

Я . Л Ы Х М У С

ПРЕДЕЛЬНЫЕ (СЖАТЫЕ) ГРУППЫ ЛИ
и некоторые приложения
к проблемам
теории элементарных частиц

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Diss. Trt.
387029

На правах рукописи

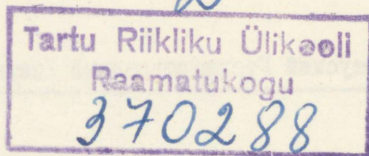
Я . Л Ы Х М У С

**ПРЕДЕЛЬНЫЕ (СЖАТЫЕ) ГРУППЫ ЛИ
и некоторые приложения
к проблемам
теории элементарных частиц**

04I Теоретическая и математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук



Работа выполнена в Институте физики и астрономии
Академии Наук Эстонской ССР.

Научный руководитель: кандидат физико-математических
наук, старший научный сотрудник Х.Х. Ёйглане

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
профессор А.А. Боргардт

кандидат физико-математических наук,
доцент Ю. Луисте

Ведущее научно-исследовательское учреждение:
Ленинградский Государственный Университет

Автореферат разослан "....." 1968 г.

Защита диссертации состоится "...." 1968 г.
на заседании Совета физико-математического факультета
Тартуского Государственного Университета, г. Тарту,
Юликооли 18.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ТГУ.

Ученый секретарь ТГУ

/И. Маарооз/

Каждая физическая теория (классическая механика, релятивистская механика, квантовая механика) имеет свою область применимости, вне пределов которой она неприменима и переходит в другие физические теории. Во всех известных случаях этот переход от одной динамической теории к другой имеет явно выраженный предельный характер. Вполне естественно, что такой предельный характер перехода от одной физической теории к другой отражается и на взаимных соотношениях между фундаментальными группами инвариантности рассматриваемых физических теорий. Именно это обстоятельство и требовало введения /1,2/ понятия предельного перехода между группами Ли. Вигнер и Иненю /1/ исходили из физического предельного процесса, где устремление параметра $c \rightarrow \infty$ в специальной теории относительности ведет к классической механике. В этом предельном переходе группа инвариантности релятивистской механики — группа Пуанкаре — переходит в группу инвариантности классической механики — в неоднородную группу Галилея. Вигнер и Иненю впервые сформулировали этот предельный переход в терминах алгебр Ли групп инвариантности (т.е. групп Пуанкаре и Галилея). Группа Пуанкаре в свою очередь получается предельным переходом из групп де Ситтера $O(4,1)$ и $O(3,2)$, что соответствует физическому предельному переходу от пространства с постоянной (положительной и отрицательной) кривизны в плоское пространство Минковского. Предельным параметром служит радиус кривизны (устремляющийся к бесконечности) или его обратное значение — полная кривизна (устремляющаяся к нулю).

Независимо от Вигнера и Иненю к понятию предельного перехода пришел Зайцев /2/, предлагавший построить на основе аппарата предельных групп математическую теорию физических теорий, т.е. объединить в одну целостную и стро-

гую группово-теоретическую систему несколько физических теорий, связанных друг с другом определенными предельными соотношениями.

Еще раньше Сегал /3/ рассматривал последовательности изоморфных групп Ли, структурные константы которых устремились к структурным константам предельной группы, неизоморфной группам последовательности.

Впоследствии теория сжатий была развита дальше Салетаном /4/, а совсем недавно еще в /5/.

В математике предельный переход в многообразии алгебр Ли заданной размерности использовался в геометрических исследованиях /6,7/. Недавно возникшее направление /8,9/ исследует т.н. деформации алгебраических систем (колец, ассоциативных алгебр и алгебр Ли) в терминах и средствами теорий гомологий и когомологий, и имеет более глубокие связи с другими отраслями математики. Например, можно указать на сходство между деформациями ассоциативных алгебр с одной стороны и деформациями комплексно-аналитических структур на компактных многообразиях, с другой стороны. Деформация по существу является обратной операцией сжатия (предельного перехода). К теории деформаций примыкают также работы Германа /10/ об аналитическом продолжении представлений.

В физике теория предельных групп может быть применена также и в определенных ситуациях в рамках одной и той же физической теории. Физическими предельными переходами могут быть "включение" и "выключение" взаимодействий, переходы к некоторому обособленному предельному значению в энергетическом спектре динамической системы (пример атома водорода, $E \rightarrow 0$), переход к пределу сильной связи, переход к пределу "всего спектра" в теории динамических систем и т.п. В некоторых случаях могут встречаться математические предельные переходы, физический смысл которых не вполне ясен.

