Def.-pd. trükitiitelleht
lehed 1-4, lk. 1-76.

Euclidis
elementorum
Libri VI.
auctore
Johanne Scheubelio. —

Basileae
anno
M. D. L.

Exs. Cand. Morel
1792.
Mr Pfaff.

v. Liphart-Ratshof

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ.

EVCLIDIS ELEMENTORVM GEO*metricorum liber primus.*

ESt hic liber primus totus ferè elementarius, non tantum ad reliquos ſequentes huius Operis libros, ſed etiam ad aliorum Geometrarum ſcripta intelligenda neceſſarius. Nam in hoc libro communium uocabulorum, quę ſubinde in geometriá uerſanti occurrunt, definitiones continentur. Pręceptiones deinde ducendi perpendicularem, quomodo item Trilaterę figurę, ſecundum latera uel angulos diuerſæ, & Quadrilateræ, formari debeant. Figura item aliqua propoſita, quomodo illa in alterius formæ figuram permutanda ſit, præceptiones, ut diximus, traduntur. Cum igitur talia doceantur, & plura etiam alia, quàm hoc loco commemorare uoluimus, facile erit cuiuis, non ſolum quàm ſit neceſſarius, ſed etiam ad reliqua perdiſcenda liber iſte quàm utilis, perſpicere.

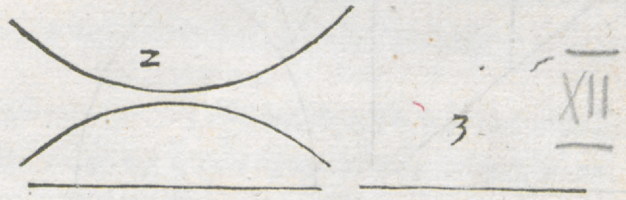
ΟΡΟΙ.

Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν. Γραμμὴ δὲ, μῆκος ἀπλατές. Γραμμῆς δὲ πέρατα, σημεῖα. Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ᾽ ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.

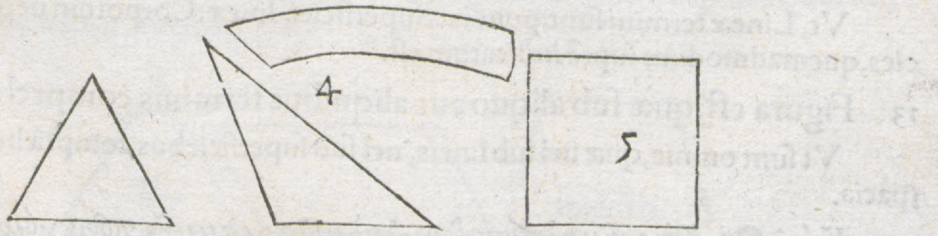
DEFINITIONES.

Punctum eſt, cuius pars nulla. 2. Linea uerò, longitudo latitudinis expers. Lineę autem termini puncta. 3. Recta linea eſt, quę ęquabiliter inter ſua puncta iacet.

Prima defini.

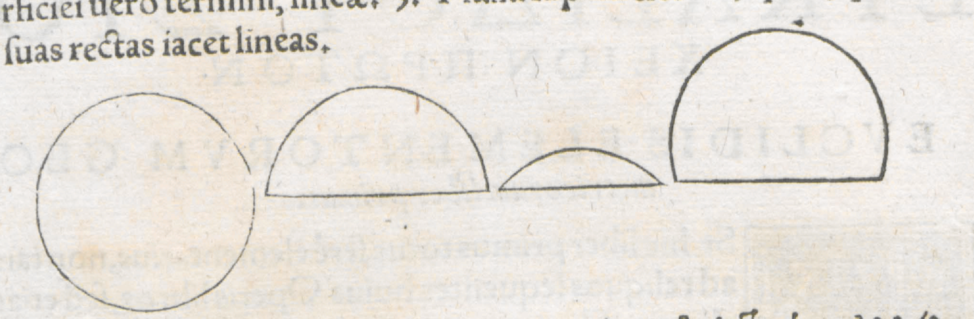


Ἐπιφάνεια ἐστὶν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει. Ἐπιφανείας δὲ πέρατα, γραμμαί. Ἐπίπεδος ἐπιφάνειά ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ᾽ ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται.



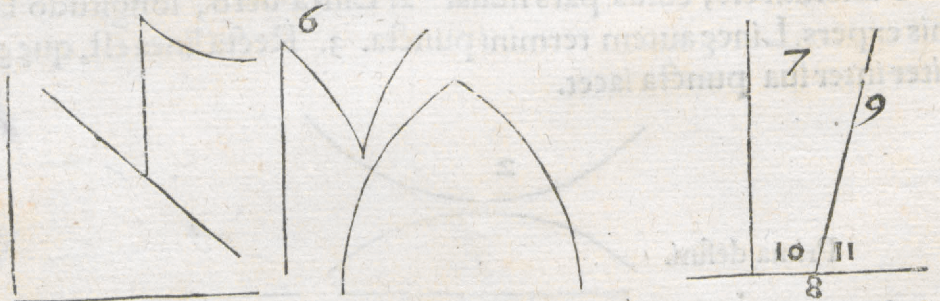
4. Superficies eſt, quę longitudinem & latitudinem tantum habet.

Superficiei uerò termini, lineæ. 5. Plana ſuperficies eſt, quæ æquabiliter inter ſuas rectas iacet lineas.



Επίπεδος γωνία ἐστὶν, ἡ ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων, καὶ μὴ ἐπ᾽ εὐθείας κειμένων, πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις. Οταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν γραμμαὶ, εὐθεῖαι ὦσιν, Εὐθύγραμμος καλεῖται ἡ γωνία. Οταν δὲ εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθεῖαν σταθεῖσα, τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, Ορθὴ ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν. Καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα, Κάθετος καλεῖται, ἐφ᾽ ἣν ἐφέστηκεν. Αμβλεῖα γωνία ἐστὶν, ἡ μείζων ὀρθῆς. Οξεῖα δὲ, ἡ ἐλάσσων ὀρθῆς.

6. Planus angulus, eſt in plano duarum linearum ſe mutuo tangentium, & non in directum iacentium, mutua inclinatio. 7. Quando uerò compræhendentes angulum lineæ, rectæ fuerint, Rectilineus uocatur ille angulus. 8. Quando autem recta ſuper rectam conſiſtens lineam, deinceps ſe habentes angulos æquales inter ſe fecerit, Rectus eſt uterq; æqualium angulorum. 9. Et inſiſtens recta linea, Perpendiculum: hoc eſt, Perpendicularis linea uocatur, illius ſuper quam ſteterit. 10. Obtuſus angulus eſt, qui maior eſt recto. 11. Acutus uerò, qui minor eſt recto.



Ορος ἐστὶν, ὅ τινός ἐστι πέρας. Σχῆμά ἐστι, τὸ ὑπό τινος ἢ τινῶν ὅρων περιεχόμενον.

12. Terminus eſt, quod cuiuſq; extremum eſt.

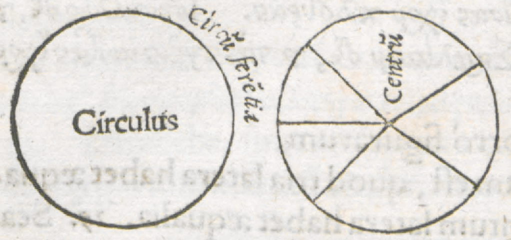
Vt, Lineæ termini ſunt, puncta: Superficiei, lineæ: Corporum uerò, ſuperficies, quemadmodum ſuprà indicatum eſt.

13 Figura eſt, quæ ſub aliquo aut aliquibus terminis comprehenditur.

Vt ſunt omnia, quæ uel ſub lineis, uel ſub ſuperficiebus compræhenduntur, ſpacia.

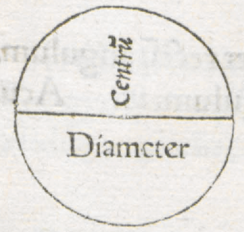
Κύκλος, ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον, ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον, ἣ καλεῖται Περιφέρεια, πρὸς ἣν ἀφ᾽ ἑνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων, πᾶσαι

πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Κέντρον δὲ τοῦ κύκλου, τὸ σημεῖον καλεῖται.



14. Circulus, eſt figura plana, una linea compræhenſa, quæ Circumferentia appellatur, ad quã ab uno quodã puncto eorum, quæ intra figurã ſunt poſita, omnes cadentes rectæ lineę inter ſe ſunt ęquales. 15. Punctum uerò hoc, Centrum circuli appellatur.

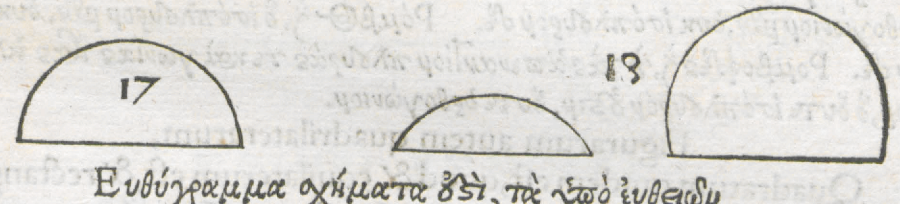
Διάμετρος τοῦ κύκλου, ἐστὶν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη, καὶ περατουμένη ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ἥτις καὶ δίχα τέμνει τὸν κύκλον.



16 Diameter circuli, eſt recta quędam linea per centrum ducta, & ex utraq; parte in circuli circumferentiam terminata, & quæ circulum bifariam ſecat.

Ημικύκλιόν ἐστι, τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῆς διαμέτρου, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας. Τμῆμα δὲ κύκλου, ἐστὶ τὸ περιεχόμενον ὑπό τε εὐθείας, καὶ κύκλου περιφερείας.

17. Semicirculus, eſt figura, quę ſub diametro, atq; de circuli circumferentia ablata portione comprehenditur. 18. Sectio uerò circuli, eſt figura quę ſub recta linea, et circuli circumferentia compræhenditur.

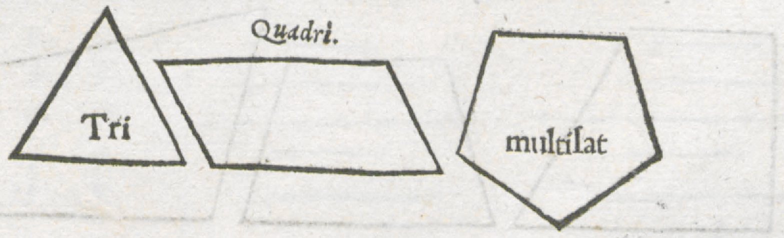


Εὐθύγραμμα σχήματα ἐστὶ, τὰ ὑπὸ εὐθειῶν περιεχόμενα.

Τρίπλευρα μὲν, τὰ ὑπὸ τριῶν. Τετράπλευρα δὲ, τὰ ὑπὸ τεσσάρων. Πολύπλευρα δὲ, τὰ ὑπὸ πλειόνων ἢ τεσσάρων εὐθειῶν περιεχόμενα.

19. Rectilineæ figuræ ſunt, quæ ſub rectis lineis compræhenduntur.

20. Trilateræ quidem, quæ ſub tribus. 21. Quadrilaterę uerò, quę ſub quatuor. 22. Multilaterę autem, quæ ſub pluribus quàm quatuor rectis lineis compræhenduntur.



Τῶν δὲ τριπλεύρων σχημάτων,

Ἰσόπλευρον μὲν τρίγωνόν ἐστι, τὸ τρεῖς ἴσας ἔχον πλευράς. Ἰσοσκελὲς δὲ, τὸ τὰς δύο μόνας ἴσας ἔχον πλευράς. Σκαληνὸν δὲ, τὸ τὰς τρεῖς ἀνίσας ἔχον πλευράς.

Trilaterarum porrò figurarum,

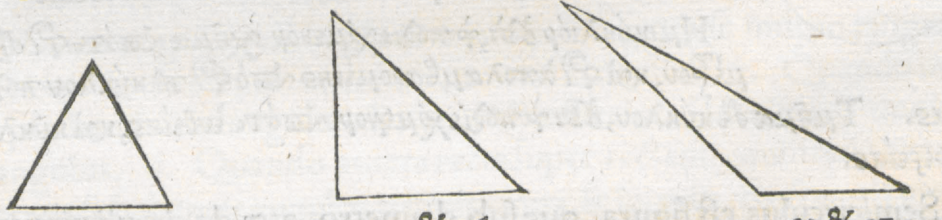
23. Aequilaterum quidē triangulum eſt, quod tria latera habet æqualia.
24. Iſoſceles uerò, quod duo tantum latera habet æqualia. 25. Scalenum
autem, quod tria inæqualia habet latera.

Ἔτι τε τῶν τριπλεύρων σχημάτων,

Ὀρθογώνιον μὲν τρίγωνόν ἐστι, τὸ ἔχον ὀρθὴν γωνίαν. Ἀμβλυγώνιον δὲ, τὸ ἔχον ἀμβλεῖαν γωνίαν. Ὀξυγώνιον δὲ, τὸ τρεῖς ὀξείας ἔχον γωνίας.

Amplius trilaterarum figurarum,

26. Rectangulum quidem triangulum eſt, quod habet rectū angulum.
27. Obtuſiangulum uerò, quod habet obtuſum angulum. 28. Acutiangulum
autem, quod tres acutos angulos habet.

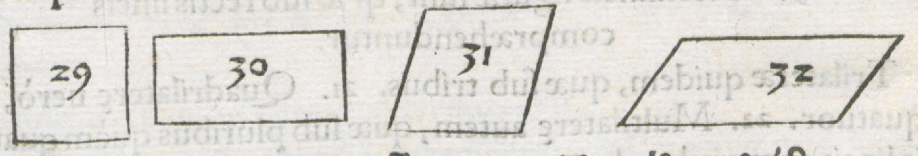


Τῶν δὲ τετραπλεύρων σχημάτων.

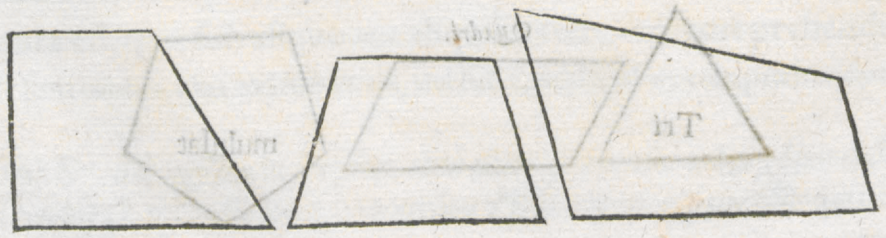
Τετράγωνον μέν ἐστιν, ὃ ἰσόπλευρόν τέ ἐστι, καὶ ὀρθογώνιον. Ἑτερόμηκες δὲ, ὃ ὀρθογώνιον μὲν, οὐκ ἰσόπλευρον δέ. Ῥόμβος δὲ, ὃ ἰσόπλευρον μὲν, οὐκ ὀρθογώνιον δέ. Ῥομβοειδὲς δὲ, τὸ τὰς ἀπεναντίον πλευράς τε καὶ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔχον, ὃ οὔτε ἰσόπλευρόν ἐστιν, οὔτε ὀρθογώνιον.

Figurarum autem quadrilaterarum,

29. Quadratum quidem eſt, quod & ȩquilaterum eſt, & rectangulum.
30. Altera parte longius uerò, quod rectangulū quidem, at ȩquilaterum
non eſt. 31. Rhombus autem, qui æquilaterus, ſed rectangulus
non eſt. 32. Rhomboides deinde, quod ex oppoſito & latera & angulos
æquales inter ſe habens, neq; ȩquilaterum eſt, neq; rectangulum.



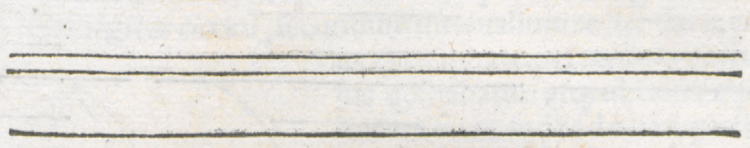
Τὰ δὲ παρὰ ταῦτα τετράπλευρα, τραπέζια καλείσθω.



33. Prȩter has uerò, quȩ reliquæ ſunt figuræ quadrilaterȩ, Menſulæ appellantur.

Παράλληλοί εἰσιν εὐθεῖαι, αἵτινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι, καὶ ἐκβαλλόμεναι ἐπ᾽ ἄπειρον ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη, ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις.

34. Parallelæ, ſunt rectæ lineæ, quæ in eodem plano exiſtentes, & ex utraq; parte in infinitū eiectæ, in neutram inter ſe mutuo coincidunt.



ΑΙΤΗΜΑΤΑ.

Ἠτήσθω, ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον, εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν. Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν, κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ᾽ εὐθείας ἐκβάλλειν. Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι, κύκλον γράφεσθαι.

Poſtulata.

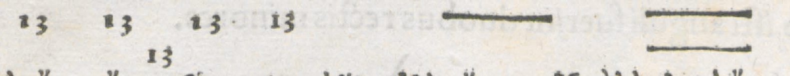
Petatur, & primò quidem, Ab omni puncto ad omne punctum, rectam lineam ducere poſſe. Secundò uerò, Terminatam rectam lineam, ſecundum continuationem, in rectum eijcere. Tertiò tandem, Omni centro & interuallo, circulum deſcribere.

ΚΟΙΝΑΙ ΕΝΝΟΙΑΙ.

Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα.

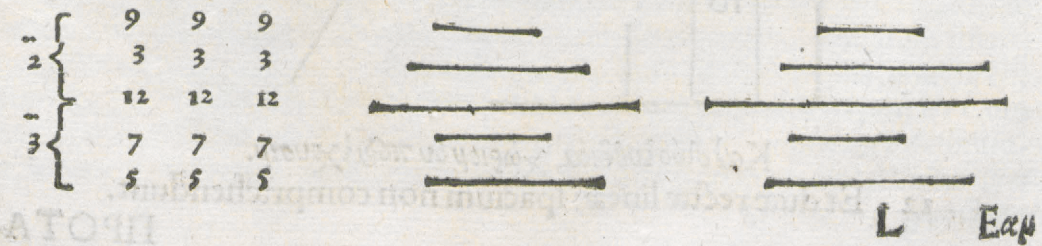
COMMVNES NOTITIAE.

1 Quæ eidem æqualia: & inter ſe ſunt æqualia.



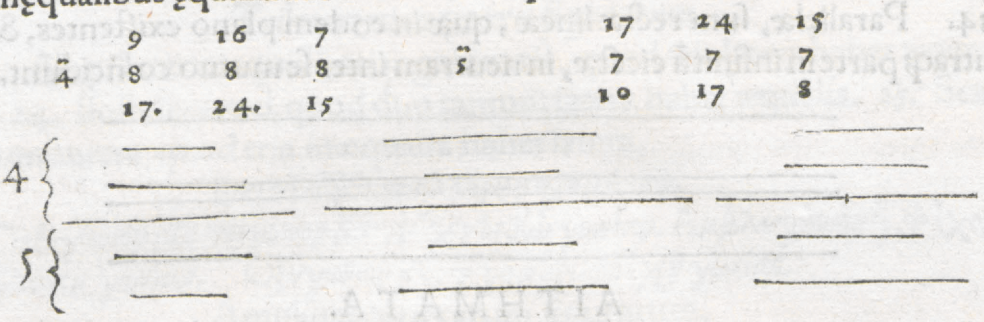
Ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενά ἐστιν ἴσα.

2 Si æqualibus æqualia adijciantur: tota ſunt æqualia. 3 Et ſi ab ȩqualibus ȩqualia auferantur: quæ relinquuntur ſunt æqualia



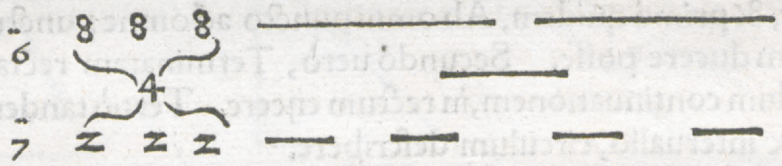
Ἐὰν ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἄνισα. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἀνίσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ λοιπά ἐστιν ἄνισα.

4 Si inæqualibus ęqualia adijciantur: tota ſunt inæqualia. 5. Et ſi ab inęqualibus ęqualia auferantur: reliqua ſunt inæqualia.



Τὰ τοῦ αὐτοῦ διπλάσια, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ ἡμίση, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

6 Quæ eiuſdem duplicia: ęqualia inter ſe ſunt. 7 Et quæ eiuſdem dimidia: ęqualia inter ſe ſunt.



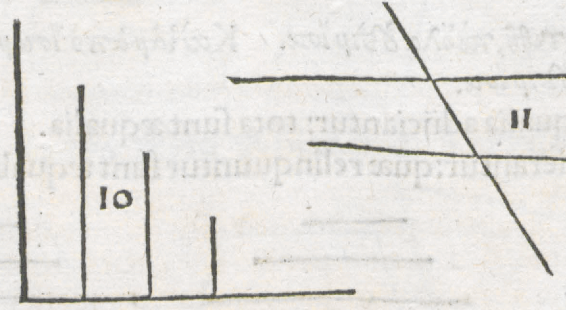
Τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἄλληλα, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζόν ἐστι.

8 Quæ congruunt inter ſe: ęqualia inter ſe ſunt.

9 Et totum parte ſua maius eſt.

Πᾶσαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα, τὰς ἐντὸς, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας, δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλόμεναι αἱ δύο αὗται εὐθεῖαι ἐπ' ἄπειρον συμπεσοῦνται ἀλλήλαις, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες γωνίαι.

10 Omnes recti anguli: æquales inter ſe ſunt. 11 Et ſi in duas rectas recta linea incidens, internos, & in eadem parte angulos, duobus rectis minores fecerit: illas ambas productas infinitè, neceſſe eſt coincidere, ea in parte, qua duo iſti anguli fuerint duobus rectis minores.



Καὶ δύο εὐθεῖαι, χώριον οὐ περιέχουσιν.

12 Et duæ rectæ lineæ: ſpacium non compræhendunt.

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.

ΠΡΩΤΗ. Α.

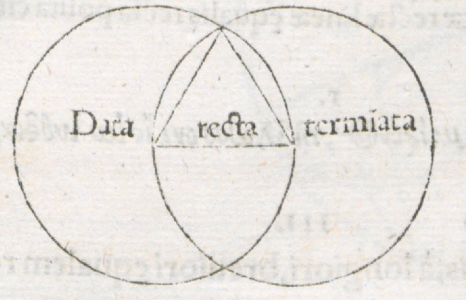
Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης, τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

PROPOSITIONES.

PRIMA. I.

Super data recta linea terminata, triangulũ æquilaterum conſtituere.

Terminata recta linea data, propoſitum eſt, ſuper ea triangulum æquilaterum conſtituere. Officio igitur circini, ſecundum interuallum rectæ datæ, ex utraq; illius extremitate, per tertium poſtulatũ, circulus deſcribatur: atq; ubi alter alterum ſupra lineam ſecat, inde ad utranq; extremitatem datæ recta quędam linea demittatur, & propoſitioni ſatisfactum erit, cum hæ duæ demiſſæ & recta terminata data, triangulum quale petitur comprehendant: id quod facile ex ſtructura & circuli definitione, bis uſurpata, atq; illa communi noticia, Quæ uni ſunt æqualia, & inter ſe ſunt æqualia, demonſtrari poterit. Super data igitur recta terminata linea, triangulum æquilaterum conſtitutũ eſt, quod feciſſe oportuit.



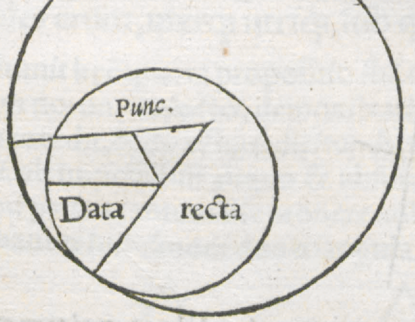
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β.

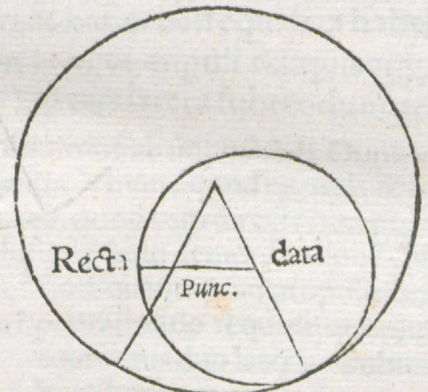
Πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι.

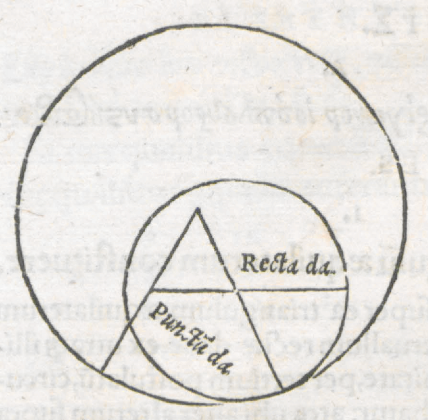
PROPOSITIO II.

Ad datum punctũ, datæ rectæ lineæ, ęquadem rectam lineã ponere.

Puncto & recta linea data, deſcribatur primò circulus, cuius ſemidiameter ſit recta data: altera ipſius extremitate, utra fuerit, centri loco ſumpta. Quo facto, à centro circuli iam deſcripti, ad punctum datum, linea quadam recta, per primum poſtulatum ducta, ſuper ea, per propoſitionem præcedentem, triangulum æquilaterum conſtituatur: atq; id latus, quod ad centrum tendit, ad circumferentiam uſq; producatur. Poſtea uerò ſecundum hanc ipſam continuatã, ex illa quoq; extremitate, quam cum latere trianguli altero communem habet, circulus deſcribatur, & ubi tandem latus trianguli alterum uſq; ad circumferentiam continuatum fuerit, confectum erit negocium. A' dato enim puncto linea, datæ æqualis, educta eſt: id quod adiectæ figuræ indicant. atque in hunc modum demonſtrari poteſt. Cum enim in maiori circulo, quæ ex ipſius centro egrediuntur rectæ lineæ, ex definitione, inter ſe æquales ſint cumq; etiam ſuper recta, quam centrum circuli minoris et







punctum datum terminant, triangulum æquilaterum conſtitutum ſit, huius uerò trianguli duo latera duarum maioris circuli ſemidiametrorum partes ſint, partibus illis æqualibus ab æqualibus ſemidiametris ſubtractis, & quæ relinquuntur rectæ lineæ, ex communi quadam noticia inter ſe æquales erunt. Sed quia una harum, ex definitione circuli, datæ rectæ eſt æqualis: & altera, quæ nimirum ex dato puncto egreditur, ex communi quadam noticia, eidem rectæ datæ ęqualis erit. Ad datum igitur punctum, datæ rectæ lineæ ęqualis recta poſita eſt, quod feciſſe oportuit.

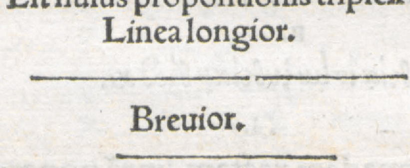
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ.

Δύο δοθεισῶν ἐυθειῶν ἀνίσων, ἀπὸ τῆς μείζονος, τῇ ἐλάσσονι ἴσην ἐυθεῖαν ἀφελεῖν.

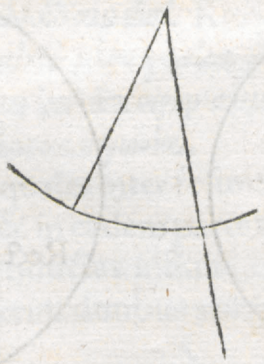
PROPOSITIO III.

Duabus datis rectis lineis inęqualibus, à longiori, breuiori ęqualem rectam lineam abſcindere.

Eſt huius propoſitionis triplex operatio, ſeu fabrica. Prima, ut officio circini quãtitas breuioris accipiatur: ea deinde in longiore, ab extremitate una incipiendo, puncto aliquo ſignetur: & factum erit negotiũ, id quod per cõmunem illam noticiã, Quæ uni ſunt æqualia, et inter ſe ſunt æqualia, demonſtrari poterit.

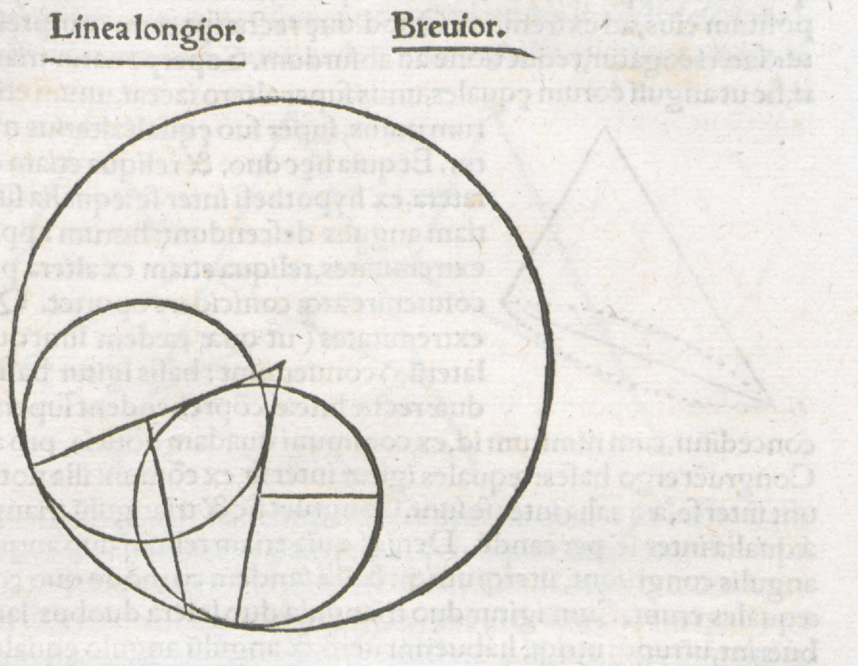


Secunda eſt, ut lineæ propoſitæ duabus ſuis extremitatibus utcunqꝫ coniungentur, ſecundum quantitatem deinde, uel interuallũ breuioris, ex coniunctionis puncto, per tertium poſtulatum, circulus, uel arcus tantum circuli loco, qui tamen longiorem rectã ſecat, deſcribatur: & idem effectum erit. Huius autem demonſtratio eſt ipſa circuli definitio ſupra tradita, cum lineæ à centro in circumferentiam cadentes, per eandem, inter ſe ſint æquales.



Tertia huius operatio eſt, ut, per præcedentem propoſitionem ſecundam, primò ab extremitate longioris alterutra, tanquam à puncto aliquo dato, linea breuiori ęqualis educatur: atqꝫ huic deinde à longiore, prout ſecunda huius propoſitionis operatio exigit, æqualis abſcindatur. & tertiò, quod uolebat propoſitio, factum erit.

FIGVRA OPERATIONIS TERTIAE.



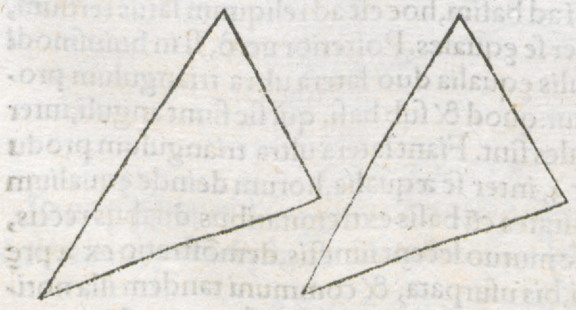
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ.

Εαν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων ἐυθειῶν περιεχομένην· καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἕξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

PROPOSITIO IIII.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus ęqualia habuerint, utrunque utrique, habuerint uerò & angulum angulo ęqualem, eum qui ſub ęqualibus rectis lineis comprehenditur: & baſim baſi ęqualem habebunt, & triangulum triangulo ęquale erit, ac reliqui anguli reliquis angulis ęquales erunt, uterqꝫ utriqꝫ, ſub quibus ęqualia latera ſubtenduntur.

Sumit hęc quarta propoſitio ſuã demonſtrationẽ ab impoſsibili. Duplex enim eſt, ut norunt dialectci, demonſtrationis genus. Vnum, quod ex ueris & conceſſis procedit, & directum dicitur. Alterum uerò, quod cum directè non poſsit obtineri, ab impoſsibili aliquo & abſurda cõcluſione ſuam demonſtrationẽ cõfirmat, quod paucis tantum hic monere uoluimus. Nunc quantum ad propoſitionẽ. Pręſcribantur huiuſmodi duo triangula, qualia hęc propoſitio requirit, quorum nimirum unius duo latera, duobus lateribus alterius æqualia ſint: atqꝫ angulus deinde ſub ęqualibus lateribus unius, angulo ſub ęqualibus trianguli alterius comprehenſo ęqualis: dico quod & horum triangulorum baſes, ipſa quoqꝫ triãgula tota, atqꝫ reliqui anguli reliquis angulis utrinque inter ſe ęquales ſint. Huius rei nunc accedere deberet ocularis quędam demonſtratio: ſed quia ad ſenſum quaſi ita ſeſe habere res apparet, & euidens eſt, tan-



quam uera atq; omnibus nota relinquitur, cum ſtatim, hoc ſi quis negare uelit, oppoſitum eius, ad extremum, Quod duę rectæ ſpacium compręhendant, ut ſequitur, fateri cogatur, reductione ad abſurdum. Superponatur triangulum unum alteri, ſic ut anguli eorum ęquales, unus ſuper altero iaceat, unum etiam ęqualium laterum unius, ſuper ſuo ęquali alterius triãguli latere ponatur. Et quia hęc duo, & reliqua etiam duo ex altera parte latera, ex hypotheſi inter ſe æqualia ſunt, ab ęqualibus etiam angulis deſcendunt: horum applicatorum laterum extremitates, reliqua etiam ex altera parte latera omnino conuenire atq; coincidere oportet. Quia uerò iam baſiũ extremitates (ut quæ eædem ſunt quæ deſcendentium laterũ,) conueniunt: baſis igitur baſi aut congruet, aut duæ rectæ lineæ cõprehendent ſuperficiẽ. Poſterius nõ conceditur, cum nimirum id, ex communi quadam noticia, pro abſurdo habeatur. Congruẽt ergo baſes: æquales igitur inter ſe, ex cõmuni illa noticia, Quæ congruunt inter ſe, æqualia inter ſe ſunt. Congruet ſic & triangulũ triangulo: quare & ipſa æqualia inter ſe, per eandẽ. Deniq; quia etiam reliqui duo anguli reliquis duobus angulis congruunt, uterq; utriq;: & illi tandem eo modo quo conueniunt, inter ſe æquales erunt. Cum igitur duo triangula duo latera duobus lateribus ęqualia habuerint, utrunq; utriq;, habuerint uerò & angulũ angulo ęqualem, eum qui ſub æqualibus rectis compræhenditur: & baſim baſi ęqualem habebunt, & triangulum triangulo ęquale, ac reliqui anguli reliquis angulis ęquales erunt, uterq; utriq;, ſub quibus ęqualia latera ſubtenduntur, quod demonſtrari oportuit.

ADMONITIO.

Per puncta in figuris, repreſentatur ratio ducens ad abſurdũ, ut qui facilis nõ eſſet in concedendo id quod uerum eſt, tandem cõuincatur reductione quadam ad impoſsibile, ut hac offenſione abſurditatis quodammodo reſiliat ad confeſsionem ueri. Quod ut hoc loco, ita etiam alijs locis à me factum reperient Lectores, deſignatione punctorum.

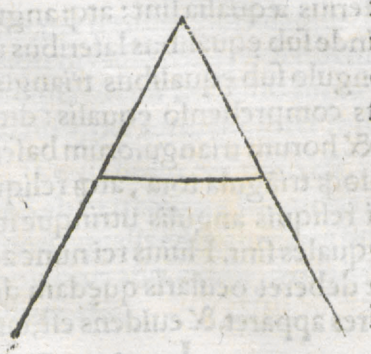
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε.

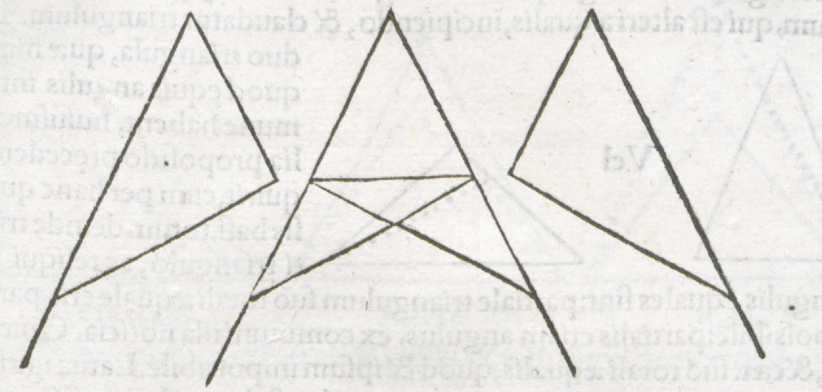
Τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων, αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Καὶ πρὸς ἐκβληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν, αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

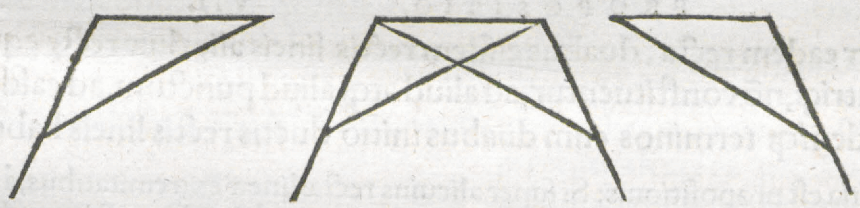
PROPOSITIO V.

Iſoſcelium triangulorum: qui ad baſim anguli, ęquales inter ſe ſunt. Et ęqualibus rectis ulterius productis: qui ſub baſi anguli, ęquales inter ſe erunt.

Sunt huius propoſitionis duæ partes, quarum prior quidem eſt, quòd in triangulis duúm æqualium laterum, anguli ad baſim, hoc eſt ad reliquum latus tertium, ſint inter ſe ęquales. Poſterior uerò, ſi in huiuſmodi triangulis ęqualia duo latera ultra triangulum producantur: quod & ſub baſi, qui ſic fiunt anguli, inter ſe æquales ſint. Fiant latera ultra triangulum producta, per 3, inter ſe æqualia, horum deinde ęqualium extremitates cũ baſis extremitatibus, duabus rectis, quæ ſeſe mutuo ſecent iunctis, demõſtratio ex 4 pręcedenti, bis uſurpata, & communi tandem illa noticia, Si ab ęqualibus æqualia auferantur, & quæ relinquuntur, &cæ. ſic colligetur. Quoniã enim inferius ad Iſoſcelis baſim poſita triangula (ſumpto tamẽ ad utrũq; Iſoſceli deſcripto) duo latera ex hypotheſi & ſtructura, duobus lateribus æqualia, angulum pręterea inter æqualia latera, angulo ęqualẽ habent: per pręcedentem quartã, & baſim baſi, hoc eſt, ſecantes ſeſe mutuo ſub Iſoſcelis baſi lineas, ac reliquos duos angulos reliquis duobus angulis ęquales habebunt: quod eſt notandum. Rurſus quoniam eadem duo inferius ad Iſoſcelis baſim poſita triangula, propter ſtructuram quidem, & ea inſuper, quæ iam demonſtrata ſunt, ex propoſitione 4 huius, inter ſe æqualia ſunt, angulos etiam ęquales habent: iam ſtatim poſterior huius propoſitionis pars, quod ſcilicet ſub baſi anguli inter ſe æquales ſint, manifeſta erit. Quòd deinde quãtum ad partem priorẽ, ad baſim etiam poſiti anguli inter ſe ęquales ſint, ex cõmuni illa noticia, Si ab æqualibus æqualia auferantur, &cæ. & id tandẽ manifeſtabitur. Conſtat itaque ſic tota propoſitio. Iſoſcelium igitur triangulorum: qui ad baſim ſunt anguli, inter ſe ęquales erunt. Productis item æqualibus lateribus: & qui ſub baſi anguli, inter ſe æquales erunt, quod demonſtrari oportuit.







SEQVITVR FIGVRA ALIA.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ς.

Ἐὰν τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσι, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραὶ, ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

PROPOSITIO VI.

Si trianguli duo anguli ęquales inter ſe fuerint: & ſub ęqualibus angulis ſubtenſa latera, equalia inter ſe erunt.

Eſto triangulum, cuius duo anguli ſint inter ſe æquales: dico & latera illis ęqualibus angulis ſubtenſa, inter ſe æqualia eſſe. Si enim non ſunt ęqualia: erit alterum eorum longius. ab eo ergo quod eſt longius, breuiori ęquale auferatur, iuxta illum angulum, qui eſt alteri æqualis, incipiendo, & claudatur triangulum. Et quoniam duo triangula, quæ nimirum latus, quod ęquis angulis interiacet, cõmune habent, huiuſmodi ſunt, qualia propoſitio pręcedens quarta requirit, cum per hanc quartam, et baſis baſi, totum deinde triãgulum toti triangulo, ac reliqui anguli reliquis angulis ęquales ſint: partiale triangulum ſuo totali æquale erit, pars toti, quod eſt impoſſibile: partialis etiam angulus, ex communi illa noticia. Quæ uni ſunt æqualia, & cæt. ſuo totali æqualis, quod & ipſum impoſſibile. Latus igitur unum alteri, propter hęc inconuenientia, non inęquale, ſed æquale erit. Si igitur trianguli alicuius duo anguli ęquales inter ſe fuerint, & horum ęqualiũ angulorum ſubtenſa latera inter ſe æqualia erunt. quod demonſtraſſe oportuit.

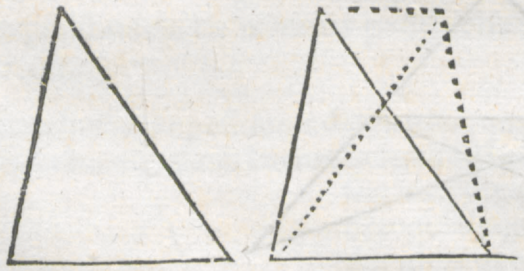
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, δυσὶ ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, οὐ συσταθήσονται, πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ, ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις.

PROPOSITIO. VII.

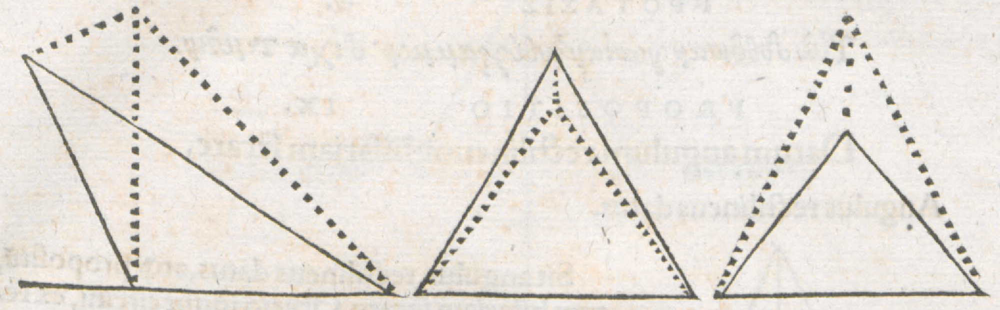
Super eadem recta, duabus eiſdem rectis lineis alię duæ rectę ęquales, utraq; utriq;, nõ conſtituentur, ad aliud atq; aliud punctum, ad eaſdẽ partes, eoſdemq; terminos cum duabus initiò ductis rectis lineis habentes.

Sentẽtia eſt propoſitionis: Si ſuper alicuius rectæ lineæ extremitatibus, à pũcto uno, extra lineã ſumpto, duæ rectæ demiſſæ fuerint, quòd tũ à puncto quodã alio, in eadẽ qua prius parte conſtituto, ad extremitates datæ, alię duę rectæ, quę eſſent priorib. ductis ęquales, utraq; ſuę cõterminali, demitti poſſint, hoc impoſſibile eſt. Si enim poſſibile, detur recta, à pũcto etiã extra datã ſumpto, ad utranq; extremitatẽ recta linea ducat̃. Sumat̃ deinde, ut ita aduerſario, uel minus credẽti, mos geratur, in eadem qua prius parte, punctum aliud, à quo & ipſo duæ ad extremitates datę rectæ tandem demittentur lineę. Et quia in hũc modum deſcripta figura, ex poſterioribus una priorum unã ſecet aut non ſecet, utrum nunc contigerit, pũcta ſemper, per primũ poſtulatum, recta quadã linea coniungẽda ſunt. Quòd ſi una unã ſecet, cũ hîc appareãt duo triangula, quorũ utrũq; Iſoſceles, qui in Iſoſceliũ triãgulorũ uno, per priorẽ partem quintæ, anguli ſunt inter ſe ęquales, mox uni ęqualium unus angulus, quẽ nimirum habet à laterè, additus, de altero uerò unus ablatus: qui ſic ueniũt anguli inęquales, per eandem priorem quintæ partem, ratione alterius Iſoſcelis, inter ſe ęquales erunt. quod eſt impoſſibile. Eſto autem nunc, quod non ſecet una unam, tum poſt punctorum coniunctionem, unius Iſoſcelis trianguli ęqualia latera ultra baſim producantur. Et quoniã qui, ex poſteriore parte quintę, anguli ſunt inter ſe ęquales, ſi uni unus additus, de altero uerò unus ablatus fuerit, ex priore parte eiuſdem quintę idem



Recta data. Recta data.

quod prius inferri poteſt. Sequitur ergo nunc, quomodocunq; hoc tentabitur, incaſſum laborari, cum nec intra nec extra demiſſas rectas punctũ aliud ſumi poſſit. Super eadẽ igitur recta, duabus eiſdẽ rectis, & reli. quod demõſtraſſe oportuit.



Recta data. Recta data.

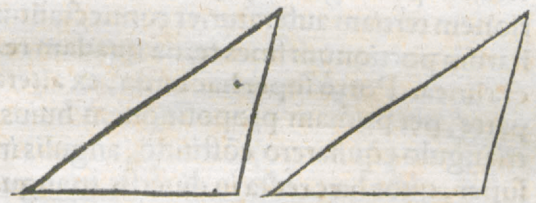
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἔχῃ δὲ καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην· καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἕξει, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.

PROPOSITIO VIII.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus ęqualia habuerint, utrũque utriq;, habuerint uero & baſim baſi ęqualem: & angulum angulo æqualem habebunt, eum qui ſub ęqualibus lateribus comprehenditur.

Deſcribantur huiuſmodi duo triangula, qualia hæc propoſitio requirit: dico & angulos, qui ſub æqualibus amborum triangulorum lateribus comprehenduntur, inter ſe ęquales eſſe. Colligit ſuam demonſtrationem hęc propoſitio ex ſeptima, ut pręcedens ſexta ex quinta, ab impoſſibili hoc modo. Superponat̃ triangulum unum alteri, ſic ut baſis baſim, latera etiam latera, unumquodq; ſuum ęquale, reſpiciant: ac poſita baſi ſuper baſi, una item extremitate unius in uno, ſuper una baſis extremitate in triangulo altero, cum ipſę baſes inter ſe ſint, ex hypotheſi, ęquales: duę harum extremitates reliquæ coincident. atq; ſic etiam ipſæ baſes, cum alias, ubi uidelicet una baſis extra uel intrą triangulũ caderet, duæ rectę lineæ ſuperficiẽ clauderent, id quod per communem quandam notitiam fieri poſſe negatum eſt: cõgruunt igitur baſes. Et quia baſes congruunt: latera ſic lateribus aut congruent, aut non. Si prius: & angulus angulo congruet, & ei ęqualis erit, quod erat demonſtrandum. Eſto uero quòd non congruant latera baſibus congruentibus, ſed differant, hoc eſt, in diuerſa puncta cadant, cum ſuper unius rectæ extremitatibus duæ rectæ, ab uno puncto deductæ, prius conſtitutæ ſint, iam uerò aliæ duæ, ſuper eiſdem rectæ extremitatibus poſitæ, uerſus eandem partem tendentes, in aliud punctum concurrant, contra propoſitionem pręmiſſam ſeptimam id agi manifeſtum eſt. id quod fieri non ſolet: cum uidelicet Geometrę indecorum nimis atq; turpe eſſet, ſi demõſtratæ antea propoſitionis ueritatem & conſtantiam eandem non tueretur. Propter illud igitur inconueniens, congruentibus baſibus: et rẹliqua latera, cũ ſint, ex hypotheſi, inter ſe æqualia, congruere: atq; ſic angulos, quos dicta latera com



præhendunt, inter ſe ęquales eſſe, neceſſe erit. Si igitur duo triangula, duo latera duobus &cæ. quod demonſtraſſe oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ.

Τὴν δοθεῖσαν γωνίαν εὐθύγραμμον· δίχα τεμεῖν.

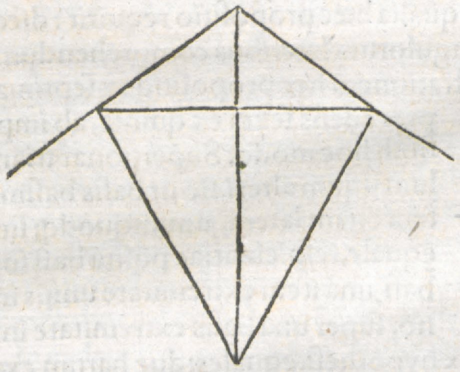
PROPOSITIO IX.

Datum angulum rectilineum: biſariam ſecare.

Angulus rectilineus datus.

Sit angulus rectilineus datus, atq; propoſitũ, eum biſariam ſecare. Officio igitur circini, ex rectis datum angulum continentibus, ab earũ contactu incipiẽdo, portiones ſumant̄ ęquales: quarum fines deinde linea quadam recta, ut Iſoſceles triangulũ fiat, iuncti, ſuper illa, ex altera parte, triangulum ęquilaterum conſtituat̄. Quòd ſi tandem linea quadam recta alia angulus datus cum ſibi oppoſito copuletur, propoſitioni iam ſatisfactum erit: id quod propoſitionis κατασκευὴ & propoſitio octaua manifeſtabunt.

ALIA DEMONSTRATIO HVIVS.



Sit angulus rectilineus datus, atq; propoſitum, eum biſariam ſecare. Signetur igitur in uno anguli latere pũctũ aliquod, huic deinde portioni, quę inter pũctũ hoc et angulũ iacet, ęqualis ab altero anguli latere, ab ipſo angulo incipiẽdo, per propoſitionem tertiam auferatur, et connectantur harum portionum fines tertia quadam recta linea. Porrò ſuper hac tertia, ex altera parte, per primam propoſitionem huius, triangulo ęquilatero cõſtituto, angulis inſuper, quos hæc recta in diuerſis triangulis ſubtendit, recta quadam linea alia iunctis, confectum erit negocium, cum hæc ipſa recta angulum propoſitum biſariam ſecet: id quod, ut prius, oſtendi poterit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην· δίχα τεμεῖν.

PROPOSITIO X.

Datam rectam lineam terminatam: biſariam ſecare.

Sit recta linea terminata data, atq; propoſitum, eam biſariam ſecare. Super illa igitur triangulum æquilaterum conſtituatur: angulo deinde, quem hæc recta terminata ſubtendit, linea quadam recta alia, per propoſitionem nonam præcedentẽ, biſariam diuiſo, factum erit negocium. Nam quæ angulum, ea ipſa, continuata tamen, & terminatam rectam lineam datam biſariam ſecet: cuius quidem rei demonſtratio, ipſa ſtructura & propoſitio quarta erunt. Data igitur recta terminata linea, biſariam ſecta eſt: quod fieri oportuit.

SEQVITVR FIGVRA.

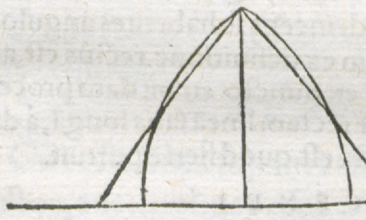
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ.

Τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου, πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

PROPOSITIO XI.

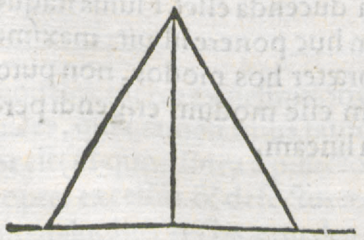
Data recta linea, à puncto in ea dato, ad angulos rectos lineam rectam excitare.

Sit recta linea data, in ea etiam punctũ datum, atq; propoſitum, ex puncto hoc, ipſius rectæ lineæ datæ, lineam rectam ad rectos angulos educere. Signentur ex utraq; parte puncti in linea, circini officio, æquales portiones. ex harum finibus deinde, circino prius ulterius expanſo, duo circuli, uel arcus tantum, circulorum loco, ſeſe mutuo ſecantes deſcribantur. A' mutua tandem duorum arcuum interſectione linea recta ad punctum in linea datum ſi demiſſa fuerit: illam demiſſam à puncto in linea ad rectos angulos eductã eſſe, ſic obtinebitur. Ducatur à communi arcuum interſectione ad utranq; illorum cũ recta data interſectionẽ, quædam recta linea. Et quoniã hîc ſunt duo triangula, qualia propoſitio octaua præcedens requirit, cũ illi anguli, quos recta data, & quæ ab arcuum interſectione demiſſa eſt linea, ἐφεξῆς conſtituunt, per eandem octauam, æquales inter ſe ſint, atq; ob id deinde recti, ex definitione: hæc demiſſa ad angulos rectos educta erit, id quod fieri oportuit.



ALIA DEMONSTRATIO HVIVS.

Sit recta linea data, & quæ ſequuntur. Signentur ex utraque parte puncti in linea æquales portiones, una quidem ad placitum, altera uero per propoſitionem tertiam præmiſſam. Super his deinde duabus portionibus, tanquam una linea, triangulo æquilatero per propoſitionẽ primam conſtituto, ad angulũ quem hæc tota ſubtendit, à puncto in linea ſumpto, recta quædam linea ducatur. Erit autem hęc recta, ea quę petebatur, ad rectos ſcilicet angulos à puncto in linea dato educta: id quod, ut modo, mediante ſtructura, ex propoſitione octaua, & definitione anguli recti, facile demonſtrari poterit.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ IB.

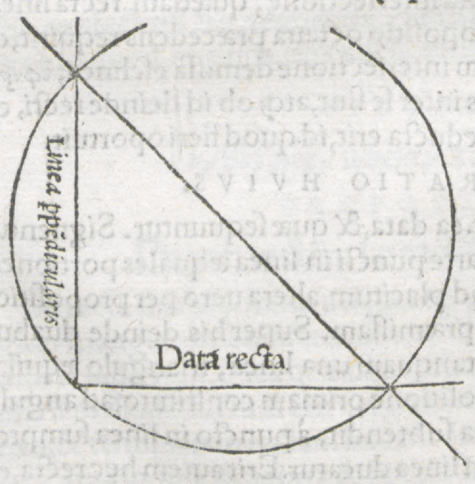
Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

PROPOSITIO XII.

Super datam rectam lineam infinitam: à dato puncto quod in ea non eſt, perpendicularem rectam lineam ducere.

Sit recta linea ſatis longa data, extra eam etiam punctum datum, atq; propoſitum, à puncto ſuper rectam, perpendicularem rectam lineam demittere. Suſcipiatur ex alterutra parte rectæ, per punctum diuiſæ, punctum aliud, utcunq;, ac centro quidem, puncto dato: interuallo uerò eo, quod à duobus punctis intercipitur, circulus, per 3 poſtulatum deſcribatur. Vel, Ex puncto dato deſcribatur primò circulus tãtus, ut rectam datam in duobus locis interſecet, à quo eodem puncto deinde ad interſectionũ loca duabus rectis lineis ductis, ſecetur uel angulus ad centrum, quem hæ duæ rectæ includunt: per nonam, uel latus eundem angulum ſubtendens, ſi magis placet: per propoſitionẽ 10, bifariam. Dico ergo quod hęc, uel angulũ uel latus, ſecans linea, ea ſit quæ petitur. Quoniam enim ad rectam hanc, quæ datæ rectæ inſiſtit, angulos æquales eſſe ipſa κατασκευή, et propoſitio 4, ſi angulus: uel & propoſitio 8, ſi linea data, ſeu latus bifariam diuiſum fuerit, demonſtrabũt. Et quoniam ſunt anguli deinceps ſe habentes, Quando autem recta rectæ inſiſtens, deinceps ſe habentes angulos æquales inter ſe fecerit: uterq; æqualium angulorum ex definitione, rectus eſt, ac inſiſtens, Perpendicularis uocatur, cum hæc recta ex puncto etiam dato procedat, propoſitioni iam ſatisfactũ erit. Super datã igitur rectam lineã ſatis longã, à dato puncto quod in ea non erat, Perpendicularis educta eſt, quod fieri oportuit.

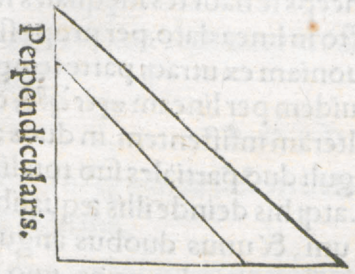
ALIVS MODVS DVCENDI *perpendicularem lineam.*



Eſt & tertius modus ducendi perpendicularem lineam, ex prima parte propoſitionis 31, tertij libri ſequentis deſumptus, eò ſpectans, ſi quando fortè ab alicuius rectæ extremitate ea ducenda eſſet. Huius itaque delineationem huc ponere libuit, maximè ob id, quod præter hos modos, non puto præterea alium eſſe modum erigendi perpendicularem lineam.

APPENDIX.

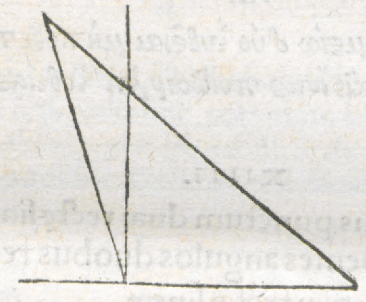
Ex præmiſſis duabus propoſitionibus diſcetur, quomodo triangulum orthogonium formari debeat. Poſteaquam enim perpendicularis ad rectam ducta eſt, ſi deinde huius extremitas, uel punctum aliquod in ea, cum data recta, uel ſimiliter eius puncto aliquo, coniungatur: triangulum rectangulum deſcriptum erit, ſic:



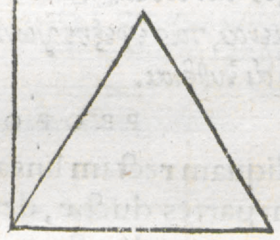
De Obtuſiangulo autem & Acutiangulo, quomodo formentur, ſi illorum angulos, à quibus denominata ſunt, quis animaduerterit, non erit laborioſum facere, cum nullam ſingularem induſtriam hæ delineationes requirant, id quod ex ſequẽti cuiuſq; deſcriptione apparet.

Triangulum

Amblygonium



Oxygonium



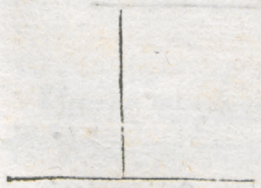
ΠΡΟΤΑΣΙΣ IΓ.

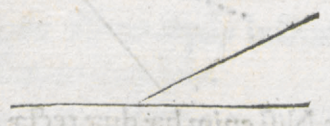
Ὡς ἂν εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα, γωνίας ποιῇ, ἤτοι δύο ὀρθὰς, ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσει.

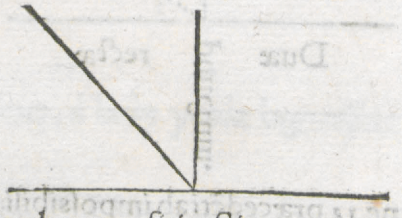
PROPOSITIO XIII.

Cũ recta linea ſuper rectam conſiſtens lineã, angulos fecerit: aut duos rectos, aut duobus rectis æquales faciet.

Conſiſtat recta ſuper rectam lineam, angulos faciens: dico illos eſſe, aut utrunq; rectum, aut ambos ſimul duobus rectis æquales. Nam linea inſiſtens rectæ alij, faciet deinceps ſe habentes angulos aut inter ſe æquales, aut uerò inæquales. Quòd



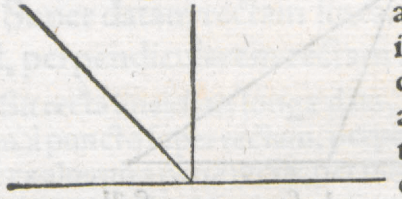




ſi ęquales: uterq; ex definitione, rectus erit, id quod uult propoſitio. Sin uero inæquales, quia tamen unus tanto interuallo rectum excedit, quanto alter recto minor eſt (id quod linea à puncto in recta ſumpto, πρὸς ὀρθὰς educta commonſtrabit) propter exceſſus & defectus æqualitatem, iam hi duo anguli, licet non recti per ſe, tamen duobus rectis æquales ſunt, id quod & ipſum habet propoſitio. Vnde ſic patet ipſa tota. Si recta igitur linea ſuper rectam conſiſtens lineam angulos fecerit, aut duos rectos, aut duobus rectis angulis æquales faciet: quod demonſtraſſe oportuit.

ALIA EIVS QVO IN PROPOSITIONE *dicitur, Aut duobus rectis æquales, demonſtratio.*

Quòd ſi recta inſiſtẽs rectæ alij, angulos deinceps ſe habẽtes inęquales fecerit, tũ ex cõmuni linearum contactu, tanquã ex puncto in linea dato, per propoſitionẽ 11 huius, ad angulos rectos linea excitetur. Et quoniam ex utraq; parte ſemper unus angulus, hic quidem per lineam πρὸς ὀρθὰς ductam: illic uero, per alteram inſiſtentem, in duos angulos diuiſus eſt: ſinguli duo partiales ſuo totali angulo æquales erunt. atq; his deinde illis æqualibus additis, ſicut duo uni, & unus duobus angulis accedat: tres anguli tribus æquales erunt, uno tandem communi angulo, qui nimirum ſub perpendiculari & alia inſiſtente comprehẽditur, hic & illic ablato: duo anguli duobus æquales erunt. Quia autem duo ex una parte recti ſunt: ex altera parte duo, quos nimirum recta, non ad rectos angulos ducta, & ea cui inſiſtit, comprehendunt, duobus rectis angulis ęquales erunt. Si recta igitur linea ſuper rectã cõſiſtens angulos fecerit, & cęt. quod demõſtrari oportuit,



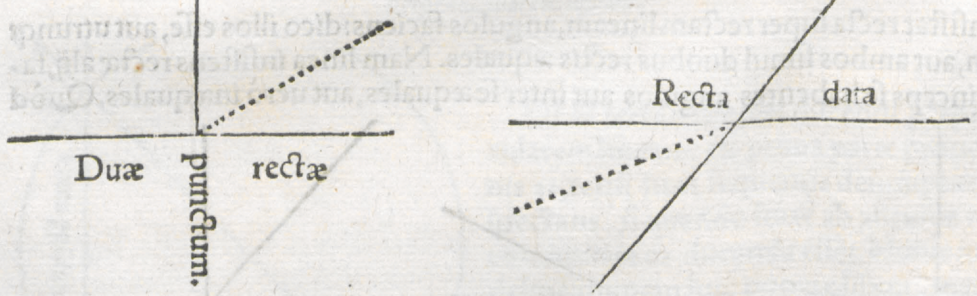
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ.

Ἐὰν πρός τινι εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δύο εὐθεῖαι μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ' εὐθείας ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

PROPOSITIO XIIII.

Si ad aliquam rectam lineam, atq; ad eius punctum duæ rectę lineæ, nõ ad eaſdem partes ductæ, deinceps ſe habentes angulos duobus rectis æquales fecerint: in directum erunt inter ſe ipſæ rectæ lineæ.

Sit quædam recta linea, ad eius etiam unum aliquod punctum, duæ rectæ linę non ad eaſdem partes ductæ, ſic tamen, ut cum priori recta, angulos duobus rectis æquales faciant: dico quòd, quæ ad punctũ ſunt ductæ rectæ lineę, ad amuſsim una alteri iuncta ſit. Colligit ſuam demonſtrationem hæc propoſitio ex propoſitione 13 præcedẽti ab impoſsibili, ſic. Niſi enim hæ duæ rectæ, ad punctum prioris rectæ ſic ductæ, una linea ſint, ſi fortè ab aliquo minus credente, atq; ſubtili nimis homine, una ductarũ ſuo modo ſecundum continuationem in rectum eiecta fuerit, per præcedẽtem 13, & illam deinde communem noticiam, Si ab æqualibus æqualia, uel aliquod commune (quod idem eſt) ſubtrahatur, & cæ. inferri poſſet, partialẽ æqualem eſſe angulo ſuo totali. Sed quia hoc eſt contra rationem & notitiam quãdam communem, quæ ſonat, Totum eſſe qualibet ſua parte maius. Non igitur continuari poteſt iuxta hoc punctũ in directũ aliter, neq; illa, cum qua iam hoc tẽtatũ eſt, neq; etiã ducta recta altera: quare hæ duæ in directũ iunctæ ſunt. Si ad aliquã igitur rectam lineam, atq; ad eius punctum, duæ rectę lineæ, non ad eaſdem partes ductæ, deinceps ſe habentes & cæ. quod demonſtrari oportuit.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας· τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιήσουσι.

PROPOSITIO XV.

Si duę rectę lineæ ſeſe mutuo ſecuerint: ad uerticem angulos æquales inter ſe faciunt.

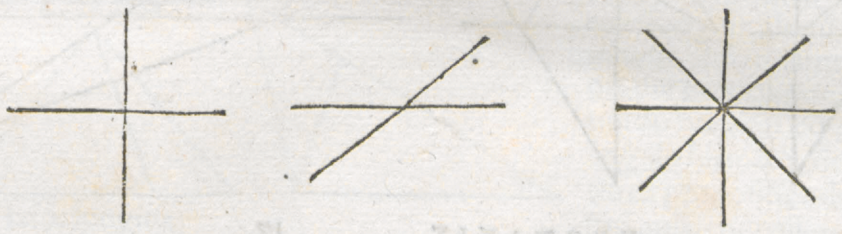
Sint duæ rectę lineæ ſeſe mutuo ſecantes: dico, quòd anguli ad uerticem ſint inter ſe æquales. Eſt huius propoſitionis demonſtratio, propoſitio 13 præcedens, cũ per eam recta rectę lineę inſiſtens, ſemper duos angulos aut rectos, aut duobus rectis ęquales faciat. Quare hac propoſitione bis uſurpata, Cum quę uni ęqualia: illa & inter ſe ęqualia ſint, communi angulo ab his ęqualibus ablato: anguli tandem κατὰ κορυφὴν ęquales manebũt. Si duę igitur rectę lineę ſeſe mutuo ſecuerint: ad uerticem angulos ęquales inter ſe faciunt, quod demonſtraſſe oportuit.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν· ὅτι καὶ ὅσαι δήποτ' οὖν εὐθεῖαι τέμνωσι ἀλλήλας· τὰς πρὸς τῇ τομῇ γωνίας τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσουσι.

COROLLARIVM.

Hinc manifeſtum eſt, Quotquot rectas lineas, in eodẽ plano ſeſe mutuo interſecantes: angulos efficere quatuor rectis ęquales.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙϚ.

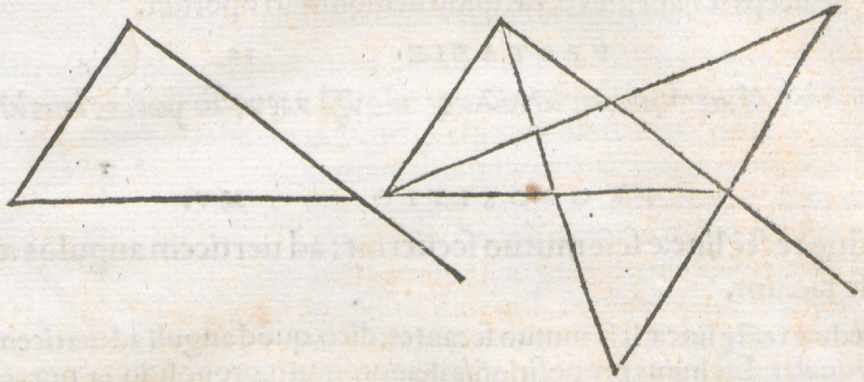
Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν ἐκβληθείσης, ἡ ἐκτὸς γωνία ἑκατέρας τῶν ἐντὸς, καὶ ἀπεναντίον, μείζων ἐστίν.

PROPOSITIO XVI.

Omnis trianguli uno latere producto: externus angulus utroq; interno, & oppoſito, maior eſt.

Sit triãgulum, productum etiam ulterius unum eius latus: dico, qui ſic fit externus angulus, eum utroq; interno, & ex oppoſito conſtituto, maiorem eſſe. Secentur duo latera trianguli, quę ſunt ad angulũ externũ, bifariam, deinde per diuiſionũ puncta, ab angulis, quos hęc eadem latera ſubtendunt, lineæ rectę ultra triangulũ ducantur,

ducantur, ſic, ut utriuſq; externa, ſuæ ſit internæ portioni ęqualis. Extremitatibus tandem harum rectarum cum puncto, quod eſt duarum diuiſarum communis terminus, duabus rectis lineis cõnexis, demonſtrationis figura parata erit. Qua nunc diligenter perſpecta, propoſitionum decimæ quintæ & quartæ memor, rem ita ſeſe habere facile perſpiciet.

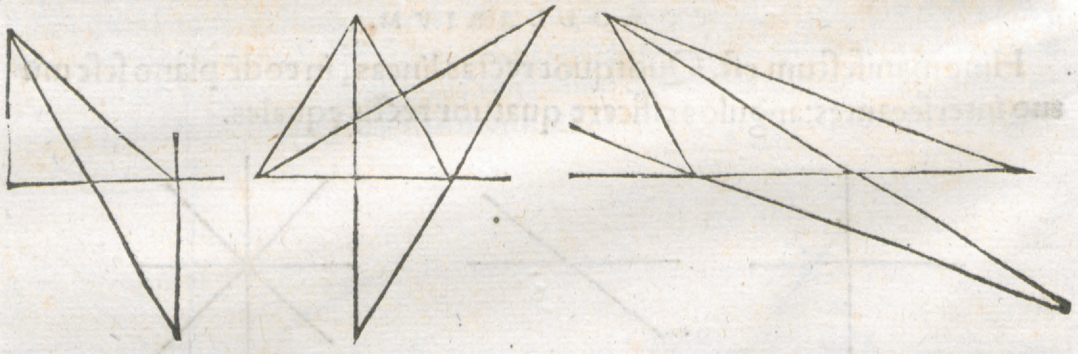


ADMONITIO.

Oportet autem, ut pro utroq; interno & oppoſito angulo, quo nimirum externus maior eſſe demonſtrari debeat, duo partialia triangula ſumantur, quorum alterum quidem angulum illum, de quo agitur, integrum habet: alterum deinde, quod huic ad uerticem iunctum eſt, tum demum propoſitionibus allegatis res ſucceſſum habebit, quod indicare neceſſe erat.

SEQVITVR GEOMETRICA FIGVRA alia, pro triangulo

orthogonio & iſoſ. oxygonio & æquilat. amblygonio & ſcaleno.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ.

Παντὸς τριγώνου, αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι, πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

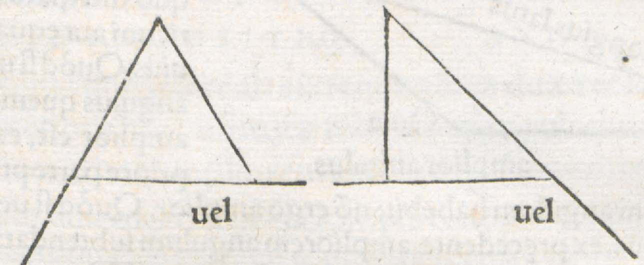
PROPOSITIO XVII.

Omnis trianguli, duo anguli duobus rectis minores ſunt, omnifariam ſumpti.

Propoſito triãgulo qualicũq;: dico, quoslibet eius duos angulos, duobus rectis minores eſſe. Producat̃ quoduis eius unũ latus ulterius. Et quoniã ex iam pręmiſſa 16 propoſitione, angulus externus utroq; interno & oppoſito maior eſt, & rurſus quoniam ex communi quadam notitia, Si inæqualibus æqualia, uel aliquod commune adiectũ fuerit, ipſa tota inęqualia ſunt: priorũ inæqualiũ utriq; angulus, qui eſt externo

---

eſt externo ἐφεξῆς adiectus, & tota tandem inter ſe inæqualia eſſe conueniet: atque illud quidem maius, ubi ſcilicet eſt externus angulus: alterum uerò, duo nimirum interni anguli, minus. Maius autem, cum ex propoſitione 13, duobus rectis angulis ęquale ſit: alterum nũc, ut qui ſunt duo interni anguli, propter anguſtiam, duobus rectis angulis minus erit. Et quoniam hoc nũc de duobus ad placitũ ſumptis angulis, quod ipſi duobus rectis minores ſint, demonſtratum eſt: de ſingulis duobus amplius nullum dubium erit, quin & ipſi duobus rectis minores ſint, ſubinde tamen alio atq; alio latere ulterius producto. Omnis igitur trianguli duo anguli, & quæ ſequuntur, quod demonſtraſſe oportuit.



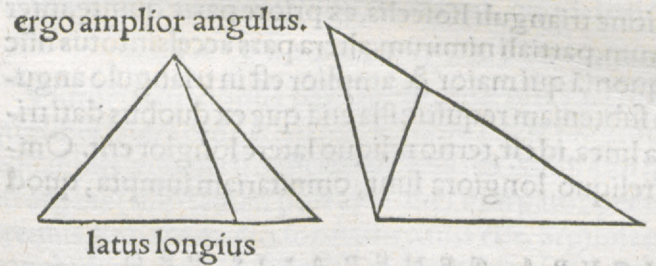
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΗ.

Παντὸς τριγώνου, ἡ μείζων πλευρὰ τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει.

PROPOSITIO XVIII.

Omnis trianguli, longius latus ampliorem angulum ſubtendit.

Sententia eſt propoſitionis. Quod latus alicuius trianguli eſt longius: illius etiã angulum quem ſubtendit, breuioris ſubtendentis angulo ampliorem eſſe. Deſcribatur igitur triangulum, duum æqualiũ, uel trium inęqualium laterum: dico quòd, cuius anguli eſt latus longius, illum etiã ampliorem eſſe. Duorum angulorũ latera, cum ex hypotheſi, unum eorum longius, alterũ uero breuius ſit, abſcindatur de longiori, per propoſitionẽ 3 huius, portio breuiori æqualis, ac triangulo formato, demonſtratio ex propoſitionibus 5 et 16 præmiſsis ſic colligetur. Quoniam formatũ triangulũ cum ſit ex ſtructura Iſoſceles: erunt ipſius ad baſim anguli inter ſe æquales. ſed quia unus horũ æqualiũ, eſt alterius cuiuſdã triãguli externus, unde ſic utroq; interno eiuſdẽ triãguli & oppoſito, maior: & alter ęqualium eodẽ interno angulo maior erit. Alter autem cum ſit eius, quem longius latus ſubtendit anguli pars, internus uerò is qui à breuiori latere ſubtenditur, argumento à maiori uel fortiori ſumpto, ſi pars maior illo eſt: multo fortius igitur ipſum totum. Omnis igitur trianguli, longius latus ampliorem angulum ſubtendit: quod demonſtrari oportuit.



