Tartu Ülikool
Loodus- ja täppisteaduste valdkond
Matemaatika ja statistika instituut

Triin Taveter

Jadaruumide poolt defineeritud tuumaoperaatorid

Matemaatika eriala
Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendaja Aleksei Lissitsin

Tartu 2017

Jadaruumide poolt defineeritud tuumaoperaatorid

Bakalaureusetöö

Triin Taveter

Lühikokkuvõte. Bakalaureusetöös käsitletakse klassikalisi tuumaoperaatoreid ja (r, p, q)-tuumaoperaatoreid ning töös esitatakse üksikasjalikud tõestused, et need moodustavad vastavalt Banachi ja s-Banachi operaatorideaali. Need tõestused tuginevad A. Pietschi monograafiale *Operator Ideals*.

Töös esitatakse jadaruumide λ, μ, ν poolt defineeritud tuumaoperaatori mõiste ning tõestatakse, et (λ, μ, ν)-tuumaoperaatorid moodustavad kvaasi-Banachi operaatorideaali. See osa tööst on inspireeritud M. S. Ramanujani artiklist *Generalised nuclear maps in normed linear spaces*.

CERCS teaduseriala: P140 Read, Fourier analüüs, funktsionaalanalüüs.

Märksõnad: tuumaoperaator, jadaruumid, operaatorideaalid.

Nuclear operators defined by sequence spaces

Bachelor's thesis

Triin Taveter

Abstract. In this bachelor's thesis we consider classical nuclear operators and (r, p, q)-nuclear operators and provide detailed proofs that they form respectively Banach and s-Banach operator ideals. The proofs are based on the monograph *Operator Ideals* by A. Pietsch.

Next, we introduce nuclear operators defined by sequence spaces λ, μ, ν and prove that (λ, μ, ν)-nuclear operators form a quasi-Banach operator ideal. This part of the thesis is inspired by the article *Generalised nuclear maps in normed linear spaces* by M. S. Ramanujan.

CERCS research specialisation: P140 Series, Fourier analysis, functional analysis.

Key words: nuclear operator, sequence spaces, operator ideals.

Sisukord

Sissejuhatus

Käesoleva bakalaureusetöö uurimisvaldkond on funktsionaalanalüüs. Töös käsitletakse operaatorideaale, jadaruume ja erinevat tüüpi tuumaoperaatoreid. Põhiliste allikatena on kasutusel A. Pietschi monograafia operaatorideaalidest [11], A. Bhari ja M. Gupta artikkel λ-kompaktsetest operaatoritest [3] ning M. S. Ramanujani artikkel üldistatud tuumaoperaatoritest [13].

Tuumaoperaatorite teooriale pani aluse Grothendieck 1953. aastal, kui ta käsitles esmakordselt p-tuumaoperaatoreid ($0 < p \leq 1$). 1970-ndatel aastatel defineeris A. Pietsch (r, p, q)-tuumaoperaatorid ja arendas nende teooriat, kusjuures näitas, et need moodustavad kvaasi-Banachi operaatorideaali.

Aastal 2002 vaatlesid D. P. Sinha ja A. K. Karn p-kompaktseid operaatoreid ([16]). Sellele järgnesid uuringud p-kompaktsete operaatorite kohta paljudelt erinevatelt autoritelt. 2012. aastal ilmunud artiklis [2] näitasid K. Ain, R. Lillemets, E. Oja, et p-kompaktseid operaatoreid võib uurida juba olemasoleva tuumaoperaatorite teooria kontekstis, sest p-kompaktsete operaatorite klass on (kvaasi-Banachi operaatorideaalide mõttes) võrdne $(p, 1, p)$-tuumaoperaatorite sürjektiivse kattega, st $\mathcal{K}_p = \mathcal{N}^{\mathrm{sur}}_{(p,1,p)}$. Selle tegi ka A. Pietsch 2014. aastal artiklis [12].

M. S. Ramanujan defineeris 1970. aastal p-tuumaoperaatorite üldistusena jadaruumi $\lambda \subset \ell_\infty$ korral λ-tuumaoperaatorid ([13]). M. Gupta ja A. Bhar võtsid 2013. aastal kasutusele λ-kompaktse operaatori mõiste ([3]). 2017. aastal tõestasid A. Bhar ja A. K. Karn ([4]), et λ-kompaktsete operaatorite kaasoperaatoride ideaal $\mathcal{K}^d_\lambda = \{T : T^* \in \mathcal{K}_\lambda\}$ ühtib (kvaasi-Banachi operaatorideaalide mõttes) λ-tuumaoperaatorite injektiivse kattega, st $\mathcal{K}^d_\lambda = \mathcal{N}^{\mathrm{inj}}_\lambda$. Seega $\mathcal{K}^d_\lambda$ on kvaasi-Banachi operaatorideaal. Pole aga teada, kas $\mathcal{K}_\lambda$ ise on kvaasi-Banachi operaatorideaal.

Need tulemused annavad põhjust küsida, kas leiduvad jadaruumid λ, μ, ν nii, et sobivalt defineeritud (λ, μ, ν)-tuumaoperaatorite korral kehtiks võrdus $\mathcal{K}_\lambda = \mathcal{N}^{\mathrm{sur}}_{(\lambda,\mu,\nu)}$.

Selle bakalaureusetöö üks eesmärk on esitada üksikasjalik tõestus faktidele, et klassikalised tuumaoperaatorid ja (r, p, q)-tuumaoperaatorid moodustavad vastavalt Banachi ja s-Banachi operaatorideaali. Teiseks eesmärgiks on defineerida jadaruumide λ, μ, ν korral (λ, μ, ν)-tuumaoperaator ja tõestada, et (λ, μ, ν)-tuumaoperaatorite klass moodustab kvaasi-Banachi operaatorideaali.

Töö koosneb neljast peatükist. Esimeses peatükis defineeritakse vajalikud mõisted ja esitatakse tulemused, mis on seotud erinevat tüüpi operaatorideaalidega.

Teises peatükis käsitletakse tuumaoperaatoreid. Esimeses alajaotuses esitatakse tuumaoperaatori definitsioon. Teises alajaotuses tõestatakse, et tuumaoperaatorid moodustavad Banachi operaatorideaali.

Kolmandas peatükis käsitletakse (r, p, q)-tuumaoperaatoreid. Esimeses alajaotuses defineeritakse (r, p, q)-tuumaoperaator. Teises alajaotuses tõestatakse, et (r, p, q)-tuumaoperaatorid moodustavad s-Banachi operaatorideaali.

Töö viimases peatükis käsitletakse (λ, μ, ν)-tuumaoperaatoreid. Esimeses alajaotuses esitatakse mõned olulisemad jadaruumidega seotud mõisted ja tulemused. Teises alajaotuses defineeritakse (λ, μ, ν)-tuumaoperaator. Kolmandas alajaotuses tõestatakse, et (λ, μ, ν)-tuumaoperaatorite klass on operaatorideaal. Neljandas alajaotuses esitatakse mõned abitulemused, mida läheb vaja põhiteoreemi tõestamisel. Viimases alajaotuses tõestatakse bakalaureusetöö põhitulemus, mille põhjal (λ, μ, ν)-tuumaoperaatorid on kvaasi-Banachi operaatorideaal.

Töös kasutatakse järgmisi üldtuntud tähistusi. Sümbol $\mathbb{K}$ tähistab reaalarvude korpust $\mathbb{R}$ või kompleksarvude korpust $\mathbb{C}$. Sümbolid X, Y, X_0, Y_0 tähistavad Banachi ruume üle korpuse $\mathbb{K}$. Ruumi X kinnist ühikkera tähistatakse B_X ja ruumi X samasusteisendust tähistatakse I_X. Ruumi X kaasruumi tähistatakse $X^* := \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$. Ruumi X elementide jada tähistatakse $x = (x_i) = (x_i)_{i=1}^{\infty}$. Kui $1 \leq p < \infty$, siis kõigi astmega p summeeruvate korpuse $\mathbb{K}$ elementide jadade ruumi jaoks kasutatakse tähist ℓ_p. Kõigi tõkestatud jadade ruumi tähistatakse ℓ_∞ ja c_0 tähistab kõigi nulliks koonduvate jadade ruumi. Sümbol $\mathcal{L}$ tähistab kõigi vabalt valitud Banachi ruumide vaheliste tõkestatud lineaarsete operaatorite klassi. Kõigi mittenegatiivsete reaalarvude hulka tähistame $\mathbb{R}^+$, teisisõnu $\mathbb{R}^+ = [0; \infty)$.

1 Vajalikud eelteadmised

Selles peatükis esitatakse mõisted ja teadmised, mis on kasutustel bakalaureusetöö järgnevates peatükkides. Eeldame, et lugeja on tuttav funktsionaalanalüüsi põhikursuse mõistete ja tulemustega. Neid võib leida näiteks õpikust [10]. Topoloogiliste vektorruumidega seotud mõistetega saab tutvuda vastava loengukursuse [9] kaudu.

Definitsioon 1.1. Kui $1 < p < \infty$, siis arvu p *kaaseksponendiks* nimetatakse arvu p^*, mille korral $1/p + 1/p^* = 1$. Arvu $p = 1$ kaaseksponendiks loetakse $p^* = \infty$ ja $p = \infty$ kaaseksponendiks loetakse $p^* = 1$.

Definitsioon 1.2. Olgu X, Y Banachi ruumid ja olgu $x^* \in X^*, y \in Y$. Siis operaator $x^* \otimes y \in \mathcal{L}(X, Y)$ on defineeritud järgmiselt

$$(x^* \otimes y)(x) = x^*(x) \cdot y, \quad x \in X.$$

Definitsioon 1.3. ([10, lk 178]) Operaatori $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ *kaasoperaatoriks* $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ nimetatakse operaatorit, mis defineeritakse järgmiselt

$$(T^* y^*)(x) = y^*(Tx), \quad x \in X, y^* \in Y^*.$$

Definitsioon 1.4. ([11, lk 45]) *Operaatorideaaliks* nimetatakse klassi $\mathcal{L}$ alamklassi $\mathcal{A}$, mille korral komponendid $\mathcal{A}(X, Y) := \mathcal{A} \cap \mathcal{L}(X, Y)$ rahuldavad järgmisi tingimusi:

1. $I_{\mathbb{K}} \in \mathcal{A}$.
2. Kui $S_1, S_2 \in \mathcal{A}(X, Y)$, siis $S_1 + S_2 \in \mathcal{A}(X, Y)$.
3. Kui $T \in \mathcal{L}(X_0, X)$, $S \in \mathcal{A}(X, Y)$ ja $R \in \mathcal{L}(Y, Y_0)$, siis $RST \in \mathcal{A}(X_0, Y_0)$.

Definitsioon 1.5. ([8, lk 159]) Olgu V vektorruum üle korpuse $\mathbb{K}$. Kujutust $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}^+$ nimetatakse *kvaasinormiks* , kui

1. $\|v\| = 0 \Rightarrow v = 0$ iga $v \in V$ korral,
2. $\|kv\| = |k|\|v\|$ iga $k \in \mathbb{K}, v \in V$ korral,

3. Leidub konstant $\varkappa \geq 1$ nii, et $\|u+v\| \leq \varkappa(\|u\|+\|v\|)$ iga $u, v \in V$ korral.

Definitsioon 1.6. ([11, lk 89]) Olgu $\mathcal{A}$ operaatorideaal. Kujutust $A : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^+$ nimetatakse *kvaasinormiks (operaatorideaalil)*, kui kehtivad järgmised tingimused:

1. $A(I_{\mathbb{K}}) = 1$.
2. Leidub konstant $\varkappa \geq 1$ nii, et
$$A(S_1 + S_2) \leq \varkappa[A(S_1) + A(S_2)] \quad \forall S_1, S_2 \in \mathcal{A}(X, Y).$$
3. Kui $T \in \mathcal{L}(X_0, X), S \in \mathcal{A}(X, Y)$ ja $R \in \mathcal{L}(Y, Y_0)$, siis
$$A(RST) \leq \|R\| A(S) \|T\|.$$

Lause 1.7. *Olgu (Q, k) kvaasinormeeritud vektorruum. Siis (Q, k) on lineaarne topoloogiline Hausdorffi ruum (kvaasinormi k poolt genereeritud topoloogia suhtes).*

Tõestus. Kuna (Q, k) kvaasinormeeritud ruum, siis saame genereerida kvaasinormile vastava topoloogia, kui defineerime iga $s \in Q$ korral tema ümbruste baasi. Elemendi $0 \in Q$ ümbruste baasiks $\mathfrak{B}_0$ võtame hulgad

$$B_0^\varepsilon = \{r \in Q : k(r) < \varepsilon\},$$

kus $\varepsilon > 0$. Suvalise $s \in Q$ ümbruste baasiks $\mathfrak{B}_r$ võtame hulgad

$$B_s^\varepsilon := \{s + r \in Q : k(r) < \varepsilon\},$$

$\varepsilon > 0$. Veendume, et Q on Hausdorffi ruum. Olgu $s, t \in Q, s \neq t$. Näitame, et siis leiduvad $U_s \in \mathfrak{B}_s$ ja $U_t \in \mathfrak{B}_t$ nii, et $U_s \cap U_t = \emptyset$. Tähistame $d := k(s-t) > 0$ ja valime

$$U_s = \left\{s + r \in Q : k(r) < \frac{d}{2\varkappa}\right\},$$
$$U_t = \left\{t + r \in Q : k(r) < \frac{d}{2\varkappa}\right\},$$

kus $\varkappa$ on vastav kvaasinormi konstant. Oletame vastuväiteliselt, et leidub $p \in U_s \cap U_t$. Siis leiduvad $r_1, r_2 \in Q$ nii, et $p = s + r_1 = t + r_2$ ja $k(r_1), k(r_2) < \frac{d}{2\varkappa}$. Siis $s - t = r_2 - r_1$ ja

$$d = k(s-t) = k(r_2 - r_1) \leq \varkappa(k(r_1) + k(r_2)) < \varkappa \left(\frac{d}{2\varkappa} + \frac{d}{2\varkappa} \right) = d,$$

mis on vastuolu. Seega $U_S \cap U_T = \emptyset$. □

Kuna ruumi $(\mathcal{A}, A)$ iga komponent $(\mathcal{A}(X,Y), A)$ on kvaasinormeeritud ruum, siis järeldub vahetult eelnevast lausest järgnev tulemus.

