

TARTU ÜLIKOOL
MATEMAATIKA-INFORMAATIKATEADUSKOND

Matemaatika instituut

Matemaatika eriala

Merilin Ollema

Silindrilise kooriku paine

Bakalaureusetöö (6 EAP)

Juhendaja: Jaan Lellep,
prof., füüs.-mat. dokt.

TARTU 2014

Silindrilise kooriku paine

Bakalaureusetöö

Merilin Ollema

Lühikokkuvõte. Käesoleva bakalaureusetöö eesmärgiks on uurida silindrilise kooriku painet. Koorik on konstruktsioonielement, mis on piiratud kahe kõverpinnaga, mille vaheline kaugus on võrreldes kooriku teiste mõõtmetega väike. Lühidalt kirjeldatakse koorikute liigitamist kasutades Gaussi kõverust. Leitakse kooriku tasakaaluvõrrandid, mida hiljem kasutatakse ringsilindrilise kooriku painde võrrandi leidmiseks. Töös leitakse tasakaaluvõrrandid ka telgsümmeetriliselt koormatud ringsilindrilise kooriku jaoks ning tuletatakse selle kooriku painde võrrand. Lähemalt vaadeldakse ka telgsümmeetriliselt koormatud ringsilindrilise kooriku painde võrrandi kasutamist, kui on tegemist kinnise koorikuga

Märksõnad. Silindriline koorik, paine, tasakaaluvõrrandid, elastne materjal

Bending of a Cylindrical Shell

Bachelor's thesis

Merilin Ollema

Abstract. The objective of this bachelor's thesis is to explore the bending of a cylindrical shell. The shell is a structural element bounded by two curved surfaces, where the distance between the surfaces is small comparing to other dimensions. The classification of shell surfaces using Gaussian curvature is considered briefly. The equilibrium equations of the general classical shell theory are presented, which later on are used for finding the equations of the displacement in circular cylindrical shells under general loading. The equilibrium equations of the axisymmetrically loaded circular cylindrical shells and the differential equations of bending are presented as well. The application of the equation of an axisymmetrically loaded circular cylindrical shell, where the cylindrical shell is closed, is more closely explored.

Key words. Cylindrical shell, bending, equilibrium equations, elastic material

Sisukord

Sissejuhatus	4
1. Koorikute klassifitseerimine.....	5
2. Tasakaaluvõrrandid	6
3. Ringsilindriline koorik üldise koormuse all	12
4. Telgsümmeetriliselt koormatud ringsilindriline koorik.....	17
5. Näiteülesanne.....	20
Kasutatud kirjandus	25
Lisad	26
Lisa 1	26
Lisa 2	27
Lisa 3	28

Sissejuhatus

Koorikuks nimetatakse konstruktsioonelementi, mis on piiratud kahe kõverpinnaga, mille vaheline kaugus on võrreldes teiste mõõtmetega väike. Koorikud on üldlevinud elemendid paljudes masinaehituse konstruktsioonides. Näitena võib tuua surveanumad, laeva- ja allveelaevakered, lennukikered ja -tiivad, tuumaelektrijaamade mahutite konstruktsioonid, torud, raketid, autorehvid, korstnad, vedelike mahutid, ja paljud muud erinevad konstruktsioonid. Koorikuid leiab ka looduses: munakoor, koljuluu, ja muud erinevad bioloogilised vormid (vt. Lisa 1). Koorikulisi konstruktsioone on inimkonna poolt ehitatud sajandeid, enamasti kiviehitiste, kivikuplite, katuste ning kaarte kujul. Koorikkonstruktsioonide laialdane kasutamine on tingitud kooriku headest omadustest, näiteks kõrge vastupidavus, väga suur jäikus, struktuurne terviklikus. Lisaks nendele mehaanilistele omadustele omavad koorikkonstruktsioonid väga kõrget esteetilist väärtust arhitektuuris.

Käesolevas töös käsitletakse silindrilise kooriku painet. Uuritakse põhjalikumalt silindrilise kooriku tasakaaluvõrrandite leidmist ja vaadeldakse erijuhtu, kus ringsilindriline koorik on telgsümmeetriliselt koormatud. Töö on põhiosas referatiivne, näiteülesanne on iseseisvalt lahendatud.

Töö koosneb viiest peatükist. Esimeses peatükis vaadeldakse lähemalt koorikute klassifitseerimist kasutades Gaussi kõverust. Selleks kasutatakse raamatut [4]. Teises peatükis leitakse üldised kooriku tasakaaluvõrrandid. Kolmandas peatükis leitakse ringsilindrilise kooriku painde võrrandid. Neljandas peatükis uuritakse ringsilindrilise kooriku erijuhtu: telgsümmeetriliselt koormatud ringsilindrilist koorikut. Leitakse kooriku tasakaaluvõrrandid kasutades eelnevalt tuletatud üldiseid kooriku tasakaaluvõrrandeid ning tuletatakse selle kooriku painde võrrand. Teine kuni neljas peatükk põhinevad raamatul [3]. Viimases peatükis vaadeldakse ühte näiteülesannet telgsümmeetriliselt koormatud ringsilindrilise kooriku painde võrrandi kasutamise kohta, kus on tegemist kinnise koorikuga.

1. Koorikute klassifitseerimine

Kasulik on klassifitseerida kooriku pindu kasutades niinimetatud Gaussi kõverust. Tasandit, millel asuvad punkti P läbivate kõigi kõverate puutujad, nimetatakse pinna puutujatasandiks punktis P , seejuures punkti P nimetatakse puutepunktiks. Sirget, mis on risti puutujatasandiga ja läbib puutepunkti, nimetatakse pinna normaaliks selles punktis. Kui lõiketasand läbib pinna normaali, siis räägime pinna normaallõikest. Üldiselt, kõikidel kõveratel on oma unikaalne kõverus. Pinna iga punkti jaoks leidub kaks peakõverust, mis on pinna normaalkõverused. Kõigist kõverjoonte kõverustest on ühel peakõverusel maksimaalne väärtus K_1 ja teisel miinimaalne väärtus K_2 . Peakõveruste K_1 ja K_2 korrutist nimetatakse Gaussi kõveruseks K . Kui $K_2 = 0$ ja $K_1 \neq 0$, siis pinnal on null Gaussi kõverus (näiteks silindriline koorik, mis on antud töö uurimisobjektiks). Kui $K = K_1 K_2 > 0$, siis pinnal on positiivne Gaussi kõverus, ja kui $K < 0$, siis on negatiivne Gaussi kõverus (vt. Lisa 2).

Õeldakse, et kumer pind on null Gaussi kumerusega, kui seda on võimalik muuta tasapinnaks ilma pinda venitamata. Niisugune on näiteks silindriline paneel (vt. Lisa 3) kuna seda saab painutada ristkülikukujuliseks plaadiks. Vastupidisel juhul on vajalik pinna lõikumine või lagundamine, et saada tasapind. Näiteks võib tuua sfäärilise kuppli (vt. Lisa 3).

Koorikuid võib jagada ka telgsümmeetrilisteks (pöördkoorikuteks) ja mitte telgsümmeetrilisteks koorikuteks. Telgsümmeetrilise kooriku keskpind on pöördpind. Pöördpinnad on tekitatud ümber pöördtelje pöörleva tasandilise kõvera poolt (vt. Lisa 3).

