

У. А-1455  
-227

TALLINNA POLÜTEHNILISE  
INSTITUUDI TOIMETISED  
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО  
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

СЕРИЯ А

№ 227

СБОРНИК СТАТЕЙ ПО

СОПРОТИВЛЕНИЮ МАТЕРИАЛОВ,  
СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ И  
СТРОИТЕЛЬНОЙ ФИЗИКЕ

Per. A-1459-227

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED  
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

СЕРИЯ А

№ 227

1965

УДК 539.3 + 539.4

УДК 624.04

УДК 631.2 + 631.4

СБОРНИК СТАТЕЙ  
ПО  
СОПРОТИВЛЕНИЮ МАТЕРИАЛОВ, СТРОИТЕЛЬНОЙ  
МЕХАНИКЕ И СТРОИТЕЛЬНОЙ ФИЗИКЕ

ТАЛЛИН 1965

## СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
1. К. К. Оллик. Корпускулярная модель материала в сопротивлении материалов . . . . .	3
2. Э. М. Иеги. Оптимальное проектирование статически неопределимых систем, как проблема математического программирования	41
3. Л. А. Иооритс. Динамика температурного поля грунта под полом животноводческого помещения . . . . .	113
Zusammenfassungen:	
	(Seite)
1. K. Ollik. Das korpuskulare Modell des Stoffes in der Festigkeitslehre . . . . .	38
2. E. Jõgi. Das Projektieren der statisch unbestimmten optimalen Rahmentragwerke als Problem des mathematischen Programmierens	111
3. L. Joorits. Jährlicher Ablauf des Bodentemperaturfeldes unter dem Viehstallfussboden . . . . .	131

P<sub>1</sub>



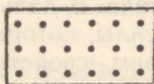
УДК 539.3 + 539.4

К. К. Оллик

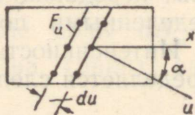
**КОРПУСКУЛЯРНАЯ МОДЕЛЬ МАТЕРИАЛА  
В СОПРОТИВЛЕНИИ МАТЕРИАЛОВ\***

В статье излагаются некоторые положения применения новой модели материала в теории сопротивления материалов. Вместо общепринятого представления материала как сплошной среды, предлагаемая модель учитывает действительную корпускулярную структуру материала. На основе корпускулярной модели материала анализируется его работа и поведение в различных напряженных состояниях. Далее приводятся основные положения общей теории прочности материала, вытекающие из его корпускулярной модели.

**1. Материал и тело.** Корпускулярная модель является абстрактным представлением материала, отражающим действительную корпускулярную структуру его. Твердое тело представляется при этом состоящим из материальных частиц — корпускул, отстоящих друг от друга на бесконечно малом расстоянии. В математическом представлении размеры корпускул считаем пренебрежительно малыми, что обеспечивает математическую непрерывность тела (фиг. 1).



Фиг. 1

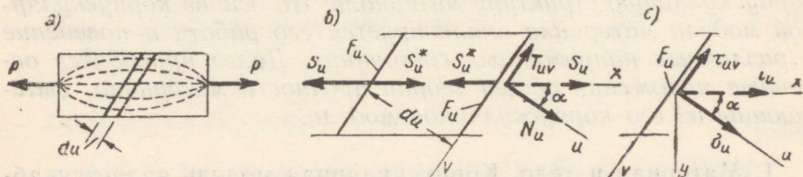


\* Статья представляет содержание доклада автора на XX научной конференции ТПИ (май, 1965 г.).

Через материальные точки тела можно мысленно провести произвольно ориентированные плоскости — грани. Грани, параллельно расположенные и отстоящие друг от друга на бесконечно близком расстоянии, будем называть противоположными гранями. Обращенные друг к другу противоположные стороны граней будем называть внутренними сторонами, другие — внешними сторонами граней. Эти грани обозначим символом  $F_u$ , где индекс  $u$  соответствует внешней нормали грани.

При изменении положения корпускул, а вместе с тем и их противоположных граней, тело деформируется, т. е. изменяется его форма или объем, или одновременно и то и другое.

**2. Внешние и внутренние силы и напряжение.** Действие внешних сил  $P$ , приложенных к твердому телу, переносится через корпускулы. Внутренними силами будем называть силы взаимодействия между гранями, уравнивающимися внешними силами (фиг. 2). Внутренние силы при отсутствии внешних сил равны нулю.



Фиг. 2

На элементарное тело (фиг. 2, *b*), выделенное двумя противоположными гранями, действуют внутренние силы  $S$ , приложенные к внешним сторонам граней, как внешние силы. Внутренние силы  $S^* = -S$ , приложенные к внутренней стороне граней, препятствуют деформации элементарного тела и, в случае упругих деформаций, при удалении внешних сил восстанавливают форму тела. В дальнейшем будем рассматривать только те внутренние силы, которые действуют на внешней стороне граней и по своим свойствам соответствуют внешним силам.

Внутренние силы, передающиеся через корпускулы, представляются распределенными по всей грани, образованной этими частицами. Интенсивность внутренних сил называется напряжением и определяется следующим образом:

$$\epsilon_u = \frac{dS_u}{dF_u},$$

(11)

при чем индекс  $u$  соответствует нормали грани  $F_u$ , где дейст-

вует напряжение (фиг. 2,с). Компонентами напряжения будут нормальное напряжение и касательное или сдвигающее напряжение.

Нормальное напряжение

$$\sigma_u = \frac{dN_u}{dF_u} \quad (2)$$

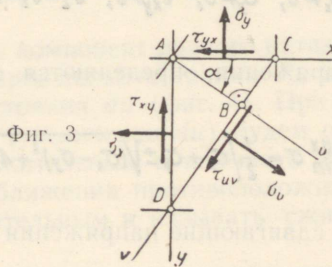
в зависимости от характера его действия будет либо растягивающим, либо сжимающим напряжением.

Сдвигающее напряжение выражается в виде:

$$\tau_{uv} = \frac{dT_{uv}}{dF_u}, \quad (3)$$

где второй индекс соответствует направлению напряжения.

Напряжение (1) и его компоненты (2) и (3) являются векторными величинами, положительные направления которых показаны на фиг. 3.



Связи между напряжениями, действующими на гранях элементарного тела, получаются из условий равновесия:

$$\sum X - \sum Y - \sum Z - \sum M_x - \sum M_y - \sum M_z = 0, \quad (4)$$

которые содержат внутренние силы  $dN_u = \sigma_u dF_u$ ,  $dT_{uv} = \tau_{uv} dF_u, \dots$  действующие на гранях элементарного тела (фиг. 3).

Из условий равновесия (4) вытекает, что сдвигающие напряжения, действующие на взаимно перпендикулярных гранях, равны друг другу, т. е.

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad (5)$$

что определяет закон парности сдвигающих напряжений.

В плоскости  $x - u - y$  общие связи между действующими напряжениями имеют вид:

$$\sigma_u = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha, \quad (6)$$

$$\tau_{uv} = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha, \quad (7)$$

где  $\alpha$  — угол между осями  $x$  и  $u$ , отсчитываемый в положительном направлении  $x - y$  (фиг. 3).

Главными напряжениями называются нормальные напряжения (6), действующие по граням, где сдвигающие напряжения (7) отсутствуют, причем два значения главных напряжений определяют экстремальные значения нормальных напряжений. Грани, на которых действуют главные напряжения, назовем главными гранями напряженности.

В случае плоского напряженного состояния, если

$$\sigma_x \neq 0, \quad \sigma_y \neq 0, \quad \tau_{xy} \neq 0, \quad \sigma_z = \tau_z = 0, \quad (8)$$

тогда главные напряжения определяются следующей зависимостью:

$$\begin{matrix} \max \\ \min \end{matrix} \sigma = \frac{1}{2} [\sigma_x + \sigma_y \pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}]. \quad (9)$$

Экстремальные сдвигающие напряжения в плоскости напряжений (8),

$$\max |\tau| = \tau_m = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}, \quad (10)$$

действуют по граням, наклоненным под углом  $45^\circ$  к главным граням, где нормальные напряжения имеют значение:

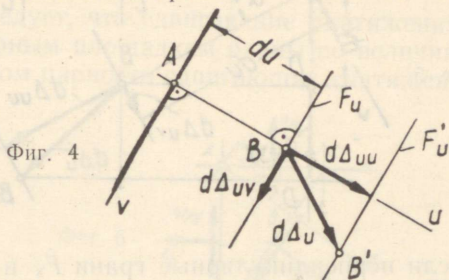
$$\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}. \quad (11)$$

**3. Натяжение\*.** «Натяжением» назовем относительное смещение противоположных граней:

\* В докладе на эстонском языке использовалось в качестве термина глагол — *pinetama*, что соответствует русскому — *натягивать*. Отсюда, в настоящей статье используется производный термин «натяжение» — *pine* в широком значении этого слова, придавая ему смысл растягивающего, сжимающего или сдвигающего «натяжения».

$$\epsilon_u = \frac{d\Delta_u}{du}, \quad (12)$$

где  $d\Delta_u$  — перемещение точки  $B$ , лежащей на грани  $F_u$  относительно противоположной грани с точкой  $A$  (фиг. 4).



Нормальное «натяжение»

$$\epsilon_u = \frac{d\Delta_{uu}}{du} \quad (13)$$

представляется как компонент полного натяжения (12), перпендикулярно ориентированный к граням  $F_u$  и характеризующий изменение их расстояния  $du$  (фиг. 4). При удалении противоположных граней (увеличении  $du$ ) будем считать нормальное «натяжение» положительным и называть растягивающим «натяжением», при сближении противоположных граней соответственно — отрицательным и называть сжимающим «натяжением».

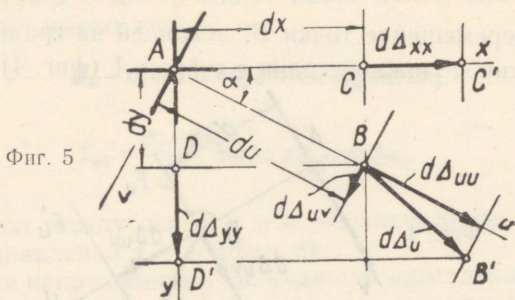
Сдвигающее или касательное «натяжение»

$$\omega_{uv} = \frac{d\Delta_{uv}}{du} \quad (14)$$

представляется как компонент полного «натяжения» (12), параллельно ориентированный к противоположным граням  $F_u$  и характеризующий величину их сдвига друг относительно друга. Сдвигающее натяжение будем считать положительным, если точка расположенная со стороны внешней положительной нормали  $u$ , сдвигается вдоль положительного направления оси  $v$  или, если точка, расположенная со стороны внешней отрицательной нормали, сдвигается вдоль отрицательного направления оси  $v$  (фиг. 4).

Грани, которые не сдвигаются друг относительно друга, назовем главными гранями «натяженности», а нормальные «на-

тяжения», возникающие на этих гранях — главными «натяжениями».



В случае, если перпендикулярные грани  $F_x$  и  $F_y$  являются главными гранями, т. е. (фиг. 5)

$$d\Delta_{xy} = \omega_{xy} dx = 0 \quad \text{и} \quad d\Delta_{yx} = \omega_{yx} dy = 0, \quad (15)$$

тогда компоненты перемещения точки  $B$  относительно произвольной грани  $F_u$  выражаются следующим образом:

$$d\Delta_{uu} = d\Delta_{xx} \cos \alpha + d\Delta_{yy} \sin \alpha, \quad (16)$$

$$d\Delta_{uv} = d\Delta_{yy} \cos \alpha - d\Delta_{xx} \sin \alpha, \quad (17)$$

где  $\alpha$  — угол между нормальными граней  $x$  и  $u$ , отсчитываемый в положительном направлении  $x - y$ .

Учитывая, что  $dx = du \cos \alpha$  и  $dy = du \sin \alpha$ , получаем в частном случае (15), когда

$$\omega_{xy} = \omega_{yx} = 0, \quad (18)$$

из связей (16) и (17) следующие формулы для определения «натяжения» на произвольной грани:

$$\epsilon_u = \epsilon_x \cos^2 \alpha + \epsilon_y \sin^2 \alpha, \quad (19)$$

$$\omega_{uv} = \frac{\epsilon_y - \epsilon_x}{2} \sin 2\alpha, \quad (20)$$

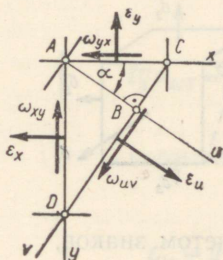
где  $\alpha$  — угол между осями  $x$  и  $u$ , отсчитываемый в положительном направлении  $x - y$ .

Учитывая знак сдвигающего «натяжения», из связи (20) вытекает, что

$$\omega_{uv} = \omega_{vu} \quad (21)$$

Отсюда следует, что сдвигающие «натяжения» по взаимно перпендикулярным площадкам равны по величине и знаку, что назовем законом парности сдвигающих «натяжений».

Фиг. 6



«Натяжение» (12) и его компоненты (13)—(14) суть векторы, приложенные к внешним сторонам противоположных граней, характеризующие их взаимные перемещения друг относительно друга (фиг. 6).

4. **Аналогия напряжений — «натяжений».** Из выражений для напряжений (5)—(11) и «натяжений» (18)—(21) и из фигур 3 и 6 вытекает полная аналогия между нормальным напряжением  $\sigma$  и нормальным «натяжением»  $\varepsilon$ , а также между сдвигающим напряжением  $\tau$  и сдвигающим «натяжением»  $\omega$ . На этом основании выводы и результаты, полученные в теории напряжений, можно непосредственно приложить в теории «натяжений», в том числе и уравнения равновесия (4), если в них формально заменить внешние силы на «силы натяжения»  $\varepsilon_u dF_u$ ,  $\omega_{uv} dF_u$  и т. д. Также может быть проведена аналогия в терминах.

Напряженность	«Натяженность»
---------------	----------------

материала полностью определена, если известны

напряжения	«натяжения»
------------	-------------

по трем взаимно перпендикулярным граням:

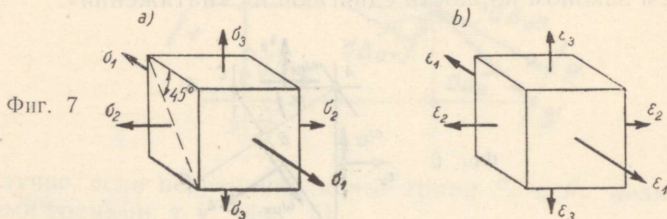
$\sigma_x$	$\tau_{xy}$	$\tau_{xz}$		$\varepsilon_x$	$\omega_{xy}$	$\omega_{xz}$
$\tau_{yx}$	$\sigma_y$	$\tau_{yz}$		$\omega_{yx}$	$\varepsilon_y$	$\omega_{yz}$
$\tau_{zx}$	$\tau_{zy}$	$\sigma_z$		$\omega_{zx}$	$\omega_{zy}$	$\varepsilon_z$

(22)

которые будем называть  
тензором напряжений,  
где

тензором «натяжений»,

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \neq \tau_{yx}, \dots \quad | \quad \omega_{xy} = \omega_{yx} \neq \omega_{yx}, \dots \quad (23)$$



Обозначим, с учетом знаков,  
главные напряжения

главные «натяжения»

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3, \quad | \quad \epsilon_1 \geq \epsilon_2 \geq \epsilon_3, \quad (24)$$

где (фиг. 7)

$$\sigma_1 \equiv \max \sigma, \quad \sigma_3 \equiv \min \sigma. \quad | \quad \epsilon_1 \equiv \max \epsilon, \quad \epsilon_3 \equiv \min \epsilon. \quad (25)$$

Из зависимостей (7) и (20) следует, что на гранях, ориентированных под углом  $45^\circ$  к главным граням, действуют

экстремальное  
сдвигающее напряжение

экстремальное  
сдвигающее «натяжение»

$$\max \tau = \tau_m = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

$$\max \omega = \omega_m = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_3}{2} \quad (26)$$

и там же

нормальное напряжение

нормальное «натяжение»

$$\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$$

$$\epsilon_m = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_3}{2} \quad (27)$$

В случае, когда

экстремальные  
нормальные напряжения

экстремальные  
нормальные «натяжения»

имеют разные знаки, т. е.

$$\sigma_1 > 0 > \sigma_3, \quad | \quad \varepsilon_1 > 0 > \varepsilon_3, \quad (28)$$

тогда, в соответствии со связями (6), (7) и (19), (20), на гранях, наклоны которых от главной грани  $F_1$  определяются как

$$\operatorname{tg} \alpha_{\tau_1} = \sqrt{-\frac{\sigma_1}{\sigma_3}} \quad | \quad \operatorname{tg} \alpha_{\omega_1} = \sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}} \quad (29)$$

и от главной грани  $F_3$  как

$$\operatorname{tg} \alpha_{\tau_3} = \sqrt{-\frac{\sigma_3}{\sigma_1}} \quad | \quad \operatorname{tg} \alpha_{\omega_3} = \sqrt{-\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1}} \quad (30)$$

нормальное напряжение равняется нулю, т. е.

$$\sigma_{\tau} = 0, \quad | \quad \varepsilon_{\omega} = 0, \quad (31)$$

и возникает только

сдвигающее напряжение

сдвигающее «натяжение»

$$\tau_{\tau} = \sqrt{-\sigma_1 \sigma_3}, \quad | \quad \omega_{\omega} = \sqrt{-\varepsilon_1 \varepsilon_3}, \quad (32)$$

которое назовем

чистым сдвигающим напряжением.

чистым сдвигающим «натяжением».

В случае, когда

экстремальные нормальные напряжения

экстремальные нормальные «натяжения»

отличаются по знаку, но равны по величине, т. е.

$$\sigma_1 = -\sigma_3, \quad | \quad \varepsilon_1 = -\varepsilon_3, \quad (33)$$

тогда из (26) и (28) — (32) вытекает, что

экстремальное и чистое сдвигающие напряжения

экстремальное и чистое сдвигающие «натяжения»

совпадают и соответственно со значениями (33)

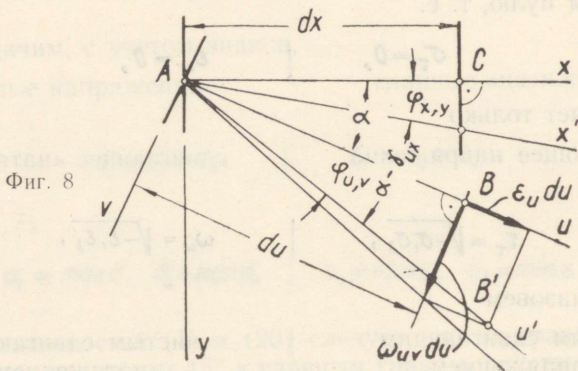
$$\tau_m \equiv |\tau_{\tau}| = |\sigma_3| = \sigma_1, \quad | \quad \omega_m \equiv |\omega_{\omega}| = |\varepsilon_3| = \varepsilon_1, \quad (34)$$

и возникают на гранях, разделяющих пополам прямой угол между главными гранями, т. е.

$$\alpha_{\tau} = \alpha_{\omega} = \pm 45^{\circ}$$

Состояние материала, при котором экстремальные нормальные напряжения удовлетворяют соотношению (33) и среднее главное напряжение равно нулю ( $\sigma_2 = 0$ ), называется обычно состоянием чистого сдвига. Однако, с точки зрения корпускулярной модели материала, это состояние будет только частным случаем явления чистого сдвигающего «натяжения» (28) — (32).

**5. «Натяжение» и деформация.** Состояние деформации тела описывается изменением для действительных или мнимых его линий и изменением углов между ними.



Нормальное «натяжение», выражающее относительное изменение расстояния  $du$  между противоположными гранями, при отсутствии сдвига ( $\omega_u = 0$ ) выражает и относительное изменение длины мысленного отрезка тела  $du$  (фиг. 8). Также при малом сдвиге относительное удлинение отрезка  $du$  имеет величину

$$\lambda_u = \sqrt{(1 + \epsilon_u)^2 + \omega_u^2} - 1 \approx \epsilon_u \quad (35)$$

При сдвиге противоположных граней, характеризуемом сдвигающим «натяжением», отрезки, соединяющие эти грани и вначале перпендикулярные к ним, поворачиваются на угол  $\varphi_u$  (фиг. 8), и вызывают изменение углов между линиями тела. В случае малых «натяжений», когда в радианах (rad) выражаемое

$$\varphi_u \approx \operatorname{tg} \varphi_u = \frac{\omega_u}{1 + \varepsilon_u} \approx \omega_u, \quad (36)$$

изменение угла  $\alpha$  между линиями  $x$  и  $u$  в плоскости ( $\omega_z = \omega_w = 0$ ) выражается на основании аналогии «натяжения» и напряжения  $s$  зависимостью (7) в виде:

$$\begin{aligned} i'_{xu} &\equiv \delta_{ux} = \varphi_{x,y} - \varphi_{u,v} \approx \omega_{xy} - \omega_{uv} = \\ &= \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \sin 2\alpha + (1 - \cos 2\alpha) \omega_{xy}, \end{aligned} \quad (37)$$

Притом изменение угла считается положительным, если угол, образованный координатными осями одного знака, уменьшается.

Изменение прямого угла между линиями  $x$  и  $y$  имеет в случае малых деформаций, как частный случай (37) с  $\alpha = 90^\circ$ , величину:

$$i'_{xy} \equiv i'_{yx} \approx 2\omega_{xy} = 2\omega_{yx} \neq 2\omega_{xy}, \quad (38)$$

причем изменение угла является скалярной величиной.

Для определения изменения прямого угла в плоскости ( $\omega_w = 0$ ) при больших деформациях получаем соответственно (21) с точным выражением в (36) следующее соотношение:

$$\operatorname{tg} i'_{uv} = \operatorname{tg} (\varphi_{u,v} + \varphi_{v,u}) = \frac{(2 + \varepsilon_u + \varepsilon_v) \omega_{uv}}{(1 + \varepsilon_u)(1 + \varepsilon_v) - \omega_{uv}^2}. \quad (39)$$

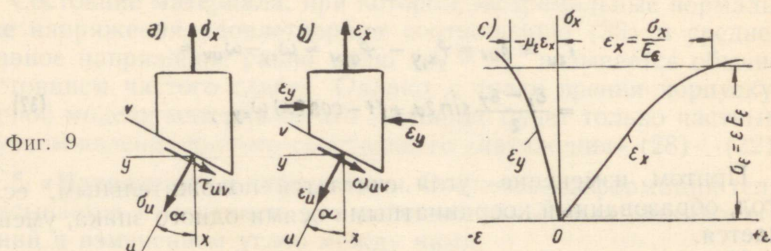
**6. Связь между напряжением и «натяжением».** Механические свойства материалов определяются главным образом испытаниями на растяжение, сжатие и кручение. Связь между напряжением и «натяжением» определяется через измеряемые силы и деформации испытываемого образца.

6.1. При испытании на растяжение или сжатие экстремальные нормальные напряжения и «натяжения» возникают в поперечном и продольном сечениях образца (фиг. 9). Отношение приращений главных «натяжений», взятое с обратным знаком, т. е.

$$\mu = - \frac{d\varepsilon_y}{d\varepsilon_x} = - \frac{d\varepsilon_z}{d\varepsilon_x} \quad (40)$$

называется коэффициентом Пуассона.

Коэффициент Пуассона имеет для каждого материала характерное значение, которое при достаточно малых «натяжениях» может считаться величиной постоянной. При увеличении «натяжения» значение коэффициента Пуассона изменяется и может принимать различные величины при испытаниях на сжатие или растяжение, однако остается в пределах  $0 \dots 0,5$ .



Отношение приращения главного напряжения и главного «натяжения» в поперечном сечении растянутого или сжатого образца

$$\epsilon = \frac{d\sigma_x}{d\epsilon_x} \quad (41)$$

называется нормальным модулем упругости, который при достаточно малых «натяжениях» может считаться величиной постоянной. При росте напряжений и «натяжений» нормальный модуль упругости (41) изменяется и «натяжение» может определяться по формуле:

$$\epsilon_x = \int_0^{\sigma_x} \frac{d\sigma_x}{E(\sigma)} = \frac{\sigma_x}{E_\epsilon(\sigma_x)} \quad (42)$$

где модуль  $E_\epsilon$  величина переменная и связывает только дискретные значения напряжения и «натяжения».

На основании выражений (40)—(42) главные «натяжения» и напряжения, возникающие при растяжении-сжатии, имеют следующую связь:

$$\epsilon_y = \epsilon_z = -\mu \epsilon_x = -\frac{\mu}{E} \sigma_x \quad (43)$$

На наклонных гранях растянутого или сжатого образца действуют напряжения, которые определяются с учетом (6), (7) следующим образом:

$$\sigma_u = \sigma_x \cos^2 \alpha, \quad (44)$$

$$\tau_{uv} = -\frac{\sigma_x}{2} \sin 2\alpha. \quad (45)$$

«Натяжения», возникающие на наклонных гранях, определяются с учетом (19), (20) и (42)—(45) в виде:

$$\varepsilon_u = (\cos^2 \alpha - \mu \sin^2 \alpha) \varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_u - \mu \sigma_v); \quad (46)$$

$$\omega_{uv} = -\frac{1+\mu}{2} \varepsilon_x \sin 2\alpha = \frac{\tau_{uv}}{H}, \quad (47)$$

где модуль

$$H = \frac{E}{1+\mu} \quad (48)$$

характеризует жесткость материала при сдвиге и в соответствии с предельными значениями коэффициента Пуассона (40) определяется в пределах:

$$E \geq H \geq \frac{2}{3} E. \quad (48a)$$

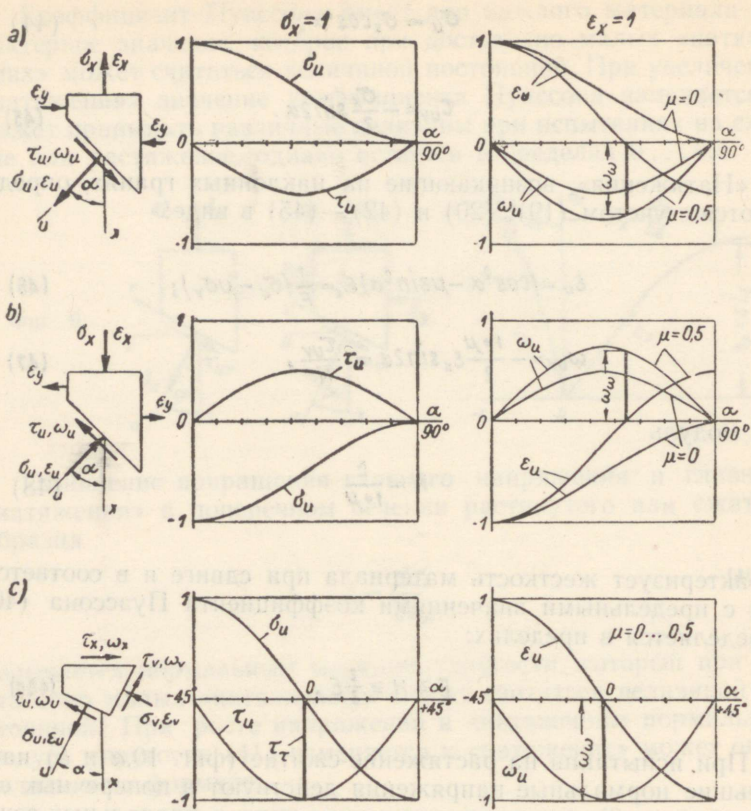
При испытании на растяжение-сжатие (фиг. 10, *a* и *b*) наибольшие нормальные напряжения действуют в поперечных сечениях ( $\alpha = 0$ ), а напряжения равны нулю в продольных сечениях ( $\alpha = 90^\circ$ ). Нормальные «натяжения» также достигают экстремальных значений в этих сечениях, причем при растяжении (фиг. 10, *a*) наибольшее растягивающее «натяжение» возникает в поперечных сечениях ( $\alpha = 0$ ), а при сжатии (фиг. 10, *b*) — в продольных сечениях ( $\alpha = 90^\circ$ ). В последнем случае их величина (43) зависит не только от напряжения и модуля упругости материала, но и от коэффициента Пуассона.

При испытании на растяжение-сжатие наибольшее сдвигающее напряжение (36)

$$\tau_m = \frac{\sigma_x}{2} \quad (49)$$

и наибольшее сдвигающее «натяжение» (26)

$$\omega_m = \frac{\tau_m}{H} = \frac{1+\mu}{E} \frac{\sigma_x}{2} = \frac{1+\mu}{2} \varepsilon_x \quad (50)$$



Фиг. 10

возникают на гранях, наклоненных под углом  $45^\circ$  к поперечным сечениям образца.

Нормальные напряжение и «натяжение» на этих гранях определяются так:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_x}{2}, \quad (51)$$

$$\epsilon_m = \frac{1-\mu}{2E} \sigma_x = \frac{1-\mu}{2} \epsilon_x. \quad (52)$$

причем при испытании на растяжение (фиг. 10,а) нормальное

напряжение и «натяжение» растягивающие, при испытании на сжатие (фиг. 10, b) — сжимающие.

Так как главные «натяжения» при испытании на растяжение (сжатие) имеют разные знаки, т. е.

$$\varepsilon_x \equiv \varepsilon_1 > 0 > \varepsilon_2 \equiv \varepsilon_3 \quad (53)$$

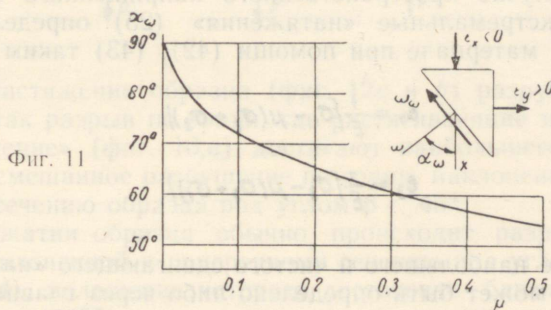
то здесь всегда имеются грани, где возникает чистое сдвигающее «натяжение».

В соответствии с (28) — (32) и (43) при испытании на растяжение-сжатие чистое сдвигающее «натяжение»

$$\omega_\omega = \varepsilon_x \sqrt{\mu} = \frac{\sqrt{\mu}}{E} \sigma_x = \frac{\tau_\omega}{H} \quad (54)$$

возникает на грани, наклоненной к поперечному сечению образца под углом  $\alpha_\omega$  определяемого из зависимости (фиг. 11):

$$\operatorname{tg} \alpha_\omega = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \quad (55)$$



6.2. При испытании на кручение в образце возникает состояние чистого сдвига (33) — (34), при котором наибольшее сдвигающее напряжение  $\tau_m$  и сдвигающее «натяжение»

$$\omega_m = \omega_\omega = \frac{\tau_m}{H} = \frac{1+\mu}{E} \sigma_x \quad (56')$$

возникают в его поперечных сечениях, где  $\sigma_m = \varepsilon_m = 0$  (фиг. 10, c).

Главные напряжения

$$\sigma_1 = -\sigma_3 \quad (57)$$

и главные «натяжения» (определенные из связи (46))

$$\varepsilon_1 = -\varepsilon_3 = \frac{1+\mu}{E} \sigma, \quad (58)$$

действуют при кручении на гранях, наклоненных под углом  $\pm 45^\circ$  к оси стержня.

Из фиг. 10 следует, что несмотря на различное напряженное состояние при испытаниях на растяжение, сжатие и кручение, «натяженность» материала во всех этих случаях имеет некоторую общность.

Здесь нужно обратить внимание также на то, что определяемое при испытании на кручение отношение сдвигающих напряжений к изменению прямого угла между ними, т. е. модуль сдвига

$$G = \frac{\tau_{xy}}{\gamma_{xy}} \quad (a)$$

связан только при малых деформациях, соответственно (36), (38), (39) и (48), с другими упругими характеристиками материала соотношением:

$$G \approx \frac{H}{2} = \frac{E}{2(1+\mu)}. \quad (b)$$

6.3. В случае пространственного напряженного состояния (фиг. 7) экстремальные «натяжения» (25) определяются в изотропном материале при помощи (42), (43) таким образом:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \quad (59)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_2 + \sigma_1)] \quad (60)$$

Значение наибольшего и чистого сдвигающего «натяжения» (26)—(34) может быть определено либо через главные «натяжения» (59)—(60), либо через зависимость (47), связывающую сдвигающее напряжение и «натяжение» таким образом:

$$\max \omega \equiv \omega_m = \frac{\tau_m}{H} = \frac{1+\mu}{E} \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \quad (61)$$

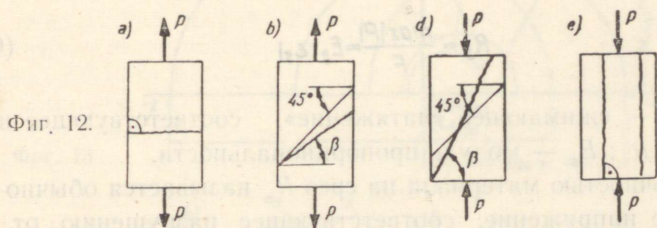
$$\max \omega_\omega = \frac{1}{E} \sqrt{-[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)][\sigma_3 - \mu(\sigma_2 + \sigma_1)]} \quad (62)$$

7. Прочность. Под прочностью материала понимаем его способность сопротивляться разрушению и появлению в нем пластических деформаций.

Корпускулярная модель материала, в которой пренебрегаются внутренние молекулярные силы, не позволяет устано-

вить прочность материала теоретическими путями. Прочность материала следует рассматривать здесь как экспериментально устанавливаемое свойство, позволяющее «натягивать» материал до определенного предела без того, чтобы прервалась мысленная связь между противоположными гранями.

«Натяжение», при котором связь между гранями прерывается, будем называть разрушающим «натяжением». Разрывом будем называть разрушение образца вследствие отрыва противоположных граней, что характеризуется растягивающим «натяжением» (13). Срезом будем называть разрушение образца вследствие сдвига противоположных граней, что характеризуется сдвигающим «натяжением» (14). Разрушение образца от влияния обоих этих факторов назовем смешанным разрушением.



При растяжении образца (фиг. 12*a* и *b*) разрушение происходит как разрыв по грани, где растягивающие напряжение и «натяжение» (фиг. 10, *a*) достигают наибольшего значения или, как смешанное разрушение по грани, наклоненной к поперечному сечению образца под углом  $\beta < 45^\circ$ .

При сжатии образца обычно происходит разрушение по грани, наклоненной к поперечному сечению под углом  $\beta > 45^\circ$  (фиг. 12 *d*), положение которого достаточно близко к положению грани, (55), где возникает чистое сдвигающее «натяжение» (фиг. 10, *b* и 11). При сжатии образца из весьма хрупкого материала может возникать также и разрыв по продольному сечению (фиг. 12, *e*), где возникает наибольшее растягивающее «натяжение» (43).

Прочность материала характеризуется напряжениями, которые непосредственно или косвенно соответствуют разрушению образца.

Прочностью материала на растяжение  $R_t$  называется напряжение, определяемое так:

$$R_t = \frac{\max P}{F}, \quad (63)$$

где:  $P$  — наибольшее усилие, необходимое для разрушения образца;  $F$  — площадь поперечного сечения образца.

Если использовать зависимость (42), то прочность на растяжение (63) может быть выражена и в ином виде:

$$R_t = E_t \epsilon_t \quad (64)$$

где:  $\epsilon_t$  — растягивающее «натяжение», соответствующее напряжению  $R_t$ ;  $E_t$  — модуль их пропорциональности.

Прочностью материала на сжатие называется напряжение в поперечном сечении образца при разрушении. По аналогии с прочностью на растяжение (64), прочность на сжатие  $R_s$  может быть записана в виде:

$$R_s = \frac{\max |P|}{F} = E_s |\epsilon_s|. \quad (65)$$

где:  $\epsilon_s$  — сжимающее «натяжение», соответствующее напряжению  $R_s$ ;  $E_s$  — модуль пропорциональности.

Прочностью материала на срез  $R_n$  называется обычно сдвигающее напряжение, соответствующее разрушению от среза при состоянии чистого сдвига (32) — (34), полученном при испытании на кручение. По аналогии с (64), (65) можно из (56) прочность материала на срез выразить таким образом:

$$R_n = H_n \omega_n, \quad (66)$$

где  $\omega_n$  — разрушающее чистое сдвигающее «натяжение» и модуль  $H_n$  выражается по аналогии с (48) в виде:

$$H_n = \frac{E_n}{1 + \mu_n} \quad (67)$$

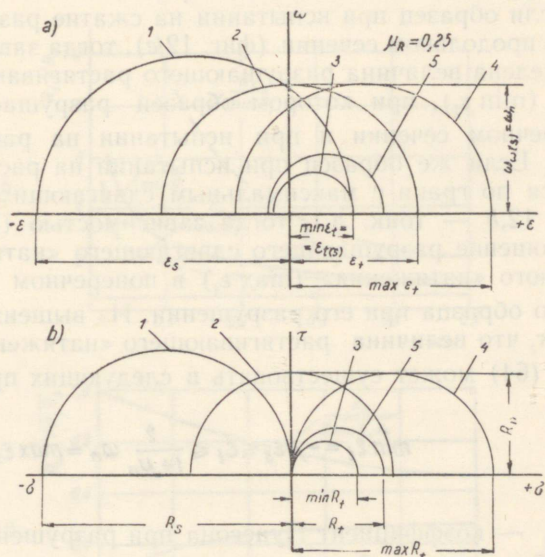
При испытании на кручение образцов из хрупких материалов разрушение происходит не по грани максимального сдвигающего «натяжения», а по грани максимального растягивающего «натяжения». Это обстоятельство не позволяет определить при испытании на кручение прочность хрупких материалов на срез.

Принимая в основу, что разрушение сжатого образца происходит или по грани максимального растягивающего «натяжения», или по грани чистого сдвигающегося «натяжения», т. е.

$$\beta = \alpha \omega. \quad (68)$$

и предполагая, что разрушение материала происходит всегда и только при «натяжениях» одной и той-же величины, можно на основании результатов испытаний на сжатие определить пределы прочности материала и на срез и на растяжение.