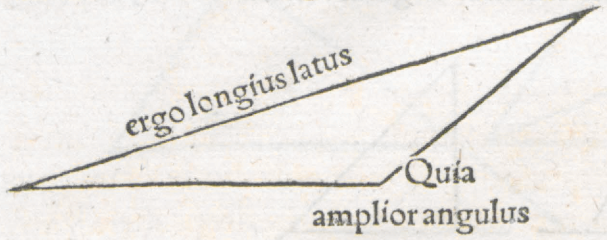
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΘ.

Παντὸς τριγώνου, ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει.

PROPOSITIO XIX.

Omnis trianguli, amplior angulus ſub longiori latere ſubtenditur.

Sententia eſt propoſitionis. Qui angulus alicuius trianguli eſt amplior: illius etiam ſubtenſum latus anguſtiorem angulum ſubtendente latere longius eſſe. Nam ſi non fuerit longius illud, de quo dicit̃, latus, erit id reliquorũ uni aut ęquale, aut uno breuius. Quòd ſi uni ęquale fuerit: angulus quem ſubtendit, atqꝫ amplior eſt, ex hypotheſi, ex priore parte propoſitionis 5, ſibi alium æqualem angulum habebit: nõ ergo amplior. Quòd ſi uerò uno breuius, cum latus longius, ex pręcedente, ampliorem angulum ſubtendat: angulus qui poſitus eſt amplior, iã uno eorũ, illo ſcilicet cuius longius eſt ſubtenſum latus, anguſtior erit. Sed quia non eſt: neqꝫ etiam eius latus alio breuius erit: longius ergo. In omni igitur triangulo amplior angulus longius latus requirit, ſeu ſub longiori latere ſubtenditur, quod demonſtraſſe oportuit.



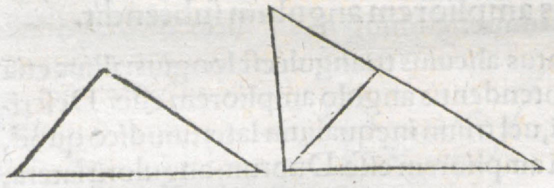
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Κ.

Παντὸς τριγώνου· αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι, πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

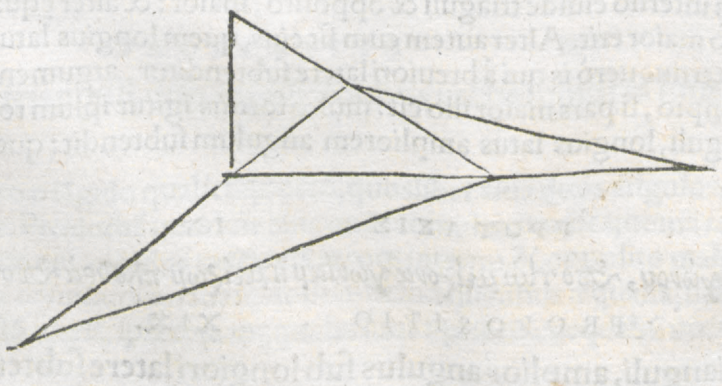
PROPOSITIO XX.

Omnis trianguli, duo latera reliquo longiora ſunt, omnifariã ſumpta.

Eſto triangulum qualecunqꝫ: dico, quòd eius qualitercunqꝫ ſumpta duo latera ſimul, tertio reliquo longiora ſint. Horum duorum laterum, quæ demonſtrari debeant, quòd tertio reliquo longiora ſint, unum ad longitudinem lateris alterius, ex illa parte ubi eſt communis eorum copula, ultra triangulum continuatur, quẽ deinde hæc duo æqualia, uel hæ duæ ęquales rectæ lineæ comprȩhẽdũt angulum, is tertia quadam linea recta, ut triãgulum fiat, claudatur. Et quoniam illi duo anguli, qui ratione trianguli Iſoſcelis, ex priore parte quintę, inter ſe ęquales ſunt, mox ubi uni eorum, partiali nimirum, altera pars acceſsit: totus nũc altero æqualiũ maior erit. Sed quoniã qui maior & amplior eſt in triangulo angulus, longiorẽ ex propoſitione 19 ſubtenſam requirit: illa etiã quę ex duobus dati trianguli lateribus cõtinuata eſt, ea linea, id eſt, tertio reliquo latere longior erit. Omnis igitur trianguli duo latera reliquo longiora ſunt, omnifariam ſumpta, quod demonſtraſſe oportuit.



SEQVITVR FIGVRA GENERALIS PRO *ſingulis binis lateribus expoſita.*



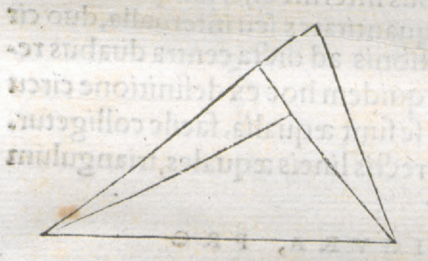
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΑ.

Εαν τριγώνου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν ἀπὸ τῶν περάτων δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συσταθῶσιν· αἱ συσταθεῖσαι τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ἐλάττονες μὲν ἔσονται, μείζονα δὲ γωνίαν περιέξουσι.

PROPOSITIO XXI.

Si ſuper trianguli uno latere ab extremitatibus duæ rectæ lineæ interius conſtitutæ fuerint: hę conſtitutæ reliquis trianguli duobus lateribus breuiores quidem erunt, ampliorem autem angulum comprehendent.

Eſto triangulum, duæ etiam rectæ lineę, in ipſo concurrentes, ſuper unius lateris extremitatibus conſtitutæ: dico, quòd conſtitutæ hæ reliquis duobus trianguli lateribus breuiores ſint, ampliorem autem angulũ compræhendunt. Sunt huius propoſitionis duæ partes. Prior, quod interiores duæ rectæ exterioribus breuiores ſint, id quod patet ex pręcedenti bis uſurpata, cum per eam, duo quælibet latera uniuſcuiuſque trianguli, tertio longiora ſint, & communi tandem illa notitia, Si ab æqualibus æqualia, uel aliquod commune, ſubtrahatur &cæ. Oportet tamen, ut prius ex interioribus lineis alterutra in continuum et rectum, ad latus uſque exterius producatur, utqꝫ triangula illa duo partialia, quorum unius quidem unum latus, linea exterior: alterius uero trianguli unum, alterius exterioris lineæ pars, latus unum fuerit, ſumantur, & ſuccedet demonſtratio. Poſterior nunc, quod angulus ſub interioribus eo, quem exteriores rectæ lineæ comprehendunt, maior ſit, ex propoſitione 16, & illa bis uſurpata, uera eſſe cõuincitur. Super uno igit̃ alicuius trianguli latere ad extremitates eius duę rectæ interius cõſtitutę: reliquis duobus trianguli lateribus breuiores quidem ſunt, ampliorem autem angulum comprehendunt, quod demonſtraſſe oportuit.



ALIA PRIORIS PARTIS DEMONSTRATIO.

Vſurpatis triangulis partialibus, quæ prius. Et quoniam, ex præcedenti 20, duo quælibet latera omnis trianguli, tertio latere longiora ſunt, & quoniam etiam, Inæqualibus æqualia ſi adijciantur: tota, ex communi quadã notitia, inæqualia ſunt, utroqꝫ bis (uno tamen poſt alterum) uſurpato, per id demũ quod dicitur, Longo breuius, lõgiore multo fortius breuius eſſe, argumento nimirum à maiori ſumpto, concluditur tandẽ propoſitum, Interiores ſcilicet duas exterioribus duabus, ſiquidem ſecundum propoſitionis hypotheſes conſtitutæ ſint, breuiores eſſe. quod demonſtrari oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΒ.

Ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις εὐθείαις, τρίγωνον συστήσασθαι. Δεῖ δὴ τὰς δύο τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι, πάντῃ μεταλαμβανομένας, διὰ τὸ καὶ παντὸς τριγώνου τὰς δύο πλευρὰς, τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι, πάντῃ μεταλαμβανομένας.

PROPOSITIO XXII.

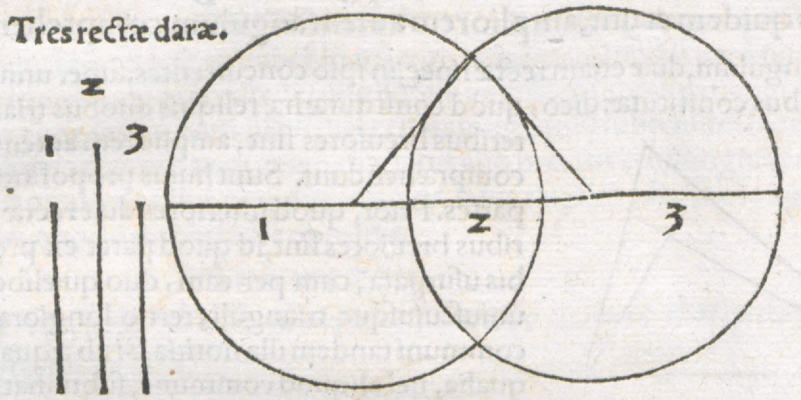
Ex tribus rectis lineis, quæ ſunt tribus datis rectis lineis ęquales, triangulum conſtituere.

CAVTIO.

Oportet autem duas reliqua longiores eſſe, omnifariam ſumptas, propterea quòd uniuſcuiuſcꝫ triãguli duo latera, reliquo longiora eſſe oporteat, omnifariam ſumpta.

Datis tribus rectis lineis, quarum quæcꝫ duę reliqua tertia longiores ſint, propo
ſitum eſt, ex aliꝭs tribus rectis, quæ ſunt datis tribus æquales, triangulum conſtitu-
ere. Ducatur igitur linea recta ſatis longa, ut quæ propoſitas rectas, adamuſsim cō-

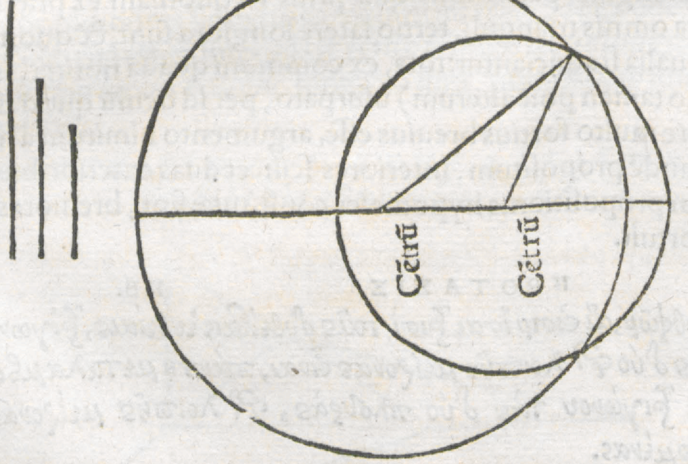
Tres rectæ datæ.



tinuatas, longitudine excedat. Hoc facto, portiones in ea, tribus datis rectis, ſingu-
læ ſingulis, æquales, ordine quo maximè placuerit, per 3 propoſitionem huius, ſe-
paratim punctis ſignentur, ex pūctis deinde duobus intermediꝭs, tanquam ex du-
obus centris, ſecundum extremarum portionum quantitates ſeu interualla, duo cir
culi deſcribantur, atcꝫ à puncto tandem interſectionis ad dicta centra duabus re-
ctis lineis ductis, propoſitioni ſatisfactum erit, ut quidem hoc ex definitione circu
li & illa communi notitia, Eidem æqualia, & inter ſe ſunt æqualia, facile colligetur.
Ex tribus igitur rectis lineis, quæ ſunt tribus datis rectis lineis æquales, triangulum
conſtitutum eſt, quod feciſſe oportuit.

ALIA GEOMETRICA FIGVRA, PRO *triangulo ſcaleno conſtituendo.*

Tres rectæ datæ.



APPENDIX.

Ex hac propoſitione addiſcuntur trium triangulorū, Aequilateri ſcilicet, Iſoſce-
lis & Scaleni, delineationes: cum prima unius tantum, Aequilateri ſcilicet, formati
onem nobis propoſuerit. Habentur ergo ſic omnium triangulorum delineationes,
hic quidem

---

hic quidem, eorum qui ſecundum diuerſitatem laterum nomina ſua ſortiuntur: illic uerò, nimirum circa 11 & 12 propoſitiones, ubi de Perpendiculari ducenda ſermo erat, prout conſiderantur hæc, & nomina ſua habent ab angulis, quod obiter dicere uolui.

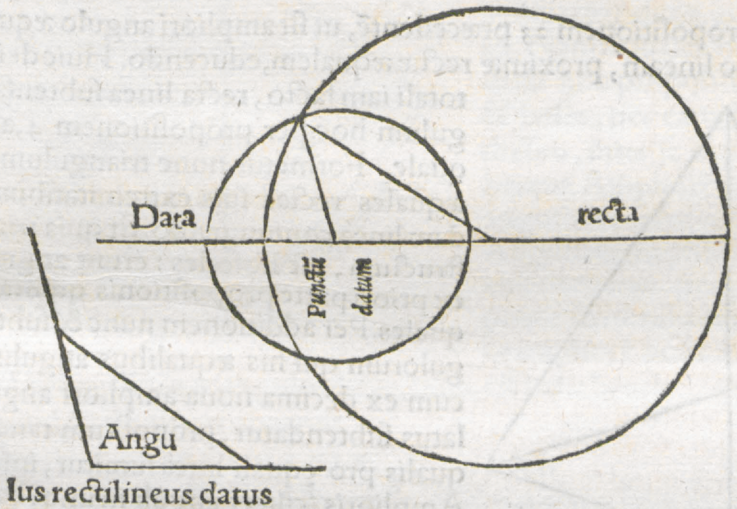
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΓ.

Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ, τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ, ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι.

PROPOSITIO XXIII.

Ad datam rectam linęam, datum'cꝫ in ea punctum, dato angulo rectilineo, æqualem angulum rectilineum conſtituere.

Sit recta linea data, punctum etiam in ea datum: ſitcꝫ deinde & angulus quidā rectilineus datus, atcꝫ propoſitum, ad id punctum ad hanc item rectam lineam, dato rectilineo æqualem rectilineum angulum conſtituere. Subtendatur primò dato angulo recta quædam linea, quomodocuncꝫ hoc fiat, ut appareat triangulum, ad



datam rectam deinde, ſecundum quantitatem trium rectarum, quæ ſunt tribus formati iam trianguli lateribus æquales, triangulum, per propoſitionem 22 premiſſam, conſtituatur, ſic tamen, ut quę datum angulum comprehendunt latera, eorum portiones uel lineæ æquales, in data recta iuxta punctum ſignentur, et factum erit. Colligitur autem huius rei demōſtratio ex ſtructura, communi illa noticia, Eidem æqualia, & inter ſe ſunt æqualia, propoſitione tandem octaua huius, quod indicandum erat. Ad datam igitur rectam lineam, datumcꝫ in ea punctum dato angulo rectilineo, æqualis angulus rectilineus conſtitutus eſt. quod fieri oportuit.

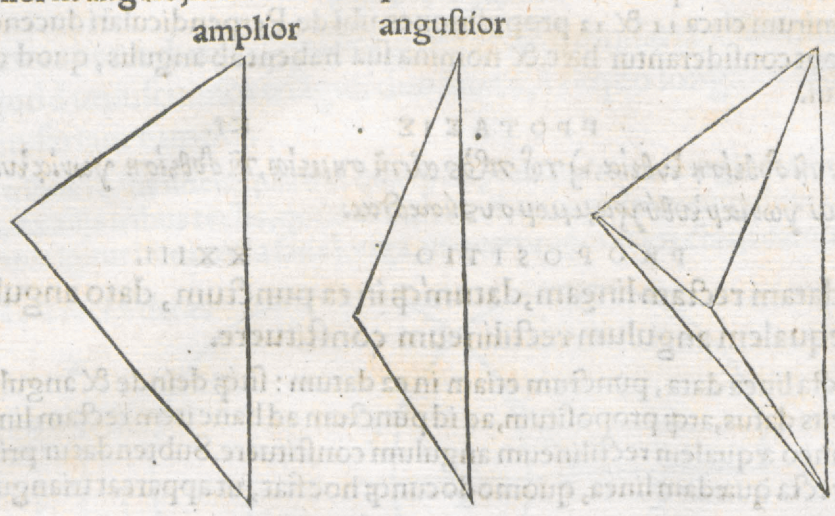
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΔ.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔχῃ, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην· καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἕξει.

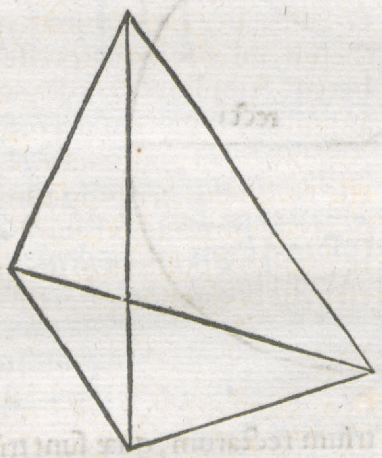
PROPOSITIO XXIIII.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus ęqualia habuerint, utrūque utricꝫ, habuerint uerò angulum angulo ampliorem, eum qui ſub æqualibus rectis comprehenditur: & baſim baſi longiorem habebunt.

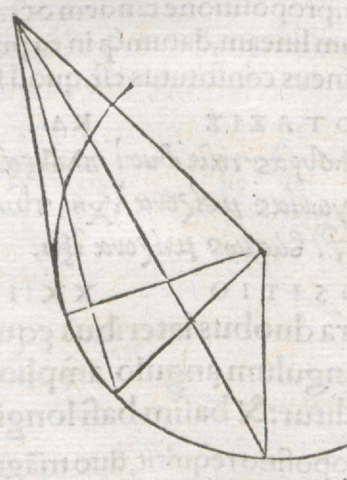
Sint huiuſmodi qualia hæc propoſitio requirit, duo triãgula: dico baſim illius trianguli, quod ſub ęqualibus rectis ampliorem cōprehendit angulum, alterius trianguli baſi longiorem eſſe. Cum enim, ex hypotheſi, angulus inter æqualia latera in uno amplior ſit angulo, itidem inter æqualia latera, in triangulo altero, ille qui minor eſt, per propoſitionem 23 præcedentē, ut ſit ampliori angulo æqualis, augeatur, ab angulo lineam, proximæ rectæ æqualem, educendo.



Huic deinde angulo totali iam facto, recta linea ſubtenſa: erit triangulum hoc, per propoſitionem 4, alij poſito æquale. Formetur nunc triangulum aliud, duas æquales rectas ſuis extremitatibus recta quadam linea coniungendo. Et quia triangulum, ex ſtructura, eſt Iſoſceles: erunt anguli ad baſim, ex priori parte propoſitionis quintæ, inter ſe æquales. Per additionem nunc & ſubtractionē angulorum qui his æqualibus angulis adhærent, cum ex decima nona ampliori angulo longius latus ſubtendatur, propoſitum tandem, ubi æqualis pro ęquali linea ſumitur, inferri poterit: Amplioris ſcilicet anguli in uno, baſim longiorem eſſe, quàm ſit baſis in altero triãgulo anguli anguſtioris, quod demonſtraſſe oportuit.



SEQVITVR FIGVRA PRO TRIANGVLIS TRIbus *expoſita, necnon ex tertio Euclidis libro deſumpta.*



APPENDIX.

Potuiſſet etiam econtrario, maior angulus, in ſtructura, & id per propoſitionem uigeſimam tertiam præcedentem, ad æqualitatem minoris formari, & idem fuiſſet.

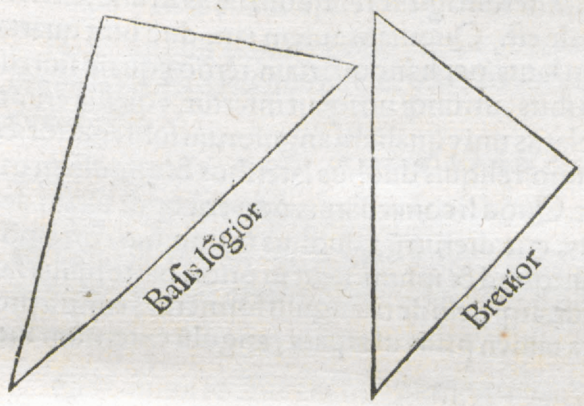
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΕ.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν βάσιν δὲ τῆς βάσεως μείζονα ἔχῃ· καὶ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἕξει, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.

PROPOSITIO XXV.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus ęqualia habuerint, utrũque utrique, habuerint uerò baſim baſi longiorem: & angulum angulo ampliorem habebunt, eum quem æquales rectæ lineæ comprehendunt.

Sint huiuſmodi, qualia hæc propoſitio requirit, duo triangula: dico, cuius trianguli baſis eſt longior, illius etiam angulum, quem æquales rectæ comprehendunt, ampliorem eſſe. Nam æquales ne ſint anguli, uetat hoc propoſitio 4, cum ſic & baſes, per eam, contra hypotheſim, inter ſe æquales eſſe deberent. Ampliorē deinde poſitũ anguſtiore minorem, uel contrà, Anguſtiorem poſitum ampliore eſſe maiorem, per propoſitionē præcedentē nõ admittitur. Quare ampliorē poſitum in uno, propter longiorē baſim, illo in triangulo altero, cuius eſt baſis breuior, ampliorem eſſe neceſſe eſt, quod demonſtrari oportuit.



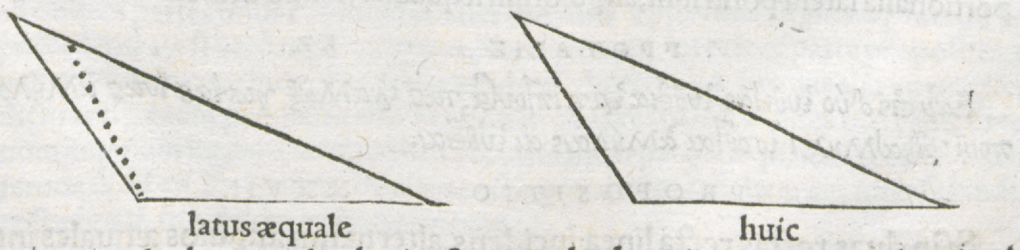
ΠΡΟΤΑΣΙΣ κϛ.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, ἤτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν· καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ,

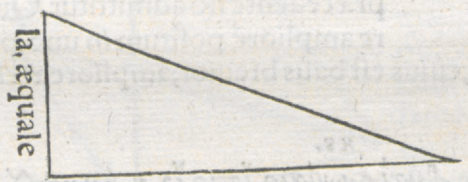
PROPOSITIO XXVI.

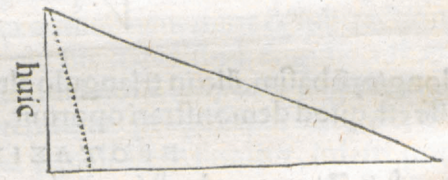
Si duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, utrunq; utriq;, unũq; latus uni lateri æquale, ſiue id quod eſt inter ęquales illos angulos, ſeu quod uni ęqualium angulorum ſubtenditur: & reliqua latera reliquis lateribus æqualia, utrunq; utriq;, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.

Sint huiuſmodi, qualia hæc propoſitio requirit, duo triangula, ubi ſcilicet duo anguli unius, duobus angulis alterius ſint æquales, latus item unius unũ, lateri uni



alterius trianguli, ſiue id quod ęqualibus angulis interijcitur, ſiue reliquorum alterum fuerit, æquale: dico quòd & reliqua latera reliquis lateribus, utrunqꝫ utriqꝫ, atque etiã reliquus angulus reliquo angulo æqualis ſit. Quantũ ad primum, ubi ſcilicet ęquale latus ęqualibus angulis interiectum eſt, ſi alterutrum ex reliquis non concedatur ſuo correſpondenti lateri in altero triangulo eſſe ęquale, ut ei inęquale ſit, certe concedendum erit. à longiori igitur (ut quidem ſuo modo fieri poterit) ex parte reliqui tertij anguli, per propoſitionem tertiam, portio, breuiori lateri ęqualis, abſcindatur: & à puncto tãdem ſectionis ad angulum cui hoc latus ſubtenſum eſt, linea recta ducatur. Deſcribitur autem ſic triangulum quoddam partiale aliud, quod, quia ſuo totali triangulo ſuperponitur, per propoſitionẽ deinde quartã, alij poſito triangulo ęquale eſt, infertur tandem per illam communem noticiam, Quæ uni ęqualia & cę. partialẽ angulum ſuo totali, uel contrà, totalẽ ſuo partiali angulo eſſe ęqualem, quod eſt impoſſibile. Alterum igitur reliquum latus in uno, alteri reliquo lateri in triangulo altero æquale eſt. Quoniam autem iam duo ſunt quartæ propoſitionis triangula, cum tertium latus, per hanc quartam, tertio ęquale ſit: reliqua duo latera reliquis duobus lateribus, utrunqꝫ utriqꝫ, ut infertur, ęqualia erunt. Quantum ad ſecundum, ubi ęquale latus uni ęqualium angulorum ſubtenditur: & hic reliqua duo latera & angulus in uno, reliquis duobus lateribus & angulo in triangulo altero ęqualia eſſe colligetur. Quod ſi concedatur, non erit opus ullam demonſtrationem adducere. Sin minus, erit alterutrũ è duobus in uno, ſuo correſpõdenti latere in altero triangulo lõgius: quod & ipſum, ſicut in priori parte huius factũ, ad ęqualitatem alterius ſi ponatur, atqꝫ deinde triangulũ formetur, contra propoſitionem decimam ſextam, quarta tamen prius uſurpata, angulũ externum ſuo interno oppoſito æqualẽ eſſe, ei qui hoc contradicit, obijciet. Quare qua ſanè ratione, quantũ ad latera, cõtrariũ quis inferre tentauerit, irridendũ ſe exponet. Quòd preterea & angulus reliquus reliquo angulo ſit ęqualis, id ex propoſitione 4 uel 8 habetur. Si igitur duo triangula duos angulos duobus angulis ęquales habuerint, utrunqꝫ utriqꝫ, unumq́ꝫ latus, uni lateri, & reliqua, quod demonſtraſſe oportuit.





ADMONITIO.

Neceſſe autem uidetur, ut primò quidem ea, quæ inter æquales angulos poſita ſunt, latera, ęqualia inter ſe eſſe, atqꝫ tum demum reliquorum duorum laterum, angulos nimirum ęquales ſubtendentium, æqualitas demonſtretur. Nam aliàs, ſi fortè hæc quæ ęquales angulos ſubtendunt latera, primò æqualia inter ſe eſſe demonſtrare quis conaretur, res fortè tardius ſucceſſura eſſet: id quòd obiter duxi indicandum. Idem ferè uſuuenit in propoſitione ſeptima libri ſexti, ubi non duorum reliquorum, hoc eſt tertiorum in triangulis angulorum, uerùm eorum qui inter proportionalia latera poſiti ſunt, angulorum æqualitas, primò demonſtranda eſt.

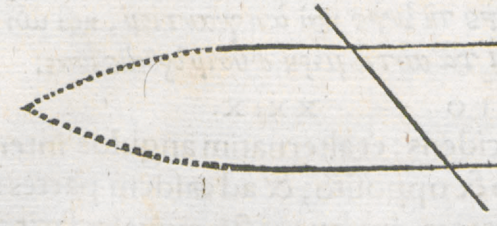
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΖ.

Εαν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα, τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ· παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

PROPOSITIO XXVII.

Si in duas rectas recta linea incidens, alternatim angulos æquales inter ſe fecerit: parallelæ erunt inter ſe ipſæ rectæ lineæ.

Cadat in duas rectas recta linea alia, eſto etiam quòd anguli qui ſic fiũt alternatim, ſint inter ſe ęquales: dico has duas rectas inter ſe parallelas eſſe. Nam ſi non: productæ hę et continuatæ, in aliqua parte concurrent, unde ſic angulus externus formati trianguli, per propoſitionẽ 16, interno oppoſito æqualis. Hoc autem quia eſt cõtra propoſitionis hypotheſim, non concurrũt ergo. Quę autem in eodem plano exiſtentes rectæ lineæ, in neutra parte concurrunt, ſi eiectæ & continuatæ fuerint, cum, ex definitione, parallelæ ſint: parallelæ ſunt & iſtæ ductę. Si in duas igitur rectas recta linea incidens alternatim angulos ęquales inter ſe fecerit: parallelæ erunt inter ſe ipſæ rectę lineæ: quòd demonſtraſſe oportuit.



DEFINITIO ANGVLORVM ἘΝΑΛΛΆΞ.

Porro anguli ἐναλλὰξ poſiti, quos Alternatim uertimus, ſunt, quos incidens recta cum rectis datis interius, in diuerſis partibus, atqꝫ ex oppoſito conſtituit & cõprehendit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΗ.

Εαν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα, τὴν ἐκτὸς γωνίαν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιῇ, ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῇ· παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

PROPOSITIO XXVIII.

Si in duas rectas recta linea incidens, externum angulũ interno & oppoſito, & ad eaſdem partes æqualem fecerit, aut internos & ad eaſdem partes duobus rectis æquales: parallelæ erunt inter ſe ipſæ rectæ lineæ.

Habet hęc propoſitio duas partes, quarum utraqꝫ ex ſua propria hypotheſi, duas illas lineas, in quas nimirum tertia cadit, parallelas eſſe infert. Prior autem patet ex pręcedenti, angulis, qui per propoſitionem 15 inter ſe ſunt ęquales, inter ſe mutatis. Poſterioris nunc demonſtratio ſic habetur. Quoniã enim recta rectę inſiſtens alij, et angulos faciens, ex propoſitione 13 aut duos rectos, aut duobus rectis ęquales angulos facit, & quoniam etiam, ex pręſenti hypotheſi, interni illi qui ad eaſdem partes ſunt anguli, duobus rectis ęquales ſunt, cũ tã illi duo, quos nimirum incidens cum alterutra rectarũ facit, quàm etiam hi, qui interius ex una & eadẽ parte appareãt anguli, duobus rectis, tanquã uni cuidam ęquales ſint: ex cõmuni quadã noticia, & illi duo his duobus angulis ęquales erũt: atqꝫ de utroque deinde, eo angulo, quem hęc duo ęqualia cõmunem habent, ſubtracto: & qui relinquuntur anguli, ex communi quadam noticia, inter ſe ęquales erunt. Quia autem reliqui hi aut ἐναλλὰξ anguli ſunt, aut uerò ad eaſdem partes unus externus & alter internus oppoſitus, ſi ἐναλλὰξ fuerint: ex præcedenti 27: ſi uerò unus externus, alter internus, ex priore parte propoſitionis huius, tandem concluditur propoſitum, has ſcilicet rectas, in quas alia eo modo, ut dictum eſt, cadit, parallelas eſſe. Si igitur in duas rectas recta linea incidens, externum angulum interno, & oppoſito, & ad eaſdem partes æqualem fecerit: aut internos & ad eaſdem partes, duobus rectis ęquales: parallelæ erunt inter ſe hæ duæ rectæ lineæ, quod demonſtraſſe oportuit.

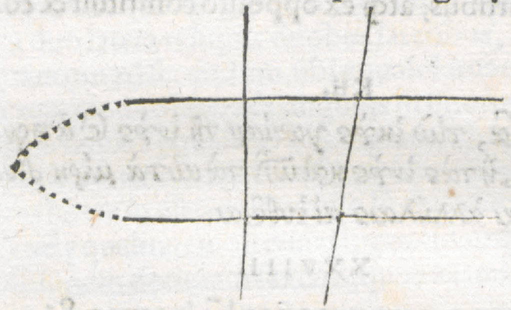
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΘ.

Η εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα· τάς τε ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ· καὶ τὴν ἐκτὸς τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην· καὶ τὰς ἐντὸς, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας.

PROPOSITIO XXIX.

In parallelas rectas recta linea incidens: et alternatim angulos inter ſe æquales efficit: & externum interno & oppoſito, & ad eaſdem partes æqualem: & internos, & ad eaſdem partes, duobus rectis æquales facit.

Sunt huius propoſitionis partes tres, quarum ſingulæ parallelas rectas lineas, & rectam deinde aliam, quę in illas parallelas utcunq; cadat, requirunt. Hinc itaq; prima quidem pars, angulos alternatim poſitos æquales: ſecunda uerò, externũ interno, & oppoſito atq; ad eaſdem partes, æqualem: tertia autem, ipſos internos ad eaſdem partes, duobus rectis angulis ęquales eſſe aſſerit. Prima pars ab impoſſibili ſic patet. Eſto enim quòd anguli ἐναλλὰξ ſint inter ſe inæquales. Et quoniã inęquales ſunt anguli ἐναλλὰξ, alter nimirum altero amplior; angulo igiť eo qui ampliori eſt ἐφεξῆς, ex æquo inæqualibus illis angulis addito: & ipſa tota, ex cõmuni quadam noticia, inter ſe æqualia erunt. Quia autem unũ eorum, maius ſcilicet, per propoſitionem 13, duobus rectis eſt æqualis, alterum quod minus eſt, duobus rectis angulis minus erit: ex illa igitur parte ubi minores duobus rectis ſunt anguli, hæ duæ rectæ, ex communi quadam noticia concurrent. Non concurrunt autem, cum ſint ex hypotheſi, rectæ parallelæ: neq; anguli etiam illi ἐναλλὰξ inęquales inter ſe erunt: æquales igitur eos eſſe, ut prima pars aſſerit, concedendum eſt. Quo nunc conceſſo, cum per propoſitionem 15 ad uerticem anguli ſint inter ſe æquales, ęquali nunc pro ęquali angulo ſumpto, uel illa cõmuni noticia, Quæ eidem æqualia, & inter ſe ęqualia ſunt: etiam angulus externus interno oppoſito, atq; in eadem parte ſumpto, ęqualis erit, quod eſt ſecundũ. Non aliter per propoſitionem 13, & hic æquali pro ęquali angulo ſumpto, tertię propoſitionis parti ſatisfieri poterit. In parallelas igitur rectas recta linea incidens, & quę ſequuntur, quod demonſtraſſe oportuit.

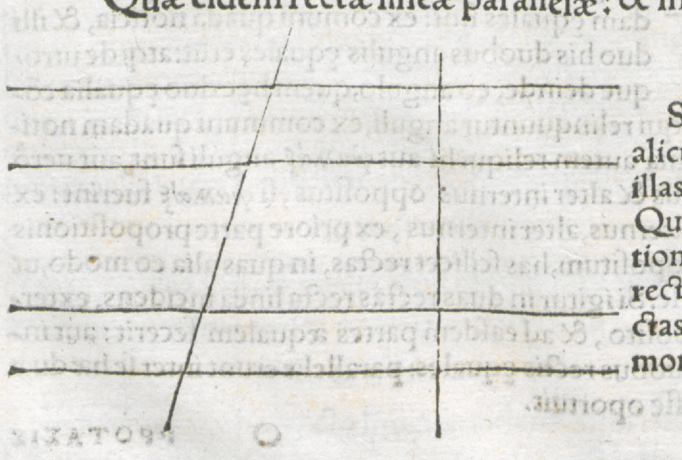


ΠΡΟΤΑΣΙΣ Λ.

Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι· καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι.

PROPOSITIO XXX.

Quæ eidem rectæ lineæ parallelæ: & inter ſe ſunt parallelæ.



Sint duæ uel plures rectæ uni alicui rectæ lineæ parallelæ: dico, illas & inter ſe parallelas eſſe. Quod quidem facile, ex propoſitionibus 29 & 27, uel 29 & 28, ſi recta prius alia in propoſitas rectas lineas utcunq; inciderit, demonſtrari poteſt.

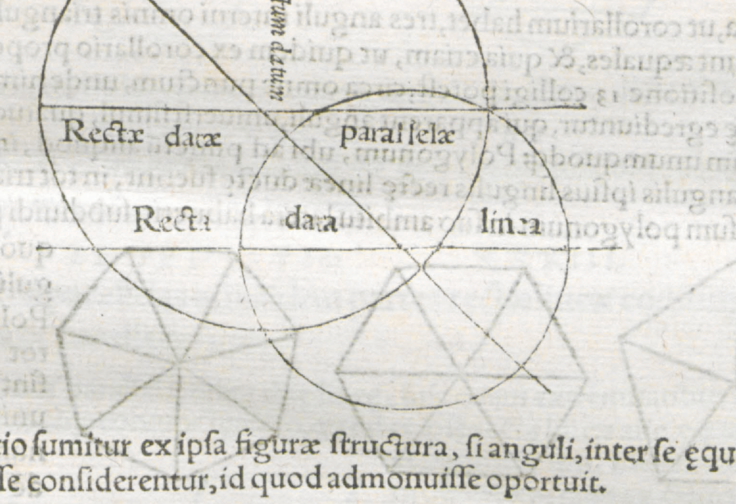
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΑ.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

PROPOSITIO XXXI.

A' dato puncto, datæ rectæ lineæ: parallelam rectam lineam ducere.

Sit punctum datum, recta etiam linea data, atq; propoſitum, à dato puncto educere rectam lineam, datæ rectæ parallelam. Signetur igitur in recta data punctum ubicunq;, à quo deinde ad punctum datum, recta quadam linea ducta, ad hanc lineam atq; ad punctum datum, angulorum modo deſcriptorum uni, uter is fuerit & eligatur, per propoſitionem 23, angulus æqualis conſtituatur. Quòd ſi tandem hæc ultimò ducta recta linea, uerſus alteram partem in rectum, prout quidem hoc propoſitio 14 requirit, continuata fuerit: propoſitioni ſatisfactũ erit, cum hæc quæ iam ducta eſt linea, ipſa ſit quæ quærebatur.



Demonſtratio ſumitur ex ipſa figuræ ſtructura, ſi anguli, inter ſe ęquales facti, ἐναλλὰξ poſiti eſſe conſiderentur, id quod admonuiſſe oportuit.

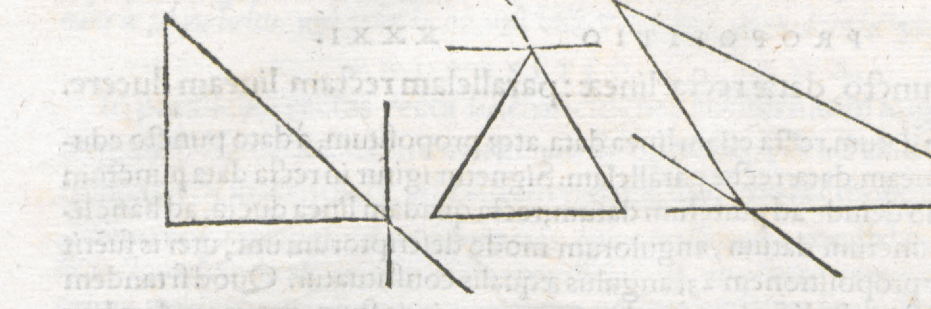
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΒ.

Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης, ἡ ἐκτὸς γωνία δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστί· Καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

PROPOSITIO XXXII.

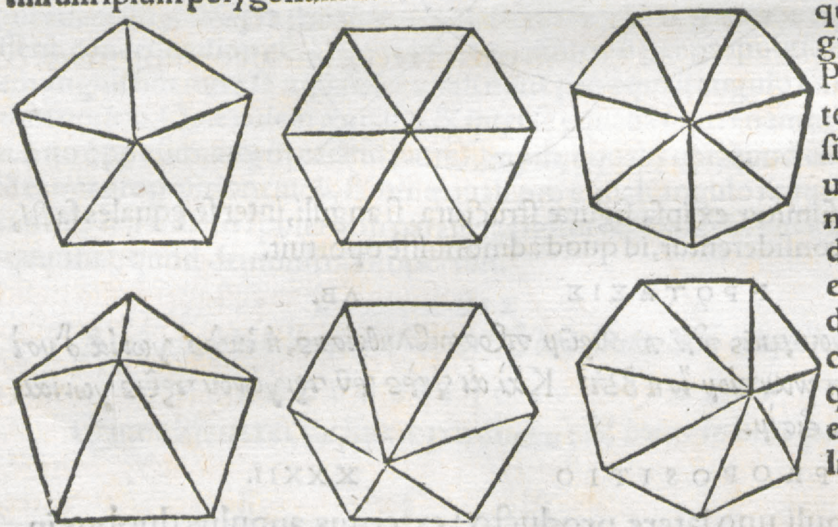
Omnis trianguli uno latere producto: externus angulus duobus internis & oppoſitis æqualis eſt. Et trianguli tres interni anguli, duobus ſunt rectis æquales.

Sit triangulum, productum etiam ulterius unum eius latus: dico, quòd angulus qui ſic fit externus, duobus internis & oppoſitis angulis ęqualis ſit. Et quod etiam ratione corollarij, ex hac ipſa & tredecima propoſitione deſumpti, Trianguli tres anguli interni, duobus rectis æquales ſint. Ducatur per angulum externum linea, trianguli tertio lateri parallela. Et quoniã in parallelas rectas lineas recta incidens, tam alternatim poſitos angulos, ex prima parte propoſitionis 29, inter ſe æquales, quàm etiam externum interno oppoſito, atq; in eadem parte conſtituto æqualem facit, ex ſecunda parte propoſitionis eiuſdem, cum æqualia æqualibus additis, tota etiam, ex communi quadam noticia, inter ſe æqualia ſint: ipſi propoſitioni iam ſatisfactum erit. Corollarij uerò demonſtratio, ex hac ipſa, & propoſitione præcedenti 13, unde nimirum illud deſumptũ eſt, intelligi poteſt, ſi interim ad horum duorum ęqualium utrunq;, tertium angulum interiorem reliquum, qui nimirum eſt externo ἐφεξῆς, aliquis aſſumpſerit. Omnis igitur trianguli uno latere producto: externus angulus duobus internis & oppoſitis ęqualis eſt. Et trianguli tres interni anguli, duobus ſunt rectis ęquales: quod demonſtraſſe oportuit.

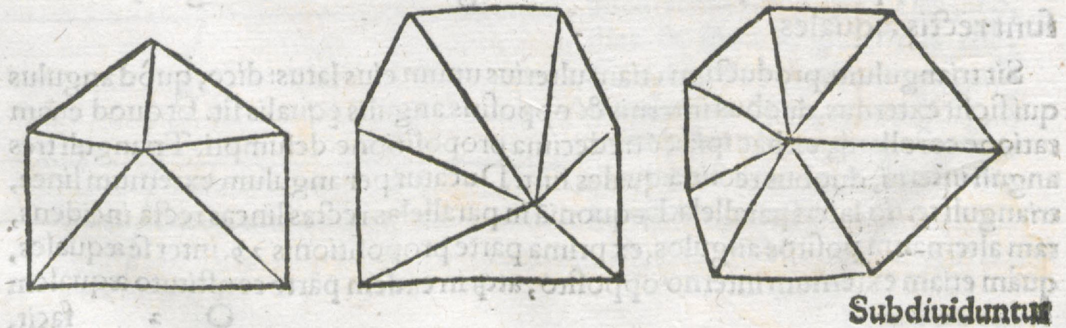


APPENDIX.

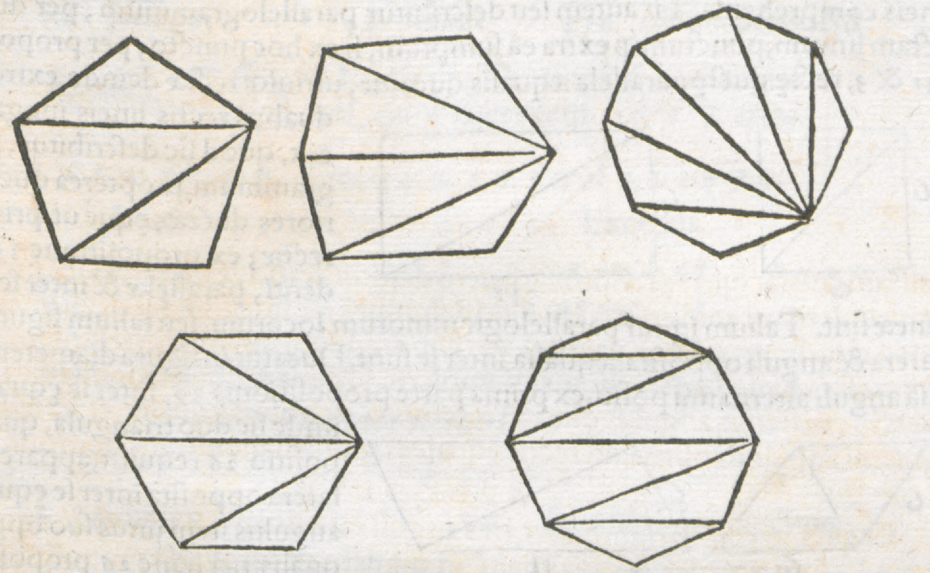
Et quia, ut corollarium habet, tres anguli interni omnis trianguli, duobus rectis angulis ſunt æquales, & quia etiam, ut quidem ex corollario propoſitionis 15, uel ipſa propoſitione 13 colligi poteſt, circa omne punctum, unde nimirum rectæ aliquot lineę egrediuntur, qui apparent anguli, uniuerſi ſimul, quatuor rectis ſunt æquales, cum unumquodq; Polygonum, ubi ad punctũ aliquod, in ea ubiuis ſumptum, ab angulis ipſius ſingulis rectę lineæ ductę fuerint, in tot triangula quot nimirum ipſum polygonum in ſuo ambitu latera habuerit, ſubdiuidi poſſit, ſequitur, quòd omnes anguli uniuſcuiuſq; Polygoni ſimul, tot rectis angulis ſint æquales, quot unitates habuerit numerus, quē quidē duplum laterũ eorũ, demptis inde quatuor, indicat. Hoc aũt ex ſequentibus figuris et cernere & intelligere licebit.



Idem in polygonis irregularibus intelligendum.



Subdiuiduntur etiam polygona in ſua triangula, ubi ab uno propoſiti polygoni angulo ad omnes reliquos, præter eos quos à latere habet, angulos rectæ lineæ ductæ fuerint. Vel alio quodam modo, pro alicuius induſtria, in ſua triangula ſubdiuidi polygona poſſunt. Primus tamen modus, cum ex demonſtratione procedat, reliquis preferendus erit.



Atque hæc, de Polygonorum in ſua triangula diuiſione dicta, ſufficiant.

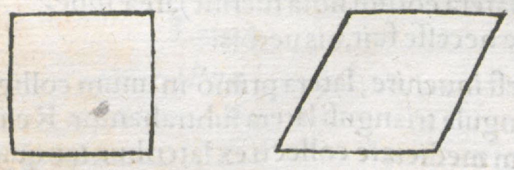
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΓ.

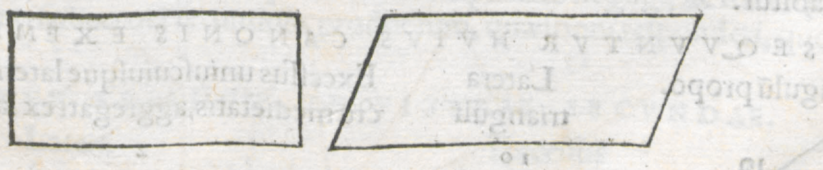
Αἱ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι· καὶ αὗται ἴσαι τε καὶ παράλληλοι εἰσίν.

PROPOSITIO XXXIII.

Aequales & parallelas ad eaſdem partes rectæ lineæ coniungentes: & ipſæ æquales & parallelæ ſunt.

Sint æquales & parallelæ rectę duę lineę, ſuis etiam extremitatibus utrinq; duabus rectis lineis alijs coniunctę: dico, quòd et ipſę rectę lineæ alię, ęquales inter ſe et parallelę ſint. Ducta enim in figura diametro, cum ex prima parte propoſitionis 29, anguli alternatim poſiti ſint inter ſe ęquales: quòd & coniungentes rectę inter ſe ęquales ſint, ex propoſitiõe 4 intelligi poterit. Quòd uerò eędem rectę ſint etiã parallelę, cum ex allegata propoſitione 4, anguli qui alternatim ponuntur, inter ſe ęquales ſint: et id tandẽ, ex propoſitione 27, manifeſtabitur. Aequales igitur & parallelas ad eaſdem partes rectę lineę coniungentes, & ipſę ęquales & parallelę ſunt: quod demonſtrari oportuit.





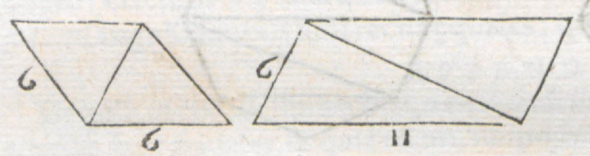
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΔ.

Τῶν παραλληλογράμμων χωρίων· καὶ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει.

PROPOSITIO XXXIIII.

Parallelogrammorum locorum. & latera & anguli oppoſita, æqualia inter ſe ſunt. Et diameter ea biſariam ſecat.

Parallelogrammum, ut uocabuli ἔτυμον indicat, eſt figura, ſub parallelis rectis lineis comprehenſa. Fit autem ſeu deſcribitur parallelogrammum, per ductam rectam lineam, punctumq; extra eã ſumptum, ſi ex hoc puncto, per propoſitionem 31 & 3, rectę ductę parallela æqualis ducatur, utriuſq; rectæ deinde extremitates, duabus rectis lineis iungantur: & erit, quod ſic deſcribitur, parallelogrammum, propterea quòd poſteriores ductæ, ęquè ut priores duæ rectæ, ex propoſitione 33 præcedenti, parallelæ & inter ſe ęquales lineæ ſint. Talium igitur parallelogrammorum locorum, ſeu talium figurarum, & latera & anguli oppoſita, æqualia inter ſe ſunt. Ducatur in figura diameter. Et quoniã anguli alternatim poſiti, ex prima parte propoſitionis 29, inter ſe ęquales ſunt, unde ſic duo triangula, qualia propoſitio 26 requirit, apparent, quòd latera oppoſita inter ſe ęqualia ſint, angulus item unus ſuo oppoſito ęqualis, per hanc 26 propoſitionem inferri poteſt. Et rurſus quoniam, Si ęqualibus æqualia adijciãtur, ex cõmuni quadam noticia, ipſa tota ęqualia ſunt: huius ſententiæ memor, alterum etiam ſuo oppoſito angulo ęqualem eſſe, facile concedet. Patet itaq; prior propoſitionis pars. Poſterior nunc, quòd ſcilicet diameter ipſum parallelogrammum biſariam ſecet, ſi quis ſuſpicetur id nondum eſſe demonſtratum, per propoſitionẽ quartam id deprehendet. Parallelogrammorum igitur locorum & latera & anguli oppoſita, æqualia inter ſe ſunt. Et diameter ea biſariam ſecat, quod demonſtrari oportuit.



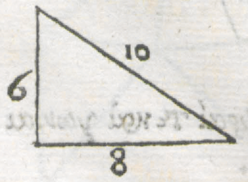
APPENDIX.

Quoniam autem hęc propoſitio 34, & multę etiam ſequentes, in numeris, quantitate nimirum diſcreta, non minus atq; in quantitate continua, ueræ eſſe reperiuntur, quo id oſtendamus commodius, canonem quendam generalem, per quẽ omnis generis triangulorum (modo latera eorum nota fuerint) areæ inueniri poſſent, ſubijcere neceſſe fuit, his uerbis.

Trianguli, cuius aream propoſitum eſt inuenire, latera primò in unum colligãtur, à medietate deinde huius collecti ſingula trianguli latera ſubtrahantur. Relinquuntur autem tres numeri, qui unà cum medietate collecti ex lateribus, tanquam numero quarto, ſi inter ſe multiplicati fuerint, primus ſcilicet cum ſecundo, productum hoc cum tertio, quodq́; iam producetur cum numero quarto (nec refert quo ordine numeri ſumantur, qui'ue pro primo, ſecundo, tertio uel quarto reputetur) tũ huius ultimi producti radice quadrata, quanta propoſiti trianguli area fuerit, manifeſtabitur.

SEQVVNTVR HVIVS CANONIS EXEMPLA.

Triangulũ propo.



Latera trianguli	Exceſſus uniuſcuiuſque lateris reſpectu medietatis, aggregati ex lateribus.
10	2
8	4
6	6
24 laterum ſumma,	Quatuor numeri
12 laterum mediet.	2 4 6 12

Inſtituantur

Inſtituantur nunc multiplicationes.

prima	ſecunda	tertia
12	6	24
2	4	24
24 primum	24 ſecun.	576 ultimũ productũ

Quadra. $\underset{4}{\overset{\times\ \times}{\cancel{5}\,\cancel{7}\,\cancel{6}}}$ (Radix 24. Tanta igitur eſt trianguli, cuius latera ſunt 10 8 6, area.

EXEMPLVM IN IRRATIONALIBVS.

Latera	Exceſſus
$\sqrt{180}$	$9 - \sqrt{45}$
12	$\sqrt{45} - 3$
6	$\sqrt{45} + 3$
Sum. $18 + \sqrt{180}$	Medietas $9 + \sqrt{45}$

Quatuor numeri.

$9 - \sqrt{45}$ $\sqrt{45} - 3$ $\sqrt{45} + 3$ $9 + \sqrt{45}$

36 primum 36 ſecundum productum

Tertiò multiplicentur 36
cum 36
producuntur 1296, cuius radix
quadrata 36. area eſt trianguli.

ABBREVIATIO CANONIS PER COMPENDIVM.

Cum̃ tertiæ multiplicationis numeri, qui nimirum ex prima & ſecunda multiplicatione proueniunt, inter ſe fuerint æquales, id quod ſæpe contingit, in his item duobus exemplis euidens eſt, eadem tertia multiplicatio negligitur, nec etiã extractione radicis quadratæ tum opus erit. Verùm ſtatim per alterutrum productorum, primum uel ſecundum, trianguli area indicabitur.

EXEMPLVM CANONIS ALIVD.

Eſt autem in hac 34 propoſitione triangulum figuræ primæ.

Latera	Exceſſus
$\sqrt{72}$	$6 - \sqrt{18}$
6	$\sqrt{18}$
6	$\sqrt{18}$
Sum. $12 + \sqrt{72}$	Meditas $6 + \sqrt{18}$.

Primum productum ſunt 18, ſecundum tantundem, tertium deinde 324. huius poſtea radix 18, area eſt trianguli, atq; medietas etiam parallelogrammi uel figurę primæ, quod hoc canone oſtendere oportuit.

Potuiſſet ex cõpendio iam præſcripto, tertia multiplicatio negligi, ac ſtatim per 18 uel 18, primum ſcilicet uel ſecundum productum, quæſtioni reſponderi, quod idem fuiſſet.

SEQVITVR TRIANGVLVM FIGVRAE SECVNDAE.

Latera	Exceſſus
$\sqrt{157}$	$\frac{17}{2} - \sqrt{\frac{157}{4}}$
11	$\sqrt{\frac{157}{4}} - \frac{5}{2}$
6	$\sqrt{\frac{157}{4}} + \frac{5}{2}$
Sum. $17 + \sqrt{157}$	Meditas $\frac{17}{2} + \sqrt{\frac{157}{4}}$

Quatuor

Quatuor numeri.

33 primum

$\frac{17}{2} - \sqrt{\frac{157}{4}}$ $\sqrt{\frac{157}{4}} - \frac{9}{2}$ $\sqrt{\frac{157}{4}} + \frac{5}{2}$ $\frac{17}{2} + \sqrt{\frac{157}{4}}$

33 ſecundum productum

Et quia tertiæ multiplicationis numeri inter ſe æquales ſunt, ideo ea omittitur, nec etiam, extractione radicis quadratæ, ut ſuperius dictũ eſt, opus erit. Trianguli igiť propoſiti, hoc eſt parallelogrammi medietas, area, ſunt 33, quę erat inueniẽda.

SEQVITVR TRIANGVLVM FIGVRAE TERTIAE.

Latera Excessus

6 $\sqrt{15} - \sqrt{3}$

6 $\sqrt{15} - \sqrt{3}$

$\sqrt{60} - \sqrt{12}$ 6 minus $\sqrt{15} - \sqrt{3}$

Sum. 12 plus $\sqrt{60} - \sqrt{12}$ Meditas 6 plus $\sqrt{15} - \sqrt{3}$

Quatuor numeri.

$\sqrt{15} - \sqrt{3}$ $\sqrt{15} - 3$ 6 minus $\sqrt{15} - \sqrt{3}$ 6 plus $\sqrt{15} - \sqrt{3}$

Primum $18 - \sqrt{180}$ ſecundum 36 minus $18 - \sqrt{180}$

Tertium productum 144. Atq; huius nunc radix quadrata, nimirum 12, area eſt trianguli.

SEQVITVR TRIANGVLVM FIGVRAE QVARTAE.

Latera Exceſſus

radix qua. reſidui $157 - \sqrt{9680}$ $8\frac{1}{2}$ minus ra. qua. re. $39\frac{1}{4} - \sqrt{605}$

11 ra. qua. re. $39\frac{1}{4} - \sqrt{605}$ minus $2\frac{1}{2}$

6 ra. qua. re. $39\frac{1}{4} - \sqrt{605}$ plus $2\frac{1}{2}$

17 plus ra. qua. re. $157 - \sqrt{9680}$ Me. $8\frac{1}{2}$ plus ra. qua. re. $39\frac{1}{4} - \sqrt{605}$

Inſtituantur nunc multiplicationes.

Prima.

Radix qua. reſidui $39\frac{1}{4}$ $\sqrt{605}$ plus $2\frac{1}{2}$

Radix qua. reſidui $39\frac{1}{4} - \sqrt{605}$ minus $2\frac{1}{2}$

producuntur $39\frac{1}{4} - \sqrt{605}$ minus $6\frac{1}{4}$.

Secunda.

$8\frac{1}{2}$ plus radix qua. reſidui $39\frac{1}{4} - \sqrt{605}$

$8\frac{1}{2}$ minus radix qua. reſidui $39\frac{1}{4} - \sqrt{605}$

producuntur $72\frac{1}{4}$ minus $39\frac{1}{4} - \sqrt{605}$.

Tertia.

$39\frac{1}{4} - \sqrt{605}$ minus $6\frac{1}{4}$

$72\frac{1}{4}$ minus $39\frac{1}{4} - \sqrt{605}$

$2835\frac{13}{16} - \sqrt{\frac{50530205}{16}}$ item $245\frac{5}{16} - \sqrt{\frac{378125}{16}}$

minus $2145\frac{9}{16} - \sqrt{\frac{59650580}{16}}$

minus $451\frac{9}{16}$

Summa productorum.

plus $3081\frac{1}{8} - \sqrt{\frac{59650580}{16}}$

minus $2597\frac{1}{8} - \sqrt{\frac{59650580}{16}}$.

Facta ſubtractione, manent 484, cuius radix, 22, area eſt trianguli.

Vel,

Vel, quæſitis productis, primo ſcilicet & ſecundo, calculo exquiſitiore, ueniũt

$33 - \sqrt{605}$ primum

$\sqrt{605} - 33$ ſecundum.

Quibus nunc inter ſe multiplicatis, producuntur 484, ut prius: cuius etiam radix, ut prius, 22, trianguli aream repreſentabit.

SIMILE EXEMPLVM PER RATIONALES, PERinde ac ſi irrationales eſſent numeri, expoſitum.

Latera.

6

Radix qua. lineæ ex binis nominib. $40 + \sqrt{576}$, hoc eſt. 8,

10

Exceſſus.

Radix quadrata binomij $10 + \sqrt{36}$ plus, 2 hoc eſt 6

8, minus radix, qua. binomij $10 + \sqrt{36}$ hoc eſt. 4.

Radix quadrata binomij $10 + \sqrt{36}$ minus, 2 hoc eſt 2.

Med. 8, plus radix qua. binomij $10 + \sqrt{36}$ hoc eſt, 12.

Inſtituantur multiplicationes.

Prima.

Radix qua. binomij $10 + \sqrt{36}$, plus 2, hoc eſt 6

Radix qua. binomij $10 + \sqrt{36}$, minus 2, hoc eſt 2

producuntur $10 + \sqrt{36}$ minus 4, hoc eſt 12.

Secunda.

8, minus radix qua. binomij $10 + \sqrt{36}$. hoc eſt, 4.

8, plus radix qua. binomij $10 + \sqrt{36}$. hoc eſt, 12.

64 minus $10 + \sqrt{36}$, hoc eſt 48.

Cruciformes multiplicationes, cum æquales ſint numeri, negliguntur. Productorum igitur ſumma in utraque multiplicatione, ut apparet.

Tertia multiplicatio.

$10 + \sqrt{36}$ minus 4 hoc eſt, 12.

64 minus $10 + \sqrt{36}$ hoc eſt, 48.

$640 + \sqrt{147456}$ item $40 + \sqrt{576}$

minus $136 + \sqrt{14400}$

minus 256

pro. $680 + \sqrt{166464}$, minus $392 + \sqrt{14400}$

Hoc eſt,

$288 + \sqrt{82944}$, uel 576 ultimum productum.

Huius itaq; radix quadrata, nimirũ 24, area eſt trianguli.

EST ET ALIVD TERTIAE FIGVRAE TRIANGVlum, ratione diametri longioris conſideratum, atq; huius quidem

latera ſunt 6, 6, $\sqrt{60} + \sqrt{12}$

P Laterum

Laterum ſumma 12, plus $\sqrt{60} - \sqrt{12}$

Exceſſus igitur, atq; deinceps quatuor numeri,

$\sqrt{15} + \sqrt{3}$ $\sqrt{15} + \sqrt{3}$ 6 minus $\sqrt{15} + \sqrt{3}$ 6 plus $\sqrt{15} + \sqrt{3}$

Primum	ſecundum productum
$18 + \sqrt{180}$	36 minus $18 + \sqrt{180}$.

Tertium productum.

$648 + \sqrt{233280}$ minus $504 + \sqrt{233280}$

hoc eſt, 144. Area igitur trianguli 12, ut prius.

ALIVD ITEM TRIANGVLVM FIGVRAE quartæ, cuius quidem

Latera ſunt	Exceſſus igitur
Ra.qua.bi. $157 + \sqrt{9680}$	$8\frac{1}{2}$ minus ra.qua.bi. $39\frac{1}{4} + \sqrt{605}$
11	ra.qua.bi. $39\frac{1}{4} + \sqrt{605}$ minus $2\frac{1}{2}$
6	ra.qua.bi. $39\frac{1}{4} + \sqrt{605}$ plus $2\frac{1}{2}$
17 plus ra.qua.bi. $157 + \sqrt{9680}$	$8\frac{1}{2}$ plus ra. qua. bi. $39\frac{1}{4} + \sqrt{605}$

Producta,

primum	ſecundum
$72\frac{1}{4}$ minus $39\frac{1}{4} + \sqrt{605}$	$39\frac{1}{4} + \sqrt{605}$ minus $6\frac{1}{4}$

Inuentio producti tertij.

$72\frac{1}{4}$ minus $39\frac{1}{4} + \sqrt{605}$

$39\frac{1}{4} + \sqrt{605}$ minus $6\frac{1}{4}$

$2835\frac{13}{16} + \sqrt{\frac{50530205}{16}}$ item $245\frac{5}{16} + \sqrt{\frac{378125}{16}}$

minus $451\frac{9}{16}$

minus $2145\frac{9}{16} + \sqrt{\frac{59650580}{16}}$

Summa productorum.

plus $3081\frac{1}{8} + \sqrt{\frac{59650580}{16}}$

minus $2597\frac{1}{8} + \sqrt{\frac{59650580}{16}}$.

Hoc eſt, facta ſubtractione, 484.

Huius nunc tertij producti radix quadrata, nimirum 22, area eſt trianguli. Atq; hactenus dicta de triangulorum areis inueſtigandis ſufficiant. Sequitur

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΕ.

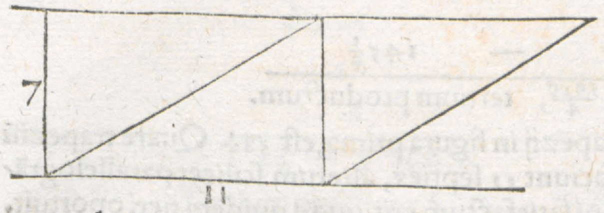
Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις· ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

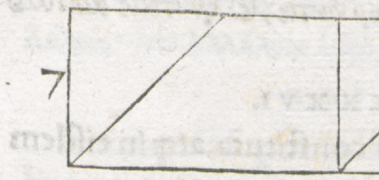
PROPOSITIO XXXV.

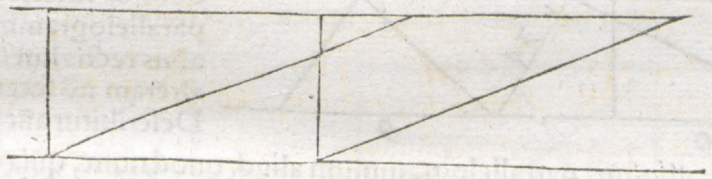
Parallelogramma ſuper eadem baſi conſtituta, atq; in eiſdem parallelis: æqualia inter ſe ſunt.

Poteſt huius propoſitionis figura geometrica tripliciter uariari. Aut enim parallelogrãmis ſuper una & eadem baſi, inter eaſdem item parallelas poſitis, alterum unius latus eſt diameter alterius, aut ea breuius, aut longius. Si primum, cum ex corollario propoſitionis præcedentis, Omne parallelogrammũ à ſua ipſius diametro

bifariam ſecetur, cumq; etiam ex cõmuni quadam noticia, Eiuſdem duplicia, inter ſe æqualia ſint, hoc quod propoſitio concludit, iam manifeſtum erit. Quòd ſi fuerit ea breuius, cum parallelogrammorum locorum latera oppoſita inter ſe ęqualia ſint, hoc ipſo uſurpato bis: duo duorũ parallelogrãmorum latera, ex communi quadam noticia, inter ſe æqualia exiſtent: deinde uerò communi portione ab illis æqualibus lateribus ſubtracta, & reſiduæ lineæ inter ſe æquales erũt. Sed quia illæ, ut quidem ſecunda pars propoſitionis 29, & ipſa propoſitio quarta demonſtrant, ęqualium triangulorum latera ſunt, his ęqualibus triangulis cõmune trapezium ſi addatur: & producta, parallelogramma ſcilicet propoſita, inter parallelas & ſuper una eadẽq; baſi conſtituta, per communem quãdam noticiam, inter ſe æqualia erunt, quod demonſtraſſe oportuit. Si uerò alterum unius latus fuerit diametro alterius parallelogrammi longius, oportet ut media inter æquales lineas portio, ex ęquo illis æqualibus lineis addatur, quæ productæ, cũ et ipſę ęqualium triangulorum ſint latera, illis ęqualibus triangulis, primò id quod commune habent, ſubtrahi, reſiduis deinde trapezijs commune quoddam triangulum aliud addi oportet: & tum etiam ſecundum tertiæ figurę deſcriptionem, propoſitioni ſatisfactum erit. Quacunq; igitur ratione parallelogramma illa, (ſeruatis tamen hypotheſibus) deſcripta fuerint, propoſitio uera eſſe cognoſcetur. quod demonſtrari oportuit.







PER NVMEROS HAEC NVNC, VT PRAECEdens, *tractari poteſt: id quod uno tantum exemplo indicabimus.*

Latera	Exceſſus
$\sqrt{533}$	$5\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{170}{4}} - \sqrt{\frac{533}{4}}$
$\sqrt{170}$	$5\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{170}{4}} + \sqrt{\frac{533}{4}}$
11	$\sqrt{\frac{533}{4}} + \sqrt{\frac{170}{4}} - 5\frac{1}{2}$
$\sqrt{533} + \sqrt{170} + 11$	Me. $\sqrt{\frac{533}{4}} + \sqrt{\frac{170}{4}} + 5\frac{1}{2}$

Inſtituantur multiplicationes.

prima	ſecunda
$5\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{170}{4}} - \sqrt{\frac{533}{4}}$	$\sqrt{\frac{533}{4}} + \sqrt{\frac{170}{4}} - 5\frac{1}{2}$
$5\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{170}{4}} + \sqrt{\frac{533}{4}}$	$\sqrt{\frac{533}{4}} + \sqrt{\frac{170}{4}} + 5\frac{1}{2}$ —
$30\frac{1}{4} - 42\frac{1}{2} - 133\frac{1}{4}$	$133\frac{1}{4} + 42\frac{1}{2} - 30\frac{1}{4}$
$+ \sqrt{\frac{90610}{4}}$	$+ \sqrt{\frac{90610}{4}}$
$\sqrt{\frac{90610}{4}} - 145\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{90610}{4}} + 145\frac{1}{2}$

Tertia multiplicatio.

$\surd\,\frac{90610}{4} + 145\frac{1}{2}$

$\surd\,\frac{90610}{4} - 145\frac{1}{2}$

producuntur $\frac{5929}{4}$, tertium productum.

Area igitur trianguli,ratione Trapezij in figura prima,eſt $38\frac{1}{2}$. Quare trapeziũ integrum 77.Et quia tantũ etiam faciunt 11 ſepties, alterum ſcilicet parallelogrãmum: & in numeris iam propoſitioni ſatisfactum erit, quod quidem fieri oportuit.

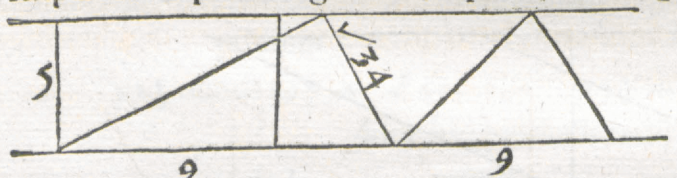
ΠΡΟΤΑΣΙΣ λϛ.

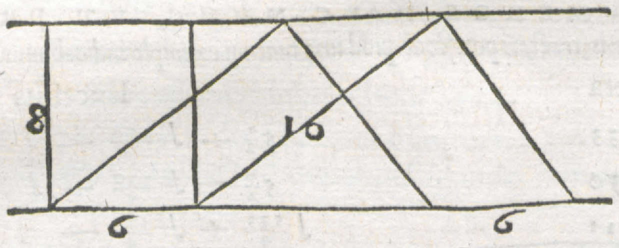
Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις· ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

PROPOSITIO XXXVI.

Parallelogramma ſuper æqualibus baſibus conſtituta, atqꝫ in eiſdem parallelis : æqualia inter ſe ſunt.

Hæc propoſitio licet per ſe iam ſatis conſtare deberet, cum idem ſit æqualiũ atqꝫ earundem linearum intellectus, quo tamen dilucidius hęc appareat, poſtquam deſcripta fuerint parallelogramma, ut præcipitur, anguli ſuperiores duo unius, cum duobus inferioribus alterius parallelogrammi angulis, duabus rectis lineis, ſic ut altera alteram nõ ſecet, copulentur. Deſcribitur aũt ſic, ut ex propoſitione 33 colligitur, parrallelogrammum aliud, quod nunc, quia cum utroque poſito, & inter lineas parallelas, & ſuper una atqꝫ eadem baſi conſtitutum eſt : utrunqꝫ poſitum huic deſcripto parallelogrammo alij, per propoſitionem præmiſſam, atqꝫ illa tandem etiam inter ſe, per hanc communem noticiam, Quæ eidem æqualia, & inter ſe æqualia ſunt, æqualia eſſe oſtendũtur. Parallelogramma igit̃ ſuper ęqualibus baſibus & in eiſdem parallelis conſtituta: inter ſe ſunt æqualia, quod demonſtraſſe oportuit.





NVNC QVANTVM AD PRAXIM NVMERORVM.

Latera	Excessus
13	$\surd\,\frac{17}{2} - 2$
9	$\surd\,\frac{17}{2} + 2$
$\surd\,34$	$11 - \surd\,\frac{7}{2}$
$22 + \surd\,34$	$11 + \surd\,\frac{17}{2}$

primum	ſecun.	ter. pro.	Area trian.
$4\frac{1}{2}$	$112\frac{1}{2}$	$\surd\,\frac{2025}{4}$	$22\frac{1}{2}$.

ALIVD TRIANGVLVM EX SECVNDA FIGVRA.

Latera	Excessus
$\surd\,208$	$8 - \surd\,52$
10	$\surd\,52 - 2$
6	$\surd\,52 + 2$
$16 + \surd\,208$	$8 + \surd\,52$
Tertium pro. 576	Area trianguli 24.

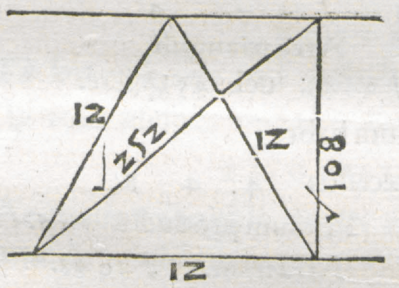
ΠΡΟΤΑΣΙΣ λζ.

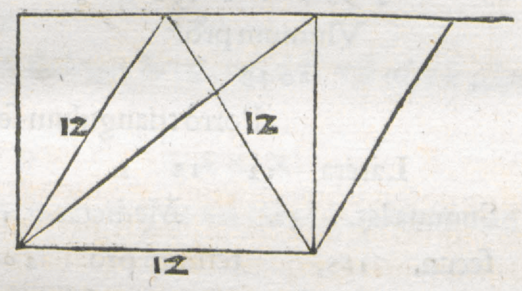
Τὰ τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις· ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

PROPOSITIO XXXVII.

Triangula ſuper eadem baſi cõſtituta, atqꝫ in eiſdem parallelis: ęqualia inter ſe ſunt.

Sint inter lineas parallelas, ſuper una & eadem baſi conſtituta duo uel plura triangula: dico, illa inter ſe eſſe æqualia. Continuetur ea, quæ triangulorum uertices coniungit recta linea in utranqꝫ partem, quantum ſatis fuerit, fiant etiam ex propoſitis triangulis parallelogramma, ducendo in unoquoqꝫ triangulo, ab eius uno angulo, eorum qui ad baſim ſunt, lineam, lateri quod hunc eundem angulum ſubtendit, per propoſitionem 31, parallelam. Et quoniam deſcripta parallelogramma, cum ſuper eadem baſi, atqꝫ in eiſdem parallelis conſtituta ſint, inter ſe æqualia eſſe, ex propoſitione 35 notum eſt. Et rurſus quoniam, quæ eiuſdem dimidia, ex communi quadam noticia æqualia inter ſe ſunt : deſcriptorum parallelogrammorum medietates, triangula ſcilicet poſita, inter ſe ęqualia erunt. Triangula igitur ſuper eadem baſi conſtituta, atqꝫ in eiſdem parallelis: æqualia inter ſe ſunt, quod demonſtrari oportuit.





NVNC QVANTVM AD NVMERORVM PRAXIM.

Latera	Excessus
12 12 12	} 6
Summa 36	Medietas 18

Tertium productum 3888. Area $\surd\,3888$ uel $62\frac{4}{125}\frac{4}{}$ fere.