2. Tasakaaluvõrrandid

Vaatleme silindrilist koorikut. Punkti asukoha fikseerimiseks silindrilises koorikus kasutame koordinaate x , z ja θ , kusjuures x -telg kulgegu paralleelselt kooriku moodustajaga. Eraldame koorikust elemendi kahe lõpmata lähestikku asetseva moodustajat läbiva normaallõikega ning kahe lõpmata lähestikku võetud ristlõikega. Silindrilise kooriku korral on normaallõigete tasapindades asetsevad kooriku keskpinna peakõverusraadiused R_1 ja R_2 . Elemendi normaallõigetel esinegu järgmised pinged:

$$\sigma_1; \sigma_2; \tau_{12} = \tau_{21}; \tau_{13}; \tau_{31}.$$

Pinged võimaldavad arvutada normaallõike pikkusühiku kohta mõjuvad sisejõud. Järgnevalt avaldame need sisejõud, integreerides vastavaid avaldisi kooriku paksuse h ulatuses:

$$N_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_1 \left(1 - \frac{z}{R_2}\right) dz,$$

$$N_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_2 \left(1 - \frac{z}{R_1}\right) dz,$$

$$S_{12} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{12} \left(1 - \frac{z}{R_2}\right) dz, \quad (2.1)$$

$$S_{21} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{21} \left(1 - \frac{z}{R_1}\right) dz, \quad (2.2)$$

$$M_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_1 z \left(1 - \frac{z}{R_2}\right) dz,$$

$$M_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_2 z \left(1 - \frac{z}{R_1}\right) dz,$$

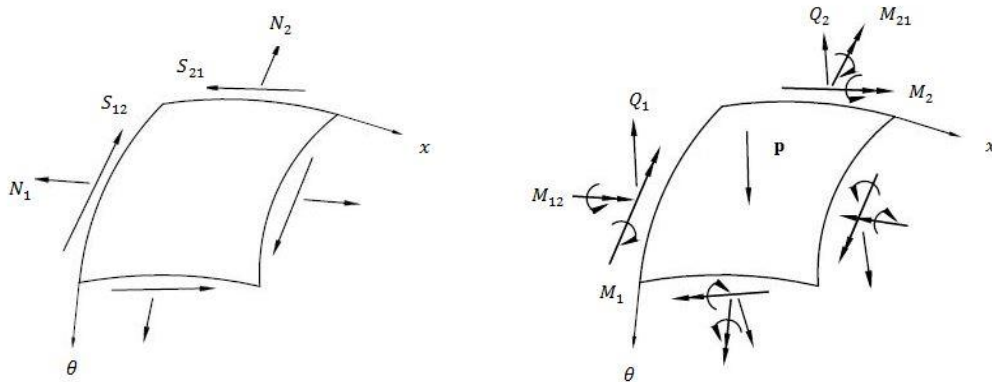
$$M_{12} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{12} z \left(1 - \frac{z}{R_2}\right) dz, \quad (2.3)$$

$$M_{21} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{21} z \left(1 - \frac{z}{R_1}\right) dz, \quad (2.4)$$

$$Q_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{13} \left(1 - \frac{z}{R_2}\right) dz,$$

$$Q_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{31} \left(1 - \frac{z}{R_1}\right) dz.$$

Siin N_1 , N_2 on normaaljõud, S_{12} , S_{21} nihkejõud; M_1 , M_2 painemomendid; M_{12} , M_{21} väändemomendid ja Q_1 , Q_2 on põikjõud.



Joonis 2.1. Elemendile mõjuvad jõud ja momendid

Sisejõudude avaldistes olevad jagatised $\frac{z}{R_1}$ ja $\frac{z}{R_2}$ võime ära jätta kuna vaatleme õhukesi koorikuid, milles kooriku paksus $\frac{h}{R_2}$ on väike. Nüüd saavad sisejõudude avaldistes järgmise kuju:

$$N_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_1 dz,$$

$$N_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_2 dz,$$

$$S_{12} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{12} dz,$$

$$S_{21} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{21} dz,$$

$$M_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_1 z dz,$$

$$M_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_2 z dz,$$

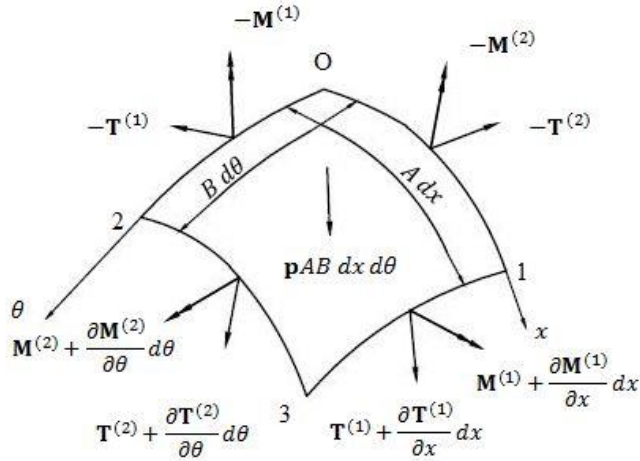
$$M_{12} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{12} z dz,$$

$$M_{21} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{21} z dz,$$

$$Q_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{13} dz,$$

$$Q_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{31} dz.$$

Kuna $\tau_{12} = \tau_{21}$, siis $S_{12} = S_{21}$ ja $M_{12} = M_{21}$.



Joonis 2.2. Resultantjõud ja resultantoment

Kooriku elemendile mõjuvad sisejõud ja momendid on näidatud joonisel 2.2. Asendame need sisejõud ja momendid süsteemiga, mis koosneb kooriku elemendi igale servale rakendatud resultantjõust $\mathbf{T}^{(i)}$ ja resultantomendist $\mathbf{M}^{(i)}$ ($i=1,2$) (vt. Joonis 2.2).

Kohal $x = 0$ avalduvad resultantjõud ja resultantomendid kujul

$$-\mathbf{T}^{(1)} = -(N_1 \mathbf{e}_1 + S_{12} \mathbf{e}_2 + Q_1 \mathbf{e}_3) B d\theta,$$

$$-\mathbf{M}^{(1)} = -(M_1 \mathbf{e}_2 - M_{12} \mathbf{e}_1) B d\theta \quad (2.5)$$

ning kohal $\theta = 0$ avalduvad $\mathbf{T}^{(2)}$ ja $\mathbf{M}^{(2)}$ kujul

$$-\mathbf{T}^{(2)} = -(S_{21} \mathbf{e}_1 + N_2 \mathbf{e}_2 + Q_2 \mathbf{e}_3) A dx,$$

$$-\mathbf{M}^{(2)} = -(S_{21} \mathbf{e}_2 - M_2 \mathbf{e}_1) A dx \quad (2.6)$$

Sisejõudude ja momentide ees olevad märgid võrrandites (2.5) ja (2.6) on valitud vastavalt joonistele 2.1 ja 2.2. Jooniselt 2.2 näeme, et resultantjõud $\mathbf{T}^{(1)}$ ja resultantoment $\mathbf{M}^{(1)}$

mõjuvad elemendi serval 02, resultandid $\mathbf{T}^{(2)}$ ja $\mathbf{M}^{(2)}$ serval 01, resultandid $\mathbf{T}^{(1)} + \frac{\partial \mathbf{T}^{(1)}}{\partial x} dx$ ja $\mathbf{M}^{(1)} + \frac{\partial \mathbf{M}^{(1)}}{\partial x} dx$ serval 13 ning $\mathbf{T}^{(2)} + \frac{\partial \mathbf{T}^{(2)}}{\partial \theta} d\theta$ ja $\mathbf{M}^{(2)} + \frac{\partial \mathbf{M}^{(2)}}{\partial \theta} d\theta$ serval 23. Lisaks mõjub kooriku elemendile $\mathbf{p}AB dx d\theta$, kus \mathbf{p} on pingvektor

$$\mathbf{p} = p_1 \mathbf{e}_1 + p_2 \mathbf{e}_2 + p_3 \mathbf{e}_3 \quad (2.7)$$

