивости пологой биметаллической синусоидальной полосы при равномерном нагреве и получены формулы для расчета. Сравниваются приближенные решения [2, 5] шарнирно опертой полосы с точным решением.

Ниже приводится точное решение равномерно нагретой полосы, у которой соблюдается условие наибольшей чувствительности.

1. Основные уравнения

В качестве исходной поверхности принимаем поверхность спая слоев. Как обычно, принимаем гипотезу плоских сечений и ненадавливаемости продольных волокон друг на друга. Деформации считаем упругими.

Пусть $\zeta = -a \sin \pi\xi$ — уравнение поверхности спая (рис. 1). Компонент биметалла, имеющий большее значение коэффициента линейного температурного расширения, будем сопровождать индексом 1, меньшее — индексом 2. Тогда нормальное напряжение в поперечном сечении полоски на растоянии z от поверхности спая имеет выражение

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= E_1(\varepsilon - \beta_1 t - z\varkappa) \qquad (0 \leqslant z \leqslant h_1), \\ \sigma_2 &= E_2(\varepsilon - \beta_2 t - z\varkappa) \qquad (-h_2 \leqslant z \leqslant 0), \end{aligned} \tag{1.1}$$

где ε — относительная осевая деформация поверхности спая,
$\varkappa$ — изменение кривизны этой поверхности,
β — коэффициент линейного температурного расширения,
t — разность температуры,
E — модуль упругости.

Нормальная сила N и изгибающий момент M будут

$$\begin{aligned} N &= b\int_0^{h_1} \sigma_1 dz + b\int_{-h_2}^{0} \sigma_2 dz, \\ M &= b\int_0^{h_1} \sigma_1 z\, dz + b\int_{-h_2}^{0} \sigma_2 z\, dz. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Подставляя (1.1) в уравнения (1.2) и используя условие наибольшей чувствительности

$$E_1 h_1^2 = E_2 h_2^2,$$

найдем, что

$$N = B\varepsilon - Ft, \qquad M = -D\varkappa - Lt, \tag{1.3}$$

где $h = h_1 + h_2$, $B = bh\sqrt{E_1 E_2}$, $D = \dfrac{bh^3}{3\left(\dfrac{1}{\sqrt{E_1}} + \dfrac{1}{\sqrt{E_2}}\right)^2}$,

$$F = bh\sqrt{E_1 E_2}\,\frac{\beta_1 + \beta_2\sqrt{\dfrac{E_2}{E_1}}}{1 + \sqrt{\dfrac{E_2}{E_1}}}, \quad L = \frac{bh^2}{2}\,\frac{\beta_1 - \beta_2}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{E_1}} + \dfrac{1}{\sqrt{E_2}}\right)^2}.$$

Здесь производная берется по ξ. Обозначим через u и w соответственно перемещения точек спая вдоль координатных осей ξ и ζ.

Уравнения равновесия элемента на основе [3] будут

$$N = \text{const}, \quad M'' + N(a\pi^2 \sin \pi\xi + w'') = 0. \tag{1.4}$$

Из системы (1.3) и (1.4), учитывая, что $\varkappa = w'' l^{-2}$, получим дифференциальное уравнение относительно w в виде

$$w^{\mathrm{IV}} + k^2 w'' = -a\pi^2 k^2 \sin \pi\xi, \tag{1.5}$$

причем $k^2 = -\dfrac{Nl^2}{D}$.

Общее решение уравнения (1.5) есть

$$w = C_1 + C_2\xi + C_3 \cos k\xi + C_4 \sin k\xi + \frac{ak^2}{k^2 - \pi^2} \sin \pi\xi. \quad (1.6)$$

Относительная осевая деформация определяется из выражения

$$\varepsilon = \frac{1}{l^2} [lu' - a\pi w' \cos \pi\xi + \frac{1}{2} (w')^2]. \quad (1.7)$$

Используя (1.7) и первое уравнение из соотношений (1.3), получим второе основное уравнение

$$lu' = \frac{(N + Ft) l^2}{B} + a\pi w' \cos \pi\xi - \frac{1}{2} (w')^2. \quad (1.8)$$

Уравнения (1.5) и (1.8) представляют собой основные уравнения задачи об устойчивости биметаллической полосы, когда нагрев, упругие постоянные и нормальное усилие, возникающее в полосе, не зависят от ξ.

