Tartu Ülikool
Loodus- ja täppisteaduste valdkond
Matemaatika ja statistika instituut

Karl-Ingmar Adamson

Tugevalt normi saavutavad Lipschitzi funktsioonid

Matemaatika eriala
Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendajad: Rainis Haller
Jaagup Kirme

Tartu 2024

Tugevalt normi saavutavad Lipschitzi funktsioonid

Bakalaureusetöö
Karl-Ingmar Adamson

Lühikokkuvõte. Käesolevas bakalaureusetöös antakse üksikasjalik tõestus kahe artikli tähtsamatele tulemustele, need artiklid on:

1) A. Avilés, G. Martínez-Cervantes, A. Rueda Zoca ja P. Tradacete *„Infinite dimensional spaces in the set of strongly norm-attaining Lipschitz maps"*, Rev. Mat. Iberoamericana, 2024;

2) S. Dantas, R. Medina, A. Quilis ja Ó. Roldán *„On strongly norm attaining Lipschitz maps"*, Nonlinear Anal., 2023.

CERCS teaduseriala: P140 Jadad, Fourier' analüüs, funktsionaalanalüüs.
Märksõnad: Banachi ruumid, normeeritud ruumid, Lipschitzi funktsioonid.

Strongly norm-attaining Lipschitz maps

Bachelor's thesis
Karl-Ingmar Adamson

Abstract. In this bachelor's thesis, a detailed proof is given for the main results of two articles:

1) A. Avilés, G. Martínez-Cervantes, A. Rueda Zoca, and P. Tradacete *"Infinite dimensional spaces in the set of strongly norm-attaining Lipschitz maps"*, Rev. Mat. Iberoamericana, 2024;

2) S. Dantas, R. Medina, A. Quilis, and Ó. Roldán *"On strongly norm attaining Lipschitz maps"*, Nonlinear Anal., 2023.

CERCS research specialisation: P140 Series, Fourier Analysis, functional analysis.
Keywords: Banach spaces, normed spaces, Lipschitz functions.

Sisukord

Sissejuhatus

Olgu M meetriline ruum kaugusega d ja olgu $f\colon M \to \mathbb{R}$. Öeldakse, et kujutus f on **Lipschitzi funktsioon**, kui leidub $L \geqslant 0$ nii, et iga $x, y \in M$ korral

$$|f(x) - f(y)| \leqslant L \cdot d(x, y);$$

vähimat sellist arvu L, mida märgitakse $\|f\|_{\mathrm{Lip}}$, nimetatakse kujutuse f **Lipschitzi konstandiks**. Öeldakse, et Lipschitzi funktsioon $f\colon M \to \mathbb{R}$ **saavutab normi tugevalt**, kui leiduvad elemendid $x, y \in M$ nii, et $x \neq y$ ja

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}} = \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)}.$$

Fikseeritud (null)punkti $0 \in M$ korral on selliste Lipschitzi funktsioonide $M \to \mathbb{R}$ hulk, mille puhul $0 \mapsto 0$, loomulikul viisil Banachi ruum normiga $\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}}$. Seda ruumi tähistatakse sümboliga $\mathrm{Lip}_0(M)$.

Aastal 2022 avaldasid V. Kadets ja Ó. Roldán artikli [6], milles tõestasid, et kui meetriline ruum M on lõpmatu, siis leidub iga $n \in \mathbb{N}$ korral Banachi ruumil $\mathrm{Lip}_0(M)$ n-mõõtmeline alamruum, mis koosneb tugevalt normi saavutavatest Lipschitzi funktsioonidest. Artiklis tõstatati küsimus, kas iga nullpunktiga täieliku lõpmatu meetrilise ruumi M korral leidub Banachi ruumil $\mathrm{Lip}_0(M)$ ka lõpmatumõõtmeline alamruum, mis koosneb tugevalt normi saavutavatest Lipschitzi funktsioonidest.

Aastal 2023 (esmalt digihoidlas arXiv ja hiljem aastal 2024 teadusajakirjas) avaldatud artiklis [1] tõestasid A. Avilés, G. Martínez-Cervantes, A. Rueda Zoca ja P. Tradacete, et nullpunktiga lõpmatu täieliku meetrilise ruumi M korral sisaldab hulk $\mathrm{SNA}(M)$ Banachi ruumiga c_0 isomorfse $\mathrm{Lip}_0(M)$ alamruumi, vastates nii artiklis [6] püstitatud küsimusele. Samal aastal näitasid S. Dantas, R. Medina, A. Quilis ja Ó. Roldán artiklis [3], et $\mathrm{SNA}(M)$ sisaldab Banachi ruumiga c_0 lausa isomeetriliselt isomorfse $\mathrm{Lip}_0(M)$ alamruumi tingimusel, et M ei ole ühtlaselt diskreetne. Samas artiklis antakse näide nullpunktiga lõpmatust ühtlaselt diskreetsest meetrilisest ruumist M, mille puhul hulk $\mathrm{SNA}(M)$ Banachi ruumiga c_0 isomeetriliselt isomorfset $\mathrm{Lip}_0(M)$ alamruumi ei sisalda.

Käesolev bakalaureusetöö on funktsionaalanalüüsi valdkonda kuuluv referatiivne uurimus, mille eesmärgiks on koondada artiklite [1] ja [3] tähtsamad tulemused ja anda nendele üksikasjalikud tõestused.

Töö esimeses peatükis defineerime vajalikud mõisted ning tõestame olulised vahetulemused. Teises peatükis näitame, et nullpunktiga lõpmatu ühtlaselt diskreetse meetrilise ruumi M korral sisaldab hulk $\mathrm{SNA}(M)$ Banachi ruumiga c_0 isomorfset $\mathrm{Lip}_0(M)$ alamruumi. Kolmandas peatükis näitame, et kui M on nullpunktiga lõpmatu meetriline ruum, mis ei ole ühtlaselt diskreetne, siis $\mathrm{SNA}(M)$ sisaldab Banachi ruumiga c_0 isomeetriliselt isomorfset $\mathrm{Lip}_0(M)$ alamruumi. Neljandas peatükis esitame näite nullpunktiga lõpmatust ühtlaselt diskreetsest meetrilisest ruumist M, mille puhul hulk $\mathrm{SNA}(M)$ Banachi ruumiga c_0 isomeetriliselt isomorfset $\mathrm{Lip}_0(M)$ alamruumi ei sisalda.

Bakalaureusetöös vaatleme ainult reaalseid normeeritud ruume. Kasutame normeeritud ruumide teooria tavalisi tähistusi. Olgu X normeeritud ruum. Ruumi X kinnist ühikkera tähistame B_X. Tähistega $B(x, r)$ ja $\overline{B}(x, r)$ märgime vastavalt lahtist ja kinnist kera keskpunktiga x ja raadiusega r. Ütleme, et meetriline ruum M on **diskreetne**, kui iga $x \in M$ korral leidub $r_x > 0$ nii, et $B(x, r_x) = \{x\}$. Ütleme, et meetriline ruum M on **ühtlaselt diskreetne**, kui leidub $r > 0$ nii, et iga $x, y \in M$ korral, kus $y \neq x$, kehtib $d(x, y) \geq r$. Meetrilise ruumi M kuhjumispunktide hulka tähistame tähisega M'.

1 Vajalikud eelteadmised

Peatüki esimeses alapunktis toome sisse Lipschitzi funktsioonide ruumi mõiste. Selle Banachi ruumi kohta võib täiendavalt lugeda allikatest [5], [8] ja [9]. Veel tuuakse siin sisse tugevalt normi saavutava Lipschitzi funktsiooni mõiste. Tugevalt normi saavutavate Lipschitzi funktsioonide teemat on viimastel aastatel intensiivselt uuritud, selle teema kohta võib täiendavalt lugeda nt artiklitest [1], [2], [3], [6].

Teises alapunktis toome sisse Schauderi baasiga ekvivalentse jada mõiste. Selle mõiste abil konstrueeritakse töö põhiosas Banachi ruumi $\mathrm{Lip}_0(M)$ alamruume, mis on ruumiga c_0 isomorfsed.

Töö põhiosas kasutatakse korduvalt graafiteooriast pärit Ramsey teoreemi lõpmatutele graafidele, täpsemalt, selle sõnastust hulgateooria terminites. Täielikkuse huvides anname ka selle teoreemi tõestuse.

1.1 Lipschitzi funktsioonide ruum $\mathrm{Lip}_0(M)$

Definitsioon 1.1. Olgu (M, d) meetriline ruum ja olgu $f\colon M \to \mathbb{R}$. Öeldakse, et kujutus f rahuldab **Lipschitzi tingimust**, kui leidub $L \geqslant 0$ nii, et iga $x, y \in M$ korral

$$|f(x) - f(y)| \leqslant L \cdot d(x, y).$$

Vähimat sellist arvu L nimetatakse kujutuse f **Lipschitzi konstandiks** ja tähistatakse $\mathrm{Lip}(f)$.

Definitsioon 1.2. Meetrilist ruumi koos selles fikseeritud elemendiga nimetatakse **nullpunktiga meetriliseks ruumiks**. Fikseeritud elementi nimetatakse **nullpunktiks** ja tähistatakse sümboliga 0.

Olgu M nullpunktiga meetriline ruum. Tähistame sümboliga $\mathrm{Lip}_0(M)$ kõigi selliste Lipschitzi tingimust rahuldavate kujutuste $f\colon M \to \mathbb{R}$ hulka, mille korral $f(0) = 0$. On teada, et $\mathrm{Lip}_0(M)$ on Banachi ruum punktiviisi defineeritud vektorruumi tehete ja normi $\|f\|_{\mathrm{Lip}} = \mathrm{Lip}(f)$ suhtes. Seda Banachi ruumi nimetatakse **Lipschitzi funktsioonide ruumiks**.

Lause 1.3 (vt nt [8, laused 1.3 ja 1.4])**.** *Hulk* $\mathrm{Lip}_0(M)$ *on vektorruum üle reaalarvude korpuse punktiviisi defineeritud tehete suhtes ja Banachi ruum normiga*

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}} = \mathrm{Lip}(f).$$

On teada (vt nt [8, lk 8]), et ruum $\mathrm{Lip}_0(M)$ ei sõltu tegelikult meetrilises ruumis M nullpunkti valikust. Täpsemalt, kui esialgse nullpunkti 0 asemel lugeda meetrilise ruumi M uueks nullpunktiks element $0'$ ja $\mathrm{Lip}_{0'}(M)$ on vastav Lipschitzi funktsioonide ruum, siis $\mathrm{Lip}_0(M)$ ja $\mathrm{Lip}_{0'}(M)$ on isomeetriliselt isomorfsed. Vastav isomeetriline isomorfism on $T\colon \mathrm{Lip}_0(M) \to \mathrm{Lip}_{0'}(M)$,

$$(Tf)(p) = f(p) - f(0'), \qquad f \in \mathrm{Lip}_0(M),\ p \in M.$$

Definitsioon 1.4. Öeldakse, et funktsioon $f \in \mathrm{Lip}_0(M)$ **saavutab normi tugevalt**, kui leiduvad elemendid $x, y \in M$ nii, et $x \neq y$ ja

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}} = \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)}.$$

Banachi ruumi $\mathrm{Lip}_0(M)$ tugevalt normi saavutavate funktsioonide hulka tähistame sümboliga $\mathrm{SNA}(M)$.

1.2 Baaside ekvivalentsus

Definitsioon 1.5. Öeldakse, et normeeritud ruumid X ja Y on **isomorfsed**, kui leidub lineaarne sürjektiivne kujutus $T\colon X \to Y$ ning konstandid $\alpha, \beta > 0$ nii, et iga $x \in X$ korral

$$\alpha\|x\| \leq \|Tx\| \leq \beta\|x\|.$$

Sellist kujutust T nimetatakse (normeeritud ruumide) **isomorfismiks**.

Öeldakse, et normeeritud ruumid X ja Y on **isomeetriliselt isomorfsed**, kui leidub lineaarne sürjektiivne kujutus $T\colon X \to Y$ nii, et iga $x \in X$ korral

$$\|Tx\| = \|x\|.$$

Definitsioon 1.6 (vt nt [4, definitsioon 4.6])**.** Olgu X lõpmatumõõtmeline normeeritud ruum ning (e_n) tema elementide jada. Jada (e_n) nimetatakse (ruumi X) **Schauderi baasiks**, kui iga $x \in X$ korral leidub üheselt määratud skalaaride jada (α_n) nii, et $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$.

Märkus. On hästi teada, et kui (e_n) on Schauderi baas normeeritud ruumis X, siis X on separaabel ja $X = \overline{\mathrm{span}}\{e_n \colon n \in \mathbb{N}\}$.

Banachi ruumi c_0 üheks võimalikuks Schauderi baasiks on jada (e_n), kus iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$e_n \coloneqq (\underbrace{0, \ldots, 0, 1}_{n \text{ komponenti}}, 0, 0, \ldots).$$

Jada (e_n) nimetatakse Banachi ruumi c_0 **kanooniliseks (Schauderi) baasiks**. Iga elemendi $\alpha = (\alpha_n) \in c_0$ korral $\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$.

