

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL
Matemaatilise analüüsi kateeder

J A D A S U M M E E R U V U S T E G U R I D
R I E S Z I K A A L U T U D K E S K M I S T E M E N E T L U S E
P U H U L

D i p l o m i t ö ö

Töö teostaja: matem.osak. V kursuse
üliõpilane Margus
T ö n n o v.

Juhendaja: prof. G. K a n g r o

T a r t u 1960

Sisukord

lk.

§ 1	Sissejuhatus	
§ 2.	Abilased ja mõned vajalikud mõisted . .	6
§ 3.	Abstraktsed jada summeeruvustegurid Riesz'i kaalutud keskmiste menetluse puhul . . .	10
§ 4.	Mõned järeldused	24
§ 5.	Jada summeeruvustegurite rakendus Peyerimhoffi teoorias	30
	Kasutatud kirjandus	35

§ 1. Sissejuhatus

Hajuvate ridade teooria on põhilises osas välja arenenud alles käesoleval sajandil, kuigi hajuvad read leidsid rakendamist matemaatilise analüüsi mõningate küsimuste uurimisel juba ammu.

Tuntud Dedekindi ja Hadamard'i teoreem ütleb, et rida $\sum x_n \varepsilon_n$ koondub kõigi koonduvate ridade $\sum x_n$ /või kõigi tõkestatud osasummadega ridade $\sum x_n$ / korral siis ja ainult siis, kui jada $\{\varepsilon_n\}$ on absoluutselt koonduv¹ /või vastavalt absoluutselt koonduv nulliks/. Seda teoreemi üldistasid esimestena Bohr ja Hardy [9] summeeruvate ridade juhule, mis sai aluseks terve ridade teooria haru - s u m m e e - r u v u s t e g u r i t e t e o o r i a - tekkimisele.

Käesolevas töös vaatleme jadasid ja ridasid Banachi ruumis ja kompleksarvude matrikseid, milledega määratakse nende jadade ja ridade summeerimismenetlused. Edaspidi tähistame matriksit ja temale vastavat summeerimismenetlust ühe ja sama tähega; jada summeerimismenetlust suure gooti tähega ja rea summeerimismenetlust suure ladina tähega.

Olgu antud kompleksarvude matriks $\mathcal{A} = (a_{nv})$ ($n, v = 0, 1, \dots$) .

¹ jada $\{\varepsilon_n\}$ nim. absoluutselt koonduvaks, kui $\sum |\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}| < \infty$.

Me nimetame jada $\{X_v\}$ Banachi ruumis X \mathcal{O} -summeeruvaks (\mathcal{O} -tökestatuks, $|\mathcal{O}|$ -summeeruvaks), kui jada $\{X'_n\}$, mis on määratud teisendusvalemitega ¹

$$X'_n = \sum_v a_{nv} X_v \quad (n = 0, 1, \dots),$$

eksisteerib (s.t. read $\sum_v a_{nv} X_v$ ($n = 0, 1, \dots$) koonduvad) ja on koonduv² /tökestatud, absoluutselt koonduv/ ruumis X .

\mathcal{O} -summeeruva ($|\mathcal{O}|$ -summeeruva) jada $\{X_v\}$ \mathcal{O} -summaks nimetame jada $\{X'_n\}$ piirväärtust ja kirjutame

$$\mathcal{O}\{X_v\} = \lim_{n \rightarrow \infty} X'_n.$$

Rida $\sum x_v$ nimetatakse ruumis X A -summeeruvaks (A -tökestatuks, $|A|$ -summeeruvaks) menetlusega $A = (a_{nv})$, kui jada $\{X''_n\}$, mis on määratud teisendusvalemitega

$$X''_n = \sum_v a_{nv} x_v \quad (n = 0, 1, \dots),$$

eksisteerib ja on koonduv (tökestatud, absoluutselt koonduv)

ruumis X . A -summeeruva ($|A|$ -summeeruva) rea $\sum x_v$

A -summaks nimetatakse jada $\{X''_n\}$ piirväärtust ja kirjutatakse

$$A\{\sum x_v\} = \lim_{n \rightarrow \infty} X''_n.$$

Olgu $\{\varepsilon_v\}$ lineaarsete tökestatud operaatorite jada Banachi ruumist X Banachi ruumi Y ja \mathcal{L} jada summeerimismenetlus.

Operaatoreid ε_v nimetame jada summeeruvusteguriteks tüüpi $(\mathcal{O}, \mathcal{L}) [(\mathcal{O}_0, \mathcal{L}), (|\mathcal{O}|, \mathcal{L})]$, kui iga \mathcal{O} -summeeruva

¹ Kui summeerimise rajad ei ole märgitud, siis summeerimisindeks läbib kõik väärtused 0-st kuni $+\infty$ -ni.

² Käesolevas töös vaatleme ainult normi järgi koonduvust.

(α -tökestatud, $|\alpha|$ -summeeruva) jada $\{x_v\}$ korral $\{\varepsilon_v x_v\}$ on B -summeeruv. Analoogiliselt defineerime jada summeeruvustegurid tüüpi $(|\alpha|, |B|)$.

Operaatoreid ε_v nimetatakse rea summeeruvusteguriteks tüüpi $(A, B) \left[(A_0, B), (|A|, |B|) \right]$ kui iga A -summeeruva (A -tökestatud, $|A|$ -summeeruva) rea $\sum x_v$ korral rida $\sum \varepsilon_v x_v$ on B -summeeruv. Analoogiliselt defineeritakse rea summeeruvustegurid tüüpi $(|A|, |B|)$.

Operaatoreid ε_v nimetatakse rea summeeruvusteguriteks tüüpi $(\alpha, B) \left[(\alpha_0, B), (|\alpha|, B) \right]$ kui iga α -summeeruva (α -tökestatud, $|\alpha|$ -summeeruva) jada $\{x_v\}$ korral rida $\sum \varepsilon_v x_v$ on B -summeeruv. Analoogiliselt defineeritakse rea summeeruvustegurid tüüpi $(|\alpha|, |B|)$.

Kui matriks $A = (\alpha_{nv})$ on kolmnurkne¹, siis matriksiga $\alpha = (a_{nv})$, kus $a_{nv} = \Delta \alpha_{nv}^2$, määratakse sama summeerimismenetlus. Rieszi kaalutud keskmiste menetlus, kui ridade summeerimismenetlus, määratakse matriksiga P , mille elemendid on

$$\alpha_{nv} = \begin{cases} 1 - \frac{P_{v-1}}{P_n}, & \text{kui } v \leq n \\ 0, & \text{kui } v > n, \end{cases}$$

kus $P_n = p_0 + p_1 + \dots + p_n$, $P_n \neq 0$ ($n \geq 0$), $p_v \neq 0$ ($v \geq 0$).

Rieszi kaalutud keskmiste menetlus, kui jadade summeerimismenetlus, määratakse matriksiga \mathcal{P} , mille elemendid on

¹ Matriksit A nimetatakse kolmnurkseks, kui $\alpha_{nv} = 0$ iga $v > n$ korral.

² Sümbol $\Delta \alpha_{nv}$ tähendab diferentsi järgmises mõttes: $\Delta \alpha_{nv} = \alpha_{nv} - \alpha_{n, v-1}$. Edaspidi kasutame tähistusi: $\Delta \alpha_{nv} = \alpha_{nv} - \alpha_{n-1, v}$, $\Delta x_v = x_v - x_{v-1}$.

$$(1) \quad a_{nv} = \begin{cases} \frac{p_v}{p_n}, & \text{kui } v \leq n \\ 0, & \text{kui } v > n, \end{cases}$$

kus $P_n = p_0 + p_1 + \dots + p_n$, $P_n \neq 0$ ja $p_v \neq 0$ ($n, v \geq 0$).

Abstraktseid rea summeeruvustegureid on uurinud Kangro [6], kui A ja B on Cesàro menetlused. Üldised tarvilikud ja piisavad tingimused selleks, et jada $\{\varepsilon_v\}$ oleks (α, B) , (α_0, B) , $(|\alpha|, B)$, $(|\alpha|, |B|)$, (A, B) , (A_0, B) , $(|A|, B)$ ja $(|A|, |B|)$ tüüpi abstraktsete rea summeeruvustegurite jada, on antud Kangro ja Vichmanni [5] poolt. Tingimuste tuletamiseks on kasutatud Schuri meetodit. Seejuures õnnestus neil leida efektiivsed tarvilikud ja piisavad tingimused ülalnimetatud tüüpi abstraktsete rea summeeruvustegurite jaoks juhul, kui A on Rieszi kaalutud keskmiste menetlus ja B suvaline menetlus, mis rahuldab koregulaarsuse või regulaarsuse nõuet. Kui $X=Y=R_1$ (ühedimensionaalne eukleidiline ruum) ja ε_v on arvulised kordajad, siis abstraktsete summeeruvustegurite uurimine taandub tavaliste summeeruvustegurite uurimisele. Tavalisi rea summeeruvustegureid Rieszi kaalutud keskmiste menetluse puhul on uurinud Jurkat ja Peyerimhoff [7], kelle poolt on avaldatud 1951. aastast alates rida teoreeme, mis annavad tarvilikud ja piisavad tingimused mitmesuguste rea summeeruvustegurite jaoks. Nendes teoreemides on aga tehtud suuri kitsendusi summeerimismenetluste suhtes. Kasutades Schuri meetodit tuletas Kangro [3] Rieszi kaalutud keskmiste menetluse jaoks rea summeeruvustegurite teoreemid, kus B jääb meelevaldseks koregulaarseks või regulaarseks menetluseks.

