Tartu Ülikool

Loodus- ja täppisteaduste valdkond

Matemaatika ja statistika instituut

Kristin Avans

Paarikaupa Markovi mudel: definitsioon ja näited

Matemaatika ja statistika õppekava

Matemaatilise statistika eriala

Magistritöö (30 EAP)

Juhendaja: prof. Jüri Lember

Tartu 2021

Paarikaupa Markovi mudel: definitsioon ja näited

Magistritöö

Kristin Avans

Lühikokkuvõte. Varjatud Markovi mudeli korral vaadeldakse kahe juhusliku protsessi paari (X, Y), kus Y on Markovi ahel ning X_t sõltub ahelast Y ainult läbi suuruse Y_t. Paarikaupa Markovi mudel on üldistus varjatud Markovi mudelile, mis võimaldab arvesse võtta ahelate keerulisemaid sõltuvusstruktuure. Käesoleva magistritöö eesmärk on anda ülevaade paarikaupa Markovi mudelist, kirjeldada tuntumaid eriklasse ning tuua näiteid mudeli rakendamisest nii diskreetsete kui pidevate juhuslike protsesside korral.

CERCS teaduseriala: P160 Statistika, operatsioonianalüüs, programmeerimine, finants- ja kindlustusmatemaatika.

Märksõnad: juhuslikud protsessid, Markovi ahelad, mõõduteooria, klassifitseerimine.

Pairwise Markov model: definition and examples

Master's thesis

Kristin Avans

Abstract. Hidden Markov model is a pair of two random processes (X, Y), where Y is a Markov chain and X_t depends on Y only through the value of Y_t. Pairwise Markov model generalizes the classical hidden Markov model, where more complex dependence structures can be taken into account. The purpose of this Master's thesis is to give an overview of pairwise Markov model, describe the most important model classes and give examples using both, discrete and continuous random processes.

CERCS research specialisation: P160 Statistics, operations research, programming, actuarial mathematics.

Keywords: stochastic processes, Markov chains, measure theory, classification.

Sisukord

Sissejuhatus

Markovi ahel on juhuslik protsess, mida iseloomustab omadus, et fikseeritud oleviku korral tulevik ei sõltu minevikust. Paarikaupa Markovi mudeliks nimetatakse kahe juhusliku protsessi paari $Z = (X, Y)$, kus ahel Z on Markovi omadusega, kuid X ja Y ei pruugi eraldivõetuna olla Markovi ahelad. Paarikaupa Markovi mudel on üldistus varjatud Markovi mudelile. Paarikaupa Markovi mudel võimaldab näiteks mittehomogeenset Markovi ahelat vaadelda homogeensena, mida tavalise varjatud Markovi mudeli korral teha ei saa. Paarikaupa Markovi mudelit saab rakendada näiteks piltide tuvastamisel [1], majandusülesannete lahendamisel [2].

Käosoleva magistritöö eesmärk on anda ülevaade paarikaupa Markovi mudelist, kirjeldada erinevaid mudeliklasse ning uurida konkreetsete näidete põhjal protsessi omadusi. Töös vaadeldakse nii diskreetseid kui ka pidevaid juhuslikke protsesse.

Töö on jagatud neljaks peatükiks. Esimeses peatükis antakse vajalikud definitsioonid ja teoreemid mõõduteooriast. Teises peatükis defineeritakse paarikaupa Markovi ahel kahel erineval moel ning tuuakse välja põhilised mudeliklasside tüübid. Samuti kirjeldatakse võimalust, kuidas erinevate mudeliklasside arvu vähendada. Kolmandas peatükis tuuakse kolm näidet diskreetsetest paarikaupa Markovi ahelatest. Esimeses näites uuritakse, kuidas ühendada kahte Markovi ahelat üheks paarikaupa Markovi ahelaks. Teises näites on eesmärk kombineerida omavahel homogeenne ning mittehomogeenne Markovi ahel. Kolmas näide vaatleb olukorda, kus üldjuhul pole kumbki ahel Markovi omadusega. Neljandas peatükis tuuakse näiteid pidevatest lineaarsetest mudelitest ning uuritakse nende omadusi.

Simulatsioonides kasutatud R-i koodid on toodud töö lisas.

1 Vajalikud eelteadmised

Paarikaupa Markovi mudelit (lühidalt PMM) uuris W. Pieczynski artiklis [3]. Paarikaupa Markovi mudeli defineerimiseks üldkujul on tarvis mõningaid topoloogia ning mõõduteooria teadmisi. Definitsioonides lähtume loengukonspektidest [4, 5].
Olgu $\mathcal{X}$ mittetühi hulk.

Definitsioon 1.1. Hulga $\mathcal{X}$ teatav alamhulkade kogum τ on **topoloogia** hulgal $\mathcal{X}$, kui on täidetud järgmised tingimused:

1. $\varnothing, \mathcal{X} \in \tau$;
2. kui $U, V \in \tau$, siis $U \cap V \in \tau$;
3. suvalise hulga $\mathcal{A}$ ning iga $\alpha \in \mathcal{A}$ korral kui $U_\alpha \in \tau$, siis $\bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha \in \tau$.

Hulka $\mathcal{X}$ koos topoloogiaga τ nimetatakse topoloogiliseks ruumiks ning tähistatakse $(\mathcal{X}, \tau)$. Topoloogiasse τ kuuluvaid hulki nimetatakse lahtisteks hulkadeks.

Olgu $(\mathcal{X}, \tau)$ topoloogiline ruum.

Definitsioon 1.2. Topoloogia τ **baasiks** nimetatakse sellist lahtiste hulkade kogumit $\mathfrak{B}$, et suvaline $U \in \tau$ on esitatav $\mathfrak{B}$ hulkade mingi ühendina.

Olgu $n \in \mathbb{N}$ ja $(\mathcal{X}_1, \tau_1)$, ..., $(\mathcal{X}_n, \tau_n)$ topoloogilised ruumid.

Definitsioon 1.3. **Korrutistopoloogiaks** hulgal $\mathcal{X}_1 \times \dots \times \mathcal{X}_n$ nimetatakse topoloogiat, mille baasiks on

$$\mathfrak{B} = \{U_1 \times \dots \times U_n \colon U_i \in \tau_i, i = 1, \dots, n\}.$$

Hulka $\mathcal{X}_1 \times \dots \times \mathcal{X}_n$ koos korrutistopoloogiaga nimetatakse korrutisruumiks.

Olgu S hulk.

Definitsioon 1.4. Hulga S alamhulkade süsteemi Σ nimetatakse **σ-algebraks** hulgal S, kui

1. $\varnothing \in \Sigma$;
2. $A \in \Sigma \Rightarrow A^{\mathrm{C}} \in \Sigma$;
3. $A_1, A_2, \ldots \in \Sigma \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$.

Olgu $n \in \mathbb{N}$ ning olgu $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_n$ mittetühjad hulgad.

Definitsioon 1.5. Hulkade $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_n$ **otsekorrutiseks** nimetatakse hulka

$$\mathcal{X}_1 \times \ldots \times \mathcal{X}_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \colon x_j \in \mathcal{X}_j, j = 1, \ldots, n\}.$$

Iga $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral saame defineerida kujutuse

$$\pi_j \colon \mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_n \to \mathcal{X}_j, \quad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_j.$$

Kujutust π_j nimetatakse otsekorrutise $\mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_n$ j**-ndaks koordinaatfunktsiooniks**.

Olgu $(\mathcal{X}_1, \Sigma_1), \ldots, (\mathcal{X}_n, \Sigma_n)$ mõõtuvad ruumid.

Definitsioon 1.6. Vähimat otsekorrutise $\mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_n$ alamhulkade σ-algebrat, mille suhtes kõik selle otsekorrutise koordinaatfunktsioonid on mõõtuvad, nimetatakse σ-algebrate $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n$ **korrutis-σ-algebraks** ja tähistatakse sümboliga $\Sigma_1 \otimes \cdots \otimes \Sigma_n$.

Saab näidata [4, Ptk. 3 Teor. 1.1], et korrutis σ-algebra $\Sigma_1 \otimes \cdots \otimes \Sigma_n$ esitub kujul

$$\Sigma_1 \otimes \cdots \otimes \Sigma_n = \sigma\Big(\{A_1 \times \cdots \times A_n \colon A_j \in \Sigma_j, j = 1, \ldots, n\}\Big).$$

Definitsioon 1.7. Olgu $\mathcal{X}$ mingi hulk ning olgu kogumid Σ_1 ja $\Sigma_2 \subset \mathcal{P}(\mathcal{X})$ sellised, et $\Sigma_1 \subset \Sigma_2$. Öeldakse, et hulgafunktsioon $\mu \colon \Sigma_1 \to [-\infty, \infty]$ on hulgafunktsiooni $\nu \colon \Sigma_2 \to [-\infty, \infty]$ **ahend kogumile** Σ_1, kui

$$\nu(A) = \mu(A) \quad \forall A \in \Sigma_1.$$

Hulgafunktsiooni ν ahendit kogumile Σ_1 tähistatakse sümboliga $\nu\big|_{\Sigma_1}$.

Olgu $(\mathcal{X}, \Sigma_X, \mu_X)$ ja $(\mathcal{Y}, \Sigma_Y, \mu_Y)$ mõõduga ruumid.

Definitsioon 1.8. Olgu $A \in \Sigma_X$ ja $B \in \Sigma_Y$. Hulka

$$A \times B = \{(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \colon x \in A, y \in B\}$$

nimetatakse $\Sigma_X \otimes \Sigma_Y$**-mõõtuvaks ristkülikuks**. Hulki A ja B nimetatakse selle ristküliku külgedeks.

Tähistame $\mathcal{A}_0$ kõigi $\Sigma_X \otimes \Sigma_Y$-mõõtuvate ristkülikute kogumi:

$$\mathcal{A}_0 = \{A \times B \colon A \in \Sigma_X, B \in \Sigma_Y\}$$

ning tähistame $\mathcal{A}$ kõigi paarikaupa lõikumatute $\Sigma_X \otimes \Sigma_Y$-mõõtuvate ristkülikute lõplike ühendite kogumi:

$$\mathcal{A} = \left\{ \bigcup_{j=1}^{n} E_j \colon n \in \mathbb{N}, E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{A}_0, E_i \cap E_j = \varnothing, i \neq j \right\}.$$

Defineerime hulgafunktsiooni $\rho \colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ võrdusega

$$\rho(E) = \sum_{j=1}^{n} \mu_X(A_j)\mu_Y(B_j), \quad E \in \mathcal{A},$$

kus paarikaupa lõikumatud $\Sigma_X \otimes \Sigma_Y$-mõõtuvad ristkülikud $A_1 \times B_1, \ldots, A_n \times B_n, n \in \mathbb{N}$ on sellised, et

$$E = \bigcup_{j=1}^{n} A_j \times B_j.$$

Olgu $\rho^* : \mathcal{P}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}) \to [0, \infty]$ selline mõõt, et $E \in \mathcal{P}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$ korral

$$\begin{aligned}
\rho^*(E) &= \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \rho(E_j) \colon E_j \in \mathcal{A}, j \in \mathbb{N}, E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right\} \\
&= \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu_X(A_j)\mu_Y(B_j) \colon A_j \in \Sigma_X, B_j \in \Sigma_Y, j \in \mathbb{N}, E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \times B_j \right\}.
\end{aligned}$$

Tähistame

$$\mu_X \times \mu_Y := \rho^* \Big|_{\sigma(\mathcal{A})} = \rho^* \Big|_{\Sigma_X \otimes \Sigma_Y}.$$

Definitsioon 1.9. Mõõtu $\mu_X \times \mu_Y$ nimetatakse **mõõtude μ_X ja μ_Y korrutismõõduks**.

Mõõduga ruumi $(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}, \Sigma_X \otimes \Sigma_Y, \mu_X \times \mu_Y)$ nimetatakse **ruumide** $(\mathcal{X}, \Sigma_X, \mu_X)$ **ja** $(\mathcal{Y}, \Sigma_Y, \mu_Y)$ **korrutisruumiks**.

Kui $A \times B$ on $\Sigma_X \otimes \Sigma_Y$-mõõtuv ristkülik, siis $A \times B \in \mathcal{A}$, mistõttu

$$\mu_X \times \mu_Y(A \times B) = \rho(A \times B) = \mu_X(A)\mu_Y(B). \tag{1.1}$$

Kui $(\mathcal{X}, \Sigma_X, \mu_X)$ ja $(\mathcal{Y}, \Sigma_Y, \mu_Y)$ on σ-lõpliku mõõduga, siis korrutismõõt $\mu_X \times \mu_Y$ on ainus selline mõõt korrutis-σ-algebral $\Sigma_X \otimes \Sigma_Y$, nii et iga $\Sigma_X \otimes \Sigma_Y$-mõõtuva ristküliku $A \times B$ korral kehtib võrdus (1.1) [4].

Teoreem 1. [6, Teor. 18.1] Kui $f \colon \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$ on $\Sigma_X \otimes \Sigma_Y$-mõõtuv funktsioon, siis iga $x \in \mathcal{X}$ korral on funktsioon $f(x, \cdot)$ on Σ_Y-mõõtuv ja iga $y \in \mathcal{Y}$ korral on funktsioon $f(\cdot, y)$ on Σ_X-mõõtuv.

Teoreem 2. [6, Teor. 18.3] Kui $f\colon \mathcal{X}\times\mathcal{Y}\to\mathbb{R}$ on $\Sigma_X\otimes\Sigma_Y$-mõõtuv mittenegatiivne funktsioon, siis funktsioon $\displaystyle\int f(\cdot,y)\mu_Y(dy)$ on Σ_X-mõõtuv ja $\displaystyle\int f(x,\cdot)\mu_X(dx)$ on Σ_Y-mõõtuv funktsioon.

Üle hulga integreerimise definitsiooni kohaselt

$$\int_A f(x,\cdot)\mu_X(dx)=\int f(x,\cdot)I_A\mu_X(dx).$$

Kuna iga $A\in\Sigma_X$ korral I_A on Σ_X-mõõtuv, iga $B\in\Sigma_Y$ korral I_B on Σ_Y-mõõtuv ning kahe mõõtuva funktsiooni korrutis on mõõtuv [6, Teor. 13.3], siis teoreemis 2 võime integreerida üle hulga. Sõnastame selle tulemuse järeldusena.

Järeldus 1. Kui $f\colon \mathcal{X}\times\mathcal{Y}\to\mathbb{R}$ on $\Sigma_X\otimes\Sigma_Y$-mõõtuv mittenegatiivne funktsioon, siis iga $A\in\Sigma_X$ korral funktsioon $\displaystyle\int_A f(x,\cdot)\mu_X(dx)$ on Σ_Y-mõõtuv ning iga $B\in\Sigma_Y$ korral funktsioon $\displaystyle\int_B f(\cdot,y)\mu_Y(dy)$ on Σ_X-mõõtuv.

Teoreem 3. (Fubini teoreem) [6] Kui $f\colon \mathcal{X}\times\mathcal{Y}\to\mathbb{R}$ on $\Sigma_X\otimes\Sigma_Y$-mõõtuv mittenegatiivne funktsioon, siis iga $A\in\Sigma_X, B\in\Sigma_Y$ korral

$$\int_{A\times B} f(x,y)\mu_X\times\mu_Y(d(x,y))=\int_A\int_B f(x,y)\mu_Y(dy)\mu_X(dx)=\int_B\int_A f(x,y)\mu_X(dx)\mu_Y(dy).$$

2 Paarikaupa Markovi ahela definitsioon

Olgu $\mathcal{Y}$ ülimalt loenduv hulk topoloogiaga $2^{\mathcal{Y}}$ ning olgu $\mathcal{X}$ hulga $\mathbb{R}^d$ alamhulk loomuliku meetrilise topoloogiaga τ ning Boreli σ-algebraga $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. Tähistame $\mathcal{Z}=\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ ning vaatleme hulgal $\mathcal{Z}$ korrutistopoloogiat $\tau\times 2^{\mathcal{Y}}$ ning korrutis-σ-algebrat $\mathcal{B}(\mathcal{Z})=\mathcal{B}(\mathcal{X})\otimes 2^{\mathcal{Y}}$. Järgnevalt veendume, et iga $C\in\mathcal{B}(\mathcal{Z})$ saab esitada kujul $C=\displaystyle\bigcup_{j\in\mathcal{Y}}A_j\times\{j\}$, kus $A_j\in\mathcal{B}(\mathcal{X})$. Tähistame $\Sigma:=\Big\{\displaystyle\bigcup_{j\in\mathcal{Y}}A_j\times\{j\}\colon A_j\in\mathcal{B}(\mathcal{X})\Big\}$.

Lause 1. Hulk Σ on võrdne σ-algebraga $\mathcal{B}(\mathcal{Z})$.

Tõestus. Kõigepealt näitame, et Σ on σ-algebra.

1. Defineerides iga $j\in\mathcal{Y}$ korral $A_j=\varnothing$ saame, et $\varnothing\in\Sigma$.

2. Olgu $S\in\Sigma$, st leiduvad hulgad $A_j\in\mathcal{B}(\mathcal{X})$ nii, et $S=\displaystyle\bigcup_{j\in\mathcal{Y}}A_j\times\{j\}$.

   Tähistame $W:=\displaystyle\bigcup_{j\in\mathcal{Y}}A_j^{\mathrm{C}}\times\{j\}$. Näitame, et $S^{\mathrm{C}}=W$.

Kuna iga $(a, b) \in S$, $(a', b') \in W$ ning $j \in \mathcal{Y}$ korral $a \in A_j$, $a' \in A_j^{\mathrm{C}}$, siis hulgad S ja W on lõikumatud. Nende hulkade ühend on

$$S \cup W = \Big(\bigcup_{j \in \mathcal{Y}} A_j \times \{j\} \Big) \cup \Big(\bigcup_{j \in \mathcal{Y}} A_j^{\mathrm{C}} \times \{j\} \Big) = \bigcup_{j \in \mathcal{Y}} \Big(A_j \cup A_j^{\mathrm{C}} \Big) \times \{j\} = \mathcal{Z}.$$

Seega kuna S ja W on lõikumatud ning nende ühend võrdub kogu hulgaga $\mathcal{Z}$, siis järelikult $S^{\mathrm{C}} = W \in \Sigma$.

3. Olgu $S_1, S_2, \ldots \in \Sigma$. Siis leiduvad $A_j^i \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ nii, et $S_i = \bigcup\limits_{j \in \mathcal{Y}} A_j^i \times \{j\}$. Seega

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \bigcup_{j \in \mathcal{Y}} A_j^i \times \{j\} = \bigcup_{j \in \mathcal{Y}} \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Big(A_j^i \times \{j\} \Big) = \bigcup_{j \in \mathcal{Y}} \Big(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_j^i \Big) \times \{j\} \in \Sigma.$$

Kokkuvõttes saime, et Σ on σ-algebra.
Lause tõestuseks piisab näidata, et $A \times B \in \Sigma$, kus $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, $B \in 2^{\mathcal{Y}}$ ning $\bigcup\limits_{j \in \mathcal{Y}} A_j \times \{j\} \in \mathcal{B}(\mathcal{Z})$, kus $A_j \in \mathcal{X}$.
Olgu $A \times B$ selline hulk, kus $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ ning $B \in 2^{\mathcal{Y}}$. Siis defineerides

$$A_j = \begin{cases} A, & \text{kui } j \in B; \\ \varnothing, & \text{kui } j \notin B \end{cases}$$

näeme, et $A \times B \in \Sigma$. Seega kuna $A \times B \in \Sigma$ ning Σ on σ-algebra, siis

$$\sigma\Big(\Big\{ A \times B \colon A \in \mathcal{B}(\mathcal{X}), B \in 2^{\mathcal{Y}} \Big\} \Big) = \mathcal{B}(\mathcal{Z}) \subset \Sigma.$$

Vaatleme hulka $\bigcup\limits_{j \in \mathcal{Y}} A_j \times \{j\}$. Kuna iga $j \in \mathcal{Y}$ korral $A_j \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, siis iga $j \in \mathcal{Y}$ korral $A_j \times \{j\} \in \mathcal{B}(\mathcal{Z})$ ning kuna $\mathcal{B}(\mathcal{Z})$ on σ-algebra, siis ka $\bigcup\limits_{j \in \mathcal{Y}} A_j \times \{j\} \in \mathcal{B}(\mathcal{Z})$. Järelikult $\Sigma \subset \mathcal{B}(\mathcal{Z})$. Kokkuvõttes $\Sigma = \mathcal{B}(\mathcal{Z})$. □

2.1 Üleminekutihedus ja üleminekutuum

Olgu μ σ-lõplik mõõt hulgal $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ ning c loendav mõõt hulgal $2^{\mathcal{Y}}$. Defineerime kujutuse

$$q \colon \mathcal{Z}^2 \to [0, \infty), \quad (z', z) \mapsto q(z'|z),$$

kus q on $\mathcal{B}(\mathcal{Z}) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{Z})$-mõõtuv mittenegatiivne funktsioon, nii et iga $z \in \mathcal{Z}$ korral funktsioon $z' \mapsto q(z'|z)$ on tõenäosusmõõdu tihedusfunktsioon korrutismõõdu $\mu \times c$ suhtes. Funktsiooni q nimetame **üleminekutiheduseks**.

Definitsioon 2.1. [7] Olgu $P = \{P(z, A), z \in \mathcal{Z}, A \in \mathcal{B}(\mathcal{Z})\}$ selline hulk, et

1. iga $A \in \mathcal{B}(\mathcal{Z})$ korral $P(\cdot, A)$ on mittenegatiivne mõõtuv funktsioon hulgal $\mathcal{Z}$;
2. iga $z \in \mathcal{Z}$ korral $P(z, \cdot)$ on tõenäosusmõõt hulgal $\mathcal{B}(\mathcal{Z})$.

Hulka P nimetatakse **üleminekutuumaks**.
Diskreetne Markovi ahel on defineeritud algjaotuse ning üleminekumaatriksi abil. Üleminekutuum on üleminekumaatriksi analoog pideva juhu korral.

Üleminekutiheduse $q(z'|z)$ korral defineerime iga $z \in \mathcal{Z}, A \in \mathcal{B}(\mathcal{Z})$ korral

$$P(z, A) := \int_A q(z'|z)\mu \times c(dz') \tag{2.1}$$

ja veendume, et saadud hulk (2.1) rahuldab definitsiooni 2.1 tingimusi 1. ja 2.

1. Funktsioon q on definitsiooni kohaselt mittenegatiivne $\mathcal{B}(\mathcal{Z})\otimes\mathcal{B}(\mathcal{Z})$-mõõtuv funktsioon hulgal $\mathcal{Z}^2$, seega teoreem 1 põhjal on iga $z' \in \mathcal{Z}$ korral funktsioon $q(z'|\cdot)$ $\mathcal{B}(\mathcal{Z})$-mõõtuv. Seega järeldus 1 põhjal on iga $A \in \mathcal{B}(\mathcal{Z})$ korral $P(\cdot, A) = \int_A q(z'|\cdot)\mu\times c(dz')$ mittenegatiivne $\mathcal{B}(\mathcal{Z})$-mõõtuv funktsioon.

2. Funktsiooni q definitsiooni kohaselt on $z' \mapsto q(z'|z)$ tõenäosusmõõdu tihedusfunktsioon korrutismõõdu $\mu \times c$ suhtes, st iga $z \in \mathcal{Z}$ korral leidub tõenäosusmõõt $P(z, \cdot)$ nii, et
$$P(z, A) = \int_A q(z'|z)\mu \times c(dz') \quad \forall\, A \in \mathcal{B}(\mathcal{Z}).$$

Seega (2.1) puhul definitsiooni 2.1 tingimused kehtivad, mistõttu q defineerib üleminekutuuma.

Tuuma $P(z, A)$ abil saame defineerida juhusliku protsessi, mida nimetatakse homogeenseks Markovi ahelaks.

Definitsioon 2.2. [7] Juhuslikku protsessi $Z = (Z_1, Z_2, \ldots)$ nimetatakse **homogeenseks Markovi ahelaks** üleminekutuumaga $P(z, A)$ ja hulgal $\mathcal{B}(\mathcal{Z})$ antud algtõenäosusmõõduga π, kui iga $n \in \mathbb{N}$ ning $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}(\mathcal{Z})$ korral

$$\begin{aligned} &P_\pi(Z_1 \in A_1, Z_2 \in A_2, \ldots, Z_n \in A_n) = \\ &= \int_{z_1\in A_1} \cdots \int_{z_{n-1}\in A_{n-1}} \pi(dz_1)P(z_1, dz_2)\cdots P(z_{n-2}, dz_{n-1})P(z_{n-1}, A_n). \end{aligned}$$

Iga tuuma ja algjaotuse π korral vastav Markovi ahel alati leidub [7, Teor. 3.4.1].

Lemma 1. Kui algjaotusel π on tihedus korrutismõõdu $\mu \times c$ suhtes, siis iga $n \in \mathbb{N}$ korral on juhuslikul vektoril $(Z_1, \ldots, Z_n)$ tihedus korrutismõõdu $(\mu \times c)^n$ suhtes.

Tõestus. Olgu algjaotusel π tihedus korrutismõõdu $\mu \times c$ suhtes, tähistame selle $p(z_1)$. Kuna mõõdul P on tihedus q, siis teame [6, Teor. 16.11], et iga $A \in \mathcal{B}(\mathcal{Z})$ korral

$$\int_A P(z_t, dz_{t+1}) = \int_A q(z_{t+1}|z_t)\mu \times c(dz_{t+1}),$$

seega saame definitsiooni 2.2 esitada kujul

$$\begin{aligned} &P_\pi(Z_1 \in A_1, Z_2 \in A_2, \ldots, Z_n \in A_n) = \\ =&\int_{A_1} \cdots \int_{A_n} \pi(dz_1)P(z_1, dz_2) \cdots P(z_{n-2}, dz_{n-1})P(z_{n-1}, dz_n) \\ =&\int_{A_1} \cdots \int_{A_n} p(z_1)q(z_2|z_1) \cdots q(z_n|z_{n-1})\mu \times c(dz_1) \cdots \mu \times c(dz_n) \\ =&\int_{A_1 \times \cdots \times A_n} p(z_1)q(z_2|z_1) \cdots q(z_n|z_{n-1})(\mu \times c)^n(d(z_1, \ldots, z_n)). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Tähistame $z_{1:n}$ tiheduse $p(z_1, \ldots, z_n) := p(z_1)q(z_2|z_1) \cdots q(z_n|z_{n-1})$, siis saame

$$\begin{aligned} &P_\pi((Z_1, \ldots, Z_n) \in A_1 \times \cdots \times A_n) \\ =&P_\pi(Z_1 \in A_1, Z_2 \in A_2, \ldots, Z_n \in A_n) \\ =&\int_{A_1 \times \ldots \times A_n} p(z_1, \ldots, z_n)(\mu \times c)^n(d(z_1, \ldots, z_n)). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Ristkülikud $A_1 \times \cdots \times A_n$ moodustavad π-süsteemi, mis tekitab σ-algebra $\mathcal{B}(\mathcal{Z})^n$, seega võrdusest (2.3) järeldub, et iga $B \in \mathcal{B}(\mathcal{Z})^n$ korral

$$P_\pi((Z_1, \ldots, Z_n) \in B) = \int_B p(z_1, \ldots, z_n)(\mu \times c)^n(d(z_1, \ldots, z_n)). \tag{2.4}$$

Kuna $\mathcal{B}(\mathcal{Z}^n) = \mathcal{B}(\mathcal{Z})^n$, siis võrdus (2.4) kehtib iga $B \in \mathcal{B}(\mathcal{Z}^n)$ korral. Kokkuvõttes on vektoril $(Z_1, \ldots, Z_n)$ tihedus p.

□

Kui juhuslikul vektoril $(Z_1, \ldots, Z_n)$ on tihedus $p(z_1, \ldots, z_n)$, siis juhusliku suuruse Z_n tinglik tihedus tingimusel $Z_1 = z_1, \ldots, Z_{n-1} = z_{n-1}$ on defineeritud tiheduste jagatisena. Arvestades, et p on avaldatav korrutisena, saame

$$\begin{aligned} p(z_n|z_1, \ldots, z_{n-1}) =&\frac{p(z_1, \ldots, z_n)}{p(z_1, \ldots, z_{n-1})} = \frac{p(z_1)q(z_2|z_1) \cdots q(z_{n-1}|z_{n-2})q(z_n|z_{n-1})}{p(z_1)q(z_2|z_1) \cdots q(z_{n-1}|z_{n-2})} \\ =&q(z_n|z_{n-1}). \end{aligned}$$

Tinglik tõenäosus $P_\pi(Z_n \in A|Z_1 = z_1, \ldots, Z_{n-1} = z_{n-1})$ avaldub seega iga $A \in \mathcal{B}(\mathcal{Z})$ korral kujul

$$\begin{aligned} P_\pi(Z_n \in A|Z_1 = z_1, \ldots, Z_{n-1} = z_{n-1}) &= \int_A p(z_n|z_1, \ldots, z_{n-1})\mu \times c(dz_n) \\ &= \int_A q(z_n|z_{n-1})\mu \times c(dz_n) \\ &= P(z_{n-1}, A). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Võrduste (2.5) põhjal saame, et

$$P(Z_n \in A|Z_{n-1} = z_{n-1}) = P(z_{n-1}, A).$$

Eelnevalt veendusime, et q defineerib üleminekutuuma. Defineerides tuuma q abil, siis $q(\cdot|z)$ on $Z_{t+1}|Z_t = z$ tihedus. Üleminekutiheduse q kaudu saame defineerida paarikaupa Markovi protsessi.

2.2 Paarikaupa Markovi protsess

Paarikaupa Markovi protsessiks nimetatakse homogeenset Markovi ahelat $Z = \{Z_t\}_{t\geqslant 1} = \{(X_t, Y_t)\}_{t\geqslant 1}$ kahemõõtmelises ruumis $\mathcal{Z}$ üleminekutihedusega $q(z'|z)$. Seega võrdus (2.5) on defineeritud kui

$$P(Z_{t+1} \in C|Z_t = z) = \int_C q(z'|z)\mu \times c(dz'), \quad z \in \mathcal{Z},\ \ C \in \mathcal{B}(\mathcal{Z}),\ \ t = 1, 2, \ldots. \tag{2.6}$$

Lause 1 põhjal saame iga $t = 1, 2, \ldots$ korral tõenäosuse (2.6) esitada kujul

$$\begin{aligned} P(Z_{t+1} \in C|X_t = x, Y_t = i) &= P(Z_{t+1} \in \bigcup_{j\in\mathcal{Y}} A_j \times \{j\}|X_t = x, Y_t = i) \\ &= \sum_{j\in\mathcal{Y}} P(X_{t+1} \in A_j, Y_{t+1} = j|X_t = x, Y_t = i) \\ &= \sum_{j\in\mathcal{Y}} \int_{A_j\times\{j\}} q(x', j|x, i)\mu \times c(d(x', j)) \\ &= \sum_{j\in\mathcal{Y}} \int_{A_j} \int_{\{j\}} q(x', j|x, i)c(dj)\mu(dx') \\ &= \sum_{j\in\mathcal{Y}} \int_{A_j} q(x', j|x, i)\mu(dx') \\ &= \sum_{j\in\mathcal{Y}} P(X_{t+1} \in A_j, Y_{t+1} = j|X_t = x, Y_t = i). \end{aligned}$$

Lihtsuse mõttes tähistame tähega p erinevaid tinglikke ja ühistihedusi. Näiteks $p(z_k) = p(x_k, y_k)$ tähistab Z_k tihedust väärtusel $z_k = (x_k, y_k)$, $p(z_{1:n})$ tähistab tihedust väärtusel $z_{1:n}$:

$$p(z_{1:n}) = p(z_1) \prod_{k=2}^{n} q(z_k | z_{k-1}).$$

Kui argumentidena kasutada x_k, y_k või z_k asemel mõnda teist sümbolit, siis kasutame selle esitamisel võrdusmärki, näiteks

$$p(x_{2:n}, y_{2:n} | x_1 = x, y_1 = i) = q(x_2, y_2 | x, i) \prod_{k=3}^{n} q(x_k, y_k | x_{k-1}, y_{k-1}), \qquad n \geqslant 3.$$

Tähistame üleminekutihedust q ja ülejäänud tihedusi p erinevate tähistega, et tuua välja, et üleminekutihedus q on ette antud ning ülejäänud tihedused p on saadud q põhjal.

Kui Z on diskreetne Markovi ahel seisundite hulgaga $S = \{s_1, s_2, \ldots\}$, üleminekumaatriksiga P ja algjaotusega π, siis algjaotus π on **statsionaarne**, kui $\pi P = \pi$. Statsionaarse jaotuse saame üldistada ka juhule, kus Z seisundite hulk ei ole loenduv. Järgnevad definitsioonid võib leida raamatust [7].

Definitsioon 2.3. Olgu π tõenäosusmõõt hulgal $\mathcal{B}(\mathcal{Z})$. Mõõtu π nimetatakse üleminekutuuma P **statsionaarseks jaotuseks**, kui iga $A \in \mathcal{B}(\mathcal{Z})$ korral

$$\int P(z, A) \pi(dz) = \pi(A).$$

Kirjutisega $P_z(\cdot)$ tähistame tõenäosusmõõtu, kui Z algjaotus on Diraci mõõt $z \in \mathcal{Z}$ korral, st

$$P_z(Z_t \in A) = P(Z_t \in A | Z_1 = z), \qquad t = 2, 3, \ldots .$$

Marginaalprotsessid $\{X_t\}_{t \geqslant 1}$ ja $\{Y_t\}_{t \geqslant 1}$ tähistame vastavalt X ja Y. Üldjuhul tähistab protsess X vaatlusi ning Y modelleerib vastavat olekute jada, mis on sageli varjatud, seda kutsutakse ka režiimiks [8].

Markovi ahela korral saab uurida selle erinevaid omadusi. Diskreetset Markovi ahelat Z seisundite hulgaga $S = \{s_1, s_2, \ldots\}$ nimetatakse **taandumatuks**, kui igast seisundist $i \in S$ on lõpliku arvu sammudega võimalik jõuda seisundisse $j \in S$ positiivse tõenäosusega. Diskreetset Markovi ahelat nimetatakse **rekurrentseks**, kui igast seisundist $i \in S$ liigutakse seisundisse $j \in S$ lõpmata palju kordi tõenäosusega 1. Sarnaseid omadusi saab vaadelda ka üldisel juhul.

Definitsioon 2.4. Markovi ahelat Z nimetatakse **φ-taandumatuks** mingi hulgal $\mathcal{B}(\mathcal{Z})$ σ-lõpliku mõõdu φ korral, kui

$$\varphi(A) > 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=2}^{\infty} P_z(Z_k \in A) > 0 \quad \forall z \in \mathcal{Z}.$$

Kui Markovi ahel Z on φ-taandumatu, siis leidub [7, Väide 4.2.2] mõõt ψ, mille suhtes on iga teine φ'-taandumatu mõõt absoluutselt pidev, st

$$\psi(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi'(A) = 0.$$

Mõõtu ψ nimetatakse **maksimaalseks taandumatuse mõõduks**.

Definitsioon 2.5. Markovi ahelat Z nimetatakse **Harris rekurrentseks**, kui ahel on ψ-taandumatu ning

$$\psi(A) > 0 \quad \Rightarrow \quad P_z(Z_k \in A \text{ i.o.}) = 1 \quad \forall z \in \mathcal{Z}.$$

Eelnevate definitsioonide põhjal näeme, et Markovi ahela Harris rekurrentsusest järeldub ψ-taandumatus.

Olgu $f \colon \mathcal{Z} \to \mathbb{R}$ pidev ja tõkestatud funktsioon. Ahelal $Z = Z_1, Z_2, \ldots$ on **nõrk Felleri omadus**, kui $z \mapsto \displaystyle\int f(z')P(z, dz')$ on samuti pidev ning tõkestatud funktsioon. Kui $Z = Z_1, Z_2, \ldots$ on nõrga Felleri omadusega ja maksimaalne taandumatuse mõõt ψ on selline, et suppψ on mittetühja sisemusega, siis nimetatakse ahelat **T-ahelaks** [7, Teor. 6.2.9].

2.3 Statsionaarse PMM-i alternatiivne konstruktsioon

Eelnevalt eeldasime, et meile on teada Markovi ahela algjaotus $p(z_1)$ ning üleminekutihedus $q(z'|z)$, kuid alati ei pruugi üleminekutihedus q teada olla. Kirjeldame alternatiivset viisi, kuidas PMM on konstrueeritud Pieczynski artiklites [3, 9, 10]. Vaatleme statsionaarset PMM-i, kus iga mõõtuva A korral

$$\int P(Z_2 \in A | Z_1 = z_1) p(z_1) \mu \times c(dz_1) = \int_A p(z_1) \mu \times c(dz_1) = P(Z_1 \in A).$$

Olgu antud ühistihedus $p(z_1, z_2) = p(z_1)q(z_2|z_1)$. Kui $p(z_1) > 0$, siis saame üleminekutiheduse esitada kujul

$$q(z_2|z_1) = \frac{p(z_1, z_2)}{p(z_1)}. \tag{2.7}$$

Tihedus $p(z_1, z_2)$ on juhusliku vektori (Y_1, X_1, Y_2, X_2) ühistihedus, mistõttu saame selle esitada kujul $p(z_1, z_2) = p(y_1, y_2)p(x_1, x_2|y_1, y_2)$, kus $p(y_1, y_2)$ on juhusliku vektori (Y_1, Y_2) tihedus σ-algebral $2^{\mathcal{Y}^2}$ loendava mõõdu suhtes ning $p(x_1, x_2|y_1, y_2)$ on juhusliku vektori (X_1, X_2) tinglik tihedus mõõdu $\mu \times \mu$ suhtes. Seega, kui algselt on antud ühistihedus $p(z_1, z_2)$, siis on PMM kirjeldatav $|\mathcal{Y}| \times |\mathcal{Y}|$ maatriksiga $p(y_1, y_2)$ ning tinglike tihedustega $p(x_1, x_2|y_1, y_2)$. Tähistame

$$\begin{aligned} p(i,j) &:= p(y_1 = i, y_2 = j), \quad f_{ij}(x_1, x_2) := p(x_1, x_2|y_1 = i, y_2 = j), \\ f_{ij}(x_1) &:= p(x_1|y_1 = i, y_2 = j), \quad f_{ij}(x_2) := p(x_2|y_1 = i, y_2 = j), \end{aligned} \tag{2.8}$$

kus $f_{ij}(x_1)$ ning $f_{ij}(x_2)$ tähistavad marginaaltihedusi. Tähistusi (2.8) nimetame edaspidi f_{ij}-formaleeringuks.
Kasutades f_{ij}-formaleeringut, esitub üleminekutihedus (2.7) kujul

$$q(x_2, y_2 = j|x_1, y_1 = i) = \frac{p(i,j)f_{ij}(x_1, x_2)}{\sum_{j'} p(i,j')f_{ij'}(x_1)}.$$

Statsionaarsuse tõttu saame, et marginaaltihedused

$$p(x_1 = x, y_1 = i) = \sum_{j \in \mathcal{Y}} p(i,j)f_{ij}(x_1), \quad p(x_2 = x, y_2 = i) = \sum_{j \in \mathcal{Y}} p(j,i)f_{ji}(x_2)$$

on võrdsed iga $i \in \mathcal{Y}$ ning μ-p.k x korral.