ALTERVM TRIANGVLVM HABET

Latera	$\surd\,252$	12	$\surd\,108$
Exceſ.	$\surd\,27 + 6 - \surd\,63$	$\surd\,27 - 6 + \surd\,63$	$\surd\,63 + 6 - \surd\,27$

Summa lat. $\surd 252 + 12 + \surd 108$ Med. $\surd 63 + 6 + \surd 27$

Primum ſecundum ter. productum

$\surd 9072 - 72$ $\surd 9072 + 72$ 3888 &cæ.

ALIA FIGVRA.

Habet hæc figura tria triangula, quę, ut geometricè, ita et per numeros ſequēti calculo inter ſe ęqualia eſſe oſtenduntur.

Communis baſis.

Quantum igitur ad triangulum primum, cuius quidem

Latera ſunt	Exceſſus igitur
$\surd 384$	$4 + \surd 48 - \surd 96$
$\surd 192$	$4 - \surd 48 + \surd 96$
8	$\surd 96 + \surd 48 - 4$
$\surd 384 + \surd 192 + 8$	$\surd 96 + \surd 48 + 4$
Vltimum pro.	Area trianguli
2048	$\surd 2048.$ uel $45\frac{23}{91}$ ferè.

Porrò triangulum ſecundum habet

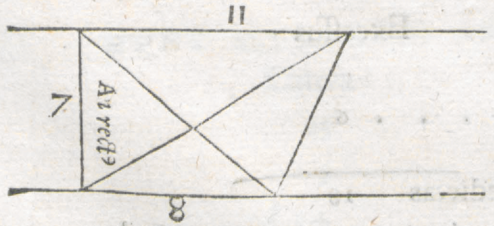
Latera 12 12 8. Exceſſus 4. 4 8.

Summa lat. 32. Medietas 16. Primum productū 16.

ſecun. 128, tertium pro. 2048. Area trian. $\surd 2048.$

Sequitur triangulum tertium, cuius quidem

Latera ſunt	Exceſſus igitur
$\surd 452$	$4 + \surd 57 - \surd 113$
$\surd 228$	$4 - \surd 57 + \surd 113$
8	$\surd 113 + \surd 57 - 4$
$\surd 452 + \surd 228 + 8$	$\surd 113 + \surd 57 + 4$
Vltimū pro. 2048.	Area trianguli ut ſuprà.



Area utriuſq; trianguli, ſunt 28. ęquales igitur inter ſe.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΗ.

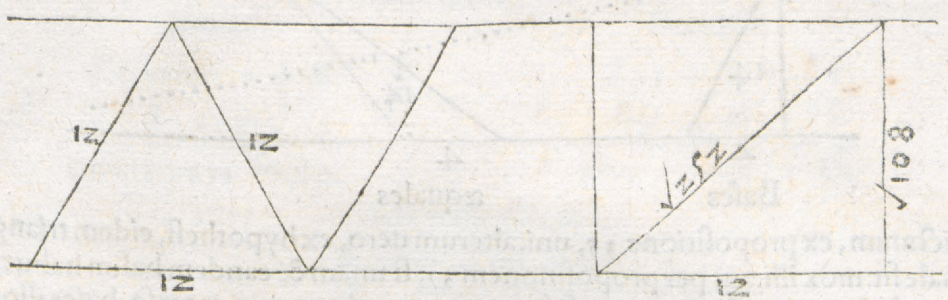
Τὰ τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις· ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

PROPOSITIO

PROPOSITIO XXXVIII.

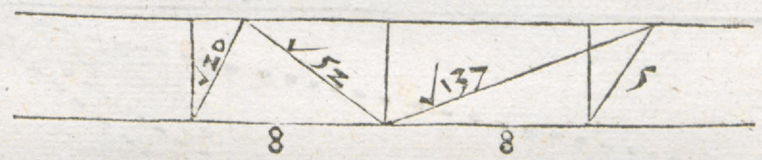
Triangula ſuper æqualibus baſibus conſtituta, atq; in eiſdem parallelis: æqualia inter ſe ſunt.

Propoſitis triangulis, ut præcipitur, eadem huius quæ præcedentis κατασκευὴ



atq; demonſtratio erit, ſi loco propoſitionis triceſimæ quintæ illic ſumptæ, hîc triceſima ſexta ſumatur.

ALIVD HVIVS PROPOSITIONIS EXEMPLVM.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΘ.

Τὰ ἴσα τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

PROPOSITIO XXXIX.

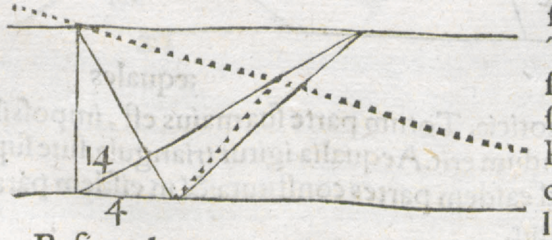
Aequalia triangula, ſuper eadem baſi, atque ad eaſdem partes conſtituta: & in eiſdem ſunt parallelis.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Μ.

Τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

PROPOSITIO XL.

Aequalia triangula, ſuper æqualibus baſibus, atq; ad eaſdem partes conſtituta: & in eiſdem ſunt parallelis.

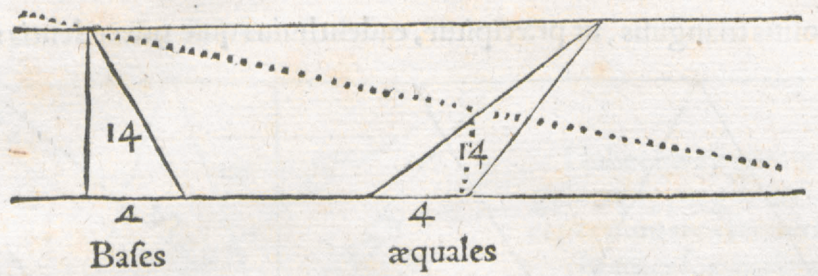


Baſis eadem

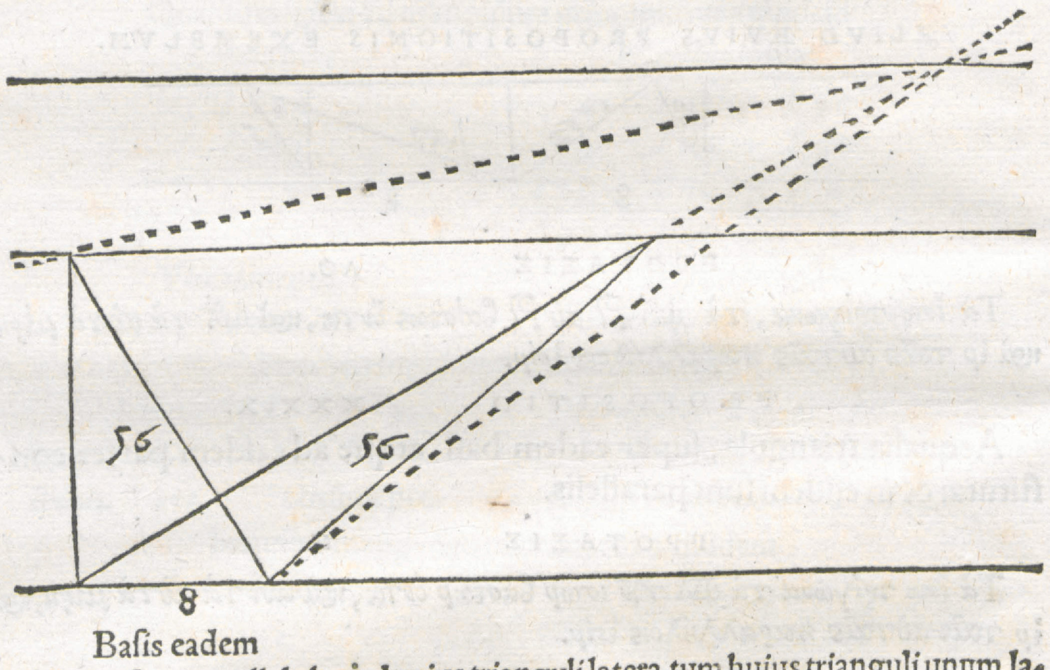
Requirunt hæ duæ propoſitiones æqualia, eiuſdem uel æqualium baſium triangula, & inde tandem inter lineas parallelas (ſi modo ad eaſdem partes fuerint cōſtituta) ea poſita eſſe inferunt. Triangulis itaq; huiuſmodi deſcriptis, propoſitionum demōſtrationes ab impoſsibili illo, Partem ſuo toti æqualem eſſe, colligentur. Nam recta quadā linea triangulorum uerticibus copulatis, ſi quis præter hanc aliam ab unius trianguli uertice, tanquam à puncto ſignato, baſi parallelam ſtatuere uelit, faciat ſanè hoc, ſi poterit. Et quoniam fit, quod hæc ducta parallela alter-

utrius

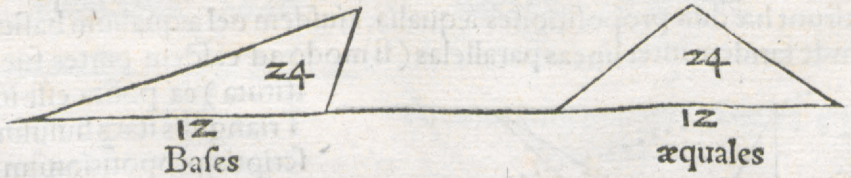
utrius trianguli, latera ſecet, aut non ſecet. Si primum, coniungatur punctum ſectionis in uno latere, recta quadam linea, cum ſibi oppoſita baſis extremitate. Et quoniam duo triangula apparent, quorum unum quidem cum ſecundum aduerſarij



ſtructuram, ex propoſitione 35, uni: alterum uero, ex hypotheſi, eidem triangulo ęquale ſit: mox illi, aut per propoſitionem 37, ſi unam & eandem baſim habuerint: aut uerò per propoſitionem 38, ſi ſeparatæ, æquales tamen inter ſe, baſes illorum fuerint, inter ſe æqualia erunt, partiale totali, quod eſt impoſsibile. Eſto igitur iam



quòd non ſecet parallela hæc alterius trianguli latera, tum huius trianguli unum latus ultra uerticem uſq; ad parallelam continuari, punctum deinde contactus cum oppoſita baſis extremitate, ut modò, coniungi debet: & idẽ quod prius, partiale ſcilicet triangulum ſuo totali æquale eſſe, per allegatas propoſitiones inferetur. Hoc



autem, quia ex communi illa noticia, Totum parte ſua maius eſt, impoſsibile exiſtit, propoſitionibus conſentiendum erit. Aequalia igitur triangula, ſiue ſuper eadẽ ſeu æqualibus baſibus, atque ad eaſdem partes conſtituta: & in eiſdem parallelis erunt, quod demonſtraſſe oportuit.

SEQVITVR NVMERORVM PRAXIS.

Prioris trianguli figuræ ultimæ

Latera ſunt $\sqrt{212}$, 12, $\sqrt{20}$

Laterum ſumma $\sqrt{212} + 12 + \sqrt{20}$ Medietas $\sqrt{53} + 6 + \sqrt{5}$

Exceſſus igitur, ac per conſequens quatuor numeri.

$\sqrt{5} + 6 + \sqrt{53}$ $5 - 6 + \sqrt{53}$ $\sqrt{53} + 6 - \sqrt{5}$ $\sqrt{53} + 6 + \sqrt{5}$

Inſtituantur multiplicationes.

Prima	Secunda
$\sqrt{5} + 6 - \sqrt{53}$	$\sqrt{53} + 6 + \sqrt{5}$
$\sqrt{5} - 6 + \sqrt{53}$	$\sqrt{53} + 6 - \sqrt{5}$
pro. $\sqrt{7632} - 84$	pro. $\sqrt{7632} + 84$

Tertia multiplicatio.

$$\begin{array}{lcl} \sqrt{7632} & + & 84 \\ \sqrt{7632} & - & 84 \\ \hline \end{array}$$

producuntur 7632 — 7056, hoc eſt 576 tertium productum. Area igitur trianguli 24.

Triangulum poſterius habet

Latera	Exceſſus igitur
12	$\sqrt{52} - 6$
$\left.\begin{array}{l}\sqrt{52} \\ \sqrt{52}\end{array}\right\}$	6
$\sqrt{208} + 12$	$\sqrt{52} + 6$. Area 24.

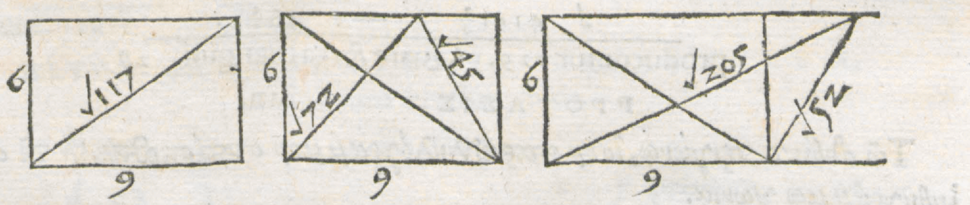
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΜΑ.

Ἐὰν παραλληλόγραμμον τριγώνῳ βάσιν τε ἔχῃ τὴν αὐτὴν, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ᾖ, διπλάσιον ἔσται τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου.

PROPOSITIO XLI.

Si parallelogrammum cum triangulo baſim habuerit eandem, atq; in eiſdem parallelis fuerit: duplum erit parallelogrammum ipſius trianguli.

Statuantur parallelogrammum & triangulum ſuper eadem baſi, eſto etiã quòd ſint inter lineas parallelas: dico quòd parallelogrammum ad triangulum, duplũ ſit. Hoc quòd ducta in parallelogrammo diametro, ex 37 & ſecunda parte propoſitionis 34, cum per hanc quidem triangulorum unumquodq; ſui parallelogrammi dimidium eſſe, per illam uerò, triangula quorũ eadem eſt baſis et eadem altitudo, æqualia eſſe demonſtratum ſit, facile colligetur.



NVMERORVM PRAXIS.

Et primo quidem trianguli, cuius latera ſunt 9 $\sqrt{72}$ $\sqrt{45}$

Laterum ſumma $9 + \sqrt{72} + \sqrt{45}$ Medietas $4\frac{1}{2} + \sqrt{18} + \sqrt{11\frac{1}{4}}$.

Exceſſus, ac per conſequens quatuor numeri.

Primus $\sqrt{11\frac{1}{4}} + \sqrt{18} - 4\frac{1}{2}$ ſecundus $\sqrt{11\frac{1}{4}} - \sqrt{18} + 4\frac{1}{2}$

tertius $4\frac{1}{2}$ $\sqrt{18}$ $\sqrt{11\frac{1}{4}}$ quartus $4\frac{1}{2} + \sqrt{18} + \sqrt{11\frac{1}{4}}$

Primum	ſecundum	tertium pro.
$\sqrt{1458} - 27$	$\sqrt{1458} + 27$	729.

Area trianguli 27. Et tanta etiã eſt medietas parallelogrammi, cum 6 nouies, uel contrà 9 ſexies, 54 conſtituant.

Aliud triangulum.

Latera	Exceſſus
$\sqrt{117}$	$7\frac{1}{2} - \sqrt{29\frac{1}{4}}$
9	$\sqrt{29\frac{1}{4}} - 1\frac{1}{2}$
6	$\sqrt{29\frac{1}{4}} + 1\frac{1}{2}$
$15 + \sqrt{117}$	$7\frac{1}{2} + \sqrt{29\frac{1}{4}}$

Productum primum 27, ſecundum 27, Area trianguli 27.

Tertium triangulum.

Latera	Exceſſus
$\sqrt{205}$	$\sqrt{13} + 4\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{205}{4}}$
9	$\sqrt{13} - 4\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{205}{4}}$
$\sqrt{52}$	$\sqrt{\frac{205}{4}} + 4\frac{1}{2} - \sqrt{13}$
$\sqrt{205} + 9 + \sqrt{52}$	$\sqrt{\frac{205}{4}} + 4\frac{1}{2} + \sqrt{13}$.

Inſtituantur multiplicationes.

Prima	ſecunda
$\sqrt{13} + 4\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{205}{4}}$	$\sqrt{\frac{205}{4}} + 4\frac{1}{2} - \sqrt{13}$
$\sqrt{13} - 4\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{205}{4}}$	$\sqrt{\frac{205}{4}} + 4\frac{1}{2} + \sqrt{13}$
$13 - 20\frac{1}{4} - 51\frac{1}{4}$	$51 + 20\frac{1}{4} - 13$
$+ \sqrt{4151\frac{1}{4}}$	$+ \sqrt{4151\frac{1}{4}}$
producuntur $\sqrt{4151\frac{1}{4}} - 58\frac{1}{2}$	prod. $\sqrt{4151\frac{1}{4}} + 58\frac{1}{2}$

Tertia multiplicatio.

$$\begin{array}{l} \sqrt{4151\frac{1}{4}} + 58\frac{1}{2} \\ \sqrt{4151\frac{1}{4}} - 58\frac{1}{2} \\ \hline \end{array}$$

producuntur 729. Quare Area trianguli 27

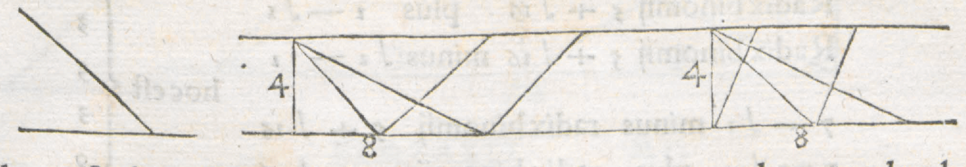
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΜΒ.

Τῷ δοθέντι τριγώνῳ, ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι, ἐν τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ.

PROPOSITIO XLII.

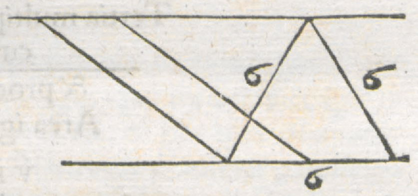
Dato triangulo : æquale parallelogrammum conſtituere, in dato angulo rectilineo.

Petit hæc propoſitio triangulũ, atq; huic deinde æquale iubet formari ſeu deſcribi parallelogrammum, cuius quidem unus angulus, alij cuidam rectilineo angulo dato, æqualis ſit, quod ſic fiet. Continuetur trianguli baſis in utramlibet partem. huic deinde baſi per trianguli uerticem, prout habet propoſitio 31, recta parallela ducatur. Hoc facto, diuidatur baſis, per 10 propoſitionem, biſariam, & ad punctũ illud diuiſionis, atq; ipſam baſim, angulus dato æqualis, ex propoſitione 23 conſtituatur, cuius deinde latus alterum, ſi uſq; ad lineam, quæ per uerticem trianguli ducta eſt, continuatum, ei etiam ab alterutra baſis extremitate, tanquam à puncto aliquo dato, per propoſitionem 31, recta parallela ducta fuerit, ubi tandem hæc uſque ad lineam, per uerticem tranſeuntem continuabitur, res confecta erit, id quod ſic demonſtrabitur. De parallelogrammo, quin dato unũ angulum æqualem habeat, nullum eſt dubium, cum id in ſtructura ex propoſitione 23 præuiſum ſit. Quòd uerò idem parallelogrammum dato triangulo æquale ſit, poſtquam à trianguli uertice ad punctum baſis medium linea recta ducta fuerit: & id ex propoſitionibus 38 & 41, atq; communi tandem illa noticia, Quæ eiuſdem duplicia, &cæ. facile perſpicietur. Dato igitur triangulo, æquale parallelogrammum, in dato rectilineo angulo conſtitutum eſt, quod feciſſe oportuit.



ADMONITIO.

Quòd ſi angulus datus fuiſſet acutior, obtuſior, uel omnino rectus, tũc linea hęc, ut latus futuri parallelogrammi, à puncto diuiſionis in baſi, ſecũdum huius anguli quantitatem ducenda fuiſſet. Hæc enim 23, de angulo formando, propoſitio, in genere propoſita eſt, ſic ut nihil referat, quocunq; modo rectilineus angulus fuerit propoſitus.



Area trianguli figuræ ultimæ, ut ſequens calculus indicat, eſt $\sqrt{243}$. Atq; tanta eſt etiam parallelogrammi conſtituti area. Bene igitur.

Latera	Exceſſus
6	3
6	3
6	3
Sum. 18	Med. 9

Vltimum productum 243
Area igitur trianguli $\sqrt{243}$.

ALIVD AEQVILATERVM TRIANGVLVM, laterum irrationalium.

Latera		Exceſſus			
$\sqrt{48}$	}		pro. {	primum	12
$\sqrt{48}$		. : . $\sqrt{12}$		ſecundũ	36
$\sqrt{48}$				tertium	432
$\sqrt{432}$		$\sqrt{108}$		Area trianguli	$\sqrt{432}$.

ALIVD EXEMPLVM.

Latera trianguli ſunt

6		6
$8 - \sqrt{4}$,	hoc eſt	6
Radix binomij $20 + \sqrt{256}$		6

Summa laterum 14 — √4, plus radix binomij 20 + √256 18
hoc eſt
Huius medietas 7 — √1, plus radix binomij 5 + √16 9

Exceſſus, ac per conſequens quatuor numeri

Radix binomij 5 + √16 plus 1 — √1 3
Radix binomij 5 + √16 minus √1 — 1. 3
hoc eſt
7 — √1 minus radix binomij 5 + √16 3
7 — √1 plus radix binomij 5 + √16 9

Inſtituantur multiplicationes.

Prima.

Radix binomij 5 + √16 plus 1 — √1
Radix binomij 5 + √16 minus √1 — 1
producuntur 5 + √16 minus √4 — 2
hoc eſt 9

Secunda.

7 — √1 minus radix binomij 5 + √16
7 — √1 plus radix binomij 5 + √16
pro. 50 — √196 minus 5 + √16
hoc eſt 27

Tertia multiplicatio eſt 27 ſecundi
cum numero 9 producto primo.
& producuntur 243, ultimo.
Area igitur trianguli √243.

VEL ALITER.

Summa laterum 6 plus 8 — √4, plus radix bin. 20 + √256. 18
hoc eſt
Huius medietas 3 plus 4 — √1 plus radix bin. 5 + √16 9

Exceſſus, & per conſequens quatuor numeri.

Radix binomij 5 + √16 minus 3 plus 4 — √1
Radix binomij 5 + √16 plus 3 minus 4 — √1
3 plus 4 — √1 minus radix binomij 5 + √16
3 plus 4 — √1 plus radix binomij 5 + √16

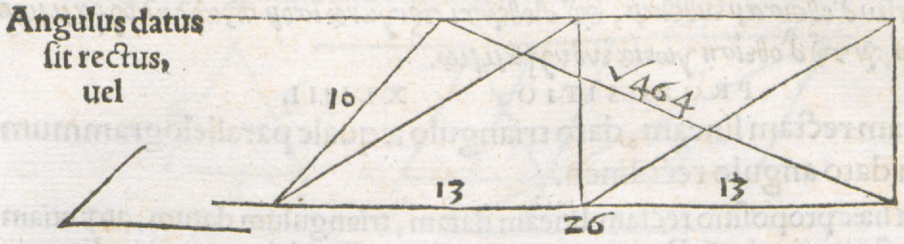
Inſtituantur multiplicationes.

Prima. Radix binomij 5 + √16 minus 3 plus 4 — √1
Radix binomij 5 + √16 plus √3 minus 4 — √1
producuntur 5 + √16 minus 9 minus 17 — √64
hoc eſt 9.

Secunda. 3 plus 4 — √1 minus radix binomij 5 + √16
3 plus 4 — √1 plus radix binomij 5 + √16
9 plus 17 — √64 minus 5 + √16
plus 12 — √9, bis
Summa productorum, ſunt 27. &c.

ALIA FIGVRA GEOMETRICA.

Angulus datus
ſit rectus,
uel



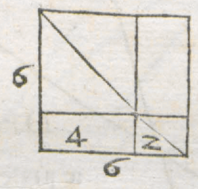
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΜΓ.

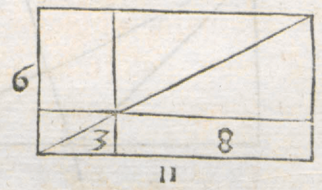
Παντὸς παραλληλογράμμου, τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων τὰ παραπληρώματα, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

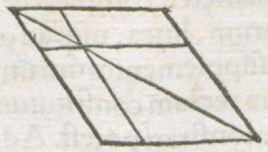
PROPOSITIO. XLIII.

Omnis parallelogrammi, eorum quæ circa diametrum ſunt parallelogrammorum ſupplementa, inter ſe ſunt æqualia.

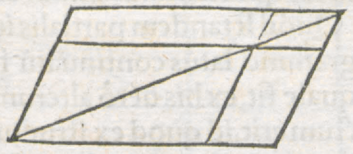
Sit parallelogrammum, ducta etiam in eo diameter, puncto deinde in uno aliquo parallelogrammi latere ubiuis ſumpto, ex hoc ad oppoſitũ uſq; latus reliquis duobus parallela ducta, ubi hæc diametrum ſecuerit, per hoc ſectionis punctum prioribus lateribus ſimiliter parallela ducenda eſt, & figura parata erit: dico igitur nunc, quòd ipſius parallelogrammi ſupplementa, hoc eſt, ea per quæ diameter non tranſit, parallelogramma, inter ſe æqualia ſint. Nam cum diameter parallelogrammum, ut auditum eſt, bifariam ſecet, ſubtractis ab æqualibus triangulis, medietatibus ſcilicet parallelogrammi, æqualibus triangulis bis, quæ tandem relinquuntur, ex communi quadam notitia, æqualia erunt. Quia autem reliqua hæc ea ſunt, quæ circa diametrum conſiſtunt parallelogrammorum ſupplementa: ergo. Omnis igitur parallelogrammi, eorum quæ circa diametrum ſunt parallelogrammorum ſupplementa, inter ſe ſunt æqualia. quod demonſtraſſe oportuit.







Diameter √108.



Diameter √223.

SEQVITVR TRIANGVLORVM CALCVLVS.

primi

Latera	exceſſus
√108	6 — √27
6	√27
6	√27
12 + √108	6 + √27

Primum productum 9. ſecun. 27
tertium 243. Area √243

ſecundi

Latera	exceſſus
√223	$8\frac{1}{2}$ — $\sqrt{\frac{223}{4}}$
11	$\sqrt{\frac{223}{4}}$ — $2\frac{1}{2}$
6	$\sqrt{\frac{223}{4}}$ + $2\frac{1}{2}$
17 + √223	$8\frac{1}{2}$ + $\sqrt{\frac{223}{4}}$

Pri. pro. $16\frac{1}{2}$ ſecun. $49\frac{1}{2}$
ter. $\frac{3267}{4}$. Area $\sqrt{816\frac{3}{4}}$

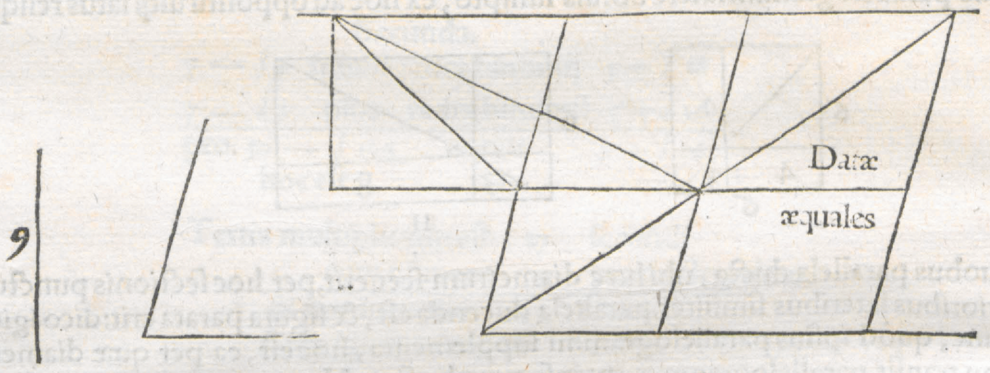
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΜΑ.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν, τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

PROPOSITIO XLIIII.

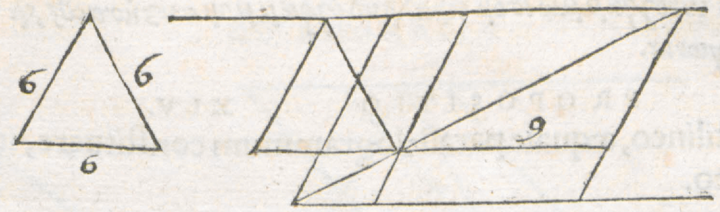
Ad datam rectam lineam, dato triangulo æquale parallelogrammum ponere, in dato angulo rectilineo.

Requirit hæc propoſitio rectam lineam datam, triangulum datum, atq; etiam angulum rectilineum datũ. Proponit autem, quomodo ad datam rectam lineam, parallelogrammum, quod & triangulo dato æquale ſit, angulum etiam dato angulo æqualem habeat, conſtituendum ſit. Eſt huius propoſitionis ſtructura facilis, propter hypotheſes, quas cum propoſitione præcedente 42. communes habet. Primo enim parallelogrammum, quod dato triangulo æquale ſit, angulum inſuper angulo æqualem habeat, per eandem 42. conſtituendum eſt. Et quoniam dicit propoſitio, ad datam rectam lineam, altero igitur iam deſcripti parallelogrammi latere, eorum quæ angulum, dato æqualem compræhendũt, ultra parallelogrammum ad longitudinem rectæ datæ, per ſecundũ poſtulatum, prolongato, ſecundũ prolongatam illam portionem & parallelogrãmi latus, quod cũ portione prolongata angulum facit, aliud cum ſua diametro parallelogrammũ deſcribatur. Et quoniam hæc diameter, ex una eius parte continuata, & latus parallelogrammi alterum, ſimiliter continuatum, propter incidentem lineam, quæ (ut facile ex tertia parte propoſitionis 29 colligitur) in una & eadem parte, duos interiores angulos duobus rectis minores facit, ex communi quadam notitia concurrunt, continuetur utrunq; horum, diameter ſcilicet & latus illud alterum, donec concurrant, atq; ex triangulo formato, cuius quidem latus unum eſt hæc tota diameter, compleatur parallelogrammum. Quòd ſi tandem partialis iuxta diametrum, linea, uſq; ad oppoſitum in parallelogrammo latus continuatũ fuerit, cum ſupplementorum utrunq; dato triangulo æquale ſit, ex his uerò alterum ſuper datam rectam conſtitutum: propoſitioni ſatisfactum erit, id quod ex ſtructura facile demonſtrari poteſt. Ad datam igitur rectam lineam, in dato angulo rectilineo parallelogrammum dato triangulo æquale poſitum eſt, quod fieri oportuit.

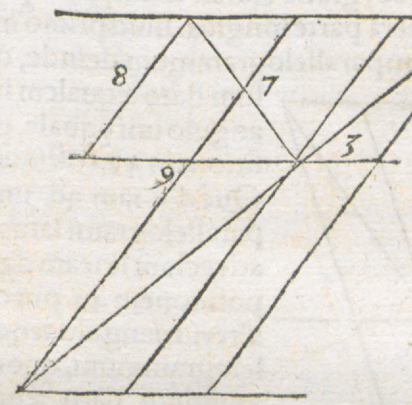


SEQVVNTVR NVNC HVIVS PROPOSITIONIS exempla alia.

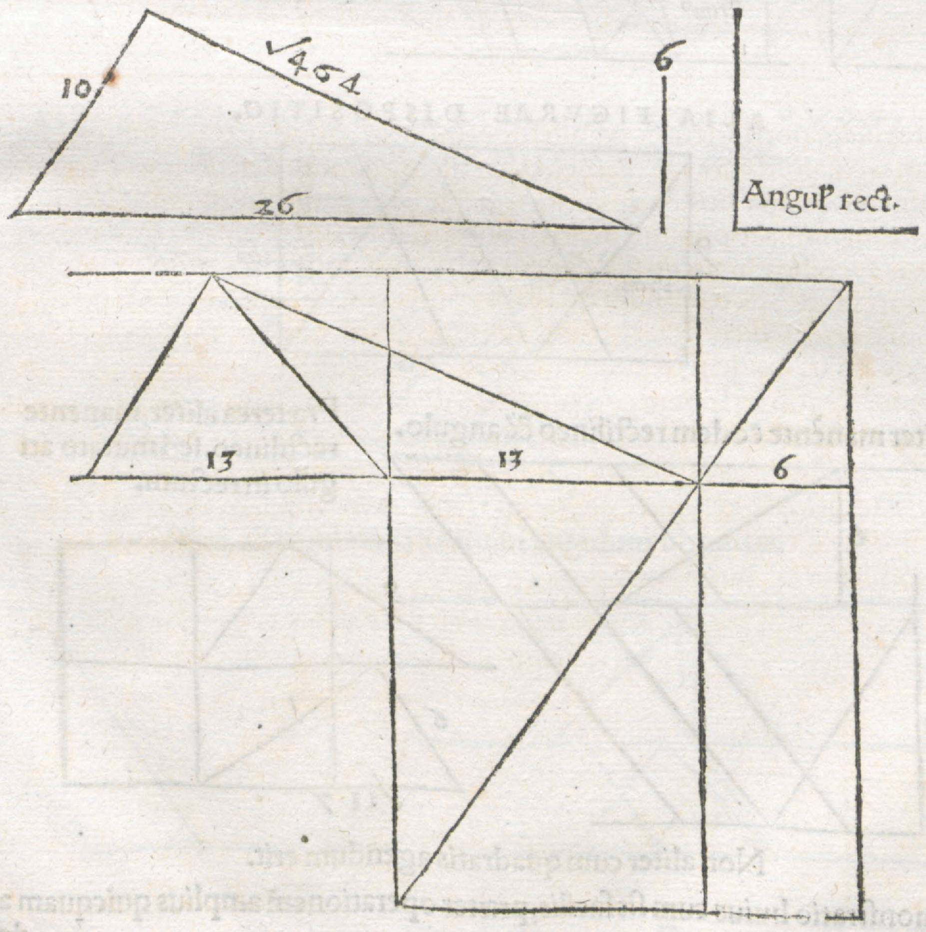
Idem exemplum, mutato tamen Iſoſceli in triangulum æquilaterum.



Adhuc aliter, triangulum autem eſto Scalenum, linea uerò data 3 punctorum.



ALIVD EXEMPLVM.



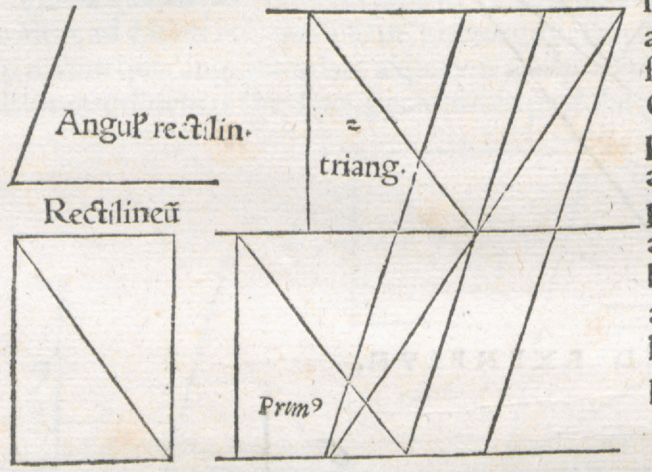
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΜΕ.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι, ἐν τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ.

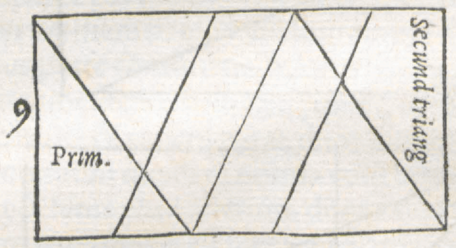
PROPOSITIO XLV.

Dato rectilineo, æquale parallelogrammum conſtituere, in dato angulo rectilineo.

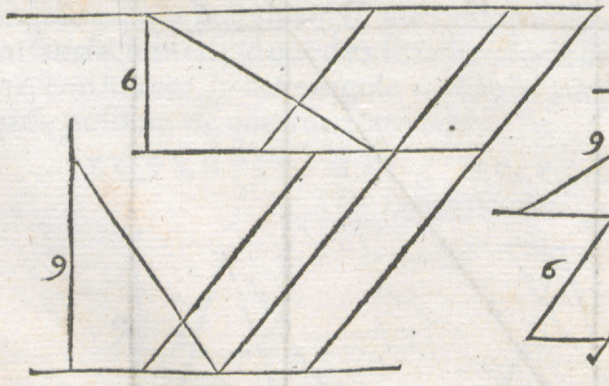
Quod præcedens 42 de triangulo tantũ propoſuit, petit uel iubet hæc fieri cum omni rectilineo. Eſtq; hæc præſens quàm ſuperior magis generalis, & latius patet. Sit itaq; datum rectilineum qualecumque, gratia tamen exempli, & propter faciliorem operationem, Quadrilaterum altera parte longius. Illud primò in duo triangula, per diametrum ductam, ſoluendum: parallelogrammum deinde, quod angulum dato æqualem habeat, triangulo uni ęquale, per propoſitionem 42, cõſtituendum eſt. Quòd ſi iam ad unum huius parallelogrãmi latus, tanquam ad rectam lineam datã, per propoſitionem 44 præcedentem, alteri triangulo æquale parallelogrammum, quod & ipſum angulum dato æqualem habuerit, cõſtituatur, ſatisfactum propoſitioni erit.



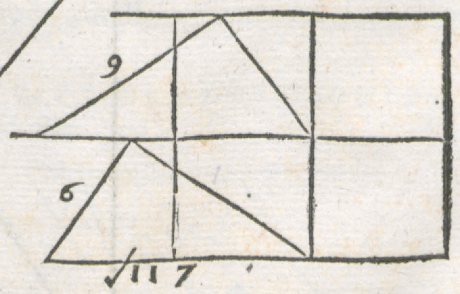
ALIA FIGVRAE DISPOSITIO.



Aliter manente eodem rectilineo & angulo.



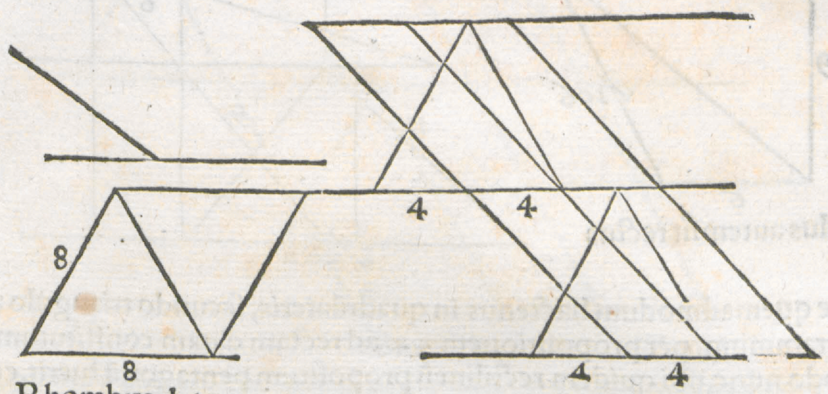
Præterea aliter, manente rectilineo, ſed mutato angulo in rectum.



Non aliter cum quadratis agendum erit.

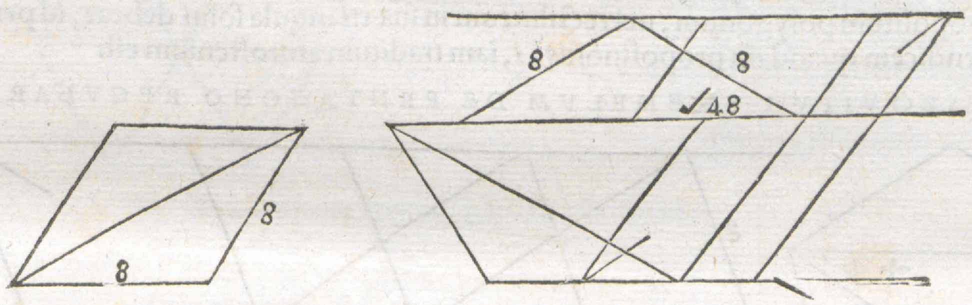
Demonſtratio huius cum ſit facilis, præter operationem amplius quicquam addere nolui, copioſum tantum, propter difficilem huius praxim, in exemplis me uarijs oſtendens.

DE RHOMBO.

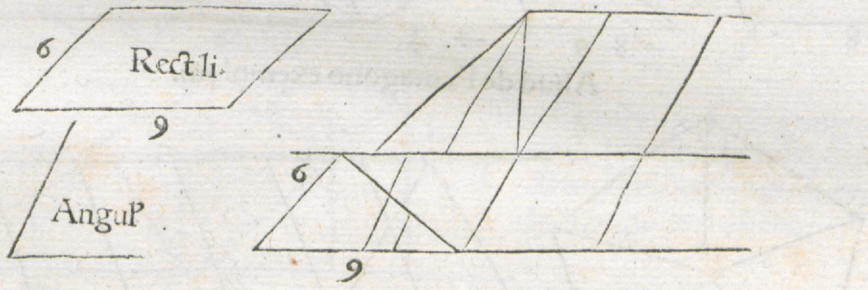


Rhombus datus.

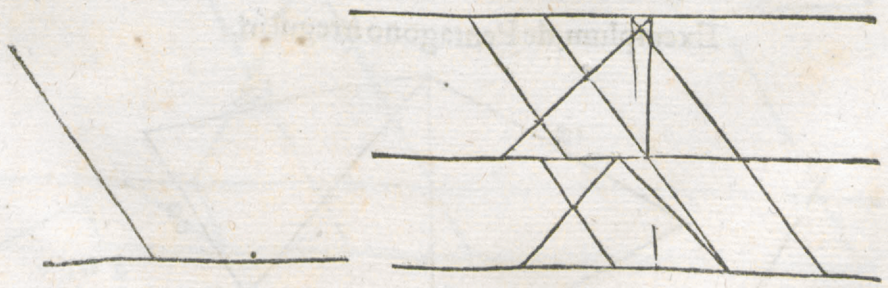
De eodem Rhombo, aliter tamen in triangula ſoluto.



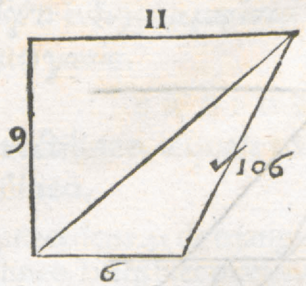
SIC ETIAM QVADRILATERVM, QVOD RHOMBOIDES appellatur, uariari poterit, ut ſequitur.



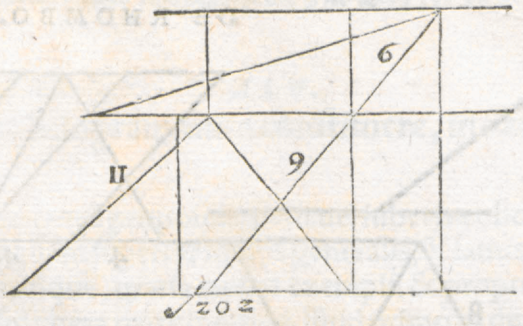
Idem aliter, mutato acuto in angulum obtuſum.



EXEMPLVM DE QVADRILATERO IRREGVLARI.

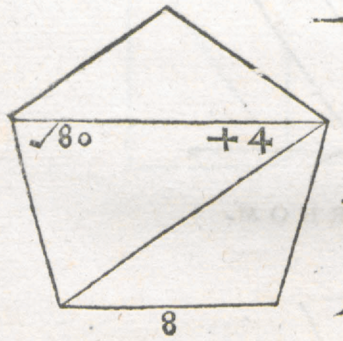


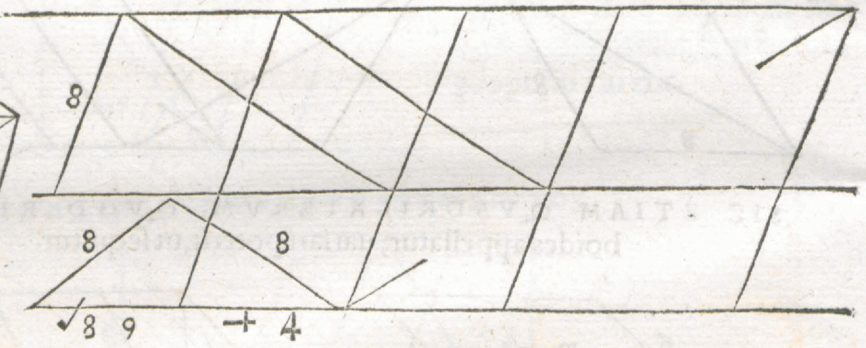
Angulus autem ſit rectus



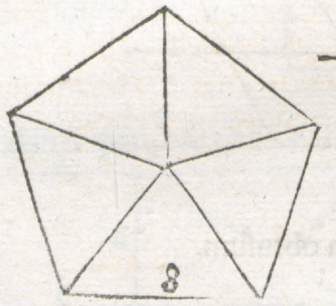
Proinde quemadmodum hactenus in quadrilateris, ſecundo triangulo æquale parallelogrammum, per propoſitionem 44. ad rectam datam conſtitutum eſt, ita eodem modo nunc, ubi quidem rectilineũ propoſitum pentagonũ fuerit, eo in ſua triangula ſoluto: & triangulo tertio per eandem propoſitionem æquale parallelogrammũ addi poterit, atq; ſic deinde etiam abſolui triangulũ quartum in Hexagonis, & quintũ in Heptagonis, ac ordine deinceps. Quomodo autem unumquodq; propoſitum polygonum, uel rectilineum in ſua triangula ſolui debeat, id per appendicem quandam propoſitionis 32, iam traditum atq; oſtenſum eſt.

SEQVITVR EXEMPLVM DE PENTAGONO REGVLARI.

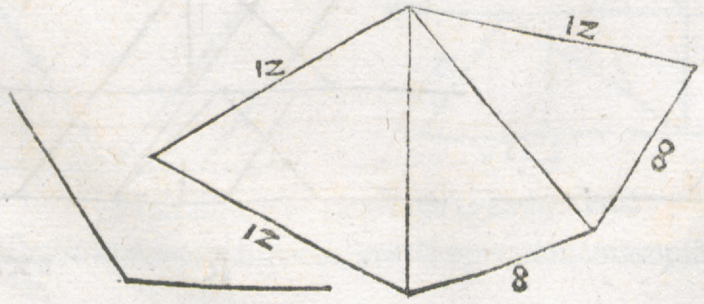




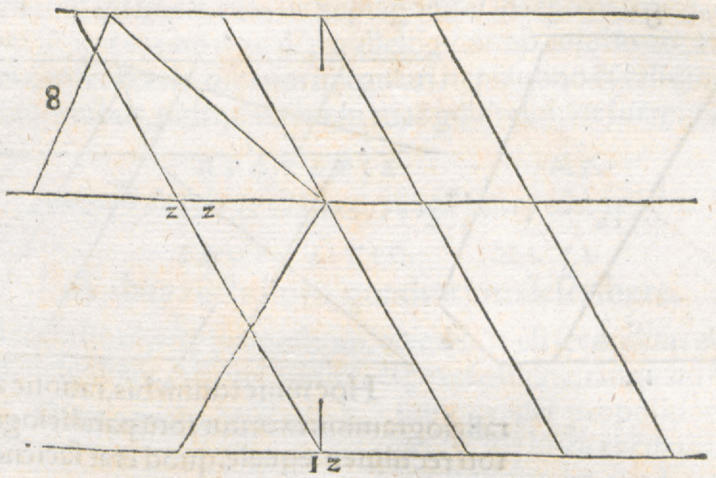
Aliud de Pentagono exemplum.



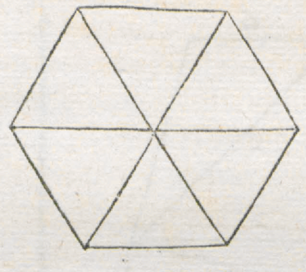
Exemplum, de Pentagono irregulari.

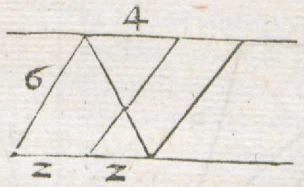


Constitutio huius pentagoni irregularis.



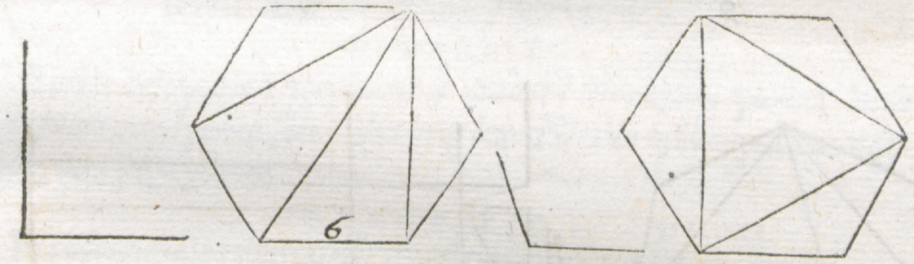
EXEMPLVM HEXAGONI REGVLARIS.

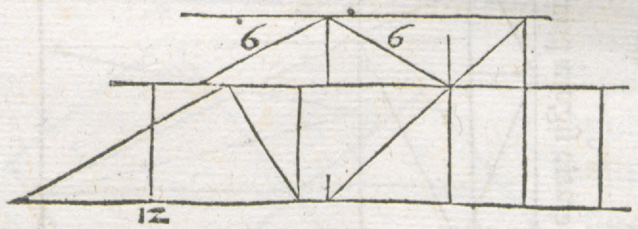




Hoc nũc ſexies (cum ſex ſint triangula inter ſe æqualia) hexagono parallelogrãmũ æquale, in dato angulo rectilineo cõſtitutum erit.

Vel ſit illa hexagoni in triangula diuiſio.

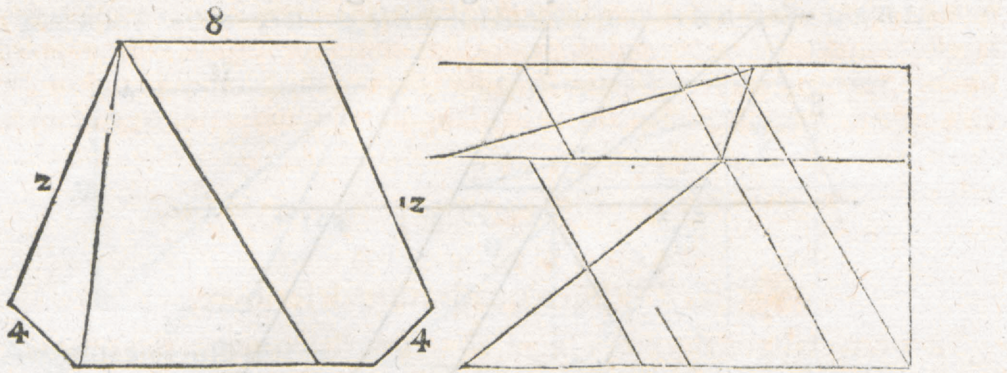




Constitutio hexagoni prioris in parallelogrãmũ, quod dato rectilineo angulo æqualem angulum habeat.

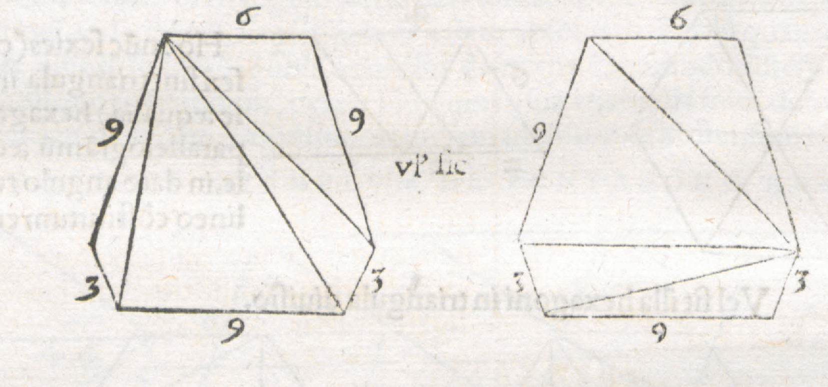
Constitutio hexagoni poſterioris, &c.

EXEMPLVM HEXAGONI IRREGVLARIS.

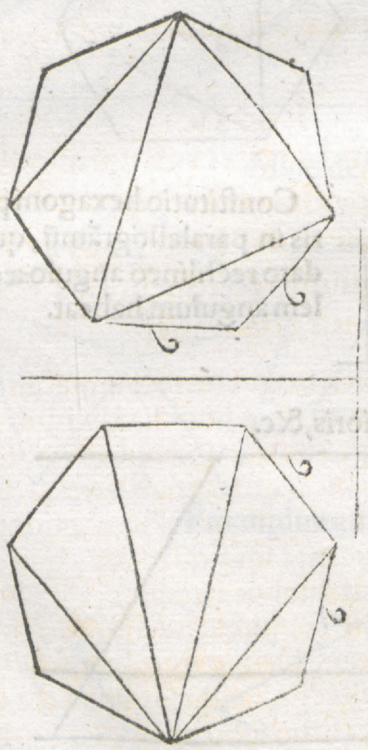


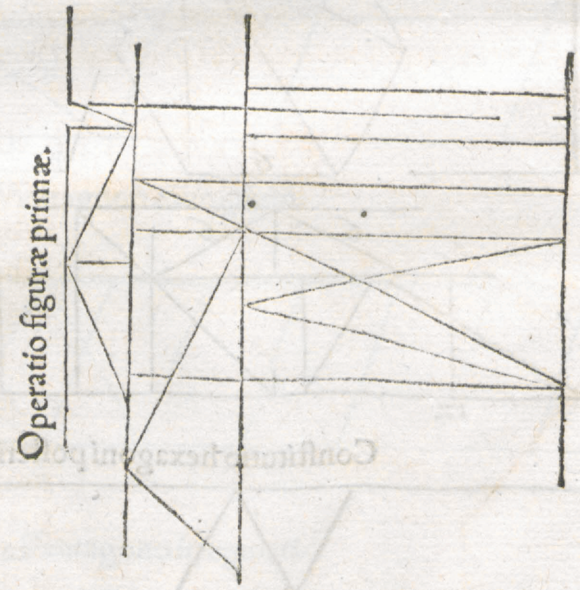
Hoc nunc totum bis, ratione alterius parallelogrammi: exoritur totũ parallelogrammum, toti rectilineo æquale. quod erat faciendum.

Aliter, ſimilis formæ hexagonum irregulare, in ſua triangula ſolutum.



EXEMPLVM DE HEPTAGONO REGVLARI.





Secundæ figuræ eadem erit operatio.

Quòd ſi à puncto heptagoni medio, hoc eſt à centro, ſeptem ad ipſius angulos rectæ ductæ fuiſſent lineæ, cum ſic heptagonum in ſeptem inter ſe æqualia triangula reſolutum ſit, uni eorum æquali parallelogrammo conſtituto, eo deinde ſepties ſumpto, res confecta erit. Sic cum irregulari heptagono & reliquis multorum laterum figuris omnibus, poſtquam hæ in triangula reſolutæ fuerint, agendum erit.

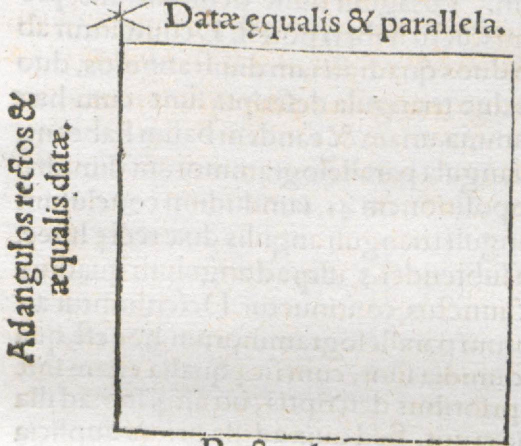
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΜϚ.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας, τετράγωνον ἀναγράψαι.

PROPOSITIO. XLVI.

À data recta linea, quadratum deſcribere.

Sit data recta linea, atq; propoſitum, ab ea, hoc eſt ſecundum eius quantitatem, quadratum deſcribere. Ab una igitur rectę extremitate, tanquam à puncto in linea ſumpto, per propoſitionem 11. ad angulos rectos linea excitetur: atque hac, per propoſitionem 3. ad æqualitatem datæ poſita, ab eius extremitate altera, & libera adhuc, tanquam à puncto dato, datæ rectæ ęqualis & parallela ducatur. Quòd ſi tandem altera ductæ parallelæ extremitas, cum altera datæ extremitate, recta linea cōiungatur, propoſitioni ſatisfactum erit. Demonſtrationem huius, qui eorum quæ in ſtructura facta ſunt, eorum item quæ hactenus tradita recordabitur, ex definitione tandē quadrati facile colligere poterit.

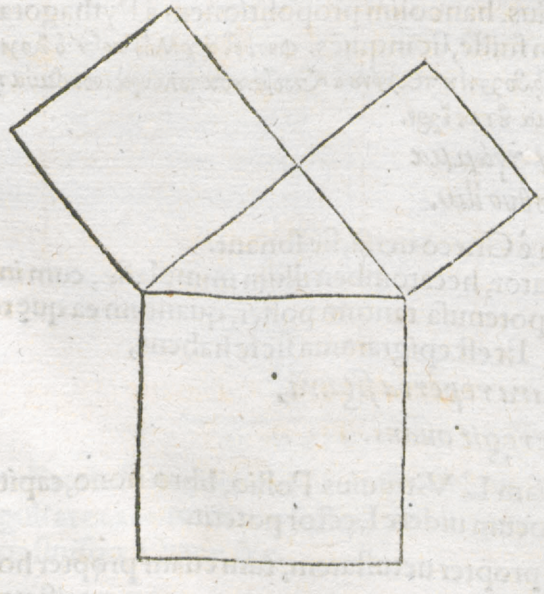


ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΜΖ.

Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις· τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις.

PROPOSITIO XLVII.

In rectangulis triangulis: quadratum quod à latere rectum angulum ſubtendente deſcribitur, æquale eſt eis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus deſcribuntur quadratis.



Sit triangulum rectangulum, quadrata etiam à ſingulis lateribus, per propoſitionem præcedentem, deſcripta: dico, quadratum lateris ſubtendentis angulum rectum, tantum eſſe, quanta ſunt quadrata, quæ à reliquis duobus lateribus, angulum rectum comprehendentibus, deſcribuntur. Demittatur ab angulo trianguli recto, tanquam à puncto dato, ſuper ſuam ſubtenſam, per propoſitionem 12. linea perpendicularis, atque hæc ad latus uſq; oppoſitum per quadratum cõtinuetur, & erit quadratum lateris, angulum rectum ſubtendentis, in duo parallelogramma diuiſum, quorum unum quidem uni, alterum uerò alteri reliquorum laterum quadrato æquale eſſe, ſic demonſtrabitur. Quoniam enim triangulum ex hypotheſi rectangulum eſt, ſinguli etiam quadratorum anguli, ex definitione, recti ſunt: angulus in orthogonio rectus cum utroq; eorum qui ſunt ei ἐφεξῆς, duobus rectis angulis æquales erunt. Illud igitur utriuſq; quadrati latus, quod quidem extra triangulum eſt poſitum, illi trianguli lateri, cui applicatum eſt, ex propoſitione 14, adamuſſim iunctum, & cum eo una linea erit, quod eſt notandum. Præterea, quoniam anguli recti, ex communi quadam noticia, inter ſe ſunt æquales, & quoniam etiam, Si æqualibus æqualia, uel aliquod commune adijciatur, quæ inde colliguntur æqualia ſunt: per hęc duo, bis uſurpata, erunt ex utraque parte rectanguli, circa acutos angulos, duo duobus angulis æquales, quod & ipſum notandum. His igitur nunc demonſtratis, propoſitionis ueritas tali, ut ſequitur, linearum ductu haberi poteſt. Demittantur ab angulo triãguli recto, ad remotiores ab eo duos quadrati iam diuiſi angulos, duo rectæ lineæ. Et quoniam his duabus rectis duo triangula deſcripta ſunt, cum hæc eadem triangula, atq; ipſorum parallelogramma, unam & eandem baſim habeant, in eiſdem etiam parallelis conſtituta ſint: triangula parallelogrammorum dimidia, uel contrà, hæc ad illa duplicia eſſe, per propoſitionem 41. iamdudum concluſum eſt. Ducantur ultimò, etiam ab acutis rectanguli trianguli angulis duæ rectę lineę, quarum utraq; per latus eundem angulum ſubtendens, uſq; ad angulum quadrati illum, cui idem acutus hactenus non eſt cõiunctus, continuetur. Deſcribuntur autem ſic duo triangula alia, quæ ſimiliter ſuorum parallelogrammorum, hoc eſt, quadratorum à lateribus duobus deſcriptorũ, dimidia ſunt, cum ſic ęqualia etiam ſint ex propoſitione 4, bis uſurpata, triangulis prioribus deſcriptis, utrunq; ſuo: ad illa priora triangula, eadem quadrata duplicia erunt. Sed quia ad illa priora duplicia etiam ſunt, ut quidem demonſtratũ eſt, duo partialia diuiſi quadrati parallelogramma: per cõmunem igitur noticiam, Quæ eiuſdem duplicia, æqualia inter ſe ſunt, parallelogramma partialia, quadratum nimirum lateris, angulum rectum ſubtendentis, reliquorum duorum laterum quadratis æquale erit. In rectangulis igitur triangulis, quadratum quod à latere rectum angulum ſubtendente deſcribitur, æquale eſt ęis, quę à lateribus rectum angulũ continentibus deſcribuntur quadratis, quod demonſtrari oportuit.

APPENDIX.

Porrò ex Apollodoro refert Laertius, hanc olim propoſitionem à Pythagora, Italicę philoſophiæ principe, inuentam fuiſſe, ſic inquiẽs. φησὶ δὲ Ἀπολλόδωρος ὁ λογιστικὸς, ἑκατόμβην θῦσαι αὐτὸν, εὑρόντα ὅτι τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ ὑποτείνουσα πλευρὰ ἴσον δύναται ταῖς περιεχούσαις. Καὶ ἔστιν ἐπίγραμμα οὕτως ἔχον.

Ηνικε Πυθαγόρης τὸ περικλεὲς εὕρατο γράμμα
Κεῖν' ἐφ' ὅτῳ κλεινὴν ἤγαγε βουθυσίην.

Hæc in Latinum ſermonem è Græco uerſa, ſic ſonant.

Refert autem Apollodorus ſupputator, hecatomben illum immolaſſe, cum inueniſſet, quòd trianguli rectanguli hypotenuſa tantum poſſet, quantum ea quę rectum angulum continerent latera. Et eſt epigramma ſic ſe habens,

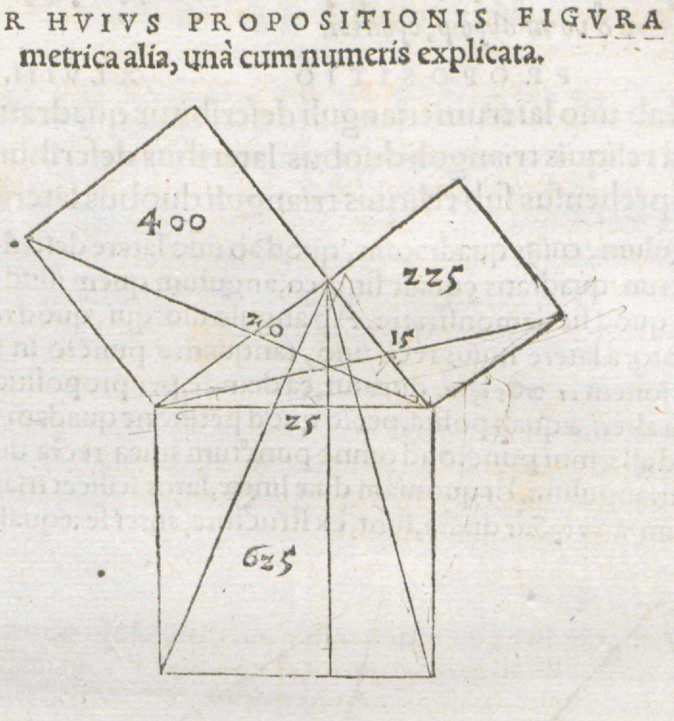
Poſtquam à Pythagora eſt præclara reperta figura,
Tunc centum ille boum ſacra peregit ouans.

Hoc idem attribuit Pythagoræ etiam L. Vitruuius Pollio, libro nono, capite quarto ſuæ architecturæ: atque hunc locum uidere Lector poterit.

Citauimus autem hęc libenter, cùm propter uetuſtatem, tum etiam propter honorificam

norificam & Pythagoræ & propoſitionis huius mentionem, cum illius in omnibus ferè rationibus nõ ſit mediocris uſus. Hinc eo maiori ſtudio & diligentia perdiſcenda, memoriæq; commendanda eſt.

SEQVITVR HVIVS PROPOSITIONIS FIGVRA GEOmetrica alia, unà cum numeris explicata.



OPERATIO TRIANGVLORVM QVANTVM AD areas inueniendas.

Triangulum unum, cuius

	Latera quidem ſunt		Exceſſus uerò
	$\surd 1450$		$20 - \surd \frac{1450}{4}$
	25		$\surd \frac{1450}{4} - 5$
	15		$\surd \frac{1450}{4} + 5$
Summa	$40 + \surd 1450$	Medietas	$20 + \surd \frac{1450}{4}$

Quatuor numeri.

$20 - \surd \frac{1450}{4}$. $\surd \frac{1450}{4} - 5$. $\surd \frac{1450}{4} + 5$. $20 + \surd \frac{1450}{4}$.

Productum pri. $37\frac{1}{2}$, ſecundum $337\frac{1}{2}$, tertium $\frac{50625}{4}$ atq; area tandem trianguli $112\frac{1}{2}$. Et tanta eſt etiam medietas parallelogrammi partialis, uel quadrati, quod eſt à parte dextra.

Triangulum alterum, quod habet

Latera	Exceſſus itaq;
$\surd 1625$	$\frac{45}{2} - \surd \frac{1625}{4}$
25	$\surd \frac{1625}{4} - 2\frac{1}{2}$
20	$\surd \frac{1625}{4} + 2\frac{1}{2}$
$45 + \surd 1625$	$\frac{45}{2} + \surd \frac{1625}{4}$

Productum primum 100, ſecundum 400, tertium 40000, atq; tandem trianguli area, 200. medietas ſcilicet alterius partialis parallelogrammi, uel quadrati partis ſiniſtræ. Quare, &c.

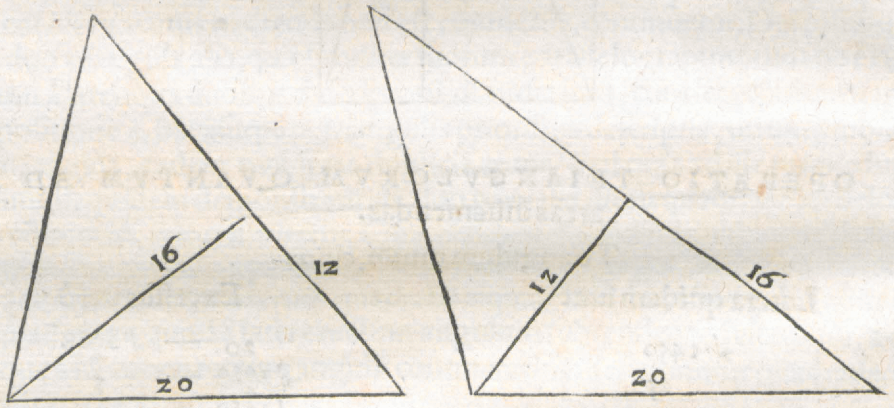
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΜΗ.

Ἐὰν τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετράγωνον, ἴσον ᾖ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τετραγώνοις· ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν, ὀρθή ἐστι.

PROPOSITIO XLVIII.

Si quod ab uno laterum trianguli deſcribitur quadratum, æquale fuerit eis quæ à reliquis trianguli duobus lateribus deſcribuntur quadratis: angulus cõprehenſus ſub reliquis trianguli duobus lateribus, rectus eſt.

Sit triangulum, cuius quadratum, quod ab uno latere deſcribitur, reliquorum duorum laterum quadratis ęquale ſit: dico, angulum quem illud latus ſubtendit, rectum eſſe. id quod ſic demonſtratur. Ab angulo illo, qui, quòd rectus ſit, demonſtrari debet, atq; à latere huius recti uno, tanquam à puncto in recta dato, linea, per propoſitionem 11, πρὸς ὀρθὰς ducatur, ea deinde, per propoſitionem 3, lateri circa hunc rectum alteri, æquali poſita, per id quod petitione quadam permiſſum eſt, nimirum quòd ab omni puncto ad omne punctum linea recta duci poſſit, claudatur tandem triangulum. Et quoniam duæ lineæ, latus ſcilicet trianguli unum, & extra triangulum πρὸς ὀρθὰς ducta, ſunt, ex ſtructura, inter ſe æquales: quod quadrata, ab his æqualibus deſcripta, inter ſe æqualia ſint, manifeſtum eſt. Hinc æqualibus his quodam communi, quadrato ſcilicet lateris alterius, ad quod nimirum extra triangulum linea πρὸς ὀρθὰς ducta eſt, addito: & producta iam, uel collecta, inter ſe æqualia erunt. Quoniam autem utrunq; horum, unum quidem ex hypotheſi, alterum uerò ex propoſitione præcedenti, unius lateris quadrato æquale eſt: & horum duorum quadratorum latera inter ſe æqualia erunt. Igitur, cũ iam duo, qualia ipſa 8. propoſitio requirit, triangula appareãt: angulus ille quem propoſiti trianguli latus, quod in reliqua duo poteſt, ſubtendit, per eandem octauam, rectus erit.



Si igitur ab uno alicuius trianguli latere quadratum deſcriptum, à reliquorum
duorum laterum deſcriptis quadratis æquale fuerit: angulus ille,
quem hoc latus ſubtendit, rectus erit. quod
demonſtraſſe oportuit.

FINIS LIBRI PRIMI.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

EVCLIDIS ELEMENTORVM GEOmetricorum *liber ſecundus.*

SVmit ex hoc libro ſecundo Arithmeticus pulchra ſui calculi compendia, multæ item regularum Algebræ æquationes, & nonnulla etiam harum regularum fundamenta, per huius ſecundi libri propoſitiones demonſtrare ſolet. Habet pręterea is liber propoſitiones duas, unam quidem pro Amblygonio, alteram deinde pro Oxygonio triangulo. illæ uerò quantum utilitatis, ſi in re aſtronomica ad penultimam propoſitionem primi, de Orthogonio triangulo expoſitam, referantur, afferre ſoleant, norunt qui in hac diſciplina aliquandiu uerſati ſunt. Quare ſi nullum alium præterea uſum haberet, ob has duas ſaltem propoſitiones præſens hic liber maximopere amplectendus & perdiſcendus eſſet.

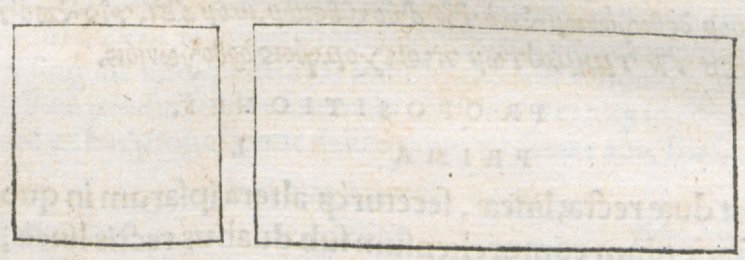
ΟΡΟΙ.

Πᾶν παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον περιέχεσθαι λέγεται, ὑπὸ δύο, τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν

DEFINITIONES.

Prima. Parallelogrammum rectangulum quid.

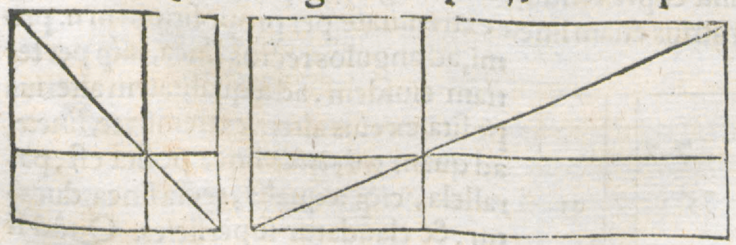
Omne parallelogrammum rectangulum ſub duabus, rectum angulum comprehendentibus, rectis lineis dicitur contineri.



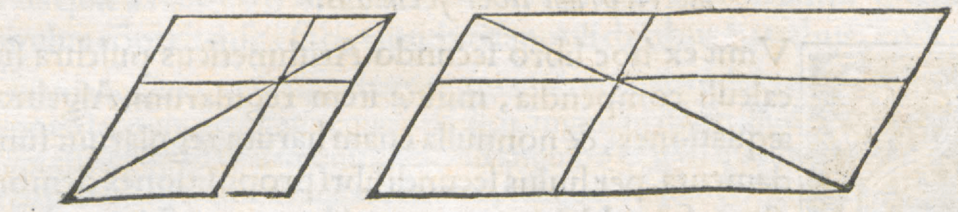
Παντὸς δὲ παραλληλογράμμου χωρίου, τῶν περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ ἓν παραλληλογράμμων ὁποιονοῦν, σὺν τοῖς δυσὶ παραπληρώμασι, Γνώμων καλείσθω.

Secunda. Gnomon quid.

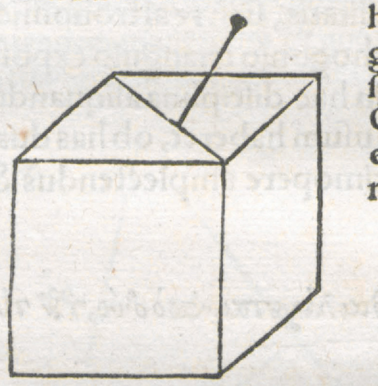
Omnis parallelogrammi ſpacij, eorum quæ circa diametrum illius ſunt parallelogrãmorum unumquodque, cum duobus ſupplementis, Gnomon uocetur.



Sententia definitionis eſt, Omnis parallelogrammi, quod quidem per ductam ipſius diametrum, ac duas deinde in eo rectas, quæ ſeſe mutuò in communi quodam diametri puncto ſecant, lineas ductas, in quatuor partialia parallelogramma alia diuiſum eſt, utrunq; eorum, per quæ diameter tranſit, cum reliquis duobus parallelogrammis, quæ extra diametrum ſunt poſita, atq; ſupplementa uocata, Gnomonem nominari.



Eſt hæc Gnomonis definitio generalior, quàm quæ à Vitruuio eſt poſita, cum hæc rectum tantum angulum, illa uerò cuiuſcunq; generis angulos, modo parallelogrammum fuerit ſpacium, conſideret. Definit autem ferè his uerbis Gnomonem Vitruuius, lib. 9. cap. 7. Architecturæ, eum eſſe ac formari, quando ex medio planiciei linea πρὸς ὀρθὰς erigitur.



ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.

ΠΡΩΤΗ. Α.