Rakendame tasakaaluvõrrandeid järgnevalt:

$$\Sigma \mathbf{T} = 0, \quad (2.8)$$

$$\Sigma \mathbf{M} = 0. \quad (2.9)$$

Joonise 2.2 kohaselt saab jõu tasakaaluvõrrand (2.8) kuju

$$-\mathbf{T}^{(1)} + \mathbf{T}^{(1)} + \frac{\partial \mathbf{T}^{(1)}}{\partial x} dx - \mathbf{T}^{(2)} + \mathbf{T}^{(2)} + \frac{\partial \mathbf{T}^{(2)}}{\partial \theta} d\theta + \mathbf{p}AB dx d\theta = 0,$$

millest

$$\frac{\partial \mathbf{T}^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{T}^{(2)}}{\partial \theta} d\theta + \mathbf{p}AB dx d\theta = 0. \quad (2.10)$$

Asendades võrrandid (2.5) – (2.7) võrrandisse (2.10), kasutades ühikvektorite diferentseerimise reegleid (vt [3]) ning jättes ära ühise liikme $dx d\theta$, saame vektorvõrrandi

$$\left[\frac{\partial(N_1 B)}{\partial x} + \frac{\partial(S_{21} A)}{\partial \theta} - N_2 \left(\frac{\partial B}{\partial x} \right) + S_{12} \left(\frac{\partial A}{\partial \theta} \right) - \left(\frac{1}{R_1} \right) Q_1 AB + p_1 AB \right] \mathbf{e}_1 + \left[\frac{\partial(N_2 A)}{\partial \theta} + \frac{\partial(S_{12} B)}{\partial x} - N_1 \left(\frac{\partial A}{\partial \theta} \right) + S_{21} \left(\frac{\partial B}{\partial x} \right) - \left(\frac{1}{R_2} \right) Q_2 AB + p_2 AB \right] \mathbf{e}_2 + \left[\frac{\partial(Q_1 B)}{\partial x} + \frac{\partial(Q_2 A)}{\partial \theta} + N_1 \left(\frac{AB}{R_1} \right) + N_2 \left(\frac{AB}{R_2} \right) + p_3 AB \right] \mathbf{e}_3 = 0. \quad (2.11)$$

Kuna ühikvektorid on sõltumatud, siis on võrrand (2.11) rahuldatud tingimustel, et nurksulgudes olevad avaldised on võrdsed nulliga. Võrrandist (2.11) saame kolm tasakaaluvõrrandit.

Joonise 2.2 kohaselt saab momendi tasakaaluvõrrand (2.9) kuju

$$\mathbf{M}^{(1)} + \frac{\partial \mathbf{M}^{(1)}}{\partial x} dx - \mathbf{M}^{(1)} + \mathbf{M}^{(2)} + \frac{\partial \mathbf{M}^{(2)}}{\partial \theta} d\theta - \mathbf{M}^{(2)} + A dx (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{T}^{(1)}) + B d\theta (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{T}^{(2)}) = 0,$$

millest

$$\frac{\partial \mathbf{M}^{(1)}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathbf{M}^{(2)}}{\partial \theta} d\theta + A dx (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{T}^{(1)}) + B d\theta (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{T}^{(2)}) = 0. \quad (2.12)$$

Asendades $\mathbf{M}^{(1)}$, $\mathbf{M}^{(2)}$, $\mathbf{T}^{(1)}$ ja $\mathbf{T}^{(2)}$ võrranditest (2.5) ja (2.6) võrrandisse (2.12), võttes arvesse ühikvektorite diferentseerimise reegleid ning jättes ära ühise liikme $dx d\theta$, saame järgneva vektorvõrrandi

$$\begin{aligned} & \left[-\frac{\partial(M_{12}B)}{\partial x} - \frac{\partial(M_2A)}{\partial \theta} + M_1 \left(\frac{\partial A}{\partial \theta} \right) - \left(\frac{\partial B}{\partial x} \right) + Q_2 AB \right] \mathbf{e}_1 + \left[\frac{\partial(M_{21}A)}{\partial \theta} + \frac{\partial(M_1B)}{\partial x} - M_2 \left(\frac{\partial B}{\partial x} \right) + \right. \\ & \left. M_{12} \left(\frac{\partial A}{\partial \theta} \right) - Q_1 AB \right] \mathbf{e}_2 + \left[(S_{12} - S_{21}) AB + M_{21} \frac{AB}{R_1} - M_{12} \frac{AB}{R_2} = 0 \right] \mathbf{e}_3 = 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Võrrandist (2.13) saame kolm momendi tasakaaluvõrrandi.

Oleme saanud kuus tasakaalutingimust:

$$\frac{\partial(N_1B)}{\partial x} + \frac{\partial(S_{21}A)}{\partial \theta} - N_2 \left(\frac{\partial B}{\partial x} \right) + S_{12} \left(\frac{\partial A}{\partial \theta} \right) - \left(\frac{1}{R_1} \right) Q_1 AB + p_1 AB = 0,$$

$$\frac{\partial(N_2A)}{\partial \theta} + \frac{\partial(S_{12}B)}{\partial x} - N_1 \left(\frac{\partial A}{\partial \theta} \right) + S_{21} \left(\frac{\partial B}{\partial x} \right) - \left(\frac{1}{R_2} \right) Q_2 AB + p_2 AB = 0,$$

$$\left[\frac{\partial(Q_1B)}{\partial x} \right] + \left[\frac{\partial(Q_2A)}{\partial \theta} \right] + N_1 \left(\frac{AB}{R_1} \right) + N_2 \left(\frac{AB}{R_2} \right) + p_3 AB = 0,$$

$$\left[\frac{\partial(M_{12}B)}{\partial x} \right] + \left[\frac{\partial(M_2A)}{\partial \theta} \right] - M_1 \left(\frac{\partial A}{\partial \theta} \right) + M_{21} \left(\frac{\partial B}{\partial x} \right) - Q_2 AB = 0,$$

$$\left[\frac{\partial(M_{21}A)}{\partial \theta} \right] + \left[\frac{\partial(M_1B)}{\partial x} \right] - M_2 \left(\frac{\partial B}{\partial x} \right) + M_{12} \left(\frac{\partial A}{\partial \theta} \right) - Q_1 AB = 0,$$

$$S_{12} - S_{21} + \frac{M_{21}}{R_1} - \frac{M_{12}}{R_2} = 0.$$

On kerge näidata, et viimane tasakaalutingimus samaselt rahuldub.

Asendame selles avaldises jõud avaldistega (2.1)-(2.4), saame

$$\begin{aligned} & \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{12} \left(1 - \frac{z}{R_2} \right) dz - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{21} \left(1 - \frac{z}{R_1} \right) dz - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{12} \frac{z}{R_1} \left(1 - \frac{z}{R_1} \right) dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{21} \frac{z}{R_2} \left(1 - \right. \\ & \left. \frac{z}{R_1} \right) dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(1 - \frac{z}{R_2} \right) \left(1 - \frac{z}{R_1} \right) (\tau_{12} - \tau_{21}) dz \equiv 0, \end{aligned}$$

sest $\tau_{12} = \tau_{21}$.