Definitsioon 1.7 (vt nt [3, lk 3])**.** Olgu X Banachi ruum, (x_n) tema elementide jada ning Y Banachi ruum Schauderi baasiga (e_n). Öeldakse, et jada (x_n) on **ekvivalentne** baasiga (e_n), kui leidub isomorfism $T\colon \overline{\mathrm{span}}\{x_n \colon n \in \mathbb{N}\} \to Y$ nii, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral $T(x_n) = e_n$. Öeldakse, et jada (x_n) on **isomeetriliselt ekvivalentne** baasiga (e_n), kui leidub isomeetriline isomorfism $T\colon \overline{\mathrm{span}}\{x_n \colon n \in \mathbb{N}\} \to Y$ nii, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral $T(x_n) = e_n$.

Märkus. Kui Banachi ruumi X elementide jada (x_n) on ekvivalentne Banachi ruumi Y Schauderi baasiga (e_n), siis read $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ ja $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ koonduvad samaaegselt. Järelikult, kui Banachi ruumi X elementide jada (x_n) on ekvivalentne ruumi c_0 kanoonilise baasiga (e_n), siis $\overline{\operatorname{span}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ elemendid on parajasti kujul $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ mingi $\alpha = (\alpha_n) \in c_0$ korral ehk

1) iga $x \in \overline{\operatorname{span}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ korral leidub $\alpha = (\alpha_n) \in c_0$ nii, et $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$;

2) iga $\alpha = (\alpha_n) \in c_0$ korral rida $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ koondub ja tema summa on $x \in \overline{\operatorname{span}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Teoreem 1.8 (Pidevalt jätkamise teoreem, vt nt [7], lk 149)**.** *Olgu X normeeritud ruum, Y Banachi ruum ja $X_0 \subset X$ ruumi X alamruum. Kui X_0 on kõikjal tihe ruumis X, siis igal pideval lineaarsel operaatoril $T' \colon X_0 \to Y$ on olemas ühene pidev lineaarne jätk $T \colon X \to Y$. Seejuures $\|T'\| = \|T\|$ ning kui T' on isomeetriline, on ka T isomeetriline.*

Lemma 1.9. *Olgu X Banachi ruum ja (x_n) tema elementide jada. Järgmised tingimused on samaväärsed:*

(i) *jada (x_n) on isomeetriliselt ekvivalentne ruumi c_0 kanoonilise baasiga (e_n);*

(ii) *iga $(\alpha_n) \in c_0$ korral rida $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ koondub ja*

$$\Big\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \Big\| = \max_{n \in \mathbb{N}} |\alpha_n|;$$

(iii) *iga $(\alpha_n) \in c_0$ korral rea $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ koondumisest järeldub võrdus*

$$\Big\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \Big\| = \max_{n \in \mathbb{N}} |\alpha_n|;$$

(iv) *iga $(\alpha_n) \in c_{00}$ korral*

$$\Big\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \Big\| = \max_{n \in \mathbb{N}} |\alpha_n|.$$

Tõestus. $(i) \Longrightarrow (iv)$. Eeldame et kehtib (i). Näitame, et kehtib (iv). Olgu isomeetriline isomorfism $T \colon \overline{\operatorname{span}}\{x_n \colon n \in \mathbb{N}\} \to c_0$ selline, et $T(x_n) = e_n$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral. Olgu $(\alpha_n) \in c_{00}$. Siis $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \in \operatorname{span}\{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ ja

$$T\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n T x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n,$$

seega

$$\Big\|\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n\Big\| = \Big\|\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n\Big\| = \max_{n\in\mathbb{N}}|\alpha_n|.$$

$(iv) \implies (iii)$. Eeldame, et kehtib (iv). Olgu $(\alpha_n)\in c_0$ selline, et rida $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n$ koondub. Defineerime iga $m\in\mathbb{N}$ korral jada $(\alpha_n^m)\in c_{00}$, kus

$$\alpha_n^m = \begin{cases} 0, & \text{kui } n > m,\\ \alpha_n, & \text{kui } n \le m. \end{cases}$$

Sel juhul

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n\Big\| &= \Big\|\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\alpha_n x_n\Big\| = \lim_{m\to\infty}\Big\|\sum_{n=1}^{m}\alpha_n x_n\Big\| \\ &= \lim_{m\to\infty}\Big\|\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^m x_n\Big\| = \lim_{m\to\infty}\max_{n\in\mathbb{N}}|\alpha_n^m| = \max_{n\in\mathbb{N}}|\alpha_n|.\end{aligned}$$

Viimane võrdus kehtib, sest kui $N\in\mathbb{N}$ on selline, et $|\alpha_N| = \max_{n\in\mathbb{N}}|\alpha_n|$, siis iga $n\ge N$ korral $\max_{n\in\mathbb{N}}|\alpha_n^m| = \max_{n\in\mathbb{N}}|\alpha_n|$.

$(iii) \implies (ii)$. Eeldame, et kehtib (iii). Piisab näidata, et iga $(\alpha_n)\in c_0$ korral rida $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n$ koondub. Olgu $(\alpha_n)\in c_0$. Näitame, et rea $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n$ osasummade jada on Cauchy jada. Fikseerime vabalt $\varepsilon > 0$. Leidub $m\in\mathbb{N}$ nii, et iga $k\ge n$ korral $|\alpha_k| < \varepsilon$. Näitame, et iga $M, N \ge m$ korral

$$\Big\|\sum_{n=1}^{N}\alpha_n x_n - \sum_{n=1}^{M}\alpha_n x_n\Big\| < \varepsilon.$$

Olgu $M, N\ge m$ ja $M < N$. Vaatleme $(\xi_n)\in c_0$, kus

$$\xi_n = \begin{cases} 0, & \text{kui } n \le M,\\ \alpha_n, & \text{kui } M+1 \le n \le N,\\ 0, & \text{kui } n > N. \end{cases}$$

Siis $\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n x_n$ koondub ja (iii) põhjal saame

$$\Big\|\sum_{n=1}^{N}\alpha_n x_n - \sum_{n=1}^{M}\alpha_n x_n\Big\| = \Big\|\sum_{n=M+1}^{N}\alpha_n x_n\Big\| = \Big\|\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n x_n\Big\| = \max_{M+1\le n\le N}|\alpha_n| < \varepsilon.$$

$(ii) \implies (i)$. Eeldame, et kehtib (ii). Peame leidma sellise isomeetrilise isomorfismi $T\colon \overline{\operatorname{span}}\{x_n\colon n\in\mathbb{N}\}\to c_0$, et iga $n\in\mathbb{N}$ korral $T(x_n) = e_n$. Tingimuse (ii)kohaselt on elemendid x_n, $n\in\mathbb{N}$, lineaarselt sõltumatud.

Tegelikult on lineaarne operaator $T_0\colon \operatorname{span}\{x_n\colon n\in\mathbb{N}\}\to c_0$ üheselt määratud tingimusega $x_n\mapsto e_n$ iga $n\in\mathbb{N}$ korral, kusjuures

$$T_0\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n\Big)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n$$

iga $(\alpha_n)\in c_{00}$ korral.

Tingimuse (ii) kohaselt on selline kujutus isomeetriline. Tõepoolest, iga $x\in \operatorname{span}\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$ korral leidub $(\alpha_n)\in c_{00}$ nii, et $x=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n$ ja tingimuse (ii) kohaselt

$$\|T_0x\|=\Big\|\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n\Big\|=\max_{n\in\mathbb{N}}|\alpha_n|=\|x\|.$$

Isomeetrilist kujutust T_0 saab jätkata pidevaks isomeetriliseks kujutuseks $T:\overline{\operatorname{span}}\{x_n : n\in\mathbb{N}\}\to c_0$. Seega on jada (x_n) on isomeetriliselt ekvivalentne ruumi c_0 kanoonilise baasiga.

□

1.3 Ramsey teoreem

Iga hulga X ja $n\in\mathbb{N}$ korral tähistagu $X^{(n)}$ hulka, mille elementideks on hulga X kõik n-elemendilised alamhulgad.

Teoreem 1.10 (Ramsey teoreem, vt [4, Proposition 6.4])**.** *Olgu $n\in\mathbb{N}$, N hulga $\mathbb{N}$ loenduv alamhulk ja funktsioon $\phi\colon N^{(n)}\to C$, kus C on lõplik hulk. Leidub lõpmatu hulk $M\subset N$ nii, et ϕ on hulgal $M^{(n)}$ konstantne.*

Tõestus. Tõestame matemaatilise induktsiooni abil. Juhul $n=1$, peab hulga C lõplikkuse tõttu leiduma loenduv hulk üheelemendilisi hulkasid $\{n_i\}$, $i\in\mathbb{N}$, mis kujutuvad üheks ja samaks C elemendiks. Otsitavaks hulgaks M sobib sel juhul $\bigcup_{i=1}^{\infty}\{n_i\}$.

Eeldame nüüd, et teoreemi väide kehtib mingi $n=m-1$ korral, kus $m\in\mathbb{N}$ ja $m>1$. Näitame, et teoreemi väide kehtib $n=m$ korral.

Märkame, et iga $j\in N$ korral leidub lõpmatu hulk D_j nii, et ϕ on konstantne hulkadel, mis esituvad kujul $F\cup\{j\}$, kus $F\in D_j^{(n-1)}$. Selles veendumiseks fikseerime $j\in N$ ja defineerime funktsiooni $\phi_j\colon (N\setminus\{j\})^{(n-1)}\to C$, $\phi_j(F)=\phi(F\cup\{j\})$. Induktsiooni eelduse tõttu leidub lõpmatu hulk $D_j\subset N\setminus\{j\}$ nii, et ϕ_j on hulgal $D_j^{(n-1)}$ konstantne. Teisisõnu, ϕ on konstantne hulkadel, mis esituvad kujul $F\cup\{j\}$, kus $F\in D_j^{(n-1)}$.

Veendume, et väide kehtib $n=m$ korral. Olgu $n_0\in N$ suvaline. Eelneva arutelu põhjal saame leida lõpmatu hulga $M_1\subset N\setminus\{n_0\}$ nii, et ϕ on konstantne hulkadel, mis esituvad kujul $\{n_0\}\cup F$, kus $F\in M_1^{(n-1)}$. Olgu $n_1=\min M_1$. Järgnevalt leiame lõpmatu hulga $M_2 \subset M_1 \setminus \{n_1\}$ nii, et ϕ on konstantne hulkadel $F \cup \{n_1\}$, kus $F \in M_2^{(n-1)}$ (see konstant on võib-olla erinev hulgaga M_1 seotud konstandist). Olgu $n_2 = \min M_2$. Niiviisi jätkates saame lõpmatute hulkade jada $M_1 \supset M_2 \supset \cdots$ ning rangelt kasvava jada (n_j). Kuna erinevaid võimalikke konstante, millega hulgad M_j, $j \in \mathbb{N}$, on seotud, on lõplik arv, saame eraldada osajada (n_{j_k}) nii, et hulgad M_{j_k} on seotud ühe ja sama konstandiga $c \in C$. Tähistame osajadad (n_{j_k}) ja (M_{j_k}) ümber vastavalt tähistega (n_k) ja (M_k).

Näitame, et otsitavaks hulgaks on $M := \bigcup_{n=1}^{\infty}\{n_k\}$. Selleks veendume, et iga $F \in M^{(n)}$ korral $\phi(F) = c$. Fikseerime hulga $\{k_1, k_2, \dots, k_n\} \in M^{(n)}$ ja oletame, et $k_1 < k_2 < \cdots < k_n$. Nüüd $\{k_2, k_3, \dots, k_n\} \in M_{k_1+1}^{(n-1)}$, sest $k_2 \in M_{k_2}, k_3 \in M_{k_3}, \dots, k_n \in M_{k_n}$ ja $M_{k_1+1} \supset M_{k_2} \supset \cdots \supset M_{k_n}$. Hulk $\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ esitub kui $\{k_1\} \cup F$, kus $F \in M_{k_1+1}^{(n-1)}$, $(k_1 + 1 \leq k_2)$ ning seega $\phi(F) = c$.

□

Järeldus 1.11. *Olgu $m, n \in \mathbb{N}$ ja hulgad $S_1, \dots, S_m$ sellised paarikaupa lõikumatud $\mathbb{N}^{(n)}$ osahulgad, et $\bigcup_{k=1}^{m} S_k = \mathbb{N}^{(n)}$. Siis leidub $k \in \{1, \dots, m\}$ ja lõpmatu hulk $M \subset \mathbb{N}$ nii, et $M^{(n)} \subset S_k$.*

Tõestus. Piisab Ramsey teoreemis võtta $N = \mathbb{N}$, $C = \{S_1, \dots, S_m\}$ ja $\phi \colon \mathbb{N}^{(n)} \to C$ selliselt, et $\phi(F) = S_k$ parajasti siis, kui $F \in S_k$. □

2 Banachi ruumiga c_0 isomorfne $\mathrm{Lip}_0(M)$ alamruum hulgas $\mathrm{SNA}(M)$

Artikli [1] põhiteoreem on järgmine tulemus.

