Tartu Ülikool
Matemaatika-informaatikateaduskond
Matemaatika instituut

Kristina Šabunova

Sümmeetriliselt ja nõrgalt pidevad funktsioonid

Bakalaureusetöö (6 EAP)
Matemaatika eriala

Juhendaja: *prof.* Toivo Leiger

Autor:
Juhendaja:
Instituudi juhataja:

Tartu 2014

Sümmeetriliselt ja nõrgalt pidevad funktsioonid

Bakalaureusetöö

Kristina Šabunova

Lühikokkuvõte. Bakalaureusetöö eesmärk on uurida funktsioonide sümmeetrilist ja nõrka pidevust. Me veendume, et kui funktsioon on pidev, siis see on nii sümmeetriliselt kui ka nõrgalt pidev ja näitame, et need mõisted ei ole võrreldavad. Leidub sümmeetriliselt pidevaid funktsioone, mis ei ole nõrgalt pidevad, ja vastupidi. Samuti leidub katkevaid funktsioone, mis on nii sümmeetriliselt kui ka nõrgalt pidevad. Uurime aritmeetilisi tehteid sümmeetriliselt ja nõrgalt pidevate funktsioonidega. Osutub, et sümmeetriliselt pidevate funktsioonide liitfunktsioonid ei ole üldjuhul sümmeetriliselt pidevad. Sama kehtib ka nõrga pidevuse korral. Töös kirjeldatakse sümmeetrilise ja nõrga pidevuse seoseid ühepoolsete piirväärtuste olemasolu ja võrdsusega ning käsitletakse nn Dirichlet' tüüpi ja Thomae funktsioone.

Märksõnad. Sümmeetriline pidevus, nõrk pidevus, Dirichlet' tüüpi funktsioonid, Thomae funktsioon.

Symmetrically and weakly continuous functions

Bachelor's thesis

Kristina Šabunova

Abstract. The purpose of this bachelor's thesis is to compare symmetric continuity and weak continuity and to investigate their properties. We make sure that if a function is continuous, it is also symmetrically and weakly continuous and provide examples to show that symmetric and weak continuity do not imply each other. There exist functions which are symmetrically continuous but not weakly continuous and vice versa. One can also find discontinuous functions, which are symmetrically and weakly continuous. We also examine the arithmetic operations with symmetrically continuous and weakly continuous functions. It is shown that compositions of symmetrically continuous functions are not symmetrically continuous in general. The same applies to weak continuity. We describe relations between the concepts we studied and the existence of one-sided limits, and their equality and deal with symmetric and weak continuity of the so-called Dirichlet's type and Thomae functions.

Key words. Symmetric continuity, weak continuity, functions of Dirichlet's type, Thomae's function.

Sisukord

Sissejuhatus

Teatavasti nimetatakse ühe muutuja funktsiooni $f\colon D \to \mathbb{R}$, kus $D \subset \mathbb{R}$, pidevaks kohal $a \in D$, kui $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Tuntud Heine kriteeriumi kohaselt on funktsioon f kohal a pidev parajasti siis, kui iga punktiks a koonduva argumendi väärtuste jada (x_n) korral funktsiooni väärtuste jada $(f(x_n))$ koondub piirväärtuseks $f(a)$.

Käesolevas bakalaureusetöös vaadeldakse funktsioonide kahte omadust – sümmeetrilist ja nõrka pidevust –, mis mõlemad on nõrgemad kui tavaline pidevus. Sümmeetrilise pidevuse korral peab vahe $f(a+h)-f(a-h)$ koonduma nulliks protsessis $h \to 0$. Nõrga pidevuse lähtekohaks on Heine kriteerium. Sel juhul nõutakse, et kui funktsiooni määramispiirkonnas üldse eksisteerib kasvavaid jadasid (x_n) ja kahanevaid jadasid (y_n), mis koonduvad punktiks a, siis nende hulgas on selliseid, et $f(x_n) \to f(a)$ ja $f(y_n) \to f(a)$.

Töö esimeses peatükis defineeritakse nimetatud mõisted ja veendutakse, et pidev funktsioon on nii sümmeetriliselt kui ka nõrgalt pidev. Esitatakse näited selle kohta, et need mõisted ei ole võrreldavad: leidub sümmeetriliselt pidevaid funktsioone, mis ei ole nõrgalt pidevad, ja vastupidi. Samuti leidub katkevaid funktsioone, mis on nii sümmeetriliselt kui ka nõrgalt pidevad. Tähelepanuväärne näide on tuntud Dirichlet' funktsioon, mis on katkev igas punktis. Me veendume, et ta on nõrgalt pidev igas punktis, sümmeetriliselt pidev kõigis ratsionaalsetes punktides, kuid ei ole sümmeetriliselt pidev üheski irratsionaalses punktis.

Teises peatükis uuritakse aritmeetilisi tehteid sümmeetriliselt pidevate funktsioonidega, samuti selliste funktsioonide liitfunktsioone. Osutub näiteks, et sümmeetriliselt pidevate funktsioonide korrutis ei ole üldjuhul sümmeetriliselt pidev. Samuti ei pruugi sümmeetriliselt pidevate funktsioonide liitfunktsioon olla sümmeetriliselt pidev.

Kolmandas peatükis on samad probleemid vaatluse all nõrga pidevuse kontekstis. Tähelepanuväärne on, et nõrgalt pidevate funktsioonide summa, vahe, korrutis, jagatis, maksimum ja miinimum ei ole üldjuhul nõrgalt pidevad. Märgime, et nõrgalt pidevate funktsioonide liitfunktsioon ei ole üldjuhul nõrgalt pidev.

Neljandas peatükis kirjeldatakse mõlema vaadeldava mõiste seoseid ühepoolsete piirväärtuste olemasolu ja võrdsusega. Viimane viies peatükk käsitleb nn Dirichlet' tüüpi funktsioonide ja Thomae funktsiooni sümmeetrilist ja nõrka pidevust.

Käesolev bakalaureusetöö on referatiivne, selle kirjutamisel on lähtutud põhiliselt artiklist [3]. Arvestatud on ka artiklite [1], [2] ja [4] tulemusi.

Peatükk 1

Sümmeetriliselt ja nõrgalt pidevad funktsioonid

Käesolevas peatükis defineerime ühe muutuja funktsiooni jaoks sümmeetrilise ja nõrga pidevuse mõisted, esitame nende lihtsamad omadused ja toome mõned näited.

Arvu $a \in \mathbb{R}$ nimetatakse hulga $D \subset \mathbb{R}$

1) *sisepunktiks* (kirjutame $a \in D^\circ$), kui leidub $\delta > 0$, et $(a-\delta, a+\delta) \subset D$,

2) *kuhjumispunktiks*, kui iga $\delta > 0$ korral $(a-\delta, a+\delta) \cap (D \backslash \{a\}) \neq \varnothing$, st iga ümbrus
$$U_\delta(a) := (a-\delta, a+\delta)$$
sisaldab lõpmata palju hulga D punkte,

3) *isoleeritud punktiks*, kui $(U_\delta(a) \backslash \{a\}) \cap D = \varnothing$ mingi $\delta > 0$ korral.

Paneme tähele, et

(a) hulga kõik sisepunktid on tema kuhjumispunktid, kuid vastupidine väide on väär,

(b) arv $a \in \mathbb{R}$ on hulga D kuhjumispunkt parajasti siis, kui leidub selline jada (x_n), et $x_n \in D \backslash \{a\}$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral ning $x_n \to a$,

(c) isoleeritud punkt ei saa olla ei sise- ega kuhjumispunkt.

Näiteks hulga $\mathbb{Z}$ kõik elemendid on selle hulga isoleeritud punktid, aga hulga
$$S := \left\{ \pm\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}$$
ainuke kuhjumispunkt on punkt 0.

Definitsioon. Olgu $a \in D$ hulga D kuhjumispunkt. Funktsiooni $f\colon D \to \mathbb{R}$ nimetatakse *pidevaks kohal* a, kui

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$

st

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : [x \in D,\ |x - a| < \delta] \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Kehtib nn **Heine kriteerium**: funktsioon $f\colon D \to \mathbb{R}$ on kohal $a \in D$ pidev parajasti siis, kui iga argumendi väärtuste jada (x_n) korral, mis koondub arvuks a, funktsiooni väärtuste jada $(f(x_n))$ koondub arvuks $f(a)$, st

$$[x_n \in D \ (n \in \mathbb{N}),\ x_n \to a] \Rightarrow f(x_n) \to f(a).$$

1.1 Sümmeetriliselt pidevad funktsioonid

Olgu $D \subset \mathbb{R}$ mittetühi hulk ja olgu $a \in \mathbb{R}$ mõlema hulga $(-\infty, a] \cap D$ ning $[a, \infty) \cap D$ selline kuhjumispunkt, et

$$\forall \delta > 0 \ \exists h = h(\delta) > 0 : \ a \pm h \in U_\delta(a). \tag{1.1}$$

Definitsioon. Ütleme, et funktsioon $f\colon D \to \mathbb{R}$ on *kohal a sümmeetriliselt pidev*, kui

$$\lim_{h \to 0} (f(a + h) - f(a - h)) = 0,$$

st

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : [a \pm h \in D,\ |h| < \delta] \Rightarrow |f(a + h) - f(a - h)| < \varepsilon.$$

Kui funktsioon f on sümmeetriliselt pidev igas punktis $a \in X$, kus $X \subset \mathbb{R}$ ja $X \neq \varnothing$, siis ütleme, et f on *sümmeetriliselt pidev hulgas X*.

Märkused. **1**. Kohal a sümmeetriliselt pidev funktsioon ei pea olema punktis a määratud, seega ei ole sümmeetriliselt pidev funktsioon üldjuhul pidev.
2. Iga paarisfunktsioon f on kohal 0 sümmeetriliselt pidev: sel juhul on funktsiooni määramispiirkond D sümmeetriline nullpunkti suhtes (st $x \in D$ parajasti siis, kui $-x \in D$) ning $f(h) - f(-h) = 0$ iga $h \in D$ korral.
3. Punktis a sümmeetriliselt pidev funktsioon f ei pruugi punkti a ümbruses olla tõkestatud. Näiteks paarisfunktsioon

$$f\colon \mathbb{R} \backslash \{0\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \frac{1}{x^2}$$

on kohal 0 sümmeetriliselt pidev, kuid ei ole punkti 0 üheski ümbruses tõkestatud.

Järgmine lause täpsustab pidevate ja sümmeetriliselt pidevate funktsioonide vahekorda.

Lause 1.1. *Olgu $a \in D$ mõlema hulga $(-\infty, a] \cap D$ ning $[a, \infty) \cap D$ selline kuhjumispunkt, mis rahuldab tingimust* (1.1)*. Kui funktsioon $f\colon D \to \mathbb{R}$ on kohal a pidev, siis on ta kohal a ka sümmeetriliselt pidev.*

TÕESTUS. Olgu lause eeldus (1.1) täidetud ja olgu funktsioon f pidev kohal a, st $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Siis

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}(f(a+h) - f(a-h)) &= \lim_{h\to 0}(f(a+h)) - \lim_{h\to 0}(f(a-h))\\ &= f(a) - f(a) = 0,\end{aligned}$$

seega on f punktis a sümmeetriliselt pidev. □

Järeldus 1.2. *Olgu $D \subset \mathbb{R}$ intervall. Kui funktsioon $f\colon D \to \mathbb{R}$ on intervalli D sisepunktis a pidev, siis on ta kohal a ka sümmeetriliselt pidev.*

TÕESTUS. Kui a on intervalli D sisepunkt, siis leidub tal selline ümbrus $U_\delta(a) = (a - \delta, a + \delta)$, et $U_\delta(a) \subset D$. Seetõttu on lause 1.1 tingimus (1.1) täidetud. Niisiis, kui f on pidev kohal a, siis on ta sel kohal lause 1.1 põhjal ka sümmeetriliselt pidev. □

1.2 Nõrgalt pidevad funktsioonid

Olgu $D \subset \mathbb{R}$ mittetühi hulk ja olgu $a \in \mathbb{R}$. Tähistame

1) sümboliga $\mathcal{L}_a(D)$ kõigi selliste hulga D elementidest moodustatud ***rangelt kasvavate*** arvjadade hulga, mis koonduvad piirväärtuseks a,

2) sümboliga $\mathcal{R}_a(D)$ kõigi selliste hulga D elementidest moodustatud ***rangelt kahanevate*** arvjadade hulga, mis koonduvad piirväärtuseks a.