«Натяженное» состояние материала может характеризоваться кругами «натяжения» (фиг. 13 а), которые в силу аналогии напряжений — «натяжений» по построению и смыслу совпадают с кругами напряжения (Мора) (фиг. 13, б).



Фиг. 13

Приведенный на фиг. 13, а круг «натяжений» — 1 характеризует состояние материала при разрушении образца от сжатия. На основании зависимостей (43) и (54) наибольшее растягивающее «натяжение» определяется так:

$$\varepsilon_{t(s)} = -\mu_s \varepsilon_s \quad (69)$$

и чистое сдвигающее натяжение так:

$$\omega_{\omega(s)} = \varepsilon_s \sqrt{\mu_s}, \quad (70)$$

где  $\mu_s$  — коэффициент Пуассона при разрушении образца.

Если образец при испытании на сжатие разрушается от среза (фиг. 12, *c, d*), тогда на основании (68) зависимостью (70) определена также величина разрушающего сдвигающего «натяжения»

$$\omega_n = \omega_{\omega(s)} = \varepsilon_s \sqrt{\mu_s} \quad (71)$$

при состоянии чистого сдвига (33) — (34), которому соответствует круг «натяжений» — 2 на фиг. 13.

Если образец при испытании на сжатие разрушается отрывом в продольном сечении (фиг. 12, *e*), тогда зависимостью (69) определена величина разрушающего растягивающего «натяжения» ( $\min \varepsilon_t$ ), при котором образец разрушается отрывом в поперечном сечении и при испытании на растяжение (фиг. 12, *a*). Если же образец при испытании на растяжение разрушается по грани с максимальным сдвигающим «натяжением» (фиг. 12, *b* — тонк. л.), тогда зависимостью (50) определено соотношение разрушающего сдвигающего «натяжения» и нормального «натяжения» ( $\max \varepsilon_t$ ) в поперечном сечении растянутого образца при его разрушении. Из вышеизложенного вытекает, что величина растягивающего «натяжения» ( $\varepsilon_t$ ) в формуле (64) может существовать в следующих пределах:

$$\min \varepsilon_t = -\mu \varepsilon_s \leq \varepsilon_t \leq \frac{2}{1+\mu_n} \omega_n = \max \varepsilon_t, \quad (72)$$

где  $\mu_t$  — коэффициент Пуассона при разрушении от растяжения. Состояние материала при разрушении от растяжения характеризуется кругами «натяжений» 3, 4, 5 на фиг. 13.

Предполагая, что величины характеристики материала при его разрушении не зависят от характера внешних факторов разрушения, т. е., что в связях (69) — (72)

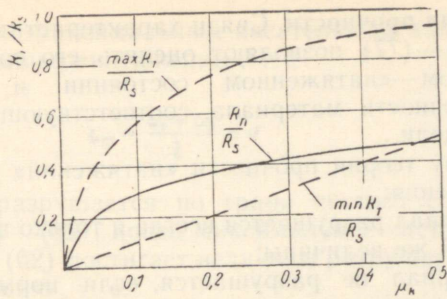
$$\mu_s = \mu_n = \mu_t = \mu_R, \quad (73)$$

и в связях (63) — (67)

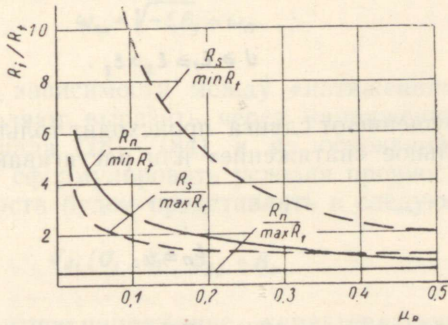
$$\varepsilon_s = \varepsilon_n = \varepsilon_t = \varepsilon_R, \quad (74)$$

определяются следующие соотношения характеристик прочности материала (фиг. 14—16):

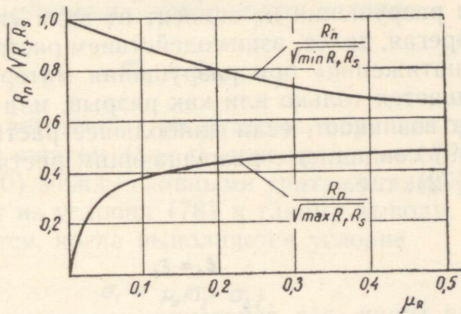
Фиг. 14



Фиг. 15



Фиг. 16



$$R_n = \frac{\sqrt{\mu_R}}{1 + \mu_R} R_s; \quad (75)$$

$$\min R_t = \mu_R R_s = (1 + \mu_R) \sqrt{\mu_R} R_n \leq R_t \leq \frac{2\sqrt{\mu_R}}{1 + \mu_R} R_s = 2R_n = \max R_t; \quad (76)$$

$$\sqrt{\frac{\sqrt{\mu_R}}{2(1 + \mu_R)}} \leq \frac{R_n}{\sqrt{R_t R_s}} \leq \frac{1}{1 + \mu_R}; \quad (77)$$

8. Теория прочности. Связи характеристик прочности материала (73)—(77) позволяют оценить его состояние в любом напряженном—«натяженном» состоянии и сформулировать теорию прочности материала, соответствующую его корпускулярной модели.

В основу теории прочности «натяжений» приняты следующие положения:

1) материал разрушается всегда и только при «натяжениях» одной и той же величины;

2) материал не разрушается, если нормальные «натяжения» на всех гранях сжимающие, т. е.

$$\sigma \geq \varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3, \quad (78)$$

3) разрушение от сдвига происходит только между гранями, где нормальное «натяжение» или растягивающее или отсутствует, т. е.

$$\varepsilon_n \geq \sigma, \quad (79)$$

4) характеристики (73), (74) механических свойств материала при разрушении не зависят от вида «натяженности».

Пренебрегая, далее, взаимодействием растягивающих и сдвигающих «натяжений» при разрушении материала, разрушение рассматривается только или как разрыв, или как срез.

Разрыв возникает, если наибольшее растягивающее «натяжение» (59) совпадает с разрушающим растягивающим «натяжением» (72), т. е.

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1 \quad (80)$$

Если на грани, где действуют максимальные сдвигающие «натяжения», возникает растягивающее «натяжение», т. е.

$$\varepsilon_m = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_3}{2} = 0 \quad (81)$$

тогда материал разрушается по этим граням, когда максимальное сдвигающее «натяжение» (61) достигает величины разрушающего сдвигающего «натяжения», т. е.

$$\omega_m = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{2} = \omega_1 \quad (82)$$

Если на грани с максимальным касательным «натяжением» возникает сжимающее «натяжение», т. е.

$$\varepsilon_m = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_3}{2} \leq 0 \quad (83)$$

тогда материал разрушается по грани чистого сдвигающего «натяжения» (29)—(32), когда максимальное чистое сдвигающее «натяжение» (62) достигает величины разрушающего сдвигающего «натяжения», т. е.

$$\omega_\omega = \sqrt{-\varepsilon_1 \varepsilon_3} = \omega_n \quad (84)$$

Существующие зависимости между «натяжениями» и напряжениями позволяют выразить через напряжения условия разрушения материала (78)—(84) и на основании характеристик (63)—(77) сформулировать условия прочности.

Условия прочности будем представлять в следующем виде:

$$\sigma_{Ri}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = R_i \quad (85)$$

где  $\sigma_{Ri}$  — эквивалентное напряжение, характеризующее напряженное состояние материала, которое при условии

$$\sigma_{Ri} = R_i, \quad (86)$$

вызывало бы соответственно разрушение образца при растяжении ( $i = t$ ) или сжатии ( $i = s$ ), или кручении ( $i = n$ ).

Зависимость (60) между главными «натяжениями» и напряжениями приводит из условия (78) к такому выводу, что материал не разрушается, когда выполняется условие

$$\sigma_1 < \mu_n(\sigma_2 + \sigma_3), \quad (87)$$

при чем учитывается знак главных напряжений.

Если главные напряжения не удовлетворяют условию (87), тогда в зависимости от характера и величины напряженности материал может разрушиться, но только в том случае, если не выполнены условия прочности или при разрыве, или при срезе, или оба одновременно.

Условие прочности на разрыв получится на основании (59), (64) и (80) в следующем виде:

$$\sigma_{Rt}^t = \sigma_1 - \mu_n(\sigma_2 + \sigma_3) < R_t, \quad (88)$$

где предельные значения прочности при растяжении  $R_t$  определяются из (76) и могут быть получены при испытаниях образца на сжатие или кручение.

Разрушение от наибольших сдвигающих напряжений и «натяжений» происходит только в том случае, если главные напряжения удовлетворяют условию:

$$\sigma_1 + \sigma_3 \geq \mu_R (\sigma_1 + 2\sigma_2 + \sigma_3), \quad (89)$$

устанавливаемому из (81).

Условие прочности на срез, в случае (89), получим на основании, (61), (66), (75) и (82) в следующем виде:

$$\sigma_{R_n}^{\tau} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} < R_n \quad (90)$$

или

$$\sigma_{R_s}^{\tau} = \frac{1 + \mu_R}{2\sqrt{\mu_R}} (\sigma_1 - \sigma_3) < R_s. \quad (91)$$

Разрушение от чистого сдвигающего «натяжения» происходит в том случае, если главные напряжения связаны условием:

$$\sigma_1 + \sigma_3 \leq \mu_R (\sigma_1 + 2\sigma_2 + \sigma_3), \quad (92)$$

устанавливаемым из (83).

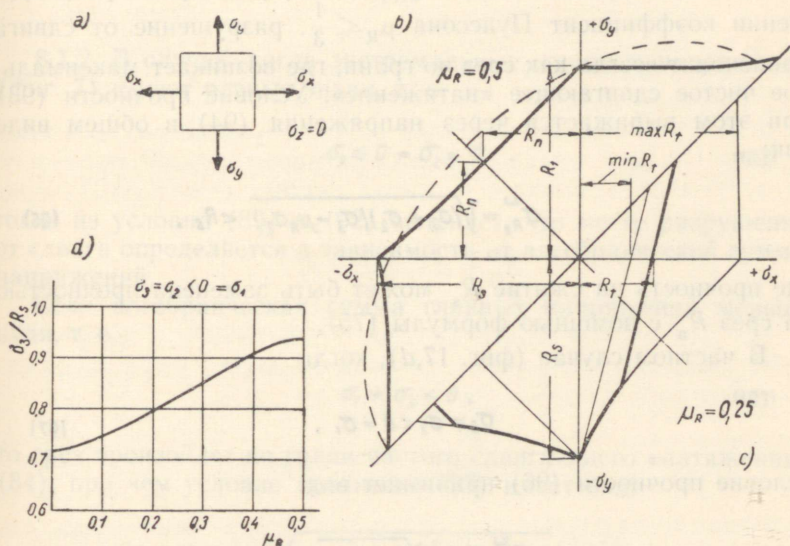
Условие прочности на срез, в случае (92), получим на основании (62), (66), (75) и (84) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{R_s}^{\omega} &= \sqrt{\frac{-1}{\mu_R} [\sigma_1 - \mu_R (\sigma_2 + \sigma_3)] [\sigma_3 - \mu_R (\sigma_2 + \sigma_1)]} = \\ &= \sqrt{(\sigma_1 + \sigma_3)^2 - \frac{(1 + \mu_R)^2}{\mu_R} \sigma_1 \sigma_3 + [\sigma_1 + \sigma_3 - \mu_R (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)] \sigma_2} < R_s. \quad (93) \end{aligned}$$

Для обеспечения прочности материала должно всегда выполняться условие прочности (88), как условие прочности при отрыве. Соблюдение же условий прочности (90), (91) и (93), как условий прочности при сдвиге, зависит на основании (89) и (92) от характера напряженного состояния и от величины коэффициента Пуассона при разрушении.

8. 1. Плоское напряженное состояние является случаем, когда одно из главных напряжений равно нулю (фиг. 17,а). Для оценки состояния материала здесь действительны все вышеизложенные соображения и условия (87) — (93). При этом

только необходимо иметь в виду, что в случае, если главные напряжения имеют один и тот же знак, то к нулю приравнивается одно из экстремальных главных напряжений.



Фиг. 17

На фиг. 17 жирная черта изображает соотношение главных напряжений при разрушении материалов, у которых коэффициент Пуассона  $\mu_R = 0,5$  (фиг. 17, b) и  $\mu_R = 0,25$  (фиг. 17, c). Для материала с  $\mu_R = 0,5$  пунктиром изображено соотношение главных напряжений, вытекающее из условия, что на октаэдрических площадках сдвигающие напряжения постоянны, т. е.  $\tau_{\text{окт}} = H \omega_{\text{окт}} = \text{const}$ . Для материала с  $\mu_R = 0,25$  тонкой линией изображены соотношения главных напряжений при разрушении, соответствующие теоретическим пределам прочности материала при растяжении (76).

Ниже рассматривается разрушение материала от сдвига и соответствующие условия прочности.

8.1.1. В случае, когда главные напряжения (фиг. 7) связаны с соотношением

$$\sigma_3 \leq \sigma_2 \leq 0 = \sigma_1, \quad (94)$$

тогда из условий (92) вытекает, что материал разрушается от чистого сдвигающего «натяжения» (84), если

$$\frac{1-\mu_R}{2\mu_R} \geq \frac{\sigma_2}{\sigma_3} \leq 1. \quad (95)$$

Отсюда следует, что для материалов, у которых при разрушении коэффициент Пуассона  $\mu_R \leq \frac{1}{3}$ , разрушение от сдвига происходит всегда как срез по грани, где возникает максимальное чистое сдвигающее «натяжение». Условие прочности (93) при этом выражается через напряжения (94) в общем виде так:

$$\sigma_{R_s}^{\omega} = \sqrt{(\sigma_3 + \sigma_2)(\sigma_3 - \mu_R \sigma_2)} < R_s. \quad (96)$$

где прочность на сжатие  $R_s$  может быть заменена прочностью на срез  $R_n$  с помощью формулы (75).

В частном случае (фиг. 17, d), когда

$$\sigma_3 = \sigma_2 < 0 = \sigma_1, \quad (97)$$

условие прочности (96) принимает вид:

$$\sigma_{R_s}^{\omega} = |\sigma_2| \sqrt{2(1-\mu_R)} < R_s. \quad (98)$$

Для материалов, у которых при разрушении коэффициент Пуассона  $\mu_R \geq \frac{1}{3}$ , разрушение по грани чистого сдвигающего «натяжения» (84) произойдет только в том случае, если соответственно условию (95) соотношение напряжений таково:

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_3} < \frac{1-\mu_R}{2\mu_R}. \quad (99)$$

при этом условием прочности является условие (96).

Если соотношение напряжений (94) не отвечает условию (99), т. е.

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_3} > \frac{1-\mu_R}{2\mu_R}. \quad (100)$$

то материал, у которого при разрушении коэффициент Пуассона  $\mu_R \geq \frac{1}{3}$ , разрушается по грани, где возникают наибольшее сдвигающее напряжение и «натяжение» (82). В этом случае действуют условия прочности (90), (91), которые в частном слу-

чае (97), когда  $\sigma_2 = \sigma_3$ , можно с учетом связи (75), записать в виде:

$$\sigma_{R_s}^T - \frac{1 + \mu_R}{2\sqrt{\mu_R}} |\sigma_2| < R_s \quad (101)$$

8.1.2. В случае, когда экстремальные главные напряжения (фиг. 7) имеют разные знаки, т. е.

$$\sigma_2 \leq 0 = \sigma_2 \leq \sigma_1, \quad (102)$$

тогда из условия (89) и (92) вытекает, что место разрушения от сдвига определяется в зависимости от алгебраической суммы напряжений.

Если алгебраическая сумма главных напряжений меньше нуля, т. е.

$$\sigma_1 + \sigma_3 < 0, \quad (103)$$

то срез произойдет по грани чистого сдвигающего «натяжения» (84), при чем условие прочности (93) имеет вид:

$$\sigma_{R_s}^\omega = \sqrt{(\sigma_1 + \sigma_3)^2 - \frac{(1 + \mu_R)^2}{\mu_R} \sigma_1 \sigma_3} < R_s. \quad (104)$$

При чистом сдвиге (33)—(34), когда напряжения имеют значения

$$\sigma_1 = -\sigma_3, \quad \tau_m = \tau_\omega = \sigma_1, \quad \sigma_2 = 0. \quad (105)$$

и чистое сдвигающее «натяжение» является одновременно и максимальным сдвигающим «натяжением», условия прочности на срез (90), (91) и (104) совпадают и принимают вид:

$$\sigma_{R_s}^\omega = \sigma_{R_s}^T = \frac{1 + \mu_R}{\sqrt{\mu_R}} \sigma_1 = \frac{1 + \mu_R}{\sqrt{\mu_R}} \tau_m < R_s \quad (106)$$

или

$$\sigma_{R_n}^\omega = \sigma_{R_n}^T = \sigma_1 = \tau_m < \frac{\sqrt{\mu_R}}{1 + \mu_R} R_s = R_n, \quad (107)$$

которое совпадает с соотношением прочности материала при сжатии и сдвиге (75).

В случае, если алгебраическая сумма главных напряжений (102) больше нуля, т. е.

$$\sigma_1 + \sigma_2 > 0, \quad (108)$$

тогда на грани наибольшего сдвигающего «натяжения» возникает нормальное растягивающее «натяжение» и условие прочности на срез имеет вид (90) или (91).

Как было определено выше, вместе с условиями прочности на срез должны всегда совпадать также условия прочности на разрыв (88), которое в случае чистого сдвига (105) принимает вид:

$$\sigma_{R_t}^E = (1 + \mu_R) \sigma_t < R_t. \quad (109)$$

Из условия прочности на срез (106), (107) и на разрыв (108) вытекает, что в состоянии чистого сдвига (105) материалы, у которых прочность на растяжение

$$R_t < \sqrt{\mu_R} R_s = (1 + \mu_R) R_n, \quad (110)$$

разрушается разрывом по грани максимальных растягивающих напряжения и «натяжения».

В зависимости от прочности материала на растяжение (76) разрыв может возникать, конечно, не только в состоянии чистого сдвига (105), но и при другом соотношении напряжений, не удовлетворяющим условию прочности на отрыв (88).

Случай напряженного состояния, когда (см. фиг. 3)

$$\sigma_x < 0 = \sigma_y = \sigma_z, \quad \tau \neq 0. \quad (111)$$

соответствует плоскому напряженному состоянию в случае (103). С учетом связи (9), (10) условия прочности могут быть выражены здесь в виде:

(88) для отрыва —

$$\sigma_{R_t}^E = \frac{1}{2} [(1 - \mu_R) \sigma_x + (1 + \mu_R) \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_x^2}] < R_t; \quad (112)$$

(104) для среза —

$$\sigma_{R_s}^W = \sqrt{\sigma_x^2 + \frac{(1 + \mu_R)^2}{\mu_R} \tau_x^2} < R_s \quad (113)$$

Если

$$\sigma_x > 0 = \sigma_y = \sigma_z, \quad \tau_x = 0. \quad (114)$$

то напряженное состояние соответствует уже состоянию (108) и условие прочности для среза (91) выражается в виде:

$$\sigma_{R_s}^{\tau} = \frac{1 + \mu_R}{2\sqrt{\mu_R}} \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_x^2} < R_s \quad (115)$$

8.1.3. В случае, когда главные напряжения (фиг. 7) связаны соотношением

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq 0 = \sigma_3, \quad (116)$$

тогда место среза определяется в зависимости от величины коэффициента Пуассона материала следующим образом.

Если  $\mu_R \leq \frac{1}{3}$ , то разрушение от сдвига происходит всегда по грани, где действуют наибольшие сдвигающие напряжения и «натяжения» (82). Условием прочности при этом являются условия (90) и (91), которые в частном случае, когда  $\sigma_1 = \sigma_2$ , принимают вид (101).

Если  $\mu_R \geq \frac{1}{3}$ , то при соотношении напряжения

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \geq \frac{1 - \mu_R}{2\mu_R}, \quad (117)$$

на грани максимального сдвигающего «натяжения» возникает сжимающее нормальное «натяжение» и разрушение от сдвига происходит, как срез по грани чистого сдвигающего «натяжения». При этом условие прочности (93), с учетом связи (75), выражается в виде:

$$\sigma_{R_n}^{\omega} = \frac{\sqrt{\mu_R}}{1 + \mu_R} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_1 \sigma_2 - \mu_R (\sigma_2^2 + \sigma_1 \sigma_2)} < R_n. \quad (118)$$

В частном случае, когда главные напряжения равны, т. е.

$$\sigma_1 = \sigma_2 > 0 = \sigma_3, \quad (119)$$

условие прочности (118) принимает вид:

$$\sigma_{R_n}^{\omega} = \frac{\sqrt{2\mu_R(1-\mu_R)}}{1+\mu_R} \sigma_2 < R_n, \quad (120)$$

что соответствует условию (98) в случае (97).

8.2. Объемное напряженное состояние в общем случае рассмотрено при формулировке теории прочности в п. 8. Ниже рассматривается частный случай, когда все главные напряжения сжимающие, при чем

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 = \sigma_3 . \quad (121)$$

В случае объемного напряженного состояния (121) материал не разрушается, если главные напряжения связаны соотношением

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_3} \geq \frac{\mu_R}{1-\mu_R} . \quad (122)$$

вытекающим из условия (87).

Если условие (122) не соблюдено, т. е. если

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_3} \leq \frac{\mu_R}{1-\mu_R} . \quad (123)$$

тогда материал разрушается или отрывом по грани с максимальными растягивающими «натяжениями» — напряжениями или срезом по грани с чистыми сдвигающими «натяжениями». Условием прочности на разрыв является условие (88) и на срез — условие (93). Условие прочности на срез (93) может быть представлено в иной форме, учитывая соотношения (121):

$$\sigma_{R_s}^{\omega} = \sqrt{2(1-\mu_R)\sigma_1^2 - \left(\frac{1}{\mu_R} + 2\mu_R - 1\right)\sigma_1\sigma_3 + \sigma_3^2} < R_s . \quad (124)$$

Из условия прочности (124) можно установить зависимость между прочностью материала на сжатие при линейном напряженном состоянии и разрушающими главными напряжениями при объемном напряженном состоянии (фиг. 18).

В частном случае, когда

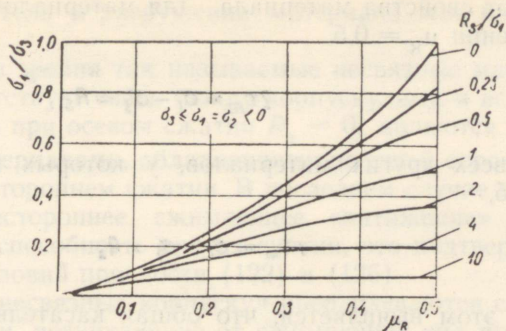
$$R_s = 0 \text{ или же } |\sigma_1| \gg R_s > 0 . \quad (125)$$

условие прочности (124) дает следующие зависимости между прочностью материала при сжатии  $R_s$  (65) и главными напряжениями (121):

$$\frac{R_s}{\sigma_1} = 0 \text{ и } \frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{\mu_R}{1-\mu_R} . \quad (126)$$

что совпадает с общим условием разрушения (122).

Фиг. 18



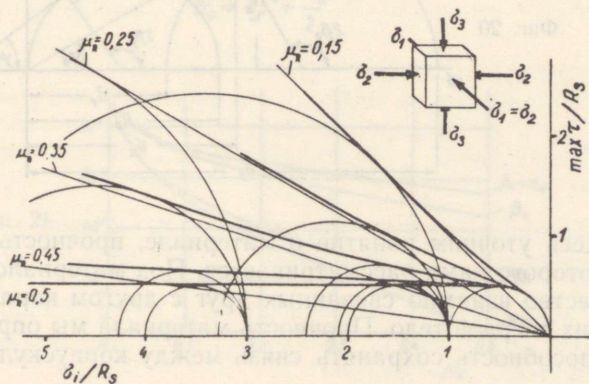
Из зависимости (126) следует, что материал, который при линейном напряженном состоянии не обладает несущей способностью ( $R_s = 0$ ), при объемном напряженном состоянии имеет несущую способность и ведет себя, как материал, обладающий прочностью при осевом сжатии ( $R_s > 0$ ).

Из зависимостей (125), (126) следует также, что в объемном напряженном состоянии материал может разрушиться в случае, когда (фиг. 18)

$$|\sigma_1| - |\sigma_3| \gg R_s \text{ только, если } \mu_R \rightarrow 0,5. \quad (127)$$

Разрушающие напряжения при объемном напряженном состоянии (121) можно характеризовать при помощи кругов напряжений и также графически представить условие прочности (124). Предельные круги напряжений (фиг. 19) наглядно показывают зависимость соотношений разрушающих напря-

Фиг. 19



жений от свойства материала. Для материалов, у которых при разрушении  $\mu_R = 0,5$ ,

$$2\tau_m = \sigma_1 - \sigma_3 = R_s, \quad (128)$$

а для всех других материалов, у которых при разрушении  $\mu_R < 0,5$ ,

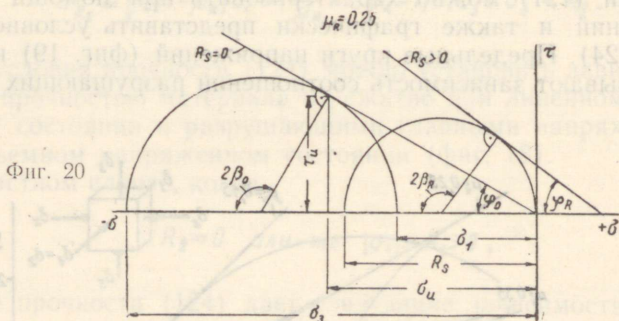
$$2\tau_m = \sigma_1 - \sigma_3 > R_s \quad (129)$$

При этом выявляется, что общая касательная предельных кругов напряжений материала, для которого прочность при сжатии  $R_s = 0$ , является асимптотой для огибающих предельных кругов всех других материалов с  $R_s > 0$ , для которых коэффициент Пуассона при разрушении имеет одно и то же значение (фиг. 19). Углы подъема этих асимптот, с учетом соотношений разрушающих напряжений (126) для материала, у которого

$$R_s = 0, \quad (130)$$

выражаются по фиг. 20 в виде:

$$\sin \varphi_0 = \frac{\sigma_3 \cdot \sigma_1}{\sigma_3 + \sigma_1} = 1 - 2\mu_R \quad (131)$$



Фиг. 20

Здесь уточним понятие о материале, прочность и разрушение которого нами рассматривается. Под материалом понимаем множество взаимно связанных друг с другом корпускул, образующих твердое тело. Прочность материала мы определили как его способность сохранять связь между корпускулами при де-

формировании тела и разрушение материала как нарушение этих связей.

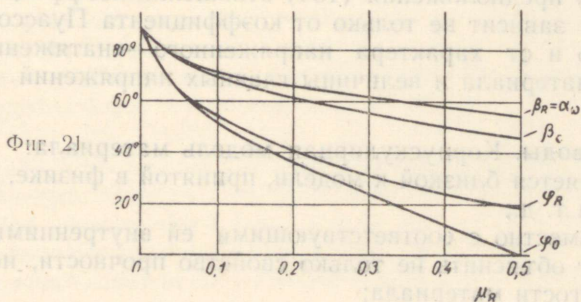
С этой точки зрения так называемые несвязные материалы, у которых отсутствует связь между корпускулами и вследствие этого прочность при осевом сжатии  $R_s = 0$ , являются уже разрушенными материалами, обладающими несущей способностью только при всестороннем сжатии. В последнем случае материал испытывает всестороннее сжимающее «натяжение» и теряет свою несущую способность при их снятии, что подтверждается совпадением условий прочности (122) и (126).

При сдвиге несвязных корпускул преодолеваются силы трения между ними, возникающие от сжимающих сил их взаимодействия. Сдвиг может произойти по площади, для которой угол между полным напряжением ( $\tau_u$ ) и внешней нормалью превышает угол трения между корпускулами. Последний совпадает с углом подъема ( $\varphi_0$ ) касательной к кругам напряжений, соответствующих предельной несущей способности несвязного материала (фиг. 20). Или иначе, сдвиг может произойти только при некотором определенном соотношении между нормальным и касательным напряжением  $\tau_u/\sigma_u$ , равном коэффициенту трения  $\operatorname{tg}\varphi_0$  между корпускулами несвязного материала. По фиг. 20 и из (131) следует, что (фиг. 21)

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{\tau_u}{\sigma_u} = \frac{1 - \mu_R}{2\sqrt{\mu_R(1 - \mu_R)}} \quad (132)$$

Положение площади, по которой произойдет сдвиг в несвязном материале, определится положением точки касания круга напряжений и линии несущей способности — асимптоты, определяемой из (132). Из фиг. 20 следует, что угол наклона площади сдвига к главной площади  $F_3$  равен, (фиг. 21)

$$\beta_0 = 45^\circ + \frac{\varphi_0}{2} \quad (133)$$



Если для связного материала представить угол наклона грани чистого среза (55) в виде (133), то в случае, когда главные напряжения и прочность материала при осевом сжатии связаны соотношением

$$\sigma_3 < 0 = \sigma_2 = \sigma_1 < R_s \quad (134)$$

получим следующую зависимость:

$$\operatorname{tg} \alpha_\omega = \frac{1}{\sqrt{\mu_R}} = \operatorname{tg} \beta_R = \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi_R}{2} \right) \quad (135)$$

Из (135) следует, что

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi_R}{2} = \frac{1 - \sqrt{\mu_R}}{1 + \sqrt{\mu_R}} \quad (136)$$

и далее определяется характеристика сдвига связного материала

$$\operatorname{tg} \varphi_R = \frac{1 - \mu_R}{2\sqrt{\mu_R}} \quad (137)$$

которая, по аналогии с несвязным материалом, условно назовем коэффициентом «внутреннего трения» материала (фиг. 21).

Сравнивая коэффициенты трения (132) и (137), полученные для связных и несвязных материалов, имеем следующее соотношение:

$$0 \leq \frac{\operatorname{tg} \varphi_0}{\operatorname{tg} \varphi_R} = \frac{1 - 2\mu_R}{(1 - \mu_R)\sqrt{1 - \mu_R}} \leq 1. \quad (138)$$

В силу предположения (134) отношения коэффициента трения (138) зависит не только от коэффициента Пуассона материала, но и от характера напряженного—«натяженного» состояния материала и величины главных напряжений — «натяжений».

## 9. Выводы. Корпускулярная модель материала:

1) является близкой к модели, принятой в физике, металлостроении и т. д.;

2) совместно с соответствующими ей внутренними силами позволяет объяснить не только свойство прочности, но и свойство упругости материала;

3) совместно с понятием «натяжение» позволяет наглядно представить и точнее проанализировать состояние материала в деформированном теле;

4) ведет к новой характеристике сдвига — модуль  $H$ , что в случае константных  $\mu$  и  $E$  остается константной также при больших деформациях;

5) позволяет полнее исследовать механизм и причины разрушения материала;

6) устанавливает значимость свойства материала, характеризуемого коэффициентом Пуассона, в оценке его прочности;

7) позволяет с помощью понятия «натяжение» сформулировать общую теорию прочности материалов.

8) в силу аналогии напряжений «натяжений» не требует введения новых формул в теорию сопротивления материалов и переход к рассмотрению деформации тела не представляет математических сложностей;

9) дает физическое обоснование так называемым условным напряжениям исходя из того, что при деформации тела число корпускул на противоположных гранях остается неизменным;

10) расширяет область линейной теории упругости так как в случае постоянных  $\mu$  и  $E$  (а, следовательно, и  $H$ ) «натяжения» остаются линейной функцией от напряжений также и при больших деформациях т. е. в области, где нелинейность связей между напряжениями и компонентами деформации должна уже быть учитываемой.

## ЛИТЕРАТУРА

I. K. Ollik, O. Roots. Tugevusõpetus. Kirjastus «Eesti Raamat», 1965.

(К. Оллик, О. Роотс. Сопротивление материалов. На эстонском языке. Издательство «Ээсти Раамат»).

## Das korpuskulare Modell des Stoffes in der Festigkeitslehre

K. Ollik

In der Abhandlung wird mittels des korpuskularen Modells des Stoffes der Verzerrungszustand des Körpers analysiert und eine allgemeine Festigkeitstheorie entwickelt.

1. Das korpuskulare Modell des Stoffes ist eine Abstraktion, die seine tatsächliche Struktur schematisiert darstellt (Abb. 1.). Im Körper werden durch die materiellen Korpuskeln unbegrenzt nahstehende Flächen vorgestellt, die Gegenflächen genannt werden.

2. Die inneren Kräfte des Körpers sind zwischen seinen Gegenflächen wirkende Kräfte, die den von aussen auf den Körper wirkenden Kräften das Gleichgewicht halten (Abb. 2). Zwischen zwei Gegenflächen wirkende innere Kraft wird als kontinuierlich verteilte Kraft behandelt und ihre Intensivität (1) durch Normalspannung (2) — Zug- oder Druckspannung — und Schubspannung (3) charakterisiert.

3. Die relative Veränderung der Lage der Gegenflächen wird «Straffung» genannt (Abb. 4.). Die Komponenten der «Straffung» (12) sind: die «Normalstraffung» (13) — «Zug-» oder «Druckstraffung» — und die «Schubstraffung» (14).

4. Die Abbildungen (3) und (6) und die Formeln der Spannungen (1) — (11) und der «Straffungen» (12) — (21) zeigen eine vollständige Analogie. Die Analogie der Spannung und der «Straffung» ermöglicht in der Theorie gemeinsame analytische und graphische Verfahren anzuwenden. Die «Schubstraffung» (32), die auf der Fläche (29), (30) auftritt, wo die «Normalstraffung» fehlt, wird reine «Schubstraffung» genannt. Reiner Schub (33) — (34) ist demzufolge ein Sonderfall des allgemeinen Falles (28) — (32).

5. Die «Normalstraffung» äussert annähernd auch die Dehnung oder Verkürzung (35) einer denkbaren Linie des Körpers (Abb. 8). Den Zusammenhang zwischen der Änderung eines Winkels und der «Schubstraffung» drückt im allgemeinen Falle die Formel (37) aus und für den Sonderfall des rechten Winkels die Formeln (38), (39).

6. Mechanische Eigenschaften des Stoffes und die Zusammenhang zwischen den Spannungen und «Straffungen» (40) — (58) werden durch Zug-, Druck- und Drehversuche festgestellt (Abb. 10). Da beim Zug- und Druckversuch die «Hauptstraffungen» (43) verkehrte Zeichen haben, gibt es hier immer Flächen

(55) mit reiner «Schubstraffung» (54). Es wird eine neue Schubcharakteristik angeboten — der Modul  $H$  (48), dessen Zusammenhang mit dem Elastizitätsmodul (41) und der Querszahl (40) nicht von der Grösse der Verzerrungen abhängt (s. S. 18).

7. Die Festigkeiten des Stoffes charakterisiert man mit Spannungen im Querschnitte des Probekörpers: (63), (64) — Zugfestigkeit; (65) — Druckfestigkeit; (66) — Schubfestigkeit. Es wird angenommen, dass beim Druckversuch der Bruch (Fliessen) in Flächen (68) der reinen «Schubstraffung» oder der grössten «Zugstraffung» stattfindet (Abb. 12, c-e). Weiter wird angenommen, dass der Bruch (Fliessen) nur und immer durch die «Straffung» von derselben Grösse verursacht wird. Das erlaubt mittels «Straffungskreisen» (Abb. 13, a) die Beziehungen der Festigkeiten (75) — (77) zu bestimmen (Abb. 14—16).

8. Es wird angenommen, dass kein Bruch (Fliessen) stattfindet, wenn die «Hauptstraffungen» (78) «Druckstraffungen» sind. Zwecks Vereinfachung wird beim Bruch auf die Zusammenwirkung der «Zug-» und «Schubstraffung» verzichtet. Auf Grund dessen kann sich der Bruch ereignen nur zwischen den Flächen: 1) der grössten «Zugstraffung» (80); 2) der grössten «Schubstraffung» (82), wenn dort «Normalstraffung» (81) fehlt, oder als «Zugstraffung» existiert; 3) der grössten reinen «Schubstraffung» (84), wenn auf der Fläche der grössten «Schubstraffung» die «Druckstraffung» (83) wirkt. Für diese Bruchmöglichkeiten werden mittels Hauptspannungen entsprechende Festigkeitsbedingungen gegeben; 1) — (88); 2) — (90), (91); 3) — (93). Der Gebrauch der Festigkeitsbedingungen hängt von dem Spannungszustand und von der Eigenschaft des Stoffes ab, die die Querszahl (40) charakterisiert.

8.1. Beim zweiachsigen Spannungszustand (Abb. 17) werden die Bruchmöglichkeiten für die Fälle (94), (102) und (116) ausführlicher betrachtet und entsprechende Festigkeitsbedingungen gegeben.

8.2. Beim dreiachsigen Spannungszustand (Abb. 7) wird eingehend der Sonderfall (121) behandelt, wo zwei Hauptspannungen gleich sind. Aus der Festigkeitsbedingung (124) folgen die Beziehungen zwischen den bruchverursachenden Hauptspannungen und ihre Abhängigkeit von der Druckfestigkeit und der Querszahl des Stoffes (Abb. 18, 19—21). Den Grenzfall (125), wo der Stoff beim einachsigen Spannungszustand keine Druckfestigkeit (63) hat, kann man als kohäsionlosen Boden betrachten.

9. In den Schlussfolgerungen wird auch darauf hingewiesen, dass das korpuskulare Modell des Stoffes das Gebiet der

linearen Elastizitätstheorie erweitert — im Falle des konstanten Elastizitätsmoduls und der konstanten Querszahl ist auch bei grossen (nichtlinearen) Verzerrungen der Modul  $H$  konstant und die Zusammenhang zwischen den Spannungen und «Straffungen» bleibt linear.

