TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI
TOIMETISED

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS

665

HOMOGEENSED RUUMID JA KIHTKONNAD

ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И РАССЛОЕНИЯ

Matemaatika- ja mehaanika-alaseid töid

Труды по математике и механике

TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS
ALUSTATUD 1893.a. VIHIK 665 ВЫПУСК ОСНОВАНЫ В 1893.г.

HOMOGEENSED RUUMID JA KIHTKONNAD

ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И РАССЛОЕНИЯ

Matemaatika- ja mehaanika-alaseid töid

Труды по математике и механике

ТАРТУ 1984

ОБОБЩЕННЫЕ b -ФОРМЫ И ПОЛЕ ФАДДЕЕВА-ПОПОВА

В.Абрамов

Кафедра алгебры и геометрии

I. Введение. Метод квантования поля Янга-Миллса, с использованием техники континуального интегрирования, был предложен Л.Д.Фаддеевым и Д.Л.Поповым (см. [7]). При этом в теории возникает эффективный лагранжиан $\mathcal{L}_{eff}$, который равен сумме трех членов

$$\mathcal{L}_{eff} = \mathcal{L}_{inv} + \mathcal{L}_{gf} + \mathcal{L}_{FP}$$

где $\mathcal{L}_{inv}$ - лагранжиан поля Янга-Миллса, инвариантный относительно калибровочных преобразований, $\mathcal{L}_{gf}$ - член фиксирующий калибровку, $\mathcal{L}_{FP}$ - лагранжиан поля Фаддеева-Попова, построенный с помощью антикоммутирующих величин $C^{\alpha}(x)$ и $\bar{C}^{\alpha}(x)$. Индекс α принимает целые значения от I до числа r, равного размерности калибровочной группы, а x точка пространства Минковского. Наборы величин $C^{\alpha}(x)$ и $\bar{C}^{\alpha}(x)$ получили название, соответственно, поля и антиполя Фаддеева-Попова.

Эффективный лагранжиан оказывается инвариантным относительно преобразований, получивших название BRS -преобразований (см. [8]). Позже были найдены преобразования (см. [I4]), получившие название $\overline{BRS}$ -преобразований; в них главную роль играет антиполе $\bar{C}^{\alpha}(x)$.

Первая геометрическая интерпретация поля Фаддеева-Попова была дана в [I3], где поле $C^{\alpha}(x)$ отождествлялось с дифференциальной 1 -формой на главном расслоении, принимающей значения в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ калибровочной группы G. BRS - преобразования выводились из геометрических соображений. Позже, в работе [I5], используя эту идею, авторы дали геометрическую интерпретацию также и антиполю $\bar{C}^{\alpha}(x)$ с помощью более сложного расслоения. Там же геометрическим путем были получены $\overline{BRS}$ -преобразования.

В работе [5] поле $C^{\alpha}(x)$ тоже отождествлялось с I-формой на расслоении, но вводилось менее жестко, что позволило устранить недостатки интерпретаций, данных в [I3] и [I5]. С помощью аппарата q -векторных полей была дана интерпретация поля $\bar{c}^{\alpha}(x)$ и BRS -преобразований, более простая, чем в [15]. Также было указано на то, что BRS-преобразования есть частный случай структурных уравнений Г.Ф.Лаптева.

В работах [9] и [11] поля $c^{\alpha}(x)$, $\bar{c}^{\alpha}(x)$ и BRS -преобразования строились с помощью аппарата супермногообразий, используя изложение, данное в [16].

Однако все изложенные выше интерпретации неудовлетворительны, потому что не учитывают того, что $c^{\alpha}(x)$ и $\bar{c}^{\alpha}(x)$ должны служить образующими грассмановой алгебры с бесконечным числом образующих. Иначе говоря, антикоммутационный характер $c^{\alpha}(x)$ и $\bar{c}^{\alpha}(x)$ проявляется не только по отношению к дискретному индексу α, но и по отношению к непрерывному индексу x Это следует из [1], гл. 1, §3, где подробно развивается техника интегрирования по грассмановой алгебре, которую использовали авторы в [7] при введении полей $c^{\alpha}(x)$ и $\bar{c}^{\alpha}(x)$. На этот же недостаток было указано в работе [12], где авторы, исходя из требований квантовой теории поля, приходят к выводу о бесконечномерности алгебры с образующими $c^{\alpha}(x)$ и $\bar{c}^{\alpha}(x)$. Они предлагают взять за основу для построения этой алгебры группу калибровочных преобразований. Эта их идея реализуется в данной статье.

Учитывая сказанное выше, в данной статье поставлена и решена задача обобщить построение грассмановой алгебры с бесконечным числом образующих, данное в [1], так, что образующие зависят не только от непрерывного индекса x , но и от дискретного индекса α . Это дает возможность строить затем с помощью вариационного исчисления обобщенные дифференциальные формы и внешнее дифференцирование на них. С помощью этого аппарата на группе калибровочных преобразований строятся обобщенные дифференциальные формы, отождествляемые с полем Фаддеева-Попова. Показывается, что они удовлетворяют BRS -преобразованиям.

2. <u>Группа калибровочных преобразований</u>. Пусть $P(M,G)$ главное расслоение с n -мерной гладкой базой M, r -мерной структурной группой Ли G и проекцией

$$\pi: P(M,G) \to M$$

Как известно ([1], стр. 57) существует открытое покрытие базы $\{U_i\}$ с изоморфизмами $\pi^{-1}(U_i) \simeq U_i \times G$ и функциями перехода

$$f_{ij}: \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \to G, \qquad (2.1)$$

удовлетворяющими

$$f_{ij}(x) = f_{ik}(x) \cdot f_{kj}(x), \quad x \in \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \cap \mathcal{U}_k,$$

где в правой части имеется в виду умножение в группе G. Выберем из покрытия $\{\mathcal{U}_i\}$ две таких области $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}'$, что $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}' \neq \varnothing$. Пусть f есть соответствующая функция перехода. В силу построения ([4], стр. 57) это есть гладкое отображение. Наложим на него, кроме того, условие, чтобы вне компактного подмножества $V_f \subset V = \mathcal{U} \cap \mathcal{U}'$, зависящего от f, оно было равно единице группы G, которую обозначим e. Множество всех таких отображений обозначим $C_0^\infty(V, G)$. Определим на $C_0^\infty(V, G)$ операцию умножения

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \quad x \in V, \qquad (2.2)$$

где справа имеется в виду умножение в группе G. Очевидно, что относительно операции (2.2) множество $C_0^\infty(V, G)$ становится группой. Если на расслоении $P(M, G)$ задана связность, то, как известно ([4], стр. 70), функция перехода f описывает переход от записи формы связности в локальных координатах x^μ на $\mathcal{U}$ к записи в локальных координатах $x^{\mu'}$ на $\mathcal{U}'$. В физике подобный переход носит название калибровочного преобразования, а группа $C_0^\infty(V, G)$ – группы калибровочных преобразований (см. [7]). Итак, в дальнейшем будем считать, что V лежит в некоторой координатной окрестности на M. Тогда в соответствующих локальных координатах каждый элемент $f \in C_0^\infty(V, G)$ можно записать в виде

$$\xi^\alpha = f^\alpha(x^1, \dots, x^n), \quad \alpha = 1, \dots, r, \quad x \in V,$$

где ξ^α – локальные координаты в некоторой окрестности единицы e в группе G, такие что e соответствует значениям $\xi^\alpha = 0$. Здесь все функции f обращаются в 0 вне компактного множества V_f. Учитывая это, будем иногда элемент группы $C_0^\infty(V, G)$ обозначать просто $\xi^\alpha(x)$. Пусть умножение в группе G выражается в рассматриваемых локальных координатах в виде

$$\zeta^\alpha = W^\alpha(\xi^1, \dots, \xi^r, \eta^1, \dots, \eta^r). \qquad (2.3)$$

Тогда умножение в группе $C_0^\infty(V, G)$ запишется в виде

$$\zeta^\alpha(x) = W^\alpha(\xi^1(x), \dots, \xi^r(x), \eta^1(x), \dots, \eta^r(x)). \qquad (2.4)$$

3. <u>Построение грассмановой алгебры по отображению в</u> $\mathbb{R}^r$

За основу следующего построения возьмем изложение грассмановой алгебры с бесконечным числом образующих, данное в работе [I].

Пусть $f \in C_0^\infty(\mathcal{V}, G)$. Через δf обозначим вариацию отображения f, т.е. набор гладких функций $\delta f^\alpha(x)$, обращающихся в 0 вне компактного множества $\mathcal{V}_{\delta f}$, причем $\mathcal{V}_f \subset \mathcal{V}_{\delta f}$. Так как в дальнейшем будет удобно не разделять непрерывные и дискретные индексы, то положим

$$\delta f(x^1, \ldots, x^n, \alpha) = \delta f^\alpha(x^1, \ldots, x^n). \qquad (3.I)$$

Построим компактное множество $\mathcal{V}' = \mathcal{V}_f \times [-M, M]$, где M - вещественное число такое, что $r < M$. Тогда $\mathcal{V}' \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Обозначим произвольную точку из $\mathcal{V}'$ через $\tilde{x}$, точка $\tilde{x}$ имеет координаты $x^1, \ldots x^{n+1}$.

Введем на $\mathcal{V}'_n$ обобщенную функцию

$$\tau(\tilde{x}) = \sum_{\alpha=1}^{r} \delta f(x^1, \ldots, x^n, \alpha)\, \delta(x^{n+1} - \alpha), \qquad (3.2)$$

где $\delta(x^{n+1} - \alpha)$ - обозначает известную функцию Дирака. Отождествим $\tau(\tilde{x})$ с образующими бесконечномерной алгебры Грассмана $\mathcal{G}$ (см. [I]), т.е. будем считать, что определено произведение $\tau(\tilde{x}_1) \wedge \ldots \wedge \tau(\tilde{x}_N)$ для любого натурального N, причем выполняются условия

а) $\tau(\tilde{x}) \wedge \tau(\tilde{y}) = -\tau(\tilde{y}) \wedge \tau(\tilde{x})$; (3.3)

в) $\tau(\tilde{x}) \wedge [\tau(\tilde{y}) \wedge \tau(\tilde{z})] = [\tau(\tilde{x}) \wedge \tau(\tilde{y})] \wedge \tau(\tilde{z})$. (3.4)

Пусть $\mathcal{K}$ является пространством основных функций (т.е. бесконечно дифференцируемых функций, обращающихся в 0 вне компактного множества $\mathcal{V}'$) и пусть $\varphi_0(\tilde{x}) \in \mathcal{K}$. Через $\tilde{E}^1$ (см. [3]) обозначим множество элементов вида

$$\varphi_0 = \int \varphi_0(\tilde{x})\, \tau(\tilde{x})\, d\tilde{x}, \qquad (3.5)$$

где $d\tilde{x} = dx^1 \ldots dx^{n+1}$. Очевидно, что $\tilde{E}^1$ - линейное топологическое пространство с топологией, индуцируемой топологией из $\mathcal{K}$. Через $\mathcal{K}'$ обозначим пространство обобщенных функций и пусть E^1 есть множество элементов вида

$$\varphi = \int \varphi(\tilde{x})\, \tau(\tilde{x})\, d\tilde{x}, \qquad (3.6)$$

где $\varphi(\tilde{x}) \in \mathcal{K}'$. Здесь E^1 также является линейным топологическим пространством. При этом $\tilde{E}^1$ есть линейное подпространство в E^1 и топология в E^1 есть топология сопряженного к $\tilde{E}^1$ пространства. Аналогичным образом строим пространства $\tilde{E}^p$ и E^p для любого натурального p. Элементы из $\tilde{E}^p$ имеют вид

$$\varphi_0 = \int \varphi_0(\tilde{x}_1, \ldots \tilde{x}_p)\, \tau(\tilde{x}_1) \wedge \ldots \wedge \tau(\tilde{x}_p)\, d^p\tilde{x}, \qquad (3.7)$$

где $d^p(\tilde{x}) = d\tilde{x}_1 \dots d\tilde{x}_p$, $\varphi_0(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_p)$ есть основная функция на $\mathcal{V}'^p = \mathcal{V}' \times \dots \times \mathcal{V}'$, кососимметричная по переменным $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_p$ (см. [I]). Элементы из E^p имеют вид

$$\varphi = \int \varphi(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_p)\, \tau(\tilde{x}_1) \wedge \dots \wedge \tau(\tilde{x}_p)\, d^p \tilde{x} \,, \qquad (3.8)$$

где $\varphi(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_p)$ есть обобщенная кососимметричная функция из пространства, сопряженного к пространству основных функций $\varphi_0(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_p)$. Построим по элементам $\varphi_{k_i} \in E^1$, где $\varphi_{k_i} = \int \varphi_{k_i}(\tilde{x})\, \tau(\tilde{x})\, d\tilde{x}$, следующие элементы

из $\tilde{E}^p$:

$$\varphi_N = \int \varphi_N(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_p)\, \tau(\tilde{x}_1) \wedge \dots \wedge \tau(\tilde{x}_p)\, d^p \tilde{x},$$

где

$$\varphi_N(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_p) = \sum \varphi_{k_1}(\tilde{x}_1) \wedge \dots \wedge \varphi_{k_p}(\tilde{x}_p)$$

– некоторые конечные суммы указанных произведений. Множество всех таких элементов есть плотное в E^p множество (см. [3]). Для двух произвольных элементов $\varphi, \psi \in E^1$ положим

$$\varphi \wedge \psi = \int \varphi(\tilde{x}) \cdot \psi(\tilde{y})\, \tau(\tilde{x}) \wedge \tau(\tilde{y})\, d\tilde{x}\, d\tilde{y}\,, \qquad (3.9)$$

откуда следует, что

$$\varphi \wedge \psi = - \psi \wedge \varphi \,. \qquad (3.10)$$

Выберем функцию $\varphi(\tilde{x})$ в виде

$$\varphi(\tilde{x}) = \delta(x^1 - \acute{x}^1) \dots \delta(x^n - \acute{x}^n)\, \varphi_{\alpha_0}(x^{n+1}),$$

где $\varphi_{\alpha_0}(x^{n+1})$–некоторая гладкая функция, равная 0 в точках $1, \dots, \alpha_0 - 1, \alpha_0 + 1, \dots, r$ и равная 1 в точке α_0. Аналогично

$$\psi(\tilde{x}) = \delta(x^1 - \acute{\acute{x}}^1) \dots \delta(x^n - \acute{\acute{x}}^n)\, \psi_{\beta_0}(x^{n+1}).$$

Тогда по формулам (3.6) и (3.2)

$$\varphi = \delta f(\acute{x}^1, \dots, \acute{x}^n, \alpha_0)\,,$$

$$\psi = \delta f(\acute{\acute{x}}^1, \dots, \acute{\acute{x}}^n, \beta_0).$$

Значит для вариаций будет определено произведение

$$\delta f(\acute{x}^1, \dots, \acute{x}^n, \alpha_0) \wedge \delta f(\acute{\acute{x}}^1, \dots, \acute{\acute{x}}^n, \beta_0) = - \delta f(\acute{\acute{x}}^1, \dots, \acute{\acute{x}}^n, \beta_0) \wedge \delta f(\acute{x}^1, \dots, \acute{x}^n, \alpha_0) \qquad (3.11)$$

Соответственно можно показать и выполнение ассоциативности. Учитывая (3.2), можно произвольный элемент E^p записать в виде

$$\varphi=\int\sum_{\alpha_1\ldots\alpha_p=1}^{r}\varphi(x_1,\ldots x_p,\alpha_1,\ldots\alpha_p)\,\delta f(x_1,\alpha_1)\wedge\ldots\wedge\delta f(x_p,\alpha_p)\,d^p x\,, \tag{3.12}$$

где $\qquad d^p x = dx_1\ldots dx_p,\ x_i=(x_i^1,\ldots,x_i^n)\in\mathcal{V}.$

Грассмановой алгеброй $\mathcal{Y}$ назовем прямую сумму (см. [I]) линейных топологических пространств E^p, т.е.

$$\mathcal{Y}= E^0+E^1+E^2+\ldots+E^p+\ldots\quad , \tag{3.13}$$

где E^0 - одномерное пространство с фиксированным базисным элементом.

Итак, произвольный элемент $\mathcal{Y}$ имеет вид

$$\varphi=\sum_{p=0}^{\infty}\int\varphi(\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_p)\,\tau(\tilde{x}_1)\wedge\ldots\wedge\tau(\tilde{x}_p)\,d^p\tilde{x} \tag{3.14}$$

или

$$\varphi=\sum_{p=0}^{\infty}\int\sum_{\alpha_1\ldots\alpha_p=1}^{r}\varphi_{\alpha_1\ldots\alpha_p}(x_1,\ldots x_p)\,\delta f^{\alpha_1}(x_1)\wedge\ldots\wedge\delta f^{\alpha_p}(x_p)\,d^p x\,. \tag{3.15}$$

4. <u>Обобщенные p -формы.</u> В этом пункте, используя построенную алгебру $\mathcal{Y}$, введем обобщенные дифференциальные формы на $C_0^\infty(\mathcal{V},G)$ Как и в предыдущем пункте, структура группы не играет пока существенной роли. Пусть $\Phi(\xi^1,\ldots,\xi^r,\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_p)$ — есть функционал от гладких функций $\xi^1(x),\ldots,\xi^r(x)$, являющийся обобщенной функцией по переменным $\tilde{x}_1,\ldots\tilde{x}_p$, где $\tilde{x}_i\in\mathcal{V}'$ (см. [2]). При $p=0$ мы получим обычный функционал. Функционал $\Phi(\xi^\alpha,\tilde{x}_1,\ldots\tilde{x}_p)$ называется дифференцируемым, если при произвольных вариациях независимых функций $\delta\xi^\alpha(y)$ линейная часть приращения имеет вид

$$\delta\Phi(\xi^\alpha,\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_p)=\int\sum_\beta\frac{\delta\Phi(\xi^\alpha,\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_p)}{\delta\xi^\beta(y)}\,\delta\xi^\beta(y)\,dy\,, \tag{4.1}$$

где $\dfrac{\delta\Phi(\xi^\alpha,\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_p)}{\delta\xi^\beta(y)}$ — вариационная производная от функционала $\Phi(\xi^\alpha,\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_p)$. В дальнейшем мы ограничимся лишь множеством дважды непрерывных функционалов, для которых

$$\frac{\delta^2\Phi(\xi^\alpha,\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_p)}{\delta\xi^\beta(y)\cdot\delta\xi^\sigma(z)}=\frac{\delta^2\Phi(\xi^\alpha,\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_p)}{\delta\xi^\sigma(z)\cdot\delta\xi^\beta(y)}\,. \tag{4.2}$$

Множество всех таких функционалов обозначим $\tilde{\mathcal{D}}^p$.

Обобщенной дифференциальной однородной p -формой назовем выражение

$$^p\omega_G=\int\Phi(\xi^\alpha,\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_p)\,\tau(\tilde{x}_1)\wedge\ldots\wedge\tau(\tilde{x}_p)\,d^p\tilde{x}= \tag{4.3}$$

$$=\int\sum_{\alpha_1\ldots\alpha_p=1}^{r}\Phi_{\alpha_1\ldots\alpha_p}(\xi^\beta,x_1,\ldots x_p)\,\delta f^{\alpha_1}(x_1)\wedge\ldots\wedge\delta f^{\alpha_p}(x_p)\,d^p x\,, \tag{4.4}$$

где $\Phi(\xi^\alpha, \tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_p) \in \tilde{\mathcal{D}}^p$, в записи (4.4) учтены (3.2) и (3.I). При фиксированном элементе группы $C_0^\infty(V, G)$, т.е. наборе функций $\xi^1(x), \ldots, \xi^r(x)$, мы, очевидно, получим элемент из $\mathcal{Y}$. Множество форм вида (4.3) или (4.4) обозначим $\mathcal{D}^p$. В частности, при $p = 1$ получим элемент $\mathcal{D}^1$, т.е. I-форму

$$\omega_G = \int \Phi(\xi^\alpha, \tilde{x}) \neg (\tilde{x}) \, d\tilde{x} = \tag{4.5}$$

$$= \int \sum_\beta \Phi_\beta(\xi^\alpha, x) \, \delta f^\beta(x) \, dx. \tag{4.6}$$

Оператор внешнего дифференцирования определим выражением

$$D^p \omega_G = \int \sum_{\alpha_1 \ldots \alpha_p = 1}^r \delta \Phi_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}(\xi^\beta, x_1, \ldots, x_p) \wedge \delta \xi^{\alpha_1}(x_1) \wedge \ldots \delta \xi^{\alpha_p}(x_p) \, d^p x. \tag{4.7}$$

Учитывая (4.I), получим

$$D^p \omega_G = \int \sum_{\alpha_1 \ldots \alpha_p = 1}^r \frac{\delta \Phi_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}(\xi^\beta, x_1, \ldots, x_p)}{\delta \xi^\sigma(y)} \cdot \delta \xi^\sigma(y) \wedge \delta \xi^{\alpha_1}(x_1) \wedge \ldots \wedge \delta \xi^{\alpha_p}(x_p) \, dx \, dy. \tag{4.8}$$

Как следует из определения, оператор D есть отображение

$$D : \mathcal{D}^p \to \mathcal{D}^{p+1},$$

причем в силу (4.2)

$$D D^p \omega_G = 0.$$

5. <u>Левоинвариантные формы на группе $C_0^\infty(V, G)$</u>. Элементы группы $C_0^\infty(V, G)$ будем здесь записывать просто ξ. Каждый такой элемент определяется набором функций

$$\xi = (\xi^1(x), \ldots, \xi^r(x)) \tag{5.I}$$

Групповая операция запишется с их помощью в виде (2.4). Функции $\xi^\alpha(x)$ в записи (5.I) элемента ξ будем называть координатными функциями.

Преобразование

$$\xi^\alpha(x) = \Phi^\alpha(\xi'^1, \ldots, \xi'^r, x), \tag{5.2}$$

где справа стоит такой же дважды непрерывно дифференцируемый функционал по независимым функциям $\xi'^\alpha(x)$, являющийся гладкой функцией по x, называется допустимым, если для него существует обратное преобразование

$$\xi'^\alpha(x) = F^\alpha(\xi^1, \ldots, \xi^r, x), \tag{5.3}$$

где справа стоит такой же дважды непрерывно дифференцируемый по функциям $\xi^\alpha(x)$ функционал, являющийся гладкой функцией от x, причем

$$\frac{\delta^2 \Phi^\alpha(\xi'^1, \ldots, \xi'^r, x)}{\delta \xi'^\beta(y) \cdot \delta \xi'^\sigma(z)} = \frac{\delta^2 \Phi^\alpha(\xi'^1, \ldots, \xi'^r, x)}{\delta \xi'^\sigma(z) \cdot \delta \xi'^\beta(y)}. \tag{5.4}$$

и выполняется такое же соотношение для функционала (5.3). Примером такого преобразования может служить преобразование Фурье (см. [10]). В новых координатных функциях $\xi'^1, \dots, \xi'^r$ групповая операция получит вид

$$\xi'^{\alpha}(x) = \widetilde{W}^{\alpha}(\xi'^1, \dots, \xi'^r, \eta'^1, \dots, \eta'^r, x), \tag{5.5}$$

где

$$\widetilde{W}^{\alpha}(\xi', \eta', x) = F^{\alpha}[W^1(\Phi(\xi', y), \Phi(\eta', y)), \dots, W^r(\Phi(\xi', y), \Phi(\eta', y)), x]. \tag{5.6}$$

В таком случае групповая операция выражается функционалом (5.5), дважды непрерывно дифференцируемым по независимым функциям $\xi'^1, \dots, \xi'^r, \eta'^1, \dots, \eta'^r$ и являющийся гладкой функцией по x. Из (5.6) также следует, что для функционала (5.5) верно (5.4).

В координатных функциях $\xi'^1, \dots, \xi'^r$ определим обобщенные дифференциальные 1 -формы. Для этого введем функционалы

$$S^{\alpha}_{\beta}(\eta', \xi', x, y) = \frac{\delta \widetilde{W}^{\alpha}(\eta', \xi', x)}{\delta \xi'^{\beta}(y)} \tag{5.7}$$

В силу ассоциативности групповой операции нетрудно получить, что

$$S^{\alpha}_{\beta}(\xi'\eta', \zeta', x, y) = \int S^{\alpha}_{\gamma}(\xi', \eta'\zeta', x, y') S^{\gamma}_{\beta}(\eta', \zeta', y', y)\, dy'. \tag{5.8}$$

Введем обозначения

$$u^{\alpha}_{\beta}(\xi', x, y) = S^{\alpha}_{\beta}(\xi'^{-1}, \xi', x, y). \tag{5.9}$$

С помощью (5.9) построим обобщенные 1-формы

$$e^{\alpha}(x) = \int u^{\alpha}_{\beta}(\xi', x, y)\, \delta \xi'^{\beta}(y)\, dy. \tag{5.10}$$

В силу (5.8) получим следующие соотношения для функционалов (5.9):

$$u^{\alpha}_{\beta}(\xi', x, y) = \int u^{\alpha}_{\gamma}(\eta', \xi', x, y') S^{\gamma}_{\beta}(\eta, \xi, y', y)\, dy'. \tag{5.11}$$

Пусть на группе $C^{\infty}_{0}(\sigma, G)$ задан левый сдвиг, т.е. пусть

$$\zeta' = \eta_0' \xi. \tag{5.12}$$

Тогда

$$e^{\alpha}(x) = \int u^{\alpha}_{\beta}(\zeta', x, y)\, \delta \zeta'^{\beta}(y)\, dy = \int u^{\alpha}_{\beta}(\eta_0 \xi', x, y)\, \delta \zeta^{\beta}(y)\, dy =$$

$$= \int u^{\alpha}_{\beta}(\eta_0 \xi', x, y) S^{\beta}_{\gamma}(\eta_0', \xi, y, y')\, \delta \xi^{\gamma}(y')\, dy'\, dy.$$

В силу (5.II) имеем

$$c^{\alpha}(x)=\int \mathcal{U}^{\alpha}_{\beta}(\zeta',x,y)\,\delta\zeta'^{\beta}(y)\,dy=\int \mathcal{U}^{\alpha}_{\beta}(\xi',x,y)\,\delta\xi'^{\beta}(y)\,dy, \quad (5.13)$$

т.е. формы $c^{\alpha}(x)$ левоинвариантны. Обобщая известное изложение ([6], стр. 395), учитывая наличие непрерывных индексов и применяя вариационные производные, нетрудно показать с помощью (5.II), что

$$\frac{\delta \mathcal{U}^{\alpha}_{\beta}(\xi',x,y)}{\delta\xi'^{\gamma}(z)}-\frac{\delta \mathcal{U}^{\alpha}_{\gamma}(\xi',x,z)}{\delta\xi'^{\beta}(y)}=\int \mathcal{K}^{\alpha}_{\sigma\rho}(x,x',x'')\,\mathcal{U}^{\sigma}_{\gamma}(\xi',x')\,\mathcal{U}^{\rho}_{\beta}(\xi',x'',y)\,dx'dx'', \quad (5.14)$$

где $\mathcal{K}^{\alpha}_{\sigma\rho}(x,x',x'')$ – обобщенные функции, для которых

$$\mathcal{K}^{\alpha}_{\sigma\rho}(x,x',x'')=-\mathcal{K}^{\alpha}_{\rho\sigma}(x,x'',x'). \quad (5.15)$$

Из (5.I4) уже несложно получить, что

$$Dc^{\alpha}(x)=\frac{1}{2}\int \mathcal{K}^{\alpha}_{\sigma\rho}(x,x',x'')\,c^{\sigma}(x')\wedge c^{\rho}(x'')\,dx'dx''. \quad (5.16)$$

В координатных функциях, в которых групповая операция имеет наиболее простой вид, т.е. вид (2.4), вариационные производные перейдут в обыкновенные, все выкладки упростятся, и мы получим (5.I6) в виде

$$Dc^{\alpha}(x)=\frac{1}{2}\mathcal{K}^{\alpha}_{\beta\gamma}\,c^{\beta}(x)\wedge c^{\gamma}(x), \quad (5.17)$$

где $\mathcal{K}^{\alpha}_{\beta\gamma}$ – структурные константы группы G.

Очевидно, что в этом случае

$$\mathcal{K}^{\alpha}_{\sigma\rho}(x,x',x'')=\mathcal{K}^{\alpha}_{\sigma\rho}\,\delta(x-x')\,\delta(x-x''). \quad (5.18)$$

6. <u>Физическая интерпретация форм $c^{\alpha}(x)$</u>. В силу построения форм $c^{\alpha}(x)$ для них определено внешнее произведение, причем

$$c^{\alpha}(x)\wedge c^{\beta}(y)=-c^{\beta}(y)\wedge c^{\alpha}(x), \quad (6.1)$$

$$c^{\alpha}(x)\wedge\left[c^{\beta}(y)\wedge c^{\gamma}(z)\right]=\left[c^{\alpha}(x)\wedge c^{\beta}(y)\right]\wedge c^{\gamma}(z). \quad (6.2)$$

Приняв формы $c^{\alpha}(x)$ за образующие грассмановой алгебры аналогично построению, проведенному в пункте 3, можно построить алгебру $\mathcal{Y}_{\ell}$ левоинвариантных форм на группе $C^{\infty}_{0}(V,G)$. Образующие $c^{\alpha}(x)$ алгебры $\mathcal{Y}_{\ell}$ мы отождествим с полем Фаддеева-Попова. Отождествив далее BRS-оператор s с внешним дифференцированием D, получим BRS-преобразование

$$sc^{\alpha}(x)=\frac{1}{2}\mathcal{K}^{\alpha}_{\beta\gamma}\,c^{\beta}(x)\wedge c^{\gamma}(x). \quad (6.3)$$

Уравнение (6.3) записано, как следует из предыдущего пункта, в координатных функциях, в которых групповая операция имеет вид (2.4). Чтобы получить остальные BRS -преобразования необходимо построить обобщенные дифференциальные формы на пространстве связностей данного главного расслоения. Это предполагается сделать в следующей публикации.

Литература

1. Березин Ф. А. Метод вторичного квантования. Москва, 1965.
2. Гельфанд И. М., Чередник И. В., Абстрактный гамильтонов формализм для классических пучков Янга-Бакстера. Успехи мат. наук, 1983, т. 38, вып. 3(231) с. 3-21.
3. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е., Пространства основных и обобщенных функций. Вып. 2. Москва, 1958.
4. Кобаяси Ш., Номидзу К., Основы дифференциальной геометрии. Т. I. Москва, 1981.
5. Лумисте Ю. Г., Связности при геометрической интерпретации полей Янга-Миллса и Фаддеева-Попова. Изв. вузов, Математика, 1983, № 1, с. 46-54.
6. Понтрягин Л. С., Непрерывные группы. Москва, 1954.
7. Славнов А. А., Фаддеев Л. Д., Введение в квантовую теорию калибровочных полей. Москва, 1978.
8. Bacchi C., Rouet A., Stora R., Renormalization of the Abelian Higgs-Kibble model. Comm. Math. Phys., 1975, v. 42, No. 2, p. 127-162.
9. Bonora L., Pasti P., Tonin M., Supermanifolds and BRS transformations. - J. Math. Phys., 1982, 23, No. 5, p. 839-845.
10. DeWitt B., Dynamical Theory of Groups and Fields. -In: Relativity, Groups and Topology /Ed. by C. and B. DeWitt, Gordon and Breach, N.Y., 1964, p. 585-820.
11. Hoyos I., Quiros M., Ramirez Mittelbrunn Z., and de Urries F. I. Superfiber bundle structure of gauge theories with Faddeev-Popov fields. - J. Math. Phys., 1982, 23, No. 8, p. 1504-1510.

12. L e i n a a s I. M., O l a u s s e n K., Ghosts and geometry.–Phys. Letters, 1982, v. 108, No. 3, p. 199–202.
13. N e ' e m a n Y., T h i e r r y - M i e g J., Geometrical gauge theory of ghost and Goldstone fields and of ghost symmetries.–Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1980, v. 77, No. 2, p. 720–723.
14. O j i m a I., Another BRS transformation.–Progr. Theor. Phys., 1980, v. 64, No. 2, p. 625–638.
15. Q u i r ó s M., U r r i e s J. d e, H o y o s J., M a z ó n M. L., R o d r i g u e s E. Geometrical structure of Faddeev-Popov fields and invariance properties of gauge theories.–J. Math. Phys., 1981, No. 22, p. 1767–1774.
16. R o g e r s A. A global theory of supermanifolds. – J. Math. Phys., 1980, p. 21.