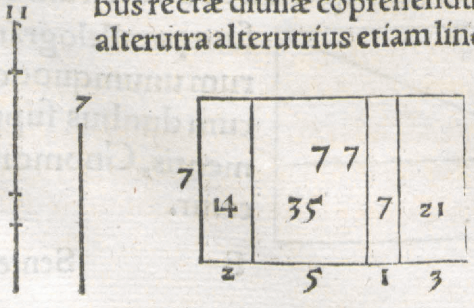
Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι, τμηθῇ δὲ ἡ ἑτέρα αὐτῶν εἰς ὅσα δήποτε τμήματα· τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν, ἴσον ἐστὶ, τοῖς ὑπό τε τῆς ἀτμήτου καὶ ἑκάστου τῶν τμημάτων περιεχομένοις ὀρθογωνίοις.

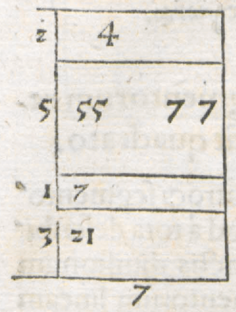
PROPOSITIONES.

PRIMA I.

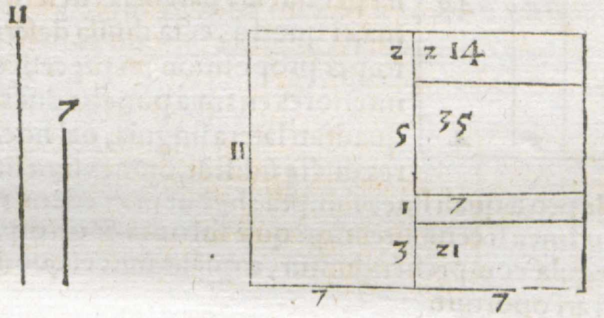
Si fuerint duæ rectæ lineæ, ſeceturq; altera ipſarum in quotcunq; ſegmenta: rectangulum comprehenſum ſub duabus rectis lineis, æquale eſt eis, quæ ab inſecta & quolibet ſegmentorum rectangulis comprehenduntur.

Sint duæ rectę lineæ, harum etiam altera in partes quotcunq; diuiſa: dico, rectangulum ſub duabus datis rectis cõprehenſum, eis, quæ ſub indiuiſa & ſingulis partibus rectæ diuiſæ cõprehendũtur rectangulis, æquale eſſe. Excitetur ex alterutra alterutrius etiam lineæ extremitate, per propoſitionem 11. primi, ad angulos rectos linea, eaq; per tertiam eiuſdem, ad æqualitatem alterius poſita, ex eius altera extremitate, lineæ, ad quam πρὸς ὀρθὰς linea poſita eſt, parallela, eiq; æqualis, recta linea ducatur, & claudatur ſuperficies. Quòd ſi iam ex ſingulis diuiſæ lineæ punctis, lineæ rectę, eis quæ ab extremitatibus eiuſdem diuiſæ modò eductæ ſunt, per 31 primi, parallelæ, ad latus uſq; oppoſitum tendentes, ductę fuerint, hac ſtructura tandem propoſitio ſic retinebitur. Quoniam enim totale ipſis partialibus parallelogrammis, ut apparet, æquale eſt, totale autem cum ſub duabus rectis datis, ęquali pro æquali linea ſumpta, partialia item ſingula ſub indiuiſa & ſingulis partibus diuiſę, & hic æquali ſubinde pro æquali linea ſumpta, contineantur: ſub duabus igitur datis comprehenſum rectangulũ eis quæ ſub indiuiſa & ſingulis partibus diuiſæ continẽtur rectangulis, æquale erit. Si fuerint igitur duæ rectę lineæ, quarum altera quidem in ſegmenta quotcunq; ſecetur: rectangulum ſub duabus rectis lineis comprehenſum, ęquale eſt eis, quæ ab inſecta & quolibet ſegmentorum rectangulis comprehenduntur. quod demonſtrari oportuit.





POTEST FIGVRA ETIAM SIC INSTITVI.



Quia uerò omnes huius ſecundi libri propoſitiones generaliter & de lineis & de numeris intelligi, atq; per ea declarari poſſunt, ideo etiam, ut quæq; propoſitio ſuos proprios numeros, ſuas etiam conuenientes & debitas lineas haberet, diligenter curauimus. id quod boni conſulere Lector uelit.

APPENDIX.

Solent Arithmetici nõ rarò in multiplicatione, numerum unum eorum, qui inter ſe multiplicari debent, in partes aliquot diſtribuere: alterum deinde, cum partibus diſtributi ſingulis multiplicare, ac multiplicationis tandem productum, per horum partialium productorum ſummam repręſentare: atq; id certe compendio quodam, quod ex hac propoſitione deſumptum eſt, facere eos, ſtudioſi ſciant.

EXEMPLVM SIT.

Indiuiſus	diuiſus in par.	Aliàs multiplicatione ſic,
74	37	
1480	20	74
740	10	37
370	5	518
148	2	222
2738	ijdem numeri	2738

Huius compendij frequens uſus eſt circa multiplicationem in regula Proportionum.

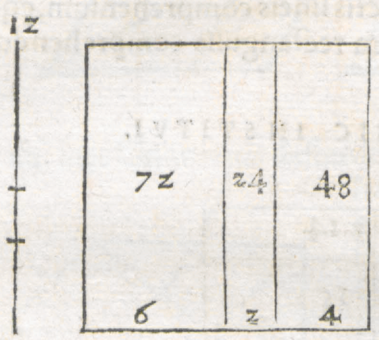
Quòd ſi uerò numeri illi propoſiti æquales inter ſe fuerint, utuntur pro hac prima, ſequenti propoſitione ſecunda, ut quæ idem ſub una recta linea, uel numero, bis tamen eo repetito, proponit, atq; in hoc prima à ſecunda propoſitione differt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὰ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑκατέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενα ὀρθογώνια, ἴσα ἐστὶ, τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης τετραγώνῳ.

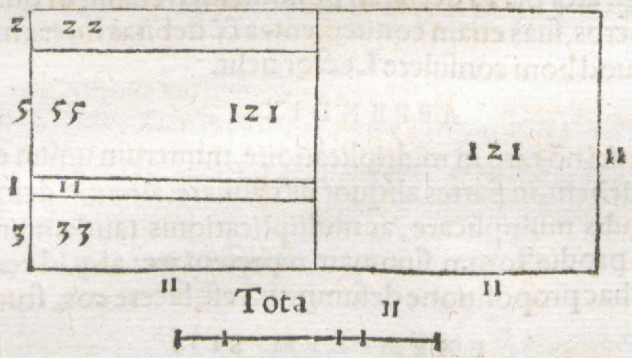
PROPOSITIO II.

Si recta linea ſecetur utcunq;: quę ſub tota & utroq; ſegmentorum rectangula comprehenduntur, æqualia ſunt ei quod à tota fit quadrato.



Sit recta linea in partes utcunq; diuiſa: dico, quæ ſub tota & utroq; ſegmentorum rectangula comprehenduntur, æqualia eſſe ei quadrato, quod à tota deſcribitur. Deſcribatur à recta data quadratũ, ex puncto deinde uel punctis diuiſionum ſingulis (nam & plurium ſegmentorum lineam hęc propoſitio ferre poteſt) ad angulos rectos lineæ, uel ſi magis placet, utriq; eorum, quæ diuiſæ datæ ad rectos inſiſtunt, laterum parallelæ, uſque ad oppoſitum latus ducantur. Et quoniam partialia per ductas parallelas deſcripta parallelogramma, ei quod à recta diuiſa deſcriptum eſt, quadrato, per propoſitionem pręcedētem æqualia ſunt, interiores etiam à punctis ductæ rectæ lineæ, & quadrati latera ſingula, uel hoc ſolum, cui interiores ductę inſiſtũt, omnes ſunt lineæ inter ſe ęquales, æquali ſubinde pro æquali linea ſumpta: hęc ut præcedens tandem manifeſta erit. Si recta igitur linea ſecetur utcunq;: quæ ſub tota & utroq;, uel quolibet ſegmentorum rectangula comprehenduntur, æqualia ſunt ei quod à tota fit quadrato. quod demonſtrari oportuit.

POTEST FIGVRA ETIAM SIC INSTITVI.



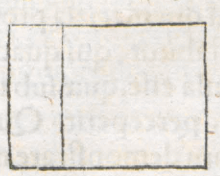
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχε, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ προειρημένου τμήματος τετραγώνῳ.

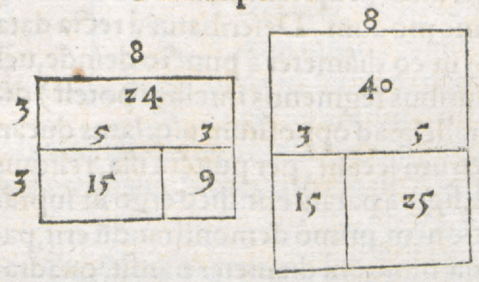
PROPOSITIO III.

Si recta linea ſecetur utcunq;: rectangulum ſub tota & uno ſegmentorum comprehenſum, ęquale eſt ei quod ſub ſegmentis comprehenditur rectangulo, atq; ei quod à prædicto ſegmento deſcribitur quadrato.

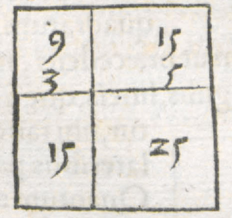
Sit recta linea ſecta utcunq;: dico, rectangulum quod ſub tota & uno eius ſegmentorum cōprehenditur, id ęquale eſſe rectangulo ſub ſegmentis comprehenſo, cum quadrato pręcicti ſegmenti. Deſcripta figura ut requiritur, demonſtratio ex propoſitione prima ſumi poterit, ſegmento illo in quod tota diuiſa ducta eſt, pro altera linea ſumpto. Erunt enim ſic duæ rectæ, una diuiſa, ipſa ſcilicet expoſita, & altera indiuiſa, dictum nimirum ſegmentum. de quo unumquemq; admonitum eſſe uolui.



Alia diſpoſitio.



Sunt hic compendio quodam, duo exempla ſimul iuncta.



ALIA HVIVS REI DEMONSTRATIO.

Deſcribatur ab uno ſegmentorum, utrum hoc fuerit, quadratum: latere deinde quadrati eo, quod diuiſæ rectę opponitur, ad quantitatem ſegmenti alterius ſecundum continuationem in rectum eiecto, à termino illo, tanquam à puncto dato, reliquis duobus quadrati lateribus, per propoſitionem 31. primi, parallela ducatur. Et quoniam, quod ſic deſcriptum eſt totum, duobus, quadrato ſcilicet deſcripto, & rectangulo cuidam, ęquale eſt, totum autē cum ſub tota recta & linea quadam uni ſegmentorum æquali comprehendatur, alia uerò duo, unum quidem ſub ſegmentis diuiſę comprehenſum, alterum uerò ex priori ſegmento quadratum deſcriptũ eſſe appareat, id quod uolebat propoſitio, iam ſic ſe habere manifeſtè patet. Si recta igitur linea ſecetur utcunq;: rectangulũ ſub tota & uno ſegmentorum comprehenſum, ęquale eſt ei, quod ſub ſegmentis comprehenditur rectangulo, atq; ei, quod à prædicto ſegmento deſcribitur quadrato. quod demonſtraſſe oportuit.

Eſt autem huius textus figura geometrica ea, quæ ex ſuperioribus eſt in ordine prima.

HAEC PROPOSITIO IN NVMERIS SIC SE HABET.

partes
Totus { 8
14 {
14 { 6
8
112 æquales

8 8
6 8
48 64
112

partes
Totus { 12
29 {
29 { 17
12
348 æquales

17 12
12 12
204 144
348

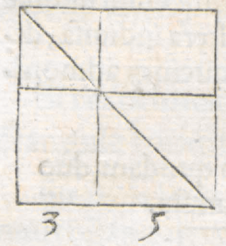
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ.

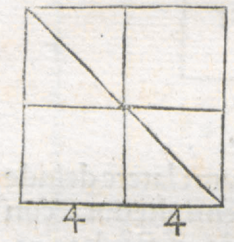
Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχε, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετράγωνον, ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις, καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

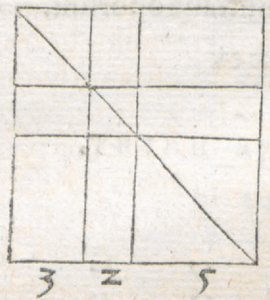
PROPOSITIO IIII.

Si recta linea ſecetur utcunq;: quadratũ quod à tota deſcribitur, ęquale eſt quadratis, quæ fiunt à ſegmentis, & ei quod bis ſub ſegmentis comprehenditur rectangulo.

Sit recta quædam linea data, in duo etiam ſegmenta utcunq; diuiſa: dico, quòd





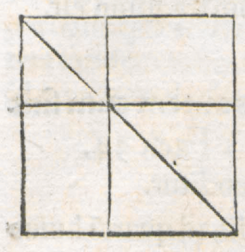


quadratum à tota deſcriptũ, æquale ſit quadratis quæ à ſegmentis fiunt, & ei quod ſub ſegmentis comprehenditur bis. Eſt hæc quarta nihil aliud quàm tertia propoſitio repetita bis, id quod cuilibet manifeſtabitur, qui quadratum totius (mutato nomine) duo rectangula eſſe, quæ ſub tota & duobus ſegmentis comprehenduntur, perceperit. Quare cum iam tertia demonſtrata ſit, hanc quartam demonſtrare non erit neceſſe. Quia uerò non mediocris eſt, in Arithmeticis præſertim, huius propoſitionis uſus, propriam eius demonſtrationem adducere libuit in hunc modum. Deſcribatur à recta data quadratum, ducatur etiam in eo diameter à puncto deinde, uel punctis (nam ut præcedens, ita & hæc de pluribus ſegmentis intelligi poteſt) diuiſionum ſingulis, lineis, quę à latere ſunt, parallelæ ad oppoſitum uſq; latus ducantur, ubi tandem hæ diametrum ſecant, per puncta illa, reliquis lateribus parallelis ductis, figura parata erit: dico ergo ut ſuprà. Quantum ad demonſtrationem, primò demonſtrandũ erit, parallelogramma illa, per quæ nimirum diameter tranſit, quadrata eſſe, & hoc quidem tali modo. Ex data recta deſcriptum eſt quadratum, cuius latera cum, ex definitione, inter ſe ſint æqualia: qui in utraq; parte ad diametrum ponuntur anguli partiales, ex priore parte propoſitionis 5. primi, inter ſe ęquales erunt. Et quia cuilibet partiali, ut interno eſt æqualis, , ex ſecunda parte propoſitionis 29. primi alius externus, æqualibus pro æqualibus angulis ſumptis, ſinguli duo in quolibet per quod diameter tranſit parallelogrãmo, anguli inter ſe æquales erunt: quare & latera cuiuſq; trianguli, quæ illos æquales angulos ſubtendunt, ex propoſitione 6. primi æqualia: atq; tandem æqualium laterum, ex 34. & communi illa noticia, Quæ eidem ſunt æqualia, & inter ſe ſunt æqualia, hæc ipſa parallelogramma, quod eſt notandum. Ad hæc, quia etiam ex parte tertia propoſitionis 29. primi, atq; ipſa 34 eiuſdem, facile rectangula eſſe oſtenduntur, cum per illam quidem, anguli horum parallelogrammorũ interiores, ex eadem parte ſumpti, duobus rectis ęquales ſint, per hanc uerò, angulos oppoſitos ęquales inter ſe habeant: quadrata igitur ex definitione rectangula illa, atq; ſegmentorum etiam, rectæ diuiſæ quadrata erunt, quod primò demonſtrandum erat. Nunc uerò, quoniam horum quadratorum, hoc eſt parallelogrammorum ſupplementa, ex propoſitione 43. primi, inter ſe ęqualia ſunt, atq; unum quidem eorum, propter linearum æqualitatem, id quòd ſub ſegmentis diuiſæ comprehenditur: & alterum quoq; ſimili ſe modo habebit. Ambo igitur ſimul ei, quod ſub ſegmentis comprehenditur bis, æqualia erunt. Hinc quatuor illa, duo nimirum quadrata, & duo ſupplementa, duorum ſegmentorum quadratis, atq; ei quod ſub ſegmentis comprehenditur bis, æqualia erunt. Sed quia quatuor priora, totius rectæ diuiſæ quadrato, ut apparet, atq; etiam ex tertia præcedenti uſurpata bis, manifeſtum eſt, ęqualia ſunt: & poſteriora tandem, ex communi quadã noticia, eidem quadrato æqualia erunt. Si recta igitur linea ſecetur utcunq;: quadratum quod à tota deſcribitur, æquale eſt quadratis quæ fiunt à ſegmentis, & ei quod bis ſub ſegmentis comprehenditur rectangulo. quod demonſtraſſe oportuit.

Ἑτέρα δεῖξις. Aliter idem oſtendere.

Maneat prior diſpoſitio. Et quoniam quadratorũ latera, ex definitione, inter ſe ęqualia ſunt: anguli ad diametrum partiales, ex utraq; parte, per priorem partẽ propoſitionis quintæ primi, inter ſe ęquales erunt. Et rurſus quoniam quadratorum

anguli



anguli ſunt recti, & id ex definitione: uterq; æqualium angulorum in utroq; triangulo, ex corollario propoſitionis 32. primi medietas recti erit. Hinc ſicut partialium triangulorum unumquodq;, ex ſecunda parte propoſitionis 29. primi, angulum rectum habet, ita etiam uniuſcuiuſq; tertium angulum medietatem recti eſſe, manifeſtũ erit. Singula igitur triangula, ex propoſitione 6. primi, Iſoſcelia, Quadrilatera inſuper, ex propoſitione 34. & illa communi noticia, Quæ eidem æqualia, &c. æquilatera erũt. Et quia unumquodq; etiam rectum angulum unum, cum totius rectæ diuiſæ quadrato communẽ habet, unum deinde ex ſecunda parte propoſitionis 29 primi: & reliqui, illis ſcilicet rectis oppoſiti, ſinguli recti erunt: quadrata igitur ſunt ea, per quæ diameter tranſit, quadrilatera: atq; illis etiam, quæ à ſegmentis diuiſæ fiunt, æqualia. Reliqua nunc, ut in priori, demonſtrantur.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτων φανερόν ἐστιν, Ὅτι ἐν τοῖς τετραγώνοις χωρίοις, τὰ περὶ τὴν διάμετρον παραλληλόγραμμα, τετράγωνά ἐστιν.

COROLLARIVM.

Ex hoc ſanè manifeſtum eſt, Quòd in quadratis ſpacijs circa diametrum parallelogramma, quadrata ſint.

APPENDIX.

Hac propoſitione non rarò utuntur Logiſtici in regulis Algebræ. per eas enim numerorum irrationalium additionem, Aequationem deinde, in qua, tribus quantitatibus, naturalis ordinis uel æqualibus medijs, propoſitis, duæ maioris appellationis, tertiæ, cui minor eſt appellatio, adæquantur, & alia quædam demonſtrare ſolent.

PRIMO QVANTVM AD ADDITIONEM.

Additurí √ 18 ad √ 32 uel id genus, irrationalium numerorũ, addunt primò illorum irrationalium quadratos, uno deinde cum irrationali altero multiplicato, numerum qui producitur, propter duo ſupplementa, bis ſumunt. Poſtremò huius quartę propoſitionis memores, quæ dicit, Quadratum lineæ, uel numeri, ὡς ἔτυχε diuiſi, tantum eſſe, quantum ex quadratis partium illius, cum eo quod ex una parte cum altera multiplicata bis ſumpto, efficitur: omnia hæc, tam quadrata partium, quàm etiam duo ſupplementa, quę nimirum ex multiplicatione unius partis diuiſi numeri cum altera, bis repetita naſcuntur, ſimul iungunt, idq; propterea quidẽ, ut totius compoſiti ſeu in partes diuiſi numeri quadratum habeãt, per huius tandem quadrati radicem, quantum ſit ipſum latus uel totus numerus, enuncient.

SEQVITVR CALCVLVS.

50
√ 18 ad √ 32
√ 576, bis
√ 2304
hoc eſt 48. duo
ſupplementa

Addantur nunc 50, partium quadratis
48, duo ſupplementa
ueniunt 98, quadratum totius
quare √ 98 ipſum latus,
hoc eſt partium ſeu ſurdorum
propoſitorum ſumma.

ALIVD EXEMPLVM.

Addantur √ 13 ad √ 21
√ 273, bis
√ 1092, duo ſupplementa
34, quadrata partium,
quare 34 + √ 1092, quadratum totius compoſitæ lineæ uel numeri.

numeri. Huius igitur radix quadrata, quæ eſt

Radix collecti $34 + \sqrt{1092}$, uel $\sqrt{21} + \sqrt{13}$, numerus ipſe.

Quomodo autem uera radix poſita, utpote $\sqrt{21} + \sqrt{13}$, ex hoc collecto, quod Ex binis nominibus prima dicitur, inueniri debeat, id iamdudum traditum eſt.

SEQVITVR QVAESTIO.

Eſt numerus quidam diuiſus in duas partes, partes autem cum ſint 13 & 21, quantus ipſe totus numerus ſit, quæritur. Facit 34.

Id quod per additionem partium ad ſe, facile deprehenditur.

Quòd ſi quis exercendi ingenij gratia altius hoc quærere uelit, ad quartã huius ſecundi libri propoſitionem confugiat neceſſe eſt, atq; ſic operetur.

Partes propoſitæ ſunt 13 & 21, Partium quadrata 169 & 441, Quod fit, una parte cum altera multiplicata,

273
bis

duo ſupplementa 546
Partium quadrata 610

quadratum igitur totius 1156, atq; tandem
ipſe totus numerus, 34, qui quærebatur.

ALIA QVAESTIO.

Partes alicuius numeri ſunt 49 & 36, quantus eſt ipſe totus.

Facit 85.

Nam quadrata partium ſunt 2401, & 1296. multiplicatio uerò unius partis cum altera bis, producit 3528. Omnia hæc ſimul iuncta, ueniunt 7225, quare huius radix quadrata, 85, ipſe totus numerus, qui ex additione datorum conſtituitur. Atq; hæc de additione dicta ſufficiant. Sequitur

AEQVATIO.

Tradidimus in regularum Algebræ deſcriptione tres æquationes, tanquam potiores, quibus ſubinde, per has regulas ænigmata ſoluere cupientes opus habent. Quoniam uerò ſecundam æquationem per tres canones deſcripſimus, primus autem eorum ex hac quarta propoſitione eſt deſumptus, atq; nihil aliud ferè eſſe uidetur, cum idipſum ſic ſeſe habere manifeſtauerimus, propoſitio etiã paulo ante demonſtrata ſit, & hunc canonẽ tandẽ demonſtratũ & fundatum eſſe, nemo dubitet.

Porrò canonis huius tractatio, eſt de tribus naturalis ordinis quantitatibus, quando uidelicet maiores duę, id eſt harum numeri, minimæ quantitatis ſeu characteris numero æquantur. ut eſt

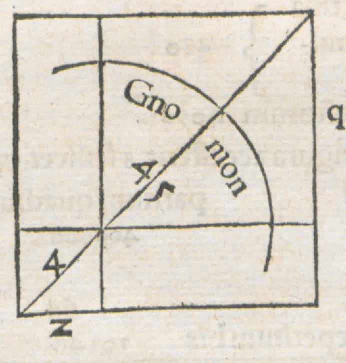
Prima + radix Numero.

Tum ad quadratum (ut paucis repetantur priora) dimidij numeri characteris medij, numerus characteris minimi addi, à radice deinde huius collecti quadrata, dimidium characteris medij ſubtrahi debet: quo facto, quęſiti numeri compos aliquis erit, cũ uidelicet per id quod relinquitur, radicis ualor exprimatur. ut Eſto quòd per alicuius exempli operationem eò peruentum ſit, ut 1 prima + 4 radix æquales ſint 45 N. huius geometrica ſolutio uel demonſtratio talis erit.

Quoniam enim, ut canon habet, ad quadratum dimidij numeri characteris medij, numerus characteris minimi addi, à radice deinde huius collecti quadrata dimidium numeri characteris medij ſubtrahi debet, hoc certe ſi quis propoſitionem hanc quartam, ac canonem etiam altius perpenderit, unam rem eſſe, alijs tamen atque alijs expreſſam uerbis, aſſeret. Nam ultimum quadratum, pro quadrato alicuius totius, puta numeri in partes diuiſi habebit: dimidium uerò radicis characteris medij, alteram huius diuiſi partem: numeros deinde additos, cum ipſorum ad-

ditio quadratum efficiat, Gnomonem, ut quem, ex definitione, utrunq; circa diametrum parallelogrammum, & duo ſupplementa cõſtituunt, exponet. Hac expoſitione tandem, huius quartæ propoſitionis memor, ex toto quadrato radicem eliciet. Et quia hæc ex partialium quadratorum radicibus compoſita eſt, cum unius partialis quadrati radix, dimidium ſcilicet numeri characteris medij, nota ſit: & altera tandem, radix nimirum propoſiti in exemplo quadrati, ſubtractione nota erit. id quod pro declaratione huius canonis dicendum erat.

SEQVITVR HVIVS REI FIGVRA GEOMETRICA.



49
quadratum ultimum &
totius diuiſi.

Quadratum medietatis medij.

Eſt demonſtratio uel expoſitio geometrica, puerilis quidem illa, ſed quæ rem fideliſſimè explicat.

SEQVITVR QVAESTIO CVM CANONI, TVM etiam propoſitioni accommoda.

Diuidatur numerus in partes duas, quarum quadrata ſimul, unà cum numero, quem producunt partes inter ſe multiplicatæ bis 1764 conſtituant. Vna autem pars cum ſit 13 (atq; tantam eſſe medietatem quantitatis mediæ intelligendum eſt) quanta fuerit altera quæritur.

Facit 29.

ACCEDIT ET TERTIVS HVIVS QVARTAE PROpoſitionis, quem habet in Numeris, uſus.

In radicibus eliciendis cum ſemper inuenti numeri quadratum inueſtigandum ſit, ille uerò numerus ſubinde, quàm diu ſanè durat huiuſmodi operatio, una figura creſcat, ne totus inuentus ſemper in ſe multiplicandus ſit, ubi propoſitionem hanc quartam intellexerint Arithmetici, compendioſius inuentorum quadrata aſſequentur, per hunc modum. Habito de numero iam inuento, tanquam de una parte totius, quadrato, recipiatur etiam quadratum de numero uel parte altera: una deinde parte cũ altera multiplicata, is qui producitur numerus bis ſumatur. Quòd ſi tandem hoc duplum prioribus duobus partium quadratis cõiungetur, per id collectum tandem commodè, iuxta hanc quartam propoſitionem, quadratum totius inuenti numeri exprimi poterit.

Huius rei tale ſumatur exemplum.

Inuenta eſt radix ex aliquo numero 6. cuius quadratum quidẽ 36. accedit autem huic radici ſeu inuento numero, cum nondum ad finem hæc radicis extractio perducta ſit, figura alia, nimirum 4, atq; ſic aucta eſt prior inuẽta radix: creuit enim à 6 in 64, atq; huius totius iam deſideratur quadratũ, uel quadratus numerus. Prioris igitur figuræ uel inuenti numeri, tanquam unius partis radicis diuiſæ, quadrato habito, accipiatur & quadratum alterius, ſecundò ſcilicet inuenti numeri, 4, quod erit 16. Et quia numerus primò inuentus, 6. ſecundum iam locum occupat, unde ratione loci ſic, non ſex amplius, ſed ſexaginta ſignificat, ipſius igitur quadrato, 36 ſcilicet duæ figuræ nihili proponendæ ſunt. Poſtremò una cum altera parte multiplicata bis, producuntur 480. Hæc omnia ſi in unam ſummam colligantur, quantum ſit quadratum de 64, apparebit.

SEQVITVR PRAXIS.

	Partes	partium quadra.	Aliàs multiplicatione ſic
Tota radix uel numerus 64	60	3600	
	4	16	64
Quod producitur, una parte cum altera multiplicata bis		480	cum 64 256 384
Summa productorum		4096	4096

Quòd ſi uerò adhuc una figura acceſſerit, 8 ſcilicet, operatio ſic inſtituatur.

	Partes	partium quadrata	Multiplicatione ſic
Totus numerus 648	640	409600	648
	8	64	cum 648
Ex partium multiplicatione repetitum bis		10240	&c.
Summa omnium, & quadratum totius		419904	

Atq; hactenus de propoſitione quarta. ſequitur

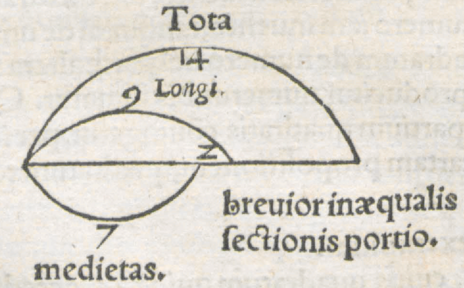
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε.

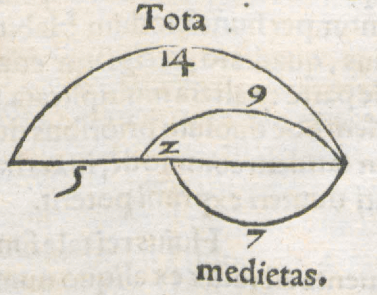
Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα· τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνῳ.

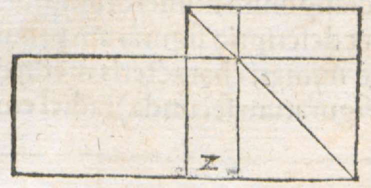
PROPOSITIO V.

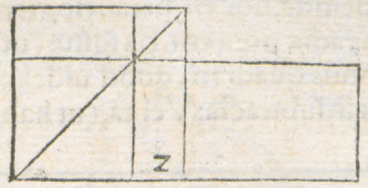
Si recta linea ſecetur in æqualia & non æqualia: rectangulum, quod ſub inæqualibus ſegmentis totius comprehenditur, unà cum quadrato eo quod à medio ſectionũ fit, æquale eſt ei quod à dimidio fit quadrato.

Sit recta quædam linea propoſita, atq; hæc primũ in duo æqualia, deinde etiam in duo inæqualia diuidatur: dico, rectangulum ſub portionibus inæqualis diuiſionis comprehenſum, unà cum quadrato exceſſus longioris portionis inæqualium ſuper medietatem lineæ, æqualia eſſe quadrato medietatis. Deſcribatur à dimidia illa, in qua eſt punctum inæqualis diuiſionis, quadratum, cuius diameter cum una datæ extremitate copuletur, atq; ab inæqualis diuiſionis puncto, per diametrum ad latus uſq; oppoſitum, reliquis duobus quadrati lateribus parallela ducatur. Et quia hæc diametrum ſecat, ubi ex puncto interſectionis, utriſq;, hoc eſt, & rectæ datę, & lateri ei oppoſito, altera parallela, datæ æqualis, ducta, ea deinde per tertiam parallelam, cum extremitate datæ, quę adhuc libera eſt, copulata fuerit, figura parata erit. Dico ergo nunc, ut ſuprà. Quoniam enim ſupplementa omnis parallelogrammi inter ſe æqualia ſunt, his nunc æqualibus quadrato breuioris portionis, tanquam communi addito: & quæ colliguntur, ex cõmuni quadam noticia, æqualia erunt. Sed quia unum ex his alij cuidam, cum quo nimirum æqualem baſim habet, atq; in eiſdem eſt parallelis, ex propoſitione 36. primi, eſt æquale: & alterum, ex communi quadam noticia, eidem æquale erit. His igitur æqualibus nunc, ut tandem concludatur, ſi utriq; id quod alterum ęquale ad complendum medietatis quadratum requirit, addatur: & producta, hoc eſt rectangulum ſub portionibus inæqualibus comprehenſum, cum quadrato quod ab intermedia portione deſcribitur, & quadratum medietatis, inter ſe æqualia erunt. Si igitur recta linea ſecetur in æqualia, & non æqualia: rectangulũ quod ſub inæqualibus ſegmentis totius comprehenditur, unà cum quadrato eo quod à medio ſectionum fit, æquale eſt ei quod à dimidio fit quadrato. quod demonſtraſſe oportuit.









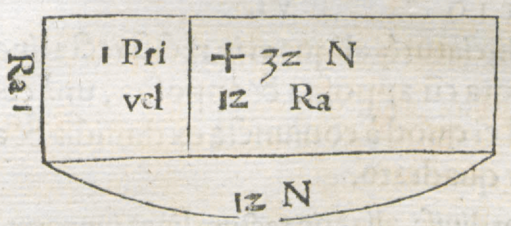
APPENDIX.

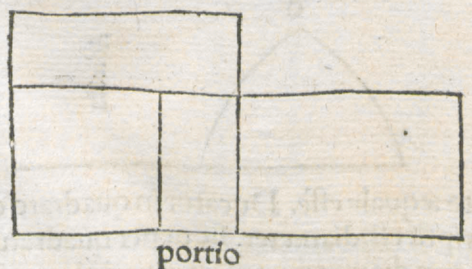
Habet & hæc propoſitio ſuum in Numeris locum, cum per eam tertius ſecundæ æquationis canon, (quo nimirum maximi & minimi characterum numeri, medij characteris numero ęquales eſſe proferũtur) demonſtrari ſoleat in hunc modũ.

Eſto exempli gratia, quòd

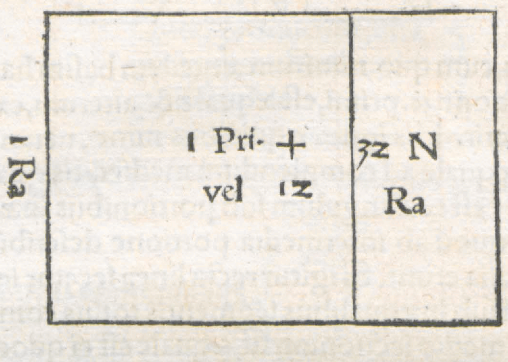
1 prima + 32 N æquales ſint 12 rad.

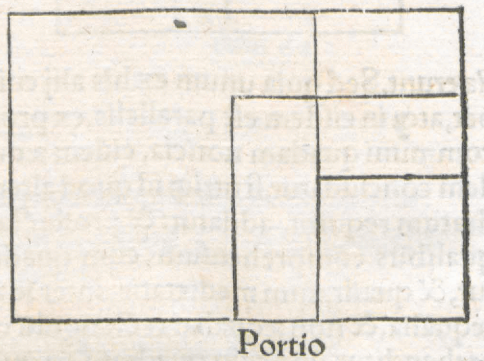
Deſcribatur igitur primò quadratum, propoſitæ æquationis unam primam repræſentans. huic deinde quadrato, ex una eius parte, eiuſdem altitudinis rectangulum, numeros in æquatione uni primę adhærentes ſignificans applicetur. Et quoniam hoc totum rectangulum, ex hypotheſi, 12 radicibus ęquale eſt, cum breuius eius latus ratione quadrati, ſit una radix: eius latus longius, 12 unitates erunt. Eo igitur longiori latere, ut canon præcipit, bifariam diuiſo, erit hoc idem longius latus, linea, qualem propoſitio hæc quinta requirit, εἰς ἴσα ſcilicet καὶ ἄνισα diuiſa, quod eſt notandum. Deſcribatur nunc ab una medietate diuiſæ quadratum, compleaturq; figura. Et quoniam medietatis quadrato, rectangulum numerorum cum quadrato lineæ, qua rectanguli longius latus medietatem diuiſæ excedit, ex hac quinta, æquale eſt, ubi horum æqualium uni rectangulum numerorum: alteri uerò id, quod rectangulo numerorum, ex propoſitionibus quadrageſima tertia & triceſima ſexta primi, ac communi illa noticia, Si ęqualibus ęqualia adijciantur, etc. æquale eſt, ablatum fuerit: & quæ relinquuntur tandem, ex communi quadam




portio quæ à dimidio characteris medij ſubtrahi debet.

noticia, inter ſe æqualia erunt. Quia autem ex utraq; parte unum & idem parallelogrammum, quadratum ſcilicet circa diametrum alterum, relinquitur, quadratum uerò illud notum eſt, cum uidelicet totum, hoc eſt quadratum medietatis, & ſubtractum deinde, hoc eſt, parallelogrammum uel rectangulum numerorum, nota ſint: & eius radix nota erit. Ea igitur (ut quidem habet deſcriptio figurarum prima) à radice totius quadrati, quod uidelicet à medietate numeri characteris medij deſcriptum eſt, ſubtracta: Vel ea, (ut habet deſcriptio figurarum ſecunda) radici eiuſdem totius quadrati, addita: alterius quadrati, quod in æquatione propoſitum eſt, radicem notam relinqui neceſſe erit: id quod pro huius canonis demonſtratione, uel pro eius ad hanc propoſitionem applicatione, dicendum erat.





Portio quæ dimidio characteris medij addi debet.

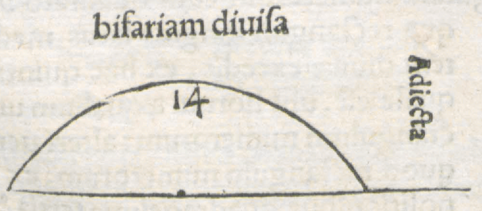
ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5.

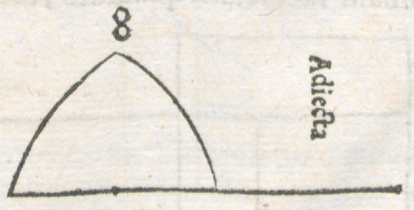
Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα, ἐπ' εὐθείας, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τῆς προσκειμένης περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνου, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης, ὡς ἀπὸ μιᾶς, ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.

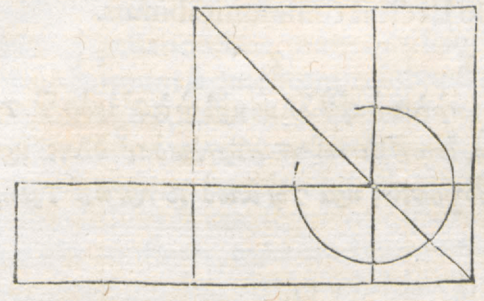
PROPOSITIO VI.

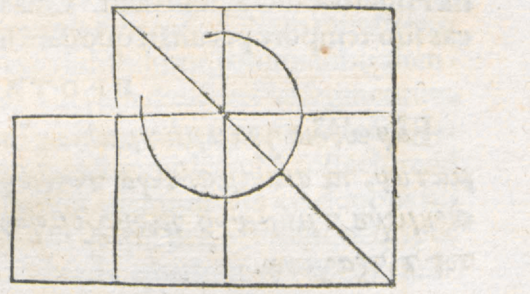
Si recta linea bifariam ſecetur, adijciaturq; aliqua ei in rectũ recta linea: rectangulum comprehenſum ſub tota cũ appoſita & appoſita, unà cum quadrato dimidiæ lineæ, æquale eſt ei quod à coniuncta ex dimidia & appoſita, tanquam ab una, deſcribitur quadrato.

Sit recta linea propoſita, qua bifariam diuiſa, alia ei in rectum linea iungatur, rectangulo deinde & quadratis ſecundum ſuas lineas deſcriptis: dico, rectangulum ſub tota, ex recta data ſcilicet & adiecta compoſita, & adiecta comprehenſum, unà cum quadrato quod à medietate diuiſæ deſcribitur, quadrato à medietate diuiſæ & adiecta, tanquam ab una linea, deſcripto æquale eſſe. Ducatur in quadrato eo, quod à medietate diuiſæ cum adiecta deſcriptũ eſt, diameter, ſic ut per quadratum etiam, à medietate diuiſæ deſcriptum, tanquam diameter tranſeat, deinde latus quadrati eius, quod à medietate deſcriptum eſt alterum, uſq; ad oppoſitum rectanguli latus continuetur. Et quoniam ſuper æqualibus baſibus, atq; in eiſdem parallelis conſtituta parallelogramma, ex propoſitione 36. primi inter ſe æqualia ſunt. Et rurſus, quoniam etiam parallelogrammorum ſupplementa omnis parallelogrãmi ſpacij, ex propoſitione 43 eiuſdem primi, æqualia, cum duo uni æqualia eſſe appareant, illa deinde inter ſe, ex cõmuni quadã noticia ęqualia ſint, horum æqualium utriq;, parallelogrammo eo quod ad rectam, ex dimidia & appoſita cõpoſitam, ponitur addito: & quę fiunt rectangulũ ſcilicet ſub tota & adiecta comprehenſum, & Gnomon, qui quadrato medietatis circumſcribitur, inter ſe æqualia erunt. Ipſum igitur medietatis quadratum, ubi his æqualibus adiectum fuerit, iuxta propoſitionis tandem concluſionem, id quod ſub tota, ex data ſcilicet & adiecta compoſita, & adiecta comprehenditur rectangulum, unà cum quadrato medietatis diuiſæ, ei quod à linea ex medietate & adiecta, conſtituta deſcriptum eſt, quadrato, æquale erit. Si recta igitur linea bifariã ſecetur, adijciaturq; aliqua ei in rectum recta linea: rectangulum comprehenſum ſub tota cum appoſita & appoſita, unà cum quadrato dimidiæ lineæ, æquale eſt ei quod à coniuncta ex dimidia & appoſita, tanquam ab una deſcribitur quadrato. quod demonſtraſſe oportuit.







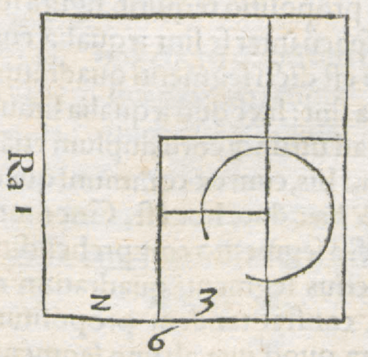


APPENDIX.

Vtuntur hac propoſitione Logiſtici in regulis Algebræ, pro demonſtratione canonis ſecundi in æquatione ſecunda.

Conferuntur in hoc canone duo minorum characterum numeri, cum numero characteris maximi, dicendo, 6 radices + 16 numeris, ſunt æquales uni primæ, ubi tum geometrice ſic agendum erit.

Deſcribatur primò quadratum, quod propoſitæ æquationis primam repręſentet. Et quoniam id ex hypotheſi, 6 radicibus & 16 N. æquale eſt, pro rectangulo numerorum parte aliqua ab eodẽ reſecta, quod relinquitur tandem rectangulum, radicibus ſolum æquale erit. Deſcribantur nunc duo quadrata, quorum quidem unius latus ſit propoſitarum radicum medietas, alterius uerò, hæc eadem radicum medietas, unà cum rectanguli numerorum latere ei in rectũ iuncto. Et quoniam rectangulum numerorũ, tanquã id quod ſub tota compoſita et adiecta ſeu appoſita comprehenditur, unà cum quadrato dimidiæ lineæ, per hanc ſextam propoſitionem, ei quod à recta ex dimidia & adiecta compoſita, tanquam ab una linea deſcribitur, quadrato æquale eſt, unum autem horum, rectangulum ſcilicet numerorum cum quadrata dimidię, notum cum ſit: & alterum, quadratum



ſcilicet lineæ, à dimidia & adiecta compoſitæ, iam notum erit: quare & ipſius latus notum. Id autem cum à latere quadrati primò deſcripti, in dimidia diuiſæ lineæ altera deficiat, per additionem igitur huius ad latus notum: & ipſius tandem primò deſcripti quadrati latus, hoc eſt radicis ualor notus erit: id quod paucis, quemodo ex hac propoſitione geometricè is canon declarari ac retineri poſſit, indicare uoluimus. Atq; hæc quidem, pro demonſtratione canonũ ſecundæ æquationis in regulis Algebræ dicta, ſufficiant. Quas uerò ſubtiliores illi demonſtrationes habent, eas ſuo tempore peculiari quodam libello Lectori communicabimus.

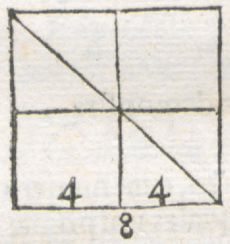
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ.

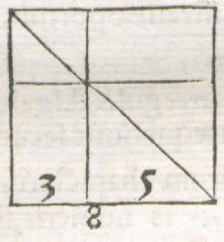
Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀφ' ἑνὸς τῶν τμημάτων, τὰ συναμφότερα τετράγωνα, ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

PROPOSITIO VII.

Si recta linea ſecetur utcunq;: quod à tota, quodq; ab uno ſegmentorum, utraq; ſimul quadrata, æqualia ſunt ei, quod bis ſub tota & dicto ſegmento comprehenditur rectangulo, & ei quod à reliquo ſegmento fit quadrato.

Sit recta linea ſecta utcunq;, hoc eſt, in ęqualia uel non æqualia: dico, quòd quadratum totius & quadratum alterutrius ſegmenti æqualia ſint rectangulo ſub tota & ſumpto ſegmento comprehenſo bis, cum alterius ſegmenti quadrato. Formetur ex recta data figura, prout ipſa propoſitio exigit, & prout habet propoſitio huius quarta: & ducatur diameter. per ſingula quadrata tranſiens. Et quoniam ex propoſitione quarta huius, quadratũ totius quadratis partium, & ei quod cõprehenditur ſub partibus bis, æquale eſt, æqualibus nunc æquali, quadrato ſcilicet unius ſegmenti, ex æquo addito: mutatis deinde appellationibus, propoſitioni ſatisfactum erit.





ALIA HVIVS, ET CLARIOR DEMONSTRATIO.

Ex linea, ut quidem propoſitio requirit, figura formata, cum τὰ παραπληρώματα omnis parallelogrammi ſpacij inter ſe ſint æqualia, cumq; etiam æqualia, uel aliquod commune, ut hoc loco eſt dicti ſegmenti quadratum, æqualibus additum, quæ inde colliguntur æqualia ſint: hæc duo æqualia ſimul ſumpta, ad utrunq; æqualium dupla erunt. Sed quia ad utrunq; eorũ duplum etiã eſt, quod ſub tota & dicto ſegmento comprehenditur bis, cum ex communi quadam noticia Eiuſdem duplicia, inter ſe æqualia ſint: & hæc duo, hoc eſt, Gnomon cum quadrato dicti ſegmenti, & quod ſub tota ac dicto ſegmento comprehenditur bis, inter ſe æqualia erunt. atque hæc tandem, ſi alterius ſegmenti quadratum ex æquo acceperint: cum ſic & collecta æqualia ſint, conſtat tandem propoſitum. Si recta linea igitur ſecetur utcunque, quod à tota, quod'que ab uno ſegmentorum, utraq; ſimul quadrata, æqualia ſunt ei, quod bis ſub tota & dicto ſegmento comprehenditur rectangulo, & ei quod à reliquo ſegmento fit quadrato, quod demonſtrari oportuit.

APPENDIX

APPENDIX.

Habet & hæc propoſitio ſuum in Arithmeticis uſum, cum per eam modus ſubtrahendi radices quadratorum irrationales retineatur.

Quo ingenio Arithmetici radices quadratorum irrationales, unam ab altera ſolent ſubtrahere, ex hac propoſitione didicerunt. Poſtquam enim per eam quadratum alicuius rectæ diuiſæ, cum quadrato alterutrius ſegmenti, ei quod ſub tota & dicto ſegmento continetur bis, cum eo quod à reliquo ſegmento deſcribitur quadrato, æquale eſſe cognouerunt, facilis illis fuit omnis ſubtractio. Nam mutatis numerorum appellationibus, numerum ſcilicet à quo ſubtrahitur, totum: ſubtrahendum deinde, unum ſegmentum: reſiduum porrò, alterum diuiſę rectæ ſegmentum eſſe conſiderantes, ſtatim hac propoſitione freti, quadrata numerorum, eius ſcilicet à quo ſubtrahitur, atq; etiam ſubtrahendi, in unum colligunt. Et quia collectum id ex hac propoſitione, tanto maius eſt quadrato reſidui, quantum ſub his duobus numeris, toto ſcilicet & uno ſegmento, cõtinetur bis, ut de quadrato reſidui, deq; ipſo reſiduo illis conſtaret, mox illud comprehenſum bis de quadratorũ collecto ſubtrahunt. quod quidem obiter circa hanc propoſitionem indicandum erat.

SEQVITVR HVIVS REI EXEMPLVM.

A √ 75 debet ſubtrahi √ 27, inſtituitur ergo operatio ſic,

Numerus ſubtrahendus, hoc eſt, unum ſegmentum, √ 27 à numero à quo ſubtrahitur, hoc eſt, à toto, √ 75

102 Totius & ſubtrahendi quadratum
90 Quod ſub toto & ſubtrahendo bis
12 Quadratum reſidui numeri
Quare √ 12, ipſe reſiduus numerus.

SEQVITVR QVAESTIO.

De numero 34 ſubtracta ſunt 13, quæritur de reſiduo. Facit 21.

Id quod per ſubtractionem 13 à toto numero, facile deprehenditur.

Quòd ſi quis, exercendi ingenij gratia, hoc altius quærere uelit, ad ſeptimam huius ſecundi libri propoſitionem confugiat neceſſe eſt, atque ſic operationem ſuam inſtituat.

Subtrahantur Vnum ſegmentum 13 à toto numero 34
quadrata 169 1156
Quadratorum ſumma 1325
minus 884, hoc eſt, eo quod ſub toto, & dicto ſegmento continetur bis.
manent 441, quadratum reſidui
Quare 21, numerus reſiduus.

ALIA QVAESTIO.

Sunt duo numeri. Quoniam autem unius numeri quadrato 49. continentur, compoſitus uerò ex illis cum quadratum habeat 121, quantus ſit numerus alter, quæritur. Facit 4.

121 49
170
minus 154
manent 16
Quare 4 &c.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

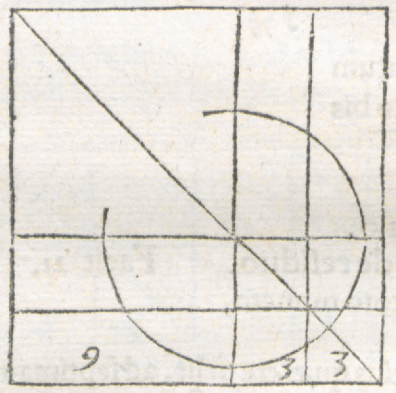
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε· τὸ τετράκις ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς λοιποῦ τμήματος τετραγώνου, ἴσον ἐστὶ, τῷ τε ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος, ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.

PROPOSITIO VIII.

Si recta linea ſecetur utcunq;: rectangulum quod ſub tota & uno ſegmentorum comprehenditur quater, cum eo quadrato quod à reliquo ſegmento deſcribitur, ęquale eſt ei quod à tota & dicto ſegmento, tanquam ab una linea deſcribitur quadrato.

Sit recta linea ſecta: utcunq; dico, quòd rectangulum, ſub tota & uno ſegmentorum comprehenſum, quater, unà cum quadrato alterius ſegmenti, ęquale ſit quadrato, quod à tota & dicto priori ſegmento, tanquam ab una recta, deſcribitur. Deſcribatur primò quadratum, cuius latus ſit ipſa recta data, cum alterutra eius portione ſibi adamuſſim iuncta: à punctis deinde, coniunctionis ſcilicet uno, & diuiſionis altero, duæ per quadratum hoc tendentes ad augulos rectos lineæ excitentur, quadrati tandem diametro ducta, ubi hæc duas ad rectos ductas lineas ſecuerit, per ea puncta, tanquã à pũctis datis, reliquis duobus quadrati lateribus, per propoſitionem 31 primi, parallelæ ducantur, & erit huius propoſitionis figura parata. quam quidem ſi quis diligenter inſpexerit, atq; τῆς κατασκευῆς, necnon eorum etiam quæ in propoſitionibus 36 & 43 primi tradita ſunt, memor fuerit, facili opera propoſitioni, ex quarta huius, ſatisfacere poterit.



Diuiſa

12

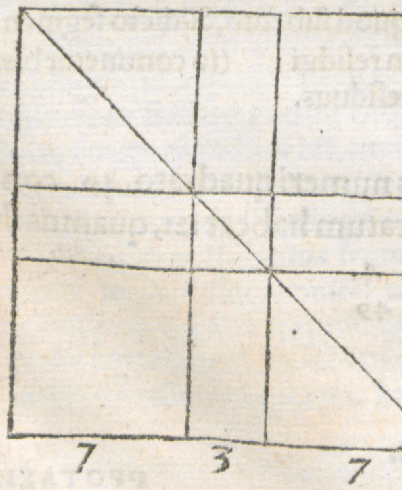
9 3

12
3
36
quater
144
81
225

Vnum ſegmentorum.

3

12
& 3
15
cum 15
75
15
225



Diuiſa

10
in 7 & 3

10
7
70
quater
280
9
289

Vnum ſegmentorum.

7
10
& 7
17
cum 17
119
17
289

numeri æquales.

ALIA HVIUS ET CLARIOR DEMONSTRATIO.

Sit recta data, ea etiam utcunq; diuiſa: dico &c. Quoniam recta in duo diuiſa eſt, ſegmento ei quod in collatione cum tota diuiſa ſumitur, ad partem etiam ubi ponitur, æqualis recta alia adamuſſim iungatur, quadrato deinde ab hac tota compoſita per 46 primi deſcripto, dupla figura deſcribatur. Et quoniam rectæ diuiſæ alia recta, uni ſegmentorũ æqualis, adamuſſim iuncta eſt, cum parallelogrammorum latera oppoſita, ut in primo libro demonſtratum eſt, inter ſe ęqualia ſint: illæ etiam quas hæ duæ rectæ, hoc eſt ſegmentum id, & recta ei æqualis, lineas ſibi ęquales habent, inter ſe æquales erunt, ſuper ijs deinde parallelogramma poſita, cum hęc etiam æquealta ſint, ex propoſitione 36 primi inter ſe æqualia. Sed quoniam ſupplementa omnis parallelogrammi, ut iam ſępe dictum, inter ſe æqualia ſunt: & hæc quatuor parallelogramma, quæ ſuper illo ſegmento & ſua æquali, atq; alijs duabus, his æqualibus, rectis conſtituta ſunt, ex communi quadam noticia, inter ſe ęqualia erunt, atq; deinde horum quatuor aggregatũ, ad id quod ſuper idem ſegmentum eſt poſitum parallelogrammum, quadruplum. Pari ratione & reliqua quatuor, circa uel extra diametrum poſita parallelogramma, inter ſe æqualia, ac totum deinde ad id quod ſupra alterum diuiſæ ſegmentum eſt poſitum, quadruplũ. Illud igitur prius cum hoc aggregato, quæ ambo ſimul Gnomonis figuram referunt, ad rectangulum, ſub tota & uno ſegmentorum comprehenſum, quadruplum erit. Quare alterius ſegmenti quadrato ex ęquo illis appoſito: gnomon cum illo alterius ſegmenti quadrato, hoc eſt, totius compoſitę, ut unius lineæ, quadratum, ei quod ſub tota & dicto ſegmento comprehenditur quater, cum eodem alterius ſegmenti quadrato, ęquale erit. Si recta igitur linea ſecetur utcunq;: rectangulũ, quod ſub tota & uno ſegmentorum comprehenditur quater, cum eo quadrato quod à reliquo ſegmento deſcribitur, ęquale eſt ei quod à tota & dicto ſegmẽto, tanquam ab una linea deſcribitur quadrato. quod demonſtrari oportuit.

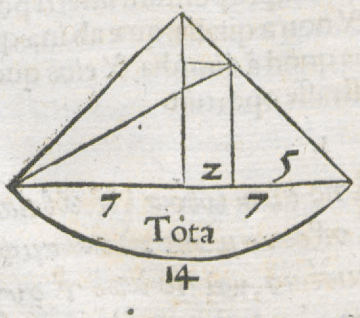
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα· τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων τετράγωνα, διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας, καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου.

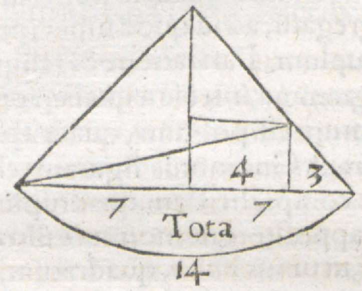
PROPOSITIO IX.

Si recta linea ſecetur in æqualia, & non æqualia: quæ ab inæqualibus ſegmentis totius fiunt quadrata, dupla ſunt eius quod à dimidia, & eius quod à medio ſectionum fit quadratorum.

Sit recta linea, in duo æqualia, in duo etiam inæqualia diuiſa: dico, quadrata inæqualium ſegmentorum ſimul ſumpta, dupla eſſe quadratorũ, quorum unum quidem à medietate lineæ, alterum uerò ab ea quæ diuiſionum punctis interiecta eſt linea, deſcribitur. Excitetur ex puncto æqualis diuiſionis in linea, per propoſitionem 11. primi, ad angulos rectos linea, eaq; per 3 eiuſdem, ad æqualitatem medietatis diuiſæ poſita, ab eius altera extremitate duæ ad rectæ diuiſæ extremitates lineæ demittantur. Deſcribuntur autem ſic duo triangula, rectangula, & Iſoſcelia, ut patet ex ſtructura. Excitetur rurſus ex puncto inæqualis diuiſionis, alia ad angulos rectos linea, uel ſi mauis, priori ad rectos ductę linea parallela, eaq; ad latus uſq; oppoſitum continuata, ab huius & lateris oppoſiti contactu, ad priorem in triangulo πρὸς ὀρθὰς ductam linea diuiſę parallela ducatur. Et deſcribuntur alia duo triangula,



quæ & ipſa, ut patebit, rectangula ſunt, & iſoſcelia. Quòd ſi tandem à communi horum duorum triangulorum copula, ad illam rectæ diuiſæ extremitatem, quæ huic quodammodo è regione poſita eſt, linea recta ducatur, huius propoſitionis figura conſtituta erit, cuius quidem explicatio & demonſtratio talis. Quoniam ad punctum æqualis diuiſionis conſtitutorum triangulorum utrunq; iſoſceles eſt, ex ſtructura, & orthogonium, cum anguli eorum ad baſim, per priorem partem propoſirionis quintæ primi, inter ſe æquales ſint, uterq; in utroq; triangulo angulus, primò, ex corollario propoſitionis 32 primi, medietas recti: angulus deinde integer, quem recta diuiſa ſubtendit: rectus erit. Ad hæc, cum linea ex communi partialium triangulorum copula ueniens, ut habet propoſitionis ſtructura, diuiſæ rectæ ſit parallela, deinde uerò alia quædam recta, quæ uidelicet ex puncto ęqualis diuiſionis in recta data πρὸς ὀρθὰς excitata eſt, in illas parallelas incidat: angulus externus, ex ſecunda parte propoſitionis 29 primi, ſuo interno & oppoſito æqualis eſt. Quia uerò rectus eſt ipſe internus, ex ſtructura: & externus ſic rectus erit. rectangulũ igitur eſt illud partiale triangulum, atq; deinde per corollarium propoſitionis 32 primi, & ſextam propoſitionem eiuſdem, idem etiam iſoſceles. In hunc modum, & alterum partiale triangulum, ut rectangulum & iſoſceles ſit, demonſtrabitur. Nunc autem cum trianguli rectanguli & iſoſcelis, eius quidem, cuius latera ſunt, ſubtenſa indiuiſa, medietas rectæ indiuiſa, & perpendicularis, medietati diuiſæ ęqualis, quadratũ lateris rectum angulum ſubtendentis, reliquis duorum laterum, quadratis, per propoſitionem 47 primi, æquale ſit: erit propter æqualitatem laterum, illud ad utrunq; eorum duplum. Eſt itaq; quadratum hypotenuſæ huius rectanguli, quadrato medietatis rectæ diuiſæ duplũ, quod eſt notandum. Pari ratione etiam in triangulo rectãgulo & Iſoceli partiali ſuperiori, cuius nimirum alterũ circa rectũ angulũ latus, pars eſt perpendicularis, ex ęqualis diuiſionis puncto excitatæ, quadratum ſubtenſæ angulo recto, ad quadratum lineæ, quæ ex communi partialium triangulorum copula, medietati rectæ diuiſæ eſt ad æquediſtantiã ducta, duplum erit: quare etiam ad quadratum ſuæ ęqualis, lineæ ſcilicet, quę inter diuiſionis puncta iacet, duplum. Cum aũt iam duæ lineæ ſint, quarum utriuſq; quadratũ, ad alterius lineæ quadratum duplum eſt, & illarum quadrata ſimul ſumpta, ad harũ ſimul ſumpta quadrata dupla erunt. Sed illarum linearum quadrata, quæ ſunt ad alia dupla, æqualia ſunt, quadrato lineę, ex commũi partialium triangulorum copula ad angulum oppoſitum ductæ, cuius quadrato etiam (cum hæc linea duorum orthogoniorum triangulorum rectos ſubtendat) ſi ęqualis pro æquali linea ſumatur, ſegmentorum inæqualis diuiſionis quadrata æqualia ſint, per communem tandem illam noticiam: Quę eidem ęqualia, & inter ſe ſunt æqualia, propoſitum inferri poterit, nimirum. Si igitur recta linea ſecetur in æqualia & non æqualia: quæ ab inæqualibus ſegmentis totius fiunt quadrata, dupla ſunt eius quod à dimidia, & eius quod à medio ſectionum fit quadratorum. quod demonſtraſſe oportuit.



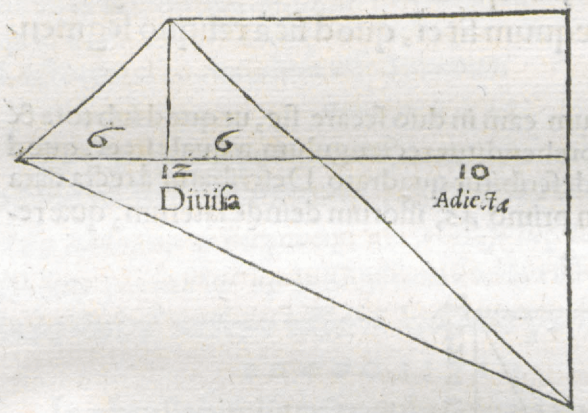
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας· τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς προσκειμένης τὰ συναμφότερα τετράγωνα, διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας, καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης, ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντος τετραγώνου.

PROPOSITIO X.

Si recta linea ſecetur bifariam, adijciaturq; aliqua ei adamuſſim recta linea: quod à tota cum appoſita, & quod ab appoſita, utraq; ſimul quadrata, dupla ſunt eius quod à dimidia, & eius quod ab adiacente ex dimidia & adiecta, tanquam ab una, deſcriptorum quadratorum.

Sit recta linea propoſita, ea etiam bifariam diuiſa, atq; alia deinde ei adamuſſim adiecta: dico, duo quadrata, compoſitæ ſcilicet lineæ & adiectæ, dupla eſſe ad quadrata linearum, unius quidem, quæ eſt medietas rectæ datæ, alterius uerò, quæ ex medietate altera atq; ei adiecta eſt compoſita. Erigatur ex puncto æqualis diuiſionis ad angulos rectos linea, atq; ea ad æqualitatem medietatis rectæ diuiſæ poſita, altera eius extremitas duabus rectis, cum duabus extremitatibus rectæ diuiſę coniungantur, rectam illam, quæ per coniunctionis punctum tranſierit, ulterius continuando. Fiant autem duo triangula, rectangula atq; Iſoſcelia, in quorum utroque uterq; angulorum ad baſim, ex ſtructura & propoſitione 32 primi, medietas recti eſt, quod eſt notandum. Porrò ſecundum quantitatem ad rectos ductæ, atq; eius quæ ex medietate rectæ diuiſę & adiecta compoſita eſt, lineæ, parallelogrammum rectangulum deſcribatur, latus illud eius, quod ad rectos ductæ lineę oppoſitum eſt & parallelum, ultra adiectam rectam cõtinuando. Et quia hanc continuatam, cum illa, quæ per coniunctionis punctum tranſit, propterea quòd in eas alia recta cadens, ex illa parte duos angulos duobus rectis minores facit, ex cõmuni quadam noticia in libro primo expoſita, concurrere neceſſe eſt, continuentur igitur ambę ut triangulum fiat: & erũt quæ ſic apparẽt duo triangula, tam totale quàm partiale, ex ſtructura & ſecunda parte propoſitionis 29 primi, rectangula & Iſoſcelia, quod & ipſum notandum. Vltimò ducatur & alia recta, cuius termini ſint reliquę extremitates datæ & continuatę linearum, & erit figura, unde nunc huius propoſitionis demonſtratio elici poterit, hoc modo parata. Et quoniam quadratum lineæ ultimò ductæ, per propoſitionem 47 primi, quadratis linearum, compoſitę nimirum ex data & adiecta, & ipſius adiectæ, ęquale eſt, idem etiam quadratum, cum ipſius latus duorum orthogoniorum triangulorum rectos ſubtendat, ęquale, per eandem 47, quadratis duarum linearũ, quę ab extremitate ad rectos ductę altera, per extremitates rectæ diuiſæ deſcendunt: per hanc communem noticiam, Quæ eidem æqualia, &cæ. quadrata priora, compoſitæ ſcilicet & additę lineæ, deſcendentium linearum quadratis ęqualia erunt. Sed quia deſcendentium quadrata, ratione ſuorum triangulorum, quę & rectangula & Iſoſcelia ſunt, ad quadrata, medietatis diuiſę & compoſitæ deinde ex altera medietate & adiecta, dupla ſunt: propter ęqualitatem quadratorum, deſcendentium ſcilicet linearum, compoſitæ deinde & adiectę, conſtabit propoſitum. Compoſitę ſcilicet & adiectę linearum quadrata, dupla eſſe quadratorum, medietatis lineæ diuiſę, & eius quæ ex medietate & adiecta compoſita eſt. Si recta igitur linea ſecetur bifariam, adijciaturq; aliqua ei adamuſſim recta linea: quod à tota cũ appoſita, & quod ab appoſita, utraq; ſimul quadrata, dupla ſunt eius quod à dimidia, & eius quod ab adiacente ex dimidia & adiecta, tanquam ab una, deſcriptorũ quadratorum. quod demonſtrari oportuit.



SEQVITVR EXEMPLVM IN NVMERIS.

Totus 14 Adiectus

7 7 9

Operatio.

Totus & adie. Adiectus Dimidius Dimidius & adie.

23 9 7 16

529 81 49 256

610 duplus 305

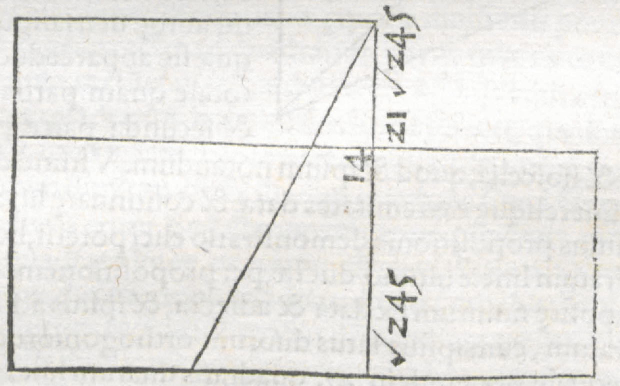
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τεμεῖν, ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

PROPOSITIO XI.

Datam rectam lineam ſecare, ut quod ſub tota & altero ſegmento comprehenditur rectangulum, æquum ſit ei, quod fit à reliquo ſegmentó quadrato.

Sit recta linea data, atq; propoſitum eam in duo ſecare ſic, ut quod ſub tota & uno ſegmento, breuiori ſcilicet, comprehenditur rectangulum, æquale ſit ei, quod ab altero, hoc eſt longiori ſegmento deſcribitur quadrato. Deſcribatur à recta data quadratum, ſicuti docet propoſitio in primo 46, illorum deinde laterum, quæ rectæ datæ inſiſtunt, altero bifariam diuiſo, à diuiſionis puncto linea quædam recta uſq; ad alteram datæ extremitatem ducatur, & deſcribitur triangulum rectangulum. Porrò medietas lateris diuiſi, quæ à puncto diuiſionis & angulo huius trianguli recto intercipitur, eouſq; prolongetur, donec lateri, in triangulo rectum angulum ſubtendenti, æqualis fiat. & ubi deinde ſecundum quantitatem partis prolongatę exterioris, quadratum ad ipſam deſcriptum, latus item huius quadrati, quod exteriori parti oppoſitum eſt, per quadratum primò deſcriptum continuatum fuerit, propoſitioni tandem ſatisfactum erit. Id quod, cum tam quadratorum, ex definitione, quàm etiam parallelogrammorum oppoſita latera, ex propoſitione 34 primi, inter ſe ęqualia ſint, ſexta propoſitio huius & penultima primi, ęqualibus ſubinde pro æqualibus ſumptis, ab æqualibus item eodem communi ſubtracto, clarè manifeſtabunt.



SEQVITVR EXAMEN HVIVS DIVISIOnis in numeris.

Totus Longius ſegmen. Breuius

14 √245 — 7 21 — √245

in ſe

cum

21 — √245 √245 — 7

cum 14 √245 — 7

Producuntur

294 — √48020, 294 — √48020

Id quod continetur ſub toto & breuiori. Quadratum ſegmenti longioris.

Numeri, uel producta æqualia.

APPENDIX.

Hanc lineæ diuiſionem requirit propoſitio nona libri quarti, quę nimirum proponit, quomodo Iſoſceles triangulum, cuius uterq; angulorum ad baſim ad tertium reliquum duplus ſit, formari debeat, id quod abſq; huius diuiſionis cognitione aliàs abſolui nequit. Quas deinde proprietates habet hęc eadem ſic diuiſa linea, quid item conducat, aliquo modo oſtendit liber Euclidis tredecimus, cuius obiter Lectorem admonendum eſſe duximus.

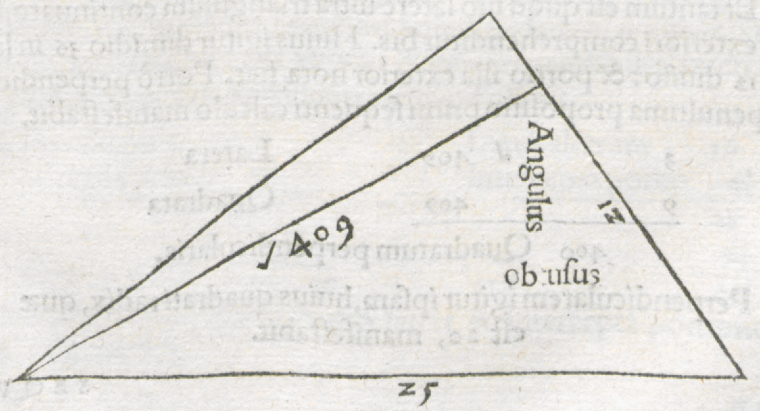
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ.

Ἐν τοῖς ἀμβλυγωνίοις τριγώνοις· τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον, μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ἀμβλεῖαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων, τῷ περιεχομένῳ δὶς, ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ἐφ᾽ ἣν ἐκβληθεῖσαν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐκτὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ἀμβλείᾳ γωνίᾳ.

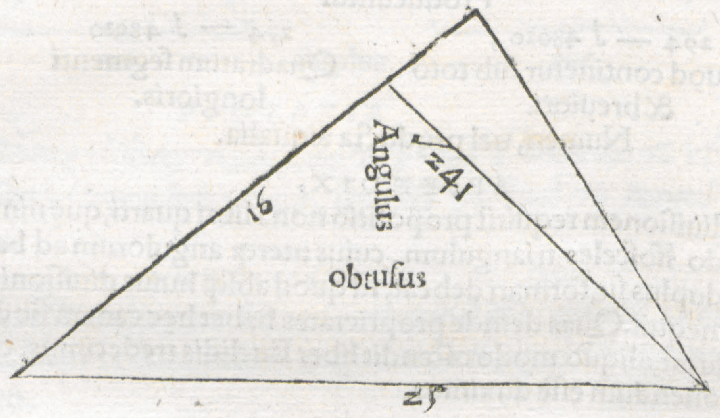
PROPOSITIO XII.

In obtuſiangulis triangulis: quod ab obtuſum angulum ſubtendente latere fit quadratum, maius eſt quadratis, quæ fiunt à lateribus obtuſum angulum comprehendentibus, comprehenſo bis ſub uno eorum quæ ſunt circa obtuſum angulum, in quod, cum protractum fuerit, perpendicularis cadit, atq; aſſumpta extra ſub perpendiculari ad obtuſum angulũ.

Obtuſiangulo triangulo expoſito, uno etiam eorum quę circa obtuſum ſunt angulum latere, ex parte illius anguli, adeò ultra triangulum continuato, ut in id ab



angulo trianguli acuto, oppoſito quodammodo, perpendicularis commodè cadere poſsit, atq; hæc poſtea ducta, figura deſcripta erit: dico ergo, quadratum, quod à latere obtuſum angulũ ſubtendente deſcribitur, maius eſſe, quàm ſunt quadrata, quæ ab ijs quæ circa obtuſum angulum ſunt, lateribus deſcribuntur, eo quantum eſt id, quod bis cõprehenditur ſub uno latere eorum, quæ circa obtuſum angulum ſunt, atq; eo, quod à dicto latere, ſi illud ultra obtuſum angulum prius protractum fuerit, & demiſſa ab angulo, quem hoc latus ſubtendit, perpẽdiculari intercipitur. Demonſtratio huius, quia eſt facilis, cum ex propoſitione penultima primi, uſurpata bis, quarta tamen huius, propter ſumptionem æqualium pro æqualibus interpoſita, procedat, Lectori eam ut inde colligat commendabimus. In obtuſiangulis igitur triangulis: quadratum lateris ſubtendentis angulũ obtuſum, tanto maius eſt reliquorũ duorũ laterum quadratis, quantum eſt id, quod bis comprehenditur ſub alterutro reliquorum, & portione eidem alteri extra triangulum in directũ adiecta, quæ à perpendiculari ab angulo huic lateri oppoſito demiſſa, & angulo obtuſo intercipitur, quod demonſtraſſe oportuit.



APPENDIX.

Quomodo uerò, amblygonio triangulo, cuius tria latera nota ſint, expoſito, portionis exterioris quantitas, quanta deinde ſit perpendicularis, in numeris inueniri debeat, ſequenti calculo manifeſtabitur.

Quantum ad figuram priorem.

Trianguli latera	25	√ 409	12
Laterum quadrata	625	409	144

625
553 Et tantum eſt quod ſub latere ultra triangulum continuato, & portione
72 exteriori comprehenditur bis. Huius igitur dimidio 36 in latus notum
12 diuiſo: & portio illa exterior nota fiet. Porrò perpendicularis nunc quanta ſit, penultima propoſitio primi ſequenti calculo manifeſtabit.