Kokkuvõttes oleme saanud süsteemi, mis koosneb viiest tasakaaluvõrrandist

$$\frac{\partial(N_1 B)}{\partial x} + \frac{\partial(S_{21} A)}{\partial \theta} - N_2 \left(\frac{\partial B}{\partial x} \right) + S_{12} \left(\frac{\partial A}{\partial \theta} \right) - \left(\frac{1}{R_1} \right) Q_1 AB + p_1 AB = 0,$$

$$\frac{\partial(N_2 A)}{\partial \theta} + \frac{\partial(S_{12} B)}{\partial x} - N_1 \left(\frac{\partial A}{\partial \theta} \right) + S_{21} \left(\frac{\partial B}{\partial x} \right) - \left(\frac{1}{R_2} \right) Q_2 AB + p_2 AB = 0,$$

$$\left[\frac{\partial(Q_1 B)}{\partial x} \right] + \left[\frac{\partial(Q_2 A)}{\partial \theta} \right] + N_1 \left(\frac{AB}{R_1} \right) + N_2 \left(\frac{AB}{R_2} \right) + p_3 AB = 0,$$

$$\left[\frac{\partial(M_{12} B)}{\partial x} \right] + \left[\frac{\partial(M_2 A)}{\partial \theta} \right] - M_1 \left(\frac{\partial A}{\partial \theta} \right) + M_{21} \left(\frac{\partial B}{\partial x} \right) - Q_2 AB = 0,$$

$$\left[\frac{\partial(M_{21} A)}{\partial \theta} \right] + \left[\frac{\partial(M_1 B)}{\partial x} \right] - M_2 \left(\frac{\partial B}{\partial x} \right) + M_{12} \left(\frac{\partial A}{\partial \theta} \right) - Q_1 AB = 0.$$

3. Ringsilindriline koorik üldise koormuse all

Vaatleme järgnevalt juhtu, kui on tegemist ringsilindrilise koorikuga. Võtame ette eelmises paragrahvis saadud tasakaaluvõrrandid

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(N_1 B)}{\partial x} + \frac{\partial(S_{21} A)}{\partial \theta} - N_2 \left(\frac{\partial B}{\partial x} \right) + S_{12} \left(\frac{\partial A}{\partial \theta} \right) - \left(\frac{1}{R_1} \right) Q_1 AB + p_1 AB &= 0, \\
 \frac{\partial(N_2 A)}{\partial \theta} + \frac{\partial(S_{12} B)}{\partial x} - N_1 \left(\frac{\partial A}{\partial \theta} \right) + S_{21} \left(\frac{\partial B}{\partial x} \right) - \left(\frac{1}{R_2} \right) Q_2 AB + p_2 AB &= 0, \\
 \left[\frac{\partial(Q_1 B)}{\partial x} \right] + \left[\frac{\partial(Q_2 A)}{\partial \theta} \right] + N_1 \left(\frac{AB}{R_1} \right) + N_2 \left(\frac{AB}{R_2} \right) + p_3 AB &= 0, \\
 \left[\frac{\partial(M_{12} B)}{\partial x} \right] + \left[\frac{\partial(M_2 A)}{\partial \theta} \right] - M_1 \left(\frac{\partial A}{\partial \theta} \right) + M_{21} \left(\frac{\partial B}{\partial x} \right) - Q_2 AB &= 0, \\
 \left[\frac{\partial(M_{21} A)}{\partial \theta} \right] + \left[\frac{\partial(M_1 B)}{\partial x} \right] - M_2 \left(\frac{\partial B}{\partial x} \right) + M_{12} \left(\frac{\partial A}{\partial \theta} \right) - Q_1 AB &= 0,
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

ja vähendame nendes tundmatute arvu tähistades

$$M_{12} = M_{21} = H$$

ja

$$S = S_{12} + \frac{H}{R_2} = S_{21} + \frac{H}{R_1}.$$

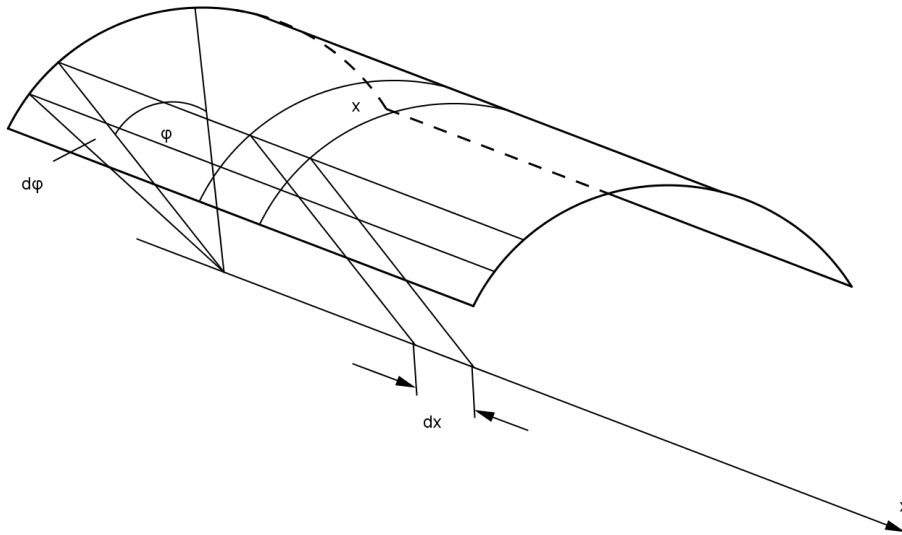
Avaldame võrrandisüsteemi (3.1) kahest viimasest võrrandist lõikejõud Q_1 ja Q_2 ning asendame need võrrandisüsteemi (3.1) kolme esimesse võrrandisse koos asendustega

$$S_{12} = S - \frac{H}{R_2} \text{ ja } S_{21} = S - \frac{H}{R_1}.$$

Saame:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(N_1 B)}{\partial x} + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \theta} (SA^2) - \frac{2}{R_2} \frac{\partial A}{\partial \theta} H - \frac{1}{R_1} \left[\frac{\partial}{\partial x} (M_1 B) - M_2 \frac{\partial B}{\partial x} + 2 \frac{\partial}{\partial \theta} (HA) \right] - N_2 \left(\frac{\partial B}{\partial x} \right) + ABp_1 &= 0, \\
 \frac{\partial(N_2 A)}{\partial \theta} + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial x} (SB^2) - \frac{2}{R_1} \frac{\partial B}{\partial x} H - \frac{1}{R_2} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (M_2 A) - M_1 \frac{\partial A}{\partial \theta} + 2 \frac{\partial}{\partial x} (HB) \right] - N_1 \left(\frac{\partial A}{\partial \theta} \right) + ABp_2 &= 0, \\
 N_1 \frac{AB}{R_1} + N_2 \frac{AB}{R_2} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{A} \left[\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \theta} (HA^2) + \frac{\partial}{\partial x} (M_1 B) - M_2 \frac{\partial B}{\partial x} \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{1}{B} \left[\frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial x} (HB^2) + \frac{\partial}{\partial \theta} (M_2 A) - \right. \right. \\
 \left. \left. M_1 \frac{\partial A}{\partial \theta} \right] \right\} + ABp_3 &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Vaatleme nüüd ringsilindrilist koorikut. Punkti asukoha fikseerimiseks ringsilindrilises koorikus kasutame koordinaate x ja θ , kusjuures x -telg kulgegu paralleelselt kooriku moodustajaga. Eraldame koorikust elemendi kahe lõpmata lähestikku asetseva moodustajat läbiva normaallõikega ning kahe lõpmata lähestikku võetud ristlõikega (vt. joonis 3.1).