УДК 624.041.2

Э. М. Иегу

## ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ РАМ, КАК ПРОБЛЕМА МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

*В статье рассматривается вопрос оптимального проектирования плоских многоконтурных рам с критерием оптимума, соответствующим наименьшему объему. Предлагаемая методика может быть в принципе применена и к проектированию пространственных рам.*

*Проблема оптимизации конструкции формулируется как проблема нелинейного математического программирования в матричной форме.*

*Имеется в виду работа материала в линейно упругой области при одинаковом сопротивлении растяжению и сжатию.*

*Постольку, поскольку всякую раму можно рассматривать как совокупность отдельных контуров, предварительно изучается вопрос оптимального проектирования отдельного контура и далее, для того, чтобы объединить результаты, относящиеся к отдельным контурам, с целью разрешения основной проблемы (оптимизации многоконтурной рамы) разрабатывается приближенный расчет многоконтурных рам способом «звездочек».*

*Решение задачи математического программирования проводится по схеме метода возможных направлений.*

*Применительно ко всему изложенному составлен подробный алгоритм и приводятся примеры его практической реализации. Алгоритм предусматривает возможность постановки задачи на электронные цифровые вычислительные машины.*

## 1. Общие положения

1.1. Общая задача оптимального проектирования, как задача синтеза конструкции, связана с отысканием оптимальной топологической схемы, оптимальной геометрии осей и определением оптимальной геометрии поперечных сечений и законов их изменения вдоль осей. При этом все указанные проблемы должны рассматриваться с учетом их взаимного влияния.

В такой, самой общей постановке проблема проектирования оптимальной конструкции представляет чрезвычайную сложность, даже если оптимизируемой функцией является объем, не говоря уже об иных, более сложных критериях оптимума.

Решение проблемы в общем виде затрудняется также слабой степенью разработанности нелинейного математического программирования, к которому сводится проблема оптимизации конструкции.

Учитывая эти обстоятельства, нами введены в проблему следующие ограничения, упрощающие ее решение, но естественно и снижающие ее общность и полноту:

1) оптимизация топологической схемы и геометрии осей не рассматривается и, как топологическая схема, так и геометрия осей, предполагаются предварительно заданными;

2) оптимизация формы поперечного сечения сохранена на уровне ранее проведенных исследований.

Таким образом, проблема фактически сведена к оптимизации закона изменения сечений вдоль оси конструкции.

Кроме того, оптимизация проводится в классе рам с прямолинейными элементами, постоянного между узлами поперечного сечения, вследствие чего закон изменения сечений вдоль оси характеризуется конечным числом параметров.

Такая постановка, однако, в практическом отношении далеко не лишена интереса постольку, поскольку в реальном проектировании в подавляющем большинстве случаев нам и приходится иметь дело с рамами, топологическая схема и геометрия осей которых задается из условий удовлетворения требований целевого назначения конструкции и условий ее эксплуатации. Из технологических же соображений целесообразной является конструкция рамы с постоянными сечениями элементов.

Остающийся невыясненным вопрос об абсолютных величинах и соотношениях соответствующих параметров поперечных сечений в разных элементах, при своем оптимальном разрешении позволяет добиться ощутимой экономии в материале по сравнению с таким проектированием, в котором оптимизация не используется.

## 1.2. Идея оптимального проектирования статически неопределимых рам

Идея оптимального проектирования излагается с использованием основных положений функционального анализа, изложенных проф. А. П. Филиным для статики стержневых систем в [1].

Совокупность функций, описывающих всю внешнюю нагрузку и все внутренние усилия, рассматривается как вектор некоторого евклидова пространства с метрикой для плоских систем, заданной следующим образом:

$$\mathbf{b}_i; \mathbf{b}_j = - \sum_{s=1}^n \int_{l_s} \frac{P_{is} P_{js} dz}{K_{ijs}} + \sum_{s=1}^n \int_{l_s} \frac{M_{x_{is}} M_{x_{js}} dz}{EJ_{x_s}} + \sum_{s=1}^n \int_{l_s} \frac{\mu_{ys} Q_{y_{is}} Q_{y_{js}} dz}{GF_s} + \sum_{s=1}^n \int_{l_s} \frac{N_{is} N_{js} dz}{EF_s} \quad (1.1)$$

Искомое решение, определяющее совокупность всех внешних и внутренних сил ( $P$ ,  $M_x$ ,  $Q_y$ ,  $N$ ), отыскивается как пересечение двух подпространств в гильбертовом пространстве — подпространства  $\mathbf{R}_{n+t}^c$  всех статически возможных векторов и подпространства  $\mathbf{R}_{m+t}^k$  всех кинематически возможных векторов.

При использовании метода сил, искомое решение — вектор  $\mathbf{b}$  представляется как сумма двух статически возможных векторов — вектора  $\mathbf{b}^{co}$  с самоуравновешенными внутренними усилиями и вектора  $\mathbf{b}^{cp}$  с внутренними усилиями, определяемыми (уравновешивающими нагрузку) функцией  $\mathbf{P}$ , так:

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}^{co} + \mathbf{b}^{cp} \quad (1.2)$$

или, в развернутом виде:

$$\mathbf{b} = \sum_{k=1}^t p_k [\mathbf{b}^{cp}]_k^0 + \sum_{k=1}^t (x_{1k} [\mathbf{b}_1^{co}]_k^0 + \dots + x_{nk} [\mathbf{b}_n^{co}]_k^0) \quad (1.3)$$

Координаты разложения вектора  $\mathbf{b}$ :

$$x_{ik} \quad (i = 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, t)$$

отыскиваются из условия удовлетворения требованиям кинематики

$$\Delta_i = \mathbf{b} [\mathbf{b}_i^{co}]^0 = 0, \quad (1.4.)$$

приводящего к системе обычных канонических уравнений метода сил.

Очевидно, что для прямой задачи теории сооружений вектор  $\mathbf{b}$ , принадлежащий евклидову пространству с заданной метрикой, при заданных весовых функциях определяется однозначно.

Рассматривая же проблему синтеза конструкции, можно получить бесчисленное множество решений, каждое из которых будет принадлежать одному из евклидовых пространств с соответствующей ему метрикой, зависящей от выбранных, с точностью до постоянного множителя, весовых функций.

Из указанного множества решений можно выделить решение, удовлетворяющее цели оптимального проектирования.

Условием для выбора метрики евклидова пространства, при рассмотрении задачи проектирования статически неопределимой рамы наименьшего объема, будет условие минимума объемной функции, при обеспечении необходимой надежности конструкции.

### 1. 3. Задача оптимального проектирования, как задача математического программирования

Задача оптимального проектирования статически неопределимых рам, как задача отыскания условного экстремума оптимизируемой функции на множестве переменных, удовлетворяющих некоторым ограничениям, типична для математического программирования.

В качестве оптимизируемой функции выбрана функция объема, совпадающая с точностью до постоянного множителя с функцией веса для однородных систем.

Функция объема представляется как линейная функция на множестве переменных

$$X_k(x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{nk}) \quad (k=1, 2, \dots, r),$$

где  $x_{ik}$  — координаты разложения вектора  $\mathbf{b}_k$  в евклидовом пространстве, которые в свою очередь являются нелинейными функциями весовых параметров  $\mathbf{g}_s = (EJ_{xs}, EF_s, GF/\mu_s)$ ,  $s = 1, 2, \dots, r$ , где  $r$  — число элементов. Так что объемная форма выступает как существенно нелинейная функция на множестве независимых параметров\*  $\mathbf{g} = (\mathbf{g}_s)$ .

Задача оптимального проектирования  $n$  раз статически неопределимой рамы формулируется следующим образом:

\* Пренебрегая влиянием продольных деформаций и сдвигов при определении перемещений в условиях плоской задачи, получим:  $\mathbf{g}_s = (EJ_{xs})$ .

Определить  $r$ -мерный квазивектор  $\mathbf{g} = (\mathbf{g}_s)$ ,  $s = 1, 2, \dots, r$ , минимизирующий объемную функцию\*

$$\bar{V}(\mathbf{g}) = \sum_s \bar{V}_s(\mathbf{g})$$

при нелинейных ограничениях, определяющих область  $\Omega$ :

$$\min \{ \bar{V}(\mathbf{g}) / \mathbf{g} \in \Omega \}$$

$$\Omega = \left\{ \mathbf{g} \mid \begin{array}{l} 1) \mathbf{b}_s = ([\tilde{\mathbf{b}}^{c\bar{p}}] - [\tilde{\mathbf{b}}^{c\bar{o}}] \bar{\mathbf{x}}) \mathbf{P} \\ 2) \mathbf{x} = -([\tilde{\mathbf{b}}^{c\bar{o}}] \bar{\mathbf{f}}' [\tilde{\mathbf{b}}^{c\bar{o}}] \bar{\mathbf{x}})^{-1} ([\tilde{\mathbf{b}}] \bar{\mathbf{f}}' [\tilde{\mathbf{b}}^{c\bar{p}}]) \\ 3) \mathbf{g} > \mathbf{0} \\ 4) V_s(\mathbf{g}) \geq V_{s \min} \end{array} \right\} \quad (1.5)$$

Первое ограничение соответствует условию статики, второе — условию совместности деформаций, третье — определяет физическое существование элементов (условие невырождения их) и четвертое ограничение выступает, как условие надежности элементов конструкции (прочности и (или) устойчивости и (или) жесткости).

Если воспользоваться представлением объема рамы  $V(\mathbf{x})$  как суммы элементарных зеркальных форм многих независимых переменных  $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  и интерпретацией объемной функции, как  $n$ -мерной гиперповерхности в  $(n+1)$ -мерном евклидовом пространстве  $(x_1, x_2, \dots, x_n, V)$  (см. [2]), то при этом с очевидностью устанавливается выпуклость объемной функции (в сторону минус  $V$ ).

Каждое из ограничений 1) ..... 4) определяет выпуклое множество\*\* в  $(n+1)$  мерном евклидовом пространстве, пересечение которых также выпукло.

\* Дефис отличает объемную функцию от объема. Понятие объемной функции уточняется ниже.

\*\* Множество  $\Omega$  называется выпуклым, если вместе с двумя произвольными точками  $x_1, x_2 \in \Omega$  оно содержит соединяющий их отрезок

$$\mathbf{x} = (1-\lambda)\mathbf{x}_1 + \lambda\mathbf{x}_2 \in \Omega, \text{ где } 0 \leq \lambda \leq 1$$

Следовательно, задача минимизации объемной функции является задачей выпуклого программирования, а именно — задачей отыскания минимума выпуклой функции на выпуклом множестве.

Известные методы выпуклого программирования строго предусматривают то, что оптимизируемая функция и ограничивающие функции имеют непрерывные частные производные, а выпуклое множество  $\Omega$  удовлетворяет некоторому условию регулярности\*.

Очевидно, что эти жесткие требования не удовлетворяются, прежде всего для оптимизируемой функции объема

$$\bar{V}(\mathbf{X}) = \sum_s \bar{V}_s(\mathbf{X})$$

ибо во всех точках (или ломаных многообразиях), где хотя бы одно из элементарных слагаемых  $V_s(\mathbf{X})$  (или несколько) обращаются в нуль — градиент функции имеет разрыв первого рода и решение поставленной задачи обычными методами математического программирования не проходит.

В настоящей статье разрабатывается алгоритм оптимального проектирования статически неопределимых рам, как задачи выпуклого программирования, по схеме метода возможных направлений, для которой необходимо иметь лишь непрерывность самой объемной функции. Алгоритм реализуется на основе приближенного расчета статически неопределимых рам.

## 2. Оптимальное проектирование контура

В данном разделе рассматривается оптимальное проектирование отдельного контура (с шарнирами или без шарниров) как элемента многоконтурной рамы.

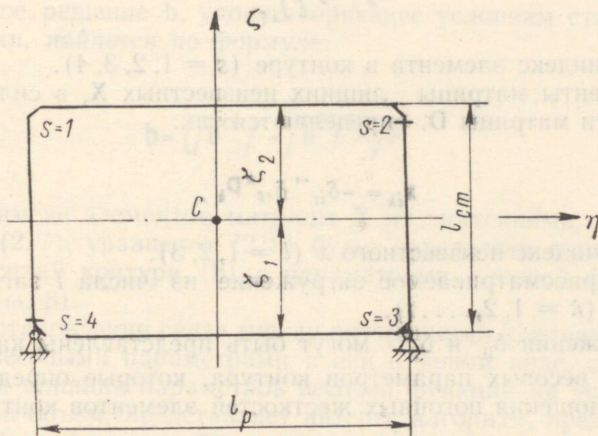
Так как данная статья преследует цель познакомить читателя с основными положениями задачи оптимального проектирования, алгоритм излагается для контура одного вида (без шарниров). При этом применение алгоритма для контура другого вида (с шарнирами), за неимением места, не показывается. Отметим лишь, что весь алгоритм проходит и для контуров с шарнирами.

Для простоты выкладок, но не нарушая общности рассуждений, в работе исследуем плоский прямоугольный контур, имеющий по крайней мере одну — вертикальную ось упругой симметрии.

\* Для всех  $n$  существует вектор  $x \in \Omega$  такой, что при нем удовлетворяются граничные условия.

## 2.1. Статический расчет контура

Если приложить лишние неизвестные в упругом центре контура (фиг. 1), то векторы базиса становятся ортогональными, а матрица коэффициентов системы канонических уравнений метода сил  $\mathbf{D}$  — диагональной.



Фиг. 1. Расчетная схема контура

Матрица векторов главного базиса обозначается символом\*  $[\tilde{\mathbf{b}}^{co}]^0$  и имеет для жесткого прямоугольного контура вид:

$$[\tilde{\mathbf{b}}^{co}]^0 = \begin{pmatrix} -\zeta_2 l_{cm} & \frac{1}{2} l_p & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -\zeta_2 l_{cm} & -\frac{1}{2} l_p & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \zeta_1 l_{cm} & -\frac{1}{2} l_p & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \zeta_1 l_{cm} & \frac{1}{2} l_p & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Смысл  $\zeta_1$  и  $\zeta_2$  ясен из фиг. 1.

\* Знак тильда  $\sim$  отмечает усилия в статически определимой системе.

В нашем случае

$$\zeta_1 = \frac{L_1 + L_{CT}}{L_1 + 2L_{CT} + L_3}; \quad \zeta_2 = \frac{L_3 + L_{CT}}{L_1 + 2L_{CT} + L_3} \quad (2.2)$$

где

$$L_s = l_s \frac{E J_{x0}}{E J_{xs}} \quad (2.3)$$

$s$  — индекс элемента в контуре ( $s = 1, 2, 3, 4$ ).

Элементы матрицы лишних неизвестных  $X$ , в силу диагональности матрицы  $D$ , определяются так:

$$x_{ik} = -\delta_{ii}^{-1} \delta_{ip}^k P_k, \quad (2.4)$$

где  $i$  — индекс неизвестного  $x$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

$\kappa$  — рассматриваемое загрузеие из числа  $t$  загрузеий ( $\kappa = 1, 2, \dots, t$ ).

Выражения  $\delta_{ii}$  и  $\delta_{ip}^{(k)}$  могут быть представлены как явные функции весовых параметров контура, которые определяются как соотношения погонных жесткостей элементов контура:

$$\frac{i_{CT}}{i_1} = \omega, \quad \frac{i_3}{i_1} = \beta, \quad \frac{i_{CT}}{i_3} = \beta\omega \quad (2.5)$$

Здесь  $i$  — погонные жесткости элементов: стоек ( $i_{CT}$ ), ригеля верхнего ( $i_1$ ) и ригеля нижнего ( $i_3$ ).

Введя обозначения (2.5) коэффициентам  $\zeta_1$  и  $\zeta_2$  придадим вид:

$$\zeta_1 = \frac{\omega + 1}{\beta\omega + \omega + 2}, \quad \zeta_2 = \frac{\beta\omega + 1}{\beta\omega + \omega + 2} \quad (2.6)$$

Значения неизвестных  $x_{ik}$  как явных функций весовых параметров, определяются из (2.3) следующим образом:

$$x_{ik} = \frac{3}{l_{CT}} \frac{\Lambda}{3\beta\omega^2 + 2\beta\omega + 2\omega + 1}$$

$$\begin{aligned} \text{где } \Lambda = & \omega(\beta\omega + 1)(\tilde{M}_{1k} + \frac{l_p}{2} \tilde{Q}_{1k}) + \frac{1}{2}(\beta\omega - \omega)(\tilde{M}_{2k} + M_{4k}) + \\ & + (\beta\omega - 2\omega - 1)\frac{1}{6} \tilde{Q}_{2k} l_{CT} + (2\beta\omega - \omega + 1)\frac{1}{6} \tilde{Q}_{4k} l_{CT} - \\ & - \beta\omega(\omega + 1)(\tilde{M}_{3k} + \frac{l_p}{2} Q_{3k}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_{2k} &= \frac{1}{l_p} \frac{\omega \tilde{Q}_{1k} l_p + 6 [(\tilde{M}_{1k} - \tilde{M}_{4k} + \frac{L_{CT}}{2} (\tilde{Q}_{2k} - \tilde{Q}_{4k}) - \beta \omega \tilde{Q}_{3k} l_p)]}{\beta \omega + \omega + 6} \\
 x_{3k} &= - \frac{\omega (\tilde{M}_{1k} + \frac{L_p}{2} \tilde{Q}_{1k}) + (\tilde{M}_{2k} + \tilde{M}_{4k}) + \frac{L_{CT}}{2} \tilde{Q}_{2k} + \tilde{Q}_{4k} + \beta \omega (\tilde{M}_{3k} + \frac{L_p}{2} \tilde{Q}_{3k})}{\beta \omega + \omega + 2} \quad (2.7)
 \end{aligned}$$

Искомое решение  $\mathbf{b}$ , удовлетворяющее условиям статики и кинематики, найдется по формуле:

$$\mathbf{b} = ([\tilde{\mathbf{b}}^{cp}]^0 + [\tilde{\mathbf{b}}^{co}]^0 \bar{\mathbf{X}}) \mathbf{P} \quad (2.8)$$

При замене элементов матрицы  $\mathbf{X}$  их значениями, найденными из (2.7), уравнение (2.8) будет определять связь внутренних усилий контура ( $\mathbf{b}$ ) с параметрами весовой функции контура ( $\omega, \beta$ ).

При установлении связи между внутренними усилиями в системе и весовыми параметрами в ней в явном виде, с целью выявления влияния параметров весовой функции на усилия, а далее и на объем, представляет интерес алгоритм, предложенный в работе Аргираса [3], наиболее полно отвечающий цели исследования изменений расчетных усилий в зависимости от модификации параметров весовой функции.

Эта проблема решается следующим образом: предполагается, что при каких то начальных параметрах весовых функций найдена матрица усилий, далее проводится модификация весовых параметров, и расчетные усилия в модифицированной системе определяются непосредственно через расчетные усилия в первоначальной системе и вариации весовых параметров.

Этот алгоритм достаточно прозрачно определяет непосредственную связь между матрицей усилий в модифицированной системе и модификациями вектора весовых параметров  $\mathbf{g} = (\omega, \beta)$ .

Если опустить промежуточные выкладки (см. [3]), то в окончательном виде усилия в модифицированном контуре определяются по формуле:

$$\mathbf{b}_m = \mathbf{b} - [\tilde{\mathbf{b}}^{co}]^0 \mathbf{D}^{-1} [\tilde{\mathbf{b}}^{co}]_g^0 / ([\tilde{\mathbf{b}}^{co}]_g^0 \mathbf{D}^{-1} [\tilde{\mathbf{b}}^{co}]_g^0 + \Delta \mathbf{f}_g^{-1})^{-1} \mathbf{b}_g \quad (2.9)$$

Здесь  $\mathbf{b}_m$  — матрица усилий в модифицированном контуре. (Все остальные матрицы определяются для первоначального контура).

$\Delta f_g$  — матрица изменений податливости при модификации системы, отыскиваемая как разность матриц податливости в модифицированной и первоначальной системах:

$$\Delta f_g = f_{am} - f_c$$

индекс (g) отмечает модифицируемые элементы.\*

Матрица податливости элементов контура может быть представлена как произведение двух матриц\*\*

$$f = f(l) [g] \quad (2.10)$$

где  $f(l)$  — квазидиагональная матрица, зависящая от длин элементов и не зависящая от модификации параметров жесткостей:

$$f(l) = [f(l)_s] \text{ (для } s=1, 2, 3, 4) \quad f(l)_s = \begin{vmatrix} 1 & \frac{l_s}{2} \\ \frac{l_s}{2} & \frac{l_s^2}{3} \end{vmatrix} \quad (2.11)$$

$[g]$  — диагональная матрица модифицируемых параметров весовой функции:

$$[g] = [\omega, \omega, 1, 1, \beta\omega, \beta\omega, 1, 1] \quad (2.12)$$

Такое представление матрицы податливости контура позволяет выделить в матрице  $\Delta f$  модифицируемую часть ее —  $[\Delta g]$  и неизменяемую при модификации часть —  $f(l)$ .

Если иметь в виду, что все матрицы усилий в этом алгоритме представляются в блочной форме:

$$b = \begin{vmatrix} b_o (s=2,4) \\ b_g (s=1,3) \end{vmatrix} \quad (2.13)$$

\* Имея параметры (2.4) всегда можно начальные жесткости всех элементов выразить через погонную жесткость одного из них. Последнюю будем называть опорной. Если в качестве таковой выбрать погонную жесткость стоек, то индекс (g) будет соответствовать элементам ригелей ( $s=1,3$ ).

\*\* Весовые параметры нами трактуются в одних случаях как элементы вектора-столбца и в этом случае последний обозначается  $g$ , в других случаях как элементы диагональной матрицы, которую будем обозначать символом  $[g]$ . По принципу последнего символа образуются символы для изображения диагональных или квазидиагональных матриц и в других случаях.

то матрицу модификации системы  $\Delta f$  можно изобразить так:

$$\Delta f_g = f(l)_g / g / g \quad (2.14)$$

где

$$\sqrt{\Delta g}_g = \sqrt{\omega_m - \omega, \omega_m - \omega, (\beta\omega)_m - \beta\omega, (\beta\omega)_m - \beta\omega} \quad (2.15)$$

Матрица усилий в модифицированной системе получает теперь более прозрачную связь с матрицей модификации параметров весовых функций\*  $[\Delta g]$ :

$$b_m^* = b - [\tilde{b}^{co}]_g^o D^{-1} [\tilde{b}^{co}]_g^o / ([\tilde{b}^{co}]_g^o D^{-1} [\tilde{b}^{co}]_g^o + \Delta g^{-1} f(l)_g)^{-1} b_g \quad (2.16)$$

В принципе предлагаемый подход не исключает возможности получения зависимости между усилиями и параметрами весовой функции в другом виде, в частности, повторением расчета по (2.8), что в условиях применения ЭЦВМ может рассматриваться как вполне равноправный метод.

## 2.2. Объемная функция контура

2.2.1. Объем контура рассматривается как сумма объемов элементов контура:

$$V = \sum_s V_s = \sum_s l_s F_s \quad (2.17)$$

где  $s$  — индекс элемента контура.

Объем каждого из элементов, входящих в контур, находится при условии удовлетворения, с одной стороны, требований прочности и (или) устойчивости элемента (как требования надежности работы каждого отдельного элемента) и, с другой стороны, требований выбранного закона распределения весовой функции по контуру (как требования, возникающего в результате объединения элементов в систему), при удовлетворении условий равновесия и совместности деформаций.

Первое условие с очевидностью ограничивает значение объемной функции элемента, (а следовательно, и всего контура) снизу — определяя минимум объемной функции, второе условие ограничивает значение объемной функции контура свер-

\* Звездочкой (\*) отмечены матрицы реагирующие на модификацию.

ху — определяя, с точностью до постоянного множителя ( $\geq 1$ ), условный максимум объемной функции\*.

## 2.2.2. Параметры сечения

Нами используются результаты экономического анализа формы и размеров поперечных сечений элементов строительных конструкций, полученные в работах [4, 5, 6].

Объемная функция контура должна определяться так, чтобы одновременно удовлетворялись оба требования (ограничения снизу и сверху). С этой целью исследуется связь объемной функции контура с его весовыми параметрами и разрабатывается некоторый критерий, определяющий условие совпадения этих требований, как условие минимума объемной функции контура.

Для определенности дальнейшего рассмотрения вопроса оптимального проектирования примем в качестве расчетного профиля элементов — профиль двутаврового сечения, основные характеристики и параметры которого определяются следующим образом:

$F_1$  и  $F_2$  — площади поперечных сечений полков,

---

\* Поясним это следующим образом: представим себе, что мы задались какими-то соотношениями жесткостей элементов контура и соответственно этому рассчитали контур с соблюдением, естественно, условий равновесия и совместности деформаций, получив при этом некоторую картину распределения усилий. Если теперь производить подбор сечений элементов, то соотношения жесткостей, вообще говоря, получатся иными, чем первоначально принятые (в силу так называемого эффекта действия связей). Однако можно произвести такое смещение в абсолютных значениях жесткостей, чтобы, с одной стороны, наиболее напряженные элементы сечения были подобраны без запаса, а, с другой стороны, были сохранены первоначально принятые соотношения жесткостей.

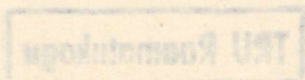
Естественно, что в ряде элементов, за исключением наиболее напряженных, в общем случае будет иметь место недонапряжение.

Зная момент инерции при выбранных параметрах сечения, можно однозначно найти площадь поперечного сечения, а следовательно, можно определить объем элемента и всего контура.

Найденный таким образом объем является верхней границей из того множества объемов, для которого удовлетворяются все четыре поставленные выше требования.

Приведенные здесь объяснения вскрывают лишь природу взаимосвязи, но ни в коем случае не отражают природу алгоритма. В алгоритме соотношение жесткостей и высоты сечений являются определяемыми величинами.

В свете последнего утверждения становится ясным наличие отмеченного выше множества объемов, так как единственное значение объема относится к единственному вектору параметров жесткостей, а последний является варьируемым.



$h_1$  и  $h_2$  — расстояния от центра тяжести сечения до центров тяжести соответствующих полок,

$F_c$  — площадь поперечного сечения стенки,

$F = F_1 + F_2 + F_c$  — полная площадь поперечного сечения профиля.

Обозначим

$$F_c = Fx$$

где  $x$  — параметр распределения материала между стенкой и полками. Тогда

$$F_1 = F \frac{2A - (A+1)x}{2(A+1)}; \quad F_2 = \frac{2 - (A+1)x}{2(A+1)}$$

Здесь  $A = h_1/h_2 = W_{z_1}/W_{z_2}$  — коэффициент асимметрии сечения.

Зависимость между высотой ( $h$ ) и толщиной ( $d$ ) стенки профиля принимается в виде:

$$vd = h^\mu$$

где  $v$  — некоторый параметр, характеризующий гибкость стенки\*.

При  $\mu = 0$  предъявляются требования постоянства толщины стенки:  $vd = 1$ , откуда  $d = \text{const.}$ ;

при  $\mu = 1$  предъявляются требования постоянства отношения  $h$  и  $d$ :  $vd = h$ , откуда  $h/d = v$ ;

при  $\mu = 2$  предъявляется требование, чтобы площадь полок превышала площадь стенки  $F_n > F/2$  и т. д.

Учитывая, что  $v dh = h^{\mu+1}$  и далее  $vF_c = h^{\mu+1}$ , или иначе  $vxF = h^{\mu+1}$ , имеем:  $h = (vxF)^{1/(\mu+1)}$ .

В силу определения  $A = (h - h_1)/h_1$ , откуда

$$h_1 = \frac{(vxF)^{1/(\mu+1)}}{A+1}, \quad h_2 = \frac{(vxF)^{1/(\mu+1)}}{A+1}$$

Моменты сопротивления сечения  $W_1$  и  $W_2$  определяются так:

$$W_1 = \frac{J_z}{h_1} = F(vxF)^{1/(\mu+1)} \frac{6A - (A+1)^2 x}{6(A+1)}$$

$$W_2 = \frac{J_z}{h_2} = F(vxF)^{1/(\mu+1)} \frac{6A - (A+1)^2 x}{6A(A+1)}$$

\* Конструктивно принимается для балок без ребер жесткости  $v = 80 \div 100$ , для балок с ребрами жесткости  $v = 150 \div 200$ .

Момент инерции сечения имеет вид:

$$J_z = F(\nu \kappa F)^{\frac{2}{\mu+1}} \frac{6A - (A+1)^2 \kappa}{6(A+1)^2}$$

Если ограничиться, далее, рассмотрением симметричного сечения с коэффициентом  $A = 1$ , то для него характеристики сечения примут вид:

$$h_1 = h_2 = \frac{h}{2}$$

$$W_1 = W_2 = W_z = F(\nu \kappa F)^{\frac{1}{\mu+1}} \frac{3-2\kappa}{6}$$

$$J_z = F(\nu \kappa F)^{\frac{2}{\mu+1}} \frac{3-2\kappa}{12}$$

Оптимальное значение параметра распределения материала между стенкой и полками ( $\kappa$ ) найдется из условия экстремума момента сопротивления при заданной площади сечения

$$\frac{dW_z}{d\kappa} = 0$$

откуда оптимальное значение параметра  $\kappa$

$$\kappa_{\text{опт.}} = \frac{3}{2(\mu+1)}$$

Введем так называемую\* характеристику выгодности сечения элемента при работе на изгиб ( $\psi$ )

$$\psi = \frac{Fh}{2W_z} = \frac{3}{3-2\kappa} = \frac{\mu+2}{\mu+1}$$

которая определяет оптимальные значения параметра  $\psi$  для различным образом выбранных  $\mu$ .

При расчете полагаем параметр  $\mu$  выбранным и параметр  $\psi$  постоянным для всех элементов рамы.

Для рекомендуемой основной формы двутавровых балок с  $\mu = 1$  имеем:

$$\kappa_{\text{опт.}} = \frac{1}{2}; \quad \psi = \frac{3}{2}$$

$$h^2 = \nu \kappa F = \frac{\nu F}{2}$$

\* См [6].

откуда

$$\begin{aligned} F &= \frac{2h^2}{\gamma} \\ W_z &= \frac{Fh}{2\psi} = \frac{2h^3}{3\psi} \\ J_z &= \frac{Fh^2}{4\psi} = \frac{h^4}{3\psi} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Далее при расчете оперируем полученными здесь связями. Высота поперечного сечения элемента  $h_s$  представляется как часть длины его  $l_s$  так, что

$$h_s = \alpha_s l_s$$

Коэффициент  $\alpha_s$  определяется (если не задан конструктивно), как наибольший из двух значений, найденных из условий прочности и устойчивости.

1) По условию прочности:  $W_{zs} = M_s / [\sigma]$ .  
Если учесть, что

$$\begin{aligned} W_{zs} &= \frac{F_s h_s}{2\psi} \\ F_s &= \frac{2h_s^2}{\gamma} \end{aligned}$$

получаем

$$W_{zs} = \frac{F_s h_s}{2\psi} \geq \frac{M_s}{[\sigma]}$$

откуда

$$\begin{aligned} h_s &\geq \sqrt[3]{\frac{\psi \gamma}{[\sigma]}} \sqrt[3]{M_s} \\ \alpha_s &= \frac{h_s}{l_s} = \Xi \sqrt[3]{M_s} \frac{1}{l_s}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

где  $\Xi = \sqrt[3]{\frac{\psi \gamma}{[\sigma]}}$  — представляет собой неизменяемый при переходе от элемента к элементу коэффициент.

2) По условию устойчивости:  $\lambda_s = l_{np}/i_s \leq [\lambda]_s$ , где

$$i_s = \sqrt{J_{z3}}/\sqrt{F_s} = h_s/(2\psi), \text{ т.к. } J_{z3} = F_s h_s^2/(4\psi). \text{ Отсюда}$$

$$h_{s \min} \geq 2\sqrt{\psi} \frac{\mu_s l_s}{[\lambda]_s} = \alpha_{s3} l_s \text{ и}$$

$$\alpha_{s3} = \frac{2\sqrt{\psi}}{[\lambda]_s} \mu_s \quad (2.20)$$

Коэффициент приведения  $\mu_s$  может быть найден по известным алгоритмам, например, изложенным в работах [7] и [8]. Однако с достаточной точностью (при погрешности не более 7%) коэффициент  $\mu_s$  для стоек может быть определен по приближенной формуле, полученной для прямоугольных контуров в [7]:

$$\mu_{ст} = 0,95(1+\omega)$$

Тогда окончательно можно принять  $\alpha_s$  из условия устойчивости:

$$\alpha_{s3} = \frac{2\sqrt{\psi}}{[\lambda]_s} 0,95(1+\omega) \quad (2.21)$$

Объем элемента

$$V_s = F_s l_s = W_{z3} \frac{2\psi}{\alpha_s}$$

ограничивается снизу условием прочности:

$$V_s \geq V_{s \min} = \frac{M_{s \max}}{[\sigma]} \frac{2\psi}{\alpha_s} j_s \quad (2.22)$$

где  $j$  — функция перемены знака\*

$$j = \begin{cases} +1, & \text{если } M_s > 0, \\ -1, & \text{если } M_s < 0. \end{cases}$$

Допускаемое напряжение  $[\sigma]$  принимается постоянным для всех элементов системы, хотя это условие может и не соблюдаться.

Минимальный объем контура, удовлетворяющий условию прочности (четвертое условие в (1.5)), может быть представлен в следующей записи:

\* См [6].

$$V_{\min} = \sum_s V_{s\min} = \frac{2\psi}{[\sigma]} \sum_s \frac{M_{s\max}}{\alpha_s} j_s = \Theta \bar{V}_{s\min} \quad (2.23)$$

где  $\Theta = \frac{2\psi}{[\sigma]}$  — параметр объема и

$\bar{V}_{\min} = \sum_s \frac{M_{s\max}}{\alpha_s} j_s$  — объемная функция контура.

### 2.2.3. Связь объемной функции и расчетных усилий контура с параметрами весовой функции

Объемы элементов контура связаны с весовыми параметрами следующим образом:

$$\omega = \frac{i_{CT}}{i_1} = \frac{J_{2CT} l_{p1}}{J_{21} l_{CT}} = \frac{F_{CT} h_{CT}^2 l_{p1}}{F_1 h_1^2 l_{CT}} = \frac{V_{CT}}{V_1} m_1^2$$

$$\beta = \frac{i_1}{i_3} = \frac{V_1}{V_3} m_{31}^2; \quad \beta\omega = \frac{i_{CT}}{i_3} = \frac{V_{CT}}{V_3} m_3^2, \quad (2.24)$$

где коэффициенты  $m_s$  определяются так:

$$m_s = \frac{\alpha_{CT}}{\alpha_s} (s=1, 3); \quad m_{31} = \frac{m_3}{m_1} = \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \quad (2.25)$$

Если форма сечений всех элементов контура принадлежит к одному классу, определяемому параметром  $\psi$ , то значения коэффициентов  $m_s$  определяются как функции весовых параметров элемента таким образом:

учитывая, что  $I_{zs} = h_s^4 / (2v\psi)$

$$\omega = \frac{i_{CT}}{i_1} = \frac{h_{CT}^4}{h_1^4} \frac{l_{p1}}{l_{CT}},$$

откуда

$$\frac{h_{CT}}{h_1} = \sqrt[4]{\omega \frac{l_{CT}}{l_{p1}}}$$

и далее имеем

$$m_1 = \frac{l_p}{l_{CT}} \sqrt[4]{\omega \frac{l_{CT}}{l_{p1}}}; \quad m_3 = \frac{l_p}{l_{CT}} \sqrt[4]{\beta\omega \frac{l_{CT}}{l_{p3}}}; \quad m_{31} = \sqrt[4]{\beta}. \quad (2.26)$$

Связь расчетных усилий в элементах контура с весовыми параметрами элемента устанавливается аналогично. Связь ве-

совых параметров с моментами сопротивления поперечных сечений элементов имеет вид:\*

$$\omega = \frac{[W_{zct}]}{[W_{z1}]} m_1; \quad \beta = \frac{[W_{z1}]}{[W_{z3}]} m_{31}; \quad \beta\omega = \frac{[W_{zct}]}{[W_{z3}]} m_3. \quad (2.27)$$

Здесь значение моментов сопротивления  $W_{zs}$  должно удовлетворять также условию прочности

$$W_{zs} \geq \frac{M_{smax}}{[\sigma]} \quad (2.28)$$

так, что окончательные значения  $W_{s\text{расч.}}$  выбираются как наибольшие из найденных по двум условиям (2.27) и (2.28).

Это приводит к излагаемому ниже алгоритму определения расчетных усилий  $b_{\text{расч.}}$  в элементах контура, отвечающих одновременно требованию прочности и закону распределения весовой функции.

$$\begin{array}{ll} 1) \text{ Если } \frac{M_{ст\max}}{M_{1\max}} m_1 \geq \omega, \text{ то } b_{1\text{расч.}} = M_{ст\max} \frac{m_1}{\omega} & \text{при } b_{ст.\text{расч.}} = M_{ст.\max} \\ 2) \frac{M_{ст\max}}{M_{1\max}} m_1 \leq \omega, & b_{1\text{расч.}} = M_{1\max} \\ & b_{ст.\text{расч.}} = M_{1\max} \frac{\omega}{m_1} \\ 3) \frac{M_{ст\max}}{M_{3\max}} m_3 \geq \beta\omega, & b_{3\text{расч.}} = M_{ст\max} \frac{m_3}{\beta\omega} \\ & b_{ст.\text{расч.}} = M_{ст.\max} \\ 4) \frac{M_{ст\max}}{M_{3\max}} m_3 \leq \beta\omega, & b_{3\text{расч.}} = M_{3\max} \\ & b_{ст.\text{расч.}} = M_{3\max} \frac{\beta\omega}{m_3} \\ 5) \frac{M_{1\max}}{M_{3\max}} m_{31} \geq \beta, & b_{1\text{расч.}} = M_{1\max} \\ & b_{3\text{расч.}} = M_{1\max} \frac{m_{31}}{\beta} \\ 6) \frac{M_{1\max}}{M_{3\max}} m_{31} \leq \beta, & b_{1\text{расч.}} = M_{3\max} \frac{\beta}{m_{31}} \\ & b_{3\text{расч.}} = M_{3\max}. \end{array} \quad (2.29)$$

\*  $[W_{zs}]$  — обозначает момент сопротивления, удовлетворяющий закону распределения весовой функции в контуре.