Поступило
15 X 1983

GENERALIZED p-FORMS AND FADDEEV-POPOV FIELDS

V.Abramov

S u m m a r y

Geometrical interpretations of Faddeev-Popov fields and antifields (ghosts and antighosts), given in [5], [9], [11], [13] and [15], are unsatisfactory, because $c^{\alpha}(x)$ and $\bar{c}^{\alpha}(x)$ must be the generators of a Grassmann algebra with infinite many generators (see [7], [12]).

In the present paper the generalized differential p-forms are introduced. In a fixed point of $\mathbb{R}^{n+1}$ they form a Grassmann algebra with infinite many generators (in sense of [1]). The exterior derivative operator is defined by means of the abstract variation calculus (in sense of [2]).

Generalized left invariant 1-forms on the group of gauge transformations are identified with Faddeev-Popov fields. It is shown that the structural equations for these forms can be interpreted as BRS-transformation.

4

ГЕОМЕТРИЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И m-ТКАНИ

Х.Кильп

Кафедра алгебры и геометрии

§I. Введение

Задание квазилинейной системы $S^1_{m\,2[1]}$ дифференциальных уравнений первого порядка с частными производными при m неизвестных функциях двух независимых переменных с несовпадающими характеристиками определяет расслоение многообразия независимых и зависимых переменных M_{m+2} на m-мерные слои M_m с двумерной базой M_2. База M_2 является пространством независимых переменных системы. Общая геометрическая теория таких систем с помощью внешних форм Э.Картана и инвариантного теоретико-группового метода Г.Ф.Лаптева-А.М.Васильева была построена автором в работе [I]. В работе [2] автора для многообразия M_{m+2} с заданной на нем квазилинейной системой $S^1_{m\,2[1]}$ строилась аффинная связность, которая является связностью на главном расслоении с базой M_{m+2}, слоем которого над произвольной точкой $x \in M_{m+2}$ является многообразие линейных реперов в касательном пространстве $T_x(M_m)_x$ слоя $(M_m)_x$, проходящего через точку x. В общем случае существование такой связности предполагает возможность построения обратных объектов к некоторым данным геометрическим объектам. В настоящей работе выделен некоторый частный класс систем, для которого последнее возможно. Для этого привлекаются определенные данной системой $S^1_{m\,2[1]}$ m-ткани в многообразиях M_m. Рассмотрение локальное.

§2. Структурные уравнения

I. Пусть дано $(m+2)$-мерное дифференцируемое многообразие M_{m+2} с локальными координатами x^λ, u^α и на нем квазилинейная система

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^1} = \sum_\beta h_{\alpha\beta}(x^\lambda, u^\gamma)\frac{\partial u^\beta}{\partial x^2} + f^\alpha(x^\lambda, u^\beta)$$

$(\lambda, \mu, \nu, \ldots = 1, 2;\ \alpha, \beta, \gamma, \ldots = 3, 4, \ldots, m+2)$. Квазилинейность данной системы сохраняют преобразования переменных

$'x^\lambda = 'x^\lambda(x^\mu)$, $'u^\alpha = 'u^\alpha(x^\lambda, u^\beta)$, которые определяют локальное расслоение многообразия M_{m+2} на m-мерные слои M_m с двумерной базой M_2, являющейся пространством независимых переменных. Пусть ω^λ – главные формы многообразия M_2, а $\omega^\lambda, \omega^\alpha$ – многообразия M_{m+2}. Если характеристическое уравнение $\det \| h_{\alpha\beta} - \lambda E \| = 0$ системы имеет m различных корней λ^α, то структурные уравнения многообразия M_{m+2} с заданной на нем системой $S^1_{m2[1]}$ имеют вид (см. [I])

$$\omega^\alpha \wedge (\omega^2 + \lambda^\alpha \omega^1) = 0,$$

$$d\omega^\lambda = \omega^\lambda_{\breve{\mu}} \wedge \omega^{\breve{\mu}}, \qquad (I)$$

$$d\omega^\alpha = \omega^\alpha_\alpha \wedge \omega^\alpha + \omega^\alpha_0 \wedge \omega^{2\alpha} + a^\alpha_{\gamma 1}\, \omega^\gamma \wedge \omega^1 + a^\alpha_{\breve{\beta}\gamma}\, \omega^{\breve{\beta}} \wedge \omega^\gamma, \qquad (2)$$

$$d\lambda^\alpha + \lambda^\alpha(\omega^1_1 - \omega^2_2) - (\lambda^\alpha)^2 \omega^1_2 + \omega^2_1 = \lambda^\alpha_{\breve{\mu}}\, \omega^{\breve{\mu}} + \lambda^\alpha_{\breve{\beta}}\, \omega^{\breve{\beta}}. \qquad (3)$$

Здесь обозначено $\omega^{2\alpha} \equiv \omega^2 + \lambda^\alpha \omega^1$, $\omega^\alpha_2 \equiv \omega^\alpha_0$, тогда $\omega^\alpha_1 = \lambda^\alpha \omega^\alpha_0$ (индекс " c " будет отвечать форме $\omega^{2\alpha}$). Дальнейшее продолжение дает:

$$d\omega^\alpha_\alpha = \omega^\alpha_{\alpha 0} \wedge \omega^{2\alpha} + \omega^\alpha_{\alpha\alpha} \wedge \omega^\alpha + \ldots,$$

$$d\omega^\alpha_0 = \omega^\alpha_0 \wedge (\omega^\alpha_\alpha + \omega^2_2 + \lambda^\alpha \omega^1_2) + \lambda^\alpha_2\, \omega^\alpha_c \wedge \omega^1 - a^\alpha_{\gamma 1}\, \omega^\gamma_0 \wedge \omega^1 + \qquad (4)$$

$$+ a^\alpha_{\gamma 1}\, \omega^1_2 \wedge \omega^\gamma + a^\alpha_{[\gamma\breve{\beta}]}\, \omega^{\breve{\beta}}_0 \wedge \omega^\gamma = \omega^\alpha_{0c} \wedge \omega^{2\alpha} + \omega^\alpha_{c\alpha} \wedge \omega^\alpha + \ldots,$$

где невыписанные члены линейно выражаются через $\omega^\alpha \wedge \omega^{\breve{\beta}}$, $\omega^\alpha \wedge \omega^\mu$, $\omega^\mu \wedge \omega^{\breve{\nu}}$;

$$d a^\alpha_{\gamma 1} + a^\alpha_{\gamma 1}(\omega^\gamma_\gamma - \omega^\alpha_\alpha + \omega^1_1 - \lambda^\alpha \omega^1_2) - \lambda^\alpha_\gamma\, \omega^\alpha_0 +$$

$$+ (\lambda^{\breve{\beta}} - \lambda^\alpha)\, a^\alpha_{[\gamma\breve{\beta}]}\, \omega^{\breve{\beta}}_0 = a^\alpha_{\gamma 1 \breve{\mu}}\, \omega^{\breve{\mu}} + a^\alpha_{\gamma 1 \beta}\, \omega^{\beta}, \qquad (5)$$

$$d a^\alpha_{\gamma\breve{\beta}} + a^\alpha_{\gamma\breve{\beta}}(\omega^\gamma_\gamma + \omega^{\breve{\beta}}_{\breve{\beta}} - \omega^\alpha_\alpha) = a^\alpha_{\gamma\breve{\beta}\mu}\, \omega^\mu + a^\alpha_{\gamma\breve{\beta}\delta}\, \omega^\delta, \qquad (6)$$

$$d\lambda^\alpha_{\breve{\beta}} + \lambda^\alpha_{\breve{\beta}}(\omega^1_1 - \omega^\alpha_\alpha - 2\lambda^\alpha \omega^1_2 + \omega^{\breve{\beta}}_{\breve{\beta}}) = \lambda^\alpha_{\breve{\beta}\mu}\, \omega^{\breve{\mu}} + \lambda^\alpha_{\breve{\beta}\gamma}\, \omega^\gamma. \qquad (7)$$

$$d a^\alpha_{\gamma\breve{\beta}1} + a^\alpha_{\gamma\breve{\beta}1}(\omega^\gamma_\gamma + \omega^{\breve{\beta}}_{\breve{\beta}} - \omega^\alpha_\alpha + \omega^1_1) + a^\alpha_{\gamma\breve{\beta}2}\, \omega^2_1 + a^\alpha_{\gamma\breve{\beta}\delta}\, \lambda^\delta \omega^\delta_0 -$$

$$- a^\alpha_{\gamma\breve{\beta}}(\lambda^\gamma \omega^\gamma_{\gamma 0} + \lambda^{\breve{\beta}} \omega^{\breve{\beta}}_{\breve{\beta}0} - \lambda^\alpha \omega^\alpha_{\alpha 0}) \simeq 0, \qquad (8)$$

$$d a^\alpha_{\gamma\breve{\beta}2} + a^\alpha_{\gamma\breve{\beta}2}(\omega^\gamma_\gamma + \omega^{\breve{\beta}}_{\breve{\beta}} - \omega^\alpha_\alpha + \omega^2_2) + a^\alpha_{\gamma\breve{\beta}1}\, \omega^1_2 + a^\alpha_{\gamma\breve{\beta}\delta}\, \omega^\delta_0 -$$

$$- a^\alpha_{\gamma\breve{\beta}}(\omega^\gamma_{\gamma c} + \omega^{\breve{\beta}}_{\breve{\beta}c} - \omega^\alpha_{\alpha 0}) \simeq 0, \qquad (9)$$

$$d a^\alpha_{\gamma\breve{\beta}\delta} + a^\alpha_{\gamma\breve{\beta}\delta}(\omega^\gamma_\gamma + \omega^{\breve{\beta}}_{\breve{\beta}} + \omega^\delta_\delta - \omega^\alpha_\alpha) - a^\alpha_{\gamma\breve{\beta}}(\delta^\gamma_\delta - \delta^\beta_\delta - \delta^\alpha_\delta)\, \omega^\delta_{\delta 0} \simeq 0, \qquad (10)$$

где "$\simeq 0$" равносильно "$= 0 \ (\mathrm{mod}\ \omega^\lambda, \omega^\alpha)$" и δ^α_β – символы Кронекера. Величины $a^\alpha_{\breve{\beta}\gamma}$ и $\lambda^\alpha_{\breve{\beta}}$ и только они являются относительными инвариантами.

2. В работе [2] доказано, что если структурные уравнения многообразия M_{m+2} с заданной на нем квазилинейной

системой $S^1_{m2[1]}$ с различными характеристиками приведены к виду (I)-(4), то в главном расслоении линейных реперов касательных пространств $T_x(M_m)_x$ слоев $(M_m)_x$, $x \in M_{m+2}$, над базой M_{m+2} . определяется аффинная связность, соответствующая формам

$$\tilde{\omega}^\alpha = \omega^\alpha + \Gamma^\alpha_{\underset{\nu}{\mu}}\,\omega^\mu_\nu,$$
$$\tilde{\omega}^\alpha_\alpha = \omega^\alpha_\alpha + \Gamma^\alpha_{\alpha\underset{\nu}{\mu}}\,\omega^\mu_\nu + \Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}\,\omega^\alpha, \tag{II}$$

где

$$d\Gamma^\alpha_1 + \Gamma^\alpha_{\underset{\nu}{\mu}}\omega^\mu_{\nu 1} - \Gamma^\alpha_1\omega^\alpha_\alpha + \lambda^\alpha\omega^\alpha_0 = \Gamma^\alpha_{1\underset{\nu}{\mu}}\omega^\mu_\nu + \Gamma^\alpha_{1\underset{\nu}{\beta}}\omega^\beta_\nu,$$
$$d\Gamma^\alpha_2 + \Gamma^\alpha_{\underset{\nu}{\mu}}\omega^\mu_{\nu 2} - \Gamma^\alpha_2\omega^\alpha_\alpha + \omega^\alpha_0 = \Gamma^\alpha_{2\underset{\nu}{\mu}}\omega^\mu_\nu + \Gamma^\alpha_{2\underset{\nu}{\beta}}\omega^\beta_\nu; \tag{I2}$$

$$d\Gamma^\alpha_{\alpha 1} + \Gamma^\alpha_{\alpha\underset{\nu}{\mu}}\omega^\mu_{\nu 1} + \Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}\lambda^\alpha\omega^\alpha_0 + \lambda^\alpha\omega^\alpha_{\alpha 0} = \Gamma^\alpha_{\alpha 1\underset{\nu}{\mu}}\omega^\mu_\nu + \Gamma^\alpha_{\alpha 1\underset{\nu}{\beta}}\omega^\beta_\nu,$$
$$d\Gamma^\alpha_{\alpha 2} + \Gamma^\alpha_{\alpha\underset{\nu}{\mu}}\omega^\mu_{\nu 2} + \Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}\omega^\alpha_0 + \omega^\alpha_{\alpha 0} = \Gamma^\alpha_{\alpha 2\underset{\nu}{\mu}}\omega^\mu_\nu + \Gamma^\alpha_{\alpha 2\underset{\nu}{\beta}}\omega^\beta_\nu; \tag{I3}$$

$$d\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha} + \Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}\omega^\alpha_\alpha + \omega^\alpha_{\alpha\alpha} = \Gamma^\alpha_{\alpha\alpha\underset{\nu}{\mu}}\omega^\mu_\nu + \Gamma^\alpha_{\alpha\alpha\underset{\nu}{\beta}}\omega^\beta_\nu. \tag{I4}$$

Пересмотрев структурные уравнения задачи (I)-(9), можно, при сравнении уравнений (5), (I2) и (8), (9), (I3) и (I0), (I4) сделать вывод, что объекты $\Gamma^\alpha_{\underset{\nu}{\mu}}$, $\Gamma^\alpha_{\alpha\underset{\nu}{\mu}}$, $\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}$ в общем случае возможно построить лишь, выразив формы ω^α_0 из (5), далее формы $\omega^\alpha_{\alpha 0}$ из (8), (9) и формы $\omega^\alpha_{\alpha\alpha}$ из (I0) соответственно. В случае существования обратных объектов $\tilde{\lambda}^\beta_\alpha$ и $\tilde{a}^{[\beta\gamma]}_{\alpha\nu}$ к объектам λ^α_β и $a^\alpha_{\underset{\nu}{\beta\gamma}}$ это возможно, и в работе [2] объекты $\Gamma^\lambda_{\underset{\nu}{\mu}}$, $\Gamma^\alpha_{\alpha\underset{\nu}{\mu}}$, $\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}$ построены при предположении существования указанных обратных объектов. В настоящей работе выделим конкретный класс квазилинейных систем $S^1_{m2[1]}$, для которого эти обратные объекты существуют, привлекая для этого ткани, определенные данной системой $S^1_{m2[1]}$.

3. На двумерных интегральных многообразиях системы уравнениями $\omega^{2\alpha} \equiv \omega^2 + \lambda^\alpha\omega^1 = c$ определяется m-ткань характеристик. С другой стороны, в локальном расслоении многообразия M_{m+2} с двумерной базой M_2 на m-мерном слоевом многообразии M_m уравнениями $\omega^\alpha = 0$ определяется m-ткань. Обратим внимание на эти m-ткани, обозначим их через $\mathfrak{T}_m$. Структурные уравнения такой m-ткани в M_m получаем из (2) при $\omega^\lambda = c$, т.е.

$$d\theta^\alpha = \theta^\alpha_\alpha \wedge \theta^\alpha + A^\alpha_{\underset{\nu}{\beta\gamma}}\,\theta^\beta \wedge \theta^\gamma, \tag{I5}$$

где $\theta^\alpha = \omega^\alpha|_{\omega^\lambda = c}$, $A^\alpha_{\underset{\nu}{\beta\gamma}} = a^\alpha_{\underset{\nu}{\beta\gamma}}|_{\omega^\lambda = c}$.

Некоторую классификацию таких m-тканей на m-мерном многообразии M_m разработал Г.С.Стоев. В его работе [3] вводятся понятие разложимой m-ткани и понятие степени неголономности m-ткани.

m-ткань называется разложимой, если систему (I5) ее структурных уравнений можно сгруппировать в две (или более) независимые подсистемы

$$d\theta^{\alpha_1} = \theta^{\alpha_1}_{\alpha_1} \wedge \theta^{\alpha_1} + A^{\alpha_1}_{\beta_1 \gamma_1} \theta^{\beta_1} \wedge \theta^{\gamma_1}, \quad \alpha_1, \beta_1, \gamma_1 = 3, 4, \ldots, p,$$

$$d\theta^{\alpha_2} = \theta^{\alpha_2}_{\alpha_2} \wedge \theta^{\alpha_2} + A^{\alpha_2}_{\beta_2 \gamma_2} \theta^{\beta_2} \wedge \theta^{\gamma_2}, \quad \alpha_2, \beta_2, \gamma_2 = p+1, \ldots, m+2.$$

В противном случае m-ткань со структурными уравнениями (I5) называется неразложимой; тогда либо все отличные от нуля коэффициенты $A^{\alpha}_{\beta\gamma}$ имеют общий индекс, либо их можно упорядочить так, что каждые два соседних члена имеют хотя бы один общий индекс.

Число отличных от нуля коэффициентов $A^{\alpha}_{\beta\gamma}$ в структурных уравнениях (I5) m-ткани называется степенью неголономности m-ткани. В работе [3] Г.С.Стоев доказал, что для неразложимой m-ткани минимальная степень неголономности при $m = 2k$ равна k и при $m = 2k+1$ равна k. Далее, в той же работе рассматривается подкласс неразложимых m-тканей на m-мерном многообразии с минимальной степенью неголономности, для которой все отличные от нуля коэффициенты $A^{\alpha}_{\beta\gamma}$ содержатся в одном уравнении, например в последнем.

§3. m-ткани и квазилинейные системы $S^1_{m2[1]}$

Определение I. Назовем квазилинейную систему $S^1_{m2[1]}$ вертикально разложимой, если соответствующие m-ткани $\mathcal{T}_m$ разложимы, и вертикально неразложимой, если соответствующие m-ткани $\mathcal{T}_m$ неразложимы.

Определение 2. Назовем объект $a^{\alpha}_{\beta\gamma}$ вертикальным объектом неголономности квазилинейной системы $S^1_{m2[1]}$.

Определение 3. Число отличных от нуля коэффициентов $a^{\alpha}_{\beta\gamma}$ назовем вертикальной степенью неголономности квазилинейной системы $S^1_{m2[1]}$.

Поскольку для неразложимых m-тканей $\mathcal{T}_m$ коэффициенты $A^{\alpha}_{\beta\gamma}$, определенные при (I5), нельзя разбить на группы так, чтобы $A^{\alpha_i}_{\beta_j \gamma_j} = 0$ при $\alpha_i = 1, \ldots, p$; $\beta_j, \gamma_j = p+1, \ldots, p+q$, где $p+q \leq m$, то либо все отличные от нуля коэффициенты $A^{\alpha}_{\beta\gamma}$ имеют общий индекс, либо из них можно образовать последовательность, каждые два соседних члена которой имеют хотя бы один общий индекс. Для неразложимой m-ткани минимальная степень неголономности при $m=2k$ и при $m=2k+1$ равна k.

Если $A^{\alpha_0}_{\beta_0\gamma_0}\neq 0$ при фиксированных $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$, то $a^{\alpha_0}_{\beta_0\gamma_0}\neq 0$. Если $A^{\alpha_0}_{\beta_0\gamma_0}=0$ при фиксированных $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$, то может быть, что $a^{\alpha_0}_{\beta_0\gamma_0}=0$, но может быть, что $a^{\alpha_0}_{\beta_0\gamma_0}\neq 0$ (последнюю возможность можно уничтожить требованием минимальности степени неголономности квазилинейной системы $S^1_{m2[1]}$). Следовательно, верно

<u>Предложение</u>. Для вертикально неразложимых квазилинейных систем $S^1_{m2[1]}$ минимальная степень неголономности и при $m=2k$, и при $m=2k+1$ равна k, и все отличные от нуля коэффициенты $a^{\alpha}_{\beta\gamma}$ либо имеют общий индекс, либо их можно упорядочить так, чтобы каждые два соседних имели хотя бы один общий индекс.

Если $a^{\alpha_0}_{\beta_0\gamma_0}=0$ при фиксированных $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$, то $A^{\alpha_0}_{\beta_0\gamma_0}=0$. Если $a^{\alpha_0}_{\beta_0\gamma_0}\neq 0$ при фиксированных $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$, то может быть, что $A^{\alpha_0}_{\beta_0\gamma_0}\neq 0$, но может быть, что $A^{\alpha_0}_{\beta_0\gamma_0}=0$ (последнюю возможность можно уничтожить, например, требованием существования для данных $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ такого δ_0, чтобы $a^{\alpha_0}_{\beta_0\gamma_0\delta_0}\neq 0$).

2. Пусть $m=2k+1$. Далее будем рассматривать некоторый класс вертикально неразложимых квазилинейных систем $S^1_{m2[1]}$ с минимальной степенью неголономности, а именно, пусть среди $a^{\alpha}_{\beta\gamma}$ лишь $a^{m+2}_{s,s+1}\neq 0$ $(s=3,5,\dots,m)$, т.е. структурные уравнения (2) имеют вид

$$d\omega^{\hat\alpha}=\omega^{\hat\alpha}_{\hat\alpha}\wedge\omega^{\hat\alpha}+\omega^{\hat\alpha}_{0}\wedge(\omega^2+\lambda^{\hat\alpha}\omega^1)+a^{\hat\alpha}_{\gamma 1}\omega^{\gamma}\wedge\omega^1,\quad \hat\alpha=3,4,\dots,m+1, \tag{16}$$

$$d\omega^{m+2}=\omega^{m+2}_{m+2}\wedge\omega^{m+2}+\omega^{m+2}_{0}\wedge(\omega^2+\lambda^{m+2}\omega^1)+a^{m+2}_{\gamma 1}\omega^{\gamma}\wedge\omega^1+$$
$$+a^{m+2}_{34}\omega^3\wedge\omega^4+a^{m+2}_{56}\omega^5\wedge\omega^6+\dots+a^{m+2}_{m,m+1}\omega^m\wedge\omega^{m+1}, \tag{17}$$

причем при каждом s $a^{m+2}_{s,s+1,\delta}\neq 0$ лишь при одном значении $\delta=\delta_s$.

§4. Объект связности

I. Как было отмечено в §2, п. 2, для построения объекта связности Γ^{α}_{μ}, $\Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu}$, $\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}$ следует выразить формы ω^{α}_{0} из уравнений (5), формы $\omega^{\alpha}_{\alpha 0}$ из уравнений (8) и формы $\omega^{\alpha}_{\alpha\alpha}$ из уравнений (10).

В рассматриваемом случае уравнения (5) имеют вид:

$$da^{m+2}_{s1} + a^{m+2}_{s1}(\omega^s_s - \omega^{m+2}_{m+2} + \omega^1_1 - \lambda^{m+2}\omega^1_2) - \lambda^{m+2}_s \omega^{m+2}_0 +$$
$$+ (\lambda^{s+1} - \lambda^{m+2})\, a^{m+2}_{s,s+1}\, \omega^{s+1}_0 \simeq 0,$$
$$da^{m+2}_{s+1,1} + a^{m+2}_{s+1,1}(\omega^{s+1}_{s+1} - \omega^{m+2}_{m+2} + \omega^1_1 - \lambda^{m+2}\omega^1_2) - \lambda^{m+2}_{s+1}\omega^{m+2}_0 -$$
$$- (\lambda^s - \lambda^{m+2})\, a^{m+2}_{s,s+1}\, \omega^s_0 \simeq 0,$$
$$da^{m+2}_{m+2,1} + a^{m+2}_{m+2,1}(\omega^1_1 - \lambda^{m+2}\omega^1_2) - \lambda^{m+2}_{m+2}\,\omega^{m+2}_0 \simeq 0,$$
$$da^{\hat r}_{r1} + a^{\hat r}_{r1}(\omega^r_r - \omega^{\hat r}_{\hat r} + \omega^1_1 - \lambda^{\hat r}\omega^1_2) - \lambda^{\hat r}_r\, \omega^{\hat r}_0 \simeq 0.$$

Отсюда видно, что форма ω^{m+2}_0 входит в выражение $da^{m+2}_{m+2,1}$, и ее выразить оттуда можно при предположении $\lambda^{m+2}_{m+2} \neq 0$. Тогда

$$\omega^{m+2}_0 = \frac{1}{\lambda^{m+2}_{m+2}}\left(da^{m+2}_{m+2,1} + a^{m+2}_{m+2,1}(\omega^1_1 - \lambda^{m+2}\omega^1_2) + \ldots\right). \qquad (18)$$

Находим выражение для $d\left(\dfrac{a^{m+2}_{m+2,1}}{\lambda^{m+2}_{m+2}}\right)$:

$$d\left(\frac{a^{m+2}_{m+2,1}}{\lambda^{m+2}_{m+2}}\right) + \frac{a^{m+2}_{m+2,1}}{\lambda^{m+2}_{m+2}}(\omega^2_2 + \lambda^{m+2}\omega^1_2 - \omega^{m+2}_{m+2}) - \omega^{m+2}_0 \simeq 0 \qquad (19)$$

Тогда, так как рассматривается система с различными характеристиками и предполагается $a^{m+2}_{s,s+1} \neq 0$ $(s = 3, 5, \ldots, m)$, то

$$d\left(\frac{a^{m+2}_{s,1}}{a^{m+2}_{s,s+1}(\lambda^{s+1} - \lambda^{m+2})} - \frac{\lambda^{m+2}_s}{a^{m+2}_{s,s+1}(\lambda^{s+1} - \lambda^{m+2})} \cdot \frac{a^{m+2}_{m+2,1}}{\lambda^{m+2}_{m+2}}\right) + \qquad (20)$$
$$+ \left(\frac{a^{m+2}_{s,1}}{a^{m+2}_{s,s+1}(\lambda^{s+1} - \lambda^{m+2})} - \frac{\lambda^{m+2}_s}{a^{m+2}_{s,s+1}(\lambda^{s+1} - \lambda^{m+2})} \cdot \frac{a^{m+2}_{m+2,1}}{\lambda^{m+2}_{m+2}}\right)(\omega^2_2 - \omega^{s+1}_{s+1}) +$$
$$+ \lambda^{s+1}\left(\frac{a^{m+2}_{s,1}}{a^{m+2}_{s,s+1}(\lambda^{s+1} - \lambda^{m+2})} - \frac{\lambda^{m+2}_s a^{m+2}_{m+2,1}}{a^{m+2}_{s,s+1}(\lambda^{s+1} - \lambda^{m+2})\lambda^{m+2}_{m+2}}\right)\omega^1_2 + \omega^{s+1}_0 \simeq 0,$$

$$d\left(\frac{a^{m+2}_{s+1,1}}{a^{m+2}_{s,s+1}(\lambda^s - \lambda^{m+2})} - \frac{\lambda^{m+2}_{s+1}}{a^{m+2}_{s,s+1}(\lambda^s - \lambda^{m+2})} \cdot \frac{a^{m+2}_{m+2,1}}{\lambda^{m+2}_{m+2}}\right) + \qquad (21)$$
$$+ \left(\frac{a^{m+2}_{s+1,1}}{a^{m+2}_{s,s+1}(\lambda^s - \lambda^{m+2})} - \frac{\lambda^{m+2}_{s+1}}{a^{m+2}_{s,s+1}(\lambda^s - \lambda^{m+2})} \cdot \frac{a^{m+2}_{m+2,1}}{\lambda^{m+2}_{m+2}}\right)(\omega^2_2 - \omega^s_s) +$$
$$+ \lambda^s\left(\frac{a^{m+2}_{s+1,1}}{a^{m+2}_{s,s+1}(\lambda^s - \lambda^{m+2})} - \frac{\lambda^{m+2}_{s+1} a^{m+2}_{m+2,1}}{a^{m+2}_{s,s+1}(\lambda^s - \lambda^{m+2})\lambda^{m+2}_{m+2}}\right)\omega^1_2 - \omega^s_0 \simeq 0,$$

Из формул (19), (20) и (21) видно, что величины

$$-\frac{a^{m+2}_{m+2,1}}{\lambda^{m+2}_{m+2}} = \Gamma^{m+2}_2, \qquad (22)$$

$$-\left(\frac{a^{m+2}_{s+1,1}}{a^{m+2}_{s,s+1}(\lambda^s - \lambda^{m+2})} - \frac{\lambda^{m+2}_{s+1}}{a^{m+2}_{s,s+1}(\lambda^s - \lambda^{m+2})} \cdot \frac{a^{m+2}_{m+2,1}}{\lambda^{m+2}_{m+2}}\right) = \Gamma^s_2, \qquad (23)$$

$$\frac{a^{m+2}_{s,1}}{a^{m+2}_{s,s+1}(\lambda^{s+1} - \lambda^{m+2})} - \frac{\lambda^{m+2}_s}{a^{m+2}_{s,s+1}(\lambda^{s+1} - \lambda^{m+2})} \cdot \frac{a^{m+2}_{m+2,1}}{\lambda^{m+2}_{m+2}} = \Gamma^{s+1}_2, \qquad (24)$$

где $s = 3, 5, \ldots, m$, удовлетворяют уравнениям (I2). Тогда величины

$$\lambda^{m+2}\Gamma^{m+2}_{2} = \Gamma^{m+2}_{1}, \quad \lambda^{m+2}\Gamma^{s}_{2} = \Gamma^{s}_{1}, \quad \lambda^{m+2}\Gamma^{s+1}_{2} = \Gamma^{s+1}_{2}, \tag{25}$$

$s = 3, 5, \ldots, m$, удовлетворяют уравнениям (I2). При этом

$$d(a^{s}_{\gamma 1} + \lambda^{s}_{\gamma}\Gamma^{s}_{2}) + (a^{s}_{\gamma 1} + \lambda^{s}_{\gamma}\Gamma^{s}_{2})(\omega^{\gamma}_{\gamma} - \omega^{s}_{s} + \omega^{1}_{1} - \lambda^{s}\omega^{1}_{2}) \simeq 0,$$

$$d(a^{s+1}_{\gamma 1} + \lambda^{s+1}_{\gamma}\Gamma^{s+1}_{2}) + (a^{s+1}_{\gamma 1} + \lambda^{s+1}_{\gamma}\Gamma^{s+1}_{2})(\omega^{\gamma}_{\gamma} - \omega^{s+1}_{s+1} + \omega^{1}_{1} - \lambda^{s+1}\omega^{1}_{2}) \simeq 0,$$

т.е. величины

$$a^{s}_{\gamma 1} + \lambda^{s}_{\gamma}\Gamma^{s}_{2}, \quad a^{s+1}_{\gamma 1} + \lambda^{s+1}_{\gamma}\Gamma^{s+1}_{2}, \quad s = 3, 5, \ldots, m,$$

становятся относительными инвариантами.