Диссертация посвящена исследованию некоторых специальных вопросов математической теории предельных (сжатых) групп Ли и анализу возможных приложений теории сжатий к проблемам физики элементарных частиц.

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы (234 названия) и приложения (12 таблиц).

Во введении даны в сжатом виде цель, основные положения и описана структура диссертации.

В первой главе излагаются общие положения теории предельных групп Ли. Кроме краткого обзора основных понятий приводятся также некоторые результаты, имеющие характер новизны и касающиеся условий осуществимости сингулярных сжатий, топологических свойств предельных переходов и возможности обобщения предельного перехода на более общие алгебраические системы.

Глава состоит из 5 параграфов:

- I. § 1. Общая характеристика предельных переходов.
- § 2. Некоторые конкретные типы предельных переходов.
- § 3. Топологические свойства в предельных переходах.
- § 4. Некоторые возможности обобщения понятия предельного перехода на другие алгебраические системы.
- § 5. Проблема "обратного сжатия". Теория деформаций.

Изложение основывается на определении предельного перехода через т.н. " ε -преобразование" с матрицей $A(\varepsilon)$ преобразования базиса алгебры Ли, зависящей от предельного параметра ε (рассматривается также случай нескольких независимых предельных параметров $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k$).

Разложение $A(\varepsilon) = A(0) + \varepsilon A'(0) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 A''(0) + \dots$ показывает, что все рассмотренные до сих пор частные случаи сжатий (сжатия типа Иненю-Вигнера - в дальнейшем IW-сжатия, сжатия типа Салетана - в дальнейшем S-сжатия, и диагональные сингулярные сжатия) являются весьма

частными случаями, выделенными специальными требованиями, наложенными на матрицы $A(0), A'(0), A''(0), \dots$. Если рассматривать диагональные " ε -преобразования" с $A(\varepsilon)_{ii} = \varepsilon^{m_i}$, $i = 1, 2, \dots, r$ (r — число параметров группы Ли), то довольно прямо получаются условия осуществимости сжатия. " ε -преобразованные" структурные константы выражаются формулой

$$\tilde{c}_{ij}^k(\varepsilon) = \varepsilon^{m_i + m_j - m_k} c_{ij}^k$$

(суммирования нет!), налагая требование конечности значений предельных структурных констант, откуда получаются неравенства для показателей степеней m_i предельного параметра, или, точнее, условия для допредельных структурных констант — структурные константы c_{ij}^k , для которых $m_i + m_j - m_k < 0$, должны равняться нулю. Это — ограничительные условия для структурных констант допредельной алгебры. При самом простом, IW -сжатии эти ограничения сводятся к известному требованию: подпространство алгебры Ли, не затрагиваемое ε -преобразованием, должно образовывать подалгебру. При некоторых сингулярных сжатиях ограничительные требования могут вовсе отпадать (например, при $m_1 = m_2 = \dots = m_s = 2$, $m_{s+1} = \dots = m_r = 1$). В таблице 2 приложения выписаны отличные от нуля предельные структурные константы и ограничительные условия на допредельную алгебру при некоторых простейших сингулярных сжатиях.

Простым методом разбиения генераторов выведены условия заменимости сингулярного сжатия последовательностью обычных несингулярных IW -сжатий. Такая замена не всегда возможна, что зависит от конкретной структуры заданной исходной алгебры Ли.

Приведены примеры IW -сжатий, S -сжатий и сингулярных сжатий в прямые произведения (обычное IW -сжатие ведет к полупрямому произведению).

Сделано несколько общих замечаний на счет проблемы описания всех типов сжатий и всевозможных сжатий опреде-

деленного типа для некоторой заданной группы Ли. Ввиду отсутствия полной классификации алгебр Ли некоторой заданной размерности l и ввиду трудности их классификации уже при довольно малых значениях l , проблема описания всевозможных предельных соотношений между всеми алгебрами Ли заданной размерности пока остается нерешенной.

В § 3 прослежены характерные изменения в глобальном строении группового многообразия при сжатиях — изменение свойств компактности и связности.