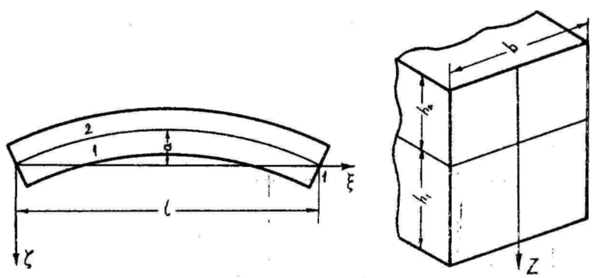

Рис. 1.

2. Полоса с шарнирно опертыми краями

А. Исходим из общего решения (1.6) и удовлетворяем граничным условиям

$$\begin{aligned} w &= 0, \ M = 0 \ \text{при} \ \xi = 0, \\ w &= 0, \ M = 0 \ \text{при} \ \xi = 1. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Вместо условия $M = 0$ из (1.3) получим, что

$$w'' = -\frac{Ll^2t}{D}. \quad (2.2)$$

Удовлетворяя граничным условиям, найдем выражение прогиба

$$w = \frac{Ll^2t}{Dk^2} \left(\cos k\xi - 1 + \tan \frac{k}{2} \sin k\xi\right) + \frac{ak^2}{k^2 - \pi^2} \sin \pi\xi, \quad (2.3)$$

а в середине полосы

$$w_0 = \frac{Ll^2t}{Dk^2} \left(\sec \frac{k}{2} - 1\right) + \frac{ak^2}{k^2 - \pi^2}. \quad (2.4)$$

Используя граничные условия

$$u=0 \text{ при } \xi=0, \; u=0 \text{ при } \xi=1,$$

из второго основного уравнения (1. 8) вытекает, что

$$\frac{L^2l^4t^2}{4D^2k^3}\,\frac{k-\sin k}{\cos^2\frac{k}{2}}-\frac{Fl^2t}{B}-\frac{2a\pi^3Ll^2t}{D(k^2-\pi^2)^2}+$$

$$+\frac{D}{B}k^2-\frac{a^2\pi^2k^2(k^2-2\pi^2)}{4(k^2-\pi^2)^2}=0. \tag{2. 5}$$

Переходя к безразмерным величинам

$$\varphi=\frac{D}{Bh^2},\; \eta=\frac{Fl^2}{Bh^2},\; \Theta=\frac{Ll^2}{Dh},$$

$$a^*=\frac{a}{h},\; l^*=\frac{l}{h},\; w^*=\frac{w}{h},$$

уравнение (2. 5) принимает вид

$$\frac{(k-\sin k)\Theta^2}{4k^3\cos^2\frac{k}{2}}t^2-\left[\eta+\frac{2a^*\pi^3\Theta}{(k^2-\pi^2)^2}\right]t+k^2\varphi-\frac{a^{*2}\pi^2k^2(k^2-2\pi^2)}{4(k^2-\pi^2)^2}=0. \tag{2. 6}$$

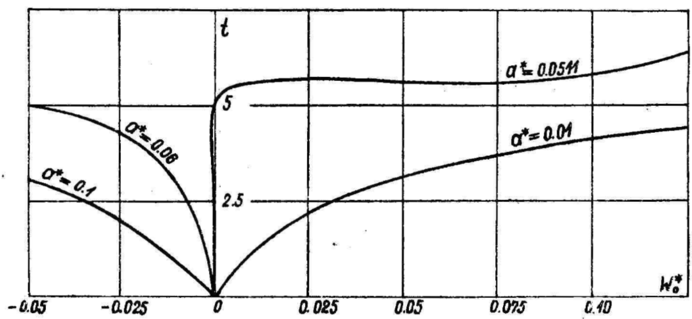

Рис. 2.