2. Величины $\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}$ строются из уравнений (I0) для $a^{\alpha}_{\gamma\beta\delta}$. У нас отличными от нуля из них являются $a^{m+2}_{s,s+1,\delta_s}$ $(s = 3, 5, \ldots, m)$ при каком-то одном значении δ_s. Но по общей теории (см. [2] стр. I52) нужно брать $\delta = \alpha$, т.е. $\delta_s = m+2$. Тогда

$$d a^{m+2}_{s,s+1,m+2} + a^{m+2}_{s,s+1,m+2}(\omega^{s}_{s} + \omega^{s+1}_{s+1}) + a^{m+2}_{s,s+1}\,\omega^{m+2}_{m+2,m+2} \simeq 0,$$

откуда

$$d\left(\frac{a^{m+2}_{s,s+1,m+2}}{a^{m+2}_{s,s+1}}\right) + \frac{a^{m+2}_{s,s+1,m+2}}{a^{m+2}_{s,s+1}}\,\omega^{m+2}_{m+2} + \omega^{m+2}_{m+2,m+2} \simeq 0.$$

Из остальных уравнений (I0) при этом получим, что $\omega^{s}_{ss} \simeq 0$, $\omega^{s+1}_{s+1,s+1} \simeq 0$. Отсюда

$$\frac{a^{m+2}_{s,s+1,m+2}}{a^{m+2}_{s,s+1}} = \Gamma^{m+2}_{m+2,m+2}, \quad \Gamma^{s}_{ss} = 0, \quad \Gamma^{s+1}_{s+1,s+1} = 0. \tag{26}$$

Осталось построить величины $\Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu}$. Для этого, во-первых, продифференцировав равенство (I9), получим

$$\omega^{m+2}_{m+2,0} = \Gamma^{m+2}_{2}\,\omega^{m+2}_{m+2,m+2},$$

откуда следует, что

$$\Gamma^{m+2}_{m+2,2} = \Gamma^{m+2}_{2}\cdot\Gamma^{m+2}_{m+2,m+2} = -\frac{a^{m+2}_{m+2,1}}{\lambda^{m+2}_{m+2}}\cdot\frac{a^{m+2}_{s,s+1,m+2}}{a^{m+2}_{s,s+1}}, \tag{27}$$

$$\Gamma^{m+2}_{m+2,1} = \lambda^{m+2}\Gamma^{m+2}_{m+2,2} = -\lambda^{m+2}\frac{a^{m+2}_{m+2,1}}{\lambda^{m+2}_{m+2}}\cdot\frac{a^{m+2}_{s,s+1,m+2}}{a^{m+2}_{s,s+1}}, \tag{28}$$

т.е.

$$d\Gamma^{m+2}_{m+2,2} + \Gamma^{m+2}_{m+2,1}\,\omega^{1}_{2} + \Gamma^{m+2}_{m+2,2}\,\omega^{2}_{2} + \Gamma^{m+2}_{m+2,m+2}\,\omega^{m+2}_{0} + \omega^{m+2}_{m+2,0} \simeq 0,$$

$$d\Gamma^{m+2}_{m+2,1} + \Gamma^{m+2}_{m+2,1}\,\omega^{1}_{1} + \Gamma^{m+2}_{m+2,2}\,\omega^{2}_{1} + \Gamma^{m+2}_{m+2,m+2}\,\omega^{m+2}_{0} + \lambda^{m+2}\,\omega^{m+2}_{m+2,0} \simeq 0.$$

Осталось построить величины $\Gamma^{\hat{\alpha}}_{\alpha\mu}$, $\hat{\alpha} = 3, 4, \dots, m+1$. Для этого нужно выразить из уравнений (8), (9) формы $\omega^{\hat{\alpha}}_{\hat{\alpha} 0}$, $\hat{\alpha} = 3, 4, \dots, m+1$. Непосредственный подсчет дает, что

$$\Gamma^{s}_{s2} = \frac{1}{\lambda^{s} - \lambda^{s+1}} \left(\frac{\lambda^{s+1} a^{m+2}_{s,s+1,2}}{a^{m+2}_{s,s+1}} - \frac{a^{m+2}_{s,s+1,1}}{a^{m+2}_{s,s+1}} + (\lambda^{m+2} - \lambda^{s+1}) \Gamma^{m+2}_{m+2,2} \right), \tag{29}$$

$$\Gamma^{s+1}_{s+1,2} = \frac{1}{\lambda^{s+1} - \lambda^{s}} \left(\frac{\lambda^{s} a^{m+2}_{s,s+1,2}}{a^{m+2}_{s,s+1}} - \frac{a^{m+2}_{s,s+1,1}}{a^{m+2}_{s,s+1}} + (\lambda^{m+2} - \lambda^{s}) \Gamma^{m+2}_{m+2,2} \right), \tag{30}$$

$$\Gamma^{s}_{s1} = \lambda^{s} \Gamma^{s}_{s2}, \quad \Gamma^{s+1}_{s+1,1} = \lambda^{s+1} \Gamma^{s+1}_{s+1,2}, \quad s = 3, 4, \dots, m, \tag{3I}$$

т.к. тогда

$$d\Gamma^{s}_{s2} + \Gamma^{s}_{s2}\omega^{2}_{2} + \lambda^{s}\Gamma^{s}_{s2}\omega^{1}_{2} + \omega^{s}_{s0} \simeq 0,$$
$$d(\lambda^{s}\Gamma^{s}_{s2}) + \lambda^{s}\Gamma^{s}_{s2}\omega^{1}_{1} + \Gamma^{s}_{s2}\omega^{2}_{1} + \lambda^{s}\omega^{s}_{s0} \simeq 0,$$
$$d\Gamma^{s+1}_{s+1,2} + \Gamma^{s+1}_{s+1,2}\omega^{2}_{2} + \lambda^{s+1}\Gamma^{s+1}_{s+1,2}\omega^{1}_{2} + \omega^{s+1}_{s+1,0} \simeq 0,$$
$$d(\lambda^{s+1}\Gamma^{s+1}_{s+1,2}) + \lambda^{s+1}\Gamma^{s+1}_{s+1,2}\omega^{1}_{1} + \Gamma^{s+1}_{s+1,2}\omega^{2}_{1} + \lambda^{s+1}\omega^{s+1}_{s+1,0} \simeq 0$$

(вспомним, что у нас $\Gamma^{s}_{ss} = 0$, $\Gamma^{s+1}_{s+1,s+1} = 0$).

Тем самым, доказана

Теорема. Если для многообразия M_{m+2} с заданной на нем квазилинейной системой $S^{1}_{m2[1]}$ I) m-ткани T_m на слоевых многообразиях M_m неразложимы с минимальной степенью неголономности такого типа, что в структурных уравнениях (I)-(I0) среди $a^{\alpha}_{\beta\gamma}$, $a^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$ лишь $a^{m+2}_{s,s+1} \neq 0$, $a^{m+2}_{s,s+1,m+2} \neq 0$ ($s = 3, 5, \dots, m$) и 2) $\lambda^{m+2}_{m+2} \neq 0$, то существует аффинная связность на главном расслоении с базой M_{m+2} с многообразием линейных реперов в касательном пространстве соответствующего многообразия M_m в качестве слоя с объектом связности $\Gamma^{\alpha}_{\beta\mu}$, $\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}$, $\Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu}$, определенном формулами (22)-(26); (29)-(3I).

Литература.

I. Кильп Х. О., Квазилинейные системы дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка при m неизвестных функциях двух независимых переменных и с несовпадающими характеристиками (геометическая теория). Уч. зап. Тартуск. ун-та, I97I, 28I, 63-85.

2. Кильп Х. О., О геометрии квазилинейной системы в частных производных первого порядка с двумя независимыми переменными и с различными характеристиками. Уч.

зап. Тартуск. ун-та, 1978, 464, 146-155.
3. С т о е в Г. С., Неразложимые с минимальной степенью неголономности N-ткани кривых на N-мерном многообразии. Вестник МГУ. Сер. матем., механ., 1971, № 5, 16-24.

Поступило
24 X 1983

GEOMETRY QUASI-LINEAR DIFFERENTIAL SYSTEMS AND m-WEBS

H.Kilp

S u m m a r y

The systems of the first-order quasi-linear partial differential equations with two independent variables, m unknown functions and with different characteristics are investigated. The geometric theory of such systems by the method of E.Cartan was founded by the author in her paper [1] and the affine connection related with the system was studied by the author in her paper [2]. In this paper the problem of existence of such affine connection is investgated using m-webs associated with given system. The existence of the special affine connection is shown.

ГЕОМЕТРИЯ И КЛАССИФИКАЦИЯ ДВУМЕРНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ НА МНОГООБРАЗИИ ИЗОТРОПНЫХ ПРЯМЫХ В ${}^1R_4$

Р.Колде
Таллинский педагогический институт

Линейчатой геометрией в многомерных евклидовых пространствах R_n $(n>3)$ начали, после классических работ 1930-40-ых годов П.К.Рашевского, В.В.Вагнера и Б.А.Розенфельда (см. обзор [2]), вновь заниматься Ю.Г.Лумисте [10,11,14] и Р.Зуланке [20], привлекая новые методы исследования. Результаты, полученные в этой области, могут быть без труда перенесены на случай многообразий неизотропных прямых в псевдоевклидовых пространствах ${}^eR_n$.

Сравнительно мало исследованы многообразия изотропных прямых в пространствах ${}^eR_n$. Двумерные поверхности с изотропными образующими в ${}^eR_n$ изучили А.Ф.Орещенко [15] и Л.Вагнер [21]. Конгруэнции изотропных прямых в пространстве Минковского ${}^1R_4$ рассматривал автор [4,5]. Они являются трехмерными гладкими подмногообразиями в многообразии J_5 всех изотропных прямых в ${}^1R_4$.

В настоящей статье исследуются гладкие распределения Δ двумерных касательных элементов $\Delta_x \subset T_x(J_5)$, $x \in J_5$.

Используется естественная структура однородного расслоения $J_5(C_2, \Gamma_3, G\Gamma_3, \pi)$ в многообразии J_5, установленная в [4]. Базой этого расслоения является конформная плоскость C_2, проекция $\pi : J_5 \longrightarrow C_2$ отображает прямую $x \in J_5$ в ее направление, стандартным слоем является галилеево пространство Γ_3, а структурной группой группа Ли $G\Gamma_3$ его движений. Во всей статье ограничиваемся невырожденными распределениями Δ, т.е. такими, что $d\pi_x(\Delta_x)$ имеет размерность 2 для любой $x \in J_5$.

Геометрия невырожденного распределения Δ на J_5 раскрывается в §1 с помощью понятия изотропной линейчатой 2-полосы вдоль каждой $x \in J_5$. Это понятие является интерпретацией элемента Δ_x в геометрии пространства ${}^1R_4$. Само распределение Δ интерпретируется в §2 как поле изотропных линейчатых 2-полос на J_5. (Заметим, что такое поле является геометрическим описанием неголономной псевдоконгруэнции $N\Omega(1,4;2)$ изотропных прямых в смысле [I].) Классификация распределений Δ, данная в [7], переносится при этом на рассматриваемый случай. Получается 6 классов: афокальные или полуфокальные (§2), фокальные гиперболические, эллиптические, параболические или конические (§3) распределения Δ на J_5. Даны их пфаффовы системы в полуканонических полуизотропных реперах.

В заключительном §4 устанавливается, какие из вышенайденных классов полей изотропных линейчатых 2-полос (т.е. распределений Δ на J_5) содержат голономные. Тем самым получается классификация псевдоконгруэнций изотропных прямых в ${}^1R_4$ как интегральных подмногообразий голономных распределений Δ : афокальные, полуфокальные, гиперболические (с ортогональными торсами) и конические.

§I. Основные понятия и обозначения

I.I. Репер $\{M,\vec{e}_0,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ четырехмерного вещественного псевдоевклидова пространства ${}^1R_4$ индекса 1 называется полуизотропным, если его векторы $\vec{e}_0$ и $\vec{e}_3$ находятся на изотропном гиперконусе пространства и нормированы условием $\vec{e}_0\cdot\vec{e}_3=1$, а остальные векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ образуют ортонормированный базис на ортогональной к $[M,\vec{e}_0,\vec{e}_3]$ плоскости $[M,\vec{e}_1,\vec{e}_2]$. Компоненты метрического тензора пространства ${}^1R_4$ относительно такого полуизотропного репера составляют матрицу

$$G=(g_{ab})=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}; \qquad (I.I)$$

$a,b,\ldots=0,1,2,3.$ В формулах инфинитезимального перемещения полуизотропного репера:

$$\begin{aligned} d\vec{M}&=\omega^0\vec{e}_0+\omega^\alpha\vec{e}_\alpha,\\ d\vec{e}_0&=\omega_0^0\vec{e}_0+\omega_0^\alpha\vec{e}_\alpha,\\ d\vec{e}_\beta&=\omega_\beta^0\vec{e}_0+\omega_\beta^\alpha\vec{e}_\alpha, \end{aligned} \qquad (I.2)$$

где $\alpha,\beta,\ldots=1,2,3,$ выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned} &\omega_0^3=\omega_3^0=\omega_1^1=\omega_2^2=0,\\ &\omega_3^3=-\omega_0^0,\quad \omega_2^1=-\omega_1^2,\\ &\omega_i^3=-\omega_0^i,\quad \omega_3^i=-\omega_i^0, \end{aligned} \qquad (I.3)$$

где $i, j, \ldots = 1, 2$. Структурные уравнения группы G^1R_4 псевдоевклидовых движений в $^1R_4$ относительно полуизотропного репера можно представить в виде:

$$d\omega_0^i = \omega_0^j \wedge (\omega_j^i - \delta_j^i \omega_0^0), \tag{I.4а}$$

$$d\omega^i = -\omega_0^i \wedge \omega^0 + \omega^j \wedge \omega_j^i - \omega^3 \wedge \omega_i^0, \tag{I.4б}$$

$$d\omega^3 = \omega_0^1 \wedge \omega^1 + \omega_0^2 \wedge \omega^2 - \omega^3 \wedge \omega_0^0, \tag{I.4в}$$

$$d\omega^0 = \omega^j \wedge \omega_j^0 + \omega^0 \wedge \omega_0^0, \tag{I.4г}$$

$$d\omega_j^i = \omega_0^i \wedge \omega_i^0 - \omega_0^i \wedge \omega_j^0 + \omega_j^k \wedge \omega_k^i, \tag{I.4д}$$

$$d\omega_j^0 = -\omega_j^0 \wedge (\omega_j^i - \delta_j^i \omega_0^0), \tag{I.4е}$$

$$d\omega_0^0 = \omega_0^i \wedge \omega_i^0. \tag{I.4з}$$

I.2. Многообразие изотропных прямых J_5 пространства $^1R_4$ является однородным пространством G^1R_4/H, где H - стационарная подгруппа изотропной прямой. Выбирая в качестве этой изотропной прямой прямую $x \equiv [M, \vec{e}_0] \in J_5$ получим, что инвариантными формами подгруппы H являются I-формы ω_j^0, ω_j^i и ω_0^0, а значения I-форм ω_0^i, ω^i, ω^3 в точке x образуют кобазис в касательном пространстве $T_x(J_5)$. Аналогично, база C_2 расслоения $J_5(C_2)$ является однородным пространством G^1R_4/H_0, где H_0 - стационарная подгруппа изотропного направления, и значения I-форм ω_0^i в точке $\pi(x) \in C_2$ образуют кобазис в $T_{\pi(x)}(C_2)$. Часть структурных уравнений группы G^1R_4, а именно уравнения (I.4а,б,в,д,е,з) являются одновременно структурными уравнениями однородного расслоения расслоения $J_5(C_2)$(ср. [I2]). При условии $\omega_0^i = 0$, т.е. при зафиксированной точке $\pi(x) \in C_2$, отсюда получаются структурные уравнения галилеева пространства Γ_3 - типового слоя расслоения $J_5(C_2)$.

I.3. Вводим в касательном пространстве $T_x(J_5)$ базис $\{\partial_i^0, \partial_\alpha\}_x$, дуальный к кобазису $\{\omega_0^i, \omega^\beta\}_x$, т.е. полагаем, что

$$\begin{aligned} \omega_0^j(\partial_i^0) &= \delta_i^j, & \omega_0^j(\partial_\alpha) &= 0, \\ \omega^\beta(\partial_i^0) &= 0, & \omega^\beta(\partial_\alpha) &= \delta_\alpha^\beta. \end{aligned} \tag{I.5}$$

В этих формулах мы опускали индекс x, подчеркивая этим, что такой выбор взаимного базиса возможен в каждой точке из некоторой открытой окрестности $\mathcal{U}$ точки x_0 в J_5. В $\mathcal{U}$ возникают векторные поля $\partial_i^0, \partial_\alpha$ представители которых в

7

$x \in \mathcal{U}$ образуют наши базисы. Проекция π расслоения $J_5(C_2)$ определяет линейное отображение $d\pi_x$ касательного пространства $T_x(J_5)$ на пространство $T_{\pi(x)}(C_2)$ при помощи следующих формул:

$$d\pi_x(\partial^o_{ix}) = \partial^o_{i\pi(x)}, \quad d\pi_x(\partial_{\alpha x}) = 0. \tag{I.6}$$

Векторы $\partial^o_{i\pi(x)}$ образуют в точке $\pi(x) \in C_2$ базис, взаимный к кобазису $\{\omega^i_o\}_{\pi(x)}$. В силу (I.6) $\partial_{\alpha x}$ являются вертикальными в расслоении $J_5(C_2)$.

Аналогично тому, как это делалось в [7] в случае многообразия Ω прямых аффинного пространства A_4, можно с помощью соответствующего канонического расслоения сопоставить каждому вектору

$$\partial_x = \ell^\alpha \partial_{\alpha x} + \ell^i_o \partial^o_{ix} \tag{I.7}$$

из $T_x(J_5)$ двумерную плоскость $[M, \vec{e}_o, \partial\vec{M}]$ в ${}^1R_4$, проходящую через изотропную прямую $x \equiv [M, \vec{e}_o]$. Здесь

$$\partial\vec{M} = \ell^\alpha \vec{e}_\alpha \quad (\mathrm{mod}\ \vec{e}_o). \tag{I.8}$$

Эта плоскость называется касательной плоскостью изотропной линейчатой 1-полосы $\Pi(\partial)$ в точке M и обозначается через $\Pi_M(\partial)$. Изотропная линейчатая 1-полоса $\Pi(\partial)$ – это соответствие, сопоставляющее каждой точке M' прямой $x \equiv [M, \vec{e}_o]$ с $\vec{M}' = \vec{M} + \mu^o \vec{e}_o$, плоскость $[M', \vec{e}_o, \partial\vec{M}'] \equiv \Pi_{M'}(\partial)$, где

$$\partial\vec{M}' = (\ell^i + \mu^o \ell^i_o)\vec{e}_i + \ell^3 \vec{e}_3 \quad (\mathrm{mod}\ \vec{e}_o) \tag{I.9}$$

(ср. [7]). Плоскость $\Pi_\infty(\partial) \equiv [M, \vec{e}_o, \partial\vec{e}_o]$, где

$$\partial\vec{e}_o = \ell^i_o \vec{e}_i \quad (\mathrm{mod}\ \vec{e}_o) \tag{I.10}$$

называется предельной плоскостью 1-полосы $\Pi(\partial)$. Заметим, что предельная плоскость 1-полосы $\Pi(\partial)$ определяется фактически проекцией вектора ∂_x в $T_{\pi(x)}(C_2)$. Пространство $T(\partial) \equiv [M, \vec{e}_o, \partial\vec{M}, \partial\vec{e}_o]$ является, в силу (I.9), объединением всех касательных плоскостей 1-полосы $\Pi(\partial)$ и называется пространством 1-полосы $\Pi(\partial)$.

Изотропная линейчатая 1-полоса называется развертывающейся, если $\dim T(\partial) = 2$. В частном случае, когда при этом еще $\partial\vec{e}_o = \vec{O}\ (\mathrm{mod}\ \vec{e}_o)$, 1-полоса $\Pi(\partial)$ называется цилиндрической; а в случае, когда $\partial\vec{e}_o \neq \vec{O}\ (\mathrm{mod}\ \vec{e}_o)$ – торсовой (ср. [7]).

Изотропная линейчатая 1-полоса называется псевдоевклидовой, если все ее касательные плоскости псевдоевклидовы, и полуевклидовой, если они полуевклидовы.

Из этих определений вытекают следующие свойства изотропных линейчатых 1-полос:

1) предельная плоскость любой цилиндрической 1-полосы полуевклидова;

2) все торсовые 1-полосы имеют инвариантную точку - фокус, в которой касательная плоскость одномерна;

3) все нецилиндрические полуевклидовы 1-полосы имеют инвариантную точку - точку сжатия (или псевдофокус, по другой терминологии), где касательная плоскость ортогональна предельной плоскости; в случае торсовой 1-полосы псевдофокус является фокусом.

I.4. Пусть на J_5 задано двумерное касательное распределение Δ, локально определяемое с помощью векторных полей

$$\delta_i = \Lambda^\alpha_i \partial_\alpha + \Lambda^j_{0i} \partial^0_j. \qquad (I.11)$$

Если ϑ^i - такие независимые I-формы на J_5, что их значения ϑ^i_x в каждой точке x образуют взаимный к $\{\delta_j\}_x$ базис, то имеем $\vartheta^i(\delta_j) = \delta^i_j$, а уравнения (I.11) можно записать в дуальном виде:

$$\omega^\alpha = \Lambda^\alpha_i \vartheta^i, \quad \omega^j_0 = \Lambda^j_{0i} \vartheta^i. \qquad (I.12)$$

На распределении Δ 1-формы ϑ^i удовлетворяют структурным уравнениям

$$d\vartheta^i = \vartheta^j \wedge \vartheta^i_j. \qquad (I.13)$$

Компоненты фундаментального объекта $\{\Lambda^\alpha_i, \Lambda^j_{0i}\}$ распределения удовлетворяют при этом условиям инвариантности распределения (см. [8], [9]):

$$\left.\begin{aligned} \nabla\Lambda^\alpha_i - \delta^\alpha_j \Lambda^j_{0i}\, \omega^0 &= 0 \\ \nabla\Lambda^j_{0i} - \Lambda^j_{0i}\, \omega^0 &= 0 \end{aligned}\right\} (\mathrm{mod}\ \omega^\alpha, \omega^i_0), \qquad (I.14)$$

где

$$\nabla\Lambda^\alpha_i \equiv d\Lambda^\alpha_i + \Lambda^\beta_i \omega^\alpha_\beta - \Lambda^\alpha_j \vartheta^j_i,$$

$$\nabla\Lambda^j_{0i} \equiv d\Lambda^j_{0i} + \Lambda^k_{0i} \omega^j_k - \Lambda^j_\ell \vartheta^\ell_i.$$

Изотропной линейчатой 2-полосой вдоль изотропной прямой $x \equiv [M, \vec{e}_0]$ называется соответствие $\Pi(\Delta_x)$, определяемое элементом Δ_x распределения Δ, между точками M' изотропной прямой $[M, \vec{e}_0]$ и подпространствами

$$\Pi_{M'}(\Delta_x) \equiv [M', \vec{e}_0, \delta_1\vec{M}', \delta_2\vec{M}'] \qquad (I.15)$$

пространства ${}^1R_4$. Очевидно, подпространство $\Pi_{M'}(\Delta_x)$ не зависит от выбора базисных δ_{1x} и δ_{2x} в Δ_x; оно называется касательным пространством в точке M', подпространство

$$\Pi_\infty(\Delta_x) \equiv [M', \vec{e}_0, \delta_1\vec{e}_0, \delta_2\vec{e}_0] \qquad (I.16)$$

– предельным пространством и пространство

$$T(\Delta_x) \equiv [M, \vec{e}_0, \delta_1\vec{M}, \delta_2\vec{M}, \delta_1\vec{e}_0, \delta_2\vec{e}_0] \qquad (I.17)$$

– пространством изотропной линейчатой 2-полосы $\Pi(\Delta_x)$. Цилиндричность изотропной линейчатой 2-полосы определяется точно так же, как это делалось в аффинном случае (см. [7]); в силе остается и теорема I.2 из [7]:

(изотропная) линейчатая 2-полоса является невырожденной, одноцилиндрической или вполне цилиндрической тогда и только тогда, когда, соответственно, $d = \dim \Pi_\infty(\Delta_x) = \operatorname{rang}\|\Lambda^j_{0i}\|$ равно 2, 1 или 0.

Изотропная линейчатая 2-полоса называется псевдоевклидовой, если ее пространство $T(\Delta_x)$ является псевдоевклидовым пространством ${}^1R_q$, где $q = 3$ или 4; она называется полуевклидовой, если $T(\Delta_x) = {}^{(1)}R_3$.

§2. Геометрия изотропных линейчатых 2-полос в ${}^1R_4$

2.I. Реферируем сначала основные формулы и теоремы из аффинной геометрии линейчатых 2-полос (см. [7]), перефразируя их для рассматриваемого здесь случая изотропных линейчатых 2-полос.

Пусть поле изотропных линейчатых 2-полос задано с помощью ассоциированной к нему системы Пфаффа (I.I2):

$$\omega^\alpha = \Lambda^\alpha_i \vartheta^i, \quad \omega^j_0 = \Lambda^j_{0i} \vartheta^i. \qquad (I.I2)$$

Здесь геометрический объект $\{\Lambda^\alpha_i, \Lambda^j_{0i}\}$ состоит из двух подобъектов, первый из которых $\{\Lambda^\alpha_i\}$ определяет касательное пространство $\Pi_M(\Delta_x)$ 2-полосы в точке M, а второе $\{\Lambda^j_{0i}\}$ – ее предельное пространство $\Pi_\infty(\Delta_x)$. При помощи этих объектов определяются ковекторы ξ, ζ и η, связанные с линейчатой 2-полосой:

I) касательный в точке M ковектор ξ с координатами

$$\xi_\alpha \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{ij}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\Lambda^\beta_i\Lambda^\gamma_j, \qquad (2.I)$$

2) ковектор вращения ζ с координатами

$$\zeta_\alpha \equiv \varepsilon^{ij} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \Lambda^\beta_i \Lambda^\gamma_{oj} , \tag{2.2}$$

3) предельный ковектор η с координатами

$$\eta_\alpha \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{ij} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \Lambda^\beta_{oi} \Lambda^\gamma_{oj}. \tag{2.3}$$

В случае изотропной линейчатой 2-полосы в этих формулах, справедливых в аффинной теории [7], имеем в силу (I.I2) $\Lambda^\beta_{oi} \equiv \delta^\beta_k \Lambda^k_{oi}$; поэтому

$$\eta_k = 0 , \quad \eta_3 = \det\|\Lambda^j_{oi}\|. \tag{2.3'}$$

Через эти ковекторы выражается относительный инвариант

$$D \equiv \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \xi_\alpha \zeta_\beta \eta_\gamma , \tag{2.4}$$

отличие от нуля которого характеризует афокальные линейчатые 2-полосы. Остальные типы 2-полос характеризуются теоремой 2.I в [7]: изотропная линейчатая 2-полоса $\Pi(\Delta_x)$ является полуфокальной, если $r = \operatorname{rang}\{\xi, \zeta, \eta\} = 2$; фокальной, если $r = 1$ и ∞ -фокальной, если $r = 0$.

Приводим также некоторые следствия из этой теоремы:

I) в простом конечном фокусе $M = F$ имеет место $\xi = 0$, а в двукратном конечном фокусе $\xi = \zeta = 0$;

2) если изотропная линейчатая 2-полоса имеет простой бесконечно удаленный фокус, то $\eta = 0$, а если этот фокус двукратный, то $\eta = \zeta = 0$.

При помощи этих ковекторов определяются в трехмерном пространстве $[M, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3]$ векторы с координатами

$$u^\alpha \equiv \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \zeta_\beta \eta_\gamma , \quad v^\alpha \equiv \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \eta_\beta \xi_\gamma , \quad w^\alpha \equiv \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \xi_\beta \zeta_\gamma . \tag{2.5}$$

Вектор $\vec{u} = u^\alpha \vec{e}_\alpha$ инвариантно связан с прямой x 2-полосы, а векторы $\vec{v} = v^\alpha \vec{e}_\alpha$ и $\vec{w} = w^\alpha \vec{e}_\alpha$ зависят от точки прямой. В случае афокальной изотропной линейчатой 2-полосы $\Pi(\Delta_x)$ эти векторы независимы, в случае полуфокальной $\Pi(\Delta_x)$ они коллинеарны и определяют касательную плоскость развертывающейся 1-полосы, в случае фокальной или ∞ -фокальной $\Pi(\Delta_x)$ эти векторы все нулевые (см. теор. 2.2 в [7]).

2.2. Рассмотрим поле невырожденных изотропных линейчатых 2-полос $\Pi(\Delta_x)$, т.е. такое двумерное распределение $\Delta = [\delta_1, \delta_2]$ на J_5, каждый элемент $\Delta_x \equiv [\delta_{1x}, \delta_{2x}]$ которого имеет двумерную проективную индикатрису $\Delta_{\mathcal{K}(x)} = \mathcal{K}(\Delta_x)$ на C_2. В этом случае I-формы ω^i_o линейно независимы на распределении и их можно использовать в качестве базисных

I-форм ϑ^i. Тогда $\vartheta^j_i = \omega^j_i - \delta^j_i \omega^\circ_\circ$ (см. (I.4a)), а ассоциированную с полем 2-полос систему Пфаффа (I.I2) можно написать в виде

$$\omega^\alpha = A^{0\alpha}_{\ \ i}\, \omega^i_0 \,, \tag{2.6}$$

т.е. в (I.I2) мы имеем теперь $\Lambda^\alpha_i = A^{0\alpha}_{\ \ i}$, $\Lambda^{0j}_{\ \ i} = \delta^j_i$. Базисными векторными полями этого распределения являются

$$\delta_i = \partial^0_i + A^{0\alpha}_{\ \ i}\,\partial_\alpha . \tag{2.7}$$

Компоненты фундаментального объекта $A^{0\alpha}_{\ \ i}$ удовлетворяют условиям инвариантности распределения (ср. (I.I4)):

$$\left.\begin{aligned} &dA^{0i}_{\ \ j} + A^{0k}_{\ \ j}\,\omega^i_k - A^{0i}_{\ \ k}\,\omega^k_j - \\ &\qquad - A^{03}_{\ \ j}\,\omega^0_i + A^{0i}_{\ \ j}\,\omega^0_0 - \delta^i_j\,\omega^0 = 0 \\ &dA^{03}_{\ \ j} - A^{03}_{\ \ k}\,\omega^k_j = 0. \end{aligned}\right\}(\mathrm{mod}\ \omega^\alpha, \omega^j_0).$$

Отсюда следует, что в данном случае объект первого порядка $A^{0\alpha}_{\ \ i}$ содержит инвариантный ковектор $A^{03}_{\ \ j}$ на двумерной плоскости $[M, \vec{e}_1, \vec{e}_2]$ и относительный аффинор $A^{0i}_{\ \ j}$, зависящий от точки прямой и от выбора вектора $\vec{e}_3$ на изотропном конусе пространства ${}^1R_4$. Координаты ковекторов ξ, ζ, η и векторов $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ выражаются теперь формулами

$$\eta_\alpha = \delta^3_\alpha\,; \quad \xi_\alpha = \tfrac{1}{2}\,\varepsilon^{ij}\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\,A^{0\beta}_{\ \ i}\,A^{0\gamma}_{\ \ j}\,; \tag{2.9}$$
$$\zeta_1 = -A^{03}_{\ \ 1}, \quad \zeta_2 = -A^{03}_{\ \ 2}, \quad \zeta_3 = A^{0i}_{\ \ i}$$

и соответственно

$$\begin{aligned} &u^1 = \zeta_2 = -A^{03}_{\ \ 2}, \quad u^2 = -\zeta_1 = A^{03}_{\ \ 1}, \quad u^3 = 0; \\ &v^1 = -\xi_2, \qquad v^2 = \xi_1, \qquad v^3 = 0; \\ &w^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\,\xi_\beta\,\zeta_\gamma . \end{aligned} \tag{2.10}$$

В силу (2.8) координаты векторов $\vec{u}$, $\vec{v}$ и $\vec{w}$ удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} &du^i + u^j\,\omega^i_j = 0. \\ &dv^i + v^j\,\omega^i_j = -v^i\omega^0_0 + u^i\omega^0 \\ &dw^\alpha + w^\beta\omega^\alpha_\beta = -w^\alpha\omega^0_0 + v^\alpha\omega^0 \end{aligned}\right\}(\mathrm{mod}\ \omega^\alpha, \omega^i_0). \tag{2.11}$$

Здесь мы имеем в силу $\eta_\alpha = \delta^3_\alpha$, что $D = w^3$. Из инвариантности вектора $\vec{u} = u^i \vec{e}_i$ следует существование абсолютного инварианта

$$S = \sqrt{(A^{03}_1)^2 + (A^{03}_2)^2} = |\vec{u}| \qquad (2.12)$$

изотропной линейчатой 2-полосы. В [4] такой инвариант назывался псевдоевклидовой шириной изотропной линейчатой 2-полосы; она характеризует наибольшее значение коэффициента A^3 при изотропном векторе $\vec{e}_3$ в выражении касательного вектора $\partial \vec{M} = A^1\vec{e}_1 + A^2\vec{e}_2 + A^3\vec{e}_3$ в случае, когда проективный образ вектора ∂_x, т.е. вектор $\partial_{\pi(x)} = \ell^1_0 \partial^0_1 + \ell^2_0 \partial^0_2$, является единичным вектором. Из теоремы 2.3 в [7] следует, что при $S \neq 0$ изотропная линейчатая 2-полоса либо афокальная, либо полуфокальная.