Seega

$$\mathcal{L}_a(D) := \{(x_n) \mid x_n \in D \ (n \in \mathbb{N}),\ x_n \uparrow a\}$$

ja

$$\mathcal{R}_a(D) := \{(y_n) \mid y_n \in D \ (n \in \mathbb{N}),\ y_n \downarrow a\}.$$

Lause 1.3. (a) *Kui* $a \in \mathbb{R}$ *on hulga* $(-\infty, a] \cap D$ *kuhjumispunkt, siis* $\mathcal{L}_a(D) \neq \varnothing$.

(b) *Kui* a *on hulga* $[a, \infty) \cap D$ *kuhjumispunkt, siis* $\mathcal{R}_a(D) \neq \varnothing$.

(c) *Hulga* D *iga kuhjumispunkti* $a \in D$ *korral on vähemalt üks hulkadest* $\mathcal{L}_a(D)$ *ja* $\mathcal{R}_a(D)$ *mittetühi.*

Tõestus. Tõestame väite (b), väide (a) tõestatakse analoogiliselt, väide (c) on vahetu järeldus väidetest (a) ja (b).

Olgu a hulga $[a, \infty) \cap D$ kuhjumispunkt, st

$$(a, a + \delta) \cap D \neq \varnothing \text{ iga } \delta > 0 \text{ korral.}$$

Võtame $\delta_1 := 1$ ja leiame $y_1 \in (a, a + \delta_1) \cap D$. Olgu $\delta_2 := \min\{\frac{1}{2}, y_1 - a\}$, valime $y_2 \in (a, a + \delta_2) \cap D$, sel juhul

$$a < y_2 < a + \delta_2$$

ehk

$$0 < y_2 - a < \delta_2 \leq y_1 - a,$$

seega $y_2 < y_1$. Nii jätkates fikseerime k-ndal sammul $\delta_k := \min\{\frac{1}{k}, y_{k-1} - a\}$ ning valime $y_k \in (a, a + \delta_k) \cap D$. Sel juhul

$$a < y_k < a + \delta_k$$

ehk

$$0 < y_k - a < \delta_k \leq y_{k-1} - a,$$

mistõttu $y_k < y_{k-1}$.

Seda protsessi jätkates saame hulga D elementide rangelt kahaneva jada (y_k), seejuures

$$|y_k - a| = y_k - a < \delta_k \leq \frac{1}{k} \to 0 \quad (k \to \infty),$$

niisiis $y_k \to a$. Seega $\mathcal{R}_a(D) \neq \varnothing$. □

Definitsioon. Olgu $a \in D$ hulga D kuhjumispunkt. Ütleme, et funktsioon $f\colon D \to \mathbb{R}$ on *nõrgalt pidev kohal* a, kui on täidetud mõlemad järgmised tingimused:

(a) kui $\mathcal{L}_a(D) \neq \varnothing$, siis leidub selline jada $(x_n) \in \mathcal{L}_a(D)$, et $\lim_n f(x_n) = f(a)$,

(b) kui $\mathcal{R}_a(D) \neq \varnothing$, siis leidub selline jada $(y_n) \in \mathcal{R}_a(D)$, et $\lim_n f(y_n) = f(a)$.

Kui funktsioon f on nõrgalt pidev igas punktis $a \in X$, siis ütleme, et f on *hulgas* $X \subset D$ *nõrgalt pidev.*

Märkus 1.4. Kui a on nii hulga $(-\infty, a] \cap D$ kui ka $[a, \infty) \cap D$ kuhjumispunkt, siis $\mathcal{L}_a(D) \neq \varnothing$ ja $\mathcal{R}_a(D) \neq \varnothing$. Seega, kui $a \in D$ on hulga D sisepunkt, siis mõlemad hulgad $\mathcal{L}_a(D)$ ja $\mathcal{R}_a(D)$ on mittetühjad. Sel juhul funktsioon f on kohal a nõrgalt pidev parajasti siis, kui

$$\lim_n f(x_n) = \lim_n f(y_n) = f(a)$$

mingite $(x_n) \in \mathcal{L}_a(D)$ ja $(y_n) \in \mathcal{R}_a(D)$ korral.

Lause 1.5. *Kui funktsioon* $f\colon D \to \mathbb{R}$ *on punktis* $a \in D$ *pidev, siis on ta selles punktis ka nõrgalt pidev.*

TÕESTUS. Kuna f on kohal a pidev, siis a on hulga D kuhjumispunkt. Seega vähemalt üks hulkadest $\mathcal{L}_a(D)$ ja $\mathcal{R}_a(D)$ on mittetühi. Tänu funktsiooni f pidevusele punktis a kehtivad Heine kriteeriumi kohaselt võrdused

$$\lim_n f(x_n) = \lim_n f(y_n) = f(a)$$

iga $(x_n) \in \mathcal{L}_a(D)$ ja $(y_n) \in \mathcal{R}_a(D)$ korral. Seega funktsioon f on nõrgalt pidev kohal a. $\square$

1.3 Näited

Lause 1.5 ja järelduse 1.2 põhjal võime väita, et kui $a \in D$ on määramispiirkonna D sisepunkt, siis funktsiooni $f\colon D \to \mathbb{R}$ pidevusest selles punktis järeldub nii tema sümmeetriline pidevus kui ka nõrk pidevus. Järgnevatest näidetest selgub, et omavahel ei ole need mõisted võrreldavad.

Näide 1.6. Näitame, et funktsioon

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{kui } x \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x = 0, \end{cases}$$

on sümmeetriliselt pidev, kuid ei ole nõrgalt pidev kohal 0.

Kuna

$$\lim_{x\to 0}(f(x)-f(-x)) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x} - \frac{\sin(-x)}{-x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x} - \frac{-\sin x}{-x}\right)$$
$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x} - \frac{\sin x}{x}\right) = \lim_{x\to 0} 0 = 0,$$

siis funktsioon f on kohal 0 sümmeetriliselt pidev.

Nüüd veendume, et funktsioon f ei ole nõrgalt pidev kohal 0. Kuna 0 on nii hulga $(-\infty, 0]$ kui ka hulga $[0,\infty)$ kuhjumispunkt, siis $\mathcal{L}_0(\mathbb{R}) \neq \varnothing$ ja $\mathcal{R}_0(\mathbb{R}) \neq \varnothing$. **Suvalise** $(x_n) \in \mathcal{L}_0(\mathbb{R})$ korral

$$\lim_n f(x_n) = \lim_n \frac{\sin x_n}{x_n} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \neq 0 = f(0),$$

seega f ei ole kohal 0 nõrgalt pidev.

Järelikult f on sümmeetrilisel pidev, kuid ei ole nõrgalt pidev kohal 0.

Näide 1.7. Olgu

$$S := \left\{\pm\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\} = \left\{-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \dots, 0, \dots, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right\}.$$

Defineerime funktsiooni

$$g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad g(x) := \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{kui } x \in S\backslash\{0\}, \\ 1, & \text{kui } x = 0, \\ \frac{1}{x}, & \text{kui } x \notin S, \end{cases}$$

ja veendume, et funktsioon g on nõrgalt pidev, kuid ei ole sümmeetriliselt pidev.

Kuna

$$\lim_{\substack{x\to 0+\\ x\in\mathbb{R}\backslash S}} (g(x)-g(-x)) = \lim_{\substack{x\to 0+\\ x\in\mathbb{R}\backslash S}}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{-x}\right) = 2\lim_{\substack{x\to 0+\\ x\in\mathbb{R}\backslash S}}\frac{1}{x} = \infty,$$

siis tingimus $\lim_{x\to 0}(g(x)-g(-x)) = 0$ ei ole täidetud. Seega funktsioon g ei ole sümmeetriliselt pidev kohal 0.

Paneme tähele, et

$$\left(-\frac{1}{n}\right) \in \mathcal{L}_0(\mathbb{R})$$

ja

$$\left(\frac{1}{n}\right) \in \mathcal{R}_0(\mathbb{R}),$$

seejuures,

$$\lim_n g\left(-\frac{1}{n}\right) = \lim_n \frac{\sin\left(-\frac{1}{n}\right)}{-\frac{1}{n}} = \lim_n \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 = g(0)$$

ja

$$\lim_n g\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_n \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 = g(0).$$

Järelikult g on nõrgalt pidev, kuid ei ole sümmeetriliselt pidev kohal 0.

Näide 1.8. Olgu

$$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) := \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{kui } x \in S\backslash\{0\}, \\ 1, & \text{kui } x = 0, \\ \sin x, & \text{kui } x \notin S. \end{cases}$$

Näitame, et funktsioon h on sümmeetriliselt ja nõrgalt pidev, kuid ei ole pidev kohal 0.

Kuna

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in S\backslash\{0\}}} \left(\frac{\sin x}{x} - \frac{\sin(-x)}{-x}\right) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\in S\backslash\{0\}}} \left(\frac{\sin x}{x} - \frac{\sin x}{x}\right) = 0$$

ja

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in \mathbb{R}\backslash S}} (\sin x - \sin(-x)) = 2 \lim_{\substack{x\to 0\\ x\in \mathbb{R}\backslash S}} \sin x = 2\sin 0 = 0,$$

näeme, et h on sümmeetriliselt pidev kohal 0.

Analoogiliselt eelmise näitega,

$$\left(-\frac{1}{n}\right) \in \mathcal{L}_0(\mathbb{R})$$

ja

$$\left(\frac{1}{n}\right) \in \mathcal{R}_0(\mathbb{R}),$$

seejuures,

$$\lim_n h\left(-\frac{1}{n}\right) = \lim_n \frac{\sin\left(-\frac{1}{n}\right)}{-\frac{1}{n}} = \lim_n \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 = h(0)$$

ja

$$\lim_n h\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_n \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 = h(0).$$

Seega h on sümmeetriliselt ja nõrgalt pidev kohal 0.

Kuna aga

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in\mathbb{R}\setminus S}} h(x) = \lim_{x\to 0}\sin x = 0 \neq 1 = h(0),$$

siis funktsioon h ei ole pidev kohal 0.

Toodud näidete põhjal võime väita, et

1) üldiselt ei järeldu funktsiooni sümmeetrilisest pidevusest tema nõrk pidevus,

2) nõrgast pidevusest ei järeldu sümmeetriline pidevus ja

3) funktsioon, mis on nii sümmeetriliselt kui ka nõrgalt pidev, ei pruugi olla pidev.

1.4 Dirichlet' funktsiooni sümmeetriline ja nõrk pidevus

Teatavasti on nii kõigi ratsionaalarvude hulk $\mathbb{Q}$ kui ka kõigi irratsionaalarvude hulk $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ tihedad koruses $\mathbb{R}$: kui $a, b \in \mathbb{R}$ ja $a < b$, siis leiduvad $r \in \mathbb{Q}$ ning $p \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, et $a < r < b$ ja $a < p < b$. Sellest tuleneb järgmine lause.