Для дальнейшего развития теории могут оказаться перспективными разного рода расширения и обобщения понятия сжатия групп на более общие алгебраические системы, например, на неассоциативные алгебры. В § 4 проанализированы вложения алгебр Ли в такие системы и возможности предельных соотношений между более общими алгебраическими системами. Приведены некоторые примеры неассоциативных алгебр, имеющих инфинитезимальный характер, д.е. для которых можно определить алгебраические системы "больших" элементов, аналогичные группам Ли в случае алгебр Ли.

Одной из важнейших задач теории предельных групп является нахождение всех алгебр, которые в результате определенного предельного перехода могут перейти в некоторую заданную алгебру. Кроме краткого обзора современного состояния проблемы "обратного сжатия", в § 5 дается изложение теории деформации в терминах теории когомологий алгебр Ли и исследуется связь между деформациями и сжатиями.

Во второй главе исследуются более специальные вопросы математической теории сжатий — проблема классификации сжатий (однократные и многократные несингулярные сжатия простых и полупростых групп и др.), характерные особенности в структуре предельных групп, описание сжатий некоторых групп, важных для физических применений, и некоторые вопросы, связанные со сжатием представлений (тео-

ремы о возможности точного сжатия для полупростых групп, сжатие операторов Казимира и т.п.).

Глава состоит из 5 параграфов:

II. § 1. О классификации сжатий простых и полупростых групп.

§ 2. Специальные разложения и градуировка в допределных и предельных алгебрах. Примеры сжатий классических алгебр.

§ 3. Описание сжатий некоторых важнейших групп.

§ 4. Сжатие представлений при предельных переходах.

§ 5. Сжатые операторы Казимира.

Рассмотрена (§§ 1,3) проблема описания всех предельных групп, получаемых из заданной группы путем применения предельного перехода определенного типа. Получены конкретные результаты для групп, важных для физических приложений (для унитарных, ортогональных и симплектических групп). Результаты сжатий относительно некоторых подгрупп представлены в таблицах 5,6,7 приложения. Подробно разобран пример группы $SU(3)$ (ее сингулярные сжатия и S -сжатия).

Для изучения характерных структур в предельных и допределных алгебрах (§ 2) применяется общее определение градуированной алгебры Ли через абелеву группу градуировки. Своеобразие структуры — наличие допределных специальных разложений /2/ и градуировки в предельных алгебрах — изучено на примерах классических алгебр ортогональных и унитарных групп.

Дальше изучаются некоторые проблемы сжатия представлений. Известные процедуры сжатия представлений (т.е. "сохранение представлений" при предельном переходе) могут дать заведомо точные представления сжатой группы только при сжатиях простых и полупростых групп. В случае же допределных групп с коммутативными радикалами (или более сложных) следует прибегнуть к проективным пред-

ставлениям. Переход к проективным представлениям позволяет получить точные представления предельной группы (матричные элементы которых не превращаются в нуль или бесконечность), но зато теряется свойство обыкновенных векторных представлений. Типичный пример такого предельного перехода — переход $IO(3,1) \rightarrow G(3)$ (который рассматривался и в литературе) — рассматривается в § 4, гл. III.

В § 5 изучается метод введения предельного параметра в явные выражения для операторов Казимира и их собственных значений.

В итоге, о сжатии представлений можно сказать следующее:

1) Сжатие представлений не является так хорошо и однозначно определенным предельным процессом как сжатие алгебр (групп). В общем случае неясно, как провести сжатие представлений, если представления предельной группы заранее неизвестны. Из одного и того же допредельного представления можно получить целый непрерывный спектр предельных представлений. В общем случае неясно также, можно ли получить в результате сжатия все представления предельной алгебры (группы).

2) На упомянутые только что в I) вопросы в некоторых случаях можно дать определенный ответ. Если допредельная группа полупроста и сжатие является IW -сжатием, то предельный переход для представлений методом последовательности представлений имеет более определенный характер — можно указать, как получить предельные представления, не возникает таких осложнений, как в случае галилеевых групп, а также вполне убедительно можно сказать, что получаемы все представления предельной группы (анализ $\mathcal{E}$ -преобразованных инвариантов ортогональной группы и примеры, разобранные в гл. III).

Третья глава посвящена группам, связанным с пространством-временем (конформная группа, группы де Ситтера,

группа Пуанкаре, группа Галилея и др.) и предельным переходам между ними.

В главу III входят 4 параграфа:

III. § 1. Цепочка предельных переходов: (конформная группа $\rightarrow$), группы де Ситтера $\rightarrow$ группа Пуанкаре $\rightarrow$ группа Галилея.