Lause 1.8. *([11, lk 89]) Olgu $\mathcal{A}$ operaatorideaal kvaasinormiga A. Siis kõik komponendid $\mathcal{A}(X,Y)$ on lineaarsed topoloogilised Hausdorffi ruumid (kvaasinormi A poolt genereeritud topoloogia suhtes).*

Definitsioon 1.9. ([11, lk 89]) *Kvaasi-Banachi operaatorideaal* on operaatorideaal $\mathcal{A}$ kvaasinormiga A, mille korral kõik lineaarsed topoloogilised Hausdorffi ruumid $\mathcal{A}(X,Y)$ on täielikud.

Märgime, et edaspidi $A(S)^p$ tähistab $(A(S))^p$.

Definitsioon 1.10. ([11, lk 91]) Operaatorideaalil $\mathcal{A}$ määratud kvaasinormi A nimetatakse *p-normiks* $(0 < p \leq 1)$, kui kehtib p-kolmnurga võrratus:

$$A(S_1 + S_2)^p \leq A(S_1)^p + A(S_2)^p \quad \forall S_1, S_2 \in \mathcal{A}(X,Y).$$

Kui $p = 1$, siis kvaasinormi A nimetatakse lihtsalt *normiks.*

Märkus 1.11. ([11, lk 91]) Valides $\varkappa = 2^{1/p-1}$, rahuldab p-norm A kvaasinormi definitsiooni 1.6 tingimust 2.

Definitsioon 1.12. ([11, lk 91]) Operaatorideaali $\mathcal{A}$ koos p-normiga A, mille korral kõik lineaarsed topoloogilised Hausdorffi ruumid $(\mathcal{A}(X,Y), A)$ on täielikud, nimetatakse *p-Banachi operaatorideaaliks.* Kui $p = 1$, siis $(\mathcal{A}, A)$ nimetatakse *Banachi operaatorideaaliks.*

Esitame tõestuseta mõned topoloogiliste vektorruumidega seotud tulemused, mida kasutame käesoleva peatüki viimase ja väga olulise teoreemi tõestamisel. Defineerime ka mõisted, mida neis tulemustes kasutatakse.

Definitsioon 1.13. ([8, lk 159]) Topoloogilist vektorruumi nimetatakse *lokaalselt tõkestatuks*, kui tal leidub tõkestatud nulliümbrus.

Definitsioon 1.14. ([9, lk 28]) Öeldakse, et topoloogilise ruumi X topoloogia τ on *metriseeruv*, kui hulgas X saab defineerida niisuguse meetrika d, et τ langeb kokku meetrika d poolt määratud meetrilise topoloogiaga. Topoloogilist vektorruumi (X, τ) nimetame *metriseeruvaks*, kui tema topoloogia τ on metriseeruv.

Lause 1.15. *([8, lk 159]) Kvaasinormeeritud ruum on alati lokaalselt tõkestatud.*

Lause 1.16. *([9, lk 30]) Iga lokaalselt tõkestatud eralduv topoloogiline vektorruum on metriseeruv.*

Lause 1.17. *([9, lk 30]) Metriseeruv topoloogiline vektorruum on täielik parajasti siis, kui iga tema Cauchy jada on selles ruumis koonduv.*

Esitame tulemuse, mida kasutame mitme järgneva teoreemi tõestamisel. Meenutame, et ruumis $\mathcal{L}(X,Y)$ on defineeritud norm seosega $\|T\| = \sup_{\|x\|_X \le 1} \|Tx\|_Y$.

Teoreem 1.18. *([11, lk 91]) Olgu $0 < p \le 1$ ja olgu $\mathcal{A}$ klassi $\mathcal{L}$ alamklass funktsiooniga $A : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^+$, mis rahuldab järgmisi tingimusi:*

1. *$I_{\mathbb{K}} \in \mathcal{A}$ ja $A(I_{\mathbb{K}}) = 1$.*
2. *Kui $S_1, S_2, \ldots \in \mathcal{A}(X,Y)$ ja $\sum_{n=1}^{\infty} A(S_n)^p < \infty$, siis $S := \sum_{n=1}^{\infty} S_n \in \mathcal{A}(X,Y)$ (kus rea koondumine toimub ruumi $\mathcal{L}(X,Y)$ normi suhtes) ning $A(S)^p \le \sum_{n=1}^{\infty} A(S_n)^p$.*
3. *Kui $T \in \mathcal{L}(X_0, X), S \in \mathcal{A}(X,Y)$ ja $r \in \mathcal{L}(Y, Y_0)$, siis $RST \in \mathcal{A}(X_0, Y_0)$ ja $A(RST) \le \|R\| A(S) \|T\|$.*

Siis $(\mathcal{A}, A)$ on p-Banachi operaatorideaal.

Tõestus. Ilmselt $\mathcal{A}$ on operaatorideaal ja A on p-norm. Fikseerime vabalt Banachi ruumid X, Y. Meil on vaja näidata, et ruum $(\mathcal{A}(X,Y), A)$ on täielik. Lause 1.15 järgi on kvaasinormeeritud ruum $(\mathcal{A}(X,Y), A)$ lokaalselt tõkestatud. Lause 1.16 põhjal on ruum $(\mathcal{A}(X,Y), A)$ metriseeruv ning lause 1.17 põhjal on kvaasinormeeritud ruum $(\mathcal{A}(X,Y), A)$ täielik, kui iga Cauchy jada koondub selles ruumis. Seega piisab teoreemi tõestuseks näidata, et iga Cauchy jada koondub ruumis $(\mathcal{A}(X,Y), A)$.

Olgu (T_n) Cauchy jada ruumis $(\mathcal{A}(X,Y), A)$. Kuna (T_n) on Cauchy jada ruumis $(\mathcal{A}(X,Y), A)$, siis leidub iga $k \in \mathbb{N}$ korral n_k nii, et

$$m > n_k \Rightarrow A(T_{n_k} - T_m)^p < \frac{1}{2^k}$$

ja $n_k > n_{k-1}$, kui defineerime $n_0 = 0$. Tähistame iga $k \in \mathbb{N}$ korral $S_k = T_{n_k} - T_{n_{k-1}}$, kus $T_{n_0} = 0$. Siis

$$\sum_{i=1}^{m} S_i = \sum_{i=1}^{m} (T_{n_i} - T_{n_{i-1}}) = T_{n_1} - T_{n_0} + T_{n_2} - T_{n_1} + \cdots + T_{n_m} - T_{n_{m-1}} = T_{n_m}.$$

Kuna

$$\sum_{i=1}^{\infty} A(S_i)^p = \sum_{i=1}^{\infty} A(T_{n_i} - T_{n_{i-1}})^p = \sum_{i=1}^{\infty} A(T_{n_{i-1}} - T_{n_i})^p < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i-1}} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j}$$
$$= 2 < \infty,$$

siis eelduse 2. põhjal

$$T_{n_m} = \sum_{i=1}^{m} S_i \xrightarrow[m\to\infty]{} \sum_{i=1}^{\infty} S_i =: S,$$

mis tähendab, et jada (T_n) osajada (T_{n_m}) koondub operaatoriks S ruumi $\mathcal{L}(X,Y)$ normi järgi. Veendume, et $A(S - T_{n_m}) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$. Selleks piisab näidata, et $A(S - T_{n_m})^p \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$. Paneme tähele, et eelduse 2. põhjal

$$A(S - T_{n_m})^p = A\left(\sum_{i=1}^{\infty} S_i - \sum_{i=1}^{m} S_i\right)^p = A\left(\sum_{i=m+1}^{\infty} S_i\right)^p \leq \sum_{i=m+1}^{\infty} A(S_i)^p$$

ja $\displaystyle\sum_{i=m+1}^{\infty} A(S_i)^p \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$, sest koonduva arvrea $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} A(S_i)^p$ jääkliige koondub nulli. Seega $A(S - T_{n_m})^p \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$.

Funktsionaalanalüüsi põhikursusest on teada, et kui Cauchy jada osajada koondub mingiks elemendiks x, siis ka Cauchy jada koondub samaks elemendiks x ([10, lk 29]). Seega Cauchy jada (T_n) koondub operaatoriks S ruumis $(\mathcal{A}(X,Y), A)$. $\square$

2 Tuumaoperaatorid

Selles peatükis esitame tuumaoperaatori definitsiooni ja tõestame, et tuumaoperaatorid moodustavad Banachi operaatorideaali.

2.1 Tuumaoperaatori mõiste

Definitsioon 2.1. ([11, lk 93]) Operaatorit $S \in \mathcal{L}(X,Y)$ nimetatakse *tuumaoperaatoriks*, kui

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^* \otimes y_i, \tag{1}$$

kus $x_i^* \in X^*$ ja $y_i \in Y, i \in \mathbb{N}$ on sellised, et

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i^*\| \|y_i\| < \infty.$$

Märgime, et rida (1) koondub ruumi $\mathcal{L}(X,Y)$ normi järgi. Operaatori S esitust kujul (1) nimetatakse operaatori S *tuumaesituseks*. Tuumaoperaatori S tuumanormi tähistatakse

$$N(S) := \inf \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i^*\| \|y_i\|,$$

kus infiimum võetakse üle kõigi operaatori S tuumaesituste. Kõigi tuumaoperaatorite klassi tähistatakse sümboliga $\mathcal{N}$.

2.2 Tuumaoperaatorid kui Banachi operaatorideaal

Järgnevas käsitleme topeltindeksitega jadasid $(y_i^n)_{i,n\in\mathbb{N}}$, kus $y_i^n \in Y$ iga $i, n \in \mathbb{N}$ korral. Topeltindeksitega jada puhul mõistame seda kui jada, mille indeksid on saadud lõpmatu indeksite maatriksi diagonaalsel ümberjärjestamisel. Teisisõnu, jada $(y_i^n)_{i,n\in\mathbb{N}} = (\eta_k)_{k=1}^{\infty}$ liikmed on kujul $\eta_k = y_{\beta_k}^{\alpha_k}$, kus

$$(\alpha_k) = (1, 2, 1, 3, 2, 1, 4, 3, 2, 1, \dots) \text{ ja } (\beta_k) = (1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, \dots).$$

Rea $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} y_i^n$ topeltindeksitega liikmete diagonaalsel ümberjärjestamisel saadud rida tähistame $\displaystyle\sum_{n,i=1}^{\infty} y_i^n$.

Sõnastame abitulemuse, mida läheb vaja järgneva teoreemi tõestuses.

Lemma 2.2. *Olgu $S \in \mathcal{L}(X,Y)$ ja $R \in \mathcal{L}(Y,Y_0)$, kusjuures S on esitatav kujul $S = \sum_{i=1}^{\infty} s_i$, $s_i \in \mathcal{L}(X,Y)$. Siis $RS(x) = \sum_{i=1}^{\infty} Rs_i(x), x \in X$.*

Tõestus. Olgu $x \in X$. Siis

$$\begin{aligned} RS(x) = R(S(x)) = R\left(\sum_{i=1}^{\infty} s_i(x)\right) &= R\left(\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N} s_i(x)\right) \\ = \lim_{N\to\infty} R\left(\sum_{i=1}^{N} s_i(x)\right) &= \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N} R(s_i(x)) \\ = \sum_{i=1}^{\infty} Rs_i(x). \end{aligned}$$

□

Teoreem 2.3. *([11, lk 93]) $(\mathcal{N}, N)$ on Banachi operaatorideaal.*

Tõestus. Kasutame teoreemi 1.18 juhu $p = 1$ jaoks.

1. Kuna $I_{\mathbb{K}} = I_{\mathbb{K}} \otimes 1$, st valime $(x_i^*) = (I_{\mathbb{K}}, 0, 0, \dots) \subset \mathbb{K}^*, (y_i) = (1, 0, 0, \dots) \subset \mathbb{K}$, siis $I_{\mathbb{K}} \in \mathcal{N}$ ja $N(I_{\mathbb{K}}) \leq \|I_{\mathbb{K}}\| = 1$. Peale selle, olgu
$$I_{\mathbb{K}} = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \otimes \eta_i$$
operaatori $I_{\mathbb{K}}$ mingi vabalt valitud tuumaesitus, kus $\alpha_i \in \mathbb{K}^*$ ja $\eta_i \in \mathbb{K}$, $i \in \mathbb{N}$. Tähistades $\alpha_i' := \alpha_i(1) \in \mathbb{K}$, saame, et $\alpha_i(x) = x \cdot \alpha_i(1) = \alpha_i' \cdot x$, kus $x \in \mathbb{K}$. Siis $I_{\mathbb{K}}(1) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \otimes \eta_i\right)(1)$ ehk $1 = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i'\eta_i$. Järelikult $1 \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i'\eta_i|$ ja seega $1 \leq N(I_{\mathbb{K}})$. Kokkuvõttes $N(I_{\mathbb{K}}) = 1$.

2. Olgu $S_1, S_2, \dots \in \mathcal{N}(X,Y)$ sellised, et $\sum_{n=1}^{\infty} N(S_n) < \infty$. Fikseeritud $\varepsilon > 0$ korral valime tuumaesitused
$$S_n = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^{*n} \otimes y_i^n,$$

kus $x_i^{*n} \in X^*$ ja $y_i^n \in Y$, $i, n \in \mathbb{N}$, nii, et

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i^{*n}\| \|y_i^n\| \leq (1+\varepsilon) N(S_n).$$

Siis saame, et

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} x_i^{*n} \otimes y_i^n.$$

Kuna rida $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} x_i^{*n} \otimes y_i^n$ koondub absoluutselt ja ruum $\mathcal{L}(X, Y)$ on Banachi ruum, siis see rida koondub. Seega võime selles reas liikmed diagonaalselt ümber järjestada. Järelikult

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \sum_{n,i=1}^{\infty} x_i^{*n} \otimes y_i^n.$$

Arvestades, et absoluutselt koonduv arvrida koondub tingimatult, saame, et

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i^{*n}\| \|y_i^n\| = \sum_{n,i=1}^{\infty} \|x_i^{*n}\| \|y_i^n\| \leq (1+\varepsilon) \sum_{n=1}^{\infty} N(S_n).$$

Kokkuvõttes saame, et $S \in \mathcal{N}(X, Y)$ ja $N(S) \leq (1+\varepsilon) \sum_{n=1}^{\infty} N(S_n)$.