PMM-i korral ei pruugi $X_{1:n}$ ja $Y_{1:n}$ eraldivõetuna olla Markovi ahelad, kuid nad on tinglikult Markovi ahelad. Eeldame, et

$$p(z_1, \dots, z_n) = p(x_{1:n}, y_{1:n}) > 0.$$

Kasutades paarikaupa Markovi omadust, saame

$$\begin{aligned} p(y_{t+1}|y_{1:t}, x_{1:n}) &= \frac{p(y_{t+1}, x_{t+1:n}|x_{1:t}, y_{1:t})}{p(x_{t+1:n}|x_{1:t}, y_{1:t})} = \frac{p(y_{t+1}, x_{t+1:n}|x_t, y_t)}{p(x_{t+1:n}|x_t, y_t)} = p(y_{t+1}|y_t, x_{t:n}) \\ &= p(y_{t+1}|y_t, x_{1:n}). \end{aligned}$$

Vahetades x ja y asukohad, saame analoogiliselt

$$p(x_{t+1}|x_{1:t}, y_{1:n}) = p(x_{t+1}|x_t, y_{t:n}) = p(x_{t+1}|x_t, y_{1:n}).$$

Seega mõlemad ahelad on tinglikult Markovi ahelad. Küsimust, millal on Y eraldivõetuna Markovi ahel, uuris juba Pieczynski [3]. Järgnev lemma annab piisava tingimuse, et Y oleks Markovi ahel.

Lemma 2. Olgu $t \in \mathbb{N}$ fikseeritud ning kehtigu

$$p(y_{1:t}) > 0, \quad p(x_t = x|y_{1:t}) > 0 \;\; \mu\text{-p.k } x.$$

Kui

$$p(y_{t+1}|x_t = x, y_t) = p(y_{t+1}|y_t) \;\; \mu\text{-p.k } x,$$

siis Y on Markovi ahel ehk $p(y_{t+1}|y_{1:t}) = p(y_{t+1}|y_t)$.

Tõestus. Lemma 2 eeldustel saame

$$\begin{aligned}
p(y_{t+1}|y_{1:t}) &= \int p(y_{t+1}, x_t = x|y_{1:t})\mu(dx) = \int p(y_{t+1}|x_t = x, y_{1:t})p(x_t = x|y_{1:t})\mu(dx) \\
&= \int p(y_{t+1}|x_t = x, y_t)p(x_t = x|y_{1:t})\mu(dx) = \int p(y_{t+1}|y_t)p(x_t = x|y_{1:t})\mu(dx) \\
&= p(y_{t+1}|y_t) \int p(x_t = x|y_{1:t})\mu(dx) = p(y_{t+1}|y_t).
\end{aligned}$$

□

2.4 PMM-de klassifitseerimine

Vastavalt ahelate sõltuvusele saame PMM-i jagada klassidesse. Paneme tähele, et

$$\begin{aligned}
&\int_{A_j} q(x_2, j|x_1, i)\mu(dx_2) = P(X_2 \in A_j, Y_2 = j|X_1 = x_1, Y_1 = i) \\
&= P(Y_2 = j|X_1 = x_1, Y_1 = i)P(X_2 \in A_j|Y_2 = j, X_1 = x_1, Y_1 = i) \qquad (2.9) \\
&= p(y_2 = j|x_1, y_1 = i) \int_{A_j} p(x_2|y_2 = j, x_1, y_1 = i)\mu(dx_2).
\end{aligned}$$

Arvestades, et integraalialused funktsioonid on mittenegatiivsed, siis $q(y_2, x_2|y_1, x_1)$ ja $p(y_2|y_1, x_1)p(x_2|y_2, x_1, y_1)$ on võrdsed μ-p.k [6, Teor. 16.10], mistõttu saame üleminekutiheduse $q(z_2|z_1)$ esitada kujul

$$q(z_2|z_1) = q(y_2, x_2|y_1, x_1) = p(y_2|y_1, x_1)p(x_2|y_2, x_1, y_1). \qquad (2.10)$$

Vastavalt ahelate sõltuvusele saab PMM-i klassifitseerida mitmel moel. Näiteks saame uurida, millistel juhtudel on eraldivõetuna tegemist Markovi ahelatega. Kirjeldame põhilisi klasse, mis on antud [9]. Klasside nimetamisel lähtume artiklitest [9, 11]. Järgnevaid võrdusi saab põhjendada analoogiliselt võrdustega (2.9).

PMM-i nimetatakse **sõltuva müraga varjatud Markovi ahelaks** (lühidalt HMM-DN), kui tihedus $p(y_2|y_1, x_1)$ ei sõltu suurusest x_1 ehk tinglik üleminekutihedus (2.10) on kirjutatav kujul

$$q(z_2|z_1) = p(y_2|y_1)p(x_2|y_2, x_1, y_1). \qquad (2.11)$$

Kuna Y_2 väärtus sõltub ainult suurusest Y_1, siis lemma 2 põhjal on HMM-DN korral Y ka eraldivõetuna Markovi ahel, kuid X ei pruugi olla Markovi omadusega. Ühe erijuhu klassist HMM-DN saame, kui tihedus $p(x_2|y_1, y_2, x_1)$ ei sõltu suurusest y_1 ehk (2.10) on esitatav kujul

$$q(z_2|z_1) = p(y_2|y_1)p(x_2|y_2, x_1). \tag{2.12}$$

Eelnevat mudelit nimetatakse **vahelduvaks Markovi mudeliks** [11] ehk lühidalt HMM-CN [12]. Kuna tegemist on erijuhuga klassist HMM-DN, siis Y Markovi omadus säilib. PMM-i võib nimetada **sõltumatu müraga PMM-ks** (lühidalt PMM-IN) [9], kui

$$q(z_2|z_1) = p(y_2|y_1, x_1)p(x_2|y_2, y_1). \tag{2.13}$$

Erijuhu klassist PMM-IN saame, kui $p(x_2|y_2, y_1) = p(x_2|y_2)$, siis üleminekutiheduseks on

$$q(z_2|z_1) = p(y_2|y_1, x_1)p(x_2|y_2). \tag{2.14}$$

Teise erijuhu klassist PMM-IN saame, kui $p(y_2|y_1, x_1) = p(y_2|y_1)$, mille korral

$$q(z_2|z_1) = p(y_2|y_1)p(x_2|y_2, y_1). \tag{2.15}$$

Klassi (2.15) nimetatakse **sõltumatu müraga teist järku HMM**-ks (lühidalt HMM-2). Defineerisime HMM-2 kui erijuhu klassist PMM-IN, kuid arvestades võrdust (2.11) näeme, et HMM-2 saab vaadelda ka kui erijuhtu klassist HMM-DN, seega on ka selle klassi korral on Y puhul tegemist Markovi ahelaga.
Saame veel ühe võimaliku erijuhu, kui

$$q(z_2|z_1) = p(y_2|y_1, x_1)p(x_2|y_2, x_1). \tag{2.16}$$

Paneme tähele, et vahelduv Markovi mudel (2.12) on üks erijuht eelnevast mudelist (2.16).

Viimasena vaatame mudelit, mis on erijuht kõigist eelnevatest:

$$q(z_2|z_1) = p(y_2|y_1)p(x_2|y_2). \tag{2.17}$$

Mudelit (2.17) nimetatakse **varjatud Markovi mudeliks** (lühidalt HMM). Sel juhul on Y Markovi ahel ning X väärtus sõltub ainult vastavat Y väärtusest.

Nägime, et vastavalt ahelate sõltuvusele saab PMM-i klassifitseerida väga mitmel moel. Vaadeldud mudeliklassidest on HMM-DN-i, vahelduva Markovi mudeli, HMM-2 ning HMM-i puhul Y ka eraldivõetuna Markovi ahel. Võimalikke klasse saab konstrueerida veel, näiteks ei vaadelnud me juhte, kus X oleks eraldivõetuna Markovi ahel. Kui vaatame olukorda, kus vahetame X ja Y positsioonid, siis formaalselt saaksime samad klassid. Seega pole mõtet vaadelda eraldi klasse, kus X oleks Markovi omadusega. Eelmises peatükis vaatlesime PMM-i alternatiivset konstruktsiooni. Uurime, kuidas näevad eelnevalt defineeritud mudeliklassid välja f_{ij}-formaleeringus.

2.5 Klassifitseerimine f_{ij}-formaleeringus

Peatükis 2.3 vaadeldud PMM-i kontrukstiooni korral on mudel kirjeldatav maatriksiga $p(i,j) = p(y_1 = i, y_2 = j)$ ning tihedustega $f_{ij}(x_1,x_2) = p(x_1,x_2|y_1 = i, y_2 = j)$. Tähistame

$$p(j|i) := \frac{p(i,j)}{\sum_{j'} p(i,j')}, \qquad f_{ij}(x_2|x_1) := \frac{f_{ij}(x_1,x_2)}{f_{ij}(x_1)}.$$

Klassi HMM-DN korral on Y Markovi ahel, üleminekutõenäosused saame seega esitada kujul

$$\begin{aligned}
&\int_{A_j} q(x_2,j|x_1,i)\mu(dx_2) = P(Y_2 = j|Y_1 = i)P(X_2 \in A_j|Y_2 = j, Y_1 = i, X_1 = x)\\
&= \frac{P(Y_1 = i, Y_2 = j)P(X_1 = x_1, X_2 \in A_j|Y_1 = i, Y_2 = j)}{\sum_{j'} P(Y_1 = i, Y_2 = j')P(X_1 = x_1|Y_1 = i, Y_2 = j)}\\
&= \frac{p(i,j)}{\sum_{j'} p(i,j')f_{ij}(x_1)} \int_{A_j} f_{ij}(x_1,x_2)\mu(dx_2)\\
&= \int_{A_j} p(j|i)f_{ij}(x_2|x_1)\mu(dx_2).
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Võrduste (2.18) põhjal saame klassi HMM-DN tingliku üleminekutiheduse (2.11) f_{ij}-formaleeringus esitada kujul

$$q(x_2, y_2 = j|x_1, y_1 = i) = p(j|i)f_{ij}(x_2|x_1).$$

Järgnevad võrdused on tuletatavad, kasutades sarnast lähenemist nagu võrdustes (2.18). Vahelduvas Markovi mudelis (2.12) $f_{ij}(x_2|x_1)$ ei sõltu suurusest i, seega võime selle tähistada kui $f_j(x_2|x_1)$, mille abil saame võrduse (2.12) f_{ij}-formaleeringus esitada kujul

$$q(x_2, y_2 = j|x_1, y_1 = i) = p(j|i)f_j(x_2|x_1).$$

Võrdus (2.13) on f_{ij}-formaleeringus kujul

$$q(x_2,y_2 = j|x_1, y_1 = i) = \frac{p(i,j)f_{ij}(x_1)}{\sum_{j'} p(i,j')f_{ij'}(x_1)} f_{ij}(x_2).$$

Erijuhul (2.14), kus $P(X_2 \in A_j|Y_2 = j, Y_1 = i) = P(X_2 \in A_j|Y_2 = j)$, võime tähistada tiheduse $f_j(x_2) := p(x_2|y_2 = j)$ ning saame (2.14) f_{ij}-formaleeringus esitada kujul

$$q(x_2, y_2 = j|x_1, y_1 = i) = \frac{p(i,j)f_{ij}(x_1)}{\sum_{j'} p(i,j')f_{ij'}(x_1)} f_j(x_2).$$

Teisel võrduse (2.13) erijuhul saab tihedus (2.15) f_{ij}-formaleeringus kuju

$$q(x_2, y_2 = j|x_1, y_1 = i) = p(j|i)f_{ij}(x_2).$$

Mudeli (2.16) korral $f_{ij}(x_2|x_1)$ ei sõltu suurusest i, tähistame selle $f_j(x_2|x_1)$. Siis võrdus (2.16) esitub f_{ij}-formaleeringus kujul

$$q(x_2, y_2 = j|x_1, y_1 = i) = \frac{p(i,j)f_{ij}(x_1)}{\sum_{j'} p(i,j')f_{ij'}(x_1)} f_j(x_2|x_1).$$

Tähistades tiheduse $f_j(x_2) := p(x_2|y_2 = j)$, saame HMM-i (2.17) esitada f_{ij}-formaleeringus kujul

$$q(x_2, y_2 = j|x_1, y_1 = i) = p(j|i)f_j(x_2).$$

Järgnevalt uurime, kuidas saab erinevate mudeliklasside arvu vähendada, defineerides uue ahela.

2.6 Blokkidesse jagamine

Erinevate mudeliklasside arvu on võimalik vähendada, kui kasutada blokkideks jagamist. Olgu Y homogeenne Markovi ahel, mis võtab väärtusi ülimalt loenduvast hulgast $\mathcal{Y}$. Defineerime juhusliku suuruse $U = (U_t)_{t\in\mathbb{N}}$ järgmiselt:

$$U_t = (Y_t, Y_{t+1}), \ \ t = 1, 2, \dots . \tag{2.19}$$

Arvestades juhusliku suuruse U definitsiooni ning Y Markovi omadust, saame

$$p(u_{t+1}|u_{1:t}) = p(y_{t+1}, y_{t+2}|y_{1:t+1}) = p(y_{t+1}, y_{t+2}|y_t, y_{t+1}) = p(u_{t+1}|u_t),$$

mis tähendab, et U on samuti homogeenne Markovi ahel. Markovi ahel U võtab väärtusi hulga $\mathcal{Y}^2$ alamhulgast $\mathcal{U} \subset \mathcal{Y}^2$, kus

$$U = \{(y_1, y_2) \in \mathcal{Y}^2 \colon P(y_2|y_1) > 0\}.$$

Üleminekumaatriks on

$$P(U_{t+1} = (y_1', y_2')|U_t = (y_1, y_2)) = \begin{cases} 0, & \text{kui } y_2 \neq y_1'; \\ P(y_2'|y_2), & \text{kui } y_2 = y_1'. \end{cases} \tag{2.20}$$

Saadud üleminekumaatriksis on küll palju nulle, aga Markovi ahelal U säilivad ahela Y head omadused. Omaduste tõestamiseks defineerime kõigepealt peatumishetke ning tugeva Markovi omaduse.

Definitsioon 2.6. Juhuslikku suurust τ, mille võimalikeks väärtusteks on $1, 2, \ldots$, nimetatakse jada $X_1, X_2, \ldots$ **peatumishetkeks**, kui sündmuse $\{\tau = n\}$ toimumine sõltub ainult juhuslikest suurustest $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ja on sõltumatu juhuslikest suurustest $X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots$ ehk $\{\tau = n\} \in \sigma(X_1, \ldots, X_n)$.

Tugev Markovi omadus. Olgu $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Markovi ahel ja olgu τ selle ahela peatumishetk. Siis tingimusel $\tau < \infty$ ning $Y_\tau = i$, $(Y_{\tau+n})_{n\in\mathbb{N}}$ on Markovi ahel, mis on sõltumatu suurustest $Y_1, \ldots, Y_\tau$.

Lause 2. Olgu Y homogeenne Markovi ahel, mis võtab väärtusi ülimalt loenduvast hulgast $\mathcal{Y}$ ning olgu U defineeritud kui (2.19). Kehtivad järgmised omadused:

(a) kui Y on taandumatu, siis U on taandumatu;

(b) kui Y on rekurrentne, siis U on rekurrentne.

Tõestus. (a) Olgu Markovi ahel Y taandumatu. Näitame, et U on taandumatu. Kuna Y seisundite hulk $\mathcal{Y}$ on ülimalt loenduv, siis Y taandumatus tähendab, et olekust i on võimalik jõuda olekusse j lõpliku arvu sammudega iga $i, j \in \mathcal{Y}$ korral positiivse tõenäosusega. U taandumatuseks tuleb ahela U definitsiooni kohaselt veenduda, et olekust (y_1, y_2) on võimalik jõuda olekusse (y_1', y_2') lõpliku arvu sammudega positiivse tõenäosusega iga $(y_1, y_2), (y_1', y_2') \in \mathcal{U}$ korral. Fikseerime $(y_1, y_2), (y_1', y_2') \in \mathcal{U}$. Kuna Y on taandumatu, siis saame liikuda olekust y_2 olekusse y_1' lõpliku arvu sammudega. Seega kui alustame seisundist (y_1, y_2), siis positiivse tõenäosusega jõuame lõpliku arvu sammudega seisundisse (y_1', y), kus $y \in \mathcal{Y}$. Kuna $(y_1', y_2') \in \mathcal{U}$, siis $P(y_2'|y_1') > 0$, mistõttu on võimalik lõpliku arvu sammudega jõuda seisundisse (y_1', y_2') positiivse tõenäosusega. Seega U on taandumatu.

(b) Olgu Markovi ahel Y rekurrentne. Näitame, et U on rekurrentne. Kuna Y seisundite hulk $\mathcal{Y}$ on ülimalt loenduv, siis Y rekurrentsus tähendab, et olekust i jõutakse olekusse j lõpmata palju kordi tõenäosusega 1 iga $i, j \in \mathcal{Y}$ korral. U rekurrentsuseks tuleb ahela U definitsiooni kohaselt veenduda, et olekust (y_1, y_2) jõutakse olekusse (y_1', y_2') lõpmata palju kordi tõenäosusega 1 iga $(y_1, y_2), (y_1', y_2') \in \mathcal{U}$ korral. Fikseerime $(y_1, y_2), (y_1', y_2') \in \mathcal{U}$ ning alustame olekust (y_1, y_2). Kuna Y on rekurrentne, siis alustades olekust y_2, jõuame olekusse y_1' lõpmata palju kordi tõenäosusega 1.

Defineerime sündmused

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= \min\{n > 2\colon Y_n = y_1'\},\\
\tau_2 &= \min\{n > \tau_1\colon Y_n = y_1'\},\\
&\dots\\
\tau_k &= \min\{n > \tau_{k-1}\colon Y_n = y_1'\}.
\end{aligned}$$

Paneme tähele, et τ_k on Markovi ahela Y peatumishetk. Vaatleme juhuslikke suuruseid

$$\xi_k = \begin{cases} 1, & \text{kui } Y_{\tau_k+1} = y_2' \\ 0, & \text{kui } Y_{\tau_k+1} \neq y_2' \end{cases}, \quad k = 1, 2, \dots .$$

Tugeva Markovi omaduse põhjal on juhuslikud suurused ξ_k sõltumatud, samuti on ξ_k kõik sama Bernoulli jaotusega:

$$\xi_k \sim B(p), \quad p = P(\xi_1 = 1).$$

Kuna $(y_1', y_2') \in \mathcal{U}$, siis $p > 0$, mistõttu

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(\xi_k = 1) = \sum_{k=1}^{\infty} p = \infty.$$

Boreli-Cantelli 2. lemma põhjal [6, Teor. 4.4]

$$P(\{\omega\colon \omega \in \xi_k \text{ i.o.}\}) = 1,$$

seega U liigub seisundist (y_1, y_2) seisundisse (y_1', y_2') lõpmata palju kordi tõenäosusega 1. Järelikult on ka U rekurrentne. □

Asendades $Y_1, Y_2, \dots$ suurustega $U_1, U_2, \dots$, saame erinevate mudelitüüpide arvu vähendada. Tähistame $U_t := (Y_t, Y_{t+1})$ ning $V_1 := (X_1, X_2), V_t := X_{t+1}, t = 2, 3, \dots$. Vaatleme suuruseid

$$\begin{aligned}
(U_1, V_1) &= (Y_1, Y_2, X_1, X_2),\\
(U_2, V_2) &= (Y_2, Y_3, X_3),\\
(U_3, V_3) &= (Y_3, Y_4, X_4),\\
&\dots .
\end{aligned}$$

Tähistame suuruse (U_t, V_t) üleminekutiheduse $p_t(v_2, u_2|v_1, u_1)$. Arvestades Markovi omadust paneme tähele, et

$$p_1(v_2, u_2|v_1, u_1) = p(x_3, y_2, y_3|x_1, x_2, y_1, y_2) = p(x_3, y_3|x_1, x_2, y_1, y_2) = q(x_3, y_3|x_2, y_2).$$

Kui $t \geqslant 2$, siis saame

$$\begin{aligned} p_t(v_{t+1}, u_{t+1}|v_t, u_t) &= p(x_{t+2}, y_{t+1}, y_{t+2}|x_{t+1}, y_t, y_{t+1}) = p(x_{t+2}, y_{t+2}|x_{t+1}, y_t, y_{t+1}) \\ &= q(x_{t+2}, y_{t+2}|x_{t+1}, y_{t+1}). \end{aligned}$$

Kuigi (U_1, V_1) ja (U_t, V_t), $t \geqslant 2$ on erinevat moodi defineeritud, saime, et üleminekutihedus on suurustel sama, st

$$p(v_{t+1}, u_{t+1}|v_t, u_t) = q(x_{t+2}, y_{t+2}|x_{t+1}, y_{t+1}) \quad \forall t \geqslant 1.$$

Tähistame protsessi (U, V) üleminekutiheduse tähega p. Kasutades (Y, X) asemel suuruseid (U, V) saame HMM-2 taandada HMM-ks:

$$\begin{aligned} p(v_{t+1}, u_{t+1}|v_t, u_t) &= q(x_{t+2}, y_{t+2}|y_{t+1}, x_{t+1}) = p(y_{t+2}|y_{t+1})p(x_{t+2}|y_{t+1}, y_{t+2}) \\ &= p(u_{t+1}|u_t)p(v_{t+1}|u_{t+1}). \end{aligned}$$

Samuti taandub HMM-DN vahelduvaks Markovi mudeliks:

$$\begin{aligned} p(v_{t+1}, u_{t+1}|v_t, u_t) &= q(x_{t+2}, y_{t+2}|y_{t+1}, x_{t+1}) = p(y_{t+2}|y_{t+1})p(x_{t+2}|y_{t+1}, y_{t+2}, x_{t+1}) \\ &= p(u_{t+1}|u_t)p(v_{t+1}|v_t, u_{t+1}). \end{aligned}$$

PMM-IN taandub mudeliks (2.14):

$$\begin{aligned} p(v_{t+1}, u_{t+1}|v_t, u_t) &= q(x_{t+2}, y_{t+2}|y_{t+1}, x_{t+1}) = p(y_{t+2}|y_{t+1}, x_{t+1})p(x_{t+2}|y_{t+1}, y_{t+2}) \\ &= p(u_{t+1}|u_t, v_t)p(v_{t+1}|u_{t+1}). \end{aligned}$$

Üldine PMM saab kuju (2.16):

$$\begin{aligned} p(v_{t+1}, u_{t+1}|v_t, u_t) &= q(x_{t+2}, y_{t+2}|y_{t+1}, x_{t+1}) = p(y_{t+2}|y_{t+1}, x_{t+1})p(x_{t+2}|y_{t+1}, y_{t+2}, x_{t+1}) \\ &= p(u_{t+1}|u_t, v_t)p(v_{t+1}|u_{t+1}, v_t). \end{aligned}$$

Peatükis 2.4 nägime, et mõne mudeliklassi korral on Y Markovi ahel. Kui sellisel juhul U on Markovi ahel üleminekumaatriksiga (2.20), siis tänu blokkidesse jagamisele saame ahelate omadused üle kanda. Seega näiteks kui mingi omadus kehtib HMM korral, siis tänu blokkideks jagamisele kehtib see omadus ka HMM-2 korral. Seega pole vaja vaadelda eraldi klasse, mida saab blokkide abil taandada.

3 Näited diskreetsetest paarikaupa Markovi ahelatest

PMM-i nimetatakse **diskreetseks**, kui hulk $\mathcal{X}$ on ülimalt loenduv. Järgnevalt toome näiteid diskreetsete PMM-de kohta, klassifitseerime neid ning uurime mõningaid omadusi. Vaatleme PMM-i $Z = (X, Y)$ seisunditega $\mathcal{Z} \subset \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, kus $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_k\}, \mathcal{Y} =$

$\{y_1, \ldots, y_l\}$. Edaspidi vaatleme olukorda, kus $\mathcal{Z} = \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. Olgu paarid hulgast $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ järjestatud järgmiselt:

$$\mathcal{X} \times \mathcal{Y} = \{(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_1), (x_1, y_2), \ldots, (x_k, y_2), \ldots, (x_1, y_l), \ldots, (x_k, y_l)\}.$$

Vastava PMM-i üleminekumaatriks on $kl \times kl$-maatriks. Mudeliklassi HMM-DN korral kehtib võrdus

$$P(x_{t+1}, y_{t+1}|x_t, y_t) = P(y_{t+1}|y_t, x_t)P(x_{t+1}|y_{t+1}, x_t, y_t) = P(y_{t+1}|y_t)P(x_{t+1}|y_{t+1}, x_t, y_t),$$

seega kui Z on HMM-DN, siis üleminekumaatriks esitub kujul

$$\mathbb{Q} = \begin{pmatrix} r_{11} \cdot A_{11} & r_{12} \cdot A_{12} & \cdots & r_{1l} \cdot A_{1l} \\ r_{21} \cdot A_{21} & r_{22} \cdot A_{22} & \cdots & r_{2l} \cdot A_{2l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{l1} \cdot A_{l1} & r_{l2} \cdot A_{l2} & \cdots & r_{ll} \cdot A_{ll} \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

kus $R = (r_{ij})$ on Y üleminekumaatriks ning iga $i, j = 1, \ldots, l$ korral A_{ij} on järgmine $k \times k$-maatriks:

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(ij)} & \cdots & a_{1k}^{(ij)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1}^{(ij)} & \cdots & a_{kk}^{(ij)} \end{pmatrix}, \quad a_{i'j'}^{(ij)} = P(X_{t+1} = x_{j'}|Y_{t+1} = y_j, X_t = x_{i'}, Y_t = y_i).$$

Samuti märkame, et kui üleminekumaatriks esitub kujul (3.1), siis on üleminekumaatriksis esimeses k-s reas esimese k veeru elementide summa r_{11}, järgmise k veeru elementide summa r_{12}, kuni lõpuks viimase k veeru elementide summa on r_{1l}. Analoogiliselt saame ka ülejäänud ridade kohta. Järelikult saame ka vastupidise seose: kui üleminekumaatriks esitub kujul (3.1), siis Z on HMM-DN. Seega kokkuvõttes Z on HMM-DN parajasti siis, kui üleminekumaatriks esitub kujul (3.1).

Et mudel oleks vahelduv Markovi mudel, peavad maatriksite A_{ij} elemendid rahuldama tingimusi

$$a_{i'j'}^{(ij)} = P(X_{t+1} = x_{j'}|Y_{t+1} = y_j, X_t = x_{i'}),$$

mis tähendab, et element $a_{i'j'}^{(ij)}$ ei sõltu indeksist i ehk üleminekumaatriksi saab esitada kujul

$$\mathbb{Q} = \begin{pmatrix} r_{11} \cdot A_1 & r_{12} \cdot A_2 & \cdots & r_{1l} \cdot A_l \\ r_{21} \cdot A_1 & r_{22} \cdot A_2 & \cdots & r_{2l} \cdot A_l \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{l1} \cdot A_1 & r_{l2} \cdot A_2 & \cdots & r_{ll} \cdot A_l \end{pmatrix}.$$

HMM-i korral tähistab $a_{i'j'}^{(ij)}$ emissioonitõenäosusi:

$$a_{i'j'}^{(ij)} = P(X_{t+1} = x_{j'} | Y_{t+1} = y_j),$$

seega ka sel juhul kehtib iga $j = 1, \ldots, l$ korral $A_{1j} = A_{2j} = \ldots = A_{lj} = A_j$. Kuna $a_{i'j'}^{(ij)}$ ei sõltu ka indeksist i', siis iga $j = 1, \ldots, l$ korral on maatriksi A_j igas veerus kõik elemendid võrdsed.

Ka klassi HMM-2 korral on Y Markovi ahel ning

$$a_{i'j'}^{(ij)} = P(X_{t+1} = x_{j'} | Y_{t+1} = y_j, Y_t = y_i),$$

millest saame, et maatriksis A_{ij} on igas veerus elemendid võrdsed, kuid A_{ij} võib sõltuda indeksist i. Ülejäänud peatükis 2.4 vaadeldud mudeliklasside korral ei ole Y Markovi ahel, seega ei saa mudelit esitada kujul (3.1).

Üldjuhul tähistab ahel X vaatlusi ning Y modelleerib vastavat olekute jada, kuid võime vaadelda ka mudelit, kus vahetame X ja Y rollid ehk Y tähistab vaatlusi ning X vastavaid olekuid. X ja Y rollide vahetades ei pruugi PMM-i mudeliklass jääda samaks. Selleks, et X oleks Markovi ahel, piisab, et vahetatud rollidega mudel oleks HMM-DN ehk muutes hulga $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ paaride järjestust järgmiselt:

$$\mathcal{X} \times \mathcal{Y} = \{(x_1, y_1), \ldots, (x_1, y_l), (x_2, y_1), \ldots, (x_2, y_l), \ldots, (x_k, y_1), \ldots, (x_k, y_l)\},$$

peab vastav üleminekumaatriks esituma kujul (3.1), kus $R = (r_{ij})$ tähistab nüüd X üleminekumaatriksit ning A_{ij} tinglikke tõenäosusi

$$a_{i'j'}^{(ij)} = P(Y_{t+1} = y_{j'} | X_{t+1} = x_j, Y_t = y_{i'}, X_t = x_i).$$

3.1 Näide 1 – Milano ahel

Milano ahelat saab kasutada kahe Markovi ahela sõltuvuse kirjeldamiseks [13]. Olgu $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \{1, 2\}$ ning Markovi ahelate X ja Y üleminekumaatriksid vastavalt

$$P_X = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & \quad 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} p & 1-p \\ q & 1-q \end{pmatrix} \end{array}, \quad P_Y = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & \quad 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} p' & 1-p' \\ q' & 1-q' \end{pmatrix} \end{array}.$$

Milano ahel on PMM, mille üleminekumaatriks on $\mathbb{Q} = (q_{(x_i,y_i),(x_j,y_j)})$:

$$\mathbb{Q} = \begin{array}{c} \\ (1,1) \\ (2,1) \\ (1,2) \\ (2,2) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (1,1) & (2,1) & (1,2) & (2,2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} p\lambda_1 & p' - p\lambda_1 & p(1-\lambda_1) & 1 + p\lambda_1 - p' - p \\ q\mu_1 & p' - q\mu_1 & q(1-\mu_1) & 1 + q\mu_1 - p' - q \\ p\lambda_2 & q' - p\lambda_2 & p(1-\lambda_2) & 1 + p\lambda_2 - q' - p \\ q\mu_2 & q' - q\mu_2 & q(1-\mu_2) & 1 + q\mu_2 - q' - q \end{pmatrix} \end{array}.$$

Paneme tähele, et esimese ning teise rea kahe esimese elemendi summa on p':

$$p\lambda_1 + (p' - p\lambda_1) = p', \quad q\mu_1 + (p' - q\mu_1) = p',$$

mistõttu kahe esimese rea ülejäänud elementide summa on $1 - p'$. Samuti saame, et kolmanda ning neljanda rea kahe esimese elemendi summa on q':

$$p\lambda_2 + (q' - p\lambda_2) = q', \quad q\mu_2 + (q' - q\mu_2) = q',$$

seega kahes viimases reas ülejäänud elementide summa on $1 - q'$. Järelikult saame üleminekumaatriksi $\mathbb{Q}$ esitada kujul (3.1):

$$\begin{pmatrix} p'A_{11} & (1-p')A_{12} \\ q'A_{21} & (1-q')A_{22} \end{pmatrix},$$

mistõttu saame Milano ahela mudeliklassiks HMM-DN, kus Y on Markovi ahel üleminekumaatriksiga P_Y. Vahetatud rollidega üleminekumaatriks on kujul $\mathbb{Q} = (q_{(x_i,y_i),(x_j,y_j)})$:

$$\mathbb{Q} = \begin{array}{c} \\ (1,1) \\ (1,2) \\ (2,1) \\ (2,2) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (1,1) & (1,2) & (2,1) & (2,2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} p\lambda_1 & p(1-\lambda_1) & p' - p\lambda_1 & 1 + p\lambda_1 - p' - p \\ p\lambda_2 & p(1-\lambda_2) & q' - p\lambda_2 & 1 + p\lambda_2 - q' - p \\ q\mu_1 & q(1-\mu_1) & p' - q\mu_1 & 1 + q\mu_1 - p' - q \\ q\mu_2 & q(1-\mu_2) & q' - q\mu_2 & 1 + q\mu_2 - q' - q \end{pmatrix} \end{array}.$$

Vahetatud rollidega mudeli üleminekumaatriksis on kahe esimese rea esimeste elementide summa p ning viimaste elementide summa on $1 - p$. Samuti on kahe viimase rea esimeste elementide summa on q ning kolmandate ja neljandate elementide summa on $1 - q$. Seega ka vahetatud rollidega mudeli üleminekumaatriksi saame esitada kujul (3.1):

$$\begin{pmatrix} pB_{11} & (1-p)B_{12} \\ qB_{21} & (1-q)B_{22} \end{pmatrix},$$

mistõttu ka X ja Y rollide vahetades jääb mudeliklassiks HMM-DN, kus X on Markovi ahel üleminekumaatriksiga P_X. Seega nii X kui Y on selle mudeli korral eraldivõetuna Markovi ahelad.

Maatriksite $A_{ij} = (a^{(ij)}_{i'j'})$ ja $B_{ij} = (b^{(ij)}_{i'j'})$ elemendid avalduvad parameetrite $\lambda_i, \mu_i, p, p', q, q'$ kaudu. Paneme tähele, et

$$\begin{aligned}
a^{(11)}_{11} &= P(X_2 = 1|X_1 = 1, Y_1 = 1, Y_2 = 1) = \frac{p}{p'}\lambda_1, \\
a^{(21)}_{11} &= P(X_2 = 1|X_1 = 1, Y_1 = 2, Y_2 = 1) = \frac{p}{q'}\lambda_2 \neq a^{(11)}_{11}, \\
b^{(11)}_{11} &= P(Y_2 = 1|Y_1 = 1, X_1 = 1, X_2 = 1) = \lambda_1, \\
b^{(21)}_{11} &= P(Y_2 = 1|Y_1 = 1, X_1 = 2, X_2 = 1) = \mu_1 \neq b^{(11)}_{11},
\end{aligned}$$

millest saame, et kummalgi juhul ei ole üldjuhul tegemist vahelduva Markovi mudeliga.

Kuna kõik tõenäosused peavad olema nulli ja ühe vahel, siis parameetrid $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ ei ole vabalt valitavad. λ_1 jaoks saame järgnevad tingimused:

$$\begin{gathered}
0 \leqslant p\lambda_1 \leqslant 1, \\
0 \leqslant p(1 - \lambda_1) \leqslant 1, \\
0 \leqslant p' - p\lambda_1 \leqslant 1, \\
0 \leqslant 1 + p\lambda_1 - p' - p \leqslant 1.
\end{gathered}$$

Võime eeldada, et $p \in (0, 1)$. Eelnevaid võrratusi lihtsustades saame

$$\begin{cases}
\lambda_1 \geqslant 0 \\
\lambda_1 \geqslant 1 - \dfrac{1}{p} \\
\lambda_1 \geqslant \dfrac{p' - 1}{p} \\
\lambda_1 \geqslant \dfrac{p + p' - 1}{p}
\end{cases}, \qquad
\begin{cases}
\lambda_1 \leqslant \dfrac{1}{p} \\
\lambda_1 \leqslant 1 \\
\lambda_1 \leqslant \dfrac{p'}{p} \\
\lambda_1 \leqslant \dfrac{p + p'}{p}
\end{cases},$$

millest

$$\lambda_1 \in \Big[\frac{p' + p - 1}{p} \vee 0, \frac{p'}{p} \wedge 1\Big],$$

kus $\vee$ tähistab maksimumi ning $\wedge$ miinimumi. Samamoodi saame kitsendused ka ülejäänud parameetritele λ_2, μ_1 ja μ_2. Kokkuvõttes peavad olema täidetud järgmised tingimused:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &\in \Big[\frac{p' + p - 1}{p} \vee 0, \frac{p'}{p} \wedge 1\Big], \quad \lambda_2 \in \Big[\frac{q' + p - 1}{p} \vee 0, \frac{q'}{p} \wedge 1\Big], \\
\mu_1 &\in \Big[\frac{p' + q - 1}{q} \vee 0, \frac{p'}{q} \wedge 1\Big], \quad \mu_2 \in \Big[\frac{q' + q - 1}{q} \vee 0, \frac{q'}{q} \wedge 1\Big].
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Üldjuhul ei pruugi protsess olla taandumatu, rekurrentne, see sõltub parameetrite $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ väärtustest.