Из уравнения (2. 6) определяем температуру в зависимости от величины k

$$t_{1,2}=\frac{B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}, \tag{2.7}$$

где

$$A=\frac{\Theta^2(k-\sin k)}{4k^3\cos^2\frac{k}{2}},$$

$$B=\eta+\frac{2a^*\pi^3\Theta}{(k^2-\pi^2)^2},$$

$$C=k^2\varphi-\frac{a^{*2}\pi^2k^2(k^2-2\pi^2)}{4(k^2-\pi^2)^2},$$

Соответствующий прогиб имеет вид

$$w_0^* = \frac{\Theta t}{k^2}\left(\sec\frac{k}{2} - 1\right) + \frac{a^* k^2}{k^2 - \pi^2}. \tag{2.8}$$

По формулам (2.7) и (2.8) можно определить зависимость между w_0^* и t.

Вычисления велись на ЭВМ «Урал-4». Представим результаты вычислений для случая $\beta_1 = 17 \cdot 10^{-6}$ град$^{-1}$, $\beta_2 = 12{,}3 \cdot 10^{-6}$ град$^{-1}$, $E_1 = 12\,000$ *кГ/мм*^{2}, $E_2 = 20\,000$ *кГ/мм*^{2}, $l^* = 100$. Соответствующие безразмерные величины будут $\Theta = 0{,}070500$; $\eta = 0{,}14352$, $\varphi = 0{,}081989$.

Из графиков (рис. 2 и 3) видно, что при $a^* = 0{,}1$, $a^* = 0{,}06$ нагрев полосы вызывает ее дальнейшее искривление, полоса получает отрицательный прогиб. В случае биметаллического температурного реле полоса изгибается не в сторону контакта, а удаляется от него. При $a^* = 0{,}01$ полоса изгибается в сторону контакта, а при $a^* = 0{,}0511$ имеет место прощелкивание полосы. На рис. 3 кривая зависимости $t = t(w_0^*)$ для $a^* = 0{,}1$, $a^* = 0{,}4$ имеет две ветви. Переход на режим, соответствующий другой ветви, может произойти лишь при помощи дополнительных внешних сил.

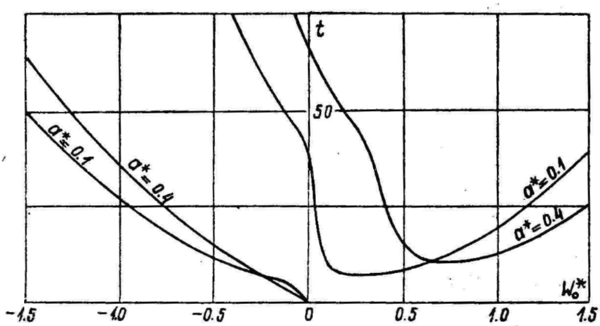

Рис. 3.

Результаты вычислений показывают, что прощелкивание биметаллической полосы возможно, и утверждение В. И. Заборова является необоснованным.

Б. Сравниваем полученное точное решение с приближенным решением Д. Ф. Панова. В работе [5] разлагается первое слагаемое точного решения (2.3) в ряд Фурье по синусам и ограничивается одним членом, тогда

$$w^* = \frac{a^* \pi k^2 - 4\Theta t}{\pi (k^2 - \pi^2)} \sin \pi\xi. \tag{2.9}$$

Здесь надо отметить, что это приближенное выражение для прогиба (2.9) не удовлетворяет граничным условиям (2.2). В дальнейшем представим результаты Д. Ф. Панова в иной форме, чем в статье [5].