Jada summeeruvusteguritest on uuritud ainult $(\mathcal{L}^{\alpha}, \mathcal{L}^{\beta})$

ja $(|\alpha^a|, |\alpha^b|)$ tüüpi summeeruvustegreid, kus α^a ja α^b on vastavalt α ja β ($\alpha, \beta \geq 0$ ja täisarvud) järku Cesàro menetlused. 1954.aastal õnnestus Bosanquet'1 [1] anda tarvilikud ja piisavad tingimused selleks, et $\{\varepsilon_n\}$ oleks (α^a, α^b) tüüpi jada summeeruvustegurite jada. 1958.aastal saab Tyler tarvilikud ja piisavad tingimused $(|\alpha^a|, |\alpha^b|)$ tüüpi jada summeeruvustegurite jaoks.

Käesoleva töö eesmärgiks on $(\mathcal{P}, \mathcal{B})$, $(\mathcal{P}_0, \mathcal{B})$, $(|\mathcal{P}|, \mathcal{B})$ ja $(|\mathcal{P}|, |\mathcal{B}|)$ tüüpi jada summeeruvustegurite jaoks tarvilike ja piisavate tingimuste leidmine. Probleemi lahendamisel ilmnis, et Riesz'i kaalutud keskmiste menetluste jaoks saab jada tavaliste summeeruvustegurite teoreeme lihtsalt üldistada abstraktsete summeeruvustegurite juhule. Seepärast ongi tõestused läbi viidud abstraktsete jada summeeruvustegurite jaoks (§ 3) ja teoreemid tavaliste jada summeeruvustegurite jaoks järeldatud nendest (§ 4). Peyerimhoffi [7] poolt antud rea summeeruvustegurite leidmise teooriast nähtub, et jada summeeruvustegureid võib kasutada (A, B) tüüpi rea summeeruvustegurite leidmiseks. Töös ongi leitud tarvilikud ja piisavad tingimused rea summeeruvustegurite jaoks tüüpi (P, B) ja tüüpi (P_0, B) . § 2-s tuuakse mõned tuntud mõisted ja lemmad, mis on vajalikud järgnevates paragrahvides.

§ 2. Abilaused ja mõned
vajalikud mõisted

Olgu antud teisendus

$$(2) \quad \vartheta_n = \sum_v A_{nv} u_v \quad (n = 0, 1, \dots),$$

kus $u_v \in X$, $\vartheta_n \in Y$ ja A_{nv} on lineaarsed tõkestatud operaatorid ruumist X ruumi Y .

L e m m a 1. Teisendus (2) teisendab iga nulliks koonduva jada koonduvaks jadaks siis ja ainult siis, kui

$$1^\circ \text{ eksisteerib } \lim_{n \rightarrow \infty} A_{nv} x = A_v x \quad (x \in X; v = 0, 1, \dots),$$

$$2^\circ \sup_{\|u_v\| \leq 1} \left\| \sum_{v=0}^k A_{nv} u_v \right\| \leq M \quad (n, k = 0, 1, \dots),$$

seejuures iga nulliks koonduva jada $\{u_v\}$ korral kehtib valem

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \vartheta_n = \sum A_v u_v.$$

L e m m a 2. Kui eksisteerib $\lim_{n \rightarrow \infty} A_{nv} = A_v$ ($v = 0, 1, \dots$) normi järgi, siis teisendus (2) teisendab iga tõkestatud jada koonduvaks jadaks siis ja ainult siis, kui

$$1^\circ \text{ rida } \sum_v A_{nv} u_v \text{ koondub ühtlaselt } \|u_v\| \leq 1 \text{ korral } (n = 0, 1, \dots),$$

$$2^\circ \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\|u_v\| \leq 1} \left\| \sum_v (A_{nv} - A_v) u_v \right\| = 0$$

ja kõigi tõkestatud jadade korral kehtib (3).

L e m m a 3. Teisendus (2) teisendab iga absoluutselt koonduva rea $\sum u_v$ koonduvaks jadaks siis ja ainult

siis, kui

$$1^{\circ} \text{ eksisteerib } \lim_{n \rightarrow \infty} A_{nv} \mathcal{X} = A_v \mathcal{X} \quad (\mathcal{X} \in X; v=0,1,\dots),$$

$$2^{\circ} \|A_{nv}\| \leq M \quad (n, v = 0, 1, \dots),$$

seejuures iga absoluutselt koonduva rea korral kehtib valem (3).

L e m m a 4. Kui teisendus (2) teisendab iga absoluutselt koonduva jada koonduvaks jadaks, siis

$$\left\| \sum_{v=0}^k A_{nv} \right\| \leq M \quad (n, k = 0, 1, \dots).$$

L e m m a 5. Teisendus (2) teisendab iga absoluutselt koonduva rea $\sum u_v$ absoluutselt koonduvaks reaks siis ja ainult siis, kui

$$\sum_n \|A_{nv} \mathcal{X}\| \leq M \|\mathcal{X}\| \quad (\mathcal{X} \in X; v=0,1,\dots).$$

L e m m a 6. Kui teisendus (2) teisendab iga absoluutselt koonduva jada absoluutselt koonduvaks jadaks, siis

$$\sum_n \left\| \sum_{v=0}^k \bar{A}_{nv} \mathcal{X} \right\| \leq M \|\mathcal{X}\| \quad (\mathcal{X} \in X; k=0,1,\dots).$$

Lemmade 1 - 6 tõestused on antud artiklites [5], [6] ja [11].

L e m m a 7 (Kojima-Schur). Menetlus \mathcal{A} summeerib kõiki koonduvaid jadasid siis ja ainult siis, kui

$$1^{\circ} \text{ eksisteerib } \lim_{n \rightarrow \infty} a_{nv} = a_v \quad (v = 0, 1, \dots),$$

$$2^{\circ} \sum_v |a_{nv}| \leq M \quad (n = 0, 1, \dots),$$

$$3^{\circ} \text{ eksisteerib } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_v a_{nv} = a.$$

L e m m a 8 (Hahn). Menetlus \mathcal{A} summeerib kõiki absoluutselt koonduvaid jadasid siis ja ainult siis, kui

1° eksisteerib $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{nv} = a_v \quad (v = 0, 1, \dots)$,

2° $\left| \sum_{v=0}^{\kappa} a_{nv} \right| \leq M \quad (n, \kappa = 0, 1, \dots)$,

3° eksisteerib $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_v a_{nv} = a$.

L e m m a 9 (Mears). Menetlus \mathcal{A} summeerib absoluutselt kõiki absoluutselt koonduvaid jadasid siis ja ainult siis, kui

$$\sum_n |\bar{\Delta} r_{nk}| \leq M \quad (k = 0, 1, \dots),$$

kus

$$r_{nk} = \sum_{v=k}^{\infty} a_{nv}, \quad \text{kui } n \neq 0, \quad r_{-1,k} = 0.$$

L e m m a 10 (Schur). Menetlus \mathcal{A} summeerib kõiki tõkestatud jadasid siis ja ainult siis, kui

1° eksisteerib $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{nv} = a_v \quad (v = 0, 1, \dots)$,

2° $\sum_v |a_{nv}| < \infty \quad (n = 0, 1, \dots)$,

3° $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_v |a_{nv}| = \sum_v |a_v|$.

Menetlust, mis rahuldab lemma 7 tingimusi, nimetatakse koonduvst säilitavaks. Kui peale selle $a_v = 0 \quad (v = 0, 1, \dots)$ ja $a = 1$, siis menetlust \mathcal{A} nimetatakse regulaarseks (s.o. koonduvust ja summat säilitav menetlus).

Menetlust, mis rahuldab lemma 9 tingimusi, nimetatakse

absoluutset koonduvust säilitavaks.

L e m m a 11. Riesz'i kaalutud keskmiste menetlus, mis on määratud jadaga $\{p_v\}$, on koonduvust säilitav siis ja ainult siis, kui

$$1^{\circ} \text{ eksisteerib } \lim_{n \rightarrow \infty} P_n \neq 0 \text{ (lõplik või lõpmatu),}$$

$$2^{\circ} \sum_{v=0}^n |p_v| = O(P_n).$$

L e m m a 12. Riesz'i kaalutud keskmiste menetlus, mis on määratud jadaga $\{p_v\}$, on absoluutset koonduvust säilitav siis ja ainult siis, kui

$$|P_{k-1}| \sum_{n=k}^{\infty} \left| \frac{p_n}{P_{n-1} P_n} \right| = O(1).$$

Lemmad 11 ja 12 järelduvad vastavalt lemmadest 7 ning

§ 3. Abstraktsed jada summeeruvustegurid Riesz'i kaalutud keskmiste menetluse puhul

1. Jada summeeruvustegurid tüüpi $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$.

Olgu \mathcal{E}_v tõkestatud lineaarsed operaatorid Banachi ruumist X Banachi ruumi Y . Moodustame operaatoritest \mathcal{E}_v ja maatriksi \mathcal{L} elementidest b_{nv} operaatorite maatriksi $\mathcal{L}' = (b_{nv})$, kus

$$(4) \quad B_{nv} = b_{nv} \mathcal{E}_v .$$

Maatriksile \mathcal{L}' vastav teisendus, mis määratakse valemitega (2), kujutab Banachi ruumi X jada $\{x_v\}$ Banachi ruumi Y jadaks $\{y_n\}$. $(\mathcal{A}, \mathcal{L})$ tüüpi jada summeeruvustegurite definitsioonist järeldub, et operaatorid \mathcal{E}_v on jada summeeruvustegurid tüüpi $(\mathcal{A}, \mathcal{L})$ siis ja ainult siis, kui \mathcal{L}' poolt määratud teisendus kujutab iga \mathcal{A} -summeeruva jada koonduvaks jadaks. Analoogiliselt võime ülejäänud tüüpide jada summeeruvustegurite leidmise taandada vastavate teisenduste uurimisele.