3. Olgu $S \in \mathcal{N}(X, Y)$ ja $\varepsilon > 0$. Vaatleme sellist tuumaesitust

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^* \otimes y_i,$$

($x_i^* \in X^*$ ja $y_i \in Y$, $i \in \mathbb{N}$), mille korral

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i^*\| \|y_i\| \leq (1+\varepsilon) N(S).$$

Kui $T \in \mathcal{L}(X_0, X)$ ja $R \in \mathcal{L}(Y, Y_0)$, siis

$$RST = \sum_{i=1}^{\infty} T^* x_i^* \otimes R y_i. \tag{2}$$

Veendume selles. Olgu $z \in X_0$. Siis

$$\begin{aligned} RST(z) &= R(S(Tz)) = R\left(\sum_{i=1}^{\infty}(x_i^* \otimes y_i)(Tz)\right) = R\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i^*(Tz)y_i\right) \\ &= R\left(\sum_{i=1}^{\infty}(T^*x_i^*)(z)y_i\right) \overset{(*)}{=} \sum_{i=1}^{\infty}(T^*x_i^*)(z)\cdot Ry_i \\ &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} T^*x_i^* \otimes Ry_i\right)(z). \end{aligned}$$

Viimases võrdusteahelas võrdus (*) kehtib lemma 2.2 põhjal, arvestades, et $(T^*x_i^*)(z) \in \mathbb{K}$. Järelikult kehtib võrdus (2), kusjuures

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|T^*x_i^*\|\|Ry_i\| \leq (1+\varepsilon)\|R\|N(S)\|T\|.$$

Seega $RST \in \mathcal{N}(X_0, Y_0)$ ja $N(RST) \leq (1+\varepsilon)\|R\|N(S)\|T\|$.

$\square$

3 (r, p, q)-tuumaoperaatorid

Selles peatükis esitame (r, p, q)-tuumaoperaatori mõiste ning tõestame, et (r, p, q)-tuumaoperaatorid moodustavad s-Banachi operaatorideaali, kus $s = 1/(1/r + 1/p^* + 1/q^*)$.

3.1 (r, p, q)-tuumaoperaatori mõiste

Definitsioon 3.1. ([11, lk 224]) Olgu $1 \leq p \leq \infty$. Jada $(x_i) \subset X$ nimetatakse *absoluutselt p-summeeruvaks jadaks*, kui $(\|x_i\|) \in \ell_p$. Kõigi ruumi X absoluutselt p-summeeruvate jadade ruumi tähistatakse sümboliga $\ell_p(X)$. Ruumis $\ell_p(X)$ on defineeritud norm järgmiselt

$$\|(x_i)\|_p := \|(\|x_i\|)\|_{\ell_p},$$

kus $\|\cdot\|_{\ell_p}$ on norm ruumis ℓ_p.

Tõestuse, et $\|\cdot\|_p$ on norm juhul $1 \leq p < \infty$, võib leida näiteks J. Izotova bakalaureusetööst ([6, lk 13]).

Veendume, et $\|\cdot\|_p$ on norm ka juhul $p = \infty$.

Lemma 3.2. *Kujutus $\|\cdot\|_\infty :\to \mathbb{R}^+$ on norm.*

Tõestus. Kontrollime normi kolme aksioomi. Olgu $(x_i), (z_i) \in \ell_\infty(X)$ ja $k \in \mathbb{K}$. Siis

1. $$\|(x_i)\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \|(\|x_i\|)\|_{\ell_\infty} = 0 \Leftrightarrow \sup_{i\in\mathbb{N}} \|x_i\| = 0 \Leftrightarrow \|x_i\| = 0, i \in \mathbb{N}$$
$$\Leftrightarrow x_i = 0, i \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (x_i) = 0.$$

2. $$\|k(x_i)\|_\infty = \|(\|kx_i\|)\|_{\ell_\infty} = \sup_{i\in\mathbb{N}} \|kx_i\| = k \sup_{i\in\mathbb{N}} \|x_i\| = k\,\|(x_i)\|_\infty.$$

3. $$\|(x_i) + (z_i)\|_\infty = \|(\|x_i + z_i\|)\|_{\ell_\infty} = \sup_{i\in\mathbb{N}} \|x_i + z_i\| \leq \sup_{i\in\mathbb{N}} (\|x_i\| + \|z_i\|)$$
$$\leq \sup_{i\in\mathbb{N}} \|x_i\| + \sup_{i\in\mathbb{N}} \|z_i\| = \|(x_i)\|_\infty + \|(z_i)\|_\infty.$$

□

Definitsioon 3.3. ([11, lk 224]) Olgu $1 \leq p \leq \infty$. Jada $(x_i) \subset X$ nimetatakse *nõrgalt p-summeeruvaks jadaks*, kui iga $x^* \in X^*$ korral $(x^*(x_i)) \in \ell_p$. Kõigi ruumi X nõrgalt p-summeeruvate jadade ruumi tähistatakse sümboliga $\ell_p^w(X)$. Ruumis $\ell_p^w(X)$ on defineeritud norm järgmiselt

$$\|(x_i)\|_p^w := \sup_{\|x^*\| \leq 1} \|(x^*(x_i))\|_{\ell_p}.$$

Märgime, et see supreemum leidub kinnise graafiku teoreemi põhjal.

Märkus 3.4. ([1, lk 14]) Nõrgalt tõkestatud jadade ruum $\ell_\infty^w(X)$ langeb kokku ruumiga $\ell_\infty(X)$.

Tõestuse, et $\|\cdot\|_p^w$ on norm, võib leida näiteks J. Izotova bakalaureusetööst ([6, lk 16]).

Definitsioon 3.5. ([11, lk 243]) Olgu $1 \leq r, p, q \leq \infty$ ja $1+1/r \geq 1/p+1/q$. Operaatorit $S \in \mathcal{L}(X, Y)$ nimetatakse (r, p, q)*-tuumaoperaatoriks*, kui

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i x_i^* \otimes y_i, \tag{3}$$

kus $(\delta_i) \in \ell_r, (x_i^*) \in \ell_{q^*}^w(X^*)$ ja $(y_i) \in \ell_{p^*}^w(Y)$. Märgime, et rida (3.5) koondub ruumi $\mathcal{L}(X, Y)$ normi järgi. Kui $r = \infty$, siis $(\delta_i) \in c_0$. Operaatori S esitust kujul (3) nimetatakse operaatori S *(r,p,q)-tuumaesituseks.*
Tema (r, p, q)-tuumanormi tähistatakse

$$N_{(r,p,q)}(S) := \inf \|(\delta_i)\|_r \|(x_i^*)\|_{q^*}^w \|(y_i)\|_{p^*}^w,$$

kus infiimum võetakse üle operaatori S kõigi (r, p, q)-tuumaesituste. Kõigi (r, p, q)-tuumaoperaatorite klassi tähistatakse sümboliga $\mathcal{N}_{(r,p,q)}$.

Märkus 3.6. ([2, lk 155]) Juhul $r = p, q = 1$ nimetatakse $(p, p, 1)$-tuumaoperaatorit p-tuumaoperaatoriks.

Märkus 3.7. ([11, lk 244]) Juhul $r = p = q = 1$ on $(1, 1, 1)$-tuumaoperaator tuumaoperaator.

Järgmisena toome näite (r, p, q)-tuumaoperaatorist.

Näide 3.8. ([2, lk 147]) Olgu $1 \leq p \leq \infty$ ja $1 \leq r \leq p^*$. Siis iga $(x_n) \in \ell_p(X)$ korral saame defineerida operaatori $\Phi_{(x_n)} \in \mathcal{L}(\ell_r, X)$ järgmiselt

$$\Phi_{(x_n)}(a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n, \quad (a_n) \in \ell_r.$$

Operaator $\Phi_{(x_n)}$ on esitatav kujul

$$\Phi_{(x_n)} = \sum_{n=1}^{\infty} e_n \otimes x_n,$$

kus ühikvektorid $e_n \in \ell_{r^*} \subset (\ell_r)^*$ on ruumi ℓ_r koordinaat-funktsionaalid. Paneme tähele, et $(e_n) \in S_{\ell_r^w(\ell_r^*)}$, kus sümbol S_X tähistab ruumi X ühiksfääri. Kuna $e_n \otimes x_n = \|x_n\| e_n \otimes \|x_n\|^{-1} x_n$, siis $\Phi_{(x_n)} \in \mathcal{N}_{(p,1,r^*)}(\ell_r, X)$ ja $N_{(p,1,r^*)}(\Phi_{(x_n)}) \leq \|(x_n)\|$.

3.2 (r,p,q)-tuumaoperaatorid kui s-Banachi operaatorideaal

Esitame lemmad, mida kasutame järgmise teoreemi tõestuses.

Lemma 3.9. *Olgu* $1 \leq r < \infty$, $1 \leq p, q \leq \infty$ *ja* $1 + 1/r \geq 1/p + 1/q$. *Tähistame* $1/s := 1/r + 1/p^* + 1/q^*$. *Olgu iga fikseeritud* $n \in \mathbb{N}$ *korral*

$$S_n = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i^n x_i^{*n} \otimes y_i^n,$$

kus $(\delta_i^n)_{i=1}^{\infty} \in \ell_r, (x_i^{*n})_{i=1}^{\infty} \in \ell_{q^*}^w(X^*)$ *ja* $(y_i^n)_{i=1}^{\infty} \in \ell_{p^*}^w(Y)$ *on sellised, et iga fikseeritud* $n \in \mathbb{N}$ *korral*

$$\|(\delta_i^n)_{i=1}^{\infty}\|_r \leq [(1+\varepsilon) N_{(r,p,q)}(S_n)]^{s/r}, \text{ ja}$$
$$\|(x_i^{*n})_{i=1}^{\infty}\|_{q^*}^w \leq [(1+\varepsilon) N_{(r,p,q)}(S_n)]^{s/q^*}$$

ning olgu $\sum_{n=1}^{\infty} N_{(r,p,q)}(S_n)]^s < \infty$. *Siis vaadeldes jadasid* $(\delta_i^n), (x_i^{*n}), (y_i^n)$ *kui topeltindeksitega jadasid saame, et*

$$\|(\delta_i^n)_{i,n\in\mathbb{N}}\|_r \leq \left[(1+\varepsilon)^s \sum_{n=1}^{\infty} N_{(r,p,q)}(S_n)^s\right]^{1/r}, \tag{4a}$$

$$\|(y_i^n)_{i,n\in\mathbb{N}}\|_{p^*}^w \leq \left[(1+\varepsilon)^s \sum_{n=1}^{\infty} N_{(r,p,q)}(S_n)^s\right]^{1/p^*}. \tag{4b}$$

Tõestus. Võrratus (4a) kehtib, sest

$$\begin{aligned}
\|(\delta_i^n)_{i=1}^\infty\|_r &\leq [(1+\varepsilon)N_{(r,p,q)}(S_n)]^{s/r} \\
\Leftrightarrow \sum_{i=1}^\infty |\delta_i^n|^r &\leq [(1+\varepsilon)N_{(r,p,q)}(S_n)]^s \\
\Leftrightarrow \sum_{n=1}^\infty \sum_{i=1}^\infty |\delta_i^n|^r &\leq (1+\varepsilon)^s \sum_{n=1}^\infty N_{(r,p,q)}(S_n)^s \\
\Leftrightarrow \left(\sum_{n=1}^\infty \sum_{i=1}^\infty |\delta_i^n|^r\right)^{1/r} &\leq \left((1+\varepsilon)^s \sum_{n=1}^\infty N_{(r,p,q)}(S_n)^s\right)^{1/r} \\
\Leftrightarrow \|(\delta_i^n)_{i,n\in\mathbb{N}}\|_r &\leq \left[(1+\varepsilon)^s \sum_{n=1}^\infty N_{(r,p,q)}(S_n)^s\right]^{1/r}.
\end{aligned}$$

Põhjendame, miks kehtib võrratus (4b). Vastavalt definitsioonile

$$\begin{aligned}
\|(y_i^{*n})_{i=1}^\infty\|_{p^*}^w &\leq [(1+\varepsilon)N_{(r,p,q)}(S_n)]^{s/p^*} \\
\Leftrightarrow \sup_{\|y^*\|\leq 1} \|(y^*(y_i^n))\|_{p^*} &\leq [(1+\varepsilon)N_{(r,p,q)}(S_n)]^{s/p^*}.
\end{aligned}$$

Vaatleme juhtu $1 \leq p^* < \infty$. Kui $\|y^*\| \leq 1$, siis

$$\sum_{i=1}^\infty |(y^*(y_i^n))|^{p^*} \leq [(1+\varepsilon)N_{(r,p,q)}(S_n)]^s,$$

millest järeldub, et

$$\sum_{n=1}^\infty \sum_{i=1}^\infty |(y^*(y_i^n))|^{p^*} \leq (1+\varepsilon)^s \sum_{n=1}^\infty N_{(r,p,q)}(S_n)^s.$$

Meenutame, et kui $1 \leq p^* < \infty$, siis $\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_{p^*}$. Seega, kui $1 \leq p^* \leq \infty$, siis

$$\|(y_i^{*n})_{i,n\in\mathbb{N}}\|_{p^*}^w \leq \left[(1+\varepsilon)^s \sum_{n=1}^\infty N_{(r,p,q)}(S_n)^s\right]^{1/p^*}.$$

□

Lemma 3.10. *([11, lk 113]) Olgu $(\delta_i) \in \ell_1$ ja $\varepsilon > 0$. Siis leidub $(\rho_i) \in c_0$ nii, et*

$$\sum_{i=1}^\infty \rho_i^{-1}|\delta_i| \leq (1+\varepsilon)\sum_{i=1}^\infty |\delta_i| \ \ ja \ \ 1 \geq \rho_1 \geq \rho_2 \geq \cdots > 0.$$

Tõestus. Kui leidub $M \in \mathbb{N}$, mille korral $\sum_{i=M}^{\infty} |\delta_i| = 0$, siis väide kehtib. Kui $M = 1$, siis $\delta_i = 0$ iga $i \in \mathbb{N}$ korral ja väide kehtib triviaalselt. Kui $M \geq 2$, siis saame valida $\rho_i = 1$, kui $i < M$ ja $\rho_i = 1/i$, kui $i \geq M$. Siis $(\rho_i) \in c_0$ ja

$$\sum_{i=1}^{\infty} \rho_i^{-1} |\delta_i| = \sum_{i=1}^{M-1} \rho_i^{-1} |\delta_i| = \sum_{i=1}^{M-1} |\delta_i| = \sum_{i=1}^{\infty} |\delta_i| \leq (1+\varepsilon) \sum_{i=1}^{\infty} |\delta_i|.$$