§ 2. Сжатие представлений группы $O(4,1)$ в представления групп $IO(3,1)$ и $IO(4)$.

§ 3. Сжатие представлений группы $O(3,2)$.

§ 4. Сжатие представлений в предельном переходе $IO(3,1) \rightarrow G(3)$ (группа Пуанкаре $\rightarrow$ группа Галилея).

В § 1 описывается схема подгрупп конформной группы, их предельных групп и предельных соотношений между ними (таблицы на стр. 100, 103). Конформная группа в определенном смысле объединяет все группы, связанные с пространством-временем (она также описывает одну из простейших квантово-механических систем, гл. IV). Приводятся краткие данные (и довольно полная библиография) о группах $O(4,2)$ (конформная группа), $O(4,1)$, $O(3,2)$ (группы де Ситтера), $IO(3,1)$ (группа Пуанкаре) и $G(3)$ (группа Галилея).

В § 2 рассматриваются предельные переходы унитарных представлений группы $O(4,1)$ в унитарные представления групп $IO(3,1)$ и $IO(4)$. К сжатию представлений применяется метод, развитый в гл. II, § 5 (метод сжатых операторов Казимира).

В § 3 описано сжатие унитарных представлений группы $O(3,2)$ в унитарные представления групп $IO(3,1)$ и $IO(2,2)$. Итоги сжатий представлений групп $O(4,1)$, $O(3,2)$ собраны в таблицах 9, 10 приложения.

В § 4 подробно рассмотрен предельный переход $IO(3,1) \rightarrow G(3)$ для представлений. В случае полупростых групп и групп с коммутативными радикалами изучение унитарных

проективных (лучевых) представлений, с которыми имеет дело квантовая механика, сводится к изучению унитарных точных представлений универсальной накрывающей группы. Из-за более сложной структуры нормальных делителей, группа Галилея обладает нетривиальными проективными представлениями, неэквивалентными точным представлениям универсальной накрывающей группы. Эти проективные представления как раз и являются физическими представлениями — они, и только они, могут описывать физическую частицу, /II/. Приведены краткие характеристики физических представлений групп Пуанкаре и Галилея, описаны "малые группы", предельные переходы между ними и сжатие представлений.

В четвертой главе исследуются возможности применения сжатий групп в теории элементарных частиц, точнее, в теории динамических систем. Приводится анализ предельно-группового описания процесса включения взаимодействия и предельного перехода в статической теории сильной связи. Показано, что спектр динамической системы описывается тройкой групп неинвариантности; между этими группами имеют место определенные предельные соотношения.

Глава IV содержит 4 параграфа:

- IV. § 1. Общие замечания о физическом истолковании предельных переходов. Краткий обзор новейших работ.
- § 2. Предельные процессы "включения" и "выключения" взаимодействий.
- § 3. Предельный переход в теории сильной связи.
- § 4. Предельные соотношения между характеристическими группами динамических систем.

В гл. IV рассматриваются приложения теории сжатий к другим физическим проблемам (не связанным с пространственно-временными группами). В § 2 в терминах теории групп (средствами теории сжатий и деформаций), описаны физические предельные процессы "включения" и "выключения"

взаимодействия. Этот параграф значительно основывается на работе /12/. Проанализировано несколько примеров (бесспиновая частица /12/, осциллятор, динамическая система сильновзаимодействующих частиц).

Затем, в § 3, изложена предельно-групповая трактовка статической теории сильной связи. Модель сильной связи и простейшие динамические системы (ротатор, осциллятор, атом водорода) обнаруживают одинаковые и весьма интересные группово-теоретические свойства. Для этих динамических систем характерно наличие тройки групп неинвариантности, состоящей из компактной группы спектра G^c , некомпактной группы спектра G^{nc} и непростой группы спектра IG с коммутативным радикалом.

Группа G^c объединяет в своих (специально выбранных) унитарных неприводимых представлениях любое конечное число низлежащих уровней спектра. Подходящее бесконечномерное унитарное неприводимое представление группы G^{nc} охватывает весь спектр или бесконечную часть спектра вне конечномерного представления группы G^c . С компактной и некомпактной полупростыми группами спектра естественным образом связана неполупростая группа с коммутативным радикалом — группа неоднородных преобразований, которая получается предельным переходом из обеих групп спектра:

$$G^c, G^{nc} \xrightarrow{IW} IG$$

Это предельное соответствие дает качественно правильные результаты для представлений — представления группы IG , полученные из физических представлений групп G^c , G^{nc} посредством подходящим образом проведенного предельного перехода, содержат правильный спектр, т.е. имеют правильные сужения на подгруппу приближенной симметрии. При этом переход $G^c \rightarrow IG$ может иметь физический смысл как "переход ко всему спектру".