3.1.1 Üldistus juhule, kus seisundeid on k

Järgmisena vaatleme üldisemat juhtu, kus $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \{1, 2, \ldots, k\}$. Olgu ahelate X ja Y üleminekumaatriks järgmine:

$$P_X = P_Y = P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ \\ k \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & \quad & k \end{array} \\ \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} \end{pmatrix} \end{array}, \quad p_{ik} = 1 - \sum_{j=1}^{k-1} p_{ij}, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Et Y oleks etteantud üleminekumaatriksiga Markovi ahel, esitame vastava PMM-i üleminekumaatriksi kujul (3.1). Saame

$$\mathbb{Q} = \begin{pmatrix} p_{11}\Lambda_{11} & \cdots & p_{1k}\Lambda_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{k1}\Lambda_{k1} & \cdots & p_{kk}\Lambda_{kk} \end{pmatrix},$$

kus iga $i, j = 1, \ldots, k$ korral

$$\Lambda_{ij} = \begin{pmatrix} \lambda_{11}^{(ij)} & \cdots & \lambda_{1k}^{(ij)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{k1}^{(ij)} & \cdots & \lambda_{kk}^{(ij)} \end{pmatrix}, \quad \lambda_{i'k}^{(ij)} = 1 - \sum_{j'=1}^{k-1} \lambda_{i'j'}^{(ij)}, \quad i' = 1, \ldots, k,$$

$\lambda_{i'j'}^{(ij)}$ vastavad tõenäosustele $P(X_{t+1} = x_{j'} | Y_{t+1} = y_j, X_t = x_{i'}, Y_t = y_i)$. Üleminekumaatriksis P on k^2 elementi ning iga $i, j = 1, \ldots, k$ korral on maatriksis Λ_{ij} parameetreid $k(k-1)$. Seega parameetreid saame kokku $k^3(k-1)$. Et ka X oleks Markovi ahel üleminekumaatriksiga P, peab ka vahetatud rollidega mudeli üleminekumaatriks avalduma kujul (3.1). Seega ei ole kõik parameetrid valitavad, kehtima peavad järgmised k^3 kitsendust:

$$\begin{aligned} p_{11}\lambda_{11}^{(11)} + p_{12}\lambda_{11}^{(12)} + \ldots + p_{1k}\lambda_{11}^{(1k)} &= p_{11}, \\ p_{21}\lambda_{11}^{(21)} + p_{22}\lambda_{11}^{(22)} + \ldots + p_{2k}\lambda_{11}^{(2k)} &= p_{11}, \\ &\cdots \\ p_{k1}\lambda_{11}^{(k1)} + p_{k2}\lambda_{11}^{(k2)} + \ldots + p_{kk}\lambda_{11}^{(kk)} &= p_{11}, \\ p_{11}\lambda_{12}^{(11)} + p_{12}\lambda_{12}^{(12)} + \ldots + p_{1k}\lambda_{12}^{(1k)} &= p_{12}, \end{aligned}$$

$$
\begin{gathered}
p_{21}\lambda_{12}^{(21)} + p_{22}\lambda_{12}^{(22)} + \ldots + p_{2k}\lambda_{12}^{(2k)} = p_{12}, \\
\ldots \\
p_{k1}\lambda_{12}^{(k1)} + p_{k2}\lambda_{12}^{(k2)} + \ldots + p_{kk}\lambda_{12}^{(kk)} = p_{12}, \\
\ldots \\
p_{11}\lambda_{1k}^{(11)} + p_{12}\lambda_{1k}^{(12)} + \ldots + p_{1k}\lambda_{1k}^{(1k)} = p_{1k}, \\
p_{21}\lambda_{1k}^{(21)} + p_{22}\lambda_{1k}^{(22)} + \ldots + p_{2k}\lambda_{1k}^{(2k)} = p_{1k}, \\
\ldots \\
p_{k1}\lambda_{1k}^{(k1)} + p_{k2}\lambda_{1k}^{(k2)} + \ldots + p_{kk}\lambda_{1k}^{(kk)} = p_{1k}, \\
\ldots \\
p_{11}\lambda_{21}^{(11)} + p_{12}\lambda_{21}^{(12)} + \ldots + p_{1k}\lambda_{21}^{(1k)} = p_{21}, \\
p_{21}\lambda_{21}^{(21)} + p_{22}\lambda_{21}^{(22)} + \ldots + p_{2k}\lambda_{21}^{(2k)} = p_{21}, \\
\ldots \\
p_{k1}\lambda_{21}^{(k1)} + p_{k2}\lambda_{21}^{(k2)} + \ldots + p_{kk}\lambda_{21}^{(kk)} = p_{21}, \\
p_{11}\lambda_{22}^{(11)} + p_{12}\lambda_{22}^{(12)} + \ldots + p_{1k}\lambda_{22}^{(1k)} = p_{22}, \\
p_{21}\lambda_{22}^{(21)} + p_{22}\lambda_{22}^{(22)} + \ldots + p_{2k}\lambda_{22}^{(2k)} = p_{22}, \\
\ldots \\
p_{k1}\lambda_{22}^{(k1)} + p_{k2}\lambda_{22}^{(k2)} + \ldots + p_{kk}\lambda_{22}^{(kk)} = p_{22}, \\
\ldots \\
p_{11}\lambda_{2k}^{(11)} + p_{12}\lambda_{2k}^{(12)} + \ldots + p_{1k}\lambda_{2k}^{(1k)} = p_{2k}, \\
p_{21}\lambda_{2k}^{(21)} + p_{22}\lambda_{2k}^{(22)} + \ldots + p_{2k}\lambda_{2k}^{(2k)} = p_{2k}, \\
\ldots \\
p_{k1}\lambda_{2k}^{(k1)} + p_{k2}\lambda_{2k}^{(k2)} + \ldots + p_{kk}\lambda_{2k}^{(kk)} = p_{2k}, \\
\ldots \\
p_{11}\lambda_{k1}^{(11)} + p_{12}\lambda_{k1}^{(12)} + \ldots + p_{1k}\lambda_{k1}^{(1k)} = p_{k1}, \\
p_{21}\lambda_{k1}^{(21)} + p_{22}\lambda_{k1}^{(22)} + \ldots + p_{2k}\lambda_{k1}^{(2k)} = p_{k1}, \\
\ldots \\
p_{k1}\lambda_{k1}^{(k1)} + p_{k2}\lambda_{k1}^{(k2)} + \ldots + p_{kk}\lambda_{k1}^{(kk)} = p_{k1}, \\
p_{11}\lambda_{k2}^{(11)} + p_{12}\lambda_{k2}^{(12)} + \ldots + p_{1k}\lambda_{k2}^{(1k)} = p_{k2}, \\
p_{21}\lambda_{k2}^{(21)} + p_{22}\lambda_{k2}^{(22)} + \ldots + p_{2k}\lambda_{k2}^{(2k)} = p_{k2}, \\
\ldots \\
p_{k1}\lambda_{k2}^{(k1)} + p_{k2}\lambda_{k2}^{(k2)} + \ldots + p_{kk}\lambda_{k2}^{(kk)} = p_{k2}, \\
\ldots \\
p_{11}\lambda_{kk}^{(11)} + p_{12}\lambda_{kk}^{(12)} + \ldots + p_{1k}\lambda_{kk}^{(1k)} = p_{kk}, \\
p_{21}\lambda_{kk}^{(21)} + p_{22}\lambda_{kk}^{(22)} + \ldots + p_{2k}\lambda_{kk}^{(2k)} = p_{kk}, \\
\ldots \\
p_{k1}\lambda_{kk}^{(k1)} + p_{k2}\lambda_{kk}^{(k2)} + \ldots + p_{kk}\lambda_{kk}^{(kk)} = p_{kk}.
\end{gathered}
$$

Kitsendusi on kokku k^3, kuid kuna p_{ik} ning $\lambda_{i'k}^{(ij)}$ on eelnevate kaudu üheselt määratud, siis eelnevates võrdustes avalduvad järgmised k^2 kitsendust:

$$
\begin{aligned}
p_{11}\lambda_{1k}^{(11)} + p_{12}\lambda_{1k}^{(12)} + \ldots + p_{1k}\lambda_{1k}^{(1k)} &= p_{1k},\\
p_{21}\lambda_{1k}^{(21)} + p_{22}\lambda_{1k}^{(22)} + \ldots + p_{2k}\lambda_{1k}^{(2k)} &= p_{1k},\\
&\ldots\\
p_{k1}\lambda_{1k}^{(k1)} + p_{k2}\lambda_{1k}^{(k2)} + \ldots + p_{kk}\lambda_{1k}^{(kk)} &= p_{1k},\\
p_{11}\lambda_{2k}^{(11)} + p_{12}\lambda_{2k}^{(12)} + \ldots + p_{1k}\lambda_{2k}^{(1k)} &= p_{2k},\\
p_{21}\lambda_{2k}^{(21)} + p_{22}\lambda_{2k}^{(22)} + \ldots + p_{2k}\lambda_{2k}^{(2k)} &= p_{2k},\\
&\ldots\\
p_{k1}\lambda_{2k}^{(k1)} + p_{k2}\lambda_{2k}^{(k2)} + \ldots + p_{kk}\lambda_{2k}^{(kk)} &= p_{2k},\\
&\ldots\\
p_{11}\lambda_{kk}^{(11)} + p_{12}\lambda_{kk}^{(12)} + \ldots + p_{1k}\lambda_{kk}^{(1k)} &= p_{kk},\\
p_{21}\lambda_{kk}^{(21)} + p_{22}\lambda_{kk}^{(22)} + \ldots + p_{2k}\lambda_{kk}^{(2k)} &= p_{kk},\\
&\ldots\\
p_{k1}\lambda_{kk}^{(k1)} + p_{k2}\lambda_{kk}^{(k2)} + \ldots + p_{kk}\lambda_{kk}^{(kk)} &= p_{kk}
\end{aligned}
$$

üheselt ülejäänute kaudu. Seega järele jääb $k^3 - k^2 = k^2(k-1)$ kitsendust, mistõttu valitavaid parameetreid on $k^3(k-1) - k^2(k-1) = k^2(k-1)^2$. Ka valitavad parameetrid pole suvalised, vaid peavad olema valitud selliselt, et üleminekumaatriksi kõik elemendid jääksid nulli ja ühe vahele ning iga rea summa oleks 1.

3.1.2 Erijuhud ja sõltuvused

Uurime lähemalt kõige lihtsamat juhtu, kus $k = 2$ ning Markovi ahelad X ja Y on sama üleminekumaatriksiga: $P_X = P_Y$. Selle mudeli abil saab Markovi ahelate sõltuvust uurida vaid väheste parameetritega, kusjuures see sisaldab äärmuslikke juhte, kus X ja Y on sõltumatud, X_t ja Y_t on alati võrdsed ning ka juhtu, kus X_t ja Y_t alati erinevad.

Juhuslikud protsessid $X_1, X_2, \ldots$ ning $Y_1, Y_2, \ldots$ on **sõltumatud**, kui iga $n \in \mathbb{N}$ korral on juhuslikud vektorid $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ ja $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ sõltumatud. Seega, kui X ja Y on diskreetsed juhuslikud suurused, siis on nad sõltumatud, kui iga $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ korral

$$
\begin{aligned}
&P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n, Y_1 = y_1, \ldots, Y_n = y_n)\\
=&P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)P(Y_1 = y_1, \ldots, Y_n = y_n).
\end{aligned}
$$

Diskreetse PMM-i Z korral

$$
P(Z_1 = (x_1, y_1), \ldots, Z_n = (x_n, y_n)) = \pi(x_1, y_1) \prod_{t=2}^{n} P(x_t, y_t | x_{t-1}, y_{t-1}),
$$

millest saame, et X ja Y on sõltumatud, kui

$$\pi(x_1,y_1)\prod_{t=2}^{n}P(x_t,y_t|x_{t-1},y_{t-1})=\pi(x_1,y_1)\prod_{t=2}^{n}\frac{P(x_t,y_t,x_{t-1},y_{t-1})}{P(x_{t-1},y_{t-1})}$$
$$=\pi(x_1,y_1)\prod_{t=2}^{n}\frac{P(x_{t-1},x_t)P(y_{t-1},y_t)}{P(x_{t-1})P(y_{t-1})}=\pi(x_1)\pi(y_1)\prod_{t=2}^{n}P(x_t|x_{t-1})P(y_t|y_{t-1}).$$

Seega Markovi ahelad X ja Y on sõltumatud, kui $\pi(x_1,y_1)=\pi(x_1)\pi(y_1)$ ning iga $t=2,3,\ldots$ korral on tingliku ühisjaotuse tõenäosus võrdne tinglike marginaaljaotuste korrutisega:

$$P(x_t,y_t|x_{t-1},y_{t-1})=P(x_t|x_{t-1})\cdot P(y_t|y_{t-1}).$$

Milano mudeli korral on sõltumatuse tingimus täidetud parajasti siis, kui parameetriteks valida $\lambda_1=\mu_1=p$, $\lambda_2=\mu_2=q$.

Võttes $\lambda_1=\mu_1=\mu_2=1, \lambda_2=\dfrac{q}{p}, p\geqslant q$, avaldub üleminekumaatriks kujul

$$\mathbb{Q}=\begin{array}{c}\\(1,1)\\(2,1)\\(1,2)\\(2,2)\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}(1,1)&(2,1)&(1,2)&(2,2)\end{array}\\\begin{pmatrix}p&0&0&1-p\\q&p-q&0&1-p\\q&0&p-q&1-p\\q&0&0&1-q\end{pmatrix}\end{array}.$$

Seega valides algjaotuse nii, et $P(X_1=Y_1)=1$, siis on ahelad maksimaalselt sõltuvad, st iga $t=1,2,\ldots$ korral $X_t=Y_t$. Maksimaalse negatiivse sõltuvuse, kus iga $t=1,2,\ldots$ korral $X_t=3-Y_t$, saame näiteks juhul $\lambda_2=\mu_1=\mu_2=0, \lambda_1=\dfrac{2p-1}{p}, q=1-p$. Siis

$$\mathbb{Q}=\begin{array}{c}\\(1,1)\\(2,1)\\(1,2)\\(2,2)\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}(1,1)&(2,1)&(1,2)&(2,2)\end{array}\\\begin{pmatrix}2p-1&1-p&1-p&0\\0&p&1-p&0\\0&1-p&p&0\\0&1-p&1-p&2p-1\end{pmatrix}\end{array}.$$

Sel juhul saame samuti, et kui algjaotus on valitud selline, et $P(X_1\neq Y_1)=1$, siis on X_t ja Y_t alati erinevad.

Edaspidi vaatleme ainult statsionaarset ahelat Z, siis $Z_t=(X_t,Y_t)$ jaotus on iga $t=1,2,\ldots$ korral sama. Jadadevahelise sõltuvuse uurimiseks võime kasutada erinevaid mõõdikuid.

1. **Vastastikune informatsioon** $I(X_t;Y_t)$.

   Kui (X_t,Y_t) on juhuslik vektor ühisjaotusega $P(x,y), (x,y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, siis juhuslike suuruste X_t, Y_t vastastikuseks informatsiooniks nimetatakse arvu

   $$I(X_t;Y_t) = \sum_{\{x,y\colon P(x,y)\neq 0\}} P(x,y)\log_2 \frac{P(x,y)}{P(x)P(y)}.$$

   X_t ja Y_t on sõltumatud parajasti siis, kui ühisjaotus on võrdne marginaaljaotuste korrutisega, mistõttu vastastikune informatsioon on sõltumatuse korral 0:

   $$I(X_t;Y_t) = \sum_{\{x,y\colon P(x,y)\neq 0\}} P(x,y)\log_2 \frac{P(x,y)}{P(x)P(y)} = \sum_{\{x,y\colon P(x,y)\neq 0\}} P(x,y)\log_2 \frac{P(x)P(y)}{P(x)P(y)} = 0.$$

   Vastastikuse informatsiooni saab esitada kujul $I(X_t;Y_t) = E\left(\log_2 \dfrac{P(X_t,Y_t)}{P(X_t)P(Y_t)}\right)$.

   Kui X_t ja Y_t on alati võrdsed, siis vastastikune informatsioon on võrdne $X_t = Y_t$ entroopiaga:

   $$I(X_t;Y_t) = E\left(\log_2 \frac{P(X_t,Y_t)}{P(X_t)P(Y_t)}\right) = E\left(\log_2 \frac{P(X_t|Y_t)P(Y_t)}{P(X_t)P(Y_t)}\right) = E\left(\log_2 \frac{1}{P(X_t)}\right)$$
   $$= E(-\log_2 P(X_t)) = -\sum_{\{x\colon P(x)\neq 0\}} P(x)\log_2 P(x) = H(X_t).$$

2. **Tõenäosus** $P(X_t = Y_t)$.

   Kui X_t ja Y_t võimalike väärtuste hulk on sama, siis tõenäosust $P(X_t = Y_t)$ saab kasutada ahelate sõltuvuse uurimiseks. Näiteks kui X_t ja Y_t on alati võrdsed, siis $P(X_t = Y_t) = 1$. Samuti, kui X_t ja Y_t võivad omandada vaid kahte väärtust, siis sõltumatuse korral on vastav tõenäosus 0.5.

3. **Korrelatsioon** $\rho(X_t,Y_t)$.

   Kui X_t ja Y_t võimalikud väärtused pole numbrilised, siis ei saa korrelatsiooni arvutada. Antud näites eeldame, et seisundid $\{1,2\}$ pole kodeeringud, vaid tähistavad numbrilisi väärtusi, seega saame leida ka korrelatsiooni:

   $$\rho(X_t,Y_t) = \frac{\operatorname{cov}(X_t,Y_t)}{\sigma_{X_t}\sigma_{Y_t}} = \frac{E(X_tY_t) - (EX_t)(EY_t)}{\sqrt{E(X_t^2) - (EX_t)^2}\sqrt{E(Y_t^2) - (EY_t)^2}}.$$

Kuna eeldame, et Z on statsionaarne, siis kõik eelpool nimetatud mõõdikud on arvutatavad statsionaarse algjaotuse $\pi_{(X,Y)}(i,j)$ kaudu. Kuna X ja Y on antud näites sama üleminekumaatriksiga, siis on ka nende statsionaarsed algjaotused võrdsed. Leiame X ja Y statsionaarse jaotuse $\begin{pmatrix}\pi_1 & \pi_2\end{pmatrix}$. Selleks peab kehtima võrdus

$$\begin{pmatrix}\pi_1 & \pi_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p & 1-p \\ q & 1-q\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\pi_1 & \pi_2\end{pmatrix}.$$

Kuna algtõenäosuste summa peab olema 1, saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} p\pi_1 + q\pi_2 = \pi_1 \\ (1-p)\pi_1 + (1-q)\pi_2 = \pi_2 \\ \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1-p)\pi_1 - q\pi_2 = 0 \\ \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases}. \tag{3.3}$$

Tähistades $a := \dfrac{q}{1-p+q}$, saame süsteemi (3.3) lahenditeks

$$\pi_1 = a, \quad \pi_2 = 1-a. \tag{3.4}$$

Asendades (3.4) väärtused süsteemi (3.3), saame tõepoolest samasuse:

$$\begin{cases} (1-p)a - q(1-a) = a(1-p+q) - q = \dfrac{q}{1-p+q}(1-p+q) - q = 0 \\ a + (1-a) = 1 \end{cases}.$$

Ahela (X,Y) statsionaarse algjaotuse $\begin{pmatrix}\pi_{11} & \pi_{21} & \pi_{12} & \pi_{22}\end{pmatrix}$ leidmiseks tuleb lahendada võrrand

$$\begin{pmatrix}\pi_{11} & \pi_{21} & \pi_{12} & \pi_{22}\end{pmatrix} \begin{pmatrix} p\lambda_1 & p(1-\lambda_1) & p(1-\lambda_1) & 1+p\lambda_1-2p \\ q\mu_1 & p-q\mu_1 & q(1-\mu_1) & 1+q\mu_1-p-q \\ p\lambda_2 & q-p\lambda_2 & p(1-\lambda_2) & 1+p\lambda_2-q-p \\ q\mu_2 & q(1-\mu_2) & q(1-\mu_2) & 1+q\mu_2-2q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\pi_{11} & \pi_{21} & \pi_{12} & \pi_{22}\end{pmatrix}$$

ehk kuna algjaotuse tõenäosuste summa peab olema 1, siis saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} p\lambda_1\pi_{11} + q\mu_1\pi_{21} + p\lambda_2\pi_{12} + q\mu_2\pi_{22} = \pi_{11} \\ p(1-\lambda_1)\pi_{11} + (p-q\mu_1)\pi_{21} + (q-p\lambda_2)\pi_{12} + q(1-\mu_2)\pi_{22} = \pi_{21} \\ p(1-\lambda_1)\pi_{11} + q(1-\mu_1)\pi_{21} + p(1-\lambda_2)\pi_{12} + q(1-\mu_2)\pi_{22} = \pi_{12} \\ (1+p\lambda_1-2p)\pi_{11} + (1+q\mu_1-p-q)\pi_{21} + (1+p\lambda_2-q-p)\pi_{12} + (1+q\mu_2-2q)\pi_{22} = \pi_{22} \\ \pi_{11} + \pi_{21} + \pi_{12} + \pi_{22} = 1 \end{cases}. \tag{3.5}$$

Tähistades

$$b := a \cdot \frac{p(\lambda_2-\mu_2) + q(\mu_1-\mu_2) + \mu_2}{p(\lambda_2-\lambda_1) + q(\mu_1-\mu_2) + 1},$$

saame võrrandisüsteemi (3.5) lahenditeks

$$\pi_{11} = b, \quad \pi_{21} = a-b, \quad \pi_{12} = a-b, \quad \pi_{22} = 1-2a+b. \tag{3.6}$$

Asendades lahendid (3.6) süsteemi (3.5) esimesse võrdusesse, saame

$$\begin{aligned}
&p\lambda_1\pi_{11} + q\mu_1\pi_{21} + p\lambda_2\pi_{12} + q\mu_2\pi_{22} - \pi_{11} \\
&= p\lambda_1 b + q\mu_1(a-b) + p\lambda_2(a-b) + q\mu_2(1-2a+b) - b \\
&= bp\lambda_1 + aq\mu_1 - bq\mu_1 + ap\lambda_2 - bp\lambda_2 + q\mu_2 - 2aq\mu_2 + bq\mu_2 - b \\
&= a\Big(q(\mu_1-\mu_2) + p\lambda_2 - q\mu_2\Big) - b\Big(p(\lambda_2-\lambda_1) + q(\mu_1-\mu_2) + 1\Big) + q\mu_2 \\
&= a\Big(q(\mu_1-\mu_2) + p\lambda_2 - q\mu_2\Big) - a\Big(p(\lambda_2-\mu_2) + q(\mu_1-\mu_2) + \mu_2\Big) + q\mu_2 \\
&= -a\mu_2(1-p+q) + q\mu_2 = 0.
\end{aligned}$$

Asendades lahendid (3.6) süsteemi (3.5) teistesse võrdusesse, saame samuti samasused, mistõttu on (3.6) tõepoolest (3.5) lahendid.

Kasutades leitud statsionaarseid algjaotusi (3.4) ja (3.6), saame arvutada erinevaid sõltuvuse mõõdikuid. Tõenäosus $P(X_t = Y_t)$ avaldub kujul

$$\begin{aligned}
P(X_t = Y_t) &= \pi_{11} + \pi_{22} = b + 1 - 2a + b = 1 - 2a + 2b \\
&= 1 - 2a\left(1 - \frac{p(\lambda_2-\mu_2) + q(\mu_1-\mu_2) + \mu_2}{p(\lambda_2-\lambda_1) + q(\mu_1-\mu_2) + 1}\right) \\
&= 1 - 2a \cdot \frac{p(\lambda_2-\lambda_1) + q(\mu_1-\mu_2) + 1 - p(\lambda_2-\mu_2) - q(\mu_1-\mu_2) - \mu_2}{p(\lambda_2-\lambda_1) + q(\mu_1-\mu_2) + 1} \\
&= 1 - 2a \cdot \frac{p(\mu_2-\lambda_1) + 1 - \mu_2}{p(\lambda_2-\lambda_1) + q(\mu_1-\mu_2) + 1}.
\end{aligned}$$

Vastastikune informatsioon avaldub kujul

$$I(X_t;Y_t) = \sum_{\{i,j\colon \pi_{ij}\neq 0\}} \pi_{ij} \log_2 \frac{\pi_{ij}}{\pi_i\pi_j}.$$

Kui näiteks $b = 0, a = \dfrac{1}{2}$, siis

$$I(X_t;Y_t) = \frac{1}{2}\log_2 2 + \frac{1}{2}\log_2 2 = 1.$$

Eeldusel, et $b, a-b, 1-2a+b \neq 0$, on vastastikune informatsioon kujul

$$I(X_t;Y_t) = b\log_2\frac{b}{a^2} + 2(a-b)\log_2\frac{a-b}{a(1-a)} + (1-2a+b)\log_2\frac{1-2a+b}{(1-a)^2}.$$

Antud näites tähistavad 1 ja 2 juhuslike suuruste X ja Y võimalikke väärtusi, leiame ka korrelatsiooni. Kuna X ja Y on sama üleminekumaatriksiga, siis saame

$$\begin{aligned}
\rho(X_t, Y_t) &= \frac{\operatorname{cov}(X_t, Y_t)}{\sigma_{X_t}\sigma_{Y_t}} = \frac{E(X_tY_t) - (EX_t)^2}{E(X_t^2) - (EX_t)^2} \\
&= \frac{\Big(b + 4(a-b) + 4(1-2a+b)\Big) - \Big(a + 2(1-a)\Big)^2}{\Big(a + 4(1-a)\Big) - \Big(a + 2(1-a)\Big)^2} \\
&= \frac{b + 4a - 4b + 4 - 8a + 4b - 4 + 4a - a^2}{a + 4 - 4a - 4 + 4a - a^2} = \frac{b - a^2}{a(1-a)}.
\end{aligned}$$

Kasutades eelnevalt leitud sõltuvuse mõõdikuid, uurime, milline on juhuslike suuruste X_t ja Y_t sõltuvus erinevate parameetrite $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1$ ja μ_2 korral. Eeldame, et $p = 0.8, q = 0.2$. Paneme tähele, et arvestades tingimusi (3.2), kehtivad $p = 0.8, q = 0.2$ korral parameetritele järgmised kitsendused:

$$\lambda_1 \in [0.75, 1], \quad \lambda_2 \in [0, 0.25], \quad \mu_1 \in [0, 1], \quad \mu_2 \in [0, 1].$$

Vaatleme erinevaid parameetrite komplekte ning igal juhul leiame eeltoodud kolme sõltuvusmõõdiku väärtused. Tulemused esitame tabelis 1.

λ_1	λ_2	μ_1	μ_2	$I(X_t; Y_t)$	$P(X_t = Y_t)$	$\rho(X_t, Y_t)$
1	0.25	1	1	1	1	1
1	0.25	1	0.9	0.724	0.952	0.905
1	0.25	0	0.9	0.561	0.909	0.818
0.9	0.25	1	1	0.35	0.833	0.667
0.9	0.25	1	0.9	0.278	0.8	0.6
1	0.25	0.9	0.2	0.123	0.704	0.407
0.75	0.25	1	1	0.082	0.667	0.333
0.8	0.2	0.8	0.2	0	0.5	0
0.875	0.125	0.5	0.5	0	0.5	0
0.8	0.2	0.5	0.2	0.008	0.448	−0.103
0.8	0	0.8	0.2	0.082	0.333	−0.333
0.75	0.1	0.1	0.1	0.262	0.208	−0.583
0.75	0	0.1	0	0.724	0.048	−0.905
0.75	0	0	0	1	0	−1

Tabel 1: Sõltuvusmõõdikute väärtused erinevate parameetrite korral

Teame, et vastastikune informatsioon on 0 parajasti siis, kui juhuslikud suurused X_t ja Y_t on sõltumatud. Tabelist 1 näeme, et ka parameetrite $\lambda_1 = 0.875, \lambda_2 = 0.125, \mu_1 =$

$\mu_2 = 0.5$ korral saame

$$I(X_t;Y_t) = 0, \quad P(X_t = Y_t) = 0.5, \quad \rho(X_t, Y_t) = 0.$$

Üleminekumaatriks ning statsionaarne algjaotus on siis

$$\mathbb{Q} = \begin{array}{c} \\ (1,1) \\ (2,1) \\ (1,2) \\ (2,2) \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (1,1) & (2,1) & (1,2) & (2,2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.7 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.7 \end{pmatrix} \end{array}, \quad \pi = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \end{pmatrix}.$$

Üleminekumaatriksist näeme, et X_t ja Y_t pole sõltumatud, kuid kuna statsionaarne algjaotus on ühtlane, siis sõltuvusmõõdikute väärtused on samad, mis sõltumatuse juhul. Paneme tähele, et

$$P(x_1, x_2 | y_1, y_2) = \frac{P(x_2, y_2 | x_1, y_1) P(x_1, y_1)}{P(y_2 | y_1) P(y_1)}.$$

Seega

$$\begin{aligned} P(X_1 = 1, X_2 = 1 | Y_1 = 1, Y_2 = 1) &= \frac{0.7 \cdot 0.25}{0.8 \cdot 0.5} = 0.4375, \\ P(X_1 = 1, X_2 = 1 | Y_1 = 2, Y_2 = 1) &= \frac{0.1 \cdot 0.25}{0.2 \cdot 0.5} = 0.25, \end{aligned}$$

millest saame et (X_1, X_2) ja (Y_1, Y_2) ei ole sõltumatud. Seega iga t korral on X_t ja Y_t küll sõltumatud, kuid ahelad X ja Y pole sõltumatud.

Juhtudel, kus X_t ja Y_t pole maksimaalselt sõltuvad, ei ole üleminekumaatriksis ühtegi nulli, seega saame igast olekust liikuda järgmisesse ühe sammuga, mistõttu Markovi ahel Z on taandumatu, samuti rekurrentne. Kui ahelad on maksimaalselt sõltuvad, st $P(X_t = Y_t) = 1$ või $P(X_t \neq Y_t) = 1$, siis on üleminekumaatriksis nullid ning ahel Z ei pruugi olla taandumatu ega rekurrentne. Kui ahel pole taandumatu, siis pole ka statsionaarne algjaotus ühene. Vaatleme näiteks juhtu, kus $\lambda_1 = \mu_2 = 1$, $\lambda_2 = \mu_1 = 0$. Siis

$$\mathbb{Q} = \begin{array}{c} \\ (1,1) \\ (2,1) \\ (1,2) \\ (2,2) \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (1,1) & (2,1) & (1,2) & (2,2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} p & 0 & 0 & 1-p \\ 0 & p & 1-p & 0 \\ 0 & 1-p & p & 0 \\ 1-p & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \end{array}.$$

Paneme tähele, et statsionaarset algjaotust ei saa leida eelnevalt leitud suuruste a ja b kaudu, sest

$$p(\lambda_2 - \lambda_1) + q(\mu_1 - \mu_2) + 1 = 0.$$

Sellise üleminekumaatriksiga ahel pole taandumatu ega rekurrentne. Kui ahel satub seisundisse $(1,1)$ või $(2,2)$, siis teistesse seisunditesse enam jõuda pole võimalik. Sama kehtib ka seisundite $(1,2)$ ja $(2,1)$ korral. Statsionaarsuse tingimused on kujul

$$\begin{cases} \pi_{11} = \pi_{22} \\ \pi_{12} = \pi_{21} \\ \pi_{11} + \pi_{21} + \pi_{12} + \pi_{22} = 1 \end{cases}.$$

Seega statsionaarseks algjaotuseks on palju võimalusi. Näiteks, kui võtta

$$\begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{21} & \pi_{12} & \pi_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix},$$

saame maksimaalse sõltuvuse juhu, kus $P(X_t = Y_t) = 1$. Kui aga algjaotuseks valida

$$\begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{21} & \pi_{12} & \pi_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix},$$

saame samuti maksimaalse sõltuvuse juhu, kuid $P(X_t \neq Y_t) = 1$. Paneme ka tähele, et statsionaarseks algjaotuseks sobib

$$\begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{21} & \pi_{12} & \pi_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \end{pmatrix},$$

mille korral saaksime ahelate sõltuvusmõõdikud samad, mis sõltumatuse juhul. Siiski pole ahelad sellise algjaotuse valiku korral sõltumatud. Kui esimeseks seisundiks osutub $(1,1)$ või $(2,2)$, siis on kogu ahel maksimaalselt positiivselt sõltuv. Kui aga esimeseks seisundiks osutub $(1,2)$ või $(2,1)$, siis on kogu ahel maksimaalselt negatiivselt sõltuv. Paneme tähele, et kirjeldatud sõltuvusmõõdikud ning üleminekumaatriks $\mathbb{Q}$, π_{ij} on pidevad parameetrite $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ suhtes, st kui kehtivad punktiviisi koondumised

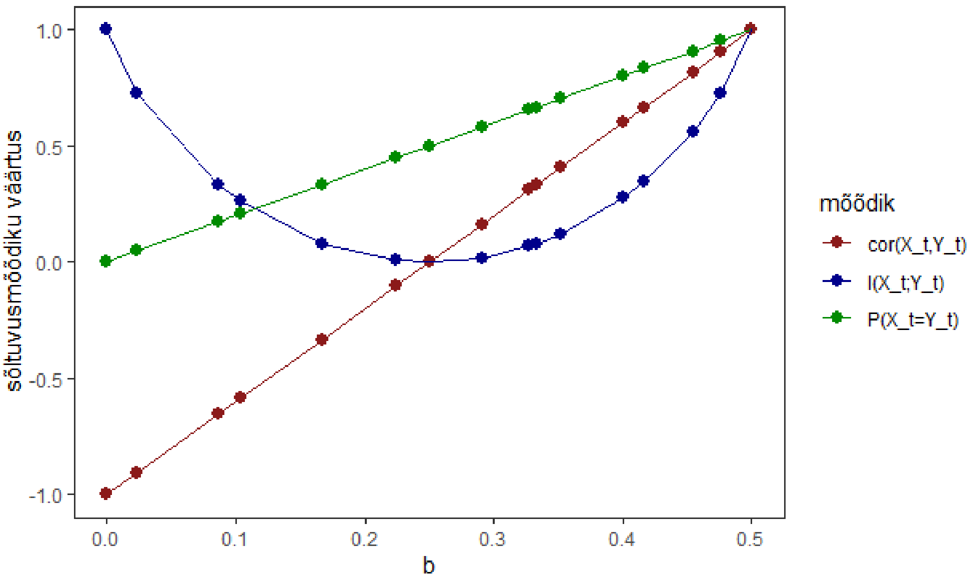
$$\lambda_1^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1, \quad \lambda_2^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad \mu_1^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad \mu_2^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1,$$

siis $\mathbb{Q}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{Q}$ ja $\pi_{ij}^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi_{ij}$, kusjuures kui $\lambda_1^n, \lambda_2^n, \mu_1^n, \mu_2^n \in (0,1)$, siis on üleminekumaatriksid $\mathbb{Q}_n$ taandumatud, mistõttu ka statsionaarne algjaotus on ühene. Kui $q = 1 - p$, siis $a = 0.5$ ning kui parameetrid koonduvad sama kiiresti vastavalt nulliks ja üheks, siis $b \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.5 \cdot 0.5 = 0.25$ ehk

$$\pi_{ij}^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{pmatrix} 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \end{pmatrix}.$$

Seega kui ahel Z pole taandumatu, siis sõltuvusmõõdikute väärtused defineerime läbi piirväärtuse.

Suurus b tähistab (X, Y) statsionaarse algjaotuse tõenäosust π_{11}, mis on kombinatsioon kõikidest parameetritest. Uurime, kuidas muutub ahelate omavaheline sõltuvus, kui muudame parameetrite kombinatsiooni b väärtust. Saadud tulemused on kujutatud joonisel 1. Kuna antud näite korral $q = 1 - p$, siis $a = 0.5$, mistõttu b võimalikud väärtused jäävad lõiku $[0, 0.5]$.



Joonis 1: Kolme erineva sõltuvusmõõdiku väärtused erinevate parameetrite kombinatsioonide b korral

Joniselt 1 on näha, et korrelatsioon ning tõenäosus $P(X_t = Y_t)$ kasvavad lineaarselt suuruse b kasvades. Vastastikune informatsioon on aga suuremate ja väiksemate b väärtuste korral kõrgem ning minimaalse väärtuse saavutab $b = 0.25$ korral, mis vastab sõltumatuse juhule.

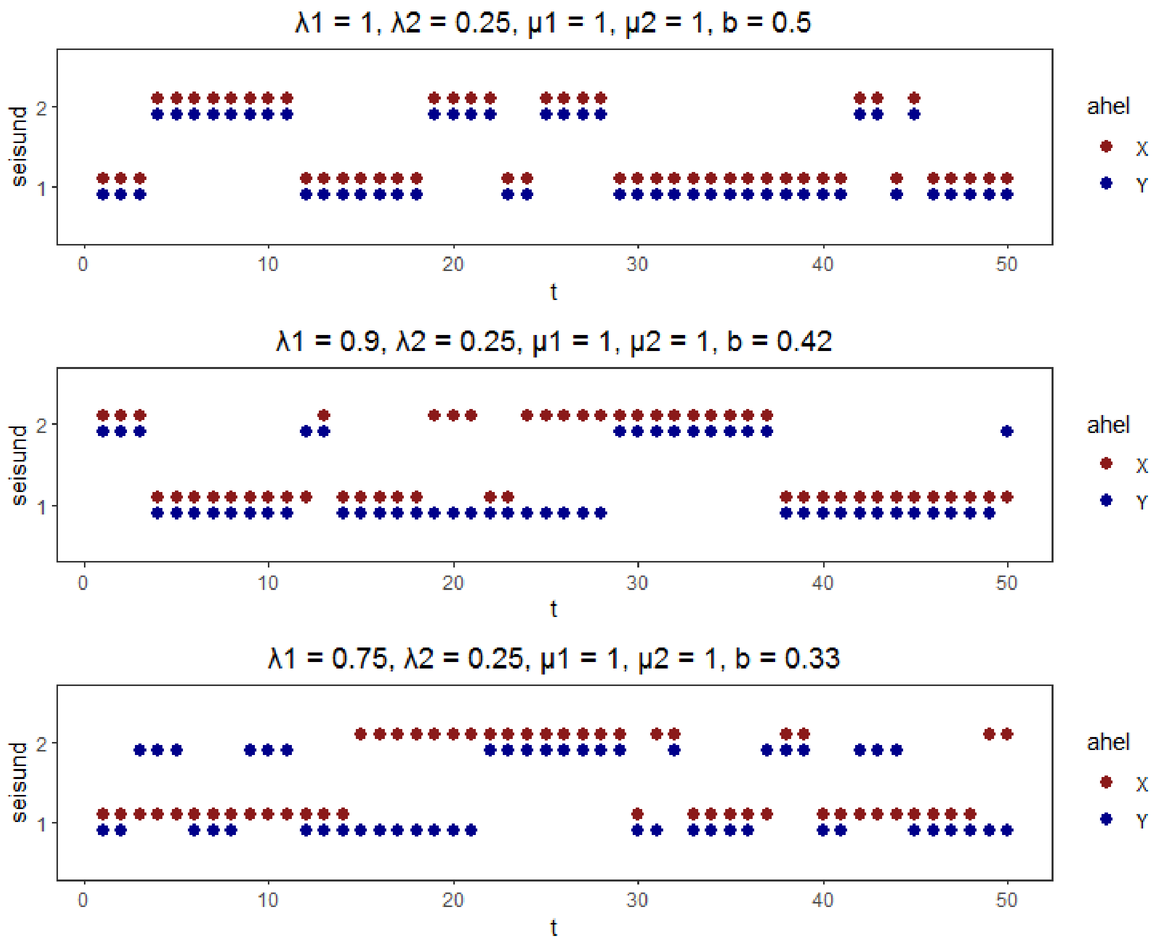
Valime mõned parameetrite komplektid tabelist 1 ning genereerime 50 vaatlust vastavast tüüpilisest ahela (X, Y) realisatsioonist. Joonis 2 illustreerib kolme erineva parameetrite komplektiga ahela realisatsiooni. Esimesel graafikul on ahelad maksimaalselt sõltuvad, st iga t korral on $X_t = Y_t$. Teisel joonisel on juht, kus ahelad on keskmiselt sõltuvad, st

$$I(X_t; Y_t) = 0.35, \quad P(X_t = Y_t) = 0.833, \quad \rho(X_t, Y_t) = 0.667, \quad b = 0.417.$$

Vastaval graafikul pole ahelate väärtused alati võrdsed, kuid on näha mitmeid piirkondi, kus väärtused kattuvad. Kolmandal graafikul on ahelate vahel nõrk positiivne sõltuvus:

$$I(X_t; Y_t) = 0.082, \quad P(X_t = Y_t) = 0.667, \quad \rho(X_t, Y_t) = 0.333, \quad b = 0.333.$$

Graafikul on märgata kattuvaid piirkondi, kuid tugevat seost ei ole näha.