Vaatleme nüüd juhtu, kui iga $n \in \mathbb{N}$ korral $\sum_{i=n}^{\infty} |\delta_i| > 0$. Leiame naturaalarvu m, mille korral

$$\left(\sum_{i=m+1}^{\infty} |\delta_i| \right)^{1/2} \leq \min \left\{ \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=1}^{\infty} |\delta_i|, 1 \right\}$$

ja valime

$$\rho_n = \begin{cases} 1, & \text{kui } n \leq m, \\ \left(\sum_{i=n}^{\infty} |\delta_i| \right)^{1/2}, & \text{kui } n > m. \end{cases}$$

Siis $(\rho_n) \in c_0$ ja $1 \geq \rho_1 \geq \rho_2 \geq \cdots > 0$ ning arvestades, et $|\delta_n| = \rho_n^2 - \rho_{n+1}^2$, kui $n > m$, saame, et

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} \rho_i^{-1} |\delta_i| &= \sum_{n=1}^{m} |\delta_n| + \sum_{n=m+1}^{\infty} \rho_n^{-1} \left(\rho_n^2 - \rho_{n+1}^2 \right) \\
&= \sum_{n=1}^{m} |\delta_n| + \sum_{n=m+1}^{\infty} \rho_n^{-1} (\rho_n + \rho_{n+1})(\rho_n - \rho_{n+1}) \\
&= \sum_{n=1}^{m} |\delta_n| + \sum_{n=m+1}^{\infty} \left(1 + \frac{\rho_{n+1}}{\rho_n} \right) (\rho_n - \rho_{n+1}) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} |\delta_n| + 2 \sum_{n=m+1}^{\infty} (\rho_n - \rho_{n+1}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\delta_n| + 2\rho_{m+1} \\
&\leq (1+\varepsilon) \sum_{n=1}^{\infty} |\delta_n|.
\end{aligned}$$

□

Esitame tulemuse, mida läheb vaja mitme järgneva teoreemi tõestamisel. Kasutame tähistust $(a_i^k)_{i=m}^{\infty} = (0, \ldots, 0, a_m^k, a_{m+1}^k, \ldots)$ ja kirjutis $b^k \subset a^k$ tähendab, et b^k on jada a^k osajada.

Lemma 3.11. *Olgu iga $k \in \mathbb{N}$ korral jada $a^k = (a_i^k)_{i=1}^\infty \subset X$ selline, et $\sum\limits_{i=1}^\infty a_i^k \in X$, olgu A_k jada a^k osajadade hulk ning olgu määratud kujutus $p_k : A_k \to \mathbb{R}^+$ nii, et*

(i) iga $b^k \subset a^k$ korral $\left\| \sum\limits_{i=1}^\infty b_i^k \right\| \leq p_k(b^k)$,

(ii) $\sum\limits_{k=1}^\infty p_k(a^k) < \infty$,

(iii) iga $k \in \mathbb{N}$ korral $p_k((a_i^k)_{i=m}^\infty) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$,

(iv) $b^k \subset a^k \Rightarrow p_k(b^k) \leq p_k(a^k)$.

Siis rida $\sum\limits_{k=1}^\infty \sum\limits_{i=1}^\infty a_i^k$ koondub ja selle rea liikmete diagonaalsel ümberjärjestamisel saadud rida $\sum\limits_{j=1}^\infty \eta_j$ (vt ptk 2.2 algus) koondub samaks elemendiks.

Tõestus. Eelduste (i) ja (ii) põhjal saame, et

$$\sum_{k=1}^\infty \left\| \sum_{i=1}^\infty a_i^k \right\| \leq \sum_{k=1}^\infty p_k(a^k) < \infty,$$

mis tähendab, et rida $\sum\limits_{k=1}^\infty \sum\limits_{i=1}^\infty a_i^k$ koondub absoluutselt. Kuna X on Banachi ruum, siis ruumis X iga absoluutselt koonduv rida koondub ([10, lk 96]). Seega leidub $x \in X$ nii, et rida $\sum\limits_{k=1}^\infty \sum\limits_{i=1}^\infty a_i^k$ koondub elemendiks x.

Näitame nüüd, et rea $\sum\limits_{k=1}^\infty \sum\limits_{i=1}^\infty a_i^k$ liikmete diagonaalsel ümberjärjestamisel saadud rida $\sum\limits_{j=1}^\infty \eta_j$ koondub samaks elemendiks x. Olgu $\sum\limits_{j=1}^\infty \eta_j$ liikmete α_i^k diagonaalselt ümberjärjestatud rida. Näitame, et rida $\sum\limits_{j=1}^\infty \eta_j$ koondub elemendiks $x = \sum\limits_{k=1}^\infty \sum\limits_{i=1}^\infty a_i^k$ ruumis X ehk $\left\| \sum\limits_{j=1}^l \eta_j - x \right\| \xrightarrow[l\to\infty]{} 0$. Meil on vaja veenduda, et

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists L \in \mathbb{N} : \left(l > L \Rightarrow \left\| \sum_{j=1}^{l} \eta_j - x \right\| < \varepsilon \right).$$

Fikseerime vabalt $\varepsilon > 0$. Kuna mittenegatiivsete liikmetega arvrida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k(a^k)$ koondub, siis selle rea jääkliige koondub nulli. See tähendab, et leidub $K \in \mathbb{N}$ nii, et

$$s > K \Rightarrow \sum_{k=s}^{\infty} p_k(a^k) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5}$$

Vaatleme nüüd jadasid $(a_i^k)_{i=m}^{\infty}$, kus $1 \le k \le K$ ja $m \in \mathbb{N}$. Eelduse (iii) põhjal iga $k \in \{1, 2, \dots, K\}$ korral $p_k((a_i^k)_{i=m}^{\infty}) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$. See tähendab, et iga $k \in \{1, 2, \dots, K\}$ korral leidub $M_k \in \mathbb{N}$ nii, et

$$m > M_k \Rightarrow p_k((a_i^k)_{i=m}^{\infty}) < \frac{\varepsilon}{2K}.$$

Valides $M := \max_{1 \le k \le K} M_k$, saame, et

$$m > M \Rightarrow \sum_{k=1}^{K} p_k((a_i^k)_{i=m}^{\infty}) < K \frac{\varepsilon}{2K} = \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6}$$

Eespool kirjeldatut aitab illustreerida alljärgnev joonis.

	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$\dots$	$i=M$	$\dots$	$i=K+M$	$\dots$
$k=1$	a_1^1	a_2^1	a_3^1	$\dots$	a_M^1	$\dots$	a_{K+M}^1	$\dots$
$k=2$	a_1^2	a_2^2	$\dots$		$\dots$			
$k=3$	a_1^3	$\vdots$	$\ddots$					
$\vdots$	$\vdots$							
$k=K$	a_1^K	$\vdots$			a_M^K	$\dots$		
$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$			
$k=K+M$	a_1^{K+M}							
$\vdots$	$\vdots$							

Tähistades $L := 1 + 2 + \dots + (K + M) = 1/2(1 + K + M)(K + M)$, saame eespool toodud tabeli vasakpoolse ülemise kolmnurga

$$\sum_{j=1}^{L} \eta_j = \sum_{k=1}^{K+M} \sum_{i=1}^{K+M-k+1} a_i^k$$

jagada piltlikult öeldes ristkülikuks ja kaheks väiksemaks kolmnurgaks. Tähistame need vastavalt

$$\begin{aligned} T_0 &= \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=1}^{M} a_i^k \text{ (ristkülik)}, \\ T_1 &= \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=M+1}^{K+M-k+1} a_i^k \text{ (ülemine väike kolmnurk)}, \\ T_2 &= \sum_{k=K+1}^{K+M} \sum_{i=1}^{M-k+1} a_i^k \text{ (alumine väike kolmnurk)}. \end{aligned}$$

Seega

$$\sum_{j=1}^{L} \eta_j = T_0 + T_1 + T_2.$$

Olgu $l > L$. Siis $\sum_{j=1}^{L} \eta_j - x = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=t_k}^{\infty} a_i^k$, kus indeks t_k on määratud seosega

$$t_k = \begin{cases} K + M + 1 - k, & \text{kui } 1 \leq k \leq K + M, \\ 1, & \text{kui } k > K + M. \end{cases}$$

Analoogiliselt saame, et $\sum_{j=1}^{l} \eta_j - x = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=r_k}^{\infty} a_i^k$, kus indeks r_k sõltub indeksist l. Seejuures leidub indeks $L_l \in \mathbb{N}$ nii, et kui $k > L_l$, siis $l_k = 1$ ja seega vaadeldav rida $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=r_k}^{\infty} a_i^k$ koondub. Vaatleme selle rea liikmeid, mis on kujul $\sum_{i=r_k}^{\infty} a_i^k$, $k \in \mathbb{N}$. Kuna $l > L$, siis iga $k \in \{1, 2, \ldots, K\}$ korral $t_k \leq r_k$ ning jada $(a_i^k)_{i=r_k}^{\infty}$ on jada $(a_i^k)_{i=t_k}^{\infty}$ osajada. Seega eelduse (iv) põhjal iga $k \in \{1, 2, \ldots, K\}$ korral

$$p_k((a_i^k)_{i=r_k}^{\infty}) \leq p_k((a_i^k)_{i=t_k}^{\infty}).$$

Järelikult tingimust (i) arvestades saame, et

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{j=1}^{l}\eta_j - x\right\| &= \left\|\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=r_k}^{\infty}a_i^k\right\| \leq \sum_{k=1}^{\infty}\left\|\sum_{i=r_k}^{\infty}a_i^k\right\| \leq \sum_{k=1}^{\infty}p_k((a_i^k)_{i=r_k}^{\infty})\\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty}p_k((a_i^k)_{i=t_k}^{\infty})\end{aligned}$$

Paneme tähele, et kui $1 \leq k \leq K$, siis $t_k = K + M + 1 - k > M$. Seega, kui $l > L$, siis tänu tingimusele (iv) ja seostele (5) ja (6) saame, et

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{j=1}^{l}\eta_j - x\right\| &\leq \sum_{k=1}^{\infty}p_k((a_i^k)_{i=t_k}^{\infty}) = \sum_{k=1}^{K}p_k((a_i^k)_{i=t_k}^{\infty}) + \sum_{k=K+1}^{\infty}p_k((a_i^k)_{i=t_k}^{\infty})\\ &\leq \sum_{k=1}^{K}p_k((a_i^k)_{i=t_k}^{\infty}) + \sum_{k=K+1}^{\infty}p_k(a^k) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

Kokkuvõttes oleme näidanud, et rea $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}a_i^k$ liikmete diagonaalsel ümberjärjestamisel saadud rida $\sum_{j=1}^{\infty}\eta_j$ koondub elemendiks x ruumis X. □

Teoreem 3.12. *([11, lk 244]) Olgu $1 \leq r, p, q \leq \infty$ ja $1 + 1/r \geq 1/p + 1/q$. Tähistame $1/s := 1/r + 1/p^* + 1/q^*$. Siis $\big(\mathcal{N}_{(r,p,q)}, N_{(r,p,q)}\big)$ on s-Banachi operaatorideaal.*

Tõestus. Paneme kõigepealt tähele, et $0 < s \leq 1$. Tõepoolest, kuna

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{r} + \frac{1}{p^*} + \frac{1}{q^*} = \frac{1}{r} + 1 - \frac{1}{p} + 1 - \frac{1}{q} \geq 1,$$

siis $0 < s \leq 1$.

Kasutame nüüd teoreemi 1.18 kriteeriumit.

1. Kuna $I_{\mathbb{K}} = 1 \cdot I_{\mathbb{K}} \otimes 1$, s.t valime $(\delta_i) = (1, 0, 0, \dots) \in \ell_r, (x_i^*) = (I_{\mathbb{K}}, 0, 0, \dots) \in \ell_{q^*}^w(\mathbb{K}^*)$ ja $(y_i) = (1, 0, 0, \dots) \in \ell_{p^*}^w(\mathbb{K})$, siis $I_{\mathbb{K}} \in \mathcal{N}_{(r,p,q)}$ ja $N_{(r,p,q)}(I_{\mathbb{K}}) \leq 1$. Peale selle, olgu

$$I_{\mathbb{K}} = \sum_{i=1}^{\infty}\delta_i x_i^* \otimes y_i$$

operaatori $I_{\mathbb{K}}$ mingi vabalt valitud (r,p,q)-tuumaesitus, kus $(\delta_i) \in \ell_r, (x_i^*) \in \ell_{q^*}^w(\mathbb{K}^*)$ ja $(y_i) \in \ell_{p^*}^w(\mathbb{K})$. Tähistades $x_i' := x_i^*(1) \in \mathbb{K}$, saame, et $I_{\mathbb{K}}(1) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \delta_i x_i^* \otimes y_i\right)(1)$ ehk $1 = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i x_i' y_i$. Järelikult

$$1 \leq \|(\delta_i x_i' y_i)\|_1 \leq \|(\delta_i x_i' y_i)\|_s \leq \|(\delta_i)\|_r \|(x_i^*)\|_{q^*}^w \|(y_i)\|_{p^*}^w$$

ja seega $1 \leq N_{(r,p,q)}(I_{\mathbb{K}})$. Kokkuvõttes $N_{(r,p,q)}(I_{\mathbb{K}}) = 1$.