Пока неясен физический смысл предельного перехода
 $G^{NC} \rightarrow IG$.

Детальному математическому разбору этой ситуации посвящен § 4, гл. IУ. В конце этого параграфа указаны еще несколько предельных соотношений между группами инвариантности атома водорода.

В заключении коротко резюмированы результаты, имеющие характер новизны и сделаны несколько заключительных замечаний.

Диссертация написана в виде монографии (объем 200 стр.), упомянутые только что результаты объединены в целостную систему всей теории предельных групп.

В итоге можно сказать, что метод предельных групп может применяться для группово-теоретической формулировки принципа соответствия (для формулировки перехода свойств инвариантности и симметрии при переходе от одной физической теории к другой) и во многих случаях также в предельных ситуациях в рамках одной и той же физической теории. Можно быть уверенным, что приложения к физическим проблемам не исчерпаны разобранными в диссертации примерами.

Строгое математическое рассмотрение предельных соотношений в многообразии алгебр Ли размерности l выявляло также серьезные математические ограничения (далеко не каждые две группы могут быть связаны предельными соотношениями). Более подробная разработка теории сжатий (чему в значительной мере посвящена настоящая диссертация) тем не менее позволяет ориентироваться в возможных применениях и модификациях теории.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Я. Лыхмус, Х. Ыйглане, Труды ИФА АН ЭССР, 19, II3 (1962).
2. Я. Лыхмус, в сб. "Летняя школа по проблемам теории элементарных частиц; Кяярику, 1965", Тарту, 1966; т. III, стр. 75-127.
3. Я. Лыхмус, Изв. АН ЭССР, сер. физ., 17, 128 (1968).
4. Я. Лыхмус, в сб. "II Летняя школа по проблемам теории элементарных частиц; Отёпя, 1967", Тарту, 1968; т. IV, стр. 1-132.
5. Я. Лыхмус, Изв. АН ЭССР, сер. физ.-мат., 17, (1968).
6. Я. Лыхмус, Изв. АН ЭССР, сер. физ.-мат., 17, (1968).

Л и т е р а т у р а

1. Е. Inönü, E.P. Wigner, Proc. Nat. Acad. Sci. (USA), 39, 510 (1953).
2. Г.А. Зайцев. Проблема инвариантно-группового изучения множеств предельных геометрий и специальные под-алгебры Ли. Тезисы доклада, Всесоюзная геометрическая конференция, Киев, 1961.
3. I.E. Segal, Duke Math. J., 18, 221 (1951).
4. E.J. Saletan, J.Math. Phys., 2, 1 (1961).
5. H.D. Doebner, O. Melsheimer, Nuovo Cimento, A 49, 306 (1967).
6. А.С. Феденко, УМН, 12, 236 (1957).
7. Б.А. Розенфельд, Л.М. Карпова, Труды сем. по вект. и тенз. анализу, XIII, 168 (1966).
8. M. Gerstenhaber, Ann. of Math., 79, 59 (1964).
9. A. Nijenhuis, R.W. Richardson, Bull. Am. Math. Soc., 70, 406 (1964); 72, 1 (1966); 73, 175 (1967).
10. R. Hermann, Commun. Math. Phys., 2, 251 (1966); 3, 53, 75 (1966); 5, 131, 157 (1967).
11. E. Inönü, E.P. Wigner, Nuovo Cimento, 9, 705 (1952); M. Hamermesh, Ann. of Phys., 9, 518 (1960).
12. H.D. Doebner, O. Melsheimer, Preprint IC/67/28, Trieste, 1967; Preprint, Marburg Universität, 1967.

Я. ЛЯХМУС
ПРЕДЕЛЬНЫЕ (СЖАТЫЕ) ГРУППЫ ЛИ
И НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ
К ПРОБЛЕМАМ ТЕОРИИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
Тартуский государственный университет
СССР, г.Тарту, ул. Кликкоэли, 18

=====
Ротапринт ТГУ 1968. Сдано в печать 10/X 1968 г.
Печ. листов I, O. Тираж 200 экз. Бумага 30x45.1/4.

МВ 06778. Заказ № 621

Бесплатно

Бесплатно