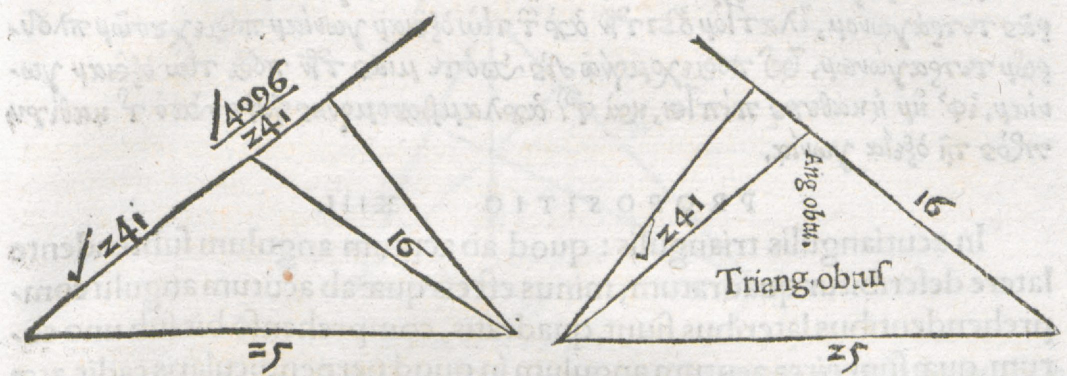
3	√ 409	Latera
9	409	Quadrata

400 Quadratum perpendicularis.

Perpendicularem igitur ipſam, huius quadrati radix, quæ eſt 20, manifeſtabit.

SEQVVNTVR

SEQVVNTVR HVIVS PROPOSITIONIS DVAE figuræ aliæ.

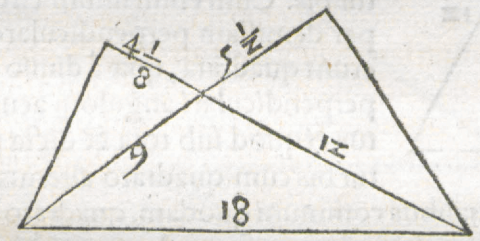


Calculus figuræ poſterioris.

Trianguli latera	25	16	√ 241
Laterum quadrata	625	256	241

Facta ſubtractione, manent 128, id quod ſub latere ultra triangulum continuato, & portione exteriori comprehenditur bis, cuius dimidio 64 in latus notum 16 diuiſo, exeũt 4, portio exterior. Perpendicularis igitur 15, quod examinari poteſt.

ALIA FIGVRA, IN QVA DVO EXEMPLA ſimul expoſita ſunt.



Examen illius in numeris.

Latera

Subtendens angulum obtuſum — Includentia angulum obtuſum

	18		9		12
Qua-	324	dra-	81	ta	144
	225		225		
	99	duplum rectanguli,			

quare $49\frac{1}{2}$, rectangulum ipſum, quod nimirum ſub alterutro circa obtuſum angulum latere, 9 aut 12, & ſua exteriori prolongata portione, ab eodẽ angulo & ipſa perpendiculari intercepta comprehenditur, id quod ſequens calculus clarè manifeſtabit.

Latus alterum	9	Latus alterum	12
Intercepta portio	$5\frac{1}{2}$	Intercepta portio	$4\frac{1}{8}$
	45		48
	$4\frac{1}{2}$		$1\frac{1}{2}$
	$49\frac{1}{2}$ re-	uel	$49\frac{1}{2}$ re-

ctangulum comprehenſum ſub alterutro latere & intercepta portione, ut ſuprà oſtenſum eſt. Quare &c.

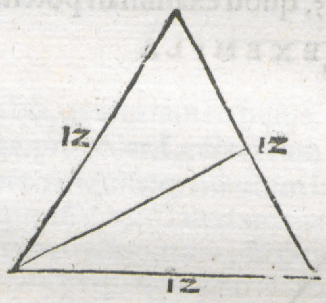
ΠΡΟΤΑΣΙΣ

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ.

Ἐν τοῖς ὀξυγωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον, ἔλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων, τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν, ἐφ᾽ ἣν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐντὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ὀξείᾳ γωνίᾳ.

PROPOSITIO XIII.

In acutiangulis triangulis: quod ab acutum angulum ſubtendente latere deſcribitur quadratum, minus eſt eis quæ ab acutum angulū comprehendentibus lateribus fiunt, quadratis, comprehenſo bis ſub uno eorum, quæ ſunt circa acutum angulum in quod perpendicularis cadit, atq; aſſumpta interius ſub perpendiculari ad acutum angulum.

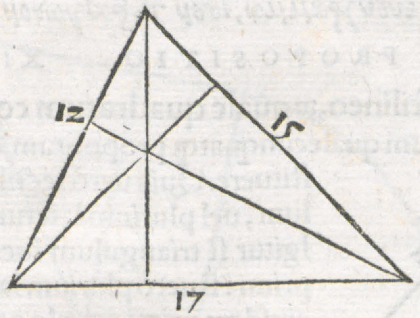


Sit triangulum acutiangulum, atq; in eo acutus angulus ſumptus, ab utrouis deinde ex reliquis angulo ad ſuum ſubtenſum latus, per propoſitionem 12 primi, recta perpendiculari ducta: dico, quadratum quod à latere rectum angulum ſubtendente deſcribitur, minus eſſe quàm ſunt quadrata, quæ à lateribus circa acutum angulum deſcribuntur, eo quantū eſt id quod ſub uno latere eorum quæ circa acutum angulum ſunt, in quod ſcilicet perpēdicularis cadit, atq; ſub intercepta, à perpendiculari & acuto angulo, portione comprehenditur bis. Cum enim unum circa acutum angulum latus per demiſſam perpendicularem utcunq; diuiſum ſit: erunt quadrata, quæ à diuiſo illo latere & intercepta à perpendiculari anguloq; acuto, portione deſcribuntur, ei quod ſub tota & dicta portione comprehenditur bis cum quadrato alterius portionis, per 7 huius æqualia: atq; his æqualibus communi quodam, quadrato ſcilicet perpendicularis, addito: illa tria quadrata his tribus, rectangulo nimirū bis ſumpto & duobus quadratis æqualia erunt. Sed quia utrobiq; duobus quadratis, ratione anguli recti, ex penultima primi unius lineæ quadratum æquale eſt, mutatione æqualium facta, loco ſcilicet duorum quadratorum laterum circa rectos angulos, ex utraq; parte, rectos angulos ſubtendentiū, quæ ſcilicet non diuiſa ſunt, quadratis ſumptis: & quadrata laterum quæ ſunt circa acutum angulum, ei quod ſub diuiſo latere & intercepta portione comprehenditur bis, atq; quadrato lateris, angulum acutum ſubtendentis, æqualia erunt: quadratum igitur lateris, acutum angulum ſubtendentis, ſolùm quadratis eorum, quę circa acutum angulum ſunt, laterū minus erit in rectangulo, quod ſub diuiſo latere, atq; intercepta a perpendiculari & acuto angulo portione, comprehēditur bis. In oxygonijs igitur triangulis, quadratum lateris ſubtendentis angulum acutum tanto minus eſt reliquorum laterum quadratis, quantum eſt id quod bis comprehenditur ſub altero illorum, in quod nimirum perpendicularis cadit, & portione a perpendiculari anguloq; acuto intercepta. quod demonſtraſſe oportuit.

APPENDIX.

Quam uim habeant hæ duæ propoſitiones, 12 ſcilicet de Amblygonio, & 13 de Oxygonio, unà cum penultima primi de triangulo Orthogonio, experietur is, qui aliquando in triangulorum tractationem, in qua ſemper ex tribus notis ad reliquorū trium noticiam, mediante arcuum & chordarū tabula, peruenitur, inciderit.

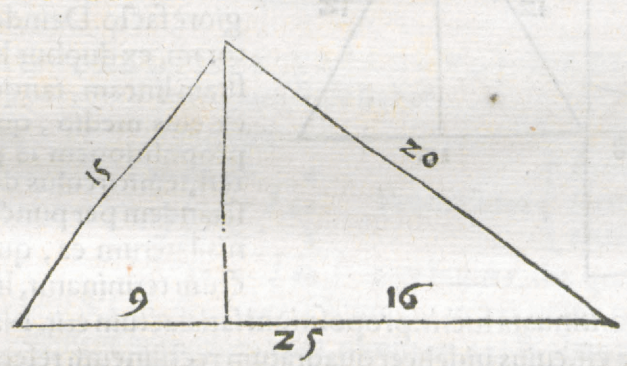
TRIA EXEMPLA VNA FIGVRA EXPOSITA.



ADMONITIO.

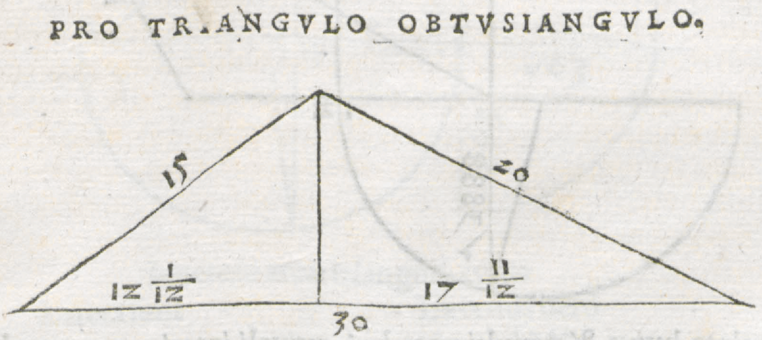
Non autem eſt neceſſe, ut omnes trianguli propoſiti anguli acuti ſint, ut quidem id Acutianguli trianguli definitio requirit. Sed generaliter (cum nullum triangulum ſit, quod non acutum angulum habeat) de omnibus, cuiuſcunq; generis fuerint, triangulis, hæc propoſitio intelligi, per ea inſuper declarari poteſt, id quod per ſequentia duo exempla manifeſtabitur.

PRO TRIANGVLO RECTANGVLO.



In hoc triangulo rectāgulo, quindecies 15, ratione unius acuti anguli, tanto minus ſunt quàm uicies quinquies 25, & uicies 20, quantum eſt quod ſub 20 & 20, uel quod ſub 25 & 16 continetur bis. Sic ratione alterius acuti, cuius ſubtenſum latus ſunt 20, ubi uicies 20, tanto minus ſunt quàm uicies quinquies 25, & quindecies 15, quantum eſt quod ſub 15 & 15, uel quod ſub 25 & 9 continetur bis. id quod multiplicatione cernere licet.

PRO TRIANGVLO OBTVSIANGVLO.



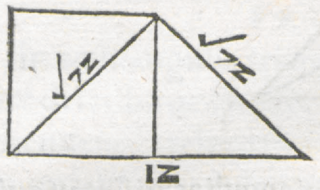
Similiter etiam in triangulo obtuſiangulo, quindecies 15, ratione unius acuti anguli, minus ſunt quàm tricies 30 & uicies 20, quantum eſt quod ſub 30 & $17\frac{11}{17}$ continetur bis. Sic ratione alterius acuti anguli, cuius ſubtenſum latus ſunt 20, ubi uicies 20 tanto minus ſunt quàm tricies 30 & quindecies 15, quantum eſt quod ſub 30 & $12\frac{1}{12}$ continetur bis. id quod examinari poteſt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ.

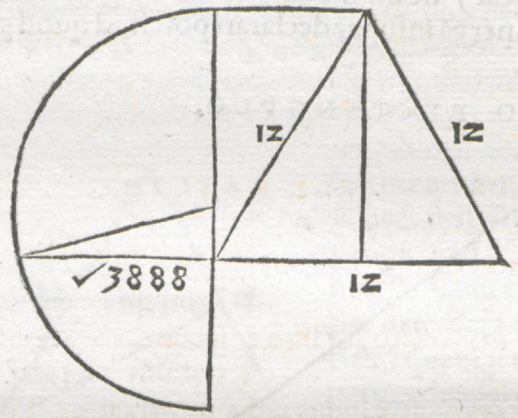
Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ, ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι.

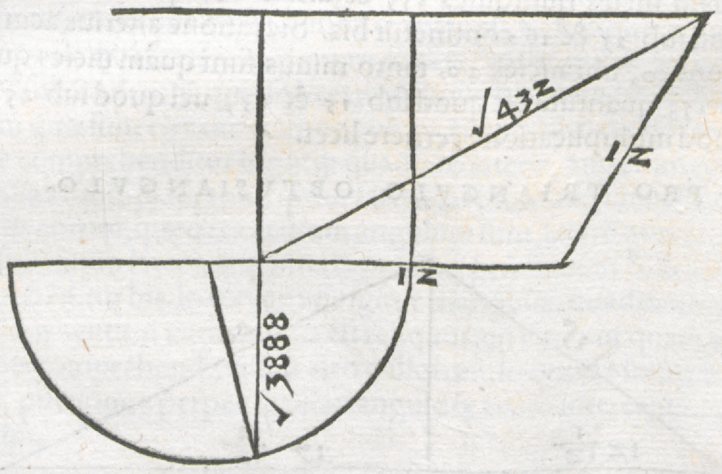
PROPOSITIO XIIII.

Dato rectilineo, æquale quadratum conſtituere.

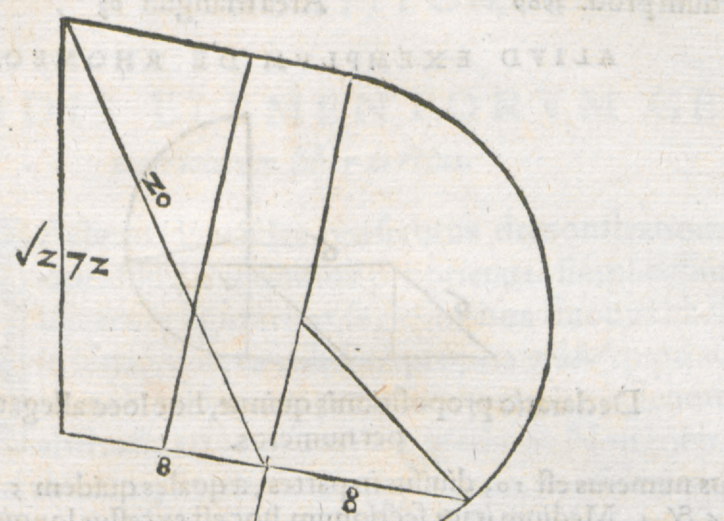


Sit rectilineum datum qualecunque, atque propoſitum, quadratum ei æquale conſtituere. Quia uerò rectilineum datum, uel triangulum, uel plurium laterum rectilineum eſſe poteſt. Igitur ſi triangulum fuerit, ei ex propoſitione 42 primi: ſi uerò plurium laterum rectilineum, ex 45 eiuſdem primi ęquale parallelogrammum conſtituendum eſt. Quòd ſi quadratum fuerit hoc conſtitutum parallelogrammum, factum erit propoſitum. Sin minus, ex duobus huius parallelogrammi lateribus, ijs quidem quę ſunt iuxta unum & eundem angulum, alterum alteri adamuſſim adijciatur, utrouis ſcilicet huius anguli latere, ſecundum quantitatem alterius, longiore facto. Deinde ſecundum hanc totam, ex duobus lateribus compoſitam lineam, tanquam diametrum, ex eius medio, quod quidem per propoſitionem 10 primi haberi poteſt, ſemicirculus deſcribatur. Quòd ſi tandem per punctum coniunctionis laterum ea, quæ ad idem punctum terminatur, linea uſque ad circumferentiam continuata fuerit: propoſitioni ſatisfactum erit. Nam hæc continuata portio ea linea eſt, cuius uidelicet quadratum rectilineum referre debet, id quod per lineam, à centro ad interſectionem circumferentiæ cũ iam inuenta, rectam ductam, ex quinta huius & penultima primi, æquali interim pro æquali linea ſumpta, ab æqualibus etiam deinde æquali, uel eodem communi ablato, facile demonſtrabitur. Dato igitur rectilineo, æquale quadratum conſtitutum eſt. quod fieri oportuit.





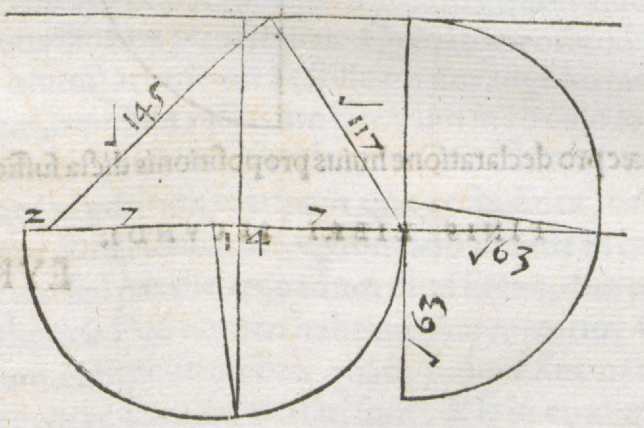
SEQVITVR HVIVS PROPOSITIONIS GEOmetrica figura alia.



PORRO CALCVLVS TRIANGVLI DATI IN hac figura, ſic ſe habet.

Latera	Exceſſus		
20	$\sqrt{68} - 6$	Productum { Primum	32
$\sqrt{272}$	$14 - \sqrt{68}$	ſecund.	128
8	$\sqrt{68} + 6$	tertium	4496.
$28 + \sqrt{272}$	$14 + \sqrt{68}$		

atque huius radix quadrata 64, Trianguli, Parallelogrammi & Quadrati area. Quoniam autem unum parallelogrammi latus eſt notum, 4 ſcilicet, area etiam nota, nimirum 64: & alterum latus, diuiſione, notum erit. Eſt autem illud 16.

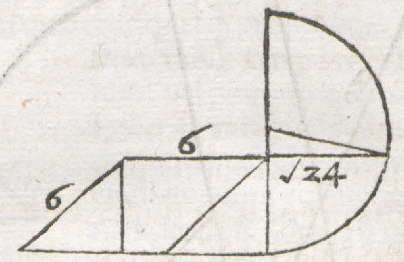


Inuentio areæ trianguli, cuius

Latera ſunt	Exceſſus uerò
14	$\sqrt{\frac{117}{4}} + \sqrt{\frac{145}{4}} - 7$
$\sqrt{145}$	$\sqrt{\frac{117}{4}} - \sqrt{\frac{145}{4}} + 7$
$\sqrt{117}$	$7 + \sqrt{\frac{145}{4}} - \sqrt{\frac{117}{4}}$
$14 + \sqrt{145} + \sqrt{117}$	$7 + \sqrt{\frac{145}{4}} + \sqrt{\frac{117}{4}}$

Primum	ſecundum productum
√ $4241\frac{1}{4}$ + $16\frac{1}{2}$	√ $4241\frac{1}{4}$ — $16\frac{1}{2}$
Tertium prod. 3969	Area trianguli 63

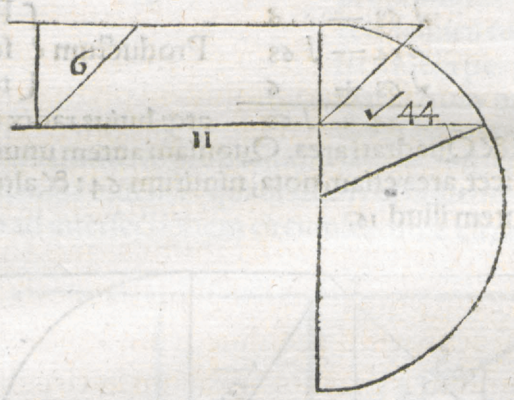
ALIVD EXEMPLVM DE RHOMBO.



Declaratio propoſitionis quintæ, hoc loco allegatæ, per numeros.

Totus numerus eſt 10, diuiſus in partes, æquales quidem 5 & 5. in inæquales uerò 6 & 4. Medium itaqꝫ ſectionum, hoc eſt exceſſus longioris portionis reſpectu medietatis lineę uel numeri diuiſi 1. Rectangulum porrò ſub partibus inæqualibus comprehenſum, ſunt 24, cum quadrato unitatis, ueniunt 25. & tantum eſt etiam quadratum numeri 5, hoc eſt medietatis diuiſi. quod oſtendere libuit.

ALIA ET VLTIMA HVIVS PROPOSITIONIS GEOmetrica figuratio de Rhomboide.



Atqꝫ hæc pro declaratione huius propoſitionis dicta ſufficiant.

FINIS LIBRI SECVNDI.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ.

EVCLIDIS ELEMENTORVM GEOmetricorum liber tertius.

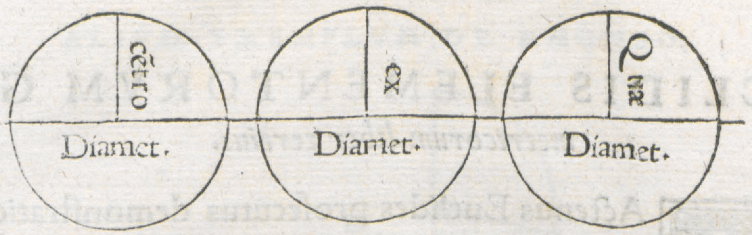
HActenus Euclides proſecutus demonſtrationum euidentiſſimis rationibus, proprietates ſimpliciſſimas recti linearum figurarum, ſuperioribus duobus libris: nunc in tertio, quæ circuli ſunt propria πάθη (quod ad doctrinam elementorum pertinet, quæ planè Geometrica & abſtracta eſt) explanare aggreditur. Non enim quę cœleſtium, aut quæ aliorum proprietas ſit circulorum conſideratur hoc loco, nam ſubiectis cum rebus nihil commune habet geometria ſincerior, quippe cõcretione atqꝫ adiunctione certorum ſubiectorum, mox in aliarum ſcientiarum titulos cum degeneret, ut Aſtronomiæ, Architectonicæ, Opticæ, & ſimilium, quarum ipſa ſibi ſcientiam non arrogat quidem, uerùm illas tamen abſqꝫ geometria intelligi non poſſe aut addiſci, nemo mediocriter etiam eruditus ignorat. Liber præſens uel hoc nomine præſtat præcedentibus, quòd nimirum hic de proprietatibus tractat perfectiſſimæ figuræ, nempe de Circulo, ſiquidem pro natura ſubiectarum rerum ſcientię aliæ alijs ſunt pręponendæ. Vtilis porrò eſt ad cognitionem Chordarum, & arcuũ pręciſionem in circulis, quippe cum quæ eſt angulorum, eadem ſit quoqꝫ arcuum & chordarum inter ſe ratio. Præterea de circulis cõtingentibus & ſeſe mutuo ſecantibus, quòd illud quidem uno, hoc uerò duobus tantum punctis fiat. Quinetiam oſtendit, Contingentiæ angulum, omniũ acutorum rectilineorum angulorum eſſe minimũ: Diametrum item, omnium rectarum linearum in circulo longiſſimam. & id genus multa complectitur hic liber tertius. Docet præterea, tribus punctis ſignatis (modo non fuerint in una recta linea) circulus per illa tranſiens, quo pacto deſcribatur. Quomodo deinde in corpore aliquo ſolido, ſphæricum ſeu parallelepipedum illud fuerit, duo puncta oppoſita, ut quæ in ſphęricis Poli nomen habeant, inueniantur. Quæ ambo in inſtrumentorum compoſitionibus quàm ſummè ſint neceſſaria, nullis non qui hoc in genere ſcientiæ uerſati ſunt, & ſe in eo aliquantum exercuerunt, manifeſtum eſt.

ΟΡΟΙ.

Ισοι κύκλοι εἰσὶν, ὧν αἱ διάμετροι εἰσὶν ἴσαι.
ἢ ὧν αἱ ἐκ τῶν κέντρων, ἴσαι εἰσίν.

DEFINITIONES.

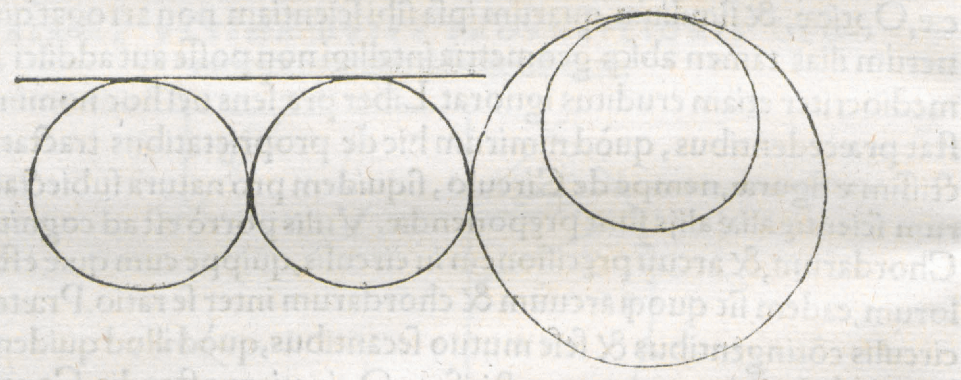
1 Aequales circuli ſunt, quorum diametri ſunt æquales. Aut, quorum quæ ex centris, æquales ſunt.



Εὐθεῖα κύκλου ἐφάπτεσθαι λέγεται, ἥτις ἁπτομένη τοῦ κύκλου, καὶ ἐκβαλλομένη, οὐ τέμνει τὸν κύκλον. Κύκλοι ἐφάπτεσθαι ἀλλήλων λέγονται, οἵτινες ἁπτόμενοι ἀλλήλων, οὐ τέμνουσιν ἀλλήλων.

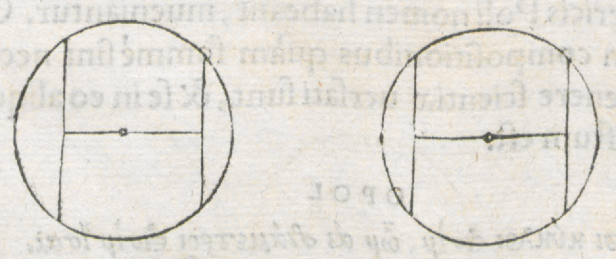
2 Recta linea circulum tangere dicitur, quæ tangens circulum, & eiecta, circulum non ſecat.

3 Circuli tangere ſeſe mutuo dicuntur, qui ſeſe mutuo tangentes, ſeſe mutuo non ſecant.



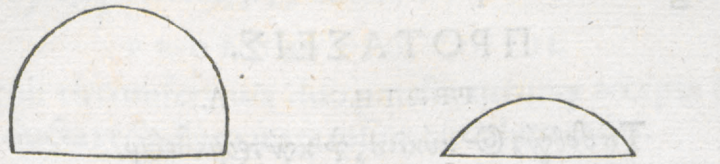
Ἐν κύκλῳ ἴσον ἀπέχειν τοῦ κέντρου εὐθεῖαι λέγονται, ὅταν αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπ᾽ αὐτὰς κάθετοι ἀγόμεναι, ἴσαι ὦσι. Μεῖζον δὲ ἀπέχειν λέγεται, ἐφ᾽ ἣν ἡ μείζων κάθετος πίπτει.

4 In circulo æqualiter diſtare à centro rectæ lineæ dicuntur, cum à centro in eas perpendiculares ductæ, æquales fuerint. Plus uerò diſtare dicitur, in quam longior perpendicularis cadit.



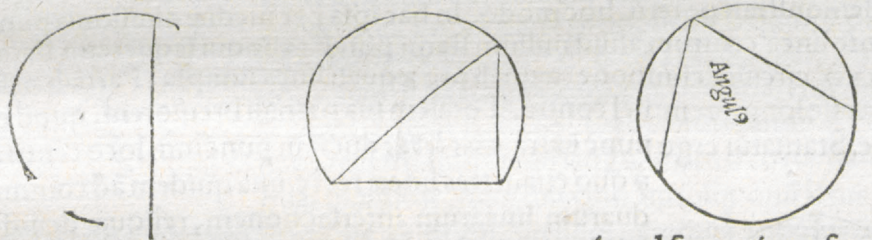
Τμῆμα κύκλου, ἐστὶ τὸ περιεχόμενον σχῆμα, ὑπό τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας.

5 Sectio circuli, eſt figura comprehenſa ſub recta linea, & circuli circunferentia.



Τμήματος γωνία, ἐστὶν ἡ περιεχομένη ὑπό τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας. Ἐν τμήματι δὲ γωνία ἐστίν, ὅταν ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ τμήματος ληφθῇ τι σημεῖον, καὶ ἀπ᾽ αὐτοῦ ἐπὶ τὰ πέρατα τῆς εὐθείας, ἥτις ἐστὶ βάσις τοῦ τμήματος, ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν ἐπιζευχθεισῶν εὐθειῶν. Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν εὐθεῖαι ἀπολαμβάνωσι τινὰ περιφέρειαν, ἐπ᾽ ἐκείνης λέγεται βεβηκέναι ἡ γωνία.

6 Sectionis angulus eſt, qui ſub recta linea, & circuli circūferentia comprehenditur. 7 In ſectione uerò angulus eſt, cū in ſectionis circunferentia punctum aliquod ſumptum, atq; de illo ad rectę lineæ fines, quę eſt ſectionis baſis, rectæ lineę ductæ fuerint, comprehenſus ſub coniunctis rectis angulus. 8 Quando autem comprehendentes angulum rectæ lineę aliquam ſuſcipiunt circūferentiam, in illa dicitur eſſe angulus.

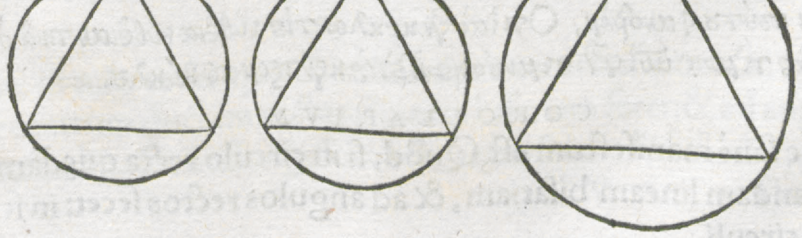


in uel ſuper circunferentia.

Τομεὺς κύκλου ἐστίν, ὅταν πρὸς τῷ κέντρῳ αὐτοῦ τοῦ κύκλου σταθῇ ἡ γωνία, τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῶν τὴν γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ᾽ αὐτῶν περιφερείας.

9 Sector circuli eſt, cum ad centrum circuli ſteterit angulus, comprehenſa figura ſub angulum comprehendentibus rectis lineis, & aſſumpta ſub eis circunferentia.

Ὅμοια τμήματα κύκλου, ἐστὶν τὰ δεχόμενα γωνίας ἴσας. ἢ, ἐν οἷς αἱ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.



10 Similes ſectiones circuli ſunt, quæ angulos ęquales ſuſcipiunt. Aut, in quibus anguli inter ſe æquales ſunt.

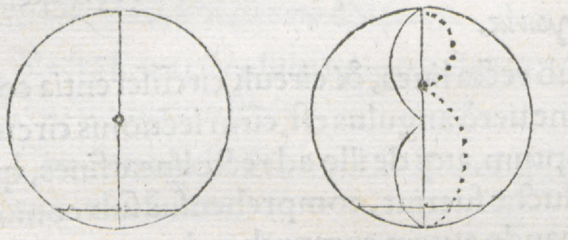
ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.

ΠΡΩΤΗ. Α.

Τοῦ δοθέντος κύκλου, τὸ κέντρον εὑρεῖν.

PRIMA I.

Dati circuli, centrum inuenire.



Sit circulus datus, atque propoſitum, illius centrum inuenire. Ducatur in circulo recta quædam linea utcunq;, ita tamen, ut utraq; eius extremitas in circuli ſit circunferentia, hac deinde recta, per propoſitionem 10 primi bifariam diuiſa, à puncto diuiſionis huius ad angulos rectos linea, quæ ſimiliter utrãq; extremitatẽ in circunferentia habeat, per 11 eiuſdem, excitetur. Quòd ſi tandem hęc ad rectos ducta bifariam diuiſa fuerit: punctum huius diuiſionis centrum circuli erit. Id quod ab impoſſibili, ubi aliud quoddam, præter hoc, centrum ſignatum fuerit, demonſtrari poterit, hoc modo. In hac ipſa per mediæ diuiſionis punctum tranſeunte linea, centrum aliud nullum ſtatui poteſt: alioqui ſequeretur ſtatim, ex ſtructura, & circuli definitione, æquali pro æquali linea ſumpta, Partialem ſua totali linea eſſe longiorem: uel contrà, Totalem ſua partiali breuiorem, quod eſt impoſſibile. Statuatur ergo nunc extra πρὸς ὀρθὰς ductam punctum loco centri aliud, à quo etiam tres lineæ rectę, una quidem ad communem duarum linearum interſectionem, reliquæ deinde duæ ad duas primò ductæ extremitates, ducantur. Et quia triangula quæ ſic fiunt, huiuſmodi ſunt, qualia propoſitio in primo octaua requirit: anguli qui à duabus ſemidiametris ſubtenduntur, per eandem, inter ſe æquales erunt: ex definitione igitur uterq; rectus. Quia autem, ut habet cõmunis quædam noticia. Omnes recti anguli inter ſe ſunt æquales, ea mediante, & quia prius etiã ex hoc communi duorum rectorum angulorum puncto πρὸς ὀρθὰς linea educta eſt, infertur tandem, ampliorem angulum anguſtiori: uel contrà, anguſtiorem angulo ampliori eſſe æqualem, quod cum & ipſum abſurdum ſit: operationem conſtare, punctum deinde in linea πρὸς ὀρθὰς ducta, medium, centrũ circuli eſſe, nemini dubium erit. Ὁμοίως δὴ δείξομεν: Simili modo demonſtrabitur, quòd nullum punctum aliud, præter hoc quod in medio huius ductæ ſignatum eſt, centrum circuli eſſe poſſit. Dati igitur circuli centrum inuentum eſt, quod fieri oportuit.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν ἐν κύκλῳ τὶς εὐθεῖα εὐθεῖάν τινα δίχα, καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνῃ· ἐπὶ τῆς τεμνούσης ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

COROLLARIVM.

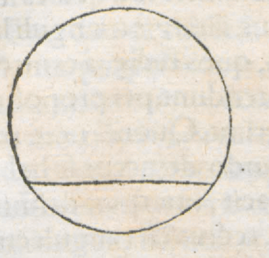
Ex hoc ſanè manifeſtum eſt, Quòd, ſi in circulo recta quędam linea rectam quandam lineam bifariam, & ad angulos rectos ſecet: in ſecante ſit centrum circuli.

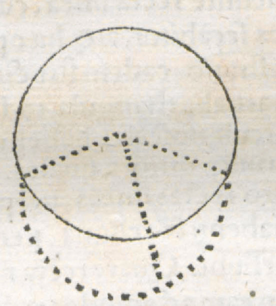
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β.

Ἐὰν κύκλου ἐπὶ τῆς περιφερείας ληφθῇ δύο τυχόντα σημεῖα· ἡ ἐπὶ τὰ αὐτὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα, ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου.

PROPOSITIO II.

Si in circuli circumferentia duo puncta utcunq; accepta fuerint: ad ipſa puncta ducta recta linea, intra ipſum circulum cadet.





Sit circulus, duo etiam puncta in ipſius circumferentia utcunq; ſignata: dico, ſi hæc puncta linea quadam recta coniungentur, hanc rectam intra circulum cadere oportere. Colligitur huius propoſitionis demonſtratio ab impoſſibili. Niſi enim intra circulum cadat recta hæc, ſtatim contrà illam communem noticiam, quæ dicit, Totum parte ſua maius eſſe, inferri poteſt, quòd pars ſuo toto maior ſit, hoc nimirum modo. Linea illa recta, qua cum puncta, in circunferentia accepta, copulantur, ſi intra circulum non cadat, extra circulum, aut in ipſam circuli circunferentiam, cadere eam oportet. Cadat ergo primò extra, ſi fieri poteſt, & quæratur per propoſitionem præmiſſam, circuli centrum, à quo etiam duæ rectæ ad duo in circunferentia accepta puncta ducantur. Et quoniam hæ duæ rectæ, ex definitione circuli, ſunt inter ſe æquales: triangulũ igitur quod ſic deſcriptum eſt, ἰσοσκελὲς erit, habens ad baſim poſitos angulos, ex priore parte propoſitionis quintæ primi, inter ſe æquales. Ducatur præterea & alia recta quædam linea, à centro circuli utcunq;, per circunferentiam uſq; ad baſim trianguli iſoſcelis, eam continuando. Et quia per hanc rectam iſoſceles triangulum in duo partialia triangula diuiditur, quorum cum utriuſq; unũ latus ulterius productum ſit: erit ex propoſitione 16 primi, utriuſq; externus angulus ſuo interno & oppoſito, uno ſcilicet æqualium, maior: quare & altero æqualium maior erit. Cum autem iam, ut tandem concludatur, triangulum appareat, unum habens angulum reliquorum altero maiorem, maior uerò angulus, ut teſtatur propoſitio in primo 19, longius latus requirat, hac ipſa propoſitione hic uſurpata, æquali deinde linea pro æquali ſumpta, infertur tandem, partialem ſua totali linea eſſe longiorem, quod eſt impoſſibile. Non ergo extra circulum cadit puncta copulans recta linea. Similiter etiam, quòd non in ipſam circunferentiam cadat, demonſtrabitur: cadet itaq; intra ipſum circulum. In circuli igitur circũferentia, ad duo puncta, utcunq; accepta, linea recta ducta, in circulum eam cadere neceſſe eſt, quod demonſtraſſe oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ.

Ἐὰν ἐν κύκλῳ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου δίχα τέμνῃ· καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τεμεῖ. Καὶ ἐὰν πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνῃ· καὶ δίχα αὐτὴν τεμεῖ.

PROPOSITIO III.

Si in circulo recta quædam linea per centrum extenſa, quandam non per centrum ductam rectam lineam bifariam ſecet: & ad angulos rectos eam ſecabit. Et ſi ad angulos rectos eam ſecet: & bifariã quoq; eam ſecabit.

Præparetur figura, qualem ſcilicet requirit hæc propoſitio, hoc eſt, deſcribatur circulus, in quo etiam duæ rectę, una quidem per centrum tranſiens, altera uerò præter illud, à priori tamen, uel biſariam, uel ad angulos rectos ſecta, ducãtur: dico, ſi biſariam: & ad angulos rectos, ſi uerò ad angulos rectos: & biſariam etiam per centrum ductam alteram ſecare oportere. Quantum ad partem priorem, coniungantur extremitates eius quæ non per centrum tranſit rectæ lineæ, cum centro circuli duabus rectis. Et quoniam hæ duæ rectæ, ut duorũ triangulorum latera, ex definitione circuli, inter ſe æquales ſunt, cum quoq; reliqua duo unius ex ſtructura, reliquis duobus alterius trianguli lateribus ęqualia ſint: anguli etiam, quos rectę, à centro circuli ad extremitates ductę, ſubtendunt, per propoſitionem 8 primi, inter ſe æquales erunt. Quoniã uerò recta linea rectæ inſiſtens lineæ, quando deinceps ſe habentes angulos æquales inter ſe facit, uterq; ex definitione quadam in primo expoſita, rectus eſt: anguli etiam illi duo, quos ſcilicet propoſitio 8 demonſtrauit eſſe inter ſe æquales, recti erunt. Pręter centrum igitur ducta ab illa altera per centrum tranſeunte recta linea, cũ ex hypotheſi biſariam ab ea ſecta ſit, ad angulos etiam rectos ſecabitur, atq; hæc pro parte propoſitionis priore. Poſterioris uerò partis demonſtratio, eadem ſtructura manente, ex 26 primi ſic colligi poterit. Cum enim duo partialia triangula, ex ſtructura, rectangula ſint, ipſum uerò totum, ex definitione circuli, iſoſceles: habebunt hæc partialia triangula duos angulos duobus angulis, utrunq; utriq; æquales. Et quia etiam latus unum lateri uni, uel deſcendentes à centro rectas lineas, uel perpendicularis portionem ambobus communem, æquale habent: & reliqua, per allegatam ex primo propoſitionem, reliquis æqualia habebunt. Quare recta non per centrum tranſiens linea, ab altera quæ per centrum in eam ad angulos rectos cadit, biſariam diuiſa eſt. Si in circulo igitur, recta quædam linea per centrum extenſa, quandam non per centrum ductam rectam lineam biſariam ſecet: & ad angulos rectos eam ſecabit. Et ſi ad angulos rectos eam ſecet: & biſariam quoq; eam ſecabit. quod demonſtraſſe oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ.

Ἐὰν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι· οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

PROPOSITIO IIII.

Si in circulo duę rectæ lineæ, non per centrum extenſæ, ſeſe mutuo ſecuerint: ſeſe mutuo biſariam non ſecabunt.

Deſcribatur circulus, ducantur etiam in eo duæ rectæ lineæ, quorum neutra per centrum tranſeat, altera tamen alteram ſecet: dico rectas has biſariam ſeſe mutuo non ſecare. Sumit hæc propoſitio ſuam ab impoſſibili demonſtrationem per præcedentis tertiæ partem priorem, bis quidem, cum duæ ſint rectæ lineæ, uſurpatam, & communem illam noticiam, quæ dicit, Omnes rectos angulos inter ſe eſſe æquales, cum per hæc, ſi mutuo una alteram biſariam ſecaret, ſtatim ubi linea à centro ad communem ductarum interſectionem ducta eſſet, minorem angulum maiori æqualem eſſe inferretur. Hoc autem quia nemini intelligenti perſuaderi poteſt: per inæqualia igitur, & non æqualia, ſeſe huiuſmodi lineæ, ut uult propoſitio, ſecabunt. Si in circulo igitur duæ rectæ lineæ, non per centrum extenſæ, ſeſe mutuo ſecuerint: ſeſe mutuo biſariam non ſecabunt. quod demonſtraſſe oportuit.

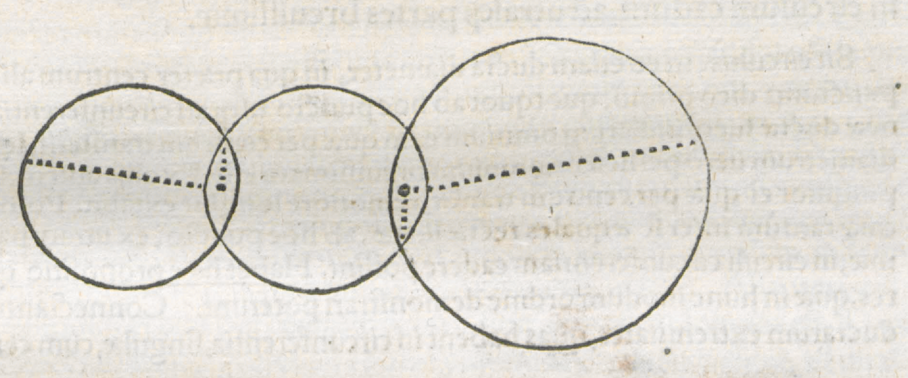
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε.

Ἐὰν δύο κύκλοι τέμνωσιν ἀλλήλους· οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

PROPOSITIO V.

Si duo circuli ſeſe mutuo ſecent: non erit eorum idem centrum.

Sint duo circuli ſeſe mutuo ſecantes, dico quòd eorum non ſit idem centrum. Et huius propoſitionis, ut præcedentis, demonſtratio ab impoſſibili ſumitur. Si enim centrum unum & idem habuerint illi ſeſe mutuo ſecãtes circuli, cum centrum non extra, ſed in circulo ſedem ſuam habeat, in nullo loco alio, quàm in portione, utriq; circulo communi, id eſſe poterit. eo igitur in loco illo cõſtituto, inde ad communem circulorum interſectionem linea recta ducatur, & erit hæc utriuſq; circuli ſemidiameter. Ducatur & alia recta ab eodem centro poſito, per communem portionem uſq; ad circunferentiam utriuslibet circuli cõtinuata. Et quoniam hęc tota, unius: pars uerò eius, alterius circuli eſt ſemidiameter: erit utraq;, pars uidelicet & ipſa tota, primò ductæ rectæ, quæ & ipſa utriuſq; circuli ſemidiameter eſt, æqualis. unde ſic etiam, per communem quandam noticiam, ipſæ inter ſe æquales, pars uidelicet toti, quod eſt impoſſibile. Punctum ergo id quod ſumptum eſt, aut ſi aliud quoddam ſumeretur, centrum circulorum eſſe, haudquaquam poteſt. Duorum igitur ſeſe mutuo ſecantium circulorum, unum & idem centrum non erit. quod demonſtrari oportuit.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ς.

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐντός· οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

PROPOSITIO VI.

Si duo circuli ſeſe mutuo interius tetigerint: nõ erit eorũ idem centrũ.

Sint duo circuli, qui ſeſe interius mutuo tangant: dico, eorum non idem eſſe centrum. Sed eſto ſanè idem, ſi fieri poteſt, & connectatur id cum circulorum contactu, atque poſtea ab eodem communi centro poſito ad exterioris circuli circũferentiam, ubicũq; hoc fuerit, alia recta linea ducta, quòd neque hoc, neq; aliud ullum punctum, horum tangentium circulorum centrum eſſe poſſit, ab impoſſibili, ut in præcedenti, demonſtrabitur. Si duo circuli igitur, ſeſe mutuo interius tetigerint: non erit eorum idem centrum. quod demonſtraſſe oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ.

Ἐὰν κύκλου ἐπὶ τῆς διαμέτρου ληφθῇ τι σημεῖον, ὃ μή ἐστι κέντρον τοῦ κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου προσπίπτωσιν εὐθεῖαι τινὲς πρὸς τὸν κύκλον· μεγίστη μὲν ἔσται, ἐφ᾽ ἧς τὸ κέντρον· ἐλαχίστη δέ, ἡ λοιπή. Τῶν δὲ ἄλλων, ἀεὶ ἡ ἔγγιον, τῆς διὰ τοῦ κέντρου, τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστί. Δύο δὲ μόνον εὐθεῖαι, ἴσαι, ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου προσπεσοῦνται πρὸς τὸν κύκλον, ἐφ᾽ ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης.

PROPOSITIO VII.

Si in diametro circuli aliquod ſumatur punctum, quod non ſit centrum circuli, ab eoq́; puncto rectæ quædam lineæ in circulum cadãt: longiſſima quidem erit, in qua centrum: breuiſſima uerò, reliqua. Aliarum uerò, ſemper propinquior ei quæ per centrum protenditur, remotiore longior eſt. Duæ autem ſolùm rectæ lineæ æquales, ab eodem puncto in circulum cadunt, ad utraſq́; partes breuiſſimæ.

Sit circulus, in eo etiam ducta diameter, in qua præter centrum aliud ſumatur punctum: dico primò, quotquot ab hoc puncto uſq́; ad circunferentiam rectæ lineæ ductæ fuerint, illarum omnium eam quæ per centrum tranſierit, longiſſimam, diametrum uerò perficiens, omnium breuiſſimam eſſe. Ex alijs autem, ſemper propinquior ei quæ per centrum tranſit, remotiore longior extabit. Poſtremò, quòd duæ tantùm inter ſe æquales rectæ lineæ, ab hoc puncto, ex utraq́; parte breuiſſimæ, in circuli circunferentiam cadere poſſint. Habet hæc propoſitio quatuor partes, quæ in hunc modum ordine demonſtrari poterunt. Connectantur in circulo ductarum extremitates, quas habent in circunferentia, ſingulæ, cum centro circuli, ſingulis rectis lineis. Et quoniam duo quælibet latera omnis trianguli, ex propoſitione 20 primi, reliquo tertio longiora ſunt, tertio porrò longiora duo latera, in præſentia, ex definitione circuli & illa communi noticia, Si æqualibus æqualia addantur, &cę. uni rectæ alij æqualia ſunt, cum hæc alia centrum circuli contineat: quod in propoſitione primò proponitur, iam manifeſtum erit. Rurſus quoniam ex eadẽ propoſitione 20 primi, quælibet duo trianguli latera reliquo tertio longiora ſunt, tertium porrò latus ex definitione circuli, uni rectæ alij æquale eſt: & tertio longiora duo latera eadem recta alia longiora erunt. Cum autem hæc alia per punctum, præter centrum in diametro acceptum, tranſeat, communi ex æquo de illis inæqualibus portione ablata: & quod in propoſitione ſecundò proponitur manifeſtum erit. Tertium nũc patet ex propoſitione 24 primi. Porrò ut quartum etiam retineatur, ducenda eſt, per propoſitionem 23 primi, ex centro recta linea, quæ cum ſemidiametro per punctum tranſeunte, angulum faciat, illi angulo, qui ex altera parte ſub eadem ſemidiametro, atq́; ex centro ductarum linearum una continetur, æqualem, eaq́; ad circunferentiam uſq́; continuata, ab ipſius in circunferentia extremitate ad punctum recta linea ducatur. Et quoniam duo triangula, qualia propoſitio in primo 4 requirit, apparent: baſes igitur illorum, hoc eſt, lineæ illæ, quæ ad utraſque partes breuiſſimæ ſunt poſitæ, à puncto item in diametro præter centrum accepto egrediuntur, per hanc 4, inter ſe æquales erunt. Nec alia etiam, in illa eadem parte, ab hoc puncto ei quæ in altera parte eſt poſita, æqualis educi poteſt. Nam ſi fortè ab aliquo minus credẽti hoc tentaretur, qui rectam aliam alteri æqualem duceret, dum cui hæc ſic ducta ex communi illa noticia, Quæ uni ſunt æqualia &c. æqualis eſſe deberet, mox per 3 partem propoſitionis huius, eadem longior eſſe oſtendi poteſt: id quod fieri nequit. Poteſt etiam aliter hæc quarta pars demonſtrari in hunc modum. Ducatur alia, ſi ita poſſibile uidetur, recta linea, ei quæ ex altera parte breuiſſimæ poſita eſt, rectæ ęqualis, cuius in circũferentia extremitas cum recta quadam linea iuncta, demonſtratio ſic colligetur. Quoniam anguli ex utraq́; parte ad centrũ poſiti, ex propoſitione 8 primi, inter ſe æquales ſunt, unus uerò partialis angulus alterius trianguli totali, ut iam ex 4 primi demonſtratum, æqualis: ille partialis tandem angulus, ex communi illa noticia, Quę uni ſunt æqualia &c. ſuo totali angulo æqualis erit, quod eſt impoſſibile. Duæ igitur ſolùm rectę lineæ æquales, ab eodem puncto in circulum cadunt ad utraſq́; breuiſſimæ lineæ partes. Si in circuli igitur diametro punctum aliquod ſumatur, quod non ſit centrum circuli, ab eoq́; puncto rectæ quędam lineæ in circulum cadant: longiſſima quidem erit, in qua centrum: breuiſſima uerò, reliqua. Aliarum uerò, ſemper propinquior ei quæ per centrum protenditur, remotiore longior eſt. Duæ autem ſolùm rectæ lineæ, æquales, ab eodem puncto in circulum cadunt, ad utraſque partes breuiſſimę. quod demonſtraſſe oportuit.

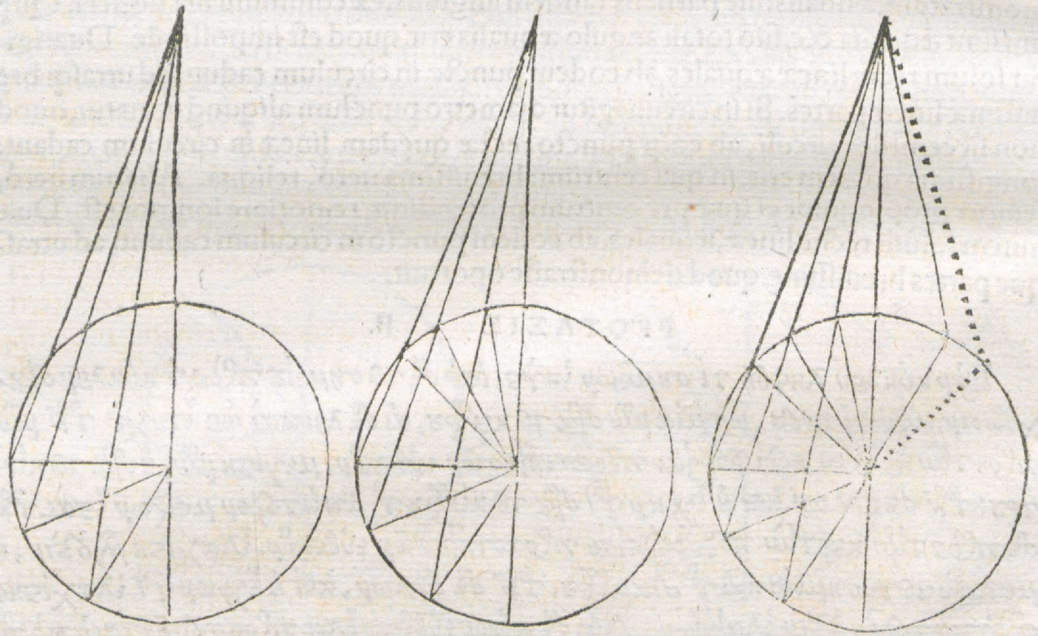
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η.

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον διαχθῶσιν εὐθεῖαί τινες, ὧν μία μὲν διὰ τοῦ κέντρου, αἱ δὲ λοιπαὶ ὡς ἔτυχε· τῶν μὲν πρὸς τὴν κοίλην περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν, μεγίστη μὲν, ἡ διὰ τοῦ κέντρου· τῶν δὲ ἄλλων, ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἔσται. τῶν δὲ πρὸς τὴν κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν, ἐλαχίστη μέν ἐστιν, ἡ μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς διαμέτρου. τῶν δὲ ἄλλων, ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς ἐλαχίστης τῆς ἀπώτερόν ἐστιν ἐλάττων. Δύο δὲ μόνον εὐθεῖαι ἴσαι προσπεσοῦνται ἀπὸ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον ἐφ᾽ ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης.

PROPOSITIO VIII.

Si extra circulum aliquod ſumatur punctum, ab hoc uerò puncto ad circulum percurrant rectæ quædam lineæ, quarum una quidem per centrum, reliquæ uerò ut accidit: in concauam circũferentiam cadentium linearum, longiſſima quidem eſt quæ per centrum currit. Aliarum autem, ſemper propinquior ei quæ per centrum, remotiore longior erit. In conuexam uerò circumferentiam cadentium linearum, breuiſſima quidem eſt, quæ inter punctū & diametrum, aliarum aūt, ſemper breuiſſimę propinquior, remotiore breuior eſt. Duæ autem ſolū rectæ lineæ, æquales, cadunt ab hoc puncto in circulum ad utraſq; partes breuiſſimæ.

Sit circulus, extra illum etiam punctum acceptum, à quo aliquot rectæ lineæ, per circulum currentes, uſq; ad concauam circunferentiam ducantur. Eſto autem quòd ductarum una per centrum, aliæ uerò utcunq; tranſeant. Dico itaq;, in concauam circunferentiam cadentium linearum longiſſimā eſſe, quæ per centrum tranſit. Ex alijs autem, ſemper propinquiorem ei, quę per centrum tranſit, remotiore longiorem. Linearum uerò partialium, extra in conuexam circunferentiam circuli cadentium, quę puncto & diametro interiacet, illam omnium breuiſſimam. Ex alijs autem, ſemper breuiſſimæ propinquiorem, remotiore breuiorem eſſe. Ad hæc dico etiam, duas tantum ab hoc puncto rectas lineas, quæ ex utraq; parte breuiſſimæ, in circulum cadunt, æquales educi poſſe. Habet hæc propoſitio quinque partes, quarum prima & ſecunda, ubi prius à contactibus, pręter centrum ductarum & circunferentiæ, ad centrum rectæ lineæ ductę fuerint, illa quidem ex propoſitione 20 primi, per quam duo quælibet latera in triangulo, tertio longiora ſunt, recta una pro duabus ſibi ęqualibus ſumpta, hæc uerò ex 24 eiuſdem primi retineri poterunt. Quòd ſi & ab interſectionibus iam, præter centrum ductarum cum circunferentia, rectæ lineę ad centrum ductæ fuerint: tertiæ quoque &



quartæ partibus per eaſdem primi propoſitiones, ab inæqualibus tamen interim æqualibus ſubtractis, ſatisfieri poterit. Supereſt igitur nunc ut quintæ parti, quæ uidelicet duas ſolùm rectas lineas, ab hoc puncto æquales, ex utraq; parte breuiſſimæ, in circulum cadere aſſerit, ſatisfaciamus: quod quidem ab impoſſibili hoc modo fieri debet. Ducatur per 23 primi, ex centro recta linea, quæ cum ſemidiametro per circūferentiam ad punctum continuata, angulū faciat, illi angulo, qui ex altera parte ſub eadem ſemidiametro atq; ex centro ductarum linearum una continetur, æqualē, & connectatur huius ductæ extremitas quam habet in circunferentia, per primum poſtulatum in primo, cum puncto extrà ſumpto, recta quadam linea, quòd nunc hæc recta ei, quæ ex altera parte diametri ad punctum continuata eſt, ęqualis ſit, & ſola etiam, ſic ut nulla æqualis alia ex hoc puncto egrediatur, utrunq; non

---

non aliter, quàm in pręcedenti quarta pars, retinebitur. Si extra circulum igitur aliquod ſumatur punctum, ab hoc uerò puncto ad circulum percurrant rectæ quædam lineæ, quarum una quidem per centrum, &cę. quod demonſtrari oportuit.

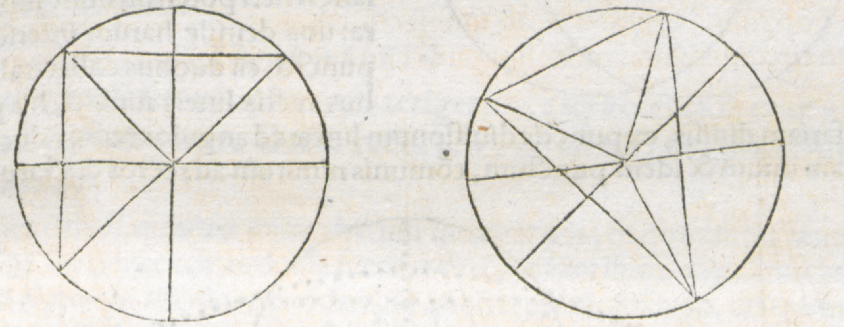
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ.

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τί σημεῖον ἐντὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι πλείους ἢ δύο εὐθεῖαι ἴσαι· τὸ ληφθὲν σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ κύκλου.

PROPOSITIO IX.

Si in circulo acceptum fuerit punctum aliquod, ab hoc uerò puncto ad circulum cadant plures quàm duę rectæ lineæ æquales: acceptum punctum centrum eſt ipſius circuli.

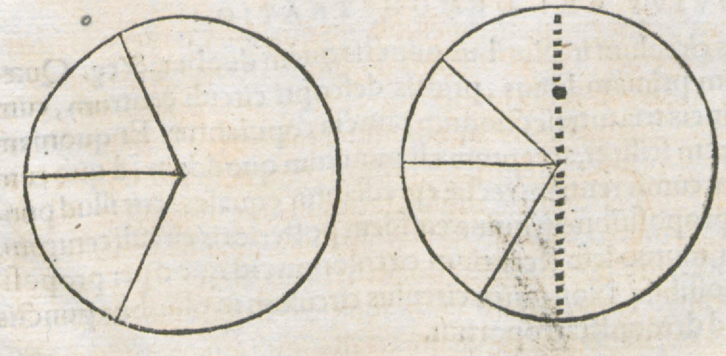
Sit circulus, in eo etiam punctum ſignatum ſic, ut plures quàm duę rectæ lineæ inde uſq; ad circumferentiam ductę inter ſe æquales ſint: dico, ſignatum punctum centrum circuli eſſe. Coniungantur ductarum extremitates, quas habēt in circumferentia ſingulæ, ſingulis rectis quibuſdam lineis, coniungentium deinde duabus, uel omnibus ſi placet, bifariam diuiſis, à punctis harum diuiſionum rectæ lineę ad ſignatum in circulo punctum ducantur, continuenturq; ex utraq; parte uſq; in circumferentiam.



Et quoniam circa quamlibet ultimò iam ductarum linearum duo triangula ſunt, quorum anguli ad illam, κατὰ τὴν κατασκευὴν & propoſitionem 8 primi, inter ſe æquales ſunt, & quia deinde ex definitione 8 eiuſdem, etiam recti: erit in harum ductarum qualibet, ex corollario primæ huius, centrum circuli. Hoc autem cū ita ſeſe habeat, nullibi potius fuerit, quàm in puncto uel interſectione omnium communi, quod ſcilicet eſt punctum ſignatum.

ALITER HOC IDEM AB ABSVRDO OSTENDI POTEST.

Eſto circulus, in eo etiam punctum acceptum, ſic ut, ſi fortè inde plures quàm duæ rectæ lineæ uſq; ad circūferentiam ductæ fuerint, illæ inter ſe æquales ſint: dico acceptum punctum centrum circuli eſſe. Sed negetur ſanè, non eſſe centrum circuli punctum id, & ſi placet, ſumatur aliud, atq; per illud acceptumq; prius punctum recta linea ducta ea ex utraq; parte in circūferentiam continuetur. Et quoniam in circuli diametro præter cētrum acceptum eſt punctum aliud, unde etiam plures rectæ ad circumferentiam ductæ ſunt, cum illa in qua eſt centrum circuli, ex prima parte



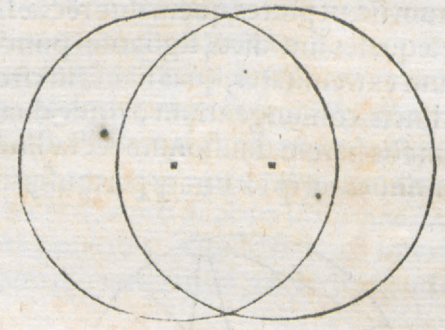
parte propoſitionis ſeptimæ huius, omnium ſit longiſſima, ex reliquis uerò, centro propinquior, ex 3 parte eiuſdem, remotiore longior exiſtat, contra hypotheſim hoc inducitur, cum per eam, ex puncto ductæ rectæ inter ſe poſitæ ſint æquales. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, & reli. Similiter etiam oſtendemus, quòd nullum aliud præter id quod acceptum fuerit, punctum, centrum circuli eſſe poſſit. Punctum igitur in circulo acceptum, unde plures quàm duæ inter ſe æquales rectæ lineæ ad circunferentiam ductæ ſunt, centrum circuli erit. quod demonſtraſſe oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ I.

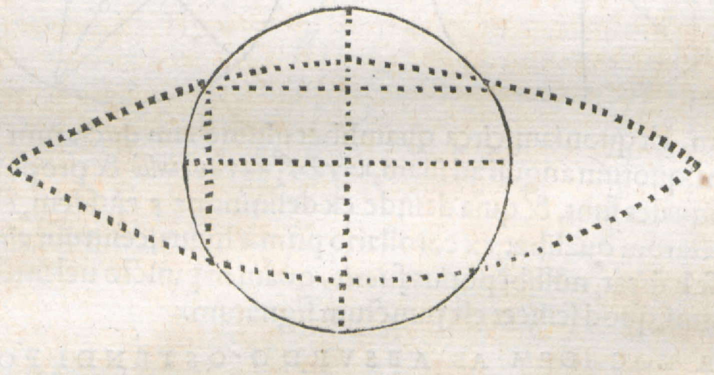
Κύκλος οὐ τέμνει κύκλον κατὰ πλείονα σημεῖα, ἢ δύο.

PROPOSITIO X.

Circulus non ſecat circulum in pluribus punctis, quàm duobus.



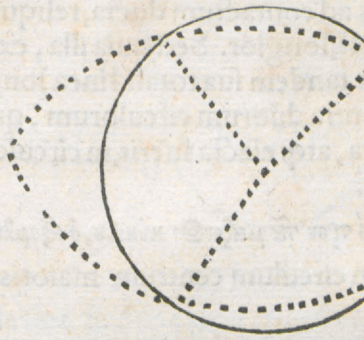
Sit circulus unus, alius deinde priorem ſecans: dico, quòd hæc ſectio duobus tantum punctis contingat. Quòd ſi negetur hoc, atque affirmaret aliquis, pluribus duobus punctis, quatuor ſcilicet, circulum ſecare circulũ, deſcribatur ſanè ſi fieri poteſt, in hunc modum figura: una deinde harum interſectionum puncto, cũ duobus collateralibus duabus rectis lineis iuncto, his poſtea rectis bifariam diuiſis, ex punctis diuiſionum lineæ ad angulos rectos ducantur. Et quoniam unum & idem punctum, cõmunis nimirum ad rectos ductarum ſectio, ex corollario propoſitionis primæ huius, bis uſurpato, utriuſq; circuli centrum eſſe demonſtratur, cum id propoſitioni quintæ præmiſſæ maximè aduerſetur, infertur tandem ueram eſſe propoſitionem, nimirum. Si circulus circulum ſecet, non in pluribus duobus locis id fieri, quod demonſtraſſe oportuit.



ALIA HVIVS REI DEMONSTRATIO.

Secat rurſus circulus circulum in pluribus punctis quàm duobus, &cę. Quæratur, per propoſitionem primam huius, prioris deſcripti circuli centrum, cum eo deinde tribus rectis lineis tria interſectionum puncta copulentur. Et quoniam intra circulum, poſteriorem ſcilicet, acceptum eſt punctum quoddam, à quo cum plures duabus ad illius circumferentiam rectæ egrediantur ęquales: erit illud punctum, per pręcedentem propoſitionem huius, eiuſdem poſterioris circuli centrum, atq; ſic centrum duorum, mutuo ſeſe ſecantium circulorum, id quod per propoſitionem quintam eſt impoſſibile. Non igitur circulus circulum in pluribus punctis quàm duobus ſecat. quod demonſtrari oportuit.

HVIVS AVTEM REI GEOMETRICA FIGURATIO talis eſt.



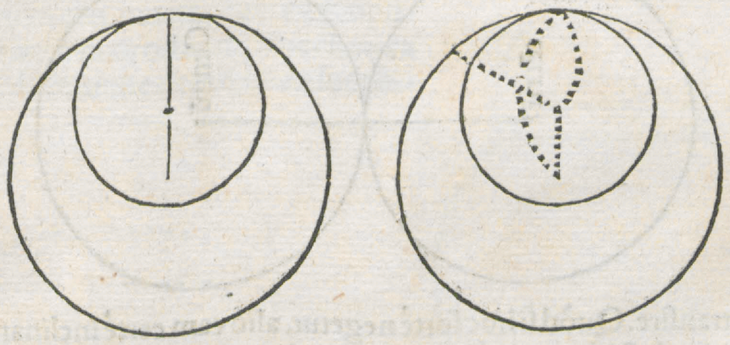
ΠΡΟΤΑΣΙΣ IA.

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντὸς, καὶ ληφθῇ αὐτῶν τὰ κέντρα· ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα καὶ ἐκβαλλομένη, ἐπὶ τὴν συναφὴν πεσεῖται τῶν κύκλων.

PROPOSITIO XI.

Si duo circuli ſeſe mutuo intus tetigerint, atq; accepta fuerint eorum centra: ad eorum centra ducta recta linea & eiecta, in contactum circulorum cadit.

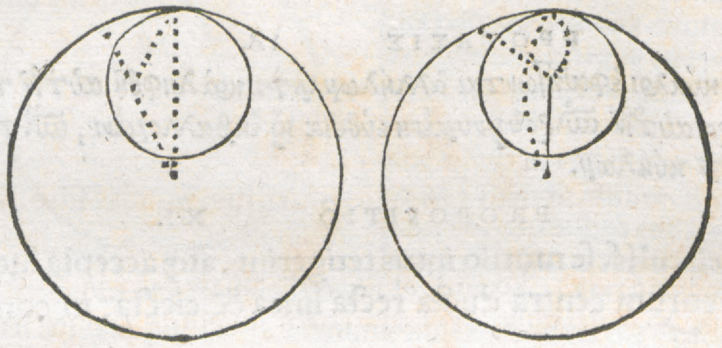
Sint duo circuli, quorum unus alterum intus tangat, & quærantur centra amborum: dico, ſi per hæc centra ducta fuerit recta quædam linea, atq; cõtinuata ulterius, hãc in contactũ circulorum cadere, id quod facilè ab abſurdo, ut ſequitur, demonſtrari poteſt. Recta à centro ad centrum circuli ducta, quia hęc per centrũ maioris circuli continuata, ſubinde contra cõcluſionem, magis ac magis à circulorum contactu recedit, cum ab authore non ſit determinatum, ex qua parte recta continuari debeat, illa parte, tanquam fruſtra inde producturus lineam, poſthabita, continuationem rectæ per minoris circuli centrum inſtituenda eſt. Inſtituatur ergo ſic. Quòd ſi ita factum, non contingat in contactum cadere hanc rectam, in alium certè circumferentiæ locum eam cadere neceſſe erit. Sit ſanè, & ducatur ab utriuſq; circuli centro ad eorum contactum recta linea. Et quoniam ex tribus rectis lineis, una quidem, quæ à centris circulorum intercepta eſt, duabus uerò quæ à centris ad contactum circulorũ rectę ductę ſunt, triangulum conſtitutũ eſt, cum omnis trianguli duo quælibet latera, ut iam ſæpe demonſtratum eſt, tertio latere longiora ſint: & in propoſito triangulo intercepta à centris linea, & ea quæ à centro interioris ad contactum ducta eſt, ut duo trianguli latera, reliquo tertio, ea nimirum linea, quæ à centro exterioris egreditur atq; ad contactum ducta eſt, longiora erunt. Quare lon



giora etiam ea quæ huic tertio lateri, ex definitione circuli, eſt linea æqualis. Atq; communi ab inæqualibus ablato, intercepta ſcilicet à centris linea: remanentiũ partium una, à centro ſcilicet interioris ad contactum ducta, reliqua, altera ſcilicet, quę à centris per circulum continuata eſt, longior. Sed quia illa, ex definitione circuli, huius parti æqualis eſt: & partialis tandem ſua totali linea longior erit, quod fieri nullo modo poteſt. Si igitur per centra duorum circulorum, quæ ſeſe mutuo intus tangunt, recta quędam linea ducta, atq; eiecta fuerit, in circulorum contactum ea cadet. quod demonſtrari oportuit.

Ὁμοίως κἂν ἐκτὸς ᾖ τοῦ μικροῦ κέντρον τοῦ μείζονος κύκλου, δείξομεν αὐτὸ ἄτοπον.

Similiter etiam, Si extra paruum circulum centrum maioris circuli fuerit, abſurditatem oſtendemus.



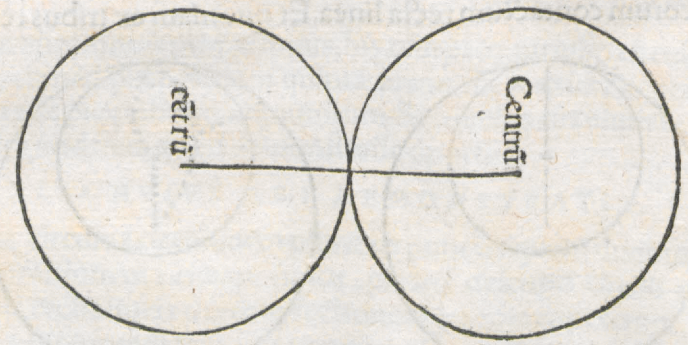
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ.

Ἐὰν δύο κύκλοι ἅπτωνται ἀλλήλων ἐκτός, ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη, διὰ τῆς ἐπαφῆς ἐλεύσεται.

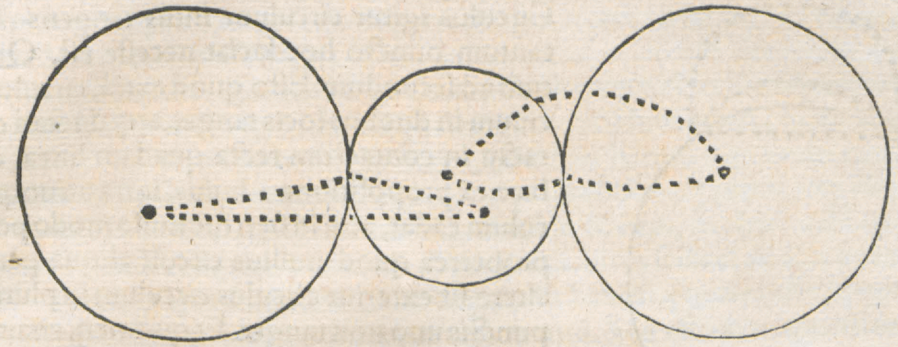
PROPOSITIO XII.

Si duo circuli ſeſe mutuo exterius tetigerint: ad centra eorum applicata recta linea, per contactum tranſibit.

Sint duo circuli, quorum unus alterum extra tangat, & quęrantur centra amborum: dico, ſi per hæc centra ducta fuerit recta quædam linea, eam per circulorum contactum tranſire. Quòd ſi hoc fortè negetur, aliò eam certè inclinare concedendum erit. Sit ſanè, & ducatur ab utriuſq; circuli centro ad eorum contactum recta linea. Et quoniam quæ ex centro ad circumferentiam ducuntur rectæ lineæ, ſunt, ex definitione circuli, inter ſe æquales, eadem definitione bis uſurpata, æqualibus item lineis æqualibus additis: duæ à centris ad contactum ductæ rectæ lineæ, reliquis duabus, quæ & ipſæ à centris ad ſuas circumferentias ductę ſunt, rectis lineis æquales erunt. Ipſa igitur totali, quæ à centro ad centrum ducta eſt, ut tertio trian-



guli latere, breuiores, quod eſt contra propoſitionem quandã in primo expoſitam, qua dicitur, quòd Omnis trianguli duo quælibet latera adamuſſim ſumpta, reliquo tertio longiora ſint. Si duo igitur circuli extrà ſeſe mutuo tetigerint: ad centra eorum applicata recta linea, per contactum tranſibit. quod demonſtraſſe oportuit.



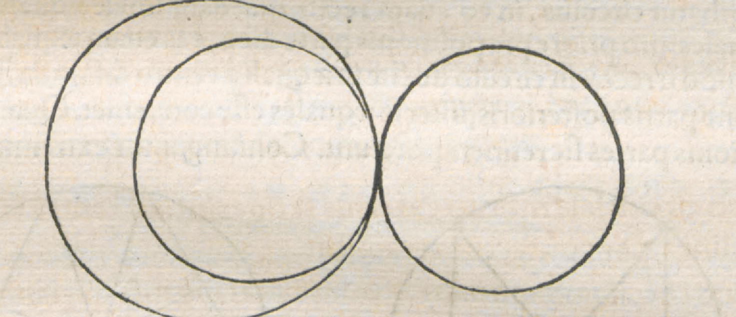
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ.

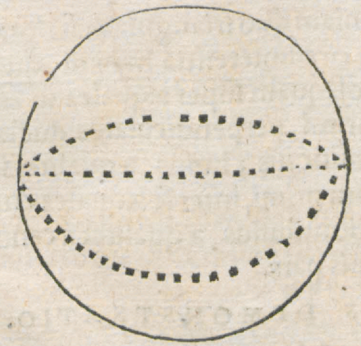
Κύκλος κύκλου οὐκ ἐφάπτεται πλείονα σημεῖα ἢ καθ᾽ ἕν, ἐάν τε ἐντός, ἐάν τε ἐκτὸς ἐφάπτηται.

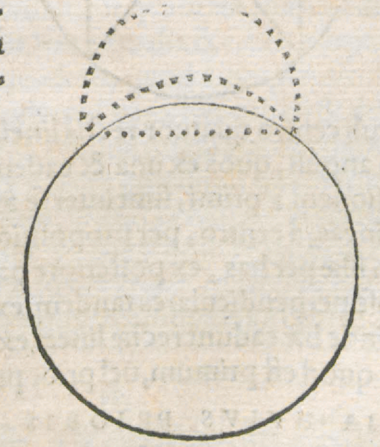
PROPOSITIO XIII.