2. Vaatame kõigepealt juhtu $r \neq \infty$. Olgu $S_1, S_2, \ldots \in \mathcal{N}_{(r,p,q)}(X,Y)$ sellised, et $\sum_{n=1}^{\infty} N_{(r,p,q)}(S_n)^s < \infty$. Fikseeritud $\varepsilon > 0$ korral valime (r,p,q)-tuumaesitused

$$S_n = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i^n x_i^{*n} \otimes y_i^n,$$

kus $(\delta_i^n)_{i=1}^{\infty} \in \ell_r, (x_i^{*n})_{i=1}^{\infty} \in \ell_{q^*}^w(X^*)$ ja $(y_i^n)_{i=1}^{\infty} \in \ell_{p^*}^w(Y)$, nii, et iga fikseeritud $n \in \mathbb{N}$ korral

$$\|(\delta_i^n)_{i=1}^{\infty}\|_r \, \|(x_i^{*n})_{i=1}^{\infty}\|_{q^*}^w \, \|(y_i^n)_{i=1}^{\infty}\|_{p^*}^w \leq (1+\varepsilon) N_{(r,p,q)}(S_n).$$

Võime eeldada, et iga fikseeritud $n \in \mathbb{N}$ korral

$$\begin{aligned} \|(\delta_i^n)_{i=1}^{\infty}\|_r &\leq [(1+\varepsilon)N_{(r,p,q)}(S_n)]^{s/r}, \\ \|(x_i^{*n})_{i=1}^{\infty}\|_{q^*}^w &\leq [(1+\varepsilon)N_{(r,p,q)}(S_n)]^{s/q^*}, \\ \|(y_i^n)_{i=1}^{\infty}\|_{p^*}^w &\leq [(1+\varepsilon)N_{(r,p,q)}(S_n)]^{s/p^*}. \end{aligned}$$

Vaadeldes jadasid $(\delta_i^n), (x_i^{*n}), (y_i^n)$ kui topeltindeksitega jadasid saame lemma 3.9 põhjal, et

$$\|(\delta_i^n)_{i,n\in\mathbb{N}}\|_r \leq \left[(1+\varepsilon)^s \sum_{n=1}^{\infty} N_{(r,p,q)}(S_n)^s\right]^{1/r}, \tag{7}$$

$$\|(x_i^{*n})_{i,n\in\mathbb{N}}\|_{q^*}^w \leq \left[(1+\varepsilon)^s \sum_{n=1}^{\infty} N_{(r,p,q)}(S_n)^s\right]^{1/q^*}, \tag{8}$$

$$\|(y_i^n)_{i,n\in\mathbb{N}}\|_{p^*}^w \leq \left[(1+\varepsilon)^s \sum_{n=1}^{\infty} N_{(r,p,q)}(S_n)^s\right]^{1/p^*}. \tag{9}$$

Meenutame, et vastavalt eeldusele $\sum_{n=1}^{\infty} N_{(r,p,q)}(S_n)^s < \infty$. Seega $(\delta_i^n)_{i,n\in\mathbb{N}} \in \ell_r$, $(x_i^{*n})_{i,n\in\mathbb{N}} \in \ell_{q^*}^w$ ja $(y_i^n)_{i,n\in\mathbb{N}} \in \ell_{p^*}^w$.

Tähistame iga $i, n \in \mathbb{N}$ korral $a_i^n = \delta_i^n x_i^{*n} \otimes y_i^n$ ja jada $(a_i^n)_{i=1}^{\infty}$ iga osajada $(a_{k_i}^n)_{i=1}^{\infty}$ korral

$$p_n((a_{k_i}^n)_{i=1}^{\infty}) = \left\|(\delta_{k_i}^n)_{i=1}^{\infty}\right\|_r \left\|(x_{k_i}^{*n})_{i=1}^{\infty}\right\|_{q^*}^w \left\|(y_{k_i}^n)_{i=1}^{\infty}\right\|_{p^*}^w .$$

Veendume, et lemma 3.11 eeldused on täidetud. Lemma sõnastuses on ruumi X rollis $\mathcal{N}_{(r,p,q)}(X,Y)$. Kõigepealt märgime, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^n = S_n \in \mathcal{N}_{(r,p,q)}(X,Y)$. Kuna iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$N_{(r,p,q)}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \delta_{k_i}^n x_{k_i}^{*n} \otimes y_{k_i}^n\right) \leq \left\|(\delta_{k_i}^n)_{i=1}^{\infty}\right\|_r \left\|(x_{k_i}^{*n})_{i=1}^{\infty}\right\|_{q^*}^w \left\|(y_{k_i}^n)_{i=1}^{\infty}\right\|_{p^*}^w$$

siis on lemma 3.11 eeldus (i) täidetud. Paneme tähele, et iga $\varepsilon > 0$ korral

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} p_n(a^n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \|(\delta_i^n)_{i=1}^{\infty}\|_r \|(x_i^{*n})_{i=1}^{\infty}\|_{q^*}^w \|(y_i^n)_{i=1}^{\infty}\|_{p^*}^w \\ &\leq (1+\varepsilon)\sum_{n=1}^{\infty} N_{(r,p,q)}(S_n).\end{aligned}$$

Lisaks on teada, et $\sum_{n=1}^{\infty} N_{(r,p,q)}(S_n)^s < \infty$. Seega kehtib tingimus (ii).

Omadus (iii) kehtib tänu sellele, et ruum ℓ_p on AK-ruum ([13, lk 191]). See tähendab et iga $i \in \mathbb{N}$ korral projektsioonkujutus $P_i : \ell_p \to \mathbb{K}$, $P_i(x) = x_i$ $(x \in \ell_p)$ on pidev ja kui $\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = x$ iga $x \in \ell_p$ korral, kus $x^{(n)} = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots)$. Kuna ruumide $\ell_p(X)$ ja $\ell_p^w(X)$ normid on defineeritud ruumi ℓ_p normi kaudu ja ruumi ℓ_p norm rahuldab tingimust (M), st iga $(\alpha_i) \in \lambda$ korral

$$(\beta_i) \subset (\alpha_i) \Rightarrow \|(\beta_i)\|_{\ell_p} \leq \|(\alpha_i)\|_{\ell_p},$$

siis $(p \geq 1)$ korral kehtib lemma tingimus (iv).

Seega saame lemma 3.11 põhjal, et rida $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\delta_i^n x_i^{*n}\otimes y_i^n$ koondub ruumis $\mathcal{N}_{(r,p,q)}$ ja ka selle rea liikmete diagonaalsel ümberjärjestamisel saadud rida $\sum_{n,i=1}^{\infty}\delta_i^n x_i^{*n}\otimes y_i^n$ koondub samaks elemendiks. Saame, et

$$S := \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\delta_i^n x_i^{*n}\otimes y_i^n = \sum_{n,i=1}^{\infty}\delta_i^n x_i^{*n}\otimes y_i^n,$$

on (r,p,q)-tuumaoperaator, kusjuures

$$N_{(r,p,q)}(S)^s \leq (1+\varepsilon)^s \sum_{n=1}^{\infty} N_{(r,p,q)}(S_n)^s.$$

Vaatleme nüüd juhtu $r=\infty$. Peame veenduma, et topeltindeksitega jada $(\delta_i^n)_{i,n\in\mathbb{N}}$ koondub nulliks. Selle näitamiseks kasutame lemmat 3.10. Valime jada $(\rho_n)\in c_0$, mille korral $0<\rho_n\leq 1, n\in\mathbb{N}$ ja

$$\sum_{n=1}^{\infty}\rho_n^{-s} N_{(\infty,p,q)}(S_n)^s \leq (1+\varepsilon)^s \sum_{n=1}^{\infty} N_{(\infty,p,q)}(S_n)^s.$$

Siis leiduvad sellised (∞,p,q)-tuumaesitused

$$S_n = \sum_{i=1}^{\infty}\delta_i^n x_i^{*n}\otimes y_i^n,$$

mille jaoks iga fikseeritud $n\in\mathbb{N}$ korral,

$$\begin{aligned}
\|(\delta_i^n)_{i=1}^{\infty}\|_{\infty} &\leq \rho_n,\\
\|(x_i^{*n})_{i=1}^{\infty}\|_{q^*}^w &\leq [\rho_n^{-1}(1+\varepsilon)N_{(\infty,p,q)}(S_n)]^{s/q^*},\\
\|(y_i^n)_{i=1}^{\infty}\|_{p^*}^w &\leq [\rho_n^{-1}(1+\varepsilon)N_{(\infty,p,q)}(S_n)]^{s/p^*}.
\end{aligned}$$

Nüüd oleme saanud, et topeltindeksitega jadade jaoks kehtivad järgmised võrratused

$$\begin{aligned}
\|(\delta_i^n)_{i,n\in\mathbb{N}}\|_{\infty} &\leq 1,\\
\|(x_i^{*n})_{i,n\in\mathbb{N}}\|_{q^*}^w &\leq \left[(1+\varepsilon)^s\sum_{i=1}^{\infty}\rho_n^{-s}N_{(\infty,p,q)}(S_n)^s\right]^{1/q^*},\\
\|(y_i^n)_{i,n\in\mathbb{N}}\|_{p^*}^w &\leq \left[(1+\varepsilon)^s\sum_{i=1}^{\infty}\rho_n^{-s}N_{(\infty,p,q)}(S_n)^s\right]^{1/p^*}.
\end{aligned}$$

Järelikult
$$S := \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} \delta_i^n x_i^{*n} \otimes y_i^n,$$
on (∞, p, q)-tuumaoperaator, kusjuures
$$N_{(\infty,p,q)}(S)^s \leq (1+\varepsilon)^{2s} \sum_{n=1}^{\infty} N_{(\infty,p,q)}(S_n)^s.$$

3. Olgu $S \in \mathcal{N}_{(r,p,q)}(X,Y)$ ja $\varepsilon > 0$. Vaatleme sellist operaatori S (r,p,q)-tuumaesitust
$$S = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i x_i^* \otimes y_i,$$
mille korral
$$\|(\delta_i)\|_r \|(x_i^*)\|_{q^*}^w \|(y_i)\|_{p^*}^w \leq (1+\varepsilon) N_{(r,p,q)}(S).$$
Kui $T \in \mathcal{L}(X_0, X)$ ja $R \in \mathcal{L}(Y, Y_0)$, siis
$$RST = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i T^* x_i^* \otimes R y_i \tag{10}$$
ja
$$\|(\delta_i)\|_r \|(T^* x_i^*)\|_{q^*}^w \|(R y_i)\|_{p^*}^w \leq (1+\varepsilon)\|R\| N_{(r,p,q)}(S)\|T\|.$$
Viimane võrratus kehtib tänu sellele, et
$$\|(Ry_i)\|_{p^*}^w \leq \|R\|_{p^*}^w \|(y_i)\|_{p^*}^w \leq \|R\|_{p^*} \|(y_i)\|_{p^*}^w \leq \|R\| \|(y_i)\|_{p^*}^w$$
ning analoogiliselt $\|(T^* x_i^*)\|_{q^*}^w \leq \|T\| \|(x_i^*)\|_{q^*}^w$. Märgime, et võrduse (10) kehtivust saab näidata analoogiliselt teoreemis 2.3 tõestatud võrduse (2) kehtivusega. Paneme tähele, et $Ry_i \in \ell_{p*}^w(Y_0)$. Tõepoolest, kuna $(y_i) \in \ell_{p*}^w(Y)$, siis iga $y^* \in Y^*$ korral $\|y^*(y_i)\|_{p^*} < \infty$. Kuna mistahes $y_0^* \in Y_0^*$ korral $y_0^* R \in Y^*$, siis järelikult
$$\|y_0^*(Ry_i)\|_{l_{p^*}} = \|(y_0^* R)(y_i)\|_{l_{p^*}} < \infty \text{ iga } y_0^* \in Y_0^* \text{ korral,}$$
mis tähendab, et $Ry_i \in \ell_{p*}^w(Y_0)$. Analoogiliselt saame, et $T^* x_i^* \in \ell_{q*}^w(X_0^*)$. Seega $RST \in \mathcal{N}_{(r,p,q)}(X_0, Y_0)$ ja $N_{(r,p,q)}(RST) \leq \|R\| N_{(r,p,q)}(S) \|T\|$.

$\square$

4 (λ, μ, ν)-tuumaoperaatorid

Selles peatükis defineerime ja tõestame bakalaureusetöö põhitulemuse, mis väidab, ey (λ, μ, ν)-tuumaoperaatorite klass on kvaasi-Banachi operaatorideaal. Kõigepealt antakse ülevaade olulisematest jadaruumidega seotud mõistest ja tulemustest, mis on vajalikud põhiteoreemi tõestamiseks. Teises alajaotuses defineeritakse (λ, μ, ν)-tuumaoperaatori mõiste. Seejärel tõestatakse, et (λ, μ, ν)-tuumaoperaatorite klass on operaatorideaal. Neljandas alajaotuses esitatakse mõned abitulemused, mida läheb vaja põhiteoreemi tõestamisel. Viimases alajaotuses tõestatakse töö põhiteoreem.

4.1 Eelteadmised jadaruumidest

Olgu ω kõigi selliste jadade ruum, mille elemendid on korpusest $\mathbb{K}$. Märgime, et ω on vektorruum üle korpuse $\mathbb{K}$. Sümboliga e^n ($n \in \mathbb{N}$) tähistame n-indat ühikvektorit ruumis ω. Teisisõnu, $e^n := (\delta_{nj})_{j\in\mathbb{N}}$, kus δ_{nj} on Kroneckeri delta. Ruumi ω alamruumi, mis on genereeritud ühikvektorite poolt, tähistame sümboliga ϕ. Teisisõnu, $\phi :=\text{span}\{e^n : n \in \mathbb{N}\}$.

Definitsioon 4.1. ([3, lk 356]) *Jadaruumiks* nimetame ruumi ω sellist alamruumi, mis sisaldab ruumi ϕ. Jadaruume tähistame sümbolitega λ, μ, ν. Jadaruumi elemente tähistame sümbolitega $\overline{\alpha} = (\alpha_i)$, $\overline{\beta} = (\beta_i)$.

Definitsioon 4.2. ([8, lk 405]) Jadaruumi λ *Köthe kaasruumi* tähistame sümboliga λ^* ja see on defineeritud järgmiselt

$$\lambda^* = \left\{ (x_i) \in \omega : \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i x_i| < \infty \quad \forall(\alpha_i) \in \lambda \right\}.$$

Järgnevalt esitame mõned omadused, mis jadaruumil λ võivad olla.

Definitsioon 4.3. ([3, lk 357]) Jadaruumi λ nimetatakse *monotoonseks*, kui iga $(\alpha_i) \in \lambda$ korral jada $(\varepsilon_i \alpha_i) \in \lambda$, kus iga $i \in \mathbb{N}$ korral $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$.