Выясним теперь геометрический смысл направления вектора $\vec{u}$. С этой целью рассмотрим изотропную линейчатую 1-полосу $\Pi(\partial_u)$, содержащуюся в $\Pi(\Delta_x)$ и определяемую вектором

$$\partial_{ux} = u^i \delta_{ix} = -A^{03}_2 \delta_{1x} + A^{03}_1 \delta_{2x}. \qquad (2.13)$$

Подставляя сюда формулы (2.7), находим, что $\partial_{ux} = u^i \partial^0_{ix} - v^i \partial_{ix}$, т.е. вертикальная часть вектора ∂_{ux}, определяющего 1-полосу $\Pi(\partial_u)$, не содержит компоненту вдоль вектора ∂_{3x} и находится, следовательно, в метрической плоскости пространства Γ_3. В геометрии псевдоевклидова пространства ${}^1R_4$ отсюда следуют соотношения

$$\partial_u \vec{M} = -\vec{v}, \quad \partial_u \vec{e}_0 = \vec{u} \pmod{\vec{e}_0}. \qquad (2.14)$$

Значит, изотропная линейчатая 1-полоса $\Pi(\partial_u)$ является единственной полуевклидовой 1-полосой в $\Pi(\Delta_x)$, инвариантный вектор $\vec{u}$ определяет ее предельную плоскость $\Pi_\infty(\partial_u)$, а вектор $\vec{v}$ находится на касательной плоскости $\Pi_M(\partial_u)$ в точке M.

<u>Теорема 2.1</u>. Единственная полуевклидова 1-полоса $\Pi(\partial_u)$, содержащаяся в афокальной изотропной 2-полосе $\Pi(\Delta_x)$, определяет на ее прямой инвариантную точку - псевдофокус P, в которой касательная плоскость $\Pi_P(\partial_u)$ ортогональна предельной плоскости $\Pi_\infty(\partial_u)$. В случае полуфокальной 2-полосы единственная полуевклидова 1-полоса является торсовой и псевдофокус совпадает с фокусом F.

Доказательство. Из дифференциальных уравнений (2.II) следует, что величина

$$\rho^{\circ} = \frac{-\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{u}^{2}} = -\frac{u^{1}v^{1}+u^{2}v^{2}}{(u^{1})^{2}+(u^{2})^{2}} \qquad (2.I5)$$

удовлетворяет условию

$$d\rho^{\circ} = -\rho^{\circ}\omega_{0}^{0} - \omega^{0} \; (\mathrm{mod}\; \omega^{2}, \omega_{0}^{0}).$$

Для радиуса-вектора $\vec{P} = \vec{M} + \rho^{\circ}\vec{e}_{0}$ получим, следовательно, $d\vec{P} = \vec{0} \; (\mathrm{mod}\; \omega^{2}, \omega_{0}^{0})$ и точка P определена, таким образом, инвариантно. Если M поместить в точку P, то $\rho^{\circ} = 0$ и выполняется условие псевдофокуса $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ (ср. [10]). В силу (2.9), (2.10) и (2.15) абсцисса ρ° псевдофокуса выражается через компоненты фундаментального объекта формулой

$$\rho^{\circ} = \frac{A^{03}_{2}(A^{01}_{1}A^{03}_{2} - A^{01}_{2}A^{03}_{1}) - A^{03}_{1}(A^{02}_{1}A^{03}_{2} - A^{02}_{2}A^{03}_{1})}{(A^{03}_{1})^{2} + (A^{03}_{2})^{2}}. \qquad (2.I6)$$

Вторая часть утверждения теоремы следует непосредственно из теоремы 2.2 в [7], по которой в полуфокальном случае векторы $\vec{u}$ и $\vec{v}$ коллинеарны. Следовательно, 1-полоса $\Pi(\partial_{u})$ имеет постоянную касательную плоскость прямой и в точке P эта плоскость, в силу $\vec{v} = \vec{0}$, одномерна, т.е. точка P является фокусом F. Теорема доказана.

2.3. Рассмотрим поле афокальных изотропных линейчатых 2-полос $\Pi(\Delta_{x})$ Тогда справедлива следующая теорема (ср. с теоремой 2.4 в [7]).

Теорема 2.2. Для поля афокальных изотропных линейчатых 2-полос $\Pi(\Delta)$ существует поле канонического полуизотропного репера $\{P, \vec{e}_{0}, \vec{e}_{1}, \vec{e}_{2}, \vec{e}_{3}\}$, где $\vec{e}_{1} = \frac{1}{S}\vec{u}$, $\vec{e}_{2} = -\frac{1}{S}\vec{v}$ и $\vec{e}_{3} = \frac{1}{S^{2}}\vec{w}$, относительно которого ассоциированная с полем этих 2-полос система Пфаффа имеет вид:

$$\omega^{1} = 0, \quad \omega^{2} = \omega^{1}_{0}, \quad \omega^{3} = S\omega^{2}_{0}. \qquad (2.I7)$$

Доказательство. Из (2.10) и (2.12) следует, что вектор $\vec{u}$ является в ${}^{1}R_{4}$ пространственноподобным и имеет длину S. Из доказательства предыдущей теоремы следует, что в псевдофокусе P имеет место $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$. В силу этого, а также (2.9) и (2.10), можно $\vec{e}_{1}$ и $\vec{e}_{2}$ выбрать так, что

$$u^{1} = -S, \quad u^{2} = 0, \quad v^{1} = 0, \quad v^{2} = -S$$

и отсюда

$$A^{03}_{\ 1} = 0,\ A^{03}_{\ 2} = S,\ A^{01}_{\ 1} = 0,\ A^{02}_{\ 1} = 1. \qquad (2.18)$$

Для координат вектора $\vec{w}$ имеем теперь следующие выражения: $w^1 = A^{01}_{\ 2} S$, $w^2 = -A^{02}_{\ 2} S$, $w^3 = -S^2$, следовательно вектор $\vec{w}$ также пространственноподобный. Напомним здесь, что векторы $\vec{u}$, $\vec{v}$ и $\vec{w}$ определены лишь с точностью до слагаемых вида $\lambda \vec{e}_0$. В силу этого можно сделать такой изотропный поворот вокруг вектора $\vec{e}_0$ (см. напр. [4]), что

$$\vec{e}_1{}' = \frac{A^{01}_{\ 2}}{S} \vec{e}_0 + \vec{e}_1,$$

$$\vec{e}_2{}' = -\frac{A^{02}_{\ 2}}{S} \vec{e}_0 + \vec{e}_2,$$

$$\vec{e}_3{}' = -\frac{(A^{01}_{\ 2})^2 + (A^{02}_{\ 2})^2}{2S^2} \vec{e}_0 - \frac{A^{01}_{\ 2}}{S} \vec{e}_1 + \frac{A^{02}_{\ 2}}{S} \vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

После этого поворота полуизотропность репера сохраняется, а вектор $\vec{w}$ выражается уже формулой $\vec{w} = -S^2 \vec{e}_3{}'$. Следовательно, в новом репере дополнительно к (2.18) выполняются еще условия

$$A^{01}_{\ 2} = A^{02}_{\ 2} = 0. \qquad (2.19)$$

В силу (2.8) все вторичные I-формы выражаются через главные и построенный нами репер является каноническим. Ассоциированная с полем 2-полос система (2.6) принимает вид (2.17). Теорема доказана.

Из теоремы 2.5 в [7] получим следующую теорему:

Теорема 2.3. Для поля невырожденных полуфокальных изотропных линейчатых 2-полос $\Pi(\Delta)$ существуют поля полуканонических полуизотропных реперов $\{F, \vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, где $\vec{e}_1$ коллинеарен к $\vec{u}$ и является касательным вектором торса, $\vec{e}_2$ - ортогональный ему вектор в предельном пространстве $\Pi_\infty(\Delta_x)$ и $\vec{e}_3$ – изотропный вектор на касательной плоскости 1-полосы $\Pi(\delta_{2x})$. Относительно такого поля репера ассоциированная с полем $\Pi(\Delta)$ система Пфаффа имеет вид:

$$\omega^1 = 0,\ \omega^2 = 0,\ \omega^3 = S\omega^2_0. \qquad (2.20)$$

§3. Фокальные невырожденные изотропные линейчатые 2-полосы

3.I. В случае фокальной изотропной линейчатой 2-полосы все ковекторы ξ, ζ, η коллинеарны (см. п. 2.I) и, следовательно, касательное пространство $\Pi_M(\Delta_x)$ в каждой точке M совпадает с предельным пространством $\Pi_\infty(\Delta_x)$ и является трехмерным полуевклидовым пространством ${}^{(1)}R_3$. Так как в данном случае (см. п. 2.I) векторы $\vec{u}$, $\vec{v}$ и $\vec{w}$ нулевые, то из (2.I0) следует, что ассоциированная с полем невырожденных фокальных 2-полос система Пфаффа (2.6) принимает вид

$$\omega^{\dot{j}} = A^{\circ \dot{j}}_{\dot{i}}\, \omega^{\dot{i}}_{\circ}\,, \quad \omega^3 = 0. \qquad (3.I)$$

Отметим, что строение фокальных изотропных линейчатых 2-полос в ${}^1R_4$ во многом похоже на строение первой дифференциальной окрестности прямой конгруэнции в R_3 (см. [I8]). С другой стороны, изучаемые здесь 2-полосы можно рассматривать как дополнительные к псевдоевклидовой цилиндрической 1-полосе в изотропной линейчатой 3-полосе в ${}^1R_4$ (см. [5]).

3.2. В рассматриваемом случае все изотропные линейчатые 1-полосы данной 2-полосы являются в силу (3.I) и (I.8) полуевклидовыми. В работе [5] мы определили для полуевклидовых I-полос $\Pi(\partial)$ точки сжатия (псевдофокусы) и граничные точки. Пусть $\Pi(\partial)$ задана при помощи своей проективной индикатрисы

$$\partial_{\pi(x)} = \ell^{\dot{i}}_{\circ}\, \partial^{\circ}_{\dot{i}\,\pi(x)}.$$

В силу (3.I) получим:

$$\partial_x = (A^{\circ \dot{j}}_{\dot{i}}\, \ell^{\dot{i}}_{\circ})\, \partial_{\dot{j}x} + \ell^{\dot{i}}_{\circ}\, \partial^{\circ}_{\dot{i}x}\,, \qquad (3.2)$$

а также

$$\left.\begin{aligned} \partial\vec{M} &= A^{\circ \dot{j}}_{\dot{i}}\, \ell^{\dot{i}}_{\circ}\, \vec{e}_{\dot{j}} \\ \partial\vec{e}_{\circ} &= \ell^{\dot{i}}_{\circ}\, \vec{e}_{\dot{i}} \end{aligned}\right\} \pmod{\vec{e}_{\circ}}. \qquad (3.3)$$

Абсцисса ρ° точки сжатия $\vec{P} = \vec{M} + \rho^{\circ}\vec{e}_{\circ}$ вычисляется формулой

$$\rho^{\circ} = -\frac{\partial\vec{M}\cdot\partial\vec{e}_{\circ}}{(\partial\vec{e}_{\circ})^2} = -\frac{A^{\circ 1}_{1}(\ell^{1}_{\circ})^2 + (A^{\circ 1}_{2} + A^{\circ 2}_{1})\ell^{1}_{\circ}\ell^{2}_{\circ} + A^{\circ 2}_{2}(\ell^{2}_{\circ})^2}{(\ell^{1}_{\circ})^2 + (\ell^{2}_{\circ})^2} \qquad (3.4)$$

В силу непрерывности координат $\ell^{\dot{i}}_{\circ}$ во множестве всех 1-полос из $\Pi(\Delta_x)$ все точки сжатия заполняют на прямой 2-полосы отрезок, содержащий все вещественные фокусы

2-полосы. Концы этого отрезка называются <u>граничными точками</u> изотропной линейчатой 2-полосы, а линейчатые 1-полосы, имеющие точки сжатия в граничных точках, называются <u>главными 1-полосами</u> (ср. [18]) 2-полосы.

3.3. Известно (см. [18], а также [5,7]), что абсциссы f^0 фокусов $\vec{F} = \vec{M} + f^0 \vec{e}_0$ определяются из задачи собственных значений:

$$(A^{0i}_j + f^0 \delta^i_j) e^j_0 = 0 ; \tag{3.5}$$

координаты e^j_0 собственных векторов определяют торсовые 1-полосы $\Pi(\partial_T)$. Следуя Ю.Г.Лумисте [13], можно относительный аффинор A^{0i}_j, зависящий от точки M на прямой, заменить на инвариантно связанный с прямой аффинор

$$\mathcal{A}^{0i}_j = A^{0i}_j - c^0 \delta^i_j , \tag{3.6}$$

где $c^0 = \frac{1}{2}(f^0_1 + f^0_2) = -\frac{1}{2} A^{0i}_i$ является абсциссой центра $\vec{C} = \frac{1}{2}(\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$ прямой. Тогда ассоциированная с полем 2-полос система Пфаффа имеет вид:

$$\omega^i = \mathcal{A}^{0i}_j \omega^j_0 , \quad \omega^3 = 0 . \tag{3.7}$$

В зависимости от жорданова типа аффинора $\mathcal{A}^{0i}_j$ невырожденные фокальные изотропные линейчатые 2-полосы делятся на следующие четыре классы: гиперболические, эллиптические, параболические и конические (см. [7]). В работе [7] для 2-полосы из каждого фокального класса введены аффинные фокальные полуканонические реперы. Теперь нас будут интересовать только полуизотропные реперы, поэтому следует учесть и метрические свойства соответствующих 2-полос.

3.4. Поскольку в <u>гиперболическом</u> и <u>эллиптическом</u> случаях $\det(\mathcal{A}^{0i}_j) \neq 0$, то на эти случаи можно полностью перенести канонизацию подвижного репера, сделанную в [5] для конгруэнции изотропных прямых с псевдоевклидовыми цилиндрами. Отметим, что рассматриваемый здесь случай поля изотропных линейчатых 2-полос отличается от рассмотренной в [5] только дополнительным уравнением $\omega^3 = 0$ в ассоциированной системе Пфаффа. Доказанные в [5] предложения 1 и 2 можно теперь перефразировать для данного случая в виде следующей теоремы.

<u>Теорема 3.1</u>. Для прямой x невырожденной гиперболической или эллиптической изотропной линейчатой 2-полосы $\Pi(\Delta_x)$ существуют полуканонические полуизотропные реперы

$\{C, \vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ с началом в центре C прямой и с векторами $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ касательными к **линечатым 1-полосам,** имеющим точки сжатия в точке C. Относительно такого подвижного репера система Пфаффа, ассоциированная с полем соответствующих изотропных линейчатых 2-полос, имеет вид:

I) для поля гиперболических 2-полос:

$$\omega^1 = a\omega_0^2, \quad \omega^2 = \frac{1}{a}\omega_0^1, \quad \omega^3 = 0, \tag{3.8}$$

2) для поля эллиптических 2-полос:

$$\omega^1 = a\omega_0^2, \quad \omega^2 = -\frac{1}{a}\omega_0^1, \quad \omega^3 = 0. \tag{3.9}$$

Величина $d_1 = \frac{a^2+1}{a}$ **(соответственно,** $d_2 = \frac{a^2-1}{a}$) **является расстоянием** M между граничными точками и $\varphi = \arctan a^2$ есть угол между главными 1-полосами в центре прямой.

<u>Следствие I</u>. В частном случае гиперболической 2-полосы, когда $a = 1$, фокусы совпадают с граничными точками прямой и торсовые линейчатые 1-полосы являются ортогональными между собой. Такие изотропные линейчатые 2-полосы являются аналогами первой дифференциальной окрестности нормальной конгруэнции в R_3 (см. [I8], а также [5]).

<u>Следствие 2</u>. В частном случае эллиптической 2-полосы, когда $a = 1$, граничные точки и, следовательно, все точки сжатия 1-полос находятся в центре прямой. В этом случае главные 1-полосы неопределены. Соответствующая конгруэнция в R_3 (см. [I8]) называлась изотропной.

3.5. В случае <u>параболической</u> изотропной линейчатой 2-полосы на прямой x имеется только один двукратный фокус $F = C$; ему соответствует двукратная торсовая 1-полоса. Поскольку других инвариантных 1-полос в этой 2-полосе не существует, то в этом случае можно среди аффинных фокальных полуканонических реперов (см. [7]) найти и соответствующие полуизотропные реперы.

Аналогичное обстоятельство имеет место для конической изотропной линейчатой 2-полосы $\Pi(\Delta_x)$. В этом случае каждая 1-полоса, содержащаяся в $\Pi(\Delta_x)$, является торсовой и имеет фокус F в центре прямой. Следовательно, среди торсовых 1-полос можно найти ортогональные между собой, касательные векторы которых образуют фокальный полуизотропный репер.

Для этих двух случаев остается верной теорема 2.8 из [7] в следующей формулировке:

Теорема 3.2. Ассоциированная с полем параболических или конических изотропных **линейчатых 2-полос система Пфаффа имеет относительно фокальных полуканонических полуизотропных реперов следующий вид:**

I) в случае параболического поля:

$$\omega^1 = \omega^2_0, \quad \omega^2 = \omega^3 = 0, \tag{3.I0}$$

2) в случае конического поля:

$$\omega^1 = \omega^2 = \omega^3. \tag{3.II}$$

§4. Невырожденные псевдоконгруэнции изотропных прямых в ${}^1R_4$

4.I. В предыдущих параграфах мы классифицировали все поля невырожденных изотропных линейчатых 2-полос в ${}^1R_4$ по их фокальным свойствам. Получилось 6 разных классов – афокальные, полуфокальные, гиперболические, эллиптические, параболические и конические. С ними в полуканонических полуизотропных реперах ассоциируются следующие системы Пфаффа: соответственно, (2.I7), (2.20), (3.7), (3.8), (3.9) и (3.I0).

Каждому из этих классов соответствует класс двумерных распределений Δ на многообразии J_5 всех изотропных прямых ${}^1R_4$. До сих пор мы не налагали никаких дополнительных условий на распределение Δ. Следовательно, эти распределения являются в общем случае неголономными и соответствующие им поля изотропных линейчатых 2-полос в ${}^1R_4$ образуют неголономные псевдоконгруэнции $N\Omega(4,1;2)$ соответствующего типа. В данном параграфе будут нас интересовать случаи инволютивного распределения, т.е. те условия, при которых рассматриваемые поля 2-полос огибают соответствующие голономные псевдоконгруэнции изотропных прямых. Возникает вопрос о выполнимости этих условий при всех рассматриваемых нами классах.

4.2. Рассмотрим поля фокальных изотропных линейчатых 2-полос относительно их полуканонических реперов. Во всех ассоциированных с этими полями системах Пфаффа (3.7-I0) имеется уравнение

$$\omega^3 = 0. \tag{4.I}$$

Дифференциальное продолжение этого уравнения, дает, в силу структурных уравнений (I.4),

$$\omega^i = a^{0i}_{\ \ j}\,\omega^j_0, \tag{4.2}$$

где $a^{\circ}{}^{i}_{j} = a^{\circ}{}^{j}_{i}$. Эта симметрия коэффициентов противоречит всем системам Пфаффа (3.7-9), кроме системы для поля канонических 2-полос. Получаемые выводы сформулируем в следующих теоремах.

Теорема 4.I. В пространстве $^1R_4$ не существует эллиптических и параболических псевдоконгруэнций изотропных прямых.

Теорема 4.2. Гиперболическая псевдоконгруэнция изотропных прямых в $^1R_4$ обладает ортогональными торсами.

Дальнейшее изучение на инволютивность (см. [I8]) системы Пфаффа (3.7), ассоциированной с полем гиперболических 2-полос с ортогональными торсами, т.е. системы

$$\omega^1 = \omega^2_0 \ , \ \omega^2 = \omega^1_0 \ , \ \omega^3 = 0 \qquad (4.3)$$

дает, что такая псевдоконгруэнция существует с произволом двух функций двух аргументов.

Ассоциированная с полем конических изотропных линейчатых 2-полос система Пфаффа (3.I0) является вполне интегрируемой и представляет собой условие неподвижности точки в $^1R_4$ т.е. справедлива:

Теорема 4.3. Коническая псевдоконгруэнция изотропных прямых в $^1R_4$ совпадает с изотропным гиперконусом пространства и определяется заданием ее вершины - вырожденной фокальной поверхности.

4.3. Исследование на инволютивность систем Пфаффа (2.I7) и (2.20), ассоциированных с полями афокальных и полуфокальных изотропных линейчатых 2-полос, дает, что соответствующие псевдоконгруэнции изотропных прямых в $^1R_4$ существуют. Произвол такой афокальной псевдоконгруэнции определяется четырьмя функциями двух аргументов, а полуфокальной псевдоконгруэнции - тремя функциями двух аргументов.

В итоге получим следующую теорему.

Теорема 4.4. В псевдоевклидовом пространстве $^1R_4$ псевдоконгруэнции изотропных прямых разделяются на следующие четыре класса: афокальные, полуфокальные, гиперболические (с ортогональными торсами) и конические (т.е. изотропные гиперконусы).

Литература

I. Б л и з н и к а с В. И., Некоторые вопросы геометрии гиперкомплексов прямых. Труды геометр. семинара, М., ВИНИТИ АН СССР, 1974, 6, 43-110.

2. Г е й д е л ь м а н Р. М., Дифференциальная геометрия семейств подпространств в многомерных пространствах. Алгебра. топол., геометрия. 1965 (Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР). М., 1967, 323-374.

3. Е в т у ш и к Л. Е., Л у м и с т е Ю. Г., О с т и а н у Н. М., Ш и р о к о в А. П., Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Проблемы геометрии, М., ВИНИТИ АН СССР, 1979, 9, 5-216.

4. К о л д е Р., Невырожденные конгруэнции изотропных прямых с бесконечно-удаленными кратными фокусами в ${}^1R_4$. Уч. зап. Таллинск. политехн. ин-та, 1971, А312, 3-25.

5. К о л д е Р., Конгруэнция изотропных прямых в пространстве ${}^1R_4$ и ее канонические реперы. Уч. зап. Тартуск. гос. ун-та, 1970, 253, 73-95.

6. К о л д е Р. К., Линейчатые k-полосы и линейчатая дифференциальная геометрия в A_n и ${}^1R_n$. Тезисы докл. VI всесоюзной конф. по геометрии, Вильнюс, 1975, 122-125.

7. К о л д е Р., Распределения на многообразии прямых в A_4 и фокальная классификация псевдоконгруэнций. Уч. зап. Тартуск. гос. ун-та, 1982, 610, 76-95.

8. Л а п т е в Г. Ф., Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Тр. Моск. матем. об-ва, 1953, 2, 275-382.

9. Л а п т е в Г. Ф., Распределение касательных элементов. Тр. геомет. семинара, М., ВИНИТИ АН СССР, 1971, 3, 26-48.

10. Л у м и с т е Ю. Г., Дифференциальная геометрия линейчатых гиперповерхностей V_3 в R_4. Матем. сб. 1960, 50(92), № 2, 203-220.

11. Л у м и с т е Ю. Г., Многомерные линейчатые поверхности эвклидова пространства. Матем. сб., 1961, 55 (97), № 4, 412-420.

12. Л у м и с т е Ю. Г., Распределения на однородных пространствах. Проблемы геометрии, М., ВИНИТИ АН

СССР, 1977, 8, 5-24.
13. Л у м и с т е Ю. Г., Средняя поверхность конгруэнции плоскостей аффинного пространства. Изв. высш. уч. зав., Математика, 1965, № 6(49), 93-102.
14. Л у м и с т е Ю. Г., Т у у л м е т с Л. А., Минимальные конгруэнции V_3 в эвклидовом пространстве R_4. Изв. высш. уч. зав., Математика, 1962, № 1(26), 74-82.
15. О р е щ е н к о А. Ф., Линейчатые поверхности с изотропной образующей в ${}^{e}E_n$. Изв. АН БССР, сер. физ-мат. наук, 1970, № 5, 15-20.
16. Р о з е н ф е л ь д Б. А., Неевклидовы пространства, М., "Наука", 1969.
17. Ф и н и к о в С. П., Метод внешних форм Картана. М.-Л., 1948.
18. Ф и н и к о в С. П., Теория конгруэнций. М.-Л., 1950.
19. K i r n e r, H., Regelflächen im n-dimensionalen affinen Raum.- J. Geom., 1979, 13, Nr. 1, S. 68-82.
20. S u l a n k e R., Strahlensysteme in n-dimensionalen euklidischen Raum.- Math. Nachr., 1970, 43, Nr. 1-6, S. 25-46.
21. W a g n e r L., Über isotrope Strahlensysteme des pseudoeuklidischen Raumes ${}^{1}E^{2}_{l}$ - Math. Nachr., 1971, 49, S. 199-214.

Поступило
1 IX 1981

THE GEOMETRY AND CLASSIFICATION OF THE TWO-DIMENSIONAL DISTRIBUTIONS ON THE MANIFOLD OF NULL STRAIGHT LINES IN ${}^{1}R_4$

R.Kolde

S u m m a r y

Let J_5 denote the manifold of null straight lines of four-dimensional real pseudoeuclidean space ${}^{1}R_4$ (Minkowski space). It is shown [4] that the manifold J_5 has a structure of a homogenous fibre space $J_5(C_2, \Gamma_3, G\Gamma_3, \pi)$, where the base C_2 is the conformal plane, the typical fibre is the three-dimensional galileian space Γ_3, the transformation group is the group $G\Gamma_3$ of transformations in Γ_3 and the projection π maps a null straight line $[M, \vec{e}_0] \equiv x \in J_5$ onto its direction $\{\lambda \vec{e}_0\} \in C_2$.

Every two-dimensional subspace $\Delta_x \equiv [\delta_1, \delta_2]_x$ of $T_x(J_5)$ defines the null 2-stripe along of null straight line $x \equiv [M, \vec{e}_0]$ as a correspondence $\Pi(\Delta_x)$ between the points M' of x and the three-dimensional subspaces $\Pi_{M'}(\Delta_x)$ through x in ${}^1R_4$. The null 2-stripe is called regular, if $\dim d\pi_x(\Delta_x) = 2$. The classification of regular null 2-stripes in ${}^1R_4$ by focal properties is given. There exist 6 types of regular null 2-stripes: nonfocal, semifocal, hyperbolic, elliptic, parabolic and conical 2-stripes. Correspondence distributions Δ on J_5 are given with their Pfaffs system in semicanonical seminull frames.

The last section (§4) presents a proof that there are 4 classes of the holonomic fields of null 2-stripes (i.e. null line pseudocongruences): nonfocal, semifocal, hyperbolic with ortogonal torses and conical. The conical pseudocongruences is an nullhypercone of ${}^1R_4$.

ПОДМНОГООБРАЗИЯ С ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ТРЕТЬЕЙ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ФОРМОЙ

Ю.Лумисте, В.Мирзоян
Кафедра алгебры и геометрии

Введение

Основную роль в геометрии подмногообразий играет, как известно, вторая фундаментальная форма α_2 подмногообразия. В римановом пространстве не менее важное значение имеют связности ∇ и $\nabla^\perp$ в касательном и нормальном расслоениях подмногообразия, которые объединяются в понятии связности ван-дер-Вардена-Бортолотти $\bar{\nabla} = \nabla \oplus \nabla^\perp$.

Если $\bar{\nabla}\alpha_2 = 0$, то говорят о подмногообразии с параллельной второй фундаментальной формой. Интересный цикл исследований Вилмса, Валдена и Феруса [10-14] таких подмногообразий в евклидовом пространстве E_n выявил, что они являются произведениями канонически погруженных симметрических R-пространств.

В общем случае $\bar{\nabla}\alpha_2 = \alpha_3$ представляет собой третью фундаментальную форму подмногообразия. Если $\bar{\nabla}\alpha_3 = 0$, то говорят о подмногообразии с параллельной третьей фундаментальной формой.

Исследование таких подмногообразий в пространствах постоянной кривизны $M_n(c)$ начато в [6] и [7]. В настоящей статье расширяются некоторые ранее полученные результаты и дается перечисление всех двумерных подмногообразий (поверхностей) с параллельной α_3 в E_4.

В §I приведены необходимые сведения из геометрии подмногообразий в $M_n(c)$. Теорема I и ее следствия в §2 о локальном строении подмногообразия с параллельной α_3 в $M_n(c)$ несколько расширают результаты из [7] (§3,п.5); теоремой 2 в §3 устанавливается, что все M_2 с $\bar{\nabla}\alpha_3 = 0$ при $\alpha_3 = 0$ (т.е. с $\bar{\nabla}\alpha_2 = 0$) являются орбитами подгрупп Ли движений в E_4 (ср. [3]) и наоборот, а при $\alpha_3 \neq 0$ прибавляются произведения некоторой спирали Корню с прямой, окружностью или с другой спиралью Корню (а также поверхноти, описываемые в добавлении при корректуре).

§I. Необходимые сведения из геометрии подмногообразий

I. Пусть $M_n(c)$ является n-мерным либо евклидовым (при $c = 0$), либо неевклидовым пространством (при $c \neq 0$). Оно может быть интерпретировано как гиперсфера радиуса $R=(\sqrt{c})^{-1}$ в евклидовом пространстве E_{n+1}, при $c = 0$ являющаяся гиперплоскостью, и представляет собой n-мерное риманово пространство постоянной кривизны c.

Подвижной репер в пространстве $M_n(c)$ — элемент главного расслоения $(PM_n(c), p, M_n(c))$ ортонормированных реперов в касательных к $M_n(c)$ евклидовых пространствах — может быть в этой интерпретации задан с помощью радиуса-вектора x текущей точки пространства $M_n(c)$ и n попарно ортогональных векторов $e_1, \ldots e_n$:

$$\langle e_J, e_K \rangle = \delta_{JK} \; ; \; J, K, \ldots = 1, \ldots, n \, ;$$

которые при $c \neq 0$ удовлетворяют еще условиям

$$\langle x, x \rangle = c^{-1}, \quad \langle x, e_J \rangle = 0.$$

Инфинитезимальное перемещение такого репера определяется уравнениями

$$dx = \omega^J e_J \, , \quad de_J = -c\,\omega^J x + \omega_J^K e_K \, , \tag{I}$$

из которых путем внешнего дифференцирования получаются следующие структурные уравнения Картана ([I], стр. I56):

$$d\omega^J = \omega^K \wedge \omega_K^J \, , \tag{2}$$

$$d\omega_K^J = \omega_K^L \wedge \omega_L^J - c\,\omega^K \wedge \omega^J, \tag{3}$$

где $\omega_K^J + \omega_J^K = 0$.

2. Пусть в $M_n(c)$ дано подмногообразие M_m класса C^∞. Оно служит базой своего касательного векторного расслоения TM_m и нормального векторного расслоения $T^\perp M_m$. Расслоение ортонормированных реперов $PM_n(c)$ после его ограничения на M_m может быть приведено к $PM_m \oplus QM_m$, где PM_m — расслоение ортонормированных реперов во всех касательных пространствах T_xM_m и QM_m — расслоение ортонормированных реперов во всех нормальных пространствах $T_x^\perp M_m$, $x \in M_m$.

Пусть $(e_1, \ldots, e_m)$ и $(e_{m+1}, \ldots, e_n)$ являются произвольными элементами расслоений PM_m и QM_m соответственно. Тогда в точках $x \in M_m$ для векторов $X \in T_xM_m$ справедливы равенства $\omega^\alpha(X)=0 \; ; \alpha, \beta, \ldots = m+1, \ldots, n$, т.е. $\omega^\alpha = 0$ вдоль M_m. Из уравнения (2) следует, что вдоль M_m $\omega_i^\alpha \wedge \omega^i = 0 \; ; i, j, \ldots = 1, \ldots, m$; и отсюда, в в силу леммы Картана,

$$\omega_i^\alpha = b_{ij}^\alpha \omega^j, \quad b_{ij}^\alpha = b_{ji}^\alpha. \tag{4}$$

Теперь из структурных уравнений (2), (3) получаются следующие уравнения

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i, \tag{5}$$

$$d\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j + R_{ik\ell}^j \omega^k \wedge \omega^\ell, \tag{6}$$

$$d\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta + R_{\alpha k\ell}^\beta \omega^k \wedge \omega^\ell, \tag{7}$$

где

$$R_{ik\ell}^j = -\left(\sum_{\alpha=m+1}^{n} b_{i[k}^\alpha b_{\ell]j}^\alpha + c\,\delta_{i[k}\delta_{\ell]}^j\right), \tag{8}$$

$$R_{\alpha k\ell}^\beta = -\sum_{i=1}^{m} \delta_{\alpha\gamma} b_{i[k}^\gamma b_{\ell]i}^\beta. \tag{9}$$

3. Из уравнений (6), (7) следует, что 2-формы

$$\Omega_i^j = d\omega_i^j - \omega_i^k \wedge \omega_k^j,$$

$$\Omega_\alpha^\beta = d\omega_\alpha^\beta - \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta$$

являются полубазовыми (т.е. выражаются только через произведения $\omega^k \wedge \omega^\ell$) на PM_m и QM_m. В силу теоремы Картана-Лаптева [2] в расслоениях PM_m и QM_m определены связности с I-формами связности ω_i^j, ω_α^β, соответственно. Первая из этих связностей является индуцированной связностью Леви-Чивита ∇ на M_m как в погруженном римановом многообразии. Ее тензор кривизны выражается равенством (8). Вторая из указанных связностей называется нормальной связностью $\nabla^\perp$ подмногообразия M_m. Ее тензор кривизны выражается равенством (9). Отметим, что $\Omega_i^j + \Omega_j^i = 0$, $\Omega_\alpha^\beta + \Omega_\beta^\alpha = 0$.