Kogu käesolevas töös eeldame, et maatriks $\mathcal{A} = (a_{nv})$ on kolmnurkne ja $a_{nn} \neq 0$.

Valemitest

$$(5) \quad \mathcal{X}'_n = \sum_{v=0}^n a_{nv} \mathcal{X}_v \quad (n = 0, 1, \dots)$$

leiame, et

$$(6) \quad \mathcal{X}_n = \sum_{v=0}^n \xi_{nv} \mathcal{X}'_v \quad (n = 0, 1, \dots)$$

kus

$$(\xi_{nv}) = (a_{nv})^{-1}.$$

Iga \mathcal{O} -summeeruva jada $\{X_v\}$ korral võime valemid (6)

kirjutada kujul

$$(7) \quad X_n = \xi_n X' + \sum_{v=0}^n \xi_{nv} (X'_v - X') \quad (n = 0, 1, \dots)$$

kus

$$\xi_n = \sum_{v=0}^n \xi_{nv} \quad \text{ja} \quad X' = \mathcal{O}\{X_v\}.$$

Kasutades valemuid (7) leiame, et

$$\begin{aligned} \sum_{v=0}^k b_{nv} \varepsilon_v X_v &= \sum_{v=0}^k b_{nv} \varepsilon_v \left[\xi_v X' + \sum_{m=0}^v \xi_{vm} (X'_m - X') \right] = \\ &= \sum_{v=0}^k b_{nv} \xi_v \varepsilon_v X' + \sum_{v=0}^k \left(\sum_{m=v}^k \xi_{mv} b_{nm} \varepsilon_m \right) (X'_v - X') \end{aligned}$$

ehk

$$(8) \quad \sum_{v=0}^k b_{nv} \varepsilon_v X_v = \sum_{v=0}^k b_{nv} \xi_v \varepsilon_v X' + \sum_{v=0}^k c_{kv}^n (X'_v - X'),$$

kus

$$c_{kv}^n = \sum_{m=v}^k \xi_{mv} b_{nm} \varepsilon_m.$$

Valemitest (5) ja (6) järeldub, kui võtta $X'_v = X'$, et jada $\{\xi_v X'\}$ on \mathcal{O} -summeeruv.

Järelikult jada $\{\xi_v \varepsilon_v X\}$ peab olema \mathcal{B} -summeeruv iga $X \in X$ puhul. Nüüd lemma 1 tõttu tarvilikud ja piisavad tingimused selleks, et rida $\sum_v b_{nv} \varepsilon_v X_v$ koonduks iga \mathcal{O} -summeeruva jada $\{X_v\}$ korral on, et eksisteeriks piirväärtus

$$(9) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} c_{kv}^n X = c_{nv} X \quad (X \in X; v, n = 0, 1, \dots)$$

ja oleks täidetud tingimus

$$(10) \quad \sup_{\|X_v\| \leq 1} \left\| \sum_{v=0}^l c_{kv}^n X_v \right\| \leq M \quad (n, k, l = 0, 1, \dots).$$

Lemma 1 tõttu saame seosest (8) juhul $k \rightarrow \infty$, et

$$(11) \quad \sum_v b_{nv} \varepsilon_v X_v = \sum_v b_{nv} \xi_v \varepsilon_v X' + \sum_v c_{nv} (X'_v - X').$$

Valemist (11) jäeldub lemma 1 põhjal, et iga \mathcal{A} -summeeruva jada $\{X_v\}$ korral $\{\varepsilon_v X_v\}$ on \mathcal{B} -summeeruv siis ja ainult siis, kui $\{\xi_v \varepsilon_v X\}$ ($X \in X$) on \mathcal{B} -summeeruv, rida (11) koondub, eksisteerib

$$(12) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_{nv} X = c_v X \quad (X \in X; v = 0, 1, \dots)$$

ja

$$(13) \quad \sup_{\|X_v\| \leq 1} \left\| \sum_{v=0}^k c_{nv} X_v \right\| \leq M \quad (n, k = 0, 1, \dots).$$

Tingimustest (9), (10), (12), (13) ja jada $\{\xi_v \varepsilon_v X\}$ ($X \in X$) \mathcal{B} -summeeruvuse nõudest jäeldub järgmine teoreem.

T e o r e e m 1. Operaatorid ε_v on jada summeeruvusteguri tüüpi $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ siis ja ainult siis, kui

$$1^\circ \quad \text{jaded } \{\xi_v \varepsilon_v X\} \quad \text{ja} \quad \{\xi_{vk} \varepsilon_v X\} \quad \text{on} \\ \mathcal{B} \text{-summeeruvad} \quad (X \in X; k = 0, 1, \dots).$$

$$2^\circ \quad \sup_{\|X_v\| \leq 1} \left\| \sum_{v=0}^l c_{kv}^n X_v \right\| \leq M_n \quad (l, k = 0, 1, \dots).$$

$$3^\circ \quad \sup_{\|X_v\| \leq 1} \left\| \sum_{v=0}^l c_{nv} X_v \right\| \leq M \quad (l, n = 0, 1, \dots).$$

kus

$$(14) \quad c_{kv}^n = \sum_{\mu=v}^k b_{n\mu} \xi_{\mu v} \varepsilon_\mu,$$

$$c_{nv} = \lim_{k \rightarrow \infty} c_{kv}^n.$$

Olgu nüüd $\alpha = \mathcal{P}$ (s.o. Riesz'i kaalutud keskmiste menetlus), mis on määratud valemiga (1). Eelduse kohaselt $p_{\nu \neq 0}$ ($\nu=0,1,\dots$) ja seetõttu \mathcal{P} omab pöördmaatriksit \mathcal{P}^{-1} , mille elemendid avalduvad kujul

$$\xi_{\nu\nu} = \frac{P_\nu}{r_\nu}, \quad \xi_{\nu+1,\nu} = -\frac{P_\nu}{r_{\nu+1}},$$

$$\xi_{\nu k} = 0 \quad k > \nu \text{ ja } k < \nu + 1 \text{ korral,}$$

kusjuures

$$\xi_\nu = \sum_{k=0}^{\nu} \xi_{\nu k} = 1.$$

Valemist (14), kus \mathcal{B} on suvaline summeerimismenetlus, leiame:

$$(15) \quad \begin{cases} c_{k\nu}^n = P_\nu \Delta \frac{b_{n\nu} \varepsilon_\nu}{r_\nu} & , \text{ kui } \nu < k; \\ c_{k\nu}^n = P_k \frac{b_{nk} \varepsilon_k}{r_k}; \\ c_{k\nu}^n = 0, \text{ kui } \nu > k; \end{cases}$$

$$(16) \quad c_{n\nu} = P_\nu \Delta \frac{b_{n\nu} \varepsilon_\nu}{r_\nu}.$$

Märgime veel, et piirväärtuse $\lim_{n \rightarrow \infty} b_{n\nu} = b_\nu$ olemasolust järeldub piirväärtuse

$$c_\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} c_{n\nu} = P_\nu \Delta \frac{b_\nu \varepsilon_\nu}{r_\nu}$$

olemasolu.

T e o r e e m 2. Operaatorid ε_ν on jada summeeruvustegurid tüüpi $(\mathcal{P}, \mathcal{B})$ siis ja ainult siis, kui

1° $\{\varepsilon_\nu \mathcal{X}\}$ on \mathcal{B} -summeeruv ($\mathcal{X} \in X$),

2° eksisteerib $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta \frac{b_{n\nu} \varepsilon_\nu}{r_\nu} \mathcal{X}$ ($\mathcal{X} \in X; \nu=0,1,\dots$),

$$3^{\circ} \sup_{\|X_v\| \leq 1} \left\| \sum_{v=0}^{\ell} P_v \left(\Delta \frac{b_{nv} \varepsilon_v}{r_v} \right) X_v \right\| \leq M \quad (\ell, n = 0, 1, \dots).$$

Tõestus. Tingimuste 1° ja 2° tarvilikkus jäeldub vahetult teoreemi 1 tingimusest 1° . Tingimus 3° jäeldub teoreemi 1 tingimusest 3° ja valemist (16).

Jääb kontrollida teoreemi 1 tingimuste täidetust eeldusel, et teoreemi 2 tingimused on rahuldatud. Teoreemi 1 tingimused 1° ja 3° jäelduvad teoreemi 2 tingimustest 1° , 2° ja 3° . Kui $\ell < k$, siis teoreemi 1 tingimus 2° jäeldub vahetult teoreemi 2 tingimusest 3° . Kui aga $\ell \geq k$, siis teoreemi 1 tingimus 2° omandab kuju:

$$(17) \sup_{\|X_v\| \leq 1, \|X_k\| \leq 1} \left\| \sum_{v=0}^{k-1} P_v \left(\Delta \frac{b_{nv} \varepsilon_v}{r_v} \right) X_v + P_k \frac{b_{nk} \varepsilon_k}{r_k} X_k \right\| \leq M_n \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Samasusest

$$(18) \sum_{v=0}^{k-1} P_v \left(\Delta \frac{b_{nv} \varepsilon_v}{r_v} \right) X = \sum_{v=0}^k b_{nv} \varepsilon_v X - P_k \frac{b_{nk} \varepsilon_k}{r_k} X$$

ja teoreemi 2 tingimustest 1° ning 3° jäeldub, et

$$(19) \left\| P_k \frac{b_{nk} \varepsilon_k}{r_k} \right\| \leq M_n \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Tingimusest (19) ja teoreemi 2 tingimusest 3° jäeldubki tingimuse (17) täidetust.