Jadaruumi λ monotoonsus tähendab seda, et kui mistahes jadas $(\alpha_i) \in \lambda$ teha vabalt valitud indeksitega liikmed nulliks, siis ka selline jada kuulub jadaruumi λ.

Järgmises definitsioonis ja edaspidi tähistame sümboliga Π kõigi hulga $\mathbb{N}$ permutatsioonide hulka.

Definitsioon 4.4. ([3, lk 356], [14, lk 810]) Jadaruumi λ nimetatakse *sümmeetriliseks*, kui $\overline{\alpha}_\sigma := (\alpha_{\sigma(i)}) \in \lambda$ iga $\overline{\alpha} \in \lambda$ ja iga $\sigma \in \Pi$ korral. Olgu jadaruum λ varustatud Mackey topoloogiaga (vt nt [9, lk 74]), mis sõltub duaalsest paarist (λ, λ^*) ning mis on määratud normi p poolt. Kui lisaks sümmeetrilisuse tingimusele iga $\sigma \in \Pi$ korral $p(\overline{\alpha}_\sigma) = p(\overline{\alpha})$ siis öeldakse, et jadaruum λ on *K-sümmeetriline*.

Definitsioon 4.5. ([3, lk 356]) Jadaruumi λ nimetatakse *normaalseks* (*normal*) või *soliidseks* (*solid*), kui

$$(\exists\, (\alpha_i) \in \lambda : \forall i \in \mathbb{N}\ |\beta_i| \leq |\alpha_i|) \Rightarrow (\beta_i) \in \lambda.$$

Olgu $n \in \mathbb{N}$. Jada $\overline{\alpha}$ n-indaks lõikeks nimetame jada

$$\overline{\alpha}^{(n)} := (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, 0, 0, \ldots)$$

ehk teisisõnu $\overline{\alpha}^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^i$.

Definitsioon 4.6. ([3, lk 357]) Olgu $\|\cdot\|_\lambda$ norm jadaruumis λ. Banachi jadaruumi $(\lambda, \|\cdot\|_\lambda)$ nimetatakse *BK-ruumiks*, kui iga $i \in \mathbb{N}$ korral projektsioonkujutus $P_i : \lambda \to \mathbb{K}$, $P_i(\overline{\alpha}) = \alpha_i$ on pidev. BK-ruumi $(\lambda, \|\cdot\|_\lambda)$ nimetatakse *AK-ruumiks*, kui $\lim_{n\to\infty} \overline{\alpha}^{(n)} = \overline{\alpha}$ iga $\overline{\alpha} \in \lambda$ korral.

Definitsioon 4.7. Öeldakse, et jadaruumi λ normil $\|\cdot\|_\lambda$ on omadus (M), kui iga $(\alpha_i) \in \lambda$ korral

$$(\beta_i) \subset (\alpha_i) \Rightarrow \|(\beta_i)\|_\lambda \leq \|(\alpha_i)\|_\lambda.$$

Definitsioon 4.8. ([14, lk 810]) Sümboliga $\lambda^w(X)$ tähistame kõigi selliste jadade $(x_i) \subset X$ ruumi, mille jaoks iga $x^* \in X^*$ korral $(x^*(x_i)) \in \lambda$. Teisisõnu,

$$\lambda^w(X) = \{(x_i) \subset X : (x^*(x_i)) \in \lambda \quad \forall x^* \in X^*\}.$$

Olgu $\|\cdot\|_\lambda$ ruumis λ defineeritud norm. Defineerime

$$\|(x_i)\|_\lambda^w = \sup_{\|x^*\| \leq 1} \|(x^*(x_i))\|_\lambda.$$

Märgime, et see supreemum leidub kinnise graafiku teoreemi põhjal.

Lemma 4.9. *Kujutus $\|\cdot\|_\lambda^w : \lambda^w(X) \to \mathbb{R}$ on norm.*

Tõestus. Kuna $\|\cdot\|_\lambda$ on norm, siis sellest järeldub, et $\|(x_i)\|_\lambda^w = 0 \Leftrightarrow (x_i) = 0$ ja $\|k(x_i)\|_\lambda^w = |k|\|(x_i)\|_\lambda^w$ iga $k \in \mathbb{K}$ korral. Veendume, et kehtib normi kolmnurgavõrratus.

$$\begin{aligned}
\|(x_i) + (y_i)\|_\lambda^w &= \sup_{\|x^*\|\leq 1} \|x^*(x_i + y_i)\|_\lambda = \sup_{\|x^*\|\leq 1} \|x^*(x_i) + x^*(y_i)\|_\lambda \\
&\leq \sup_{\|x^*\|\leq 1} (\|x^*(x_i)\|_\lambda + \|x^*(y_i)\|_\lambda) \\
&\leq \sup_{\|x^*\|\leq 1} \|x^*(x_i)\|_\lambda + \sup_{\|x^*\|\leq 1} \|x^*(y_i)\|_\lambda \\
&= \|(x_i)\|_\lambda^w + \|(y_i)\|_\lambda^w.
\end{aligned}$$

□

Definitsioon 4.10. ([14, lk 811]) Sümboliga $\lambda^s(X)$ tähistame kõigi selliste vektorite $(x_i) \in X$ ruumi, mille korral $(\|x_i\|) \in \lambda$. Teisisõnu,

$$\lambda^s(X) = \{(x_i) \in X : (\|x_i\|) \in \lambda\}.$$

Kui normil $\|\cdot\|_\lambda$ on omadus (M), siis ruumis $\lambda^s(X)$ saame defineerida loomuliku normi järgmiselt

$$\|(x_i)\|_\lambda^s = \|(\|x_i\|)\|_\lambda.$$

Lemma 4.11. *Kui jadaruum λ on monotoonne ja sümmeetriline, siis*

$$(x_i), (y_i) \in \lambda \Rightarrow (x_1, y_1, x_2, y_2, \dots) \in \lambda.$$

Tõestus. Olgu jadaruum λ on monotoonne ja sümmeetriline ning olgu $(x_i), (y_i) \in \lambda$. Tänu jadaruumi λ monotoonsusele saame, et $\overline{a} = (x_1, 0, x_3, 0, x_5, 0, \dots), \overline{b} = (0, x_2, 0, x_4, 0, x_6, \dots) \in \lambda$. Defineerime permutatsioonid $\sigma_1, \sigma_2 \in \Pi$ järgmiselt:

$$\sigma_1(i) = \begin{cases} 2i-1, & \text{kui } i = 2k+1, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ 2, & \text{kui } i = 2, \\ \sigma_1(i-2)+1, & \text{kui } i = 2k, k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, i+1 \not\equiv 0 \pmod 3, \\ \sigma_1(i-2)+2, & \text{kui } i = 2k, k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, i+1 \equiv 0 \pmod 3, \end{cases}$$

$$\sigma_2(i) = \begin{cases} 2i-1, & \text{kui } i = 2k, k \in \mathbb{N}, \\ 1, & \text{kui } i = 1, \\ \sigma_2(i-2)+1, & \text{kui } i = 2k+1, k \in \mathbb{N}, i+1 \not\equiv 0 \pmod 3, \\ \sigma_2(i-2)+2, & \text{kui } i = 2k+1, k \in \mathbb{N}, i+1 \equiv 0 \pmod 3. \end{cases}$$

Kuna jadaruum λ on sümmeetriline, siis

$$\overline{a}_{\sigma_1} = (x_1, 0, 0, 0, x_3, 0, 0, 0, x_5, \dots) \in \lambda \text{ ja}$$
$$\overline{b}_{\sigma_2} = (0, 0, x_2, 0, 0, 0, x_4, 0, 0, 0, x_6, \dots) \in \lambda$$

ning järelikult

$$\overline{a}_{\sigma_1} + \overline{b}_{\sigma_2} = (x_1, 0, x_2, 0, x_3, 0, \dots) \in \lambda.$$

Analoogiliselt saame, et $(0, y_1, 0, y_2, 0, y_3, \dots) \in \lambda$ ning kokkuvõttes $(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots) \in \lambda$. □

Lemma 4.12. *Kui jadaruumil λ on omadus (M), siis ka jadaruumil $\lambda^w(X)$ on omadus (M).*

4.2 (λ, μ, ν)-tuumaoperaatori mõiste

Järgmise definitsiooni esitamiseks on vaja eeldada, et jadaruumil λ on teatud omadused. Olgu jadaruum λ sümmeetriline ja olgu λ^* tema Köthe kaasruum. Eeldame, et jadaruum λ on varustatud Mackey topoloogiaga, mis sõltub duaalsest paarist (λ, λ^*). Lisaks eeldame, et jadaruum λ on normaalne, K-sümmeetriline ja AK-ruum.

Märgime, et lisaks jadaruumidele ℓ_p $(1 \le p < \infty)$ rahuldavad neid tingimusi ka Sargent'i jadaruumid $n(\varphi)$ ([15, lk 162]) ja Garlingi jadaruumid $\mu_{a,p}, \nu_{a,p}$ ([5, lk 603]).

Definitsioon 4.13. ([14, lk 811]) Operaatorit $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ nimetatakse λ-*tuumaoperaatoriks*, kui see on esitatav kujul

$$T = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^* \otimes y_i, \tag{11}$$

kus $(x_i^*) \in \lambda^s(X^*)$ ja $(y_i) \in (\lambda^*)^w(Y)$ on selline, et $\|(y_i)\|_{\lambda^*}^w < \infty$. Operaatori T esitust kujul (11) nimetatakse operaatori T λ-*tuumaesituseks*. Tähistame

λ-tuumanormi

$$N_\lambda(T) := \inf \|(x_i^*)\|_\lambda^s \|(y_i)\|_{\lambda_*}^w,$$

kus infiimum võetakse üle kõigi λ-tuumaesituste.

Teine ekvivalentne võimalus λ-tuumaoperaatori defineerimiseks on järgmine. Operaatorit $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ nimetatakse *λ-tuumaoperaatoriks*, kui see on esitatav kujul

$$T = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i x_i^* \otimes y_i, \tag{12}$$

kus $(\delta_i) \in \lambda$, $(x_i^*) \subset X^*$, $\|x_i^*\| \leq 1$ iga $i \in \mathbb{N}$ korral ja $(y_i) \in (\lambda^*)^w(Y)$ on selline, et $\|(y_i)\|_{\lambda^*}^w \leq 1$. Siis λ-tuumanorm on

$$N_\lambda(T) = \inf \|(\delta_i)\|_\lambda,$$

kus infiimum võetakse üle kõigi λ-tuumaesituste.

Märgime, et read (11) ja (12) koonduvad ruumi $\mathcal{L}(X,Y)$ normi järgi.

Märkus 4.14. ([13, lk 190]) Juhul $\lambda = \ell_1$ on ℓ_1-tuumaoperaator tuumaoperaator. Kui $\lambda = \ell_p$, siis ℓ_p-tuumaoperaator on $(p,1,p^*)$-tuumaoperaator.

Eespool toodud (r,p,q)- ja λ-tuumaoperaatori mõistete eeskujul defineerime (λ,μ,ν)-tuumaoperaatori.

Definitsioon 4.15. Olgu λ, μ, ν sellised jadaruumid, kus on defineeritud vastavalt normid $\|\cdot\|_\lambda$, $\|\cdot\|_\mu$, $\|\cdot\|_\nu$. Operaatorit $S \in \mathcal{L}(X,Y)$ nimetame *(λ,μ,ν)-tuumaoperaatoriks*, kui see on esitatav kujul

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i x_i^* \otimes y_i, \tag{13}$$

kus $(\delta_i) \in \lambda$, $(x_i^*) \in \mu^w(X^*)$ ja $(y_i) \in \nu^w(Y)$. Märgime, et rida (13) koondub ruumi $\mathcal{L}(X,Y)$ normi järgi. Operaatori S esitust kujul (13) nimetame operaatori S *(λ,μ,ν)-tuumaesituseks.* Tähistame (λ,μ,ν)-tuumaoperaatori S (λ,μ,ν)-tuumanormi

$$N_{(\lambda,\mu,\nu)}(S) := \inf \|(\delta_i)\|_\lambda \, \|(x_i^*)\|_\mu^w \, \|(y_i)\|_\nu^w \,,$$

kus infiimum võetakse üle kõigi (λ,μ,ν)-tuumaesituste. Kõigi (λ,μ,ν)- tuumaoperaatorite klassi tähistatame sümboliga $\mathcal{N}_{(\lambda,\mu,\nu)}$.

Märkus 4.16. Juhul $\lambda = \ell_r, \mu = \ell_{q^*}, \nu = \ell_{p^*}$ on $(\ell_r, \ell_{q^*}, \ell_{p^*})$-tuumaoperaator (r, p, q)-tuumaoperaator. Kui $\mu = \ell_\infty, \nu = \lambda^*$ ja kui $(\lambda, \ell_\infty, \lambda^*)$-tuumaoperaatori esitus sobivalt ära normeerida (st arvestades, et $\delta_i x_i^* \otimes y_i = \|(x_i^*)\|_\mu \|(y_i)\|_\nu \delta_i \|(x_i^*)\|_\mu^{-1} \|(y_i)\|_\nu^{-1} x_i^* \otimes y_i$), siis $(\lambda, \ell_\infty, \lambda^*)$-tuumaoperaator on λ-tuumaoperaator.

4.3 (λ, μ, ν)-tuumaoperaatorid kui operaatorideaal

Teoreem 4.17. *Olgu jadaruumid λ, μ, ν monotoonsed ja sümmeetrilised. Siis $\mathcal{N}_{(\lambda,\mu,\nu)}$ on operaatorideaal.*

Tõestus. Vastavalt operaatorideaali definitsioonile 1.4 tuleb kontrollida, et kehtivad kolm tingimust.

1. Kuna $(1, 0, 0, \dots) \in \lambda, (I_{\mathbb{K}}, 0, 0, \dots) \in \mu^w(\mathbb{K}^*), (1, 0, 0, \dots) \in \nu^w(\mathbb{K})$ ja $I_{\mathbb{K}} = 1 \cdot I_{\mathbb{K}} \otimes 1$, siis $I_{\mathbb{K}} \in \mathcal{N}_{(\lambda,\mu,\nu)}$.