Lause 1.9. *Iga $a \in \mathbb{R}$ korral saab leida sellised ratsionaalarvude jadad (x_n) ja (y_n), et $x_n \uparrow a$ ja $y_n \downarrow a$, ning sellised irratsionaalarvude jadad (x'_n) ja (y'_n), et $x'_n \uparrow a$ ja $y'_n \downarrow a$. Teisisõnu, $\mathcal{L}_a(\mathbb{Q}) \neq \varnothing$, $\mathcal{R}_a(\mathbb{Q}) \neq \varnothing$, $\mathcal{L}_a(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) \neq \varnothing$ ja $\mathcal{R}_a(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) \neq \varnothing$ iga $a \in \mathbb{R}$ korral.*

Tõestus. Olgu $a \in \mathbb{R}$ suvaline. Kuna hulgad $\mathbb{Q}$ ja $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ on tihedad korpuses $\mathbb{R}$, siis leiduvad $x_1, y_1 \in \mathbb{Q}$, $x'_1, y'_1 \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ nii, et

$$a - 1 < x_1 < a < y_1 < a + 1,$$

$$a - 1 < x'_1 < a < y'_1 < a + 1.$$

Olgu $\delta_2 := \min\{\frac{1}{2}, a - x_1, y_1 - a, a - x'_1, y'_1 - a\}$, leiame $x_2, y_2 \in \mathbb{Q}$ ja $x'_2, y'_2 \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, et

$$a - \delta_2 < x_2 < a < y_2 < a + \delta_2,$$

$$a - \delta_2 < x'_2 < a < y'_2 < a + \delta_2,$$

siis

$$x_1 - a \leq -\delta_2 < x_2 - a < 0 < y_2 - a < \delta_2 \leq y_1 - a,$$

$$x'_1 - a \leq -\delta_2 < x'_2 - a < 0 < y'_2 - a < \delta_2 \leq y'_1 - a.$$

Seega $x_1 < x_2$, $y_1 > y_2$, $x'_1 < x'_2$ ja $y'_1 > y'_2$. Olgu arvud $x_1, \dots, x_{n-1}$, $y_1, \dots, y_{n-1}$, $x'_1, \dots, x'_{n-1}$ ja $y'_1, \dots, y'_{n-1}$ fikseeritud. Võttes $\delta_n := \min\{\frac{1}{n}, a - x_{n-1}, y_{n-1} - a, a - x'_{n-1}, y'_{n-1} - a\}$, valime $x_n, y_n \in \mathbb{Q}$ ja $x'_n, y'_n \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, et

$$x_{n-1} - a \leq -\delta_n < x_n - a < 0 < y_n - a < \delta_n \leq y_{n-1} - a,$$

$$x'_{n-1} - a \leq -\delta_n < x'_n - a < 0 < y'_n - a < \delta_n \leq y'_{n-1} - a,$$

mistõttu $x_{n-1} < x_n$, $y_{n-1} > y_n$, $x'_{n-1} < x'_n$ ja $y'_{n-1} > y'_n$. Seejuures $0 < a - x_n < \frac{1}{n}$, $0 < y_n - a < \frac{1}{n}$, $0 < a - x'_n < \frac{1}{n}$ ja $0 < y'_n - a < \frac{1}{n}$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral.

Nii jätkates, saame jadad $(x_n) \in \mathcal{L}_a(\mathbb{Q})$, $(y_n) \in \mathcal{R}_a(\mathbb{Q})$, $(x'_n) \in \mathcal{L}_a(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ ja $(y'_n) \in \mathcal{R}_a(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$. □

Vaatleme Dirichlet' funktsiooni

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} \alpha, & \text{kui } x \in \mathbb{Q}, \\ \beta, & \text{kui } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \end{cases}$$

kus $\alpha \neq \beta$.

Lause 1.10. *Olgu $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ning $\alpha \neq \beta$. Dirichlet' funktsiooni f korral kehtivad järgmised väited:*

(a) *f ei ole pidev üheski punktis $a \in \mathbb{R}$,*

(b) *f on sümmeetriliselt pidev igas punktis $a \in \mathbb{Q}$, kuid ei ole sümmeetriliselt pidev üheski punktis $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$,*

(c) *f on nõrgalt pidev igas punktis $a \in \mathbb{R}$.*

Tõestus. (a) Olgu $a \in \mathbb{R}$. Oletame vastuväiteliselt, et f on pidev punktis a. Lause 1.9 kohaselt leiduvad sellised jadad (x_n) ja (x'_n), et $x_n \in \mathbb{Q}$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral ning $x_n \uparrow a$ ja $x'_n \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral ning $x'_n \uparrow a$. Kuna f on pidev kohal a, siis

$$f(a) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \alpha = \alpha$$

ja

$$f(a) = \lim_{n\to\infty} f(x'_n) = \lim_{n\to\infty} \beta = \beta.$$

Saame, et $\alpha = \beta$, mis on vastuolus eeldusega. Seega f ei ole pidev üheski punktis $a \in \mathbb{R}$.

(b) Olgu $a \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}$, paneme tähele, et kehtib võrdus

$$a - h = 2a - (a + h). \tag{1.2}$$

Kui $a \in \mathbb{Q}$, siis võrduse (1.2) kohaselt $a + h \in \mathbb{Q}$ parajasti siis, kui $a - h \in \mathbb{Q}$. Seega

$$f(a+h) - f(a-h) = \begin{cases} \alpha - \alpha = 0, & \text{kui } a + h \in \mathbb{Q}, \\ \beta - \beta = 0, & \text{kui } a + h \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \end{cases}$$

ja

$$\lim_{h\to 0}(f(a+h) - f(a-h)) = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

Niisiis on f sümmeetriliselt pidev kohal $a \in \mathbb{Q}$.

Olgu $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Kui $a + h \in \mathbb{Q}$, siis võrduse (1.2) kohaselt $a - h \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Paneme tähele, et kuna

$$|f(a+h) - f(a-h)| = |\alpha - \beta| \neq 0 \quad (a \pm h \in \mathbb{R}),$$

siis

$$\lim_{h\to 0}(f(a+h) - f(a-h)) \neq 0.$$

Seega funktsioon f ei ole sümmeetriliselt pidev üheski punktis $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

(c) Olgu $a \in \mathbb{Q}$. Lause 1.9 kohaselt $\mathcal{L}_a(\mathbb{Q}) \neq \varnothing$ ja $\mathcal{R}_a(\mathbb{Q}) \neq \varnothing$, seejuures **suvaliste** $(x_n) \in \mathcal{L}_a(\mathbb{Q})$ ning $(y_n) \in \mathcal{R}_a(\mathbb{Q})$ korral

$$\lim_n f(x_n) = \lim_n \alpha = \alpha = f(a)$$

ja

$$\lim_n f(y_n) = \lim_n \alpha = \alpha = f(a),$$

mis tähendab, et funktsioon f on nõrgalt pidev igas punktis $a \in \mathbb{Q}$.

Analoogiliselt, kui $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, siis $\mathcal{L}_a(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \neq \varnothing$ ning $\mathcal{R}_a(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \neq \varnothing$ ja **suvaliste** $(x'_n) \in \mathcal{L}_a(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$, $(y'_n) \in \mathcal{R}_a(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ korral

$$\lim_n f(x'_n) = \lim_n \beta = \beta = f(a)$$

ja

$$\lim_n f(y'_n) = \lim_n \beta = \beta = f(a).$$

Järelikult funktsioon f on nõrgalt pidev igas punktis $a \in \mathbb{R}$. $\square$

Märkus 1.11. Analoogiliselt lause 1.10 väitega (c) tõestatakse, et funktsioonid

$$f_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} \alpha, & \text{kui } x \in \mathbb{Q} \backslash \{c\}, \\ \beta, & \text{kui } x \in (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) \cup \{c\}, \end{cases}$$

kus $c \in \mathbb{Q}$, ja

$$f_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} \alpha, & \text{kui } x \in \mathbb{Q} \cup \{d\}, \\ \beta, & \text{kui } x \in (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) \backslash \{d\}, \end{cases}$$

kus $d \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$, on nõrgalt pidevad igas punktis $a \in \mathbb{R}$, muuhulgas seega ka vastavalt punktides c ja d.

Peatükk 2

Operatsioonid sümmeetriliselt pidevate funktsioonidega

Selles peatükis uurime tehteid sümmeetriliselt pidevate funktsioonidega ja selliste funktsioonide liitfunktsioone.

Teatavasti, kui funktsioonid $f\colon D \to \mathbb{R}$ ja $g\colon D \to \mathbb{R}$ on pidevad kohal $a \in D$, siis funktsioonid

$$f+g,\ f-g,\ \lambda f\ (\lambda \in \mathbb{R}),\ fg \text{ ja } \frac{f}{g},\ \text{kus } g(a) \neq 0,$$

on pidevad punktis a. Edasi, olgu $a \in D$ hulga D kuhjumispunkt ning olgu $f\colon D \to \mathbb{R}$ ja $\varphi\colon E \to \mathbb{R}$ sellised funktsioonid, et $f(D) \subset E$. Kui f on pidev kohal a ja φ on pidev kohal $b := f(a)$, siis seosega

$$\varphi \circ f\colon D \to \mathbb{R}, \quad \varphi \circ f(x) := \varphi(f(x)) \quad (x \in D)$$

määratud liitfunktsioon $\varphi \circ f$ on pidev punktis a.

Meenutame ka ühtlase pidevuse definitsiooni.

Definitsioon. Ütleme, et funktsioon $f\colon D \to \mathbb{R}$ on *hulgas* $X \subset D$ *ühtlaselt pidev*, kui iga $\varepsilon > 0$ korral saab leida sellise $\delta > 0$, et suvaliste $x, x' \in X$ korral, mis rahuldavad tingimust $|x - x'| < \delta$, kehtib võrratus $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

Teame, et iga hulgas X ühtlaselt pidev funktsioon on selles hulgas pidev, vastupidine väide on üldjuhul väär.

2.1 Aritmeetilised tehted sümmeetriliselt pidevate funktsioonidega

Lause 2.1. *Kui funktsioonid $f\colon D \to \mathbb{R}$ ja $g\colon D \to \mathbb{R}$ on sümmeetriliselt pidevad kohal $a \in \mathbb{R}$, siis ka nende summa*

$$f+g\colon D \to \mathbb{R}, \quad (f+g)(x) := f(x)+g(x)$$

ja vahe

$$f-g\colon D \to \mathbb{R}, \quad (f-g)(x) := f(x)-g(x)$$

on kohal a sümmeetriliselt pidevad.

Tõestus. Olgu funktsioonid $f\colon D \to \mathbb{R}$ ja $g\colon D \to \mathbb{R}$ sümmeetriliselt pidevad kohal $a \in \mathbb{R}$, st

$$\lim_{h\to 0}(f(a+h)-f(a-h)) = 0$$

ja

$$\lim_{h\to 0}(g(a+h)-g(a-h)) = 0,$$

siis

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}((f+g)(a+h)-(f+g)(a-h)) &= \lim_{h\to 0}(f(a+h)+g(a+h)-f(a-h)\\
&\quad - g(a-h))\\
&= \lim_{h\to 0}((f(a+h)-f(a-h))\\
&\quad + (g(a+h)-g(a-h)))\\
&= \lim_{h\to 0}(f(a+h)-f(a-h))\\
&\quad + \lim_{h\to 0}(g(a+h)-g(a-h))\\
&= 0+0 = 0.
\end{aligned}$$

Järelikult funktsioonide f ja g summa $f+g\colon D \to \mathbb{R}$ on sümmeetriliselt pidev kohal a. Vahe $f-g$ sümmeetriline pidevus tõestatakse analoogiliselt. $\square$

Lause 2.2. *Kui funktsioonid $f\colon D \to \mathbb{R}$ ja $g\colon D \to \mathbb{R}$ on sümmeetriliselt pidevad kohal $a \in \mathbb{R}$ ja punkti a mingis ümbruses $U_{\delta_0}(a)$ tõkestatud, siis ka nende korrutis*

$$fg\colon D \to \mathbb{R}, \quad (fg)(x) := f(x)g(x)$$

on kohal a sümmeetriliselt pidev.

Tõestus. Eeldame, et funktsioonid $f\colon D \to \mathbb{R}$ ja $g\colon D \to \mathbb{R}$ on sümmeetriliselt pidevad kohal $a \in \mathbb{R}$, st

$$\lim_{h\to 0}(f(a+h) - f(a-h)) = 0 \tag{2.1}$$

ja

$$\lim_{h\to 0}(g(a+h) - g(a-h)) = 0. \tag{2.2}$$

Teiseks, olgu $\delta_0 > 0$ selline arv, et funktsioonid f ja g on tõkestatud punkti a ümbruses $U_{\delta_0}(a)$. Siis leidub $M > 0$, et

$$|f(x)| \leq M \text{ ja } |g(x)| \leq M \text{ iga } x \in U_{\delta_0}(a) \text{ korral.}$$

Olgu $\varepsilon > 0$. Vastavalt eeldustele (2.1) ja (2.2) leiduvad $\delta_1 > 0$ ja $\delta_2 > 0$, et

$$[a \pm h \in D,\ |h| < \delta_1] \Rightarrow |f(a+h) - f(a-h)| < \frac{\varepsilon}{2M},$$
$$[a \pm h \in D,\ |h| < \delta_2] \Rightarrow |g(a+h) - g(a-h)| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Võtame $\delta := \min\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}$. Olgu $|h| < \delta$ ja $a \pm h \in D$, siis

$$|(a \pm h) - a| = |h| < \delta \leq \delta_0,$$

st $a \pm h \in U_{\delta_0}(a)$. Seega $|f(a+h)| \leq M$ ja $|g(a-h)| \leq M$, seetõttu

$$\begin{aligned}
|fg(a+h) - fg(a-h)| &= |f(a+h)g(a+h) - f(a-h)g(a-h)| \\
&= |f(a+h)g(a+h) - f(a+h)g(a-h) \\
&\quad + f(a+h)g(a-h) - f(a-h)g(a-h)| \\
&= |f(a+h)(g(a+h) - g(a-h)) \\
&\quad + g(a-h)(f(a+h) - f(a-h))| \\
&\leq |f(a+h)||(g(a+h) - g(a-h))| \\
&\quad + |g(a-h)||(f(a+h) - f(a-h))| \\
&\leq M\frac{\varepsilon}{2M} + M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Järelikult $\lim_{h\to 0}(fg(a+h) - fg(a-h)) = 0$. □

Lause 2.3. *Kui funktsioon $f\colon D \to \mathbb{R}$ on sümmeetriliselt pidev kohal $a \in \mathbb{R}$ ja punkti a mingis ümbruses tõkestatud, siis ka funktsioon*

$$f^2\colon D \to \mathbb{R}, \quad (f^2)(x) := (f(x))^2$$

on kohal a sümmeetriliselt pidev.