2. Jada summeeruvustegurid tüüpi (ψ_0, \mathcal{L}) .

(α_0, \mathcal{L}) tüüpi abstraktsete jada summeeruvustegurite jaoks tarvilike ja piisavate tingimuste leidmiseks rakendame sama meetodit nagu eelmisel juhul. Seejuures kasutame seose (8)

asemel seost

$$(20) \quad \sum_{v=0}^k b_{nv} \varepsilon_v \mathcal{X}_v = \sum_{v=0}^k c_{kv}^n \mathcal{X}_v',$$

kus c_{kv}^n on antud valemiga (14) ja $\{\mathcal{X}_v'\}$ on tõkestatud jada.

Lähtudes seosest (20) saab lemma 2 põhjal järeldada järgmise teoreemi.

T e o r e e m 3. Operaatorid ε_v on jada summeeruvustegurid tüüpi $(\mathcal{A}_0, \mathcal{B})$ siis ja ainult siis, kui

$$1^\circ \text{ rida } \sum_v c_{nv} \mathcal{X}_v \text{ koondub ühtlaselt } \|\mathcal{X}_v\| \leq 1 \text{ korral } (n=0,1,\dots).$$

$$2^\circ \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{\|\mathcal{X}_v\| \leq 1} \left\| \sum_v (c_{kv}^n - c_{nv}) \mathcal{X}_v \right\| = 0 \quad (n=0,1,\dots).$$

$$3^\circ \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\|\mathcal{X}_v\| \leq 1} \left\| \sum_v (c_{nv} - c_v) \mathcal{X}_v \right\| = 0, \quad n=0,1,\dots$$

kus c_{kv}^n määratakse valemiga (14), c_{nv} ja c_v arvutatakse valemitest

$$(21) \quad c_{nv} = \lim_{k \rightarrow \infty} c_{kv}^n \quad \text{ning} \quad c_v = \lim_{n \rightarrow \infty} c_{nv},$$

milledes eeldatakse piirväärtuse olemasolu normi järgi.

Kui $\mathcal{A} = \mathcal{P}$, siis c_{kv}^n ja c_{nv} on määratud valemitega

(15), (16) ja

$$c_v = p_v \frac{b_v \varepsilon_v}{r_v}.$$

Koonduvus normi järgi valemites (21) on lihtsalt kontrollitav.

T e o r e e m 4. Olgu \mathcal{B} koonduvust säilitav menetlus. Operaatorid ε_v on jada summeeruvustegurid tüüpi $(\mathcal{P}_0, \mathcal{B})$ siis ja ainult siis, kui

1° rida $\sum_{\nu} P_{\nu} (\Delta \frac{b_{n\nu} \epsilon_{\nu}}{r_{\nu}}) X_{\nu}$ koondub ühtlaselt $\|X_{\nu}\| \leq 1$ korral ($n = 0, 1, \dots$),

2° $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \|P_{\nu} \frac{b_{n\nu} \epsilon_{\nu}}{r_{\nu}}\| = 0$ ($n = 0, 1, \dots$),

3° $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\|X_{\nu}\| \leq 1} \|\sum_{\nu} P_{\nu} (\Delta \frac{b_{n\nu} \epsilon_{\nu}}{r_{\nu}} - \Delta \frac{b_{\nu} \epsilon_{\nu}}{r_{\nu}}) X_{\nu}\| = 0$.

T ö e s t u s. Teoreemi 3 tingimus 2° on kujul

$$(22) \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \sup_{\|X_{\nu}\| \leq 1, \|X_{\kappa}\| \leq 1} \|P_{\kappa} \frac{b_{n\kappa} \epsilon_{\kappa}}{r_{\kappa}} X_{\kappa} - \sum_{\nu=\kappa}^{\infty} P_{\nu} (\Delta \frac{b_{n\nu} \epsilon_{\nu}}{r_{\nu}}) X_{\nu}\| = 0 \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Teoreemi 3 tingimusest 1° ja tingimusest (22) järeldub teoreemi 4 tingimus 2°. Tingimused 1° ja 3° järelduvad vahetult teoreemi 3 vastavatest tingimustest. Kui teoreemi 4 tingimused on rahuldatud, siis on rahuldatud ka teoreemi 3 tingimused. Sellega on põhjendatud ka teoreemi 4 tingimuste piisavus.

3. J a d a s u m m e e r u v u s t e g u r i d t ü ü p i (\mathbb{R}, \mathbb{B}) .

Olgu $\{X_{\nu}\}$ $|\mathcal{O}|$ -summeeruv jada. Valemitest (5) leiame, et

$$(23) \quad x'_n = \sum_{\nu=0}^n \bar{\Delta} a_{n\nu} X_{\nu} \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Märgime, et $x'_n = X'_n - X'_{n-1}$ ja

$$\mathcal{O}\{X_{\nu}\} = \sum x'_n$$

ning $\sum \|x'_n\| < \infty$.

Valemitest (23) saame:

$$X_{\nu} = \sum_{\mu=0}^{\nu} \xi'_{\nu\mu} x_{\mu} \quad (\nu = 0, 1, \dots),$$

kus

$$(24) \quad (\xi'_{\nu\mu}) = (\bar{\Delta} a_{\nu\mu})^{-1}.$$

Moodustame summa

$$\sum_{\nu=0}^k b_{n\nu} \varepsilon_{\nu} \mathcal{X}_{\nu} = \sum_{\nu=0}^k b_{n\nu} \varepsilon_{\nu} \left(\sum_{\mu=0}^{\nu} \xi'_{\nu\mu} x'_{\mu} \right) = \sum_{\mu=0}^k \left(\sum_{\nu=\mu}^k b_{n\nu} \xi'_{\nu\mu} \varepsilon_{\nu} \right) x'_{\mu}$$

ehk

$$(25) \quad \sum_{\nu=0}^k b_{n\nu} \varepsilon_{\nu} \mathcal{X}_{\nu} = \sum_{\nu=0}^k c_{k\nu}^n x'_{\nu},$$

kus

$$(26) \quad c_{k\nu}^n = \sum_{\mu=\nu}^k b_{n\mu} \xi'_{\mu\nu} \varepsilon_{\mu}.$$

Rida $\sum_{\nu} b_{n\nu} \varepsilon_{\nu} \mathcal{X}_{\nu}$ koondub lemma 3 põhjal siis ja ainult siis, kui eksisteerib piirväärtus

$$(27) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} c_{k\nu}^n \mathcal{X} = c_{n\nu} \mathcal{X} \quad (\mathcal{X} \in X; n, \nu = 0, 1, \dots)$$

ja on täidetud tingimus

$$(28) \quad \|c_{k\nu}^n\| \leq M_n \quad (k, \nu = 0, 1, \dots).$$

Seosest (25) saame lemma 3 põhjal, kui $k \rightarrow \infty$, et

$$(29) \quad \sum_{\nu} b_{n\nu} \varepsilon_{\nu} \mathcal{X}_{\nu} = \sum_{\nu} c_{n\nu} x'_{\nu} \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Kui tingimused (27) ja (28) on täidetud, siis lemma 3 põhjal järeldub seosest (29), et iga $\{A\}$ -summeeruva jada $\{\mathcal{X}_{\nu}\}$ korral $\{\varepsilon_{\nu} \mathcal{X}_{\nu}\}$ on \mathcal{L} -summeeruv siis ja ainult siis, kui eksisteerib piirväärtus

$$(30) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_{n\nu} \mathcal{X} = c_{\nu} \mathcal{X} \quad (\mathcal{X} \in X; \nu = 0, 1, \dots)$$

ning on rahuldatud tingimus

$$(31) \quad \|c_{n\nu}\| \leq M \quad (n, \nu = 0, 1, \dots).$$

Tingimustest (27), (28), (30) ja (31) järeldub järgmine teoreem.

T e o r e e m 5. Operaatorid ε_ν on jada summeeruvustegurid tüüpi $(|\mathcal{A}|, \mathcal{L})$ siis ja ainult siis, kui

1° jada $\{\sum_{\nu k} \varepsilon_\nu \mathcal{X}\}$ on \mathcal{L} -summeeruv ($\mathcal{X} \in X; k=0,1,\dots$).

2° $\|C_{k\nu}^n\| \leq M_n$ ($k, \nu = 0,1,\dots$) .