Joonis 3.1. Silindriline koorik

Vaatleme kooriku elementi, mis on määratud koordinaatidega $x, x + dx$ ja $\theta, \theta + d\theta$. Esimene pinna ruutvorm avaldub kujul

$$ds^2 = dx^2 + R_2^2 d\theta^2.$$

Pinna ruutvormist saame, et Lamé parameetrid silindrilise kooriku korral on

$$A = 1,$$

$$B = R_2.$$

Silindrilise kooriku korral on normaallõigete tasapindades asetsevad kooriku keskpinna peakõverusraadiused

$$R_1 = \infty,$$

$$R_2 = \text{const} = R, \tag{3.3}$$

kus R on ringsilindri raadius. Seega Lamé parameetrid ringsilindrilise kooriku korral on

$$A = 1,$$

$$B = R = \text{const.} \quad (3.4)$$

Asendades (3.3) ja (3.4) võrrandisüsteemi (3.2) saame

$$\begin{aligned} R \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial \theta} + p_1 R &= 0, \\ \frac{\partial N_2}{\partial \theta} + R \frac{\partial S}{\partial x} - \frac{1}{R} \frac{\partial M_2}{\partial \theta} - 2 \frac{\partial H}{\partial x} + p_2 R &= 0, \\ N_2 + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 M_2}{\partial \theta^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial \theta} + R \frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + p_3 R &= 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Õhukese silindrilise kooriku deformatsiooni komponentide vastavad võrrandid saame üldisest kooriku teooriast (vt. [1] - [7]):

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \theta} v - \frac{w}{R_1}, \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} u - \frac{w}{R_2}, \\ \gamma_{12} &= \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v}{B} \right) + \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{u}{A} \right), \\ \chi_1 &= - \left[\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u}{R_1} + \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \theta} \left(\frac{v}{R_2} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right], \\ \chi_2 &= - \left[\frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v}{R_2} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} \left(\frac{u}{R_1} + \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right], \\ \chi_{12} &= - \left[\frac{1}{AB} \left(- \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \theta} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right) + \frac{1}{R_1} \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{u}{A} \right) + \frac{1}{R_2} \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v}{B} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Asendades võrrandisse (3.6) seosed (3.3) ja (3.4), saame deformatsiooni komponendid kujul

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{w}{R}, \\ \gamma_{12} &= \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \chi_1 &= - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned}\chi_2 &= -\frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right), \\ \chi_{12} &= -\frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right),\end{aligned}\tag{3.8}$$

Asendades need võrranditesse (vt.[3])

$$N_1 = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2),$$

$$N_2 = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1),$$

$$S = \frac{Eh}{2(1-\nu)} \gamma_{12},$$

$$M_1 = D(\chi_1 + \nu \chi_2),$$

$$M_2 = D(\chi_{12} + \nu \chi_1),$$

$$H = D(1 - \nu) \chi_{12},$$

kus $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ on kooriku silindriline jäikus, saame

$$\begin{aligned}N_1 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - w \right) \right], \\ N_2 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - w \right) + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right], \\ S &= \frac{Eh}{2(1-\nu)} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right),\end{aligned}\tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}M_1 &= -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\nu}{R^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right], \\ M_2 &= -D \left[\frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right], \\ H &= -D(1 - \nu) \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right) \frac{1}{R}.\end{aligned}\tag{3.10}$$

Asendades võrrandid (3.9), (3.10) võrrandisse (3.5) ja võttes kasutusele dimensioonita koordinaadi $\xi = x/R$, saame kolmest võrrandist avaldada siirded u , v ja w . On mugav kirjutada see võrrandisüsteem maatriks kujul

$$\mathbf{Lu} = \mathbf{g},$$

kus

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix},$$

ja

$$\mathbf{g} = \frac{1-v^2}{Eh} R^2 \begin{Bmatrix} -p_1 \\ -p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix}.$$

Diferentsiaalmaatriksi L elemendid on

$$l_{11} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1-v}{2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2},$$

$$l_{12} = l_{21} = \frac{1+v}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \theta},$$

$$l_{13} = l_{31} = -v \frac{\partial}{\partial \xi},$$

$$l_{22} = \frac{1-v}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial}{\partial \theta} + a^2 \left[2(1-v) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right],$$

$$l_{23} = l_{32} = -\frac{\partial}{\partial \theta} + a^2 \left[(2-v) \frac{\partial^3}{\partial \xi^2 \partial \theta} + \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \right],$$

$$l_{33} = 1 + a^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right),$$

kus

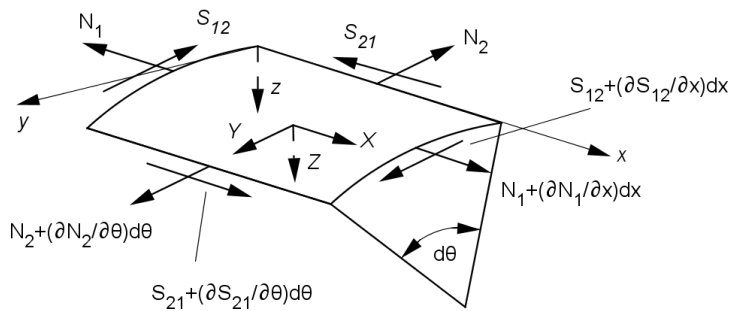
$$a^2 = h^2/12R^2.$$

Õhukeste koorikute jaoks on a^2 väärtus väga väike (10^{-4} - 10^{-6}). Need on diferentsiaalvõrrandid ringsilindrilise kooriku painde jaoks üldise koormuse korral.

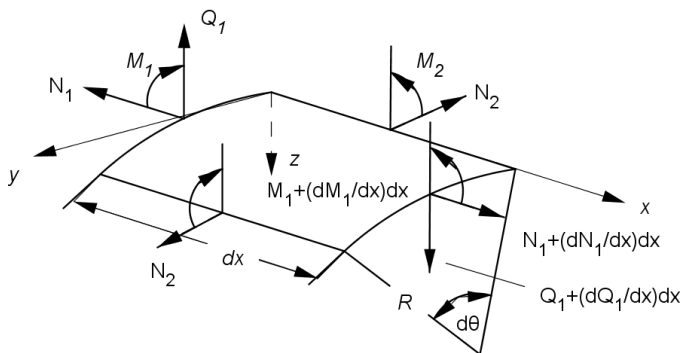
4. Telgsümmeetriliselt koormatud ringsilindriline koorik

Torud, boilerid ja mitmesugused teised anumad, millele mõjub siserõhk, võib lugeda telgsümmeetriliselt koormatud ringsilindriliseks koorikuks.

Eraldame ringsilindrilisest koorikust elemendi kahe moodustajasihilise ja kahe moodustajaga risti võetud ristlõikega (joonised 3.1, 4.1, 4.2).



Joonis 4.1. Kooriku elemendile mõjuvad jõud



Joonis 1.2. Elemendile mõjuvad momendid

Suletud ringsilindriline koorik raadiusega R deformeerub telgsümmeetriliselt kui sellele mõjuv väline koormus ja rajatingimused otsades on sümmeetrilised ja rajatingimused ei sõltu koordinaadist θ . Sellisel juhul on pinged, siirded, sisejõud ja momendid ainult koordinaadi x funktsioonid ja kooriku paralleelringisihiline siire v null. Pidades silmas eelnevaid lihtsustusi, suurused S , H , Q_2 , γ_{12} , χ_2 ja χ_{12} langevad välja. Ainult kolm viiest

tasakaaluvõrrandist (3.1) jäävad alles, teised on rahuldatud samaselt. Need kolm tasakaaluvõrrandit avalduvad kujul:

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{dx} + p_1 &= 0, \\ N_2 \frac{1}{R} + \frac{dQ_1}{dx} + p_3 &= 0, \\ \frac{dM_1}{dx} - Q_1 &= 0.\end{aligned}\tag{4.1}$$

Võrrandist

$$\frac{dN_1}{dx} + p_1 = 0$$

avaldub membraanjõud N_I kujul

$$N_1 = - \int p_1 dx + C,$$

kus C on integreerimiskonstant.