Circulus circulum non tangit in pluribus punctis uno, ſiue intus ſiue extra tangat.

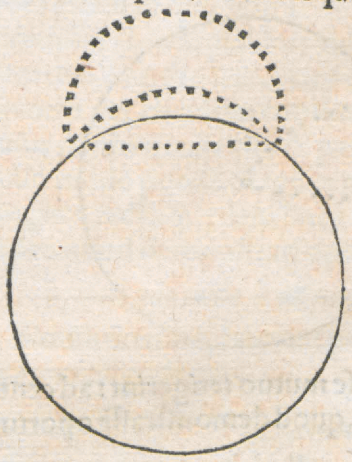
Deſcribatur circulus, dico impoſſibile eſſe alium deſcribi poſſe circulum, qui deſcriptum priorem uel intus, uel extra etiam, in pluribus punctis quàm in uno tangat. Quòd ſi uideatur poſſibile, ſit ſanè: tangat autem hunc primò intus in duobus locis, & ducatur per centra circulorum recta quædam linea: hæc autem in utranq; partem continuata, cum ex propoſitione 11 huius, in circulorum cõtactum cadat, quæ ex definitione circuli, lineæ ſunt inter ſe æquales, mox intercepta à centris portione, uni earum addita, ab altera uerò







hac eadem ablata, quæ ſic fiunt lineæ inæquales, ex eadem circuli definitione, ſecundò uſurpata, inter ſe æquales erunt: id quod rationi minime eſt conſentaneum.



Circulus igitur circulum intus tangens, uno tantum puncto hoc faciat neceſſe eſt. Quantum ad ſecundum. Eſto quòd extrà, circulus circulum in duobus locis tangat, atq; ducta à contactu in contactum recta quadam linea, cum hæc, ex propoſitione 2 huius, intra utrunq; circulum cadat, atq; id fieri hic nullo modo poſſit, propterea quod nullius circuli aliqua pars in altero ſit: exterius circulus circulum in pluribus punctis uno non tanget. Et quia neq; etiam interius, ut auditum eſt. Circulus igitur circulum tangens, in uno tantum puncto hoc fiat neceſſe erit, & non in pluribus, interius ſiue exterius hoc accidat, quod demonſtrari oportuit.

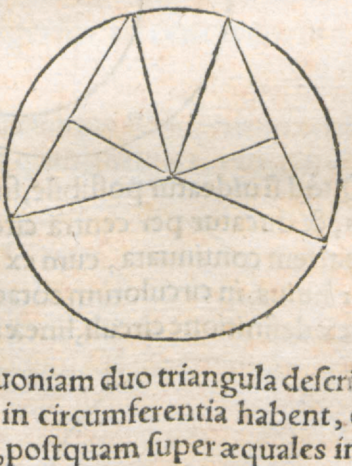
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ.

Ἐν κύκλῳ αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου. Καὶ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι ἀπὸ τοῦ κέντρου· ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

PROPOSITIO XIIII.

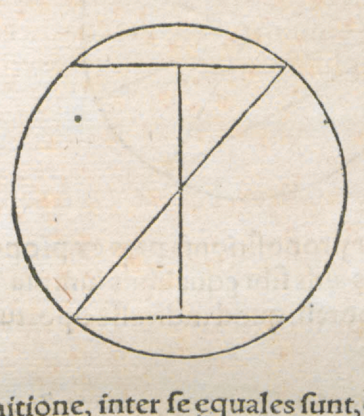
In circulo æquales rectæ lineæ: æqualiter diſtant à centro. Et æqualiter diſtantes à centro: æquales inter ſe ſunt.

Deſcribatur circulus, in eo etiam rectæ quædam lineæ æquales ducantur. Et quia æquales: pro priore propoſitionis parte dico, eas etiam æqualiter à centro diſtare. Quòd ſi rectæ in circulo ductæ in æquali à centro diſtantia fuerint: & lineas has, ratione partis poſterioris, inter ſe æquales eſſe conueniet. Quæ quidem ambæ propoſitionis partes ſic retineri poterunt. Coniungantur extremitates ductarum cum circuli centro quatuor rectis lineis. Et quoniam duo triangula deſcripta ſunt, quorum anguli, quos ex una & eadem parte in circumferentia habent, quia per propoſitionem 8 primi, ſunt inter ſe æquales, poſtquam ſuper æquales in circulo ductas lineas, à centro, per propoſitionem 12 primi, perpendiculares ductæ fuerint, cum illæ per has, ex poſteriore parte propoſitionis 3 huius, æqualiter ſecentur: & ipſe perpendiculares tandem, ex 4 eiuſdem primi, inter ſe æquales erunt: in quas deinde hæ cadunt rectæ lineæ, ex 4 definitione huius, æqualiter à centro diſtabunt: quod eſt primum, uel prior propoſitionis pars.



ALIA HVIVS PRIORIS PARTIS DEMONSTRATIO.

Maneat eiuſdem diſpoſitionis figura, niſi quod duæ, ex una parte ab extremitatibus ad centrum ductę, rectę lineæ poſſint omitti, prioris partis demonſtratio etiam ſic colligi poterit. Quoniam enim recta linea in circulo per centrum extenſa, rectam lineam in circulo ductam aliam, quæ non per centrum tranſit, ad angulos rectos ſecans, ipſam, ex poſteriore parte propoſitionis tertiæ huius, biſariam ſecat, hac eadem parte bis uſurpata, & quia etiam rectæ in circulo ductæ, ex hypotheſi ſunt inter ſe æquales: quæ de his in circulo ductis æqualibus lineis per perpendiculares abſcinduntur lineę, inter ſe æquales erunt. Sed ſunt etiam ęquales inter ſe, ex definitione circuli à centro ductæ lineæ, quæ cum harum æqualium extremitatibus coniunctæ ſunt: per penultimam igitur propoſitionem primi, atq; illis duabus communibus notitijs, Quę uni ſunt æqualia, &c. & item, Si ab æqualibus æqualia ſubtrahantur, & reliqua, res tandem cõcluditur. Lineas ſcilicet ad illas à centro perpendiculares, eo quod quadrata, inter ſe ęqualia habeãt, ęquales eſſe, id quod nunc eſt æqualis ipſarum à centro diſtantiæ argumentũ. Sed eſto iam, quantum ad partem poſteriorẽ, quòd rectę ductę æqualiter à centro diſtent: dico ipſas ductas inter ſe æquales eſſe, & hac quidem demonſtratione. Cadant ad ęqualiter ductas à centro perpendiculares, coniungatur etiam alterutra utriuſq; æqualiter diſtantium extremitas cum centro circuli. Et quoniam perpendiculares ductæ, ex definitione Linearũ ęqualiter à centro diſtãtium, inter ſe ſunt æquales, cum ab æqualibus rectis non poſſint deſcribi diuerſa quadrata: & harum æqualium rectarum quadrata æqualia erunt. Iis igitur perpendicularium quadratis à ſubtendentium rectos, quę & ipſę, ex definitione, inter ſe ęquales ſunt, quadratis ſubtractis: & reſidua quadrata, per 47 primi, inter ſe æqualia erunt: atq; tandem ſic etiam æqualium quadratorũ latera ęqualia. Sed quia utrunq; ex 2 parte propoſitionis 3 huius, rectę ductæ eſt medietas: & ipſæ ductę inter ſe æquales erunt, quod eſt ſecundum. In circulo igitur æquales rectæ lineæ, æqualiter, & re. quod demonſtraſſe oportuit.



ALIA EIVS QVOD IN HAC PROPOSITIONE SECUNDÒ PROPONITUR, DEMONSTRATIO.

Cadant ad æqualiter ductas à centro perpendiculares, coniungatur etiam alterutra utriuſq; æqualiter diſtantium extremitas cum centro circuli. Et quoniam quę ex centro ad circumferentiam ducuntur rectę lineę, inter ſe æquales ſunt: quadratum igitur unius quadrato alterius ex centro ductę lineę, æquale erit. Rurſus quoniam utriuſq; ex centro ductæ quadrato, duarum linearum quadrata, ex 47 primi æqualia ſunt: etiam quæ ab illis duabus deſcribuntur quadrata, harum duarum linearum quadratis, ex cõmuni illa noticia, Eidem æqualia &c. bis uſurpata æqualia erunt. Porrò ab utroque æqualium illo quadrato quod à perpendiculari utrobiq; deſcribitur, ſubtracto, cũ ipſæ perpẽdiculares (ut ex hypotheſi & definitione quadam colligere licet) una alteri ęqualis ſit, & reſidua quadrata, ex communi quadam noticia, inter ſe æqualia erunt. Quare & horum ęqualium quadratorum latera, æqualia. At uerò horum æqualium laterum, duplices ſunt, ex poſteriore parte propoſitionis tertię huius, rectę in circulo ductæ: & ipſæ ductę tandem ex illa cõmuni noticia. Eiuſdem duplicia &c. inter ſe æquales erunt. In circulo igitur æquales rectę lineæ, æqualiter diſtant à centro. Et æqualiter diſtantes à centro, æquales inter ſe ſunt. quod demonſtrari oportuit.

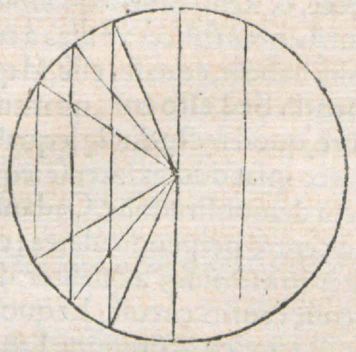
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ.

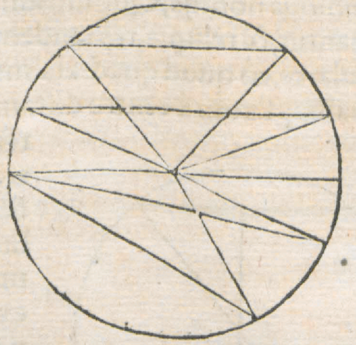
Ἐν κύκλῳ, μεγίστη μὲν ἐστὶν ἡ διάμετρος. τῶν δὲ ἄλλων, ἀεὶ ἡ ἔγγιον τοῦ κέντρου, τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστίν.

PROPOSITIO XV.

In circulo, longiſſima quidem eſt diameter. Aliarum uerò, ſemper propinquior centro, remotiore longior eſt.

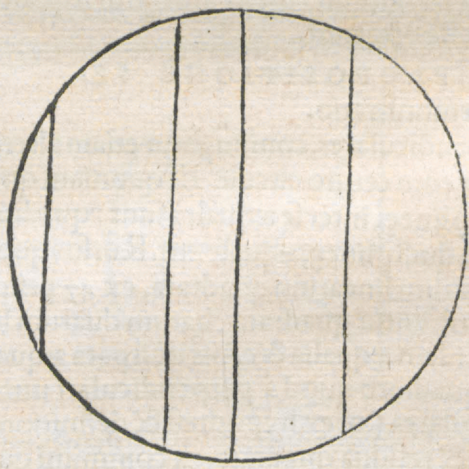
Sit circulus, in eo etiam aliquot rectę lineæ ductæ. Eſto autem quòd una harum per circuli centrum, reliquæ uerò utcunq; tranſeant: dico, per centrum tranſeuntem ex ductis omnium longiſſimam, aliarum uerò quamlibet centro propinquiorem, remotiore longiorem eſſe. Vtriſq; enim omnium præter centrum ductarum extremitatibus, rectis lineis cum centro copulatis, prior propoſitionis pars ex propoſitione 20 primi, una tamen recta ſubinde pro duabus aliȷs ſibi ęqualibus ſumpta, demōſtrabitur. Poſterior deinde ex 24 eiuſdē retineri poteſt. quod indicaſſe oportuit.

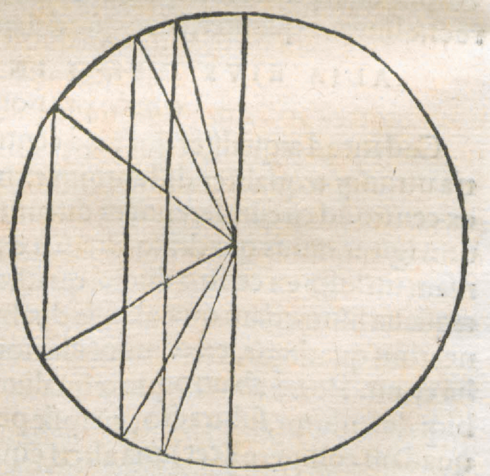




APPENDIX.

Oportet autem, ut omnes rectæ ductę ex una diametri parte appareant, & quidem ideo ut cognoſcatur, quæ linea ex reliquis diametro uel centro propinquior, quæ item ab eo remotior ſit. Quare ſi una, uel plures etiam ex altera diametri parte conſpiciantur rectæ lineę, in qua parte pauciores fuerint, eius lineæ ad alteram partem traducendę ſunt hoc modo. Continuentur in rectum ſingularum ductarum, quibus in altera parte æquales ducendę ſunt, perpendiculares ad ſuarum ipſarum longitudinem ultra centrum: deinde ab extremitatibus harum, tanquam rectarum datarum, per 11 primi, ad angulos rectos lineæ, ex utraq; parte uſq; ad circūferentiam continuatæ excitentur. Et quoniam hæ ſingulę, rectis in priori parte ductis, ex definitione Rectarum in circulo æqualiter à centro diſtantium, æquales ſunt, quæq; ſuę, æquali nunc uel ęqualibus pro ęqualibus uſurpatis, demonſtratio ut prēmiſſa eſt abſoluatur.





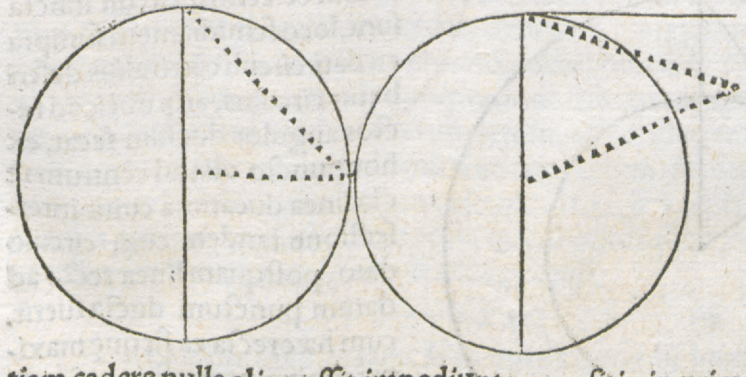
ΠΡΟΤΑΣΙΣ 15.

Ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη, ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου. Καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας, ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται. Καὶ ἡ μὲν τοῦ ἡμικυκλίου γωνία, ἁπάσης ὀξείας γωνίας εὐθυγράμμου μείζων ἐστὶν ἡ· δὲ λοιπὴ, ἐλάττων.

PROPOSITIO XVI.

Quæ à diametri circuli extremitate ad angulos rectos ducitur, extra ipſum circulum cadet. Et in locum, inter ipſam rectam lineam & circumferentiam, altera recta non cadet. Et ſemicirculi quidem angulus, omni acuto rectilineo angulo amplior eſt. Reliquus autem, anguſtior.

Deſcribatur circulus, ducatur in eo etiam diameter, dico primùm, ſi quę linea ab alterutra diametri extremitate ad rectos. excitetur angulos: extra circulum eam cadere oportere, neq; ex angulo, ſub ipſa & circūferentia comprehenſo, aliam rectam educi poſſe. Angulum præterea ſemicirculi, qui ſub diametro & circumferentia continetur, omnium acutorum rectilineorum maximū: qui uerò ſub circumferentia & ad rectos excitata, omnium acutorum minimum eſſe. Habet hæc propoſitio quatuor partes, quę ordine ſic demonſtrari poſſunt. In ipſam circumferentiam, cum ſit latitudinis expers omnis linea, ad rectos excitata cadere non poteſt, cadet ergo intra uel extra ipſam circumferentiam. Quod ſi intra cadere ſumptū fuerit, mox, ſi poſſibile ſit, ea ducta, & ad circumferentiam uſq; continuata, clauſo item triangulo, extremitate huius ad rectos ductæ altera, recta quadam linea cum centro copulata. Et quoniam triangulum quod ſic deſcribitur ex definitione circuli, iſoſcelis eſt: duo igitur ipſius anguli quos ad baſim habet, inter ſe æquales erunt. Quia uerò unus eorū eſt rectus, ratione ductæ ad rectos angulos lineæ: & alter ſic rectus erit, quod eſt contra propoſitionē in primo 17, quæ dicit, Omnis trianguli duos angulos, quomodocunq; ſumptos, duobus rectis minores eſſe. Vel contra corollarium propoſitionis in primo 32, quod quidem dicit, Omnis trianguli non duos tantùm, ſed tres eius internos angulos, duobus rectis æquales eſſe. Ab extremitate igitur diametri ad angulos rectos ducta linea, intra circulum non cadet. Et quia neq; in ipſam etiā circumferentiam, ut dictum eſt: extra circulum ergo, ut uult propoſitio, ea cadet, id quod primò erat demonſtrandum. Quòd uerò inter ductam & circumferentiam cadere nulla alia poſſit, impediunt propoſitio in primo 19, atq; deinde circuli definitio. Alia enim quadam interpoſita, ſi ad ipſam deinde à centro, per 12 primi, perpendicularis ducatur, cum rectus in triangulo angulus utroq; reliquo amplior ſit, ex propoſitione etiam 19 primi, ampliori angulo longius latus ſubtendatur: ſtatim ex definitione circuli, æquali tamen pro æquali linea ſumpta, partialem ſua totali linea longiorem eſſe, inferri poteſt: quod eſt impoſſibile. Patet itaq; id quod ſe-



cundò demonſtrandum erat. Et quia hoc nunc conſtat: angulum igitur illũ, quem diameter & circumferentia continent, omnium acutorum rectilineorum maximũ: reliquum deinde, ſub circũferentia & ad rectos angulos excitata comprehenſum minimum eſſe, ſequi neceſſe eſt, cum aliàs ſi ſtatueretur unus angulus illo maior, alius deinde hoc reliquo minor: ex loco inter circumferentiam atq; ad rectos angulos ductam, cõtra ſecundam partem huius, alia recta educi poſſet. Hoc autem cum demonſtratum ſit eſſe impoſſibile: quod igitur tertiò & quartò propoſitũ eſt, iam demonſtratum erit. Conſtat itaq; tota propoſitio, quod erat demonſtrandum.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτων φανερόν. Ὅτι ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ᾽ ἄκρας ἀγομένη ἐφάπτεται τοῦ κύκλου. Καὶ ὅτι εὐθεῖα κύκλου καθ᾽ ἓν μόνον ἐφάπτεται σημεῖον.

COROLLARIVM.

Ex hoc ſanè manifeſtum eſt, Quòd à diametri circuli extremitate ad rectos angulos ducta: ipſum circulum tangat. Et quòd recta linea circulum in uno tantum puncto tangat.

Ἐπεὶ δήπερ Quoniam rectam lineam, duobus in circuli circumferentia punctis comprehenſam, intra ipſum cadere, ex 2 propoſitione huius oſtenſum eſt. quod admonuiſſe oportuit.

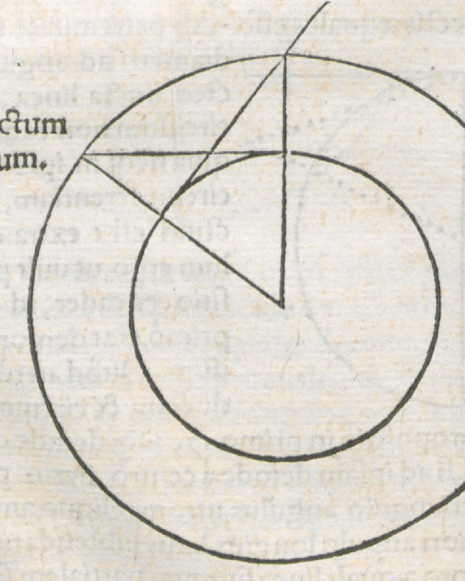
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, τοῦ δοθέντος κύκλου, ἐφαπτομένην εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

PROPOSITIO XVII.

A dato puncto, dato circulo, contingentem rectam lineam ducere.

Sit punctum datum, circulus item datus, atq; propoſitũ, à puncto ad circulum contingentem rectam lineam ducere. Ipſum igitur punctum cum centro circuli, (quod quidem ſemper, ubi ignotum id fuerit, ex propoſitione prima huius inueniri licet) per poſtulatum primum, recta quadam linea coniungatur, atq; ubi hæc recta circulum ſecuerit, inde per 11 primi ad angulos rectos linea excitetur. Porrò hac eadem recta, qua cum pũctum datum & centrũ circuli iuncta ſunt, loco ſemidiametri ſumpta ex dati circuli cẽtro alius deſcribatur circulus, atq; ubi is ad rectos angulos ductam ſecat, ex hoc puncto alia ad centrum recta linea ducatur, à cuius interſectione tandem cum circulo dato, poſtquam linea recta ad datum punctum ducta fuerit, cum hæc recta ea ſit quę maximè petitur propoſitioni ſatiſfactum erit, id quod hoc modo demõſtrabitur. Quoniã enim hac præparatione duo triangula deſcripta ſunt, quorum duo latera unius duobus lateribus trianguli alterius, ex definitione circuli, bis uſurpata,


Punctum datum.

æqualia ſunt, angulum etiam inter æqualia latera, angulo equalem habent, cum uidelicet ille ſit, qui ad centrum ponitur, bis ſumptus: ex propoſitione igitur 4 primi, & reliquum tertium latus reliquo tertio lateri: anguli inſuper reliqui angulis reliquis: ac totum triangulum toti triangulo æquale erit. Quia autem unus angulus ex reliquis in triangulo uno, is nimirũ quem ad rectos ducta, & una dati circuli ſemidiameter comprehendunt, eſt rectus: & in altero qui huic, propter æqualitatẽ ſubtenſarum, eſt æqualis, linea item ad rectos ductam ſecante, & altera dati circuli ſemidiametro includitur. rectus angulus erit. Hoc igitur cum ita ſit: ſecans hæc, ut diximus, ex priore parte corollarij propoſitionis 16 huius, circulum datum tangere dicitur. Et quia hæc ſecans à puncto dato etiam egreditur: factum igitur quod maxime uolebat propoſitio. A dato ſcilicet puncto, dato circulo contingens recta linea ducta eſt. quod fieri oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΗ.

Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἐπιζευχθῇ τις εὐθεῖα· ἡ ἐπιζευχθεῖσα, κάθετος ἔσται ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην.

PROPOSITIO XVIII.

Si circulum tetigerit recta quædam linea, à centro uerò in contactum ducta fuerit recta quædam linea alia: ducta, in contingente perpendicularis erit.

Deſcribatur circulus, eum etiam tangens recta linea ducatur: dico igitur, ſi à centro ad punctum contactus recta quędam linea ducta fuerit, quòd hæc recta ad contingentem ſit perpendicularis. Si uerò non, ducatur per propoſitionem 12 primi, à centro ad ipſam contingentem recta perpendicularis alia. Et quoniam perpendicularis hæc, propter æqualem & erectum ſitum, angulos cum contingente ἐφεξῆς, æquales inter ſe facit, unde ſic uterq; eorum, ex quadam definitione, rectus eſt: ratione recti huius, qui nimirũ eſt in triangulo, uterq; ex reliquis eiuſdem trianguli angulis, recto angulo minor erit. Quia uerò ampliori angulo omnis trianguli, ex propoſitione 19 primi, longius latus ſubtenditur: ex definitione igitur circuli, æquali tamen pro æquali linea ſumpta, partialis linea ſua totali longior erit, cum tamen contrà Totalis, ex cõmuni quadam noticia, linea ſua partiali longior eſſe debeat. Quare præter contactum à centro in contingẽtem ducta, ad ipſam perpendicularis non erit. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι οὐδ᾽ ἄλλη τίς πλὴν τῆς & reliqua. Simili quoq; ratione oſtenditur, quod nulla etiam alia, præter eam, quæ à centro ad contactum tendit, ad contingentem perpendicularis eſſe poſſit. Quare hæc ipſa quæ à centro ad contactum ducitur recta linea, in cõtingentem perpendicularis erit. Si igitur circulum tetigerit recta quædam linea, à centro uerò in contactum ducta fuerit recta quędam linea alia: ducta, in contingente perpendicularis erit. quod demonſtraſſe oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΘ.

Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς τῇ ἐφαπτομένῃ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ· ἐπὶ τῆς ἀχθείσης ἔσται τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

PROPOSITIO XIX.

Si circulum tetigerit recta quædam linea, à contactu uerò ipſi tangenti ad angulos rectos recta linea ducta fuerit: erit in ducta centrum circuli.

Deſcribatur circulus, eum etiam tangens linea recta ducatur: dico, ſi à contactu, tanquam à puncto in contingente dato, per 11 primi, ad rectos angulos linea per circulum ducta fuerit, in ea centrum circuli eſſe. Quod ſi non, erit id neceſſariò extra eam alibi. Eo igitur alibi conſtituto atq; ſignato, inde etiam recta quadam linea ad punctum contactus ducta, cum hæc, per præmiſſam 18, ad contingentem perpendicularis exiſtat: angulus minor maiori, uel partialis ſuo totali, ex definitione, qua omnes rectos æquales inter ſe eſſe intelligitur, æqualis erit: quod eſt impoſſibile. Punctum igitur extra perpendicularem alibi conſtitutum, centrum circuli non erit: in ipſa ergo contingentis per circulum ducta perpendiculari id eſſe neceſſe eſt. Si circulum igitur recta quędam linea tetigerit, à contactu uerò &c. quod demonſtraſſe oportuit.

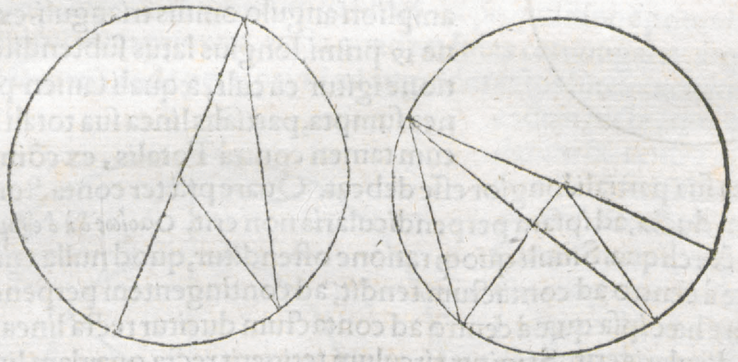
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Κ.

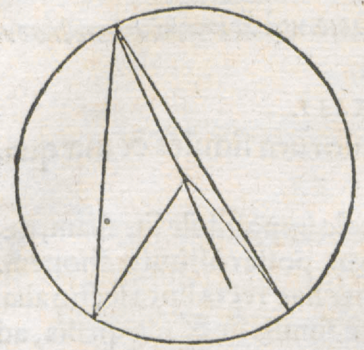
Ἐν κύκλῳ, ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία, διπλασίων ἐστὶ τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ, ὅταν τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν ἔχωσιν αἱ γωνίαι.

PROPOSITIO XX.

In circulo, qui ad centrum angulus, duplus eſt eius qui ad circumferentiam, quando eandem circumferentiam baſim habuerint ipſi anguli.

Deſcribatur circulus, in eo etiam duo ponantur anguli, unus quidem ad centrum, alter uerò ad circumferentiam, ſic ut ambos unus & idem circumferentiæ arcus ſubtendat: dico, ad centrum poſitum angulum, duplum eſſe eius, qui ad circumferentiam ponitur. Huius propoſitionis figuratio quia tripliciter uariari poteſt, triplici etiam demonſtratione hic opus erit. Aut enim ad centrũ anguli alterũ latus anguli in circũferentia alteri lateri coniungetur, aut non. Si primum, cum ex definitione circuli à centro ad circumferentiam exeuntes lineæ, inter ſe æquales ſint, unde ſic triangulum iſoſceles appareat. qui anguli, ex priore parte propoſitionis 5 primi, ſunt inter ſe æquales, hi ſimul ſumpti, ad utrunq; ęqualium dupli erunt. Sed quia his ſimul, ut duobus internis & oppoſitis trianguli angulis, æqualis eſt, ex propoſitione 32 primi, angulus ad centrum poſitus, ut eiuſdem trianguli angulus externus: & ad utrunq; æqualium idem externus, ad centrum poſitus angulus duplus erit, quod oſtendiſſe oportuit. Sed eſto iam quòd nõ coniungantur latera: quia uerò tum accidit, quòd unum latus unius, latus unũ alterius anguli ſecet, aut non ſecet, Si ſecet, diametro ab angulo qui eſt ad circumferentiam per centrum ducta, cum tam totalis quàm etiam partialis ad centrum externus trianguli angulus, per eaſdẽ propoſitiones primi bis uſurpatas, ſuo interno oppoſito angulo duplus ſit, partialibus ab ipſis totalibus ſubtractis, cum hi & illi eodem modo ſeſe habeãt: & reſidui anguli, unus ad alterum, circa centrum quidem ad eum qui eſt ad circumferentiam duplus erit. Quòd ſi unũ unius, unum latus alterius anguli non ſecet, ducatur ab angulo qui eſt ad circumferentiam, per angulum ad centrum recta quædam linea, & demonſtratio (partialibus tamen utriuſq; anguli ſimul ſumptis) ut modò ſuccedet, angulum ſcilicet ad centrum eius, qui eſt ad circumferentiam, duplum eſſe. Angulus igitur qui ad centrum in circulo ponitur, duplus eſt eius qui ad circumferentiam, qualitercunque ſanè hi, modo una & eadem circumferentia ſubtenduntur, deſcripti fuerint. quod demonſtraſſe oportuit.





ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΑ.

Ἐν κύκλῳ, αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

PROPOSITIO XXI.

In circulo, qui in eodem ſegmento ſunt anguli, æquales inter ſe ſunt.

Deſcribatur circulus, in eo etiam aliquot ſuper uno & eodem ſegmento anguli: dico, illos angulos inter ſe æquales eſſe. Quod quidem, ductis à ſegmenti terminis ad centrum duabus rectis lineis, per præcedentem 20 & communem illam noticiam, Quæ eiuſdem dimidia, æqualia inter ſe ſunt, manifeſtum fiet.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ. ΚΒ.

Τῶν ἐν τοῖς κύκλοις τετραπλεύρων, αἱ ἀπεναντίον γωνίαι, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

PROPOSITIO XXII.

Quadrilaterorum in circulis anguli, qui ex oppoſito, duobus rectis ſunt æquales.

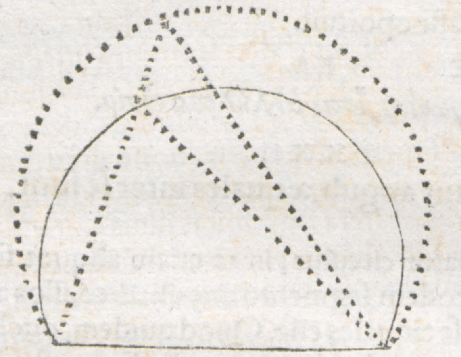
Deſcribatur circulus, in eo etiam quadrilaterum qualecunq;, æqualium uel inęqualium laterum: dico, angulos quoſq; oppoſitos duobus rectis ęquales eſſe. Ducantur in quadrilatero duę diametri. Et quoniam omnis trianguli tres anguli interiores, ex corollario propoſitionis 32 primi, duobus rectis æquales ſunt. Et rurſus, quoniam etiam æquales inter ſe ſunt, ex præmiſſa 21, qui in eodem ſegmento ſunt anguli, eo quod prius dicitur, ſemel: altero uerò, bis uſurpato, bis inſuper angulo pro ęquali alio ſumpto: quantum ad duos oppoſitos in quadrilatero angulos ratione oppoſitionis unius, propoſitioni ſatisfactum erit. Porrò eodẽ ordine, demonſtratione pro alijs duobus oppoſitis in quadrilatero angulis inſtituta, quòd & illi duobus rectis angulis æquales ſint, manifeſtè patebit. Quadrilaterorum igitur in circulis anguli, qui ex oppoſito, duobus rectis ſunt æquales. quod demonſtraſſe oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΓ.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα, οὐ συσταθήσονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.

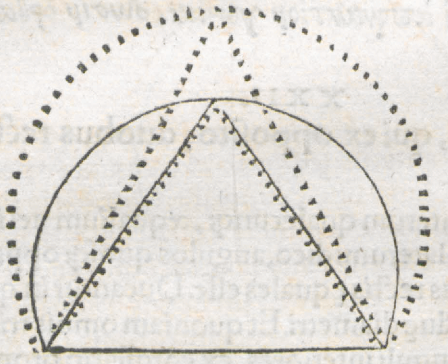
PROPOSITIO XXIII.

Super eadem recta linea, duæ ſectiones circulorum ſimiles & inæquales, non conſtituentur ad eaſdem partes.

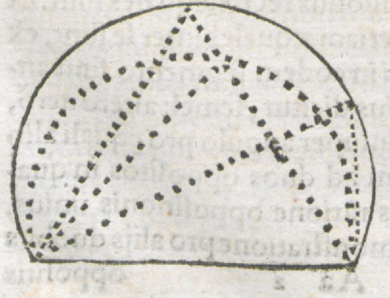


Deſcribatur circuli ſectio: dico, quòd ſuper eius recta impoſſibile ſit, aliam, deſcriptæ ſimilem & inæqualem, ad eandem etiam partem, poſſe cõſtitui ſectionem. Quòd ſi uideatur hoc poſſe fieri, conſtituatur ſanè ſuper hac recta linea ſectio alia, ut quæ poſitæ ſimilis ſit & inæqualis, ad illam eandem etiam partem, & extendatur, per primum poſtulatum primi, recta quædam linea, ab una rectæ extremitate per arcus utriuſq; ſectionis tranſiens, atq; ubi hæc ſectionum arcus ſecuerit, inde etiam, per poſtulatum eiuſdem primi ſecundum, rectæ lineę ad alteram rectæ extremitatem ducantur. Et quoniam ſectiones ſunt, ex hypotheſi aduerſarij, inæquales, atq; etiam ſimiles, cum ſimilitudo ſectionũ circuli ab æqualitate angulorum, quos illæ ſectiones ſuſcipiunt, definiatur: anguli illi quos ſecundò ductæ cum prima in ſectione comprehendunt, externus & internus oppoſitus unius trianguli, inter ſe ęquales erunt. Sed quia non ſunt, ut quidem hoc propoſitio in primo 16 teſtatur, neq; ſectiones etiam, ut ponitur, inter ſe inæquales & ſimiles erunt. Super eadem igitur recta linea, duæ ſectiones circulorum ſimiles & inæquales, non conſtituentur ad eaſdem partes. quod demonſtraſſe oportuit.

APPENDIX.



Poteſt etiam figura huius propoſitionis deſcribi, ut ſuper ſectionibus conſtitutorum angulorum uterq; ſua propria latera habeat, utq; latera unius ab alterius ſectionis laterib. includantur. Quòd ſi ad hunc modũ figura deſcripta fuerit, tum quia angulus interioris angulo ſectionis exterioris, per propoſitionem 21 primi, maior eſt, deſcripti igitur arcus ſimiles non erunt, id quod eſt contra propoſitionis hypotheſim.



Item licet uterq; angulorum ſua propria latera habeat, accidit tamen aliquando, ut unum latus unius, unum alterius ſectionis latus ſecet. Quòd ſi ſic, tum propter demonſtrationem faciliorem, ab interſectione arcus interioris, & lateris unius anguli ſectionis exterioris alia ad extremitatem rectę linea recta ducenda eſt. Et quoniam in eodem ſegmento anguli, ex propoſitione 21 huius, inter

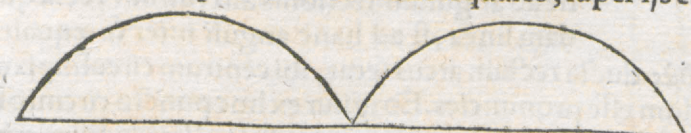
ſe ſunt æquales, cum unus eorum alio quodam alterius ſegmenti angulo, ut externus ſuo interno, ex propoſitione 16 primi, maior ſit: & alter, propter æqualitatem, eodem maior erit: non æquales igitur anguli, neq; etiã ſimiles ſectiones, quod eſt contra hypotheſim. Super eadem igitur recta linea, duæ ſectiones circulorum ſimiles & inæquales, nõ conſtituẽtur, ad eaſdẽ partes. quod demõſtrari oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΔ.

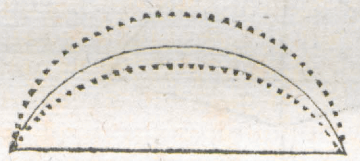
Τὰ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων, ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν.

PROPOSITIO XXIIII.

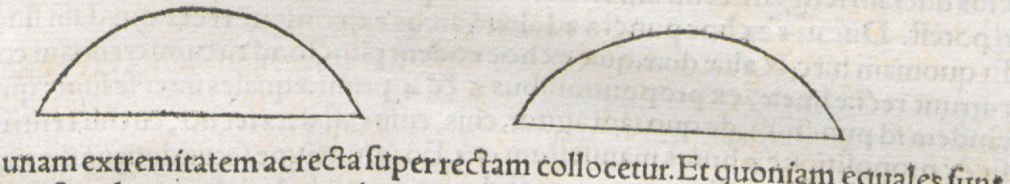
Super æqualibus rectis lineis ſimiles circulorum ſectiones, æquales inter ſe ſunt.



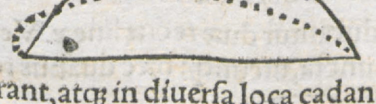
Sint duæ uel plures rectæ lineæ æquales, ſuper iJs etiam ſimiles circulorum ſectiones cõſtitutæ: dico, illas ſectiones inter ſe ęquales eſſe. Eſt huius propoſitionis demonſtratio præcedens 23. Nam congruente uel ſuperpoſita una ſectione alteri, cum earum rectæ, ex hypotheſi, ſint inter ſe æquales, una extremitate unius ſuper una ſectionis alterius poſita, & in alteram huius altera extremitas illius coincidet, quare ſic & arcus ſectionum coincidere oportet. aliàs ſequeretur, Similes & inæquales circulorum ſectiones ſuper una & eadem recta deſcribi poſſe, quod eſt contra propoſitionem præcedentem. Coincidunt ergo, ac propterea æquales etiam inter ſe, ex communi quadam noticia, quę in primo his uerbis expoſita eſt, Quę congruunt, & reliqua.



DEMONSTRATIO ALIA.



Superponatur una ſectio alteri, ita ut unius extremitas una ſuper alterius ſectionis unam extremitatem ac recta ſuper rectam collocetur. Et quoniam ęquales ſunt ipſæ rectæ: altera extremitas unius cum altera alterius ſectionis extremitate coincidet: atq; hinc linea lineæ congruit. Quòd ſi ſectio ſectioni cõgruat: eas inter ſe æquales eſſe, ut uult propoſitio, ex noticia quadam communi concluditur, Si igitur &cæ. Eſto autem quòd non congruant ſectiones baſibus congruentibus, ſed differant, atq; in diuerſa loca cadant. Quoniam enim circulus, ut uult propoſitio 10 huius, in pluribus punctis quàm duobus circulum alium non ſecat, cum hic in tribus punctis fiat circulorum ſectio, propoſitioni citatæ contrarium fieri apparet, quod non conceditur. Quare congruente linea lineæ, nõ poteſt non ſectioni quoque ſectio congruere. Super æqualibus igitur rectis ſimiles circulorum ſectiones conſtitutæ: & ipſæ ſectiones inter ſe æquales erunt. quod demonſtraſſe oportuit.



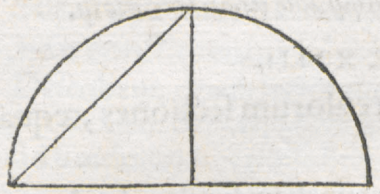
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΕ.

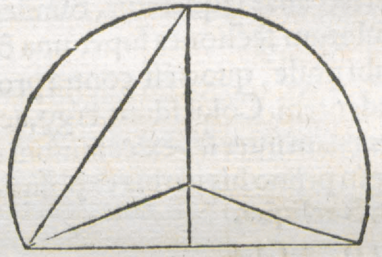
Κύκλου τμήματος δοθέντος, προσαναγράψαι τὸν κύκλον οὗπέρ ἐστι τμῆμα.

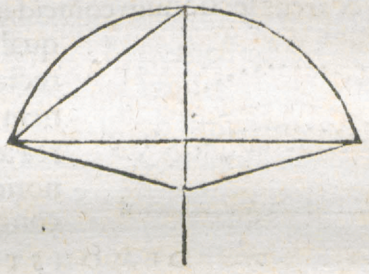
PROPOSITIO XXV.

Circuli ſectione data, deſcribere circulum cuius eſt ſectio.

Sit ſectio circuli data, atq; propoſitum, circulum eius deſcribere, hoc eſt, ſectionem hanc, ut circulus tandē ſit, perficere & complere. Diuidatur igitur recta, ſuper quam eſt conſtituta ſectio, per propoſitionem 10 primi, biſariam, atq; à puncto diuiſionis huius ad angulos rectos linea excitetur, ad arcum uſque, & ultra etiam lineam rectam, quantum nimirum neceſſarium fuerit, eam prolongando. Erit autem in ea ad rectos ducta linea, ut teſtatur corollarium propoſitionis primæ huius, centrum circuli. Ducta igitur ab huius πρὸς ὀρθὰς ductæ & arcus interſectione ad angulum ſectionis alterutrum recta quadam linea, ſi ad hanc anguli inter ſe æquales ſint, ubi hæc eadem πρὸς ὀρθὰς ducta rectam arcus ſecat, ibi centrum circuli: ipſam uerò ſectionem, Semicirculum eſſe pronuncies. Eo igitur ex hoc puncto circini officio completo, nona propoſitione huius adiuuante, propoſitioni ſatisfactum erit. Quòd ſi dicti anguli fuerint inter ſe inæquales, angulo ei qui ſub recta hac, atq; ea ſuper qua eſt conſtituta ſectio, cōprehenditur, per 23 primi, ut alteri angulo æqualis fiat, rectæ cuiuſdam lineæ ductu ſuccurrendum erit. Quo facto, ubi hæc ad rectos ductam tetigerit, centrum circuli ibi eſſe pronūciabis. id quod ſic demonſtrari poteſt. Ducatur ex hoc puncto ad alterā arcus extremitatē recta quędam linea. Et quoniam hæc, & aliæ duæ, quæ ex hoc eodem puncto ad circumferentiam concurrunt rectæ lineæ, ex propoſitionibus 6 & 4 primi æquales inter ſe ſunt: quòd tandem id punctum, de quo iam agitur, eius, cuius eſt data ſectio, circuli centrum ſit, ex propoſitione 9 huius manifeſtum erit. Eo igitur nunc ſecundum unius æqualium linearum interuallum, per 3 poſtulatum primi, inde deſcripto, cum per reliquarum etiam æqualium extremitates tranſeat, propoſito ſatisfactum erit. Circuli igitur ſectioni datæ, circulus ipſe deſcriptus atq; cōpletus eſt: quod fieri oportuit.

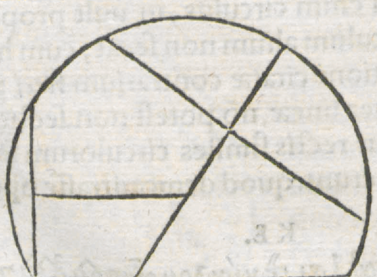


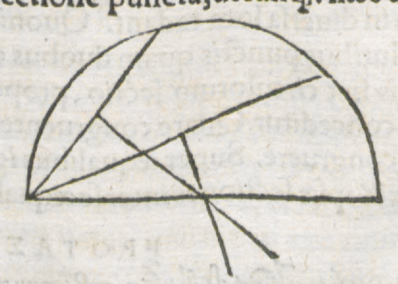




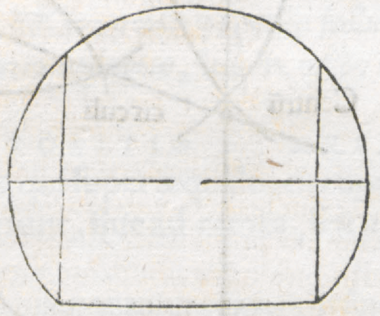
EST ET ALIA HVIVS PROPOSITIONIS DEMONSTRATIO.

In data ſectione, cuius circulus compleri debet, ducantur duæ rectæ lineæ. Vel, ut ſit operatio certior. Sumantur tria in ſectione puncta, utcunq;: hæc duabus rectis lineis copulentur, & erunt, ut ſupra, duæ in ſectione rectę lineæ ductæ. Harum nunc utraq; biſariam diuiſa, à puncto diuiſionis utriuſq; ad angulos rectos linea, per propoſitionem 11 primi excitetur, ubi tandem hæ duæ ad rectos ductę ſeſe mutuo ſecant, ibi per corollarium primæ huius, bis uſurpatum, circuli, qui ſectionē datam ſua deſcriptione comprehendit, centrum eſſe pronunciabitur.



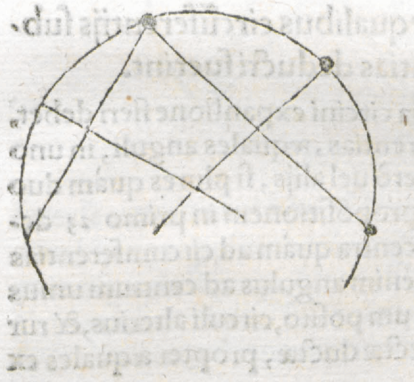


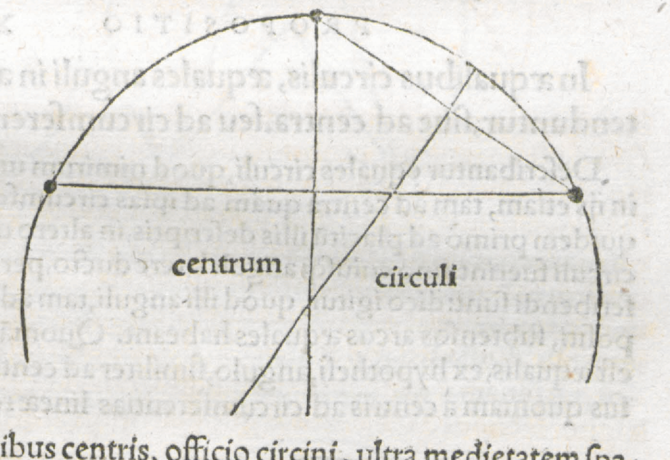
Quod ſi ad rectos ductæ ſeſe mutuo non ſecuerint, id quòd aliquando, ubi in circulo ductæ rectæ lineæ parallelę ſunt, accidere poterit, quia tum ad rectos ductę coincidunt, atq; ſimul una recta linea ſunt, ea biſariam diuidenda, per punctum deinde hoc, centrum quæſiti circuli exprimendum erit.



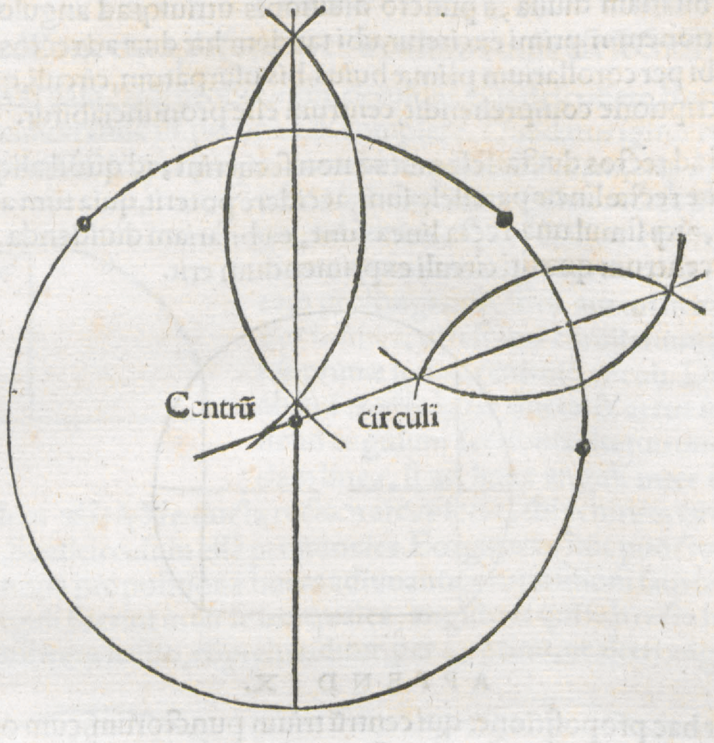
APPENDIX.

Vtuntur hac propoſitione, qui centrū trium punctorum, cum opus ſit, quærere, hoc eſt circulum, per data tria puncta tranſeuntem, deſcribere ſolent. Nam cum circulus per data puncta tranſire debeat, ſectionem quandam circuli per puncta data occultè ductam ſibi imaginantur. Quòd deinde ex tribus illis punctis (uno tamen bis repètito) tanquam ex tribus centris, officio circini, ultra medietatem ſpacij, per quod arcus deſcribi debet, ſemper extenſi, quatuor circulorum arcus deſcribant, ita ut ſemper bini & bini ſeſe mutuo ſecent, per puncta tandem interſectionum duas rectas uerſus unam & eandem partem ducāt, nihil certè aliud eſt, quàm dicta puncta duabus rectis coniungere, à media deinde harum, ad angulos rectos lineas excitare. Id quod cuilibet, propoſitionē 11 primi altius intuenti, perſpicuum erit. Atq; huius hoc loco Lectorem admonere uoluimus.





SEQVITVR HVIVS TRACTATIONIS PRO CENTRO TRIUM PUNCTORUM INUENIENDO FIGURA GEOMETRICA ALIA.



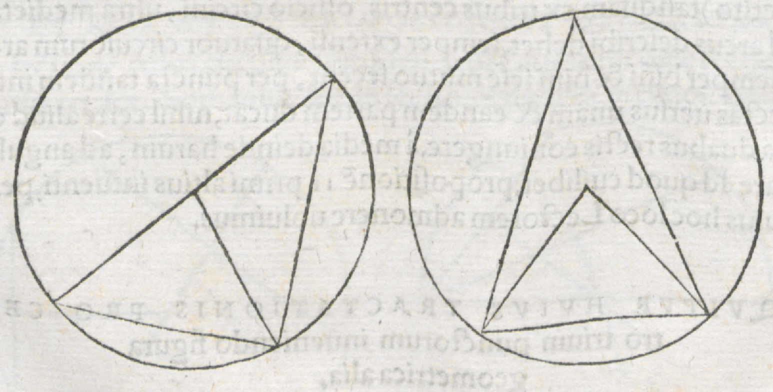
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Κϛ.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις, αἱ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασι, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις, ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι.

PROPOSITIO XXVI.

In æqualibus circulis, æquales anguli in æqualibus circũferentijs ſubtenduntur, ſiue ad centra. ſeu ad circumferentias deducti fuerint.

Deſcribantur ęquales circuli, quod nimirum una circini expanſione fieri debet, in ijs etiam, tam ad centra quàm ad ipſas circumferentias, æquales anguli, in uno quidem primò ad placitũ illis deſcriptis, in altero uerò uel alijs, ſi plures quàm duo circuli fuerint, uno cuiuſq; anguli latere ducto, per propoſitionem in primo 23 deſcribendi ſunt: dico igitur, quòd illi anguli, tam ad centra quàm ad circumferentias poſiti, ſubtenſos arcus æquales habeant. Quoniã enim angulus ad centrum unius eſt æqualis, ex hypotheſi, angulo, ſimiliter ad centrum poſito, circuli alterius, & rurſus quoniam à centris ad circumferentias lineæ rectæ ductæ, propter æquales ex hypotheſi circulos, inter ſe æquales ſunt, in ſingulis tertio latere ducto: & hæc tertia latera



tia latera per propoſitionem 4 primi, circumferentię deinde uel circulorum ſectiones, propterea quòd angulos, ex hypotheſi, inter ſe æquales ſuſcipiant, per definitionem ſimilium ſectionum, & propoſitionem 24 huius, inter ſe æquales erunt. Subtractis igitur nunc æqualibus arcubus ab æqualibus circulis, cum & reſidui arcus, à quibus ſcilicet æquales in æqualibus circulis anguli ſubtenduntur, ex communi quadam noticia inter ſe æquales ſint, propoſitioni ſatisfactum erit. Aequales igitur anguli in æqualibus circulis, ab æqualibus circumferentijs ſubtenduntur, ſiue ad centra, ſeu ad circumferentias deducti fuerint. quod demonſtraſſe oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΖ.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις, αἱ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβηκυῖαι γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις, ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι.

PROPOSITIO XXVII.

In æqualibus circulis, qui ſuper æquales circumferentias deducuntur anguli, æquales inter ſe ſunt, ſiue ad centra, ſeu ad circumferentias deducti fuerint.

Deſcribantur æquales circuli, ponantur etiam in ijs ſuper æquales circumferentias anguli: dico igitur, quòd illi anguli, tam ad centra quàm ad circumferentias poſiti, inter ſe æquales ſint. Quoniam enim qui ad centra ponuntur anguli, ſunt aut inter ſe æquales, aut non. Si æquales: & qui ad circumferentias ponuntur anguli, cum hi, ex propoſitione 20 huius, ſint ad centrum poſitis dimidia, inter ſe æquales erunt, quod eſt propoſitum. Quòd ſi fuerint inæquales, ſuccurratur uni ex his, per 23 primi, ſiue maiori ſiue minori angulo, ut alteri æqualis fiat, quo facto, & illorum æqualium angulorum circumferentiæ uel arcus ſubtendentes, per præmiſſam, inter ſe æquales erunt, Sed quia uni illorum æqualis etiam eſt, ex hypotheſi, mutati

anguli ſubtendens. per hanc igitur communem noticiam, Quæ eidem ſunt æqualia & reli. infertur tandem, partialem totali ſubtendenti circumferentiæ æqualem eſſe, quod eſt impoſſibile. Inæquales igitur non ſunt ad centrum poſiti anguli, ſed æquales. Et quia æquales: etiam ad circumferentias poſiti cum ſint horum dimidij, ut dictum eſt, inter ſe æquales erunt. Aequales igitur circumferentiæ uel arcus, in æqualibus circulis, æquales angulos ſubtendunt, ſiue ad centrum, ſiue ad circumferentias poſiti fuerint, quod demonſtraſſe oportuit.

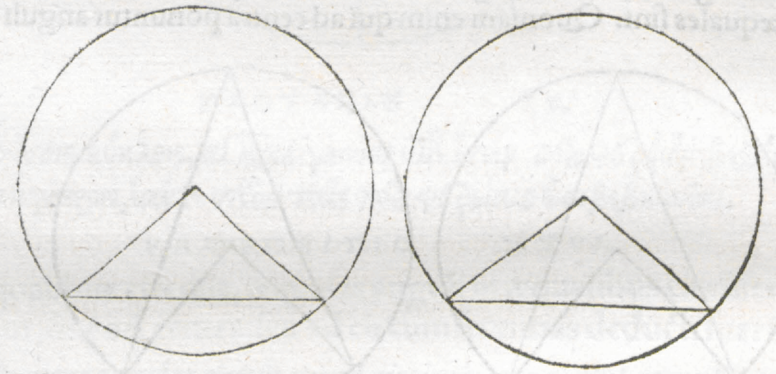
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΗ.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσας περιφερείας ἀφαιροῦσι, τὴν μὲν μείζονα τῇ μείζονι, τὴν δὲ ἐλάττονα τῇ ἐλάττονι.

PROPOSITIO XXVIII.

In æqualibus circulis, æquales rectæ lineę, æquales circumferentias auferunt, maiorem quidem maiori, minorem uerò minori.

Deſcribantur æquales circuli, in ijs etiam æquales rectæ ducantur: dico igitur, per illas rectas æquales etiam in circulis auferri circumferentias, maiorem ſcilicet maiori, & minorem circumferentiæ minori. Nam ductis ab extremitatibus rectarum ad centra rectis lineis, cũ circuli ex hypotheſi ſint inter ſe æquales, & hæ rectæ ductæ ex definitione æqualium circulorum, inter ſe æquales erunt. Quare & anguli ad centrum poſiti per propoſitionem 8 primi, æquales, atq; inſuper arcus uel circumferentiæ, quæ hos æquales angulos ſubtendunt, per 26 huius, æquales, quod eſt unum. Porrò quia circuli ex hypotheſi ſunt æquales, ab his igitur ſi æquales circumferentiæ ablatę fuerint, & quę relinquuntur circumferentię, ex communi quadam noticia, inter ſe æquales erunt. In circulis igitur æqualibus, æquales rectę lineę æquales circumferentias auferunt, maiorem quidem maiori, minorem uerò minori. quod demonſtraſſe oportuit.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΘ.

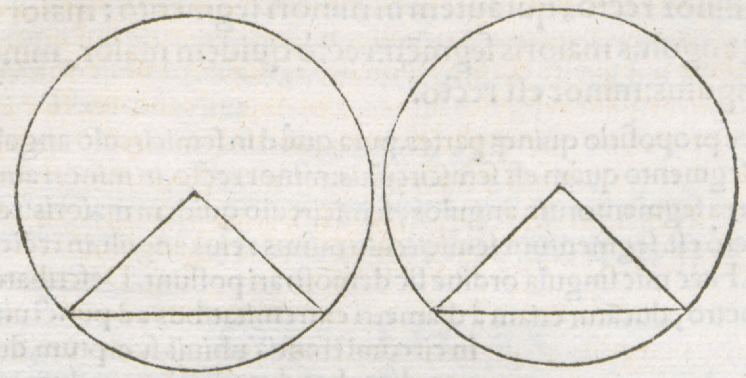
Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις, ὑπὸ τὰς ἴσας περιφερείας ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν.

PROPOSITIO XXIX.

In æqualibus circulis, ſub æqualibus circumferentijs æquales rectæ lineæ ſubtenduntur.

Vt præcedens 28, per æquales rectas in æqualibus circulis ductas, æquales circumferentias auferri aſſerit: ſic quoq; hæc uiceſima nona, ubi in æqualibus circulis per lineas quaſdam rectas, æquales circũferentię ablatæ fuerint, illas rectas æquales eſſe infert. Deſcribantur igitur æquales circuli, in ijs etiam æquales ſumantur circumferentiæ: dico igitur, & illarum æqualium circumferentiarum rectæ ſub-

tenſæ inter ſe æquales ſint. Ducantur ab extremitatibus ſubtenſarum ad centra rectæ lineæ. Et quoniam hæ rectæ ductæ, propter æqualitatem circulorum ex hypotheſi, ex definitione prima huius, inter ſe æquales ſunt, anguli inſuper ad centra, ſub illis æqualibus ductis comprehenſi ex 27 huius, æquales: & lineę his æqualibus angulis ſubtenſæ, quæ etiam ſub circumferentijs æqualibus ſubtenduntur, per propoſitionem 4 primi, inter ſe æquales erunt. In circulis igitur æqualibus, ſub æqualibus circumferentijs æquales rectæ lineæ ſubtenduntur. quod demonſtraſſe oportuit.



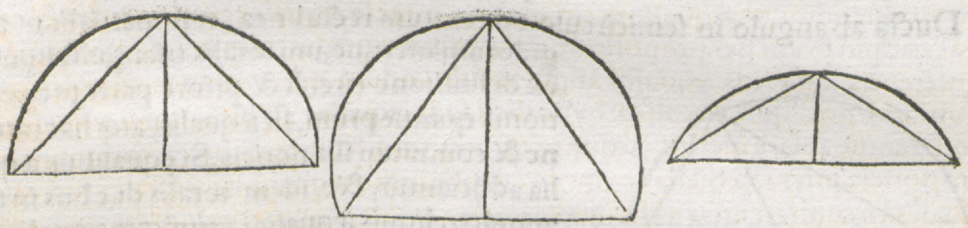
ΠΡΟΤΑΣΙΣ. Λ.

Τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν, δίχα τέμνειν.

PROPOSITIO XXX.

Datam circumferentiam, biſariam ſecare.

Sit circumferentia data, atq; propoſitum eam biſariam ſecare. Datæ igitur circũferentiæ extremitates recta quadam linea coniungantur, hac deinde recta biſariam diuiſa, à puncto diuiſionis ad rectos angulos linea uerſus circumferentiam excitetur: & erit hæc, ipſa quæ circumferentiam biſariam ſecabit, quod ſic demonſtratur. Ducantur à ſectionis puncto in circumferentia ad eius extremitates duæ rectę lineę. Et quoniã hæ duæ rectę, ex propoſitione 4 primi, inter ſe ęquales ſunt, & rurſus quoniam in circulis æqualibus æquales rectæ lineæ, per propoſitionem 28 huius, circumferentias æquales auferunt, maiorem maiori, & minorem minori: cum quod de circulis æqualibus, illud ipſum etiam de uno & eodem dici poſſe & uerûm eſſe cõſtet, demonſtratio abſoluta erit. Data igitur circumferentia biſariam diuiſa eſt. quod feciſſe oportuit.



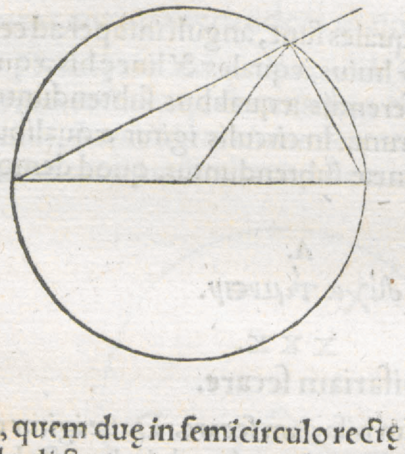
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΑ.

Ἐν κύκλῳ, ἡ μὲν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνία· ὀρθή ἐστιν, ἡ δὲ ἐν τῷ μείζονι τμήματι· ἐλάττων ὀρθῆς. ἡ δὲ ἐν τῷ ἐλάττονι· μείζων ὀρθῆς. Καὶ ἔτι, ἡ μὲν τοῦ μείζονος τμήματος γωνία, μείζων ἐστὶν ὀρθῆς, ἡ δὲ τοῦ ἐλάττονος τμήματος γωνία, ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς.

PROPOSITIO XXXI.

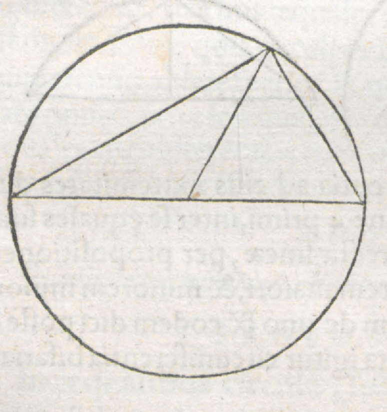
In circulo, angulus qui in ſemicirculo eſt: rectus eſt, qui uerò in maiori ſegmento: minor recto, qui autem in minori ſegmento: maior eſt recto. Et inſuper, angulus maioris ſegmēti: rectò quidem maior, minoris uerò ſegmenti angulus: minor eſt recto.

Habet hæc propoſitio quinq; partes, puta quòd in ſemicirculo angulus: rectus ſit, in maiori ſegmento quàm eſt ſemicirculus: minor recto, in minori autem: maior recto. Præterea ſegmentorum angulos, ſemicirculo quidem maioris: recto minorem, quod uerò eſt ſegmentum ſemicirculo minus: eius angulum recto maiorem eſſe oporteat. Hæc nūc ſingula ordine ſic demōſtrari poſſunt. Deſcribatur circulus cum ſua diametro, ducātur etiam à diametri extremitatibus ad punctum aliquod, in circumferentia ubiuis ſumptum, duæ rectę lineę: dico, has duas rectas angulum rectum continere. quod quidem, ſi altera ductarum ultra circumferentiam ſecundum continuationem in rectum eiecta, ex hoc ipſo angulo deinde recta quædam linea ad centrum ducta fuerit, ſic demonſtrari poterit. Quoniam enim totalis in circulo trianguli unum latus ulterius productum eſt: externus qui ſic deſcribitur angulus, duob. internis oppoſitis, ex propoſitione 32 primi ęqualis erit. Sed quia his internis, ex definitione circuli & priore parte propoſitionis quintę primi, bis uſurpatis, æqualis etiam eſt angulus, quem duę in ſemicirculo rectę lineę includunt: eidem igitur in ſemicirculo angulo dictus externus ęqualis erit. quare, ex definitione 10 primi, uterq; rectus. In ſemicirculo igitur angulus, rectus eſt. quod demonſtraſſe oportuit.



POTEST HOC IDEM ETIAM ALITER DEMONSTRARI in hunc modum.

Ducta ab angulo in ſemicirculo ad centrum recta linea, cum partialium angulorum uterque, uni totalis trianguli angulo, ex definitione circuli & priore parte propoſitionis quintæ primi, ſit æqualis, atq; hac ratione & communi illa noticia, Si ęqualibus æqualia adijciantur, &c. idem totalis duobus in triangulo reliquis æqualis: utrunque æqualium, reſpectu totalis trianguli, ex corollario propoſitionis 32 primi, duorum rectorum medietas, atq; tandem utrunque per ſe uni recto æqualis erit. id quod demonſtraſſe oportuit.



Ἄλλη ἀπόδειξις τοῦ ὀρθὴν εἶναι τὴν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνίαν.

Alia demonſtratio iſtius quod in propoſitione dicitur, Angulum in ſemicirculo rectum eſſe.

Cum ex propoſitione 32 primi, Omnis trianguli uno latere ulterius producto, externus angulus duobus internis oppoſitis ęqualis ſit, cumq; etiā ex priore parte propoſitionis 5 primi, iſoſceliū triangulorū qui ad baſim ſunt anguli inter ſe æquales ſint, hac & illa bis uſurpata: qui ad centrū ſunt anguli, uterq; ad alterius trianguli angul, ū in circumferentia exiſtentem, duplus erit. Sed quia ad centrum poſiti anguli, ex propoſitione 13 primi, duobus rectis ſunt æquales: eorum medietas igitur, ut eſt in ſemicirculo angulus, duorum rectorum medietati, hoc eſt uni recto, æqualis erit. Hinc colligitur

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν τριγώνου ἡ μία γωνία δυσὶν ἴση ᾖ· ὀρθή ἐστι. Διὰ τὸ καὶ τὴν ἐκείνης ἐφεξῆς ταῖς αὐταῖς ἴσην εἶναι. Ὅταν δὲ αἱ ἐφεξῆς γωνίαι ἴσαι ὦσιν· ὀρθαί εἰσιν.

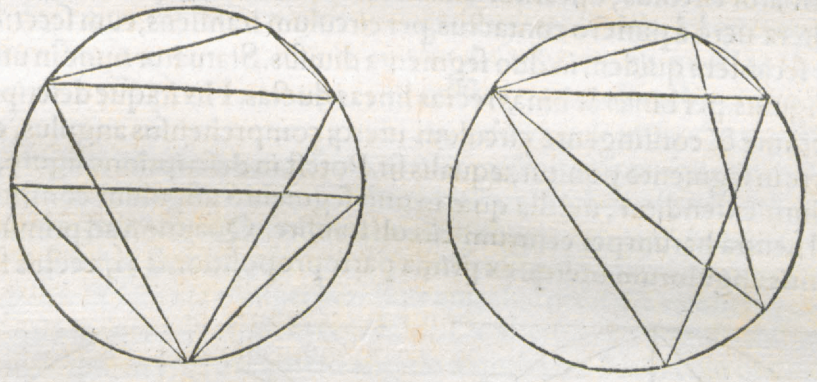
COROLLARIVM.

Ex hoc ſanè manifeſtum. Quando trianguli unus angulus duobus, reliquis ſcilicet, æqualis fuerit: illum rectum eſſe.

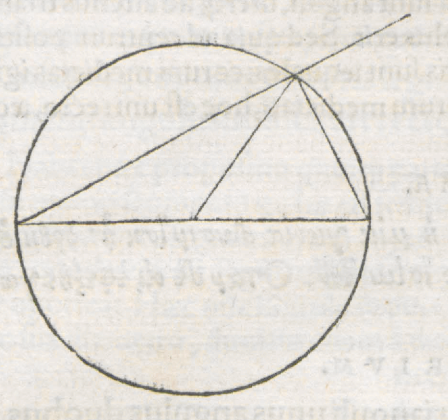
Propterea quod ille deinceps ſe habens, eiſdem duobus reliquis æqualis ſit. Quando autem deinceps ſe habentes, anguli æquales fuerint: recti erunt ambo.

Nunc quantum ad ſecundam ac tertiam propoſitionis partem.

Deſcribatur circulus, ducatur in eo etiam recta quædam linea, non per centrum tranſiens, puncto deinde in utriuſque ſegmenti circumferentia ſumpto, ad utrunq; eorum duæ ab extremitatibus ductæ rectæ ducantur lineæ: dico igitur, eum angulum qui eſt in maiori ſegmento, recto minorem: illum uerò qui eſt in ſegmento minori, recto maiorem eſſe. Ducatur in circulo diameter, quomodocunq;, ad huius extremitates deinde ab angulo, qui quòd talis ſit qualis proponitur, demonſtrari debet, duæ rectę lineę, uel una tantum ſi ſuffecerit. Et quoniam angulus in ſemicirculo, per primam partem propoſitionis huius, rectus eſt, cum angulus qui eſt in maiori ſegmento, ſit recti anguli pars, contrà uerò, anguli illius qui eſt in minori ſegmento, ipſe angulus rectus pars: qui igitur in maiori ſegmēto fuerit angulus, ut pars, recto minor, in minori uerò, ut totum, recto angulo maior erit. Vel, probato uno, quòd aut in ſegmento maiori angulus, recto minor ſit: aut alter, recto maior, cū Omnis quadrilateri, in circulo deſcripti, anguli ex oppoſito, per propoſitionem 22 huius, duobus ſint rectis æquales: ſtatim tandem & alterum inferri poteſt. Quartò igitur iam, quòd in propoſitione dicitur, angulum maioris ſegmenti, recto maiorem: ac ultimò tandem, minoris ſegmenti, recto minorem eſſe, ſic demonſtretur. Deſcripto circulo, in eo etiam præter centrum recta quadam linea ducta: dico, &c. Ducatur in circulo diameter ſic, ut eius una extremitas uni ductæ extremitati copuletur, altera deinde ductæ cum altera extremitate diametri recta quadam alia iun-



ctæ,ubi hæc eadem recta ultra circumferentiam cõtinuata fuerit, demonſtrationis figura parata erit. Et quoniam maioris ſegmenti angulus, ut apparet, eo angulo qui ex prima parte propoſitionis huius, rectus eſt, maior exiſtit, angulorum porrò in hac figura deinceps ſe habentiũ uterq;, ex corollario præmiſſo rectus eſt: qui igitur maioris ſegmenti eſt angulus, ut totum, recto maior: contrà, qui minoris, ut pars, angulo recto minor erit. In circulo igitur qui quidem, & reliqua, quod demonſtraſſe oportuit.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΒ.

Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς ἐπὶ τὸν κύκλον διαχθῇ τις εὐθεῖα τέμνουσα τὸν κύκλον· ἃς ποιεῖ γωνίας πρὸς τῇ ἐφαπτομένῃ, ἴσαι ἔσονται ταῖς ἐν τοῖς ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήμασι γωνίαις.

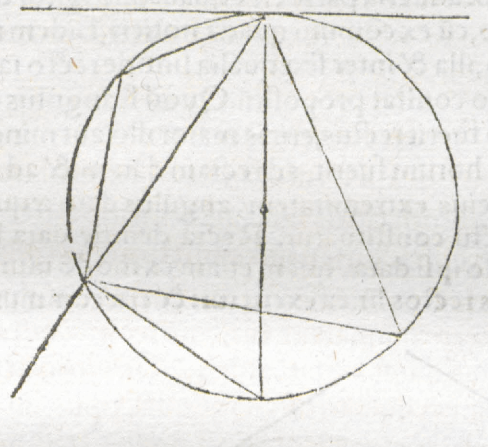
PROPOSITIO XXXII.

Si circulum tetigerit recta quædam linea, à contactu uerò extendatur quædam recta linea circulum ſecans: anguli quos facit ad contingentem, æquales erunt ijs, qui alternatim in circuli ſegmentis conſiſtunt, angulis.

Deſcribatur circulus, ducantur etiam duæ rectæ lineæ, quarum una circulum tangat, altera uerò à puncto contactus, per circulum tranſiens, eum ſecet: & erit circulus per ſecantem quidem in duo ſegmenta diuiſus. Statuatur nunc in utroq; ſegmento angulus, per binas & binas rectas lineas ductas. His itaque deſcriptis: dico, quòd à ſecante & contingente circulum uterq; comprehenſus angulus, ei, qui ex altera parte in ſegmento ponitur, æqualis ſit. Poteſt in deſcriptione figurę, uel quæ per circulum extenditur, uel illa quæ in uno ſegmento angulum conſtituit recta linea, uel neutra harum per centrum circuli tranſire. Quantum ad primum, Cum in ſegmentis angulorum uterq;, ex prima parte propoſitionis 31, rectus ſit, cumq;

etiam ipſa ſecans ad tangentem, ex 18, ſit perpendicularis, atque ita uterq; angulorum qui ſic fiunt, rectus: illis mediantibus, per communem illam noticiam, qua omnes recti anguli æquales inter ſe ſunt, propoſitioni tandem ſatisfactum erit. Quantum

tum ad ſecundum. Cum triangulum appareat, cuius in ſemicirculo angulus ex prima parte propoſitionis 31 huius, rectus eſt, cumq; etiam Omnis trianguli tres anguli interiores, ex corollario propoſitionis 32 primi, duobus rectis æquales ſint: reliqui duo eiuſdem trianguli anguli, uni recto æquales erunt. Sed quia unus, rectus etiam eſt ex 18 huius, angulus quem nimirum ex eadem parte contingens ac per centrum tranſiens recta linea comprehendunt: per hanc communem noticiam, Quæ uni ſunt æqualia, &c. illi duo uni huic angulo æquales erunt: communi igitur illo angulo quem habent, ablato, quantum ad unum angulum iam propoſitio conſtabit. De reliquo tandem, cum tam quadrilaterorum in circulis anguli, qui ex oppoſito ſunt, ex 22 huius, quàm etiam qui à contingente & per centrum tranſeunte recta linea cõprehenduntur, ex propoſitione 13 primi, duobus rectis æquales ſint: ex communi quadam noticia, duo priores poſterioribus duobus angulis æquales erunt. ab æqualibus igitur his, angulis qui iamdudum æquales inter ſe eſſe demonſtrati ſunt, ſubtractis: & de altero iam angulo, quod ille ex altera parte in ſegmento poſito angulo æqualis ſit, dubium amplius non erit. Quantum ad tertium, ubi ſcilicet neutra rectarum, neque circulum ſecans, neq; etiam illa quę in ſegmento angulum conſtituit, per centrum circuli tranſeat. Quòd ſi hoc modo figura deſcripta fuerit, tum à puncto contactus, per 11 primi, ipſi tangenti ad rectos angulos linea excitanda eſt. Erit autem hæc, cum ex propoſitione 19 huius, centrum circuli contineat, diameter circuli. Coniungatur porrò diametri altera extremitas cũ extremitate ſecãtis. Et quia angulus qui ſic deſcribitur, eo quòd in ſemicirculo exiſtat, rectus eſt: reliqui duo in hoc triangulo anguli, uni recto æquales erunt.