Tõestus. Väide järeldub otseselt lausest 2.2, kui võtta $g = f$. $\square$

Näide 2.4. Veendume, et lause 2.2 ei kehti, kui loobuda eeldusest funktsioonide tõkestatuse kohta. Selleks näitame, et kuigi funktsioon

$$f\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & \text{kui } x > 0, \\ \frac{1}{x^2} - x, & \text{kui } x < 0, \end{cases}$$

on kohal 0 sümmeetriliselt pidev, funktsioon f^2 ei ole punktis 0 sümmeetriliselt pidev.

Kuna

$$\lim_{x\to 0+} (f(x) - f(-x)) = \lim_{x\to 0+} \left(\frac{1}{x^2} - \left(\frac{1}{x^2} - x\right)\right) = \lim_{x\to 0+} x = 0$$

ja

$$\lim_{x\to 0-} (f(x) - f(-x)) = \lim_{x\to 0-} \left(\frac{1}{x^2} - x - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0-} (-x) = 0,$$

siis f on sümmetriliselt pidev kohal 0. Seejuures

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0+} (f^2(x) - f^2(-x)) &= \lim_{x\to 0+} (f(x) - f(-x))(f(x) + f(-x)) \\
&= \lim_{x\to 0+} \left(\frac{1}{x^2} - \left(\frac{1}{x^2} - x\right)\right)\left(\frac{1}{x^2} + \left(\frac{1}{x^2} - x\right)\right) \\
&= \lim_{x\to 0+} x\left(\frac{2}{x^2} - x\right) \\
&= \lim_{x\to 0+} \left(\frac{2}{x} - x^2\right) = \infty.
\end{aligned}$$

Seega tingimus $\lim_{x\to 0}(f^2(x) - f^2(-x)) = 0$ ei ole täidetud, st f^2 ei ole sümmeetriliselt pidev kohal 0.

Lause 2.5. *Kui funktsioon $g\colon D \to \mathbb{R}$, kus $g(x) \neq 0$ iga $x \in D$ korral, on sümmeetriliselt pidev kohal $a \in \mathbb{R}$ ja funktsioon*

$$\frac{1}{g}\colon D \to \mathbb{R}, \quad \left(\frac{1}{g}\right)(x) := \frac{1}{g(x)}$$

on punkti a mingis ümbruses tõkestatud, siis funktsioon $\frac{1}{g}$ on kohal a sümmeetriliselt pidev.

Tõestus. Olgu funktsioon $g\colon D \to \mathbb{R}$, kus $g(x) \neq 0$ iga $x \in D$ korral, sümmeetriliselt pidev kohal $a \in \mathbb{R}$, st

$$\lim_{h\to 0}(g(a+h) - g(a-h)) = 0, \tag{2.3}$$

ning olgu $\delta_0 > 0$ selline arv, et funktsioon $\frac{1}{g}\colon D \to \mathbb{R}$ on tõkestatud punkti a ümbruses $U_{\delta_0}(a)$. Siis leidub $M > 0$, et

$$\left|\frac{1}{g(x)}\right| \leq M \text{ iga } x \in U_{\delta_0}(a) \text{ korral.}$$

Olgu $\varepsilon > 0$. Vastavalt eeldusele (2.3) leidub $\delta_1 > 0$, et

$$[a \pm h \in D,\ |h| < \delta_1] \Rightarrow |g(a+h) - g(a-h)| < \frac{\varepsilon}{M^2}.$$

Võtame $\delta := \min\{\delta_0, \delta_1\}$. Olgu $|h| < \delta$ ja $a \pm h \in D$, siis

$$|(a \pm h) - a| = |h| < \delta \leq \delta_0,$$

st $a \pm h \in U_{\delta_0}(a)$. Seega $\left|\frac{1}{g(a+h)}\right| \leq M$ ja $\left|\frac{1}{g(a-h)}\right| \leq M$, mistõttu

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{g(a+h)} - \frac{1}{g(a-h)}\right| &= \left|\frac{g(a-h) - g(a+h)}{g(a+h)g(a-h)}\right| = \frac{|g(a+h) - g(a-h)|}{|g(a+h)||g(a-h)|} \\ &\leq M^2 \frac{\varepsilon}{M^2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Järelikult $\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{g(a+h)} - \frac{1}{g(a-h)}\right) = 0$, mis tähendab, et $\frac{1}{g}$ on sümmeetriliselt pidev kohal a. □

Lause 2.6. *Eeldame, et*

1) *funktsioonid $f\colon D \to \mathbb{R}$ ja $g\colon D \to \mathbb{R}$ on sümmeetriliselt pidevad kohal $a \in \mathbb{R}$,*

2) *$g(x) \neq 0$ iga $x \in D$ korral ja*

3) *funktsioonid f ja $\frac{1}{g}$ on punkti a mingis ümbruses tõkestatud.*

Siis funktsioon

$$\frac{f}{g}\colon D \to \mathbb{R}, \qquad \left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$$

on kohal a sümmeetriliselt pidev.

Tõestus. Olgu funktsioonid $f\colon D \to \mathbb{R}$ ja $g\colon D \to \mathbb{R}$, kus $g(x) \neq 0$ iga $x \in D$ korral, sümmeetriliselt pidevad kohal $a \in \mathbb{R}$ ning punkti a mingis ümbruses tõkestatud. Kuna $\frac{f}{g} = f\frac{1}{g}$, siis lausete 2.2 ja 2.5 kohaselt on $\frac{f}{g}\colon D \to \mathbb{R}$ sümmeetriliselt pidev kohal a. □

Näide 2.7. Üldjuhul ei ole sümmeetriliselt pideva funktsiooni g korral funktsioon $\frac{1}{g}$ sümmeetriliselt pidev.

Vaatleme funktsiooni

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) := x,$$

mis on pidev kohal 0. Kuna

$$\lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(-x)}\right) = \lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{-x}\right) = 2\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x} = \infty,$$

siis tingimus $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(-x)}\right) = 0$ ei ole täidetud. Järelikult funktsioon $\frac{1}{g}$ ei ole sümmeetriliselt pidev kohal 0.

2.2 Liitfunktsiooni sümmeetriline pidevus

Olgu $f\colon D \to \mathbb{R}$ ja $\varphi\colon E \to \mathbb{R}$ sellised funktsioonid, et $f(x) \in E$ iga $x \in D$ korral. Sel juhul saame moodustada liitfunktsiooni

$$\varphi \circ f\colon D \to \mathbb{R}, \quad \varphi \circ f(x) := \varphi(f(x)).$$

Teatavasti on pidevate funktsioonide liitfunktsioonid pidevad.

Lause 2.8. *Kui funktsioon $f\colon D \to E$ on kohal $a \in \mathbb{R}$ sümmeetriliselt pidev ja $\varphi\colon E \to \mathbb{R}$ on ühtlaselt pidev, siis liitfunktsioon $\varphi \circ f\colon D \to \mathbb{R}$ on kohal a sümmeetriliselt pidev.*

Tõestus. Olgu funktsioon $f\colon D \to E$ kohal $a \in \mathbb{R}$ sümmeetriliselt pidev ja funktsioon $\varphi\colon E \to \mathbb{R}$ ühtlaselt pidev. Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline, meie eesmärk on näidata, et leidub $\delta > 0$ omadusega

$$[a \pm h \in D,\ |h| < \delta] \Rightarrow |\varphi \circ f(a+h) - \varphi \circ f(a-h)| < \varepsilon.$$

Kuna φ on hulgas E ühtlaselt pidev, siis leidub $\delta_0 > 0$, et

$$[u, u' \in E,\ |u - u'| < \delta_0] \Rightarrow |\varphi(u) - \varphi(u')| < \varepsilon. \tag{2.4}$$

Edasi, kuna f on punktis a sümmeetriliselt pidev, siis leidub $\delta > 0$, et

$$[a \pm h \in D,\ |h| < \delta] \Rightarrow |f(a+h) - f(a-h)| < \delta_0.$$

Seega, kui $|h| < \delta$ ja $a \pm h \in D$, siis võttes tingimuses (2.4) $u = f(a+h)$ ja $u' = f(a-h)$, saame et $|u - u'| < \delta_0$, mistõttu

$$|\varphi \circ f(a+h) - \varphi \circ f(a-h)| = |\varphi(f(a+h)) - \varphi(f(a-h))| = |\varphi(u) - \varphi(u')| < \varepsilon.$$

Järelikult $\varphi \circ f$ on sümmeetriliselt pidev kohal a. □

Näide 2.9. Veendume, et funktsioonide $f\colon D \to E$ ja $\varphi\colon E \to \mathbb{R}$ sümmeetriline pidevus ei garanteeri liitfunktsiooni $\varphi \circ f\colon D \to \mathbb{R}$ sümmeetrilist pidevust. Veelgi enam, lause 2.8 ei kehti, kui funktsiooni φ puhul ühtlase pidevuse tingimus asendada tavalise pidevusega.

Vaatleme funktsioone

$$f\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{kui } x > 0, \\ \frac{1}{x} - x, & \text{kui } x < 0, \end{cases}$$

ja

$$\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = x^2.$$

Teame, et funktsioon φ on pidev, kuid ei ole oma määramispiirkonnas $\mathbb{R}$ ühtlaselt pidev. Kuna

$$\lim_{x\to 0}(f(x) - f(-x)) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \left(\frac{1}{x} - x\right)\right) = \lim_{x\to 0} x = \lim_{x\to 0} 0 = 0,$$

siis funktsioon f on sümmeetriliselt pidev kohal 0. Seejuures

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0+}(\varphi \circ f(x) - \varphi \circ f(-x)) &= \lim_{x\to 0+}\left(\left(\frac{1}{x}\right)^2 - \left(\frac{1}{x} - x\right)^2\right) \\
&= \lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{x^2} - \left(\frac{1}{x^2} - 2 + x^2\right)\right) \\
&= \lim_{x\to 0+}(2 - x^2) \\
&= \lim_{x\to 0+}(2 - 0^2) = 2.
\end{aligned}$$

Seega tingimus $\lim_{x\to 0}(\varphi \circ f(x) - \varphi \circ f(-x)) = 0$ ei ole täidetud, st $\varphi \circ f$ ei ole sümmeetriliselt pidev kohal 0.

Järeldus 2.10. *Kui funktsioon $f\colon D \to \mathbb{R}$ on kohal $a \in \mathbb{R}$ sümmeetriliselt pidev, siis iga $\lambda \in \mathbb{R}$ korral on ka funktsioon*

$$\lambda f\colon D \to \mathbb{R}, \quad (\lambda f)(x) := \lambda f(x)$$

punktis a sümmeetriliselt pidev.