3° $\|C_{n\nu}\| \leq M$ ($n, \nu = 0,1,\dots$) ,

kus $C_{k\nu}^n$ on antud valemitega (26) , (24) ja

$$C_{n\nu} = \lim_{k \rightarrow \infty} C_{k\nu}^n \quad (n, \nu = 0,1, \dots) .$$

Kui $\mathcal{A} = \mathcal{P}$, siis

$$(32) \quad \zeta_{\mu\nu} = \begin{cases} \frac{p_\nu}{r_\nu} , & \text{kui } \mu = \nu \\ 1 , & \text{kui } \mu > \nu \\ 0 , & \text{kui } \mu < \nu \end{cases}$$

ja

$$(33) \quad C_{k\nu}^n = \begin{cases} p_\nu \frac{b_{n\nu} \varepsilon_\nu}{r_\nu} + \sum_{\mu=\nu+1}^k b_{n\mu} \varepsilon_\mu , & \text{kui } \nu < k \\ p_k \frac{b_{nk} \varepsilon_k}{r_k} , & \text{kui } \nu = k \\ 0 , & \text{kui } \nu > k \end{cases}$$

ning

$$(34) \quad C_{n\nu} = p_\nu \frac{b_{n\nu} \varepsilon_\nu}{r_\nu} + \sum_{\mu=\nu+1}^{\infty} b_{n\mu} \varepsilon_\mu .$$

T e o r e e m 6. Olgu \mathcal{P} absoluutset koonduvust säilitav ja \mathcal{L} koonduvust säilitav menetlus. Operaatorid ε_ν on jada summeeruvustegurid tüüpi $(|\mathcal{P}|, \mathcal{L})$ siis ja ainult siis, kui

1° $\{\varepsilon_\nu \mathcal{X}\}$ on \mathcal{L} -summeeruv ($\mathcal{X} \in X$),

2° $\|\sum_{\nu=0}^k b_{n\nu} \varepsilon_\nu\| \leq M$ ($n, k = 0,1,\dots$) .

$$3^{\circ} \left\| P_v \frac{b_{nv} \varepsilon_v}{r_v} \right\| \leq M \quad (n, v = 0, 1, \dots) .$$

T ö e s t u s. Tingimuse 1^o tarvilikkus järeldub teoreemi 5 tingimusest 1^o, kui võtta $k = 0$. Et operaatorid ε_v on jada summeeruvustegurid tüüpi $(|\varphi|, \mathcal{L})$, siis iga $|\varphi|$ -summeeruva jada $\{x_v\}$ korral $\{\varepsilon_v x_v\}$ on \mathcal{L} -summeeruv. Kuna φ on absoluutselt koonduvust säilitav, siis maatriksiga $\mathcal{L}' = (B_{nv})$ määratud teisendus, kus B_{nv} on antud valemiga (4), kujutab absoluutselt koonduva jada koonduvaks jadaks. Nüüd lemma 4 põhjal järeldubki tingimuse 2^o tarvilikkus. Teoreemi 5 tingimustest 3^o saame

$$(35) \quad \left\| \sum_v b_{nv} \varepsilon_v \right\| \leq M \quad (n = 0, 1, \dots) .$$

Teoreemi 5 tingimusest 3^o, valemitest (34) ja (35) saame:

$$(36) \quad \left\| \sum_{v=0}^k b_{nv} \varepsilon_v - p_k \frac{b_{nk} \varepsilon_k}{r_k} \right\| \leq M \quad (n, k = 0, 1, \dots) .$$

Tingimustest 2^o ja (36) järeldub

$$\left\| p_k \frac{b_{nk} \varepsilon_k}{r_k} \right\| \leq M \quad (n, k = 0, 1, \dots) .$$

Sellega on näidatud, et tingimused 1^o, 2^o ja 3^o on tarvilikud jada summeeruvustegurite jaoks tüüpi $(|\varphi|, \mathcal{L})$.

Tõestame nende tingimuste piisavuse. Selleks tuleb näidata, et nad kindlustavad teoreemi 5 tingimuste rahuldatuse. Kuna \mathcal{L} on koonduvust säilitav menetlus, siis eksisteerib $\lim_{n \rightarrow \infty} b_{nv} = b_v$ ja järelikult ka

$$(37) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{v=0}^n b_{nv} \varepsilon_v x = \sum_{v=0}^{\infty} b_v \varepsilon_v x \quad (x \in X; \mu = 0, 1, \dots) .$$

Piirväärtuse (37) olemasolust ja teoreemi 6 tingimusest 1^o järeldub piirväärtuse

$$(38) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{v=\mu+1}^{\infty} b_{nv} \varepsilon_v \mathcal{X} \quad (\mathcal{X} \in X; \mu = 0, 1, \dots)$$

olemasolu. Nüüd piirväärtuse (38) olemasolust järeldub

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(P_{\mu} \frac{b_{n\mu} \varepsilon_{\mu}}{p_{\mu}} \mathcal{X} + \sum_{v=\mu+1}^{\infty} b_{nv} \varepsilon_v \mathcal{X} \right) &= \\ &= P_{\mu} \frac{b_{\mu} \varepsilon_{\mu}}{p_{\mu}} \mathcal{X} + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{v=\mu+1}^{\infty} b_{nv} \varepsilon_v \mathcal{X} \quad (\mathcal{X} \in X; \mu = 0, 1, \dots) \end{aligned}$$

olemasolu. Sellise piirväärtuse olemasolu nõuabki teoreemi 5

tingimus 1^o. Teoreemi 6 tingimusest 2^o leiame:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{v=\mu+1}^k b_{nv} \varepsilon_v \right\| &= \left\| \sum_{v=0}^k b_{nv} \varepsilon_v - \sum_{v=0}^{\mu} b_{nv} \varepsilon_v \right\| \leq \left\| \sum_{v=0}^k b_{nv} \varepsilon_v \right\| + \left\| \sum_{v=0}^{\mu} b_{nv} \varepsilon_v \right\| \leq \\ &\leq 2M = M_n \quad (\mu < k; \mu, k = 0, 1, \dots). \end{aligned}$$

Teoreemi 6 tingimus 3^o ja

$$\left\| \sum_{v=\mu+1}^k b_{nv} \varepsilon_v \right\| \leq M_n \quad (\mu < k; \mu, k = 0, 1, \dots)$$

kindlustavad teoreemi 5 tingimuse 2^o rahuldatus. Teoreemi

6 tingimustest 2^o, 1^o ja Banach-Steinhausi teoreemist järeldub

tingimus (35). Tingimusest (35) ja teoreemi 6 tingimusest

2^o järeldub, et

$$(39) \quad \left\| \sum_{v=\mu+1}^{\infty} b_{nv} \varepsilon_v \right\| \leq M \quad (\mu, n = 0, 1, \dots).$$

Teoreemi 5 tingimuse 3^o saame nüüd tingimusest (39) ja teoreemi 6 tingimusest 3^o.

Sellelega on tõestatud ka teoreemi 6 piisavus.

4. Jada summeeruvustegurid tüüpi $(|\mathcal{A}|, |\mathcal{B}|)$. Analoogilisel teel, nagu seda tegime $(|\mathcal{A}|, \mathcal{B})$ tüüpi jada summeeruvustegurite jaoks tarvilike ja piisavate tingimuste leidmisel, tuletame tarvilikud ja piisavad tingimused jada summeeruvustegurite jaoks tüüpi $(|\mathcal{A}|, |\mathcal{B}|)$.

Rida

$$\sum_v b_{nv} \varepsilon_v \mathcal{X}_v$$

koondub iga $|\mathcal{A}|$ -summeeruva jada $\{\mathcal{X}_v\}$ korral siis ja ainult siis, kui kehtivad tingimused (27) ja (28). Kui tingimused (27) ja (28) on rahuldatud, siis iga $|\mathcal{A}|$ -summeeruva jada $\{\mathcal{X}_v\}$ korral $\{\varepsilon_v \mathcal{X}_v\}$ on $|\mathcal{B}|$ -summeeruv siis ja ainult siis, kui

$$\sum_n \left\| \sum_v \bar{\Delta} c_{nv} x'_v \right\| < \infty,$$

kus $x'_v = \bar{\Delta} \mathcal{X}'_v$.

Nüüd võime lemma 5 põhjal väita, et kehtib järgmine teoreem.

T e o r e e m 7. Operaatorid ε_v on jada summeeruvustegurid tüüpi $(|\mathcal{A}|, |\mathcal{B}|)$ siis ja ainult siis, kui

$$1^\circ \text{ eksisteerib } \lim_{k \rightarrow \infty} c_{kv}^n \mathcal{X} = c_{nv} \mathcal{X} \quad (\mathcal{X} \in X; n, v = 0, 1, \dots),$$

$$2^\circ \|c_{kv}^n\| \leq M_n \quad (k, v = 0, 1, \dots),$$

$$3^\circ \sum_n \| \bar{\Delta} c_{nv} \mathcal{X} \| \leq M \| \mathcal{X} \| \quad (\mathcal{X} \in X; v = 0, 1, \dots),$$

kus

$$c_{kv}^n = \sum_{\mu=v}^k b_{n\mu} \xi'_{\mu v} \varepsilon_\mu \quad \text{ja} \quad (\xi'_{\mu v}) = (\bar{\Delta} a_{\mu v})^{-1}.$$

T e o r e e m 8. Olgu \mathcal{P} absoluutset koonduvust säilitav. Operaatorid ε_v on jada summeeruvustegurid tüüpi $(|\mathcal{P}|, |\mathcal{B}|)$ siis ja ainult siis, kui

1° rida $\sum_{\nu} b_{n\nu} \varepsilon_{\nu} \mathcal{X}$ koondub ($\mathcal{X} \in X$; $n=0,1,\dots$).