На основе (2.9) можно получить из (1.8) другое уравнение для решения проблемы. Прогиб w_0^* и соответствующую температуру t можно вычислить по формулам

$$w_0^* = \frac{a^* \pi k^2 - 4\Theta t}{\pi (k^2 - \pi^2)},$$

$$t_{1,2} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4A^* C}}{2A^*},$$

где

$$A^* = \frac{4\Theta^2}{(k^2 - \pi^2)^2}.$$

В. В работе Э. И. Григолюка [2] основное уравнение (1.5) решается методом Галеркина. Выражение для прогиба задается в виде

$$w = K \sin \pi\xi + H(\xi - \xi^2),$$

и получено кубическое уравнение для определения относительного прогиба.

В данной статье представляем результаты в другом виде. Из граничных условий (2.2) вытекает, что

$$H = \frac{Ll^2 t}{2D},$$

и выражение прогиба принимает вид

$$w = K \sin \pi\xi + \frac{Ll^2 t}{2D} (\xi - \xi^2). \tag{2.10}$$

Подставляя в уравнение (1.5) выражение (2.10), умножая результат на $\sin \pi\xi d\xi$ и интегрируя от $\xi = 0$ до $\xi = 1$ найдем, что

$$w = \frac{k^2 (8H - a\pi^3)}{\pi^3 (\pi^2 - k^2)} \sin \pi\xi + \frac{Ll^2 t}{2D} (\xi - \xi^2),$$

и относительный прогиб в середине

$$w_0^* = \Theta t \left[\frac{1}{8} - \frac{4k^2}{\pi^3 (k^2 - \pi^2)}\right] + \frac{a^* k^2}{k^2 - \pi^2}.$$

Из уравнения (1.8) выводим, что

$$t_{1,2} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4\bar{A}C}}{2\bar{A}},$$

причем

$$\bar{A} = \Theta^2 \left[\frac{1}{24} - \frac{4k^2 (k^2 - 2\pi^2)}{\pi^4 (k^2 - \pi^2)^2}\right].$$

Таблица 1

k	Точное решение		Решение Григолюка		Решение Панова	
	w_0^*	t	w_0^*	t	w_0^*	t
9	—0,148	52,4	0,043	46,2	0,056	45,8
8,2	0,006	38,8	0,047	38,2	0,056	38,1
8	0,015	36,8	0,048	36,3	0,057	36,8
7	0,042	27,9	0,054	27,8	0,062	27,7
6	0,057	20,5	0,064	19,8	0,068	20,4
5	0,074	14,4	0,076	14,3	0,080	14,3
4	0,126	8,98	0,127	8,98	0,129	8,98
3,6	0,201	7,42	0 202	7,42	0,204	7,42
3,5	0,242	7,18	0,242	7,18	0,244	7,18
3,3	0,397	7,59	0,397	7,59	0,399	7,59
3,2	0,545	9,15	0,546	9,14	0,549	9,15
3	1,03	20,1	1,03	20,1	1,04	20,1
2,4	—0,0632	3,57	—0,0631	3,57	—0,0621	3,57
2,2	—0,0445	2,95	—0,0445	2,95	—0,0436	2,95
2	—0,0320	2,41	—0,0319	2,41	—0,0313	2,41
1,7	—0,0197	1,72	—0,0195	1,72	—0,0192	1,73
1,4	—0,0119	1,61	—0,0118	1,69	—0,0116	1,64
1,2	—0,0083	0,851	—0,0083	0,849	—0,0080	0,858

Чтобы сравнить приближенные решения с точным, приведены вычисления. Для случая $\beta_1 = 17 \cdot 10^{-6}$ град$^{-1}$, $\beta_2 = 12{,}3 \cdot 10^{-6}$ град$^{-1}$, $E_1 = 12\,000$ *кГ/мм*^{2}, $E_2 = 20\,000$ *кГ/мм*^{2}, $l^* = 100$, $a^* = 0{,}1$, результаты представлены в табл. 1. Как видно, приближенные решения и точные решения довольно хорошо совпадают.