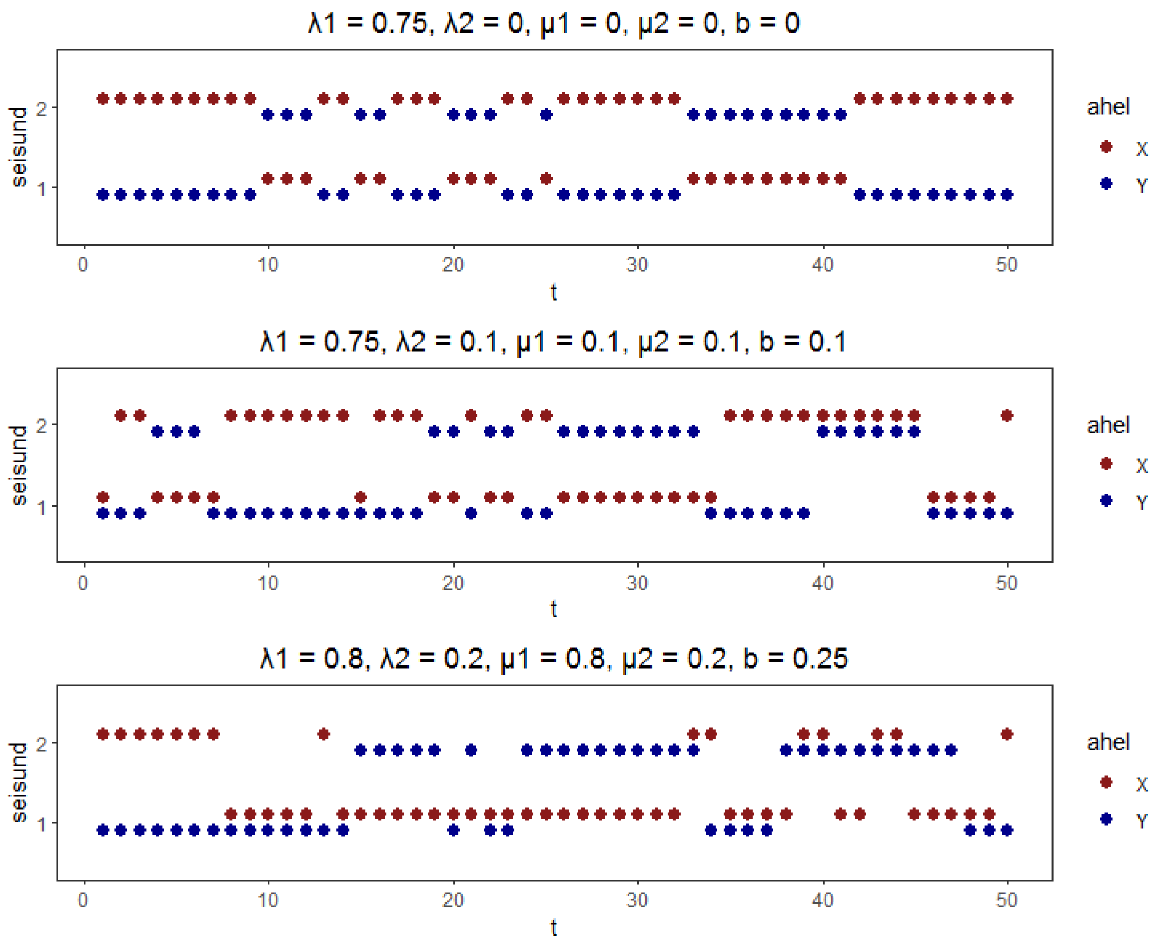


Joonis 2: Kolme erineva parameetrite komplektiga ahela realisatsioonid, kus b väärtused on $0.5, 0.42$ ja 0.33

Joonisel 3 illustreerime juhte, kus ahelate väärtused on sagedamini erinevad. Esimesel graafikul on kujutatud juht, kus ahelad on maksimaalselt negatiivselt sõltuvad, st iga t korral $X_t = 3 - Y_t$. Teisel graafikul on kujutatud juht, kus ahelad on keskmiselt korreleeritud:

$$I(X_t; Y_t) = 0.262, \quad P(X_t = Y_t) = 0.208, \quad \rho(X_t, Y_t) = -0.583, \quad b = 0.104.$$

Graafikul võib märgata, et rohkem esineb olukordi, kus X ja Y väärtused erinevad. Kolmandal graafikul on kujutatud sõltumatute ahelate tüüpiline realisatsioon.



Joonis 3: Kolme erineva parameetrite komplektiga ahela realisatsioonid, kus b väärtused on $0, 0.1$ ja 0.25

Selles näites uurisime, kuidas defineerida PMM, kui eesmärk on kirjeldada kahe Markovi ahela sõltuvust. Järgnev näide kirjeldab, kuidas esitada mittehomogeene HMM homogeense PMM-ina.

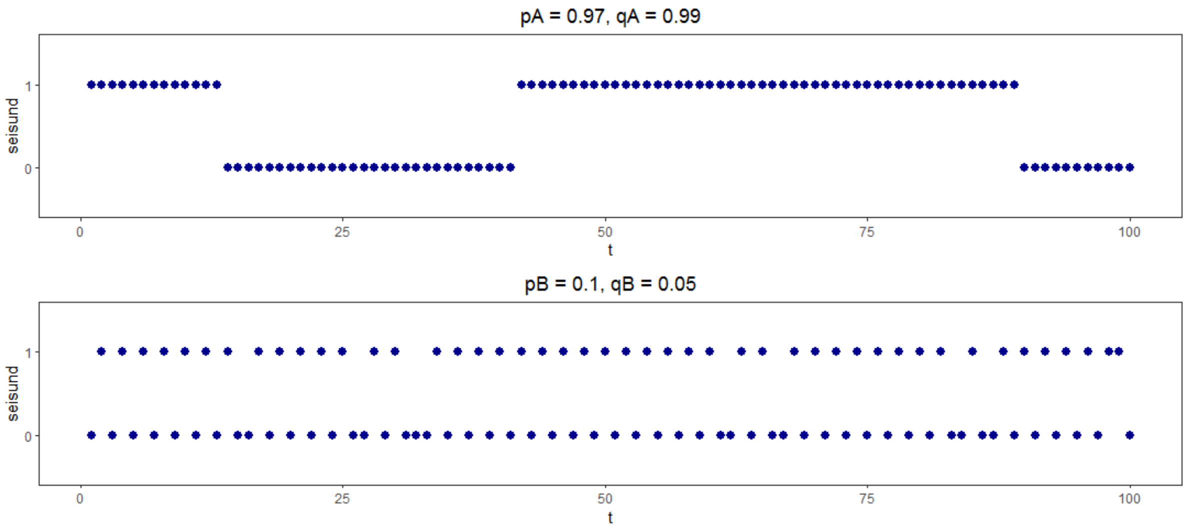
3.2 Näide 2

Vaatleme protsessi X kaheelemendilise seisundite hulgaga $\mathcal{X} = \{0, 1\}$. Oletame, et teatud ajaperioodidel muutuvad seisundid ühe üleminekumaatriksi järgi ning nende perioodide vahel vastavalt teisele üleminekumaatriksile. Seega pole seda protsessi üldjuhul võimalik modelleerida homogeense Markovi ahela abil. Erinevatele üleminekumaatriksitele

maatriksitele vastavaid perioode A ja B nimetame režiimideks. Režiimis A modelleerib seisundite 0 ja 1 vaheldumist üleminekumaatriks P_A ning režiimis B kirjeldab seisundite vaheldumist üleminekumaatriks P_B:

$$P_A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{pmatrix} p_A & 1-p_A \\ 1-q_A & q_A \end{pmatrix} \end{array}, \quad P_B = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{pmatrix} p_B & 1-p_B \\ 1-q_B & q_B \end{pmatrix} \end{array}.$$

Et näha antud maatriksite vahel selget erinevust, olgu P_A selline maatriks, kus peadiagonaalil on suured tõenäosused ning P_B korral olgu peadiagonaalil väikesed tõenäosused. Seega kuna p_A, q_A on lähedased ühele, siis režiimis A on tüüpiline realisatsioon selline, kus esinevad pikad nullide ja ühtede blokid. Samas p_B, q_B on lähedased nullile, mistõttu režiimi B tüüpilises realisatsioonis on näha sagedast nullide ja ühtede vaheldumist. Selliste üleminekumaatriksitega ahelate tüüpilist realisatsiooni illustreerib joonis 4.



Joonis 4: Üleminekumaatriksitega P_A ja P_B ahelate tüüpilised realisatsioonid

Kirjeldatud protsessi saaks modelleerida mittehomogeense Markovi ahelaga, kuid režiimide vaheldumise ajad pole üldiselt teada, need on juhuslikud. See-eest oletame, et oleme andmete põhjal hinnanud keskmised režiimides viibimise ajad: pikkade blokkide perioodi keskmine pikkus olgu μ_A ning lühikeste perioodide keskmine pikkus μ_B. Teades keskmisi režiimides püsimise aegu, saame nüüd režiimide vaheldumist kirjeldada kaheseisundilise Markovi ahelaga, kus seisundite hulk on $\mathcal{Y} = \{A, B\}$. Režiimis A püsimise aeg on geomeetrilise jaotusega parameetriga $1 - r_A$, kus $r_A = P(Y_{t+1} = A | Y_t = A)$. Seega režiimis A püsimise aja keskväärtus on $\mu_A = \dfrac{1}{1 - r_A}$, millest $r_A = 1 - \dfrac{1}{\mu_A}$. Analoogiliselt on režiimis B püsimise aeg geomeetrilise jaotusega parameetriga $1 - r_B$, kus

$r_B = P(Y_{t+1} = B|Y_t = B)$, mistõttu keskväärtuseks on $\mu_B = \dfrac{1}{1-r_B}$. Seega režiimide A ja B vahetumist kirjeldab maatriks

$$R = \begin{array}{c} \\ A \\ B \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} A & \quad B \end{array} \\ \begin{pmatrix} r_A & 1-r_A \\ 1-r_B & r_B \end{pmatrix} \end{array}.$$

Et näha erinevusi režiimide vahel, ei tohiks režiimide keskmised pikkused olla väga lühikesed. Seega r_A ja r_B on enamasti suured tõenäosused.

Eesmärk on kirjeldatud mittehomogeenset protsessi vaadelda homogeense Markovi ahelana. Selleks konstrueerime PMM-i $Z = (X, Y)$ seisundite hulgaga $\mathcal{Z} = \mathcal{X} \times \mathcal{Y} = \{0, 1\} \times \{A, B\}$. Protsess X modelleerib seisundite 0 ja 1 vaheldumist ning Y modelleerib režiimide A ja B vaheldumist. Vastava PMM-i üleminekumaatriks on 4×4-maatriks. Kuna algne eesmärk oli konstrueerida homogeenne ahel, millel säiliksid keskmised ajad μ_A ja μ_B, siis üleminekumaatriksi kaks alammaatriksit on üheselt määratud:

$$\mathbb{Q} = \begin{array}{c} \\ (0,A) \\ (1,A) \\ (0,B) \\ (1,B) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (0,A) & (1,A) & (0,B) & (1,B) \end{array} \\ \begin{pmatrix} r_A p_A & r_A(1-p_A) & p_1 & p_2 \\ r_A(1-q_A) & r_A q_A & p_3 & p_4 \\ p_5 & p_6 & r_B p_B & r_B(1-p_B) \\ p_7 & p_8 & r_B(1-q_B) & r_B q_B \end{pmatrix} \end{array}.$$

Sellise üleminekumaatriksi $\mathbb{Q}$ korral tõepoolest säilivad keskmised režiimides viibimise ajad:

$$P(Y_{t+1} = A|X_t = 0, Y_t = A) = r_A, \quad P(Y_{t+1} = A|X_t = 1, Y_t = A) = r_A,$$
$$P(Y_{t+1} = B|X_t = 0, Y_t = B) = r_B, \quad P(Y_{t+1} = B|X_t = 1, Y_t = B) = r_B.$$

Eelnevate võrduste põhjal näeme, et kahe esimese rea korral on esimeste elementide summa r_A, seega $p_1 + p_2 = p_3 + p_4 = 1 - r_A$, samuti saame, et $p_5 + p_6 = p_7 + p_8 = 1 - r_B$. Seega on üleminekumaatriks $\mathbb{Q}$ kujul (3.1), mistõttu on saadud mudel alati HMM-DN. Seega on ka režiimisisesed üleminekutõenäosused defineeritud vastavalt maatriksitele P_A ja P_B:

$$P(X_{t+1} = 0|X_t = 0, Y_{t+1} = A, Y_t = A) = p_A,$$
$$P(X_{t+1} = 1|X_t = 0, Y_{t+1} = A, Y_t = A) = 1 - p_A,$$
$$P(X_{t+1} = 0|X_t = 1, Y_{t+1} = A, Y_t = A) = 1 - q_A,$$

$$
\begin{aligned}
P(X_{t+1}=1|X_t=1,Y_{t+1}=A,Y_t=A)&=q_A,\\
P(X_{t+1}=0|X_t=0,Y_{t+1}=B,Y_t=B)&=p_B,\\
P(X_{t+1}=1|X_t=0,Y_{t+1}=B,Y_t=B)&=1-p_B,\\
P(X_{t+1}=0|X_t=1,Y_{t+1}=B,Y_t=B)&=1-q_B,\\
P(X_{t+1}=1|X_t=1,Y_{t+1}=B,Y_t=B)&=q_B.
\end{aligned}
$$

Enamasti on eesmärk modelleerida režiimisiseseid üleminekuid $A \to A$ ja $B \to B$ ja tõenäosuste $p_1,\ldots,p_8$ kohta ettekirjutisi pole. Kuna r_A ning r_B on enamasti lähedased ühele, siis tõenäosused $p_1,\ldots,p_8$ on nullilähedased, kuid siiski positiivsed. Kui võtaksime need tõenäosused nullideks, siis poleks tegemist taandumatu ahelaga, st kui protsess alustab režiimis A, siis režiimi B ta ei jõuakski. Selline PMM ei kirjeldaks režiimide vaheldumist, seega olukorda, kus $p_1,\ldots,p_8$ on nullid, me ei soovi. Kuna üleminekumaatriks esitub kujul (3.1), siis puuduvad tõenäosused $p_1,\ldots,p_8$ saame avaldada järgmiselt:

$$
\mathbb{Q}=\begin{array}{c}
\\ (0,A)\\ (1,A)\\ (0,B)\\ (1,B)
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} (0,A) & (1,A) & (0,B) & (1,B) \end{array}\\
\begin{pmatrix}
r_Ap_A & r_A(1-p_A) & (1-r_A)u_1 & (1-r_A)(1-u_1)\\
r_A(1-q_A) & r_Aq_A & (1-r_A)u_2 & (1-r_A)(1-u_2)\\
(1-r_B)u_3 & (1-r_B)(1-u_3) & r_Bp_B & r_B(1-p_B)\\
(1-r_B)u_4 & (1-r_B)(1-u_4) & r_B(1-q_B) & r_Bq_B
\end{pmatrix}
\end{array},
$$

kus $u_1,u_2,u_3,u_4\in(0,1)$. Mis tahes u_i-de valiku korral

$$
\begin{aligned}
&P(Y_{t+1}=B|X_t=0,Y_t=A)=1-r_A, \quad P(Y_{t+1}=B|X_t=1,Y_t=A)=1-r_A,\\
&P(Y_{t+1}=A|X_t=0,Y_t=B)=1-r_B, \quad P(Y_{t+1}=B|X_t=1,Y_t=A)=1-r_B.
\end{aligned}
$$

Seega sobivate u_i-de valikuks on lõpmata palju võimalusi, mistõttu ka soovitud PMM-i konstrueerimiseks on lõpmata palju võimalusi. Paneme tähele, et kuna $\mathbb{Q}$ on kujul (3.1), siis parameetrid u_i tähistavad järgmisi tinglikke tõenäosusi:

$$
\begin{aligned}
&u_1=P(X_{t+1}=0|X_t=0,Y_{t+1}=B,Y_t=A), \quad u_2=P(X_{t+1}=0|X_t=1,Y_{t+1}=B,Y_t=A),\\
&u_3=P(X_{t+1}=0|X_t=0,Y_{t+1}=A,Y_t=B), \quad u_4=P(X_{t+1}=0|X_t=1,Y_{t+1}=A,Y_t=B).
\end{aligned}
$$

Ülesande püstituse järgi peab $X_{1:n}$ tingimusel $Y_{1:n}=y_{1:n}$ olema mittehomogeene Markovi ahel. Näitame, et iga u_i-de valiku korral üleminekutõenäosused $P(X_{t+1}=x_{t+1}|X_t=x_t,Y_{1:n}=y_{1:n})$ sõltuvad ainult väärtustest y_t ja y_{t+1}.

Lemma 3. Olgu Z HMM-DN. Siis iga $n\geqslant t>1,\ \ x_{1:t}\in\mathcal{X}^t,\ \ y_{1:n}\in\mathcal{Y}^n$ korral

$$
P(x_{t+1}|x_{1:t},y_{1:n})=P(x_{t+1}|x_t,y_t,y_{t+1}).
$$

Tõestus. Üldjuhul kehtib iga $n \geqslant t > 1, \;\; x_{1:t} \in \mathcal{X}^t, \;\; y_{1:n} \in \mathcal{Y}^n$ korral

$$\begin{aligned} P(x_{t+1}|x_{1:t}, y_{1:n}) &= \frac{P(x_{t+1}, y_{t+1:n}|x_{1:t}, y_{1:t})}{P(y_{t+1:n}|x_{1:t}, y_{1:t})} = \frac{P(x_{t+1}, y_{t+1:n}|x_t, y_t)}{P(y_{t+1:n}|x_t, y_t)} \\ &= \frac{P(y_{t+2:n}|x_t, y_t, x_{t+1}, y_{t+1})P(x_{t+1}, y_{t+1}|x_t, y_t)}{P(y_{t+2:n}|x_t, y_t, y_{t+1})P(y_{t+1}|x_t, y_t)}. \end{aligned}$$

HMM-DN korral $P(y_{t+1}|x_t, y_t) = P(y_{t+1}|y_t)$, seega y_{t+1} ei sõltu eelnevast x_t väärtustest, mistõttu

$$P(x_{t+1}|x_{1:t}, y_{1:n}) = \frac{P(y_{t+2:n}|y_t, y_{t+1})P(x_{t+1}, y_{t+1}|x_t, y_t)}{P(y_{t+2:n}|y_t, y_{t+1})P(y_{t+1}|x_t, y_t)} = P(x_{t+1}|x_t, y_t, y_{t+1}).$$

□

Antud näites on $\mathcal{X} = \{0, 1\}, \;\; \mathcal{Y} = \{A, B\}$, lemma 3 põhjal saame, et üleminek $X_t \to X_{t+1}$ ei sõltu väärtustest $y_{1:t-1}$ ega $y_{t+2:n}$. Seega kui mingi t korral $Y_t = A, Y_{t+1} = A$, siis üleminek $X_t \to X_{t+1}$ toimub üleminekumaatriksi P_A kohaselt. Samuti, kui $Y_t = B, Y_{t+1} = B$, siis $X_t \to X_{t+1}$ toimub vastavalt maatriksile P_B. Juhul $Y_t = A, Y_{t+1} = B$ toimub X üleminek vastavalt maatriksile P_{AB} ning juhul $Y_t = B, Y_{t+1} = A$ maatriksi P_{BA} kohaselt, kus

$$P_{AB} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & \;\;1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{pmatrix} u_1 & 1 - u_1 \\ u_2 & 1 - u_2 \end{pmatrix} \end{array}, \quad P_{BA} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & \;\;1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{pmatrix} u_3 & 1 - u_3 \\ u_4 & 1 - u_4 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Seega

$$\mathbb{Q} = \begin{pmatrix} r_A P_A & (1 - r_A) P_{AB} \\ (1 - r_B) P_{BA} & r_B P_B \end{pmatrix}.$$

3.2.1 Võimalused u_i-de valikuks

Eelnevalt nägime, et u_i-de valikuks on lõpmata palju võimalusi. Kuna üldiselt on r_A ja r_B ühelähedased, siis u_i-de valikul pole mudelile väga suurt mõju. Ilma u_i-deta on mudelil 6 parameetrit. Et mitte parameetrite arvu suurendada, oleks mõistlik u_i-d valida nende 6 parameetri hulgast $\{r_A, r_B, p_A, p_B, q_A, q_B\}$.

1. Esimesena uurime, milliseid tingimusi peaksid rahuldama u_i-d, et saaksime vahelduva Markovi mudeli. Peatüki alguses veendusime, et vahelduva Markovi mudeli korral peavad kehtima võrdused $P_{BA} = P_A$, $P_{AB} = P_B$. Seega vahelduva Markovi mudeli saame parameetrite $u_1 = p_B, u_2 = 1 - q_B, u_3 = p_A$ ja $u_4 = 1 - q_A$ valiku korral. Seega režiimi vahetumisel määrab seisunditevahelised üleminekutõenäosused uus režiim: üleminekul $A \to B$ kirjeldab üleminekuid maatriks P_B ning üleminekul $B \to A$ kirjeldab üleminekuid maatriks P_A.

2. Võime vaadelda ka olukorda, kus režiimi vahetumisel määrab seisunditevahelised üleminekutõenäosused vana režiim. Siis $P_{BA} = P_B$, $P_{AB} = P_A$, mistõttu $u_1 = p_A, u_2 = 1 - q_A, u_3 = p_B$ ja $u_4 = 1 - q_B$. Seega üleminekul $A \to B$ on tõenäosused määratud maatriksiga P_A ning üleminekul $B \to A$ maatriksiga P_B.

3. Režiimi vahetumisel võib seisunditevahelised üleminekutõenäosused määrata alati P_A. Siis $P_{AB} = P_{BA} = P_A$ ehk $u_1 = p_A, u_2 = 1 - q_A, u_3 = p_A, u_4 = 1 - q_A$. Analoogiliselt võib seisunditevahelised üleminekutõenäosused määrata ka P_B, mille korral $P_{AB} = P_{BA} = P_B$, seega $u_1 = p_B, u_2 = 1 - q_B, u_3 = p_B, u_4 = 1 - q_B$.

4. Järgmisel võimalikul juhul on üleminekud seisundist 1 määratud vana režiimiga ning üleminekud seisundist 0 uue režiimiga. Sel juhul $u_1 = p_B, u_2 = 1 - q_A, u_3 = p_A$ ja $u_4 = 1 - q_B$. Samuti võib vaadelda vastupidist olukorda: üleminekud seisundist 0 on määratud vana režiimiga ning üleminekud seisundist 1 uue režiimiga. Siis $u_1 = p_A, u_2 = 1 - q_B, u_3 = p_B$ ja $u_4 = 1 - q_A$.

5. Veel üks võimalik juht on see, kus režiimi vahetumisel on üleminekud seisundist 1 määratud režiimiga A ja üleminekud seisundist 0 režiimiga B. Siis $u_1 = u_3 = p_B, u_2 = u_4 = 1 - q_A$. Samuti võime u_i-d valida nii, et režiimi vahetumisel on üleminekud seisundist 0 määratud režiimiga A ja üleminekud seisundist 1 režiimiga B. Sel juhul saame $u_1 = u_3 = p_A, u_2 = u_4 = 1 - q_B$.

6. Võime vaadelda ka juhtu, kus $u_1 = u_2 = u_3 = u_4$. Ka sel juhul ei saa tegemist olla vahelduva Markovi mudeliga, sest siis peaks kehtima $u_1 = p_B = 1 - q_B = p_A = 1 - q_A$ ehk $P_{AB} = P_{BA} = P_A = P_B$, mis tähendab, et vaatluse all on ainult üks režiim ning kogu ülesanne taanduks ainult ühele homogeensele Markovi ahelale.

Kirjeldatud 6 juhtu pole ainukesed, sobilike u_i-de defineerimiseks parameetrite arvu suurendamata on veel palju võimalusi.

3.2.2 Kas X on Markovi ahel?

Uurime, kas u_i-d on võimalik valida selliselt, et ka X oleks Markovi ahel. Kui sellised u_i-d leiduvad, siis järelikult saaksime esialgset mittehomogeenset kaheseisundilist Markovi ahelat modelleerida ühe homogeense kaheseisundilise Markovi ahelaga, mistõttu poleks eelneva PMM-i konstrueerimisel mõtet. Et X oleks Markovi ahel, piisab, et vahetatud rollidega mudel on HMM-DN. Selleks peavad kehtima võrdused

$$\begin{aligned} P(X_2 = 0|X_1 = 0, Y_1 = A) = P(X_2 = 0|X_1 = 0, Y_1 = B), \\ P(X_2 = 0|X_1 = 1, Y_1 = A) = P(X_2 = 0|X_1 = 1, Y_1 = B). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Paneme tähele, et

$$
\begin{aligned}
P(X_2 = 0|X_1 = 0, Y_1 = A) &= r_A p_A + (1 - r_A)u_1, \\
P(X_2 = 0|X_1 = 0, Y_1 = B) &= (1 - r_B)u_3 + r_B p_B
\end{aligned}
$$

ning

$$
\begin{aligned}
P(X_2 = 0|X_1 = 1, Y_1 = A) &= r_A(1 - q_A) + (1 - r_A)u_2, \\
P(X_2 = 0|X_1 = 1, Y_1 = B) &= (1 - r_B)u_4 + r_B(1 - q_B).
\end{aligned}
$$

Vahetatud rollidega üleminekumaatriks on kujul

$$
\mathbb{Q} = \begin{array}{c} \\ (0,A) \\ (0,B) \\ (1,A) \\ (1,B) \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} (0,A) & (0,B) & (1,A) & (1,B) \end{array} \\
\begin{pmatrix}
r_A p_A & (1-r_A)u_1 & r_A(1-p_A) & (1-r_A)(1-u_1) \\
(1-r_B)u_3 & r_B p_B & (1-r_B)(1-u_3) & r_B(1-p_B) \\
r_A(1-q_A) & (1-r_A)u_2 & r_A q_A & (1-r_A)(1-u_2) \\
(1-r_B)u_4 & r_B(1-q_B) & (1-r_B)(1-u_4) & r_B q_B
\end{pmatrix}
\end{array}. \tag{3.8}
$$

Et X oleks Markovi ahel, piisab, et kehtivad võrdused (3.7):

$$
\begin{aligned}
r_A p_A + (1 - r_A)u_1 = (1 - r_B)u_3 + r_B p_B = \alpha \in (0, 1), \\
r_A(1 - q_A) + (1 - r_A)u_2 = (1 - r_B)u_4 + r_B(1 - q_B) = 1 - \beta \in (0, 1).
\end{aligned}
$$

Maatriks (3.8) avaldub siis kujul

$$
\begin{pmatrix}
\alpha Q_{00} & (1-\alpha)Q_{01} \\
(1-\beta)Q_{10} & \beta Q_{11}
\end{pmatrix},
$$

kus

$$
Q_{ij} = \begin{pmatrix} q^{(ij)}_{AA} & q^{(ij)}_{AB} \\ q^{(ij)}_{BA} & q^{(ij)}_{BB} \end{pmatrix}, \quad q^{(ij)}_{i'j'} = P(Y_2 = j'|X_1 = i, Y_1 = i', X_2 = j).
$$

Siis antud mudel on HMM-DN, kus X on Markovi ahel üleminekumaatriksiga

$$
P_X = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\
\begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\beta & \beta \end{pmatrix}
\end{array}.
$$

Leiame tingimused, millal $r_A p_A + (1 - r_A)u_1 = (1 - r_B)u_3 + r_B p_B$. Arvestades, et $0 < u_1 < 1$, saame

$$
\begin{aligned}
& 0 < \frac{1-r_B}{1-r_A}u_3 + \frac{r_B}{1-r_A}p_B - \frac{r_A}{1-r_A}p_A < 1 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{r_A}{1-r_A}p_A - \frac{r_B}{1-r_A}p_B < \frac{1-r_B}{1-r_A}u_3 < 1 + \frac{r_A}{1-r_A}p_A - \frac{r_B}{1-r_A}p_B \\
\Leftrightarrow\ & \frac{r_A}{1-r_B}p_A - \frac{r_B}{1-r_B}p_B < u_3 < \frac{1-r_A}{1-r_B} + \frac{r_A}{1-r_B}p_A - \frac{r_B}{1-r_B}p_B.
\end{aligned}
$$

Kuna ka $0 < u_3 < 1$, siis

$$\frac{r_A}{1-r_B}p_A - \frac{r_B}{1-r_B}p_B < 1,$$
$$\frac{1-r_A}{1-r_B} + \frac{r_A}{1-r_B}p_A - \frac{r_B}{1-r_B}p_B > 0.$$

Seega saame tingimused

$$-\frac{1-r_A}{1-r_B} < \frac{r_A}{1-r_B}p_A - \frac{r_B}{1-r_B}p_B < 1.$$

Analoogiliselt saame, et kuna $0 < u_2 < 1$, siis

$$0 < \frac{1-r_B}{1-r_A}u_4 + \frac{r_B}{1-r_A}(1-q_B) - \frac{r_A}{1-r_A}(1-q_A) < 1$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{r_A}{1-r_B}(1-q_A) - \frac{r_B}{1-r_B}(1-q_B) < u_4 < \frac{1-r_A}{1-r_B} + \frac{r_A}{1-r_B}(1-q_A) - \frac{r_B}{1-r_B}(1-q_B)$$

ning kuna $0 < u_4 < 1$, siis

$$-\frac{1-r_A}{1-r_B} < \frac{r_A}{1-r_B}(1-q_A) - \frac{r_B}{1-r_B}(1-q_B) < 1.$$

Kokkuvõttes saame, et sobivad u_i-d leiduvad, kui on täidetud tingimused

$$\begin{cases} -\dfrac{1-r_A}{1-r_B} < \dfrac{r_A}{1-r_B}p_A - \dfrac{r_B}{1-r_B}p_B < 1; \\ \\ -\dfrac{1-r_A}{1-r_B} < \dfrac{r_A}{1-r_B}(1-q_A) - \dfrac{r_B}{1-r_B}(1-q_B) < 1. \end{cases} \tag{3.9}$$

Uurime, mis kujul on tingimused (3.9) mõnel erijuhul. Olgu $r := r_A = r_B$. Siis (3.9) saab kuju

$$\begin{cases} -1 < \dfrac{r}{1-r}(p_A - p_B) < 1; \\ -1 < \dfrac{r}{1-r}(q_B - q_A) < 1. \end{cases}$$

Kui $r = 0.5$, siis saame $-1 < p_A - p_B < 1$ ning $-1 < q_B - q_A < 1$, kuid kuna $p_A, q_A, p_B, q_B \in (0,1)$, siis on need võrratused alati täidetud, mistõttu $r = 0.5$ korral kitsendusi pole. Kui lisaks $r_A = r_B$ kehtib ka $q_A = p_A$, $q_B = p_B$, siis jääb järele ainult üks võrratus:

$$\begin{cases} -1 < \dfrac{r}{1-r}(p_A - p_B) < 1 \\ -1 < \dfrac{r}{1-r}(p_B - p_A) < 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad -1 < \frac{r}{1-r}(p_A - p_B) < 1.$$

Viimasena vaatleme erijuhtu, kus $r := r_A = r_B$, $q_A = p_A = \dfrac{1}{2} + \varepsilon$, $q_B = p_B = \dfrac{1}{2} - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Siis tingimused (3.9) on kujul

$$-1 < \frac{r}{1-r}(p_A - p_B) < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < 2\varepsilon\frac{r}{1-r} < 1.$$

Arvestades, et $r \in (0,1)$, $\varepsilon > 0$, saame kokkuvõttes, et sobivad u_i-d leiduvad, kui on täidetud tingimus

$$2\varepsilon \frac{r}{1-r} < 1. \tag{3.10}$$

Et näha režiimide erinevust, peaks ε olema võimalikult lähedane arvule 0.5. Et sel juhul oleks tingimus (3.10) täidetud, peab r olema lähedane arvule 0.5. Samas, et ka režiimide vahetumine oleks eristatav, peaks $r > 0.5$. Seega saame, et kui $r > 0.5$, ε on piisavalt lähedal arvule 0.5 või kui $P_A \approx P_B$, siis saame esialgset ülesannet lahendada ühe homogeense Markovi ahelaga ning konstrueeritud PMM-i polegi vaja. Siiski, et (3.10) oleks täidetud, peab r olema üsna lähedane arvule 0.5, mistõttu saame ülesande taandada ühele homogeensele Markovi ahelale ainult juhul, kus pika ja vahelduva režiimi keskmised pikkused on üsna lühikesed või kui $P_A \approx P_B$ ning erinevusi on siis raske märgata. Kuna praktikas on sageli $r \approx 1, p_A \approx 1, p_B \approx 0$, siis ei saa hakkama ainult ühe Markovi ahelaga X, vaid tuleb siiski kasutada konstrueeritud PMM-i.

Näide. Vaatleme konkreetset näidet kirjeldatud erijuhust, kus

$$r = 0.52, \quad p_A = 0.9, \quad p_B = 0.1, \quad \varepsilon = 0.4,$$
$$u_1 = \frac{13}{120}, \quad u_2 = \frac{107}{120}, \quad , u_3 = \frac{39}{40}, \quad u_4 = \frac{1}{40}.$$

Valitud parameetrite korral

$$2 \cdot 0.4 \cdot \frac{0.52}{0.48} = \frac{13}{15} < 1,$$

seega tingimus (3.10) on täidetud. Eelneva põhjal saame, et X on Markovi ahel, mille korral üleminekutõenäosused α ja β on

$$\alpha = rp_A + (1-r)u_1 = 0.52, \quad 1-\beta = r(1-p_A) + (1-r)u_2 = 0.48.$$

Seega X üleminekumaatriks on

$$P_X = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.52 & 0.48 \\ 0.48 & 0.52 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Seega antud juhul pole tarvis PMM-i konstrueerida, sest saame sama ahelat kirjeldada ühe kaheseisundilise Markovi ahelaga, mille üleminekumaatriks on P_X. Samas teame, et Y on samuti Markovi ahel üleminekumaatriksiga

$$P_Y = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 0.52 & 0.48 \\ 0.48 & 0.52 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Kodeerides X puhul $0 \mapsto 1, 1 \mapsto 2$ ning Y korral $A \mapsto 1, B \mapsto 2$, saame, et X ja Y on sama seisundite hulgaga $\{1,2\}$ ning sama üleminekumaatriksiga Markovi ahelad. Seega saame selliste parameetrite korral kirjeldada mudelit samasuguse Milano ahelana nagu peatükis 3.1.2. Parameetrid $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ on järgmised:

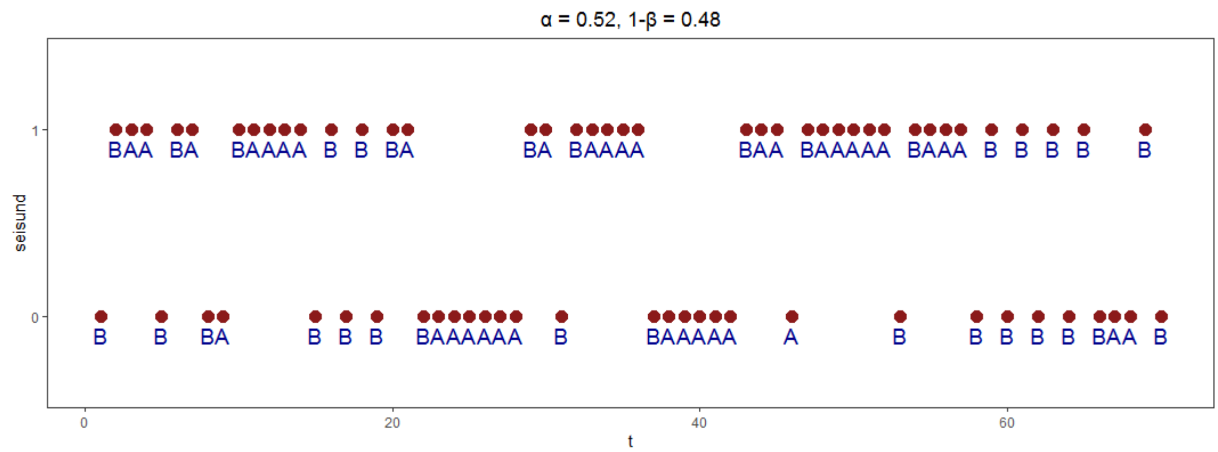
$$\lambda_1 = p_A = 0.9, \quad \lambda_2 = 1 - p_B = 0.9, \quad \mu_1 = 1 - u_2 = \frac{13}{120}, \quad \mu_2 = u_4 = \frac{1}{40}.$$

Seega üleminekumaatriks ja statsionaarne algjaotus on

$$\mathbb{Q} = \begin{array}{c} \\ (0,A) \\ (1,A) \\ (0,B) \\ (1,B) \end{array} \!\! \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (0,A) & (1,A) & (0,B) & (1,B) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.468 & 0.052 & 0.052 & 0.428 \\ 0.052 & 0.468 & 0.428 & 0.052 \\ 0.468 & 0.012 & 0.052 & 0.468 \\ 0.012 & 0.468 & 0.468 & 0.052 \end{pmatrix} \end{array}, \quad \pi = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \end{pmatrix}.$$

Võime kodeerida X ja Y võimalikud väärtused arvudega 1 ja 2, kuid kuna need ei tähista juhuslike suuruste tegelikke väärtusi, siis antud ülesandes ei saa leida X_t ja Y_t vahelist korrelatsiooni. Siiski saame uurida näiteks vastastikust informatsiooni. Kuna algjaotus π on ühtlane, siis $I(X_t; Y_t) = 0$. Üleminekumaatriksist näeme, et ahelad X ja Y ei ole sõltumatud. Seega selliste parameetrite valiku korral on iga t korral on X_t ja Y_t küll sõltumatud, kuid ahelad X ja Y ei ole sõltumatud.

Genereerime 70 vaatlust antud üleminekumaatriksiga Milano ahelast. Kuna X on Markovi ahel, siis saaksime genereerida vaatlusi ka kaheseisundilisest Markovi ahelast üleminekumaatriksiga P_X, kuid kasutame Milano ahelat, et näha ka vastavaid režiime. Simulatsioonide tulemused kujutame joonisel 5.