2. Olgu $S_1, S_2 \in \mathcal{N}_{(\lambda,\mu,\nu)}(X, Y)$ ja olgu

$$S_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i^1 x_i^{*1} \otimes y_i^1, \quad S_2 = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i^2 x_i^{*2} \otimes y_i^2$$

operaatorite S_1, S_2 mingid vabalt valitud (λ, μ, ν)-tuumaesitused, kus $(\delta_i^k) \in \lambda, (x_i^{*k}) \in \mu^w(X^*)$ ja $(y_i^k) \in \nu^w(Y)$, $k = 1, 2$. Meil on vaja näidata, et $S_1 + S_2 \in \mathcal{N}_{(\lambda,\mu,\nu)}(X, Y)$. Kuna

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 &= \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i^1 x_i^{*1} \otimes y_i^1 + \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i^2 x_i^{*2} \otimes y_i^2 = \sum_{j=1}^{2} \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i^j x_i^{*j} \otimes y_i^j \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2} \delta_i^j x_i^{*j} \otimes y_i^j \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} (\delta_1^1, \delta_1^2, \delta_2^1, \delta_2^2, \dots) \in \lambda, (x_1^{*1}, x_1^{*2}, x_2^{*1}, x_2^{*2}, \dots) \in \mu^w(X^*), \\ (y_1^1, y_1^2, y_2^1, y_2^2, \dots) \in \nu^w(Y), \end{aligned}$$

siis $S_1 + S_2 \in \mathcal{N}_{(\lambda,\mu,\nu)}(X, Y)$.

3. Olgu $T \in \mathcal{L}(X_0, X), S \in \mathcal{N}_{(\lambda,\mu,\nu)}(X, Y), R \in \mathcal{L}(Y, Y_0)$ ja olgu

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i x_i^* \otimes y_i$$

operaatori S mingi (λ, μ, ν)-tuumaesitus, kus $(\delta_i) \in \lambda$, $(x_i^*) \in \mu^w(X^*)$ ja $(y_i) \in \nu^w(Y)$. Siis

$$RST = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i T^* x_i^* \otimes R y_i. \tag{14}$$

Märgime, et võrduse (14) kehtivust saab näidata analoogiliselt teoreemis 2.3 tõestatud võrduse (2) kehtivusega. Sisalduvuse $RST \in \mathcal{N}_{(\lambda,\mu,\nu)}(X_0, Y_0)$ näitamiseks piisab veenduda, et $(T^* x_i^*) \in \mu^w(X_0^*)$ ja $(Ry_i) \in \nu^w(Y_0)$. Viimase sisalduvuse kehtivuseks on vaja näidata, et iga $y_0^* \in Y_0^*$ korral $(y_0^*(Ry_i)) \in \nu$.

Fikseerime $y_0^* \in Y_0^*$. Teame, et $(y_i) \in \nu^w(Y)$. seega iga $y^* \in Y^*$ korral $(y^*(y_i)) \in \nu$. Kuna $y_0^*(Ry_i) = (y_0^* R)(y_i)$ ja $y_0^* R \in Y^*$ siis $(y_0^*(Ry_i)) \in \nu$. Märgime, et sisalduvuse $(T^* x_i^*) \in \mu^w(X_0^*)$ kehtivust saab näidata analoogiliselt.

□

4.4 Abitulemused

Lemma 4.18. *[13, lk 191] Kui λ on AK-ruum, siis $\lambda^s(X)$ on AK-ruum.*

Definitsioon 4.19. Olgu iga $n \in \mathbb{N}$ korral $(x_i^n)_{i=1}^{\infty}$ kvaasinormeeritud ruumi $(\lambda, \|\cdot\|_\lambda)$ elementide jada nii, et $\sum_{n=1}^{\infty} \|(x_i^n)_{i=1}^{\infty}\|_\lambda < \infty$. Olgu $\widehat{x}$ jada, kus iga x_i^n esineb maksimaalselt korra. Öeldakse, et kvaasinormeeritud jadaruumil $(\lambda, \|\cdot\|_\lambda)$ on omadus (A), kui $\|\widehat{x}\|_\lambda \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|(x_i^n)_{i=1}^{\infty}\|_\lambda$ ja $\widehat{x} \in \lambda$.

Definitsioon 4.20. Jadaruumide λ ja μ korrutisruum defineeritakse

$$\lambda\mu = \{(x_i y_i) : (x_i) \in \lambda, (y_i) \in \mu\}.$$

Definitsioon 4.21. Ütleme, et jadaruumide λ, μ, ν jaoks kehtib tingimus (P), kui $\lambda\mu\nu \subset \ell_1$ ja iga $(x_i) \in \lambda, (y_i) \in \mu, (z_i) \in \nu$ korral $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i z_i| \leq \|(x_i)\|_\lambda \|(y_i)\|_\mu \|(z_i)\|_\nu$.

Lause 4.22. *[13, lk 192] põhjal. Kehtigu tingimus (P). Iga (λ, μ, ν)-tuumaoperaatori T korral $\|T\| \leq N_{(\lambda,\mu,\nu)}(T)$.*

Tõestus. Kuna T on (λ, μ, ν)-tuumaoperaator, siis iga $\varepsilon > 0$ korral leidub operaatori (λ, μ, ν)-tuumaesitus

$$T = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i x_i^* \otimes y_i,$$

kus $(\delta_i) \in \lambda$, $(x_i^*) \in \mu^w(X^*)$ ja $(y_i) \in \nu^w(Y)$ ning mille korral

$$\|(\delta_i)\|_\lambda \|(x_i^*)\|_\mu^w \|(y_i)\|_\nu^w \leq N_{(\lambda,\mu,\nu)}(T) + \varepsilon.$$

Seega, fikseerides vabalt $\varepsilon > 0$, saame, et

$$\begin{aligned}\|Tx\| &= \sup_{\|y*\| \leq 1} |y^*(Tx)| = \sup_{\|y*\| \leq 1} \left| \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i x_i^*(x) y^*(y_i) \right| \\ &\leq \|(\delta_i)\|_\lambda \|(x_i^*)\|_\mu^w \|(y_i)\|_\nu^w \|x\| < (N_{(\lambda,\mu,\nu)}(T) + \varepsilon)\|x\|.\end{aligned}$$

Seega $\|T\| \leq N_{(\lambda,\mu,\nu)}(T)$. □

4.5 (λ, μ, ν)-tuumaoperaatorid kui kvaasi-Banachi operaatorideaal

Teoreem 4.23. *Olgu kvaasinormeeritud jadaruumid $(\lambda, \|\cdot\|_\lambda)$, $(\mu, \|\cdot\|_\mu)$, $(\nu, \|\cdot\|_\nu)$ normaalsed ja K-sümmeetrilised AK-ruumid omadusega (A). Kehtigu tingimus (P). Siis $\left(\mathcal{N}_{(\lambda,\mu,\nu)}, N_{(\lambda,\mu,\nu)}\right)$ on kvaasinormeeritud operaatorideaal.*

Tõestus. Kontrollime, et $N_{(\lambda,\mu,\nu)}$ rahuldab operaatorideli kvaasinormi definitsiooni (1.6) kolme tingimust.

1. Meil on vaja näidata, et $N_{(\lambda,\mu,\nu)}(I_{\mathbb{K}}) = 1$. Kuna $I_{\mathbb{K}} = 1 \cdot I_{\mathbb{K}} \otimes 1$, s.t valime $(\delta_i) = (1, 0, 0, \dots) \in \lambda, (x_i^*) = (I_{\mathbb{K}}, 0, 0, \dots) \in \mu^w(\mathbb{K}^*)$ ja $(y_i) = (1, 0, 0, \dots) \in \nu^w(\mathbb{K})$, siis $N_{(\lambda,\mu,\nu)}(I_{\mathbb{K}}) \leq 1$.

   Olgu
$$I_{\mathbb{K}} = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i x_i^* \otimes y_i$$
   operaatori $I_{\mathbb{K}}$ mingi vabalt valitud (λ, μ, ν)-tuumaesitus, kus $(\delta_i) \in \lambda, (x_i^*) \in \mu^w(\mathbb{K}^*)$ ja $(y_i) \in \nu^w(\mathbb{K})$. Tähistades $x_i' := x_i^*(1) \in \mathbb{K}$, saame, et $I_{\mathbb{K}}(1) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \delta_i x_i^* \otimes y_i \right)(1)$ ehk $1 = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i x_i' y_i$. Järelikult
$$1 \leq \|(\delta_i x_i' y_i)\|_1 \leq \|(\delta_i)\|_\lambda \|(x_i^*)\|_\mu^w \|(y_i)\|_\nu^w$$
   ja seega $1 \leq N_{(\lambda,\mu,\nu)}(I_{\mathbb{K}})$. Kokkuvõttes $N_{(\lambda,\mu,\nu)}(I_{\mathbb{K}}) = 1$.

2. Vaja näidata, et leidub konstant $\varkappa \geq 1$ nii, et
$$\forall\, S_1, S_2 \in \mathcal{N}_{(\lambda,\mu,\nu)}(X, Y) \quad N_{(\lambda,\mu,\nu)}(S_1 + S_2) \leq \varkappa \left[N_{(\lambda,\mu,\nu)}(S_1) + N_{(\lambda,\mu,\nu)}(S_2) \right].$$
   Olgu $S_1, S_2 \in \mathcal{N}_{(\lambda,\mu,\nu)}(X, Y)$ ja olgu
$$S_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i^1 x_i^{*1} \otimes y_i^1, \quad S_2 = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i^2 x_i^{*2} \otimes y_i^2 \tag{15}$$
   operaatorite S_1, S_2 mingid vabalt valitud (λ, μ, ν)-tuumaesitused, kus $\left(\delta_i^k\right) \in \lambda, \left(x_i^{*k}\right) \in \mu^w(X^*)$ ja $\left(y_i^k\right) \in \nu^w(Y)$, $k = 1, 2$. Teoreemi 4.17 tõestuse alapunkti 2 põhjal saame, et
$$S_1 + S_2 = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2} \delta_i^j x_i^{*j} \otimes y_i^j.$$
   Kusjuures $\overline{\delta} := (\delta_1^1, \delta_1^2, \delta_2^1, \delta_2^2, \dots) \in \lambda, \overline{x} := (x_1^{*1}, x_1^{*2}, x_2^{*1}, x_2^{*2}, \dots) \in \mu^w(X^*), \overline{y} := (y_1^1, y_1^2, y_2^1, y_2^2, \dots) \in \nu^w(Y)$ tänu jadaruumide λ, μ, ν monotoonsusele. Tähistades iga $(\alpha_i) \in \omega$ korral
$$(j_1 \alpha_i) := (\alpha_1, 0, \alpha_2, 0, \alpha_3, 0, \dots) \quad \text{ja} \quad (j_2 \alpha_i) := (0, \alpha_1, 0, \alpha_2, 0, \alpha_3, 0, \dots),$$

saame, et $\overline{\delta} = (j_1\delta_i^1) + (j_2\delta_i^2)$, $\overline{x} = (j_1x_i^{*1}) + (j_2x_i^{*2})$ ja $\overline{y} = (j_1y_i^1) + (j_2y_i^2)$. Paneme tähele, et $\|(j_k\alpha_i)\|_\lambda = \|(\alpha_i)\|_\lambda, k = 1,2$. Kuna $\|\cdot\|_\lambda$, $\|\cdot\|_\mu^w$ ja $\|\cdot\|_\nu^w$ on normid, siis kehtib nende jaoks kolmnurgavõrratus. Seega

$$\begin{aligned} N_{(\lambda,\mu,\nu)}(S_1+S_2) &\leq \|\overline{\delta}\|_\lambda \, \|\overline{x}\|_\mu^w \, \|\overline{y}\|_\nu^w \\ &= \|(j_1\delta_i^1) + (j_2\delta_i^2)\|_\lambda \, \|(j_1x_i^{*1}) + (j_2x_i^{*2})\|_\mu^w \, \|(j_1y_i^1) + (j_2y_i^2)\|_\nu^w \\ &\leq \left(\|(\delta_i^1)\|_\lambda + \|(\delta_i^2)\|_\lambda\right)\left(\|(x_i^{*1})\|_\mu^w + \|(x_i^{*2})\|_\mu^w\right)\left(\|(y_i^1)\|_\nu^w + \|(y_i^2)\|_\nu^w\right). \end{aligned}$$

Operaatorite S_1, S_2 (λ,μ,ν)-tuumaesituste (15) asemel võime vaadelda nende operaatorite normeeritud (λ,μ,ν)-tuumaesitusi

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{i=1}^\infty \left\|(x_i^{*1})\right\|_\mu^w \, \left\|(y_i^1)\right\|_\nu^w \, \delta_i^1 \frac{x_i^{*1}}{\|(x_i^{*1})\|_\mu^w} \otimes \frac{y_i^1}{\|(y_i^1)\|_\nu^w}, \\ S_2 &= \sum_{i=1}^\infty \left\|(x_i^{*2})\right\|_\mu^w \, \left\|(y_i^2)\right\|_\nu^w \, \delta_i^2 \frac{x_i^{*2}}{\|(x_i^{*2})\|_\mu^w} \otimes \frac{y_i^2}{\|(y_i^2)\|_\nu^w}. \end{aligned}$$

Siis saame, et

$$\begin{aligned} & N_{(\lambda,\mu,\nu)}(S_1+S_2) \\ & \quad \leq \left\| \left[\left\|(x_i^{*1})\right\|_\mu^w \left\|(y_i^1)\right\|_\nu^w \; (j_1\delta_i^1)\right] + \left[\left\|(x_i^{*2})\right\|_\mu^w \left\|(y_i^2)\right\|_\nu^w \; (j_2\delta_i^2)\right]\right\|_\lambda \\ & \qquad \left\| \frac{(j_1x_i^{*1})}{\|(x_i^{*1})\|_\mu^w} + \frac{(j_2x_i^{*2})}{\|(x_i^{*2})\|_\mu^w}\right\|_\mu^w \left\| \frac{(j_1y_i^1)}{\|(y_i^1)\|_\nu^w} + \frac{(j_2y_i^2)}{\|(y_i^2)\|_\nu^w}\right\|_\nu^w \\ & \leq \left(\left\|(\delta_i^1)\right\|_\lambda \left\|(x_i^{*1})\right\|_\mu^w \left\|(y_i^1)\right\|_\nu^w + \left\|(\delta_i^2)\right\|_\lambda \left\|(x_i^{*2})\right\|_\mu^w \left\|(y_i^2)\right\|_\nu^w\right)(1+1)(1+1) \\ & \quad = 4\left(\left\|(\delta_i^1)\right\|_\lambda \left\|(x_i^{*1})\right\|_\mu^w \left\|(y_i^1)\right\|_\nu^w + \left\|(\delta_i^2)\right\|_\lambda \left\|(x_i^{*2})\right\|_\mu^w \left\|(y_i^2)\right\|_\nu^w\right). \quad (16) \end{aligned}$$