3. Полоса с жестко заделанными краями

Исходя из общего решения (1. 6) и удовлетворяя граничным условиям

$$w(0) = w(1) = w'(0) = w'(1) = 0,$$

найдем выражение для прогиба

$$w = \frac{ak\pi}{k^2 - \pi^2}\left[(1 - \cos k\xi)\cot\frac{k}{2} - \sin k\xi + \frac{k}{\pi}\sin\pi\xi\right].$$

Относительный прогиб в средине полосы равняется

$$w_0^* = \frac{a^* k}{k^2 - \pi^2}\left(k - \pi\tan\frac{k}{4}\right). \tag{3. 1}$$

Так как $u = 0$ при $\xi = 0$ и при $\xi = 1$, то из уравнения (1. 8) вытекает, что

$$\eta t = k^2\varphi + \frac{a^{*2}\pi^2 k^2}{2(k^2 - \pi^2)^2}\left[\frac{k^2}{2}\cot^2\frac{k}{2} + \frac{(5\pi^2 - k^2)k}{k^2 - \pi^2}\cot\frac{k}{2} + \pi^2\right].$$

Обозначая

$$R = \frac{a^{*2}\pi^2}{2(k^2-\pi^2)^2}\left[\frac{k^2}{2}\cot^2\frac{k}{2} + \frac{(5\pi^2-k^2)k}{k^2-\pi^2}\cot\frac{k}{2} + \pi^2\right], \qquad (3.2)$$

получим выражение для определения температуры

$$t = \frac{k^2}{\eta}(\varphi + R). \qquad (3.3)$$

По формулам (3.1) и (3.3) можно определить зависимость между w_0^* и t. Вычисления проведены при значениях: $E_1 = 12\,000$ кГ/мм², $E_2 = 20\,000$ *кГ/мм²*, $\beta_1 = 17 \cdot 10^{-6}$ град$^{-1}$, $\beta_2 = 12{,}3 \cdot 10^{-6}$ град$^{-1}$. Результаты представлены на рис. 4.

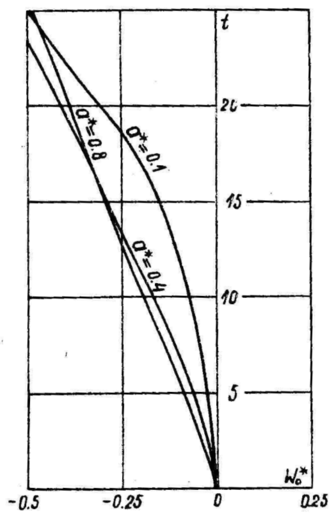

Рис. 4.

При таком способе закрепления не наблюдается прощелкивания биметаллической полосы, она лишь увеличивает свою кривизну. Одна ветвь, которая проходит через начало координат, характеризует изгиб полосы.

4. Монометаллическая синусоидальная полоса

Решение этой задачи получим как частный случай из решения для биметаллической полосы. Для монометалла

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta, \qquad E_1 = E_2 = E, \qquad h_1 = h_2 = \frac{1}{2}h,$$

$$\varphi = \frac{1}{12}, \qquad \eta = \beta l^{*2}, \qquad \Theta = 0.$$

Рассмотрим шарнирно опертую полосу. Из соотношения (2.8) получим, что

$$w_0{}^* = \frac{a^*k^2}{k^2 - \pi^2}, \tag{4.1}$$

и из (2.6) определяем соответствующую температуру

$$t = \frac{k^2}{4\beta l^{*2}}\left[\frac{1}{3} - \frac{a^{*2}\pi^2(k^2 - 2\pi^2)}{(k^2 - \pi^2)^2}\right]. \tag{4.2}$$

Учитывая (4.1), можем полученное выражение (4.2) переписать в виде

$$t = \frac{\pi^2 w_0{}^*}{4\beta l^{*2}(w_0{}^* - a^*)}\left[\frac{1}{3} + (w_0{}^* - 2a^*)(w^*{}_0 - a^*)\right]. \tag{4.3}$$

Для расчета жестко заделанной полосы используем формулы (3.1), (3.2) и (3.3), куда подставим значения $\varphi = \frac{1}{12}$ и $\eta = \beta l^{*2}$.