#### 2.2.4. Определение объемной функции контура

Объемная функция контура, удовлетворяющая одновременно и условию прочности и закону распределения весовой функции, находится в зависимости от расчетных усилий в элементах контура по формуле:

$$\bar{V} = \sum_s b_{s \text{ расч.}} \frac{1}{\alpha_s} j_s, \quad (2.30)$$

где  $b_{s \text{ расч.}}$  определяется по алгоритму (2.29).

Введем в рассмотрение некоторые коэффициенты  $m_s^0$ , характеризующие силовое состояние системы при выбранных весовых параметрах ( $\omega$ ,  $\beta$ ), удовлетворяющее условиям статики и кинематики:

$$m_1^0 = \frac{M_1}{M_{CT}} \omega; \quad m_3^0 = \frac{M_3}{M_{CT}} \beta \omega; \quad m_{31}^0 = \frac{M_3}{M_1} \beta. \quad (2.31)$$

Тогда для вычисления объемной функции контура будет выбираться одна из трех ветвей, в зависимости от исходного вектора весовых параметров:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \text{Если} \quad \frac{m_1}{m_1^0} \geq 1 \quad \text{и} \quad \frac{m_3}{m_3^0} \geq 1, \\ \bar{V}_1 = \frac{M_{CT}}{\alpha_{CT}} \left( \frac{m_1^2}{\omega} + 2 + \frac{m_3^2}{\beta \omega} \right). \end{aligned} \quad (2.32)$$

То есть, объем нижнего ригеля является в этом случае опорным и закон распределения весовой функции требует увеличения объема ригелей.

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad \text{Если} \quad \frac{m_1}{m_1^0} \leq 1 \quad \text{и} \quad \frac{m_{31}}{m_{31}^0} \geq 1, \\ \bar{V}_2 = \frac{M_1}{\alpha_1} \left( 1 + 2 \frac{\omega}{m_1^2} + \frac{m_{31}^2}{\beta} \right). \end{aligned} \quad (2.33)$$

То есть, объем верхнего ригеля является в этом случае опорным и закон распределения весовой функции требует увеличения объема стоек и нижнего ригеля.

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad \text{Если} \quad \frac{m_3}{m_3^0} \leq 1 \quad \text{и} \quad \frac{m_{31}}{m_{31}^0} \leq 1, \\ \bar{V}_3 = \frac{M_3}{\alpha_3} \left( \frac{\beta}{m_{31}^2} + 2 \frac{\beta \omega}{m_3^2} + 1 \right) \end{aligned} \quad (2.34)$$

То есть, объем нижнего ригеля является в этом случае опорным и закон распределения весовой функции требует увеличения объема стоек и верхнего ригеля.

Таким образом, для рассматриваемого контура, имеющего четыре элемента и принятого условия упругой симметрии контура (сводящего объем двух элементов стоек к удвоенному объему одного элемента — наиболее нагруженной стойки), минимизация объемной функции будет проводиться по одной из трех ветвей (1, 2, 3), в зависимости от выбранного вектора весовых параметров и результатов статического расчета, им соответствующего.

Очевидно, что для контура, имеющего в своем составе  $m$  разных элементов ( $s = 1, 2, \dots, m$ ), минимизация будет проводиться в общем случае по одной из  $m$  ветвей. Каждая из них определяет объемную функцию контура относительно некоторого  $s$ -го элемента, являющегося при выбранной весовой функции опорным элементом.

Вопрос о выборе ветви минимизации объемной функции и в этом случае будет определяться исходным вектором весовых параметров и, как следствие этого, результатами статического расчета.

#### 2.2.5. Условия минимума и критерий минимума объемной функции контура

Введем в рассмотрение понятие критерия по параметру весовой функции и обозначим его так:

$$Kp(\omega) = \frac{m_1}{m_1^0}; \quad Kp(\beta) = \frac{m_{31}}{m_{31}^0}; \quad Kp(\beta\omega) = \frac{m_3}{m_3^0} \quad (2.35)$$

Введение критерия по весовому параметру позволяет сформулировать условия минимума объемной функции контура без ее вычисления, исходя лишь из полученной картины распределения внутренних усилий в элементах контура (при выбранных параметрах весовой функции).

Кроме того, введение критерия по параметру весовой функции позволяет четко определить выбор ветви и направление оптимизации объемной функции.

Оптимальные значения параметров  $\omega$  и  $\beta$ , минимизирующие объемную функцию контура, соответствуют совпадению верхней границы объемной функции, найденной из условия распределения весовых параметров, с нижней границей объемной функции, определяемой из условия надежности.

Условия минимума объемной функции в этом случае совпадают с условиями равнопрочности контура или, точнее, частичной равнопрочности ее отдельных элементов.

Минимуму объемной функции контура соответствует равенство коэффициентов  $m_s$  (найденных из условия оптимальной геометрии профиля) и  $m_s^0$  (вычисленных по результатам статического расчета системы) соответственно

$$m_1 = m_1^0 ; \quad m_{31} = m_{31}^0 ; \quad m_3 = m_3^0 . \quad (2.36)$$

При этом условии для соответствующих  $m_s$  и  $m_s^0$  одновременно выполняются требования удовлетворения условий равновесия, совместности деформаций, распределения весовой функции, физической реальности элемента и его надежности.

В этой точке (2.36) все три ветви объемной функции контура пересекаются так, что

$$\bar{V}_1 = \bar{V}_2 = \bar{V}_3 = \bar{V}_{min} \quad (2.37)$$

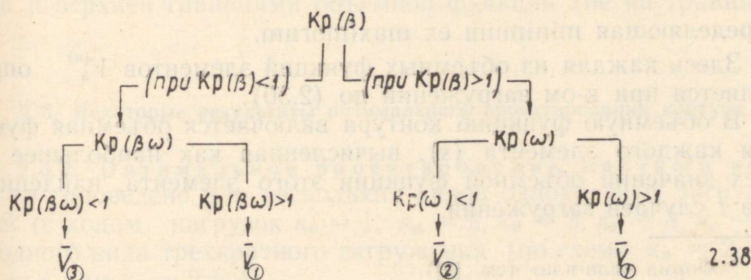
и определяют минимальное значение объемной функции для частично равнопрочного контура.

Далее формулируются условия оптимума вектора весовых параметров, минимизирующего объемную функцию по критерию весовых параметров  $Kp(\omega, \beta)$ , вытекающих из (2.35) и (2.36).

1) Оптимальный параметр  $\beta$  соответствует условию  $Kp(\beta) = 1$ . Иначе говоря, в координатных осях  $\beta$ ,  $m_s$  оптимальный параметр  $\beta$  соответствует точке пересечения двух кривых  $m_{31} = m_{31}(\beta)$  и  $m_{31}^0 = m_{31}^0(\beta)$ .

2) Оптимальный параметр  $\omega$  (при выбранном  $\beta = \beta_{опт.}$ ) соответствует условию  $Kp(\omega) = Kp(\beta\omega) = 1$ . (Для  $\beta = \beta_{опт.}$  критерий по параметру  $\omega$  тождественно совпадает с критерием по параметру  $\beta\omega$ ). Иначе говоря, в координатных осях  $\omega$ ,  $m_s$  оптимальный параметр  $\omega$  соответствует точке пересечения двух кривых  $m_1 = m_1(\omega)$  и  $m_1^0 = m_1^0(\omega)$ .

Введение критерия по параметру позволяет четко определить выбор ветви и направление оптимизации объемной функции контура, например, по такой схеме:



Выбор направления модификации вектора параметров весовой функции осуществляется таким образом, чтобы значение критерия по модифицируемому параметру стремилось к единице.

В силу монотонности изменения объемной функции вдоль ветви на множестве весовых параметров это направление однозначно отыскивается для каждого из модифицируемых весовых параметров вычислением критерия в двух точках.

Таким образом, выбор направления модификации вектора параметров весовой функции ни в какой мере не связан с необходимостью исследования объемной функции на всем поле весовых параметров, ибо выбором начального вектора весовых параметров определяется соответствующая ветвь объемной функции и минимизация проводится вдоль выбранной ветви в выбранном (расчетом в двух точках) направлении как шаговой процесс.

В приводимых ниже примерах обследуется все поле параметров весовой функции с целью показа рельефа функции  $\bar{V}$  и подтверждения правильности разработанного алгоритма минимизации объемной функции по критерию  $(Kp)$ .

#### 2.2.6. Объемная функция контура при многократном нагружении

Объемная функция контура при  $t$  воздействиях нагрузок запишется как аут-форма\*  $t$ -го порядка:

$$\bar{V} = \sum_s \bar{V}_s = \sum_s \frac{V_s^{(1)}}{\frac{V_s^{(k)}}{\frac{V_s^{(t)}}{\dots}}}} \quad (2.39)$$

определяющая minimum ex maximum.

Здесь каждая из объемных функций элементов  $\bar{V}_s^{(k)}$  определяется при  $k$ -ом нагружении по (2.30).

В объемную функцию контура включается объемная функция каждого элемента ( $s$ ), вычисленная как наибольшее из всех значений объемной функции этого элемента, найденных для  $t$  случаев нагружения.

\* Форма «или-или» (см. [2]).

Задача оптимизации конструкции в случае многократного нагружения требует исследования критерия минимума объемной функции для всех  $t$  случаев нагружения вдоль одной из трех ветвей (1, 2, 3) объемной функции. Иначе говоря, требуется проведение  $t$  исследований для каждой вариации параметров весовой функции контура.

Вопрос о выборе ветви вычисления объемной функции контура рассматривается для каждого вида нагружения как для случая однократного нагружения и решается, в зависимости от значения критерия по весовым параметрам ( $Kp$ ), по схеме (2.38).

Для контура, имеющего в своем составе  $m$  разных элементов ( $s = 1, 2, \dots, m$ ), оптимизация связана с проведением тех же  $t$  исследований объемной функции (или критериев оптимума) для каждой вариации весовых параметров контура вдоль соответствующей ветви объемной функции.

В общем случае при многократном нагружении условия минимума объемной функции не совпадают с условиями частичной равнопрочности контура, ибо при определении объемной функции контура как аут-формы, вносится «беспорядок» в набор объемов элементов контура, не соответствующего ни одному из видов нагружений. Этот «беспорядок» обнаруживается как в направлении модификации весовых параметров, так и в направлении комплектации объемной функции контура из объемов элементов ее при дискретном значении весовой функции.

В частном случае, когда объем контура комплектуется (по условию (2.39)) из объемов элементов, принадлежащих одному (решающему) виду нагружения на всем множестве весовых параметров, то для этого (решающего) вида нагружения справедливо все, что сказано для одного вида нагружения, в том числе и совпадение условий минимума объемной функции и частичной равнопрочности системы. При всех остальных ( $t - 1$ ) воздействиях нагрузок объемная функция контура удовлетворяет условия надежности конструкции в области между нижней и верхней границами объемной функции (не на границе).

### 2.3. Некоторые результаты оптимального проектирования контура

2.3.1. Оптимальное проектирование жесткого контура проведено для нескольких видов однократных нагружений (с кодом нагрузок  $\kappa_{н1} = 1$ ,  $\kappa_{н2} = 2$ ,  $\kappa_{н3} = 3$ ,  $\kappa_{н4} = 4$ ,  $\kappa_{н5} = 5$ ) и одного вида трехкратного нагружения (по схеме:  $\kappa_{н1} = 2$  или  $\kappa_{н1} = 4$  или  $\kappa_{н2} = 2$  и 4).

Коды нагрузок ( $K_H$ ) и соответствующие им схемы загрузки-ния приводятся в табл. 1.

$[\bar{b}]_{(K_H)} \quad \mathcal{L}_{\xi(K_H)}$

ТАБЛ. 1.

$K_H$	Схема нагрузки и ее эквивалент	$[\bar{b}]_{(K_H)}$	$\mathcal{L}_{\xi(K_H)}$
1		$[\bar{b}]_o^{(1)} = \{0, 0, 0, 0, 0, 0\}$ $[\bar{b}]_g^{(1)} = \{0, 0, 0, -\frac{1}{12}, 0, 0\}$	$\mathcal{L}_{\xi o}^{(1)} = (1, 1, 1, 1, 1, 1) l_p^2$ $\mathcal{L}_{\xi g}^{(1)} = (1, 1, 1, 1, 1, 1) l_p^2$
2		$[\bar{b}]_o^{(2)} = \{-\frac{1}{8}, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}, 0, -\frac{1}{2}\}$ $[\bar{b}]_g^{(2)} = \{-\frac{1}{4}, 0, 0, -\frac{1}{8}, 0, 0\}$	$\mathcal{L}_{\xi o}^{(2)} = (1, 1, \frac{1}{l_p}, 1, 1, \frac{1}{l_p}) l_p^2$ $\mathcal{L}_{\xi g}^{(2)} = (1, 1, 1, 1, 1, 1) l_p^2$
3		$[\bar{b}]_o^{(3)} = \{\frac{1}{12}, -\frac{1}{2}, 0, -\frac{5}{12}, \frac{1}{2}, 0\}$ $[\bar{b}]_g^{(3)} = \{0, 0, 0, -\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\}$	$\mathcal{L}_{\xi o}^{(3)} = (1, \frac{1}{l_{cr}}, 1, 1, \frac{1}{l_{cr}}, 1) l_{cr}^2$ $\mathcal{L}_{\xi g}^{(3)} = (1, 1, 1, 1, 1, 1) l_{cr}^2$
4		$[\bar{b}]_o^{(4)} = \{0, 1, 0, -1, 1, 0\}$ $[\bar{b}]_g^{(4)} = \{0, 0, 0, 1, -2, 1\}$	$\mathcal{L}_{\xi o}^{(4)} = (1, \frac{1}{l_{cr}}, 1, 1, \frac{1}{l_{cr}}, 1) l_{cr}^2$ $\mathcal{L}_{\xi g}^{(4)} = (1, 1, 1, 1, \frac{1}{l_p}, \frac{1}{l_{cr}}) l_{cr}^2$
5		$[\bar{b}]_o^{(5)} = \{\frac{1}{12}, \frac{1}{2}, 0, -\frac{5}{12}, \frac{1}{2}, 0\}$ $[\bar{b}]_g^{(5)} = \{0, 0, 0, \frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\}$	$\mathcal{L}_{\xi o}^{(5)} = (1, \frac{1}{l_{cr}}, 1, 1, \frac{1}{l_{cr}}, 1) l_{cr}^2$ $\mathcal{L}_{\xi g}^{(5)} = (1, 1, 1, 1, \frac{1}{l_p}, \frac{1}{l_{cr}}) l_{cr}^2$

Статический расчет и оптимальное проектирование контура проводится в соответствии с положениями, изложенными в разделах 2.1 и 2.2. С целью получения рельефа объемной функции исследуется закон изменения объемной функции контура на множестве весовых параметров  $\omega$  (при  $\beta = 1$ ) для каждого из видов загрузений и на множестве весовых параметров  $\beta$  (при  $\omega = \omega_{\text{оптим.}}$ ) для  $\kappa_n = 4$ . Результаты счета приведены в таблицах 2 ÷ 8.

Графическое представление рельефа объемной функции контура при вариации весовых параметров  $\omega$  в пределах от 0 до  $\infty$  для каждого вида загрузки приводится на фиг. 2, 3, 4, 5, 6.

Графическое представление рельефа объемной функции контура при вариации весовых параметров  $\beta$  в пределах от 0 до  $\infty$  для загрузки с кодом нагрузки  $\kappa_n = 4$  приводится на фиг. 7.

При этом с очевидностью устанавливается, что объемная функция контура  $\bar{V}(\omega, \beta)$  представляется в виде одной или двух ветвей монотонно возрастающей или монотонно убываю-

Таблица 2

$\kappa_n = 1$	$\bar{V}(\omega); (\beta = 1)$									
	$\omega$	10	5	3	2	1	1/2	1/3	1/5	1/10
$x_3$	0,46	0,42	0,38	0,34	0,25	0,17	0,13	0,09	0,05	$\frac{ql_p^2}{12}$
$\frac{l_{\text{ст}}}{2} \cdot x_1$	0,49	0,47	0,45	0,43	0,38	0,30	0,25	0,19	0,12	„
$M_{1 \text{ max}}$	0,94	0,89	0,83	0,77	0,63	0,47	0,38	0,28	0,16	„
$M_{\text{ст max}}$	0,05	0,06	0,08	0,09	0,13	0,14	0,13	0,12	0,07	„
$M_{3 \text{ max}}$	0,06	0,12	0,18	0,24	0,38	0,54	0,63	0,73	0,84	„
$m_1 = m_3$	2,42	2,04	1,79	1,62	1,36	1,14	1,03	0,91	0,76	—
$m_1^0$	0,32	0,34	0,29	0,23	0,20	0,15	0,11	0,09	0,04	—
$m_3^0$	0,64	0,65	0,65	0,63	0,61	0,57	0,55	0,53	0,52	—
$K_p(\beta)$	0,50	0,5	0,45	0,37	0,33	0,26	0,20	0,17	0,08	—
$K_p(\beta\omega)$	3,78	3,14	2,75	2,60	2,26	1,98	1,87	1,75	1,45	—
$\bar{V}(\omega) \cdot \alpha_{\text{ст}} [m.m]$	2,98	3,26	3,44	3,54	3,60	3,38	3,18	2,98	2,18	$\frac{ql_p^2}{12}$

Примечание. При использовании численных результатов этой и всех последующих таблиц следует коэффициент ряда умножить на соответствующий множитель (×) ряда (последняя графа в таблице).

$\kappa_H = 2$  $\bar{V}(\omega); (\beta = 1)$ 

	$\omega$	10	5	3	2	1	$1/2$	$1/3$	$1/5$	$1/10$	$\times$
$x_3$		1,05	1,09	1,13	1,17	1,25	1,34	1,38	1,42	1,46	$\frac{ql_{cr}^2}{12}$
$\frac{l_{cr}}{2} \cdot x_1$		1,49	0,47	0,45	0,43	0,38	0,30	0,25	0,19	0,12	„
$M_{1 \max}$		0,06	0,12	0,18	0,24	0,38	0,54	0,63	0,75	0,84	„
$M_{cr \max}$		0,94	0,89	0,83	0,77	0,63	0,47	0,38	0,28	0,16	„
$M_{3 \max}$		0,03	0,06	0,08	0,09	0,13	0,14	0,13	0,12	0,07	„
$m_1 = m_3$		2,42	2,04	1,79	1,62	1,36	1,14	1,03	0,91	0,76	—
$m_1^{\circ}$		0,64	0,65	0,65	0,63	0,61	0,57	0,55	0,53	0,52	—
$m_3^{\circ}$		0,32	0,34	0,29	0,23	0,20	0,15	0,11	0,09	0,04	—
$m_{31}^{\circ}$		0,50	0,50	0,45	0,37	0,33	0,26	0,20	0,17	0,08	—
$K_p(\beta)$		2,00	2,0	2,24	2,67	3,0	3,83	4,80	6,00	12,0	—
$K_p(\omega)$		3,78	3,14	2,75	2,60	2,26	1,98	1,87	1,75	1,45	—
$\bar{V}(\omega) \cdot \alpha_{cr} [m.m]$		2,98	3,26	3,44	3,54	3,60	3,38	3,18	2,98	2,18	$\frac{ql_{cr}^2}{12}$

 $\kappa_H = 3$  $\bar{V}(\omega); (\beta = 1)$ 

	$\omega$	10	5	3	2	1	$1/2$	$1/3$	$1/5$	$1/10$	$\times$
$x_3$		1,45	1,42	1,38	1,34	1,25	1,17	1,13	1,09	1,05	$\frac{ql_{cr}^2}{6}$
$\frac{l_{cr}}{2} \cdot x_1$		1,50	1,50	1,50	1,50	1,50	1,50	1,50	1,50	1,50	„
$M_{1 \max}$		0,05	0,08	0,12	0,16	0,25	0,33	0,37	0,41	0,45	„
$M_{cr \max}$		0,45	0,41	0,37	0,33	0,25	0,17	0,12	0,08	0,04	„
$M_{3 \max}$		0,05	0,08	0,12	0,16	0,25	0,33	0,37	0,41	0,45	„
$m_1 = m_3$		2,42	2,04	1,79	1,62	1,36	1,14	1,03	0,91	0,76	—
$m_1^{\circ} = m_3^{\circ}$		1,11	1,02	1,00	0,99	1,00	0,97	1,00	0,98	1,01	—
$K_p(\omega) = K_p(\beta\omega)$		2,18	1,91	1,75	1,62	1,36	1,14	1,03	0,91	0,76	—
$\bar{V}(\omega) \cdot \alpha_{cr} [m.m]$		1,43	1,52	1,55	1,55	1,42	1,23	1,05	0,93	0,81	$\frac{ql_{cr}^2}{6}$

Примечания: 1)  $m_{31} = 1$ ;  $m_{31}^{\circ} = 1$ , 2) Критерий по параметру  $\beta$  всюду равен единице  $K_p(\beta) = 1$ .

$\kappa_H = 4$  $\bar{V}(\omega); (\beta = 1)$ 

	$\omega$	10	5	3	2	1	1/2	1/3	1/5	1/10	$\times$		
$x_2$												$\text{Invar } (\omega) = \frac{l_{\text{cr}}}{l_p}$	—
$\frac{l_j}{2} \cdot x_2$												$\text{Invar } (\omega) = \frac{l_{\text{cr}}}{2}$	—
$M_1 \text{ max}$												$\text{Invar } (\omega) = + \frac{Pl_{\text{cr}}}{2}$	—
$M_{\text{cr}} \text{ max}$												$\text{Invar } (\omega) = - \frac{Pl_{\text{cr}}}{2}$	—
$M_3 \text{ max}$												$\text{Invar } (\omega) = + \frac{Pl_{\text{cr}}}{2}$	—
$m_1 = m_3$		2,42	2,04	1,79	2,62	1,36	1,14	1,03	0,91	0,765			—
$K_p(\omega) = K_p(\beta\omega)$		0,242	0,41	0,60	0,81	1,36	2,28	3,09	4,55	7,65			—
$\bar{V} \cdot \alpha_{\text{cr}} [m.m]$		6,52	4,49	3,47	2,85	2,84	3,6	4,2	5,15	6,85			$Pl_{\text{cr}}$

Примечания: 1)  $m_{31} = 1, m_{31}^{\circ} = 1$ , 2) Критерий по параметру  $\beta$  всюду равен единице  $K_p(\beta) = 1$ .

Таблица 6

 $\kappa_H = 5$  $\bar{V}(\omega); (\beta = 1)$ 

	$\omega$	10	5	3	2	1	1/2	1/3	1/5	1/10	$\times$	
$x_2$		0,92	0,87	0,83	0,80	0,75	0,71	0,70	0,69	0,68		$\frac{ql_{\text{cr}}^2}{2l_p}$
$\frac{l_p}{2} \cdot x_2$		0,92	0,87	0,83	0,80	0,75	0,71	0,70	0,69	0,68		$\frac{ql_{\text{cr}}^2}{4}$
$M_1 \text{ max}$		0,92	0,87	0,83	0,80	0,75	0,71	0,70	0,69	0,68		„
$M_{\text{cr}} \text{ max}$		1,25	1,20	1,16	1,13	1,08	1,04	1,03	1,02	1,01		„
$M_3 \text{ max}$		1,08	1,13	1,17	1,20	1,25	1,29	1,30	1,31	1,32		„
$m_1 = m_3$		2,42	2,04	1,79	1,62	1,36	1,14	1,03	0,91	0,76		—
$m_1^{\circ}$		7,36	3,63	2,15	1,42	0,71	0,34	0,23	0,13	0,07		—
$m_3^{\circ}$		8,65	4,70	3,03	2,12	1,15	0,62	0,42	0,26	0,13		—
$m_{31}^{\circ}$		1,17	1,30	1,41	1,49	1,62	1,82	1,83	1,92	1,94		—
$K_p(\beta)$		0,85	0,77	0,71	0,67	0,62	0,55	0,54	0,52	0,51		—
$K_p(\beta\omega)$		0,28	0,43	0,59	0,765	1,18	1,84	2,45	3,50	5,90		—
$\bar{V}(\omega) \cdot \alpha_{\text{cr}} [m.m]$		14,2	10,2	8,1	6,85	6,15	7,5	8,6	10,5	13,8		$\frac{ql_{\text{cr}}^2}{4}$

$$\kappa_H = 2\sqrt{4\sqrt{2}\wedge 4}$$

$$\bar{V}(\omega); (\beta = 1)$$

	$\omega$	10	5	3	2	1	1/2	1/3	1/5	1/10
$M_{I \max}$		6,36	6,72	7,08	7,44	8,48	9,24	9,78	10,5	11,0
$M_{CT \max}$		11,6	11,3	10,9	10,6	9,52	8,76	8,22	7,62	6,96
$M_3 \max$		6,18	6,36	6,42	6,54	6,78	6,84	6,78	6,66	6,42
$m_1 = m_3$		2,42	2,04	1,79	1,62	1,36	1,14	1,03	0,91	0,76
$m_1^{\circ}$		5,47	2,88	1,94	1,39	0,9	0,53	0,40	0,28	0,16
$m_3^{\circ}$		5,3	2,82	1,76	1,24	0,71	0,39	0,28	0,17	0,09
$m_{31}^{\circ}$		0,97	0,96	0,90	0,89	0,79	0,74	0,70	0,61	0,56
$K_p(\beta)$		1,03	1,05	1,10	1,14	1,25	1,35	1,45	1,58	1,72
$K_p(\omega)$		0,42	0,71	0,92	1,15	1,50	2,16	2,63	3,27	4,85
$\bar{V}(\omega) \cdot \alpha_{CT} (mm)$		83,5	60,5	49,0	48,5	54,0	63,0	65,6	78,7	95,0
$\alpha_{CT}$		0,09	0,10	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,08	0,08
$V [M^3]$		0,21	0,15	0,12	0,12	0,13	0,16	0,16	0,20	0,24

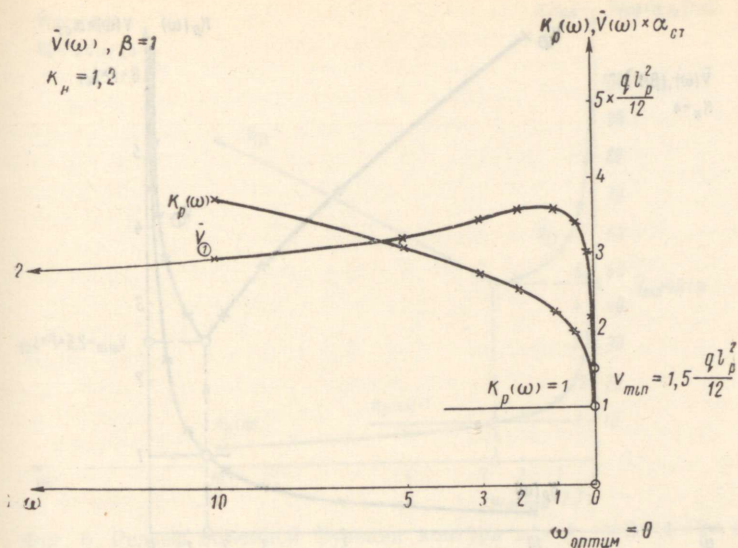
Таблица 8

$$\kappa_H = 4$$

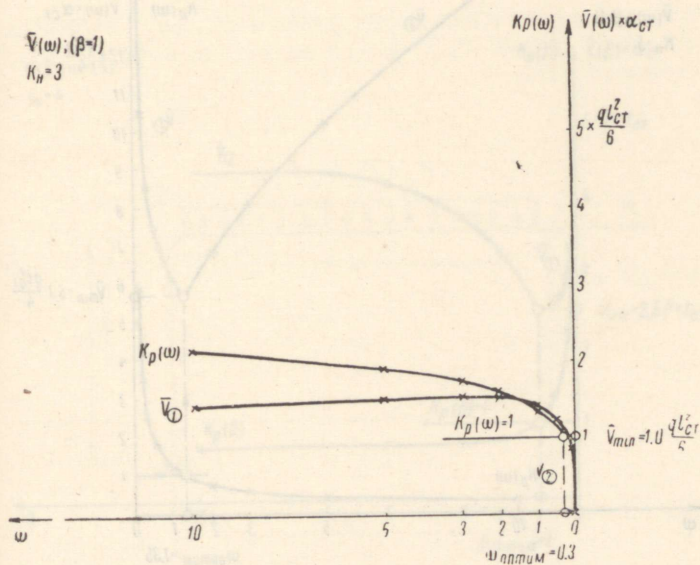
$$\bar{V}\xi(\beta); (\omega = \omega_{\text{оптим}} = 1,5)$$

	$\beta$	10	5	3	2	1	1/2	1/3	1/5	1/10	$\times$
$M_{I \max}$		0,80	0,70	0,62	0,57	0,5	0,45	0,43	0,42	0,41	$Pl_{CT}$
$M_{CT \max}$		0,80	0,70	0,62	0,57	0,5	0,54	0,56	0,58	0,59	„
$M_3 \max$		0,20	0,30	0,37	0,43	0,5	0,54	0,56	0,58	0,59	„
$m_{31}$		1,78	1,49	1,31	1,19	1,0	0,84	0,76	0,67	0,56	—
$m_3 = \frac{3}{2} m_{31}$		2,67	2,25	2,00	1,78	1,50	1,26	1,14	1,00	0,87	—
$m_1^{\circ}$		2,50	2,14	1,80	1,50	1,00	0,60	0,43	0,27	0,14	—
$m_3^{\circ}$		3,75	3,20	2,70	2,25	1,50	0,75	0,50	0,30	0,15	—
$K_p(\beta)$		0,71	0,72	0,74	0,79	1,00	1,40	1,79	2,45	4,15	—
$\bar{V} \times \alpha_{CT}$		4,38	4,21	3,72	3,30	2,50	2,56	2,66	2,90	3,36	$Pl_{CT}$

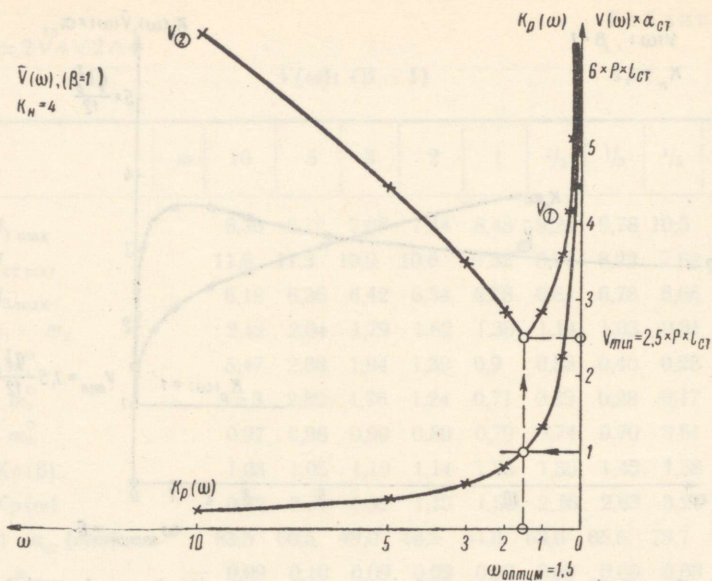
Примечания: 1)  $K_p(\omega) = 1$ , 2)  $K_p(\beta) = K_p(\beta\omega)$ .



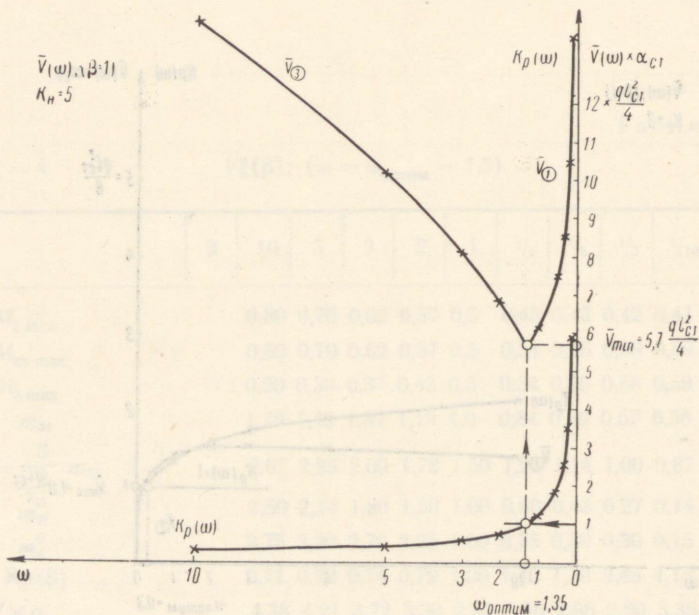
Фиг. 2. Рельеф объемной функции контура  $\bar{V}(\omega)$  для  $k_H = 1,2$



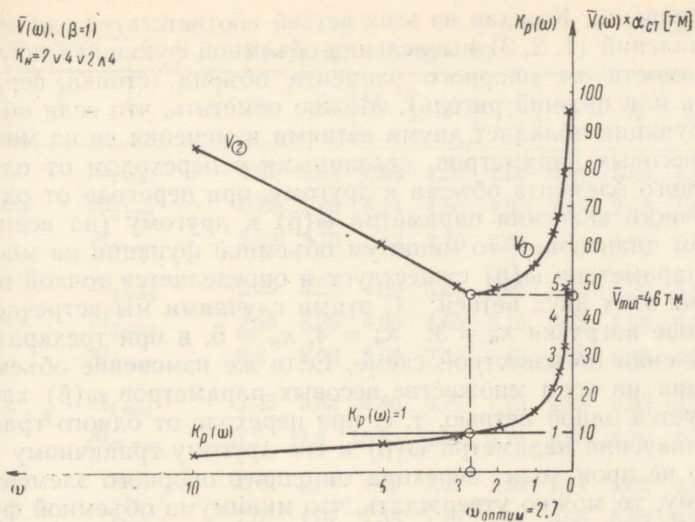
Фиг. 3. Рельеф объемной функции контура для  $k_H = 3$



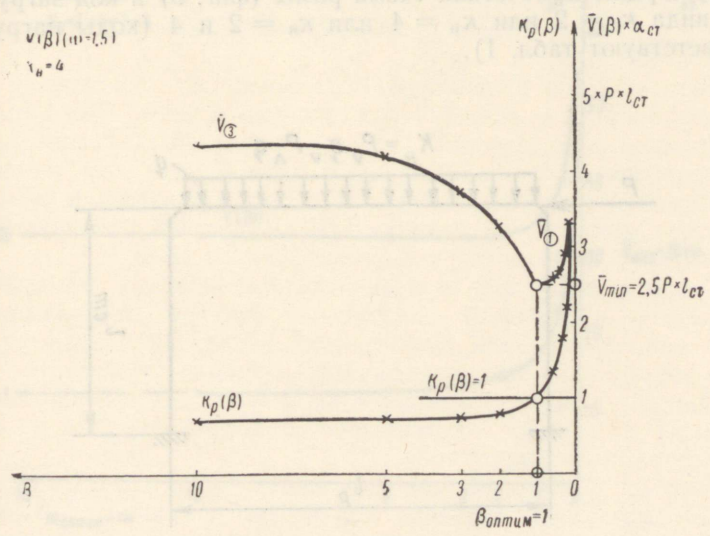
Фиг. 4. Рельеф объемной функции контура для  $k_H = 4$



Фиг. 5. Рельеф объемной функции контура для  $k_H = 5$



Фиг. 6. Рельеф объемной функции контура для  $k_H = 2\sqrt{4}\sqrt{2}\wedge 4$

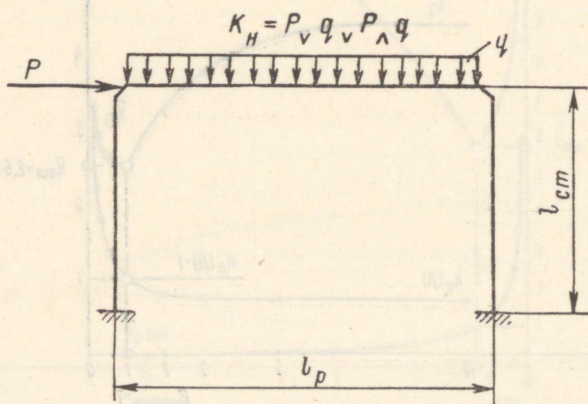


Фиг. 7. Рельеф объемной функции контура  $\bar{V}(\beta)$  для  $k_H = 4$

шей функции. Каждая из этих ветвей соответствует одному из направлений (1, 2, 3) вычисления объемной функции контура в зависимости от опорного элемента объема (стойка, верхний ригель или нижний ригель). Можно отметить, что если объемная функция обладает двумя ветвями изменения ее на множестве весовых параметров, связанными с переходом от одного базисного элемента объема к другому, при переходе от одного граничного значения параметра  $\omega(\beta)$  к другому (на всем заданном диапазоне), то минимум объемной функции на множестве параметров  $\omega(\beta)$  существует и определяется точкой пересечения этих двух ветвей. С этими случаями мы встречаемся при коде нагрузки  $\kappa_n = 3$ ;  $\kappa_n = 4$ ,  $\kappa_n = 5$ , и при трехкратном нагружении по известной схеме. Если же изменение объемной функции на всем множестве весовых параметров  $\omega(\beta)$  характеризуется одной ветвью, т. е. при переходе от одного граничного значения параметра  $\omega(\beta)$  к его другому граничному значению не происходит перехода от одного опорного элемента к другому, то можно утверждать, что минимума объемной функции контура не существует. С таким случаем мы встречаемся для контура при коде нагрузки  $\kappa_n = 1$  и  $\kappa_n = 2$ .

### 2.3.2. Оптимальное проектирование одноконтурной рамы

Выбирается расчетная схема рамы (фиг. 8) и код нагружения вида  $\kappa_n = 2$  или  $\kappa_n = 4$  или  $\kappa_n = 2$  и 4 (коды нагрузок соответствуют табл. 1).