4. Уравнения (4) путем внешнего дифференцирования приводят к соотношениям

$$(db_{ij}^\alpha - b_{kj}^\alpha \omega_i^k - b_{ik}^\alpha \omega_j^k + b_{ij}^\beta \omega_\beta^\alpha) \wedge \omega^i = 0. \tag{10}$$

Здесь в скобках получились частные случаи некоторых стандартных выражений.

В общем случае, для системы функций $T_{i_1 \dots i_p}^{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ на M_m обозначим

$$\bar\nabla T_{i_1 \dots i_p}^{\alpha_1 \dots \alpha_n} =$$

$$= dT_{i_1 \dots i_p}^{\alpha_1 \dots \alpha_n} - \sum_{\pi=1}^{p} T_{i_1 \dots k_\pi \dots i_p}^{\alpha_1 \dots \alpha_n} \omega_{i_\pi}^{k_\pi} + \sum_{\varsigma=1}^{n} T_{i_1 \dots i_p}^{\alpha_1 \dots \beta_\varsigma \dots \alpha_n} \omega_{\beta_\varsigma}^{\alpha_\varsigma}. \tag{11}$$

Если $\bar\nabla T_{i_1 \dots i_p}^{\alpha_1 \dots \alpha_n} = T_{i_1 \dots i_p k}^{\alpha_1 \dots \alpha_n} \omega^k$, то $T_{i_1 \dots i_p}^{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ составляют тензор (смешанный) на M_m. говорят, что $\bar\nabla T_{i_1 \dots i_p}^{\alpha_1 \dots \alpha_n}$

составляет его ковариантный дифференциал и $T^{\alpha_1\dots\alpha_r}_{i_1\dots i_p k}$ его ковариантную производную в связности ван-дер-Вардена-Бортолотти $\bar\nabla = \nabla \oplus \nabla^{\perp}$ (ср. [2], [9]). Если $\bar\nabla T^{\alpha_1\dots\alpha_r}_{i_1\dots i_p} = 0$, то говорят, что $T^{\alpha_1\dots\alpha_r}_{i_1\dots i_p}$ параллелен.

Из (II) после внешнего дифференцирования получается, что

$$d(\bar\nabla T^{\alpha_1\dots\alpha_r}_{i_1\dots i_p}) =$$

$$= -\sum_{\pi=1}^{p}(\bar\nabla T^{\alpha_1\dots\alpha_r}_{i_1\dots k_\pi\dots i_p}\wedge\omega^{k_\pi}_{i_\pi} + T^{\alpha_1\dots\alpha_r}_{i_1\dots k_\pi\dots i_p}\Omega^{k_\pi}_{i_\pi}) +$$
$$+\sum_{\rho=1}^{r}(\bar\nabla T^{\alpha_1\dots\beta_\rho\dots\alpha_r}_{i_1\dots i_p}\wedge\omega^{\alpha_\rho}_{\beta_\rho} + T^{\alpha_1\dots\beta_\rho\dots\alpha_r}_{i_1\dots i_p}\Omega^{\alpha_\rho}_{\beta_\rho}). \quad (12)$$

Так как (10) по лемме Картана дает

$$\bar\nabla b^{\alpha}_{ij} = b^{\alpha}_{ijk}\omega^k, \quad b^{\alpha}_{ijk} = b^{\alpha}_{ikj}, \quad (13)$$

то b^{α}_{ij} составляют тензор на M_m, который называется вторым фундаментальным тензором подмногообразия M_m. Обозначая для векторов $X = X^i e_i \in T_x M_m$, $Y = Y^j e_j \in T_x M_m$

$$(b^{\alpha}_{ij} X^i Y^j) e_\alpha = \alpha_2(X, Y),$$

получим вторую фундаментальную форму α_2 подмногообразия M_m (см. [9]). С ее помощью для каждого $\xi \in T^{\perp}_x M_m$ определяется линейное отображение $A_\xi : T_x M_m \to T_x M_m$ формулой $\langle \xi, \alpha_2(X,Y)\rangle = \langle A_\xi(X), Y\rangle$. Отсюда

$$(A_\xi)^j_i = \sum_{\alpha=m+1}^{n} \xi^\alpha b^\alpha_{ik}\delta^{kj}.$$

Из (13) по формулам (5) и (12) следует, что

$$-(b^{\alpha}_{\ell jk}\omega^k\wedge\omega^\ell_i + b^{\alpha}_{i\ell k}\omega^k\wedge\omega^\ell_j + b^{\alpha}_{kj}\Omega^k_i + b^{\alpha}_{ik}\Omega^k_j) +$$
$$+(b^{\beta}_{ijk}\omega^k\wedge\omega^\alpha_\beta + b^{\beta}_{ij}\Omega^\alpha_\beta) = d b^{\alpha}_{ijk}\wedge\omega^k + b^{\alpha}_{ijk}\omega^\ell\wedge\omega^k_\ell,$$

т.е.

$$\bar\nabla b^{\alpha}_{ijk}\wedge\omega^k = b^{\beta}_{ij}\Omega^\alpha_\beta - b^{\alpha}_{kj}\Omega^k_i - b^{\alpha}_{ik}\Omega^k_j. \quad (14)$$

Так как Ω^α_β, Ω^j_i выражаются в силу (6) и (7) через $\omega^k\wedge\omega^\ell$, то отсюда, по лемме Картана, $\bar\nabla b^{\alpha}_{ijk}$ выражается через ω^ℓ. Следовательно, b^{α}_{ijk} составляют тензор на M_m, который называется третьим фундаментальным тензором подмногообразия M_m. Обозначая

$$(b^{\alpha}_{ijk} X^i Y^j Z^k) e_\alpha = \alpha_3(X, Y, Z),$$

получим симметрическую трилинейную форму в каждом $T_x M_m$ со значениями в $T^{\perp}_x M_m$, симметрическую в силу (13), которая называется третьей фундаментальной формой α_3 подмногообразия M_m.

§2. О локальном строении подмногообразия с параллельной α_3 в $M_n(c)$

I. Подмногообразия $M_m \subset E_n$ с $\alpha_3 \equiv 0$, т.е. с параллельной второй фундаментальной формой, исследованы в [10-14]. Доказано, что такое M_m является произведением стандартно вложенных симметрических R-пространств. Локальное строение подмногообразия $M_m \subset M_n(c)$ с $\alpha_3 \equiv 0$ исследовано в [5], где получено аналогичное разложение M_m в произведение минимальных подмногообразий полных омбилических гиперповерхностей в $M_n(c)$.

2. Подмногообразия $M_m \subset M_n(c)$ с параллельной третьей фундаментальной формой α_3, т.е. с $\bar\nabla b^{\alpha}_{ijk} = 0$, рассмотрены в [6] и [7] (§3, п.5). Из (I4) для них получается

$$b^{\beta}_{ij}\Omega^{\alpha}_{\beta} - b^{\alpha}_{kj}\Omega^{k}_{i} - b^{\alpha}_{ik}\Omega^{k}_{j} = 0. \tag{I5}$$

Отсюда для вектора средней кривизны $H = e_\alpha H^\alpha = e_\alpha \sum_{i=1}^{m} b^{\alpha}_{ii}$ подмногообразия M_m получается соотношение

$$H^{\beta}\Omega^{\alpha}_{\beta} = 0, \tag{I6}$$

так как $\sum_{i=1}^{m} b^{\alpha}_{ki}\Omega^{k}_{i} = \sum_{k=1}^{m} b^{\alpha}_{ik}\Omega^{i}_{k} = -\sum_{i=1}^{m} b^{\alpha}_{ki}\Omega^{k}_{i} = 0$ в силу $b^{\alpha}_{ij} = b^{\alpha}_{ji}$ и $\Omega^{k}_{i} = -\Omega^{i}_{k}$.

Если $H \equiv 0$, то M_m называется минимальным. В [7] доказано, что минимальное подмногообразие M_m с параллельной α_3 в $M_n(c)$ является при $c \leqslant 0$ вполне геодезическим.

3. В общем случае справедлива следующая

Теорема I. Если M_m является неминимальным подмногообразием (т.е. $H \neq 0$) с параллельной третьей фундаментальной формулой α_3 в $M_n(c)$, то

I) распределение

$$T^{\lambda_u} : x \in M_m \longrightarrow T^{\lambda_u}_x = \{X \in T_x M_m : A_H(X) = \lambda_u X\}$$

для каждого собственного значения λ_u ($u = 1, \dots, t$) инволютивно в области, где λ_u имеет постоянную кратность;

2) в области, где все собственные значения линейного отображения A_H имеют постоянные кратности, интегральные подмногообразия распределений $T^{\lambda_1}, \dots, T^{\lambda_t}$ образуют ортогональную сопряженную систему;

3) в случае, когда A_H имеет простой спектр, подмногообразие M_m является локально евклидовым и имеет плос-

кую нормальную связность.

Доказательство. Из (I6) видно, что H является коммутирующим нормальным векторным полем в смысле [7]. Утверждения I) и 2) следуют теперь из теоремы 5 в [7], так же, как часть утверждения 3), относящаяся к нормальной связности.

Остается доказать остальную часть утверждения 3). Репер в каждом $T_x^{\perp} M_m$ можно выбрать так, что $H = \mu e_{m+1}$. Тогда $H^{\beta} = \mu \delta^{\beta}_{m+1}$ и (I6) дает $\Omega^{\alpha}_{m+1} = 0$, в силу чего и $\Omega^{m+1}_{\alpha} = 0$. Теперь из (I5) при $\alpha = m+1$ следует, что

$$b^{m+1}_{kj} \Omega^{k}_{i} + b^{m+1}_{ik} \Omega^{k}_{j} = 0. \qquad (I7)$$

Так как $(A_H)^j_i = \mu b^{m+1}_{ik} \delta^{kj}$ и A_H имеет простой спектр, то в каждом $T_x M_m$ можно репер выбрать так, что $b^{m+1}_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$. Подставляя в (I7), имеем $(\lambda_j - \lambda_i)\Omega^j_i = 0$ (не сумм.!) и отсюда $\Omega^j_i = 0$. Теорема доказана.

Замечания. I. Если условие утверждения 3) не выполнено, т.е. A_H не имеет простой спектр, то, выбирая репер в каждом $T_x M_m$ так, что $e_{i_u} \in T_x^{\lambda_u}$, имеем из (I7)

$$(\lambda_{j_v} - \lambda_{i_u}) \Omega^{j_v}_{i_u} = 0, \quad u \neq v,$$

и отсюда

$$\Omega^{j_v}_{i_u} = 0, \qquad \text{если} \quad u \neq v.$$

2. Из $\Omega^{\alpha}_{m+1} = \Omega^{m+1}_{\alpha} = 0$ следует, что в предположениях теоремы I при $n = m+2$ нормальная связность подмногообразия M_m плоская, т.е. $\Omega^{\beta}_{\alpha} = 0$ независимо от того, имеет ли A_H простой спектр или нет.

3. Если в предположениях теоремы I нормальная связность плоская и $m = 2$, то M_2 либо локально евклидово, либо вполне омбилическое. Действительно, в этом случае в (I5) имеем $\Omega^{\beta}_{\alpha} = 0$. Если среди 2x2-матриц $B^{\alpha} = \| b^{\alpha}_{ij} \|$ хотя бы одна имеет различные собственные значения, то $\Omega^j_i = 0$. Если все они имеют кратные собственные значения, то $b^{\alpha}_{ij} = \lambda^{\alpha} \delta_{ij}$ и M_2 вполне омбилическое.

§3. Перечисление двумерных подмногообразий с параллельной α_3 в E_4.

I. Чтобы понять значение требования параллельности третьей фундаментальной формы, целесообразно провести полную классификацию подмногообразий, удовлетворяющих этому требованию, в каком-нибудь обозримом случае. Первый такой нетривиальный случай представляют двумерные подмногообразия (поверхности) M_2 в четырехмерном евклидовом пространстве E_4.

Из указанного в §2 п.2 следует, что минимальная поверхность M_2 с параллельной $\varkappa_3$ в E_4 является 2-плоскостью. Из замечаний 2 и 3 к теореме I следует, что неплоская поверхность M_2 с параллельной $\varkappa_3$ в E_4 имеет плоскую нормальную связность и либо локально евклидова, либо вполне омбилическая; в последнем случае она, как известно, является сферой в некоторой гиперплоскости $E_3 \subset E_4$.

В итоге получается следующая

Лемма. Поверхность M_2 с параллельной $\varkappa_3$ в E_4 является либо плоскостью, либо сферой, либо она локально евклидова и имеет плоскую нормальную связность.

2. Полное описание поверхностей M_2 с параллельной $\varkappa_3$ в E_4 дает следующая

Теорема 2. Пусть M_2 является поверхностью с параллельной третьей фундаментальной формой $\varkappa_3$ в евклидовом пространстве E_4. Если ее вторая фундаментальная форма $\varkappa_2$ параллельна (т.е. $\varkappa_3 \equiv 0$), то она либо I) плоскость, либо 2) сфера, либо 3) произведение окружности и прямой (цилиндр вращения), либо 4) произведение двух окружностей (поверхность Клиффорда). Если $\varkappa_3 \neq 0$, то она[1] либо 5) произведение прямой и спирали Корню, либо 6) произведение окружности и спирали Корню, либо 7) произведение двух спиралей Корню. Обратно, все указанные поверхности обладают параллельной $\varkappa_3$ причем I)-4) с $\varkappa_3 \equiv 0$.

Доказательство. Отнесем M_2 к каноническому реперу, построенному в [I], стр. 253. Тогда

$$\begin{aligned} &\omega_1^3 = (\alpha + a)\omega^1, \qquad \omega_1^4 = \beta\omega^1 + b\omega^2, \\ &\omega_2^3 = (\alpha - a)\omega^2, \qquad \omega_2^4 = b\omega^1 + \beta\omega^2, \quad a \geq b \geq 0, \end{aligned} \tag{I8}$$

и сравнение с (4) дает

$$b_{11}^3 = \alpha + a, \quad b_{12}^3 = b_{21}^3 = 0, \quad b_{22}^3 = \alpha - a, \tag{I9}$$

$$b_{11}^4 = \beta, \qquad b_{12}^4 = b_{21}^4 = b, \quad b_{22}^4 = \beta; \tag{20}$$

кроме того, из (8) и (9) следует, что

$$R_{112}^2 = \alpha^2 + \beta^2 - a^2 - b^2, \quad R_{312}^4 = 2ab.$$

Плоскость выделяется здесь равенствами $a = b = \alpha = \beta = 0$, сфера равенствами $a = b = 0$. В силу леммы для остальных M_2

$$a > 0, \ b = 0, \ \alpha^2 + \beta^2 - a^2 = 0. \tag{2I}$$

---

[1] с одним исключением (см. добавление при корректуре)

Подставляя (I9) и (20) при (2I) в (I0), получим в силу (I3), что

$$\begin{aligned} d(\alpha+a)-\beta\omega_3^4 &= b_{111}^3\omega^1+b_{112}^3\omega^2,\\ d(\alpha-a)-\beta\omega_3^4 &= b_{122}^3\omega^1+b_{222}^3\omega^2,\\ 2a\omega_1^2 &= b_{112}^3\omega^1+b_{122}^3\omega^2,\\ 2a\omega_3^4 &= b_{111}^4\omega^1-b_{222}^4\omega^2,\\ d\beta+(\alpha-a)\omega_3^4 &= b_{222}^4\omega^2,\\ b_{112}^4 &= b_{122}^4=0; \end{aligned} \tag{22}$$

здесь учтено, что b_{ijk}^{α} симметричны по нижним индексам.

Условие параллельности α_3, равносильное условию $\bar\nabla b_{ijk}^{\alpha}=0$, дает теперь в силу (II) и равенств последнего ряда (22), что

$$b_{112}^3 b_{111}^4=0,\quad b_{122}^3 b_{222}^4=0,\quad b_{112}^3 b_{222}^4=b_{122}^3 b_{111}^4.$$

Отсюда, в свою очередь, следует, что

$$4a^2\omega_1^2\omega_3^4=0,$$

т.е. в применяемом каноническом репере либо $\omega_1^2=0$, либо $\omega_3^4=0$.

Оказывается, что вторая возможность приводит к первой. Итак, пусть $\omega_3^4=0$; из (22) следует, что тогда $\beta=\mathrm{const}$ и все $b_{ijk}^4=0$.

Если $\beta=0$, то в силу (2I) либо $\alpha+a=0$, либо $\alpha-a=0$. В первом случае $b_{111}^3=b_{112}^3=0$ и условие $\bar\nabla b_{ijk}^{\alpha}=0$ дает теперь $(b_{122}^3)^2=0$. Следовательно $\omega_1^2=0$. Аналогичный результат получается во втором случае.

Если $\beta\neq 0$, то из (2I) следует, что $AB=-\beta^2=\mathrm{const}$, где мы обозначили $A=\alpha+a$, $B=\alpha-a$. Отсюда дифференцированием получается

$$b_{111}^3 B+b_{122}^3 A=0,\qquad b_{112}^3 B+b_{222}^3 A=0,$$

в силу чего $b_{111}^3=\lambda A$, $b_{122}^3=-\lambda B$, $b_{112}^3=\mu A$, $b_{222}^3=-\mu B$. Первые два уравнения (22) дают теперь

$$\frac{dA}{A}=-\frac{dB}{B}=\lambda\omega^1+\mu\omega^2.$$

После внешнего дифференцирования и раскрытия по лемме Картана получим

$$\begin{aligned} d\lambda-\mu\omega_1^2 &= \sigma\omega^1+\tau\omega^2,\\ d\mu-\lambda\omega_1^2 &= \tau\omega^1+\varphi\omega^2. \end{aligned}$$

Подстановка в условия $\overline{\nabla} b^3_{ijk}=0$ приводит к соотношениям

$$\lambda^2 B+\mu^2 A=0,\quad \sigma=2\mu^2\frac{A}{A-B}-\lambda^2,\quad \varphi=2\lambda^2\frac{B}{A-B}+\mu^2,$$

и отсюда $\sigma+\varphi=\mu^2-\lambda^2$. С другой стороны, при внешнем дифференцировании третьего уравнения (22), которое имеет теперь вид

$$(A-B)\omega_1^2=\mu A\omega^1-\lambda B\omega^2,$$

получается, что $\sigma+\varphi=0$. Следовательно $\lambda^2=\mu^2$ и поэтому $\lambda^2(A+B)=0$. Отсюда $\lambda=\mu=0$, так как $B=-A$ приводит к $A^2=\beta^2=const$, а следовательно к тому же. Теперь все $b^3_{ijk}=0$ и $\omega_1^2=0$.

Таким образом остается исследовать лишь случай, когда $\omega_1^2=0$, т.е. когда $b^3_{112}=b^3_{122}=0$. Тогда

$$de_1=f_3\omega^1,\quad de_2=f_4\omega^2, \tag{23}$$

где векторы

$$f_3=(\alpha+a)e_3+\beta e_4,\quad f_4=(\alpha-a)e_3+\beta e_4$$

взаимно ортогональны в силу (2I). Для них находим

$$df_3=\{-[(\alpha+a)^2+\beta^2]e_1+[b^3_{111}e_3+b^4_{111}e_4]\}\omega^1, \tag{24}$$

$$df_4=\{-[(\alpha-a)^2+\beta^2]e_2+[b^3_{222}e_3+b^4_{222}e_4]\}\omega^2. \tag{25}$$

Из последнего тождества (2I) получается после дифференцирования, что

$$(\alpha+a)d(\alpha-a)+(\alpha-a)d(\alpha+a)=-2\beta d\beta;$$

подстановка сюда из (22) дает соотношения

$$(\alpha-a)b^3_{111}=-\beta b^4_{111},\quad (\alpha+a)b^3_{222}=-\beta b^4_{222},$$

которые в силу того же тождества (2I) равносильны с

$$\beta b^3_{111}=(\alpha+a)b^4_{111},\qquad \beta b^3_{222}=(\alpha-a)b^4_{222}.$$

Последние покажут, что векторы во вторых квадратных скобках в (24) и (25) коллинеарны, соответственно, к f_3 и f_4.

Если $\beta=0$, то из (2I) либо $\alpha+a=0$, либо $\alpha-a=0$, т.е. либо $f_3=0$, либо $f_4=0$. Эти случаи мы включим в дальнейшее исследование как особые.

Если $\beta\neq 0$, то f_3 и f_4 линейно независимы и можно перейти к реперу с такими базисными единичными векторами $\hat{e}_3$ и $\hat{e}_4$, что $f_3=\kappa_1\hat{e}_3$, $f_4=\kappa_2\hat{e}_4$. В новом репере имеет место $\hat{\omega}_3^4=0$, т.е. $\hat{e}_3$ и $\hat{e}_4$ параллельны в нормальной связности. Кроме того, из (23) следует, что

$$\hat{\omega}_1^3 = \kappa_1 \omega^1, \quad \hat{\omega}_1^4 = 0, \quad \hat{\omega}_2^3 = 0, \quad \hat{\omega}_2^4 = \kappa_2 \omega^2,$$

т.е.

$$\hat{b}_{11}^3 = \kappa_1, \quad \hat{b}_{12}^3 = \hat{b}_{21}^3 = \hat{b}_{22}^3 = 0, \quad \hat{b}_{11}^4 = \hat{b}_{12}^4 = \hat{b}_{21}^4 = 0, \quad \hat{b}_{22}^4 = \kappa_2.$$

Теперь (22) заменяются на

$$d\kappa_1 = \hat{b}_{111}^3 \omega^1, \quad d\kappa_2 = \hat{b}_{222}^4 \omega^2,$$
$$\hat{b}_{112}^3 = \hat{b}_{122}^3 = \hat{b}_{222}^3 = \hat{b}_{111}^4 = \hat{b}_{112}^4 = \hat{b}_{122}^4 = 0, \tag{26}$$

а условие параллельности α_3 сводится к равенствам

$$d\hat{b}_{111}^3 = 0, \quad d\hat{b}_{222}^4 = 0;$$

отсюда

$$\hat{b}_{111}^3 = c_1 = const, \quad \hat{b}_{222}^4 = c_2 = const. \tag{27}$$

Так как $d\omega^1 = d\omega^2 = 0$, то $\omega^1 = ds_1$, $\omega^2 = ds_2$ и в итоге для M_2 имеем, в силу (23), (24) и (25),

$$dx = e_1 ds_1 + e_2 ds_2,$$
$$de_1 = \kappa_1 \hat{e}_3 ds_1, \quad de_2 = \kappa_2 \hat{e}_4 ds_2, \tag{28}$$
$$d\hat{e}_3 = -\kappa_1 e_1 ds_1, \quad d\hat{e}_4 = -\kappa_2 e_2 ds_2,$$

где в силу (26) и (27) $\kappa_1 = c_1 s_1 + d_1$, $\kappa_2 = c_2 s_2 + d_2$, $d_1 = const$, $d_2 = const$. Отсюда видно, что, например, линии $s_2 = const$ являются плоскими линиями с натуральным уравнением $\kappa_1 = c_1 s_1 + d_1$, получаемыми друг из друга трансляционным движением. То же самое можно сказать относительно линий $s_1 = const$, причем плоскости линий разных семейств вполне ортогональны в E_4.

Рассмотренные выше особые случаи выделяются равенствами $c_1 = d_1 = 0$. Тогда в (28) следует положить $\kappa_1 \hat{e}_3 = f_3 = 0$; линии $s_2 = const$ являются прямыми. Если при этом $c_2 = 0$, $d_2 \neq 0$, то линии $s_1 = const$ являются конгруэнтными окружностями и M_2 есть цилиндр вращения в $E_3 \subset E_4$. Если $c_2 \neq 0$, то линии $s_1 = const$ являются конгруэнтными спиралями Корню ([8], стр. 263) и M_2 есть произведение такой спирали и прямой, т.е. соответствующий прямой цилиндр в $E_3 \subset E_4$.

В неособом случае получаются аналогично следующие случаи, указанные в формулировке теоремы: при $c_1 = c_2 = 0$, $d_1 \neq 0$, $d_2 \neq 0$ — случай 4), при $c_1 = 0$, $c_2 \neq 0$, $d_1 \neq 0$ — случай

6), при $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$ — случай 7).

Прямое утверждение доказано. Обратное утверждение вытекает непосредственно из полученных формул. Теорема доказана.

Замечания. I. Теоремой 2 описаны также поверхности M_2 с параллельной третьей фундаментальной α_3 в евклидовом пространстве E_3 — такими являются поверхности I), 2), 3) и 5).

2. Теорема 7 в [7] утверждает, что в предположениях теоремы I тензорное поле $B = \Delta A_H$ где $\Delta = \delta^{ij} \nabla_i \nabla_j$ — оператор Лапласа, ковариантно постоянно, имеет постоянные собственные значения, его собственные распределения инволютивны, а их интегральные многообразия параллельны и вполне геодезические. Так как на $M_2 \subset E_4$ с параллельной α_3 в репере $\{e_1, e_2, \hat{e}_3, \hat{e}_4\}$ в случаях 3)-7) мы имеем $A_H = \| k_i^2 \delta_i^j \|$, то $B = \| 2c_i^2 \delta_i^j \|$ и интегральными линиями собственных распределений для B (т.е. полей собственных направлений) являются те линий, произведением которых M_2 в этих случаях является.

3. Интересно отметить, что случаями I)-4), т.е. поверхностями M_2 с параллельной α_2, исчерпываются все двумерные орбиты M_2 подгрупп Ли движений в евклидовом пространстве E_4 (см. [3]). Этим при $n = 4$ конкретизируются результаты в [I0-I3].

Возникает задача провести аналогичные исследования при размерностях $n > 4$, в первую очередь при $n = 5$.

Литература

1. Картан Э., Риманова геометрия в ортогональном репере. М., Московск. ун-та, 1960.
2. Лаптев Г. Ф., Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально геометрических исследований. Тр. Моск. мат. о-ва, 1953, № 2, 275-382.
3. Лумисте Ю., Рийвес К., Перечисление и орбиты подгрупп Ли группы движений в евклидовом пространстве R_4. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1968, 220, 12-30.
4. Лумисте Ю. Г., Чакмазян А. В., Нормальная связность и подмногообразия с параллельными полями в пространстве постоянной кривизны. "Проблемы геометрии. Т. 12 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)", М., 1981, 3-30.

5. М и р з о я н В., О подмногообразиях с параллельной второй фундаментальной формой в пространствах постоянной кривизны. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1978, 464, 59-74.
6. М и р з о я н В. А., Подмногообразия с параллельной фундаментальной формой высшего порядка. Тарту, 1978 (Рукопись деп. в ВИНИТИ; РЖМат, 1978, 10А542 ДЕП).
7. М и р з о я н В. А., Подмногообразия с коммутирующим нормальным векторным полем. "Проблемы геометрии. Т. 14. (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)". М., 1983, 73-100.
8. С а в е л о в А. А. Плоские кривые. М., 1960.
9. C h e n B. - Y. Geometry of submanifolds.- New-York: Marcel Dekker, 1973.
10. F e r u s D. Produkt-Zerlegungen von Immersionen mit Paralleler zweiter Fundamentalform.- Math. Ann, 1974, H. 211, S. 1-5.
11. F e r u s D. Immersions with parallel second fundamental form.- Math. Z., 1974, v. 140, No. 1, p. 87-93.
12. F e r u s D. Symmetric submanifold of euclidean space.- Math. Ann. 1980, v. 247, No. 1, p. 81-93.
13. V i l m s J. Submanifolds of euclidean space with parallel second fundamental form.- Proc. Amer. Math. Soc., 1972, v. 32, p. 263-267.
14. W a l d e n R. Untermannigfaltigkeiten mit paralleler zweiter Fundamentalform in euklidischen Räumen und Sphären.- Manuscripta math., 1973, H. 10, S. 91-102.

Поступило
22 IX 1982

SUBMANIFOLDS WITH PARALLEL THIRD FUNDAMENTAL FORM

Ü. Lumiste, V. Mirzojan

S u m m a r y

If α_2 is the second fundamental form of a submanifold M_m in a space form $M_n(c)$ then $\alpha_3 = \bar\nabla\alpha_2$ is the third fundamental form, where $\bar\nabla$ is the van der Waerden-Bortolotti connection.

Let $\bar\nabla\alpha_3 = 0$ for M_m and let the mean curvature vector $H \neq 0$. It is proved, that eigenspace distributions of the $A_H: TM_m \to TM_m$ are involutive and their integral submanifolds form a orthogonal conjugate system on M_m. If A_H has

simple spectrum, then the Levi-Civita connection and the normal connection are both flat. A surface M_2 with $\bar{\nabla}\alpha_3=0$ in E_4 is an orbit of a Lie subgroup of motions in E_4 (when $\alpha_3\equiv 0$) or a product surface of a Cornu spiral with a straight line, plane circle or an other Cornu spiral, or a surface M_2 described below in the addition by proof.

Добавление при корректуре

Ввиду ошибки, допущенной при анализе случая $\beta\neq 0$ в доказательстве теоремы 2, в этой теореме пропущен класс поверхностей M_2 с параллельной α_3, описываемый вполне интегрируемой системой

$$\begin{gathered}
\omega^3=\omega^4=0,\\
\omega_1^3=A\omega^1,\quad \omega_2^3=-\frac{\beta^2}{A}\omega^2,\quad \omega_1^4=\beta\omega^1,\quad \omega_2^4=\beta\omega^2,\\
\omega_1^2=\Psi(\pm A\omega^1+\beta\omega^2),\quad \omega_3^4=0,\\
dA=\pm\frac{1}{\beta}(A^2+\beta^2)\omega_1^2,\quad d\Psi=\pm\Psi\left(\frac{2\beta}{A}-3\frac{A}{\beta}\right)\omega_1^2,
\end{gathered}$$

где $\beta=\mathrm{const}\neq 0,\ A\neq 0,\ \Psi\neq 0.$ Исследование геометрического строения поверхностей этого класса будет дано в одном из следующих публикаций.

О ГАУССОВЫХ КРИВИЗНАХ ФОКАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ V_2 ПСЕВДОКОНГРУЭНЦИИ ПРЯМЫХ В E_n

Ю. Лумисте, Л. Туулметс
Кафедра алгебры и геометрии

1. Известна роль, которую играют псевдосферические конгруэнции прямых в евклидовом пространстве E_3 при геометрической интерпретации классических преобразований Бэклунда для уравнения $\psi_{12} = \sin\psi$. Эта интерпретация опирается на следующие факты.

А. Если фокальное соответствие $x \longmapsto x^*$ между двумя поверхностями V_2 и V_2^* в E_3 устанавливается псевдосферической конгруэнцией прямых (т.е. таким образом, что $|\overrightarrow{xx^*}| = r = const$ и касательные плоскости к этим поверхностям в точках x и x^* содержат прямую xx^* и составляют постоянный угол ψ), то V_2 и V_2^* обладают равной постоянной гауссовой кривизной $K = -\sin^2\psi/r^2$ (теорема Бэклунда, [5], [6], [4], §41, [7]).

Б. Для заданного направления в заданной точке поверхности V_2 с $K = const < 0$ в E_3 существует псевдосферическая конгруэнция, для которой V_2 является фокальной поверхностью ([5], [7]).

В. Асимптотические линии поверхности V_2 с $K = const < 0$ в E_3 образуют сеть Чебышева [6].

Г. Псевдосферическая конгруэнция в E_3 является конгруэнцией W (т.е. устанавливает соответствие асимптотических линий поверхностей V_2 и V_2^* [6], [4], §41).