Teoreem 2.1 ([1, põhiteoreem (**Main Theorem**), lk 190]). *Olgu M nullpunktiga lõpmatu täielik meetriline ruum. Hulk $\mathrm{SNA}(M)$ sisaldab Banachi ruumiga c_0 isomorfset $\mathrm{Lip}_0(M)$ alamruumi.*

Järgmises peatükis näeme, et kui meetriline ruum M ei ole ühtlaselt diskreetne, siis sisaldab hulk $\mathrm{SNA}(M)$ koguni Banachi ruumiga c_0 isomeetriliselt isomorfset $\mathrm{Lip}_0(M)$ alamruumi. Käesoleva peatüki põhieesmärk on artikli [1] eeskujul tõestada, et nullpunktiga lõpmatu ühtlaselt diskreetse meetrilise ruumi M korral sisaldab hulk $\mathrm{SNA}(M)$ Banachi ruumiga c_0 isomorfset $\mathrm{Lip}_0(M)$ alamruumi.

Lemma 2.2 ([1, lemma 2.1], vt ka [2, lemma 1.5]). *Olgu M nullpunktiga meetriline ruum ja olgu (f_n) Banachi ruumi $\mathrm{Lip}_0(M)$ ühikkera elementide jada. Iga n korral tähistame $U_n = \{x \in M : f_n(x) \neq 0\}$. Juhul kui hulgad U_n, $n \in \mathbb{N}$, on paarikaupa lõikumatud, siis lineaarne kujutus $T\colon c_0 \to \mathrm{Lip}_0(M)$, kus $T(e_n) = f_n$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral, on pidev ning tema norm ei ole suurem kui 2.*

Tõestus. Eeldame, et hulgad U_n, $n \in \mathbb{N}$, on paarikaupa lõikumatud. Olgu lineaarne kujutus $T\colon c_0 \to \mathrm{Lip}_0(M)$ selline, et $T(e_n) = f_n$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral. Märgime, et pidev ja lineaarne kujutus $c_0 \to \mathrm{Lip}_0(M)$, kus $e_n \mapsto f_n$, oleks üheselt määratud: lineaarsuse tõttu oleks T üheselt määratud c_0 alamruumil c_{00} ning pideval lineaarsel kujutusel $c_{00} \to \mathrm{Lip}_0(M)$ leiduks parajasti üks pidev jätk $c_0 \to \mathrm{Lip}_0(M)$, kusjuures see jätk oleks lineaarne ja tema norm oleks sama jätkatava operaatori normiga (vt nt [7, lk 149]).

Näitame, et lineaarse kujutuse $T'\colon c_{00} \to \mathrm{Lip}_0(M)$, kus $T'(e_n) = f_n$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral, norm ei ole suurem kui 2. Sel juhul oleks operaator T operaatori T' ühene jätk, kusjuures $\|T'\| = \|T\|$, mistõttu ka $\|T\| \leq 2$.

Olgu $\alpha = (\alpha_n) \in B_{c_{00}}$. Siis on mingi $N \in \mathbb{N}$ korral ka $\alpha = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n e_n$ ja $T'\alpha = \sum_{k=1}^{N} \alpha_n f_n$. Piisab näidata, et $\|T'\alpha\|_{\mathrm{Lip}} \leq 2$, sest siis ka $\|T\alpha\|_{\mathrm{Lip}} \leq 2$. Fikseerime $x, y \in M$, $x \neq y$, ja vaatleme eraldi nende võimalikke paiknemisi ruumis M.

(1) Olgu $x, y \notin \bigcup_{n=1}^{N} U_n$. Siis $f_n(x) = f_n(y) = 0$ iga $n \in \{1, \ldots, N\}$ korral, mistõttu $(T'\alpha)(x) = (T'\alpha)(y) = 0$ ja järelikult

$$\frac{|(T'\alpha)(x) - (T'\alpha)(y)|}{d(x, y)} = 0.$$

(2) Olgu mingi $m \in \{1, \dots, N\}$ korral $x \in U_m$ ning $y \notin \bigcup_{n=1}^{N} U_n$. Siis $(T'\alpha)(y) = 0$, sest $f_n(y) = 0$ iga $n \in \{1, \dots, N\}$ korral, ja seega

$$\begin{aligned}\frac{|(T'\alpha)(x) - (T'\alpha)(y)|}{d(x,y)} &= \frac{|(T'\alpha)(x)|}{d(x,y)} = \frac{|\alpha_m f_m(x)|}{d(x,y)} \\ &= |\alpha_m| \frac{|f_m(x) - f_m(y)|}{d(x,y)} \leq \|\alpha\| \, \|f_m\|_{\mathrm{Lip}} \leq 1.\end{aligned}$$

(3) Analoogiliselt eelmise juhuga saab näidata, et kui $x \notin \bigcup_{n=1}^{N} U_n$ ning mingi $m \in \{1, \dots, N\}$ korral $y \in U_m$, siis

$$\frac{|(T'\alpha)(x) - (T'\alpha)(y)|}{d(x,y)} \leq 1.$$

(4) Olgu mingi $n \in \{1, \dots, N\}$ korral $x, y \in U_n$. Siis

$$\begin{aligned}\frac{|(T'\alpha)(x) - (T'\alpha)(y)|}{d(x,y)} &= \frac{|\alpha_n f_n(x) - \alpha_n f_n(y)|}{d(x,y)} \\ &= |\alpha_n| \frac{|f_n(x) - f_n(y)|}{d(x,y)} \leq \|\alpha\| \, \|f_n\|_{\mathrm{Lip}} \leq 1.\end{aligned}$$

(5) Olgu mingite $m, n \in \{1, \dots, N\}$, $m \neq n$, korral $x \in U_m$ ja $y \in U_n$. Siis

$$\begin{aligned}\frac{|(T'\alpha)(x) - (T'\alpha)(y)|}{d(x,y)} &= \frac{|\alpha_m f_m(x) - \alpha_n f_n(y)|}{d(x,y)} \\ &= \frac{|\alpha_m f_m(x) - \alpha_m f_m(y) + \alpha_n f_n(x) - \alpha_n f_n(y)|}{d(x,y)} \\ &\leq |\alpha_m| \frac{|f_m(x) - f_m(y)|}{d(x,y)} + |\alpha_n| \frac{|f_n(x) - f_n(y)|}{d(x,y)} \\ &\leq \|\alpha\| \, \|f_m\|_{\mathrm{Lip}} + \|\alpha\| \, \|f_n\|_{\mathrm{Lip}} \leq 2.\end{aligned}$$

Järelikult $\|T\| = \|T'\| \leq 2$, nagu soovitud. $\square$

Definitsioon 2.3 (vt nt [3, lk 2], vrd [1, lk 194]). Olgu $x \in M$. Elemendi x **eraldusraadiuseks** nimetatakse arvu

$$R(x) := \inf \big\{ d(x,y) : y \in M \setminus \{x\} \big\}.$$

Lemma 2.4 (vt [1, lemma 3.5]). *Olgu M nullpunktiga meetriline ruum ja olgu ruumi M elementide jadad (x_n) ja (y_n) sellised, et*

(1) *$x_n \neq y_n$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral;*

(2) $\{x_n, y_n\} \cap \{x_m, y_m\} = \varnothing$, *kui* $n \neq m$;

(3) $d(x_n, y_n) < R(x_n) + R(y_n)$ *iga* $n \in \mathbb{N}$ *korral.*

Siis sisaldab hulk $\mathrm{SNA}(M)$ *Banachi ruumiga* c_0 *isomorfset* $\mathrm{Lip}_0(M)$ *alamruumi.*

Tõestus. Tingimused (1) ja (2) tähendavad, et kumbki jada (x_n) ja (y_n) on paarikaupa erinevate liikmetega ning omavahel ei ole neil ühiseid liikmeid.

Võime eeldada, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral $0 \notin \{x_n, y_n\}$, sest vajadusel võime mõlemast jadast vastava liikme eemaldada. Iga $n \in \mathbb{N}$ korral defineerime funktsiooni $f_n \colon M \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} R(x_n) \cdot \delta_n, & \text{kui } x = x_n, \\ -R(y_n) \cdot \delta_n, & \text{kui } x = y_n, \\ 0, & \text{muudel juhtudel,} \end{cases}$$

kus

$$\delta_n := \frac{d(x_n, y_n)}{R(x_n) + R(y_n)}.$$

Märgime, et eelduste (1) ja (3) kohaselt on $\delta_n \in (0, 1)$. Vahetu kontrolli abil on võimalik lihtsasti veenduda, et $f_n \in \mathrm{Lip}_0(M)$ ja $\|f_n\|_{\mathrm{Lip}} \leq 1$. Kuna $f_n(x_n) - f_n(y_n) = d(x_n, y_n)$, siis tegelikult $\|f_n\|_{\mathrm{Lip}} = 1$.

Iga $n \in \mathbb{N}$ korral on $\{x \in M : f_n(x) \neq 0\} \subset \{x_n, y_n\}$, seega on hulgad $\{x \in M : f_n(x) \neq 0\}$, $n \in \mathbb{N}$, paarikaupa lõikumatud. Lemma 2.2 põhjal on pideva lineaarse operaatori $T \colon c_0 \to \mathrm{Lip}_0(M)$, $Te_n = f_n$, norm 2 või väiksem.

Näitame, et $T(c_0) \subset \mathrm{SNA}(M)$. Fikseerime vabalt $\alpha = (\alpha_n) \in c_0$ ja tähistame $f := T\alpha$. Kui $\alpha = 0$, siis ilmselt $f = 0 \in \mathrm{SNA}(M)$. Eeldame edasises, et $\alpha \neq 0$. Operaatori T pidevuse ja lineaarsuse tõttu

$$f = T\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n T e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n.$$

Paneme tähele, et $\beta_n := \alpha_n \cdot \delta_n$ korral on $\beta := (\beta_n) \in c_0$ ja $0 < \|\beta\| < \|\alpha\|$. Tõepoolest, iga $n \in \mathbb{N}$ korral on $\delta_n \in (0, 1)$ ja $\alpha_n \to 0$, seega $\beta_n \to 0$.

Tähistame $K := \|\beta\|$ ning olgu $N \subset \mathbb{N}$ parajasti selliste indeksite n hulk, et $|\beta_n| = K$. Ilmselt on hulk N lõplik, sest muidu $\beta \notin c_0$. Tähistame $\delta := \max\{\delta_n \colon n \in N\}$ ja $L := \max\{|\beta_n| \colon n \in \mathbb{N} \setminus N\}$. Siis on muidugi $0 < \delta < 1$ ja $L < K$. Olgu

$$\varepsilon := \min\Big\{1 - \frac{L}{K}, 1 - \delta\Big\}.$$

Siis on $\varepsilon > 0$. Valime $m \in \mathbb{N}$ nii, et $|\alpha_n| < \varepsilon K$ iga $n \geq m$ korral; selline m leidub, sest $\alpha_n \to 0$.

Olgu $A \coloneqq \{x_1, \dots, x_m\} \cup \{y_1, \dots, y_m\}$. Näitame, et

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}} = \max_{(x,y)\in A\times A} \frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)}.$$

Sellest muidugi järelduks, et f saavutab normi tugevalt.

Selleks võtame $u, v \in M$ nii, et $u \neq v$ ja oletame, et $(u,v) \notin A\times A$, s.t $u \notin A$ või $v \notin A$. Eeldame, et $v \notin A$; juhul $u \notin A$ on edasine tõestus analoogiline. Juhul kui u ega v ei kuulu hulka $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$, siis $f(u) - f(v) = 0$.

Üldiselt

$$\frac{|f(u)-f(v)|}{d(u,v)} \leq \frac{|f(u)|+|f(v)|}{d(u,v)}.$$

Paneme tähele, et iga $z \in M$ korral kas $|f(z)| = 0$ või $|f(z)| = |\beta_n|R(z)$ mingi $n \in \mathbb{N}$ korral. Eraldusraadiuse mõiste kohaselt kehtib ilmselt $d(u,v) \geq \max\{R(u), R(v)\}$. Kokkuvõttes saame

$$\frac{|f(u)|+|f(v)|}{d(u,v)} \leq \max_{n\in\mathbb{N}} |\beta_n| \frac{R(u)}{d(u,v)} + \max_{k>m} |\beta_k| \frac{R(v)}{d(u,v)} \leq \max_{n\in\mathbb{N}} |\beta_n| + \max_{k>m} |\beta_k|.$$

Olgu $k > m$ ja $n \in \mathbb{N}$, vaatleme eraldi kahte võimalikku olukorda. Esiteks, juhul kui $n \in N$, siis

$$|\beta_n| + |\beta_k| = |\alpha_n|\delta_n + |\alpha_k|\delta_k \leq |\alpha_n|\delta + |\alpha_k| \leq |\alpha_n|(1-\varepsilon) + |\alpha_k| < |\alpha_n| \leq \|\alpha\|,$$

sest $|\alpha_k| < \varepsilon K = \varepsilon|\beta_n| < \varepsilon|\alpha_n|$. Teiseks, juhul kui $n \notin N$, siis

$$|\beta_n| + |\beta_k| = |\alpha_n|\delta_n + |\alpha_k|\delta_k \leq L + |\alpha_k| < L + \varepsilon K \leq L + \left(1 - \frac{L}{K}\right)K = K < \|\alpha\|.$$

Järelikult

$$\sup_{(u,v)\notin A\times A} \frac{|f(u)-f(v)|}{d(u,v)} \leq \|\alpha\|.$$

Olgu nüüd $n \in \mathbb{N}$ selline, et $|\alpha_n| = \|\alpha\|$. Paneme tähele, et

$$\frac{|f(x_n)-f(y_n)|}{d(x_n,y_n)} = |\alpha_n|.$$

Indeksi m valiku tõttu $(x_n, y_n) \in A \times A$.