Joonis 5: PMM-i tüüpiline realisatsioon

Nagu jooniselt 5 näha, siis antud realisatsioonis on eristatavad piirkonnad, kus ahel püsib pikemalt ühes seisundis ning näeme ka piirkondi, kus olekud vahetuvad kiiresti. Paneme tähele, et kui ahel püsib pikemalt ühes seisundis, siis on sagedamini režiimiks A. Jooniselt on näha ka vahelduvaid blokke, kus režiimiks on B. Seega antud näites saime kirjeldada mittehomogeenset Markovi ahelat homogeense Markovi ahelaga, samuti taandus vastav PMM Milano ahelaks. Siiski paneme tähele, et pikad ja lühikesed blokid vahetuvad üsna kiiresti, st me ei näe olukorda, kus ahel oleks väga pikalt ühes seisundis ega ka olukorda, kus pika perioodi jooksul oleks tihe olekute vaheldumine. Seega veendusime, et teatud olukordades on tõepoolest võimalik antud ülesannet lahendada homogeense Markovi ahela abil. Kuid kui meile pakub huvi olukord, kus $r \approx 1$ ehk näeme pikki ühes seisundis olemise blokke ja pikki vahelduvaid blokke, siis ühest homogeensest Markovi ahelast ei piisa ning tuleb kasutada PMM-i.

3.2.3 Kolme režiimiga juht

Nüüd vaatame samuti kaheseisundilise $\mathcal{X} = \{0, 1\}$ mittehomogeense Markovi ahela modelleerimist homogeense PMM-ina, kuid olgu vaatluse all kolm erinevat režiimi A, B, C. Seega $Z = (X, Y)$ seisundite hulk on $\{0, 1\} \times \{A, B, C\}$. Sellist mudelit kasutatakse näiteks piltide tuvastamisel [1]. Kuna antud näites on režiime 3 ning olekuid 2, siis vastava PMM-i üleminekumaatriks on 6×6-maatriks. Ülesande püstitus on sama nagu kahe režiimi korral: meile on iga režiimi korral teada seisundite vaheldumise maatriksid P_{AA}, P_{BB} ja P_{CC}. Samuti teame režiimide vaheldumise maatriksit R. Seega PMM-i üleminekumaatriksis on igas reas neli valitavat tõenäosust. Esitame üleminekumaatriksi kujul

$$\begin{pmatrix} r_{AA}P_{AA} & r_{AB}P_{AB} & r_{AC}P_{AC} \\ r_{BA}P_{BA} & r_{BB}P_{BB} & r_{BC}P_{BC} \\ r_{CA}P_{CA} & r_{CB}P_{CB} & r_{CC}P_{CC} \end{pmatrix},$$

kus R on 3×3-maatriks

$$R = \begin{pmatrix} r_{AA} & r_{AB} & r_{AC} \\ r_{BA} & r_{BB} & r_{BC} \\ r_{CA} & r_{CB} & r_{CC} \end{pmatrix},$$

mis modelleerib režiimide vaheldumist. Kuna selline üleminekumaatriks esitub kujul (3.1), siis järelikult on tegemist klassiga HMM-DN, kus Y on Markovi ahel üleminekumaatriksiga R ja $P_{AA}, P_{AB}, \ldots, P_{CC}$ on tinglikud 2×2-üleminekumaatriksid. Et tegemist on klassiga HMM-DN, siis ka kolme režiimiga mudeli korral kehtib lemma 3:

$$P(x_{t+1}|x_{1:t}, y_{1:n}) = P(x_{t+1}|x_t, y_t, y_{t+1}) \quad \forall\, n \geqslant t > 1,\ \ x_{1:t} \in \{0,1\}^t,\ \ y_{1:n} \in \{A, B, C\}^n.$$

Seega kolme režiimiga mudeli korral on maatriksite $P_{AB}, P_{AC}, P_{BA}, P_{BC}, P_{CA}, P_{CB}$ elemendid valitavad. Kuna igas maatriksis on kaks tundmatut, siis kokku on valitavaid tõenäosuseid 12. Parameetrite valikuks on taas lõpmata palju valikuid. Näiteks, et saada vahelduvat Markovi mudelit, peame valima

$$P_{BA} = P_{CA} = P_{AA}, P_{AB} = P_{CB} = P_{BB}, P_{AC} = P_{BC} = P_{CC}. \tag{3.11}$$

Kui lisaks võrdustele (3.11) on maatriksites $P_{AB}, P_{AC}, P_{BA}, P_{BC}, P_{CA}, P_{CB}$ veerud võrdsed, siis saame HMM-i.

Põhiküsimus on endiselt, kas parameetrid on võimalik valida sellised, et X oleks Markovi ahel? Selleks peab ka vahetatud rollidega mudel olema HMM-DN ehk kehtima peavad võrdused

$$r_{AA}p_{AA} + r_{AB}p_{AB} + r_{AC}p_{AC} = r_{BA}p_{BA} + r_{BB}p_{BB} + r_{BC}p_{BC} = r_{CA}p_{CA} + r_{CB}p_{CB} + r_{CC}p_{CC},$$

$$\begin{aligned} r_{AA}q_{AA} + r_{AB}q_{AB} + r_{AC}q_{AC} &= r_{BA}q_{BA} + r_{BB}q_{BB} + r_{BC}q_{BC} \\ &= r_{CA}q_{CA} + r_{CB}q_{CB} + r_{CC}q_{CC}. \end{aligned}$$

Uurime lähemalt lihtsamat erijuhtu, kus

$$\begin{gathered} p_{AA} = q_{AA}, \quad p_{BB} = q_{BB}, \quad p_{CC} = q_{CC}, \\ p_{AA} = \frac{1}{2} + \varepsilon, \quad p_{BB} = \frac{1}{2}, \quad p_{CC} = \frac{1}{2} - \varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \end{gathered}$$

Seega maatriksid P_{AA}, P_{BB}, P_{CC} on järgmised:

$$P_{AA} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/2+\varepsilon & 1/2-\varepsilon \\ 1/2-\varepsilon & 1/2+\varepsilon \end{pmatrix} \end{array}, \quad P_{BB} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array}, \quad P_{CC} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/2-\varepsilon & 1/2+\varepsilon \\ 1/2+\varepsilon & 1/2-\varepsilon \end{pmatrix} \end{array}.$$

Kui ε on piisavalt lähedal arvule 1/2, siis on režiimi A tüüpilises realisatsioonis pikad nullide ja ühtede blokid, režiimis C on sagedased olekute vaheldumised ning režiimis B vahelduvad olekud 0 ja 1 juhuslikult tõenäosusega 1/2. Maatriksi R elemendid olgu sellised, et

$$r_{AA} = r_{BB} = r_{CC} = r, \quad r_{BA} = r_{BC} = \frac{1-r}{2}, \quad r_{CB} = r_{AB} = 1-r, \quad r_{AC} = r_{CA} = 0.$$

Olgu ka maatriksid $P_{AB}, P_{AC}, \ldots, P_{CB}$ sümmeetrilised, st

$$p_{AB} = q_{AB}, \quad p_{AC} = q_{AC}, \quad p_{BA} = q_{BA}, \quad p_{BC} = q_{BC}, \quad p_{CA} = q_{CA}, \quad p_{CB} = q_{CB}.$$

Seega üleminekumaatriks saab selliste parameetrite valiku korral kuju

$$\begin{array}{c} \\ (0,A) \\ (1,A) \\ (0,B) \\ (1,B) \\ (0,C) \\ (1,C) \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} (0,A) & (1,A) & (0,B) & (1,B) & (0,C) & (1,C) \end{array} \\
\begin{pmatrix}
r(\frac{1}{2}+\varepsilon) & r(\frac{1}{2}-\varepsilon) & (1-r)p_{AB} & (1-r)(1-p_{AB}) & 0 & 0 \\
r(\frac{1}{2}-\varepsilon) & r(\frac{1}{2}+\varepsilon) & (1-r)(1-p_{AB}) & (1-r)p_{AB} & 0 & 0 \\
\frac{1-r}{2}p_{BA} & \frac{1-r}{2}(1-p_{BA}) & \frac{r}{2} & \frac{r}{2} & \frac{1-r}{2}p_{BC} & \frac{1-r}{2}(1-p_{BC}) \\
\frac{1-r}{2}(1-p_{BA}) & \frac{1-r}{2}p_{BA} & \frac{r}{2} & \frac{r}{2} & \frac{1-r}{2}(1-p_{BC}) & \frac{1-r}{2}p_{BC} \\
0 & 0 & (1-r)p_{CB} & (1-r)(1-p_{CB}) & r(\frac{1}{2}-\varepsilon) & r(\frac{1}{2}+\varepsilon) \\
0 & 0 & (1-r)(1-p_{CB}) & (1-r)p_{CB} & r(\frac{1}{2}+\varepsilon) & r(\frac{1}{2}-\varepsilon)
\end{pmatrix} \end{array}.$$

Tähistades eelneva üleminekumaatriksi tähega $\mathbb{Q}$, saame

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \mathbb{Q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8}r + \frac{1}{4}\cdot\frac{1-r}{2} \\ \frac{1}{8}r + \frac{1}{4}\cdot\frac{1-r}{2} \\ \frac{1}{8}(1-r) + \frac{1}{4}r + \frac{1}{8}(1-r) \\ \frac{1}{8}(1-r) + \frac{1}{4}r + \frac{1}{8}(1-r) \\ \frac{1}{4}\Big(\frac{1-r}{2}\Big) + \frac{1}{8}r \\ \frac{1}{4}\Big(\frac{1-r}{2}\Big) + \frac{1}{8}r \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1/8 \\ 1/8 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/8 \\ 1/8 \end{pmatrix}^T,$$

seega iga ε korral on statsionaarseks algjaotuseks $\pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$.
Selliste parameetrite valiku korral on X Markovi ahel, kui

$$P(X_{t+1}=0|X_t=0,Y_t=A) = P(X_{t+1}=0|X_t=0,Y_t=B) = P(X_{t+1}=0|X_t=0,Y_t=C)$$

ehk

$$\begin{aligned}
& r\Big(\frac{1}{2}+\varepsilon\Big) + (1-r)p_{AB} = \frac{1-r}{2}p_{BA} + \frac{1}{2}r + \frac{1-r}{2}p_{BC} = (1-r)p_{CB} + r\Big(\frac{1}{2}-\varepsilon\Big) \\
\Leftrightarrow\ & \frac{r}{1-r}\Big(\frac{1}{2}+\varepsilon\Big) + p_{AB} = \frac{p_{BA}+p_{BC}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{r}{1-r} = p_{CB} + \frac{r}{1-r}\Big(\frac{1}{2}-\varepsilon\Big) \\
\Leftrightarrow\ & \frac{r}{1-r}\varepsilon + p_{AB} = \frac{p_{BA}+p_{BC}}{2} = p_{CB} - \frac{r}{1-r}\varepsilon.
\end{aligned}$$

Tähistades $\tilde{r} := \dfrac{r}{1-r}$, saame

$$\tilde{r}\varepsilon + p_{AB} = \frac{p_{BA}+p_{BC}}{2} = p_{CB} - \tilde{r}\varepsilon.$$

Kuna $p_{AB}, p_{BA}, p_{BC}, p_{CB} \in (0,1)$, siis eelnev tingimus on täidetud, kui

$$2\varepsilon\tilde{r} < 1. \tag{3.12}$$

Siis X on Markovi ahel üleminekumaatriksiga

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\alpha & \alpha \end{pmatrix}, \qquad \alpha = r\Big(\frac{1}{2}+\varepsilon\Big) + (1-r)p_{AB}.$$

Näide. Vaatleme eelnevalt kirjeldatud lihtsat erijuhtu ning valime parameetriteks

$$r = 0.6, \;\; \varepsilon = 0.3, \;\; p_{AB} = p_{BA} = 0.05, \;\; p_{BC} = p_{CB} = 0.95.$$

Siis on tingimus (3.12) täidetud:

$$2\varepsilon\tilde{r} = 2 \cdot 0.3 \cdot \frac{0.6}{0.4} = 0.9 < 1.$$

Seega X on Markovi ahel üleminekumaatriksiga

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\alpha & \alpha \end{pmatrix},$$

kus

$$\alpha = r\Big(\frac{1}{2}+\varepsilon\Big) + (1-r)p_{AB} = 0.6 \cdot 0.8 + 0.4 \cdot 0.05 = 0.5.$$

See aga tähendab, et eelnevalt leitud 6×6-üleminekumaatriksiga PMM-i asemel ei pea me vaatama kaheseisundilist Markovi ahelat, vaid saime iid juhuslikud suurused, täpsemalt piisab vaadelda sõltumatuid Bernoulli jaotusega $B(0.5)$ juhuslikke suuruseid.

Kokkuvõttes veendusime, et ilma PMM-i konstrueerimata ei saa üldjuhul mittehomogeenset Markovi ahelat vaadelda homogeensena, kuid teatud tingimustel taandub ülesanne ühele homogeensele Markovi ahelale. Nagu viimases näites, võib kõige äärmuslikumal juhul piisata ka sellest, kui genereerime sõltumatuid katseid, kus tõenäosusega 0.5 saame väärtuse 0 ja tõenäosusega 0.5 väärtuse 1.

3.3 Näide 3 – pool-Markovi mudel

Markovi ahel liigub olekute vahel ning püsib ühes olekus juhusliku aja, mis on geomeetrilise jaotusega. Pool-Markovi ahela korral liigub protsess olekute vahel üleminekumaatriksi põhjal, kus ühes olekus püsimine pole võimalik. Vaatleme juhtu, kus ahelal on kolm võimalikku olekut: A, B ja C. Oletame, et oleme seisundis A ning järgmisel sammul toimub oleku vahetus, siis tõenäosusega p_{AB} hüppame olekusse B ning tõenäosusega p_{AC} olekusse C. Hüppamised olekustest B ja C toimuvad vastavalt tõenäosustele p_{BA}, p_{BC} ning p_{CA}, p_{CB}. Seega olekute vahetumise maatriks on järgmine:

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{AB} & p_{AC} \\ p_{BA} & 0 & p_{BC} \\ p_{CA} & p_{CB} & 0 \end{pmatrix}.$$

Ühes olekus püsimise aeg ei pruugi enam olla geomeetrilise jaotusega nagu Markovi ahela puhul. Seega ei saa seda modelleerida Markovi ahelana. Eeldame, et olekutes A, B, C püsimise ajad on juhuslikud suurused T_A, T_B ja T_C, mis võtavad väärtusi hulkadest vastavalt $\{1, \ldots, k\}$, $\{1, \ldots, l\}$ ja $\{1, \ldots, m\}$. Tähistame tõenäosused

$$\begin{aligned} q_A(i) &:= P(T_A = i), \quad i = 1, \ldots, k, \\ q_B(i) &:= P(T_B = i), \quad i = 1, \ldots, l, \\ q_C(i) &:= P(T_C = i), \quad i = 1, \ldots, m. \end{aligned}$$

Arvud k, l, m võivad üldjuhul olla väga suured ning isegi lõpmatused. Näiteks kui vaatame erijuhtu, kus tegemist on Markovi ahelaga, siis $T_A \sim G(1 - u_{AA}), T_B \sim G(1 - u_{BB}), T_C \sim G(1 - u_{CC})$, kus

$$u_{AA} = P(X_{t+1} = A | X_t = A), \;\; u_{BB} = P(X_{t+1} = B | X_t = B), \;\; u_{CC} = P(X_{t+1} = C | X_t = C).$$

Sel juhul on $k = l = m = \infty$ ning iga $i = 1, 2, \ldots$ korral

$$\begin{aligned} q_A(i) &= P(T_A = i) = {u_{AA}}^{i-1}(1 - u_{AA}), \\ q_B(i) &= P(T_B = i) = {u_{BB}}^{i-1}(1 - u_{BB}), \\ q_C(i) &= P(T_C = i) = {u_{CC}}^{i-1}(1 - u_{CC}). \end{aligned}$$

Markovi ahela üleminekumaatriks ning PMM-i olekute vahetumise maatriks on vastavalt

$$\begin{pmatrix} u_{AA} & u_{AB} & u_{AC} \\ u_{BA} & u_{BB} & u_{BC} \\ u_{CA} & u_{CB} & u_{CC} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{u_{AB}}{1 - u_{AA}} & \dfrac{u_{AC}}{1 - u_{AA}} \\ \dfrac{u_{BA}}{1 - u_{BB}} & 0 & \dfrac{u_{BC}}{1 - u_{BB}} \\ \dfrac{u_{CA}}{1 - u_{CC}} & \dfrac{u_{CB}}{1 - u_{CC}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Pool-Markovi mudelit saame modelleerida homogeense PMM-ina, kus ahel X võtab väärtusi hulgast $\mathcal{X} = \{A, B, C\}$ ning Y tähistab blokkide pikkusi. Seega

$$\mathcal{Z} = \{(A, 1), \ldots, (A, k), (B, 1), \ldots, (B, l), (C, 1), \ldots, (C, m)\}.$$

Üleminekumaatriks on üldkujul

$$\begin{pmatrix} P_{AA} & P_{AB} & P_{AC} \\ P_{BA} & P_{BB} & P_{BC} \\ P_{CA} & P_{CB} & P_{CC} \end{pmatrix},$$

kus P_{AA} on $k \times k$-maatriks, P_{AB} on $k \times l$-maatriks, P_{AC} on $k \times m$-maatriks, P_{BA} on $l \times k$-maatriks jne. Oletame, et protsess alustab olekust A ja püsib seal $p > 1$ ajaühikut. Siis teame, et iga $s = 2, \ldots, p$ korral on vastava PMM-i üleminekutõenäosus $(A, s) \to (A, s-1)$ võrdne ühega. Kui $s = 1$, siis järgmisel sammul toimub oleku vahetumine. Seega on maatriksi P_{AA} esimeses reas kõik nullid, kuid järgmistes ridades on iga $s = 2, \ldots, k$ korral üleminekutõenäosus $(A, s) \to (A, s-1)$ võrdne ühega. Analoogiliselt saame, et ka maatriksi P_{BB} esimese rea elemendid on nullid ning iga $s = 2, \ldots, l$ korral on tõenäosus $(B, s) \to (B, s-1)$ võrdne ühega. Sarnane omadus on ka maatriksil P_{CC}. Järelikult on maatriksites $P_{AB}, P_{AC}, P_{BA}, P_{BC}, P_{CA}, P_{CB}$ esimese rea elemendid nullist erinevad ning kõik ülejäänud elemendid on nullid. Oletame, et protsess jõuab olekusse $(A, 1)$, siis järgmisel sammul olek vahetub. Ahel X liigub olekust A olekusse B tõenäosusega p_{AB} ning omandab väärtuse i tõenäosusega $q_B(i)$. Seega maatriksi P_{AB} esimeses reas on iga $i = 1, \ldots, l$ korral element $p_{AB}q_B(i)$. Analoogiliselt on tuletatavad ka maatriksite $P_{AC}, P_{BA}, P_{BC}, P_{CA}, P_{CB}$ elemendid. Kokkuvõttes, kui k, l, m on lõplikud, siis on vastava PMM-i üleminekumaatriks kujul

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccccc} (A,1) & (A,2) & \cdots & (A,k) & (B,1) & (B,2) & \cdots & (B,l) & (C,1) & (C,2) & \cdots & (C,m) \end{array} \\
\begin{array}{c} (A,1) \\ (A,2) \\ \cdots \\ (A,k) \\ (B,1) \\ (B,2) \\ \cdots \\ (B,l) \\ (C,1) \\ (C,2) \\ \cdots \\ (C,m) \end{array} &
\left(\begin{array}{cccccccccccc}
0 & 0 & \cdots & 0 & p_{AB}q_B(1) & p_{AB}q_B(2) & \cdots & p_{AB}q_B(l) & p_{AC}q_C(1) & p_{AC}q_C(2) & \cdots & p_{AC}q_C(m) \\
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
p_{BA}q_A(1) & p_{BA}q_A(2) & \cdots & p_{BA}q_A(k) & 0 & 0 & \cdots & 0 & p_{BC}q_C(1) & p_{BC}q_C(2) & \cdots & p_{BC}q_C(m) \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
p_{CA}q_A(1) & p_{CA}q_A(2) & \cdots & p_{CA}q_A(k) & p_{CB}q_B(1) & p_{CB}q_B(2) & \cdots & p_{CB}q_B(l) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right)
\end{array}.
$$

Kui olekute vahetumise maatriks on selline, et igast olekust on võimalik jõuda igasse teise olekusse positiivse tõenäosusega, siis on vastava PMM-i üleminekumaatriks taandumatu ning kui k, l, m on lõplikud, siis taandumatusest järeldub rekurrentsus. Oletame, et vähemalt üks suurustest k, l, m on lõpmatus. Kuna olekust $x \in \{A, B, C\}$ liigume lõpmata palju kordi olekusse olekust $x' \in \{A, B, C\}$ ning iga kord on väärtuste $1, 2, 3, \ldots$ saamisel positiivne tõenäosus, siis lõpmata palju katseid tehes jõuame lõpmata palju kordi olekust (x, i) olekusse (x', j) iga $i, j = 1, 2, 3, \ldots$ korral. Seega, kui olekute vahetumise maatriksi põhjal on igast olekust võimalik jõuda igasse teise olekusse, siis PMM-i üleminekumaatriks on iga k, l, m korral rekurrentne.

Paneme tähele, et antud mudel on kõige üldisem PMM, st see ei kuulu üldiselt ühtegi peatükis 2.4 vaadeldud eriklassi. Kui T_A, T_B, T_C ei ole geomeetrilise jaotusega, siis ei ole X Markovi ahel. Ka Y ei ole üldjuhul Markovi ahel. Vaatame näiteks olukorda, kus $k > l > m$ ning mingi t korral $Y_t = k$. Siis $Y_{t+1} = k-1, \ldots, Y_{t+k-1} = 1$. Kuna $k > l > m$, siis väärtust k saame näha ainult olekus A, seega teame, et järgmisel sammul toimub hüpe olekusse B või C ehk Y_{t+k} ei saa omandada näiteks väärtust k. Seega Y_{t+k} väärtus ei sõltu ainult väärtusest Y_{t+k-1}, vaid ka suursest Y_t, mistõttu ei ole Y Markovi ahel. Kui aga $k = l = m$ ning iga $i = 1, \ldots, k$ korral $q(i) := q_A(i) = q_B(i) = q_C(i)$, siis kui mingi t korral $Y_t = 1$, siis Y_{t+1} ei sõltu mineviku väärtustest, vaid on määratud tõenäosustega $q(i), i = 1, \ldots, k$. Sel juhul on Y Markovi ahel üleminekumaatriksiga

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ \cdots \\ k-1 \\ k \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & \cdots & k-2 & k-1 & k \end{array} \\
\begin{pmatrix}
q(1) & q(2) & \cdots & q(k-2) & q(k-1) & q(k) \\
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}.$$

Seega üldjuhul pole Y Markovi ahel, kuid erijuhul võib tegemist olla Markovi ahelaga.

Et leida PMM-i statsionaarset algjaotust, leiame kõigepealt ahela X statsionaarse algjaotuse:

$$\begin{pmatrix} \pi_A & \pi_B & \pi_C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & p_{AB} & p_{AC} \\ p_{BA} & 0 & p_{BC} \\ p_{CA} & p_{CB} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_A & \pi_B & \pi_C \end{pmatrix}.$$

Tähistame $D := 2 + p_{AB}(p_{CA} - p_{BA}) + p_{BA}p_{CB}$. Paneme tähele, et X statsionaarne jaotus avaldub kujul

$$\pi_A = \frac{p_{BA}p_{CB} + p_{CA}}{D}, \quad \pi_B = \frac{1 - p_{CA}p_{AC}}{D}, \quad \pi_C = \frac{1 - p_{AB}p_{BA}}{D}.$$

Tõepoolest, arvestades, et $p_{AC} = 1 - p_{AB}, p_{BC} = 1 - p_{BA}, p_{CB} = 1 - p_{CA}$, saame

$$\begin{aligned}
p_{BA}\pi_B + p_{CA}\pi_C &= p_{BA}\frac{1 - p_{CA}(1 - p_{AB})}{D} + p_{CA}\frac{1 - p_{AB}p_{BA}}{D} \\
&= \frac{p_{BA} - p_{BA}p_{CA} + p_{AB}p_{BA}p_{CA} + p_{CA} - p_{AB}p_{BA}p_{CA}}{D} \\
&= \frac{p_{BA}(1 - p_{CA}) + p_{CA}}{D} = \frac{p_{BA}p_{CB} + p_{CA}}{D} = \pi_A,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{AB}\pi_A + p_{CB}\pi_C &= p_{AB}\frac{p_{BA}(1 - p_{CA}) + p_{CA}}{D} + (1 - p_{CA})\frac{1 - p_{AB}p_{BA}}{D} \\
&= \frac{p_{AB}p_{BA} - p_{AB}p_{BA}p_{CA} + p_{AB}p_{CA} + 1 - p_{CA} - p_{AB}p_{BA} + p_{AB}p_{BA}p_{CA}}{D} \\
&= \frac{1 - p_{CA}(1 - p_{AB})}{D} = \frac{1 - p_{CA}p_{AC}}{D} = \pi_B,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\pi_A+\pi_B+\pi_C &= \frac{(p_{BA}(1-p_{CA})+p_{CA})+(1-p_{CA}(1-p_{AB}))+(1-p_{AB}p_{BA})}{D}\\
&= \frac{p_{BA}-p_{BA}p_{CA}+p_{CA}+1-p_{CA}+p_{AB}p_{CA}+1-p_{AB}p_{BA}}{D}\\
&= \frac{2+p_{AB}(p_{CA}-p_{BA})+p_{BA}(1-p_{CA})}{D}=\frac{D}{D}=1.
\end{aligned}
$$

Statsionaarse algjaotuse $\begin{pmatrix}\pi_{A1} & \dots & \pi_{Ak} & \pi_{B1} & \dots & \pi_{Bl} & \pi_{C1}\dots & \pi_{Cm}\end{pmatrix}$ leidmiseks tuleb lahendada võrrandisüsteem

$$
\begin{cases}
\pi_{A2}+p_{BA}q_A(1)\pi_{B1}+p_{CA}q_A(1)\pi_{C1}=\pi_{A1}\\
\dots\\
\pi_{Ak}+p_{BA}q_A(k-1)\pi_{B1}+p_{CA}q_A(k-1)\pi_{C1}=\pi_{A,k-1}\\
p_{BA}q_A(k)\pi_{B1}+p_{CA}q_A(k)\pi_{C1}=\pi_{Ak}\\
p_{AB}q_B(1)\pi_{A1}+\pi_{B2}+p_{CB}q_B(1)\pi_{C1}=\pi_{B1}\\
\dots\\
p_{AB}q_B(l-1)\pi_{A1}+\pi_{Bl}+p_{CB}q_B(l-1)\pi_{C1}=\pi_{B,k-1}\\
p_{AB}q_B(l)\pi_{A1}+p_{CB}q_B(l)\pi_{C1}=\pi_{Bl}\\
p_{AC}q_C(1)\pi_{A1}+p_{BC}q_C(1)\pi_{B1}+\pi_{C2}=\pi_{C1}\\
\dots\\
p_{AC}q_C(m-1)\pi_{A1}+p_{BC}q_C(m-1)\pi_{B1}+\pi_{Cm}=\pi_{C,m-1}\\
p_{AC}q_C(m)\pi_{A1}+p_{BC}q_C(m)\pi_{C1}=\pi_{Cm}
\end{cases}.
$$

Eelneva võrrandisüsteemi lahendiks on

$$
\begin{aligned}
\pi_{Ai} &= C\pi_A\cdot P(T_A\geqslant i),\quad i=1,\dots,k,\\
\pi_{Bi} &= C\pi_B\cdot P(T_B\geqslant i),\quad i=1,\dots,l,\\
\pi_{Ci} &= C\pi_C\cdot P(T_C\geqslant i),\quad i=1,\dots,m.
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

Võttes arvesse, et leitud algtõenäosuste summa peab olema 1, leiame konstandi C:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{k}\pi_{Ai}+\sum_{i=1}^{l}\pi_{Bi}+\sum_{i=1}^{m}\pi_{Ci}=1\\
\Leftrightarrow\ & C\pi_A\sum_{i=1}^{k}P(T_A\geqslant i)+C\pi_B\sum_{i=1}^{l}P(T_B\geqslant i)+C\pi_C\sum_{i=1}^{m}P(T_C\geqslant i)=1\\
\Leftrightarrow\ & C\pi_A\mu_A+C\pi_B\mu_B+C\pi_C\mu_C=1\\
\Leftrightarrow\ & C=\frac{1}{\pi_A\mu_A+\pi_B\mu_B+\pi_C\mu_C},
\end{aligned}
$$

kus μ_A, μ_B, μ_C on keskmised ühes olekus viibimise ajad ehk $\mu_A = E(T_A), \mu_B = E(T_B), \mu_C = E(T_C)$. Selleks, et statsionaarne algjaotus leiduks, peavad need keskväärtused olema lõplikud:

$$\mu_A < \infty, \quad \mu_B < \infty, \quad \mu_C < \infty.$$

Kui k, l, m on lõplikud, siis on see tingimus alati täidetud. Kui aga vähemalt üks neist on lõpmatus, siis leidub statsionaarne algjaotus ainult siis, kui keskväärtused on lõplikud. Veendume, et (3.13) on tõepoolest lahendid. Kuna

$$\pi_B p_{BA} + \pi_C p_{CA} - \pi_A = 0,$$

siis iga $i = 2, \ldots, k$ korral

$$\begin{aligned}
&\pi_{Ai} + p_{BA} q_A(i-1)\pi_{B1} + p_{CA} q_A(i-1)\pi_{C1} \\
= \ & C\pi_A P(T_A \geqslant i) + p_{BA} q_A(i-1) C\pi_B P(T_B \geqslant 1) + p_{CA} q_A(i-1) C\pi_C P(T_C \geqslant 1) \\
= \ & C\pi_A \Big(P(T_A \geqslant i-1) - P(T_A = i-1) \Big) + p_{BA} q_A(i-1) C\pi_B + p_{CA} q_A(i-1) C\pi_C \\
= \ & C\pi_A P(T_A \geqslant i-1) + C q_A(i-1) \Big(\pi_B p_{BA} + \pi_C p_{CA} - \pi_A \Big) \\
= \ & C\pi_A P(T_A \geqslant i-1) = \pi_{A,i-1}.
\end{aligned}$$

Samuti,

$$\begin{aligned}
&p_{BA} q_A(k)\pi_{B1} + p_{CA} q_A(k)\pi_{C1} = C q_A(k) \Big(\pi_B p_{BA} + \pi_C p_{CA} \Big) = C\pi_A q_A(k) \\
= \ & C\pi_A P(T_A = k) = C\pi_A P(T_A \geqslant k) = \pi_{Ak}.
\end{aligned}$$

Analoogiliselt saame samasused ka olekute B ning C korral.

Näited. Esimesena vaatleme näidet, kus $k = 10$, $l = 5$, $m = 3$ ning jaotused on diskreetsed ühtlased:

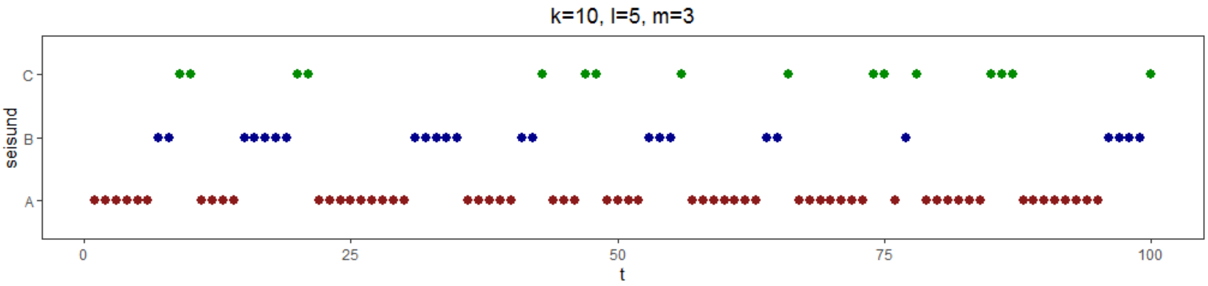
$$A\colon \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \end{array}$$

$$B\colon \begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array} \quad C\colon \begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}.$$

Olgu olekute vahetumise maatriks järgmine:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0.9 & 0.1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Selliste jaotustega ahelate võimalikku realisatsiooni illustreerib joonis 6.



Joonis 6: Diskreetsete ühtlaste jaotustega pool-Markovi mudeli tüüpiline realisatsioon

Jooniselt 6 näeme, et ahela algväärtuseks on $(A, 6)$, olekust $(A, 1)$ toimub hüpe olekusse $(B, 2)$, millele järgnevad $(B, 1)$ ning $(C, 2)$. Kuna $k > l > m$, siis kõige pikemaid blokke näeme olekus A ning kõige lühemad blokid saame oleku C korral. Paneme ka tähele, et näiteks kuna $p_{CA} = 0.9$, siis olekust C hüppab ahel olekusse A sagedamini kui olekusse B.

Järgmisena vaatleme juhtu, kus $k = l = m = 10$, kuid jaotused pole enam kõigil ühtlased:

$$A: \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \end{array}$$

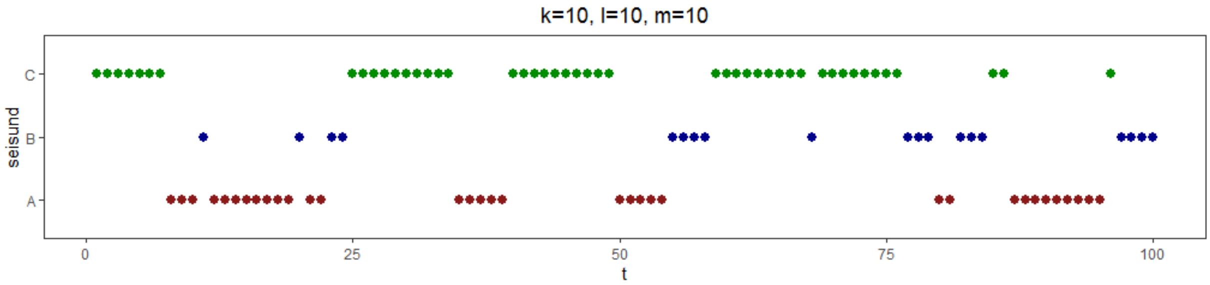
$$B: \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \end{array}$$

$$C: \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline \frac{1}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{2} \end{array}.$$

Oletame, et olekud vahetuvad alati sama tõenäosusega:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Kuigi $k = l = m$, siis nagu näha A, B, C jaotustest ning jooniselt 7, on olekus C tüüpiliselt kõige pikemad blokid ning olekus B on ülekaalus lühikesed blokid.



Joonis 7: Pool-Markovi mudeli tüüpiline realisatsioon

Kokkuvõttes võimaldab kirjeldatud PMM modelleerida väga erinevate jaotustega ahelaid, kus ühes seisundis püsimise aeg võib olla mis tahes diskreetse jaotusega, mille võimalikud väärtused on $1, 2, \ldots$. Kuna saime pool-Markovi mudelit kirjeldada homogeense PMM-ina, siis saame kasutada Markovi ahela teooria tulemusi. Kui X on taandumatu Markovi ahel lõpliku seisundite hulgaga $\mathcal{X}$ ja statsionaarse algjaotusega π, siis ergoodilise teoreemi kohaselt [14, Ptk. 3 Teor. 4.1] kehtib iga funktsiooni $f\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ korral

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(X_i) \to \sum_{x\in\mathcal{X}} f(x)\pi_x = Ef(X_1) \quad \text{p.k.}$$

Võttes $f(x_i) = I_A(x_i)$, saame

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I_A(X_i) \to \sum_{x\in\mathcal{X}} I_A(x)\pi_x = \pi_A \quad \text{p.k} \tag{3.14}$$

ehk seisundi A proportsioon läheneb tõenäosusele π_A.