Võime kirjutada

$$N_1 = - \int p_1 dx + N_1(0).$$

komponendid (3.7) ja (3.8) on kujul

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{du}{dx}, \\ \varepsilon_2 &= -\frac{w}{R}, \\ \chi_1 &= -\frac{d^2w}{dx^2}.\end{aligned}\tag{4.2}$$

Võrrandid (3.9) ja (3.10) võtavad kuju

$$\begin{aligned}N_1 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{du}{dx} - \nu \frac{w}{R} \right), \\ N_2 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\nu \frac{du}{dx} - \frac{w}{R} \right),\end{aligned}\tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}M_1 &= -D \frac{d^2w}{dx^2}, \\ M_2 &= -D\nu \frac{d^2w}{dx^2} = \nu M_1.\end{aligned}\tag{4.4}$$

Elimineerides Q_I süsteemi (4.1) teisest ja kolmandast võrrandist, saame

$$N_2 \frac{1}{R} + \frac{d^2 M_1}{dx^2} + p_3 = 0. \quad (4.5)$$

Edasi, kasutades võrrandeid (4.3), saame N_2 väljendada kujul

$$N_2 = -\frac{Eh}{R}w + \nu N_1. \quad (4.6)$$

Asendades võrrandid (4.6) ja (4.3) võrrandisse (4.5) ja eeldades, et $h = \text{const}$, saame järgneva võrrandi:

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{Eh}{R^2}w = p_3 + \frac{\nu}{R}N_1. \quad (4.7)$$

Juhul, kui $N_1 = 0$ ning $p_3 = p$, võtab (4.7) kuju

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{Eh}{R^2}w = p.$$

5. Näiteülesanne

Mõjugu ringsilindrilisele koorikule ühtlaselt jaotatud koormus intensiivsusega p_0 . Siis on painde võrrand kujul

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{Eh}{R^2} w = p_0, \quad (5.1)$$

kus p_0 on konstant. Lahendame selle konstantsete kordajatega lineaarse homogeense 4. järku diferentsiaalvõrrandi. Esmalt koostame karakteristikliku võrrandi:

$$D\lambda^4 + \frac{Eh}{R^2}\lambda^0 = 0. \quad (5.2)$$

Jagame võrrandi (5.2) läbi suurusega $D \neq 0$ ja avaldame λ^4 , saame

$$\lambda^4 = -\frac{Eh}{R^2 D} \lambda^0.$$

Tähistame $4r^4 = -\frac{Eh}{R^2 D}$, et oleks lihtsam leida karakteristiklikuid väärtuseid. Seega võime kirjutada

$$\lambda^4 = -4r^4,$$

kust saame karakteristiklikud väärtused

$$\lambda_1 = (-1 - i)r = -r - ir,$$

$$\lambda_2 = (-1 + i)r = -r + ir,$$

$$\lambda_3 = (1 - i)r = r - ir,$$

$$\lambda_4 = (1 + i)r = r + ir. \quad (5.3)$$

Komplekssetele karakteristiklikele väärtustele (5.3) vastavad reaalsed erilahendid kujul

$$w_1 = e^{-rx} \sin rx,$$

$$w_2 = e^{-rx} \cos rx,$$

$$w_3 = e^{rx} \sin rx,$$

$$w_4 = e^{rx} \cos rx.$$

Üldlahend avaldub kujul

$$w = C_1 e^{-rx} \sin rx + C_2 e^{-rx} \cos rx + C_3 e^{rx} \sin rx + C_4 e^{rx} \cos rx + w_*,$$

kus C_1, C_2, C_3, C_4 on konstandid ja w_* on diferentsiaalvõrrandi erilahend.

$$\text{Ilmselt } w_* = \frac{p_0 R^2}{Eh}.$$

Sel juhul on üldlahend kujul

$$w = C_1 e^{-rx} \sin rx + C_2 e^{-rx} \cos rx + C_3 e^{rx} \sin rx + C_4 e^{rx} \cos rx + \frac{p_0 R^2}{Eh} \quad (5.4)$$

Konstandid C_1, C_2, C_3, C_4 väärtused leiame rajatingimuste kaudu. Kuna meil on kinnine koorik, siis rajatingimused on

$$w(0) = 0, \quad (5.5)$$

$$w(l) = 0, \quad (5.6)$$

$$M(0) = 0, \quad (5.7)$$

$$M(l) = 0. \quad (5.8)$$

Diferentseerides võrrandit (5.4) saame

$$w'(x) = r e^{-rx} [C_1 (-\sin rx + \cos rx) + C_2 (-\sin rx - \cos rx)] + r e^{rx} [C_3 (\cos rx + \sin rx) + C_4 (-\sin rx + \cos rx)]. \quad (5.9)$$

Diferentseerides võrrandit (5.9) saame

$$\begin{aligned} w''(x) = & -r^2 e^{-rx} [C_1 (-\sin rx + \cos rx) + C_2 (-\sin rx - \cos rx)] + r^2 e^{-rx} [C_1 (-\sin rx - \\ & \cos rx) + C_2 (-\cos rx + \sin rx)] + r^2 e^{rx} [C_3 (\cos rx + \sin rx) + C_4 (-\sin rx + \\ & \cos rx)] + r^2 e^{rx} [C_3 (-\sin rx + \cos rx) + C_4 (-\cos rx - \sin rx)]. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Kasutades rajatingimusi (5.5) - (5.8) ning teades, et $M = -w''$, saame kirjutada võrranditest (5.4) ning (5.10) järgnevad tulemused:

$$C_2 + C_4 + \frac{p_0 R^2}{Eh} = 0, \quad (5.11)$$

$$C_1 e^{-rl} \sin rl + C_2 e^{-rl} \cos rl + C_3 e^{rl} \sin rl + C_4 e^{rl} \cos rl + \frac{p_0 R^2}{Eh} = 0, \quad (5.12)$$

$$C_1 - C_3 = 0, \quad (5.13)$$

$$C_1 e^{-rl} \cos rl - C_2 e^{-rl} \sin rl - C_3 e^{rl} \cos rl + C_4 e^{rl} \sin rl = 0. \quad (5.14)$$

Võrranditest (5.11) ja (5.13) saame, et

$$C_4 = -C_2 - \frac{p_0 R^2}{Eh} \quad (5.15)$$

ja

$$C_3 = C_1 \quad (5.16)$$

ning asendades saadud tulemused (5.15) ja (5.16) võrranditesse (5.12) ja (5.14), saame

$$C_1 (e^{-rl} + e^{rl}) \sin rl + C_2 (e^{-rl} - e^{rl}) \cos rl + \frac{p_0 R^2}{Eh} (e^{rl} \cos rl - 1), \quad (5.17)$$

$$C_1 (e^{-rl} - e^{rl}) \cos rl - C_2 (e^{-rl} + e^{rl}) \sin rl = \frac{p_0 R^2}{Eh} e^{rl} \sin rl. \quad (5.18)$$