Sellega oleme näidanud, et

$$\sup_{(u,v)\notin A\times A} \frac{|f(u)-f(v)|}{d(u,v)} \leq \|\alpha\| \leq \max_{(u,v)\in A\times A} \frac{|f(u)-f(v)|}{d(u,v)}, \tag{1}$$

seega f on Lipschitzi funktsioon, mis saavutab oma normi tugevalt.

Vaatleme pidevat lineaarset operaatorit $T\colon c_0 \to \mathrm{Lip}_0(M)$, mis on määratud tingimusega $T(e_n) = f_n$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral. Lemma 2.2 ja võrratuse (1) põhjal, saame suvalise $(\alpha_n) \in c_0$ korral

$$\Big\|\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n\Big\| \leq \Big\|T\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n\Big)\Big\| \leq \|T\|\Big\|\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n\Big\| \leq 2\Big\|\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n\Big\|.$$

Seega on T isomorfism ning kuna $T(c_0) \subset \mathrm{SNA}(M)$, sisaldab hulk $\mathrm{SNA}(M)$ Banachi ruumiga c_0 isomorfset $\mathrm{Lip}_0(M)$ alamruumi. □

Teoreem 2.5. *Olgu M nullpunktga lõpmatu ühtlaselt diskreetne meetriline ruum. Hulk* $\mathrm{SNA}(M)$ *sisaldab Banachi ruumiga c_0 isomorfset Banachi ruumi* $\mathrm{Lip}_0(M)$ *alamruumi.*

Tõestus. Pidades silmas, et $0 < R(x) \leq d(x, y)$ iga $x, y \in M$ puhul, kus $x \neq y$, saame vaadelda kahte võimalikku olukorda:

(1) leidub hulga M paarikaupa erinevate elementide jada (x_n) nii, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral saame leida y_n, kus $d(x_n, y_n) = R(x_n)$;

(2) leidub hulga M paarikaupa erinevate elementide jada (x_n) nii, et iga $n \in \mathbb{N}$ ja iga $y \in M$, $y \neq x_n$ korral $d(x_n, y) > R(x_n)$.

Eeldame, et kehtib (1). Vajadusel jada ümber tähistades võime eeldada, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral $x_n \neq 0$. Defineerime järgmised hulgad:

$$\begin{aligned} W &:= \big\{\{m, n\} \in \mathbb{N}^{(2)} : \{x_m, y_m\} \cap \{x_n, y_n\} = \varnothing\big\}, \\ G &:= \big\{\{m, n\} \in \mathbb{N}^{(2)} : y_m = y_n\big\}, \\ O &:= \big\{\{m, n\} \in \mathbb{N}^{(2)} : y_m = x_n \text{ või } x_m = y_n\big\}. \end{aligned}$$

Paneme tähele, et hulgad W, G ja O on ilmselt paarikaupa lõikumatud, ning et $W \cup G \cup O = \mathbb{N}^{(2)}$. Seega leidub järelduse 1.11 põhjal lõpmatu hulk $S \subset \mathbb{N}$ nii, et $S^{(2)}$ on hulga W, G või O alamhulk. Vaatleme kolme võimalikku alamjuhtu.

(1.1) $S^{(2)} \subset W$. Vajadusel osajadadele üle minnes (vaadeldes (x_n) ja (y_n) all hoopis osajadasid, mis on saadud algsetest jadadest, valides välja elemendid, mille indeksid vastavad hulga S elementidele), võime eeldada, et iga $m, n \in \mathbb{N}$ korral $\{x_m, y_m\} \cap \{x_n, y_n\} = \varnothing$, kui $m \neq n$. Saame kasutada lemmat 2.4, sest iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$d(x_n, y_n) = R(x_n) < R(x_n) + R(y_n).$$

(1.2) $S^{(2)} \subset G$. Vajadusel osajadale üle minnes võime eeldada, et mingi $y_0 \in M$ korral $y_n = y_0$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral. Defineerime hulgad:

$$V := \big\{\{m, n\} \in \mathbb{N}^{(2)} \colon d(x_m, x_n) = d(x_m, y_0) + d(x_n, y_0)\big\},$$

$$Z := \big\{\{m, n\} \in \mathbb{N}^{(2)} \colon d(x_m, x_n) < d(x_m, y_0) + d(x_n, y_0)\big\}.$$

Ramsey teoreemi järelduse 1.11 põhjal leidub lõpmatu hulk $U \subset \mathbb{N}$ nii, et $U^{(2)} \subset Z$ või $U^{(2)} \subset V$. Esimesel juhul, jällegi vajadusel osajadale üle minnes, võime eeldada, et

$$d(x_m, x_n) < d(x_m, y_0) + d(x_n, y_0) = R(x_m) + R(x_n)$$

iga $m, n \in \mathbb{N}$ korral. Kuna jada (x_n) liikmed on paarikaupa erinevad, siis saab lemmat 2.4 rakendada jadadele (x_{2n}) ja (x_{2n+1}).

Oletame nüüd, et $U^{(2)} \subset V$. Vajadusel osajadale üle minnes eeldame, et iga $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$, korral

$$d(x_m, x_n) = d(x_m, y_0) + d(x_n, y_0).$$

Defineerime tugevalt normi saavutavate Lipschitzi funktsioonide jada (f_n):

$$f_n(x) = \begin{cases} d(x_n, y_0), \text{ kui } x = x_n, \\ 0, \text{ kui } x \neq x_n. \end{cases}$$

Veendume, et (f_n) on isomeetriliselt ekvivalentne c_0 kanoonilise baasiga. Fikseerime vabalt $\alpha = (\alpha_n) \in c_0$ ja eeldame, et rida $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n$ koondub ruumis $\mathrm{Lip}_0(M)$ ning olgu f selle rea summa. Lemma 1.9 põhjal piisab näidata, et $\|f\|_{\mathrm{Lip}} = \|\alpha\|$. Paneme tähele, et $f(y_0) = 0$, sest kui mingi $n \in \mathbb{N}$ korral $y_0 = x_n$, siis $0 = d(x_n, y_0) < R(x_n)$, mis on vastuolus y_0 valikuga. Fikseerime $m \in \mathbb{N}$ nii, et $|\alpha_m| = \|\alpha\|$, siis $\|f\|_{\mathrm{Lip}} \geq |\alpha_m|$, sest

$$\frac{|f(x_m) - f(y_0)|}{d(x_m, y_0)} = |\alpha_m|.$$

Näitame järgmiseks, et iga $u, v \in M$ korral

$$\frac{|f(u) - f(v)|}{d(u, v)} \leq |\alpha_m|.$$

Olgu $u, v \in M$. Juhul kui $\{u, v\} \cap \{x_n \colon n \in \mathbb{N}\} = \varnothing$ on võrratus ilmne. Juhul kui täpselt üks elementidest u ja v on jada (x_n) liige, ütleme näiteks $u = x_k$ mingi $n \in \mathbb{N}$ korral, siis

$$\frac{|f(u) - f(v)|}{d(u, v)} = |\alpha_k| \frac{d(x, y_0)}{d(x_k, v)} = |\alpha_k| \frac{R(x_k)}{d(x_k, v)} \leq |\alpha_k| \leq |\alpha_m|.$$

Kui leiduvad indeksid $k, l \in \mathbb{N}$, $k \neq l$ nii, et $u = x_k$ ja $v = x_l$, siis

$$\begin{aligned}\frac{|f(x_k) - f(x_l)|}{d(x_k, x_l)} &\leq \frac{|\alpha_k| d(x_k, y_0) + |\alpha_l| d(x_l, y_0)}{d(x_k, x_l)} \\ &\leq |\alpha_m| \frac{d(x_k, y_0) + d(x_l, y_0)}{d(x_k, x_l)} = |\alpha_m|.\end{aligned}$$

Järelikult $\|f\|_{\mathrm{Lip}} = |\alpha_m|$ ja $f \in \mathrm{SNA}(M)$.

(1.3) $S^{(2)} \subset O$. Vajadusel osajadale üle minnes eeldame, et iga $m, n \in \mathbb{N}$ korral $x_m = y_n$ või $y_m = x_n$. Kuna jada (x_n) liikmed on paarikaupa erinevad, siis peab leiduma lõpmatu arv (y_n) liikmeid, mis on elemendiga x_1 võrdsed. Seega taandub tõestus juhule (1.2).

Eeldame nüüd, et kehtib (2). Eesmärgiks on veenduda, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral leidub lõpmata palju hulga M elemente y nii, et $d(x_n, y) < R(x_n) + R(y)$. Fikseerime $m \in \mathbb{N}$ ja oletame vastuväiteliselt, et hulk $\{y \in M \colon d(x_m, y) < R(x_m) + R(y)\}$ on lõplik. Elemendi eraldusraadiuse definitsiooni põhjal saame iga $n \in \mathbb{N}$ korral leida y_n nii, et $d(x_m, y_n) \leq R(x_m) + \frac{1}{n}$. Veel enam, iga n korral leidub loenduv hulk y_n rolli sobivaid elemente, sest ei leidu elementi z, mille korral $R(x_m) = d(x_m, z)$. Seega saame konstrueerida jada (y_n) nii, et selle liikmed on paarikaupa erinevad. Seega, vajadusel lõpliku arvu elemente eemaldades, saame eeldada, et $R(x_m) + R(y_n) \leq d(x_m, y_n)$ kehtib iga $n \in \mathbb{N}$ korral. Nüüd iga $n \in \mathbb{N}$ korral $R(x_m) + R(y_n) \leq R(x_m) + \frac{1}{n}$, mis tähendab, et $R(y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, mis on aga vastuolus meetrilise ruumi M ühtlaselt diskreetsusega.

Defineerime induktiivselt jadad (x_{n_k}) ja (y_{n_k}), mis rahuldaks lemma 2.4 tingimusi. Olgu $x_{n_1} = x_1$ ja leiame $y_{n_1} \neq x_{n_1}$, nii et $d(x_{n_1}, y_{n_1}) < R(x_{n_1}) + R(y_{n_1})$. Kui mingisuguse $k \in \mathbb{N}$ korral on x_{n_k} ja y_{n_k} defineeritud, leiame $x_{n_{k+1}} \in (x_n)$ nii, et $x_{n_{k+1}} \notin \{y_{n_1}, y_{n_2}, \ldots, y_{n_k}\}$. Kuna elemente $y \in M$, mille puhul $d(x_n, y) < R(x_n) + R(y)$ on lõpmatu hulk, leiame nende seast $y_{n_{k+1}}$ nii, et $y_{n_{k+1}} \notin \{y_{n_1}, y_{n_2}, \ldots, y_{n_k}\} \cup \{x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_{k+1}}\}$. Nüüd iga $k \in \mathbb{N}$ korral $d(x_{n_k}, y_{n_k}) < R(x_{n_k}) + R(y_{n_k})$ ja iga $k, l \in \mathbb{N}$, $k \neq l$ korral $\{x_{n_k}, y_{n_k}\} \cap \{x_{n_l}, y_{n_l}\} = \varnothing$. $\square$

3 Banachi ruumiga c_0 isomeetriliselt isomorfne $\mathrm{Lip}_0(M)$ alamruum hulgas $\mathrm{SNA}(M)$

Osutub, et teatud meetriliste ruumide M korral sisaldab hulk $\mathrm{SNA}(M)$ Banachi ruumiga c_0 isomeetriliselt isomorfset $\mathrm{Lip}_0(M)$ alamruumi. Selles peatükis näitame, et iga lõpmatu meetrilise ruumi M korral, mis ei ole ühtlaselt diskreetne, sisaldab $\mathrm{SNA}(M)$ Banachi ruumiga c_0 isomeetriliselt isomorfset $\mathrm{Lip}_0(M)$ alamruumi. Seejuures tõestame artikli [1] põhiteoreemi.

Lemma 3.1 (vt [3, lemma 3.3]). *Olgu M selline nullpunktiga meetriline ruum, kus leiduvad jadad (x_n) ja (y_n) nii, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral $x_n \neq y_n$ ja*

$$d(x_m, x_n) \geq d(x_m, y_m) + d(x_n, y_n) \tag{2}$$

iga $m, n \in \mathbb{N}$ ja $m \neq n$ korral. Siis sisaldab hulk $\mathrm{SNA}(M)$ Banachi ruumiga c_0 isomeetriliselt isomorfset $\mathrm{Lip}_0(M)$ alamruumi.