Vaatleme nüüd pool-Markovi mudelit. Kuna $Z = (X, Y)$ on Markovi ahel, siis ergoodilise teoreemi kohaselt kehtib iga $f\colon \mathcal{Z} \to \mathbb{R}$ korral

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(Z_i) \to \sum_{z\in\mathcal{Z}} f(z)\pi_z = Ef(Z_1) \quad \text{p.k,}$$

kus π on Z statsionaarne algjaotus. Võtame $f(z) = f(x, y) = f(x)$, siis

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(X_i, Y_i) \to \sum_{x\in\mathcal{X}}\sum_{y\in\mathcal{Y}} f(x)\pi_{xy} = \sum_{x\in\mathcal{X}} f(x)\sum_{y\in\mathcal{Y}} \pi_{xy} \quad \text{p.k.}$$

Vaatleme seisundit (A, i). Kuna

$$\pi_{Ai} = \frac{\pi'_A P(T_A \geqslant i)}{\pi'_A \mu_A + \pi'_B \mu_B + \pi'_C \mu_C},$$

kus π' on olekute vahetumise maatriksi statsionaarne algjaotus, siis

$$\sum_{i \in \mathcal{Y}} \pi_{Ai} = \frac{\sum_{i \in \mathcal{Y}} \pi'_A P(T_A \geqslant i)}{\pi'_A \mu_A + \pi'_B \mu_B + \pi'_C \mu_C} = \frac{\pi'_A \mu_A}{\pi'_A \mu_A + \pi'_B \mu_B + \pi'_C \mu_C}.$$

Seega võttes $f(x, y) = f(x) = I_A(x)$, saame

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} I_A(X_i) \to \sum_{x \in \mathcal{X}} I_A(x) \sum_{y \in \mathcal{Y}} \pi_{xy} = \frac{\pi'_A \mu_A}{\pi'_A \mu_A + \pi'_B \mu_B + \pi'_C \mu_C} \quad \text{p.k,} \tag{3.15}$$

mis tähendab, et seisundi A proportsioon läheneb arvule

$$\frac{\pi'_A \mu_A}{\pi'_A \mu_A + \pi'_B \mu_B + \pi'_C \mu_C}.$$

Veendume, et kui T_A, T_B ja T_C on geomeetrilise jaotusega ehk X on Markovi ahel, siis leitud piirväärtused (3.14) ja (3.15) langevad kokku. Selleks piisab näidata, et kui $\begin{pmatrix} \pi'_A & \pi'_B & \pi'_C \end{pmatrix}$ on olekute vahetumise maatriksi statsionaarne jaotus, siis Markovi ahela X statsionaarne algjaotus on $\begin{pmatrix} \frac{\pi'_A \mu_A}{C'} & \frac{\pi'_B \mu_B}{C'} & \frac{\pi'_C \mu_C}{C'} \end{pmatrix}$, kus

$$C' := \pi'_A \mu_A + \pi'_B \mu_B + \pi'_C \mu_C.$$

Kui olekute vahetumise maatriks on kujul

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{AB} & p_{AC} \\ p_{BA} & 0 & p_{BC} \\ p_{CA} & p_{CB} & 0 \end{pmatrix},$$

siis vastava Markovi ahela üleminekumaatriks on

$$\begin{pmatrix} u_{AA} & (1 - u_{AA}) p_{AB} & (1 - u_{AA}) p_{AC} \\ (1 - u_{BB}) p_{BA} & u_{BB} & (1 - u_{BB}) p_{BC} \\ (1 - u_{CC}) p_{CA} & (1 - u_{CC}) p_{CB} & u_{CC} \end{pmatrix},$$

seega arvestades, et

$$\mu_A = \frac{1}{1 - u_{AA}}, \quad \mu_B = \frac{1}{1 - u_{BB}}, \quad \mu_C = \frac{1}{1 - u_{CC}},$$

saame vastava Markovi ahela üleminekumaatriksiks

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{\mu_A} & \frac{p_{AB}}{\mu_A} & \frac{p_{AC}}{\mu_A} \\ \frac{p_{BA}}{\mu_B} & 1 - \frac{1}{\mu_B} & \frac{p_{BC}}{\mu_B} \\ \frac{p_{CA}}{\mu_C} & \frac{p_{CB}}{\mu_C} & 1 - \frac{1}{\mu_C} \end{pmatrix}.$$

Seega peame veenduma, et

$$\begin{pmatrix}\frac{\pi'_A\mu_A}{C'} & \frac{\pi'_B\mu_B}{C'} & \frac{\pi'_C\mu_C}{C'}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-\frac{1}{\mu_A} & \frac{p_{AB}}{\mu_A} & \frac{p_{AC}}{\mu_A}\\ \frac{p_{BA}}{\mu_B} & 1-\frac{1}{\mu_B} & \frac{p_{BC}}{\mu_B}\\ \frac{p_{CA}}{\mu_C} & \frac{p_{CB}}{\mu_C} & 1-\frac{1}{\mu_C}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\pi'_A\mu_A}{C'} & \frac{\pi'_B\mu_B}{C'} & \frac{\pi'_C\mu_C}{C'}\end{pmatrix}.$$

Arvestades, et π' on olekute vahetumise maatriksi statsionaarne algjaotus, saame $\pi'_A = \pi'_B p_{BA} + \pi'_C p_{CA}$, $\pi'_B = \pi'_A p_{AB} + \pi'_C p_{CB}$, $\pi'_C = \pi'_A p_{AC} + \pi'_B p_{BC}$, seega

$$\frac{\pi'_A\mu_A}{C'}\Big(1-\frac{1}{\mu_A}\Big) + \frac{\pi'_B\mu_B}{C'}\cdot\frac{p_{BA}}{\mu_B} + \frac{\pi'_C\mu_C}{C'}\cdot\frac{p_{CA}}{\mu_C} = \frac{\pi'_A\mu_A}{C'} + \frac{\pi'_B p_{BA} + \pi'_C p_{CA} - \pi'_A}{C'} = \frac{\pi'_A\mu_A}{C'},$$
$$\frac{\pi'_A\mu_A}{C'}\cdot\frac{p_{AB}}{\mu_A} + \frac{\pi'_B\mu_B}{C'}\Big(1-\frac{1}{\mu_B}\Big) + \frac{\pi'_C\mu_C}{C'}\cdot\frac{p_{CB}}{\mu_C} = \frac{\pi'_B\mu_B}{C'} + \frac{\pi'_A p_{AB} + \pi'_C p_{CB} - \pi'_B}{C'} = \frac{\pi'_B\mu_B}{C'},$$
$$\frac{\pi'_A\mu_A}{C'}\cdot\frac{p_{AC}}{\mu_A} + \frac{\pi'_B\mu_B}{C'}\cdot\frac{p_{BC}}{\mu_B} + \frac{\pi'_C\mu_C}{C'}\Big(1-\frac{1}{\mu_C}\Big) = \frac{\pi'_C\mu_C}{C'} + \frac{\pi'_A p_{AC} + \pi'_B p_{BC} - \pi'_C}{C'} = \frac{\pi'_C\mu_C}{C'}.$$

Kuna ka $\frac{\pi'_A\mu_A}{C'} + \frac{\pi'_B\mu_B}{C'} + \frac{\pi'_C\mu_C}{C'} = 1$, siis on tegemist Markovi ahela statsionaarse jaotusega ehk

$$\begin{pmatrix}\frac{\pi'_A\mu_A}{C'} & \frac{\pi'_B\mu_B}{C'} & \frac{\pi'_C\mu_C}{C'}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\pi_A & \pi_B & \pi_C\end{pmatrix}.$$

Seega juhul, kus X on Markovi ahel, langevad piirväärtused (3.14) ja (3.15) tõepoolest kokku. Analoogilised tulemused saame ka B ja C proportsioonide kohta.

Käesolevas peatükis vaatlesime erinevaid näiteid diskreetsetest Markovi ahelatest. Esimeses näites oli Milano ahela korral nii X kui Y Markovi ahelad. Teises näites oli Y Markovi ahel, kuid X üldjuhul mitte. Viimases näites ei olnud üldjuhul ei X ega Y Markovi ahel. Järgmisena vaatleme näiteid juhtudest, kui X võimalike väärtuste hulk on mitteloenduv.

4 Näited pidevatest lineaarsetest paarikaupa Markovi protsessidest

Kui ahela Y seisundite hulk $\mathcal{Y}$ on ülimalt loenduv, kuid hulk $\mathcal{X}$ on mitteloenduv, siis nimetatakse vastavat PMM-i pidevaks paarikaupa Markovi protsessiks.

4.1 AR(1) protsess

Olgu $\mathcal{X} = \mathbb{R}$. Juhuslikku protsessi $X_1, X_2, \ldots$ nimetatakse **AR(1) protsessiks** [7], kui iga $t \in \mathbb{N}$ korral

$$X_{t+1} = \alpha X_t + \xi_{t+1},$$

kus $\alpha \in \mathbb{R}$ ja $\xi_2, \xi_3, \ldots$ on iid juhuslikud suurused. AR(1) mudelit võib vaadelda kui PMM-i, kus hulk $\mathcal{Y}$ on ainult üheelemendiline.

Paneme tähele, et iga $x, x_1, \ldots, x_{t-1} \in \mathbb{R}$ ning $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ korral

$$\begin{aligned}
&P(X_{t+1} \in A | X_1 = x_1, \ldots, X_{t-1} = x_{t-1}, X_t = x) \\
=&P(X_{t+1} \in A | X_t = x) = P(\alpha X_t + \xi_{t+1} \in A | X_t = x) \\
=&P(\alpha x + \xi_{t+1} \in A) = P(\xi_2 \in A - \alpha x),
\end{aligned}$$

kus $A - \alpha x = \{\tilde{a} - \alpha x \colon \tilde{a} \in A\}$. Seega AR(1) protsess on homogeenne Markovi ahel üleminekutuumaga $P(x, A) = P(\xi_2 \in A - \alpha x)$. Edaspidi eeldame, et juhuslikul suurusel ξ_2 on tihedus h Lebesgue'i mõõdu suhtes, tähistame Lebesgue'i mõõdu tähega μ. Siis

$$\int_A q(x'|x)\mu(dx') = P(X_{t+1} \in A | X_t = x) = P(\xi_2 \in A - \alpha x) = \int_A h(x' - \alpha x)\mu(dx'),$$

mistõttu on protsessil $X_1, X_2, \ldots$ üleminekutihedus $q(x'|x) = h(x' - \alpha x)$.

4.1.1 AR(1) protsessi taandumatus

Vaatleme eraldi erijuhte AR(1) protsessist ning uurime, mis tingimustel on protsess taandumatu.

1. Olgu $\alpha = 0$, siis AR(1) protsess on iid juhuslike suuruste jada: $X_t = \xi_t$, $t = 2, 3 \ldots$. Et saada statsionaarset protsessi, olgu ka X_1 sama jaotusega: $X_1 = \xi_1$. Leiame maksimaalse taandumatuse mõõdu. Kuna $X_1, X_2, \ldots$ on iid juhuslikud suurused, siis
$$\sum_{k=2}^{\infty} P_x(X_k \in A) = \sum_{k=2}^{\infty} P(X_k \in A | X_1 = x) = \sum_{k=2}^{\infty} P(X_1 \in A).$$
Olgu φ $X_1 = \xi_1$ jaotus. Olgu $\varphi(A) > 0$. Siis $P(X_1 \in A) > 0$, mistõttu
$$\sum_{k=2}^{\infty} P(X_1 \in A) > 0,$$
seega X on φ-taandumatu. Olgu φ' suvaline mõõt, mille korral X on φ'-taandumatu. Olgu $\varphi(A) = 0$, st $P(X_1 \in A) = 0$. Siis ka $\sum_{k=2}^{\infty} P(X_1 \in A) = 0$, mistõttu on ka $\varphi'(A) = 0$. Seega $\alpha = 0$ korral on maksimaalne taandumatuse mõõt ψ $X_1 = \xi_1$ jaotus.

2. Olgu $|\alpha| < 1$. Kuna eelduse kohaselt on juhuslikul suurusel ξ_2 tihedus Lebesgue'i mõõdu suhtes, siis protsess on taandumatu mingi mõõdu ψ suhtes [7, Väide 6.3.5]. Maksimaalne taandumatuse mõõt ψ ei pruugi alati olla Lebesgue'i mõõt. Toome sellise olukorra kohta näite.

   Näide. Olgu $\xi_2 \sim U[-1,1]$ ning $0 < \alpha < 1$. Raamatus [7] on näidatud, et sel juhul on protsess $\mu|_{[-1,1]}$-taandumatu. Veendume, et see pole maksimaalne taandumatuse mõõt.

   Lause 3. Kui AR(1) protsessis $\xi_2 \sim U[-1,1]$ ning $0 < \alpha < 1$, siis maksimaalne taandumatuse mõõt on $\psi = \mu|_{[-\frac{1}{1-\alpha}, \frac{1}{1-\alpha}]}$.

   Tõestus. Iga $n = 2, 3, \ldots$ korral saame X_n esitada juhuslike suuruste X_1 ning ξ_i kaudu:

$$
\begin{aligned}
&X_2 = \alpha X_1 + \xi_2,\\
&X_3 = \alpha X_2 + \xi_3 = \alpha(\alpha X_1 + \xi_2) + \xi_3 = \alpha^2 X_1 + \alpha\xi_2 + \xi_3,\\
&X_4 = \alpha X_3 + \xi_4 = \alpha\Big(\alpha(\alpha X_1 + \xi_2) + \xi_3\Big) + \xi_4 = \alpha^3 X_1 + \alpha^2\xi_2 + \alpha\xi_3 + \xi_4,\\
&\quad\ldots\\
&X_n = \alpha^{n-1} X_1 + \alpha^{n-2}\xi_1 + \ldots + \alpha\xi_{n-1} + \xi_n.
\end{aligned}
$$

   Kuna $\xi_i \sim U[-1,1]$, siis

$$
\begin{aligned}
X_n &\leqslant \alpha^{n-1} X_1 + \alpha^{n-2} + \ldots + \alpha + 1 = \alpha^{n-1} X_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha^{k-1},\\
X_n &\geqslant \alpha^{n-1} X_1 - \alpha^{n-2} - \ldots - \alpha - 1 = \alpha^{n-1} X_1 - \sum_{k=1}^{n-1} \alpha^{k-1}.
\end{aligned}
$$

   Kuna iga $0 < \alpha < 1$ korral

$$
\alpha^{n-1} X_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \qquad \sum_{k=1}^{n-1} \alpha^{k-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{1-\alpha},
$$

   siis saame

$$
-\frac{1}{1-\alpha} \xleftarrow[n\to\infty]{} \alpha^{n-1} X_1 - \sum_{k=1}^{n-1} \alpha^{k-1} \leqslant X_n \leqslant \alpha^{n-1} X_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha^{k-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{1-\alpha}.
$$

   Seega suvalise X_1 algväärtuste x ja suvalise $\varepsilon > 0$ korral

$$
P_x\Big(|X_n| \leqslant \frac{1}{1-\alpha} + \varepsilon \ \ \text{ev}\Big) = 1.
$$

Fikseerime x, siis leidub $n_0(x,\varepsilon)$ nii, et

$$P_x\Big(|X_n| \leqslant \frac{1}{1-\alpha} + \varepsilon \quad \forall n > n_0(x,\varepsilon)\Big) = 1. \tag{4.1}$$

Oletame, et mingil ajahetkel n kehtib $|X_n| \leqslant \dfrac{1}{1-\alpha}$. Siis

$$|X_{n+1}| = |\alpha X_n + \xi_{n+1}| \leqslant \alpha |X_n| + |\xi_{n+1}| \leqslant \frac{\alpha}{1-\alpha} + 1 = \frac{1}{1-\alpha}.$$

Seega, kui ahel jõuab mingil hetkel hulka $[-\frac{1}{1-\alpha}, \frac{1}{1-\alpha}]$, siis enam ta sealt ei lahku. Veendume, et ahel jõuab lõiku $[-\frac{1}{1-\alpha}, \frac{1}{1-\alpha}]$ p.k ehk

$$P_x\Big(|X_n| \leqslant \frac{1}{1-\alpha} \quad \text{ev}\Big) = 1. \tag{4.2}$$

Olgu $x > 0$. Oletame vastuväiteliselt, et (4.2) ei kehti. Siis, kuna veendusime, et kui jada jõuab piiridesse $[-\frac{1}{1-\alpha}, \frac{1}{1-\alpha}]$, siis ta sealt ei välju, saame

$$P_x\Big(X_n > \frac{1}{1-\alpha} \quad \text{i.o.}\Big) > 0 \quad \Rightarrow \quad P_x\Big(X_n > \frac{1}{1-\alpha} \quad \forall n\Big) > 0. \tag{4.3}$$

Seega seoste (4.1) ja (4.3) põhjal

$$P_x\Big(\frac{1}{1-\alpha} < X_n \leqslant \frac{1}{1-\alpha} + \varepsilon \quad \forall n > n_0(x,\varepsilon)\Big) > 0. \tag{4.4}$$

Paneme tähele, et kui $X_n, X_{n+1} \in (\frac{1}{1-\alpha}, \frac{1}{1-\alpha} + \varepsilon]$, siis

$$\xi_{n+1} = X_{n+1} - \alpha X_n > \frac{1}{1-\alpha} - \alpha\Big(\frac{1}{1-\alpha} + \varepsilon\Big) = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{\alpha}{1-\alpha} - \alpha\varepsilon = 1 - \alpha\varepsilon.$$

Seega, kuna ξ_n on sõltumatud, siis Boreli-Cantelli 2. lemma põhjal

$$P_x\Big(\frac{1}{1-\alpha} < X_n \leqslant \frac{1}{1-\alpha} + \varepsilon \quad \forall n > n_0(x,\varepsilon)\Big) \leqslant P(\xi_n > 1 - \alpha\varepsilon \quad \text{ev}) = 0,$$

saame vastuolu seosega (4.4).
Analoogiliselt saame $x < 0$ korral, et kui (4.2) ei kehtiks, siis

$$P_x\Big(-\frac{1}{1-\alpha} - \varepsilon \leqslant X_n < -\frac{1}{1-\alpha} \quad \forall n > n_0(x,\varepsilon)\Big) > 0.$$

Seega, kui $X_n, X_{n+1} \in [-\frac{1}{1-\alpha} - \varepsilon, -\frac{1}{1-\alpha})$, siis

$$\xi_{n+1} = X_{n+1} - \alpha X_n < -\frac{1}{1-\alpha} - \alpha\Big(-\frac{1}{1-\alpha} - \varepsilon\Big) = -\frac{1}{1-\alpha} + \frac{\alpha}{1-\alpha} + \alpha\varepsilon = \alpha\varepsilon - 1.$$

Boreli-Cantelli 2. lemma põhjal

$$P_x\Big(-\frac{1}{1-\alpha} - \varepsilon \leqslant X_n < -\frac{1}{1-\alpha} \quad \forall n > n_0(x,\varepsilon)\Big) \leqslant P(\xi_n < \alpha\varepsilon - 1 \quad \text{ev}) = 0,$$

saame taas vastuolu.
Seega, kui hulk B on selline, et $B \subset [\frac{1}{1-\alpha}, \infty)$, siis iga $x \leqslant \dfrac{1}{1-\alpha}$ korral

$$P_x(X_n \in B) = 0 \quad \forall n.$$

Samuti kehtib sama võrdus ka juhul, kui $B \subset (-\infty, -\frac{1}{1-\alpha}]$ ning $x \geqslant -\dfrac{1}{1-\alpha}$.
Nüüd veendume, et maksimaalne taandumatuse mõõt on Lebesgue'i mõõdu ahend hulgale $[-\frac{1}{1-\alpha}, \frac{1}{1-\alpha}]$ ehk $\psi = \mu|_{[-\frac{1}{1-\alpha}, \frac{1}{1-\alpha}]}$. Eelnevalt veendusime, et

$$P_x\Big(|X_n| \leqslant \frac{1}{1-\alpha} \ \text{ ev}\Big) = 1.$$

Seega $\mu|_{[-\frac{1}{1-\alpha}, \frac{1}{1-\alpha}]}$-taandumatuseks piisab näidata, et kui $x \in [-\frac{1}{1-\alpha}, \frac{1}{1-\alpha}]$ ja $B \subset [-\frac{1}{1-\alpha}, \frac{1}{1-\alpha}]$ nii, et $\mu(B) > 0$, siis leidub $n \in \mathbb{N}$ nii, et $P_x(X_n \in B) > 0$. Kuna suurusel ξ_2 on tihedus h Lebesgue'i mõõdu μ suhtes ning $X_1 = x, X_2 = \alpha x + \xi_2, \ldots$, siis juhuslikul suurusel X_n on tihedus h_n mõõdu μ suhtes. Kuna tihedus pole ühene, siis võime h_n valida nii, et

$$h_n(y) > 0 \quad \forall y \in \Big[\alpha^{n-1}x - \sum_{k=1}^{n-1} \alpha^{k-1}, \alpha^{n-1}x + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha^{k-1}\Big].$$

Seega, kui B on selline, et mingi $\varepsilon > 0$ korral $\mu(B \cap [-\frac{1}{1-\alpha} + \varepsilon, \frac{1}{1-\alpha} - \varepsilon]) > 0$, siis leidub n nii, et $h_n(y) > 0$ iga $y \in B \cap [-\frac{1}{1-\alpha} + \varepsilon, \frac{1}{1-\alpha} - \varepsilon]$ korral. Seega kuna integraal üle positiivse mõõduga hulga rangelt positiivsest funktsioonist on positiivne, siis

$$P_x(X_n \in B) = \int_B h_n(y)\mu(dy) > 0.$$

Ülaltoodu kehtib iga $\varepsilon > 0$ korral. Olgu $\varepsilon_n > 0$ sellised, et ε_n koondub monotoonselt nulliks: $\varepsilon_n \to 0$. Olgu $B \subset (-\frac{1}{1-\alpha}, \frac{1}{1-\alpha})$, kus $\mu(B) > 0$. Tähistame

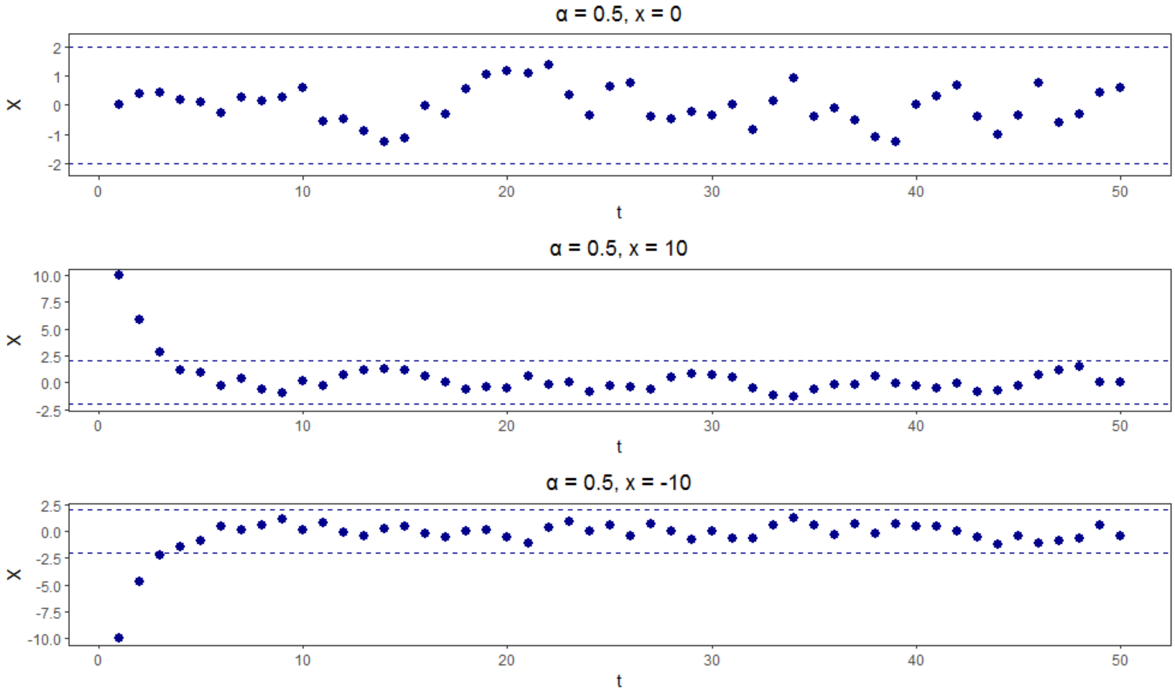
$$A_n := \Big(-\frac{1}{1-\alpha} + \varepsilon_n, \frac{1}{1-\alpha} - \varepsilon_n\Big), \quad A := \Big(-\frac{1}{1-\alpha}, \frac{1}{1-\alpha}\Big).$$

Siis $B \subset A$, $A_n \subset A_{n+1}$ ning $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n = A$. Kuna $A_n \cap B \nearrow A \cap B = B$, siis mõõdu pidevusest $\mu(A_n \cap B) \to \mu(B) > 0$. Seega, arvestades, et $\mu([-\frac{1}{1-\alpha}, \frac{1}{1-\alpha}]) = \mu((-\frac{1}{1-\alpha}, \frac{1}{1-\alpha}))$, saame, et kui $B \subset [-\frac{1}{1-\alpha}, \frac{1}{1-\alpha}]$ ja $\mu(B) > 0$, siis mingi n korral $P(X_n \in B) > 0$. Seega on $\mu|_{[-\frac{1}{1-\alpha}, \frac{1}{1-\alpha}]}$ taandumatuse mõõt. Teame, et juhuslikul suurusel X_n on tihedus h_n Lebesgue'i mõõdu suhtes, seega kui hulk B on selline, et $\mu(B) = 0$, siis iga n korral

$$P_x(X_n \in B) = \int_B h_n(y)\mu(dy) = 0.$$

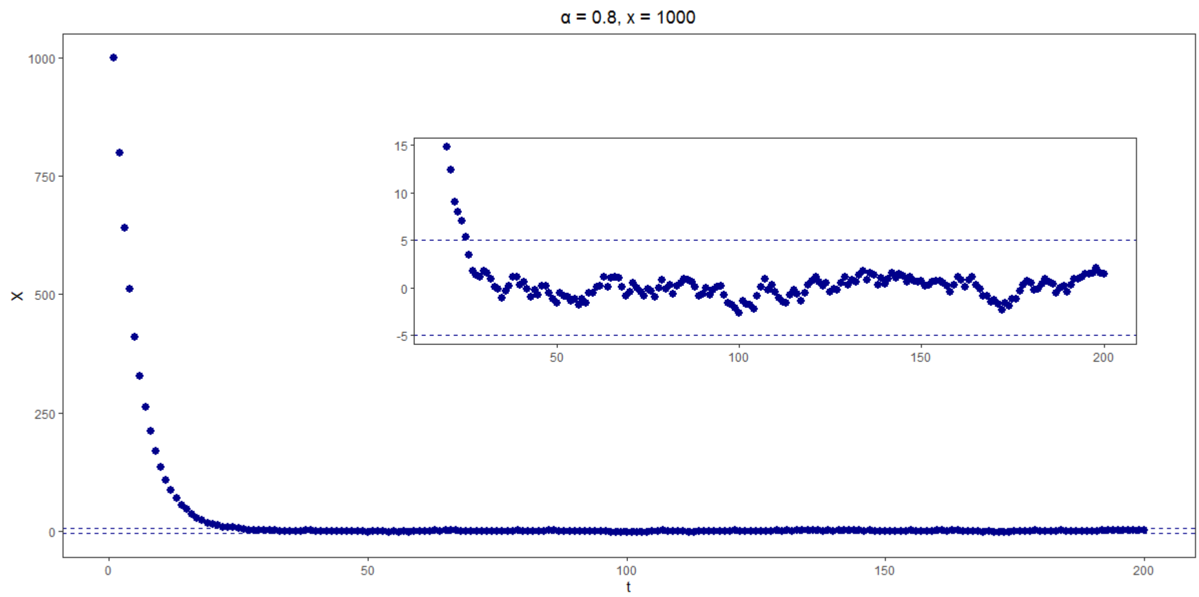
Seega $\mu|_{[-\frac{1}{1-\alpha}, \frac{1}{1-\alpha}]}$ on maksimaalne taandumatuse mõõt. □

Vaatleme konkreetset näidet, kus $\alpha = 0.5$. Siis $[-\frac{1}{1-\alpha}, \frac{1}{1-\alpha}] = [-2, 2]$. Alustame punktidest $x = 0$, $x = -10$, $x = 10$ ning genereerime 50 vaatlust vastavast AR(1) protsessist. Tulemusi illustreerib joonis 8.



Joonis 8: Protsessi AR(1) realisatsioonid erinevate x väärtuste korral

Jooniselt 8 näeme, et kui algväärtuseks valida $x = 0$, siis protsess ei väljugi piiridest $[-2, 2]$ ning algväärtuste 10 ja -10 korral jõuab protsess väärtuseni, mis on $[-2, 2]$ vahel ning enam ta sellest lõigust ei välju. Samuti paneme tähele, et kui protsess jõuab lõiku $[-2, 2]$, siis edasi ta enam ei koondu. Seega me ei saa protsessi väärtustele leida kitsamaid piire, mida väidab ka lause 3. Kui α väärtus on suurem, siis jõuab ahel vastavasse lõiku aeglasemalt. Võtame näiteks $\alpha = 0.8$ ning alustame kõrgest punktist, olgu selleks $x = 1000$. Siis $[-\frac{1}{1-\alpha}, \frac{1}{1-\alpha}] = [-5, 5]$. Genereerime 200 vaatlust vastavast protsessist, kujutame saadud tulemused joonisel 9. Antud realisatsioonis jõuab protsess lõiku $[-5, 5]$ 26 sammuga ning järgnevate väärtuste korral ahel enam nendest piiridest ei välju. Kuna α väärtus on küllalt suur, siis ainult 200 vaatlusega ei näe me tulemusi, mis oleksid lõigu $[-5, 5]$ otspunktide lähedal. Genereerides rohkem väärtusi, näeksime lõpuks ka tulemusi, mis satuvad -5 ja 5 lähedale.



Joonis 9: Protsessi AR(1) realisatsioonid $x = 1000$ ning $\alpha = 0.8$ korral

3. Olgu $\alpha = 1$, siis saame $X_{t+1} = X_t + \xi_{t+1}$. Sellist protsessi nimetatakse **juhuslikuks ekslemiseks**. Oletame, et tihedusel h on järgmine omadus:

$$\exists \varepsilon > 0, \beta > 0 \colon h(x) > \varepsilon \quad \forall x \in [-\beta, \beta], \tag{4.5}$$

siis maksimaalne taandumatuse mõõt on Lebesgue'i mõõt [7]. Omadus (4.5) on näiteks ühtlasel jaotusel $U[-c, c]$, kus $c \in \mathbb{R}^+$. Samuti mis tahes keskväärtuse ja dispersiooniga normaaljaotuse korral. Samas ei kehti see omadus näiteks ühtlase jaotuse korral, kus tihedus ei ole nullpunkti suhtes sümmeetriline, näiteks $U[0, 1]$.

4. Olgu $\alpha \in \mathbb{R}$ ning oletame, et $h(x) > 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$. Olgu $x \in \mathbb{R}$ ja $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ selline, et $\mu(A) > 0$. Siis

$$\begin{aligned} P_x(X_2 \in A) &= P(X_2 \in A | X_1 = x) = P(\alpha x + \xi_2 \in A) = P(\xi_2 \in A - \alpha x) \\ &= \int_A h(x' - \alpha x) \mu(dx') > 0. \end{aligned}$$

Seega ka $\sum_{k=2}^{\infty} P_x(X_k \in A) > 0$, mistõttu X on μ-taandumatu. Olgu nüüd $\mu(A) = 0$. Siis $\sum_{k=2}^{\infty} P_x(X_k \in A) = 0$. Järelikult on antud juhul Lebesgue'i mõõt μ maksimaalne taandumatuse mõõt. Kui h ei ole kogu reaalteljel positiivne, siis ei pruugi AR(1) protsess olla taandumatu. Vaatleme selle olukorra kohta näidet.

Näide. Olgu $\xi_2 \sim U[-1,1]$. Siis

$$h(x) = \begin{cases} 0.5, & \text{kui } x \in [-1,1] \\ 0, & \text{kui } x \notin [-1,1] \end{cases},$$

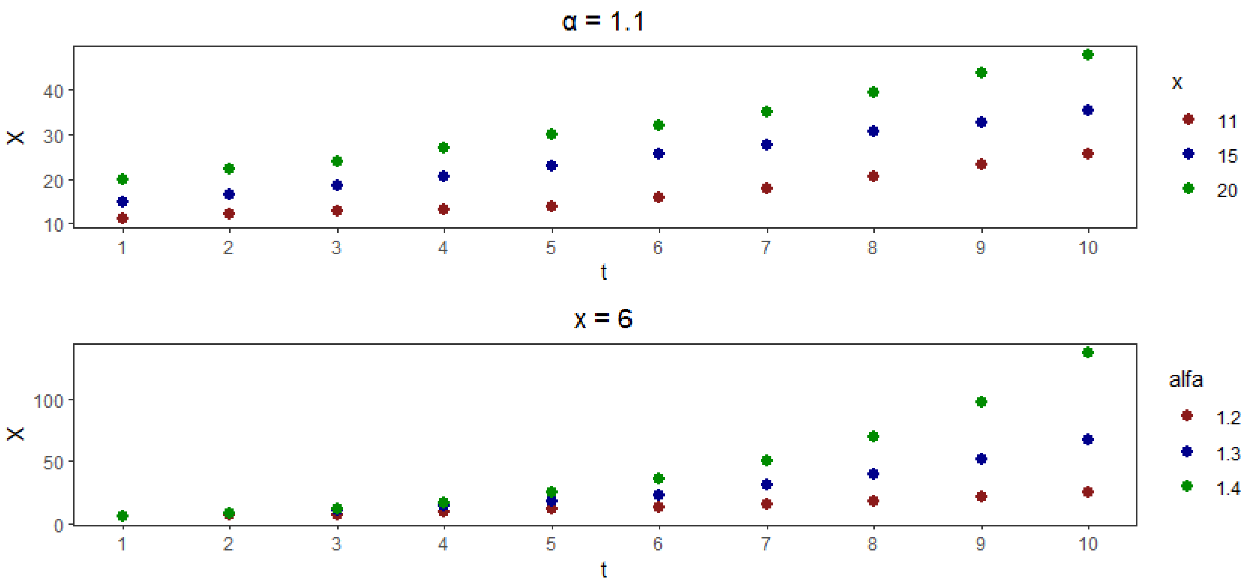
seega h ei ole kogu reaalteljel positiivne. Olgu $\alpha > 1, x > (\alpha-1)^{-1}$. Kuna $q(x'|x) = h(x' - \alpha x)$, siis saame, et kui $x' < \alpha x - 1$, siis $q(x'|x) = 0$. Algväärtus x on valitud selline, et $x > (\alpha - 1)^{-1}$ ehk $x < \alpha x - 1$, mistõttu

$$P_x(X_2 \leqslant x) = P(X_2 \leqslant x | X_1 = x) = \int_{(-\infty,x]} q(x'|x)\mu(dx') = 0.$$

Seega $X_2 > x$ μ-p.k, mistõttu ka $P_x(X_3 \leqslant x) = 0$. Samamoodi saame iga $k = 4, 5, \ldots$ korral, et $X_k > x$ μ-p.k. See aga tähendab, et protsess $X_1, X_2, \ldots$ on μ-p.k kõrgemal punktist x. Seega nägime, et h rahuldas nõuet (4.5), kuid valitud x korral $\sum_{k=2}^{\infty} P_x(X_k \in A) = 0$, seega sellel AR(1) protsessil puudub taandumatuse mõõt. Illustreerime seda tulemust joonisel 10. Esimesel graafikul valime $\alpha = 1.1$ ning vaatleme protsessi kolme erineva x korral. Kuna kehtima peab tingimus $x > (\alpha - 1)^{-1} = 10$, siis valime algväärtusteks $11, 15$ ja 20. Teisel graafikul genereerime 10 väärtust kolme erineva α korral. Kui α väärtused on $1.2, 1.3$ ja 1.4, siis

$$(1.2-1)^{-1} = 5, \quad (1.3-1)^{-1} = 3\frac{1}{3}, \quad (1.4-1)^{-1} = 2.5,$$

seega x algväärtuseks võime valida $x = 6$. Jooniselt 10 on näha, et protsess on mittekahanev ning väärtused on alati kõrgemal valitud algväärtusest.



Joonis 10: Protsessi AR(1) realisatsioonid erinevate x ning α väärtuste korral

4.1.2 AR(1) protsessi Harris rekurrentsus

Kõigepealt veendume, et AR(1) protsessil on nõrk Felleri omadus. Olgu $f\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ pidev ja tõkestatud funktsioon. Leiame integraali

$$\int f(x')P(x, dx') = \int f(x')q(x'|x)\mu(dx') = \int f(x')h(x' - \alpha x)\mu(dx').$$

Tähistame $g(x) := \displaystyle\int f(x')h(x' - \alpha x)\mu(dx')$. Eelduse põhjal on f tõkestatud, seega leidub $K < \infty$ nii, et

$$|f(x)| \leqslant K \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Seega

$$\begin{aligned} |g(x)| = \left| \int f(x')h(x' - \alpha x)\mu(dx') \right| &\leqslant \int |f(x')|h(x' - \alpha x)\mu(dx') \\ &\leqslant K \int h(x' - \alpha x)\mu(dx') = K, \end{aligned}$$

mistõttu g on tõkestatud. Veendume, et g on ka pidev. Arvestades, et μ on Lebesgue'i mõõt, saame muutuja vahetust $y = x' - \alpha x$ kasutades

$$g(x) = \int f(x')h(x' - \alpha x)\mu(dx') = \int f(y + \alpha x)h(y)\mu(dy).$$

Olgu x_n selline jada, et $x_n \to x$. Siis f pidevuse tõttu $f(y + \alpha x_n) \to f(y + \alpha x)$. Nüüd domineeritud koondumise teoreemist [6, Teor. 16.4]

$$\begin{aligned} \int f(x')h(x' - \alpha x_n)\mu(dx') &= \int f(y + \alpha x_n)h(y)\mu(dy) \to \int f(y + \alpha x)h(y)\mu(dy) \\ &= \int f(x')h(x' - \alpha x)\mu(dx'). \end{aligned}$$

Seega on g pidev. Kokkuvõttes on AR(1) protsessil nõrk Felleri omadus.

Eelduse kohaselt on protsessil tihedus Lebesgue'i mõõdu suhtes ning tiheduse olemasolul on protsess alati T-ahel [7, Väide 6.3.3]. Seega AR(1) protsess on T-ahel. Kui Markovi ahel on ψ-taandumatu ja T-ahel, siis teame [7, Teor. 9.02], et ta on Harris rekurrentne parajasti siis, kui

$$P_x(X_n \to \infty) = 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad P_x(\exists\, K < \infty \colon |X_n| \leqslant K \ \text{ i.o.}) = 1 \ \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{4.6}$$

Seega kuna veendusime, et AR(1) protsess on T-ahel ning eelduse kohaselt on juhuslikul protsessil X tihedus Lebesgue'i mõõdu suhtes, siis AR(1) protsess on Harris rekurrentne parajasti siis, kui kehtib (4.6).

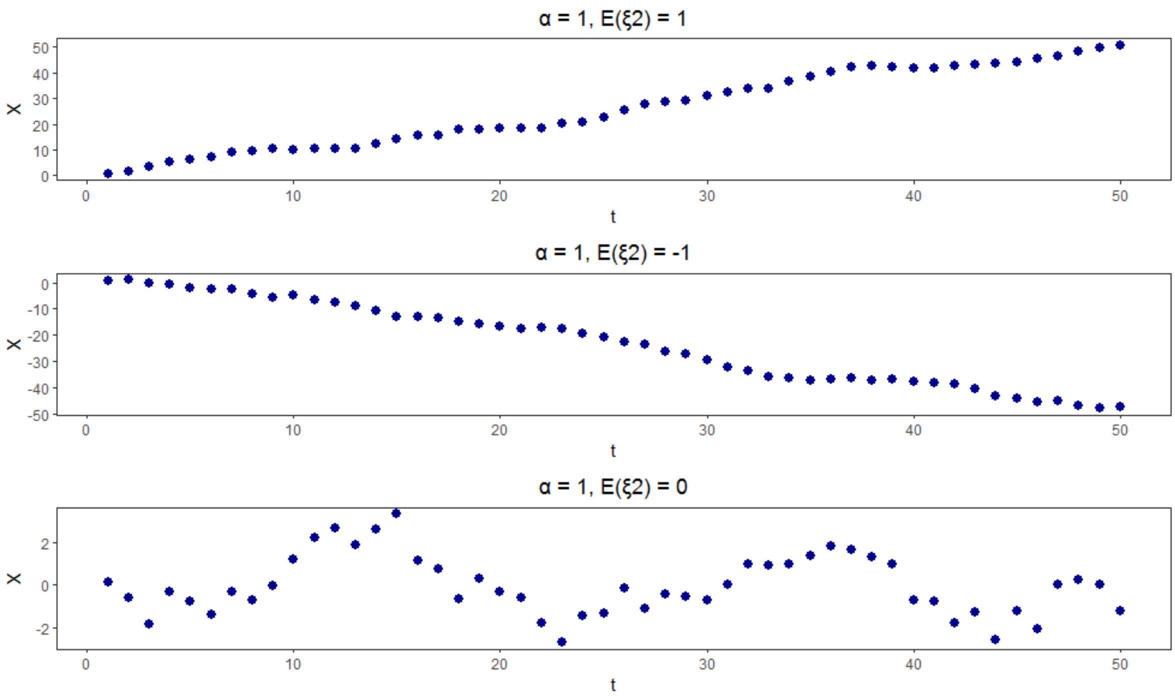
Vaatleme nüüd juhuslikku ekslemist, kus $\alpha = 1$. Chung-Fuchsi teoreemi kohaselt [15]: kui $E\xi_2 = 0$, siis iga $\varepsilon > 0$ ja iga $x \in \mathbb{R}$ korral

$$P_0(|X_n - x| < \varepsilon \quad \text{i.o.}) = 1. \tag{4.7}$$

Paneme tähele, et iga $x, y \in \mathbb{R}$ korral

$$P_x(|X_n - y| < \varepsilon \quad \text{i.o.}) = P_0(|X_n - (y - x)| < \varepsilon \quad \text{i.o.}).$$

Olgu $x, y \in \mathbb{R}$ ning kehtigu $P_x(|X_n - y| < \varepsilon \quad \text{i.o.}) = 1$, millest $P_x(|X_n| < \varepsilon + |y| \quad \text{i.o.}) = 1$. Võttes $K > \varepsilon + |y|$, saame $P_x(|X_n| < K \quad \text{i.o.}) = 1$, seega võrdusest (4.7) järeldub (4.6). Kuna tehtud eeldustel on ahel T-ahel, siis juhul $E\xi_2 = 0$, kehtib (4.6), mistõttu on juhuslik ekslemine Harris rekurrentne. Kui $E\xi_2 \neq 0$, siis juhuslik ekslemine ei ole Harris rekurrentne [7, Väide 9.5.3]. Kokkuvõttes on juhuslik ekslemine Harris rekurrentne parajasti siis, kui $E\xi_2 = 0$. Illustreerime seda kolme erineva graafikuga joonisel 11. Valime kõigil juhtudel algpunkti x jaotusest $\mathcal{N}(0, 1)$. Esimesel juhul on $\xi_2 \sim \mathcal{N}(1, 1)$, teisel juhul $\xi_2 \sim \mathcal{N}(-1, 1)$ ning kolmandal $\xi_2 \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Näeme, et kui $E\xi_2 > 0$, siis protsessi väärtused üldiselt tõusevad ning $E\xi_2 < 0$ korral vähenevad. Kuid kui $E\xi_2 = 0$, siis protsessi väärtused ei muutu ühes suunas, vaid liiguvad suuremate ja väiksemate väärtuste vahel.