Võttes kasutusele hüperboolsed funktsioonid $\text{sh } rl = \frac{e^{rl} - e^{-rl}}{2}$ ja $\text{ch } rl = \frac{e^{rl} + e^{-rl}}{2}$ saame võrrandid (5.17) ja (5.18) kirjutada kujul

$$2C_1 \text{ch } rl \sin rl - 2C_2 \text{sh } rl \cos rl = \frac{p_0 R^2}{Eh} (e^{rl} \cos rl - 1), \quad (5.19)$$

$$-2C_1 \text{sh } rl \cos rl - 2C_2 \text{ch } rl \sin rl = \frac{p_0 R^2}{Eh} e^{rl} \sin rl. \quad (5.20)$$

Korrutades võrrandit (5.19) korrutisega $\text{sh } rl \cos rl$ ja võrrandit (5.20) korrutisega $\text{ch } rl \sin rl$ ning liites saadud tulemused, saame

$$\begin{aligned} -2C_2 (\text{sh}^2 rl \cos^2 rl + \text{ch}^2 rl \sin^2 rl) &= \frac{p_0 R^2}{Eh} e^{rl} \text{sh } rl \cos^2 rl - \frac{p_0 R^2}{Eh} \text{sh } rl \cos rl + \\ \frac{p_0 R^2}{Eh} e^{rl} \text{ch } rl \sin^2 rl, \end{aligned}$$

kust saame avaldada konstandi C_2

$$C_2 = \frac{\frac{p_0 R^2}{Eh} (-e^{rl} \text{sh } rl \cos^2 rl + \text{sh } rl \cos rl - e^{rl} \text{ch } rl \sin^2 rl)}{2(\text{sh}^2 rl \cos^2 rl + \text{ch}^2 rl \sin^2 rl)}. \quad (5.21)$$

Nüüd korrutame võrrandit (5.19) korrutisega $\text{ch } rl \sin rl$ ja võrrandit (5.20) korrutisega $\text{sh } rl \cos rl$ ning lahutades saadud tulemused, saame

$$2C_1(\text{ch}^2 rl \sin^2 rl + \text{sh}^2 rl \cos^2 rl) = \frac{p_0 R^2}{Eh} e^{rl} \text{ch} rl \sin rl \cos rl - \frac{p_0 R^2}{Eh} \text{ch} rl \sin rl - \frac{p_0 R^2}{Eh} e^{rl} \text{sh} rl \sin rl \cos rl,$$

kust saame avaldada konstandi C_1

$$C_1 = \frac{\frac{p_0 R^2}{Eh}(e^{rl} \text{ch} rl \sin rl \cos rl - \text{ch} rl \sin rl - e^{rl} \text{sh} rl \sin rl \cos rl)}{2(\text{ch}^2 rl \sin^2 rl + \text{sh}^2 rl \cos^2 rl)}. \quad (5.22)$$

Lihtsuse mõttes tähistame

$$k = \frac{p_0 R^2}{Eh},$$

$$m_1 = \text{ch} rl \sin rl,$$

$$m_2 = \text{sh} rl \cos rl,$$

$$m_3 = e^{rl} \text{sh} rl \cos^2 rl,$$

$$m_4 = e^{rl} \text{ch} rl \sin^2 rl,$$

$$m_5 = e^{rl} \cos rl,$$

$$m_6 = e^{rl} \sin rl. \quad (5.23)$$

Kasutades tähistusi (5.23) võime võrrandid (5.21) ja (5.22) kirjutada kujul

$$C_1 = \frac{k(m_1 m_5 - m_1 - m_2 m_5)}{2(m_1^2 + m_2^2)}$$

ja

$$C_2 = \frac{k(m_2 - m_3 - m_4)}{2(m_1^2 + m_2^2)}$$

Kasutades seost (5.15) leiame konstandi C_4

$$C_4 = -\frac{k(m_2 - m_3 - m_4 - 2m_1^2 - 2m_2^2)}{2(m_1^2 + m_2^2)}$$

Nüüd saame süsteemi (5.11)-(5.14) lahendi kirjutada kujul

$$C_1 = C_3 = \frac{k(m_1 m_5 - m_1 - m_2 m_5)}{2(m_1^2 + m_2^2)},$$

$$C_2 = \frac{k(m_2 - m_3 - m_4)}{2(m_1^2 + m_2^2)},$$

$$C_4 = -\frac{k(m_2 - m_3 - m_4 - 2m_1^2 - 2m_2^2)}{2(m_1^2 + m_2^2)},$$

kus

$$k = \frac{p_0 R^2}{Eh},$$

$$m_1 = \operatorname{ch} rl \sin rl,$$

$$m_2 = \operatorname{sh} rl \cos rl,$$

$$m_3 = e^{rl} \operatorname{sh} rl \cos^2 rl,$$

$$m_4 = e^{rl} \operatorname{ch} rl \sin^2 rl,$$

$$m_5 = e^{rl} \cos rl,$$

$$m_6 = e^{rl} \sin rl.$$

Kasutades võrrandit (45) ning seost $M = -w''$, saame suuruse M kirjutada kujul

$$M(l) = \frac{k(m_1 m_5 - m_1 - m_2 m_5)}{2(m_1^2 + m_2^2)} e^{-rl} \cos rl - \frac{k(m_2 - m_3 - m_4)}{2(m_1^2 + m_2^2)} e^{-rl} \sin rl -$$

$$\frac{k(m_1 m_5 - m_1 - m_2 m_5)}{2(m_1^2 + m_2^2)} e^{rl} \cos rl - \frac{k(m_2 - m_3 - m_4 - 2m_1^2 - 2m_2^2)}{2(m_1^2 + m_2^2)} e^{rl} \sin rl .$$

Kasutatud kirjandus

- [1] Eek, R., Poverus, L., Ehitusmehaanika II, Tallinn, Valgus, 1967.
- [2] Eschenauer, H., Olhoff, N., Schnell, W., Applied Structural Mechanics, Springer, 1997.
- [3] Krauthammer, T., Ventsel, E., Thin Plates and Shells: Theory, Analysis and Applications, Marcel Dekker, 2001.
- [4] Reddy, J.N., Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells, Taylor & Francis Group, 2007.
- [5] Tärno, Ü., Plaadi- ja koorikumehaanika, Tallinn, TTÜ kirjastus, 2000.

- [6] Александров, А.В., Потапов, В.Д., Основы теории упругости и пластичности, Москва, Высшая школа, 1990.
- [7] Тербушко, О.И., Основы теории упругости и пластичности, Москва, Наука, 1984.