Tõestus. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et ruumi M nullpunkt 0 on jada (y_n) liikmete seas, vastasel juhul loeme M nullpunktiks selle jada esimese liikme. Seega $0 = y_{n'}$ mingi n' korral. Iga $n \in \mathbb{N}$ korral vaatleme funktsiooni $f_n \colon M \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \max\{0, d(x_n, y_n) - d(x_n, x)\}.$$

Paneme tähele, et $f_n(x) = 0$ iga x korral, mis ei ole keras $B(x_n, d(x_n, y_n))$, sest sel juhul $d(x_n, x) \geq d(x_n, y_n)$ ehk $d(x_n, y_n) - d(x_n, x) \leq 0$, mistõttu

$$f_n(x) = \max\{0, d(x_n, y_n) - d(x_n, x)\} = 0.$$

Tingimuse (2) kohaselt on kerad $B(x_n, d(x_n, y_n))$, $n \in \mathbb{N}$, üksteisega lõikumatud. Veel paneme tähele, et $f_n(y_m) = 0$ iga n ja m korral: $f_n(y_n) = 0$ funktsiooni f_n definitsiooni põhjal ning $m \neq n$ korral saame tingimuse (2) põhjal

$$d(x_n, y_m) \geq d(x_m, x_n) - d(x_m, y_m) \geq d(x_m, y_m) + d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m) = d(x_n, y_n),$$

järelikult $d(x_n, y_n) - d(x_n, y_m) \leq 0$ ja seega

$$f_n(y_m) = \max\{0, d(x_n, y_n) - d(x_n, y_m)\} = 0.$$

Näitame, et iga f_n on Lipschitzi funktsioon, kusjuures iga $x, y \in M$ korral on

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq d(x, y).$$

Selleks vaatleme nelja võimalikku juhtu.

(1) Kui $f_n(x) = 0$ ja $f_n(y) = 0$, siis ilmselt $|f_n(x) - f_n(y)| = 0 \leq d(x, y)$.

(2) Kui $f_n(x) \neq 0$ ja $f_n(y) \neq 0$, siis

$$\begin{aligned}|f_n(x) - f_n(y)| &= \big|\big(d(x_n, y_n) - d(x_n, x)\big) - \big(d(x_n, y_n) - d(x_n, y)\big)\big|\\ &= |d(x_n, x) - d(x_n, y)| \leq d(x, y).\end{aligned}$$

(3) Kui $f_n(x) \neq 0$ ja $f_n(y) = 0$, siis $d(x_n, y_n) - d(x_n, x) > 0$ ja $0 \geq d(x_n, y_n) - d(x_n, y)$, mistõttu

$$\begin{aligned}|f_n(x) - f_n(y)| &= \Big|\big(d(x_n, y_n) - d(x_n, x)\big) - 0\Big| = d(x_n, y_n) - d(x_n, x)\\ &\leq d(x_n, y_n) - d(x_n, x) - d(x_n, y_n) + d(x_n, y)\\ &= d(x_n, y) - d(x_n, x) \leq d(x, y).\end{aligned}$$

(4) Juht, kus $f_n(x) = 0$ ja $f_n(y) \neq 0$, taandub ilmselt eelmisele juhule.

Järelikult $|f_n(x) - f_n(y)| \leq d(x, y)$ iga $x, y \in M$ ja iga $n \in \mathbb{N}$ korral.

Näitame, et $f_n(0) = 0$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral. Kuna $y_{n'} = 0$, saame ilmselt $f_{n'}(0) = 0$. Kui $n \neq n'$, siis tingimuse (2) põhjal

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x_{n'}) - d(x_{n'}, y_{n'}) \leq d(x_n, y_{n'}) = d(x_n, 0),$$

järelikult $d(x_n, y_n) \leq d(0, x_n)$, mistõttu $f_n(0) = 0$. Kokkuvõttes $f_n \in \mathrm{Lip}_0(M)$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral.

Näitame, et Banachi ruumi $\mathrm{Lip}_0(M)$ elementide jada (f_n) on isomeetriliselt ekvivalentne ruumi c_0 kanoonilise baasiga. Fikseerime vabalt $\alpha = (\alpha_n) \in c_0$. Eeldame, et rida $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n$ koondub ruumis $\mathrm{Lip}_0(M)$ ja olgu f selle rea summa. Lemma 1.9 (tingimuste (i) ja (iii) samaväärsuse tõttu) piisab näidata, et $\|f\|_{\mathrm{Lip}} = \|\alpha\|$.

Olgu $n_0 \in \mathbb{N}$ selline, et $|\alpha_{n_0}| = \max_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n|$. Iga $n \in \mathbb{N}$ korral $f_n(y_{n_0}) = 0$, seega $f(y_{n_0}) = 0$. Kui $n \neq n_0$, siis $f_n(x_{n_0}) = 0$, seega

$$|f(x_{n_0}) - f(y_{n_0})| = |f(x_{n_0})| = \Big|\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n(x_{n_0})\Big| = |\alpha_{n_0} f_{n_0}(x_{n_0})| = |\alpha_{n_0}| d(x_{n_0}, y_{n_0}).$$

Olgu $x, y \in M$ ja $x \neq y$. Näitame, et

$$|f(x) - f(y)| \leq |\alpha_{n_0}| d(x, y).$$

Selleks vaatleme eraldi punktide x ja y võimalikke paiknemisi ruumis M.

(1) Kui $\{x, y\} \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} B(x_n, d(x_n, y_n)) = \varnothing$, siis $f_n(x) = f_n(y) = 0$ iga n korral, mistõttu

$$|f(x) - f(y)| = 0 \leq |\alpha_{n_0}| d(x, y).$$

(2) Eeldame, et $x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} B(x_n, d(x_n, y_n))$, kuid $y \in B(x_m, d(x_m, y_m))$ mingi $m \in \mathbb{N}$ korral. Siis $f(x) = 0$ ja $f(y) = \alpha_m f_m(y)$ ning kuna $x \notin B(x_m, d(x_m, y_m))$ ehk $d(x_m, x) \geq d(x_m, y_m)$, saame

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| = |f(y)| = |\alpha_m f_m(y)| &= |\alpha_m|(d(x_m, y_m) - d(x_m, y)) \\ &\leq |\alpha_m|(d(x_m, x) - d(x_m, y)) \leq |\alpha_m| d(x, y) \leq |\alpha_{n_0}| d(x, y). \end{aligned}$$

(3) Juht, kus $y \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} B(x_n, d(x_n, y_n))$, kuid $x \in B(x_m, d(x_m, y_m))$ mingi $m \in \mathbb{N}$ korral, taandub ilmsesti eelmisele juhule.

(4) Kui leidub $n \in \mathbb{N}$ nii, et $x, y \in B(x_n, d(x_n, y_n))$, siis $f_m(x) = f_m(y) = 0$ iga $m \neq n$ korral ning $d(x_n, x) < d(x_n, y_n)$ ja $d(x_n, y) < d(x_n, y_n)$, seega

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |\alpha_n f_n(x) - \alpha_n f_n(y)| = |\alpha_n||f_n(x) - f_n(y)| \\ &\leq |\alpha_n||d(x_n, y_n) - d(x_n, x) - d(x_n, y_n) + d(x_n, y)| \\ &= |\alpha_n||d(x_n, y) - d(x_n, x)| \\ &\leq |\alpha_{n_0}| d(x, y). \end{aligned}$$

(5) Olgu $m, n \in \mathbb{N}$ sellised, et $m \neq n$, $x \in B(x_m, d(x_m, y_m))$ ja $y \in B(x_n, d(x_n, y_n))$. Sel juhul on $f(x) = \alpha_m f_m(x)$ ja $f(y) = \alpha_n f_n(y)$, mistõttu

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |\alpha_m f_m(x) - \alpha_n f_n(y)| \leq |\alpha_m| f_m(x) + |\alpha_n| f_n(y) \\ &\leq |\alpha_{n_0}| \big(f_m(x) + f_n(y)\big) \\ &= |\alpha_{n_0}| \big(d(x_m, y_m) - d(x_m, x) + d(x_n, y_n) - d(x_n, y)\big) \\ &\leq |\alpha_{n_0}| d(x, y), \end{aligned}$$

kusjuures viimase hinnangu saame vahetult kauguse d nelinurga võrratuse põhjal kehtiva võrratuse

$$d(x_m, x_n) - d(x_m, x) - d(x_n, y) \leq d(x, y)$$

ja võrratuse (2) abil.

Sellega oleme näidanud, et $||f||_{\text{Lip}} = \max_{n \in \mathbb{N}} |\alpha_n|$. Lemma 1.9 põhjal on jada (f_n) isomeetriliselt ekvivalentne Banachi ruumi c_0 kanoonilise baasiga. Kusjuures näitasime, et kui f on rea $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n$ summa mingi $(\alpha_n) \in c_0$ korral, siis $f \in \text{SNA}(M)$.

Nüüd on aga selge, et iga $(\alpha_n) \in c_0$ korral $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n$ koondub ruumis $\text{Lip}_0(M)$ ja iga element alamruumis $\overline{\text{span}}\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ on tugevalt normi saavutav Lipschitzi funktsioon.

$\square$

Teoreem 3.2 (vt [1, teoreem 3.2]). *Olgu (M, d) meetriline ruum, mille kujumispunktide hulk M' on lõpmatu. Siis sisaldab hulk* $\mathrm{SNA}(M)$ *Banachi ruumiga c_o isomeetriliselt isomorfset* $\mathrm{Lip}_0(M)$ *alamruumi.*

Tõestus. Leiduvad M kuhjumispunktide jada (c_n) ja arvud $r_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, nii, et kerad $B(c_n, r_n)$ on paarikaupa lõikumatud. Tõepoolest, paneme esmalt tähele, et kui U on meetrilise ruumi M lahtine osahulk, milles on lõpmata palju M' elemente, millest fikseerime vabalt kaks erinevat, x ja y, siis ilmselt leiduvad lõikumatud kinnised kerad $\overline{B}(x, r)$ ja $\overline{B}(y, s)$ nii, et $\overline{B}(x, r) \subset U$ ja $\overline{B}(y, s) \subset U$, kusjuures $U \setminus \overline{B}(x, r)$ või $U \setminus \overline{B}(y, s)$ peab sisaldama lõpmata palju M' elemente. Seega saame alustuseks leida ($U = M$ korral) c_1 ja r_1 nii, et kinnisest kerast $\overline{B}(c_1, r_1)$ väljapoole jääb lõpmata palju hulga M' punkte. Edasi leiame ($U = M \setminus \overline{B}(c_1, r_1)$ korral) c_2 ja r_2 nii, et $\overline{B}(c_2, r_2) \cap \overline{B}(c_1, r_1) = \varnothing$ ja kinnisest hulgast $\overline{B}(c_2, r_2) \cup \overline{B}(c_1, r_1)$ väljapoole jääb lõpmata palju hulga M' punkte. Jne, iga ühest suurema naturaalarvu n korral valime c_n ja r_n nii, et $\overline{B}(c_n, r_n) \cap \bigcup_{i=1}^{n-1} \overline{B}(x_i, r_i) = \varnothing$ ja kinnisest hulgast $\bigcup_{i=1}^{n} \overline{B}(c_i, r_i)$ väljapoole jääb lõpmata palju hulga M' punkte. Olgu (c_n) ja (r_n) selliselt saadud jadad.

Kuna iga c_n on kuhjumispunkt, saame iga $n \in \mathbb{N}$ korral leida $x_n, y_n \in M$ nii, et $x_n \neq y_n$ ja $x_n, y_n \in B(c_n, r_n/6)$. Jadadele (x_n) ja (y_n) saab rakendada lemmat 3.1, sest iga $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$, korral

$$
\begin{aligned}
d(x_m, x_n) &\geq d(c_m, c_n) - d(x_m, c_m) - d(x_n, c_n) \\
&> \max\{r_m, r_n\} - \frac{r_m}{6} - \frac{r_n}{6} \geq \frac{2r_m}{6} + \frac{2r_n}{6} \\
&> \big(d(x_m, c_m) + d(c_m, y_m)\big) + \big(d(x_n, c_n) + d(c_n, y_n)\big) \\
&\geq d(x_m, y_m) + d(x_n, y_n).
\end{aligned}
$$

Lemma 3.1 põhjal sisaldab hulk $\mathrm{SNA}(M)$ Banachi ruumiga c_0 isomeetriliselt isomorfset $\mathrm{Lip}_0(M)$ alamruumi. $\square$

Definitsioon 3.3. Meetriline ruum on **totaalselt** ehk **täielikult tõkestatud**, kui tal leidub iga $\varepsilon > 0$ korral lõplik ε-võrk.

Lemma 3.4. *Meetrilise ruumi elementide jadal kas leidub Cauchy osajada või leidub osajada, mille liikmed on ε-eraldatud mingi $\varepsilon > 0$ korral, s.t üksteisest vähemalt kaugusel ε.*

Tõestus. Vaatleme jada (x_n) meetrilises ruumis M. Tähistame $A := \{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}$. Alamruum A on kas totaalselt tõkestatud või mitte. Näitame, et esimesel juhul leidub jadal (x_n) Cauchy osajada ning teisel juhul leidub osajada (x_{n_k}) ja $\varepsilon_0 > 0$ nii, et jada (x_{n_k}) liikmed on ε_0-eraldatud.