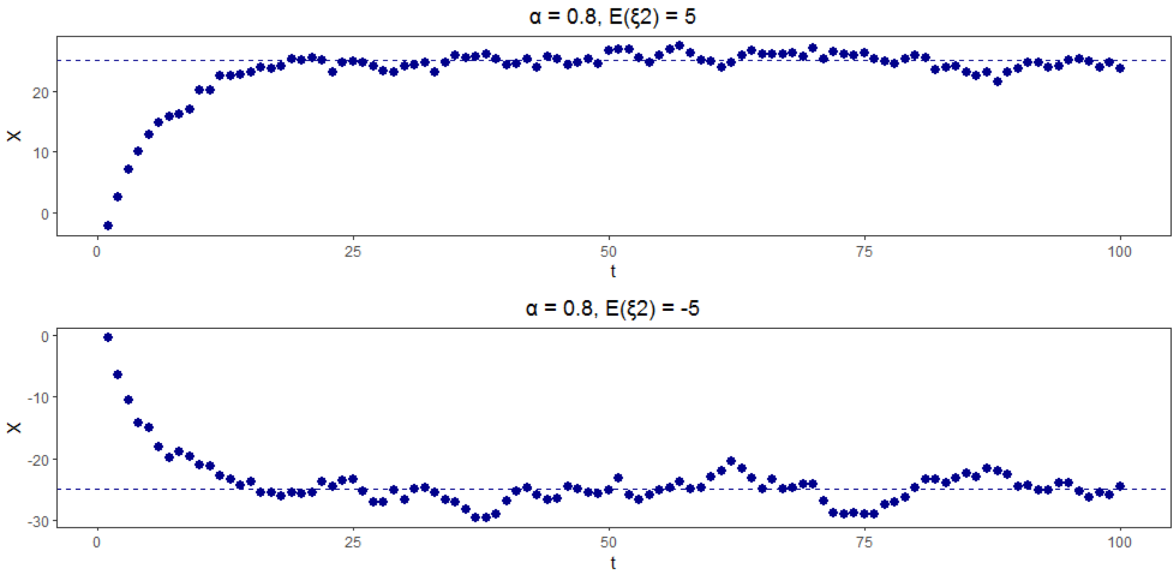
Joonis 11: Juhuslik ekslemine erinevate ξ_2 jaotuste korral

Olgu nüüd $|\alpha| < 1$ ning eeldame, et $E|\xi_2| < \infty$. Paneme tähele, et kui $|x| > \dfrac{E|\xi_2|}{1-|\alpha|}$, siis

$$E|\alpha x + \xi_2| \leqslant |\alpha||x| + E|\xi_2| \leqslant |x|.$$

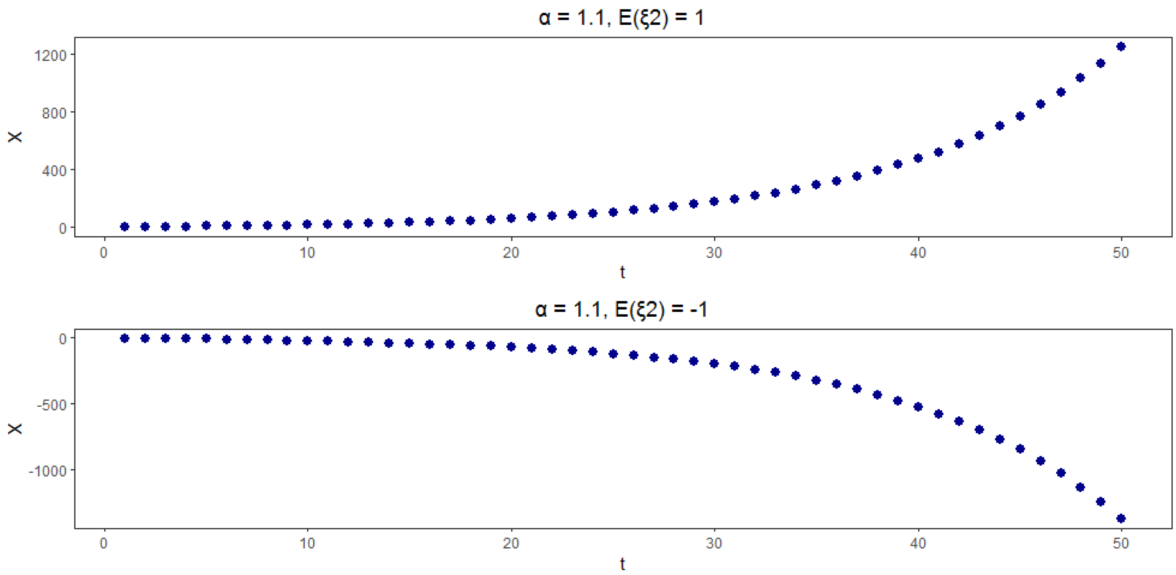
Saab näidata [7, Teor. 9.4.1, Teor. 9.1.8], et sellest järeldub, et kui $|\alpha| < 1$ ja $E|\xi_2| < \infty$, siis on AR(1) protsess Harris rekurrentne.

Uurime näidete abil, kuidas käitub protsess erinevate α ning $E\xi_2$ väärtuste korral. Olgu $X_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$, $\alpha = 0.8$ ning $\xi_2 \sim \mathcal{N}(\mu, 1)$, kus $\mu = E\xi_2 = \pm 5$. Kuna $|\alpha| < 1$ ja $E|\xi_2| < \infty$, siis on protsess Harris rekurrentne. Joonisel 12 on kujutatud protsesside realisatsioonid, kus esimesel juhul on $E\xi_2 > 0$ ning teisel juhul $E\xi_2 < 0$. Paneme tähele, et protsess liigub suuruse $\dfrac{\mu}{1-\alpha}$ poole (joonisel märgitud katkendliku joonega) ning jääb selle ümbrusesse.



Joonis 12: AR(1) protsessi realisatsioon erinevate ξ_2 keskväärtuste korral, kus $0 < \alpha < 1$

Järgmisena vaatleme juhtu, kus $\alpha > 1$. Jooniselt 13 näeme, et kui $E\xi_2 > 0$, siis liigub protsess järjest suuremate väärtuste poole. Kui X on nulli lähedal, siis võib X omandada ka eelmisest veidi väikseimaid väärtuseid, kuid kui X väärtused on piisavalt suured, siis juhuslik müra ei oma enam suurt tähtsust ning protsessi väärtused kasvavad eksponentsiaalselt. Sama märkame ka negatiivse $E\xi_2$ korral, kus X väärtused kahanevad eksponentsiaalselt.



Joonis 13: AR(1) protsessi realisatsioon erinevate ξ_2 keskväärtuste korral, kus $\alpha > 1$

Kui aga $\alpha = 1.1$ ning $E\xi_2 = 0$, siis olenevalt algväärtusest võime tüüpilistes realisatsioonides näha nii eksponentsiaalset kasvu kui ka kahanemist. Protsessi väärtused võivad mingi aeg liikuda nulli ümbruses, kuid kui mingil ajahetkel saavutab protsess piisavalt suure väärtuse, siis protsess läheneb lõpmatusele. Kui aga protsess jõuab piisavalt väikese negatiivse väärtuseni, siis lähenevad väärtused miinus lõpmatusele.

4.1.3 AR(1) protsessi statsionaarne algjaotus

Veendusime, et kui leidub tihedus h Lebesgue'i mõõdu suhtes, $|\alpha| < 1$ ja $E|\xi_2| < \infty$, siis AR(1) protsess on Harris rekurrentne. Samadel eeldustel eksisteerib ka statsionaarne tõenäosusmõõt π [7, Teor. 11.0.1]. Juhusliku ekslemise korral, kus $\alpha = 1$ statsionaarset tõenäosusmõõtu π ei leidu [7, Väide 10.5.1].

Näide. Olgu $\xi_2 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ ning $|\alpha| < 1$. Siis $E|\xi_2| = 0 < \infty$, seega statsionaarne tõenäosusmõõt π leidub. Paneme tähele, et

$$E(X_{n+1}) = E(\alpha X_n + \xi_{n+1}) = E(\alpha X_n) + E(\xi_{n+1}) = \alpha E(X_n),$$
$$D(X_{n+1}) = D(\alpha X_n + \xi_{n+1}) = D(\alpha X_n) + D(\xi_{n+1}) + 2cov(\alpha X_n, \xi_{n+1}) = \alpha^2 D(X_n) + \sigma^2.$$

Et ahel oleks statsionaarne, saame

$$E(X_n) = \alpha E(X_n) \quad \Rightarrow \quad E(X_n) = 0,$$
$$D(X_n) = \alpha^2 D(X_n) + \sigma^2 \quad \Rightarrow \quad D(X_n) = \frac{\sigma^2}{1 - \alpha^2}.$$

Seega $X_n \sim \mathcal{N}\Big(0, \dfrac{\sigma^2}{1-\alpha^2}\Big)$. Järelikult statsionaarne algjaotus on π, kus

$$\pi(A) = \int_A \sqrt{\frac{1-\alpha^2}{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2(1-\alpha^2)}{2\sigma^2}} \mu(dx).$$

4.2 Lineaarne vahelduv Markovi mudel

Olgu $Y = Y_1, Y_2, \ldots$ Markovi ahel lõpliku seisundite hulgaga $\mathcal{Y} = \{1, \ldots, K\}$ ning üleminekumaatriksiga $P = (p_{ij})$. Olgu X juhuslik protsess seisundite hulgaga $\mathcal{X} = \mathbb{R}$. Juhuslikku protsessi $Z = (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots$ nimetatakse **lineaarseks vahelduvaks Markovi mudeliks** [8], kui $X_1, X_2, \ldots$ on defineeritud rekursiivselt:

$$X_{t+1} = \alpha(Y_{t+1})X_t + \xi_{t+1}(Y_{t+1}), \quad t = 1, 2, \ldots,$$

kus iga $j \in \mathcal{Y}$ korral $\alpha(j) \in \mathbb{R}$ ning $\xi_2(j), \xi_3(j), \ldots$ on iid juhuslikud suurused. Kui $K = 1$, siis saame AR(1) mudeli. Lineaarsed Markovi mudelid on laialdaselt kasutusel näiteks aegridade analüüsis ning mitmesuguste majandusülesannete lahendamisel [2]. Eeldame, et juhuslikul suurusel $\xi_2(j)$ leidub iga $j \in \mathcal{Y}$ korral tihedus Lebesgue'i mõõdu suhtes, tähistame need tihedused h_j. Olgu $C := \bigcup_{j \in \mathcal{Y}} A_j \times \{j\}$. Peatüki 2.2 põhjal saame, et Z on PMM üleminekutuumaga

$$\begin{aligned}
P(Z_{t+1} \in C | X_t = x, Y_t = i) &= \sum_{j \in \mathcal{Y}} P(X_{t+1} \in A_j, Y_{t+1} = j | X_t = x, Y_t = i) \\
&= \sum_{j \in \mathcal{Y}} P(X_{t+1} \in A_j | Y_{t+1} = j, X_t = x, Y_t = i) P(Y_{t+1} = j | X_t = x, Y_t = i) \\
&= \sum_{j \in \mathcal{Y}} P(X_{t+1} \in A_j | Y_{t+1} = j, X_t = x) P(Y_{t+1} = j | Y_t = i) \\
&= \sum_{j \in \mathcal{Y}} P(\xi_2(j) + \alpha(j)x \in A_j) p_{ij}.
\end{aligned}$$

Seega, arvestades, et

$$\begin{aligned}
P(Z_{t+1} \in C | X_1 = x, Y_t = i) = & \sum_{j \in \mathcal{Y}} P(\xi_2(j) \in A_j - \alpha(j)x) p_{ij} \\
= & \sum_{j \in \mathcal{Y}} \int_{A_j} p_{ij} h_j(x' - \alpha(j)x) \mu(dx'),
\end{aligned}$$

on protsessi Z üleminekutihedus $q(x_2, y_2 = j | x_1, y_1 = i) = p_{ij} h_j(x_2 - \alpha(j)x_1)$. Kuna saime, et

$$P(X_{t+1} \in A_j, Y_{t+1} = j | X_t = x, Y_t = i) = P(X_{t+1} \in A_j | Y_{t+1} = j, X_t = x) P(Y_{t+1} = j | Y_t = i),$$

siis on tegemist vahelduva Markovi mudeliga.

4.2.1 Lineaarse vahelduva Markovi mudeli taandumatus

Protsessi taandumatus ning maksimaalne taandumatuse mõõt ψ sõltuvad mudeli parameetritest. Oletame, et Y ei ole taandumatu. Siis leiduvad seisundid $i, j \in \mathcal{Y}$ nii, et seisundist i ei ole võimalik liikuda seisundisse j. Vaatleme protsessi Z. Siis iga $k = 2, 3, \ldots$ ning iga $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$ korral

$$P(X_k \in A, Y_k = j | X_1 = x, Y_1 = i) = 0,$$

mistõttu ei saa Z olla taandumatu. Seega Z taandumatuseks on tarvilik tingimus Y taandumatus. Markovi ahela Z maksimaalne taandumatuse mõõt ψ on defineeritud σ-algebral $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times 2^{\mathcal{Y}}$ ning see esitub iga $j \in \mathcal{Y}, A_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ korral kujul

$$\psi\Big(\bigcup_{j \in \mathcal{Y}} A_j \times \{j\}\Big) = \sum_{j \in \mathcal{Y}} \psi(A_j \times \{j\}).$$

Tähistades iga $j \in \mathcal{Y}, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ korral $\psi_j(A) := \psi(A \times \{j\})$, saame

$$\psi\Big(\bigcup_{j \in \mathcal{Y}} A_j \times \{j\}\Big) = \sum_{j \in \mathcal{Y}} \psi_j(A_j).$$

Kui iga $i \in \mathcal{Y}$ korral $\psi_i = \mu$, siis protsessi Z maksimaalne taandumatuse mõõt on $\psi = \mu \times c$, kuid $\psi = \mu \times c$ võib kehtida ka nõrgemate eelduste korral.

Lause 4. Olgu iga $j \in \mathcal{Y}$ korral ψ_j vastava AR(1) protsessi $X_{t+1} = \alpha(j)X_t + \xi_{t+1}(j)$ maksimaalne taandumatuse mõõt. Oletame, et üks nendest mõõtudest on Lebesgue'i mõõt μ, olgu selleks ψ_1. Samuti olgu $\alpha(j) \neq 0$, $p_{ij} > 0$ iga $i, j \in \mathcal{Y}$ korral ning eeldame, et iga $j \in \mathcal{Y}$ korral leidub lõik $C_j = [c_j, d_j]$ ja $\varepsilon_j > 0$ nii, et $c_j < d_j, h_j(x) > \varepsilon_j$ iga $x \in C_j$ korral. Siis $\psi = \mu \times c$.

Tõestus. Üldisust kitsendamata olgu ε_j iga $j \in \mathcal{Y}$ korral sama: $\varepsilon = \varepsilon_j$. Olgu hulk $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ selline, et $\mu(A) > 0$. Fikseerime seisundi j. Siis leidub $a \in \mathbb{R}$ nii, et $\mu\Big((A - a) \cap C_j\Big) > 0$. Eeldasime, et $\alpha(j) \neq 0$, seega leidub $b \in \mathbb{R}$ nii, et $a = \alpha(j)b$. Tähistame $A_1 := A - a(j)b$. Üldisust kitsendamata olgu $C_j = [0, 1]$. Eelduse kohaselt $\mu(A_1 \cap [0, 1)) > 0$. Mõõdu pidevusest saame

$$\mu\Big(A_1 \cap [0, 1 - n^{-1})\Big) \nearrow \mu(A_1 \cap [0, 1)) > 0,$$

seega leidub $n_0 \in \mathbb{N}$ nii, et

$$n > n_0 \quad \Rightarrow \quad \mu\Big(A_1 \cap [0, 1 - n^{-1})\Big) > 0.$$

Seega, kui $\delta \in [0, 1/n_0]$, siis $\mu\Big(A_1 \cap [0, 1-\delta)\Big) > 0$. Kuna

$$\mu\Big((A_1+\delta) \cap [0,1)\Big) = \mu\Big(A_1 \cap [-\delta, 1-\delta)\Big) \geqslant \mu\Big(A_1 \cap [0, 1-\delta)\Big) > 0,$$

siis tähistades $\delta_1 := \dfrac{1}{n_0}$, saame

$$\mu\left(\left(A - \alpha(j)\Big[b - \frac{\delta}{\alpha(j)}\Big]\right) \cap C_j\right) > 0 \quad \forall \delta \in [0, \delta_1].$$

Võtame

$$B = \begin{cases} \Big[b - \dfrac{\delta_1}{\alpha(j)}, b\Big], & \text{kui } \alpha(j) > 0; \\ \Big[b, b - \dfrac{\delta_1}{\alpha(j)}\Big], & \text{kui } \alpha(j) < 0. \end{cases}$$

Siis $\mu(B) > 0$ ning

$$\mu\Big((A - \alpha(j)x) \cap C_j\Big) > 0 \quad \forall x \in B.$$

Nüüd kuna iga $x \in C_j$ korral $h_j(x) > \varepsilon$, siis iga $x \in B$ korral

$$\begin{aligned} P(\xi_2(j) + \alpha(j)x \in A) = P(\xi_2(j) \in A - \alpha(j)x) = \int_{A-\alpha(j)x} h_j \mu(dx) \geqslant \int_{(A-\alpha(j)x)\cap C_j} h_j \mu(dx) \\ \geqslant \varepsilon\mu\Big((A - \alpha(j)x) \cap C_j\Big) > 0. \end{aligned}$$

Kuna ψ_1 on Lebesgue'i mõõt ning $p_{11} > 0$, siis saame, et iga x korral leidub $n(x)$ nii, et

$$P(X_{n(x)} \in B, Y_{n(x)} = 1 | X_2 = x, Y_2 = 1) > 0.$$

See tähendab, et

$$\sum_{k=3}^{\infty} P(X_k \in B, Y_k = 1 | X_2 = x, Y_2 = 1) > 0.$$

Iga $k = 3, 4, \ldots$ korral

$$\begin{aligned} &P(X_k \in B, Y_k = 1 | X_1 = x_1, Y_1 = i) \\ &= \int P(X_k \in B, Y_k = 1 | X_1 = x_1, Y_1 = i, X_2 = x, Y_2 = 1) q(x, y_2 = 1 | x_1, y_1 = i) \mu(dx) \\ &= \int P(X_k \in B, Y_k = 1 | X_2 = x, Y_2 = 1) q(x, y_2 = 1 | x_1, y_1 = i) \mu(dx), \end{aligned}$$

seega arvestades, et $p_{i1} > 0$, saame

$$\begin{aligned} &\sum_{k=3}^{\infty} P(X_k \in B, Y_k = 1 | X_1 = x_1, Y_1 = i) \\ &= \sum_{k=3}^{\infty} \int P(X_k \in B, Y_k = 1 | X_2 = x, Y_2 = 1) q(x, y_2 = 1 | x_1, y_1 = i) \mu(dx) \\ &= \int \sum_{k=3}^{\infty} P(X_k \in B, Y_k = 1 | X_2 = x, Y_2 = 1) p_{i1} h_1(x - \alpha(1)x_1) \mu(dx) > 0. \end{aligned}$$

Seega leidub n nii, et

$$P(X_n \in B, Y_n = 1 | X_1 = x_1, Y_1 = i) > 0.$$

Nüüd

$$\begin{aligned}
&P(X_{n+1} \in A, Y_{n+1} = j | X_1 = x_1, Y_1 = i) \\
&= \int P(X_{n+1} \in A, Y_{n+1} = j | X_n = x, Y_n = 1) p(x_n = x, y_n = 1 | x_1, y_1 = i) \mu(dx) \\
&\geqslant \int_B P(X_{n+1} \in A, Y_{n+1} = j | X_n = x, Y_n = 1) p(x_n = x, y_n = 1 | x_1, y_1 = i) \mu(dx) \\
&= \int_B p_{1j} P(\xi_{n+1}(j) + \alpha(j)x \in A) p(x_n = x, y_n = 1 | x_1, y_1 = i) \mu(dx) > 0,
\end{aligned}$$

kus viimane integraal on positiivne, sest eelnevalt veendusime, et integraalialused funktsioonid on iga $x \in B$ korral positiivsed. Seega on protsess $\mu \times c$-taandumatu. Eelduse kohaselt on juhuslikul suurusel $\xi_2(j)$ tihedus h_j Lebesgue'i mõõdu suhtes. Seega kui $\psi_j(A) = 0$, siis leidub (x, i) nii, et

$$\sum_{k=2}^{\infty} P(X_k \in A, Y_k = j | X_1 = x, Y_1 = i) = 0,$$

mistõttu on $\mu \times c$ maksimaalne taandumatuse mõõt. □

Peatüki 4.1.1 põhjal saame, et kui leidub seisund $j \in \mathcal{Y}$ nii, et $h_j(x) > 0$ iga $x \in \mathbb{R}$ korral, siis $\psi_j = \mu$, seega kui iga $j \in \mathcal{Y}$ korral $\alpha(j) \neq 0$, siis lause 4 põhjal on $\psi = \mu \times c$. Samuti, kui leidub $j \in \mathcal{Y}$ nii, et $\alpha(j) = 1$ ning h_j rahuldab tingimust (4.5), kehtib $\psi = \mu \times c$. Oletame, et (p_{ij}) on taandumatu maatriks, kus kõik elemendid ei pruugi olla positiivsed. Oletame, et iga $j \in \mathcal{Y}$ ning iga $x \in \mathbb{R}$ korral on $h_j(x) > 0$. Lause 4 tõestuses võime valida seisundi 1 asemel sellise seisundi i', mille korral $p_{i'j} > 0$. Seega, kui $h_j(x) > 0$ iga $j \in \mathcal{Y}$ ning iga $x \in \mathbb{R}$ korral, siis $\psi = \mu \times c$ ka juhul, kus (p_{ij}) on taandumatu, kuid kõik elemendid ei pea olema positiivsed.

4.2.2 Lineaarse vahelduva Markovi mudeli Harris rekurrentsus

Eelnevalt nägime, et AR(1) protsess on nõrga Felleri omadusega. Veendume, et ka protsessil Z on nõrk Felleri omadus. Olgu iga $i \in \mathcal{Y}$ korral $f_i \colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ pidev ja tõkestatud. Siis on ka funktsioon $f \colon \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$ pidev ja tõkestatud, kus $f(x, i) =: f_i(x)$. Leiame integraali

$$\int_{\mathbb{R} \times \mathcal{Y}} f(z') P(z, dz') = \sum_{j \in \mathcal{Y}} \int f_j(x') q(x', j | x, i) \mu(dx') = \sum_{j \in \mathcal{Y}} p_{ij} \int f_j(x') h_j(x' - \alpha(j)x) \mu(dx').$$

Tähistame $g_j(x) := \displaystyle\int f_j(x')h_j(x' - \alpha(j)x)\mu(dx')$. Eelduse põhjal on f_j iga j korral tõkestatud, seega leidub K_j nii, et

$$|f_j(x)| \leqslant K_j \quad \forall j \in \mathcal{Y} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Paneme tähele, et

$$\begin{aligned}|g_j(x)| &= \left| \int f_j(x')h_j(x' - \alpha(j)x)\mu(dx') \right| \leqslant \int |f_j(x')|h_j(x' - \alpha(j)x)\mu(dx') \\ &\leqslant K_j \int h_j(x' - \alpha(j)x)\mu(dx') = K_j.\end{aligned}$$

Tähistame $K := \max_{j \in \mathcal{Y}} K_j$. Seega

$$\left| \int_{\mathbb{R}\times\mathcal{Y}} f(z')P(z, dz') \right| = \left| \sum_{j\in\mathcal{Y}} p_{ij} \int f_j(x')h_j(x' - \alpha(j)x)\mu(dx') \right| \leqslant \sum_{j\in\mathcal{Y}} p_{ij}K_j \leqslant K,$$

mistõttu on $\displaystyle\int_{\mathbb{R}\times\mathcal{Y}} f(z')P(z, dz')$ tõkestatud. Veendume ka pidevuses. Arvestades, et μ on Lebesgue'i mõõt, saame muutuja vahetust $y = x' - \alpha(j)x$ kasutades

$$g_j(x) = \int f_j(x')h_j(x' - \alpha(j)x)\mu(dx') = \int f_j(y + \alpha(j)x)h_j(y)\mu(dy).$$

Olgu x_n selline jada, et $x_n \to x$. Kuna f_j on pidev, siis $f_j(y+\alpha(j)x_n) \to f_j(y+\alpha(j)x)$, seega domineeritud koondumise teoreemi põhjal

$$\int f_j(x')h_j(x' - \alpha(j)x_n)\mu(dx') = \int f_j(y + \alpha(j)x_n)h_j(y)\mu(dy) \to \int f_j(y + \alpha(j)x)h_j(y)\mu(dy).$$

Seega

$$\sum_{j\in\mathcal{Y}} p_{ij} \int f_j(x')h_j(x' - \alpha(j)x_n)\mu(dx') \to \sum_{j\in\mathcal{Y}} p_{ij} \int f_j(x')h_j(x' - \alpha(j)x)\mu(dx'),$$

millest saame, et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}\times\mathcal{Y}} f(z')P(z, dz')$ on pidev. Kokkuvõttes on protsessil Z nõrk Felleri omadus.

Analoogiliselt AR(1) protsessiga vaatleme keskväärtust $E[|X_2||Z_1 = (x, i)]$. Et Z oleks Harris rekurrentne, piisab [7, Teor. 9.4.1, Teor. 9.1.8], kui leidub $M < \infty$, nii et kehtib

$$E[|X_2||Z_1 = (x, i)] \leqslant |x| \quad \forall |x| \geqslant M. \tag{4.8}$$

Leiame keskväärtuse

$$E[|X_2||Z_1 = (x, i)] = \sum_{j\in\mathcal{Y}} p_{ij}E|\alpha(j)x + \xi_2(j)| \leqslant |x| \sum_{j\in\mathcal{Y}} p_{ij}|\alpha(j)| + \sum_{j\in\mathcal{Y}} p_{ij}E|\xi_2(j)|.$$

Paneme tähele, et

$$|x|\sum_{j\in\mathcal{Y}} p_{ij}|\alpha(j)| + \sum_{j\in\mathcal{Y}} p_{ij}E|\xi_2(j)| \leqslant |x| \quad\Leftrightarrow\quad |x|\Big(1-\sum_{j\in\mathcal{Y}} p_{ij}|\alpha(j)|\Big) \geqslant \sum_{j\in\mathcal{Y}} p_{ij}E|\xi_2(j)|.$$

Seega näeme, et piisav tingimus Z Harris rekurrentuseks on $E|\xi_2(j)| < \infty \ \ \forall j \in \mathcal{Y}$ ja

$$\sum_{j\in\mathcal{Y}} p_{ij}|\alpha(j)| < 1 \quad \forall i \in \mathcal{Y}, \tag{4.9}$$

sest siis kehtib (4.8), kui

$$|x| > \max_{i\in\mathcal{Y}} \frac{\sum_{j\in\mathcal{Y}} p_{ij}E|\xi_2(j)|}{1-\sum_{j\in\mathcal{Y}} p_{ij}|\alpha(j)|} =: M.$$

Kui näiteks $|\alpha(j)| < 1$ iga $j \in \mathcal{Y}$ korral, siis on tingimus (4.9) täidetud. Kuid kui vaatleme vahelduvat juhuslikku ekslemist, st $\alpha(j) = 1$ iga $j \in \mathcal{Y}$ korral, siis pole tingimus (4.9) täidetud.

4.2.3 Näited erinevate parameetrite mõjust protsessile

Uurime, kuidas mõjutab parameetrite valik protsessi käitumist.

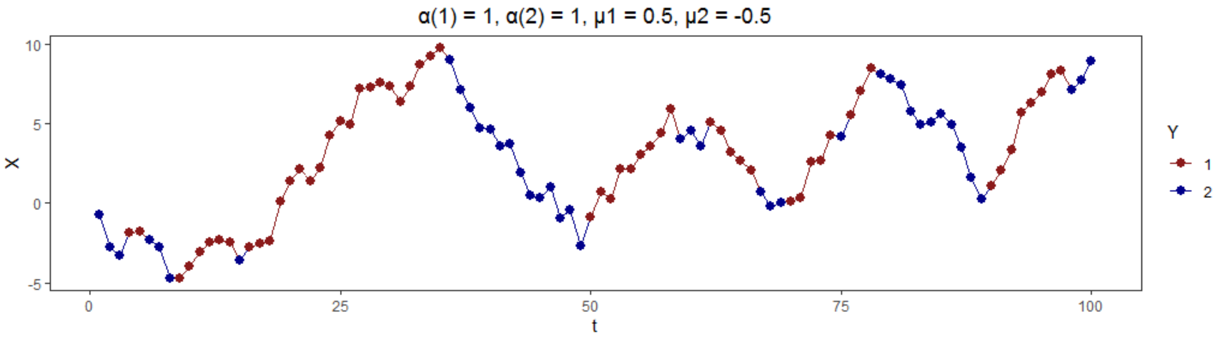
1. Kui $K = 1$ või kui iga $j \in \mathcal{Y}, t \in \mathbb{N}$ korral $\alpha(j) = \alpha$ ja $\xi_t(j) = \xi_t$, siis taandub lineaarne vahelduv Markovi mudel AR(1) protsessiks.
2. Kui iga $j \in \mathcal{Y}$ korral $\alpha(j) = 0$, siis $X_{t+1} = \xi_{t+1}(Y_{t+1})$ ehk saame HMM-i.
3. Kui $\alpha(j) = 1$ iga $j \in \mathcal{Y}$ korral, siis saame vahelduvate juurdekasvudega juhusliku ekslemise.

Näide. Vaatleme kahe režiimiga mudelit, kus $\mathcal{Y} = \{1, 2\}$ ning olgu ξ_t normaaljaotusega $\xi_t(Y_t) \sim \mathcal{N}(\mu(Y_t), 1)$. Olgu $\xi_t(1)$ keskväärtus μ_1 positiivne ning $\xi_t(2)$ keskväärtus μ_2 negatiivne. Täpsemalt vaatleme protsessi

$$X_{t+1} = X_t + \xi_{t+1}(Y_{t+1}), \qquad \xi_{t+1}(Y_{t+1}) \sim \begin{cases} \mathcal{N}(0.5, 1), & \text{kui } Y_{t+1} = 1; \\ \mathcal{N}(-0.5, 1), & \text{kui } Y_{t+1} = 2, \end{cases}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}, \qquad \pi = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}, \qquad X_1 \sim \mathcal{N}(0, 1). \tag{4.10}$$

Seega, kui protsess on režiimis 1, siis on X kasvavas faasis ning režiimi 2 saame kahaneva faasi. Sellise protsessi tüüpilist realisatsiooni illustreerib joonis 14.



Joonis 14: Sümmeetrilise juhusliku ekslemise realisatsioon, kus $\mu_1 > 0$ ja $\mu_2 < 0$

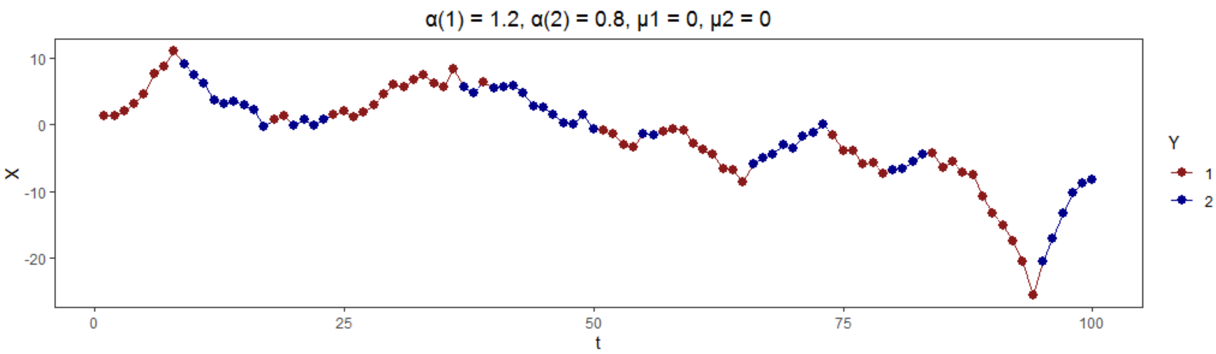
Jooniselt 14 on näha, et kui protsess on režiimis 1, siis näeme rohkem olukorda, kus X väärtused suurenevad. See-eest režiimi 2 korral kipub X sagedamini omandama väiksemaid väärtusi võrreldes eelmisega. Samuti näeme, et kuna $\alpha(1) = 1$, siis suuremate X väärtuste korral ei hakka väärtused eksponentsiaalselt kasvama, vaid suurenevad ühtlaselt. Kuna ka $\alpha(2) = 1$, siis ka režiimis 2 ei kahane väärtused eksponentsiaalselt.

4. Kui $\xi_t(j) = \xi_t$ iga $j \in \mathcal{Y}$ korral, siis ξ_t modelleerib müra, mis on sõltumatu Markovi ahelast Y.

   Näide. Olgu ka nüüd Markovi ahela Y üleminekumaatriks, statsionaarne algjaotus ning X_1 jaotus kujul (4.10). Vaatleme olukorda, kus $\alpha(1) > 1, 0 < \alpha(2) < 1$ ning müra on sõltumatu Markovi ahelast Y:

$$X_{t+1} = \alpha(Y_{t+1})X_t + \xi_{t+1}, \quad \xi_{t+1} \sim \mathcal{N}(0,1), \quad \alpha(1) = 1.2, \;\; \alpha(2) = 0.8.$$

   Sellise protsessi tüüpilist realisatsiooni kujutab joonis 15.



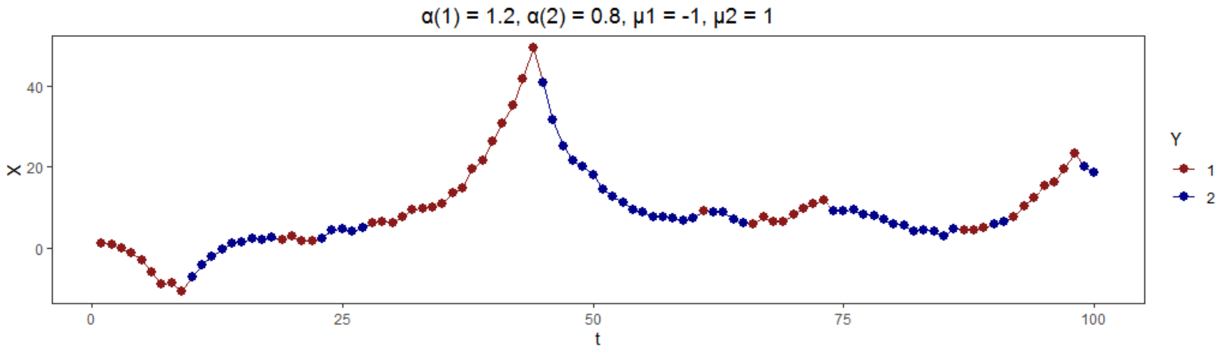
Joonis 15: Lineaarse mudeli realisatsioon, kus $\alpha(1) > 1$, $0 < \alpha(2) < 1$ ning $\mu_1 = \mu_2$

Jooniselt 15 näeme, et $Y_1 = 1$ ning X_1 on positiivne, seega kuna $\alpha(1) > 1$, siis X väärtused hakkavad tõusma. Peatükis 4.1.2 nägime, et kui $\alpha > 1$, siis hakkavad protsessi väärtused olenevalt eelmisest väärtusest kas eksponentsiaalselt tõusma või langema. Ka jooniselt 15 on näha, et niikaua, kui protsess on režiimis 1, X väärtused suurenevad ning väärtuseid saab kahandada ainult režiimi vahetus. Kuna $\alpha(2) < 1$, siis režiimi vahetudes hakkavad protsessi väärtused langema. Seega režiimis 1 kasvavad/kahanevad väärtused eksponentsiaalselt ning režiim 2 toob väärtused jälle nullile lähemale.

5. Järgmisena vaatleme samuti juhtu, kus $\alpha(1) > 1, 0 < \alpha(2) < 1$, kuid kus $\xi_t(j)$ jaotus sõltub ka režiimist. Olgu Y üleminekumaatriks, algjaotus ning X_1 jaotus kujul (4.10) ning

$$\alpha(1) = 1.2, \;\; \alpha(2) = 0.8, \quad \xi_{t+1}(Y_{t+1}) \sim \begin{cases} \mathcal{N}(-1, 1), & \text{kui } \; Y_{t+1} = 1; \\ \mathcal{N}(1, 1), & \text{kui } \; Y_{t+1} = 2. \end{cases}$$

Sellise protsessi realisatsiooni illustreerib joonis 16.