Д. Гауссова кривизна двумерного риманова многообразия V_2, отнесенного к сети Чебышева с сетевым углом ψ, выражается формулой $K = -\psi_{12}/\sin\psi$ ([9], [6], [8], гл. 12).

Использование и аналитическое оформление этих фактов в случае поверхности V_2 с $K = -1$ в E_3 и приводит к преобразованию Бэклунда для уравнения $\psi_{12} = \sin\psi$. История этого вопроса частично изложена в [1], §14 (см. также [2]).

Если ставить программу обобщения геометрической схемы преобразований Бэклунда для указанного уравнения с использованием поверхностей V_2 в евклидовом пространстве E_n, то первым шагом должно быть обобщение положения А. Решению этой задачи посвящается настоящая заметка. (Заметим, что некоторые обобщения положений А и Б получены для подмногообразий V_m в E_{2m-1}; см. [10], а также [11].)

Ниже доказывается следующая теорема о гауссовых кривизнах фокальных поверхностей V_2 псевдоконгруэнции прямых в E_n

Теорема. Пусть для поверхности $V_2 \subset E_n$ существуют отличная от нее поверхность $V_2^* \subset E_n$ и диффеоморфизм $V_2 \to V_2^*$, $x \mapsto x^*$, такие, что $\overrightarrow{xx^*} \in T_x V_2 \subset E_n$ и $\overrightarrow{x^*x} \in T_{x^*} V_2^* \subset E_n$ для любой точки $x \in V_2$. Пусть $r = |\overrightarrow{xx^*}| \neq 0$; обозначим угол между $T_x V_2$ и $T_{x^*} V_2^*$ через φ, а гауссовы кривизны поверхностей V_2 и V_2^* в соответствующих точках x и x^* через K и K^*.

Из следующих четырех утверждений каждое влечет остальные три:

$$r = \mathrm{const} \quad \text{и} \quad \varphi = \mathrm{const}, \tag{1.1}$$

$$K = K^* = -\frac{\sin^2\varphi}{r^2} = \mathrm{const}, \tag{1.2}$$

$$K = K^* = -\frac{\sin^2\varphi}{r^2} \quad \text{и} \quad r = \mathrm{const}, \tag{1.3}$$

$$K = K^* = -\frac{\sin^2\varphi}{r^2} \quad \text{и} \quad \varphi = \mathrm{const}. \tag{1.4}$$

Доказательство опирается на некоторые получаемые ниже формулы, которыми в предположениях теоремы гауссовы кривизны K и K^* выражаются через величину $\frac{\sin^2\varphi}{r^2}$, через компоненты второго фундаментального тензора поверхности V_2 и частные производные величин r и φ (формулы (3.4) и (4.1)). Эти формулы представляют и самостоятельный интерес.

Заметим, что многообразие прямых xx^* в ситуации, указанной в теореме, называется псевдоконгруэнцией прямых. Если выполнено (1.1), то говорят о псевдосферической псевдоконгруэнции прямых. В случае $n=4$ импликация (1.1) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ (1.2) доказана в [3] (где вместо "псевдосферической" говорят о "C-фокальной" псевдоконгруэнции).

2. Используем аппарат подвижного ортонормированного репера и внешнее дифференциальное исчисление. Если $\{x, \vec{e}_I\}$ является подвижным репером в E_n и $\vec{x}$ радиусом-вектором точки x, то

$$d\vec{x} = \vec{e}_I\theta^I, \quad d\vec{e}_I = \vec{e}_K\theta_I^K \quad (I, K, \ldots = 1, \ldots, n), \tag{2.1}$$

где

$$d\theta^J = \theta^K \wedge \theta^J_K, \quad d\theta^J_K = \theta^L_K \wedge \theta^K_L, \quad \theta^K_J + \theta^J_K = 0. \qquad (2.2)$$

Требуя, чтобы $x \in V_2$, $\vec{e}_1 = \frac{1}{r}|\overrightarrow{xx^*}|$ и $\vec{e}_2 \in T_x V_2$, имеем

$$\theta^3 = \ldots = \theta^n = 0, \qquad (2.3)$$

и поэтому

$$\theta^1 \wedge \theta^\alpha_1 + \theta^2 \wedge \theta^\alpha_2 = 0 \quad (\alpha, \beta, \ldots = 3, \ldots, n).$$

Отсюда по лемме Картана

$$\theta^\alpha_1 = b^\alpha_{11}\theta^1 + b^\alpha_{12}\theta^2, \qquad \theta^\alpha_2 = b^\alpha_{12}\theta^1 + b^\alpha_{22}\theta^2. \qquad (2.4)$$

Так как двумерные касательные плоскости $T_x V_2$ и $T_{x^*} V_2$ имеют общую прямую xx^*, то они принадлежат некоторой 3-мерной плоскости $(E_3)_x$ в E_n и $\vec{e}_3$ можно выбрать принадлежащим этой плоскости $(E_3)_x$. Точка $x^* \in V_2^*$ имеет радиус-вектор $\vec{x}^* = \vec{x} + r\vec{e}_1$ и поскольку

$$dx^* = (\theta^1 + dr)\vec{e}_1 + (\theta^2 + r\theta^2_1)\vec{e}_2 + r(\theta^3_1 \vec{e}_3 + \theta^\rho_1 \vec{e}_\rho) \qquad (2.5)$$
$$(\rho, \sigma, \ldots = 4, \ldots, n),$$

то такой выбор означает, что $\theta^\gamma_1 = 0$, т.е. в формулах (2.4) имеем

$$b^\gamma_{11} = b^\gamma_{12} = 0.$$

Поэтому линейная оболочка векторов $b^\alpha_{ij}\xi^i\xi^j\vec{e}_\alpha$ с произвольными $\xi^i \in \mathbb{R}$, называемая первой нормальной плоскостью $N^1_x V_2$ к V_2 в точке x, является в данном случае двумерной – она натянута на $\vec{b}_{11} = b^3_{11}\vec{e}_3 \parallel \vec{b}_{12} = b^3_{12}\vec{e}_3$ и $\vec{b}_{22} = b^\alpha_{22}\vec{e}_\alpha$, и вектор $\vec{e}_4$ можно выбрать принадлежащим этой плоскости $N^1_x V_2$. Тогда

$$b^5_{22} = \ldots = b^n_{22} = 0,$$

т.е.

$$\theta^3_i = h_{ij}\theta^j, \quad h_{12} = h_{21}, \quad \theta^4_1 = 0, \quad \theta^4_2 = k_{22}\theta^2, \qquad (2.6)$$

$$\theta^5_i = \ldots = \theta^n_i = 0; \qquad (2.7)$$

здесь обозначено $h_{ij} = b^3_{ij}$, $k_{22} = b^4_{22}$.

Присоединяя к точке $x^* \in V_2^*$ репер $\{x^*, \vec{e}^{\,*}_J\}$, аналогичным образом имеем

$$\begin{aligned} \vec{e}^{\,*}_1 &= \vec{e}_1, \\ \vec{e}^{\,*}_2 &= \vec{e}_2\cos\varphi + \vec{e}_3\sin\varphi, \\ \vec{e}^{\,*}_3 &= -\vec{e}_2\sin\varphi + \vec{e}_3\cos\varphi, \\ \vec{e}^{\,*}_4 &= \vec{e}_4, \ldots, \vec{e}^{\,*}_n = \vec{e}_n, \end{aligned} \qquad (2.8)$$

причем

$$d\vec{x}^* = \vec{e}_1^*\overset{*}{\theta}{}^1 + \vec{e}_2^*\overset{*}{\theta}{}^2 = \vec{e}_1\overset{*}{\theta}{}^1 + (\vec{e}_2\cos\varphi + \vec{e}_3\sin\varphi)\overset{*}{\theta}{}^2.$$

Сравнение с (2.5) приводит в силу (2.6) и (2.7) к равенствам

$$\begin{aligned} \overset{*}{\theta}{}^1 &= \theta^1 + dr, \\ \overset{*}{\theta}{}^2\cos\varphi &= \theta^2 + r\theta_1^2, \\ \overset{*}{\theta}{}^2\sin\varphi &= r\theta_1^3. \end{aligned} \qquad (2.9)$$

Здесь $\sin\varphi = 0$ привело бы к $\theta_1^3 = 0$, а отсюда следовало бы, что V_2 является торсом, образованным прямыми xx^*, и что V_2^* совпадает с V_2, вопреки предположению теоремы. Поэтому

$$\frac{1}{r}\theta^2 + \theta_1^2 = \cot\varphi\cdot\theta_1^3. \qquad (2.10)$$

3. Гауссова кривизна K поверхности V_2 определяется из формулы

$$d\theta_1^2 = -K\,\theta^1\wedge\theta^2, \qquad (3.1)$$

и так как, в силу (2.2), (2.6) и (2.7),

$$d\theta_1^2 = \theta_1^3\wedge\theta_2^3 = -\theta_1^3\wedge\theta_2^3,$$

то

$$K\,\theta^1\wedge\theta^2 = \theta_1^3\wedge\theta_2^3. \qquad (3.2)$$

Если продифференцировать (2.10) внешним образом, применив (2.2) и (3.1), получается соотношение

$$-\frac{1}{r^2}dr\wedge\theta^2 + \frac{1}{r}\theta^1\wedge\theta_1^2 - K\,\theta^1\wedge\theta^2 = -\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi}\wedge\theta_1^3 + \cot\varphi\cdot\theta_1^2\wedge\theta_2^3.$$

Подстановка сюда θ_1^2 из (2.10) дает, в силу (3.2) и тождества

$$\theta^1\wedge\theta_1^3 = -\theta^2\wedge\theta_2^3 = h_{12}\theta^1\wedge\theta^2,$$

что

$$-\frac{1}{r^2}dr\wedge\theta^2 - \frac{1}{r^2}\theta^1\wedge\theta^2 - K\,\theta^1\wedge\theta^2 =$$

$$= -\frac{1}{\sin^2\varphi}d\varphi\wedge\theta_1^3 + \cot^2\varphi.$$

Обозначив

$$dr = r_1\theta^1 + r_2\theta^2, \quad d\varphi = \varphi_1\theta^1 + \varphi_2\theta^2, \qquad (3.3)$$

получим отсюда

$$K = -\frac{\sin^2\varphi}{r^2}(1 + r_1) + (h_{12}\varphi_1 - h_{11}\varphi_2). \qquad (3.4)$$

4. Для репера $\{x^*, \vec{e}_j^*\}$, присоединенного к точке $x^* \in V_2$ и определяемого формулами (2.8), имеем аналогичные к (2.1) формулы

Из них получаются, дополнительно к (2.9),

$$\overset{*}{\theta}{}_1^3 = d\vec{e}_1^{\,*}\cdot\vec{e}_3^{\,*} = -\theta_1^2\sin\varphi + \theta_1^3\cos\varphi = \frac{\sin\varphi}{r}\theta^2,$$
$$\overset{*}{\theta}{}_2^3 = d\vec{e}_2^{\,*}\cdot\vec{e}_3^{\,*} = \theta_2^3 + d\varphi,$$
$$\overset{*}{\theta}{}_1^4 = d\vec{e}_1^{\,*}\cdot\vec{e}_4^{\,*} = 0, \ \dots, \ \overset{*}{\theta}{}_1^n = d\vec{e}_1^{\,*}\cdot\vec{e}_n^{\,*} = 0.$$

Имеет место формула, аналогичная (3.2), и так как

$$\overset{*}{\theta}{}_1^3\wedge\overset{*}{\theta}{}_2^3 = \frac{\sin\varphi}{r}\theta^2\wedge(h_{12}\theta^1 + h_{22}\theta^2 + \varphi_1\theta^1 + \varphi_2\theta^2) =$$
$$= -\frac{\sin\varphi}{r}(h_{12}+\varphi_1)\theta^1\wedge\theta^2,$$
$$\overset{*}{\theta}{}^1\wedge\overset{*}{\theta}{}^2 = (\theta_1 + dr)\wedge\frac{r}{\sin\varphi}\theta_1^3 =$$
$$= [(1+r_1)\theta^1 + r_2\theta^2]\wedge\frac{r}{\sin\varphi}(h_{11}\theta^1 + h_{12}\theta^2) =$$
$$= \frac{r}{\sin\varphi}[h_{12}(1+r_1) - h_{11}r_2],$$

то

$$K^* = -\frac{\sin^2\varphi}{r^2}\,\frac{h_{12}+\varphi_1}{h_{12}(1+r_1) - h_{11}r_2}. \tag{4.I}$$

5. Формулы (3.4) и (4.I) и являются искомыми формулами для гауссовых кривизн поверхностей V_2 и V_2^* при предположениях теоремы, о которых говорилось в п. I. Доказательство теоремы получается из них следующим образом.

Пусть $r = \mathrm{const}$, $\varphi = \mathrm{const}$. Тогда из (3.4) и (4.I)

$$K = K^* = -\frac{\sin^2\varphi}{r^2}, \tag{5.I}$$

т.е. из (I.I) следуют остальные утверждения теоремы.

Обратно, пусть имеет место (5.I). Тогда из (3.4) и (4.I)

$$h_{12}\varphi_1 - h_{11}\varphi_2 = \frac{\sin^2\varphi}{r^2}r_1, \tag{5.2}$$

$$h_{12}r_1 - h_{11}r_2 = \varphi_1. \tag{5.3}$$

Если при этом $K = \mathrm{const}$, то из тожества $Kr^2 + \sin^2\varphi = 0$ получается дифференцированием, что $dr = r\cot\varphi\cdot d\varphi$. Уравнения (5.2) и (5.3) дают теперь

$$\sin^2\varphi\cdot\varphi_1 = 0$$

и поэтому $\varphi_1 = r_1 = 0$ и $h_{11}\varphi_2 = h_{11}r_2 = 0$. Здесь $h_{11} = 0$ невозможно, так как вместе с (5.I) и (3.2) оно привело бы к $\theta_1^3 = \pm\frac{\sin\varphi}{r}\theta^2$ и теперь внешним дифференцированием из (2.I0) получилось бы, что $\cos\varphi = \pm 1$ и следовательно $\sin\varphi = 0$, что противоречит, как указано выше, предположению теоремы. Поэтому $\varphi_2 = \tau_2 = 0$, т.е. из (I.2) следует (I.I), а вместе с тем и остальные утверждения теоремы.

Если при (5.I) имеем $\tau = const$, то из (5.3) получается, что $\varphi_1 = 0$, а из (5.2), что $\varphi_2 = 0$. Аналогично, если при (5.I) имеем $\varphi = const$, то из (5.2) следует $\tau_1 = 0$ и из (5.3) следует $\tau_2 = 0$. Теорема доказана.

6. Этим сделан первый шаг, касающийся положения А, на пути реализации программы обобщения геометрической схемы преобразований Бэклунда, указанной в п. I. Что касается положения Б для пространства E_3, то при переходе к случаю пространства E_n при $n > 3$ оно значительно меняется. Для поверхности V_2 с $K = const < 0$ в E_n не всегда существует псевдосферическая конгруэнция, для которой V_2 является фокальной поверхностью, а если такая существует (для этого в силу (2.7) необходимо, чтобы $\dim N_x^1 V_2 = 2$ для любой точки $x \in V_2$), то при $n > 3$ только одна. Поэтому на V_2 и на свободу выбора V_2^* налагаются дополнительные условия, по сравнению со случаем $n = 3$. Анализ этих условий и возможностей обобщить положения В и Г является предметом следующих публикаций. Заметим здесь лишь, что вопрос о существовании пары поверхностей V_2 и V_2^* в E_n, описанной в теореме в п. I, сводится к вопросу о существовании псевдосферической фокальной псевдоконгруэнции прямых в E_n, который при $n = 4$ решен в [3], §4 методами теории совместности Картана пфаффовых систем — такая псевдоконгруэнция в E_4 существует с произволом четырех функций одного аргумента. Напомним, что псевдосферическая конгруэнция в E_3 существует с произволом двух функций одного аргумента (см. [4], §40).

В заключение заметим, что положение Д вообще не зависит от коразмерности поверхности V_2 в E_n.

Литература

I. Ибрагимов Н. Х., Группы преобразований в математической физике. Москва, 1983.

2. Кадомцев, С. Б., Позняк Э. Г., Соколов Д. Д., Некоторые вопросы геометрии Лобачевского, связанные с физикой. Проблемы геометрии, т. 13 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР), Москва, 1977, 157-188.

3. Туулметс Л., Тамм Э., Фокальные псевдоконг-

руэнции с постоянными инвариантами в R_4. Изв. АН ЭССР, физ.-мат., 1972, № 4, 370-378.
4. Ф и н и к о в С. П., Теория конгруэнций. Москва-Ленинград, 1950.
5. B ä c k l u n d A. V., Om ytor med konstant negativ krökning. Lunds Universitets Arsskrift, 1883, Bd.19.
6. B i a n c h i L., Sui sistemi doppiamente infiniti di retti.-Annali di Mat., 1887, 15, 161-172; Lezioni di Geometria Differenziale. Pisa, 1893.
7. C h e r n S.-S., T e r n g C.-L. An analogue of Bäcklund's theorem in affine geometry.-Rocky Mountain J. Math., 1980, v. 10, No. 1, p. 105-124.
8. D a r b o u x G. Lecons sur la Théorie Générale des Surfaces, v. III. Paris, 1894.
9. T c h e b y c h e f P. Sur la coupe des vêtements.-Assoc. Franc., 1878; Oeuvres II, p. 708; на русск. яз.: Успехи матем. н., 1946, I, вып. 2(12).
10. T e u e n b l a t K. T e r n g, C.-L., Bäcklund's theorem for n-dimensional submanifolds of R^{2n-1}. — Ann. Math., 1980, v. 111, p. 477-490.
11. T e r n g C.-L. A higher dimension generalisation of the Sine-Gordon equations and its soliton theory. -Ann. Mat., 1980, v. 11, p. 491-510.

Поступило
14 XI 1983

ON GAUSSIAN CURVATURES OF THE FOCAL SURFACES V_2 OF A LINE PSEUDOCONGRUENSE IN E_n

Ü.Lumiste, L.Tuulmets

S u m m a r y

As a first step to generalize the geometrical scheme of Bäcklund's transformation for the Sine-Gordon equation $\psi_{12} = \sin\psi$ the following theorem is stated.

T h e o r e m. Let for a surface $V_2 \subset E_n$ there are an other surface V_2^*, not coinciding with V_2, and a diffeomorphism $V_2 \to V_2^*$, $x \mapsto x^*$, such that $\overrightarrow{xx^*} \in T_x V_2$ and $\overrightarrow{x^* x} \in T_{x^*} V_2^*$ for every point $x \in V_2$. Let $r = |\overrightarrow{xx^*}| \neq 0$, let φ denotes the angle between $T_x V_2$ and $T_{x^*} V_2^*$, and let K and K^* be the Gaussian curvatures of the surfaces V_2 and V_2^* in the corresponding points x and x^*.

Every of the next four statements gives as consequences the other three:

(1) $r = \text{const}$ and $\varphi = \text{const}$

(2) $\mathcal{K} = \mathcal{K}^* = -\dfrac{\sin^2\varphi}{r^2} = \text{const}$

(3) $\mathcal{K} = \mathcal{K}^* = -\dfrac{\sin^2\varphi}{r^2}$ and $r = \text{const}$

(4) $\mathcal{K} = \mathcal{K}^* = -\dfrac{\sin^2\varphi}{r^2}$ and $\varphi = \text{const}$

The proof uses the formulas (3.4) and (4.1) for $\mathcal{K}$ and $\mathcal{K}^*$, which have an own importance.

К ВОПРОСУ О p-РЕДУКТИВНОСТИ ФАКТОРПРОСТРАНСТВ ГРУПП ЕВКЛИДОВЫХ ДВИЖЕНИЙ

К.Рийвес

Эстонская сельскохозяйственная академия

1. Введение. Рассматривается группа Ли движений $G(n) = \mathcal{O}(n) * T_n$ n-мерного вещественного евклидова пространства R_n. Пусть H является ее некоторой замкнутой подгруппой Ли. В работе [6] рассматривались однородные факторпространства $G(n)/H$ при $n = 4$ и $n = 5$ с точки зрения их p-редуктивности (в смысле Кантора [2]). Выяснилось, что в этих случаях единственной возможностью будет $p = 1$, т.е. среди всевозможных $G(4)/H$ и $G(5)/H$ существуют лишь редуктивные [8]. В настоящей работе даются некоторые необходимые условия для того, чтобы при произвольном n факторпространство $G(n)/H$ являлось p-редуктивным, предполагая, что действие подгруппы H в пространстве R_n - нетранзитивное. С помощью полученных условий 1) результаты [6] достигаются более простым способом, чем в [6]; 2) при произвольном значении n во многих случаях удается легко ответить на вопрос, может ли пространство $G(n)/H$ быть p-редуктивным с $p>1$ или нет.

Пункты 2 и 3 работы имеют вводный характер. В них помимо исходных понятий и результатов описываются применяемые обозначения. В п. 4 сформулируется основная теорема, в п. 5 результат применяется в случаях $n = 4$ и $n = 5$, в п. 6 указываются некоторые возможности его применения при произвольном значении n, а в п. 7 излагается доказательство теоремы.

2. Исходные понятия и результаты. Пусть замкнутая r-параметрическая подгруппа Ли H группы $G(n) = \mathcal{O}(n) * T_n$ задается вполне интегрируемой пфаффовой системой

$$\theta^A = 0 \; , \; A = r+1, \dots, \dim G(n) = \tfrac{1}{2} n(n+1), \qquad (1)$$

где θ^A - независимые инвариантные формы группы $G(n)$. Если обозначить через Ω^R базисные инвариантные формы подгруппы Ли $H \subset G(n)$, то в качестве базиса группы $G(n)$

можно взять множество инвариантных форм

$$\{ \vartheta^R, \theta^A \mid R = 1, \dots, r ; \; A = r+1, \dots, \dim G(n) \},$$

где

$$\vartheta^R = \Omega^R + p^R_A \theta^A \qquad (2)$$

и p^R_A - некоторые подходяще выбранные постоянные.

Пусть Λ^2 - линейное подпространство 2-форм в грассмановой алгебре внешних форм над полем $\mathbb{R}$ с образующими ϑ^R и θ^A. Оно представимо как сумма подпространств трех типов, которые натянуты соответственно на базисные элементы $\vartheta^R \wedge \vartheta^S$, $\theta^A \wedge \theta^B$ и $\vartheta^R \wedge \theta^A$ ($R, S, \dots = 1, \dots, r$; $A, B, \dots = r+1, \dots, \dim G(n)$). Обозначим эти подпространства коротко через $V(\vartheta)$, $V(\theta)$ и $V(\vartheta, \theta)$, т.е.

$$\Lambda^2 = V(\vartheta) \oplus V(\theta) \oplus V(\vartheta, \theta).$$

Основываясь на определение p-редуктивности пространства $G(n)/H$, данное Кантором в [2], легко доказать результат, который можно принять за определение p-редуктивности. Именно, справедливо

Предложение [6]. Пространство $G(n)/H$ является p-редуктивным тогда и только тогда, когда существует разбиение множества $\{1, \dots, r\}$ непересекающиеся подмножества $\{R(1)\}, \dots, \{R(p)\}$ так, что

$$\{R(1)\} \cup \dots \cup \{R(p)\} = \{1, \dots, r\} \qquad (3)$$

и из уравнений Маурера-Картана для группы $G(n)$ следуют соотношения

$$\begin{aligned} &d\theta^A \in V(\vartheta^{R(1)}, \theta) \oplus V(\theta), \\ &d\vartheta^{R(i)} \in V(\vartheta^{R(i+1)}, \theta) \oplus V(\vartheta) \oplus V(\theta), \; i = 1, \dots, p-1, \\ &d\vartheta^{R(p)} \in V(\vartheta) \oplus V(\theta), \end{aligned} \qquad (4)$$

где $V(\vartheta^{R(i)}, \theta) \subset V(\vartheta, \theta)$ натянуты на базисные элементы $\vartheta^{R(i)} \wedge \theta^A$ для каждого $i = 1, \dots, p$.

Отсюда следует, что если $p = 1$, то $\{R(1)\} = \{1, \dots, r\}$ и при условиях (4) пространство $G(n)/H$ является редуктивным. Если же $p > 1$, то в условиях (3) справедливы

$$\{R(1)\} \neq \{1, \dots, r\}, \; \{R(i)\} \cap \{R(k)\} = \emptyset \text{ при } i \neq k.$$

Тогда при выполнении условий (4) пространство $G(n)/H$ будет p-редуктивным с $p > 1$. Имеют место и обратные утверждения.

3. Постановка задачи и задание нетранзитивной подгруппы в $G(n)$. По вышесказанному ясно, что если известна система форм θ^A и система форм Ω^R некоторой подгруппы Ли H, то с помощью условий (3), (4) можно установить, является ли соответствующее пространство $G(n)/H$ p-редуктивным или нет. В случаях $n = 4$ и $n = 5$ такая работа проделана в [5,7] для $p = 1$ и в [6] для $p > 1$. Оказывается, что в случае нетранзитивного действия подгруппы Ли H в R_n из условий (4) можно вывести некоторые условия p-редуктивности для произвольного значения n. Эти условия дают возможность во многих случаях либо по структуре системы форм Ω^R, либо по значениям коэффициентов уравнений (1) решить, может ли пространство $G(n)/H$ быть p-редуктивным с $p > 1$ или нет. Чтобы получить искомые условия, нужно поэтому сперва исследовать возможную структуру как системы форм θ^A, так и системы форм ϑ^R некоторой нетранзитивной подгруппы Ли $H \subset G(n)$, а затем, учитывая эту структуру в условиях (4), сделать возможные выводы. С этой целью рассмотрим в пространстве R_n ортонормированный подвижный репер $\{M, e_J\}$ $(J = 1, \dots, n)$, присоединенный к точке $M \in R_n$. Его инфинитезимальное перемещение под действием группы движений $G(n)$ определяется формулами

$$
\begin{aligned}
dM &= \omega^K e_K, \quad J, K, \dots = 1, \dots, n;\\
de_J &= \omega_J^K e_K, \quad \omega_J^K + \omega_K^J = 0,
\end{aligned}
$$

где $\{\omega^K, \omega_J^K\}$ является множеством базисных инвариантных форм группы движений $G(n)$, удовлетворяющих структурным уравнениям

$$
\begin{aligned}
d\omega^K &= \omega^L \wedge \omega_L^K,\\
d\omega_J^K &= \omega_J^L \wedge \omega_L^K.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Пусть H является r-параметрической подгруппой Ли в $G(n)$, действующей в R_n нетранзитивно, и пусть максимальной размерностью ее орбит в R_n будет $m < n$. Чтобы перейти от базиса инвариантных форм $\{\omega^K, \omega_J^K\}$ группы $G(n)$ к базису $\{\vartheta^R, \theta^A\}$, выбранному специальным образом по вполне интегрируемой системе (1), задающей подгруппу H в группе $G(n)$, следует иметь в виду, что θ^A являются линейными комбинациями форм ω^K, ω_J^K с постоянными коэффициентами (см. [1], стр. 18). Эти линейные комбинации определяются в ходе канонизации репера $\{M, e_J\}$ с учетом леммы Картана. Именно, если направить векторы $e_1, \dots, e_m$ вдоль касательной плоскости $R_m \subset R_n$ орбиты V_m, то

$$\omega^a = 0, \quad a = m+1, \dots, n. \tag{6}$$

Внешнее дифференцирование этих уравнений дает, в силу соотношений (5) и леммы Картана,

$$\omega^a_\beta - B^{[a\beta]}_\gamma \omega^\gamma = 0, \quad \beta, \gamma = 1, \dots, m, \tag{7}$$

где постоянные коэффициенты удовлетворяют условиям

$$B^{[a\beta]}_\gamma = B^{[a\gamma]}_\beta. \tag{8}$$

Дифференциальное продолжение выражений (7) приводит с помощью леммы Картана и (8) к линейной системе относительно форм ω^α_β, ω^a_b $(\alpha > \beta,\ a > b)$

$$B^{[a\varepsilon]}_\gamma \omega^\gamma_\beta + B^{[a\beta]}_\gamma \omega^\gamma_\varepsilon - B^{[c\beta]}_\varepsilon \omega^a_c = D^{[a\beta]}_{\varepsilon\gamma} \omega^\gamma. \tag{9}$$

Так как, исходя из (6), (7), (9) нами ищется вполне интегрируемая пфаффова система, выделяющая в группе $G(n)$ рассматриваемую r-параметическую подгруппу H, то нужно предполагать, что система (9) разрешима. Пусть ее решением будет

$$\begin{aligned} \omega^\gamma_\varepsilon &= E^{[\gamma\varepsilon]}_R \Omega^R, \\ \omega^c_\alpha &= E^{[c\alpha]}_R \Omega^R, \end{aligned} \tag{10}$$

где через Ω^R $(R = 1, \dots, \dim H = r)$ обозначены базисные инвариантные формы подгруппы H, а $E^{[\gamma\varepsilon]}_R$, $E^{[ca]}_R$ – некоторые функции коэффициентов $B^{[a\beta]}_\varsigma$, $D^{[a\beta]}_{\pi\varsigma}$ $(\pi, \varsigma, \dots = 1, \dots, m)$, удовлетворяющие, в силу $\omega^k_j + \omega^j_k = 0$, условиям

$$E^{[\gamma\delta]}_R = -E^{[\varepsilon\gamma]}_R, \quad E^{[ca]}_R = -E^{[\alpha c]}_R. \tag{11}$$

Кроме равенств (10) предположение разрешимости системы (9) в общем случае приводит к некоторым совместным соотношениям относительно параметров $B^{[a\beta]}_\varsigma$, $D^{[a\beta]}_{\pi\varsigma}$, конкретная структура которых нас сейчас не интересует. Для нас более важна структура системы форм Ω^R $(R = 1, \dots, r)$. Чтобы ее описать, введем обозначения

$$\mathcal{M} = \{\omega^\alpha_\beta \mid \alpha, \beta, \dots = 1, \dots, m;\ \alpha > \beta\},$$
$$\mathcal{N} = \{\omega^a_b \mid a, b, \dots = m+1, \dots, n;\ a > b\}.$$

Пусть

$$\mathcal{M}_1 = \mathcal{M} \cap \{\Omega^R \mid R = 1, \dots, r\},$$
$$\mathcal{N}_1 = \mathcal{N} \cap \{\Omega^R \mid R = 1, \dots, r\}.$$

Тогда из (I0) ясно, что $\omega^{\gamma}_{\delta} \in \mathcal{M}\setminus\mathcal{M}_1$, $\omega^{c}_{\alpha} \in \mathcal{N}\setminus\mathcal{N}_1$. Так как в силу (7) справедливо $\{\omega^{\gamma'} \mid \gamma' = 1,\dots,m\} \subset \{\Omega^R \mid R = 1,\dots,r\}$, то $r \geq m$. Следовательно, при $r = m$ все формы $\omega^{\gamma}_{\delta} \in \mathcal{M}$ и $\omega^{c}_{\alpha} \in \mathcal{N}$ выражаются через $\omega^{\gamma'}$ $(\gamma' = 1,\dots,m)$, т.е. $\{\Omega^R \mid R = 1,\dots,m\} = \{\omega^{\gamma'} \mid \gamma' = 1,\dots,m\}$. Если же $r > m$, то $\{\Omega^R \mid R = 1,\dots,r\} = \{\omega^{\gamma'} \mid \gamma' = 1,\dots,m\} \cup \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{N}_1$. Следует еще отметить, что условие полной интегрируемости системы (6), (7), (I0) приводит с помощью внешнего дифференцирования уравнений (I0) к некоторым конечным соотношениям относительно $B^{[\alpha\beta]}_{\varsigma}$, $D^{[\alpha\beta]}_{\pi\varsigma}$. Если (6), (7), (I0) задают подгруппу Ли H в $G(n)$, то эти соотношения в совокупности с вышеупомянутыми соотношениями образуют совместную систему.