Eeldame, et alamruum A on totaalselt tõkestatud. Olgu V_1 tema lõplik 1-võrk. Siis $A = \bigcup_{v \in V_1} B(v, 1)$. Leidub $v_1 \in V_1$ nii, et $W_1 := B(v_1, 1)$ sisaldab lõpmata palju jada (x_n) liikmeid. Olgu x_{n_1} üks selline.

Oletame, et mingi $k \in \mathbb{N}$ korral on $x_{n_1}, \dots, x_{n_k}$ leitud, $v_1 \in V_1, \dots, v_k \in V_k$ on sellised, et hulk $W_k = \bigcap_{i=1}^{k} B(v_i, \frac{1}{i})$ sisaldab lõpmata palju jada (x_n) liikmeid, kus hulk V_i on meetrilise ruumi A lõplik $\frac{1}{i}$-võrk iga $i \leq k$ korral. Edasi, olgu V_{k+1} meetrilise ruumi A lõplik $\frac{1}{k+1}$-võrk. Siis $W_k = \bigcup_{v \in V_{k+1}} \left(W_k \cap B(v, \frac{1}{k+1}) \right)$ ning leidub $v_{k+1} \in V_{k+1}$ nii, et hulk $W_{k+1} := W_k \cap B(v_{k+1}, \frac{1}{k+1})$ sisaldab lõpmata palju jada (x_n) liikmeid. Fikseerime ühe sellise elemendi $x_{n_{k+1}}$ nii, et $n_{k+1} > n_k$. Jne.

Näitame, et saadud osajada (x_{n_k}) on Cauchy jada. Fikseerime $\varepsilon > 0$ ja leiame $N \in \mathbb{N}$ nii, et $\frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$. Olgu $l, m \in \mathbb{N}$, $l, m > N$ ja $l > m$. Siis $x_{n_l} \in W_l$ ja $x_{n_m} \in W_m$. Kuna $W_N \supset W_{N+1} \supset \cdots \supset W_m \supset \cdots \supset W_l$, siis $x_{n_l}, x_{n_m} \in W_N = \bigcap_{i=1}^{N} B(v_i, \frac{1}{i})$. Kolmnurga võrratuse põhjal

$$d(x_{n_l}, x_{n_m}) \leq d(x_{n_l}, v_N) + d(v_N, x_{n_m}) < \frac{2}{N} < \varepsilon.$$

Oletame nüüd, et meetrilise ruumi M alamruum A ei ole totaalselt tõkestatud. Sel juhul leidub $\varepsilon_0 > 0$ nii, et ruumil A lõplikku ε_0-võrku ei leidu. Olgu $x_{n_1} := x_1$. Järelikult leidub lõpmata palju A elemente, mis asuvad väljaspool kera $B(x_{n_1}, \varepsilon_0)$. Kui mingi $k \in \mathbb{N}$ korral on x_{n_k} defineeritud, siis lõpmata palju A elemente on ikkagi väljaspool hulka $\bigcup_{i=1}^{k} B(x_{n_i}, \varepsilon_0)$, sest vastasel juhul saaksime konstrueerida hulgale A lõpliku ε_0-võrgu. Fikseerime ühe sellise elemendi $x_{n_{k+1}}$ nii, et $n_{k+1} > n_k$. Nii saadava osajada (x_{n_k}) liikmed on ε_0-eraldatud. □

Teoreem 3.5 (vt [1, teoreem 3.4]). *Olgu M diskreetne meetriline ruum, mis ei ole ühtlaselt diskreetne. Hulk* SNA(M) *sisaldab Banachi ruumiga c_0 isomeetriliselt isomorfset* Lip$_0$(M) *alamruumi.*

Tõestus. Kuna M pole ühtlaselt diskreetne, peavad leiduma M elementide jadad (x_n) ja (y_n) nii, et $(d(x_n, y_n))$ on rangelt kahanev nulliks koonduv positiivsete arvude jada. Paneme tähele, et jadal (x_n) ei leidu koonduvat osajada. Tõepoolest, kui osajada (x_{n_k}) koonduks, siis oleks ta statsionaarne (nagu iga koonduv jada diskreetses meetrilises ruumis), aga siis oleks tingimuse $d(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ tõttu ka (y_{n_k}) koonduv ehk statsionarne jada; nii jõuaksime vastuolus tingimusega, et jada $(d(x_n, y_n))$ on rangelt kahanev. Järelikult, tuginedes lemmale 3.4 ja koondumisele $d(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ning vajadusel osajadale üle minnes, leidub $\varepsilon > 0$ nii, et iga $m, n \in \mathbb{N}$ ja $m \neq n$ korral $d(x_m, x_n) > \varepsilon$ ning $d(x_n, y_n) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Nüüd saame rakendada lemmat 3.1, sest kui $m, n \in M$ ja $m \neq n$, siis

$$d(x_m, x_n) > \varepsilon > d(x_m, y_m) + d(x_n, y_n).$$

Järelikult sisaldab SNA(M) Banachi ruumiga c_0 isomeetriliselt isomorfset Lip$_0$(M) alamruumi. □

Teoreem 3.6 (vt [3, teoreem 4.2]). *Olgu M lõpmatu meetriline ruum, mis ei ole ühtlaselt diskreetne. Siis sisaldab hulk* $\mathrm{SNA}(M)$ *Banachi ruumiga c_0 isomeetriliselt isomorfset* $\mathrm{Lip}_0(M)$ *alamruumi.*

Tõestus. Need juhud, kus ruumi M kuhjumispunktide hulk M' on lõpmatu või tühi, on käsitletud vastavalt teoreemides 3.2 ja 3.5. Seega eeldame, et M' on lõplik ja mittetühi. Vaatleme esiteks juhtu, kus M on täielik. Võime eeldada, et $0 \in M'$, vajadusel võime nullpunkti muuta. Seega leidub M elementide jada (x_n) nii, et $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, kuid mitte ükski x_n selles jadas ei ole kuhjumispunkt, s.t $R(x_n) > 0$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral. Küll aga paneme tähele, et $R(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, sest $R(x_n) \leq d(x_n, 0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Vaatleme hulki

$$A = \left\{\{m, n\} \in \mathbb{N}^{(2)} \colon d(x_m, x_n) \geq R(x_m) + R(x_n)\right\}$$

ja

$$B = \left\{\{m, n\} \in \mathbb{N}^{(2)} \colon d(x_m, x_n) < R(x_m) + R(x_n)\right\}.$$

Ilmselt $A \cup B = \mathbb{N}^{(2)}$ ja $A \cap B = \varnothing$, seega Ramsey teoreemi järelduse 1.11 põhjal leidub lõpmatu hulk $S \subset \mathbb{N}$ nii, et $S^{(2)} \subset A$ või $S^{(2)} \subset B$. Vaatleme mõlemat juhtu eraldi.

1. Olgu $S^{(2)} \subset A$. Iga $m, n \in S$ ja $m \neq n$ korral kehtib $d(x_m, x_n) \geq R(x_m) + R(x_n)$. Juhul kui leidub hulga S lõpmatu alamhulk N nii, et x_n saavutab oma eraldusraadiuse iga $n \in N$ korral, s.t iga $n \in N$ korral leidub y_n nii, et $R(x_n) = d(x_n, y_n)$, siis jadad $(x_n)_{n\in N}$ ja $(y_n)_{n\in N}$ rahuldavad lemma 3.1 eeldusi ja seega sisaldab $\mathrm{SNA}(M)$ Banachi ruumiga c_0 isomeetriliselt isomorfset $\mathrm{Lip}_0(M)$ alamruumi.

Kui aga ei leidu (x_n) osajada, mille kõik liikmed oma raadiuse saavutavad, võime vajadusel osajadale üle minnes eeldada, et x_n ei saavuta oma eraldusraadiust ühegi $n \in S$ korral. Sel juhul on iga $n \in S$ korral $d(x_n, 0) - R(x_n) > 0$.

Kuna $d(x_n, 0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, saame leida $(x_n)_{n\in S}$ osajada $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ nii, et $a_1 = x_{\min\{S\}}$ ning iga $k \in \mathbb{N}$ korral

$$d(a_{k+1}, 0) \leq \Delta_k,$$

kus

$$\Delta_k = \frac{d(a_k, 0) - R(a_k)}{3}.$$

Jada (Δ_k) on kahanev, sest iga $k \in \mathbb{N}$ korral

$$\Delta_{k+1} < d(a_{k+1}, 0) \leq \Delta_k.$$

Eraldusraadiuse mõiste kohaselt saame iga $k \in \mathbb{N}$ korral leida $b_k \in B(a_k, R(a_k) + \Delta_k)$. Näitame, et jadad (a_k) ja (b_k) rahuldavad lemma 3.1 eeldusi. Olgu $m, n \in \mathbb{N}$ ja $m > n$.

Ilmselt kehtivad järgmised seosed:

$$
\begin{aligned}
&d(a_n, 0) = R(a_n) + 3\Delta_n,\\
&d(a_m, 0) \le \Delta_n,\\
&d(a_n, b_n) < R(a_n) + \Delta_n,\\
&d(a_m, b_m) < R(a_m) + \Delta_m < R(a_m) + 3\Delta_m = d(a_m, 0) \le \Delta_{m-1} \le \Delta_n.
\end{aligned}
$$

Tagurpidi kolmnurga võrratuse ja ülaltoodud seoste põhjal saame

$$
\begin{aligned}
d(a_m, a_n) &\ge d(a_n, 0) - d(a_m, 0) \ge \big(R(a_n) + 3\Delta_n\big) - \Delta_n\\
&= \big(R(a_n) + \Delta_n\big) + \Delta_n > d(a_n, b_n) + d(a_m, b_m).
\end{aligned}
$$

Lemma 3.1 põhjal sisaldab hulk $\mathrm{SNA}(M)$ Banachi ruumiga c_0 isomeetriliselt isomorfset $\mathrm{Lip}_0(M)$ alamruumi.

2. Olgu $S^{(2)} \subset B$. Jada $(x_n)_{n\in S}$ on jada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ osajada, mistõttu koondub ise samuti nulliks ja $R(x_n) \xrightarrow[n\in S,\ n\to\infty]{} 0$. Järgnevas leiame jada $(x_n)_{n\in S}$ kaks erilist osajada (a_k) ja (b_k).

Olgu $a_1 = x_{\min\{S\}}$ ja leiame jada $(x_n)_{n\in S}$ liikmete seast elemendi b_1 nii, et $R(b_1) < \frac{R(a_1)}{2}$. Seejärel valime iga $k \in \mathbb{N}$ korral jada $(x_n)_{n\in S}$ liikmete seast a_{k+1} ja b_{k+1} nii, et kehtivad

(i) $R(a_{k+1}) < \dfrac{\varepsilon_k}{2}$, kus $\varepsilon_k = R(a_k) + R(b_k) - d(a_k, b_k)$,

(ii) $R(b_{k+1}) < \dfrac{R(a_{k+1})}{2}$.

Tingimuse $S^{(2)} \subset B$ tõttu $\varepsilon_k > 0$ iga $k \in \mathbb{N}$ korral. Paneme tähele, et jadade (a_k) ja (b_k) liikmed on kõik paarikaupa erinevad. Tõepoolest, suvalise $k \in \mathbb{N}$ korral saame tingimuste (i) ja (ii) põhjal

$$
R(b_{k+1}) < R(a_{k+1}) < \frac{R(a_k) + R(b_k) - d(a_k, b_k)}{2} \le \frac{R(b_k)}{2} < R(b_k) < R(a_k). \tag{3}
$$

Iga $k \in \mathbb{N}$ korral olgu $f_k\colon M \to \mathbb{R}$,

$$
f_k(p) = \begin{cases} R(a_k) - \dfrac{\varepsilon_k}{2}, & \text{kui } p = a_k,\\ -R(b_k) + \dfrac{\varepsilon_k}{2}, & \text{kui } p = b_k,\\ 0 & \text{muudel juhtudel.} \end{cases}
$$

Paneme tähele, et iga $k \in \mathbb{N}$ korral

$$
|f_k(a_k)| = R(a_k) - \frac{\varepsilon_k}{2} \qquad \text{ja} \qquad |f_k(b_k)| = R(b_k) - \frac{\varepsilon_k}{2}.
$$

Tõepoolest, kuna

$$R(a_k) - R(b_k) + d(a_k, b_k) > R(a_k) - \frac{R(a_k)}{2} + d(a_k, b_k) > 0,$$

siis

$$f_k(a_k) = R(a_k) - \frac{\varepsilon_k}{2} = \frac{R(a_k) - R(b_k) + d(a_k, b_k)}{2} > 0$$

ning kuna

$$R(a_k) - R(b_k) - d(a_k, b_k) \leq d(a_k, b_k) - R(b_k) - d(a_k, b_k) < 0,$$

siis

$$f_k(b_k) = -R(b_k) + \frac{\varepsilon_k}{2} = \frac{R(a_k) - R(b_k) - d(a_k, b_k)}{2} < 0.$$

Fikseerime $k \in \mathbb{N}$. Paneme tähele, et $f_k \in \mathrm{SNA}(M)$. Tõepoolest, ilmselt $f_k(0) = 0$, sest $0 \notin \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, ning

$$|f_k(a_k) - f_k(b_k)| = |R(a_k) + R(b_k) - \varepsilon_k| = d(a_k, b_k).$$

Näitame veel, et $\mathrm{Lip}(f_k) \leq 1$ ehk iga $p, q \in M$ korral

$$|f_k(p) - f_k(q)| \leq d(p, q).$$

Kui $f_k(p) = 0$ ja $f_k(q) = 0$, siis viimane võrratus muidugi kehtib. Seega piisab vaadelda veel kahte juhtu: a) $p = a_k$ ja $f_k(q) = 0$, b) $f_k(p) = 0$ ja $q = b_k$.

a) Olgu $p = a_k$ ja $q \in M$ selline, et $f_k(q) = 0$. Siis

$$|f_k(a_k) - f_k(q)| = |f(a_k)| = R(a_k) - \frac{\varepsilon_k}{2} < R(a_k) = R(p) \leq d(p, q).$$

b) Olgu $q = b_k$ ja $p \in M$ selline, et $f_k(p) = 0$. Kuna $|f_k(b_k)| = R(b_k) - \frac{\varepsilon_k}{2}$, siis on tõestus eelmise juhuga analoogiline.