Tõestus. Olgu funktsioon $f\colon D \to \mathbb{R}$ kohal $a \in \mathbb{R}$ sümmeetriliselt pidev ja $\lambda \in \mathbb{R}$. Paneme tähele, et funktsioon

$$\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) := \lambda x$$

on ühtlaselt pidev hulgas $\mathbb{R}$. Kui $\lambda = 0$, siis φ on konstantne funktsioon, mis ilmselt on ühtlaselt pidev. Ülejäänud juhtudel võtame suvalise $\varepsilon > 0$ korral $\delta := \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$, siis kõikide $x, x' \in \mathbb{R}$ korral, mis rahuldavad tingimust $|x - x'| < \delta$, saame, et

$$|\varphi(x) - \varphi(x')| = |\lambda x - \lambda x'| = |\lambda(x - x')| = |\lambda||x - x'| < |\lambda|\delta = |\lambda|\frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon.$$

Kuna funktsioon f on sümmeetriliselt pidev kohal a ja funktsioon φ on ühtlaselt pidev, siis lause 2.8 kohaselt on liitfunktsioon $\varphi \circ f = \lambda f$ sümmeetriliselt pidev kohal a. □

Järeldus 2.11. *Kui funktsioon $f\colon D \to \mathbb{R}$ on kohal $a \in \mathbb{R}$ sümmeetriliselt pidev, siis ka funktsioon*

$$|f|\colon D \to \mathbb{R}, \quad |f|(x) := |f(x)|$$

on punktis a sümmeetriliselt pidev.

Tõestus. Olgu funktsioon $f\colon D \to \mathbb{R}$ kohal $a \in \mathbb{R}$ sümmeetriliselt pidev. Paneme tähele, et funktsioon

$$\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) := |x|$$

on ühtlaselt pidev hulgas $\mathbb{R}$. Et selles veenduda, võtame iga $\varepsilon > 0$ korral $\delta := \varepsilon$, siis juhul $|x - x'| < \delta$, kus $x, x' \in \mathbb{R}$, saame, et

$$|\varphi(x) - \varphi(x')| = ||x| - |x'|| \le |x - x'| < \delta = \varepsilon.$$

Kuna funktsioon f on sümmeetriliselt pidev kohal a ja funktsioon φ on ühtlaselt pidev, siis lause 2.8 kohaselt on liitfunktsioon $\varphi \circ f = |f|$ sümmeetriliselt pidev kohal a. □

Järeldus 2.12. *Kui funktsioonid* $f\colon D \to \mathbb{R}$ *ja* $g\colon D \to \mathbb{R}$ *on kohal* $a \in \mathbb{R}$ *sümmeetriliselt pidevad, siis ka funktsioonid*

$$\max\{f,g\}\colon D \to \mathbb{R}, \quad \max\{f,g\}(x) := \max\{f(x), g(x)\}$$

ja

$$\min\{f,g\}\colon D \to \mathbb{R}, \quad \min\{f,g\}(x) := \min\{f(x), g(x)\}$$

on punktis a *sümmeetriliselt pidevad.*

Tõestus. Paneme tähele, et iga $c, d \in \mathbb{R}$ korral

$$\max\{c,d\} = \frac{c+d}{2} + \frac{|c-d|}{2} \tag{2.5}$$

ja

$$\min\{c,d\} = \frac{c+d}{2} - \frac{|c-d|}{2}. \tag{2.6}$$

Olgu funktsioonid $f\colon D \to \mathbb{R}$ ja $g\colon D \to \mathbb{R}$ kohal $a \in \mathbb{R}$ sümmeetriliselt pidevad, siis lause 2.1 ja järelduse 2.10 kohaselt on funktsioonid $f+g$ ja $f-g = f+(-1)g$ sümmeetriliselt pidevad kohal a. Järelduse 2.11 põhjal on $|f-g|$ sümmeetriliselt pidev kohal a. Võttes tingimustes (2.5) ja (2.6) $c = f(x)$ ja $d = g(x)$, saame, et

$$\begin{aligned}\max\{f,g\}(x) = \max\{f(x), g(x)\} &= \frac{f(x)+g(x)}{2} + \frac{|f(x)-g(x)|}{2} \\ &= \frac{f+g}{2}(x) + \frac{|f-g|}{2}(x) \quad (x \in D),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\min\{f,g\}(x) = \min\{f(x), g(x)\} &= \frac{f(x)+g(x)}{2} - \frac{|f(x)-g(x)|}{2} \\ &= \frac{f+g}{2}(x) - \frac{|f-g|}{2}(x) \quad (x \in D).\end{aligned}$$

Seega $\max\{f,g\}$ ja $\min\{f,g\}$ on lause 2.1 ja järelduse 2.10 kohaselt sümmeetriliselt pidevad kohal a. □

Peatükk 3

Operatsioonid nõrgalt pidevate funktsioonidega

Käesolevas peatükis uurime aritmeetilisi tehteid nõrgalt pidevate funktsioonidega ja selliste funktsioonide liitfunktsioone. Seejuures rakendame koonduvate jadade tehetega seotud omadusi. Olgu $a, b \in \mathbb{R}$. Kui $x_n \to a$ ja $y_n \to b$, siis

(a) $x_n \pm y_n \to a \pm b$,

(b) $x_n y_n \to ab$,

(c) $\lambda x_n \to \lambda a$,

(d) $\frac{1}{y_n} \to \frac{1}{b}$ (eeldusel, et $b \neq 0$),

(e) $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{a}{b}$ (eeldusel, et $b \neq 0$).

3.1 Aritmeetilised tehted nõrgalt pidevate funktsioonidega

Järgmisest näitest selgub, et nõrgalt pidevate funktsioonide summa, vahe, korrutis, jagatis, maksimum ja miinimum ei ole üldjuhul nõrgalt pidevad.

Näide 3.1. Defineerime funktsioonid

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} 1, & \text{kui } x \in \mathbb{Q}, \\ -2, & \text{kui } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \end{cases}$$

ja

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) := \begin{cases} 3, & \text{kui } x \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}, \\ -1, & \text{kui } x \in (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \cup \{0\}, \end{cases}$$

mis on lause 1.10 (c) ja märkuse 1.11 kohaselt nõrgalt pidevad hulgas $\mathbb{R}$. Siis

$$(f+g)(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x = 0, \\ 4, & \text{kui } x \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}, \\ -3, & \text{kui } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \end{cases} \quad (f-g)(x) = \begin{cases} 2, & \text{kui } x = 0, \\ -2, & \text{kui } x \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}, \\ -1, & \text{kui } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \end{cases}$$

$$fg(x) = \begin{cases} -1, & \text{kui } x = 0, \\ 3, & \text{kui } x \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}, \\ 2, & \text{kui } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \end{cases} \quad \frac{f}{g}(x) = \begin{cases} -1, & \text{kui } x = 0, \\ \frac{1}{3}, & \text{kui } x \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}, \\ 2, & \text{kui } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \end{cases}$$

$$\max\{f,g\}(x) = \begin{cases} 1, & \text{kui } x = 0, \\ 3, & \text{kui } x \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}, \\ -1, & \text{kui } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \end{cases}$$

$$\min\{f,g\}(x) = \begin{cases} -1, & \text{kui } x = 0, \\ 1, & \text{kui } x \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}, \\ -2, & \text{kui } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}. \end{cases}$$

Kuna 0 on nii hulga $(-\infty, 0]$ kui ka hulga $[0,\infty)$ kuhjumispunkt, siis $\mathcal{L}_0(\mathbb{R}) \neq \varnothing$ ja $\mathcal{R}_0(\mathbb{R}) \neq \varnothing$. Kui $(x_n) \in \mathcal{L}_0(\mathbb{R})$ on selline, et $((f+g)(x_n))$ on koonduv jada, siis kas

$$\lim_n (f+g)(x_n) = 4 \neq 0 = (f+g)(0)$$

või

$$\lim_n (f+g)(x_n) = -3 \neq 0 = (f+g)(0),$$

seega $f+g$ ei ole nõrgalt pidev kohal 0. Analoogiliselt saab näidata, et ükski funktsioonidest $f-g$, fg, $\frac{f}{g}$, $\max\{f,g\}$ ja $\min\{f,g\}$ ei ole nõrgalt pidev kohal 0.

Lause 3.2. *Kui funktsioon $f\colon D \to \mathbb{R}$ on nõrgalt pidev ja $g\colon D \to \mathbb{R}$ on pidev kohal $a \in D$, siis ka funktsioonid*

$$f+g,\ f-g,\ fg,\ \frac{f}{g}\ (\textit{eeldusel } g(x) \neq 0\ (x \in D)),\ \max\{f,g\} \textit{ ja } \min\{f,g\}$$

on kohal a nõrgalt pidevad.

TÕESTUS. Eeldame, et $\mathcal{L}_a(D) \neq \varnothing$ ja $\mathcal{R}_a(D) \neq \varnothing$, ning olgu $(x_n) \in \mathcal{L}_a(D)$ ja $(y_n) \in \mathcal{R}_a(D)$ sellised, et $\lim_n f(x_n) = f(a) = \lim_n f(y_n)$. Kuna funktsioon

g on pidev, siis $\lim_n g(x_n) = g(a) = \lim_n g(y_n)$. Järelikult

$$\begin{aligned}
\lim_n (f+g)(x_n) &= \lim_n (f(x_n) + g(x_n)) = \lim_n f(x_n) + \lim_n g(x_n) \\
&= f(a) + g(a) = (f+g)(a), \\
\lim_n (f-g)(x_n) &= \lim_n (f(x_n) - g(x_n)) = \lim_n f(x_n) - \lim_n g(x_n) \\
&= f(a) - g(a) = (f-g)(a), \\
\lim_n fg(x_n) &= \lim_n f(x_n)g(x_n) = \lim_n f(x_n) \lim_n g(x_n) = f(a)g(a) \\
&= fg(a).
\end{aligned}$$

Võrduste (2.5) ja (2.6) kohaselt

$$\begin{aligned}
\lim_n \max\{f,g\}(x_n) &= \lim_n \max\{f(x_n), g(x_n)\} \\
&= \lim_n \left(\frac{f(x_n) + g(x_n)}{2} + \frac{|f(x_n) - g(x_n)|}{2} \right) \\
&= \lim_n \frac{f(x_n) + g(x_n)}{2} + \lim_n \frac{|f(x_n) - g(x_n)|}{2} \\
&= \frac{f(a) + g(a)}{2} + \frac{|f(a) - g(a)|}{2} \\
&= \max\{f(a), g(a)\} = \max\{f,g\}(a),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_n \min\{f,g\}(x_n) &= \lim_n \min\{f(x_n), g(x_n)\} \\
&= \lim_n \left(\frac{f(x_n) + g(x_n)}{2} - \frac{|f(x_n) - g(x_n)|}{2} \right) \\
&= \lim_n \frac{f(x_n) + g(x_n)}{2} - \lim_n \frac{|f(x_n) - g(x_n)|}{2} \\
&= \frac{f(a) + g(a)}{2} - \frac{|f(a) - g(a)|}{2} \\
&= \min\{f(a), g(a)\} = \min\{f,g\}(a).
\end{aligned}$$

Kui funktsioon g on pidev kohal a ja $g(x) \neq 0$ iga $x \in D$ korral, siis funktsioon $\frac{1}{g}$ on samuti pidev punktis a, mistõttu

$$\begin{aligned}
\lim_n \frac{f}{g}(x_n) &= \lim_n \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_n f(x_n)\frac{1}{g(x_n)} = \lim_n f(x_n) \lim_n \frac{1}{g(x_n)} = f(a)\frac{1}{g(a)} \\
&= \frac{f}{g}(a).
\end{aligned}$$

Võttes $(y_n) \in \mathcal{R}_a(D)$, saame analoogiliselt, et

$$\lim_n (f+g)(y_n) = (f+g)(a),$$

$$\lim_n (f-g)(y_n) = (f-g)(a),$$

$$\lim_n fg(y_n) = fg(a),$$

$$\lim_n \max\{f,g\}(y_n) = \max\{f,g\}(a),$$

$$\lim_n \min\{f,g\}(y_n) = \min\{f,g\}(a),$$

$$\lim_n \frac{f}{g}(y_n) = \frac{f}{g}(a).$$

Seega funktsioonid $f+g$, $f-g$, fg, $\frac{f}{g}$, $\max\{f,g\}$ ja $\min\{f,g\}$ on nõrgalt pidevad kohal a. □

3.2 Liitfunktsiooni nõrk pidevus

Lause 3.3. *Kui funktsioon $f\colon D \to E$ on kohal $a \in D$ nõrgalt pidev ja funktsioon $\varphi\colon E \to \mathbb{R}$ on kohal $b := f(a)$ pidev, siis liitfunktsioon $\varphi \circ f\colon D \to \mathbb{R}$ on kohal a nõrgalt pidev.*