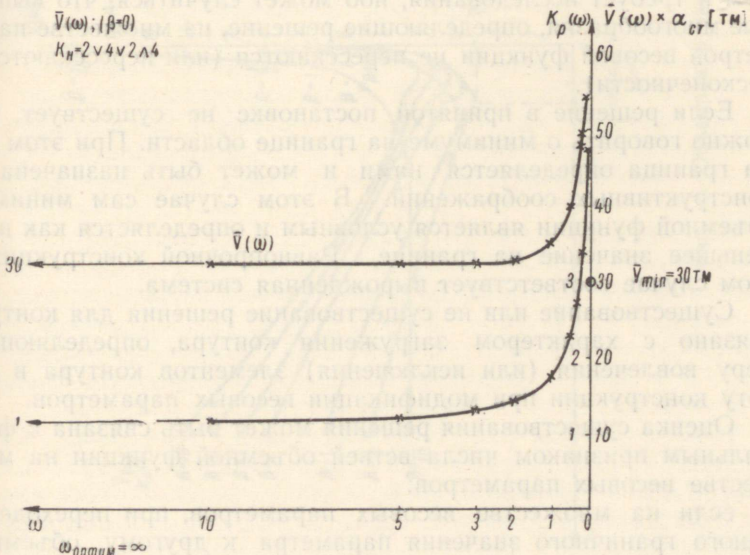


Фиг. 8. Расчетная схема одноконтурной рамы

$$\kappa_H = 2\sqrt{4}\sqrt{2}\wedge 4$$

$$V(\omega); (\beta = 0; m_3 = 0)$$

		$\omega$	10	5	3	2	1	$1/2$	$1/3$	$1/5$	$1/10$
$\kappa_H = 2$	$M_1 \max$		0,29	0,54	0,86	1,20	2,00	3,00	3,60	4,25	5,00
	$M_2 \max$		5,75	5,40	5,14	4,80	4,00	3,00	2,40	1,68	1,04
	$M_4 \max$		2,88	2,70	2,57	2,40	2,00	1,50	1,20	0,84	0,52
$\kappa_H = 4$	$M_1 \max$		2,26	3,28	4,00	4,50	5,15	5,53	5,70	5,82	5,90
	$M_2 \max$		2,26	3,28	4,00	4,50	5,15	5,53	5,70	5,82	5,90
	$M_4 \max$		9,8	8,75	8,05	7,50	6,85	6,50	6,30	6,15	6,10
$\kappa_H = 2\wedge 4$	$M_1 \max$		2,55	3,82	4,86	5,70	7,15	8,53	9,30	10,1	10,9
	$M_{ст} \max$		12,7	11,4	10,6	9,90	9,15	8,53	8,10	7,50	6,94
	$m_1$		2,42	2,04	1,79	1,62	1,36	1,14	1,03	0,91	0,76
	$m_i^0$		2,07	1,67	1,38	1,15	0,78	0,50	0,38	0,27	0,16
	$Kp(\omega)$		1,17	1,22	1,30	1,41	1,75	2,28	2,71	3,37	4,78
	$\bar{V}(\omega) \cdot \alpha_{ст} [м.м]$		32,8	32,4	32,6	32,8	35,2	39,2	47,8	49,2	54,5
	$\alpha_{ст}$		0,10	0,01	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,08	0,08
	$V(\omega) \cdot 10^3 [м^3]$		82,0	83,0	86,5	89,0	98,0	111	132	147	167



Фиг. 9. Рельеф объемной функции одноконтурной рамы для  $\kappa_H = 2\sqrt{4}\sqrt{2}\wedge 4$

Статический расчет и оптимальное проектирование проводятся в полном соответствии с положениями, изложенными в разделах 2.1 и 2.2, рассматривая заданную раму как частный случай жесткого контура при  $\beta = 0$ .

Результаты счета табулированы и приведены в табл. 9.

Графическое представление изменения объемной функции рамы на множестве весовых параметров  $\omega$  при модификации их от 0 до  $\infty$  приводится на фиг. 9.

В этом примере мы вновь встречаемся со случаем вырождения конструкции при минимизации объемной функции. Задача оптимального проектирования здесь может быть сформулирована как задача на условный минимум в области, ограниченной конструктивными требованиями.

### 2.3.3. О существовании и единственности решения

Вопрос о существовании и единственности решения при оптимальном проектировании контура может быть определен следующим образом: если решение существует, то оно единственно и определяет контур минимального объема на множестве модифицируемых параметров. Условия оптимума при этом совпадают с условиями частичной равнопрочности контура.

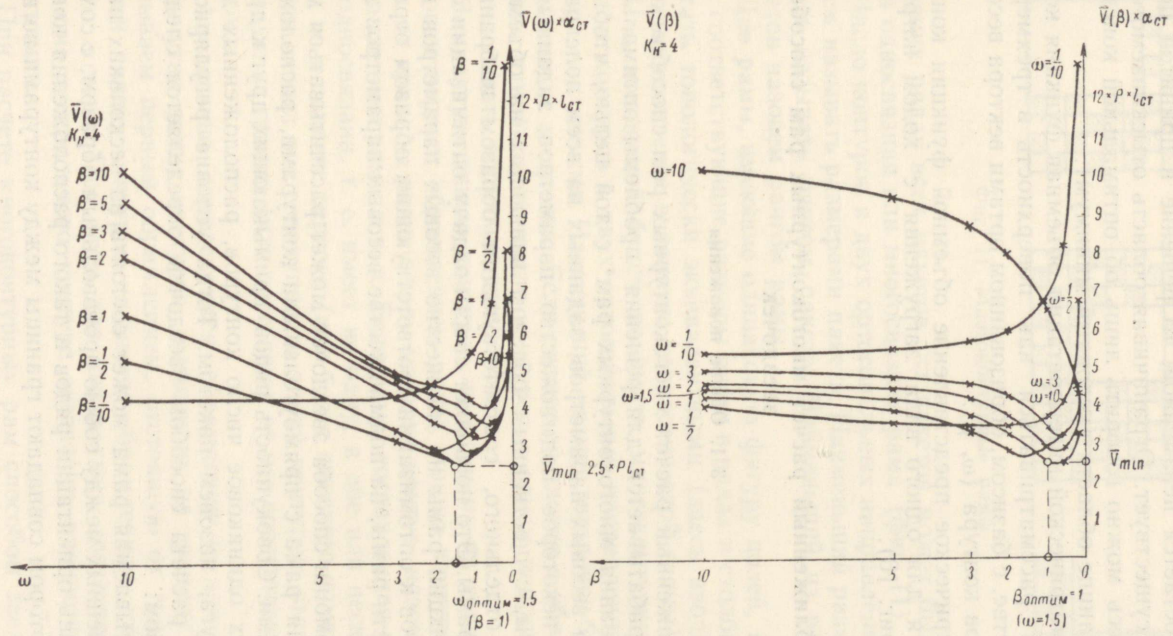
Сам же факт существования решения не является тривиальным и требует исследования, ибо может случиться, что выпуклые многообразия, определяющие решение, на множестве параметров весовой функции не пересекаются (или пересекаются в бесконечности).

Если решение в принятой постановке не существует, то можно говорить о минимуме на границе области. При этом сама граница определяется нами и может быть назначена из конструктивных соображений. В этом случае сам минимум объемной функции является условным и определяется как наименьшее значение на границе. Равнопрочной конструкции в этом случае соответствует вырожденная система.

Существование или не существование решения для контура связано с характером загрузки контура, определяющим меру вовлечения (или исключения) элементов контура в работу конструкции при модификации весовых параметров.

Оценка существования решения может быть связана с формальным признаком числа ветвей объемной функции на множестве весовых параметров:

если на множестве весовых параметров, при переходе от одного граничного значения параметра к другому, объемная функция контура соответственно переходит от одной ветви к другой, то решение существует и оно единственно;



Фиг. 10. Объемная функция контура: а)  $\bar{V}(\omega)$ , б)  $\bar{V}(\beta)$

Если на множестве весовых параметров, при переходе от одного граничного значения параметра к другому, ветвь объема функции остается неизменной, то решение в принятой постановке не существует. Ограничивая область отыскиваемого решения здесь можно говорить лишь об оптимальной конструкции на границе области (условный минимум).

В геометрической интерпретации объемная функция контура может рассматриваться как поверхность в трехмерном пространстве, с базисом, образованном ортами вектора весовых параметров контура ( $\omega$ ,  $\beta$ ).

Геометрическое представление объемной функции контура приводится для одного вида загрузки с кодом нагрузки  $k_n = 4$  (фиг. 10).

### 3. Приближенный расчет многоконтурных рам способом звездочек

#### 3.1. Общие положения

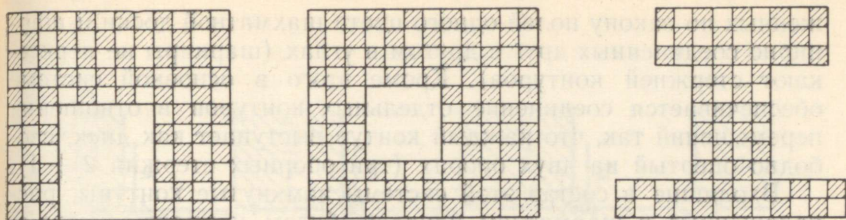
Приближенный расчет многоконтурных рам способом звездочек разрабатывается для решения проблемы оптимального проектирования многоконтурных рам\* с той целью, чтобы из множества весовых параметров, заданных на всем поле рамы, выделить некоторое подмножество параметров, заданных на части рамы, существенным образом влияющих на объемную функцию отдельного, соответствующим образом выбранного элемента рамы. Это позволяет свести задачу оптимизации объемной функции рамы на множестве весовых параметров всех ее элементов к оптимизации соответствующим образом ограниченной части рамы, на подмножестве весовых параметров этой части.

При помощи способа звездочек может рассчитываться многоконтурная рама с прямоугольными контурами, расположенными рядами. Совокупность рядов, примыкающих друг к другу и имеющих одинаковое число контуров, расположенных друг против друга, назовем пакетом. Тогда условие регулярности рамы для расчета способом звездочек определяется следующим образом:

рассчитываемая рама может состоять из нескольких пакетов, соединенных между собою произвольным образом, с сохранением лишь ориентации рядов и такого расположения контуров, при котором совпадают границы между контурами во всех

---

\* Способ звездочек имеет и самостоятельное значение для приближенного расчета многоконтурных рам независимо от оптимизации.



Фиг. 11. Многоконтурные рамы

соседних рядах всех пакетов ;из пакетов может быть образована односвязная или многосвязная рама (фиг. 11).

Число контуров в двух ортогональных направлениях пакета будем называть размерами пакета. Наименьший размер пакета будем называть рангом пакета. Наименьший из всех рангов пакетов назовем рангом рамы.

Две рамы, имеющие одинаковую фигуру полей, но различные соответствующие размеры ячеек в рядах и столбцах, будем считать топологически эквивалентными (здесь вводится некоторое ограничение в понятие топологической схемы).

Под звездочкой будем понимать многоконтурную раму с числом контуров в двух ортогональных направлениях, вообще говоря, различными. Наименьший размер звездочки будем называть рангом звездочки. Если размер звездочки в обоих направлениях одинаков, то число контуров в одном направлении будем называть порядком звездочки.

Замкнутую линию контуров, выходящих на границу рамы, назовем первым обрамлением рамы, линию контуров, отстоящих от границы рамы всюду на один контур, назовем вторым обрамлением рамы и т. д. Если рама, составленная из пакетов, не односвязана, т. е. имеет не одну, а две или несколько границ, то в понятие первого (или более высокого номера) обрамления входят все совокупности линий контуров, выходящих на каждую из границ (или отстоящих от нее соответствующим образом).

Аналогично определяются обрамления и для звездочки: замкнутая линия контуров, выходящих на границу звездочки, называем первым обрамлением, отстоящую от границы звездочки линию контуров называем обрамлением соответствующего номера. При этом для квадратных звездочек вводится понятие центрального контура звездочки, равноотстоящего от ее границ.

При расчете многоконтурных рам способом звездочек расчетная система статически неопределимой рамы образуется как система, состоящая из жестких замкнутых контуров, располо-

женных по закону полей одного цвета шахматной доски и шарнирно соединенных друг с другом в углах (шарниры не пересекают стержней контуров). Кроме этого в основной системе обеспечивается соединение отдельных контуров в отношении перемещений так, что каждый контур выступает как диск, свободно опертый на двух опорах (три опорных стержня  $2 + 1$ ).

Входящие в состав этой системы замкнутые контуры, расположенные в шахматном порядке, будем называть контурами-дисками.

Образованная таким образом основная система содержит в себе, в качестве расчетного элемента рамы, контуры-диски (и одиночные стержни между контурами на границе рамы), обладающие свойством минимальной связности и максимальной автономности. Сразу же отметим, что число выбранных таким образом контуров-дисков ( $r$ ) не совпадает с числом контуров рамы ( $\kappa$ ), понимаемых в обычном смысле.\*

Такой основной системе соответствуют лишние неизвестные в виде узловых моментов и сил взаимодействия в узлах контуров (фиг. 12).

Идея подхода к решению задачи способом звездочек основывается на том положении, что из состава рамы всегда можно выделить звездочку некоторого порядка, заменив влияние окружающей части рамы на нее граничными условиями, заданными одним из трех способов:

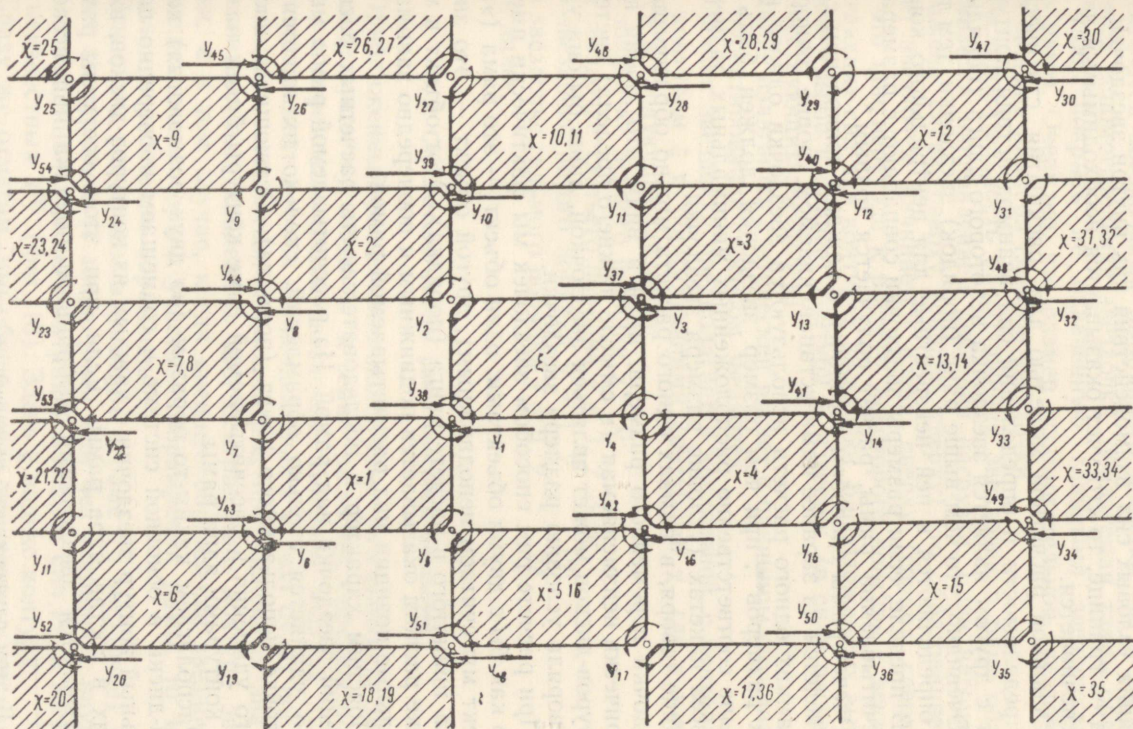
- 1) статический способ, когда заданы все силы взаимодействия звездочки с окружающей частью рамы;
- 2) кинематический способ, когда заданы все перемещения узлов на границе звездочки с окружающей частью рамы;
- 3) смешанный способ, когда на границе звездочки с окружающей ее частью рамы заданы: часть сил взаимодействия и часть перемещений на границе контакта. При этом, естественно, не должно быть недостающей или излишней информации.

В такой постановке расчет рамы, вообще говоря, ничем не отличается от использования обычных идей и является точным.

Идея подхода к приближенному решению задачи способом звездочек основывается на использовании эффекта затухающего влияния удаленных контуров на некоторый рассматриваемый контур.\*\* Это позволяет ограничить некоторую область близлежащих контуров, наиболее существенно влияющих на статические и кинематические условия работы рассматриваемого контура.

\*  $r = \frac{\kappa + 1}{2}$ , если оба размера пакета нечетны, и  $r = \frac{\kappa}{2}$  в иных случаях.

\*\* Это явление имеет аналогию в области расчета многопролетных неразрезных балок.



Фиг. 12. Расчетная схема рамы

Говоря о том, что удаленные контуры мало влияют на работу рассматриваемого контура, мы имеем в виду затухающий эффект влияния лишь узловых моментов. Что же касается учета влияния узловых сил взаимодействия как внутри звездочки, так и на ее границе, то его учет оказывается необходимым и легко обеспечивается.

Основной расчетной моделью для раскрытия статической неопределенности и определения сил взаимодействия контуров друг с другом является звездочка некоторого ранга (порядка).

Очевидно, что чем выше ранг (порядок) звездочки, тем точнее определяются в ней неизвестные для центрального контура. В пределе, если размеры звездочки совпадают с размерами рассчитываемой рамы, расчет получается точным.\*

Расчет рамы способом звездочек в каждом конкретном случае ведется на заранее нами устанавливаемом уровне точности. В рамках одного расчета используются звездочки одного или двух размеров\*\*, при чем размер звездочки должен быть не больше соответственно расположенных минимальных размеров во всех пакетах (условие размера звездочки).

Вообще говоря, в рамках одного расчета можно образовывать звездочки переменного размера, имея в виду, что любая геометрически неизменяемая (в смысле нижнего предела) система контуров-дисков может являться звездочкой, лишь бы она удовлетворяла условию размера звездочки.

При расчете рам способом звездочек мы фактически имеем дело как бы с двумя объектами: один объект — это рама (этот объект мы считаем неподвижным), другой объект — это звездочка принятого в расчете ранга (порядка). Этот объект в методике расчета оказывается подвижным и поочередно занимает отдельные позиции над рассчитываемой рамой.

Поясним характер и последовательность расчетных расположений звездочки над рамой. Из рассчитываемой рамы мысленно удаляется столько обрамлений, сколько их имеется в звездочке используемого ранга (порядка). Остающиеся после такого удаления в рассчитываемой раме контуры будем называть контурами ядра рамы.

Располагаем каким-то образом (из двух возможных) контуры-диски в основной системе и совмещаем поочередно центральный контур звездочки с каждым из контуров-дисков, входящих в состав ядра рамы. Если при этом все узлы рамы охватываются звездочками выбранного порядка при всевоз-

---

\* В этом случае способ звездочек, по сути дела, вырождается и становится обычным способом расчета рамы.

\*\* Обстоятельства выбора одного или двух размеров звездочек поясняются ниже.

можных их расположениях, то расчет проводится звездочкой одного порядка (главная звездочка); если не все узлы рамы охватываются звездочками выбранного порядка, то в расчет вводится вспомогательная звездочка, образуемая таким образом, чтобы покрыть не охваченную главными звездочками часть рамы. Очевидно, что размер вспомогательной звездочки будет меньше размера главной звездочки.

Последовательность расположения звездочек в раме обуславливается направлением действия нагрузки. Если нагрузка приложена слева, сверху (справа, сверху), то образование и расчет звездочек начинается слева, сверху (справа, сверху) так, что при переходе к расчету некоторого контура  $\xi$  вектор сдвигающих сил для контуров звездочки, расположенных выше и левее (выше и правее) контура  $\xi$ , известен (в силу расчета предшествующих звездочек).

Далее излагается статический расчет и принципы оптимального проектирования способом звездочек.

Главная звездочка предполагается квадратной, с центральным контуром  $\xi$  и обрамляющими контурами  $\chi$ , где  $\chi$  изменяется в следующих пределах:

в звездочке первого порядка  $\chi = 0$ ;

в звездочке третьего порядка  $\chi = 1, 2, 3, 4$ ;

в звездочке пятого порядка  $\chi = 1, 2, \dots, 12$ ;

в звездочке седьмого порядка  $\chi = 1, 2, \dots, 24$

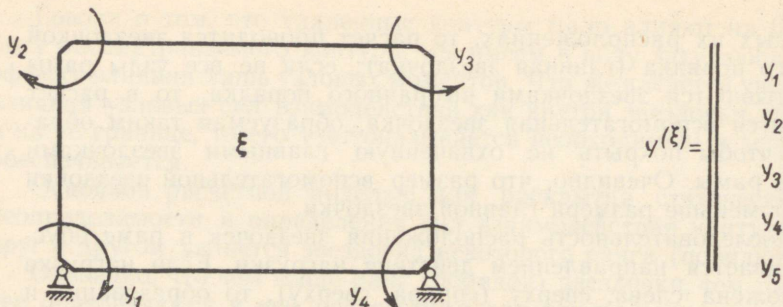
и так далее.

### 3.2. Статический расчет рамы способом звездочек

Приближенный расчет многоконтурных рам способом звездочек по существу сводится к серии расчетов, определенным образом перемещающихся звездочек. Матрица лишних неизвестных (моментов и сил взаимодействия в узлах) будет последовательно составляться из подматриц приближенных значений неизвестных, найденных для центрального контура звездочки, а в том случае, когда внешнее обрамление звездочки совпадает с некоторым участком обрамления рамы, то и в пределах пересечения обрамлений.

Основным расчетным элементом в раме (и звездочке) является контур-диск (с шарнирами или без шарниров внутри него) с заданной для него матрицей внешних сил  $P_{\xi}$  и матрицей неизвестных  $Y^{(\xi)}$  (фиг. 13). Здесь  $\xi$  индекс контура.

Сразу же отметим, что общее число неизвестных не равно упятеренному числу контуров-дисков, а меньше, так как узловые моменты и силы взаимодействия для смежных контуров совпадают.



Фиг. 13. Расчетная схема контура в раме

Уточним символику в обозначениях лишних неизвестных — лишние неизвестные в основной системе рамы (возникающие как силы взаимодействия контуров друг с другом) будут сопределяться четырьмя индексами —  $Y_i^{(\pi \xi)}$

где  $\pi$  — определяет положение неизвестного  $Y$  в контуре — соответствует позициям, показанным на фиг. 13  $\pi = 1, 2, \dots, 5$ ;

$\xi$  — переменный индекс контура рамы, при совпадении его с центральным контуром звездочки  $\xi = 1, 2, \dots, r_1$ ;

$r_1$  — число контуров-дисков в ядре рамы;

$i$  — соответствует индексу неизвестного  $Y$  в сквозной нумерации для всей рамы;

\* — соответствует символу звездочки.

Лишние неизвестные внутри контура-диска (для статически определимой основной системы контура) будут обозначаться

символом  $X_i^{(\pi \xi)}$

где  $\pi$  и  $\xi$  имеют тот же смысл, что и выше.

Матрица коэффициентов канонических уравнений метода сил для статически неопределимой рамы при основной системе выбранной как система контуров-дисков, в самом общем и точном представлении имеет структуру, приведенную на фиг. 14

Матрица  $D$  получается с большим числом нулевых элементов и может рассматриваться как логическая сумма матриц звездочек  $D_*$  некоторого порядка, составленных последовательно для всех контуров-дисков ядра рамы;

$$D = D_*^{(1)} \vee D_*^{(2)} \vee \dots \vee D_*^{(r_1)} \vee \dots \vee D_*^{(r_1)} \quad (3.1)$$

где  $\xi$  и  $r_1$  имеют определенный выше смысл.

Матрицы для звездочек  $D_*$  имеют блочную структуру, общую для всех матриц одного порядка и образуются из блоков матрицы  $D$ .

Матрица для звездочек некоторого порядка с центральным контуром  $\chi$  и окаймляющими контурами  $\xi$  ( $\chi = 1, 2, \dots, p$ ) будет состояться из блоков, принадлежащих всем контурам-дискам, входящим в звездочку. Образование матриц для звездочек третьего, пятого и седьмого порядка выясняется из фиг. 14. Образование матрицы для звездочек при перемене индекса центрального контура показывается там же на примере звездочки 3-го порядка для случаев, когда контур  $\chi = 3$  и контур\*  $\chi = 7,8$  получает индекс  $\xi$ .

Матрица коэффициентов канонических уравнений метода сил для звездочки  $D_*$  может быть представлена как сумма двух матриц  $D_*(\xi)$  и  $D_*(\chi)$ , где первая матрица  $D_*(\xi)$  отражает влияние весовых параметров контура  $\xi$  на коэффициенты матрицы, вторая матрица  $D_*(\chi)$  — влияние весовых параметров обрамляющих контуров  $\chi$ :

$$D_* = D_*(\xi) + D_*(\chi) \quad (3.2)$$

В развернутом виде матрица  $D_*(\xi)$  и  $D_*(\chi)$  для звездочки третьего порядка имеют следующую структуру:

$$D_*(\xi) = \begin{vmatrix} \bar{d}_{11}(\xi) & \bar{d}_{12}(\xi) & \bar{d}_{13}(\xi) & \bar{d}_{14}(\xi) & \bar{d}_{15}(\xi) \\ \bar{d}_{21}(\xi) & \bar{d}_{22}(\xi) & \bar{d}_{23}(\xi) & \bar{d}_{24}(\xi) & \bar{d}_{25}(\xi) \\ \bar{d}_{31}(\xi) & \bar{d}_{32}(\xi) & \bar{d}_{33}(\xi) & \bar{d}_{34}(\xi) & \bar{d}_{35}(\xi) \\ \bar{d}_{41}(\xi) & \bar{d}_{42}(\xi) & \bar{d}_{43}(\xi) & \bar{d}_{44}(\xi) & \bar{d}_{45}(\xi) \\ \bar{d}_{51}(\xi) & \bar{d}_{52}(\xi) & \bar{d}_{53}(\xi) & \bar{d}_{54}(\xi) & \bar{d}_{55}(\xi) \end{vmatrix} \quad (3.3)$$

$$D_*(\chi) = \begin{vmatrix} \bar{d}_{11}(\chi) & & & & \\ & \bar{d}_{22}(\chi) & & & \\ & & \bar{d}_{33}(\chi) & & \\ & & & \bar{d}_{44}(\chi) & \\ & & & & \bar{d}_{55}(\chi) \end{vmatrix} \quad (3.4)$$

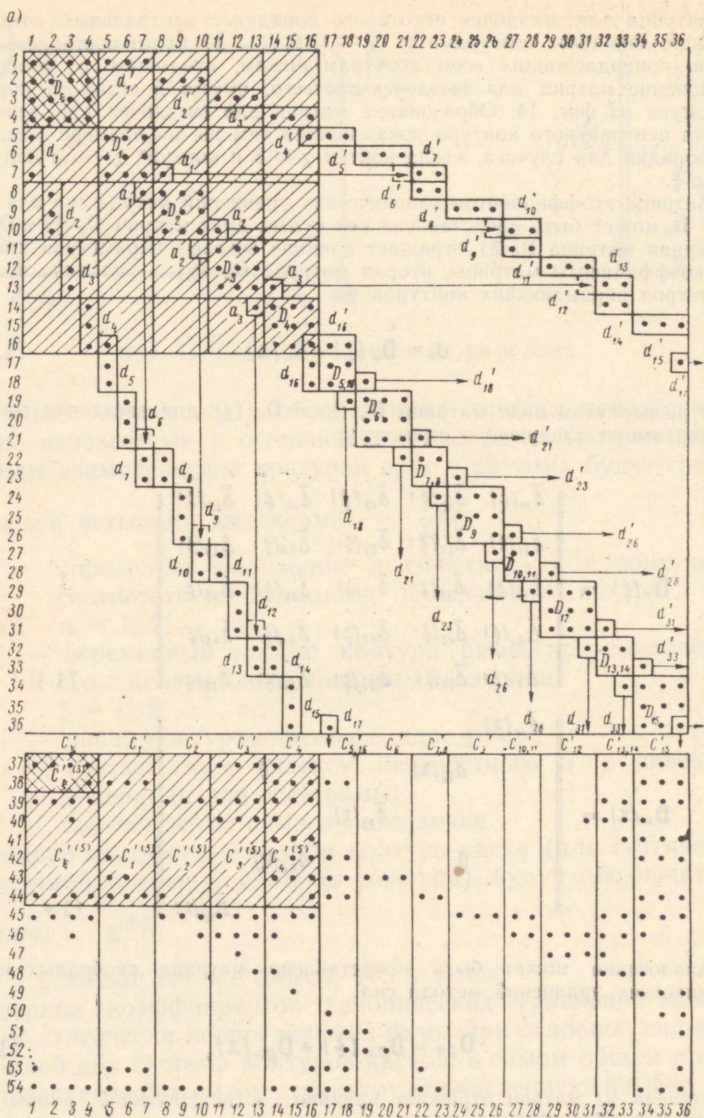
Аналогично может быть представлена матрица свободных членов канонических уравнений метода сил

$$D_{p*} = D_{p*}(\xi) + D_{p*}(\chi), \quad (3.5)$$

где каждая из матриц отражает влияние соответствующей группы параметров весовой функции.

В развернутом виде матрицы  $D_{p*}(\xi)$  и  $D_{p*}(\chi)$  для звездочки третьего порядка имеют следующую структуру:

\* Индекс контура  $\chi$  совпадает с индексом узлового момента (или двух моментов) так, что определение некоторого  $\chi$ -го узлового момента связано с вовлечением в состав звездочки ему (им) соответствующего  $\chi$ -го контура.

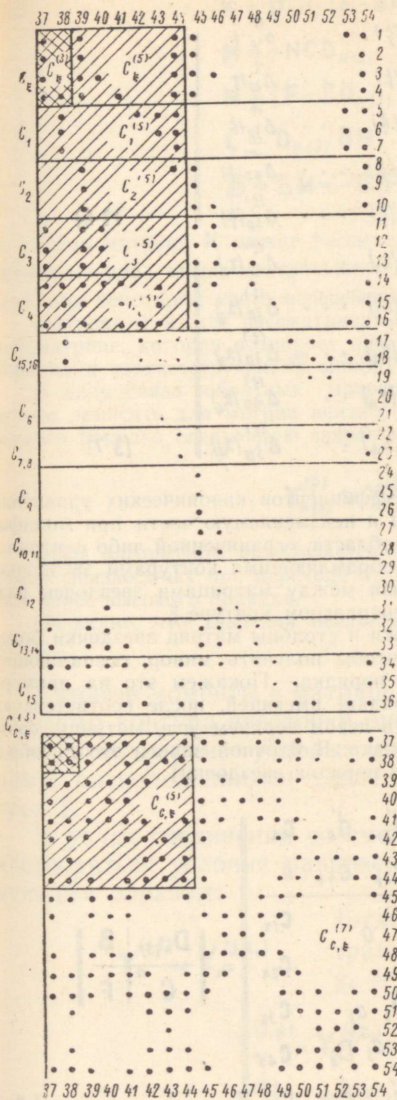


Фиг. 14. Матрицы канонических уравнений метода сил для звездочки и алгоритм их образования:

a) Матрица для звездочки 7-го порядка.

Условные обозначения:

• — позиции ненулевых коэффициентов  $\bar{\Delta}_{ij}$ ;



$$D_{\chi=3}^{(5)} =$$

$\Delta_{3,3}$	$a_3'$	$\Delta_{3,3}$	$\Delta_{3,40}$
$a_3$	$D_3$	$C_{c,b}^{(3)}$	$C_{c,b}^{(3)}$
$\Delta_{37,3}$			
$\Delta_{40,3}$			

б)

$$D_{\chi=7,8}^{(7,8)} =$$

$\Delta_{7,7}$	$\Delta_{7,8}$	$a_7'$	$\Delta_{7,44}$	$\Delta_{7,53}$
$\Delta_{8,7}$	$\Delta_{8,8}$	$a_8'$	$\Delta_{8,44}$	$\Delta_{8,53}$
$a_7$	$a_8$	$D_{7(8)}$	$C_{c,b}^{(3)}$	$C_{c,b}^{(3)}$
$\Delta_{44,7}$	$\Delta_{44,8}$	$C_{c,b}^{(3)}$	$C_{c,b}^{(3)}$	$C_{c,b}^{(3)}$
$\Delta_{53,7}$	$\Delta_{53,8}$			

/// — матрица для звездочки 5-го порядка с центральным контуром  $\xi$ ;

××× — матрица для звездочки 3-го порядка с центральным контуром  $\xi$ ;

б) Образование матрицы звездочки 3-го порядка с центральным контуром  $\chi=3$ ;

в) Образование матрицы для звездочки 3-го порядка с центральным контуром  $\chi=7,8$

$$D_{p\kappa}(\xi) = \begin{vmatrix} \Delta_{1p}^{(1)}(\xi) & \dots & \Delta_{1p}^{(k)}(\xi) & \dots & \Delta_{1p}^{(t)}(\xi) \\ \Delta_{2p}^{(1)}(\xi) & \dots & \Delta_{2p}^{(k)}(\xi) & \dots & \Delta_{2p}^{(t)}(\xi) \\ \Delta_{3p}^{(1)}(\xi) & \dots & \Delta_{3p}^{(k)}(\xi) & \dots & \Delta_{3p}^{(t)}(\xi) \\ \Delta_{4p}^{(1)}(\xi) & \dots & \Delta_{4p}^{(k)}(\xi) & \dots & \Delta_{4p}^{(t)}(\xi) \\ \Delta_{5p}^{(1)}(\xi) & \dots & \Delta_{5p}^{(k)}(\xi) & \dots & \Delta_{5p}^{(t)}(\xi) \end{vmatrix} \quad (3.6)$$

$$D_{p\kappa}(x) = \begin{vmatrix} \Delta_{1p}^{(1)}(x_1) & \dots & \Delta_{1p}^{(k)}(x_1) & \dots & \Delta_{1p}^{(t)}(x_1) \\ \Delta_{2p}^{(1)}(x_2) & \dots & \Delta_{2p}^{(k)}(x_2) & \dots & \Delta_{2p}^{(t)}(x_2) \\ \Delta_{3p}^{(1)}(x_3) & \dots & \Delta_{3p}^{(k)}(x_3) & \dots & \Delta_{3p}^{(t)}(x_3) \\ \Delta_{4p}^{(1)}(x_4) & \dots & \Delta_{4p}^{(k)}(x_4) & \dots & \Delta_{4p}^{(t)}(x_4) \\ \Delta_{5p}^{(1)}(x_4) & \dots & \Delta_{5p}^{(k)}(x_4) & \dots & \Delta_{5p}^{(t)}(x_4) \end{vmatrix} \quad (3.7)$$

Такое представление матриц коэффициентов канонических уравнений позволяет разбить их на изменяемую и неизменяемую части при модификации вектора весовых параметров в области, ограниченной либо центральным контуром, либо соответственно обрамляющими контурами звездочки.

Далее исследуется вопрос о связи между матрицами звездочек различного порядка при одном и том же центральном контуре  $\xi$ .

Очевидно, что всегда можно строки и столбцы матриц звездочки более высокого порядка переставить так, чтобы получить минор, совпадающий с матрицей звездочки более низкого порядка. Покажем это на примере преобразования матрицы пятого порядка, имеющей, после соответствующей перестановки строк и столбцов, в левом верхнем углу матрицу, соответствующую звездочке третьего порядка. В блочной записи это преобразование имеет вид (в скобках отмечен порядок звездочки).

$$D_{*(5)} = \begin{vmatrix} D_{\xi} & c_{\xi} & d'_1 & d'_2 & d'_3 & d'_4 & c_x \\ c'_{\xi} & c_{c\xi} & c'_{1\xi} & c'_{2\xi} & c'_{3\xi} & c'_{4\xi} & 0 \\ \hline d_1 & c_{1\xi} & D_1 & a_1 & & & c_{1x} \\ d_2 & c_{2\xi} & a_1 & D_2 & a_2 & & c_{2x} \\ d_3 & c_{3\xi} & & & a_2 & D_3 & a_3 & c_{3x} \\ d_4 & c_{4\xi} & & & & & a_3 & D_4 & c_{4x} \\ c'_x & 0 & c'_{1x} & c'_{2x} & c'_{3x} & c'_{4x} & c_{cx} \end{vmatrix} = \left\| \begin{array}{c|c} D_{*(5)} & B \\ \hline C & F \end{array} \right\| \quad (3.8)$$

Используя алгоритм обращения клеточной матрицы и отыскивая обратную матрицу так же в клеточной форме, имеем:

$$D_{*(5)}^{-1} = \left\| \begin{array}{c|c} K & L \\ \hline M & N \end{array} \right\| \quad (3.9)$$

где  $K = D_{*(3)}^{-1} (E - BM) = D_{*(3)}^{-1} (E - \Delta)$

$$M = -NCD_{*(3)}$$

$$N = (F - CD_{*(3)} B)^{-1}$$

$$L = D_{*(3)} BN$$

$$\Delta = BM = -B(F - CD_{*(3)}^{-1}) CD_{*(3)}^{-1} \quad (3.10)$$

Здесь матрица  $K$  может рассматриваться как откорректированная обратная матрица звездочки третьего порядка  $D_{*(3)}^{-1}$ , которая была бы получена при некотором учете пересечения звездочек третьего порядка.

Матрица  $\Delta$  может рассматриваться как некоторая поправка к единичной матрице, которая возникает при переходе матрицы звездочки третьего порядка к соответствующему минору матрицы пятого порядка.