Литература

1. Григолюк Э. И., О равновесии и устойчивости биметаллических полос. Инженерный сб., 1950, **7**, 69—90.
2. Григолюк Э. И., О перемещениях пологих биметаллических полос (к расчету некоторых типов терморегуляторов). Труды МВТУ им. Н. Э. Баумана, вып. 11, сб. «Расчеты на прочность в машиностроении», 1950, 82—97.
3. Григолюк Э. И., Тонкие биметаллические оболочки и пластины. Инженерный сб., 1953, **17**, 69—120.
4. Заборов В. И., Изгиб и устойчивость составной биметаллической арки малой кривизны под действием температуры. В сб. «Исследования по вопр. строит. механ. и теории пластичности», Москва, 1956, 268—278.
5. Панов Д. Ф., О некоторых вопросах теории биметалла. Труды ВВА им. Н. Е. Жуковского, 1948, вып. 274.
6. Timoshenko S., Analysis of bimetal thermostat. J. Opt. Soc. America and Rev. Scient. Instrum., 1925, **11**, № 3, 233—255.

Поступило
19 XI 1965

BIMETALLIST LAMEDA SINUSOIDAALSE RIBA STABIILSUSEST

E. Jõgi

Resümee

Käesolevas artiklis uuritakse bimetallist lameda sinusoidaalse riba läbilööki ühtlase temperatuuri mõjul, lähtudes töös [3] esitatud bimetallist lamedate ribade üldisest teooriast. Tuletatakse valemid vabalt toetatud ja jäigalt

kinnitatud riba arvutamiseks. Näidetest selgub, et vaadeldud juhtudel toimub riba läbilöök. Täpset lahendust võrreldakse töödes [2, 5] esitatud vabalt toetatud riba ligikaudsete lahendustega.

Erijuhuna saadakse võrrandid monometallist riba stabiilsuse uurimiseks.

ZUM STABILITÄTSPROBLEM EINES SCHWACH GEKRÜMMTEN SINUSFÖRMIGEN BIMETALLSTREIFENS

E. Jõgi

Zusammenfassung

In dem vorliegenden Aufsatz wird das Durchschlagen eines schwach gekrümmten sinusförmigen Bimetallstreifens unter gleichmäßiger Temperatur betrachtet, ausgehend von der allgemeinen Theorie des schwach gekrümmten Bimetallstreifens [3]. Es werden die Formeln für die Berechnung des Streifens, der an seinen beiden Enden gelenkig oder unverschieblich gelagert ist, gegeben. Die als Beispiel durchgeführten Berechnungen beweisen, daß in diesem Fall das Durchschlagen stattfindet. Die genaue Lösung vergleicht man mit den angenäherten Lösungen [2, 5] des gelenkig gelagerten Streifens.

Als Sonderfall wird der monometallische Streifen betrachtet.

СОДЕРЖАНИЕ — SISUKORD

Тартуский государственный университет

ЭССР, г. Тарту, ул. Юликооли 18

ТРУДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ И МЕХАНИКЕ
VI

На русском языке

Резюме на эстонском, немецком и английском языках

Ответственный редактор Э. Реймерс
Корректоры Ю. Сарв, Л. Аболдуева, А. Норберг, Г. Лийв и Ф. Киббербанн

Сдано в набор 28/VIII 1965 г. Подписано к печати 31/XII 1966 г. Бумага фабрики «Кохила» № 1 60 × 90.1/16. Печатн. листов 9,0. Учетно-издат. листов 7,8. Тираж 500 экз. Заказ № 6579. МВ-11898.
Типография им. Ханса Хейдеманна, ЭССР, г. Тарту, ул. Юликооли 17/19. II.

Цена 56 коп.

2—2