Lisad

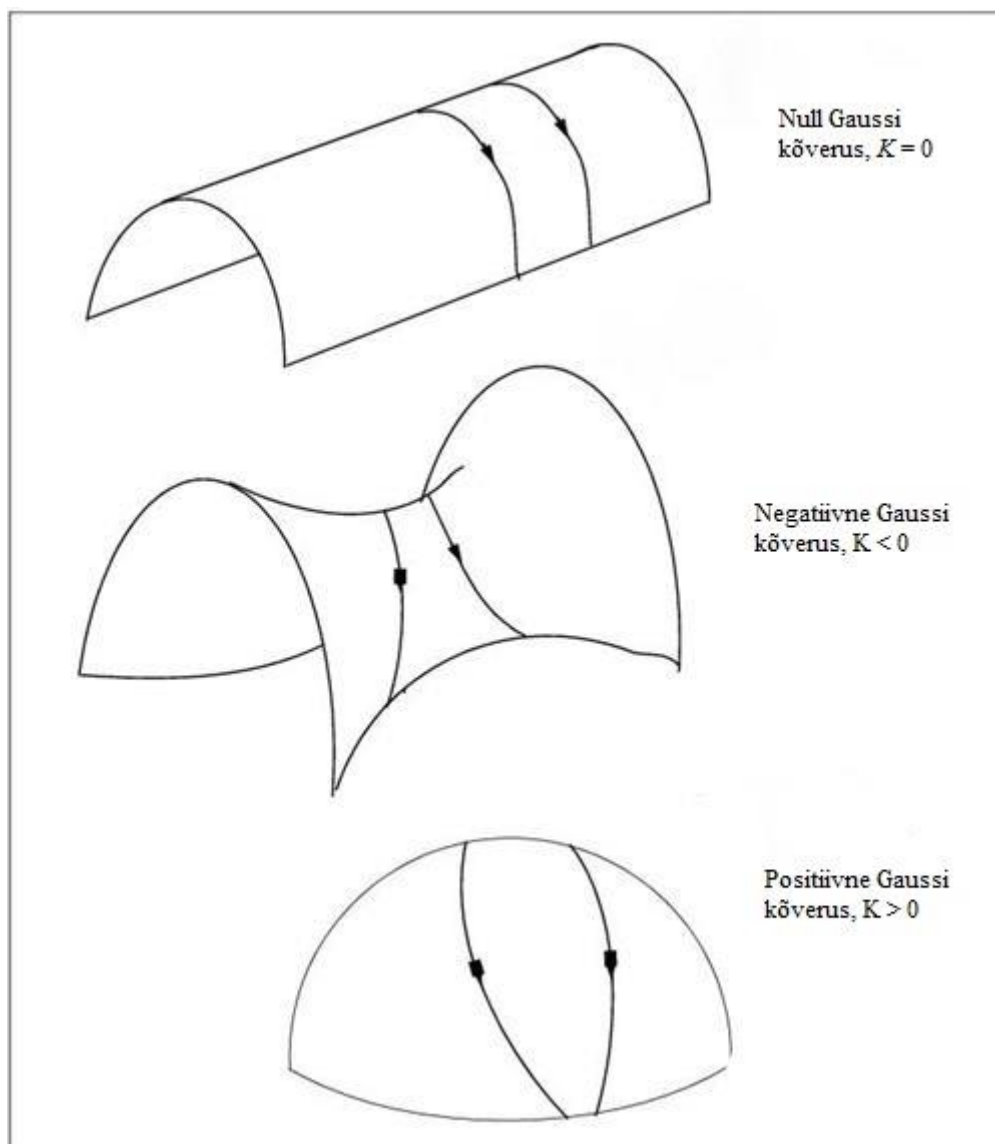
Lisa 1

Koorikute näiteid



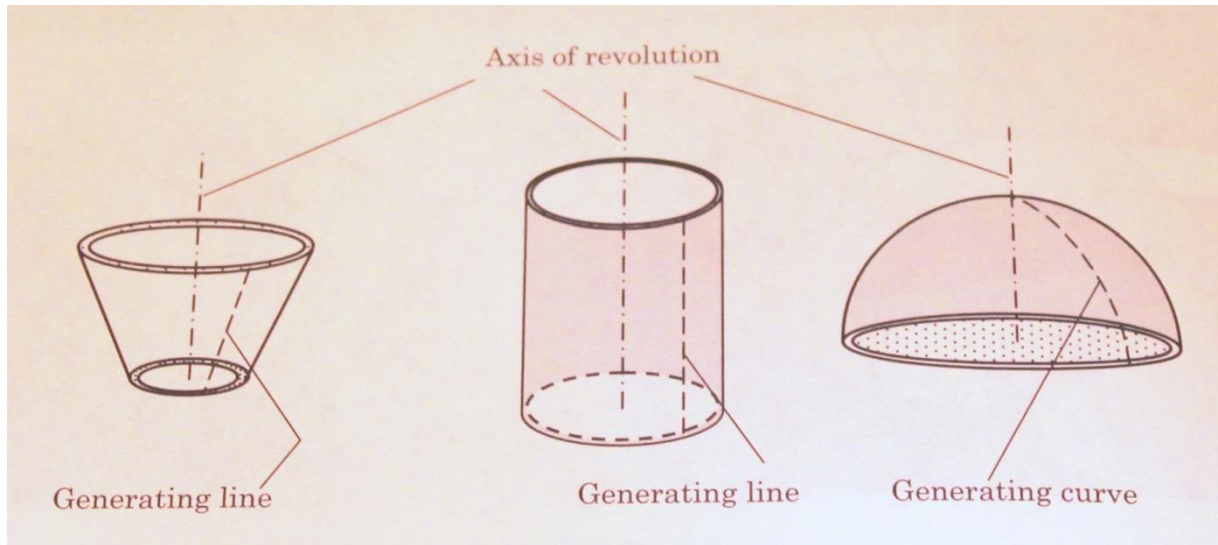
Lisa 2

Gaussi kõverus

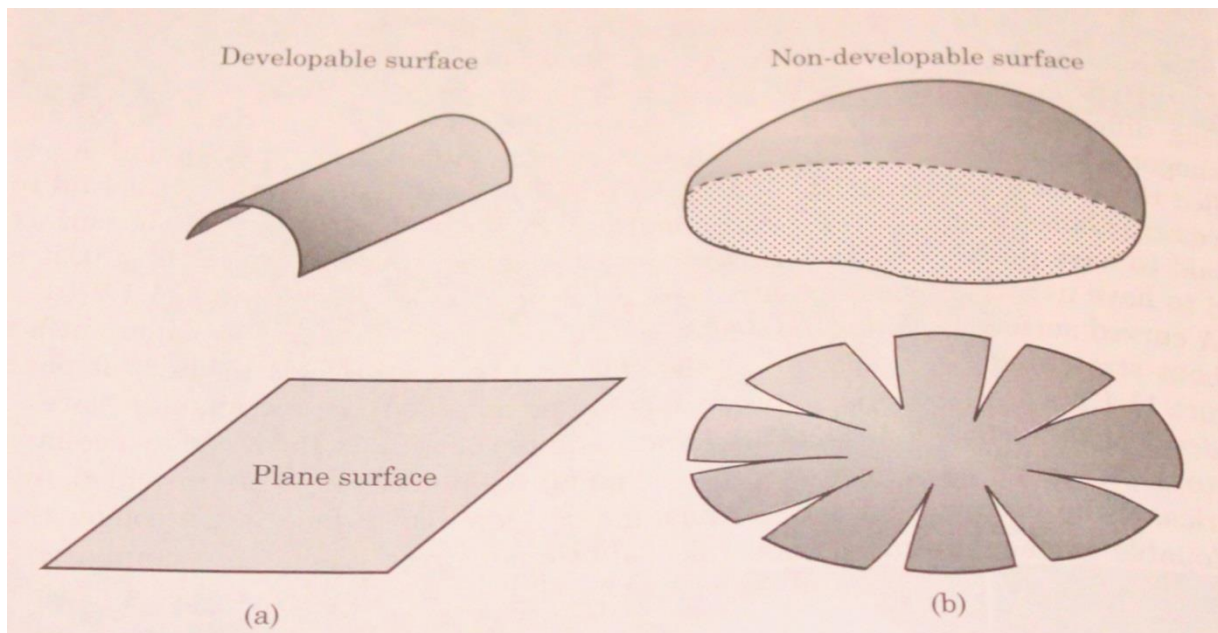


Lisa 3

Pöördpinnad



Pinnad



Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, _____ Merilin Ollema _____ (23.11.1990) _____,
(*autori nimi*)

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose
_____ Silindrilise kooriku paine _____,
(*lõputöö pealkiri*)

mille juhendaja on _____ Jaan Lellep _____,
(*juhendaja nimi*)

- 1.1.reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;
 - 1.2.üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.
2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
 3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus/Tallinnas/Narvas/Pärnus/Viljandis, 05.06.2014