В силу связи обратных матриц звездочек разного порядка (3.10) можно записать для матриц неизвестных центрального контура звездочек разного порядка следующую зависимость:

$$Y_{*(5)}^{(\xi)} \cong Y_{*(3)}^{(\xi)} (E - \Delta). \quad (3.11)$$

Этим алгоритмом определяется возможность уточнения значений искомых неизвестных при переходе от звездочки низкого порядка к звездочкам более высокого порядка.

Очевидно, что значения неизвестных могут быть сколь угодно уточнены.

Узловые моменты в матрице неизвестных для каждого центрального контура звездочки определяются полностью, без учета найденных ранее узловых моментов взаимодействия с контурами, расположенными выше и левее (выше и правее) контура  $\xi$ .

В узлах соединения со смежными контурами должны удовлетворяться условия равновесия для узловых моментов следующим образом:

$$Y_*^{(1, \xi)} = Y_*^{(3, x_1)}, \quad \text{когда контур } \chi = 1 \text{ совмещен с центральным контуром звездочки, т. е. } \chi_1 = \xi$$

$$Y_*^{(2, \xi)} = Y_*^{(4, x_2)}, \quad \text{когда } x_2 = \xi$$

$$Y_*^{(3, \xi)} = Y_*^{(1, x_3)}, \quad \text{когда } x_3 = \xi$$

$$Y_*^{(4, \xi)} = Y_*^{(2, x_4)}, \quad \text{когда } x_4 = \xi \quad (3.12)$$

Отклонение найденных решений от условий равенства определяет для смежных звездочек некоторый критерий точности расчета.

Очевидно, что один из искомым узловых моментов для центрального контура звездочки может считаться известным из расчета предыдущих звездочек, тогда число лишних неизвестных центрального контура звездочки уменьшится на единицу.

Сдвигающие силы взаимодействия контуров определяют однократно\* так, что сдвигающее влияние смежных контуров расположенных выше и левее (выше и правее) контура  $\xi$ , считается известным (в силу проведенного ранее расчета) и вводится в матрицу внешних сил, а сдвигающие силы взаимодействия со смежными контурами, расположенными ниже и правее (ниже и левее), определяются в ходе расчета рассматриваемой звездочки.

Матрица неизвестных в звездочке определяется из уравнения

$$Y_*^{(f)} = -D_*^{-1} D_{p*} P_f - ([b_*^{cy}] f_* [b_*^{cy}])^{-1} ([b_*^{cy}] f_* [b_*^{cp}]) P_f \quad (3.13)$$

где

$$[b_*^{cy}] = \begin{vmatrix} [b_{\xi}^{cy}] \\ [b_{\chi_1}^{cy}] \\ \vdots \\ [b_{\chi_p}^{cy}] \end{vmatrix} \quad \text{— матрица усилий от единичных неизвестных } Y_*^{(\pi)} \quad \pi = 1, 2, 3, 4, 5 \text{ в звездочке.} \quad (3.14)$$

$$[b_*^{cp}] = \left\| [b_*^{cp}]^{(1)} \dots [b_*^{cp}]^{(k)} \dots [b_*^{cp}]^{(l)} \right\| \quad (3.15)$$

— матрица усилий от «единичных»\*\* внешних сил в звездочке.

\* Возможен и иной подход к определению сдвигающих сил — без учета проведенного ранее расчета.

\*\* Единичные внешние силы принимаются только для расчета контура  $\xi$ , для контуров  $\chi$  понятие «единичные» внешние силы означает численные отношения параметров нагрузки  $\chi$ -го контура к нагрузке  $\xi$ -го контура при  $k$ -ом загрузении  $\left( \frac{P_{\chi}^{(k)}}{P_{\xi}^{(k)}} \right)$ .

$$[\mathbf{b}_*^{\text{cp}}] = \mathbf{P}_*^{(k)} \begin{vmatrix} [\mathbf{b}_\xi^{\text{cp}}]^{(k)} \\ [\mathbf{b}_{\chi_1}^{\text{cp}}]^{(k)} \\ \vdots \\ [\mathbf{b}_{\chi_p}^{\text{cp}}]^{(k)} \end{vmatrix}, \text{ где } \mathbf{P}_*^{(k)} = \begin{vmatrix} 1 & & & 0 \\ & \frac{p_{\chi_1}^{(k)}}{p_\xi^{(k)}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{p_{\chi_p}^{(k)}}{p_\xi^{(k)}} \end{vmatrix} \quad (3.16)$$

$$\mathbf{f}_* = \begin{vmatrix} \mathbf{f}_\xi \mathbf{E} & & & 0 \\ & \mathbf{f}_{\chi_1} \Gamma_{\chi_1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mathbf{f}_{\chi_p} \Gamma_{\chi_p} \end{vmatrix} \quad (3.17)$$

— матрица податливости (3.17) звездочки, где

$$\Gamma_\chi = \sqrt{\mathbf{E}/r_\chi}, \quad r_\chi = \frac{i_{\text{ст}\xi}}{i_{\text{ст}\chi}}; \quad \mathbf{f}_\xi = \mathbf{1}$$

Матрицы усилий в контурах  $\xi$  или  $\chi$  ( $\varphi = \xi$  или  $\chi$ )  $[\mathbf{b}_\varphi^{\text{cp}}]$  и матрицы податливости элементов контуров звездочки  $\mathbf{f}_\xi$  или  $\mathbf{f}_\chi$  ( $\chi = 1, 2, \dots, p$ ) имеют смысл, показанный для отдельного контура.

Матрицы  $\Gamma_\chi$  ( $\chi = 1, 2, \dots, p$ ) появляются как результат взаимного влияния весовой функции центрального контура  $\xi$  и каждого из обрамляющих контуров  $\chi$  или иначе: если для каждого отдельного контура опорным элементом распределения весовой функции в контуре является (в силу выбора) весовая функция стоек ( $i_{\text{ст}\xi}$  и  $i_{\text{ст}\chi}$  для  $\chi = 1, 2, \dots, p$ ), то для системы контуров, объединенных в звездочки опорным элементом распределения весовой функции в звездочке является (в силу выбора) весовая функция стойки центрального контура звездочки  $i_{\text{ст}\xi}$ . Переход от контура к звездочке отражается лишь на объемных функциях контуров  $\chi$  и осуществляется введением параметра  $\gamma_\chi$ , который будем называть, в отличие от контурных весовых параметров ( $\omega_\varphi, \beta_\varphi$ )\*, межконтурным параметром весовой функции.

Матрица усилий от единичных неизвестных в отдельных контурах  $\xi$  или  $\chi$  найдется по такой формуле:

$$[\mathbf{b}_\varphi^{\text{cy}}] = [\tilde{\mathbf{b}}_\varphi^{\text{cy}}] + [\tilde{\mathbf{b}}_\varphi^{\text{co}}] \mathbf{D}_\varphi^{-1} ([\tilde{\mathbf{b}}_\varphi^{\text{co}}] \mathbf{D}'_\varphi [\tilde{\mathbf{b}}_\varphi^{\text{cy}}]). \quad (3.18)$$

\* Здесь индекс  $\varphi$  равноценно может совпадать с индексом  $\xi$  или  $\chi$ .

Тогда матрица усилий от единичных неизвестных в звездочке определится такой зависимостью:

$$[\tilde{\mathbf{b}}_*^{c\bar{y}}] = [\tilde{\mathbf{b}}_*^{c\bar{y}}] + [\tilde{\mathbf{b}}_*^{c0}]^0 \mathbf{D}_{\xi, \chi}^{-1} ([\tilde{\mathbf{b}}_*^{c0}]^0)' [\tilde{\mathbf{b}}_*^{c\bar{y}}] \quad (3.19)$$

Здесь матрица  $\mathbf{D}_{\xi, \chi} = \sqrt{\mathbf{D}_{\xi}, \mathbf{D}_{\chi}, \dots, \mathbf{D}_{\chi, p}}$

— есть квазидиагональная матрица, диагональные элементы которой суть диагональные матрицы  $\mathbf{D}_{\xi}$  и  $\mathbf{D}_{\chi}$  контуров звездочки. Диагональность блоков обусловлена ортогональностью базиса для внутренних неизвестных каждого контура.

Матрица усилий в статически определимых контурах звездочки от действия единичных неизвестных  $\mathbf{Y}_*^{(\xi)}$  имеет вид:

$$[\tilde{\mathbf{b}}_*^{c\bar{y}}] = \begin{pmatrix} [\tilde{\mathbf{b}}_{\xi}^{c\bar{y}}] \\ [\tilde{\mathbf{b}}_{\chi_1}^{c\bar{y}}] \\ \vdots \\ [\tilde{\mathbf{b}}_{\chi_p}^{c\bar{y}}] \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

где каждая из матриц контуров  $[\tilde{\mathbf{b}}_{\varphi}^{c\bar{y}}]$  ( $\varphi = \xi$  или  $\chi$ ) определяется обычным образом.

Для многоконтурных рам, образованных из контуров-дисков, имеющих вертикальную ось упругой симметрии, статический расчет звездочки проводится с новыми групповыми неизвестными  $\mathbf{Z}_*^{(\xi)}$ , представляющими собой симметричные и кососимметричные комбинации  $\mathbf{Y}_*^{(\xi)}$ . Преобразование  $\mathbf{Y}_*^{(\xi)}$  в  $\mathbf{Z}_*^{(\xi)}$  осуществляется при помощи матрицы  $\Pi_{\xi}$ :

$$\mathbf{Z}_*^{(\xi)} = \Pi_{\xi} \mathbf{Y}_*^{(\xi)} \quad (3.21')$$

где\*

$$\Pi_{\xi} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

\* Если пренебречь влиянием продольных деформаций на перемещение при раскрытии статической неопределимости системы, то влияние симметричной доли  $\mathbf{Y}_*^{(\xi)}$  равно нулю.

Введение новых групповых неизвестных  $Z_*^{(\zeta)}$  позволяет получить значительные упрощения в схеме счета, в которой используются свойства упругой симметрии контура (или системы контуров).

Матрицы усилий от единичных неизвестных  $Y_*^{(\zeta)}$  и  $Z_*^{(\zeta)}$  в звездочке взаимно связаны матрицей преобразования  $\Pi_*$ :

$$[b_*^{cy}] = [b_*^{cz}] \Pi_* \quad (3.23)$$

Здесь матрица преобразования в звездочке  $\Pi_*$  получается как квазидиагональная матрица, состоящая из блоков матриц преобразования в отдельных контурах\*  $\xi$  и  $\chi$ .

Матрица преобразования в звездочке третьего порядка

$$\Pi_* = \sqrt{\Pi_\xi, \Pi_{\chi_1}, \dots, \Pi_{\chi_4}} \quad (3.24)$$

состоит из блоков  $\Pi_\xi$  и  $\Pi_\chi$  ( $\chi = 1, 2, 3, 4$ ), где  $\Pi_\xi$  определяется по (3.22), а  $\Pi_\chi$  найдутся следующим образом:

$$\begin{array}{l} \Pi_{\chi_1} = \frac{1}{2} \left\| \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| ; \quad \Pi_{\chi_2} = \frac{1}{2} \left\| \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \\ \\ \Pi_{\chi_3} = \frac{1}{2} \left\| \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| ; \quad \Pi_{\chi_4} = \frac{1}{2} \left\| \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right\| \end{array} \quad (3.25)$$

### 3.3. Расчетные усилия в звездочке

Задаваясь целью выявить влияние весовых параметров на расчетные усилия в контурах звездочки (а тем самым, в силу однозначной зависимости между усилиями и объемной функцией в контуре, и на объемную функцию звездочки), имеет

\* Матрицы преобразования в контурах имеют неодинаковый вид в силу несоответствия позиций неизвестных в контурах  $\xi$  и  $\chi$ .



или иначе можно записать:

$$\sqrt{g_*} = g_{\xi, x} \Gamma_* \quad (3.30)$$

где матрица

$$g_{\xi, x} = \sqrt{g_{\xi, \xi}, g_{\xi, \lambda}, \dots, g_{\xi, \rho}}$$

объединяет только внутриконтурные параметры;  
а матрица

$$\Gamma_* = \sqrt{\epsilon, \Gamma_{\lambda}, \dots, \Gamma_{\lambda, \rho}}$$

объединяет только межконтурные параметры звездочки.

Матрица изменения податливости элементов звездочки может быть представлена при использовании (3.28) и (3.30) в виде:

$$\Delta f_{*g} = f_{*mg} - f_{*g} = f(l)_{*g} (g_{*m} - g_{*}) = f(l)_{*g} \sqrt{\Delta g_{*}} \quad (3.31)$$

Матрица модификации весовых параметров жесткости в элементах звездочки (матрица модификации)  $[\Delta g_*]$  вычисляется, если иметь в виду (3.30), по следующему алгоритму:

$$\begin{aligned} \sqrt{\Delta g_{*}} &= g_{*m} - g_{*} = g_{\xi, x m} \Gamma_{*m} - g_{\xi, x} \Gamma_{*} = \\ &= (g_{\xi, x} + \Delta g_{\xi, x}) (\Gamma_{*} + \Delta \Gamma_{*}) - g_{\xi, x} \Gamma_{*} \end{aligned}$$

так как

$$g_{\xi, x m} = g_{\xi, x} + \Delta g_{\xi, x}$$

$$\Gamma_{*m} = \Gamma_{*} + \Delta \Gamma_{*} \quad \text{по определению.}$$

Тогда

$$\Delta g_{*} = \Delta g_{\xi, x} \Gamma_{*} + \Delta \Gamma_{*} g_{\xi, x m}$$

$$\Delta g_{*} = \Delta \Gamma_{*} g_{\xi, x} + \Delta g_{\xi, x} \Gamma_{*m} \quad (3.32)$$

Теперь искомая матрица усилий в звездочке найдется из (3.26), где  $H_*$  определяется по формуле:

$$H_* = \left( \left[ \bar{b}_*^{co} \right]_g^0 D_{\xi, x}^{-1} \left[ \bar{b}_*^{co} \right]_g^0 + \left[ \bar{b}_*^{cy} \right]_g D_*^{-1} \left[ \bar{b}_*^{cy} \right]_g + \Delta g_*^{-1} f(l)_{*g} \right)^{-1} b_{*p/g} \quad (3.33)$$

Очевидно, что расчетные усилия в модифицированной звездочке могут определяться по известным матричным зависимостям для каждой вариации весовых параметров независимо друг от друга повторными расчетами.

#### 4. Оптимальное проектирование звездочки

##### 4.1. Объемная функция звездочки

Объемная функция звездочки рассматривается как сумма объемных функций контуров, входящих в звездочку ( $\xi$  и  $\chi$ ):

$$\bar{V}_* = \sum_{\varphi} V_{\varphi*} K_{\gamma\varphi} \quad (4.1)$$

Здесь  $\bar{V}_{\varphi*}$  — объемная функция контура ( $\varphi = \xi, \chi_1, \dots, \chi_p$ ) в звездочке;

$K_{\gamma\varphi}$  — коэффициент, учитывающий влияние межконтурного параметра жесткости  $\gamma_{\chi}$  на объемную функцию контура  $\varphi$ .

Значения коэффициентов  $K_{\gamma\varphi}$  определяются из условия удовлетворения расчетными усилиями (а следовательно и объемными функциями) каждого контура, объединенного в звездочке, требований закона распределения весовой функции между контурами, обусловленного выбором параметров  $\gamma_{\chi}$ .

Связь межконтурного параметра жесткости с геометрическими характеристиками элементов имеет вид:

$$\gamma_{\chi} = \frac{i_{c\tau\varphi}}{i_{c\tau\chi}} = \frac{h_{c\tau\varphi}^4}{h_{c\tau\chi}^4} = \frac{\alpha_{c\tau\varphi}^4 l_{c\tau\varphi}^4}{\alpha_{c\tau\chi}^4 l_{c\tau\chi}^4} \quad (4.2)$$

Коэффициент  $\alpha_{c\tau\varphi}$  определяется через расчетные усилия в элементе по (2.19) таким образом:

$$\alpha_{c\tau\varphi} = \sqrt[3]{\frac{M_{c\tau\varphi}}{l_{c\tau\varphi}}} \quad (4.3)$$

Здесь  $\Xi = \sqrt[3]{\frac{\psi\nu}{[\sigma]}}$  выражает неизменяемую часть коэффициента (для принятой постановки задачи).

Отсюда расчетные усилия в контурах звездочки должны будут удовлетворять требованиям закона распределения весо-

вых функций, в силу их объединения в звездочку, следующим образом:

$$\gamma_x = \frac{M_{ст\xi}^{4/3}}{M_{ст\chi}^{4/3}} \frac{l_{ст\chi}^4}{l_{ст\xi}^4} \quad \text{или} \quad \gamma_x = \gamma_x^0 \quad (4.4)$$

Здесь  $\gamma_x$  — исходный параметр,

$\gamma_x^0$  — расчетный параметр, отражающий картину распределения усилий в звездочке по результатам статического расчета.

Если ввести, по аналогии с контуром, для каждой пары контуров  $\xi$  и  $\chi$  понятие критерия по параметру —  $\gamma_x$  таким образом, что

$$K_p(\gamma_x) = \frac{\gamma_x}{\gamma_x^0}, \quad (4.5)$$

то устанавливается следующий алгоритм вычисления расчетных усилий, удовлетворяющих закону распределения весовой функции в этой паре контуров:

$$1) \text{ Если } K_p(\gamma_x) > 1, \text{ то } M_{ст\xi расч.} = M_{ст\chi} \gamma_x^{3/4} \frac{l_{ст\xi}^3}{l_{ст\chi}}$$

$$M_{ст\chi расч.} = M_{ст\chi} \max$$

$$\alpha_{ст\xi} = \alpha_{ст\chi} \gamma_x^{3/4} \frac{l_{ст\chi}}{l_{ст\xi}}$$

$$2) \text{ Если } K_p(\gamma_x) < 1, \text{ то } M_{ст\xi расч.} = M_{ст\xi} \max$$

$$M_{ст\chi расч.} = M_{ст\xi} \gamma_x^{-3/4} \frac{l_{ст\chi}^3}{l_{ст\xi}^3}$$

$$\alpha_{ст\chi} = \alpha_{ст\xi} \gamma_x^{-1/4} \frac{l_{ст\xi}}{l_{ст\chi}}. \quad (4.6)$$

Поправочные коэффициенты  $K_{\gamma_x}$ , учитывающие влияние межконтурного параметра на объемную функцию контура, вовлеченного в звездочку, определяются теперь в зависимости от значения критерия по параметру  $\gamma_x$ .

1) Если для некоторой пары контуров  $K_p(\gamma_x) > 1$ , то поправочный коэффициент  $K_{\gamma_x}$  вводится в объемную функцию

контура  $\xi$  и определяются одинаково для всех трех ветвей вычисления объемной функции контура:

$$K_{\gamma_{\xi}} = \frac{M_{\text{ст}\chi}}{M_{\text{ст}\xi}} \gamma_{\chi}^{3/4} \frac{L_{\text{ст}\xi}^3}{L_{\text{ст}\chi}^3} \quad (4.7)$$

Иначе говоря, если  $Kp(\gamma_{\chi}) > 1$ , то опорным элементом в объемной функции двух объединенных контуров выступит опорный элемент (стойка) контура  $\chi$  и объемная функция контура  $\xi$  приводится к новому опорному элементу.

2) Если для некоторой пары контуров  $Kp(\gamma_{\chi}) < 1$ , то поправочный коэффициент  $K_{\gamma_{\xi}}$  вводится в объемную функцию контура  $\chi$  и определяется одинаково для всех трех ветвей вычисления объемной функции контура:

$$K_{\gamma_{\chi}} = \frac{M_{\text{ст}\xi}}{M_{\text{ст}\chi}} \gamma_{\chi}^{-3/4} \frac{L_{\text{ст}\chi}^3}{L_{\text{ст}\xi}^3} \quad (4.8)$$

В этом случае опорным элементом в объемной функции двух объединяемых контуров выступает опорный элемент (стойка) контура  $\xi$  и объемная функция контура  $\chi$  приводится к новому опорному элементу.

Так определяются две ветви вычисления объемной функции звездочки, в зависимости от начального вектора параметров  $\Gamma(\gamma_{\chi})$ .

Для звездочки, объединяющей группу контуров, возникает проблема приведения объемных функций контуров (всех, кроме одного — опорного) к опорному элементу (стойке) того контура, для которого  $Kp(\gamma_{\chi})$  имеет наибольшее значение. Здесь можно различить два случая:

1) если  $Kp(\gamma_{\chi}) > 1$  для одного или нескольких контуров звездочки, то опорным контуром становится контур  $\chi$  с наибольшим значением критерия;

2) если  $Kp(\gamma_{\chi}) < 1$  для всех контуров звездочки, то, в силу очевидного  $Kp(\chi_{\xi}) \equiv 1$ , опорным контуром становится контур  $\xi$ .

Очевидно, что оптимальный параметр  $\gamma_{\chi}$  для двух контуров  $\xi$  и  $\chi$  соответствует условию  $Kp(\gamma_{\chi}) = 1$ , при котором

$$K_{\gamma_{\xi}} = K_{\gamma_{\chi}} = 1.$$

#### 4.2. Постановка задачи оптимального проектирования способом звездочек

Задача оптимального проектирования звездочки сводится к отысканию вектора весовых параметров элементов звездочки  $\mathbf{g}_*$ , дающего минимум объемной функции звездочки.

Решение поставленной задачи, как задачи выпуклого программирования, проводится по схеме метода возможных направлений, причем переменному вектору параметров звездочки  $\mathbf{g}_*^{(i)}$  ставится в соответствие матрица переменных расчетных усилий  $\mathbf{b}_*^{(i)} (\mathbf{g}_*^{(i)})$  так, что искомому оптимальному вектору  $\mathbf{g}_*^{\text{оптим}}$  соответствует матрица расчетных усилий  $\mathbf{b}_*^{\text{расч.}} (\mathbf{g}_*^{\text{оптим}})$ , удовлетворяющих критерию минимума объемной функции звездочки.

Вектор параметров звездочки имеет вид произведения двух независимых векторов

$$\mathbf{g}_* = \mathbf{g}_{\xi, \chi} \Gamma_*$$

где первый вектор  $\mathbf{g}_{\xi, \chi} = \mathbf{g}(\omega, \beta)_\varphi$  объединяет внутренние весовые параметры контуров звездочки ( $\omega_\xi, \beta_\xi$  и  $\omega_\chi, \beta_\chi$  для всех  $\chi$ ), а второй вектор  $\Gamma_* = \Gamma(\gamma_\chi)$  объединяет межконтурные весовые параметры звездочки ( $\gamma_\chi$  для всех  $\chi$ ).

Модификация вектора  $\mathbf{g}_*$ , в силу независимости векторов  $\mathbf{g}_{\xi, \chi}$  и  $\Gamma_*$ , проводится в двух направлениях, соответствующих каждому из этих двух векторов.

Подходящее возможное направление модификации векторов  $\mathbf{g}_{\xi, \chi}$  и  $\Gamma_*$  выбирается как подходящее возможное направление модификации расчетных усилий, поставленных в соответствие каждому из векторов.

Вектору  $\mathbf{g}_{\xi, \chi}$  поставлена в соответствие матрица расчетных усилий в отдельных контурах звездочки (здесь каждый из контуров рассматривается автономно). Вектору  $\Gamma_*$  поставлена в соответствие матрица расчетных усилий во всей звездочке (здесь каждая из звездочек рассматривается автономно).

Подходящее возможное направление модификации вектора выбирается так, чтобы значение критерия минимума объемной функции по параметрам  $\omega$  и  $\beta$  для каждого из контуров звездочки стремилось к единице ( $Kp(\omega) \rightarrow 1$  и  $Kp(\beta) \rightarrow 1$ ). Модификация вектора  $\mathbf{g}_{\xi, \chi}$  проводится по методике, рассмотренной для одиночного контура, где, кроме действующей внешней нагрузки на контур, в роли нагрузки выступают узловые мо-

менты и силы взаимодействия рассматриваемого контура ( $\xi$ ) со смежными контурами ( $\chi$ ).

Подходящее возможное направление модификации вектора  $\Gamma_*$  выбирается так, чтобы значение критерия минимума по параметру  $\gamma_\chi$  для каждой пары контуров  $\xi$  и  $\chi$  ( $\chi = 1, 2, \dots, p$ ) в звездочке стремилось к единице ( $\text{Кр}(\gamma_\chi) \rightarrow 1$ ). В силу монотонности изменения объемной функции вдоль ветви на множестве параметров  $\gamma_\chi$  это направление однозначно отыскивается для каждого из модифицируемых параметров  $\gamma_\chi$  ( $\chi = 1, 2, \dots, p$ ) пробным расчетом в двух точках.

Выбором начального вектора межконтурных весовых параметров ( $\gamma_\chi$  для всех  $\chi$ ) определяется одна из двух ветвей числения объемной функции звездочки как функции от  $\gamma_\chi$ . Минимизация объемной функции звездочки проводится как шаговой процесс вдоль выбранной ветви (выбором исходных параметров  $\gamma_\chi$ ) в выбранном направлении (пробным расчетом в двух точках).

Следует отметить, что матрица  $\Gamma_*$ , определяемая для звездочки  $\xi$ , имеет в своем составе два параметра  $\gamma_\chi$ , найденные и предшествующих расчетов для смежных с контуром  $\xi$  контуров, расположенных левее и выше (правее и выше) контура  $\xi$ .

Если при проектировании рамы предъявляются некоторые конструктивные требования к межконтурным параметрам жесткости элементов, то матрица  $\Gamma_*$  определяется однозначно по значениям коэффициентов векторов  $\mathbf{g}_\xi$  и  $\mathbf{g}_\chi$ .

Например, при требовании равенства погонных жесткостей некоторых элементов в контурах  $\xi$  и  $\chi$ , имеем:

$$\text{если } i_{\xi B} = i_{\chi H}, \text{ то } \gamma_\chi = \frac{(\beta \omega)_\chi}{\omega_\xi};$$

$$\text{если } i_{\xi H} = i_{\chi B}, \text{ то } \gamma_\chi = \frac{\omega_\chi}{(\beta \omega)_\xi} \text{ и т. д.}$$

Проблема оптимального проектирования рамы, при использовании приближенного расчета ее способом звездочек, сводится к оптимальному проектированию отдельных звездочек (от звездочки к звездочке). По результатам оптимального проектирования для каждой из звездочек сохраняется для рамы в целом следующая информация:

а) внутриконтурные весовые параметры центрального контура звездочки  $\xi$  —  $(\omega, \beta)_\xi$ .

б) межконтурные весовые параметры для каждой пары контуров  $\xi$  и  $\chi$  ( $\gamma_{\chi}$ ), где  $\chi$  имеет индекс смежных контуров  $\chi = 3, 4$  при нагрузке слева и  $\chi = 1, 2$  при нагрузке справа;

в) матрица расчетных усилий и объем центрального контура  $\xi$ ;

в том случае, когда внешнее обрамление звездочки имеет пересечение с обрамлением рамы, то и в пределах этого пересечения.

Таким образом, оптимальный вектор весовых параметров на всем поле рамы, минимизирующий объемную функцию рамы, будет определяться как множество независимых векторов  $g_{\xi}$ , минимизирующих объемную функцию соответствующих контуров-дисков в раме ( $\xi = 1, 2, \dots, r$ ) и векторов  $\Gamma_{*}$ , минимизирующих объемную функцию соответствующих звездочек, полученных при совмещении центрального контура звездочки  $\xi$  с каждым из контуров-дисков ядра рамы ( $\xi = 1, 2, \dots, r_1$ ).

Минимальный объем рамы в целом определится как сумма минимальных объемов центральных контуров звездочек (для контуров-дисков ядра рамы) и обрамляющих контуров звездочки (для контуров-дисков обрамления рамы).

#### 4.3. Некоторые результаты оптимального проектирования звездочки

Оптимальное проектирование проведено для звездочки третьего порядка, совмещенной с одним из контуров-дисков ядра рамы, при трехкратном загрузении контуров рамы нагрузкой по схеме:

$\kappa_n = 2$  или  $\kappa_n = 4$ , или  $\kappa_n = 2$  и  $4$  (здесь коды нагрузок ( $\kappa_n$ ) и соответствующие им схемы загрузки принимаются по табл. 1).

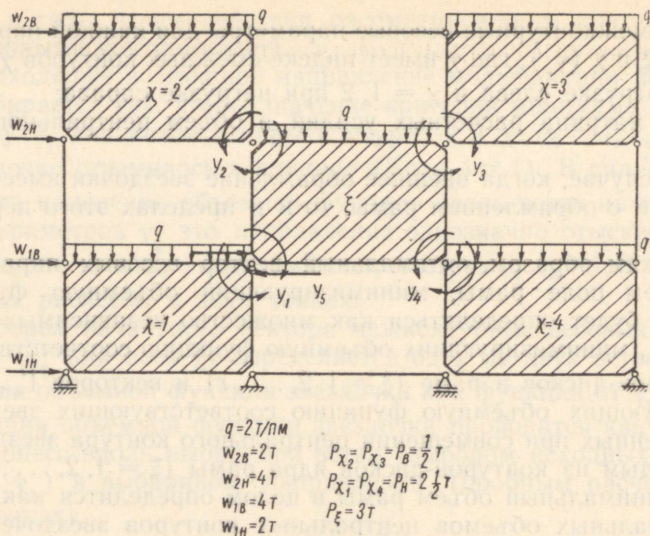
Расчетная схема звездочки приводится на фиг. 15.

Статический расчет звездочки проведен в соответствии с принципами, изложенными в разделе 4.1.

С целью облегчения проведения ручного счета нами рассматривается звездочка, обладающая вертикальной осью упругой симметрии (что ни в какой мере не нарушает общности задачи), для которой внутриконтурные и межконтурные весовые параметры нижних ( $\chi_1, \chi_4$ ) и верхних ( $\chi_2$  и  $\chi_3$ ) контуров соответственно одинаковы:

$$g_{\chi_1} = g_{\chi_4} = g_{\chi_n}; \quad \gamma_1 = \gamma_4 = \gamma_n$$

$$g_{\chi_2} = g_{\chi_3} = g_{\chi_n}; \quad \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_n$$



Фиг. 15. Расчетная схема звездочки 3-го порядка

Структура матриц  $D_*(z)$  и  $D_{p*}(z)$  для симметричной звездочки значительно упрощается и матрица канонических уравнений распадается на две.

Оптимальное проектирование звездочки проводится в соответствии с положениями, изложенными в разделе 4.2. С целью получения рельефа объемной функции исследуется закон изменения объемной функции звездочки по двум направлениям: — на множестве внутриконтурных весовых параметров  $\omega_\varphi$  (где  $\varphi = \xi$  или  $\chi$ ;  $\chi = 1, 2, 3, 4$ ) и на множестве межконтурных весовых параметров  $\gamma_H$  (связывающих весовые функции центрального и нижних контуров).

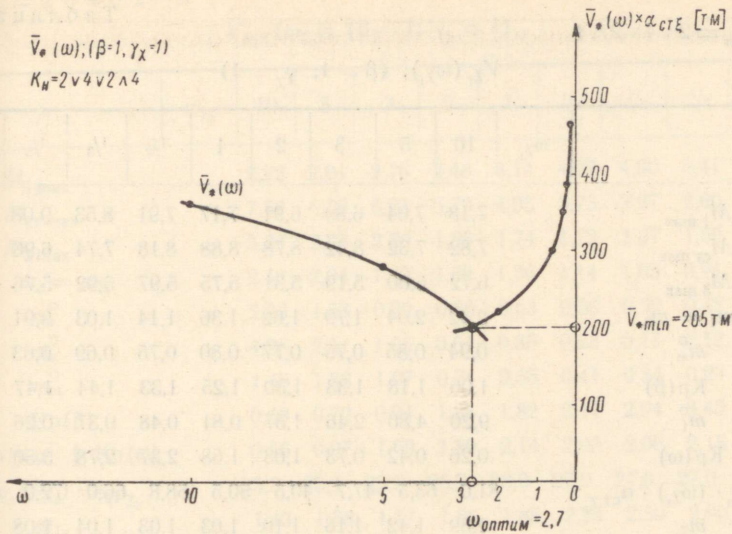
1) При вариации параметров весовой функции  $\omega_\varphi$  ( $\beta = 1$  и  $\gamma_\chi = 1$ ) в пределах от 0 до  $\infty$  объемная функция звездочки  $V_*(\omega_\varphi)$  графически изображается в виде двух ветвей: одна из них монотонно убывающая и вторая — монотонно возрастающая функции с изломом в точке  $\omega_\varphi = \omega_{\text{оптим}}$  (см. фиг. 16).

Результаты счета табулированы и приведены в табл. 10÷15.