Kuna võrratusteahel (16) kehtib operaatorite S_1, S_2 mistahes normeeritud (λ,μ,ν)-tuumaesituste korral, siis

$$\begin{aligned} N_{(\lambda,\mu,\nu)}(S_1+S_2) &\leq 4\left[\inf \left\|(\delta_i^1)\right\|_\lambda \left\|(x_i^{*1})\right\|_\mu^w \left\|(y_i^1)\right\|_\nu^w + \inf \left\|(\delta_i^2)\right\|_\lambda \left\|(x_i^{*2})\right\|_\mu^w \left\|(y_i^2)\right\|_\nu^w\right] \\ &= 4\left[N_{(\lambda,\mu,\nu)}(S_1) + N_{(\lambda,\mu,\nu)}(S_2)\right]. \end{aligned}$$

3. Olgu $T \in \mathcal{L}(X_0, X)$, $S \in \mathcal{N}_{(\lambda,\mu,\nu)}(X,Y)$ ja $R \in \mathcal{L}(Y, Y_0)$. Vaja näidata, et $N_{(\lambda,\mu,\nu)}(RST) \leq \|R\| N_{(\lambda,\mu,\nu)}(S)\|T\|$. Vaatleme sellist operaatori

S (λ, μ, ν)-tuumaesitust

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i x_i^* \otimes y_i,$$

mille korral

$$\|(\delta_i)\|_\lambda \|(x_i^*)\|_\mu^w \|(y_i)\|_\nu^w \leq (1+\varepsilon) N_{(\lambda,\mu,\nu)}(S).$$

Teoreemi 4.17 põhjal $RST \in \mathcal{N}_{(\lambda,\mu,\nu)}$ ja

$$RST = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i T^* x_i^* \otimes R y_i.$$

Paneme tähele, et

$$R^* y_0^* = \|R^* y_0^*\| \frac{R^* y_0^*}{\|R^* y_0^*\|}$$

ning $\|R^* y_0^*\| \leq \|R^*\| \|y_0^*\| = \|R\| \|y_0^*\|$. Seega saame, et

$$\|(R y_i)\|_\nu^w \leq \|R\| \, \|(y_i)\|_\nu^w$$

ning analoogiliselt $\|(T^* x_i^*)\|_\mu^w \leq \|T\| \, \|(x_i^*)\|_\mu^w$. Seega

$$\|(\delta_i)\|_\lambda \, \|(T^* x_i^*)\|_\mu^w \, \|(R y_i)\|_\nu^w \leq (1+\varepsilon) \|R\| N_{(\lambda,\mu,\nu)}(S) \|T\|,$$

millest järeldub, et $N_{(\lambda,\mu,\nu)}(RST) \leq \|R\| N_{(\lambda,\mu,\nu)}(S) \|T\|$.

Seega oleme näidanud, et $N_{(\lambda,\mu,\nu)}$ on kvaasinorm. □

Teoreem 4.24. *Olgu kvaasinormeeritud jadaruumid* $(\lambda, \|\cdot\|_\lambda)$, $(\mu, \|\cdot\|_\mu)$, $(\nu, \|\cdot\|_\nu)$ *normaalsed ja K-sümmeetrilised jadaruumid omadusega (A). Olgu jadaruum* λ *AK-ruum. Kehtigu tingimus* (P). *Siis* $\big(\mathcal{N}_{(\lambda,\mu,\nu)}, N_{(\lambda,\mu,\nu)}\big)$ *on kvaasi-Banachi operaatorideaal.*

Tõestus. Teoreemi tõestuseks veendume, et iga Banachi ruumi X, Y korral $\mathcal{N}_{(\lambda,\mu,\nu)}(X,Y)$ on täielik. Tõestus on inspireeritud artiklist [13, lk 192]. Olgu (S_n) Cauchy jada ruumis $\mathcal{N}_{(\lambda,\mu,\nu)}(X,Y)$. Olgu fikseeritud $n \in \mathbb{N}$ korral operaatori S_n (λ, μ, ν)-tuumaesitus

$$S_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^n b_i^{*n} \otimes c_i^n.$$

Fikseerime $\varepsilon > 0$. Siis iga $j \in \mathbb{N}$ korral leidub $M_j \in \mathbb{N}$ nii, et

$$N_{(\lambda,\mu,\nu)}(S_{M_{j+1}} - S_{M_j}) < \frac{\varepsilon}{8^j}.$$

Seega leidub iga $j \in \mathbb{N}$ korral operaatoril S_{M_j} selline (λ, μ, ν)-tuumaesitus, et

$$S_{M_{j+1}} - S_{M_j} = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i^j x_i^{*j} \otimes y_i^j, \tag{17}$$

kus iga $i \in \mathbb{N}$ korral

$$\delta_i^j = a_i^{M_{j+1}} - a_i^{M_j},\ x_i^{*j} = b_i^{*M_{j+1}} - b_i^{*M_j},\ y_i^j = c_i^{M_{j+1}} - c_i^{M_j}$$

ja

$$\delta^j = \left(\delta_i^j\right)_{i=1}^{\infty} \in \lambda,\ x^{*j} = \left(x_i^{*j}\right)_{i=1}^{\infty} \in \mu^w(X^*) \text{ ja } y^j = \left(y_i^j\right)_{i=1}^{\infty} \in \nu^w(Y)$$

ning

$$\left\|\left(\delta_i^j\right)_{i=1}^{\infty}\right\|_{\lambda} < \frac{\sqrt[3]{\varepsilon}}{2^j},\ \left\|\left(x_i^{*j}\right)_{i=1}^{\infty}\right\|_{\mu}^{w} < \frac{\sqrt[3]{\varepsilon}}{2^j},\ \left\|\left(y_i^j\right)_{i=1}^{\infty}\right\|_{\nu}^{w} < \frac{\sqrt[3]{\varepsilon}}{2^j}. \tag{18}$$

Siis

$$\begin{aligned} S_{M_{j+p}} - S_{M_j} &= S_{M_{j+p}} - S_{M_{j+p-1}} + S_{M_{j+p-1}} - S_{M_{j+p-2}} + \ldots + S_{M_{j+1}} - S_{M_j} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i^{j+p-1} x_i^{*j+p-1} \otimes y_i^{j+p-1} + \ldots + \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i^j x_i^{*j} \otimes y_i^j \\ &= \sum_{k=j}^{j+p-1} \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i^k x_i^{*k} \otimes y_i^k. \end{aligned} \tag{19}$$

Kuna lause 4.22 põhjal on iga (λ, μ, ν)-tuumaoperaatori S korral $\|S\| \leq N_{(\lambda,\mu,\nu)}(S)$ ja kuna (S_n) on Cauchy jada kvaasinormi $N_{(\lambda,\mu,\nu)}$ korral, siis (S_n) on Cauchy jada ruumis $\mathcal{L}(X, Y)$. Tänu sellele, et Y on täielik, leidub operaator $S \in \mathcal{L}(X, Y)$ nii, et $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ ruumis $\mathcal{L}(X, Y)$.

Vaadates nüüd võrdust (19) protsessis $p \to \infty$, saame, et

$$S - S_{M_j} = \sum_{k=j}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i^k x_i^{*k} \otimes y_i^k. \tag{20}$$

Olgu $(\widehat{\delta_l}), (\widehat{x^*}_l), (\widehat{y_l})$ vastavad diagonaalsel ümberjärjestamisel saadud jadad (vt ptk 2.2 algus). Tänu omadusele (A) ja võrratuste (18) põhjal

$$\left\|(\widehat{\delta_l})\right\|_\lambda \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|(\delta_i^k)_{i=1}^\infty\|_\lambda < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{\varepsilon}}{2^k} = \sqrt[3]{\varepsilon} \tag{21}$$

ning analoogiliselt

$$\left\|(\widehat{x^*}_l)\right\|_\mu^w < \sqrt[3]{\varepsilon} \quad \text{ja} \quad \|(\widehat{y_l})\|_\nu^w < \sqrt[3]{\varepsilon}. \tag{22}$$

Tähistame iga $i, k \in \mathbb{N}$ korral $a_i^k = \delta_i^k x_i^{*k} \otimes y_i^k$ ja jada (a_i^k) iga osajada $(a_{i_m}^k)_{m=1}^\infty$ korral

$$p_k((a_{i_m}^k)_{m=1}^\infty) = \left\|(\delta_{i_m}^k)_{m=1}^\infty\right\|_\lambda \left\|(x_{i_m}^{*k})_{m=1}^\infty\right\|_\mu^w \left\|(y_{i_m}^k)_{m=1}^\infty\right\|_\nu^w .$$

Kontrollime, et lemma 3.11 eeldused on täidetud. Lemma sõnastuses on ruumi X rollis $\mathcal{N}_{(\lambda,\mu,\nu)}(X, Y)$. Esiteks paneme tähele, et iga $k \in \mathbb{N}$ korral $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^k = S_k \in \mathcal{N}_{(\lambda,\mu,\nu)}(X, Y)$. Lisaks kuna iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$N_{(\lambda,\mu,\nu)}(S_n) \leq \|(\delta_i^n)_{i=1}^\infty\|_\lambda \|(x_i^{*n})_{i=1}^\infty\|_\mu^w \|(y_i^n)_{i=1}^\infty\|_\nu^w = p_n(a^n)$$

siis on lemma 3.11 eeldus (i) täidetud. Tänu võrratustele (18) tingimus (ii). Omadus (iii) kehtib tänu sellele, et lemma 4.18 põhjal on λ^s on AK-ruum. Kuna jadaruumide μ ja ν normidel on omadus (M), siis kehtib lemma tingimus (iv).

Lemma 3.11 põhjal saame, et rida $\sum_{k=j}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i^k x_i^{*k} \otimes y_i^k$ koondub ruumis $\mathcal{N}_{(\lambda,\mu,\nu)}$ ja ka selle rea liikmete diagonaalsel ümberjärjestamisel saadud rida $\sum_{l=1}^{\infty} \widehat{\delta}_l \widehat{x^*}_l \otimes \widehat{y}_l$ koondub samaks elemendiks. Seega $S - S_{M_j}$ ja järelikult ka S on (λ, μ, ν)-tuumaoperaatorid.

Arvestades, et kehtivad võrdus (20) ning võrratused (21) ja (22), saame, et jada (S_n) koondub operaatoriks S ruumis $\mathcal{N}_{(\lambda,\mu,\nu)}(X, Y)$, sest mistahes $j \in \mathbb{N}$ korral

$$N_{(\lambda,\mu,\nu)}(S - S_{M_j}) \leq \left\|(\widehat{\delta_l})\right\|_\lambda \left\|(\widehat{x^*}_l)\right\|_\mu^w \|(\widehat{y_l})\|_\nu^w < (\sqrt[3]{\varepsilon})^3 = \varepsilon.$$

Järelikult $\mathcal{N}_{(\lambda,\mu,\nu)}(X, Y)$ on täielik ja seega $\big(\mathcal{N}_{(\lambda,\mu,\nu)}, N_{(\lambda,\mu,\nu)}\big)$ on kvaasi-Banachi operaatorideaal. $\square$

Kirjandus

[1] K. Ain, *Compactness and null sequences defined by ℓ_p spaces*, Diss. Math. Univ. Tartu, 97, University of Tartu Press, Tartu, 2015.

[2] K. Ain, R. Lillemets, E. Oja, *Compact operators which are defined by ℓ_p-spaces*, Quaest. Math., 35:2, 145-159, 2012.

[3] A. Bhar, M. Gupta, *On λ-compact operators*, Indian J. Pure Appl. Math., 44(3): 355-374, 2013.

[4] A. Bhar, A. K. Karn, *Compact factorization of operators with λ-compact adjoints*, Glasgow Math. J., doi:10.1017/S0017089516000604: 1-12, 2017.

[5] D. J. H. Garling, *A class of symmetric reflexive BK-spaces*, Canadian J. Math. 21: 602-608, 1969.

[6] J. Izotova, *Absoluutselt summeerivad operaatorid ruumil $B(\mathcal{F})$*, bakalaureusetöö, Tartu Ülikool, 2013.

[7] N. Kalton, *Quasi-Banach spaces*, W. B. Johnson and J. Lindenstrauss, toimetajad, *Handbook of the Geometry of Banach Spaces*, Volume 2, 1099-1130, North-Holland, Amsterdam, 2003.

[8] G.Köthe, *Topological Vector Spaces*, Springer-Verlag, New York, 1969.

[9] T. Leiger, *Topoloogilised vektorruumid*, Loengukursus, Eesti Matemaatika Selts, Tartu, 2011.

[10] E. Oja, P. Oja, *Funktsionaalanalüüs*, Tartu Ülikool, Tartu, 1991.

[11] A. Pietsch, *Operator Ideals*, North-Holland Mathematical Library 20, North Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1980.

[12] A. Pietsch, *The ideal of p-compact operators and its maximal hull*, Proc. Amer. Math. Soc. 142(2): 519–530, 2014.

[13] M. S. Ramanujan, *Generalised nuclear maps in normed linear spaces*, J. Reine Angew. Math., 244: 190-197, 1969.

[14] M. S. Ramanujan, *Generalised nuclear maps in normed linear spaces*, Bull. Amer. Math. Soc., 76(4): 810-813, 1970.

[15] W. L. C. Sargent, *Some sequence spaces related to the ℓ_p spaces*, J. London Math. Soc. 35: 161-171, 1960.

[16] D. P. Sinha ja A. K. Karn, *Compact operators whose adjoints factor through subspaces of ℓ_p*, Studia Math. 150(1): 17-33, 2002.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Triin Taveter, (sünnikuupäev: 25.08.1995),

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose „Jadaruumide poolt defineeritud tuumaoperaatorid”, mille juhendaja on Aleksei Lissitsin,

   1.1. reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;

   1.2. üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu alates **01.08.2018** kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.

2. olen teadlik, et nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus, **11.05.2017**