Sed quia angulus etiam ad contactum totalis ex illa parte, ratione ad rectos angulos excitatę lineæ, eſt rectus: idem totalis prioribus duobus æqualis erit. Subtracto igitur ab illis æqualibus angulo quodam illis communi, cum in omni circulo qui in eodem ſegmento ſunt anguli, inter ſe æquales ſint, de eo qui nimirum in illa parte ſub tangente & ſecante comprehenditur angulo, quòd ille ex altera parte in ſegmento angulo æqualis ſit, tandem conſtabit. De altero nunc angulo nullum erit dubium, quin & ipſe in altero ſegmẽto angulo æqualis ſit. Nam cum quadrilaterum in circulo deſcriptũ, duos angulos oppoſitos duobus rectis ęquales habeat, cumq; inſuper illi, qui à tangente & ſecante circulum comprehenduntur anguli, duobus rectis æquales ſint, per cõmunem illam noticiam, Eidem æqualia &c. illis duobus in quadrilatero angulis, quos ſecans cum contingente facit, duo anguli æquales erunt. Quia aũt unus, ut iam oſtenſum, eſt uni ęqualis: & alter tandem, per ſubtractionem æqualium ab æqualibus, alteri angulo æqualis erit. Si circulum igitur tetigerit recta quædam linea, à contactu, &c. quod demonſtraſſe oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΓ.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας γράψαι τμῆμα κύκλου, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

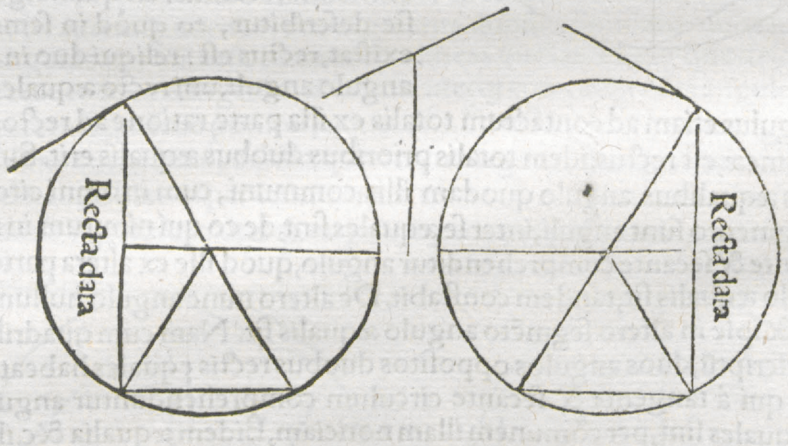
PROPOSITIO XXXIII.

Super data recta linea deſcribere ſectionem circuli, capientem angulum æqualem dato angulo rectilineo.

Requirit

Requirit hæc propoſitio rectam lineam datam, angulum item rectilineum datum, proponit autẽ, quomodo ſuper data recta ſectio, quæ dato rectilineo angulo ęqualem angulum capiat, deſcribatur. Angulus datus poteſt eſſe rectus, aut non rectus. Si rectus, data recta bifariam diuidenda, ſuper ea deinde ex puncto diuiſionis ſemicirculus deſcribendus eſt, & factum erit propoſitum: id quod ex prima parte propoſitionis 31 huius demonſtrari poterit. ALITER. Si rectus fuerit angulus propoſitus, conſtituatur ad alterutram rectæ datæ extremitatem, atq; ad ipſam rectam lineam, per 23 primi, angulus, dato angulo ęqualis, recta deinde bifariam diuiſa, ex puncto hoc, ſecundum alteram eius medietatem deſcribatur circulus. Et quoniam angulus quem applicata ad rectam datam conſtituit, ex ſtructura, rectus eſt: rectę datæ applicata circulũ illum, ex corollario propoſitionis 16 huius, tanget. Et quoniam etiam, ut habet propoſitio præcedens, angulus quem hę duę rectę comprehendunt, in ſegmento angulo ex aduerſa parte eſt ęqualis, illo igitur deſcripto, cũ ex cõmuni quadã noticia, Eidem æqualia, illa & inter ſe æqualia ſint: de recto iam angulo conſtat propoſitũ. Quòd ſi angulus datus nõ fuerit rectus, erit is maior illo, aut minor. utrum horum fuerit, ad rectam datam & ad alteram eius extremitatem, angulus dato æqualis, per 23 primi, rectæ cuiuſdam lineę ductu conſtituatur. Recta deinde data bifariam diuiſa, tam ex hoc diuiſionis puncto ipſi datæ, quàm etiam ex modò uſurpata datæ extremitate ipſi ductę, ad angulos rectos linea excitetur: & erit communis harum ad rectos ductarum ſectio, centrum futuri circuli. quod in hunc modum demonſtrabitur. Ducatur ab hoc centro ad alteram datę extremitatem recta quædam linea. Et quoniam hæc, ex ſtructura & propoſitione 4 primi, lineę ei, quę ipſi ductę ad rectos angulos inſiſtit, ęqualis eſt: circulus igitur ex cẽtro poſito, ad unius æqualium interuallum, per 3 poſtulatum primi, deſcriptus, per terminum etiam alterius æqualis tranſibit. Deſcribatur ergo is, altera etiam ſemidiametro, illa nimirum, quæ ab angulo, dato æquali, ducta eſt, in diametrum continuata, eius in circumferentia extremitas cum altera datæ extremitate iungatur. Et quoniam hæc recta, quæ cum data angulum dato æqualem comprehendit, propterea quòd ab extremitate diametri ad rectos angulos egrediatur, ex priore parte corollarij propoſitionis 16 huius, ipſum deſcriptum circulum tangit, cum angulus ſegmenti, quod ex altera parte ſuper data recta deſcriptum eſt, angulo, ad contingentem, dato æquali deſcripto, ex 32 huius æqualis ſit: ſuper data igitur recta ſectio, angulo dato æqualem capiens angulum, deſcripta eſt. quod fieri oportuit.

Angulus datus, rectus.



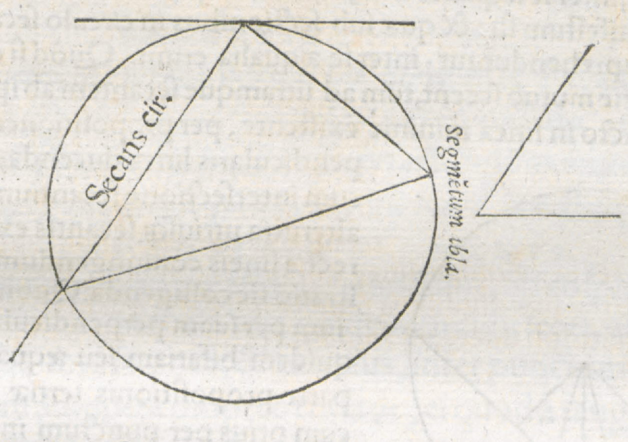
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΔ.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος κύκλου τμῆμα ἀφελεῖν, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

PROPOSITIO XXXIIII.

A' dato circulo ſegmentum abſcindere, capiens angulum æqualem dato angulo rectilineo.

Sit circulus datus, angulus item rectilineus datus, atq; propoſitum, à circulo portionem, quæ capiat angulum dato æqualem, abſcindere. Ducatur primò per 17. huius, recta quędam linea circulum tangens, à puncto deinde contactus, per 23 primi, alia recta circulum ſecans, quæ cum tangente angulum dato æqualem faciat, ducatur, & propoſitioni ſatisfactum erit, cum per hanc ipſam ſecantem huiuſmodi ſectio de circulo nunc ſit abſciſſa. Puncto igitur in circumferentia, huic angulo oppoſita, ubiuis ſumpto, ſi ab eo duæ rectæ lineæ ad extremitates circulum ſecantis ductæ fuerint, quem hæ rectæ angulum incluſerint, dato rectilineo angulo æqualem eſſe, propoſitio huius 32, & communis illa noticia, Quæ eidem ſunt æqualia & reliqua, commonſtrabunt. A' dato igitur circulo ſegmentum, quod angulum dato rectilineo angulo æqualem capiat, abſciſſum eſt, quod fieri oportuit.



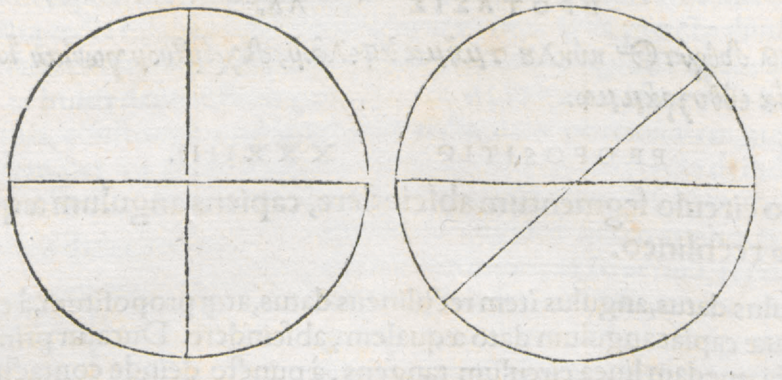
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΕ.

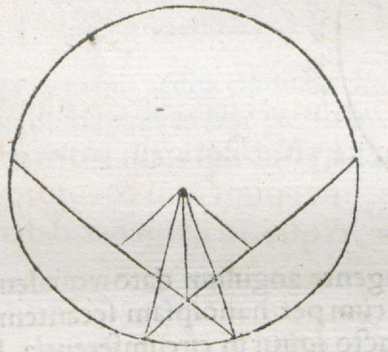
Ἐὰν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας· τὸ ὑπὸ τῶν τῆς μιᾶς τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν τῆς ἑτέρας τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

PROPOSITIO XXXV.

Si in circulo duæ rectæ lineæ ſeſe mutuo ſecuerint: quod ſub ſectionibus unius comprehenditur rectangulum, æquum eſt ei, quod ſub ſegmentis alterius comprehenditur rectangulo.

Deſcribatur circulus, in quo etiam duæ rectæ lineæ, ſeſe mutuo ſecantes, ducantur: dico, rectangulum comprehenſum ſub partibus unius, æquale eſſe ei, quod ſub alterius rectæ partibus continetur, rectangulo. Rectarum in circulo ducta-



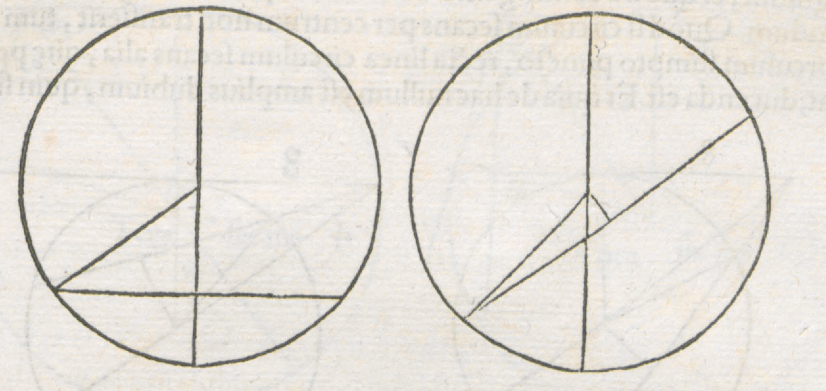


rum ſectio fit, aut in ipſo circuli centro, aut extra. Fiat igitur primò in circuli centro. Et quoniam quæ ex centro ad circumferentiam egrediuntur rectę lineę, ex definitione circuli, inter ſe æquales ſunt, cum ſub æqualibus lineis, æqualia rectangula contineri manifeſtum ſit: & quæ ſub ſectionibus in circulo ſecantium linearum rectangula comprehenduntur, inter ſe æqualia erunt. Quòd ſi extra centrum, in circulo ductæ ſeſe mutuo ſecent, tum ad utramque ſecantem ab ipſo circuli centro, tanquam à puncto in linea minimè exiſtente, per propoſitionem 12 primi, perpendicularis linea ducenda, centrum deinde cum interſectione ſecantium communi, atq; alterutra utriuſq; ſecantis extremitate, tribus rectis lineis coniungendum erit, & demonſtratio ſic colligenda. Quoniam utraq; ſecantium per ſuam perpendicularem lineam, iam quidem bifariam ſeu æqualiter, ex ſecunda parte propoſitionis tertiæ huius, diuiſa eſt, cum prius per punctum interſectionis communis inęqualiter etiam diuiſæ ſint, rectangulorum ſub inæqualis ſectionis portionibus comprehenſorum utrunq;, unà cū quadrato portionis interceptę, per propoſitionem quintam ſecūdi bis uſurpatam (ſunt enim duæ ſecantes) quadrato medietatis æquale erit, atq; communi deinde, quod ſcilicet à perpendiculari ſecantis utriuſq; deſcribitur, quadrato adiecto: rectangulorum utrunq; cum duobus quadratis, interceptæ ſcilicet portionis uno, & perpendicularis ſuæ altero, duobus quadratis, quę nimirum à dimidio lineæ & perpendiculari deſcribuntur, æquale erit. Quia uerò in triangulis rectangulis id quod à latere rectum angulum ſubtendente deſcribitur quadratum, reliquorum duorum laterum quadratis per penultimam propoſitionem primi, æquale eſt, hac ipſa propoſitione bis uſurpata: utrunq; rectangulum cum quadrato lineę, à centro ad interſectionem ſecantium ductæ, quadrato ſemidiametri ęquale erit. Semidiametri autem unius circuli, cum ſint inter ſe æquales, atque hinc etiam earundem quadrata æqualia: ipſa inſuper rectangula cum ſuis quadratis, uel cum quadrato eo quod commune habent, inter ſe ęqualia erunt. Illo igitur communi iam ablato: & ipſa rectangula ſola, quæ ſub ſecantium ſegmentis comprehenduntur, inter ſe æqualia erunt. Si in circulo igitur duæ rectæ lineæ ſeſe mutuo ſecuerint: quod ſub ſectionibus unius comprehenditur rectangulum, æquum eſt ei, quod ſub ſegmentis alterius comprehenditur rectangulo. quod demonſtraſſe oportuit.

APPENDIX.

Facta autem eſt mentio duarum perpendiculariū, trium deinde linearum aliarū, quę pro huius propoſitionis ſtructura ducēdę ſunt. Quòd ſi uerò, ratione quidem

ductarum in circulo, una uel plures duci non poſſint, reliquis tamē ductis, demonſtratio ut prius, non tamen tam ſæpe ſingula repetendo ſuccedet. Huius autem rei exempla ſunt, ut ſequitur.

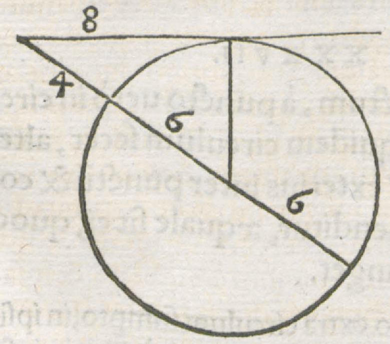


ΠΡΟΤΑΣΙΣ Λϛ.

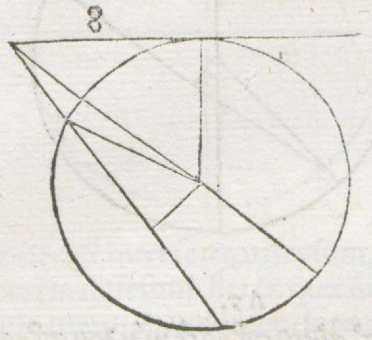
Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, καὶ ἀπ' αὐτοῦ πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ ἐφάπτηται· ἔσται τὸ ὑπὸ ὅλης τῆς τεμνούσης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης, μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας, περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης τετραγώνῳ.

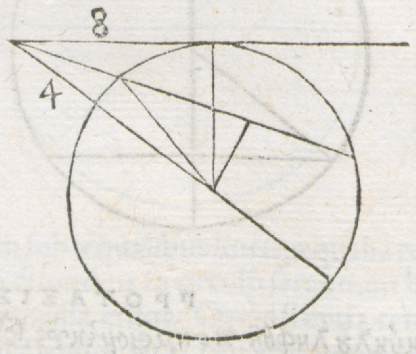
PROPOSITIO XXXVI.

Si extra circulum ſumatur aliquod punctum, ab eoq; in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum una quidem circulū ſecet, altera uerò tangat: erit quod ſub tota ſecante, & exterius, inter punctum & conuexam circumferentiam, ſumpta comprehenditur, ei quod à tangente deſcribitur quadrato, æquale.



Deſcribatur circulus, ducantur etiam à puncto, extra circulum ſumpto, duæ rectæ lineę, una quidem circulum ſecans, altera uerò, per propoſitionem 17 huius, eum tangens: dico, rectangulum ſub tota ſecante & eius externa portione comprehenſum, æquale eſſe quadrato contingentis, quod in hunc modum demonſtrabitur. Aut enim circulum ſecans per centrum tranſierit, aut non. Si tranſierit, ducatur à contactu ad centrum recta quædam linea. Et quoniam linea, ut eſt diameter circuli uel ſecantis rectæ interna portio, bifariam diuiſa eſt, eiq; alia quædam recta linea, externa nimirum eiuſdem ſecātis portio, in rectum adiecta eſt: comprehenſum ſub tota ſecante & externa portione rectangulum cum quadrato medietatis diuiſæ, quadrato eius, quæ ex dimidia atq; adiecta conſtituitur, lineę, per propoſitionem 6 ſecundi, æquale eſt. Et quoniā etiam quæ ex dimidia & adiecta conſtituitur linea, ei in triangulo angulo, qui ex 18 huius rectus eſt, ſubtēditur, atq; hinc ab ea deſcriptum quadratum, eis quę à reliquis duobus trianguli lateribus deſcribūtur quadratis, ex propoſitione penultima primi æquale: æqualium iam mutatione facta, loco unius ſcilicet lateris quadrati, duorum, contingentis ſcilicet, & eius quæ à contactu ad centrū ducta eſt, quadratis ſumptis: & rectangulū cum dicto quadrato, eis quę à reliquis duobus lateribus deſcribuntur, æquale erit: æqualibus igitur quadratis, quæ nimirum à lineis, ex definitione circuli, æqualibus deſcripta ſunt, ab his æqualibus ſubtractis, relinquitur tandem, ſub tota ſecante & externa portione comprehēſum rectangulum, ei quod à contingente deſcribitur quadrato æquale eſſe, quod erat obtinendum. Quòd ſi circulum ſecans per centrum non tranſierit, tum ab eodem extra circulum ſumpto puncto, recta linea circulum ſecans alia, quę per centrum tranſeat, ducenda eſt. Et quia de hac nullum eſt amplius dubium, quin ſub tota illa & parte ſua exteriori comprehenſum rectangulum, lineæ contingentis quadrato æquale ſit, duabus à centro rectis lineis ductis, una quidem quæ priori ſecanti perpendicularis ſit, altera uerò ad eiuſdem prioris ſecantis cum circulo interſectionem tendens: & de illa, quæ per centrum non tranſierit ſecante linea, cum per ſuam ad rectos ductam lineam, ex ſecunda parte propoſitionis 3 huius, bifariam diuiſa ſit, ex propoſitionibus ſexta ſecundi & penultima primi, interim tamen communi quodam, ad rectos ſcilicet ductæ quadrato, addito, æqualibus item ab æqualibus ſubtractis, nemo dubitabit. Si extra circulum igitur ſumatur aliquod punctum, ab eoq; in circulum cadant duę rectæ lineæ, quarum una quidem circulum ſecet, & reli. quod demonſtraſſe oportuit.





ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΖ.

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ προσπίπτῃ, ᾖ δὲ τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης τεμνούσης, καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης, μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς προσπιπτούσης· ἡ προσπίπτουσα, ἐφάψεται τοῦ κύκλου.

PROPOSITIO XXXVII.

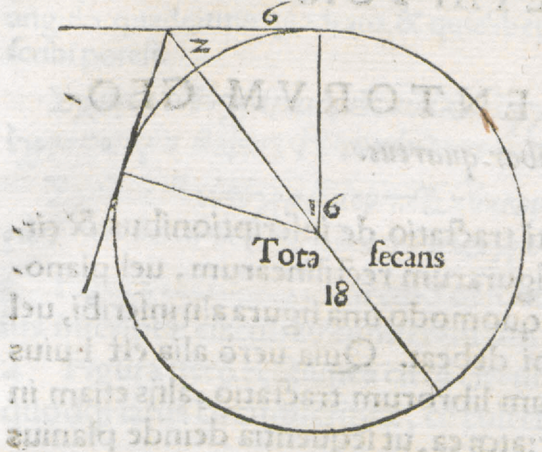
Si extra circulum ſumatur aliquod punctum, à puncto uerò in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum una quidem circulum ſecet, altera uerò incidat, quod item ſub tota ſecante, & exterius inter punctū & conuexam circumferentiam ſumpta, comprehenditur, æquale ſit ei, quod à cadente deſcribitur: cadens ipſa circulum tanget.

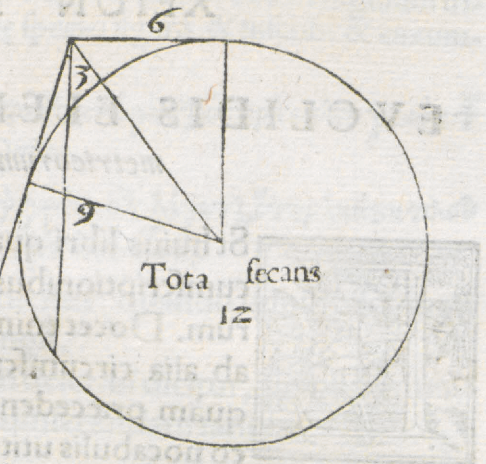
Deſcribatur circulus, ducantur etiam à puncto extra circulum ſumpto, in ipſum circulum, duæ rectę lineę, una quidem circulum ſecans, altera uerò quæ in ipſum tantùm cadat. Eſto autem quòd rectangulum, ſub tota ſecante & eius externa portione comprehenſum, ęquale ſit quadrato in circulum cadentis lineæ: dico igitur, ipſam cadentem rectam circulum tangere. Ducatur à puncto extra circulum ſumpto, per 17 huius, linea circulum cōtingens, à centro deinde circuli ad tria puncta,

quæ

---

quæ ſunt punctum contactus, id quod extra circulum ſumptum eſt, & tertium deinde, ea cadentis extremitas qua cum in circulum cadit, tres rectæ lineæ ducantur. Et quoniam circulum tangentis quadratum, rectangulo, ſub tota ſecāte & eius externa portione comprehenſo, ex propoſitione pręcedenti ęquale eſt, cum eidem rectangulo, ex propoſito, æquale etiam ſit quadratum lineę in circulum cadentis: cadens in circulum linea, & eum tangens, cum æqualia quadrata ab eis deſcribantur, lineę inter ſe æquales erunt. Præterea, quoniam etiam in circulo ex centro uſq; ad ipſam circumferentiam continuatę rectæ lineę, inter ſe ſunt æquales, cum iam duo appareant triangula, quorum duo latera unius duobus lateribus alterius ęqualia ſint, baſes etiam eorum, cum ſit una & eadem linea illis communis, ęquales: & angulus inter æqualia latera in uno, angulo, inter æqualia latera in altero triangulo, per propoſitionem 8 primi, ęqualis erit. Sed quia unus eorum, ex 18 huius, eſt rectus: & alter ſic, propter æqualitatem, rectus erit. In circulum igitur cadens, hypotheſibus illis mediantibus, eum etiam tangere, ex priore parte corollarij propoſitionis 16 huius concluditur. Si extra circulum igitur punctum aliquod ſumatur, à puncto etiam in circulum cadant duæ rectę lineę, quarum una quidem circulum ſecet, altera uerò eum tangat, quod item ſub tota ſecante, & exterius inter punctum & conuexum circumferentiæ ſumpta portione comprehenditur, æquale ſit ei, quod à tangente deſcribitur, quadrato: cadens recta linea circulum tanget, quod demonſtraſſe oportuit.





FINIS LIBRI TERTII.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

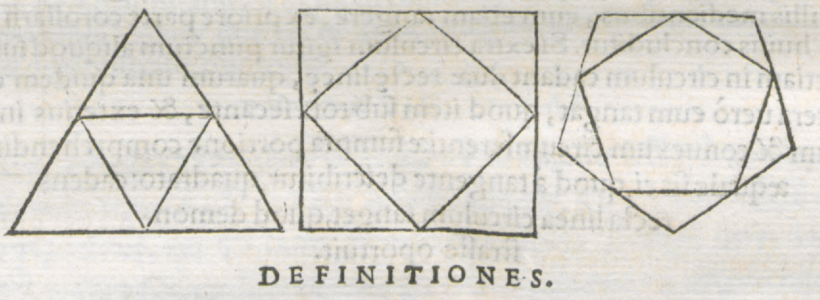
EVCLIDIS ELEMENTORVM GEOmetricorum liber quartus.

Est huius libri quarti tractatio de inſcriptionibus & circumſcriptionibus figurarum rectilinearum, uel planorum. Docet enim, quomodo una figura alij inſcribi, uel ab alia circumſcribi debeat. Quia uerò alia eſt huius quàm præcedentium librorum tractatio, alijs etiam in eo uocabulis utitur: atq; ea, ut ſequentia deinde planius intelligi poſſint, ſingula ordinè definit.

ΟΡΟΙ.

Σχῆμα εὐθύγραμμον εἰς σχῆμα εὐθύγραμμον ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη τῶν τοῦ ἐγγραφομένου σχήματος γωνιῶν ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ εἰς ὃ ἐγγράφεται ἅπτηται.

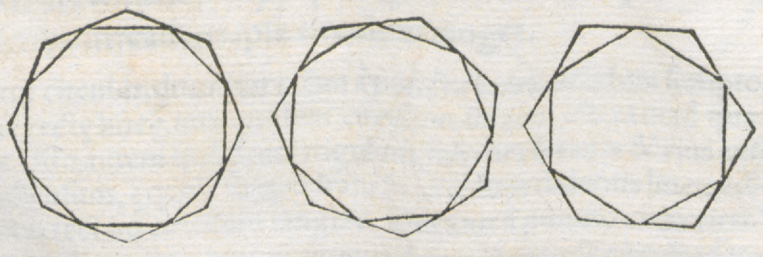
Σχῆμα δὲ ὁμοίως περὶ σχῆμα περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου ἑκάστης γωνίας τοῦ περὶ ὃ περιγράφεται ἅπτηται.



DEFINITIONES.

1 Figura rectilinea in figura rectilinea deſcribi dicitur, quando unuſquiſq; inſcriptæ figuræ angulus, unumquodque, latus eius in qua deſcribitur, tangit.

2 Figura autem ſimiliter circa figuram deſcribi dicitur, quando unumquodq; latus circumſcriptæ, unumquemque angulum eius circa quam deſcribitur, tangit.



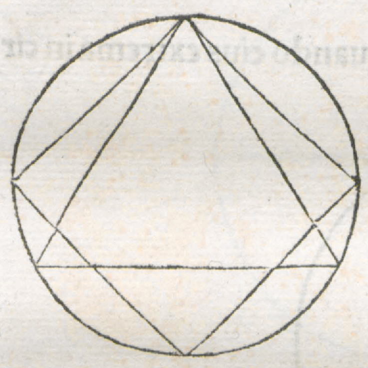
Ex his duabus definitionibus colligitur, Inter illas tantum figuras, poſſe unam alteri inſcribi uel circumſcribi, quæ lineas numero ęquales habent. Nunquã enim triangulum quadrato, pentagono uel hexagono, inſcribitur aut circũſcribitur, cum illius pauciores ſint anguli, quàm horum latera. Et econtrario. Sed triangulum triangulo, quadratum quadrato, & quælibet ſuę ſpeciei figuræ, & inſcribi & circumſcribi poteſt.

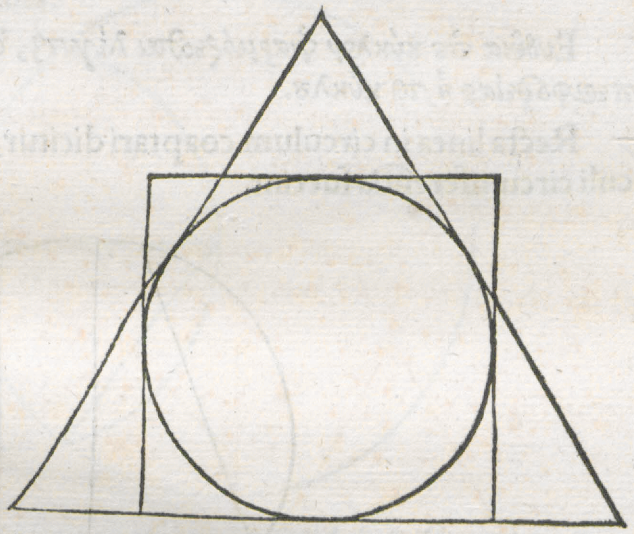
Σχῆμα εὐθύγραμμον εἰς κύκλον ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη γωνία τοῦ ἐγγραφομένου ἅπτηται τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.

Σχῆμα δὲ εὐθύγραμμον περὶ κύκλον περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας τοῦ περιγραφομένου ἐφάπτηται.

3 Figura rectilinea in circulo deſcribi dicitur, quando unuſquiſq; angulus inſcriptæ circuli circumferentiam tangit.

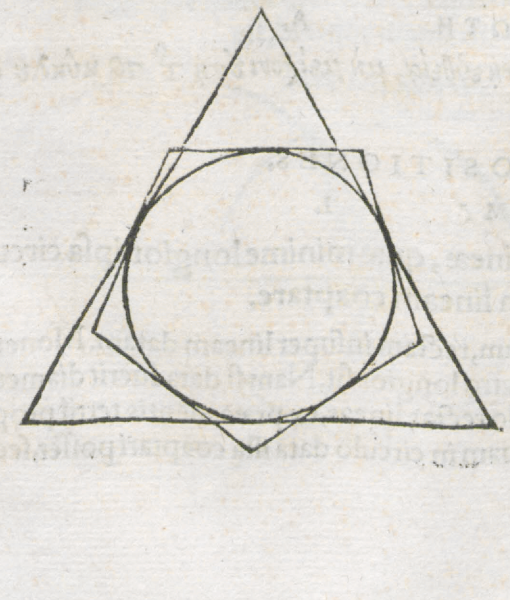
4 Figura uerò rectilinea circa circulum deſcribi dicitur, quando unumquodq; latus circumſcriptæ, circuli circumferentiam tangit.





Requirit utraq; definitio circulum, cui deinde figura rectilinea per priorẽ quidem inſcribitur, per poſteriorem uerò ei circumſcribitur.

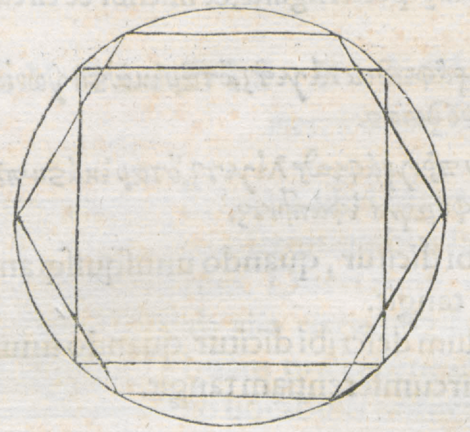
Κύκλος ὁμοίως εἰς σχῆμα ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια, ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ εἰς ὃ ἐγγράφεται ἅπτηται.



5 Circulus ſimiliter in figura deſcribi dicitur, quando circuli circumferentia, unumquodque latus eius in qua deſcribitur, tangit.

Κύκλος.

Κύκλος δὲ περὶ σχῆμα περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια ἑκάστης γωνίας τοῦ περὶ ὃ περιγράφεται ἅπτηται.

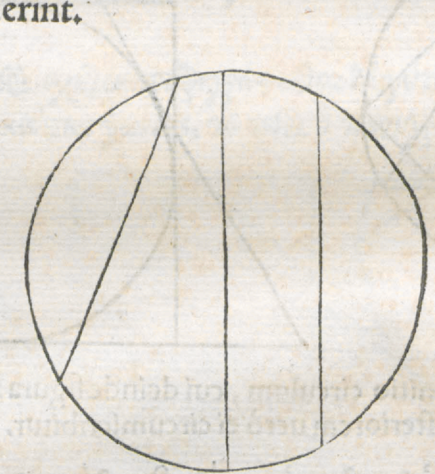


6 Circulus uerò circa figuram deſcribi dicitur, quãdo circuli circumferentia unumquemq; eius circa quam deſcribitur, angulum tangit.

Requirunt hæ duæ definitiones figuram rectilineam, cui deinde circulus per quintam inſcribitur, per ſextam uerò circulus circumſcribitur.

Εὐθεῖα εἰς κύκλον ἐναρμόζεσθαι λέγεται, ὅταν τὰ πέρατα αὐτῆς ἐπὶ τῆς περιφερείας ᾖ τοῦ κύκλου.

7 Recta linea in circulum coaptari dicitur, quando eius extrema in circuli circumferentia fuerint.



ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.

ΠΡΩΤΗ. Α.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, μὴ μείζονι οὔσῃ τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου, ἴσην εὐθεῖαν ἐναρμόσαι.

PROPOSITIONES.

PRIMA I.

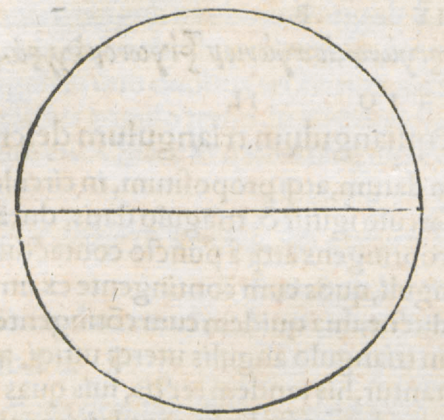
In dato circulo datæ rectæ lineæ, quæ minime longior ipſa circuli diametro exiſtat, æqualem rectam lineam coaptare.

Requirit hæc propoſitio circulum, rectam inſuper lineam datam. Monet autem expreſſe, ne hæc recta circuli diametro longior ſit. Nam ſi data fuerit diametro longior, cum hęc inter ductas in circulo rectas lineas, ex præcedentis tertij propoſitione 15, ſit omniũ longiſsima: nunquam in circulo data illa coaptari poſſet, ſed ipſum

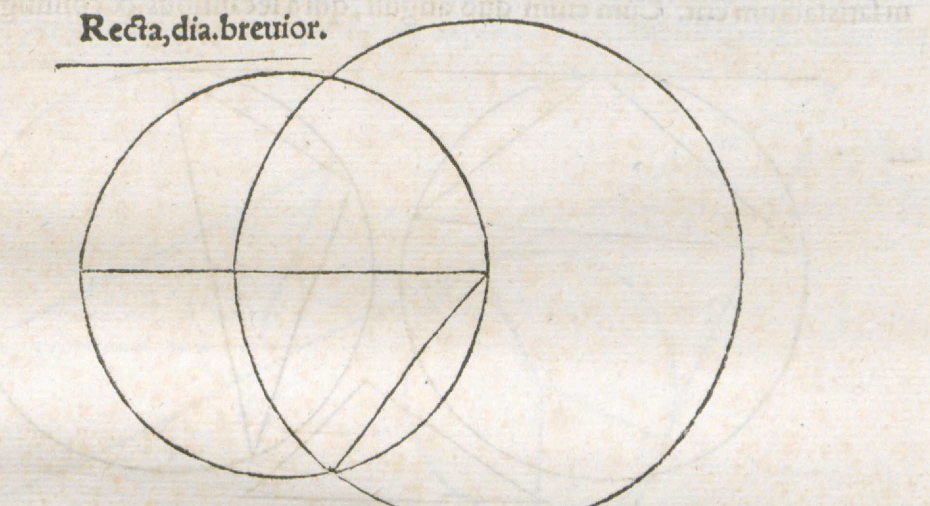
potius

potius ſuis extremitatibus excederet & ſecaret. Quare neceſſe eſt, ut ſit diametro breuior, aut ei ęqualis. Sit ergo primò ei æqualis: erit diameter ipſa linea, id quod ex ſua ipſius definitione ſatis manifeſtum eſt. Quòd ſi uerò recta data fuerit diametro breuior, cũ iam duæ inæquales ſint rectæ lineę, à longiore, per 3 primi, portio breuiori æqualis abſcindatur, ſecundum quam deinde ex altera ſua, quam habet in circumferentia, extremitate circulo deſcripto, centroq; huius cum communi circulorum interſectione recta linea iuncto: per hanc eandem rectam tandem propoſitioni ſatisfactum erit, quod & ipſum ex definitione circuli, communi deinde illa noticia, Quæ eidem ſunt æqualia &c. facile demonſtrari poterit. In dato igitur circulo, datæ rectę lineę, quæ minime longior ipſa circuli diametro exiſtat, ęqualis recta linea coaptata eſt. quod feciſſe oportuit.

Recta, diametro æqualis.

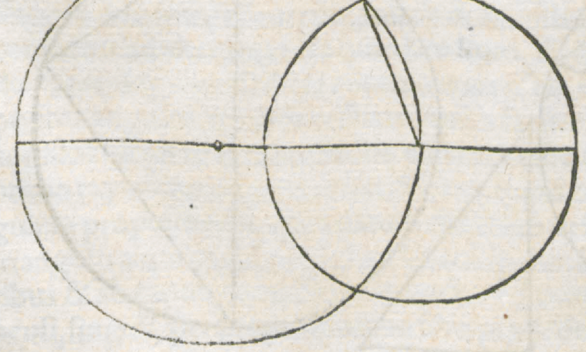


Recta, dia.breuior.



ALIA ALTERIVS HVIVS PARTIS DEMONSTRAtio, in qua ſcilicet, recta, cui æqualis in circulo coaptanda eſt, breuior diametro eſſe debet.

Recta dia.breu.



Huic rectæ datæ ad alterutram ipſius diametri extremitatem, per propoſitionem 12 primi, æqualis ponatur: ſecũdum quam poſitam, ex ſumpta diametri extremitate, circulo deſcripto, recta deinde alia ex hoc centro ad punctum interſectionis huius & primò deſcripti circuli ducta, cum hæc tandem illa ſit quæ petebatur

recta

recta linea, res confecta erit, id quod ex ſtructura & definitione, ut modò factum eſt, demonſtrari poteſt.

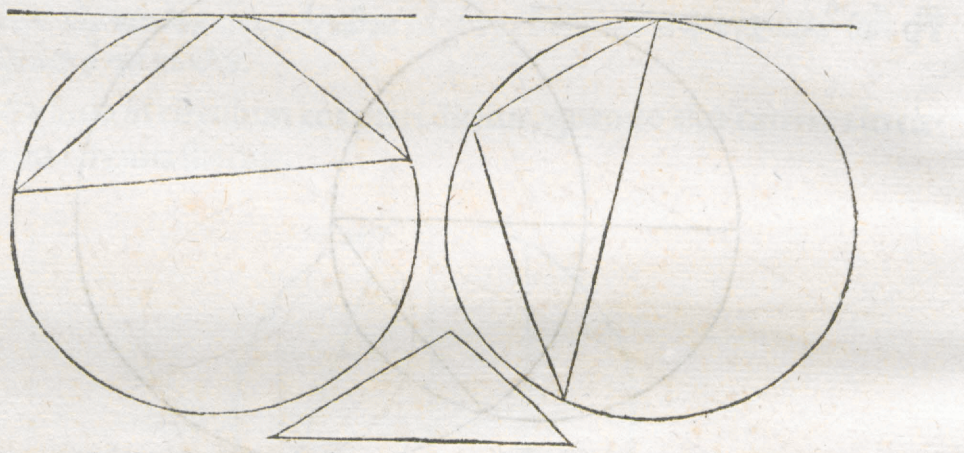
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον, τῷ δοθέντι τριγώνῳ, ἰσογώνιον τρίγωνον ἐγγράψαι.

PROPOSITIO II.

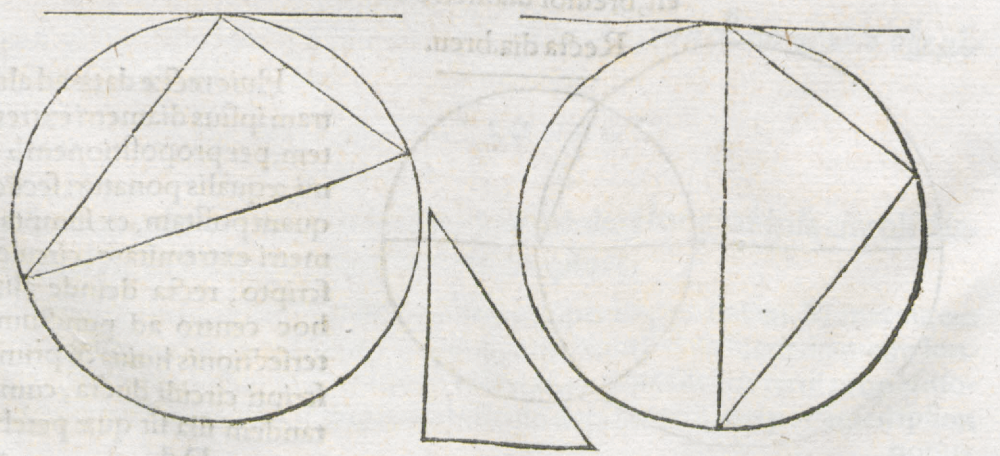
In dato circulo, dato triangulo, æquiangulum triangulum deſcribere.

Eſto circulus datus, triangulum etiam datum, atq; propoſitum, in circulo triangulum dato æquiangulum deſcribere. Circulo igitur & triãgulo datis, ducatur per propoſitionem 17 tertij, linea circulum contingens atq; à puncto contactus duę rectę, per circulum tranſeuntes, quarum anguli, quos cum contingente ex utraq; parte faciunt (uel quarum anguli, quos hæ ductæ, una quidem cum cõtingente, altera uerò cum priore ducta faciunt) duobus in triangulo angulis uterq; utriq;, æquales ſint, per propoſitionem 23 primi demittantur, his tandem rectis, ſuis quas habent in circumferentia, extremitatibus, tertia quadam recta linea copulatis: propoſitioni ſatisfactum erit. Cum enim duo anguli, qui à ſecantibus & contingente linea continentur, duobus quidem in triangulo angulis, ex ſtructura, duobus uerò in alternis ſectionibus, ex propoſitione 32 tertij, ſint æquales: duo in triangulo, duobus in ſectionibus circuli angulis, ex communi quadam noticia, æquales erunt: quare & tertius angulo tertio æqualis.



VEL QVANTVM AD ALTERAM CONSTRVCTIONEM

Cum duo anguli, quorum unus quidẽ à contingente & una ductarũ, alter uerò ab ipſis ductis continetur, duobus in triangulo dato angulis, ex ſtructura, duobus item in triangulo, circulo nunc inſcripto, unus quidẽ, ut apparet, alter uerò, ex propoſitione 32 tertij, æquales ſunt. Cumq; etiam ex corollario propoſitionis 32 primi, omnis trianguli tres interni anguli duobus ſint rectis æquales: & tertius ſic angulo tertio, in his duobus triangulis, æqualis erit. Aliàs enim, ubi inæquales eſſent, tres anguli in uno duobus rectis non æquiualerent, quod non conceditur: æqualis igitur tertius angulo tertio. In circulo igitur deſcriptum triangulũ, cum dato æquiangulum erit. Quare in dato triangulo, & reli. quod fieri oportuit.



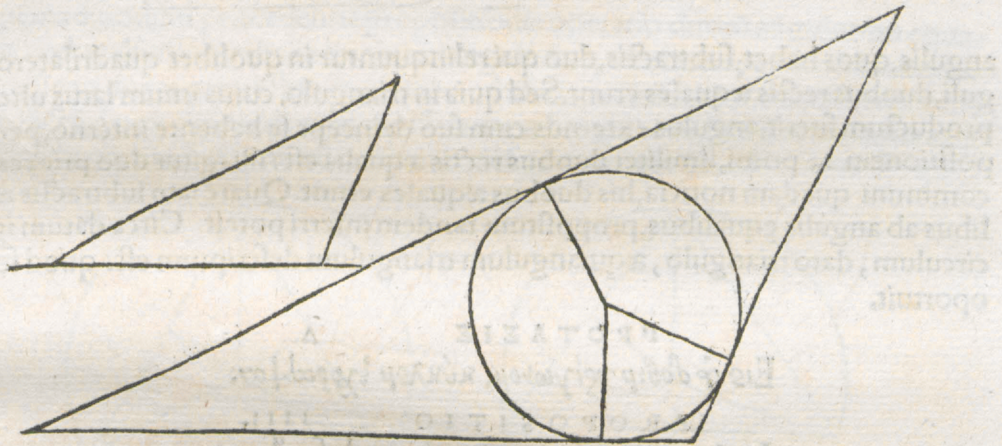
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον, τῷ δοθέντι τριγώνῳ, ἰσογώνιον τρίγωνον περιγράψαι.

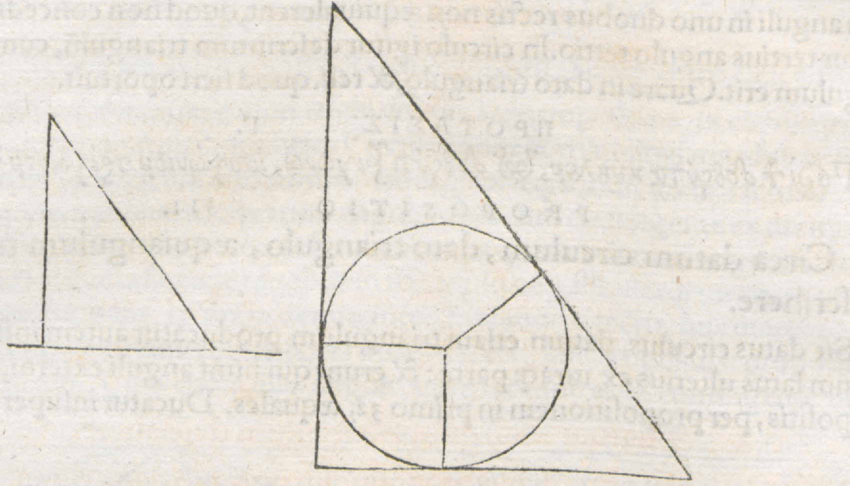
PROPOSITIO III.

Circa datum circulum, dato triangulo, æquiangulum triangulum deſcribere.

Sit datus circulus, datum etiam triangulum, producatur autem ipſius trianguli unum latus ulterius ex utraq; parte: & erunt qui fiunt anguli externi, ſuis internis oppoſitis, per propoſitionem in primo 32, æquales. Ducatur inſuper à centro circuli, quod quidem per primam tertij, ſi ignotum id fuerit, acquiritur, recta linea uſq; ad circumferentiam utcunq;, atq; ad huius alteram extremitatem, quod centrum circuli eſt, tanquam ad punctum datum, per 23 primi bis uſurpatam, duo anguli, ex utraq; parte unus, duobus externis trianguli angulis ęquales, uterq; utriq;, conſtituantur. Vltimò, per puncta contactus, trium à centro exeuntium linearum cum circulo, tres rectæ circulum contingentes, ex utraq; parte eouſq; prolongatæ, donec una cum altera concurrat, ducãtur: & propoſitioni ſatisfactum erit, cum hæ tandem rectæ triangulum, quale petebat propoſitio, conſtituant. Sed ne quis fortè dubitare poſſet, de contingentium continuatarum inter ſe concurſu: igitur priuſquam propoſitionis demonſtrationem aggrediamur, quòd harum cõtingentium ſingulæ duæ lineę cõcurrant, paucis demonſtrabimus. Imaginetur ab uno puncto contactus ad alterum recta quædam linea. Et quoniã hæc imaginaria recta in alias duas, contingentes ſcilicet continuatas rectas, incidens, internos & in eadem parte poſitos angulos, duobus rectis minores facit: has cõtingẽtes ea in parte, qua duos angulos incidens duobus rectis minores efficit, ex communi quadam noticia, in primo expoſita, concurrere neceſſe erit, quod erat demonſtrandum. Nunc ad triangulum propoſitionis, circa datum circulum deſcriptum, quòd nimirum illud dato triangulo æquiangulum ſit, hoc ſic colligetur. Quoniam enim anguli, à contingentibus & ab earum contactuum punctis ad centrum deductis rectis lineis comprehenſi, ſinguli, per propoſitionem libri præcedentis decimam octauam, recti ſunt.



Et rurſus, quoniam omnis quadrilateri quatuor anguli, quatuor rectis angulis ſunt æquales, propterea quòd per ductam ab uno ipſius angulo in oppoſitum, rectam lineam, in duo triangula diuidatur: duobus in quolibet quadrilatero rectis angulis, quos habet, ſubtractis, duo qui relinquuntur in quolibet quadrilatero anguli, duobus rectis æquales erunt. Sed quia in triangulo, cuius unum latus ulterius productum fuerit, angulus externus cum ſuo deinceps ſe habente interno, per propoſitionem 13 primi, ſimiliter duobus rectis æqualis eſt: illi igitur duo priores, ex communi quadam noticia, his duobus æquales erunt. Quare iam ſubtractis æqualibus ab angulis ęqualibus, propoſitum tandem inferri poteſt. Circa datum igitur circulum, dato triangulo, æquiangulum triangulum deſcriptum eſt. quod feciſſe oportuit.



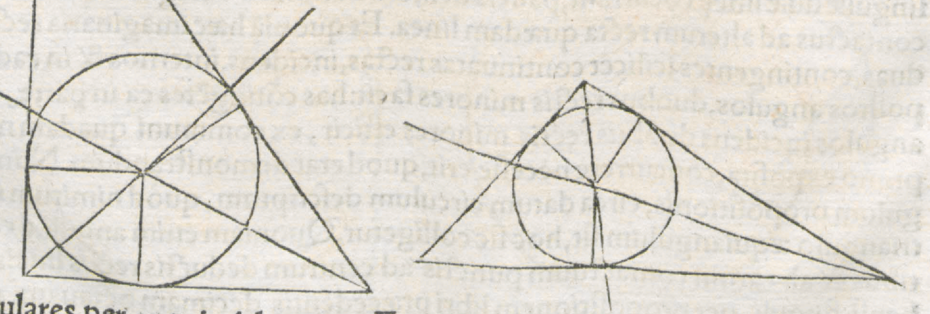
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ.

Εἰς τὸ δοθὲν τρίγωνον, κύκλον ἐγγράψαι.

PROPOSITIO IIII.

In dato triangulo, circulum deſcribere.

Sit datum triangulum, atq; propoſitum, circulũ in eo deſcribere. Duo igitur in triangulo anguli, quomodocunq; ſumpti, ex prop. 9 primi, per duas rectas lineas bifariã ſecentur. Et quoniam hæ duæ rectæ, ex propoſitione 17 primi, & cõmuni illa noticia, Si in duas rectas recta linea incidens, internos, & in eadem, &c. in triangulo concurrunt: à puncto igitur illo concurſus ad ſingula trianguli latera lineæ perpẽdiculares, per 12 primi ducantur. Et quoniam hæ, ex propoſitione 26 primi,



bis uſurpata, & illa cõmuni noticia, Quæ eidem æqualia, &c. inter ſe æquales ſunt, ubi ex hoc puncto concurſus, tanquam ex centro poſito, ſecundum unius harum æqualium linearum interuallum, circulus deſcribatur, propoſitioni tandem ſatisfactum erit: id quod prior pars corollarij propoſitionis decimę ſextæ tertij, & definitio huius libri quinta ſic demonſtrant. Quoniam enim, ut quidem demonſtratum eſt, ductæ ad latera perpendiculares inter ſe ęquales ſunt, ex uno inſuper puncto eductę: ex eodem igitur puncto circulus, ſecundum unius ęqualium interuallum deſcriptus, per omnium aliarum extremitates tranſire neceſſe erit: unde ſic etiam ſingulæ deſcripti circuli ſemidiametri exiſtent, & tanget ſingula trianguli latera circulus deſcriptus ex priore parte corollarij propoſitionis 16 tertij: quare eidem etiam triangulo, ex definitione, circulus inſcriptus eſt. In dato igitur triangulo, circulus deſcriptus eſt. quod feciſſe oportuit.

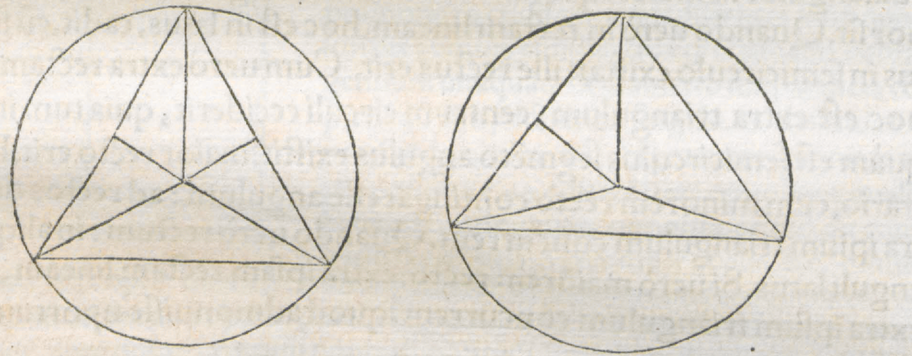
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε.

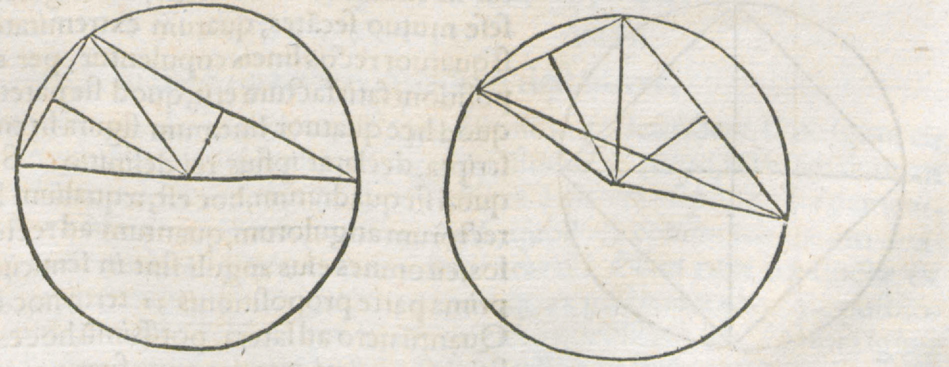
Περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον, κύκλον περιγράψαι.

PROPOSITIO V.

Circa datum triangulum, circulum deſcribere.

Quemadmodum præcedentis propoſitionis operatio duorũ angulorum ęquales requirebat diuiſiones, ita in hac, ut trianguli dati, duo latera, quomodocunque ſumpta, ſicuti docet propoſitio in primo 10 bifariam diuidantur, neceſſe erit. Hoc autem facto, à punctis mediarum diuiſionum ad angulos rectos lineæ, uerſus eam partem, ubi maximè uidetur eſſe centrum deſcribendi circuli, educantur. Et quoniam hæ continuatæ, ex propoſitione 17 primi, & communi illa noticia, Si in duas rectas recta linea incidens, internos, & in eadem parte angulos, &cę. concurrunt, ubi ex hoc puncto, tanquam ex centro poſito, ſecundum interuallum ſpacij, inter hoc punctum & angulorum quemuis intercepti, circulus deſcribatur, res confecta erit. Nam is erit circulus, propoſiti trianguli circumſcriptioni cõueniens, quod certè tribus rectis lineis ex hoc puncto, quod centrum eſſe ponitur, ad tres an-





gulos ductis, cũm hæ ex propoſitione 4 primi, bis uſurpata, & communi illa noticia, Eidem æqualia, &c. æquales inter ſe eſſe demonſtrentur, per 9. propoſitionem tertij facile conceditur. Circa datum igitur triangulũ circulus deſcriptus eſt, quod fieri oportuit.

APPENDIX.

Eſt autem hic modus generalis, ad omnia triangula, quomodocunq; ſanè illa, ſecundum latera uel angulos conſiderata, nominabuntur. Quare quòd nõnulli ad pleniorem huius propoſitionis declarationem, pro triangulorum, quantum ad angulos, uaria diſtinctione, uarios canones tradiderunt, cum is unus omnis generis triangulis ſatisfaciat, illorum traditiones hoc loco conſulto prætermiſimus.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Καὶ φανερὸν, Οτι ὅτε μὲν ἐντὸς τοῦ τριγώνου πίπτει τὸ κέντρον τοῦ κύκλου· ἡ ὑπὸ βαγ γωνία, ἐν μείζονι τμήματι τοῦ ἡμικυκλίου τυγχάνουσα, ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς. Οτε δὲ ἐπὶ τῆς βγ· ἐν ἡμικυκλίῳ τυγχάνουσα, ὀρθὴ ἔσται. Οταν δὲ ἐκτὸς τῆς βγ εὐθείας τὸ κέντρον πίπτῃ· ἡ ὑπὸ βαγ ἐν ἐλάττονι τμήματι ἡμικυκλίῳ τυγχάνουσα, μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. Ωστε καὶ, ὅταν ἐλάττων ὀρθῆς τυγχάνῃ ἡ διδομένη γωνία· ἐντὸς τοῦ τριγώνου συμπεσοῦνται αἱ δζ, εζ. Οταν δὲ ὀρθὴ· ἐπὶ τῆς βγ. Οταν δὲ μείζων ὀρθῆς· ἐκτὸς τῆς βγ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

COROLLARIVM.

Et manifeſtum eſt, quòd quando intra triangulum cadit centrum circuli: angulus in maiori quàm eſt ſemicirculus ſegmẽto exiſtens, recto minor ſit. Quando uerò in rectam lineam, hoc eſt in latus, cadit, cũ ſic angulus in ſemicirculo exiſtat: ille rectus erit. Cum uerò extra rectam lineam, hoc eſt extra triangulum, centrum circuli ceciderit, quia tum in maiori quàm eſt ſemicirculus ſegmẽto angulus exiſtit: maior recto erit. Et econtrario, cum minorem recto contingat eſſe angulum: ad rectos ductæ intra ipſum triangulum concurrent. Quando uerò rectum: in aliquod trianguli latus. Si uerò maiorem recto: extra ipſam rectam lineam, hoc eſt, extra ipſum triangulum concurrent. quod admonuiſſe oportuit.

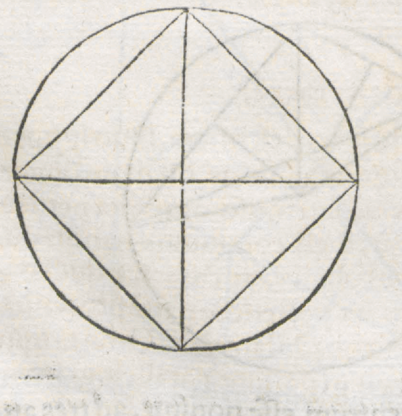
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ς.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον, τετράγωνον ἐγγράψαι.

PROPOSITIO VI.

In circulo dato, quadratum deſcribere.

Sit circulus datus, atque propoſitum, quadratum in eo deſcribere. Ducantur igitur in circulo duæ diametri, ad angulos rectos ſeſe mutuo ſecãtes, quarum extremitates tandẽ ſi quatuor rectis lineis copulentur, per eas propoſitioni ſatisfactum erit, quod ſic patet. Primò, quòd hęc quatuor linearum figura ſit circulo inſcripta, declarat ipſius rei definitio. Secundo, quòd ſit quadratum, hoc eſt, æqualium laterũ & rectorum angulorum, quantum ad rectos angulos, cũ omnes eius anguli ſint in ſemicirculo: ex prima parte propoſitionis 31 tertij hoc cõſtabit. Quantũ uero ad latera, potiſſimũ hoc ex propoſitione 4 primi, quoties opus fuerit ea uſurpata, & communi illa notitia, Quæ uni ſunt æqualia, &c. colligetur. Rectangulũ igitur & æquilaterum: quare & quadratũ ex definitione, & deſcribitur in circulo. In circulo igitur dato quadratum deſcriptum eſt, quod feciſſe oportuit.



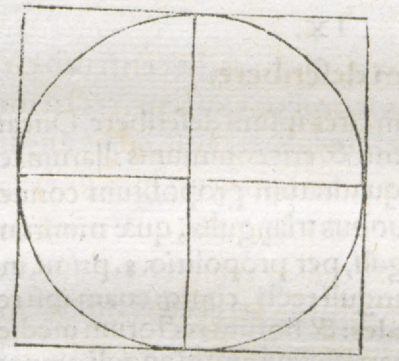
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον, τετράγωνον περιγράψαι.

PROPOSITIO VII.

Circa datum circulum, quadratum deſcribere.

Sit circulus datus, atque propoſitum, quadratum circa ipſum deſcribere. Quemadmodum præcedens, ductis in circulo duabus diametris, harum extremitates ut quatuor rectis coniungerentur lineis requiſiuit, ita hæc, poſtquã circulus datus, in eo etiam duę ad rectos angulos diametri ductæ fuerint, ut per harum extremitates ſingulas, ex 17 propoſitione libri præcedentis, quatuor lineæ circulũ contingentes ducãtur, neceſſe erit. Et quoniam hæ ſi in utramq; partẽ continuatæ fuerint, ſemper duæ & duę, ex propoſitione 18 tertij, & cõmuni quadam notitia, concurrunt, continuentur itaq; omnes, in utramq; etiã partem, donec una cũ altera concurrat, & propoſitioni ſatisfactum erit, cũ uidelicet ſub illis ipſis lineis huiuſmodi quadratum cõtineatur, quod ſic patet. Primò quòd circũſcriptio debita facta ſit, ex definitione habetur. Quòd inſuper ſit quadratũ, id ſic colligetur. Quoniam enim contingentiũ quęlibet duæ oppoſitæ, ſuæ diametro, ex ſecunda parte propoſitionis 28 primi, ipſæ deinde inter ſe ex propoſitione 30 eiuſdem, æquediſtantes ſunt: quod ſub his contingentibus, quæq; etiam ſub contingentium unaquaq; & diametro ſua parallela cõprehẽduntur, rectilinea, ſingula, ex definitione, parallelogramma erũt. Hęc autem quoniam ex propoſitione 34 primi, latera oppoſita æqualia habent: contingentes oppoſitæ primò, ex communi illa notitia, Quæ uni æqualia &c. omnes deinde inter ſe, propter diametrorum æqualitatẽ, æquales erunt. Aequilaterum igitur eſt circa circulum deſcriptum parallelogramum. Quòd uerò ſit etiam rectorum angulorum, cum qui ad centrum ponuntur anguli, ſinguli, ex ſtructura, recti ſint, cumq; etiam, Omnis parallelogrammi latera & anguli oppoſiti, ut ſæpe dictum, æquales ſint, patet etiam illud. Factũ eſt ergo quod fieri oportuit, deſcriptum nimirum circa datum circulum quadratum, quod erat propoſitum.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η.

Εἰς τὸ δοθὲν τετράγωνον, κύκλον ἐγγράψαι.

PROPOSITIO VIII.

In dato quadrato, circulum deſcribere.

Sit datum quadratum, atq; propoſitum, circulũ in eo deſcribere. Duo igitur circa unum in quadrato angulum latera, per propoſitionẽ 10 primi, bifariam diuidantur, à punctis deinde illis medijs, perpendiculares, ad latera uſq; oppoſita peruenientes, lineæ educantur: & erit punctum illud, quod eſt communis harum duarum perpendicularium ſectio, centrum futuri circuli. Nam cum hæ ductæ ex ſuis punctis perpendiculariter egrediantur: utraq;, ex poſteriore parte propoſitionis 28 primi, ſuis collateralibus quadrati lateribus æquediſtans erit. Omnes igitur figuræ rectilineę, quotcunq; in hac diſpoſitione colligi poſſunt, parallelogramma, horum

horum deinde latera oppoſita, ex propoſitione 34 primi, æqualia inter ſe erũt. Sed cum linearum æqualium, æquales ſint etiam medietates, ut ratione colligitur: infertur tandem ex hac communi noticia, Eidem æqualia, &c. & illas quatuor in medio lineas inter ſe æquales eſſe. Punctum igitur, communis nimirum perpendicularium ſectio, ut dictum eſt, ex propoſitione 9 tertij: centrum eſt circuli. Quare eo ſecundum unius harum æqualium quantitatem deſcripto, cum is propter linearum æqualitatem, per aliarum etiam extremitates tranſeat, hæ uerò extremitates ſingulæ in lateribus quadrati exiſtãt, cum per propoſitionem 16 tertij intra circulum non cadant, per corollariũ deinde eiuſdem ipſum circulum tangant: ex definitione tandem, qua dicitur, Circulus ſimiliter in figura deſcribi, &c. circulum in dato quadrato deſcriptum eſſe concluditur. quod fieri oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ. Θ.

Περὶ τὸ δοθὲν τετράγωνον, κύκλον περιγράψαι.

PROPOSITIO IX.

Circa datum quadratum, circulum deſcribere.

Sit datum quadratum, atqꝫ propoſitum, circulum circa ipſum deſcribere. Ducantur in quadrato duæ diametri, quæ ſeſe mutuò ſecent: & erit communis illarum ſectio, locus, unde circulus, ad circumſcribendum quadratum propoſitum conueniens, deſcribi debet. Quoniam enim ſumptis duobus triangulis, quæ nimirum ſunt quadrati medietates, cum anguli partiales ſinguli, per propoſitio. 8. primi, inter ſe æquales ſint, atqꝫ ſic uterqꝫ ſemper medietas anguli recti, cumqꝫ etiam ipſi recti inter ſe æquales: & horum rectorum medietates ſingulæ, partiales nimirum anguli omnes, inter ſe æquales erũt. Quare per propoſitionem 6 primi quater ſumptam, & horum partialium angulorum latera, quatuor nimirum partiales diametrorum lineę, inter ſe ęqualia erunt. Punctum igitur illud, centrũ eſt circuli. Poteſt etiã loco octauę, propoſitio quinta uſurpari, hoc modo. Cũ quadratũ per diametros in triangula quatuor reſolutũ ſit, hæc uerò triangula omnia, æqualia crura habeant, latera nimirum quadrati propoſiti: infertur per propoſit. 5 primi, & ipſos ad baſim angulos inter ſe æquales eſſe. quilibet igitur illorum, per propoſitionem 32 eiuſdem primi, medietas eſt recti. Tertius enim angulus, ratione quadrati, per ſe unus rectus eſt. Quia autem omnes recti anguli, ex communi quadam noticia, inter ſe ęquales ſunt: ſequitur, quòd etiam inter ſe æquales ſint omnes partiales (de quibus facta eſt mentio) anguli. Igitur & diametrorum partes, per propoſitionem 6 primi, inter ſe æquales. unde tandem, id commune punctum, per 9 tertij, centrum circuli erit: quo nunc ſecundum quantitatem unius æqualium linearum deſcripto, cum is per reliquarum etiam æqualium extremitates tranſeat, propoſitioni tandem ſatisfactum erit, circa datum nimirum quadratum circulus deſcriptus. quod feciſſe oportuit.

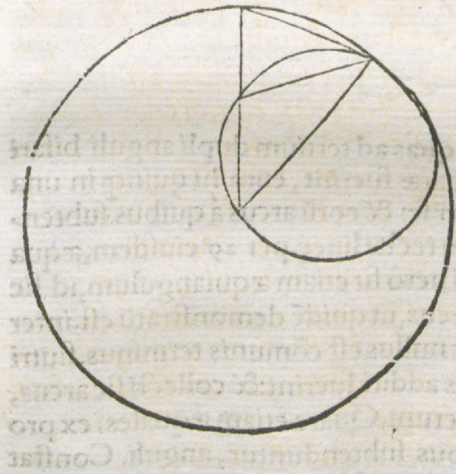
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι.

Ἰσοσκελὲς τρίγωνον συστήσασθαι, ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν διπλασίονα τῆς λοιπῆς.

PROPOSITIO X.

Duum ęqualium laterum triangulum conſtituere, habens utrunqꝫ eorum, qui ad baſim ſunt, angulorum, duplum reliqui.

Sententia eſt propoſitionis, triangulũ iſoſceles, cuius uterqꝫ angulorũ qui ab æqualibus lateribus ſubtenduntur, ad tertium reliquum duplus ſit, deſcribere. Ducatur igitur linea recta, longa uel breuis, ad placitum. hac recta deinde, ut quidem habet propoſitio ſecundi undecima, in duas portiones diuiſa, ex pũcto hoc, quod eſt communis terminus diuiſæ & portionis longioris, ſecundum interuallum rectæ datæ circulus deſcribatur. Hoc facto, longiori portioni, quæ nimirum eſt diametro circuli breuior, æqualis recta in circulo, per propoſitionem primam huius, coaptetur. Quòd ſi tandem extremitas huius, longiori portioni æqualis, altera cum centro & diuiſionis puncto duabus rectis lineis copuletur: propoſitioni ſatisfactum erit. Nam id demũ triangulum, cuius duo latera à centro uſqꝫ ad circumferentiam continuata ſunt, erit quod quærebatur, cuius quidem demonſtratio ut ſequitur. Circa triangulũ partiale, cuius unus angulus ad cẽtrum ponitur, per propoſitionẽ 5 huius, circulus deſcribatur. Et quoniã tam quadrato longioris portionis ex ſtructura, uel propoſitione 11 ſecundi, quàm etiam quadrato rectę in circulo coaptatę, huic longiori portioni ęquali, rectangulum ſub prioris circuli ſemidiametro & breuiori eius portione compræhẽſum, ęquale eſt: longiori æqualis poſita recta linea, per propoſitionem 37 tertij, minorem circulum contingens erit. Et rurſus quoniã hæc recta circulum minorem contingit, à puncto item contactus alia quædã, eundem circulum ſecãs, ducta eſt, illa nimirum quæ in diametro ad punctũ diuiſionis terminatur: angulus igitur, quẽ hæ duæ rectæ cõtinent, partialis, angulo alterni ſegmẽti, qui ad centrum ponitur, ex propoſitione 32 tertij ęqualis erit. unde totalis poſtea, ſi partialis alter ex æquo his æqualibus adijciatur, duobus æqualis. Sed quia duobus his, ut trianguli huius partialis internis, angulus ille, qui in alio partiali ad diuiſionis punctum ponitur, externus, ex propoſitione 32 primi, eſt æqualis: & eidẽ externo ille totalis, ex communi quadam notitia, æqualis erit. Et quia etiam totalis, illi qui ſub diametro atqꝫ circulum minorem tangente recta linea continetur, ex definitione circuli & priori parte propoſitionis quintæ primi, æqualis eſt: & qui ſub iſtis lineis continetur angulus, dicto externo æqualis erit. Tres igitur anguli inter ſe æquales, unum etiam triangulum partiale, cum duo ex æqualibus angulis in eo ſint poſiti, ex propoſitione 6 primi, Iſoſceles, hoc eſt duûm æqualium laterum erit. Sed quia uni eorum, coaptatæ ſcilicet in circulo lineæ, æqualis eſt, ex ſtructura, longior diuiſæ ſemidiametri portio, & alteri lateri hæc eadem longior portio æqualis erit: quare Iſoſceles, triangulum etiam partiale alterum. Hoc autem quia, ex propoſitione 5 primi, duos ad baſim angulos inter ſe æquales habet, & quia etiam illis æqualibus, angulus huius Iſoſcelis externus æqualis eſt, unde ſic ad utrunqꝫ, ac per conſequens, ad eum qui ad centrum ponitur duplus: & illorum qui huic externo æquales ſunt, uterqꝫ



ad eundem ad centrum poſitum angulum, duplus erit, et ſunt etiam in hoc ipſo, in quo ille ſcilicet, totali triangulo. Triangulum igitur Iſoſceles, cuius uterq;, eorum qui baſim ſunt angulorum, ad reliquum tertium duplus ſit, conſtitutum eſt, quod quidem feciſſe oportuit.

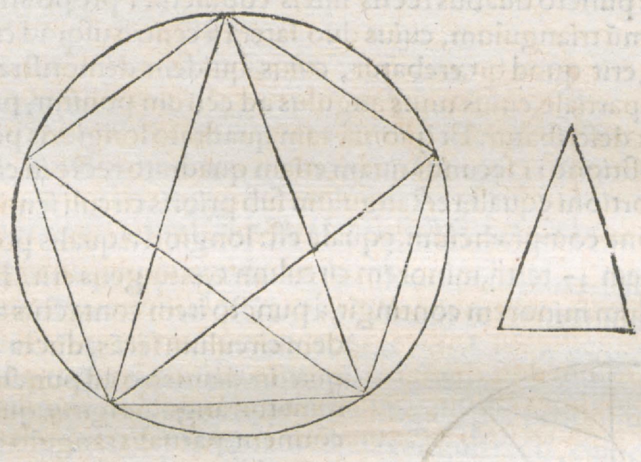
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον, πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

PROPOSITIO XI.

In dato circulo, pentagonū & æquilaterū & æquiangulū deſcribere.

Sit datus circulus, atque propoſitum, pentagonum in eo æquilaterum & ęquiangulum deſcribere. Circulo igitur dato, primò Iſoſceles triangulum, cuius uterq; æqualium angulorum ad tertium duplus ſit, per propoſitionem præcedentem 10 formari, huic deinde æquiangulum triãgulum in dato circulo, per propoſitionem 2 huius deſcribi, debet. Poſtea utroq; eorum, qui ad tertiū dupli ſunt, angulorum, recta quadam linea, per prop. 9 primi, biſariam diuiſo, quinq; iam anguli inter ſe



æquales erunt. Quòd ſi tandem rectæ hæ, per quas ad tertium dupli anguli biſariam diuiſi ſunt, ad circunferentiam uſq; continuatæ fuerint, cum hi quinq; in una ſint circũferentia anguli, atq; ęquales etiam inter ſe: & eorũ arcus à quibus ſubtenduntur, per prop. 26 tertij: horũ deinde arcuum rectæ lineę, per 29 eiuſdem, æquales erunt, quare pentagonũ æquilaterũ. Quod uerò ſit etiam æquiangulum, id ſic patet. Quoniã enim ſinguli huius pentagoni arcus, ut quidẽ demonſtratũ eſt, inter ſe ſunt ęquales, ſumptis duob. quibus uidelicet nullus eſt cõmunis terminus, ſi utrique eorũ duo hi, quos interceptos habent, arcus additi fuerint: & collecti ſic arcus, ex communi quadam notitia, inter ſe æquales erunt, Quare etiam æquales, ex propoſitione 27 tertij, qui ab his æqualibus arcubus ſubtenduntur, anguli. Conſtat igitur ſic æqualitas de angulis duobus. Quia autem ſicut de duobus, ita etiam de omnibus, hoc nimirum proceſſu toties, quot fuerint anguli, minus uno, uſurpato, conſtare manifeſtum eſt: pentagonum igitur hoc æquiangulum eſſe concluditur, & quia etiam æquilaterum. In dato igitur circulo æquilaterum & æquiangulum pentagonum deſcriptum eſt. quod feciſſe oportuit.