Исследование показало, что оптимальные значения параметров  $\omega_\varphi$  для контуров звездочки как системы взаимосвязанных контуров (с учетом сил взаимодействия) совпадают с оптимальным значением параметра  $\omega_\xi$  для отдельных разрозненных контуров, при прочих равных условиях.

$$\bar{V}_*(\omega); (\beta=1, \gamma_\chi=1)$$

$$K_H=2\sqrt{4}\sqrt{2}\wedge 4$$



Фиг. 16. Рельеф объемной функции звездочки  $\bar{V}_*(\omega)$  для  $k_H = 2\sqrt{4}\sqrt{2}\wedge 4$

$$K_H = 2\sqrt{4}\sqrt{2}\wedge 4$$

Таблица 10

$$\bar{V}_{z\ddot{z}}(\omega_z); (\beta=1; \gamma_\chi=1)$$

	$\omega_z$	10	5	3	2	1	1/2	1/3	1/5	1/10
$M_{1 \max}$		9,89	9,74	9,78	9,63	9,16	8,42	8,08	7,50	6,89
$M_{ст \max}$		1,42	2,17	3,78	5,80	7,35	9,50	10,8	12,0	13,0
$M_{3 \max}$		2,84	4,07	5,13	6,92	10,0	12,6	14,2	15,6	16,6
$m_1 = m_3$		2,42	2,04	1,79	1,62	1,36	1,14	1,03	0,91	0,76
$m_{31}^0$		2,00	1,87	1,36	1,19	1,36	1,33	1,32	1,29	1,28
$K_p(\beta)$		0,50	0,535	0,73	0,84	0,73	0,75	0,75	0,77	0,78
$m_3^0$		2,87	2,10	1,57	1,44	1,10	0,67	0,59	0,41	0,24
$K_p(\beta\omega)$		0,84	0,97	1,04	1,13	1,25	1,70	1,75	2,20	3,20
$\bar{V}_{z\ddot{z}}(\omega_z) \cdot \alpha_{ст \ddot{z}}$		37,0	36,8	40,5	44,5	52,0	60,5	69,0	77,0	90,5
$m_{\gamma \ddot{z}}$		1,10	1,07	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
$\bar{V}_{z\ddot{z}} \cdot m_{\gamma \ddot{z}} \cdot \alpha_{ст \ddot{z}}$		50,8	49,3	40,5	44,5	52,0	60,5	69,0	77,0	90,5

$$\kappa_H = 2 \vee 4 \vee 2 \wedge 4$$

$$\bar{V}_{\gamma_1}(\omega_{\gamma_1}); (\beta = 1; \gamma_{\gamma} = 1)$$

	$\omega_{\gamma_1}$	10	5	3	2	1	1/2	1/3	1/5	1/10
$M_1 \max$		7,18	7,04	6,89	6,91	7,17	7,91	8,53	9,08	9,20
$M_{\text{ст}} \max$		7,82	7,32	8,42	8,78	8,88	8,18	7,74	6,96	6,18
$M_3 \max$		6,72	6,00	5,19	5,31	5,75	5,97	5,92	5,76	5,51
$m_1 = m_3$		2,42	2,04	1,79	1,62	1,36	1,14	1,03	0,91	0,78
$m_{31}^{\circ}$		0,94	0,85	0,75	0,77	0,80	0,75	0,69	0,63	0,58
$Kp(\beta)$		1,06	1,18	1,33	1,30	1,25	1,33	1,44	1,47	1,68
$m_1^{\circ}$		9,20	4,80	2,46	1,57	0,81	0,48	0,37	0,26	0,15
$Kp(\omega)$		0,26	0,42	0,73	1,03	1,68	2,37	2,78	3,50	5,10
$\bar{V}_{\gamma_1}(\omega_{\gamma_1}) \cdot \alpha_{\text{ст} \gamma_1}$		81,0	63,5	47,7	40,5	50,5	58,8	66,0	72,0	84,5
$m_{\gamma_1}$		1,39	1,42	1,16	1,10	1,03	1,03	1,04	1,08	1,12
$\bar{V}_{\gamma_1} \cdot m_{\gamma_1} \cdot \alpha_{\text{ст} \gamma_1}$		113	90,3	55,4	44,5	52,0	60,6	69,0	78,0	95,0

Таблица 12

$$\kappa_H = 2 \vee 4 \vee 2 \wedge 4$$

$$\bar{V}_{\gamma_{2*}}(\omega_{\gamma_2}); (\beta = 1; \gamma_{\gamma} = 1)$$

	$\omega_{\gamma_2}$	10	5	3	2	1	1/2	1/3	1/5	1/10
$M_1 \max$		3,16	2,95	2,98	3,12	3,57	4,27	4,82	5,30	5,51
$M_{\text{ст}} \max$		8,30	7,03	6,46	5,85	4,75	3,78	3,42	2,66	2,02
$M_3 \max$		4,14	4,26	4,13	3,99	3,33	2,32	1,48	0,67	0,58
$m_1 = m_3$		2,42	2,04	1,79	1,62	1,36	1,14	1,03	0,91	0,78
$m_{31}^{\circ}$		1,31	1,44	1,38	1,27	0,93	0,54	0,31	0,13	0,10
$Kp(\beta)$		0,76	0,69	0,72	0,79	1,08	1,85	3,22	7,70	10,1
$m_3^{\circ} \mid m_1^{\circ}$		5,00	3,02	1,92	1,36	0,75	0,56	0,47	0,40	0,27
$Kp(\beta\omega) \mid Kp(\omega)$		0,48	0,67	0,93	1,19	1,81	2,02	2,19	2,28	2,85
$\bar{V}_{\gamma_2}(\omega_{\gamma_2}) \cdot \alpha_{\text{ст} \gamma_2}$		54,5	38,5	28,6	27,0	27,0	27,0	27,5	27,0	27,1
$m_{\gamma_2}$		1,31	1,48	1,54	1,65	1,92	2,23	2,50	2,80	3,41
$\bar{V}_{\gamma_2} \cdot m_{\gamma_2} \cdot \alpha_{\text{ст} \gamma_2}$		71,4	57,0	44,0	44,5	51,8	60,0	69,0	76,0	92,1

$$\kappa_H = 2 \vee 4 \vee 2 \wedge 4$$

$$V_{\gamma_3^*}(\omega_{\gamma_3}); (\beta = 1; \gamma_\gamma = 1)$$

	$\omega_{\gamma_3}$	10	5	3	2	1	1/2	1/3	1/5	1/10
$M_1 \max$		2,22	2,01	2,16	2,48	3,14	4,22	4,90	5,41	5,61
$M_{\text{ср}} \max$		7,57	6,59	6,23	5,79	4,95	3,75	3,27	2,60	1,96
$M_3 \max$		3,24	2,78	2,20	1,86	1,74	1,72	1,67	1,59	1,42
$m_1 = m_3$		2,42	2,04	1,79	1,62	1,36	1,14	1,03	0,91	0,76
$m_1^{\circ}$		2,93	1,53	0,99	0,86	0,63	0,56	0,50	0,42	0,29
$m_3^{\circ}$		4,28	2,11	1,06	0,64	0,35	0,23	0,17	0,12	0,07
$m_{31}^{\circ}$		1,46	1,38	1,07	0,74	0,55	0,41	0,34	0,29	0,24
$K_p(\beta)$		0,68	0,72	0,94	1,35	1,82	2,44	2,94	3,45	4,10
$K_p(\beta\omega) \vdash K_p(\omega)$		0,56	0,97	1,69	1,89	2,14	2,03	2,06	2,18	2,67
$\bar{V}_{\gamma_3}(\omega_{\gamma_3}) \cdot \alpha_{\text{ср}} \gamma_3$		35,8	25,1	25,8	26,7	28,0	27,0	27,0	27,0	27,0
$m_{\gamma_3}$		1,43	1,58	1,57	1,66	1,85	2,24	2,50	2,90	3,50
$\bar{V}_{\gamma_3} \cdot m_{\gamma_3} \cdot \alpha_{\text{ср}} \xi$		51,4	40,0	40,5	44,4	52,0	60,5	69,0	78,5	94,5

Таблица 14

$$\kappa_H = 2 \vee 4 \vee 2 \wedge 4$$

$$\bar{V}_{\gamma_4^*}(\omega_{\gamma_4}); (\beta = 1; \gamma_\gamma = 1)$$

	$\omega_{\gamma_4}$	10	5	3	2	1	1/2	1/3	1/5	1/10
$M_1 \max$		6,86	6,26	5,63	5,13	3,91	2,56	1,61	1,52	1,77
$M_{\text{ср}} \max$		10,8	10,4	9,68	8,88	7,41	6,27	5,50	5,40	5,14
$M_3 \max$		6,17	5,56	5,30	5,26	5,09	5,03	4,96	4,89	4,99
$m_1 = m_3$		2,42	2,04	1,79	1,62	1,36	1,14	1,03	0,91	0,76
$m_{31}^{\circ}$		0,90	0,89	0,94	1,02	1,30	1,96	3,04	3,20	2,80
$K_p(\beta)$		1,11	1,12	1,06	0,98	0,77	0,51	0,33	0,31	0,36
$m_1^{\circ} \mid m_3^{\circ}$		6,30	3,10	1,75	1,19	0,69	0,40	0,30	0,18	0,10
$K_p(\omega) \mid K_p(\beta\omega)$		0,38	0,66	1,02	1,36	1,97	1,85	3,44	5,05	7,65
$\bar{V}_{\gamma_4}(\omega_{\gamma_4}) \cdot \alpha_{\text{ср}} \gamma_4$		90,0	56,5	40,0	41,0	42,0	45,0	48,0	55,5	70,0
$m_{\gamma_4}$		1,00	1,00	1,01	1,08	1,23	1,34	1,45	1,39	1,34
$\bar{V}_{\gamma_4} \cdot m_{\gamma_4} \cdot \alpha_{\text{ср}} \xi$		90,0	56,5	40,4	44,3	51,6	60,4	69,5	77,0	94,0

$\bar{V}_*(\omega); (\beta = 1; \gamma_{\chi} = 1)$ 

	$\omega$	10	5	3	2	1	1/2	1/3	1/5	1/10
$\bar{V}_{\xi}^*(\omega) \cdot \alpha_{\text{СТ}\xi}$		40,8	39,3	40,5	44,5	52,0	60,5	69,0	77,0	90,5
$\bar{V}_{\chi_1}^*(\omega) \cdot \alpha_{\text{СТ}\xi}$		113,0	90,3	55,4	44,5	52,0	60,6	69,0	78,0	95,0
$\bar{V}_{\chi_2}^*(\omega) \cdot \alpha_{\text{СТ}\xi}$		71,4	57,0	44,0	44,5	51,8	60,0	69,0	76,0	92,0
$\bar{V}_{\chi_3}^*(\omega) \cdot \alpha_{\text{СТ}\xi}$		51,4	40,0	40,5	44,4	52,0	60,5	69,0	78,5	94,5
$\bar{V}_{\chi_4}^*(\omega) \cdot \alpha_{\text{СТ}\xi}$		90,0	56,5	40,4	44,3	51,6	60,4	69,5	77,0	94,0
$\bar{V}_*(\omega) \cdot \alpha_{\text{СТ}\xi}$		366,6	283,1	220,8	222,2	259,4	302,0	345,5	386,5	466,0

2) При вариации межконтурного параметра весовой функции  $\gamma_{\text{н}} (\omega_{\varphi} = \omega_{\text{оптим}}; \beta = 1; \gamma_{\text{в}} = 1)$  в пределах от 0 до  $\infty$  объемная функция звездочки  $\bar{V}_*(\gamma_{\text{н}})$  графически изображается в виде двух ветвей: одна из них монотонно убывающая и вторая — монотонно возрастающая функция с изломом в точке  $\gamma_{\text{н}} = \gamma_{\text{н. опт}} (см. фиг. 17)$ .

Результаты счета табулированы и приведены в табл. 16÷21.

Объемная функция звездочки  $\bar{V}_*(\gamma_{\text{н}})$  принимает минимальное значение там, где критерий по модифицируемому параметру  $Kp(\gamma_{\text{н}})$  равен единице.

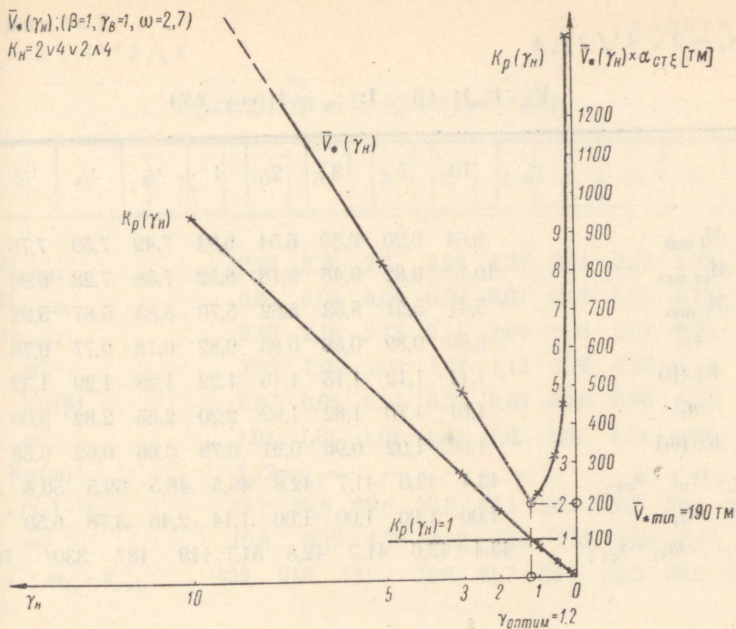
Интересно отметить, что оптимальное значение параметра  $\gamma_{\text{н}}$  совпадает с численным значением отношения параметров нагрузки контуров  $\xi$  и  $\chi$  нижних:  $p_{\xi}/p_{\chi_{\text{н}}} = 1, 2$ .

Вопрос о существовании и единственности решения при оптимальном проектировании звездочки включает в себя и вопрос о существовании и единственности решения, определяемого для отдельного контура (на множестве внутриконтурных весовых параметров), и специальный вопрос о существовании и единственности решения, определяемого для звездочки в целом (на множестве межконтурных весовых параметров).

Первая часть вопроса со всей полнотой рассмотрена в разделе оптимального проектирования контура. Вторая часть вопроса формулируется по аналогии с первой следующим образом: если решение существует, то оно единственно и определяет звездочку минимального объема; если решение в принятой постановке не существует, то ограничивается область отыскиваемого решения и определяется конструкция на границе области (условный минимум).

$$\bar{V}_*(\gamma_H); (\beta=1, \gamma_0=1, \omega=2,7)$$

$$K_H = 2 \sqrt{4} \sqrt{2} \wedge 4$$



Фиг. 17. Рельеф объемной функции звездочки  $\bar{V}_*(\gamma_H)$  для  $k_H = 2 \sqrt{4} \sqrt{2} \wedge 4$

$$K_H = 2 \sqrt{4} \sqrt{2} \wedge 4$$

Таблица 16

$$V_{\xi^*}(\gamma_H); (\beta = 1; \gamma_0 = 1; \omega = 2,7)$$

	$\gamma_H$	10	5	3	2	1	$1/2$	$1/3$	$1/5$	$1/10$
$M_1 \max$		5,60	5,44	4,87	4,76	4,25	3,39	3,98	2,75	2,39
$M_{ct} \max$		10,5	10,3	10,2	9,85	9,74	9,33	9,20	9,08	8,90
$M_3 \max$		10,2	9,41	8,42	7,45	5,52	3,00	1,92	0,81	0,65
$m_3^0$		1,83	1,73	1,73	1,56	1,30	0,88	0,62	0,29	0,27
$Kp(\beta)$		0,55	0,58	0,58	0,64	0,77	1,13	1,60	3,45	3,70
$m_3^0 \mid m_1^0$		2,65	2,46	2,24	2,04	1,53	0,98	0,90	0,81	0,72
$Kp(\beta\omega) \mid Kp(\omega)$		0,65	0,71	0,78	0,85	1,14	1,77	1,93	2,14	2,40
$\bar{V}_{\xi^*}(\gamma_H) \cdot \alpha_{ct} \xi$		67,5	64,5	57,0	50,5	41,5	40,0	39,4	38,8	38,1
$m_{\xi^*}$		9,70	4,75	2,80	1,87	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
$\bar{V}_{\xi^*} \cdot m_{\xi^*} \cdot \alpha_{ct} \xi$		655	307	160	93,5	41,5	40,0	39,4	38,8	38,1

$$\kappa_H = 2 \vee 4 \vee 2 \wedge 4$$

$$\bar{V}_{\gamma_1^*}(\gamma_H); (\beta = 1; \gamma_B = 1; \omega = 2,7)$$

	$\gamma_H$	10	5	3	2	1	$1/2$	$1/3$	$1/5$	$1/10$
$M_1 \max$		6,04	6,20	6,39	6,54	6,94	7,42	7,59	7,76	7,98
$M_{\text{ср}} \max$		10,1	9,82	9,48	9,18	8,52	7,58	7,28	6,96	6,57
$M_3 \max$		5,41	5,51	5,53	5,62	5,70	5,83	5,87	5,92	5,97
$m_{\text{ш}}^{\circ}$		0,90	0,89	0,86	0,86	0,82	0,78	0,77	0,76	0,75
$K_p(\beta)$		1,11	1,12	1,15	1,16	1,22	1,28	1,29	1,32	1,33
$m_{\tau}^{\circ}$		1,61	1,70	1,82	1,92	2,20	2,65	2,82	3,00	3,28
$K_p(\omega)$		1,08	1,02	0,96	0,91	0,79	0,66	0,62	0,58	0,53
$\bar{V}_{\gamma_1^*}(\gamma_H) \cdot \alpha_{\text{ср}} \gamma_1$		43,4	42,0	41,7	42,8	45,5	48,5	59,5	50,8	52,2
$m_{\gamma_1}$		1,00	1,00	1,00	1,00	1,14	2,46	3,78	6,50	13,5
$\bar{V}_{\gamma_1^*} \cdot m_{\gamma_1} \cdot \alpha_{\text{ср}} \varepsilon$		43,4	42,0	41,7	42,8	51,7	119	187	330	705

$$\kappa_H = 2 \vee 4 \vee 2 \wedge 4$$

$$\bar{V}_{\gamma_2^*}(\gamma_H); (\beta = 1; \gamma_B = 1; \omega = 2,7)$$

	$\gamma_H$	10	5	3	2	1	$1/2$	$1/3$	$1/5$	$1/10$
$M_1 \max$		3,13	3,11	3,10	3,08	3,03	3,00	2,98	2,96	2,94
$M_{\text{ср}} \max$		6,31	6,30	6,29	6,28	6,26	6,25	6,24	6,23	6,22
$M_3 \max$		4,36	4,32	4,26	4,21	4,10	3,99	3,93	3,87	3,81
$m_{\text{ш}}^{\circ}$		1,39	1,39	1,38	1,37	1,35	1,33	1,32	1,31	1,29
$K_p(\beta)$		0,72	0,72	0,72	0,73	0,74	0,75	0,76	0,765	0,77
$m_3^{\circ}$		1,87	1,85	1,83	1,81	1,77	1,72	1,70	1,68	1,65
$K_p(\omega)$		0,93	0,94	0,95	0,96	0,98	1,01	1,02	1,03	1,05
$\bar{V}_{\gamma_2^*}(\gamma_H) \cdot \alpha_{\text{ср}} \gamma_2$		28,5	28,3	27,8	27,5	26,8	26,8	26,7	26,7	26,6
$m_{\gamma_2}$		16,0	7,80	4,50	2,92	1,55	1,49	1,47	1,46	1,43
$\bar{V}_{\gamma_2^*} \cdot m_{\gamma_2} \cdot \alpha_{\text{ср}} \varepsilon$		455	220	125	80,5	41,5	40,0	39,4	39,0	38,0

$$\kappa_H = 2 \vee 4 \vee 2 \wedge 4$$

$$\bar{V}_{\gamma_3^*}(\gamma_H); (\beta = 1; \gamma_B = 1; \omega = 2,7)$$

	$\gamma_H$	10	5	3	2	1	$1/2$	$1/3$	$1/5$	$1/10$
$M_1 \max$		2,22	2,26	2,27	2,28	2,29	2,31	2,32	2,33	2,34
$M_{CT} \max$		6,01	6,03	6,04	6,06	6,09	6,13	6,15	6,17	6,19
$M_3 \max$		2,19	2,16	2,13	2,11	2,04	1,98	2,01	2,05	2,09
$m_{31}^{\circ}$		1,02	1,05	1,06	1,07	1,12	1,16	1,15	1,14	1,12
$Kp(\beta)$		0,97	0,95	0,94	0,93	0,89	0,86	0,86	0,88	0,89
$m_1^{\circ}$		1,01	1,01	1,01	1,01	1,01	1,01	1,01	1,02	1,02
$Kp(\omega)$		1,72	—	—	—	—	—	—	—	—
$\bar{V}_{\gamma_3^*}(\gamma_H) \cdot \alpha_{CT \gamma_3}$		25,7	25,8	25,9	26,0	26,1	26,2	26,3	26,4	26,5
$m_{\gamma_3}$		16,8	8,15	4,70	3,02	1,60	1,52	1,50	1,47	1,44
$\bar{V}_{\gamma_3^*} \cdot m_{\gamma_3}^{\circ} \cdot \alpha_{CT \xi}$		432	210	121	78,0	41,7	39,8	39,5	39,0	38,2

Таблица 20

$$\kappa_H = 2 \vee 4 \vee 2 \wedge 4$$

$$\bar{V}_{\gamma_4^*}(\gamma_H); (\beta = 1; \gamma_B = 1; \omega = 2,7)$$

	$\gamma_H$	10	5	3	2	1	$1/2$	$1/3$	$1/5$	$1/10$
$M_1 \max$		3,59	3,85	4,11	4,44	5,52	7,14	8,30	9,38	10,3
$M_{CT} \max$		7,58	7,92	8,33	8,70	9,40	10,5	10,9	11,4	11,9
$M_3 \max$		4,03	4,20	4,37	4,58	5,28	6,23	6,62	7,05	7,47
$m_{31}^{\circ}$		1,12	1,09	1,07	1,03	0,955	0,87	0,80	0,75	0,62
$Kp(\beta)$		0,89	0,92	0,935	0,97	1,05	1,14	1,25	1,33	1,60
$m_3^{\circ} \mid m_1^{\circ}$		1,44	1,43	1,42	1,42	1,59	1,82	2,05	2,21	2,34
$Kp(\beta\omega) \mid Kp(\omega)$		1,20	1,22	1,23	1,23	1,13	0,96	0,85	0,79	0,75
$\bar{V}_{\gamma_4^*}(\gamma_H) \cdot \alpha_{CT \gamma_4}$		32,4	33,9	35,6	37,2	40,2	46,6	54,3	61,4	67,5
$m_{\gamma_4}$		1,30	1,23	1,14	1,05	1,04	1,77	2,53	4,00	7,45
$\bar{V}_{\gamma_4^*} \cdot m_{\gamma_4}^{\circ} \cdot \alpha_{CT \xi}$		42,0	41,6	40,7	39,0	41,8	82,5	137	245	503

$$\kappa_H = 2 \vee 4 \vee 2 \wedge 4$$

$$\bar{V}_\zeta(\gamma_H); (\beta = 1; \gamma_B = 1; \omega = 2,7)$$

$\bar{V}_*$	$\gamma_H$	10	5	3	2	1	1/2	1/3	1/5	1/10	×
$\bar{V}_{\zeta^*}(\gamma_H)$		655,0	307,0	160,0	93,50	41,50	40,00	39,40	38,80	38,10	$\frac{1}{\alpha_{\text{стр}}}$
$\bar{V}_{\zeta_1^*}(\gamma_H)$		43,40	42,00	41,70	42,80	51,70	119,0	187,0	330,0	705,0	„
$\bar{V}_{\zeta_2^*}(\gamma_H)$		455,0	220,0	125,0	80,50	41,50	40,00	39,40	39,00	38,00	„
$\bar{V}_{\zeta_3^*}(\gamma_H)$		432,0	210,0	121,5	78,00	41,70	39,80	39,50	39,00	38,20	„
$\bar{V}_{\zeta_4^*}(\gamma_H)$		42,00	41,60	40,70	39,00	41,80	82,50	137,0	245,0	503,0	„
$\bar{V}_*(\gamma_H)$		627,4	820,6	488,9	333,8	218,2	321,3	442,3	691,8	1322	„
$\gamma_\zeta^0$		1,050	1,060	1,090	1,100	1,180	1,320	1,370	1,450	1,500	—
$Kp(\gamma_\zeta)$		9,600	4,700	2,730	1,840	0,850	0,380	0,240	0,140	0,070	—

В геометрической интерпретации объемная функция звездочки  $\bar{V}_*$  может рассматриваться как гиперповерхность в  $(\zeta + 1)$  мерном пространстве, с базисом, образованном ортами вектора весовых параметров звездочки  $\mathbf{g}_*$  (в силу их линейной независимости). Размерность  $(\zeta)$  пространства определяется числом независимых параметров.\*

Задача оптимального проектирования межконтурных рам, как задача математического программирования, сформулированная в матричной форме, полностью отвечает требованиям постановки задачи на электронные цифровые вычислительные машины.

Разработанный алгоритм и логическая схема программы (в статье эти вопросы освещаются лишь в мере изложения принципов расчета) позволяют предельно автоматизировать процесс счета, сведя исходные данные к минимуму информации о типах контуров, кодах загрузки, внешних нагрузках и шкале индексов образования звездочек в проектируемой раме.

Все матрицы базиса (в том числе и грузовые матрицы) и матрицы усилий составляются по алгоритму в ходе реализации программы.

Мы считаем, что в таком виде постановка задачи на ЭЦВМ выполнена, составление же программы (при наличии разработанного алгоритма и логической схемы программы) является

\* Например, для звездочки 3-го порядка  $\zeta = 14$ .

самостоятельной задачей, относящейся к сфере работы программиста.

Трудоёмкость алгоритма при реализации его ручным счетом велика, ибо связана с проведением расчета звездочки как системы с высокой степенью статической неопределимости, состоящей из «внешней» статической неопределимости системы (лишние неизвестные  $Y_*$ ) и «внутренней» статической неопределимости контуров (лишние неизвестные  $X_*$ )\*.

Правда, в силу выбора основной системы, матрица коэффициентов канонических уравнений метода сил для звездочки распадается на две матрицы: одна — состоит из коэффициентов при лишних неизвестных  $Y_*$  ( $Z_*$ ), вторая — при лишних неизвестных  $X_*$ .

Трудности ручного счета заключены лишь в обращении первой матрице (ибо вторая — диагональная матрица в силу построения базиса). Однако, если ограничиться расчетом со звездочками третьего порядка и наложить принятые нами для ручного счета ограничения на весовую функцию звездочки (вертикальная ось упругой симметрии), то матрица коэффициентов при неизвестных  $Z_*$  распадается на две матрицы порядка не выше третьего и проведение ручного счета становится реальным. Полагаем, что этим определяется граница возможного применения ручного счета, имея в виду, что каждая вариация параметров весовой функции сопровождается расчетом звездочки (полным или частичным).

Задача проектирования статически неопределимых рам наименьшего объема, безусловно, относится к классу задач, решение которых, при доведении результатов решения до числовых значений, осуществляется на электронных цифровых вычислительных машинах.

---

\* Уже для звездочки самого низкого порядка степень статической неопределимости равна  $5 + 5 \times 3 = 20!$

1. А. П. Филин. Статика стержневых систем на основе элементарных положений функционального анализа. Известия АН СССР, Механика и машиностроение № 1, 1964.
2. Ю. А. Радциг. Зеркальные функции и их применение в вопросах строительной механики. Труды Казанского авиационного ин-та, вып. 20, 1950.
3. Дж. Арггирос, С. Келси. Расчет конструкций методом сил в матричной формулировке и некоторые новые приложения. Сб. статей. Современные методы расчета сложных статически неопределимых систем, под общей редакцией А. П. Филина. Судпромгиз, Л., 1961.
4. Е. И. Вареник. Основы технико-экономического анализа строительных конструкций. М., 1952.
5. В. И. Вахуркин. Форма двутавровых балок в условиях наименьшего расхода материала и наименьшей стоимости. Вестник инженеров и техников, № 5, М., 1951.
6. А. И. Виноградов. Вопросы расчета сооружений наименьшего веса. Сб. трудов ХИИЖТ, вып. 25, Харьков, 1959.
7. Н. В. Корноухов. Прочность и устойчивость стержневых систем. Стройиздат, М., 1949.
8. H. N a n g a n. Die Bestimmung der Säulenknicklänge bei Stockwerkrahmen durch schrittweise Näherung. Ing.—Arch., 1958, 35, № 8.

## ZUSAMMENFASSUNG

Das Projektieren der statisch unbestimmten optimalen Rahmentragwerke als Problem des mathematischen Programmierens

*E. Jōgi*

In der Abhandlung wird für die Berechnung der statisch unbestimmten Rahmen mit minimalem Volumen (Gewicht) ein Näherungsverfahren entwickelt und mit Zahlenbeispielen illustriert.

Das Volumen des Rahmens wird durch eine nichtlineare Funktion von unabhängigen Parametern der Steifigkeiten ( $g = EI$ ) ausgedrückt, die die nichtlinearen Grenzbedingungen der Statik, der Kinematik und der Festigkeit befriedigen müssen. Die mathematische Formulierung des Problems, die Optimierung der Funktion des Volumens, führt zu einer Aufgabe des nichtlinearen mathematischen Programmierens.

Gemäss des entwickelten Berechnungsverfahrens wird der vielfeldige Rahmen in sog. «Sternchen» aufgeteilt, dargestellt von Elementen — Feldern, die als steife Konturen behandelt werden (Abb. 15). Für diese Elemente werden diejenigen Felder des Rahmens gewählt, die minimale Verbindungen und eine maximale Selbstständigkeit besitzen (Abb. 1). Die aus diesen Elementen zusammengesetzten «Sternchen» werden durch Steifigkeitsparameter charakterisiert, die den grössten Einfluss auf die Funktionen der Volumen des Zentralelementes haben.

Die Zielfunktion, die Funktion des minimalen Volumens, wird durch stufenweise Näherung gefunden, die nach dem Verfahren der möglichen Richtungen durchgeführt wird. Um die mögliche Richtung der besten Näherung festzulegen, sind mittels Steifigkeitsparametern Kriterien  $K_p(g)$  gegeben und auch die Bedingungen der Kriterien entsprechend der Minimalbedingung des Volumens.

Für die Berechnung der typischen flächen Rahmentragwerke ist der vollständige Algorithmus gegeben. Bei dem Algorithmus, der durch Matrizen gegeben ist, wird die Möglichkeit berücksichtigt, Berechnungen auf der Elektronenrechenmaschine durchzuführen.

Die Anwendung des Algorithmus zur Berechnung der ein- und mehrfeldigen Rahmen wird durch Zahlenbeispiele illustriert. Die Richtigkeit des entwickelten Berechnungsverfahrens, seiner theoretischen Voraussetzungen und des Algorithmus, bestätigen die dargestellten Kurven der Funktionen des Volumens (Z. B. Abb. 10).

In der Abhandlung wird vorausgesetzt, dass der Rahmen im elastisch-linearen Zustande ist, und als Kriterium der Festigkeit werden die grössten Spannungen angenommen. Dabei ist das vorgeschlagene Berechnungsverfahren anwendbar für die Berechnung der Rahmen mit plastischen Gelenken und für die Tragfähigkeit der Rahmen. Das Verfahren kann auch bei der Berechnung der räumlichen Rahmentragwerke Anwendung finden.

Das Volumen des Rahmens wird durch eine nichtlineare Funktion von unabhängigen Parametern der Stützstellen  $z_1, z_2, \dots, z_n$  dargestellt, die die nichtlineare Tragfähigkeit des Rahmens an den Stützstellen und die Festigkeit der Stützelemente berücksichtigen. Die mathematische Formulierung des Problems der Optimierung des Rahmens führt zu einem Algorithmus für die Berechnung des räumlichen Rahmentragwerks.

Einmal das entwickelte Berechnungsverfahren wird der räumliche Rahmen in sog. «Strecken» unterteilt, darge- stellt von Elementen — Feldern, die als starre Kontinua behan- delt werden (Abb. 1). Für diese Elemente werden diejenigen Felder des Rahmens gewählt, die minimale Verbindungen und eine maximale Selbstständigkeit besitzen (Abb. 1). Die aus die- sen Elementen zusammengesetzten «Strecken» werden durch den Parameter  $\sigma$  charakterisiert, der den grössten Einfluss auf die Funktion der Volumen des Zentralrahmens hat.

Die Zielfunktion, die Funktion des minimalen Volumens, wird durch stufenweise Näherung gelöst, die nach dem Verfahren der möglichen Richtungen durchgeführt wird. Um die mögliche Richtung der besten Näherung festzulegen, sind mittels Stütz- punktsparameter Kriterien  $K_1, K_2$  gegeben und auch die Bedingungen der Kriterien entsprechen der Minimalbedingung des Volumens.

Für die Berechnung der räumlichen flächen Rahmentragwerke ist der vollständige Algorithmus gegeben. Bei dem Algorithmus, der durch Matrizen gegeben ist, wird die Möglichkeit der Berück- sichtigung der Berechnungen auf der Elektronenrechenmaschine durchzuführen.

Die Anwendung des Algorithmus zur Berechnung der ein- und dreidimensionalen Rahmen wird durch Zahlenbeispiele illustriert. Die Richtigkeit des entwickelten Berechnungsverfahrens, seiner theoretischen Voraussetzungen und des Algorithmus, bestätigen die dargestellten Körper der Funktionen des Volumens (Z. H. Abb. 10).

УДК 631.2.001.45 +  
+ 631.4 : 536.12

*Л. А. Иооритс*

## ДИНАМИКА ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ГРУНТА ПОД ПОЛОМ ЖИВОТНОВОДЧЕСКОГО ПОМЕЩЕНИЯ

*В статье рассматривается динамика температурного поля грунта под коровником на основе натуральных измерений температур и анализа температурного поля грунта на открытой местности.*

*Выясняется воздействие коровника на поле температуры грунта и механизм движения тепла через пол коровника.*

### 1. Постановка вопроса

Проблемы баланса тепла животноводческого помещения, выбор рациональной конструкции пола, вопрос теплоизоляции подземных частей наружных стен и ряд других практических проблем требуют точного знания поля температуры и его динамики в грунте.

Значение теплопотерь через пол в балансе тепла животноводческого помещения является неясным. Так, например, выводы исследований теплопотерь через пол коровника очень различные, и это именно вследствие неполной изученности поля температуры в грунте. Особенно отличающимися от выводов других исследователей являются выводы Н. М. Педько [1]. Он утверждает на основании натуральных исследований в Белорусской ССР около Минска, что пол коровника помогает топить помещение за счет тепла, аккумулированного в грунте летом. Вычисление теплопотерь через пол по действующим нормам основывается на тезисе пропорциональности теплопотерь разности температур внутреннего и наружного воздуха.

Правильное определение теплопотерь через пол животноводческого помещения требует создания правильной картины о передвижении и потенциальных источниках тепла в грунте, строго соответствующей действительности.

Настоящая работа базируется на серии круглогодичных измерений температур в грунте под коровником в климатических

условиях Эстонской ССР. Измерения проводились в двухрядном коровнике, имеющем бетонный пол и вмещающем 126 дойных коров. В коровнике применялась на ложах торфяная подстилка толщиной не менее 5 см. В одной части здания (вертикаль *E*) внутренняя поверхность подземной части наружной стены была до глубины одного метра утеплена фибролитовыми плитами. Температуры измерялись в 70 точках при помощи термометров сопротивления. Расположение точек измерений показано на изотермических картах.

## II. Динамика поля температуры грунта на открытой местности

Поле температуры в грунте изменяется по сложным, но стабильным закономерностям. В самом цельном виде выявляется поле температуры в грунте на открытой местности, т. е. на местности, где отсутствуют леса, поселения и отдельные крупные здания.

Годовая амплитуда температур в грунте, характеризуемая показательной функцией  $A_h = A \cdot t^{bh}$ , уменьшается с глубиной. Для города Тарту (Эстонская ССР) данная функция выражается в виде

$$A_h = 23,0 e^{-0,33h}. \quad (1)$$

Но до сих пор не было формулы для вычисления средней многолетней температуры в грунте  $t_k = f(h)$ . Анализ данных о температурах в грунте [2, 3] показывает, что функциональную связь между средней многолетней температурой и глубиной хорошо описывает уравнение параболы

$$t_k = a \cdot x^n,$$

где  $t_k$  — средняя многолетняя температура грунта за год, в °С, на глубине  $h$ , в м;

$a = t_n$  — средняя многолетняя температура поверхности земли за год, в °С;

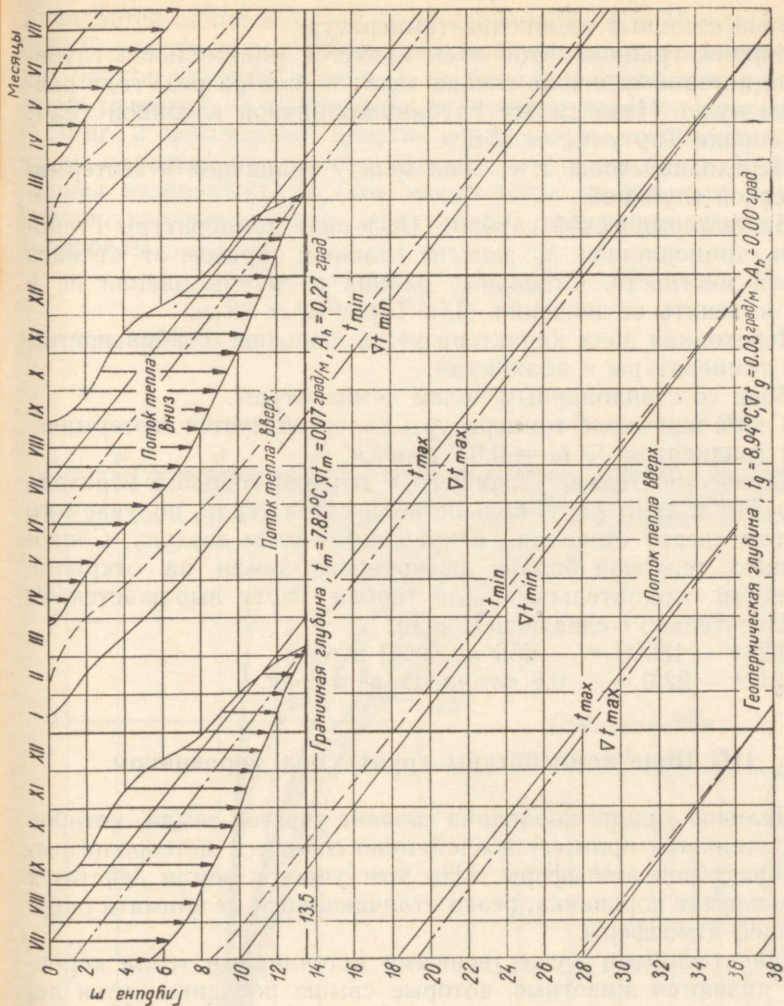
$x = h + x_0$  — расстояние от горизонтальной оси координат, в м ( $x_0 = 1$  м);

$n = \frac{t_n - t_b}{t_b}$  — где  $t_b$  — средняя многолетняя температура воздуха за год, в °С.

Для города Тарту данное уравнение выражается в виде

$$t_k = 5,45 x^{0,135}. \quad (2)$$

Знание уравнений (1), (2) и средней величины опоздания максимума температур в грунте (для Тарту 19,3 дней/м) позволяет на основании анализа функций температур отдельных ме-



Фиг. 1. Поле температуры в грунте на открытой местности в зависимости от времени и глубины

Поток тепла вниз

сяцев  $t = f(h)$  составить точную номограмму, которая описывает тепловой поток в грунте в зависимости от времени и глубины (фиг. 1).

Из фигуры 1 видно, что крайние значения градиента на данной глубине прибывают раньше, чем экстремумы температуры, причем разница во времени уменьшается с глубиной и на геотермической глубине становится равным нулю.

Поле температуры верхних слоев литосферы целесообразно разделить на три зоны:

А. Зона сезонных изменений температур.

Нижней границей этой зоны является минимальная глубина, на которой величина потока тепла вниз в разрезе года равняется нулю. Назовем эту глубину граничной глубиной ( $h_m$ ). Для города Тарту  $h_m \approx 13,5$  м.

Б. Переходная зона, т. е. зона между граничной и геотермической глубиной.

На геотермической глубине ( $h_g$ ) поле температуры становится стационарным.  $h_g$  зависит главным образом от климата данной местности. Отдельные здания и группы зданий не в силах изменить ее значения. Для Тарту  $h_g \approx 38$  м.

Переходная зона характеризуется большой стабильностью поля температуры и влажности.

В. Зона со стационарным полем температуры.

В этой зоне поле температуры характеризуется геотермическим градиентом  $\nabla t_g = 0,03$  град/м.

Количество тепла, уходящего в течение годового перехода из грунта в атмосферу, больше количества тепла, получаемого грунтом сверху от солнца и приземного слоя воздуха. Следовательно, тепловой баланс поверхности земли на открытой местности отрицательный. Для города Тарту выражается он приблизительно в следующем виде:

18244 — 18900 = — 656 ккал/м<sup>2</sup> в году  
или 21,2 — 22,0 = — 0,8 квт.часов/м<sup>2</sup> в году.

### III. Поле температуры грунта под коровником

Наличие здания коровника создает участок земли, которой не подчиняется прямому воздействию солнца и метеорологических факторов атмосферы. На этот участок земли действует микроклимат коровника, резко отличающийся от климата окружающей атмосферы.

Единственными существенными источниками тепла коровника являются животные, которые свыше половины суток лежат непосредственно на полу и нагревают своим телом пол. Лежание коров создает характерный для коровника температурный режим поверхностного слоя пола. Динамика этого режима описывается на изотермических картах.

Специфический температурно-влажностный режим коровника и поверхности пола вызывает образование в грунте под коровником поля температуры, которое сильно отличается от поля температуры грунта на открытой местности.

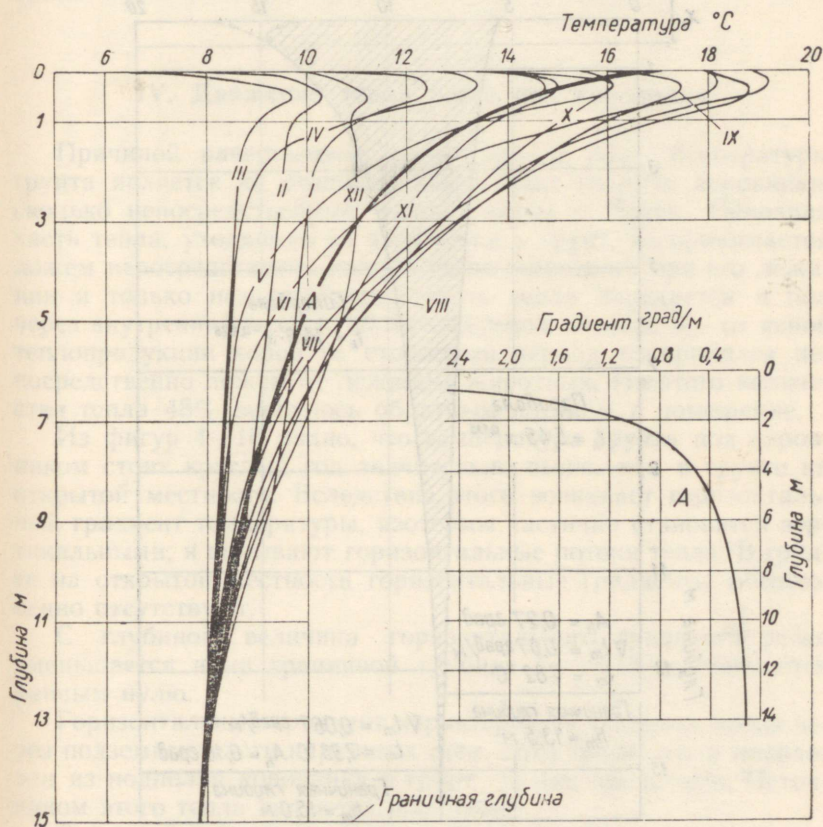
Результаты измерений показывают, что под ложем на вертикалях  $G$  и  $K$  образуются изменяющиеся во времени очаги тепла. Температура горизонтальных слоев на вертикалях  $G$  и

К является самой высокой, а на вертикалях Е и М самой низкой. С увеличением глубины температуры на разных вертикалях быстро уравниваются и на глубине 9 м становятся практически равными, т. е. изотермы становятся горизонтальными.