Tõestus. Eeldame, et $\mathcal{L}_a(D) \neq \varnothing$ ja $\mathcal{R}_a(D) \neq \varnothing$, ning olgu $(x_n) \in \mathcal{L}_a(D)$ ja $(y_n) \in \mathcal{R}_a(D)$ sellised, et $\lim_n f(x_n) = f(a) = \lim_n f(y_n)$. Kuna funktsioon φ on pidev kohal $b := f(a)$, siis $\lim_n \varphi(f(x_n)) = \varphi(b) = \varphi(f(a)) = \lim_n \varphi(f(y_n))$. Järelikult

$$\lim_n \varphi \circ f(x_n) = \lim_n \varphi(f(x_n)) = \varphi(b) = \varphi(f(a)) = \varphi \circ f(a)$$

ja

$$\lim_n \varphi \circ f(y_n) = \lim_n \varphi(f(y_n)) = \varphi(b) = \varphi(f(a)) = \varphi \circ f(a)$$

ehk $\varphi \circ f$ on nõrgalt pidev kohal a. □

Näide 3.4. Veendume, et lauses 3.3 ei saa funktsiooni φ pidevuse eeldust asendada nõrga pidevuse tingimusega. Defineerime funktsioonid

$$f\colon (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \cup \{0\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} x, & \text{kui } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \\ 0, & \text{kui } x = 0, \end{cases}$$

ja

$$\varphi\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad \varphi(x) := \begin{cases} x, & \text{kui } x\in\mathbb{Q},\\ -\frac{1}{2}, & \text{kui } x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q},\end{cases}$$

ning veendume, et f ja φ on nõrgalt pidevad kohal $0 = f(0)$. Paneme tähele, et

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{n}\right)\in\mathcal{L}_0(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}),\ \left(\frac{\sqrt{2}}{n}\right)\in\mathcal{R}_0(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$$

ja

$$\left(-\frac{1}{n}\right)\in\mathcal{L}_0(\mathbb{Q}),\ \left(\frac{1}{n}\right)\in\mathcal{R}_0(\mathbb{Q}),$$

seejuures,

$$\lim_n f\left(-\frac{\sqrt{2}}{n}\right) = \lim_n\left(-\frac{\sqrt{2}}{n}\right) = -\sqrt{2}\lim_n\frac{1}{n} = 0 = f(0),$$

$$\lim_n f\left(\frac{\sqrt{2}}{n}\right) = \lim_n\frac{\sqrt{2}}{n} = \sqrt{2}\lim_n\frac{1}{n} = 0 = f(0)$$

ja

$$\lim_n \varphi\left(-\frac{1}{n}\right) = \lim_n\left(-\frac{1}{n}\right) = -\lim_n\frac{1}{n} = 0 = \varphi(0),$$

$$\lim_n \varphi\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_n\frac{1}{n} = 0 = \varphi(0).$$

Seega funktsioonid f ja φ on nõrgalt pidevad kohal $0 = f(0)$. Nüüd moodustame liitfunktsiooni

$$\varphi\circ f\colon (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})\cup\{0\}\to\mathbb{R},\quad \varphi\circ f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x=0,\\ -\frac{1}{2}, & \text{kui } x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}.\end{cases}$$

Teatavasti $\mathcal{L}_0(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})\neq 0$ ja $\mathcal{R}_0(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})\neq 0$, seejuures suvaliste $(x_n)\in\mathcal{L}_0(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ ja $(y_n)\in\mathcal{R}_0(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ korral

$$\lim_n\varphi\circ f(x_n) = -\frac{1}{2}\neq 0 = \varphi(f(0)) = \varphi\circ f(0)$$

ja

$$\lim_n\varphi\circ f(y_n) = -\frac{1}{2}\neq 0 = \varphi(f(0))) = \varphi\circ f(0).$$

Järelikult liitfunktsioon $\varphi\circ f$ ei ole nõrgalt pidev kohal 0.

Järeldus 3.5. *Kui funktsioon $f\colon D \to E$ on kohal $a \in D$ nõrgalt pidev, siis on sellel kohal nõrgalt pidevad ka järgmised funktsioonid:*

$$\lambda f\ (\lambda \in \mathbb{R}),\ |f|,\ f^2,\ \frac{1}{f}\ \textit{ja}\ \sqrt{f} \tag{3.1}$$

(funktsioonide $\frac{1}{f}$ ning $\sqrt{f}$ puhul eeldame vastavalt, et $f(x) \neq 0$ ja $f(x) \geq 0$ iga $x \in D$ korral).

Tõestus. Eeldame, et $\mathcal{L}_a(D) \neq \varnothing$ ja $\mathcal{R}_a(D) \neq \varnothing$, ning olgu $(x_n) \in \mathcal{L}_a(D)$ ja $(y_n) \in \mathcal{R}_a(D)$ sellised, et $\lim_n f(x_n) = f(a) = \lim_n f(y_n)$. Paneme tähele, et kui φ on üks funktsioonidest (3.1), siis ta on pidev oma määramispiirkonna igas punktis, seega ka punktis $f(a)$. Lause 3.3 kohaselt on funktsioonid λf, $|f|$, f^2, $\frac{1}{f}$ ja $\sqrt{f}$ nõrgalt pidevad kohal a. $\square$

Peatükk 4

Sümmeetriline ja nõrk pidevus ning ühepoolsed piirväärtused

Selles peatükis eeldame kõikjal, et $a \in \mathbb{R}$ on mõlema hulga $(-\infty, a] \cap D$ ning $[a, \infty) \cap D$ kuhjumispunkt, st

$$\forall \delta > 0 : (a - \delta, a) \cap D \neq \varnothing \text{ ja } (a, a + \delta) \cap D \neq \varnothing. \tag{4.1}$$

Meid huvitavad funktsiooni $f\colon D \to \mathbb{R}$ sümmeetrilise ja nõrga pidevuse seosed ühepoolsete piirväärtustega

$$f(a-) := \lim_{x \to a-} f(x) = \lim_{h \to 0+} f(a - h) = \lim_{h \to 0-} f(a + h)$$

ja

$$f(a+) := \lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{h \to 0+} f(a + h) = \lim_{h \to 0-} f(a - h).$$

Lause 4.1. *Kui funktsioon $f\colon D \to \mathbb{R}$ on sümmeetriliselt pidev kohal $a \in \mathbb{R}$, siis on kaks võimalust:*

1) *eksisteerivad mõlemad (lõplikud või lõpmatud) ühepoolsed piirväärtused $f(a-)$ ja $f(a+)$ ning need on võrdsed, või*

2) *ei eksisteeri kumbagi ühepoolset piirväärtust.*

Tõestus. Eeldame, et funktsioon $f\colon D \to \mathbb{R}$ sümmeetriliselt pidev kohal $a \in \mathbb{R}$, st

$$\lim_{h \to 0}(f(a + h) - f(a - h)) = 0,$$

ja eksisteerib vasakpoolne piirväärtus $f(a-)$. Peame näitama, et eksisteerib parempoolne piirväärtus $f(a+)$ ja $f(a+) = f(a-)$. Tõepoolest, sümmeetrilise pidevuse tõttu

$$\begin{aligned} f(a+) &= \lim_{h\to 0+} f(a+h) = \lim_{h\to 0+}((f(a+h)-f(a-h))+f(a-h)) \\ &= \lim_{h\to 0+}(f(a+h)-f(a-h)) + \lim_{h\to 0+} f(a-h) \\ &= 0 + \lim_{h\to 0+} f(a-h) \\ &= f(a-). \end{aligned}$$

$\square$

Lause 4.2. *Olgu $a \in \mathbb{R}$ ja $D \subset \mathbb{R}$ selline mittetühi hulk, et*

$$\forall \delta > 0 \; \exists h = h(\delta) > 0 : \; a \pm h \in U_\delta(a).$$

Eeldame, et funktsioonil $f\colon D \to \mathbb{R}$ on kohal a lõplikud ühepoolsed piirväärtused $f(a-)$ ja $f(a+)$. Funktsioon f on kohal a sümmetriliselt pidev parajasti siis, kui $f(a-) = f(a+)$, st kui funktsioon f on kohal a pidev, või tal on sel kohal kõrvaldatav katkevus.

Tõestus. *Tarvilikkus.* Eeldame, et funktsioon $f\colon D \to \mathbb{R}$ on sümmetriliselt pidev kohal a ning eksisteerivad lõplikud ühepoolsed piirväärtused $f(a-)$ ja $f(a+)$, siis lause 4.1 kohaselt $f(a-) = f(a+)$.

Piisavus. Eeldame, et funktsioonil $f\colon D \to \mathbb{R}$ eksisteerivad kohal a lõplikud ühepoolsed piirväärtused $f(a-)$ ja $f(a+)$, mis on võrdsed, siis

$$\lim_{h\to 0+}(f(a+h)-f(a-h)) = \lim_{h\to 0+} f(a+h) - \lim_{h\to 0+} f(a-h) = f(a+)-f(a-) = 0$$

ja

$$\lim_{h\to 0-}(f(a+h)-f(a-h)) = \lim_{h\to 0-} f(a+h) - \lim_{h\to 0-} f(a-h) = f(a-)-f(a+) = 0.$$

Seega $\lim_{h\to 0}(f(a+h)-f(a-h)) = 0$ ehk funktsioon f on sümmeetriliselt pidev kohal a. $\square$

Tulles nüüd nõrga pidevuse seoste juurde ühepoolsete piirväärtustega, märgime kõigepealt, et vastavalt eeldusele (4.1)

$$\mathcal{L}_a(D) \neq \varnothing \text{ ja } \mathcal{R}_a(D) \neq \varnothing.$$

Järgmisest näitest selgub, et funktsiooni nõrk pidevus punktis $a \in D$ ei garanteeri ühepoolsete piirväärtuste olemasolu selles punktis.

Näide 4.3. Veendume, et funktsioon

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} x, & \text{kui } x \in S := \{\pm\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}, \\ 2, & \text{kui } x \in \mathbb{R}\backslash S, \end{cases}$$

on nõrgalt pidev kohal 0, kuid $f(0+)$ ja $f(0-)$ ei eksisteeri.

Paneme tähele, et

$$\left(-\frac{1}{n}\right) \in \mathcal{L}_0(\mathbb{R})$$

ja

$$\left(\frac{1}{n}\right) \in \mathcal{R}_0(\mathbb{R}),$$

seejuures,

$$\lim_n f\left(-\frac{1}{n}\right) = \lim_n \left(-\frac{1}{n}\right) = -\lim_n \frac{1}{n} = 0 = f(0)$$

ja

$$\lim_n f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_n \frac{1}{n} = 0 = f(0).$$

Järelikult funktsioon f on nõrgalt pidev kohal 0. Samal ajal suvaliste $(x_n) \in \mathcal{L}_0(\mathbb{R}\backslash S)$ ja $(y_n) \in \mathcal{R}_0(\mathbb{R}\backslash S)$ korral saame, et $\lim f(x_n) = 2 = \lim f(y_n)$. Seega ühepoolseid piirväärtusi $f(0+)$ ja $f(0-)$ ei eksisteeri.

Lause 4.4. *Olgu funktsioonil $f\colon D \to \mathbb{R}$ kohal $a \in D$ lõplikud ühepoolsed piirväärtused $f(a-)$ ja $f(a+)$. Funktsioon f on kohal a nõrgalt pidev parajasti siis, kui ta on selles punktis pidev.*

TÕESTUS. *Tarvilikkus.* Olgu funktsioonil $f\colon D \to \mathbb{R}$ kohal a lõplikud ühepoolsed piirväärtused $f(a+)$ ja $f(a-)$ ning olgu $(x_n) \in \mathcal{L}_a(D)$ ja $(y_n) \in \mathcal{R}_a(D)$ sellised, et $\lim_n f(x_n) = f(a) = \lim_n f(y_n)$. Siis

$$f(a-) = \lim_{x \to a-} f(x) = \lim_n f(x_n) = f(a)$$

ja

$$f(a+) = \lim_{x \to a+} f(x) = \lim_n f(y_n) = f(a),$$

mistõttu saame, et $f(a-) = f(a+) = f(a)$. Järelikult $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ ehk funktsioon f on pidev kohal a.