Olgu $\alpha = (\alpha_k) \in c_0$ ja $|\alpha_{k_0}| = \|\alpha\|$. Oletame, et rida $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f_k$ koondub ruumis $\mathrm{Lip}_0(M)$ ja olgu f selle rea summa. Veendume, et $f \in \mathrm{SNA}(M)$, ja et $\|f\|_{\mathrm{Lip}} = |\alpha_{k_0}|$. Näitame, et f on Lipschitzi funktsioon normiga $|\alpha_{k_0}|$. Selleks fikseerime $p, q \in M$ nii, et $p \neq q$ ja veendume esmalt, et $|f(p) - f(q)| \leq |\alpha_{k_0}|$. Vaatleme eraldi punktide p ja q võimalikke paiknemisi ruumis M.

(1) Kui mingi $k \in \mathbb{N}$ korral $p, q \in \{a_k, b_k\}$, siis

$$\begin{aligned} |f(p) - f(q)| &\leq |f_k(p)| + |f_k(q)| = |\alpha_k|\Big(R(a_k) - \frac{\varepsilon_k}{2}\Big) + |\alpha_k|\Big(R(b_k) - \frac{\varepsilon_k}{2}\Big) \\ &= |\alpha_k|(R(a_k) + R(b_k) - \varepsilon_k) \leq |\alpha_{k_0}| d(p, q). \end{aligned}$$

(2) Eeldame, et leiduvad $m, n \in \mathbb{N}$ nii, et $m < n$ ja $p \in \{a_m, b_m\}$ ning $q \in \{a_n, b_n\}$. Juhtu kui $q \in \{a_m, b_m\}$ ja $p \in \{a_n, b_n\}$ saab tõestada analoogiliselt. Siis $|f(p)| = |\alpha_m|(R(p) - \frac{\varepsilon_m}{2})$, ning kuna

$$R(a_n) > R(a_n) - \frac{\varepsilon_n}{2} > R(b_n) - \frac{\varepsilon_n}{2},$$

siis $|f(q)| < |\alpha_n|R(a_n)$. Tingimuse (i) ja võrratuste ahela (3) põhjal $\frac{\varepsilon_m}{2} > R(a_n)$. Kokkuvõttes

$$\begin{aligned}
|f(p) - f(q)| &\leq |f(p)| + |f(q)| \\
&< |\alpha_m|\Big(R(p) - \frac{\varepsilon_m}{2}\Big) + |\alpha_n|R(a_n) \\
&\leq |\alpha_{k_0}|\,\Big(R(p) - \frac{\varepsilon_m}{2} + R(a_n)\Big) \\
&< |\alpha_{k_0}|R(p) \\
&\leq |\alpha_{k_0}|d(p, q).
\end{aligned}$$

(3) Juhul kui $p \notin \{a_k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{b_k : k \in \mathbb{N}\}$, siis $|f(p)| = 0$ ja

$$|f(p) - f(q)| = |f(q)| \leq |\alpha_{k_0}|R(q) \leq |\alpha_{k_0}|d(p, q).$$

(4) Juhul kui $q \notin \{a_k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{b_k : k \in \mathbb{N}\}$ on tõestus eelmise juhuga analoogiline.

Sellega oleme näidanud, et $\|f\|_{\mathrm{Lip}} \leq |\alpha_{k_0}|$. Jääb üle märgata, et f saavutab oma normi tugevalt:

$$|f(a_{k_0}) - f(b_{k_0})| = |\alpha_{k_0}||R(a_{k_0}) + R(b_{k_0}) - \varepsilon_{k_0}| = |\alpha_{k_0}|d(a_{k_0}, b_{k_0}).$$

Oletame nüüd, et M pole täielik ja olgu M_c ruumi M täield. Sel juhul eeldades, et $0_{M_c} \in M_c'$, saame M_c' lõplikkuse tõttu leida jada (x_n) nii, et $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset M$ ja $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0_{M_c}$. Edasi tõestame sarnaselt nagu täieliku meetrilise ruumi M puhul, aga vaadeldes vajadusel funktsioonide f_k asemel funktsioone $f_k' = f_k - f(0_M)$, mis garanteerib, et $f_k' \in \mathrm{Lip}_0(M)$ ka juhul kui $0_{M_c} \in M_c \setminus M$. □

4 Ühtlaselt diskreetne meetriline ruum, mille puhul $\mathrm{SNA}(M)$ ei sisalda Banachi ruumiga c_0 isomeetriliselt isomorfset $\mathrm{Lip}_0(M)$ alamruumi

Eelmise peatüki põhjal võib tekkida küsimus, kas teoreemi 3.6 saaks ka laiendada ühtlaselt diskreetsetele meetrilistele ruumidele. Käesoleva peatüki eesmärk on sellele küsimusele eitav vastus anda, tuues näite lõpmatust ühtlasest meetrilisest ruumist, mis Banachi ruumi c_0 isomeetriliselt isomorfset $\mathrm{Lip}_0(M)$ alamruumi ei sisalda.

Lemma 4.1 (vt [3, lemma 3.1]). *Olgu M meetriline ruum ja olgu Banachi ruumi* $\mathrm{Lip}_0(M)$ *elementide jada (f_n) isomeetriliselt ekvivalentne c_0 kanoonilise baasiga. Kui iga $n \in \mathbb{N}$ korral f_n saavutab oma normi tugevalt punktidel $x_n, y_n \in M$, $x_n \neq y_n$, siis $f_m(x_n) = f_m(y_n)$ iga $m \in \mathbb{N} \setminus \{n\}$ korral.*

Tõestus. Fikseerime $n \in \mathbb{N}$. Eeldame, et f_n saavutab oma normi punktidel x_n, y_n, $x_n \neq y_n$, kusjuures

$$|f_n(x_n) - f_n(y_n)| = f_n(x_n) - f_n(y_n).$$

Oletame vastuväiteliselt, et leidub $m \in \mathbb{N} \setminus \{n\}$ nii, et $f_m(x_n) \neq f_m(y_n)$.

Vaatleme esiteks juhtu, kus $f_m(x_n) > f_m(y_n)$. Defineerime $f := f_m + f_n$, mis lemma 1.9 (tingimuste (i) ja (iii) samaväärsuse) põhjal on Lipschitzi funktsioon normiga 1. Tekib vastuolu:

$$\begin{aligned}
|f(x_n) - f(y_n)| &\geq (f_n + f_m)(x_n) - (f_n + f_m)(y_n) \\
&= f_n(x_n) - f_n(y_n) + f_m(x_n) - f_m(y_n) \\
&= d(x_n, y_n) + f_m(x_n) - f_m(y_n) \\
&> d(x_n, y_n),
\end{aligned}$$

Vaatleme nüüd juhtu, kus $f_m(x_n) < f_m(y_n)$. Iga $k \in \mathbb{N}$ korral on funktsioon $g_k \colon M \to \mathbb{R}$,

$$g_k = \begin{cases} f_k, & \text{kui } k \neq m \\ -f_k, & \text{kui } k = m, \end{cases}$$

isomeetriliselt ekvivalentne c_0 kanoonilise baasiga. Defineerides $f := g_m + g_n$, on tõestus analoogiline esimese juhuga. $\square$

Lemma 4.2 (vt [3, lemma 3.2]). *Olgu M meetriline ruum ja olgu Banachi ruumi* $\mathrm{Lip}_0(M)$ *elementide jada (f_n) ruumis* $\mathrm{Lip}_0(M)$ *ekvivalentne Banachi ruumi c_0 kanoonilise baasiga. Siis iga $x \in M$ korral* $\lim_{n\to\infty} |f_n(x)| = 0$.

Tõestus. Olgu $T\colon c_0 \to \overline{\operatorname{span}}\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ normeeritud ruumide isomorfism, kus $T(e_n) = f_n$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral. Oletame vastuväiteliselt, et leidub selline $x \in M$, et $\lim_{n\to\infty} |f_n(x)| \neq 0$. Siis leidub $N \in \mathbb{N}$ nii, et $\sum_{n=1}^{N} |f_n(x)| > \|T\| d(x, 0)$. Valime iga $n \in \{1, \dots, N\}$ korral $\varepsilon_n \in \{1, -1\}$ nii, et $|f_n(x)| = \varepsilon_n f_n(x)$ ehk olgu $\varepsilon_n = \operatorname{sign} f_n(x)$. Tekib vastuolu, sest ühelt poolt on Lipschitzi funktsiooni $f := \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n f_n \colon M \to \mathbb{R}$ norm ülimalt $\|T\|$:

$$\Big\|\sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n f_n\Big\|_{\mathrm{Lip}} = \Big\|T\Big(\sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n e_n\Big)\Big\|_{\mathrm{Lip}} \leq \|T\|,$$

aga teisalt, vaadeldes funktsiooni f väärtuste vahet kohal x ja 0, peab funktsiooni f norm ületama $\|T\|$:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n f_n(x) - \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n f_n(0)\right| = \left|\sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n f_n(x)\right| = \left|\sum_{n=1}^{N} |f_n(x)|\right| \\ = \sum_{n=1}^{N} |f_n(x)| \\ > \|T\| d(x, 0).\end{aligned}$$

□

Teoreem 4.3 (vt [3, teoreem 4.1])**.** *Leidub lõpmatu ühtlaselt diskreetne tõkestatud meetriline ruum M nii, et hulk* $\operatorname{SNA}(M)$ *ei sisalda Banachi ruumiga c_0 isomeetriliselt isomorfset* $\operatorname{Lip}_0(M)$ *alamruumi.*

Tõestus. Vaatleme hulka $\mathbb{N}$ kaugusega d, kus

$$d(m, n) = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{\max\{m, n\}}, & \text{kui } m \neq n, \\ 0, & \text{kui } m = n. \end{cases}$$

Selline meetriline ruum on muidugi ühtlaselt diskreetne, sest erinevate naturaalarvude m ja n korral $d(m, n) > 1$. Oletame vastuväiteliselt, et $\operatorname{SNA}(\mathbb{N})$ sisaldab Banachi ruumiga c_0 isomeetriliselt isomorfset $\operatorname{Lip}_0(M)$ alamruumi. Siis leidub ruumis $\operatorname{Lip}_0(M)$ tugevalt normi saavutavate funktsioonide jada (f_n), mis on isomeetriliselt ekvivalentne c_0 kanoonilise baasiga. Tõepoolest, kui lineaarne $T : c_0 \to \operatorname{Lip}_0(M)$ on isomeetriline ja $T(c_0) \subset \operatorname{SNA}(M)$, siis otsitavaks jadaks sobib (f_n), kus $f_n = T(e_n)$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral.

Olgu iga $n \in \mathbb{N}$ korral $x_n, y_n \in M$ sellised, et $x_n \neq y_n$ ja

$$|f_n(x_n) - f_n(y_n)| = d(x_n, y_n).$$

Eesmärgiks on leida kaks erinevat naturaalarvu m_0 ja n_0 ning $\delta \in \{1, -1\}$ nii, et

$$\|f_{n_0} + \delta f_{m_0}\|_{\mathrm{Lip}} > 1.$$

Nii tekitame vastuolu lemma 1.9 tingimuste (i) ja (iii) samaväärsusega.