Фиг. 2 показывает средние температуры горизонтальных слоев в разрезе месяцев в зависимости от глубины. Жирной линией изображена средняя температура за год; эта кривая хорошо характеризуется для данного коровника уравнением гиперболы

$$t_k = 14,6 \cdot x^{-0,226}, \quad (3)$$

где  $x = h + 0,5$  м.



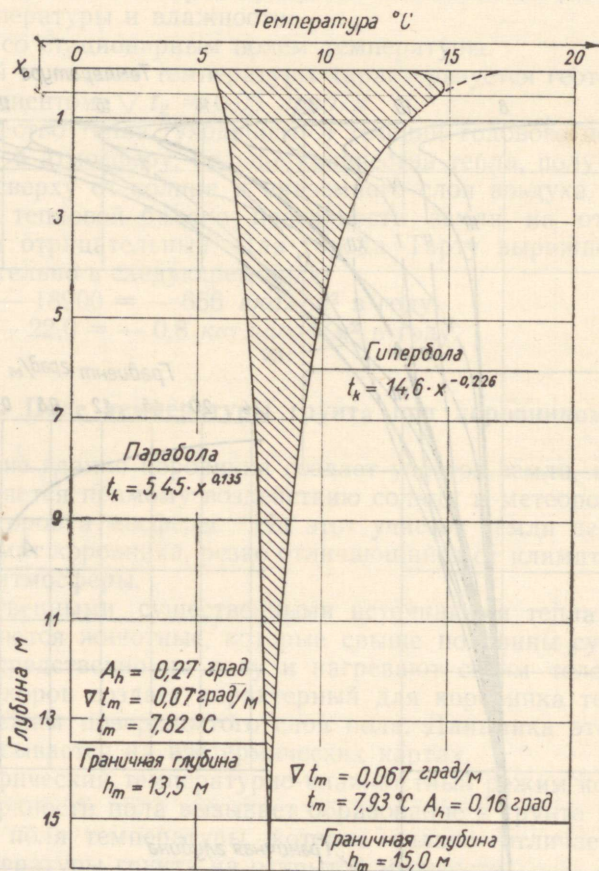
Фиг. 2. Среднемесячные температуры горизонтальных слоев грунта под коровником в зависимости от глубины

Амплитуда колебания температуры грунта под коровником уменьшается с увеличением глубины. На граничной глубине  $A_h = 0,16$  град.

Температурные кривые отдельных месяцев  $t_k = f(h)$  характеризуют изменение теплосодержания грунта и направление движения тепла.

Тепловой поток из очагов тепла имеет два направления:

- 1) обратно в помещение,
- 2) в грунт, находящийся за пределом коровника или через фундаменты наружных стен в наружный воздух.



Фиг. 3. Сравнение среднегодовых температур в грунте на открытой местности и под коровником

Количество тепла, вытекающего из грунта под коровником в грунт за пределами здания, составляет тепловой баланс пола коровника. С точки зрения грунта тепловой баланс пола коровника является за всякий период времени положительным, т. е. грунт поглощает тепло помещения.

Граничная глубина под коровником ( $h_m$ ) находится несколько глубже, чем на открытой местности. Температура на граничной глубине под коровником выше, чем на открытой местности (фиг. 3).

Кроме перечисленных факторов поле температуры грунта под коровником зависит еще от теплофизических характеристик грунта, подземных частей наружных стен и пола коровника, от размеров здания, поля влажности грунта и снежного покрова.

#### IV. Движение тепла через пол коровника

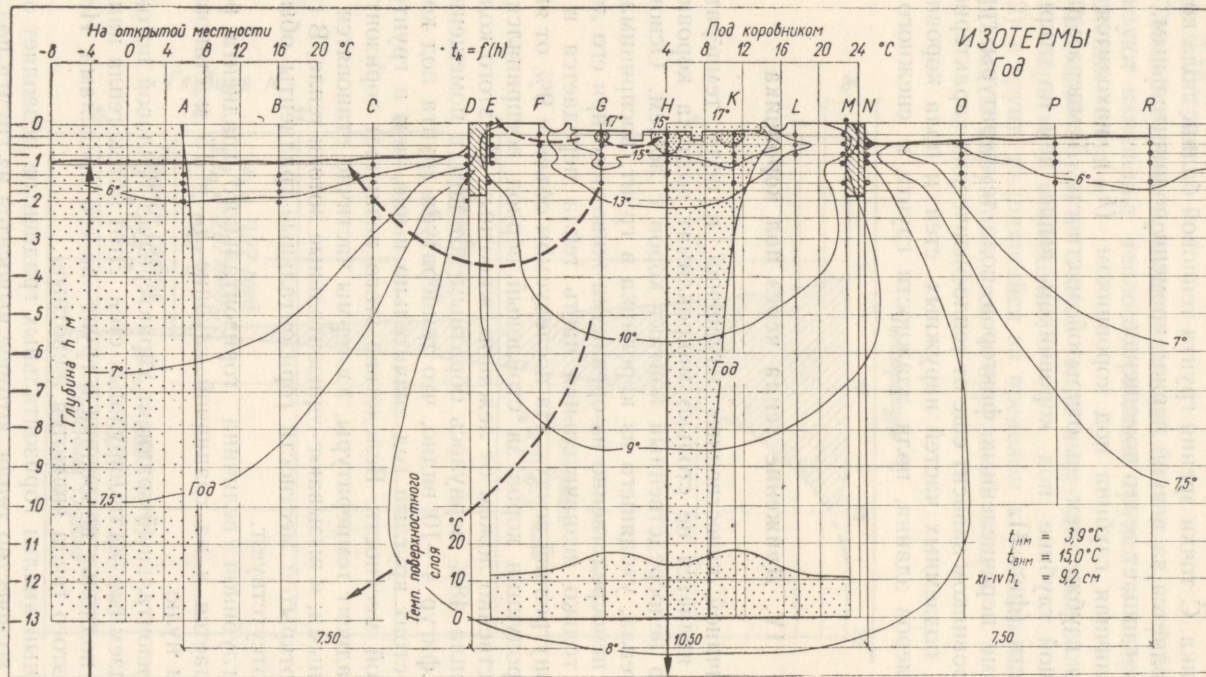
Причиной качественных изменений в поле температуры грунта является не столько микроклимат воздуха коровника, сколько непосредственный контакт коров с ложем. Основная часть тепла, уходящего из коровника в грунт, воспринимается ложем непосредственно из организма животного при его лежании и только незначительная часть тепла передается в пол через внутренний воздух. На исследуемом объекте 9% от явной теплопродукции коров за стойловый период воспринялся непосредственно ложем от лежащих животных. Из этого количества тепла 48% вернулось обратным потоком в помещение.

Из фигур 4—10 видно, что температура грунта под коровником стоит круглый год значительно выше, чем в грунте на открытой местности. Вследствие этого возникает горизонтальный градиент температуры, изотермы частично становятся вертикальными; и вызывают горизонтальные потоки тепла. В грунте на открытой местности горизонтальные градиенты обычно отсутствуют.

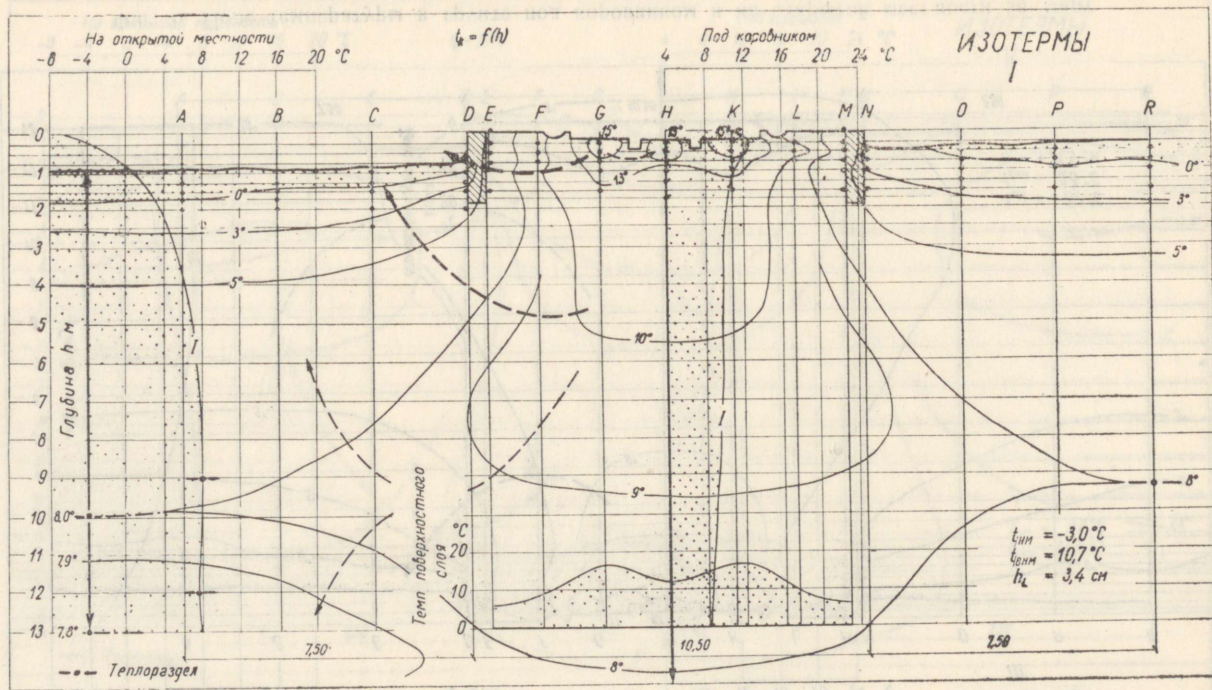
С глубиной величина горизонтального градиента резко уменьшается и на граничной глубине  $h_m = 15$  м становится равным нулю.

Горизонтальный градиент характеризует тепловой поток через подземные части наружных стен. Этот поток тепла направлен из подполья коровника в грунт за его пределами. Источником этого тепла являются животные.

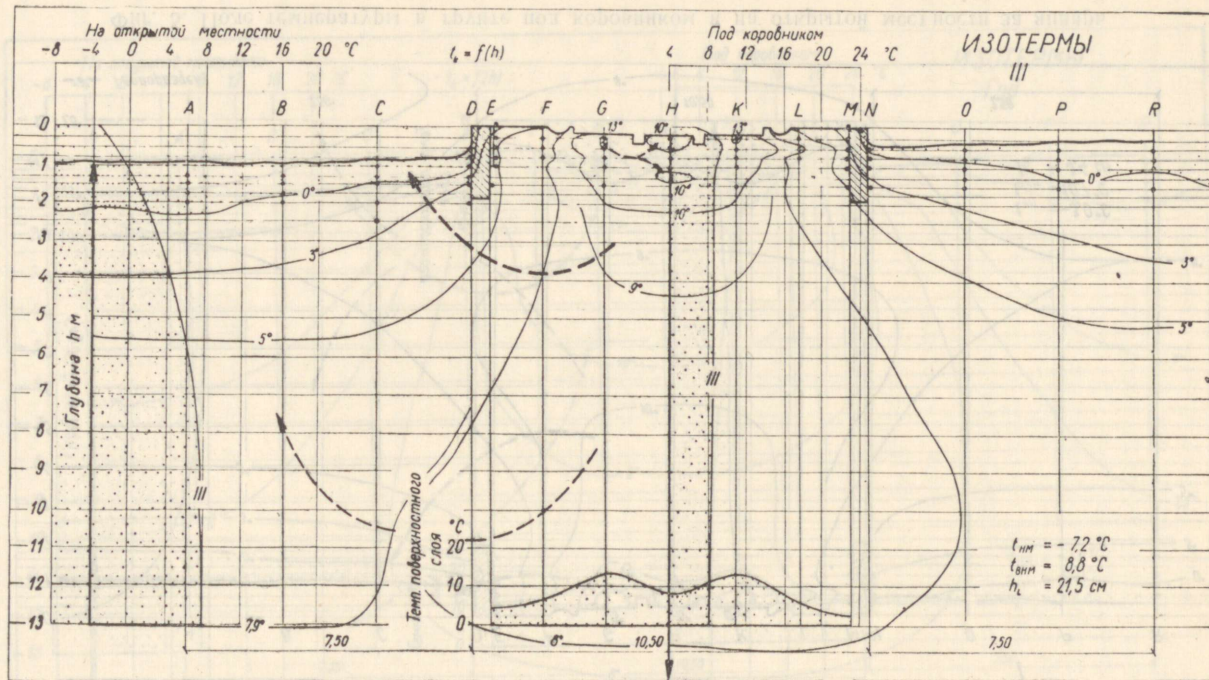
Точный анализ горизонтальных градиентов позволяет определять количество тепла, которое выносится из грунта под зданием, т. е. теплотери через пол коровника.



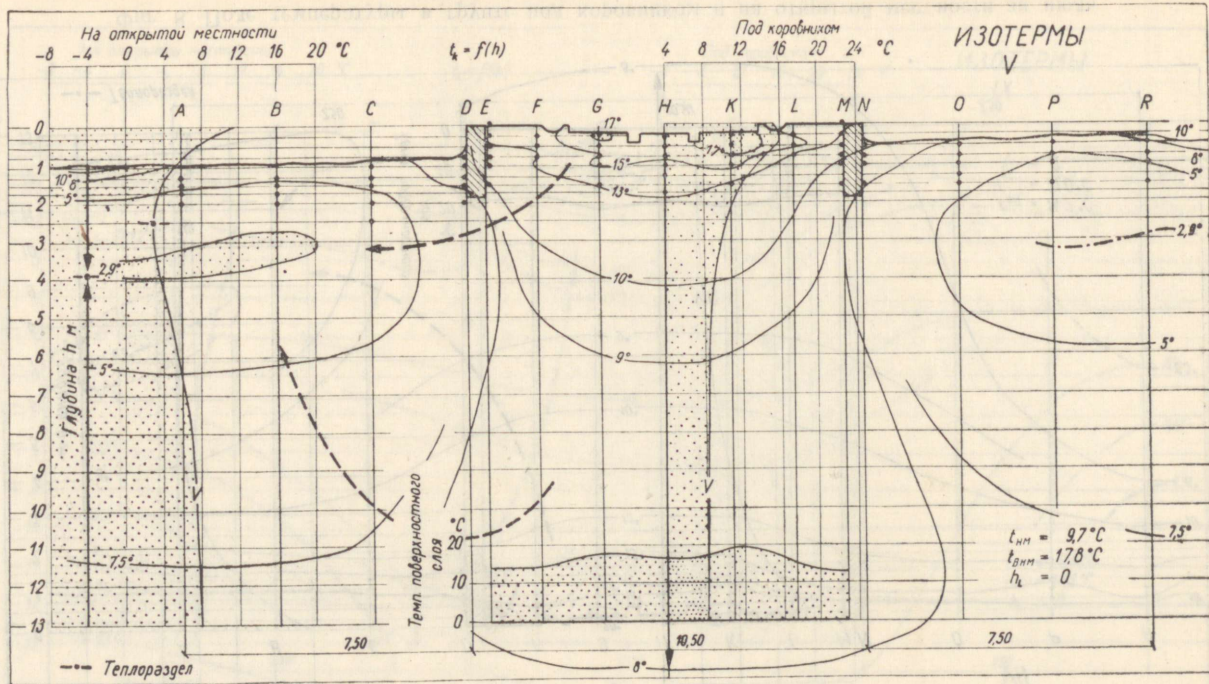
Фиг. 4. Среднегодовое поле температуры в грунте под коровником и на открытой местности



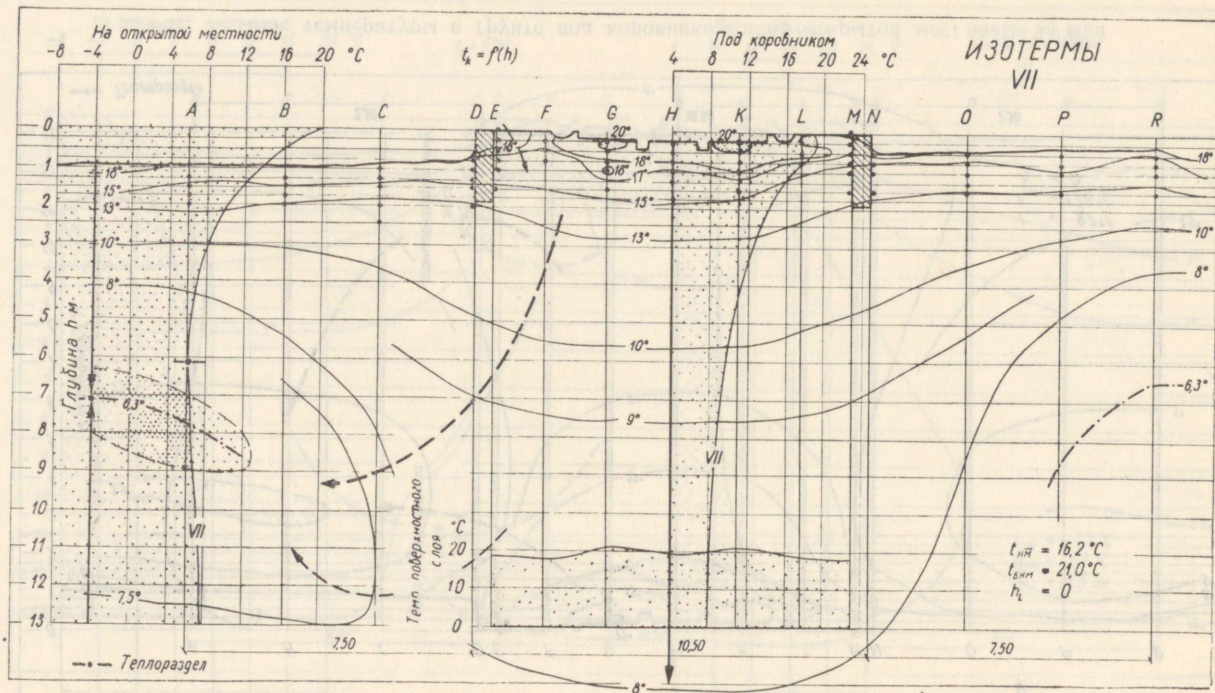
Фиг. 5. Поле температуры в грунте под коровником и на открытой местности за январь



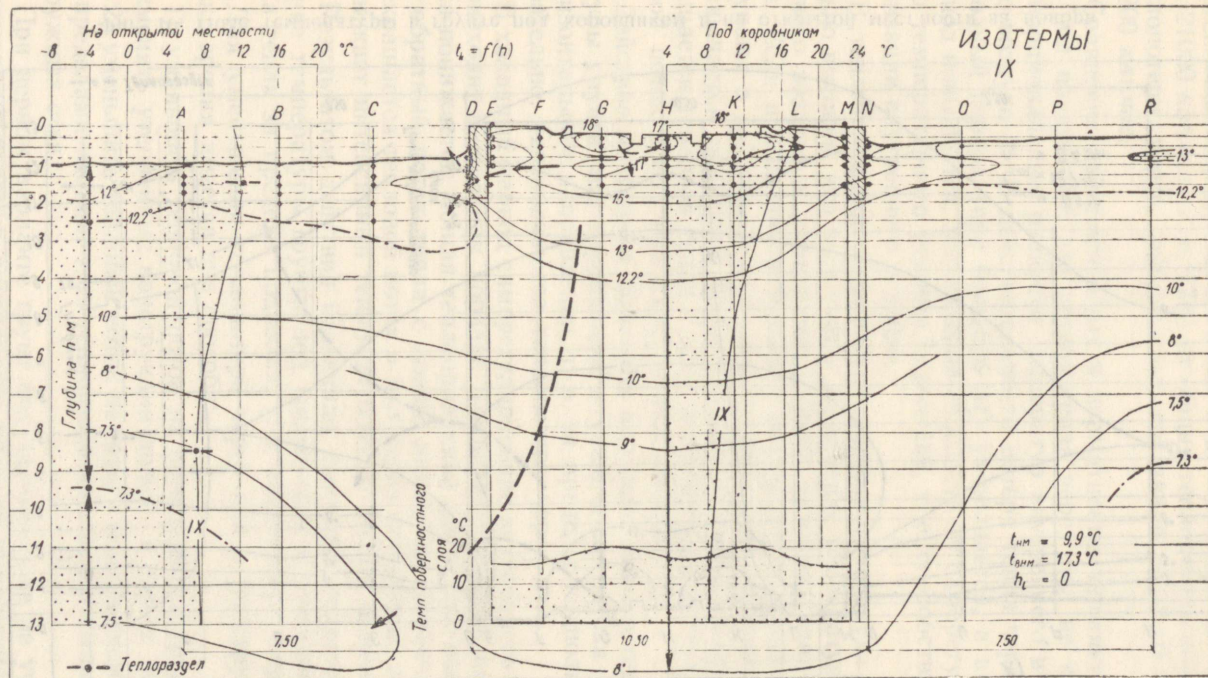
Фиг. 6. Поле температуры в грунте под коровником и на открытой местности за март



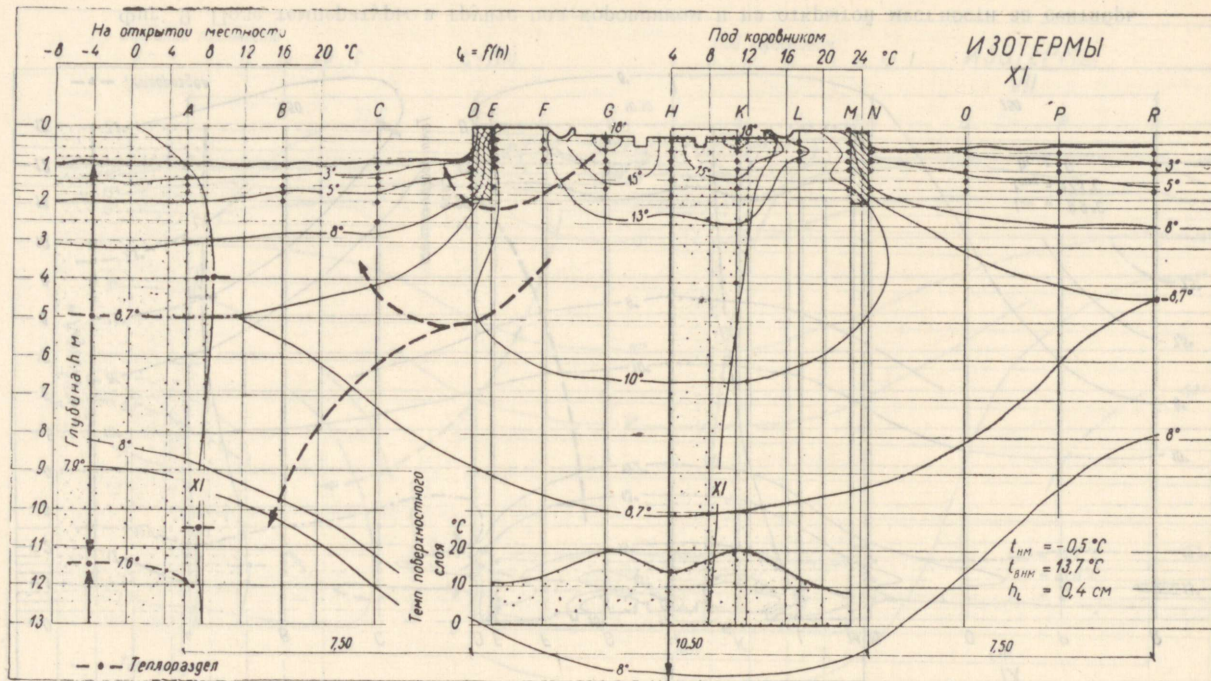
Фиг. 7. Поле температуры в грунте под коровником и на открытой местности за май



Фиг. 8. Поле температуры в грунте под коровником и на открытой местности за июль



Фиг. 9. Поле температуры в грунте под коровником и на открытой местности за сентябрь



Фиг. 10. Поле температуры в грунте под коровником и на открытой местности за ноябрь

На исследуемом объекте теплотери через пол коровника за стойловый период 1963/64 (28 недель) составили 18  $G$  кал или 21000 квт.час., т. е. 17% от общих теплотерь коровника. Теплотери через пол за год составили 31,12  $G$  кал или 36 200 квт.час.

Сравнение действительных и нормативных теплотерь через пол показывает, что потеря тепла через пол не является пропорциональным разности температур внутреннего и наружного воздуха  $\Delta t$ . В действительности потеря тепла через пол в холодный период (при большой  $\Delta t$ ) уменьшается, а в теплый период повышается. Это явление способствует саморегулированию температурного режима коровника, т. е. способствует стабилизации внутреннего режима.

В теплый период температура наружного воздуха относительно высокая, что вызывает и повышение температуры внутреннего воздуха и уменьшение общей теплопродукции животных. Если повышение внутренней температуры продолжается, вступают в действие новые стабилизирующие обстоятельства: уменьшается обратный поток тепла с ложей животных, прекращается тепловой поток с пола в помещение, возникает тепловой поток в пол через внутренний воздух.

Действие названных факторов вызывает повышение температуры грунта под коровником и увеличение потока тепла в горизонтальном направлении, т. е. за пределы подполья. Следовательно, увеличиваются теплотери через пол.

В холодный период саморегулирование внутреннего режима происходит в обратном порядке. Температура внутреннего воздуха понижается, общая теплопродукция животных повышается, обратный поток тепла с ложей животных увеличивается, прекращается тепловой поток в пол через внутренний воздух и возникает интенсивный тепловой поток с пола в помещение.

Результатом действия названных факторов является понижение температуры грунта под коровником и уменьшение потока тепла за пределы подполья, т. е. теплотерь через пол.

Для уменьшения теплотерь через пол с конструктивной точки зрения имеется два способа:

- 1) уменьшить тепловой поток из помещения в грунт, т. е. применить утепленные конструкции ложей, а также полов.
- 2) уменьшить тепловой поток из грунта под зданием в грунт за пределами здания, т. е. теплоизолировать подземные части наружных стен.

При первом варианте грунт под зданием уже не участвует в саморегулировании внутреннего режима помещения, вследствие чего увеличивается амплитуда колебания внутренней

температуры помещения в сутки и в год. Летом коровник может оказаться слишком теплым для животных.

Более приемлемым в наших климатических условиях является второй вариант. Дополнительная теплоизоляция подземных частей наружных стен позволяет при незначительных затратах значительно уменьшить теплопотери через пол коровника, повысить температуру грунта под зданием и улучшить внутренний режим помещения. Зимой, при больших морозах, грунт под коровником интенсивно выделяет в помещение тепло и тем самым повышает внутреннюю температуру. Летом пол и грунт поглощают лишнее тепло и коровник сохраняет более приемлемый для животных внутренний режим. Стабилизирующая способность грунта зависит от ширины здания и расположения животных. Она увеличивается с увеличением ширины.

Поля температуры в грунте под коровником и на открытой местности в разрезе года и отдельных месяцев представлены на фигурах 4—10. На левой части фигур изображена средняя многолетняя температура за год или отдельные месяцы в грунте на открытой местности  $t_k = f(h)$ . В средней части фигур изображены средняя температура горизонтальных слоев за год или месяцы в грунте под коровником  $t_k = f(h)$  и температура поверхностного слоя.

Изотермические карты составлены на основе среднемесячных (среднегодовых) данных наблюдения, а ниже точек измерения на основе анализа уравнений 1, 2, 3, и температурных кривых отдельных месяцев. Величиной опоздания максимума температуры в грунте взята при этом 19,3 дней/м.

Изотермические карты описывают среднее расположение изотермических поверхностей в грунте, а также динамику отдельных изотерм в разрезе года. Стрелками показано направление движения тепла.

### Выводы

1. Чтобы правильно понимать движение тепла и влаги в грунте, целесообразно различать т. н. граничную глубину от геотермической, определяя ее как минимальную глубину, на которой величина потока тепла вниз в разрезе года равняется нулю.

2. Средняя годовая температура грунта на открытой местности хорошо описывается уравнением параболы в виде  $t_k = a \cdot x^n$ , а средняя температура горизонтальных слоев грунта под коровником за год уравнением гиперболы в виде  $t_k = a_1 \cdot x^{-n_1}$ .

3. Годовой баланс тепла поверхности грунта на открытой местности, как известно, отрицательный, т. е. грунт отдает ат-

мосфере тепло. Количество тепла, отдаваемого атмосфере, равняется постоянному потоку тепла из глубины земли.

4. Годовой баланс тепла пола коровника положительный, т. е. пол поглощает тепло помещения.

5. Температуры грунта под коровником круглый год значительно выше температур грунта на открытой местности. Особенно высоки температуры под ложем животных (очаги тепла).

6. Поле температуры грунта под коровником зависит главным образом от:

а) температур очагов тепла, б) режима наружного воздуха, в) теплофизических характеристик грунта, подземных частей наружных стен и пола коровника, г) размеров здания, д) поля влажности грунта, е) внутренней температуры коровника, ж) температуры на граничной глубине, з) снежного покрова.

7. Теплопотери через пол не являются пропорциональными разности температур внутреннего и наружного воздуха.

8. В холодные периоды имеет место интенсивный поток тепла в помещение от ложей животных и от пола.

9. Первоначальным источником тепла, исходящего от пола и ложей, являются животные.

10. Поскольку исходящее от пола тепло уже учтено в общей теплопродукции животных, утверждение, что пол животноводческого помещения является источником добавочного количества тепла, неправильно отражает действительность.

11. На исследуемом объекте 9% от явной теплопродукции коров (от свободного тепла помещения) за стойловой период воспринялось непосредственно ложем от лежащих животных. Из этого количества 48% вернулось обратным потоком в помещение.

12. Грунт под зданием способствует стабилизации внутреннего режима животноводческого помещения, подобно теплоемкой перегородке в периодически отапливаемом помещении.

13. Увеличение ширины помещения повышает способность грунта стабилизировать тепловой режим помещения и уменьшает удельное значение теплопотерь через пол.

14. Применение утепленных конструкций полов в животноводческих помещениях снижает способность грунта стабилизировать внутренний режим и может привести к ухудшению микроклимата помещения.

15. Теплоизоляция подземных частей наружных стен уменьшает теплопотери через пол и улучшает внутренний режим помещения.

16. Вопросы теплопотерь через пол животноводческого помещения требуют дальнейшего экспериментального и теоретического изучения.

## Обозначения

- $A_h$  — годовая амплитуда температур грунта, град;
- $h$  — глубина от поверхности земли или от поверхности пола коровника, м;
- $h_m$  — граничная глубина, т. е. минимальная глубина, на которой поток тепла вниз в разрезе года равняется нулю, м;
- $h_g$  — геотермическая глубина, т. е. минимальная глубина, на которой годовая амплитуда температур грунта равняется нулю, м;
- $x$  — расстояние от горизонтальной оси координат, м;
- $h_L$  — средняя высота снежного покрова, см;
- $t_k$  — средняя температура грунта, °С;
- $t_m$  — температура на граничной глубине, °С;
- $t_g$  — температура на геометрической глубине, °С;
- $t_{\text{им}}$  — среднемесячная температура наружного воздуха, °С;
- $t_{\text{внм}}$  — среднемесячная температура внутреннего воздуха коровника, °С;
- $t_{\text{max}}$  — максимальная температура грунта на данной глубине, °С;
- $t_{\text{min}}$  — минимальная температура грунта на данной глубине, °С;
- $\Delta t$  — разность температур внутреннего и наружного воздуха, град;
- $\nabla t_k$  — градиент среднего теплового потока в грунте, град/м;
- $\nabla t_m$  — градиент температурного поля на граничной глубине, град/м;
- $\nabla t_g$  — геотермический градиент, град/м;
- $\nabla t_{\text{max}}$  — максимальный градиент температурного поля на данной глубине, град/м;
- $\nabla t_{\text{min}}$  — минимальный градиент температурного поля на данной глубине, град/м.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Н. М. Педько. Исследование теплозащитных качеств полов животноводческих построек. Автореферат. Полтава, 1958.
2. К. Кирде. Данные о климате Эстонии. Тарту, 1939. На эстонском языке, резюме на английском языке.
3. Климатические справочники.

## Jährlicher Ablauf des Bodentemperaturfeldes unter dem Viehstallfussboden

L. Joorits

In der Abhandlung wird die Analyse des Temperaturfeldes im Boden unter der offenen Erdoberfläche gegeben und die Einwirkung eines Viehstalls auf dieses Temperaturfeld geschildert. Es wird der Mechanismus der Wärmebewegung durch den Viehstallfussboden untersucht.

Als untere Grenze der Veränderungszone der jährlichen Temperatur im Boden wird vom Autor die sog. Grenztiefe ( $h$ ) vorgeschlagen, d. h. die minimale Tiefe, in der der nach unten gerichtete Wärmestrom im Jahresdurchschnitt gleich Null ist. Für die Stadt Tartu (Estnische SSR) ist  $h = 13,5$  m, die mittlere jährliche Temperatur in dieser Tiefe beträgt  $7,82^{\circ}$  C.

Für die Berechnung der mittleren Bodentemperaturen je nach der Tiefe und der geothermischen Tiefe, wird die folgende Gleichung angeboten:  $t_k = a \cdot x^n$ . Die nach der gegebenen Gleichung errechneten Werte der Bodentemperatur fallen mit den gemessenen gut zusammen. Die geothermische Tiefe für Tartu beträgt 38 m.

Auf Grund der Analyse wird ein Nomogramm zusammengestellt, das das Temperaturfeld im Boden unter der offenen Erdoberfläche je nach der Zeit und Tiefe charakterisiert (siehe Abb. 1).

Das Mikroklima des Viehstalls verursacht im Boden unter dem Viehstall die Bildung eines Temperaturfeldes, das sich qualitativ vom Temperaturfeld im Boden unter der offenen Erdoberfläche unterscheidet. Die Temperatur und der Wärmegehalt im Boden unter dem Viehstall sind das ganze Jahr durch bedeutend höher als unter der offenen Erdoberfläche. Das verursacht einen waagerechten Wärmestrom aus dem Boden unter dem Viehstall in den Boden ausserhalb des Gebäudes. Dieser Wärmestrom verursacht einen Verlust der Stallwärme durch den Fussboden.

Es zeigt sich, dass die jährliche Wärmebilanz der oberflächlichen Schicht des Bodens unten der offenen Erdoberfläche negativ ist (für Tartu —  $656$  kcal/m<sup>2</sup> Jahr), aber die Wärmebilanz des Viehstallfussbodens für jede Zeitperiode positiv ist, d. i. der Viehstallfussboden entzieht stark die Wärme des Raumes (für den untersuchten Viehstall beträgt die Wärmebilanz +  $37\,250$  kcal/m<sup>2</sup> Jahr).

Der grösste Teil der Wärme, die aus dem Viehstall in den Boden entweicht, wird vom Liegeplatz unmittelbar aus dem

Organismus der liegenden Tiere empfangen. Unter den Liegeplätzen der Tiere entstehen Wärmeherde, deren Temperaturverlauf in höherer Masse die Bewegung der Wärme unter dem Fußboden bestimmt.

Der Boden unter dem Gebäude trägt zur Stabilisierung des Innenklimas des Viehstalles bei, ähnlich wie eine wärmespeichernde Scheidewand im periodisch beheizten Raum. Deshalb kann die Verwendung wärmedämmender Fußbodenkonstruktionen in Viehställen auch zur Verschlechterung ihres Mikroklimas führen. Dabei wird aber durch die Wärmedämmung der unterirdischen Teile der Außenwände die Wärmehaushalt des Stalles verbessert.

Die Wärmeverluste durch den Viehstallfußboden der Stallhaltungsperiode des Viehs 1963/64 (28 Wochen) bilden im untersuchten Objekt 21 000 kWh, d. i. 17% der gesamten Wärmeverluste des Viehstalls.

In den Abb. 4—10 werden die Temperaturfelder im Boden während des Jahres und der einzelnen Monate dargestellt.

Die Abhandlung beruht auf einer Serie volljähriger natürlicher Temperaturmessungen des Bodens unter dem Viehstall.

---

СБОРНИК СТАТЕЙ  
ПО СОПРОТИВЛЕНИЮ МАТЕРИАЛОВ,  
СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ  
И СТРОИТЕЛЬНОЙ ФИЗИКЕ

Таллинский политехнический институт

Редактор К. Оллик

Технический редактор Я. Мыттус

Корректор Л. Лоопер

Сдано в набор 4 VIII 1965. Подписано к печати  
3. XII 1965. Бумага 60×90 1/16. Печ. листов 8,25.  
Учетно-издательских листов 6,25. Тираж 800. МВ-10830.  
Заказ № 6421.

Типография «Коммунист», Таллин, ул. Пикк 2.

Цена 44 коп.

Цена 44 коп.

TÜ RAAMATUKOGU



1 0300 00291850 8