Piisavus järeldub otseselt lausest 1.5. □

Kui eeldada, et $a \in D$ on hulga D ühepoolne kuhjumispunkt, saame analoogiliselt lausega 4.4 nõrga pidevuse seosed vastava ühepoolse piirväärtusega. Vaatleme juhtu, kus a on hulga D vähim element, siis $(a, a+\delta) \cap D \neq \varnothing$, kuid $(a-\delta, a) \cap D = \varnothing$ iga $\delta > 0$ korral, mistõttu $\mathcal{R}_a(D) \neq \varnothing$, kuid $\mathcal{L}_a(D) = \varnothing$. Kui f on kohal a nõrgalt pidev, siis leidub selline $(y_n) \in \mathcal{R}_a(D)$, et $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = f(a)$ ja $f(a+)$, kui see eksisteerib, langeb kokku funktsiooni väärtusega $f(a)$:

$$f(a+) = \lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{n\to\infty} (y_n) = f(a).$$

Seega

1) $f(a+)$ ei saa olla lõpmatu ja

2) kui $f(a+)$ eksisteerib, siis f on kohal a pidev, st funktsiooni f (parempoolne) pidevus ja nõrk pidevus on ka sel juhul samaväärsed tingimused.

Peatükk 5

Dirichlet' tüüpi funktsioonid ja Thomae funktsioon, nende sümmeetriline ja nõrk pidevus

Käesolevas peatükis käsitleme nn Dirichlet' tüüpi funktsioonide ja Thomae funktsiooni sümmeetrilist ja nõrka pidevust.

5.1 Dirichlet' tüüpi funktsioonide sümmeetriline ja nõrk pidevus

Esimeses peatükis toodud lause 1.7 kohaselt on seosega

$$f(x) \colon = \begin{cases} \alpha, & \text{kui } x \in \mathbb{Q}, \\ \beta, & \text{kui } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases} (\alpha \neq \beta),$$

määratud Dirichlet' funktsioon, mis on katkev igas punktis $a \in \mathbb{R}$, sümmeetriliselt pidev punktides $a \in \mathbb{Q}$. Seevastu punktides $a \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ ei ole see funktsioon sümmeetriliselt pidev, küll on ta aga igas punktis $a \in \mathbb{R}$ nõrgalt pidev.

Olgu $D \cap \mathbb{Q} \neq \varnothing$ ja $D \cap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) \neq \varnothing$, olgu antud funktsioonid $f_1 \colon D \to \mathbb{R}$ ja $f_2 \colon D \to \mathbb{R}$ ning olgu $f : D \to \mathbb{R}$ määratud seostega

$$f(x) \colon = \begin{cases} f_1(x), & \text{kui } x \in D \cap \mathbb{Q}, \\ f_2(x), & \text{kui } x \in D \cap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}). \end{cases} \tag{5.1}$$

Nii määratud funktsiooni f nimetame Dirichlet' tüüpi funktsiooniks. Erijuhul, kui $f_1(x) = \alpha$ ja $f_2(x) = \beta$ $(x \in D)$, saame Dirichlet' funktsiooni ahendi hulgas D.

Lause 5.1. *Olgu $a \in D$. Kui $f_1(a) = f_2(a)$ ja mõlemad funktsioonid f_1 ning f_2 on pidevad kohal a, siis ka funktsioon f on pidev kohal a.*

Tõestus. Eeldame, et $f_1(a) = f_2(a)$ ja mõlemad funktsioonid f_1 ning f_2 on pidevad kohal a. Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline. Peame näitama, et

$$\exists \delta > 0 : [x \in D,\ |x - a| < \delta] \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \tag{5.2}$$

Kuna funktsioonid f_1 ja f_2 on pidevad kohal a, siis

$$\exists \delta_1 > 0 : [x \in D,\ |x - a| < \delta_1] \Rightarrow |f_1(x) - f_1(a)| < \varepsilon$$

ja

$$\exists \delta_2 > 0 : [x \in D,\ |x - a| < \delta_2] \Rightarrow |f_2(x) - f_2(a)| < \varepsilon.$$

Võtame $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$, olgu $|x - a| < \delta$, kus $x \in D$. Siis tänu eeldusele $f_1(a) = f_2(a) = f(a)$ saame, et

$$\begin{aligned}|f(x) - f(a)| &\le \max\{|f_1(x) - f(a)|, |f_2(x) - f(a)|\}\\ &= \max\{|f_1(x) - f_1(a)|, |f_2(x) - f_2(a)|\}\\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

Seega tingimus (5.2) on täidetud. □

Lause 5.2. *Olgu $a \in D \cap \mathbb{Q}$. Kui funktsioonid f_1 ning f_2 on sümmeetriliselt pidevad kohal a, siis ka funktsioon f on kohal a sümmeetriliselt pidev.*

Tõestus. Kuna $a \in \mathbb{Q}$, siis võrduse

$$a - h = 2a - (a + h) \tag{5.3}$$

tõttu $a + h \in \mathbb{Q}$ parajasti siis, kui $a - h \in \mathbb{Q}$. Seega, kui $a \pm h \in D$, saame, et

$$f(a+h) - f(a-h) = \begin{cases} f_1(a+h) - f_1(a-h), & \text{kui } h \in \mathbb{Q},\\ f_2(a+h) - f_2(a-h), & \text{kui } h \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}.\end{cases} \tag{5.4}$$

Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline. Peame näitama, et

$$\exists \delta > 0 : [a \pm h \in D,\ |h| < \delta] \Rightarrow |f(a+h) - f(a-h)| < \varepsilon.$$

Kuna funktsioonid f_1 ja f_2 on sümmeetriliselt pidevad kohal a, siis

$$\exists \delta_1 > 0 : [a \pm h \in D,\ |h| < \delta_1] \Rightarrow |f_1(a+h) - f_1(a-h)| < \varepsilon$$

ja

$$\exists \delta_2 > 0 : [a \pm h \in D,\ |h| < \delta_2] \Rightarrow |f_2(a+h) - f_2(a-h)| < \varepsilon.$$

Võtame $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$, olgu $|h| < \delta$ ja $a \pm h \in D$. Siis tänu eeldusele (5.4) saame, et

$$\begin{aligned}|f(a+h) - f(a-h)| &\leq \max\{|f_1(a+h) - f_1(a-h)|, |f_2(a+h) - f_2(a-h)|\} \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

Järelikult funktsioon f on sümmeetriliselt pidev kohal a. □

Lause 5.3. *Olgu $a \in D^\circ \cap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ ja funktsioonid f_1 ning f_2 pidevad kohal a. Järgmised väited on samaväärsed:*

(a) $f_1(a) = f_2(a)$,

(b) *funktsioon f on kohal a pidev,*

(c) *funktsioon f on kohal a sümmeetriliselt pidev.*

Tõestus. Implikatsioon (a) $\Rightarrow$ (b) järeldub otseselt lausest 5.1, (b) $\Rightarrow$ (c) järeldub lausest 1.1.

(c) $\Rightarrow$ (a) Olgu $a \in D^\circ$, siis leidub selline $\delta_0 > 0$, et $(a - \delta_0, a + \delta_0) \subset D$. Kuna funktsioonid f_1 ja f_2 on pidevad kohal a, siis

$$\exists \delta_1 > 0 : [a \pm h \in D,\ 0 < |h| < \delta_1] \Rightarrow |f_1(a \pm h) - f_1(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

ja

$$\exists \delta_2 > 0 : [a \pm h \in D,\ 0 < |h| < \delta_2] \Rightarrow |f_2(a \pm h) - f_2(a)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Eelduse (c) kohaselt leidub selline positiivne $\delta < \min\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}$, et

$$[a \pm h \in D,\ |h| < \delta] \Rightarrow |f(a+h) - f(a-h)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Kuna $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, siis võrduse (5.3) põhjal $a + h \in \mathbb{Q}$ parajasti siis, kui $a - h \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, ja vastupidi, $a + h \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, kui $a - h \in \mathbb{Q}$. Seega, kui $a \pm h \in D$ ja $|h| < \delta$, siis juhul $a + h \in \mathbb{Q}$ saame võrduse

$$|f_1(a+h) - f_2(a-h)| = |f(a+h) - f(a-h)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

mistõttu

$$\begin{aligned}|f_1(a) - f_2(a)| &= |f_1(a) - f_1(a+h) + f_1(a+h) - f_2(a-h) \\ &\quad + f_2(a-h) - f_2(a)| \\ &\leq |f_1(a) - f_1(a+h)| + |f_1(a+h) - f_2(a-h)| \\ &\quad + |f_2(a-h) - f_2(a)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Kui aga $a+h \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, siis

$$|f_2(a+h) - f_1(a-h)| = |f(a+h) - f(a-h)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

ning seetõttu kokkuvõttes

$$\begin{aligned}|f_1(a) - f_2(a)| &= |f_1(a) - f_1(a-h) + f_1(a-h) - f_2(a+h) \\ &\quad + f_2(a+h) - f_2(a)| \\ &\leq |f_1(a) - f_1(a-h)| + |f_1(a-h) - f_2(a+h)| \\ &\quad + |f_2(a+h) - f_2(a)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Seega $f_1(a) = f_2(a)$. □

Tuleme seosega (5.1) määratud funktsiooni nõrga pidevuse uurimise juurde. Alustame näitega, mille kohaselt funktsioonide f_1 ning f_2 pidevus ei garanteeri üldjuhul funktsiooni f nõrka pidevust.

Näide 5.4. Defineerime funktsioonid

$$f_1, f_2 \colon (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \cup \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad \begin{aligned} f_1(x) &:= \sin x, \\ f_2(x) &:= \frac{x}{2}, \end{aligned}$$

mis ilmselt on oma määramispiirkonnas pidevad. Veendume, et funktsioon

$$f \colon (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \cup \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} \sin x, & \text{kui } x \in \mathbb{N}, \\ \frac{x}{2}, & \text{kui } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \end{cases}$$

ei ole nõrgalt pidev üheski punktis $a \in \mathbb{N}$. Teatavasti $\mathcal{L}_a(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \neq \varnothing$ ja $\mathcal{R}_a(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \neq \varnothing$, seejuures suvaliste $(x_n) \in \mathcal{L}_a(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ ja $(y_n) \in \mathcal{R}_a(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ korral saame, et

$$\lim_n f(x_n) = \lim_n \frac{x_n}{2} = \frac{a}{2} \neq \sin a = f(a)$$

ja

$$\lim_n f(y_n) = \lim_n \frac{y_n}{2} = \frac{a}{2} \neq \sin a = f(a).$$

Järelikult funktsioon f ei ole nõrgalt pidev punktis $a \in \mathbb{N}$.

Lause 5.5. *Olgu $D \subset \mathbb{R}$* ***intervall****. Kui funktsioonid $f_1 \colon D \to \mathbb{R}$ ja $f_2 \colon D \to \mathbb{R}$ on pidevad, siis f on nõrgalt pidev intervallis D.*

Tõestus. Olgu $a \in D$, vaatleme kuut võimalikku situatsiooni.

1. Kui $a \in D^\circ \cap \mathbb{Q}$, siis $\mathcal{L}_a(D \cap \mathbb{Q}) \neq \varnothing$ ja $\mathcal{R}_a(D \cap \mathbb{Q}) \neq \varnothing$ ning suvaliste $(x_n) \in \mathcal{L}_a(D \cap \mathbb{Q})$ ja $(y_n) \in \mathcal{R}_a(D \cap \mathbb{Q})$ korral saame tänu funktsiooni f_1 pidevusele, et

$$\lim_n f(x_n) = \lim_n f_1(x_n) = f_1(a) = f(a),$$

$$\lim_n f(y_n) = \lim_n f_1(y_n) = f_1(a) = f(a).$$

Seega f on nõrgalt pidev kohal a.

2. Kui $a \in D^\circ \cap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$, siis $\mathcal{L}_a(D \cap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})) \neq \varnothing$ ja $\mathcal{R}_a(D \cap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})) \neq \varnothing$ ning suvaliste $(x_n) \in \mathcal{L}_a(D \cap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}))$ ja $(y_n) \in \mathcal{R}_a(D \cap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}))$ korral saame tänu funktsiooni f_2 pidevusele, et

$$\lim_n f(x_n) = \lim_n f_2(x_n) = f_2(a) = f(a),$$

$$\lim_n f(y_n) = \lim_n f_2(y_n) = f_2(a) = f(a).$$

Järelikult f on nõrgalt pidev kohal a.