Defineerime hulgad

$$\begin{aligned} A &:= \big\{\{m, n\} \in \mathbb{N}^{(2)} \colon \{x_m, y_m\} \cap \{x_n, y_n\} = \varnothing\big\}, \\ B_1 &:= \big\{\{m, n\} \in \mathbb{N}^{(2)} \colon x_m = x_n\big\}, \\ B_2 &:= \big\{\{m, n\} \in \mathbb{N}^{(2)} \colon y_m = y_n\big\}, \\ B_3 &:= \big\{\{m, n\} \in \mathbb{N}^{(2)} \colon x_m = y_n \text{ või } x_n = y_m\big\}. \end{aligned}$$

Paneme tähele, et $B_1 \cap B_2 = \varnothing$. Tõepoolest, kui $(m, n) \in B_1 \cap B_2$, siis $x_m = x_n$ ja $y_m = y_n$, järelikult

$$f_m(x_n) = f_m(x_m) \neq f_m(y_m) = f_m(y_n),$$

mis on vastuolu, sest lemma 4.1 põhjal peab olema $f_m(x_n) = f_m(y_n)$. Seega on lihtne näha, et hulgad A, B_1, B_2, B_3 rahuldavad järelduse 1.11 tingimusi, mistõttu leidub lõpmatu hulk $S \subset \mathbb{N}$ ja hulk $C \in \{A, B_1, B_2, B_3\}$ selliselt, et $S^{(2)} \subset C$. Vaatleme eraldi kõiki nelja olukorda.

(1) $S^{(2)} \subset A$. Defineerime iga $n \in S$ korral $\varepsilon_n := \frac{1}{2\max\{x_n, y_n\}}$. Fikseerime $n_0 \in S$. Lemma 4.2 ja d definitsiooni põhjal leidub $m_0 \in S \setminus \{n_0\}$ nii, et

  - (i) $\max\{|f_{m_0}(x_{n_0})|, |f_{m_0}(y_{n_0})|\} \leq \frac{1}{3}\varepsilon_{n_0}$
  - (ii) $\max\{d(x_{n_0}, x_{m_0}), d(x_{n_0}, y_{m_0}), d(y_{n_0}, x_{m_0}), d(y_{n_0}, y_{m_0})\} \leq 1 + \frac{1}{3}\varepsilon_{n_0}$.

Lemma 4.1 tõttu leidub $C_{m_0} \in \mathbb{R}$ nii, et $f_{n_0}(x_{m_0}) = f_{n_0}(y_{m_0}) = C_{m_0}$. Võime eeldada, et

$$|f_{n_0}(x_{n_0}) - C_{m_0}| \geq |f_{n_0}(y_{n_0}) - C_{m_0}|$$

ja

$$|f_{m_0}(x_{m_0})| \geq |f_{m_0}(y_{m_0})|,$$

sest juhul kui kumbki eelnev võrratus ei peaks kehtima, võime vastavalt ümber tähistada paari (x_{n_0}, y_{n_0}) või (x_{m_0}, y_{m_0}), seejuures jäävad kehtima võrratused(i) ja (ii).

Kolmnurga võrratuse abil saame, et

$$\begin{aligned} |f_{n_0}(x_{n_0}) - C_{m_0}| + |f_{n_0}(y_{n_0}) - C_{m_0}| &\geq |f_{n_0}(x_{n_0}) - f_{n_0}(y_{n_0})| \\ &= d(x_{n_0}, y_{n_0}) = 1 + 2\varepsilon_{n_0} \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}|f_{m_0}(x_{m_0})| + |f_{m_0}(y_{m_0})| &\geq |f_{m_0}(x_{m_0}) - f_{m_0}(y_{m_0})| \\ &= d(x_{m_0}, y_{m_0}) = 1 + 2\varepsilon_{m_0},\end{aligned}$$

seega

$$|f_{n_0}(x_{n_0}) - C_{m_0}| \geq \frac{1}{2} + \varepsilon_{n_0} \tag{4}$$

ja

$$|f_{m_0}(x_{m_0})| \geq \frac{1}{2} + \varepsilon_{m_0}. \tag{5}$$

Olgu $\delta := \operatorname{sign} f_{m_0}(x_{m_0}) \in \{1, -1\}$. Jääb üle vaadata kahte alamjuhtu.

Juhul kui $f_{n_0}(x_{n_0}) < C_{m_0}$, defineerime funktsiooni $f := f_{n_0} + \delta f_{m_0}$ ning veendume, et $\|f\|_{\mathrm{Lip}} > 1$. Võrratuste (i), (ii), (4) ja (5) põhjal

$$\begin{aligned}|f(x_{m_0}) - f(x_{n_0})| &\geq f_{n_0}(x_{m_0}) + \delta f_{m_0}(x_{m_0}) - f_{n_0}(x_{n_0}) - \delta f_{m_0}(x_{n_0}) \\ &= C_{m_0} + |f_{m_0}(x_{m_0})| - f_{n_0}(x_{n_0}) - \delta f_{m_0}(x_{n_0}) \\ &\geq C_{m_0} - f_{n_0}(x_{n_0}) + |f_{m_0}(x_{m_0})| - |f_{m_0}(x_{n_0})| \\ &> \frac{1}{2} + \varepsilon_{n_0} + \frac{1}{2} - |f_{m_0}(x_{n_0})| \\ &> 1 + \varepsilon_{n_0} - \frac{1}{3}\varepsilon_{n_0} \\ &> 1 + \frac{1}{3}\varepsilon_{n_0} \\ &\geq d(x_{n_0}, x_{m_0}).\end{aligned}$$

Juhul kui $f_{n_0}(x_{m_0}) \geq C_{m_0}$, on tõestus peaaegu analoogiline, ainult selle erinevusega, et funktsiooni f asemel vaatleme funktsiooni $g := f_{n_0} - \delta f_{m_0}$, mille puhul saab sarnase arutelu abil näidata, et $|g(x_{n_0}) - g(x_{m_0})| > d(x_{n_0}, x_{m_0})$.

(2) $S^{(2)} \subset B_1$. Paneme tähele, et leidub $k^* \in \mathbb{N}$ nii, et $x_n = k^*$ iga $n \in S$ korral. Lemma 4.1 põhjal $y_n \neq y_m$, kui $n, m \in S$ ja $n \neq m$. Lemma 4.2 põhjal võime leida indeksid n_0 ja m_0 nii, et

$$|f_{n_0}(x_{n_0})| \leq \frac{1}{10} \quad \text{ja} \quad |f_{m_0}(x_{m_0})| \leq \frac{1}{10}. \tag{6}$$

Kolmnurga võrratuse põhjal

$$|f_{n_0}(x_{n_0})| + |f_{n_0}(y_{n_0})| \geq |f_{n_0}(y_{n_0}) - f_{n_0}(x_{n_0})| = d(x_{n_0}, y_{n_0}) > 1, \tag{7}$$

mistõttu $|f_{n_0}(y_{n_0})| > 9/10$. Sarnase arutelu teel saab näidata ka, et $|f_{m_0}(y_{m_0})| > 9/10$. Kuna $x_{n_0} = x_{m_0}$, saame võrratuse (6) ja lemma 4.1 põhjal

$$|f_{n_0}(y_{m_0})| \leq \frac{1}{10} \text{ ja } |f_{m_0}(y_{n_0})| \leq \frac{1}{10}. \tag{8}$$

Arvestame asjaolu, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral, kui f_n on tugevalt normi saavutav Lipschitzi funktsioon normiga 1, siis on seda ka $-f_n$. Seega võime eeldada, et $f_{n_0}(y_{n_0}) > 0$ ja $f_{m_0}(y_{m_0}) > 0$, vajadusel kummagi funktsiooni märki muutes, seejuures jääb lemma 1.9 (tingimuste (i) ja (iii) samaväärsuse) põhjal jada (f_n) ekvivalentseks c_0 kanoonilise baasiga. Vaatleme funktsiooni $f := f_{n_0} - f_{m_0}$, mis on lemma 1.9 (tingimuste (i) ja (iii) samaväärsuse) põhjal normiga 1. Pidades silmas, et d definitsiooni kohaselt ei ole meetrilise ruumi kahe erineva elemendi vaheline kaugus suurem kui 3/2, ning kasutades võrratusi (7) ja (8), jõuame vastuoluni:

$$\begin{aligned} |f(y_{n_0}) - f(y_{m_0})| &\geq f_{n_0}(y_{n_0}) + f_{m_0}(y_{m_0}) - f_{m_0}(y_{n_0}) - f_{n_0}(y_{m_0}) \\ &\geq \frac{9}{5} - (|f_{m_0}(y_{n_0})| + |f_{n_0}(y_{m_0})|) > \frac{8}{5} > d(y_{n_0}, y_{m_0}). \end{aligned}$$

(3) $S^{(2)} \subset B_2$. Vaadeldes jadade (x_n) ja (y_n) asemel jadasid (x'_n) ja (y'_n), kus iga $n \in \mathbb{N}$ korral $x'_n = y_n$ ja $y'_n = x_n$ saame, et $S^{(2)} \subset \big\{\{m, n\} \in \mathbb{N}^{(2)} \colon x'_m = x'_n\big\}$, mistõttu on lihtne näha, et antud alamjuhtu saab tõestada samamoodi nagu eelmist alamjuhtu.

(4) $S^{(2)} \subset B_3$. Näitame, et see alamjuht pole võimalik. Fikseerime $n_0 \in S$. Defineerime hulgad

$$S_1 = \big\{m \in S \setminus \{n_0\} \colon x_m = y_{n_0}\big\}$$

ja

$$S_2 = \big\{m \in S \setminus \{n_0\} \colon y_m = x_{n_0}\big\}.$$

Hulk S_1 on üheelemendiline. Oletades vastuväiteliselt, et leiduvad $n_1, n_2 \in S_1$ nii, et $n_1 \neq n_2$, saame, et $x_{n_1} = x_{n_2}$ ning kuna $\{n_1, n_2\} \in B_3$, kehtib kas $x_{n_1} = y_{n_2}$ või $x_{n_2} = y_{n_1}$. See aga tähendaks, et kehtib kas $x_{n_1} = y_{n_1}$ või $x_{n_2} = y_{n_2}$ mis on vastuolus asjaoluga, et funktsioonid f_{n_1} ja f_{n_2} saavutavad tugevalt oma normi vastavalt punktide x_{n_1} ja y_{n_1} ning x_{n_2} ja y_{n_2} korral. Sarnase arutelu teel on võimalik veenduda, et ka S_2 on üheelemendiline hulk.

Kuna iga $m \in S \setminus \{n_0\}$ korral kehtib kas $x_{n_0} = y_m$ või $x_m = y_{n_0}$, siis $S = \{n_0\} \cup S_1 \cup S_2$, mis on vastuolus hulga S valikuga.

$\square$

Kasutatud kirjandus

[1] A. Avilés, G. Martínez-Cervantes, A. Rueda Zoca ja P. Tradacete. „Infinite dimensional spaces in the set of strongly norm-attaining Lipschitz maps". *Rev. Mat. Iberoamericana* 40.1 (2024), lk. 189–200. ISSN: 0213-2230,2235-0616. DOI: 10.4171/rmi/1425. URL: https://doi.org/10.4171/rmi/1425.

[2] B. Cascales, R. Chiclana, L. C. García-Lirola, M. Martín ja A. Rueda Zoca. „On strongly norm attaining Lipschitz maps". *J. Funct. Anal.* 277.6 (2019), lk. 1677–1717. ISSN: 0022-1236,1096-0783. DOI: 10.1016/j.jfa.2018.12.006. URL: https://doi.org/10.1016/j.jfa.2018.12.006.

[3] S. Dantas, R. Medina, A. Quilis ja Ó. Roldán. „On isometric embeddings into the set of strongly norm-attaining Lipschitz functions". *Nonlinear Anal.* 232 (2023), Paper No. 113287, 15. ISSN: 0362-546X,1873-5215. DOI: 10.1016/j.na.2023.113287. URL: https://doi.org/10.1016/j.na.2023.113287.

[4] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos ja V. Zizler. *Banach space theory*. CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC. The basis for linear and nonlinear analysis. Springer, New York, 2011. ISBN: 978-1-4419-7514-0. DOI: 10.1007/978-1-4419-7515-7. URL: https://doi.org/10.1007/978-1-4419-7515-7.

[5] J. K. Kaasik. „Lipschitzi-vaba Banachi ruumi peaaegu ruumud omadused". Magistritöö. Tartu Ülikool, 2022. URL: http://hdl.handle.net/10062/83245.

[6] V. Kadets ja Ó. Roldán. „Closed linear spaces consisting of strongly norm attaining Lipschitz functionals". *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. RACSAM* 116.4 (2022), Paper No. 162, 12. ISSN: 1578-7303,1579-1505. DOI: 10.1007/s13398-022-01305-6. URL: https://doi.org/10.1007/s13398-022-01305-6.

[7] E. Oja ja P. Oja. *Funktsionaalanalüüs*. Tartu Ülikool, 1991.

[8] A. Ostrak. „Lipschitzi-vaba Banachi ruumi oktaeedrilisus". Bakalaureusetöö. Tartu Ülikool, 2016. URL: http://hdl.handle.net/10062/53789.

[9] N. Weaver. *Lipschitz algebras*. Second. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2018. ISBN: 978-981-4740-63-0.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Karl-Ingmar Adamson,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose

   „Tugevalt normi saavutavad Lipschitzi funktsioonid"

   mille juhendajad on Rainis Haller ja Jaagup Kirme, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguste kehtivuse lõppemiseni.

2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commonsi litsentsiga CC BY NC ND 4.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni

3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Karl-Ingmar Adamson
15.05.2024