2° $\|P_{\nu} \frac{b_{n\nu} \varepsilon_{\nu}}{r_{\nu}}\| \leq M_n$ ($\nu=0,1,\dots$),

3° $\sum_n \left\| \sum_{\nu=0}^k \bar{\Delta} b_{n\nu} \varepsilon_{\nu} \mathcal{X} \right\| \leq M \|\mathcal{X}\|$ ($\mathcal{X} \in X$; $k=0,1,\dots$).

4° $\sum_n |\bar{\Delta} b_{n\nu}| \|P_{\nu} \frac{\varepsilon_{\nu}}{r_{\nu}}\| \leq M$ ($\nu=0,1,\dots$).

T ö e s t u s. Tingimuse 1° tarvilikkus jäeldub vahetult teoreemi 7 tingimusest 1°. Teoreemi 8 tingimusest 1° saame Banach-Steinhausi teoreemi põhjal, et

$$(40) \quad \left\| \sum_{\nu=0}^k b_{n\nu} \varepsilon_{\nu} \right\| \leq M_n \quad (k=0,1,\dots).$$

Teoreemi 7 tingimus 2° omab kuju

$$(41) \quad \left\| P_{\nu} \frac{b_{n\nu} \varepsilon_{\nu}}{r_{\nu}} + \sum_{\mu=\nu+1}^k b_{n\mu} \varepsilon_{\mu} \right\| \leq M_n \quad (k, \nu=0,1,\dots).$$

Teoreemi 8 tingimus 2° jäeldub nüüd tingimustest (41) ja

(40). Et operaatorid ε_{ν} on jada summeeruvustegurid tüüpi $(|\mathcal{P}|, |\mathcal{L}|)$, siis iga $|\mathcal{P}|$ -summeeruva jada $\{\mathcal{X}_{\nu}\}$ korral $\{\varepsilon_{\nu} \mathcal{X}_{\nu}\}$ on $|\mathcal{L}|$ -summeeruv. Kuna \mathcal{P} on absoluutselt koonduvust säilitav, siis maatriksiga $\mathcal{L}' = (B_{n\nu})$, kus $B_{n\nu}$ on antud valemiga (4), määratud teisendus kujutab absoluutselt koonduva jada absoluutselt koonduvaks jadaks. Järelikult lemma 6 põhjal

$$(42) \quad \sum_n \left\| \sum_{\nu=0}^k \bar{\Delta} b_{n\nu} \varepsilon_{\nu} \mathcal{X} \right\| \leq M \|\mathcal{X}\| \quad (\mathcal{X} \in X; k=0,1,\dots).$$

Tingimusest (42) ja teoreemi 8 tingimusest 1° jäeldub

$$(43) \quad \sum_n \left\| \sum_{\nu=k+1}^{\infty} \bar{\Delta} b_{n\nu} \varepsilon_{\nu} \mathcal{X} \right\| \leq M \|\mathcal{X}\| \quad (\mathcal{X} \in X; k=0,1,\dots).$$

Teoreemi 7 tingimus 3^o omab kuju

$$(44) \quad \sum_n \left\| P_k \frac{\bar{b}_{nk} \varepsilon_k}{r_k} \mathcal{X} + \sum_{v=k+1}^{\infty} \bar{b}_{nv} \varepsilon_v \mathcal{X} \right\| \leq M \|\mathcal{X}\| \quad (\mathcal{X} \in X; k=0,1,\dots).$$

Tingimustest (43) ja (44) järeldebki tingimuse 4^o tarvilikkus.

Tõestame teoreemi 8 tingimuste piisavuse. Selleks näitame, et teoreemi 8 tingimustest järelduvad teoreemi 7 tingimused. Teoreemi 7 tingimus 1^o järeldeb vahetult teoreemi 8 tingimusest 1^o. Teoreemi 7 tingimus 2^o omab kuju (41). Banach-Steinhausi teoreemi põhjal teoreemi 8 tingimusest 1^o järeldeb tingimus (40). Tingimuse (41) saame nüüd teoreemi 8 tingimusest 2^o ja tingimusest (40). Kuna rida

$$\sum_v b_{nv} \varepsilon_v \mathcal{X} \quad (\mathcal{X} \in X; n=0,1,\dots)$$

koondub, siis saab teoreemi 7 tingimuse 3^o (s.t. tingimuse (44)) järeldada teoreemi 8 tingimustest 3^o ja 4^o.

§ 4. Mõned järeldused

T e o r e e m 9. Operaatordid ε_ν on jada koonduvustegurid menetluse φ jaoks siis ja ainult siis, kui

1° eksisteerib $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \varepsilon_\nu \mathcal{X} \quad (\mathcal{X} \in X),$

2° $\|P_\nu \frac{\varepsilon_\nu}{p_\nu}\| \leq M \quad (\nu = 0, 1, \dots)$.

T ö e s t u s. Tingimuste 1° ja 2° tarvilikkus järeldub vahetult teoreemist 2. Piisavuseks tuleb näidata, et teoreemi 2 tingimus 3° on rahuldatud, kui kehtivad teoreemi 9 tingimused 1° ja 2°. Teoreemi 2 tingimus 3° nõuab, et

(45) $\sup_{\|\mathcal{X}_{n-1}\| \leq 1, \|\mathcal{X}_n\| \leq 1} \left\| -P_{n-1} \frac{\varepsilon_n}{p_n} \mathcal{X}_{n-1} + P_n \frac{\varepsilon_n}{p_n} \mathcal{X}_n \right\| \leq M \quad (n=0, 1, \dots)$

ja

$$\|P_{n-1} \frac{\varepsilon_n}{p_n}\| \leq M \quad (n = 0, 1, \dots) .$$

Kuna

(46) $\|P_{n-1} \frac{\varepsilon_n}{p_n}\| = \|P_n \frac{\varepsilon_n}{p_n} - \varepsilon_n\| \leq \|P_n \frac{\varepsilon_n}{p_n}\| + \|\varepsilon_n\|,$

siis teoreemi 9 tingimustest 1° ja 2° järeldub

(47) $\|P_{n-1} \frac{\varepsilon_n}{p_n}\| \leq M \quad (n = 0, 1, \dots) .$

Teoreemi 9 tingimusest 2° ja tingimusest (47) järeldub, et tingimus (45) on rahuldatud.

T e o r e e m 10. Operaatordid ε_ν on jada koonduvustegurid φ_0 suhtes siis ja ainult siis, kui

1° $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \|\varepsilon_\nu\| = 0,$

2° $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \|P_\nu \frac{\varepsilon_\nu}{p_\nu}\| = 0 .$

T ö e s t u s. Teoreemi 4 tingimusest 3° järeldub, et

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left\| -P_{n-1} \frac{\varepsilon_n}{p_n} X_{n-1} + P_n \frac{\varepsilon_n}{p_n} X_n \right\| = 0.$$

Kui $X_n = X_{n-1}$, siis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varepsilon_n\| = 0.$$

Kui $X_{n-1} = \Theta$ (nullelement), siis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| P_n \frac{\varepsilon_n}{p_n} \right\| = 0.$$

Sellelega on teoreemi tarvilikkus tõestatud.

Piisavuse tõestuseks tuleb näidata, et teoreemi 4 tingimus 3° on rahuldatud, kui kehtivad teoreemi 10 tingimused. Kuna kehtib võrratus (46), siis teoreemi 4 tingimus 3° on rahuldatud.

T e o r e e m 11. Operaatorid ε_ν on jada koonduvustegurid menetluse $|\mathcal{P}|$ jaoks siis ja ainult siis, kui

$$1^\circ \text{ eksisteerib } \lim_{\nu \rightarrow \infty} \varepsilon_\nu X \quad (X \in X),$$

$$2^\circ \left\| P_\nu \frac{\varepsilon_\nu}{p_\nu} \right\| \leq M \quad (\nu = 0, 1, \dots).$$

T ö e s t u s. Arvestades valemeid (32) ja (34) saab teoreemi 11 kergesti järeldada teoreemist 5.

T e o r e e m 12. Operaatorid ε_ν on jada absoluutse koonduvuse tegurid¹ menetluse $|\mathcal{P}|$ jaoks siis ja ainult siis, kui

$$1^\circ \{ \varepsilon_\nu X \} \text{ koondub absoluutselt } (X \in X),$$

¹ Operaatoreid ε_ν nimetatakse absoluutse koonduvuse teguriteks menetluse $|\mathcal{P}|$ jaoks, kui iga $|\mathcal{P}|$ -summeeruva jada $\{x_\nu\}$ korral $\{\varepsilon_\nu x_\nu\}$ on absoluutselt koonduv.

$$2^{\circ} \quad \left\| P_v \frac{\varepsilon_v}{r_v} \right\| \leq M \quad (v = 0, 1, \dots) .$$

T ö e s t u s. Arvestades valemit (34) juhul $v = 0$ saab tingimuse 1° tarvilikkuse järeldata teoreemi 7 tingimusest 3° . Sama teoreemi tingimusest 3° saab lihtsalt järeldata teoreemi 12 tingimuse 2° .

Teoreemi 12 tingimused 1° ja 2° on ka piisavad selleks, et operaatorid ε_v oleksid absoluutse koonduvuse tegurid menetluse $\{p\}$ jaoks. Tõepoolest, sest teoreemi 12 tingimustest 1° ja 2° järeldub teoreemi 7 tingimus 3° .

M ä r k u s : Kuna teoreemides 6 ja 8 on eeldatud, et φ on absoluutset koonduvust säilitav, siis tulemuste saamiseks üldisemal juhul on kasutatud teoreemide 11 ja 12 tuletamisel vastavalt teoreeme 5 ja 7.