4. Формулировка основного результата. Пусть r-параметрическая нетранзитивная подгруппа Ли H с m-мерными орбитами максимальной размерности задается вполне интегрируемой пфаффовой системой

$$\begin{aligned}
&\omega^a = 0, \quad a, b, \dots = m+1,\dots,n;\\
&\omega^a_\beta - B^{[a\beta]}_{\gamma'}\omega^{\gamma'} = 0, \quad \beta, \gamma', \dots = 1,\dots,m;\\
&\omega^{\gamma}_{\delta} - E^{[\gamma\delta]}_{R}\Omega^R = 0, \quad R = 1,\dots,r;\\
&\omega^{c}_{\alpha} - E^{[c\alpha]}_{R}\Omega^R = 0, \quad \{\Omega^R\} = \{\omega^{\gamma'}\} \cup \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{N}_1.
\end{aligned} \qquad (I2)$$

Так как эта система является более подробной записью системы (I), то множество индексов, нумерующих ее уравнения, удобно представить следующим образом:

$$\begin{aligned}
\{A\} &= \{r+1,\dots,\dim G(n)\} =\\
&= \{\hat{a} = r + a - m,\ a = m+1,\dots,n\} \cup\\
&\cup \{[a\beta],\ a = m+1,\dots,n;\ \beta = 1,\dots,m\} \cup\\
&\cup \{[\gamma\delta],\ \omega^{\gamma}_{\delta} \in \mathcal{M}\setminus\mathcal{M}_1\} \cup\\
&\cup \{[c\alpha],\ \omega^{c}_{\alpha} \in \mathcal{N}\setminus\mathcal{N}_1\}.
\end{aligned} \qquad (I3)$$

Аналогично можно разбить множество индексов базисных инвариантных форм подгруппы H на следующие непересекающиеся подмножества

$$\begin{aligned}
\{R\} &= \{1,\dots,r\} = \{\alpha,\ \alpha = 1,\dots,m\} \cup\\
&\cup \{(\alpha\beta),\ \omega^{\alpha}_{\beta} \in \mathcal{M}_1\} \cup \{(ab),\ \omega^{a}_{b} \in \mathcal{N}_1\}.
\end{aligned} \qquad (I4)$$

Если для рассматриваемой подгруппы Ли H имеют место предположения $r > m$ и $\mathcal{M}_1 \neq \emptyset$, то введем для любой такой тройки индексов (a, β, π) $(a = m+1,\dots,n;\ \beta, \pi = 1,\dots,m)$, что $\omega^{\pi}_{\beta} \in \mathcal{M}_1$, обозначение

$$Q^{[a\beta]}_{(\pi\beta)A} = \sum_{\varepsilon}\left(E^{[ac]}_{(\pi\beta)} B^{[c\beta]}_{\varepsilon} - E^{[\varepsilon\beta]}_{(\pi\beta)} B^{[a\varepsilon]}_{\varepsilon} - E^{[\gamma'\varepsilon]}_{(\pi\beta)} B^{[a\beta]}_{\gamma'}\right) p^{\varepsilon}_{A} - \sum_{\gamma'\neq\beta} B^{[a\gamma']}_{\pi} p^{\gamma'}_{A}, \qquad (I5)$$

где коэффициенты $p^{\gamma'}_{A}$ взяты из системы (2), определяющей систему базисных форм $\{\vartheta^{R}\}$ для группы $G(n)$, дополняющую $\{\theta^{A}\}$ до ее полного базиса. С учетом (I3), (I4) и (I5) можно сформулировать основной результат настоящей работы, доказательство которого приводится в п. 7, после примеров его применения.

Основная теорема. Пусть H – r-параметрическая нетранзитивная подгруппа Ли движений с m-мерными орбитами максимальной размерности и пусть факторпространство $G(n)/H$ является p-редуктивным. Если либо

I) $\mathcal{M}_1 = \emptyset$, либо

2) $\mathcal{M}_1 \neq \emptyset$ и при всех таких $a \in \{m+1,\ldots,n\}$, $\beta,\pi \in \{1,\ldots,m\}$, что $\omega^{\pi}_{\beta} \in \mathcal{M}_1$, нарушается хотя бы одно из условий

$$\begin{aligned} &Q^{[a\beta]}_{(\pi\beta)[a\pi]} + 1 = 0, \\ &Q^{[a\beta]}_{(\pi\beta)[a\varepsilon]} + E^{[\varepsilon\beta]}_{(\pi\beta)} = 0, \quad \omega^{\varepsilon}_{\beta} \in \mathcal{M}\setminus\mathcal{M}_1, \\ &Q^{[a\beta]}_{(\pi\beta)[c\beta]} - E^{[ac]}_{(\pi\beta)} = 0, \quad \omega^{a}_{c} \in \mathcal{N}\setminus\mathcal{N}_1, \\ &Q^{[a\beta]}_{(\pi\beta)A'} = 0, \quad \{A'\} = \{A\}\setminus\{[a\pi],[a\varepsilon],[c\beta]\}, \end{aligned} \qquad (I6)$$

то возможен только случай $p = 1$.

Следствие. При условиях основной теоремы порядок p редуктивности удовлетворяет неравенству $p \leq 1$. Иными словами, при упомянутых условиях пространство $G(n)/H$ может быть либо редуктивным, либо нередуктивным.

5. Применение теоремы при $n=4$ и $n=5$. По результатам работ [5-7] известно, что при $n=4$ и $n=5$ факторпространства $G(n)/H$ являются лишь редуктивными или нередуктивными ($p \leq 1$). При этом доказательство этого результата в [6] требовало просмотра 27 типов нетранзитивных подгрупп Ли $H \subset G(n)$ $(n=4,5)$ с точки зрения условий (4), соответствующие однородные пространства $G(n)/H$ которых не оказались по результатам [5,7] редуктивными. С помощью основной теоремы настоящей работы для большинства типов из списков [3,4] подгрупп Ли H значение $p \leq 1$ для пространства $G(n)/H$ получается либо вообще без дополнительных рассуждений (если $\mathcal{M}_1 = \emptyset$), либо после небольших вычислений. Именно, в [3,4] показано, что группы $G(4)$ и $G(5)$ содержат соответственно 20 и 46 типов нетранзитивных собственных подгрупп Ли H с m-мерными орбитами максималь-

ной размерности. Учитывая системы (I2), выделяющие эти подгруппы в группах $G(n)$ $(n=4$ и $5)$, возникнут следующие возможности.

I) Подгруппа Ли H является m-параметрической, т.е. $r=m$. Тогда $M_1=\emptyset$ и, по основной теореме и ее следствию, всегда $p\leq 1$. Тем самым пространство $G(n)/H$ будет либо редуктивным, либо нередуктивным. Для окончательного решения вопроса - каким именно, нужна работа, проделанная в [5,7].

2) Подгруппа Ли $H\subset G(n)$ является r-параметрической с $r>m$ и в ее уравнениях (I2) все $B^{[\alpha\beta]}_{\gamma}=0$. Таких подгрупп в $G(4)$ существует 3 типа и в $G(5)$ - 9 типов. При сделанных предположениях $M_1\neq\emptyset$ и с учетом обозначений (I5) очевидно, что всегда нарушается первая группа условий (I6), так как она приводит к противоречивому равенству $1=0$. Следовательно, и в упомянутых случаях всегда порядок p-редуктивности пространства $G(n)/H$ удовлетворяет соотношению $p\leq 1$.

3) Подгруппа Ли $H\subset G(n)$ является r-параметрической с $r>m$ и в ее уравнениях (I2) некоторые $B^{[\alpha\beta]}_{\gamma}\neq 0$. Соответственно индексам ненулевых коэффициентов $B^{[\alpha\beta]}_{\gamma}$ возникнут два подслучая в условиях (I6).

3А) Несмотря на сделанные предположения, из выражения (I5) следует хотя бы одно равенство $Q^{[\alpha\beta]}_{(\pi\beta)[\alpha\pi]}=0$, соответственно чему так же как при предыдущих предположениях 2), нарушается условие (I6), дающее противоречие $1=0$. Описанная возможность имеет в $G(4)$ место в двух случаях, а в $G(5)$ - для подгрупп 9 типов.

3Б) В остальных случаях, т.е. в $G(4)$ для 3 типов подгрупп Ли H и в $G(5)$ для 5 типов подгрупп Ли H, условия (I6) дают некоторые выражения коэффициентов p^{γ}_{A} через ненулевые $B^{[\alpha\beta]}_{\gamma}$ и для окончательного решения поставленной задачи нужно довести до конца проверку условий (4) при конкретных уравнениях (I2) так, как это делалось в работах [5-7]. По тем результатам оказывается, что среди упомянутых 8 типов подгрупп Ли $H\subset G(n)$ ($n=4$ и 5) все пространства $G(n)/H$ кроме одного - редуктивные, т.е. $p=1$. С учетом результатов [6] оставшееся будет нередуктивным $(p=0)$. Тем самым вместо 27 типов нетранзитивных подгрупп Ли подробного просмотра с точки зрения условий (4) при $p>1$ требовала лишь одна подгруппа $H\subset G(5)$.

6. О применении теоремы при произвольном значении n. Описанные в п. 5 возможности 1) и 2) видов уравнений (12), задающих нетранзитивную подгруппу Ли $H \subset G(n)$, имеют общий характер с точки зрения условий основной теоремы и ее следствия. Именно, как только нетранзитивная подгруппа Ли H с m-мерными орбитами максимальной размерности в R_n является m-параметрической или в ее уравнениях все $B^{[\alpha\beta]}_{\gamma}=0$, то соответствующее однородное пространство $G(n)/H$ будет либо редуктивным, либо нередуктивным $(p \leq 1)$. Окончательный ответ получается методом, описанным в работе [7].

Рассмотрим, например, некоторые типы нетранзитивных подгрупп Ли H в группах движений $G(n)$.

Пусть H_0 выделяется в $G(n)$ вполне интегрируемой пфаффовой системой

$$\omega^a = 0, \quad \omega^a_b = 0 \quad (a, b = 2, \ldots, n),$$
$$\omega^2_1 = \ell\omega^1, \quad \omega^3_1 = \ldots = \omega^n_1 = 0.$$

Тогда H_0 является 1-параметрической и ее орбитами максимальной размерности будут окружности $S_1 \subset R_n$. Так как $\{\Omega^1(H_0)\} = \{\omega^1\}$, то, по определению, $\mathcal{M}_1(H_0)=\emptyset$ и, следовательно, для $G(n)/H_0$ справедливо $p \leq 1$.

Легко убедиться, что подгруппы Ли H_k $(k=1, \ldots, n-1)$, орбитами максимальной размерности которых будут k-мерные плоскости R_k в пространстве R_n, задаются в $G(n)$, соответственно, пфаффовыми системами

$$\omega^a = 0, \quad \omega^a_\alpha = 0, \quad \omega^\alpha_\beta = 0,$$
$$\omega^a_b = 0 \quad (\alpha, \beta = 1, \ldots, k; \ a, b = k+1, \ldots, n).$$

Тем самым H_k будут k-параметрическими, всегда $\mathcal{M}_1(H_k)=\emptyset$ и поэтому для $G(n)/H_k$ имеет место $p \leq 1$.

Но и подгруппы $\tilde{H}_k$ $(k=2, \ldots, n-1)$, которые задаются в $G(n)$ уравнениями

$$\omega^a = 0, \quad \omega^a_\alpha = 0, \quad \omega^a_b = 0 \ (\alpha = 1, \ldots, k; \ a, b = k+1, \ldots, n),$$

действуют в R_n нетранзитивно. Их орбитами максимальной размерности будут плоскости $R_k \subset R_n$, как и для подгрупп H_k. Хотя теперь $\mathcal{M}_1(\tilde{H}_k) = \{\omega^\alpha_\beta \mid \alpha, \beta = 1, \ldots, k; \alpha > \beta\} \neq \emptyset$, по следствию теоремы при $G(n)/\tilde{H}_k$ все равно $p \leq 1$, так как все $B^{[\alpha\alpha]}_{\gamma} = 0$.

7. Доказательство основной теоремы. Пусть r-параметрическая нетранзитивная подгруппа Ли H с m-мерными орбитами максимальной размерности задается в группе $G(n)$

вполне интегрируемой пфаффовой системой (I2). Для доказательства теоремы нужно убедиться, что при сделанных предположениях и указанных условиях не существует такого преобразования базиса инвариантных форм группы $G(n): \{\omega^k, \omega^k_j\} \to \{\vartheta^R, \theta^A\}$ и такого разбиения (3) множества $\{R\} = \{1, \ldots, r\}$, чтобы уравнения (5) Маурера-Картана приводились к виду (4) с $p > 1$. В общем случае удается показать, что всегда

$$d\theta^A \in V(\vartheta^R, \theta) \oplus V(\theta),$$

т.е. $\{R(1)\} = \{R\} = \{1, \ldots, r\}$ и тем самым порядок p-редуктивности не больше единицы. Так как по предположению пространство $G(n)/H$ – p-редуктивное, то существует единственная возможность $p = 1$. Если такого предположения нет, то условия теоремы оставят вопрос о том, равняется ли p единице или нет, открытым. Он решается с помощью вычисления $d\vartheta^R$. Если (4) удовлетворяется, т.е. $d\vartheta^R \in \in V(\vartheta) + V(\theta)$, то $G(n)/H$ будет редуктивным, иначе – нет.

Чтобы найти разложение $d\theta^A$ по базисным элементам подпространств $V(\vartheta, \theta), V(\vartheta), V(\theta) \subset \Lambda^2$, выпишем сначала выражения форм θ^A через базисные инвариантные формы $\{\omega^k, \omega^k_j\}$ с учетом системы (I2) и разбиения (I3) множества индексов

$$\begin{aligned} &\theta^{\hat{a}} = \theta^{r+a-m} = \omega^a, \\ &\theta^{[\alpha\beta]} = \omega^\alpha_\beta - B^{[\alpha\beta]}_{\gamma}\omega^\gamma, \\ &\theta^{[\gamma\delta]} = \omega^\gamma_\delta - E^{[\gamma\delta]}_R \Omega^R, \quad \gamma > \delta, \ \omega^\gamma_\delta \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_1, \\ &\theta^{[c\alpha]} = \omega^c_\alpha - E^{[c\alpha]}_R \Omega^R, \quad c > \alpha, \ \omega^c_\alpha \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_1, \end{aligned} \tag{I7}$$

где с учетом $\omega^k_j + \omega^j_k = 0$ и (II), справедливы

$$\theta^{[\gamma\delta]} + \theta^{[\delta\gamma]} = 0, \quad \theta^{[c\alpha]} + \theta^{[\alpha c]} = 0. \tag{I8}$$

При этом, соответственно разбиению (I4) множества индексов $\{R\}$, базисными инвариантными формами подгруппы Ли H будут

$$\Omega^\gamma = \omega^\gamma \ (\gamma = 1, \ldots, m), \ \Omega^{(\alpha\beta)} = \omega^\alpha_\beta \in \mathcal{M}_1, \ \Omega^{(a b)} = \omega^a_b \in \mathcal{N}_1, \tag{I9}$$

где также

$$\Omega^{(\alpha\beta)} + \Omega^{(\beta\alpha)} = 0, \quad \Omega^{(ab)} + \Omega^{(ba)} = 0. \tag{20}$$

Так как для произвольной подгруппы $H \subset G(n)$ множества $\mathcal{M}_1, \mathcal{N}_1$ можно считать неизвестными, то в общем случае с помощью уравнений Маурера-Картана (5) среди дифференциалов $d\theta^A$ подробно описуемы лишь $d\theta^{\hat{a}}$ и $d\theta^{[\alpha\beta]}$. По (I7) они выражаются через $d\omega^{k}$, $d\omega^{a}_{\beta}$. Последние определены уравнениями (5), в которых целесообразно учитывать разбиение (I9) множеств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$. Тогда

$$\begin{aligned}
d\omega^{a} &= \omega^{\beta}\wedge\omega^{a}_{\beta} + \omega^{c}\wedge\omega^{a}_{c} + \omega^{b}\wedge\omega^{a}_{b}\ (\omega^{a}_{c}\in\mathcal{N}\setminus\mathcal{N}_1,\ \omega^{a}_{b}\in\mathcal{N}_1),\\
d\omega^{\alpha} &= \omega^{\varepsilon}\wedge\omega^{\alpha}_{\varepsilon} + \omega^{\varsigma}\wedge\omega^{\alpha}_{\varsigma} - \omega^{b}\wedge\omega^{\alpha}_{b}\ (\omega^{\alpha}_{\varepsilon}\in\mathcal{M}\setminus\mathcal{M}_1,\ \omega^{\alpha}_{\varsigma}\in\mathcal{M}_1),\\
d\omega^{a}_{\beta} &= \omega^{\varepsilon}_{\beta}\wedge\omega^{a}_{\varepsilon} + \omega^{\pi}_{\beta}\wedge\omega^{a}_{\pi} + \omega^{c}_{\beta}\wedge\omega^{a}_{c} + \omega^{b}_{\beta}\wedge\omega^{a}_{b}\\
&\quad(\omega^{\varepsilon}_{\beta}\in\mathcal{M}\setminus\mathcal{M}_1,\ \omega^{\pi}_{\beta}\in\mathcal{M}_1,\ \omega^{a}_{c}\in\mathcal{N}\setminus\mathcal{N}_1,\ \omega^{a}_{b}\in\mathcal{N}_1).
\end{aligned}\tag{2I}$$

Преобразование $\{\omega^{k},\omega^{k}_{j}\}\to\{\vartheta^{R},\theta^{A}\}$ влечет с учетом (I7), (I9) и (2) соотношения

$$\begin{aligned}
&\omega^{\alpha}=\vartheta^{\alpha}-p^{\alpha}_{A}\theta^{A}; && \omega^{a}=\theta^{\hat a};\\
&\omega^{\alpha}_{\beta}=\vartheta^{(\alpha\beta)}-p^{(\alpha\beta)}_{A}\theta^{A},\ \omega^{\alpha}_{\beta}\in\mathcal{M}_1; && \omega^{a}_{\beta}=B^{[a\beta]}_{\gamma}\vartheta^{\gamma}-B^{[a\beta]}_{\gamma}p^{\gamma}_{A}\theta^{A}+\theta^{[a\beta]};\\
&\omega^{a}_{b}=\vartheta^{(ab)}-p^{(ab)}_{A}\theta^{A},\ \omega^{a}_{b}\in\mathcal{N}_1; && \omega^{\gamma}_{\varepsilon}=E^{[\gamma\varepsilon]}_{R}\vartheta^{R}-E^{[\gamma\varepsilon]}_{R}p^{R}_{A}\theta^{A}+\theta^{[\gamma\varepsilon]},\ \omega^{\gamma}_{\varepsilon}\in\mathcal{M}\setminus\mathcal{M}_1;\\
& && \omega^{c}_{\alpha}=E^{[c\alpha]}_{R}\vartheta^{R}-E^{[c\alpha]}_{R}p^{R}_{A}\theta^{A}+\theta^{[c\alpha]},\ \omega^{c}_{\alpha}\in\mathcal{N}\setminus\mathcal{N}_1.
\end{aligned}$$

Их подстановка в (2I) дает разложения $d\omega^{k}$, $d\omega^{a}_{\beta}$ по базисным элементам подпространств $V(\vartheta,\theta)$, $V(\vartheta)$, $V(\theta)\subset\Lambda^2$. По условиям (4) среди членов этих разложений в наших целях наибольший интерес представляют элементы из $V(\vartheta,\theta)$. Поэтому в дальнейшем мы опускаем из рассмотрения элементы $V(\theta)$ как в выражениях $d\omega^{k}$, $d\omega^{a}_{\beta}$, так и в сооответствующих $d\theta^{A}$, заменяя их лишь обозначением $\theta\wedge\theta$. Тогда будем иметь

$$d\omega^{a}=\vartheta^{\beta}\wedge\theta^{[a\beta]}-E^{[ac]}_{R}\vartheta^{R}\wedge\theta^{\hat c}-\vartheta^{(ab)}\wedge\theta^{\hat b}+\theta\wedge\theta,$$

где, в силу $\omega^{a}_{c}\in\mathcal{N}\setminus\mathcal{N}_1$, $\omega^{a}_{b}\in\mathcal{N}_1$, всегда $\hat c\neq\hat b$;

$$d\omega^{\alpha}=p^{\varsigma}_{A}\vartheta^{(\alpha\varsigma)}\wedge\theta^{A}+E^{[\alpha\varepsilon]}_{(\pi\varsigma)}p^{\varepsilon}_{A}\vartheta^{(\pi\varsigma)}\wedge\theta^{A}+\vartheta^{\gamma}\wedge\theta+\vartheta^{(c\alpha)}\wedge\theta+\theta\wedge\theta,$$

где, в силу $\omega^{\alpha}_{\varepsilon}\in\mathcal{M}\setminus\mathcal{M}_1$, $\omega^{\alpha}_{\varsigma}\in\mathcal{M}_1$, всегда $\alpha\neq\pi$, а через $\vartheta^{\gamma}\wedge\theta$, $\vartheta^{(c\alpha)}\wedge\theta$ коротко обозначены соответственно члены из $V(\vartheta^{\gamma},\theta)$ и $V(\vartheta^{(c\alpha)},\theta)$;

$$\begin{aligned}
d\omega^{a}_{\beta} &= \vartheta^{(\pi\beta)}\wedge[\theta^{[a\pi]}-B^{[a\pi]}_{\gamma}p^{\gamma}_{A}\theta^{A}]+\\
&+\vartheta^{(\pi\varsigma)}\wedge[(E^{[ac]}_{(\pi\varsigma)}B^{[c\beta]}_{\varepsilon}-E^{[c\beta]}_{(\pi\varsigma)}B^{[a\varepsilon]}_{\varepsilon})p^{\varepsilon}_{A}\theta^{A}+E^{[c\beta]}_{(\pi\varsigma)}\theta^{[ac]}-E^{[ac]}_{(\pi\varsigma)}\theta^{[c\beta]}]+\\
&+\vartheta^{\gamma}\wedge\theta+\vartheta^{(c\alpha)}\wedge\theta+\theta\wedge\theta,
\end{aligned}$$

где, в силу $\omega^{\varepsilon}_{\beta}\in\mathcal{M}\setminus\mathcal{M}_1$, $\omega^{\pi}_{\beta}\in\mathcal{M}_1$, всегда $\varepsilon\neq\pi$ и $\omega^{\pi}_{\varsigma}\in\mathcal{M}_1$. Так как по (I7) имеет место

$$\begin{aligned}
d\theta^{\hat a}&=d\omega^{a},\\
d\theta^{[a\beta]}&=d\omega^{a}_{\beta}-B^{[a\beta]}_{\gamma}d\omega^{\gamma},
\end{aligned}$$

то после введения обозначения $Q^{[a\beta]}_{(\pi\beta)A}$ из (I5) эти дифференциалы представляются в виде, в котором для краткости изложения подробно выписываются только члены, имеющие в поставленных целях существенное значение:

$$d\theta^{\hat{a}} = \vartheta^{\beta} \wedge \theta^{[a\beta]} - \vartheta^{(ab)} \wedge \theta^{\hat{b}} - E^{[ac]}_{R} \vartheta^{R} \wedge \theta^{\hat{c}} + \theta \wedge \theta,$$

$$d\theta^{[a\beta]} = \vartheta^{(\pi\beta)} \wedge [Q^{[a\beta]}_{(\pi\beta)A} \theta^{A} + \theta^{[a\pi]} + E^{[\varepsilon\beta]}_{(\pi\beta)} \theta^{[a\varepsilon]} - E^{[ac]}_{(\pi\beta)} \theta^{[c\beta]}] +$$
$$+ \sum_{\gamma \neq \beta} \vartheta^{(\pi\gamma)} \wedge \theta + \vartheta^{\gamma} \wedge \theta + \vartheta^{(ca)} \wedge \theta + \theta \wedge \theta,$$

где $\hat{b} \neq \hat{c}$ и если $\mathcal{M}_1 \neq \emptyset$, то $\omega^{\pi}_{\rho} \in \mathcal{M}_1$. Следовательно,

$$d\theta^{\hat{a}} \in V(\vartheta^{\beta}, \theta) \oplus V(\vartheta^{(ab)}, \theta) \oplus V(\theta),$$

откуда ясно, что всегда

$$\{\beta, \beta = 1, \ldots, m\} \cup \{(ab), \omega^{a}_{b} \in \mathcal{N}_1\} \subset \{R'(1)\}. \qquad (22)$$

Если в случае рассматриваемой подгруппы $H \subset G(n)$ справедливо $\mathcal{M}_1 = \emptyset$, то по (I4) получено $\{R(1)\} = \{R\} = \{1, \ldots, r\}$, что, с учетом результатов из п. 2, приводит при сделанных предположениях к $p = 1$. Если же $\mathcal{M}_1 \neq \emptyset$, то неравенство $p > 1$ возможно только тогда, когда

$$Q^{[a\beta]}_{(\pi\beta)A} \theta^{A} + \theta'^{[a\pi]} + E^{[\varepsilon\beta]}_{(\pi\beta)} \theta^{[a\varepsilon]} - E^{[ac]}_{(\pi\beta)} \theta^{[c\beta]} = 0.$$

В силу линейной независимости форм θ^{A} отсюда следуют условия (I6), при нарушении которых, кроме (22), также

$$\{(\pi\beta), \omega^{\pi}_{\rho} \in \mathcal{M}_1\} \subset \{R(1)\},$$

что с учетом (I4) опять равносильно $\{R(1)\} = \{R\}$. Теорема доказана.

Литература

1. Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П., Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Проблемы геометрии. Т. 9. Москва, 1979.
2. Кантор И. Л., Транзитивно-дифференциальные группы и инвариантные связности на однородных пространствах. Тр. сем. по вект. и тенз. анализу. 1966, 13, 316-398.
3. Лумисте Ю., Рийвес К., Перечисление и орбиты подгрупп Ли группы движений в евклидовом пространстве R_4. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1968, 220, 12-30.
4. Рийвес К., Подгруппы Ли движений евклидова пространства R_5 и их орбиты. III. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1975, 355, 39-56.

5. Р и й в е с К., Однородные факторпространства группы движений евклидова пространства R_5. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1978, 464, 75-97.
6. Р и й в е с К., О p-редуктивности однородных фактор-пространств групп движений в R_4 и R_5. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1982, 610, 96-109.
7. Р и й в е с К., Ф л я й ш е р А., Однородные фактор-пространства группы движений евклидова пространства R_4. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1975, 374, 23-40.
8. N o m i z u K. Invariant affine connections on homogeneous spaces.-Amer.J. Math., 1954, v. 76, p. 33-65.

Поступило
15 XI 1983

ON p-REDUCTIVITY OF FACTOR-SPACES OF THE GROUPS OF EUCLIDEAN MOTIONS

K.Riives

S u m m a r y

Let $G(n)$ be the group of motions in real Euclidean space R_n and let H be its closed non-transitive subgroup. In the paper some necessary conditions of p-reductivity of factor-space $G(n)/H$ are given (see the basic theorem in p. 4). With the help of these conditions the result of [6] is obtained more simply and for arbitrary n in many cases it is possible to say, can the factor-space $G(n)/H$ be p-reductive with $p>1$ or not.

К ИЗОТРОПНОЙ ПРИВОДИМОСТИ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ С ПОЛУПРОСТЫМИ ГРУППАМИ

А.Фляйшер

Лаборатория прикладной математики ТГУ

Работа посвящена изучению гладких однородных пространств G/H с полупростыми G и H. На всяком таком пространстве естественным образом возникает редуктивная структура. Доказывается существование специального разложения редуктивного оснащения в прямую сумму подпространств, инвариантных относительно присоединенного представления группы и выводятся соотношения коммутации для этих подпространств (см. ниже Теорема).

I. Предварительные сведения

Пусть G – связная группа Ли с алгеброй Ли g и H – замкнутая подгруппа в G с подалгеброй Ли h. Однородное пространство $M = G/H$ называется редуктивным ([I,5]), если в g существует такое подпространство m, называемое редуктивным оснащением, что $g = h \dot{+} m$ (прямая сумма) и $(Ad\, H)m \subset m$. Локально (в терминах алгебр Ли) второе условие заменяется на $[h, m] \subset m$ и тогда соответствующая пара (g, h) называется редуктивной парой. В случае $[m, m] \subset h$ редуктивная пара (g, h) называется симметрической и соответствующее пространство G/H – симметрическим. Нас будет интересовать случай, когда (g, h) не является симметрической парой.

Следуя А.Сэйглу ([6]), фиксированное редуктивное оснащение m можно наделить структурой неассоциативной антикоммутативной алгебры, полагая для $X, Y \in m$ произведение $XY = [X, Y]_m$, где $[X, Y]_m$ – проекция скобки $[X, Y]$ на подпространство m (проекцию скобки $[X, Y]$ на h будем обозначать $h(X, Y)$).

Для фиксированного разложения $g = h + m$ из тождеств алгебры Ли g следуют равенства:

$$XY = -YX \; ; \qquad (I.I)$$

$$[X, h(Y,Z)] + [Y, h(Z,X)] + [Z, h(X,Y)] = (XY)Z + (YZ)X + (ZX)Y; \qquad (I.2)$$

$$h(XY,Z)+h(YZ,X)+h(ZX,Y)=0; \tag{I.3}$$
$$[h(X,Y),U]=h([X,U],Y)+h(X,[Y,U]); \tag{I.4}$$
$$[U,XY]=[U,X]Y+X[U,Y], \tag{I.5}$$

где $X, Y, Z \in m$, $U \in h$. Из равенства (I.5) следует, что отображение $ad_m U : m \to m$, $X \mapsto [U,X]$ для $X \in m$, $U \in h$ является дифференцированием алгебры m. В дальнейшем будем обозначать $ad_m U$ через $\mathcal{D}(U)$.

2. Полупростота g и h

Пусть g – полупростая алгебра Ли с полупростой подалгеброй h. Известно, что на g можно определить невырожденную форму Киллинга K, ограничение которой на h, в силу полупростоты h, также невырождено. Изучению таких пар (g, h) посвящены работы [2] и [3]. Обозначим через B ограничение формы K на m и введем наряду с отображением

$$\mathcal{D}(U) : m \to m, \quad Y \mapsto [U,Y]$$

отображение

$$L(X) : m \to m, \quad Y \mapsto XY$$

для $X, Y \in m$, $U \in h$.

Предложение I. Пусть g – полупростая алгебра Ли и h – ее полупростая подалгебра. Тогда (g, h) является редуктивной парой с разложением $g = h \dot{+} m$, где $m = h^{\perp}$ (здесь $^{\perp}$ – взятие ортогонального дополнения относительно формы Киллинга K алгебры g). Форма $B = K|_m$ невырождена на m и отображения $\mathcal{D}(U)$ и $L(X)$ являются B-кососимметрическими для всех $U \in h$, $X \in m$.

Доказательство. В силу невырожденности формы Киллинга K на g имеет место разложение $g = h \dot{+} m$, где

$$m = h^{\perp} = \{X \in g \mid K(X, h) = 0\}$$

и определено однозначно. Ограничение формы B на m также невырождено, ибо если $B(X, m) = 0$ для $X \in m$, то $B(X,m) = K(X,m) = K(X, g) = 0$ и потому $X = 0$. Редуктивность пары (g, h) вытекает из равенств

$$K([m,h], h) = K(m, [h,h]) = 0,$$

вследствие чего $[m, h] \subset m$. Из равенств

$$B(\mathcal{D}(U)Y, Z) = B([U,Y],Z) = -B(Y,[U,Z]) = -B(Y,\mathcal{D}(U)Z),$$

$$B\left(L(X)Y,Z\right) = B(XY,Z) = B([X,Y],Z) =$$
$$= -B(Y,[X,Z]) = -B(Y,XZ) = -B(Y,L(X)Z)$$

следует B-кососимметричность отображений $\mathcal{D}(U)$ и $L(X)$.

3. Разложение m

Положим $m_0 = \{X \in m \mid \mathcal{D}(U)X = 0,\ \forall U \in h\}$.
Из равенств (I.5) и (I.2) следует, что m_0 – подалгебра Ли алгебры m и потому $h_0 = h + m_0$ является подалгеброй Ли алгебры g. Докажем, что

$$h(m_0, m) = 0. \tag{3.I}$$

Действительно, если $U \in h,\ X \in m,\ V \in m_0$, то

$$0 = K(\mathcal{D}(U)V, X) = K([U,V],X) = K(U,[V,X]) =$$
$$= K(U, VX + h(V,X)) = K(U, h(V,X)).$$

Невырожденность K на $h \times h$ влечет $h(V,X) = 0$ и потому $[m_0, m] = m_0 m$.

Лемма I. Ограничение формы B на $m_0 \times m_0$ невырождено.