3. Kui $a = \inf D \in \mathbb{Q}$, siis $\mathcal{L}_a(D) = \varnothing$ ja $\mathcal{R}_a(D \cap \mathbb{Q}) \neq \varnothing$ ning suvalise $(y_n) \in \mathcal{R}_a(D \cap \mathbb{Q})$ korral saame tänu funktsiooni f_1 pidevusele, et

$$\lim_n f(y_n) = \lim_n f_1(y_n) = f_1(a) = f(a).$$

Seega f on nõrgalt pidev kohal a.

4. Kui $a = \inf D \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, siis $\mathcal{L}_a(D) = \varnothing$ ja $\mathcal{R}_a(D \cap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})) \neq \varnothing$ ning suvalise $(y_n) \in \mathcal{R}_a(D \cap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}))$ korral saame tänu funktsiooni f_2 pidevusele, et

$$\lim_n f(y_n) = \lim_n f_2(y_n) = f_2(a) = f(a).$$

Järelikult f on nõrgalt pidev kohal a.

5. Kui $a = \sup D \in \mathbb{Q}$, siis $\mathcal{L}_a(D \cap \mathbb{Q}) \neq \varnothing$ ja $\mathcal{R}_a(D \cap \mathbb{Q}) = \varnothing$ ning suvalise $(x_n) \in \mathcal{L}_a(D \cap \mathbb{Q})$ korral saame tänu funktsiooni f_1 pidevusele, et

$$\lim_n f(x_n) = \lim_n f_1(x_n) = f_1(a) = f(a).$$

Seega f on nõrgalt pidev kohal a.

6. Kui $a = \sup D \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, siis $\mathcal{L}_a(D \cap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})) \neq \varnothing$ ja $\mathcal{R}_a(D) = \varnothing$ ning suvalise $(x_n) \in \mathcal{L}_a(D \cap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}))$ korral saame tänu funktsiooni f_2 pidevusele, et

$$\lim_n f(x_n) = \lim_n f_2(x_n) = f_2(a) = f(a).$$

Järelikult f on nõrgalt pidev kohal a. $\square$

5.2 Thomae funktsiooni pidevus, sümmeetriline ja nõrk pidevus

Definitsioon. Funktsiooni

$$f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{kui } x = \frac{m}{n},\ m,n \in \mathbb{N},\ (m,n) = 1, \\ 0, & \text{kui } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}. \end{cases}$$

nimetatakse *Thomae funktsiooniks* intervallis $(0,\infty)$.

Thomae funktsiooni pidevuse uurimisel rakendame järgmist lemmat.

Lemma 5.6. *Olgu $a \in (0,\infty)$ ja $n_0 \in \mathbb{N}$ fikseeritud. Vahemikus $(a-1, a+1)$ leidub lõplik arv ratsionaalarve kujul $\frac{m}{n}$, kus $(m,n) = 1$ ja $n \leq n_0$.*

Tõestus. Tähistame

$$\mathcal{N}_{n_0} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m,n \in \mathbb{N},\ (m,n) = 1,\ n \leq n_0 \right\}$$

ning näitame, et $\mathcal{N}_{n_0}$ on lõplik hulk. Paneme tähele, et suvalise fikseeritud $n \leq n_0$ korral arvude $\frac{m+1}{n}$ ja $\frac{m}{n}$ vaheline kaugus on $\frac{m+1}{n} - \frac{m}{n} = \frac{1}{n}$. Seega vahemikus $(a-1, a+1)$ ei ole neid rohkem kui $\frac{(a+1)-(a-1)}{\frac{1}{n}} = 2n$. Järelikult hulga $\mathcal{N}_{n_0}$ liikmete arv ei saa olla suurem kui

$$2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + 2 \cdot n_0,$$

mis on lõplik arv. □

Lause 5.7. *Thomae funktsioon $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ on pidev igas punktis $a \in (0,\infty) \cap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ ja katkev igas punktis $a \in (0,\infty) \cap \mathbb{Q}$.*

Tõestus. Olgu $a \in (0,\infty) \cap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ ning olgu $\varepsilon > 0$, leiame $n_0 \in \mathbb{N}$, et $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Lemma 5.6 kohaselt saame leida sellise $\delta > 0$, et hulgas $U_\delta(a) = (a-\delta, a+\delta)$ ei leidu ühtegi hulga $\mathcal{N}_{n_0}$ elementi. Seega, kui $x \in U_\delta(a)$, siis kas $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, sel juhul $f(x) = 0$, või $x = \frac{m}{n}$, kus $(m,n) = 1$, $n > n_0$, sellisel juhul $f(x) = f(\frac{m}{n}) = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0}$. Kokkuvõttes saame, et kui $|x - a| < \delta$, siis

$$|f(x) - f(a)| = f(x) < \frac{1}{n_0} < \varepsilon,$$

seega $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, st f on pidev kohal a. Olgu $a \in (0,\infty) \cap \mathbb{Q}$. Kuna $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ on tihe korpuses $\mathbb{R}$, siis leidub selline jada (x_n), et $x_n \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral, ja $x_n \to a$. Siis

$$\lim_n f(x_n) = \lim_n 0 = 0 \neq f(a),$$

Heine kriteeriumi kohaselt ei ole see funktsioon punktis a pidev. □

Lause 5.8. *Thomae funktsioon* $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ *on sümmeetriliselt pidev igas punktis* $a \in (0,\infty)$.

Tõestus. Kui $a \in (0,\infty) \cap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$, siis lause 5.7 kohaselt funktsioon f on pidev kohal a, järelikult on f ka sümmeetriliselt pidev.

Olgu $a \in (0,\infty) \cap \mathbb{Q}$, siis võrduse

$$a - h = 2a - (a + h)$$

kohaselt $a - h \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ parajasti siis, kui $a + h \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, sel juhul

$$f(a + h) - f(a - h) = 0 - 0 = 0.$$

Näitame, et sama võrdus kehtib ka juhul, kui $a + h \in \mathbb{Q}$.

Olgu $a + h \in \mathbb{Q}$, kuna $a \in \mathbb{Q}$, siis $h \in \mathbb{Q}$. Olgu $a = \frac{m}{n}$, $h = \frac{p}{q}$, kus $(m, n) = (p, q) = 1$. Meie eesmärk on näidata, et murdudel

$$a + h = \frac{mq + np}{nq}, \quad a - h = \frac{mq - np}{nq} \tag{5.5}$$

on üks ja sama nimetaja pärast kõiki võimalikke taandamisi. Näitame, et kui $s \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ on arvude $mq + np$ ja nq ühine tegur, siis mõlemad arvud n ja q jaguvad arvuga s. Seega saab sel juhul arvuga s taandada ka murdu $\frac{mq-np}{nq}$.

Kui $n = n's$ mingi $n' \in \mathbb{N}$ korral, siis

$$\frac{mq + np}{nq} = \frac{mq + n'sp}{n'sq} = \frac{\frac{mq}{s} + n'p}{n'q}.$$

Kuna $(m, n) = 1$, siis q peab jaguma arvuga s. Vastupidi, kui $q = q's$ mingi $q' \in \mathbb{N}$ korral, siis

$$\frac{mq + np}{nq} = \frac{mq's + np}{nq's} = \frac{mq' + \frac{np}{s}}{nq'},$$

mistõttu tänu tingimusele $(p, q) = 1$ arv n jagub arvuga s. Seega, kui s on arvude $mq + np$ ja nq ühine tegur, siis on ta ka arvu $mq - np$ tegur. Analoogiline arutelu kinnitab, et kui $mq - np$ ja nq jaguvad arvuga s, siis $mq + np$ jagub arvuga s.

Järelikult on murdudel (5.5) pärast taandamist sama nimetaja, mistõttu

$$f(a + h) - f(a - h) = f\left(\frac{mq + np}{nq}\right) - f\left(\frac{mq - np}{nq}\right) = 0.$$

Kokkuvõttes, $f(a + h) - f(a - h) = 0$, kui $a + h, a - h \in (0,\infty)$, seega funktsioon f on punktis a sümmeetriliselt pidev. □

Lause 5.9. *Thomae funktsioon* $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ *on nõrgalt pidev igas punktis* $a \in (0,\infty) \cap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ *ja ei ole nõrgalt pidev üheski punktis* $a \in (0,\infty) \cap \mathbb{Q}$.

TÕESTUS. Kui $a \in (0,\infty) \cap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$, siis lause 5.7 kohaselt funktsioon f on pidev, järelikult on ta ka nõrgalt pidev.

Olgu $a \in (0,\infty) \cap \mathbb{Q}$. Teatavasti $\mathcal{L}_a((0,\infty)) \neq \varnothing$, näitame, et **iga** $(x_n) \in \mathcal{L}_a((0,\infty))$ korral

$$\lim_n f(x_n) = 0,$$

mis tähendab, et $\lim_n f(x_n) \neq f(a)$.

Olgu $\varepsilon > 0$, leiame niisuguse $n_0 \in \mathbb{N}$, et $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Lemma 5.6 kohaselt saame leida sellise $\delta > 0$, et $\mathcal{N}_{n_0} \cap U_\delta(a) = \varnothing$. Kuna $x_n \uparrow a$, siis leidub $N \in \mathbb{N}$, et $x_n \in U_\delta(a)$ iga $n \geq N$ korral. Järelikult iga $n \geq N$ korral

$$f(x_n) \begin{cases} < \frac{1}{n_0}, & \text{kui } x_n \in \mathbb{Q}, \\ = 0, & \text{kui } x_n \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}. \end{cases}$$

Seega saame, et

$$|f(x_n) - 0| = |f(x_n)| < \varepsilon \quad (n \geq \mathbb{N}),$$

mistõttu

$$\lim_n f(x_n) = 0 \neq f(a).$$

□

Symmetrically and weakly continuous functions

Bachelor's thesis

Summary

In this thesis, symmetric continuity and weak continuity are compared and their properties are investigated.

The aim of the first chapter is to give the definition of symmetric and weak continuity. We make sure that if a function is continuous, it is also symmetrically and weakly continuous. We also provide examples to show that symmetric and weak continuity do not imply each other. There exist functions which are symmetrically continuous but not weakly continuous and vice versa. One can also find discontinuous functions, which are symmetrically and weakly continuous. A remarkable example is the Dirichlet' function, which is discontinuous at any point of $\mathbb{R}$. It can be shown that Dirichlet's function is weakly continuous at every point in $\mathbb{R}$, symmetrically continuous at every point in $\mathbb{Q}$ but not symmetrically continuous at any point in $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

In the second chapter, we examine the arithmetic operations with symmetrically continuous functions. For instance, it turns out that product of symmetrically continuous functions is not symmetrically continuous in general. Likewise we show that symmetric continuity is not preserved by the composition of functions.

In the third chapter, we study the same problems for the weak continuity. We notice that sum, difference, product, quotient, maximum and minimum of weakly functions are not weakly continuous. The same applies to compositions of functions.

The fourth chapter describes relations between the concepts we studied and the existence of one-sided limits, and their equality. The fifth chapter deals with symmetric and weak continuity of the so-called Dirichlet's type

and Thomae functions.

This thesis is mainly based on [3]. The results of articles [1], [2] and [4] are also taken into account.

Kirjandus

[1] P. Pongsriiam, T. Khemaratchatakumthorn, I. Termwuttipong and N. Triphop, *Some remarks on symmetric continuity of functions.* Thai J. Math., special volume (2004), 31–36.

[2] P. Pongsriiam, T. Khemaratchatakumthorn, I. Termwuttipong and N. Triphop, *Symmetrically continuous functions.* East-West J. Math., special volume (2004), 89–100.

[3] P. Pongsriiam, T. Khemaratchatakumthorn, I. Termwuttipong and N. Triphop, *On weak continuity of functions.* Thai J. Math. **3** (2005), 7–16.

[4] M. Szyszkowski, *Points of weak symmetric continuity.* Real Anal. Exchange **24** (1998–1999), 807–814.

Litsents

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Kristina Šabunova (sünnikuupäev 10.07.1992),

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose "Sümmeetriliselt ja nõrgalt pidevad funktsioonid", mille juhendaja on Toivo Leiger,

   1.1. reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;

   1.2. üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.

2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus, 04.06.2014