Kuna tavalised jada summeeruvustegurid on erijuht abstraktsetest jada summeeruvusteguritest, kui $X=Y=R_1$ (ühedimensiooniline eukleidiline ruum), siis teoreemid ^{tavaliste} jada summeeruvustegurite kohta saame järeldata § 3 vastavatest teoreemidest.

T e o r e e m 13. Arvud ε_v on (φ, \mathcal{L}) tüüpi jada summeeruvustegurid siis ja ainult siis, kui

1° $\{\varepsilon_v\}$ on \mathcal{L} -summeeruv,

2° eksisteerib $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta \frac{b_{nv} \varepsilon_v}{r_v} \quad (v = 0, 1, \dots) .$

3° $\sum_v |P_v \Delta \frac{b_{nv} \varepsilon_v}{r_v}| \leq M \quad (n = 0, 1, \dots) .$

T e o r e e m 14. Olgu \mathcal{L} koonduvust säilitav menetlus. Arvud ε_v on (φ_0, \mathcal{L}) tüüpi jada summeeruvustegurid siis ja ainult

siis, kui

$$1^{\circ} \sum_{\nu} |P_{\nu} \Delta \frac{b_{n\nu} \varepsilon_{\nu}}{r_{\nu}}| < \infty \quad (n = 0, 1, \dots) ,$$

$$2^{\circ} \lim_{\nu \rightarrow \infty} P_{\nu} \frac{b_{n\nu} \varepsilon_{\nu}}{r_{\nu}} = 0 \quad (n = 0, 1, \dots) ,$$

$$3^{\circ} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu} |P_{\nu} \Delta \frac{b_{n\nu} \varepsilon_{\nu}}{r_{\nu}}| = \sum_{\nu} |P_{\nu} \Delta \frac{b_{\nu} \varepsilon_{\nu}}{r_{\nu}}| .$$

T e o r e e m 15. Olgu \mathcal{P} absoluutset koonduvust säilitav ja \mathcal{B} koonduvust säilitav menetlus. Arvud ε_{ν} on $(|\mathcal{P}|, \mathcal{B})$ tüüpi jada summeeruvustegurid siis ja ainult siis, kui

$$1^{\circ} \{ \varepsilon_{\nu} \} \text{ on } \mathcal{B} \text{-summeeruv,}$$

$$2^{\circ} \left| \sum_{\nu=0}^k b_{n\nu} \varepsilon_{\nu} \right| \leq M \quad (n, k = 0, 1, \dots) ,$$

$$3^{\circ} \left| P_{\nu} \frac{b_{n\nu} \varepsilon_{\nu}}{r_{\nu}} \right| \leq M \quad (n, \nu = 0, 1, \dots) .$$

T e o r e e m 16. Olgu \mathcal{P} absoluutset koonduvust säilitav. Arvud ε_{ν} on $(|\mathcal{P}|, |\mathcal{B}|)$ tüüpi jada summeeruvustegurid siis ja ainult siis, kui

$$1^{\circ} \text{ rida } \sum_{\nu} b_{n\nu} \varepsilon_{\nu} \text{ koondub } (n = 0, 1, \dots) .$$

$$2^{\circ} \left| P_{\nu} \frac{b_{n\nu} \varepsilon_{\nu}}{r_{\nu}} \right| \leq M_n \quad (n = 0, 1, \dots) ,$$

$$3^{\circ} \sum_n \left| \sum_{\nu=0}^k \bar{\Delta} b_{n\nu} \varepsilon_{\nu} \right| \leq M \quad (k = 0, 1, \dots) .$$

$$4^{\circ} \left| P_{\nu} \frac{\varepsilon_{\nu}}{r_{\nu}} \right| \sum_n |\bar{\Delta} b_{n\nu}| \leq M \quad (n = 0, 1, \dots) .$$

T e o r e e m 17. Arvud ε_{ν} on jada summeeruvustegurid koonduvuse suhtes siis ja ainult siis, kui

$$1^{\circ} \text{ eksisteerib } \lim_{n \rightarrow \infty} b_{n\nu} = b_{\nu} \quad (\nu = 0, 1, \dots) ,$$

$$2^{\circ} \sum_v |b_{nv} \varepsilon_v| \leq M \quad (n = 0, 1, \dots) .$$

3^o $\{\varepsilon_v\}$ on \mathcal{B} -summeeruv.

T e o r e e m 18. Arvud ε_v on jada summeeruvustegurid absoluutse koonduvuse suhtes siis ja ainult siis, kui

$$1^{\circ} \text{ eksisteerib } \lim_{n \rightarrow \infty} b_{nv} = b_v \quad (v = 0, 1, \dots) ,$$

$$2^{\circ} \left| \sum_{v=0}^k b_{nv} \varepsilon_v \right| \leq M \quad (n, k = 0, 1, \dots) ,$$

3^o $\{\varepsilon_v\}$ on \mathcal{B} -summeeruv.

T e o r e e m 19. Arvud ε_v on jada summeeruvustegurid tõkestatud jadade klassi suhtes siis ja ainult siis, kui

$$1^{\circ} \text{ eksisteerib } \lim_{n \rightarrow \infty} b_{nv} = b_v \quad (v = 0, 1, \dots) .$$

$$2^{\circ} \sum_v |b_{nv} \varepsilon_v| < \infty \quad (n = 0, 1, \dots) ,$$

$$3^{\circ} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_v |b_{nv} \varepsilon_v| = \sum_v |b_v \varepsilon_v| .$$

Teoreemid 17, 18 ja 19 järelduvad vastavalt lemmadest 7, 8 ja 10.

N ä i d e. Kui $p_v > 0$ ($v = 0, 1, \dots$), siis jadale $\{p_v\}$ vastav Riesz'i kaalutud keskmiste menetlus on koonduvust ja absoluutset koonduvust säilitav. Selle väite õigsus järeldub vastavalt lemmadest 11 ja 12. Kui peale selle $\{p_n\}$ ei ole tõkestatud, siis on vastav Riesz'i menetlus ψ regulaarne.

Sel juhul arvud

$$(48) \quad \varepsilon_v = \frac{p_v}{(P_v)^\sigma}$$

on koonduvustegurid menetluse η ja $|\eta|$ suhtes kui $\sigma \neq 1$. Kui $\sigma = 1$, siis arvud (48) on koonduvustegurid ka η_0 suhtes. Näite õigsus järeldeb teoreemidest 9, 11 ja 10.

§ 5. Jada summeeruvustegurite rakendus Peyerimhoffi teoorias

Artiklis [7] tõestatakse järgnev lause.

Kui \mathcal{A} on regulaarne ja tema nullsummeerimisväljas leiab aset nõrk lõikekoonduvus, siis rida

$$\sum \varepsilon_\nu \mathcal{X}_\nu$$

koondub iga \mathcal{A} -summeeruva jada $\{\mathcal{X}_\nu\}$ korral siis ja ainult siis, kui

$$\varepsilon_\nu = f(e_\nu),$$

kus f on pidev lineaarne funktsionaal \mathcal{A} summeerimisväljas ja $e_\nu = \{\delta_{\nu k}\}^1$.

Edaspidi eeldame, et menetlused \mathcal{A} ja \mathcal{B} on kolmnurksed. Kui menetlusi \mathcal{B} ja \mathcal{B} seovad valemid

$$b_{nv} = \Delta \beta_{nv} \quad \text{ja} \quad \beta_{nv} = \sum_{m=v}^n b_{nm},$$

siis nad määravad ühe ja sama summeerimismenetluse.

Kui \mathcal{B} on regulaarne, siis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu} b_{n\nu} \sum_{\mu=0}^{\nu} \varepsilon_{\mu} x_{\mu} = f(x)$$

kus $f(x)$ on pidev lineaarne funktsionaal \mathcal{A} summeerimisväljas $(x = \{\mathcal{X}_\mu\})$. Nüüd $x = e_k$ korral

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu} b_{n\nu} \sum_{\mu=0}^{\nu} (\varepsilon_{\mu} \delta_{\mu k} - \varepsilon_{\mu} \delta_{\mu-1, k}) = \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_{nk} \varepsilon_k + \sum_{\nu=k+1}^{\infty} b_{n\nu} \Delta \varepsilon_k) = \Delta \varepsilon_k \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=k+1}^{\infty} b_{n\nu} = \Delta \varepsilon_k. \end{aligned}$$

¹ $\delta_{\nu k}$ on Kroneckeri sümbol : $\delta_{\nu k} = 0$, kui $\nu \neq k$ ning $\delta_{\nu \nu} = 1$.

Seega tingimus

$$(49) \quad \Delta \varepsilon_v = f(e_v)$$

on tarvilik selleks, et rea $\sum \varepsilon_v x_v$ osasummade jada oleks summeeruv regulaarse menetlusega \mathcal{L} . Kuid et

$$(50) \quad \sum_{v=0}^k \varepsilon_v x_v = \sum_{v=0}^{k-1} \Delta \varepsilon_v X_v + \varepsilon_k X_k,$$

siis võime sõnastada järgmise lause.

T e o r e e m 20. Kui menetlused \mathcal{A} ja \mathcal{L} on regulaarsed ning \mathcal{A} nullsummeerimisväljas leiab aset nõrk löikekoonduvus, siis arvud ε_v on (A, B) tüüpi summeeruvustegurid siis ja ainult siis, kui kehtib tingimus (49) ja suurused ε_v on $(\mathcal{A}, \mathcal{L})$ tüüpi jada summeeruvustegurid.