Доказательство. В силу полупростоты h ее присоединенное представление вполне приводимо, поэтому существует $ad\,h$ – инвариантное разложение $m = m_0 + n$. Докажем, что $(ad\,h)n = n$. Если это не так, то пусть $(ad\,h)n = p \subset n$, и опять для p должно существовать $ad\,h$ – инвариантное дополнение p' такое, что $n = p + p'$. Тогда $(ad\,h)p' \subset p' \cap (ad\,h)n = p' \cap p = 0$ и p' должно содержаться в m_0, что противоречит условию и влечет $(ad\,h)n = n$. Если теперь $V \in m_0$ и $B(V, m_0) = 0$, то

$$B(V,m) = B(V, m_0 + n) = B(V,n) = B(V, (ad\,h)n) =$$
$$= -B((ad\,h)V, n) = 0,$$

что приводит к $V = 0$ и влечет невырожденность формы B на $m_0 \times m_0$.

Результат леммы позволяет осуществить разложение $m = m_0 + n$, где $n = m_0^{\perp}$ (n ортогонально m_0) относительно B, в котором ограничение B на $n \times n$ также невырождено.

Следуя ([4]), будем в дальнейшем подпространство $p \subset m$ называть B-подпространством, если ограничение формы B

на p невырождено.

Рассмотрим множество отображений $L(m_0)=\{L(V), V\in m_0\}$.

Лемма 2. Множество $L(m_0)$ содержится в алгебре дифференцирований $\mathrm{Der}(m)$ алгебры m.

Доказательство. Для $V, W'\in m_0$ и $X\in m$, используя (I.2) и (3.I), получаем

$$0 = V(W'X) + W'(XV) + X(VW') = \left([L(V), L(W')] - L(VW')\right)X,$$

что влечет $$[L(V), L(W')] = L(VW'). \tag{3.2}$$

Если $Y\in m$ то из (I.I), (I.2) и (3.I) следует

$$L(V)(XY) = V(XY) = -X(YV) - Y(VX) =$$
$$= (VX)Y + X(VY) = (L(V)X)Y + X(L(V)Y), \tag{3.3}$$

что доказывает утверждение леммы.

Заметим, что $L(m_c)n\subset n$. Действительно, $B(m_0, m_c n) = B(m_c m_c, n) = 0$ вследствие ортогональности m_c и n относительно B и того, что m_0 - подалгебра в m.

Введем в рассмотрение подпространство

$$m_1 = \{Y\in n \mid L(V)Y=0 \text{ для всех } V\in m_c\}.$$

В силу (3.3) подпространство m_1 будет подалгеброй в m и потому $\hat{h}_1 = \hat{h} + m_0 + m_1$ является подалгеброй Ли алгебры g.

Лемма 3. Подпространство m_1 является $\mathrm{ad}\,\hat{h}$ - инвариантным B-подпространством.

Доказательство. Прежде всего заметим, что ввиду $\mathcal{D}(U)\in\mathrm{Der}(m)$ из (3.2) получаем

$$[\mathcal{D}(U), L(V)] = L(\mathcal{D}(U)V) = 0 \tag{3.4}$$

для $U\in\hat{h}$, $V\in m_c$. Если теперь взять $Y\in m_1$, то из (3.4) получаем

$$[\mathcal{D}(U), L(V)]Y = \mathcal{D}(U)(L(V)Y) - L(V)(\mathcal{D}(U)Y) = 0.$$

Но $L(V)Y=0$, поэтому $\mathcal{D}(U)Y\in m_1$, что влечет $\mathrm{ad}\,\hat{h}$-инвариантность m_1. Для $X\in m$ и $V\in m_c$ из равенств

$$\mathrm{ad}_g V(X) = [V, X] = VX + \hat{h}(V, X) = VX = L(V)X$$

вытекает, что действия $\mathrm{ad}_g\, m_c$ и $L(m_c)$ на m совпадают и, таким образом, действие $L(m_c)$ на m вполне приводимо. Теперь невырожденность ограничения B на $m_1\times m_1$ доказывается аналогично тому, как это делалось при доказательстве невырожденности B на $m_c\times m_c$ в лемме I с заменой $ad\,h$- инвариантности на $L(m_0)$ - инвариантность.

Результат леммы позволяет опять осуществить разложение $n = m_1 + m_2$, где $m_2 = m_1^{\perp}$ (m_2 ортогонально m_1) относительно B. Из равенств

$$B(m_1, m_0 m_2) = B(m_1 m_0, m_2) = 0,$$

$$B(m_1, [h, m_2]) = B(m_2, [m_1, h]) = 0$$

следует $L(m_0)$ и $ad\,h$ - инвариантность m_2.

Лемма 4. Подпространство m_2 инвариантно относительно $L(m_1)$ и $ad(h + m_c + m_1)$.

Доказательство. Пусть $V \in m_1$, $W \in m_2$ и $VW = X + Y + Z$, где $X \in m_c$, $Y \in m_1$, $Z \in m_2$. Для любого $P \in m_0$ имеем

$$B(P, X) = B(P, VW - Y - Z) = B(P, VW) = B(PV, W) = 0$$

вследствие $m_c m_1 = 0$. Невырожденность B на $m_0 \times m_0$ влечет $X = 0$. Аналогично для $Q \in m_1$ имеем

$$B(Q, Y) = B(Q, VW) = B(QV, W) = 0$$

вследствие $m_1 m_1 \subset m_1$ и $B(m_1, m_2) = 0$. Невырожденность B на $m_1 \times m_1$ влечет $Y = 0$ и потому $VW = Z$ или $m_1 m_2 \subset m_2$. Для доказательства $ad(h + m_c + m_1)$-инвариантности m_2 заметим, что

$$(ad(h + m_0))m_2 = (ad\,h)m_2 + (ad\,m_c)m_2 \subset m_2$$

вследствие $[h, m_2] \subset m_2$ и $(ad\,m_0)m_2 = L(m_0)m_2 \subset m_2$. Поэтому остается доказать лишь $(ad\,m_1)m_2 \subset m_2$. Но $(ad\,m_1)m_2 = [m_1, m_2] = m_1 m_2 + h(m_1, m_2)$ и, если доказать $h(m_1, m_2) = 0$, то требуемое будет следовать из первого условия леммы. Итак,

$$0 = K([h, m_1], m_2) = K(h, [m_1, m_2]) = K(h, h(m_1, m_2)),$$

что влечет $h(m_1, m_2) = 0$ вследствие невырожденности K на $h \times h$. Лемма доказана.

Из всех полученных здесь результатов вытекает основная

Теорема. Пусть g - полупростая алгебра Ли и h - ее полупростая подалгебра. Тогда

(а) пара (g, h) является редуктивной с разложением $g = h + m$, где m - ортогональное дополнение к h относительно формы Киллинга K алгебры g;

(б) алгебра m разложима в прямую сумму $ad\,h$-инвариантных подпространств $m = m_0 + m_1 + m_2$, удовлетворяющих соотношениям

$$m_0 m_0 \subset m_0, \quad m_0 m_1 = 0, \quad m_0 m_2 \subset m_2,$$
$$m_1 m_1 \subset m_1, \quad m_1 m_2 \subset m_2 ;$$

(в) подпространства $h_0 = h + m_0$ и $h_1 = h + m_0 + m_1$ являются подалгебрами Ли алгебры g и пары (g, h_0) и (g, h_1) редуктивны.

Литература

1. Рашевский П. К., О геометрии однородных пространств. Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу с их прил. к геометрии, мех. и физ. Моск. ун-т, 1952, 9, 49-74.
2. Фляйшер А. Г., Об одном классе редуктивных пространств. Тр. геом. семинара. Ин-т научн. информ. АН СССР, 1974, 6, 267-276.
3. Фляйшер А. Г., Об одном классе псевдоримановых однородных пространств. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1978, 464, 47-58.
4. Koh S. S. On affine symmetric spaces.-Trans. Amer. Math. Soc., 1965, v. 119, No. 2, p. 291-309.
5. Nomizu K. Invariant affine connections on homogeneous spaces.-Amer. J. Math., 1954, v. 76, p. 33-65.
6. Sagle A. A. On anticommutative algebras and homogeneous spaces.-J. Math. and Mech., 1967, v.16, p.1381-1394.

Поступило
10 X 1983

ON THE ISOTROPIC REDUCIBILITY OF HOMOGENEOUS SPACES WITH SEMISIMPLE GROUPS

A. Fleischer

Summary

In this paper we study smooth homogeneous spaces G/H with semisimple G and H. On such spaces naturally arises the reductive structure $g = h \dot{+} m$. It proves the existence of a special decomposition of m into direct sum of subspaces, which are ad h-invariant. The correlations of commutation for such spaces are given.

АФФИННАЯ ГЕОМЕТРИЯ НОРМАЛИЗОВАННОГО ПОДМНОГООБРАЗИЯ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМ ПОЛЕМ НОРМАЛЬНЫХ p-НАПРАВЛЕНИЙ

А.В.Чакмазян

Армянский государственный педагогический институт*

В [I] было начато изучение строения оснащенного подмногообразия V_m аффинного пространства A_n, допускающего параллельное нормальное векторное поле. Далее, в [2] изучалось строение оснащенного подмногообразия V_m в A_n, нормальная аффинная связность которого является плоской.

В последние годы возрос интерес к исследованию геометрии подмногообразия V_m с помощью нормальной связности в пространствах постоянной кривизны $V_n(c)$. Значительная часть соответствующих результатов освещена в обзоре [3]. В связи с этим возникает естественная задача изучить локальное строение оснащенного подмногообразия аффинного пространства, допускающего параллельное поле нормальных p-мерных направлений с плоской нормальной связности в определяемом им подрасслоении.

I. Рассмотрим n-мерное аффинное пространство A_n и присоединим к текущей его точке x подвижной репер, состоящий из n линейно независимых векторов e_J $(J,K=1,\dots,n)$. Уравнения инфинитезимального перемещения репера имеют вид:

$$dx = \omega^J e_J\,, \quad de_J = \omega_J^K e_K\,, \tag{I}$$

где ω^J, ω_J^K — линейные формы от дифференциалов параметров. Внешнее дифференцирование этих уравнений приводит к структурным уравнениям для форм ω^J и ω_J^K:

$$d\omega^J = \omega^K \wedge \omega_K^J\,, \quad d\omega_K^J = \omega_K^L \wedge \omega_L^J\,. \tag{2}$$

Пусть в пространстве A_n задано m-мерное подмногообразие V_m, оснащенное при помощи семейства $(n-m)$-мерных плоскостей, дополняющих касательные плоскости до всего A_n и называемых нормальными плоскостями. На V_m возникают его касательное и нормальное векторные расслоения

* Статья составлена во время нахождения автора на стажировке при Тартуском государственном университете.

$T(V_m)$ и $N(V_m)$. Если к текущей точке x подмногообразия V_m присоединить подвижной репер I-го порядка, то уравнения его инфинитезимального перемещения имеют вид

$$dx = \omega^i e_i \;, \quad de_i = \omega_i^j e_j + \omega_i^\alpha e_\alpha \,, \quad de_\alpha = \omega_\alpha^i e_i + \omega_\alpha^\beta e_\beta \tag{3}$$
$$i, j, \ldots = 1, \ldots, m \,; \quad \alpha, \beta, \ldots = m+1, \ldots, n.$$

Подмногообразие V_m в A_n определяется при этом системой уравнений

$$\omega^\alpha = 0 \,, \quad \omega_i^\alpha = b_{ij}^\alpha \omega^j \,, \quad b_{ij}^\alpha = b_{ji}^\alpha . \tag{4}$$

Пусть слой нормального расслоения $N(V_m)$ определяется векторами

$$\hat{e}_\alpha = e_\alpha + N_\alpha^i e_i .$$

Величины N_α^i представляют собой компоненты объекта, который, следуя Г.Ф.Лаптеву [4], будем называть объектом оснащения. Они удовлетворяют дифференциальным уравнениям [4]

$$dN_\alpha^i + N_\alpha^j \omega_j^i - N_\beta^i \omega_\alpha^\beta + \omega_\alpha^i = C_{\alpha j}^i \omega^j , \tag{5}$$

где $C_{\alpha j}^i$ является тензором. Частичная канонизация репера, при которой векторы e_α помещаются на слой нормального расслоения $N(V_m)$, приводит к обращению в нуль компонентов объекта $\{N_\alpha^i\}$, а уравнения (5) принимают вид

$$\omega_\alpha^i = C_{\alpha j}^i \omega^j . \tag{6}$$

Если учесть (2), (4) и (6), то структурные уравнения нормального расслоения $N(V_m)$ для подмногообразия V_m примут следующий вид

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i \,, \quad d\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta + \Omega_\alpha^\beta , \tag{7}$$

где

$$\Omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^i \wedge \omega_i^\beta = \frac{1}{2} R_{\alpha k l}^\beta \omega^k \wedge \omega^l , \tag{8}$$

и

$$R_{\alpha k l}^\beta = 2 b_{i[k}^\beta C_{|\alpha| l]}^i . \tag{9}$$

2. Рассмотрим грассманово расслоение p-мерных подпространств в слоях нормального расслоения $N(V_m)$. Гладкое сечение этого грассманова расслоения называется полем нормальных p-направлений N^p на V_m. Это поле определяет нормальное подрасслоение $N^p(V_m)$, p-мерными слоя-

ми которого являются p-мерные аффинные плоскости $N^p(x)$, $x \in V_m$. Плоскость $N^p(x)$ этого поля, соответствующую произвольной фиксированной точке $x \in V_m$, можно определить этой точкой x и p переменными векторами $\tilde{e}_\pi$ ($\pi, \rho, \ldots = m+1, \ldots, m+p$), заданными следующими разложениями:

$$\tilde{e}_\pi = \xi^\alpha_\pi e_\alpha . \qquad (10)$$

Легко убедиться, что система уравнений, выражающих условие инвариантности p-мерной плоскости $N^p(x)$ относительно преобразований репера в $N(V_m)$, имеет следующий вид:

$$d\xi^\alpha_\pi + \xi^\beta_\pi \omega^\alpha_\beta - \tilde{\theta}^\rho_\pi \xi^\alpha_\rho = 0 \ (mod\ \omega^i),$$

где $\tilde{\theta}^\rho_\pi$ — некоторые линейные формы. Поэтому дифференциальные уравнения поля p-мерных плоскостей $N^p(V_m)$ в расслоении $N(V_m)$ имеют вид

$$d\xi^\alpha_\pi + \xi^\beta_\pi \omega^\alpha_\beta - \tilde{\theta}^\rho_\pi \xi^\alpha_\rho = \xi^\alpha_{\pi j} \omega^j . \qquad (11)$$

Отметим, что векторы e_π в $N^p(x)$ можно выбрать так, чтобы

$$\xi^\rho_\pi = \delta^\rho_\pi , \qquad \text{т.е.} \qquad \tilde{e}_\pi = e_\pi + \xi^a_\pi e_a ,$$

где $a, b, \ldots = m+p+1, \ldots, n$.

Тогда уравнения поля примут вид

$$d\xi^a_\pi + \xi^b_\pi \omega^a_b - \xi^a_\rho \omega^\rho_\pi + \omega^a_\pi - \xi^a_\rho \xi^b_\pi \omega^\rho_b = (\xi^a_{\pi j} - \xi^a_\rho \xi^\rho_{\pi j})\omega^j . \qquad (12)$$

3. Поле N^p называется параллельным, если при любом инфинитезимальном перемещении произвольной точки x в V_m смещение p-мерного направления N^p происходит в $(m+p)$-мерной плоскости, натянутой на касательную плоскость $T_x(V_m)$ и на это направление $N^p(x)$ [5].

Найдем соответствующие аналитические условия. Любой вектор, принадлежащий p-направлению $N^p(x)$, можно представить в виде

$$\xi = \xi^\pi \tilde{e}_\pi . \qquad (13)$$

Если продифференцировать (13) и учесть (3), (10), получим

$$d\xi = d\xi^\pi \tilde{e}_\pi + \xi^\pi \xi^\alpha_\pi \omega^i_\alpha e_i + \xi^\pi (d\xi^\alpha_\pi + \xi^\beta_\pi \omega^\alpha_\beta) e_\alpha .$$

Поле N^p является параллельным тогда и только тогда, когда ([5])

$$(d\xi^\alpha_\pi + \xi^\beta_\pi \omega^\alpha_\beta) e_\alpha = \tilde{\theta}^\rho_\pi \tilde{e}_\rho .$$

Отсюда, в силу (I0), получим

$$d\xi^{\alpha}_{\pi} + \xi^{\beta}_{\pi}\omega^{\alpha}_{\beta} = \hat{\theta}^{\rho}_{\pi}\xi^{\alpha}_{\rho}. \tag{I4}$$

Рассмотрим подрасслоение $N^{p}(V_m)$, определяемое параллельным полем нормальных p-мерных направлений N^{p}. Имеет место следующая

<u>Теорема I</u>. В подрасслоении $N^{p}(V_m)$, определяемом параллельным полем нормальных p-мерных направлений, индуцируется центроаффинная связность.

<u>Доказательство</u>. Каждый слой $N^{p}(x)$ этого подрасслоения представляет собой p-мерную центроаффинную плоскость, на которой векторы $\tilde{e}_{\pi}$ вместе с точкой x составляют аффинный репер. При этом

$$d\tilde{e}_{\pi} = \varphi^{\rho}_{\pi}\tilde{e}_{\rho} + \varphi^{\alpha}_{\pi}e_{\alpha} + \varphi^{i}_{\pi}e_{i} \tag{I5}$$

Так как $\tilde{e}_{\pi} = \xi^{\alpha}_{\pi}e_{\alpha}$, то в силу (3) и (I4)

$$d\tilde{e}_{\pi} = \xi^{\alpha}_{\pi}\omega^{i}_{\alpha}e_{i} + \hat{\theta}^{\rho}_{\pi}e_{\rho}.$$

Сравнивая последнее равенство с (I5), получим

$$\varphi^{\rho}_{\pi} = \hat{\theta}^{\rho}_{\pi}, \quad \varphi^{\alpha}_{\pi} = 0, \quad \varphi^{i}_{\pi} = \xi^{\alpha}_{\pi}\omega^{i}_{\alpha}. \tag{I6}$$

Составим следующие 2-формы $\Phi^{\rho}_{\pi} = d\varphi^{\rho}_{\pi} - \varphi^{\sigma}_{\pi}\wedge\varphi^{\rho}_{\sigma}$, которые, в силу (I6), примут вид

$$\Phi^{\rho}_{\pi} = d\hat{\theta}^{\rho}_{\pi} - \hat{\theta}^{\sigma}_{\pi}\wedge\hat{\theta}^{\rho}_{\sigma}. \tag{I7}$$

Докажем, что формы Φ^{ρ}_{π} являются полубазовыми. Если внешним образом продифференцировать (I4) и учесть (I7) и (7), то получим

$$\xi^{\alpha}_{\rho}\Phi^{\rho}_{\pi} = \xi^{\beta}_{\pi}\Omega^{\alpha}_{\beta}.$$

Так как матрица $\|\xi^{\alpha}_{\rho}\|$ имеет полный ранг, то отсюда можно выразить формы Φ^{ρ}_{π} через Ω^{α}_{β}, а последние, в силу (8), являются полубазовыми: следовательно,

$$\Phi^{\rho}_{\pi} = \frac{1}{2}R^{\rho}_{\pi k l}\omega^{k}\wedge\omega^{l}.$$

В силу теоремы Картана-Лаптева [6] формы φ^{ρ}_{π} определяют теперь центроаффинную связность в $N^{p}(V_m)$; ее формами кривизны являются Φ^{ρ}_{π}. Теорема доказана.

4. Горизонтальное распределение Γ_m, которое индуцирует центроаффинную связность в $N^{p}(V_m)$, получается присоединением к точке y с $y = x + \xi^{\pi}e_{\pi} \in N^{p}(x)$ m-мерной плоскости, проходящей через эту точку y и параллельной касательной плоскости $T_x(V_m)$.

Так как

$$dy = (\xi^\pi \xi^\alpha_\pi \omega^i_\alpha + \omega^i) e_i + (d\xi^\rho + \xi^\pi \hat{\theta}^\rho_\pi)\tilde{e}_\rho , \qquad (18)$$

то горизонтальному распределению Γ_m ассоциирована инвариантная система форм

$$\theta^\rho = d\xi^\rho + \xi^\pi \hat{\theta}^\rho_\pi .$$

Для каждого направления Z, принадлежащего горизонтальному распределению, $Z \in \Gamma_m$, имеют место соотношения $\theta^\rho(Z) = 0$.

Рассмотрим поле точек $y(x) \in N^\rho(x)$, заданное вдоль некоторой линии $x = x(t)$ на оснащенном подмногообразии V_m.

Определение I. Говорят, что поле точек $y(x)$ переносится параллельно, если направление смещения dy принадлежит горизонтальному распределению Γ_m (ср. [7]). Из (18) следует, что при параллельном перенесении удовлетворяется система уравнений Пфаффа

$$\theta^\rho = d\xi^\rho + \xi^\pi \hat{\theta}^\rho_\pi = 0 . \qquad (19)$$

Определение 2. Связность в нормальном подрасслоении $N^\rho(V_m)$ подмногообразия V_m называется локально плоской, если параллельный перенос точки $y \in N^\rho(x)$ относительно этой связности не зависит от пути $x = x(t)$, соединяющего две произвольно заданные точки в некоторых областях на V_m.

В силу известной теоремы (см. [8]) для горизонтального распределения Γ_m нормальной центроаффинной связности справедлива

Теорема 2. Для того, чтобы нормальная центроаффинная связность в нормальном аффинном подрасслоении $N^\rho(V_m)$ была локально плоской, необходимо и достаточно, чтобы ее горизонтальное распределение Γ_m было инволютивным.

Простые вычисления показывают, что

$$d\theta^\rho = \theta^\pi \wedge \hat{\theta}^\rho_\pi + \xi^\pi \Phi^\rho_\pi .$$

Отсюда следует, что система форм θ^ρ будет вполне интегрируемой тогда и только тогда, когда $\Phi^\rho_\pi = 0$. Таким образом, для того чтобы нормальная связность в подрасслоениях $N^\rho(V_m)$ была локально плоской, необходимо и достаточно обращение в нуль форм кривизны Φ^ρ_π, или, что равносильно, компонентов тензора кривизны: $\hat{R}^\rho_{\pi k \ell} = 0$.

5. Выбираем репер в $N(V_m)$ так, чтобы его векторы e_π принадлежали инвариантной p-мерной плоскости $N^p(x)$, определяемой объектом $\{\xi^a_\pi\}$; вместе с векторами e_a они составляют репер в $N(V_m)$. При этом объект ξ^a_π обратится в нуль и уравнения поля N^p (I2) примут вид $\omega^a_\pi=\xi^a_{\pi k}\omega^k$. Легко заметить, что если в (I4) подставить $\xi^a_\pi=0$, $\xi^\rho_\pi=\delta^\rho_\pi$, то условие параллельности p-мерного поля N^p примет вид

$$\omega^a_\pi=0; \tag{20}$$

при этом $\hat\theta^\pi_\rho=\omega^\pi_\rho$. Из (7) в силу (20), (6), (4) найдем

$$C^i_{\rho[k}\,b^a_{\ell]i}=0. \tag{2I}$$

Легко заметить, что в этом репере условия, определяющие локально плоскую нормальную центроаффинную связность в $N^p(V_m)$, имеет вид:

$$C^i_{\rho[k}\,b^\pi_{\ell]i}=0. \tag{22}$$

Объединение последнего выражения с (2I) дает

$$C^i_{\rho[k}\,b^\alpha_{\ell]i}=0. \tag{23}$$

Рассмотрим пучок основных аффиноров

$$C^i_j=\xi^\rho C^i_{\rho j}; \tag{24}$$

аффинор, соответствующий в этом пучке нормальному векторному полю $\xi=\xi^\rho e_\rho$, обозначим $C^i_j(\xi)$.

<u>Определение 3</u>. Пучок основных аффиноров называется простым, если на V_m существует нормальное векторное поле $\xi_0\in N^p$, для которого основной аффинор $C^i_j(\xi_0)$ имеет простую структуру, т.е. его матрица приводима к диагональному виду.

Пусть $C^i_j(\xi_0)$ имеет s собственных значений $\lambda_1,\dots,\lambda_s$ с кратностями $p_1,\dots,p_s$ $(p_1+\dots+p_s=m)$ соответственно. Имеет место следующая

<u>Теорема 3</u>. Пусть оснащенное подмногообразие V_m допускает параллельное поле нормальных p-мерных направлений $N^p(x)$, $x\in V_m$, с плоской нормальной связностью в подрасслоении $N^p(V_m)$, и пусть пучок основных аффиноров оснащения является простым, т.е. содержит $C^i_j(\xi_0)$ простой структуры. Тогда подмногообразие V_m несет сопряженную систему распределений размерностей $p_1, p_2,\dots,p_s$ $(p_1+p_2+\dots+p_s=m)$, совпадающих с кратностями собственных значений аффинора $C^i_j(\xi_0)$.

<u>Доказательство</u>. Из предположений следует соотношение (23). Если здесь свернуть с ξ^ρ_0 и учесть (24), то получим

$$C^i_{[k}(\xi_0)\, b^\beta_{l]i} = 0. \qquad (25)$$

Так как пучок основных аффиноров является простым, при подходящем выборе ξ_0 матрица $\| C^i_j(\xi_0) \|$ приводима к виду

$$diag \, \| \lambda_1 E_1, \lambda_2 E_2, \ldots, \lambda_s E_s \|, \qquad (26)$$

где E_u — единичная матрица порядка p_u $(u, v, \ldots = 1, \ldots s)$. В каждом касательном пространстве $T_x(V_m)$ подмногообразия V_m определяется s собственных подпространств L_u аффинора $C^i_j = C^i_j(\xi_0)$, которые имеют размерности p_u. В некоторой области $\mathcal{U}$ подмногообразия V_m они образуют s распределений L_u. При этом векторы преобразованного репера e_{i_u}, где $i_u, j_u, \ldots = p_1 + \ldots + p_{u-1} + 1, \ldots, p_1 + p_2 + \ldots + p_u$, принадлежат p_u-мерному подпространству L_u. В силу (26) компоненты аффинора C^i_j могут быть записаны в виде:

$$C^{i_u}_{j_u} = \lambda_u \delta^{i_u}_{j_u}, \quad C^{i_v}_{j_u} = 0 \quad \text{при} \quad u \neq v. \qquad (27)$$

Соотношения (25), в силу последних соотношений, примут вид

$$(\lambda_u - \lambda_v)\, b^\alpha_{k_u l_v} = 0$$

Но так как $\lambda_u \neq \lambda_v$ при $u \neq v$, то отсюда следует, что

$$b^\alpha_{i_u j_v} = 0, \quad u \neq v.$$

Следовательно, матрицы $B^\alpha = \| b^\alpha_{ij} \|$ при каждом значении α приводятся к блочно-диагональному виду

$$B^\alpha = diag \, \| B^\alpha_1, B^\alpha_2, \ldots, B^\alpha_s \|$$

где $B^\alpha_u = \| b^\alpha_{i_u j_v} \|$ — квадратичные матрицы порядка p_u. А это означает, что подмногообразие V_m несет сопряженную систему. Теорема доказана.

6. В частном случае, когда $p = 1$ получим результаты из [I].

Несложно проверить, что параллельное поле одномерных нормальных направлений N^1 с плоской нормальной связностью в $N^1(V_m)$ определяет параллельное нормальное векторное ξ - поле на V_m, т.е. поле ξ с

$$d\xi^\alpha + \xi^\beta \omega^\alpha_\beta = 0, \qquad (28)$$

и наоборот.

Подмногообразие V'_m, описываемое точкой x' с $x' = x + \xi(x), x \in V_m$, которая определяется сечением $\xi = \xi(x)$ нормального векторного расслоения $N(V_m)$, называется параллельным подмногообразию V_m, если касательная плоскость

$T_{x'}(V'_m)$ к этому подмногообразию V'_m в точке $x' = N(x) \cap V'_m$ параллельна касательной плоскости $T_x(V_m)$. Заметим, что здесь подмногообразие V'_m получается преобразованием Петерсона [9] из подмногообразия V_m.

Теорема 4. Оснащенное подмногообразие V_m аффинного пространства A_n допускает параллельное поле одномерных нормальных направлений N^1 с плоской нормальной связностью в расслоении $N^1(V_m)$ тогда и только тогда, когда существует параллельное ему подмногообразие V'_m.

Доказательство. Пусть удовлетворяются (28). Рассмотрим подмногообразие V'_m, описываемое точкой x' с $x' = x + c\xi^\alpha e_\alpha$, где $c = const$. Тогда

$$dx' = (\omega^i + c\xi^\alpha \omega^i_\alpha) e_i,$$

то есть $T_{x'}(V'_m)$ параллельна $T_x(V_m)$.

Обратно, пусть V'_m — подмногообразие, параллельное V_m в указанном выше смысле, описываемое точкой x'. Так как точки x и x' лежат в одной плоскости $N(x)$, то $x' = x + \eta$, где $\eta = \eta^\alpha e_\alpha$. Поэтому в силу (3)

$$dx' = (\omega^i + \eta^\alpha \omega^i_\alpha) e_i + (d\eta^\alpha + \eta^\beta \omega^\alpha_\beta) e_\alpha.$$

Так как $T_{x'}(V'_m)$ параллельно $T_x(V_m)$, то $d\eta^\alpha + \eta^\beta \omega^\alpha_\beta = 0$, а это означает, что подмногообразие V_m допускает параллельное поле одномерных нормальных направлений векторов $\eta = \eta^\alpha e_\alpha$ с плоской нормальной связностью в $N^1(V_m)$. Теорема доказана.

Литература

I. Акивис М. А., Чакмазян А. В., Об оснащенных подмногообразиях аффинного пространства, допускающих параллельное нормальное векторное поле. ДАН Арм. ССР, 1975, т. 60, № 3, 117-143.

2. Чакмазян А. В., Об оснащенных подмногообразиях аффинного пространства с плоской нормальной связностью. Дифференциальная геометрия, межвузовский тематический сборник, г. Калинин, 1977, 120-129.

3. Лумисте Ю. Г., Чакмазян А. В., Нормальная связность и подмногообразия с параллельными нормальными полями в пространстве постоянной кривизны. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Проблемы геометрии. 1981, 12, 3-30.

4. Л а п т е в Г. Ф., Об инвариантном оснащении поверхности в пространстве аффинной связности. ДАН СССР, 1959, 126, № 3, 490-493.
5. Ч а к м а з я н А. В., Связность в нормальных расслоениях нормализованного подмногообразия V_m в P_n. Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР. Проблемы геометрии, 1978, 10, 55-75.
6. О с т и а н у Н. М., Р ы ж к о в В. В., Ш в е й к и н П. И., Очерк научных исследований Германа Федоровича Лаптева. Тр. Геометр. семинара, Всес. ин-та научн. и техн. информ. АН СССР, 1973, 4, 7-70.
7. Ч а к м а з я н А. В., О нормализованных подмногообразиях с плоской нормальной связностью в проективном пространстве. Мат. заметки, 1983, 33, № 2,
8. Н о м и д з у К., Группа Ли и дифференциальная геометрия. М., 1960.
9. Р ы ж к о в В. В., О тангенциально вырожденных поверхностях. ДАН СССР, 1960, 135, № 1, 20-22.

Поступило
10 VI 1982

AFFINE GEOMETRY OF THE NORMALIZED SUBMANIFOLD WITH A PARALLEL FIELD OF ρ-DIRECTIONS

A. Čakmazjan

S u m m a r y

The results proved in author's previous papers for the submanifolds V_m in space forms or in projective space are now represented for the particular case of the affine space A_n.

СОДЕРЖАНИЕ - CONTENTS

Ученые записки Тартуского государственного университета.
Выпуск 665.
ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И РАССЛОЕНИЯ.
Труды по математике и механике.
На русском языке.
Резюме на английском языке.
Тартуский государственный университет.
ЭССР, 202400, г.Тарту, ул.Юликооли, I8.
Ответственный редактор М. Кильп.
Корректоры А. Фляйшер, П. Раямяэ.
Подписано к печати I7.OI.I984.
МВ OI032.
Формат 60x90/I6.
Бумага писчая.
Машинопись. Ротапринт.
Учетно-издательских листов 5,I8.
Печатных листов 5,75.
Тираж 300.
Заказ № 36.
Цена 80 коп.
Типография ТГУ, ЭССР, 202400, г.Тарту, ул.Пялсона, I4.
2 - 2