Joonis 16: Lineaarse mudeli realisatsioon, kus $\alpha(1) > 1$, $0 < \alpha(2) < 1$ ning $\mu_1 < 0$ ja $\mu_2 > 0$

Jooniselt 16 näeme, et protsess alustab nulli lähedalt ning kuna $\mu_1 < 0$, siis hakkavad X väärtused algul langema. Režiimi vahetusega hakkavad väärtused taas suurenema. Kui X väärtused muutuvad oluliselt suuremaks nullist, siis juhuslik müra ei mängi enam suurt rolli ning kuna $\alpha(1) > 1$, siis hakkavad väärtused eksponentsiaalselt suurenema. Kui juhusliku ekslemise korral, kus $\mu_1 > 0, \mu_2 < 0$, saime kasvava ja kahaneva faasi, siis nüüd seda enam näha pole. Kui X jõuab nullist kõrgemale, siis mingi hetk väärtused enam ei vähene ning samas režiimis pole enam võimalik väikseid väärtusi näha. See-eest režiimis 2 jõuavad X väärtused $\dfrac{1}{1-0.8} = 5$ ümbrusesse ning seal suurt tõusu ega langust ei näe.

6. Võimalikke juhte on veel väga palju, uurime viimasena lähemalt järgmist mudeli erijuhtu: olgu ahela Y üleminekumaatriks $P = (p_{ij})$ taandumatu ning olgu $\pi(j)$ maatriksi P statsionaarne algjaotus. Oletame, et $\mu \neq 0$ ning iga $j \in \mathcal{Y}$ korral

$$|\alpha(j)| < 1, \;\; \theta(j) = \mu(1-\alpha(j)), \;\; \tau^2(j) = 1 - \alpha^2(j).$$

Olgu

$$X_1|Y_1 = j \sim \mathcal{N}(\mu, 1), \quad \xi(j) \sim \mathcal{N}(\theta(j), \tau^2(j)) \;\; \forall j \in \mathcal{Y}.$$

Näeme, et kuna $X_1|Y_1 = j$ jaotus ei sõltu väärtusest j, siis X_1 ja Y_1 on sõltumatud. Leiame $X_2|Y_2$ jaotuse. Kui $Y_2 = j$, siis $X_2 = \alpha(j)X_1 + \xi(j)$, millest

$$X_2|Y_2 = j \sim \mathcal{N}(\alpha(j)\mu + \theta(j), \alpha^2(j) + \tau^2(j)) \quad \Leftrightarrow \quad X_2|Y_2 = j \sim \mathcal{N}(\mu, 1).$$

Analoogiliselt saame ka, et iga $t = 3, 4, \ldots$ korral $X_t|Y_t = j \sim \mathcal{N}(\mu, 1)$. Seega $X_1, X_2, \ldots$ on sama jaotusega $\mathcal{N}(\mu, 1)$ juhuslikud suurused, kusjuures iga $t \in \mathbb{N}$ korral on X_t ja Y_t sõltumatud. Järelikult, kui $Y_1 \sim \pi$, kus π on maatriksi P statsionaarne algjaotus, siis ka ahel $Z = (X, Y)$ on statsionaarne. Leiame (X_1, X_2) tingliku kovariatsiooni:

$$\begin{aligned}
\mathrm{cov}[(X_1, X_2)|Y_2 = j] &= E[(X_2 - \mu)(X_1 - \mu)|Y_2 = j] = E[(\alpha(j)X_1 + \xi_2(j) - \mu)(X_1 - \mu)] \\
&= E[(\alpha(j)(X_1 - \mu) + \xi_2(j) - \mu(1 - \alpha(j)))(X_1 - \mu)] \\
&= E[(\alpha(j)(X_1 - \mu) + \xi_2(j) - \theta(j))(X_1 - \mu)] \\
&= E[\alpha(j)(X_1 - \mu)(X_1 - \mu)] + E[\xi_2(j) - \theta(j)]E[X_1 - \mu] \\
&= \alpha(j)E[(X_1 - \mu)(X_1 - \mu)] = \alpha(j)D(X_1) = \alpha(j).
\end{aligned}$$

Seega

$$\mathrm{cov}(X_1, X_2) = \sum_{j \in \mathcal{Y}} \mathrm{cov}[(X_1, X_2)|Y_2 = j]\pi(j) = \sum_{j \in \mathcal{Y}} \alpha(j)\pi(j).$$

Kuna $DX_1 = DX_2 = 1$, siis ka $\mathrm{corr}(X_1, X_2) = \sum_{j \in \mathcal{Y}} \alpha(j)\pi(j)$.

Näeme, et juhuslikud suurused $X_1, X_2, \ldots$ on sama jaotusega, kuid mitte sõltumatud. Samuti, kuna $\mathrm{cov}[(X_1, X_2)|Y_2 = j] = \alpha(j)$, siis pole $X_1, X_2, \ldots$ sõltumatud juhuslikest suurustest $Y_1, Y_2, \ldots$, vaid Y_t määrab ära X_{t-1}, X_t tingliku korrelatsiooni.

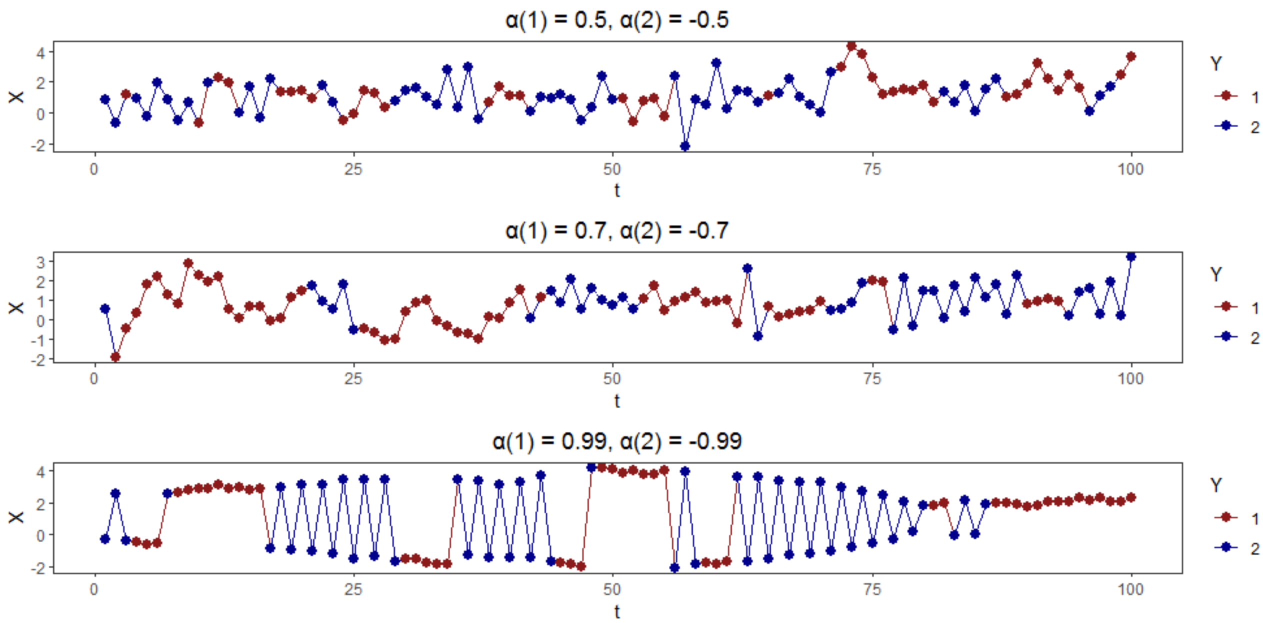
Näide. Olgu $\mathcal{Y} = \{1, 2\}$, $\mu = 1$ ning $\alpha(1) > 0, \alpha(2) < 0$, kusjuures $\alpha(1) = -\alpha(2)$. Olgu

$$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}.$$

Kuna antud juhul $p_{11} = p_{22}$, siis $\pi(j) = 0.5$. Kuna $\alpha(1) = -\alpha(2)$, siis saame, et $\mathrm{corr}(X_1, X_2) = 0$, seega $X_1, X_2, \ldots$ on mittekorreleeritud normaaljaotusega juhuslikud suurused, kuid mitte sõltumatud. Kuna $\alpha(1) > 0, \alpha(2) < 0$, siis kui $Y_t = 1$, on juhuslikud suurused X_{t-1} ja X_t positiivselt korreleeritud ning $Y_t = 2$ korral on nad negatiivselt korreleeritud. Kui Y püsib pikalt seisundis 1, siis X väärtused on pigem konstantsed ning seisundis 2 on X väärtused vahelduvad. Valime kolm erinevat $\alpha(j)$ väärtust. Olgu valitud $\alpha(j)$ ning neile vastavad $\theta(j)$ ja $\tau^2(j)$ väärtused järgmised:

$$\alpha(1) = 0.5,\ \ \alpha(1) = -0.5,\ \ \theta(1) = 0.5,\ \ \theta(2) = 1.5,\ \ \tau^2(1) = \tau^2(2) = 0.75,$$
$$\alpha(1) = 0.7,\ \ \alpha(1) = -0.7,\ \ \theta(1) = 0.3,\ \ \theta(2) = 1.7,\ \ \tau^2(1) = \tau^2(2) = 0.51,$$
$$\alpha(1) = 0.99,\ \ \alpha(1) = -0.99,\ \ \theta(1) = 0.01,\ \ \theta(2) = 1.99,\ \ \tau^2(1) = \tau^2(2) = 0.0199.$$

Kujutame valitud parameetritega ahela realisatsiooni joonisel 17. Jooniselt näeme, et mida suurem on $|\alpha(j)|$ väärtus, seda selgemini on eristatavad positiivse ja negatiivse korrelatsiooni faasid. Samuti on näha, et kuigi X_{t-1} ja X_t on mittekorreleeritud, pole nad sõltumatud.



Joonis 17: Lineaarse mudeli realisatsioonid erinevate $\alpha(j)$ väärtuste korral

Seega lineaarse vahelduva Markovi mudeliga on võimalik modelleerida väga erinevalt käituvaid ning erineva sõltuvusega protsesse, mida tavalise HMM-ga kirjeldada ei saa.

Kokkuvõte

Antud magistritöö eesmärk oli kirjeldada paarikaupa Markovi mudelit ning tuua näiteid mudeli rakendamisest. Töö esimeses osas tõime välja põhilised tulemused mõõduteooriast, mida on vaja paarikaupa Markovi protsessi ning selle omaduste defineerimiseks. Kirjeldasime mudeli konstrueerimist kahel erineval moel. Samuti tutvustasime põhilisi mudeli eriklasse ning kirjeldasime, kuidas blokkideks jagamise abil saab erinevate mudeliklasside arvu vähendada. Näidetes keskendusime enamasti juhule, kus vaatlustele vastav olekute jada on Markovi omadusega. Samuti uurisime, millal on protsess statsionaarne.

Diskreetsete paarikaupa Markovi mudelite kohta tõime välja kolm erinevat näidet. Esimeses näites vaatlesime olukorda, kus vaatluse all on kaks Markovi ahelat ning eesmärk on uurida nende omavahelist sõltuvust. Uurisime, kuidas mudeli parameetrite muutmine mõjutab ahelate sõltuvust. Teises näites vaatlesime, kuidas mittehomogeenset Markovi ahelat kirjeldada homogeense PMM-ina. Veendusime, et teatud erijuhtudel pole PMM-i konstrueerimisel mõtet ning ülesanne taandub tavalisele homogeensele Markovi ahelale. Kolmas näide keskendus juhule, kus kumbki ahelatest pole üldjuhul Markovi ahel. Kuna protsessi saime kirjeldada homogeense PMM-ina, siis veendusime, et saame mudelile üle kanda Markovi ahela teooria tulemusi.

Viimases peatükis kirjeldasime lineaarset vahelduvat Markovi mudelit. Uurisime mitmeid erijuhte ning tõime välja tingimusi, millal on protsess mingi mõõdu suhtes taandumatu ning Harris rekurrentne. Vaatlesime protsessi käitumist erinevatel erijuhtudel ning illustreerisime saadud tulemusi joonistel.

Viited

[1] P. Lanchantin, J. Lapuyade-Lahorgue, W. Pieczynski, Unsupervised segmentation of randomly switching data hidden with non-Gaussian correlated noise, *Signal Processing*, pp. 163-175, 2011

[2] J. Hamilton, A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle, *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pp. 357-384, 1989

[3] W. Pieczynski, Pairwise Markov chains, IEEE *Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 25, pp. 634-639, 2003

[4] M. Põldvere, Mõõt ja Lebesgue'i integraal (loengukonspekt), Tartu Ülikool, 2018

[5] R. Haller, Üldine topoloogia I (loengukonspekt), Tartu Ülikool, 2020

[6] P. Billingsley, Probability and measure, Wiley 1995

[7] S. P. Meyn, R. Tweedie, Markov Chains and Stochastic Stability, Cambridge University Press, 2009

[8] J. Lember, J. Sova, Existence of infinite Viterbi path for pairwise Markov models, *Stochastic Processes and their Application*, Vol. 130, pp. 1388-1425, 2020

[9] S. Derrode, W. Pieczynski, Unsupervised data classification using pairwise Markov chains with automatic copula selection, *Computational statistics and data analysis Intelligence*, Vol. 63, pp. 81-98, 2013

[10] S. Derrode, W. Pieczynski, Signal and image segmentation using pairwise Markov chains, *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 52, no 9, pp. 2477-2489, 2004

[11] O. Cappe, E. Moulines, T. Ryden, Inference in hidden Markov models, Springer, 2005

[12] I. Gorynin, H. Gangloff, E. Monfrini, W. Pieczynski, Assessing the segmentation performance of pairwise and triplet Markov models, *Signal Processing*, pp. 183-192, 2018

[13] J.Lember, H. Matzinger, J. Sova, F. Zucca, Lower bounds for moments of global scores of pairwise Markov chains, *Stochastic Processes and their Application*, Vol. 128, pp. 1678-1710, 2018

[14] P. Brémaud, Markov chains: Gibbs fields, Monte Carlo simulation and queues, Springer, 1999

[15] R. Durrett, Probality: theory and examples, Duxbury Press, 2005

Lisa – Simulatsioonides kasutatud R-i koodid

```
# Näide 1 - Milano ahel
library(stringr)
library(ggplot2)
library(patchwork) # et saada ühele joonisele mitu graafikut üksteise alla

# Funktsioon, mis leiab statsionaarse algjaotuse vastavalt leitud valemitele.
leia_pi <- function(p, q, lambda1, lambda2, mu1, mu2){
    a <- q/(1-p+q)
    b <- a*(p*(lambda2-mu2)+q*(mu1-mu2)+mu2)/(p*(lambda2-lambda1)+q*(mu1-mu2)+1)
    pi_Z <- c(b, a-b, a-b, 1-2*a+b)
    # Kui nimetaja on 0, siis ei saa seda valemit kasutada.
    if ((p*(lambda2-lambda1)+q*(mu1-mu2)+1) == 0) print("Nimetaja on null!")
    return(pi_Z)}

Z_seisundid <- c("1,1","2,1","1,2","2,2")
# Funktsioon, mis leiab Milano ahela 4x4 üleminekumaatriksi.
leia_Q <- function(p, q, lambda1, lambda2, mu1, mu2){
    Q <- matrix(c(p*lambda1, p*(1-lambda1), p*(1-lambda1), 1+p*lambda1-2*p,
                  q*mu1, p-q*mu1, q*(1-mu1), 1+q*mu1-p-q,
                  p*lambda2, q-p*lambda2, p*(1-lambda2), 1+p*lambda2-q-p,
                  q*mu2, q*(1-mu2), q*(1-mu2), 1+q*mu2-2*q),
         nrow = 4, ncol = 4, byrow = T, dimnames = list(Z_seisundid,Z_seisundid))
    return(Q)}

# Funktsioon, mis genereerib n Markovi ahela väärtust vastavalt algjaotustele alg,
# ning üleminekumaatriksile P.
genereeri_n <- function(n, alg, P, seisundid){
    vaartused <- c()
    vaartused[1] <- sample(seisundid, size = 1, prob = alg)
    for (i in c(2:n)){
        vaartused[i] <- sample(seisundid, size = 1, prob = P[vaartused[i-1],])
    } return(vaartused)}


# Funktsioon, mis joonistab Milano ahela graafiku.
graafik <- function(vaatlused_Z, lambda1, lambda2, mu1, mu2, p, q){
    a <- q/(1-p+q)
    b <- round(a*(p*(lambda2-mu2)+q*(mu1-mu2)+mu2)/(p*(lambda2-lambda1)+q*(mu1-mu2)+1),2)
    # Eraldame ahelate X ja Y väärtused.
    osad <- str_split_fixed(vaatlused_Z, ",",2)
```

```
    vaatlused_X <- as.numeric(osad[,1])
    vaatlused_Y <- as.numeric(osad[,2])

    n <- length(vaatlused_Z)
    andmestik <- data.frame(t = c(1:n),
                            # lisame +- 0.1, et X ja Y oleksid graafikul eristatavad
                            vaatlused = c(vaatlused_X+0.1, vaatlused_Y-0.1),
                            ahel = c(rep("X", n), rep("Y", n)))

    g <- ggplot(andmestik, aes(x = t, y = vaatlused, color = ahel)) +
         geom_point(size = 2.5) + theme_bw() +
         scale_y_continuous(breaks=seq(1, 2), limits=c(0.4,2.6)) +
         scale_color_manual(values=c("firebrick4", "darkblue")) +
         labs(title= paste0("λ1 = ", lambda1, ", λ2 = ", lambda2, ",
             μ1 = ", mu1, ", μ2 = ", mu2, ", b = ", b), x ="t", y = "seisund") +
         theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5)) +
         theme(panel.grid.major = element_blank(), panel.grid.minor = element_blank())
     return(g) }

# Funktsioon, mis leiab kirjeldatud sõltuvusmõõdikute väärtused.
leia_solt_moodikud <- function(p, q, lambda1, lambda2, mu1, mu2){
    a <- q/(1-p+q)
    b <- a*(p*(lambda2-mu2)+q*(mu1-mu2)+mu2)/(p*(lambda2-lambda1)+q*(mu1-mu2)+1)
    # Anname teada, kui nimetaja on 0.
    if ((p*(lambda2-lambda1)+q*(mu1-mu2)+1) == 0) print("Nimetaja on null!")

    toen_vordsed <- 1-2*a+2*b
    informatsioon <- ifelse(b/a^2 <= 0,0,b*log2(b/a^2)) +
        ifelse((a-b)/(a*(1-a)) <= 0,0,2*(a-b)*log2((a-b)/(a*(1-a)))) +
        ifelse((1-2*a+b)/(1-a)^2 <= 0,0,(1-2*a+b)*log2((1-2*a+b)/(1-a)^2))
    korrelatsioon <- (b-a^2)/(a*(1-a))
    return(c(informatsioon, toen_vordsed, korrelatsioon))}


# Kolme sõltuvusmõõdiku graafik.
# Defineerime parameetrid, mille abil joonistada kolme sõltuvusmõõdiku graafik.
parameetrid <- matrix(c(1, 0.25, 1, 1,   0.75, 0, 0, 0,   0.75, 0.25, 1, 1,
                        0.8, 0.2, 0.8, 0.2,   0.875, 0.125, 0.5, 0.5,
                        0.9, 0.25, 1, 1,   1, 0.25, 1, 0.9,   0.9, 0.25, 1, 0.9,
                        1, 0.25, 0.9, 0.2,   0.75, 0.1, 0.1, 0.1,
                        1, 0.25, 0, 0.9,   1, 0.25, 0.9, 0,   0.8, 0, 0.8, 0.2,
                        0.75, 0, 0.1, 0,   0.8, 0.2, 0.5, 0.2,
                        1, 0.25, 0.25, 0.1,   0.75, 0.1, 0, 0.1),
                      byrow = T, ncol = 4)
```

```
# Leiame igal juhul sõltuvusmõõdikute ning a, b väärtused.
toenaosused <- c();  informatsioonid <- c();  korrelatsioonid <- c();
ad <- c();  bd <- c()
for (i in c(1:nrow(parameetrid))) {
    p <- 0.8;   q <- 0.2
    lambda1 <- parameetrid[i,1];   lambda2 <- parameetrid[i,2]
    mu1 <- parameetrid[i,3];   mu2 <- parameetrid[i,4]

    moodikud <- leia_solt_moodikud(p, q, lambda1, lambda2, mu1, mu2)
    informatsioonid <- append(informatsioonid, moodikud[1])
    toenaosused <- append(toenaosused, moodikud[2])
    korrelatsioonid <- append(korrelatsioonid, moodikud[3])
    ad <- append(ad, q/(1-p+q))
    bd <- append(bd, q/(1-p+q)*(p*(lambda2-mu2)+
                     q*(mu1-mu2)+mu2)/(p*(lambda2-lambda1)+q*(mu1-mu2)+1)) }

andmestik <- data.frame(soltuvus = c(informatsioonid, toenaosused, korrelatsioonid),
                        mõõdik = c(rep("I(X_t;Y_t)",nrow(parameetrid)),
                                   rep("P(X_t=Y_t)",nrow(parameetrid)),
                                   rep("cor(X_t,Y_t)",nrow(parameetrid))),
                        b = rep(bd,3*nrow(parameetrid)))

# Kolme sõltuvusmõõdiku graafik.
ggplot(andmestik, aes(x = b, y = soltuvus, color = mõõdik)) +
  geom_point(size = 2.5) + theme_bw() + geom_line() +
  scale_color_manual(values=c("firebrick4", "darkblue", "green4")) +
  labs(x ="b", y = "sõltuvusmõõdiku väärtus") +
  theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5)) +
  theme(panel.grid.major = element_blank(), panel.grid.minor = element_blank())


# Näide 2
# Leiame Markovi ahelate tüüpilised realisatsioonid.
pA <- 0.97; qA <- 0.99; pB <- 0.1; qB <- 0.05
# Leiame statsionaarsed algjaotused.
pi_A <- c((1-qA)/(1-pA+1-qA), (1-pA)/(1-pA+1-qA))
pi_B <- c((1-qB)/(1-pB+1-qB), (1-pB)/(1-pB+1-qB))
seisundid <- c("0","1")
P_A <- matrix(c(pA, 1-pA, 1-qA, qA), byrow = T, ncol = 2,
             dimnames = list(seisundid, seisundid))
P_B <- matrix(c(pB, 1-pB, 1-qB, qB), byrow = T, ncol = 2,
             dimnames = list(seisundid, seisundid))
n <- 100
```

```
# Saame kasutada sama funktsiooni 'genereeri_n' nagu näites 1.
pikad_blokid <- genereeri_n(n, pi_A, P_A, seisundid)
lyhikesed_blokid <- genereeri_n(n, pi_B, P_B, seisundid)
andmestik <- data.frame(t = c(1:n),
                        pikk = pikad_blokid,
                        lyhike = lyhikesed_blokid)

gp <- ggplot(andmestik, aes(x = t, y = pikk)) +
   geom_point(size = 2.5, color = "darkblue") + theme_bw() +
   labs(title = "pA = 0.97, qA = 0.99", x ="t", y = "seisund") +
   theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5)) +
   theme(panel.grid.major = element_blank(), panel.grid.minor = element_blank())

gl <- ggplot(andmestik, aes(x = t, y = lyhike)) +
   geom_point(size = 2.5, color = "darkblue") + theme_bw() +
   labs(title = "pB = 0.1, qB = 0.05", x ="t", y = "seisund") +
   theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5)) +
   theme(panel.grid.major = element_blank(), panel.grid.minor = element_blank())

gp/gl # Kujutame tulemused ühel joonisel.

# Näide 2 (joonis 5) - X on Markovi ahel, saime Milano mudeli.
pA <- 0.9; qA <- 0.9; pB <- 0.1; qB <- 0.1
u1 <- 13/120; u2 <- 107/120; u3 <- 39/40; u4 <- 1/40
rA <- 0.52; rB <- 0.52; r <- 0.52
p <- r; q <- 1-r
lam1 <- 0.9; lam2 <- 0.9; mu1 <- 13/120; mu2 <- 1/40

seisundid <- c("1,1", "2,1", "1,2", "2,2") # kodeerime seisundid
Q <- leia_Q(p, q, lam1, lam2, mu1, mu2);   alg <- leia_pi(p, q, lam1, lam2, mu1, mu2)
n <- 70;   vZ <- genereeri_n(n, alg, Q, seisundid)

osad <- str_split_fixed(vZ, ",",2)
vaatlused_X <- as.numeric(osad[,1])-1 # dekodeerime
vaatlused_Y <- osad[,2]
vaatlused_Y[vaatlused_Y == "1"] <- "A" # dekodeerime
vaatlused_Y[vaatlused_Y == "2"] <- "B" # dekodeerime

andmestik <- data.frame(t = c(1:n),
                        vaatlused = c(vaatlused_X),
                        ahel = c(rep("X", n)))
```

```r
# Siin me ei kasuta funktsiooni 'graafik', sest tahame, et Y oleks tähtedega.
ggplot(andmestik, aes(x = t, y = vaatlused, color = ahel)) +
   geom_point(size = 3.5, color = "firebrick4") + theme_bw() +
   scale_y_continuous(breaks=seq(0, 1), limits=c(-0.4,1.4)) +
   labs(title = "α = 0.52, 1-β = 0.48", x ="t", y = "seisund") +
   theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5)) +
   theme(panel.grid.major = element_blank(), panel.grid.minor = element_blank()) +
   geom_text(aes(y = vaatlused_X-0.1, label = vaatlused_Y), color = "darkblue", size=5)


# Näide 3 - pool-Markovi mudel
# Leiame üleminekumaatriksi, P_ABC on olekute vahetumise maatriks.
leia_Q_semi <- function(P_ABC, TA, TB, TC, seisundid_Z){
    k <- length(TA);  l <- length(TB);  m <- length(TC)
    # Esimene blokk
    M_AA <- rep(0,k);   M_AA[k+1] <- 1;   M_AA <- rep(M_AA,k-1);   M_AA[k^2] <- 0
    M_AA <- matrix(M_AA, byrow = T, ncol = k)
    M_AB <- matrix(rep(0, k*l), byrow = T, ncol = l);   M_AB[1,] <- P_ABC["A","B"]*TB
    M_AC <- matrix(rep(0, k*m), byrow = T, ncol = m);   M_AC[1,] <- P_ABC["A","C"]*TC

    # Teine blokk
    M_BA <- matrix(rep(0, l*k), byrow = T, ncol = k);   M_BA[1,] <- P_ABC["B","A"]*TA
    M_BB <- rep(0,l);   M_BB[l+1] <- 1;   M_BB <- rep(M_BB,l-1);   M_BB[l^2] <- 0
    M_BB <- matrix(M_BB, byrow = T, ncol = l)
    M_BC <- matrix(rep(0, l*m), byrow = T, ncol = m);   M_BC[1,] <- P_ABC["B","C"]*TC

    # Kolmas blokk
    M_CA <- matrix(rep(0, m*k), byrow = T, ncol = k);   M_CA[1,] <- P_ABC["C","A"]*TA
    M_CB <- matrix(rep(0, m*l), byrow = T, ncol = l);   M_CB[1,] <- P_ABC["C","B"]*TB
    M_CC <- rep(0,m);   M_CC[m+1] <- 1;   M_CC <- rep(M_CC,m-1);   M_CC[m^2] <- 0
    M_CC <- matrix(M_CC, byrow = T, ncol = m)

    M_A <- cbind(M_AA, M_AB, M_AC);   M_B <- cbind(M_BA, M_BB, M_BC);
    M_C <- cbind(M_CA, M_CB, M_CC)
    Q <- rbind(M_A, M_B, M_C);   dimnames(Q) <- list(seisundid_Z, seisundid_Z)
    return(Q)}

# Funktsioon, mis leiab vastava PMM-i seisundid.
leia_Z_seisundid <- function(k, l, m){
    seisundid_Z <- c()
    for (i in c(1:k)) { seisundid_Z[i] <- paste0("A,",i) }
    for (i in c(1:l)) { seisundid_Z[k+i] <- paste0("B,",i) }
    for (i in c(1:m)) { seisundid_Z[k+l+i] <- paste0("C,",i) }
    return(seisundid_Z)}
```

```
# Funktsioon, mis leiab statsionaarse algjaotuse.
leia_alg_semi <- function(P_ABC, TA, TB, TC){
   pA <- P_ABC[1,2];   pB <- P_ABC[2,1];  pC <- P_ABC[3,1];  D <- 2+pA*(pC-pB)+pB*(1-pC)
   pi_ABC <- c((pB*(1-pC)+pC)/D,   (1-pC*(1-pA))/D,   (1-pA*pB)/D)
   k <- length(TA);   l <- length(TB);   m <- length(TC)
   # Leiame keskväärtused.
   cA <- k;   cB <- l;   cC <- m
   for (i in c(1:(k-1))) { cA <- cA - (k-i)*TA[i] }
   for (i in c(1:(l-1))) { cB <- cB - (l-i)*TB[i] }
   for (i in c(1:(m-1))) { cC <- cC - (m-i)*TC[i] }

   C <- 1/(pi_ABC[1]*cA+pi_ABC[2]*cB+pi_ABC[3]*cC)
   pi_Ak <- c();   pi_Bl <- c();   pi_Cm <- c()
   for (i in c(1:k)) { pi_Ak[i] <- C*pi_ABC[1]*sum((TA[i:k])) }
   for (i in c(1:l)) { pi_Bl[i] <- C*pi_ABC[2]*sum((TB[i:l])) }
   for (i in c(1:m)) { pi_Cm[i] <- C*pi_ABC[3]*sum((TC[i:m])) }

   pi_PMM <- c(pi_Ak, pi_Bl, pi_Cm)
   return(pi_PMM)}

# Funkstioon, mis joonistab pool-Markovi mudeli graafiku.
graafik_semi <- function(vaatlused_Z, k, l, m){
   vaatlused_X <- str_split_fixed(vaatlused_Z, ",",2)[,1]
   andmestik <- data.frame(t = c(1:n),
                           vaatlused = c(vaatlused_X))
   g <- ggplot(andmestik, aes(x = t, y = vaatlused, color = vaatlused)) +
     geom_point(size = 2.5) + theme_bw() +
     scale_color_manual(values=c("firebrick4", "darkblue", "green4")) +
     labs(title=paste0("k=", k, ", l=", l, ", m=",m), x ="t", y = "seisund") +
     labs(x ="t", y = "seisund") +
     theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5)) +
     theme(panel.grid.major = element_blank(), panel.grid.minor = element_blank()) +
     theme(legend.position = "none")
     return(g) }


# AR(1) protsess
# Funktsioon, mis genereerib n väärtust AR(1) protsessist, kui algväärtus on z, xi_2 - U(-1,1).
genereeri_n_AR1 <- function(n, z, alfa){
    Xn <- c(z)
    for (i in c(2:n)){
        xi <- runif(1, min = -1, max = 1)
        Xn[i] <- alfa*Xn[i-1] + xi}
    return(Xn)}
```

```
# Joonised 8, 9
joonis_ahend <- function(n, alfa, x1){
    Xn <- genereeri_n_AR1(n, x1, alfa)
    andmestik <- data.frame(t = c(1:n),   vaatlused = c(Xn))

    g <- ggplot(andmestik, aes(x = t, y = vaatlused)) +
      geom_point(size = 2.5, col = "darkblue") + theme_bw() +
      geom_hline(yintercept=1/(1-alfa), linetype="dashed", color = "darkblue") +
      geom_hline(yintercept=-1/(1-alfa), linetype="dashed", color = "darkblue") +
      labs(title = paste0("α = ", alfa, ", x = ", x1), x ="t", y = "X") +
      theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5)) +
      theme(panel.grid.major = element_blank(), panel.grid.minor = element_blank()) #+
      #kui gv on ggplot graafik, siis järgneva käsuga saab (joonisel 9)
      #väikese graafiku paremale nurka
      #annotation_custom(ggplotGrob(gv), xmin = 50, xmax = 200,   ymin = 300, ymax = 900)
    return(g)}

# Joonis 10
joonis_pole_taandumatu <- function(n, alfa, x1){
    Xn_1 <- genereeri_n_AR1(n, x1[1], alfa[1])
    Xn_2 <- genereeri_n_AR1(n, x1[2], alfa[2])
    Xn_3 <- genereeri_n_AR1(n, x1[3], alfa[3])

    andmestik <- data.frame(t = c(1:n),   vaatlused = c(Xn_1, Xn_2, Xn_3),
    x = c(rep(as.character(x1[1]), n), rep(as.character(x1[2]), n),
          rep(as.character(x1[3]), n)),
    alfa = c(rep(as.character(alfa[1]), n), rep(as.character(alfa[2]), n),
             rep(as.character(alfa[3]), n)))

    g <- ggplot(andmestik, aes(x = t, y = vaatlused, color = x)) +
      # Eelmine rida on joonise 10 esimese ja järgmine rida teise graafiku jaoks.
      #ggplot(andmestik, aes(x = t, y = vaatlused, color = alfa)) +
      geom_point(size = 2.5) + theme_bw() +
      scale_x_continuous(breaks=c(1:10)) +
      scale_color_manual(values=c("firebrick4", "darkblue", "green4")) +
      labs(title = paste0("α = ", alfa), x ="t", y = "X") +
      # Eelmine rida on joonise 10 esimese ja järgmine rida teise graafiku jaoks.
      #labs(title = paste0("x = ", x1), x ="t", y = "X") +
      theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5)) +
      theme(panel.grid.major = element_blank(), panel.grid.minor = element_blank())
    return(g)}
```

```
# Joonise 10 graafikud saame järgmiste käskudega.
g1 <- joonis_pole_taandumatu(10, c(1.1, 1.1, 1.1), c(11,15,20))
g2 <- joonis_pole_taandumatu(10, c(1.2, 1.3, 1.4), c(6,6,6))
g1/g2

# Joonised 11, 12, 13
# Funktsioon, mis genereerib n väärtust AR(1)-st, kui xi_2 - N(mu,sigma)
genereeri_n_AR1_norm <- function(n, alfa, mu, sigma){
    Xn <- rnorm(1, mean = 0, sd = 1) # olgu X1 - N(0,1)
    for (i in c(2:n)){
        xi <- rnorm(1, mean = mu, sd = sigma)
        Xn[i] <- alfa*Xn[i-1] + xi}
    return(Xn)}

joonis_AR <- function(n, alfa, mu, sd){
    Xn <- genereeri_n_AR1_norm(n, alfa, mu, sd)
    andmestik <- data.frame(t = c(1:n),   vaatlused = c(Xn))

    g <- ggplot(andmestik, aes(x = t, y = vaatlused)) +
      geom_point(size = 2.5, col = "darkblue") + theme_bw() +
      #Järgmine rida on ainult joonis 12 jaoks
      #geom_hline(yintercept=mu/(1-alfa), linetype="dashed", color = "darkblue") +
      labs(title = paste0("α = ", alfa, ", E(ξ2) = ", mu), x ="t", y = "X") +
      theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5)) +
      theme(panel.grid.major = element_blank(), panel.grid.minor = element_blank())
  return(g)}

# Joonised 14, 15, 16
# Funktsioon, mis genereerib n väärtust lineaarsest vahelduvast Markovi mudelist,
# kui xi_2 on etteantud keskväärtusega normaaljaotusega, sigma=1.
genereeri_Z_norm <- function(n,  alfa, mu, P, seisundid){
    X <- rnorm(1, mean = 0, sd = 1) # algväärtus - N(0,1)
    # Antud näidetes on statsionaarne algjaotus ühtlane.
    Y <- sample(seisundid, size = 1, prob = c(0.5, 0.5))
    for (i in c(2:n)){
        Y[i] <- sample(seisundid, size = 1, prob = P[Y[i-1],])
        xi <- rnorm(1, mean = mu[Y[i]], sd = 1)
        X[i] <- alfa[Y[i]]*X[i-1] + xi }

    andmestik <- data.frame(t = c(1:n),   X = X,   Y = as.factor(Y))
```

```
    g <- ggplot(andmestik, aes(x = t, y = X, color = Y)) +
      geom_line(aes(group=1)) + geom_point(size = 2.5) + theme_bw() +
      scale_color_manual(values=c("firebrick4", "darkblue")) +
      labs(title = paste0("α(1) = ", alfa[1], ", α(2) = ", alfa[2],
                          ", μ1 = ", mu[1], ", μ2 = ", mu[2]), x ="t", y = "X") +
      theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5)) +
      theme(panel.grid.major = element_blank(), panel.grid.minor = element_blank())
    return(g)}

P <- matrix(c(0.8,0.2,0.2,0.8), ncol = 2, byrow = T);   seisundid <- c(1,2);   n<-100
g1 <- genereeri_Z_norm(n, c(1, 1), c(0.5, -0.5), P, seisundid) # joonis 14
g2 <- genereeri_Z_norm(n, c(1.2, 0.8), c(0, 0), P, seisundid)  # joonis 15
g3 <- genereeri_Z_norm(n, c(1.2, 0.8), c(-1, 1), P, seisundid) # joonis 16


# Joonis 17
joonis_erijuht <- function(n, alfa, mu, P, seisundid){
    teeta <- mu*(1-alfa);   t_ruut <- 1-alfa^2
    # Antud näites on statsionaarne algjaotus ühtlane: c(0.5, 0.5).
    Y <- sample(seisundid, size = 1, prob = c(0.5, 0.5))
    X <- rnorm(1, mean = mu, sd = 1)
    for (i in c(2:n)) {
        Y[i] <- sample(seisundid, size = 1, prob = P[Y[i-1],])
        xi <- rnorm(1, mean = teeta[Y[i]], sd = sqrt(t_ruut[Y[i]]))
        X[i] <- alfa[Y[i]]*X[i-1] + xi }

    andmestik <- data.frame(t = c(1:n),   X = X,   Y = as.factor(Y))
    g <- ggplot(andmestik, aes(x = t, y = X, color = Y)) +
      geom_line(aes(group=1)) + geom_point(size = 2.5) + theme_bw() +
      scale_color_manual(values=c("firebrick4", "darkblue")) +
      labs(title = paste0("α(1) = ", alfa[1], ", α(2) = ", alfa[2]), x ="t", y = "X") +
      theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5)) +
      theme(panel.grid.major = element_blank(), panel.grid.minor = element_blank())
    return(g) }

mu <- 1;   P <- matrix(c(0.8,0.2,0.2,0.8), ncol = 2, byrow = T);   seisundid <- c(1,2)
alfa1 <- c(0.5, -0.5);   alfa2 <- c(0.7, -0.7);  alfa3 <- c(0.99, -0.99)
g1 <- joonis_erijuht(100, alfa1, mu, P, seisundid)
g2 <- joonis_erijuht(100, alfa2, mu, P, seisundid)
g3 <- joonis_erijuht(100, alfa3, mu, P, seisundid)
g1/g2+g3
```

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Kristin Avans,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose „Paarikaupa Markovi mudel: definitsioon ja näited“, mille juhendaja on Jüri Lember, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commonsi litsentsiga CC BY NC ND 3.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Kristin Avans
25.05.2021