Nõrga löikekoonduvuse nõude menetluse \mathcal{A} nullsummeerimisväljas võib asendada tingimusega

$$\left| \sum_{v=0}^n a_{kv} X_v \right| \leq M \quad (n \leq k),$$

kus $\mathcal{A}\{X_v\} = 0$. Rieszi kaalutud keskmiste menetluste korral vastav tingimus on

$$(51) \quad \left| \sum_{v=0}^n \frac{p_v}{P_n} X_v \right| = \left| \frac{P_n}{P_k} \right| \left| \sum_{v=0}^n \frac{p_v}{P_n} X_v \right| \leq M \quad (n \leq k).$$

Kui Rieszi kaalutud keskmiste menetlus on regulaarne, siis \mathcal{P} nullsummeerimisväljas leiab aset nõrk löikekoonduvus. Tõepoolest, sest tingimus (51) on sel korral täidetud.

Kui $\mathcal{A} = \mathcal{P}$, siis tingimuse (49) võime kirjutada kujul¹

$$(52) \quad \Delta \varepsilon_v = \sum_{n=v}^{\infty} \frac{\alpha_n p_v}{P_n},$$

¹ Vastav funktsionaali üldine kuju on leitud artiklis [10]

kus $\sum |\alpha_n| < \infty$.

Tingimus (52) on ekvivalentne kahe järgneva tingimusega:

$$(53) \quad \sum |P_v \Delta \frac{\Delta \varepsilon_v}{p_v}| < \infty ,$$

$$(54) \quad \Delta \varepsilon_v = o(p_v) .$$

Kasutades tingimust (53) saab lemma 11 põhjal tingimusest

$$\frac{\Delta \varepsilon_v}{p_v} = \sum_{n=v}^{\infty} \frac{\alpha_n}{p_n}$$

tuletada, et

$$(55) \quad \sum |\Delta \varepsilon_v| < \infty .$$

Samasusest

$$\sum_{v=0}^{k-1} P_v \Delta \frac{\Delta \varepsilon_v}{p_v} = \sum_{v=0}^k \Delta \varepsilon_v - P_k \frac{\Delta \varepsilon_k}{p_k}$$

järeldub, et eksisteerib

$$(56) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} P_k \frac{\Delta \varepsilon_k}{p_k} .$$

Kasutades seost

$$\Delta \frac{b_{nv} \varepsilon_v}{p_v} = \varepsilon_{v+1} \Delta \frac{b_{nv}}{p_v} + b_{nv} \frac{\Delta \varepsilon_v}{p_v} ,$$

tingimust (56) ja teoreemi 13 võime sõnastada järgmise lause.

T e o r e e m 21.

Olgu \mathcal{P} ja \mathcal{B} regulaarsed menetlused. Arvud ε_v on (P, B) tüüpi summeeruvustegurid siis ja ainult siis, kui kehtivad tingimused (53), (54) ja

$$\sum_{v=0}^n |P_v \varepsilon_{v+1} \Delta \frac{\Delta b_{nv}}{p_v}| \leq M \quad (n = 0, 1, \dots) .$$

Peyerimhoffi teooriat saab kasutada ka A -tökestatuse puhul.

Olgu \mathcal{A} ja \mathcal{B} regulaarsed ja

$$\sum_{\nu=0}^n \beta_{n\nu} \varepsilon_{\nu} x_{\nu} = \sum_{k=0}^n c'_{nk} \mathcal{X}_k'',$$

kus

$$c'_{nk} = \sum_{\nu=k}^n \beta_{n\nu} \varepsilon_{\nu} \alpha'_{\nu k}, \quad (\alpha'_{\nu k}) = (\alpha_{\nu k})^{-1}, \quad \mathcal{X}_k'' = \sum_{\nu=0}^k \alpha_{k\nu} x_{\nu}.$$

Kui arvud ε_{ν} on (A_0, B) tüüpi summeeruvustegurid, siis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \beta_{nk} \varepsilon_k x_k = \sum_k c'_k \mathcal{X}_k'',$$

kus

$$c'_k = \lim_{n \rightarrow \infty} c'_{nk}, \quad \sum |c'_k| < \infty.$$

Kui $\mathcal{X}_k = \delta_{k\nu}$, siis

$$(57) \quad \Delta \varepsilon_{\nu} = \sum_{k=\nu}^{\infty} c'_k a_{k\nu}, \quad \sum |c'_k| < \infty.$$

Rieszi kaalutud keskmiste menetluse korral tingimus (57) on samaväärne tingimustega (53) ja (54). Kui kehtib

$$\left| \sum_{\nu=0}^n a_{k\nu} \mathcal{X}_{\nu} \right| \leq M \quad (n \leq k)$$

\mathcal{A} tõkestusväljas, siis analoogilise pöördteisenduste uurimise meetodiga võib veenduda, et arvud ε_{ν} on (\mathcal{A}_0, B) tüüpi summeeruvustegurid siis ja ainult siis, kui on täidetud tingimus (57).

Lähtudes valemist (50) saame järeledada järgmise lause.

T e o r e e m 22. Arvud ε_{ν} on (A_0, B) tüüpi summeeruvustegurid, kus A ja B on regulaarsed, siis ja ainult siis, kui suurused ε_{ν} on $(\mathcal{A}_0, \mathcal{B})$ tüüpi jada summeeruvustegurid ja kehtib tingimus (57).

Tingimusest (53) ja seosest

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{v=0}^{k-1} |P_v \Delta \frac{\Delta \varepsilon_v}{p_v}| + |P_k \frac{\Delta \varepsilon_k}{p_k}| \right) = \sum_v |P_v \Delta \frac{\Delta \varepsilon_v}{p_v}|$$

järeldub, et

$$P_k \Delta \varepsilon_k = o(p_k)$$

Nüüd vastavalt etteantud arvule $\delta > 0$ saab leida K nii, et

$$\left| P_k \frac{\Delta \varepsilon_k}{p_k} \right| < \frac{\delta}{M},$$

kui $k > K$ ja kus $\sum_v |b_{nv}| \leq M$ ($n = 0, 1, \dots$).

Järelikult

$$\begin{aligned} \sum_v \left| P_v \frac{\Delta \varepsilon_v}{p_v} b_{nv} \right| &\leq \sum_{v=0}^K \left| P_v \frac{\Delta \varepsilon_v}{p_v} b_{nv} \right| + \sum_{v=K+1}^{\infty} \left| P_v \frac{\Delta \varepsilon_v}{p_v} b_{nv} \right| < \\ &< \sum_{v=0}^K \left| P_v \frac{\Delta \varepsilon_v}{p_v} b_{nv} \right| + \delta \quad (n = 0, 1, \dots). \end{aligned}$$

Siit nähtub, et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_v \left| P_v \frac{\Delta \varepsilon_v}{p_v} b_{nv} \right| = 0,$$

kui \mathcal{L} on regulaarne.

Nüüd vastavalt teoreemile 14 sõnastame järgmise lause.

T e o r e e m 23. Kui menetlused \mathcal{P} ja \mathcal{L} on regulaarsed, siis arvud ε_v on (P_0, B) tüüpi summeeruvustegurid siis ja ainult siis, kui kehtivad tingimused (53), (54) ja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_v \left| P_v \varepsilon_{v+1} \Delta \frac{\Delta \beta_{nv}}{p_v} \right| = 0.$$

Märgime lõpuks veel, et teoreemid 21 ja 23 on kooskõlas artiklites [5] ja [3] vastavate teoreemidega. Teoreemides 21 ja 23 ei pea nõudma tingimata maatriksi \mathcal{L}

kolmnurksust. Kui \mathcal{L} ei ole kolmnurkne, siis ei ole teada seos \mathcal{L} ja B vahel. Kuna tavaliselt on uuritud rea summeeruvustegureid tüüpi (A, B) ja tüüpi (A_0, B) juhul kui A ja B on rida-jada teisenduse matriksid, siis jätame vastavad tulemused siinkohal märkimata.

K i r j a n d u s

1. B o s a n q u e t, L. S., On convergence and summability factors in a sequence, *Mathematika*, 1/1954/, 24-44.
2. T y l e r, B., Absolute convergence and summability factors in a sequence. *Journ.Lond.Math.Soc.*, 1958, 33, Nr. 3, 341-351
3. К а н г р о, Г., О множителя суммируемости, Уч. зап. Тартуского у-та, 1955, 37, 191-232.
4. Б а р о н, С. Новые доказательства основных теорем о множителях суммируемости.
5. К а н г р о, Г., В и х м а н н, Ф., Об абстрактных множителях суммируемости для метода взвешенных средних Рисса.
6. К а н г р о, Г., О матричных преобразованиях последовательностей в банаховых пространствах, *Изв. АН ЭССР*, 1956, 2, 108-128.
7. P e u e r i m h o f f, A., Konvergenz- und Summierbarkeitsfaktoren, *Math.Zeitschrift*, 1952, 55, 23- 54.
8. P e u e r i m h o f f, A., Untersuchungen über absolute Summierbarkeit, *Math.Zeitschrift*, 1953, 57, 256-290.
9. Х а р д и, Г., Расходящиеся ряды, М., 1951.
10. Z e l l e r, K. Allgemeine Eigenschaften von Limitierungsverfahren, *Math. Zeitschrift*, 1951, 53, 463-487.
11. Z e l l e r, K. Verallgemeinerte Matrixtransformationen, *Math.Zeitschrift*, 1952, 56, 18-20.