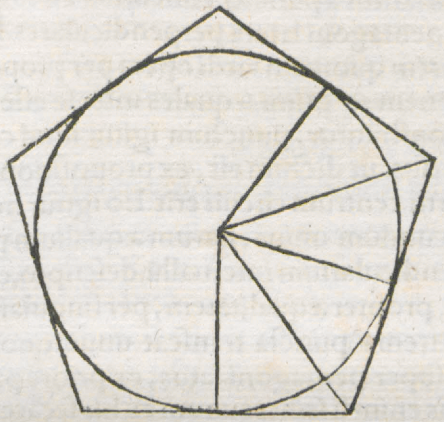
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον, πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιγράψαι.

PROPOSITIO XII.

Circa datum circulum, pentagonum æquilaterum & æquiangulum deſcribere.

Sit datus circulus, atq; propoſitum, pentagonum circa eum æquilaterum & æquiangulum deſcribere. Diuidatur igitur circuli dati circunferentia, per præcedentem, in quinque partes æquales, à punctis deinde diuiſionum ſigulis per propoſitionem 17 tertij lineæ, ipſum circulum contingentes ducantur, hæ tandem, ſi in utranq; partem, donec altera alteri occurrat, continuatæ fuerint: propoſitioni ſatiſfactum erit. Nam illæ ipſæ circulum contingentes rectæ lineæ pentagonum, quale propoſitio hæc requirit, compræhendunt, quod ſic demonſtrari poteſt. Primò à tribus quibuslibet, proximis tamen inter ſe, contactuum punctis demittantur ad circuli centrum tres rectæ lineæ. Et quoniam hæ ſingulæ ex propoſitione 18 tertij, ad ſuas contingentes perpendiculares ſunt: omnes igitur illi qui ſic fiunt anguli, recti erunt: quod eſt oſeruandū. Ducantur porrò à duobus pentagoni angulis ijs, qui ab his tribus lineis continentur, aliæ duæ ad centrum rectæ lineæ. Deſcribuntur autem ſic quatuor triangula, quorum quæq; duo extrema, per penultimam primi, laterum æqualium: per propoſitionẽ deinde 8 & 4 eiuſdem, æqualium angulorum eſſe demõſtrantur. Et quia ſic eſt: tam illi igitur, qui ad cẽtrum ſub perpendicularib. cõtinentur anguli, ad ſuos partiales, quàm etiã ipſius pentagoni anguli ad ſuos, dupli erunt. Et rurſus quoniam ad cẽtrum anguli ſuper æquales, circunferentias deducuntur, cum ijdem anguli, ex propoſitione 27 tertij, inter ſe æquales ſint: & illorum dimidij omnes, quemadmodum & ipſi toti inter ſe æquales erunt. Et quia iam ſunt duo triangula, quorũ nimirum latus quod habent commune, perpendicularis linea eſt, quę cũ duos angulos duobus angulis æquales habeant, utrunq; utriq;, unum item latus uni lateri æquale: & reliqua latera reliquis lateribus, atque etiam reliquum angulũ reliquo angulo, per propoſitionem 26 primi æqualia habebunt. Circulum igitur contingentium linearum unaquæq; per ſuam perpendicularem biſariam diuiſa eſt, quare & ipſæ ad utranq; partem, tanquam ad ſuas medietates, duplæ. Partes uero cum ſint inter ſe æquales, ut iamdudum demonſtratum eſt: & ipſas totas contingentes rectas lineas inter ſe æquales eſſe conueniet. Pentagonum igitur æquilaterum. Quod uerò ſit etiam æquiangulum, cum ipſius pentagoni anguli æqualium ſint angulorum dupli: patet & illud. Circa datum igitur circulum, æquilaterum & æquiangulum pentagonum deſcriptum eſt, quod feciſſe oportuit.



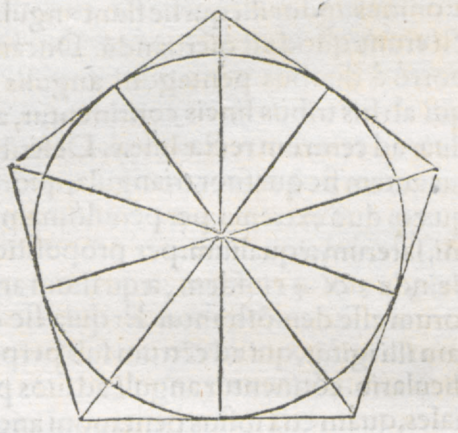
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ.

Εἰς τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλον ἐγγράψαι.

PROPOSITIO XIII.

In dato pentagono, quod eſt æquilaterum & æquiangulum, circulum deſcribere.

Sit datum pentagonum, æquilaterum exiſtens & æquiangulum, atq; propoſitum, circulum in eo deſcribere. Pẽtagoni igitur dati duo quilibet proximi anguli, duabus rectis, per propoſitionem 9 primi, biſariam diuidantur: & erit punctum concurſus harum rectarum in pentagono: centrum circuli qui petitur, cuius hæc ſit demonſtratio. Ducantur à tribus indiuiſis pentagoni angulis, ad punctum illud concurſus, tres rectæ lineæ. Et quoniam duo ipſius pentagoni anguli, ſuis rectis ductis biſariam diuiſi ſunt: quæqꝫ duo circa illos diuiſos poſita triangula, inter ſe æqualia eſſe, per 4 primi, demonſtrantur. Quia uerò ad unum angulum in utroqꝫ triangulo, angulus ſuus totalis duplus eſt: propter æqualitatem, totalium quidem ex hypotheſi, ac partialium deinde, ut modo oſtenſum eſt, inter ſe: & in utroqꝫ triangulo angulus totalis ad ſuū partialem: ſinguli item totales, hac operationem, ad ſingulos ſuos partiales angulos. Dupli erunt. Quare unumquemqꝫ ſic biſariam diuiſum eſſe, manifeſtum erit.



Porrò pro ulteriori demonſtratione, demittantur à puncto concurſus ad ſingula pentagoni latera perpendiculares. Hæ autem quoniam facili opera per propoſitionem 26 primi, æquales inter ſe eſſe demonſtrantur: punctum igitur illud concurſus, ut dictum eſt, ex propoſitione 9 tertij, centrum circuli erit. Eo igitur nunc ſecundum unius, harum æqualium perpendicularium interuallū, deſcripto, cum is, propter æqualitatem, per ſingularum extrema puncta tranſeat unumquodqꝫ inſuper pentagoni latus, ex priore parte corollarij prop. 16 tertij, circulū tangat (alias enim ſi ſcilicet unum ex his ſecaretur, circulum contingens in ipſum cadere contra allegatam propoſitionem conuinceretur) propoſitioni ut oportuit ſatisfactum erit, In pentagono nimirum ęquilatero & æquiangulo circulus deſcriptus eſt. quod fieri oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ.

περὶ τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλον περιγράψαι.

PROPOSITIO XIIII.

Circa datum pentagonum, quod eſt æquilaterum & æquiangulum, circulum deſcribere.

Sit datum pentagonum quale requiritur, atqꝫ propoſitum, circulū circa ipſum deſcribere. Diuidantur, ut in præcedenti factum eſt, duo inter ſe proximi in pentagono anguli, per propoſitionem 9 primi, duabus rectis biſariam: & erit punctum concurſus harum rectarum, centrum futuri circuli qui hoc datum pentagonum circumſcribet, id quod ex propoſitione 4, toties quoties opus fuerit eam repetendo, atqꝫ ex nona deinde tertij, hoc modo demonſtrabitur. Ducantur à tribus indiuiſis pentagoni angulis, ad punctum illud concurſus tres rectæ lineæ. Et quoniam in

pentagono duo anguli, ex ſtructura, biſariam diuiſi ſunt, cum pentagonum ſit ex hypotheſi æquiangulum, ubi bis aut ter duo triangula, quorum unum quidem unam, alterū uerò alteram biſariam diuiſi anguli medietatem ſibi uendicat, ſumpta fuerint, & reliqui tres pentagoni anguli ex propoſitione 4 primi, biſariam diuiſi erunt. Quare, ut ipſi totales, ex hypotheſi, ita nunc ex demonſtratione, per allegatam quartam ſumpta, partiales anguli omnes, ductæ inſuper à centro hoc ad angulos pentagoni rectæ lineæ, inter ſe æquales erunt. Quoniam autem hæ rectæ plures quàm duæ ſunt, circuli igitur per harum æqualium extremitates, ut quæ ſunt in pentagoni angulis, tranſeuntis centrum, per propoſitionem 9 tertij, hoc punctum erit. Eo igitur inde deſcripto, propoſitioni tandem ſatisfactum erit, circa pentagonum uidelicet, æquilaterum & æquiangulum, circulus deſcriptus. quod feciſſe oportuit.

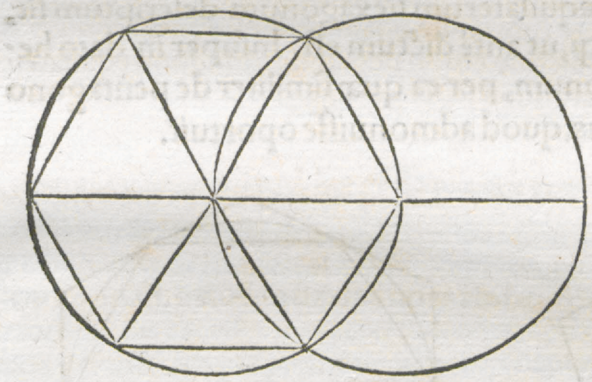
ΠΡΟΤΑΣΙΣ. ΙΕ.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον, ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

PROPOSITIO XV.

Indato circulo, hexagonum æquilaterum & ęquiangulum deſcribere.

Sit datus circulus, atqꝫ propoſitum, hexagonum in eo æquilaterum & æquiangulum deſcribere. Circulo igitur dato, diametro etiam in eo ducta, alterutra eius extremitate loco centri ſumpta, alius ad prioris dati quantitatem circulus deſcribatur, atqꝫ ubi hi duo circuli ſeſe mutuo ſecāt, ab illis ſectionum punctis per centrum circuli prioris, uſqꝫ ad eius circumferentiam, aliæ duæ rectæ extendantur. Eruntautem ſic in circulo dato puncta ſex, quæ tandem ſex etiam rectis lineis continuata ſuis quodque punctis proximis, confectum erit negocium. Quoniam enim cum à centris circulorum, tanquam à medijs punctis, ad circumferentias deductæ rectæ lineæ, ex definitione, inter ſe ſunt æquales: utrunqꝫ eorum, quæ in portione circulorum communi deſcripta ſunt, triangulorum, ex hac circuli definitione bis uſurpata, illa deinde communi noticia, Eidem æqualia, &c. æquilaterum, atqꝫ mox deinde etiam, per priorē partem propoſitionis quintę primi, æquiangulum erit. Quoniam autem interni tres anguli omnis trianguli, ex corollario propoſitionis 32 primi, duobus rectis ſunt æquales: unuſquiſqꝫ horum duorum triangulorum angulus unum duorum rectorum tertium erit, duo igitur ad centrum prioris uel dati circuli poſiti anguli, duobus duorum rectorum tertijs ſunt ęquales. Quia uerò illi duo cum eo quem ex utraqꝫ parte habent ἐφεξῆς, per propoſitionem 13 primi, duobus rectis angulis ſunt æquales: & hunc ἐφεξῆς angulum, cum tres tertiæ unum integrum faciant, unum duorū rectorum tertium eſſe neceſſe eſt, hi tres igitur anguli inter ſe æquales erunt. Sed quia his ęquales etiam ſunt, ex propoſitione 15 primi, anguli quos ſinguli ad uerticem habent: ſex igitur ad centrum deducti anguli inter ſe æquales erunt. quare & illorum arcus à quibus ſubtenduntur ex propoſitione 26 tertij, & arcum deinde rectæ lineæ, ex 29 eiuſdem, æquales erunt. Hexagonum igitur æquilaterum. Quòd uerò ſit etiam æquiangulum, id ſic patet. Quoniam enim ſingulæ huius hexagoni laterum circumferentiæ uel arcus, ut quidem demonſtratum eſt, inter ſe ſunt æquales, ſumptis duobus quibus uidelicet nul



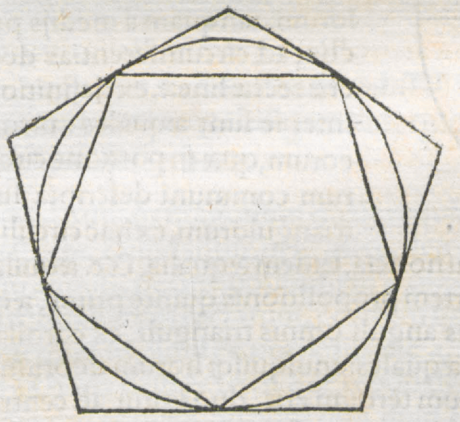
lus eſt communis terminus, ſi utrique eorum tres illi qui ab his duobus intercipiuntur, additi fuerint: & collecti ſic arcus, ex communi quadam noticia, inter ſe æquales erunt: quare etiam æquales, ex propoſitione 27 tertij, qui ab his æqualibus arcubus ſubtenduntur anguli. Conſtat igitur ſic æqualitas de duobus. Quia autem ſicut de duobus, ita etiam de omnibus, hoc nimirum proceſſu toties quot fuerint anguli minus uno, uſurpato, conſtare manifeſtum eſt: hexagonum igitur hoc æquiangulum eſſe concluditur, & quia etiam æquilaterum. In dato igitur circulo, æquilaterum & æquiangulum hexagonum deſcriptum eſt. quod feciſſe oportuit.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἡ τοῦ ἑξαγώνου πλευρὰ, ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου. Καὶ ἐὰν διὰ τῶν α β γ δ ε ζ σημείων ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου ἀγάγωμεν· περιγραφήσεται περὶ τὸν κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, ἀκολούθως τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου εἰρημένοις. Καὶ ἔτι διὰ τῶν ὁμοίων τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου εἰρημένοις, εἰς τὸ δοθὲν ἑξάγωνον κύκλον ἐγγράψομεν. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

COROLLARIVM.

Ex hoc quidem manifeſtum eſt. Quòd uidelicet hexagoni latus, æquale ſit ei, quæ ex centro circuli producitur, rectæ lineæ. Et ſi per ſex angularia hexagoni puncta contingentes circulum deduxerimus, quod tum circa circulum, æquiangulum & æquilaterum hexagonum deſcriptum ſit, perinde atque pentagonum quoque, ut antè dictum eſt. Inſuper in dato hexagono, uel circa datum hexagonum, per ea quæ ſimiliter de pentagono dicta ſunt, circulum deſcribemus. quod admonuiſſe oportuit.



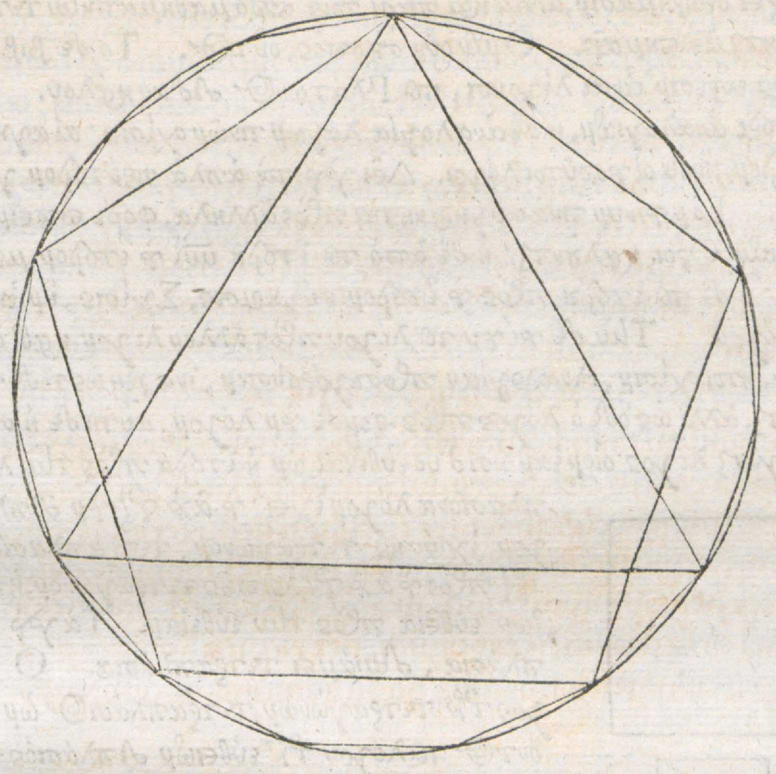
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϛ.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον, πεντεκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

PROPOSITIO XVI.

In dato circulo, quindecagonum æquilaterum & æquiangulum deſcribere.

Sit datus circulus, atque propoſitum, quindecagonum in eo, æquilaterũ & æquiangulum deſcribere. Circulo igitur dato, primùm in eo triangulum æquilaterum, deinde æquilaterum pentagonum, illud quidem ex propoſitione 2, hoc uerò ex huius deſcribatur. Curetur tamen, ut unus trianguli & unus pentagoni angulus, unum in circumferentia punctum commune ſortiantur. Et quoniam, quindecagonum æquilaterum & æquiangulum in circulo dato deſcribere propoſitum eſt, cum circumferētia ideo in quindecim partes æquales diuidenda ſit, infertur, ut qualium tota circumferentia fuerit æqualium partium quindecim: talium tertiam eius partem, quæ à trianguli latere ſubtenditur, quinque: quintam uerò, quam pentagoni latus ſubtendit, tres eſſe debere. Exceſſus igitur arcus illius ſuper hunc taliũ duarum, qualium tota circumferentia eſt quindecim, partium erit. Quare eo, per propoſitionem 30 tertij, bifariam diuiſo, quantum dati circuli quindecagoni latus fuerit, alterutra ipſius exceſſus medietas indicabit. Quo habito, ſi id quindecies circulo ordine, per primam propoſitionem huius, coaptatum fuerit, propoſitioni tandem ſatisfactum erit, In circulo nimirum, quindecagonum ęquilaterum & æquiangulum deſcriptum. quod feciſſe oportuit. Demonſtratio neglecta eſt, cum ex ſtructura hæc clara ſit.



APPENDIX.

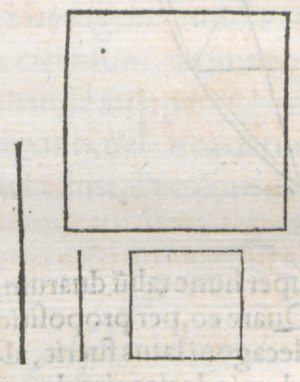
Porrò circulo dato, quomodo circa ipſum quindecagonum æquilaterum & æquiangulum: Inſuper, quomodo circa quindecagonum datum, circulus deſcribendus ſit, licet illa ab Euclide non tradantur, nemini tamen difficile erit, ſi modò eorum quæ in hoc libro ad 12 & 13 propoſitiones de pentagono dicta ſunt, meminerit. Atque hactenus de inſcriptionibus & circumſcriptionibus figurarum inter ſe, cuius quidem tractatio in hoc quarto libro erat propoſita.

FINIS LIBRI QVARTI.

ΣΧΟΛΙΟΝ ΕΙΣ ΤΟ Ε,

ΑΔΗΛΟΥ.

Σκοπὸς τῷ ε βιβλίῳ περὶ ἀναλογιῶν διαλαβεῖν. Κοινὸν γὰρ τοῦτο τὸ βιβλίον γεωμετρίας τε καὶ ἀριθμητικῆς, καὶ μουσικῆς, καὶ πάσης ἁπλῶς μαθηματικῆς ἐπιστήμης. Τὰ γὰρ ἐν αὐτῷ ἀποδεικνύμενα οὐ μόνον γεωμετρικοῖς ἁρμόζει θεωρήμασιν, ἀλλὰ καὶ πᾶσι τοῖς ὑπὸ μαθηματικὴν τεταγμένοις ὡς προείρηται ἐπιστήμαις. Ὁ μὲν οὖν σκοπὸς, οὗτος. Τὸ δὲ βιβλίον, Εὐδόξου τινὸς εὕρεσιν εἶναι λέγουσι, τοῦ Πλάτωνος διδασκάλου. Ἐπεὶ οὖν σκοπὸς περὶ ἀναλογιῶν, ἡ δὲ ἀναλογία λόγων τινῶν σχέσις· ἀναγκαῖον γνῶναι πρότερον τίνες οἱ τοιοῦτοι λόγοι. Δεῖ γὰρ τὰ ἁπλᾶ πρότερον γνῶναι τῶν συνθέτων. Ἐὰν τοίνυν τινὰ συγκρίνηται πρὸς ἄλληλα, φέρε εἰπεῖν δύο μεγέθη, αὐτὰ μὲν Ὅροι καλοῦνται· ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ ἑτέρου ἐπὶ τὸ ἕτερον μετάστασις, Διάστημα· ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου πρὸς τὸ ἕτερον σύγκρισις, Σχέσις, ἣν ἐκάλεσαν οἱ παλαιοὶ λόγον. Τὴν δὲ τούτου τοῦ λόγου πρὸς ἄλλον λόγον, καθ' ὁμοιότητα σύγκρισιν, ἤτοι σχέσιν, Ἀναλογίαν προσηγόρευσαν, ἵνα μὴ ὡς τόδε τὸ μέγεθος συγκρίνηται, ἀλλ' ὡς ὅδε ὁ λόγος πρὸς τόνδε τὸν λόγον. αὕτη δὲ ἡ σύγκρισις. Λόγου λέγεται λόγος· οἷον ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι, ὧν ἡ ἑτέρα πρὸς τὴν λοιπὴν διπλασίονα λόγον ἔχει· τὸ ἀπὸ τῆς τὸν διπλασίονα λόγον ἐχούσης τετράγωνον, τετραπλασίονα λόγον ἕξει πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς λοιπῆς τετράγωνον, ἤπερ ἡ μείζων εὐθεῖα πρὸς τὴν εὐθεῖαν. Τὰ γὰρ μήκει διπλάσια, δυνάμει τετραπλάσια. Ὁ τοίνυν λόγος τῶν τετραγώνων, τετραπλάσιος ὢν διπλασίου ὄντος τοῦ λόγου τῶν εὐθειῶν διπλάσιός ἐστι· Καλεῖται δὲ οὗτος, ὁ λόγου λόγος. Ἀλλ' εἴη ἂν οὗτος ὑπὸ τὸ πόσον. διττὸς γὰρ ὁ λόγος, ὁ μὲν ἐν ἀξίᾳ, ὁ δὲ ἐν ποσῷ. καὶ τοῦ μὲν ἐν ἀξίᾳ οὐδὲν ἐστὶν εἶδος πρὸς τὴν παροῦσαν χρείαν, τοῦ δὲ κατὰ τὸ ποσὸν εἴδη ἐστὶν ε. Ὁ μὲν γάρ ἐστι Πολλαπλάσιος· ὡς τοῦ γ ὁ ς. ὁ δὲ Ἐπιμόριος· ὡς τοῦ γ ὁ δ. ὁ δὲ Ἐπιμερής· ὡς τοῦ γ ὁ ε. Καὶ οὗτοι μὲν Ἁπλοῖ, τούτων δὲ ἔτι ἁπλούστερος, ὁ πολλαπλάσιος. Ἕτεροι δὲ ἐκ τῆς τούτων συνθέσεως γίνονται β, ὅ τε Πολλαπλασιεπιμόριος· ὡς τοῦ γ ὁ ζ. καὶ ὁ Πολλαπλασιεπιμερής· ὡς τοῦ γ ὁ η.



Ὑπολόγοι δέ εἰσιν οἱ ἐλάσσονες τῶν μειζόνων, Ὑποπολλαπλάσιοι, ὑπεπιμόριοι, ὑπεπιμερεῖς, καὶ ἑξῆς ὁμοίως. Ἰστέον δὲ, ὡς τὸ βιβλίον διχῇ διῄρηται, καὶ περιέχει τὰ μὲν πρῶτα τὴν τῶν ἁπλουστέρων διδασκαλίαν, τουτέστι, τὴν τῶν πολλαπλασίων, τὰ δὲ δεύτερα καθολικώτερα περὶ πάντων τῶν λόγων. Δεῖ γὰρ ἐπὶ παντὸς, ὡς εἴρηται, πράγματος τὴν τῶν ἁπλῶν ἡγεῖσθαι διδασκαλίαν. Τῷ δὲ τῆς τοῦ βιβλίου διαιρέσεως τρόπῳ, καὶ ἡ τῶν ὅρων γεγένηται διαίρεσις. οἱ μὲν γὰρ πρότεροι περὶ ἐπιμερῶν, καὶ πολλαπλάσιοι· οἱ δὲ ἑξῆς καθολικώτεροι περὶ πάντων τῶν λόγων.

BREVIS INTERPRETATIO

HVIVS QVINTI LIBRI, INCERTI AVTORIS.

Scopus huius quinti libri eſt is, ut tractetur de proportionib. Pertinet enim liber iſte & ad geometriã, ac arithmeticam & muſicã, omnesq; alias quæ ſimpliciter mathematicæ diſciplinæ uocãtur. Etenim quę in ipſo traduntur, non geometricis ſolum contemplationibus cõueniũt, illisq; propria exiſtũt, ſed & omnib. quę ſub mathematica ipſa cõprehenduntur, & ut prius dixi, diſciplinis. Sit igitur hic libri ſcopus. Cæterùm librũ ipſum cuiuſdã Eudoxi inuentũ eſſe aſſerunt, diſcipuli Platonis. Cũ igitur ſit ſcopus de proportionib. proportio aũt ſit rationũ quarundã habitudo: quę ſint illæ rationes, prius cognoſcendum erit neceſſariò. Oportet enim ſimpliciũ cognitionẽ præcedere, q̃ de cõpoſitis dicatur aliquid. Itaq; ſi quædam inter ſe cõparentur (ſumamus aũt duas magnitudines) illæ quidem Termini appellabũtur, tranſmutatio aũt ſiue trãſitus ab uno in alterũ, Interuallum dicitur. Cõparatio uerò alterius ad alterũ, Habitudo uocatur, quam ueteres Rationẽ nominauerũt. Collationem uerò huiuſcemodi rationis ad aliã rationẽ, quæ fit ſimilitudine quadã, aut eiuſcemodi habitudinem, appellarũt Proportionẽ, nõ perinde quaſi magnitudo illa cõparet̃, ſed ut illa ratio ad illã rationẽ: quæ deinde collatio, Rationis ratio dicitur. ut ſi duæ fuerint rectæ lineę, quarũ una alterius reſpectu duplam habeat rationem: quadratum quod ab ea linea eſt deſcriptum, quæ duplam rationem habet, quadruplã quoq; rationẽ habebit, reſpectu uidelicet eius quadrati, quod ab altera eſt deſcriptũ, ſiquidẽ collatio habeat̃ longioris lineæ ad breuiorẽ rectã. Quæ enim lõgitudine dupla ſunt: ea potẽtia quadrupla exiſtũt. Ratio igitur quadratorũ quadrupla exiſtens, duplæ rationis exiſtentiũ rectarũ dupla eſt. Talis aũt uocat̃ Rationis ratio. Sed fuerit illa in quãtitate. duplex enim eſt ratio, una in dignitate, altera uerò quantitatis. ac dignioris quidẽ nulla ſpecies uidetur eſſe ad preſentẽ uſum accommodata: huius uerò rationis, quæ ſecundũ quantitatẽ dicitur, ſpecies ſunt quinq;. Alia enim ratio Multiplex appellatur: cuiuſmodi eſt 6 ad 3: alia Superparticularis, ut 4 ad 3: alia uerò Superpartiens, ut 5 ad 3. atq; hæ quidẽ ſunt Simplices, quarũ tamen omnium rationũ magis ſimplex eſt Multiplex. Reliquæ uerò duę ſpecies ex harũ naſcũtur cõpoſitione, Multiplex ſuperparticularis ſcilicet, ut 7 ad 3: & Multiplex ſuperpartiens, ut 8 ad 3.

Sub rationes aũt uocãtur, cum minores maiorib. cõferuntur: Submultiplices, Subſuperparticulares, Subſuperpartiẽtes, & ſic deinceps. Sciendum aũt, diuidi hunc librũ in duas partes, et initiò quidẽ ſimpliciũ cõtinet doctrinã, hoc eſt, eam quę de multiplicib. tractat, deinde uniuerſaliora de omnib. rationib. tradũtur. Oportet enim, ut iã oſtẽſum eſt, in omni re ſimpliciũ doctrinã pręcedere. Si quis aũt cõſideret modũ diuiſionis, terminorum etiã diuiſio facta erit. Nã priores quidẽ, ſcilicet termini, Multiplices: qui autem deinceps ſequuntur uniuerſaliores, de omnibus rationibus.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ.

EVCLIDIS ELEMENTORVM GEOmetricorum *liber quintus.*

Eſt hic quintus liber Euclidis περὶ τοῦ λόγου καὶ τῆς ἀναλογίας, hoc eſt, de ratione & proportione. Quæ igitur ad hanc tractationem requiruntur uocabula, primò, ut in præcedentibus etiam factum eſt, ordine definit.

ΟΡΟΙ.

Μέρος ἐστὶ μέγεθος μεγέθους, τὸ ἔλασσον τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸ μεῖζον.

DEFINITIONES.

1 Pars eſt quantitas quantitatis, minor maioris, quando minor metitur maiorem.

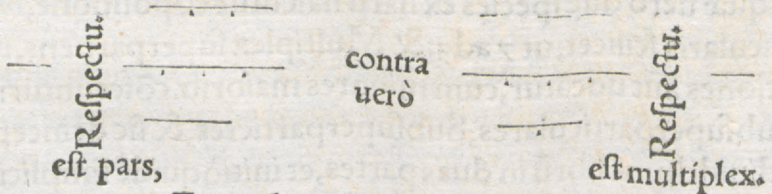
μέγεθος) Licet hac uoce continua tantum quantitas, ſub qua nimirum lineæ, ſuperficies & corpora comprehenſa ſunt, intelligatur, unde ſic quidem magnitudinis ſignificationem habet: tamen quia omnia, quæ in hoc libro, tam per definitiones quàm etiam propoſitiones, ab authore nobis præſcribũtur, per numeros æque ut per lineas oſtendi poſſunt: non magnitudinis, ſed quantitatis uoce, ſub qua, tanquam uocabulo generali, numeri etiam cõprehenduntur, in uerſione uſi ſumus, id quod Lector æquo animo ferat, præſertim cũ in hoc autori nihil detrahatur, cumq; etiam ſingula numeris declarauerimus.

Καταμετρεῖν) autem eſt metiri, atq; hoc loco diuidere aliquid integrè, & quaſi ad libellam, ut dicitur, ſic quòd nõ maneat, ultima ſubtractione facta, aliquid minore minus, ſed nihil omnino, ad menſurandum amplius relinquatur.

Πολλαπλάσιον δὲ τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος, ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ ἐλάττονος.

2 Multiplex eſt, quantitas quantitatis, maior minoris, quando maior menſuratur à minore.

Harum definitionum de parte & multiplici exempla ſunt.



eſt pars, … eſt multiplex.

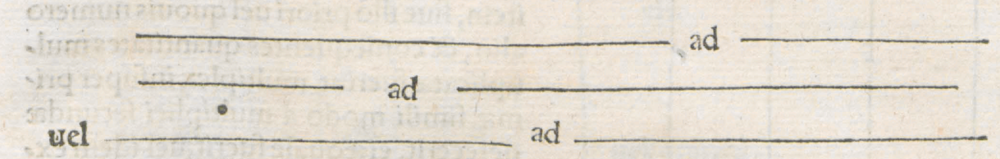
Exempla per numeros expoſita.

	6			6	
	9			9	
3 reſpectu ſcilicet	12,	eſt pars,	Contra uerò	12	reſpectu 3, multiplex
	15			15	
	21			21	

Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν, ἡ κατὰ πηλικότητα πρὸς ἄλληλα ποιὰ σχέσις.

3 Ratio, eſt duarum quantitatum eiuſdem generis, aliquatenus inter ſe quædam habitudo.

Duæ requiruntur, ut ex definitione colligitur, ad rationem cõſtituendam, quantitates, atq; ea deinde inter illas habitudo, quanta nimirũ una reſpectu alterius fuerit. hoc inquam, uel illa conſideratio, ſiue reſpectus, ratio dicitur. Exempla ſunt,



Exempla per numeros expoſita.

		25		25		
		5		5		
25	ad	24,	uel contra	24	ad 25,	eſt ratio,
		17		17		
		3		3		
		7		7		

hoc eſt, quidam reſpectus, ut ratione primi exempli in utroq; ordine, numeri ſeſe mutuo æqualiter reſpiciunt. Ratione ſecundi, in priori quidem, eſt prior quantitas numerus poſterioris quincuplus, in poſteriori uerò ſubquincuplus, & ſic ordine deinceps. Illa autem conſideratio quantitatum inter ſe, unius ad alteram, dicitur ratio. Et ſicut lineæ ac numeri, ita quoq; ſuperficies, corpora, ac quæq; res aliæ inter ſe conferri poſſunt.

Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν.

4 Rationem habere inter ſe quantitates dicuntur, quæ poſſunt multiplicatæ inuicem excedere.

Exempla ſunt.

27	18	12	12	18	27
9	6	4	4	6	9
36	36	36	27	30	22
9	9	9	9	5	11

Sic per lineas exempla præſcribi poſſunt.

Ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι, πρῶτον πρὸς δεύτερον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου ἰσάκις πολλαπλασίων καθ᾽ ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν ἑκάτερον ἑκατέρου, ἢ ἅμα ἐλλείπῃ, ἢ ἅμα ἴσα ᾖ, ἢ ἅμα ὑπερέχῃ, ληφθέντα κατάλληλα.

5 In eadem ratione quantitates dicuntur eſſe, prima ad ſecundam, & tertia ad quartam, quando primæ & tertiæ æquè multiplicia à ſecundæ & quartæ æquè multiplicibus, iuxta quamuis multiplicationem utrun-

que ab utroq; uel unà deficiunt, uel unà æqualia ſunt, uel unà excedunt, ſumpta inter ſe.

Dicit definitio. Quarum rationum antecedentes uno aliquo numero, uno item, ſiue illo priori uel quouis numero alio, & conſequentes quantitates multiplicatæ fuerint, multiplex inſuper primæ ſimili modo à multiplici ſecundæ defecerit, ei æquale fuerit, uel idem excesſerit. ſicut multiplex tertiæ deficit, æquale eſt, uel excendit multiplex quantitatis quartæ: in eadem ratione dicuntur eſſe hæ quantitates. Oſtendit autem hoc in quatuor quantitatibus autor, & dicit, In eadem ratione quantitates, &c.

Exempla in numeris ſunt.

Multi.	24	18	12	9	exceſſus
	24	24	12	12	æqualitas
	16	18	8	9	defectus.
Quantita.	8 prima	6 ſecun.	4 tertia	3 quar.	

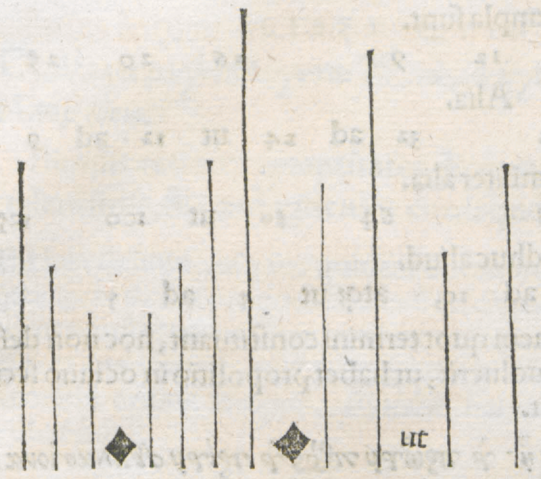
Τὰ δὲ τὸν αὐτὸν ἔχοντα μεγέθη λόγον, ἀνάλογον καλείσθω.

6 Eandem autem habentes rationem quantitates, proportionales uocentur.

Huius definitionis exempla ſunt, quæ ex definitionibus præcedentibus, quarta & quinta, colliguntur.

Ὅταν δὲ τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων, τὸ μὲν τοῦ πρώτου πολλαπλάσιον ὑπερέχῃ τοῦ τοῦ δευτέρου πολλαπλασίου, τὸ δὲ τοῦ τρίτου πολλαπλάσιον μὴ ὑπερέχῃ τοῦ τοῦ τετάρτου πολλαπλασίου· τότε τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον μείζονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ τὸ τρίτον πρὸς τὸ τέταρτον.

7 Quando uerò æquè multiplicium, multiplex primæ exceſſerit multiplex ſecundę, ipſum uerò multiplex tertiæ non exceſſerit multiplex quartæ: tunc prima ad ſecundam maiorem quàm tertia ad quantitatem quartam rationem habere dicitur.



Cohæret hæc definitio cum præcedentibus duabus, quinta & ſexta. Quando uerò dicit, æquè multiplicium, tum pirmæ & tertiæ, ſecundæ item & quartæ quantitatum, intelligendum eſt.

Exempla in numeris ſunt.

16	8	18	18	24	20	27	45
8	4	9	9	8	4	9	9

Aliud exemplum.

16	20	18	45
8	4	9	9

Sunt hic tria exempla, quorum primum & ſecundum patent. In tertio autem, licet multiplex primæ in nullo multiplex ſecundæ excedat, cum tamen id minus à multiplici ſecundæ, quàm tertiæ multiplex à multiplice quantitatis quartæ deficiat: erit adhuc primæ ad ſecundã maior, quàm tertiæ ad quartam quantitatẽ ratio.

Alia exempla.

22		12		14		18		21		18		15		24
11	ad	2	&	7	ad	3	Item	7	ad	3	&	5	ad	4

APPENDIX.

Cum quis uelit inter duas rationes iudicare, utra maior ſit, commodiſſimè per hanc definitionem id expedire poterit.

Αναλογία δὲ ἐστὶν ἡ τῶν λόγων ὁμοιότης.

8 Proportio uerò eſt, rationum ſimilitudo.

ADMONITIO.

Similes ſiue eædem, & diſſimiles ſunt rationes, quantitates uerò æquales & inæquales inter ſe, quod hic annotare libuit.

Αναλογία δὲ ἐν τρισὶν ὅροις ἐλαχίστη ἐστίν.

9 Proportio autem in tribus terminis minima eſt.

Hoc eſt, ad conſtituendam proportionem requiruntur ad minus tres quantitates. Cum enim proportio ſit rationum ſimilitudo, & non rationis: ſingulæ uerò rationes duabus quantitatibus, antecedente ſcilicet & conſequente, conſtent: ſequitur proportionem, duabus rationibus præſcriptam, quatuor terminos requirere. Sed quia non rarò ſolet contingere, ut unius rationis unus terminus bis repetatur, ſemel quidem ut ſit conſequens prioris, poſtea uerò ut ſit poſterioris rationis antecedens, conſtat, tres terminos, ut proportio conſtituatur, aliquando ſufficere, pauciores uerò nunquam.

Exempla ſunt.

9 6 4 16 12 9 16 20 25

Alia.

9 ad 4 ut 27 ad 12 32 ad 24 ut 12 ad 9

Similiter alia.

27 18 ut 12 8 64 80 ut 100 125

Adhuc aliud.

12 ad 15 ut 8 ad 10, atque ut 4 ad 5

Cæterùm, maximam proportionem quot termini conſtituant, hoc non definit Autor, cum ea ſemper quoad quis uoluerit, ut habet propoſitio in octauo ſecunda, per unum terminum augeri poſſit.

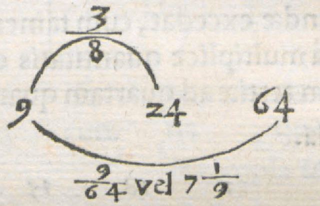
Ὅταν δὲ τρία μεγέθη ἀνάλογον ᾖ· τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον διπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον.

10 Quando uerò tres quantitates proportionales fuerint: prima ad tertiam duplicatam rationem habere dicitur, quàm ad ſecundam.

Ἀνάλογον ᾖ, hoc eſt, continuè unam & eandem rationem habuerint.

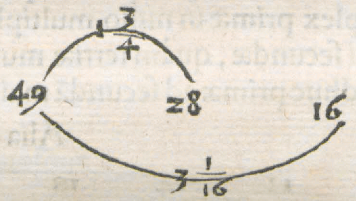
Exempla ſunt.

Denominatio uel ratio primæ ad ſecun.



Denominatio uel ratio primæ ad tertiam.

Denominatio uel ratio primæ ad ſecun.



Denominatio primæ ad tertiam, &c.

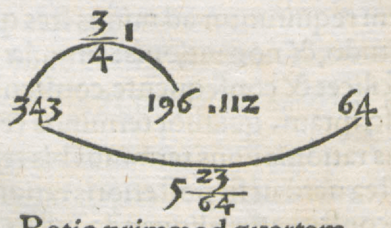
Eſt autem reſpectu prioris duplicata, hoc eſt bis ſumpta.

Exempla huius definitionis alia, ſunt numeri uel quantitates, quas examinat definitio præcedens quarta.

Ὅταν δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ· τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τέταρτον τριπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον. Καὶ ἀεὶ ἑξῆς ἑνὶ πλεῖον, ἕως ἂν ἡ ἀναλογία ὑπάρχῃ.

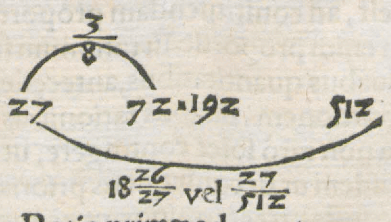
11 Quando autem quatuor quantitates proportionales fuerint: prima ad quartam triplicatam rationem habere dicitur, quàm ad ſecundam. Et ſemper ordinatim una plus, prout quidem proportio extenſa fuerit.

Ratio primæ ad ſecun.



Ratio primæ ad quartam.

Ratio primæ ad ſecun.



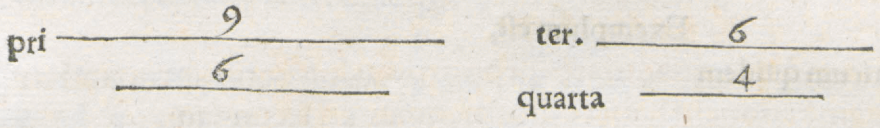
Ratio primæ ad quartam.

Eſt autem reſpectu primæ collationis triplicata, hoc eſt, ter ſumpta.

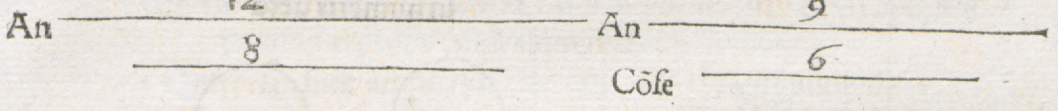
Ὁμόλογα μεγέθη λέγεται εἶναι, τὰ μὲν ἡγούμενα τοῖς ἡγουμένοις, τὰ δὲ ἑπόμενα τοῖς ἑπομένοις.

12 Similis rationis quantitates dicuntur eſſe, antecedentes quidem antecedentibus, & conſequentes conſequentibus.

Eſt hæc definitio modus quidam & canon, per quem, ſicuti ex præcedenti quinta, quæ quantitates proportionales ſint, cognoſcitur, atque huius ſenſus talis. Quatuor aut pluribus quantibus, pari numero propoſitis, quarum ſemper duæ & duæ inter ſe conferuntur, ſi quidem antecedentes illam inter ſe, quam ipſæ conſequentes, eodem ordine ſumptæ, rationem habuerint: ſimilis rationis hæ quantitates eſſe dicuntur.



Item



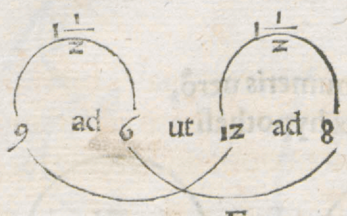
Quia prima & tertia, hoc eſt antecedentes, illam quam conſequentes, quæ ſunt ſecunda & quarta quantitates, inter ſe habent rationes: ſimilis igitur rationis prima, ſecunda, tertia & quarta quantitates erunt. Sic de pluribus idem intelligitur.

Ἐναλλὰξ λόγος ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὸ ἡγούμενον, καὶ τοῦ ἑπομένου πρὸς τὸ ἑπόμενον

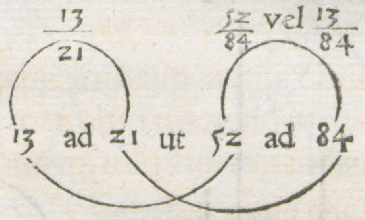
13 Permutata ratio, eſt acceptio antecedentis ad antecedentem, & conſequentis ad conſequentem.

Similis rationis quantitatibus poſitis: erit, ex permutata ratione, antecedens ad antecedentem, hoc eſt prima ad tertiam, ſicut conſequens ad conſequentem, ſecunda nimirum ad quantitatem quartam.

Ex hypoth.

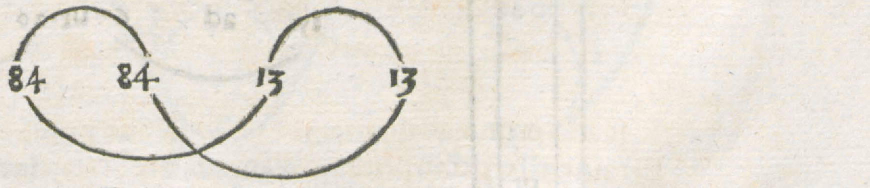


Ex hypot.



Ergo ex permutata ratione,

Aliud exemplum in ratione æqualitatis,



ἐκ τοῦ ἐναλλὰξ λόγου,

Eſt huius, & proximè ſequentium quatuor definitionum, generalis hypotheſis, ut uidelicet quantitates ſimilis rationis habeant.

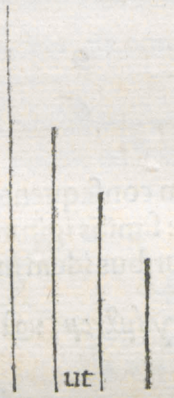
Ἀνάπαλιν λόγος, ἐστὶ λῆψις τοῦ ἑπομένου ὡς ἡγουμένου, πρὸς τὸ ἡγούμενον ὡς ἑπόμενον.

14 Conuerſa ratio, eſt acceptio conſequentis tanquam antecedentis, ad antecedentem tanquam ad conſequentem.

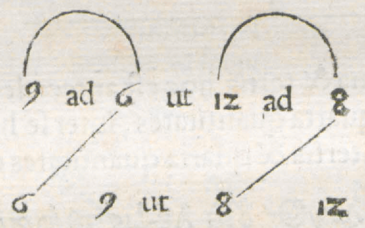
Vt ſi fuerit proportionalium quantitatum prima ad ſecundam, ex hypotheſi, ut tertia ad quartam: erit contrà ex conuerſa ratione, ſecunda ad primam, nimirum conſequens ad antecedentem, ſicut quarta ad tertiam, ſimiliter conſequens ad antecedentem.

Exemplum eſt,

geometricum quidem



in numeris uerò

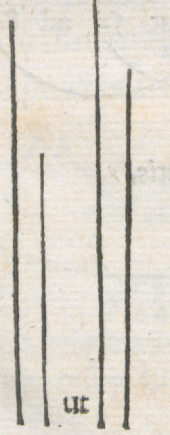


Σύνθεσις λόγου, ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου μετὰ τοῦ ἑπομένου, ὡς ἑνὸς, πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον.

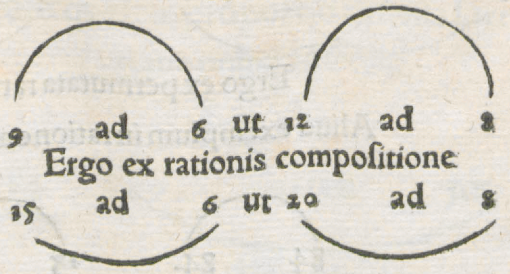
15 Compoſitio rationis, eſt acceptio antecedentis cum conſequente, ſicut unius, ad eandem conſequentem.

Exemplum eſt,

geometricum quidem



in numeris uerò,
Ex hypotheſi



Διαίρεσις δὲ λόγου, ἐστὶ λῆψις τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἑπομένου, πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον.

16 Diuiſio rationis, eſt acceptio exceſſus, quo excedit antecedens ipſam conſequentem, ad eandem conſequentem quantitatem.

Exemplum eſt.

Quia	9	ad	6	ut	12	ad	8 ex hypo.
quare	3	ad	6	ut	4	ad	8 ex diuiſa ra.

Ἀναστροφὴ λόγου, ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὴν ὑπεροχὴν, ᾗ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἑπομένου.

17 Conuerſio rationis, eſt acceptio antecedentis ad exceſſum, quo excedit antecedens ipſam conſequentem quantitatem.

Exemplum eſt.

Cum ex hypotheſi fuerint 9 ad 6 ut 12 ad 8: erunt ex conuerſionis ratione 9 ad 3 ut 12 ad 4

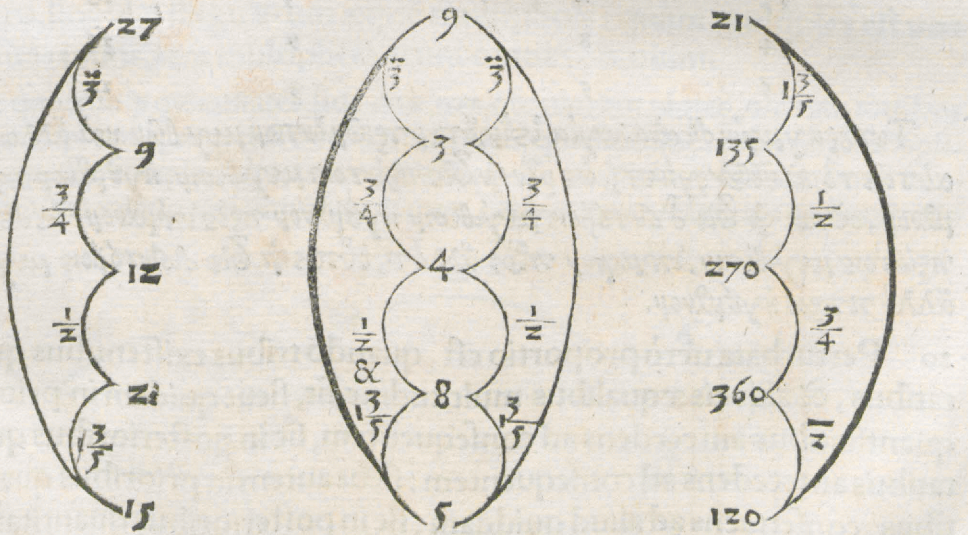
SEQVITVR EXEMPLVM GENERALE, QVINQVE præmiſſas proportionis proprietates declarans.

Quia 15 ſunt ad 8 ut 45 ad 24 ex hypotheſi,

igitur	15	erunt ad	45	ut	8	ad	24, ex permutata ratione
	8		15		24		45, ex conuerſa ratione
	23		8		69		24, ex rationis compoſitione
	7		8		21		24, ex rationis diuiſione
	15		7		45		21, ex rationis conuerſione.

Διʼ ἴσου λόγος ἐστὶ, πλειόνων ὄντων μεγεθῶν, καὶ ἄλλων αὐτοῖς ἴσων τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανομένων, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὅταν ᾖ, ὡς ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσι, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔσχατον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσι, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔσχατον. Η ἄλλως· λῆψις τῶν ἄκρων, καθʼ ὑπεξαίρεσιν τῶν μέσων.

Ordo
prior posterior



uel ordo prior ordo poſterior.

18 Æqua ratio eſt, pluribus exiſtentib. quantitatibus, & alijs eis æqualibus multitudine, cũ duabus ſumptis, & in eadem ratione, quando fuerit, ſicut in prioribus quantitatibus, prima ad ultimam: ſic in poſterioribus quantitatibus, prima ad ultimam. Vel aliter. Æqua ratio, eſt acceptio extremarum, per ſubtractionem mediarum.

Τεταγμένη ἀναλογία ἐστὶν, ὅταν ᾖ, ὡς ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον, οὕτως ἡγούμενον πρὸς τὸ ἑπόμενον, ᾖ δὲ καὶ ὡς ἑπόμενον πρὸς ἄλλό τι, οὕτως ἑπόμενον πρὸς ἄλλό τι.

19 Ordinata proportio eſt, quando fuerit, ſicut antecedens ad conſequentem ſic antecedens ad conſequentem, ſicutq; conſequens ad aliud quiddam ſic conſequens ad aliud.

Vult definitio. Ordinatis tribus quantitatibus, & alijs deinde totidem, quando fuerit prima priorum ad ſuam ſecundam, ſicut prima poſteriorum ad ſecundam, illarum deinde ſecundam ad tertiam, ut ſecunda harũ ad tertiam, atq; ſic ordine deinceps, ſi plures quàm tres, ex utraq; parte, quantitates fuerint: infertur ut in præcedenti, quòd ſcilicet tandem extremorum utrinq; ſit æqua ratio.

Exemplum eſt,

	Antecedens		9	18		Antecedens	
		$1\frac{4}{5}$			$1\frac{4}{5}$		
$4\frac{1}{2}$	Conſequens		5	10		Conſequens	$4\frac{1}{2}$
		$2\frac{1}{2}$			$2\frac{1}{2}$		
	Aliud		2	4		Aliud	

Poteſt hæc definitio, atq; etiam proximè ſequens ſe extendere, & intelligi de pluribus quantitatibus, quemadmodum ipſa præcedens, ut patet.

Ordo		Ordo	
prior	poſte.	prior	poſte.
27	9	16	64
9	3	8	32
12	4	5	20
24	8	9	36
15	5	3	12

Τεταραγμένη δὲ ἀναλογία ἐστὶν, ὅταν τριῶν ὄντων μεγεθῶν, καὶ ἄλλων ἴσων αὐτοῖς τὸ πλῆθος, γίνεται, ὡς μὲν ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν, ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον· ὡς δὲ ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν, ἑπόμενον πρὸς ἄλλό τι, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἄλλό τι πρὸς ἡγούμενον.

20 Perturbata uerò proportio eſt, quando tribus exiſtentibus quantitatibus, & alijs eis æqualibus multitudine, fit, ſicut quidem in prioribus quantitatibus antecedens ad conſequentem, ſic in poſterioribus quantitatibus antecedens ad conſequentem: ſicut autem in prioribus quantitatibus, conſequens ad aliud quiddam, ſic in poſterioribus quantitatibus, id aliud ad antecedentem.

Exemplum eſt,

Tripla	Antecedens	9	6	Quid aliud	Tripla
	Conſequens	6	3	Antecedens	
	Quid aliud	3	2	Conſequẽs	

Alia duo exempla

Anteced.	9	9	Quid aliud		Antec.	7	8	Quid aliud
Conſeq.	3	24	Antecedens		Conſeq.	4	14	Antecedens
Quid aliud	8	8	Conſequens		Quid al.	7	8	Conſequens

Exemplum pro quinq; quantitatibus in utroq; ordine.

	Ordo				
	prior		posterior		
Tripla		9	60		Tripla
	$2\frac{1}{4}$			$\frac{2}{3}$	
		4	90		
	$\frac{4}{5}$			$2\frac{1}{2}$	
		5	36		
	$2\frac{1}{2}$			$\frac{4}{5}$	
		2	45		
	$\frac{2}{3}$			$2\frac{1}{4}$	
		3	20		

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.

ΠΡΩΤΗ. Α.

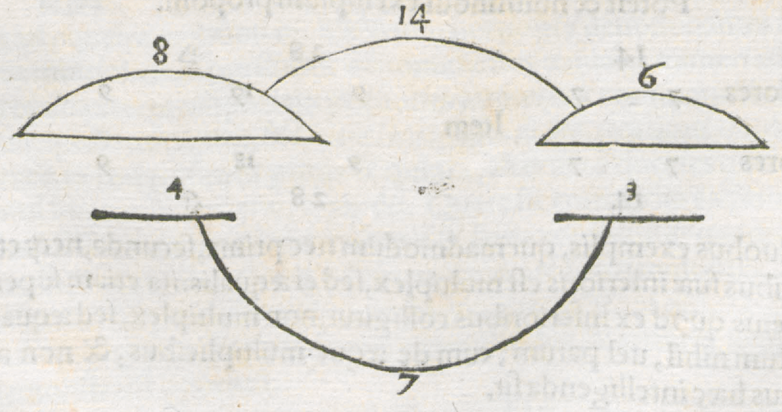
Ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη, ὁποσωνοῦν μεγεθῶν ἴσων τὸ πλῆθος, ἕκαστον ἑκάστου ἰσάκις πολλαπλάσιον· ὁσαπλάσιόν ἐστιν ἓν τῶν μεγεθῶν ἑνὸς, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ πάντα τῶν πάντων.

PROPOSITIONES.

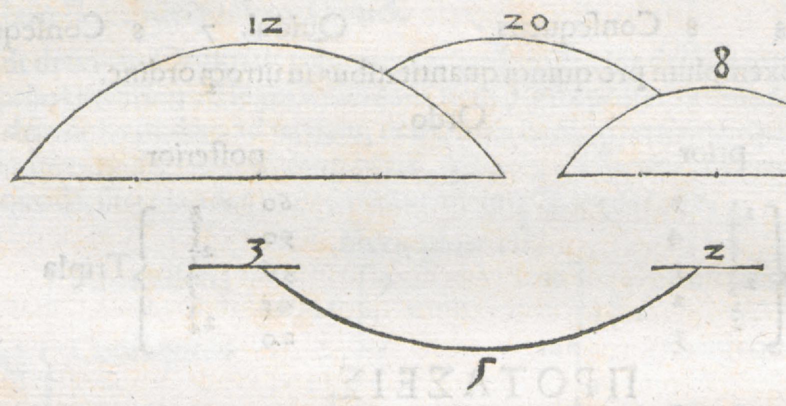
PRIMA. I.

Si fuerint quotcunq; quantitates, quotcunq; quantitatum æqualium numero, ſingulæ ſingularum æquè multiplices: quàm multiplex eſt una quantitas unius, tam multiplices erunt omnes omnium.

Sint quotcunq; quantitates, ſiue duæ, tres, quatuor aut plures, aliarum totidem æque multiplices, quæq; recto ordine ſuæ, dico, quàm multiplex eſt una multiplicium reſpectu ſuæ inferioris, tam multiplices eſſe multiplices omnes, ſimul ſumptas, omnium inferiorum ſimul ſumptarum. Eſt huius propoſitionis demonſtratio



potiſſimum illa communis noticia, Si æqualibus ęqualia addantur, &c. Cum enim inferiores æqualiter, ex hypotheſi, in ſuis multiplicibus contineantur: ſequitur, ut quot portiones una inferiorum in ſua multiplici æquales habuerit, totidem etiam & reliquarum quæꝗ habeat. Diuiſis ergo multiplicibus, unaquaꝗ ſcilicet in ſuas portiones, quot in una earum portiones ſunt ſuæ inferiori uel parti æquales, tot & in unaquaꝗ alia erunt: atꝗ inſuper quemadmodū primæ portiones multiplicium ſuis inferiorib. ſunt ęquales, ita ordine quæꝗ alię. Aequalibus igitur æqualibus additis, erunt multiplicium portiones eiuſdem ordinis, primi ſcilicet ſecundi uel tertij & reliqui, ſi tot fuerint, ſimul ſumptæ, ipſis inferiorib. ſimul ſumptis æquales. Quare ſi primis ſecundæ multiplicium portiones additæ fuerint, aggregata ad partes duplicia erunt. Quod ſi tertiæ his adiectæ fuerint: triplicia. Quia autem, ut ex hypotheſi habetur, in una multiplici non plures portiones ſunt ſuæ inferiori æquales, quàm in alia: quoties igitur multiplex una ſuā inferiorem uel ſubmultiplicem continet, toties & multiplicium aggregatum, id quod ex inferioribus, hoc eſt multiplicibus, colligitur, cōtinere neceſſe eſt, Si fuerint igitur quotcunꝗ quantitates, quotcunꝗ quantitatum, &c. quod demonſtraſſe oportuit.



Sequitur exemplum pro quatuor.

99

Multipli.	24	18	21	36	ſuperiores
	8 8 8.	6 6 6.	7 7 7.	12 12 12	
Submulti.	8	6	7	12	inferiores

33

Poteſt & huiuſmodi exemplum proponi.

		14				28		[illegible]	
Superiores	7		7		9		19		9
				Item					
Inferiores	7		7		9		18		9
		14				28		[illegible]	

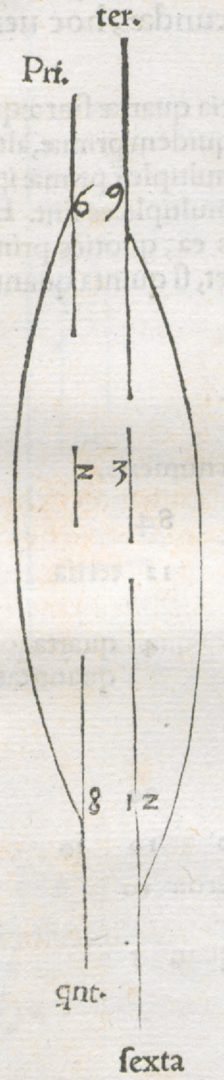
In his duobus exemplis, quemadmodum nec prima, ſecunda, neꝗ etiam tertia ex ſuperioribus ſuæ inferioris eſt multiplex, ſed ei æqualis: ita etiam ſuperiorum aggregatum, eius quod ex inferioribus colligitur, non multiplex, ſed æquale eſt. Sed ad propoſitum nihil, uel parum, cum de æquè multiplicibus, & non æqualibus quantitatibus hæc intelligenda ſit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ B.

Ἐὰν πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον, καὶ τρίτον τετάρτου, ᾖ δὲ καὶ πέμπτον δευτέρου ἰσάκις πολλαπλάσιον, καὶ ἕκτον τετάρτου· καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον, δευτέρου ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τετάρτου.

PROPOSITIO II.

Si prima ſecundæ æquè fuerit multiplex, & tertia quartæ, fuerit autem & quinta ſecundæ ęquè multiplex, & ſexta quartæ: & compoſita, prima ſcilicet & quinta, ſecundæ æquè erit multiplex, & tertia & ſexta quartæ.



Sint ſex quantitates, & eſto quòd prima ſecundæ, ut tertia quartæ, ſit multiplex: atꝗ etiam quinta eidem ſecundæ, ut ſexta quartæ: dico ergo, & compoſitam ex prima & quinta ipſi ſecundæ, ut eſt compoſita ex tertia & ſexta ipſi quartæ, multiplicem eſſe. Quoniā enim prima ſecundæ & tertia quartæ, ex hypotheſi æquè multiplex eſt: quot igitur portiones ſibi æquales habet ſecunda in prima, tot haber & quarta in ipſa tertia: atꝗ eadē ratione, quot in quinta ſecunda, tot etiā in ſexta portiones ſibi ęquales habet ipſa quarta. Quare quoties ſecunda in ipſa prima & quinta reperitur, toties etiā quarta in quantitatib. tertia & ſexta. Quàm multiplex igitur eſt cōpoſita ex prima & quinta ſecundæ, tam multiplex eſt & cōpoſita ex tertia et ſexta ipſius quartę. Aequè igitur multiplices ſunt, compoſita ex prima & quinta ſecundæ, & compoſita deinde ex tertia & ſexta ipſius quartæ. Quare ſi prima ſecundę æquè fuerit, &c. quod demonſtraſſe oportuit.

ALIA HVIVS REI DEMONSTRATIO.

Sint quantitates, quot & quales propoſitio requirit, &cæ. Quoniam enim ſecunda in prima & quinta, ex hypotheſi, toties continetur, quoties quarta in quantitatibus tertia & ſexta, ſi iam ad ęquales, priorum multiplicium portiones denominantes numeros, poſteriorum multiplicium portiones denominantes æquales numeri addantur: ipſi toti, denominantes multiplicium portiones numeri, ex communi illa noticia, Si æqualibus æqualia addantur, &c. inter ſe æquales erunt. atꝗ unus quidem, qui quoties ſecunda in compoſita ex prima & quinta, alter uerò quoties quarta in tertia & ſexta ſimul ſumpta continetur, oſtendit. Quare ſic compoſita ex prima & quinta, multiplex eſt ſecundæ: ita & quæ ex tertia & ſexta conſtituitur quantitas, ad ipſam quartā multiplex erit. Si prima igitur ſecundæ æquè fuerit multiplex, & tertia quartæ, fuerit autem & quinta ſecundæ æquè multiplex, & ſexta quartæ: & compoſita, prima ſcilicet & quinta, ſecundæ æquè erit multiplex, & tertia & ſexta quartæ. quod demonſtraſſe oportuit.

quinquies		quinquies	
Ter	bis	ter	bis
12	8	9	6
	4		3

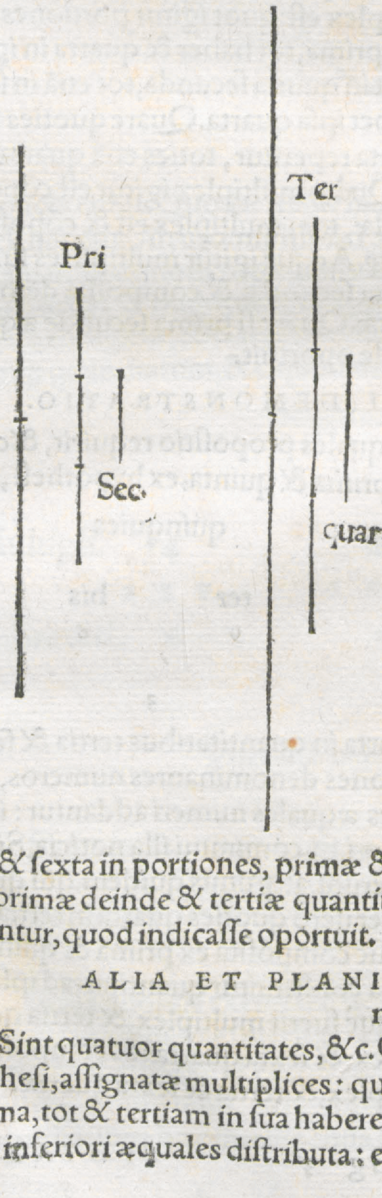
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ.

Ἐὰν πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον, καὶ τρίτον τετάρτου, ληφθῇ δὲ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ πρώτου καὶ τρίτου· καὶ δι' ἴσου τῶν ληφθέντων ἑκάτερον ἑκατέρου ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, τὸ μὲν τοῦ δευτέρου, τὸ δὲ τοῦ τετάρτου.

PROPOSITIO III.

Si prima ſecundæ æquè fuerit multiplex, & tertia quartæ, ſumantur tur autem æquè multiplices primæ & tertiæ: & æqualiter ſumptarum utraq; utriuſque æquè multiplex erit, illud quidem ſecundæ, hoc uerò ipſius quartæ.

Sint quatuor quantitates, & eſto quòd prima ſecũdæ & tertia quartæ ſint æquè multiplices. Sint etiam duæ quantitates aliæ, quæ & ipſæ, una quidem primæ, altera uerò tertiæ, ſint æquè multiplices: dico igitur, quòd etiam multiplex primæ ipſi ſecundæ, tertiæ deinde multiplex ipſi quantitati quartæ æquè multiplices ſint. Eſt huius propoſitionis demonſtratio ſecunda præmiſſa, ſi toties ea, quoties prima in quinta continetur, minus uno, repetatur. Hoc autem apparet, ſi quinta quantitas & ſexta in portiones, primæ & tertiæ quantitatibus æquales, diſtribuantur, loco primæ deinde & tertiæ quantitatum, æquales ex quinta & ſexta portiones ſumantur, quod indicaſſe oportuit.



Exemplum in numeris.

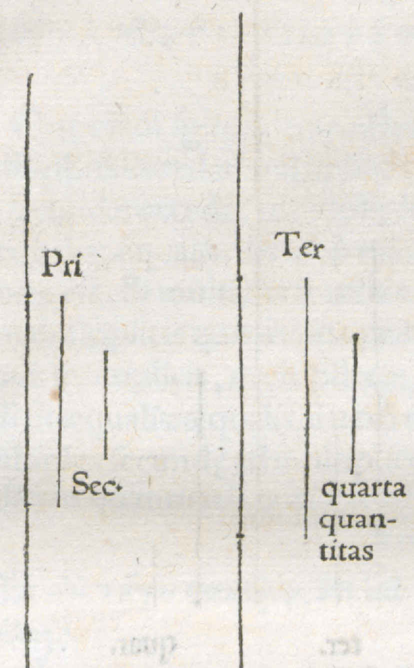
63 84
prima 9 12 tertia
ſecunda 3 4 quarta quantitas

Aliud

24 30
8 8 8 10 10 10
prima 8 tertia 10
ſecun. 4 quar. 5

ALIA ET PLANIOR HVIVS PROPOSITIONIS demonſtratio.

Sint quatuor quantitates, &c. Quoniam enim primæ & tertiæ æquè ſunt, ex hypotheſi, aſſignatæ multiplices: quot igitur portiones ſibi æquales in ſua habet ipſa prima, tot & tertiam in ſua habere neceſſe erit. quare utraq; multiplici in portiones ſuæ inferiori æquales diſtributa: erit utiq; æqualis multitudo portionum unius, ſicut & multiplicis alterius. Quia uerò æquè multiplex eſt prima quãtitas ſecundæ, & tertia quartæ, loco primæ & tertiæ quantitatum, portionibus, quas in ipſarum multiplicibus æquales habent, ſingulis ordine ſumptis: & ipſæ portiones quantitatum ſecundæ & quartæ æquè multiplices erunt. Ordinatis ergo iam ſex quantitatibus, quarũ prima quidem & quinta ſint priores duæ, quas habet prima in ſua multiplici æquales, portiones, ſecunda deinde ſit ipſa ſecunda, ac quarta ipſa quarta. Tertia uerò & ſexta quantitates ſint duæ portiones in multiplici quantitatis tertię, & ipſæ priores. Et quoniam hæ ſex quantitates huiuſmodi ſunt, quales propoſitio præcedens ſecunda requirit, erit per hanc, ex prima & quinta compoſita ita multiplex ſecundæ, ut ex tertia & ſexta compoſita multiplex eſt ipſius quartæ. Igitur, ſi in multiplicibus non plures quàm duæ, primæ & tertię quãtitatibus ęquales portiones fuerint: iam ſtatim conſtat ipſa propoſitio. Quòd ſi plures fuerint, maneant ſecunda & quarta quantitates, prima uerò & tertia eſto priorum duarum in multiplicibus portionum aggregata, quinta deinde & ſexta ſint tertiæ in multiplicibus portiones. Et quoniam etiam iam quales propoſitio præcedens ſecunda requirit, ſex quantitates apparent: idem etiam quod prius per eam inferri poteſt. Conſtat itaq; propoſitio, ubi quidem tres fuerint in multiplicibus portiones, ſuis inferioribus æquales. Non aliter procedendum erit, ubi portiones quatuor, quinq; aut plures etiam fuerint, id quod pro pleniore huius propoſitionis declaratione dicere libuit.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ.

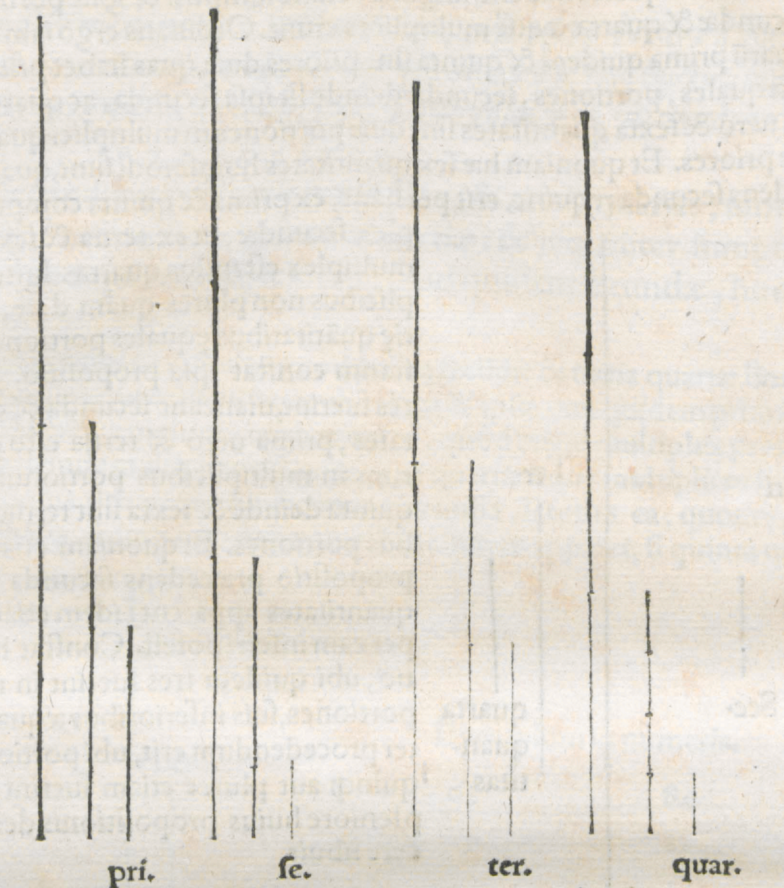
Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον· καὶ τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ τε πρώτου καὶ τρίτου πρὸς τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου, καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμόν, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, ληφθέντα κατάλληλα.

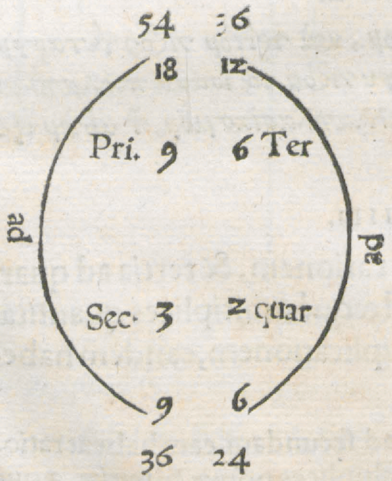
PROPOSITIO IIII.

Si prima ad ſecundam, eandem habuerit rationem, & tertia ad quartam: & primæ & tertiæ æquè multiplices, ad æquè multiplices quantitatum ſecundæ & quartæ, iuxta quamuis multiplicationem, eandem habebunt rationem, ad ſe ſumptæ.

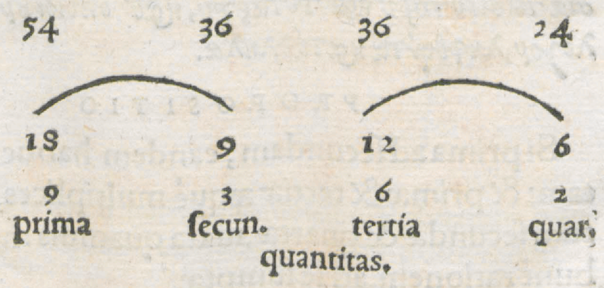
Sint quatuor quantitates, & eſto quòd prima ad ſecundam eam habeat rationem, quam tertia ad quartam. Sint etiam æquè multiplices primæ & tertiæ, æquè inſuper multiplices, iuxta quamuis multiplicationem, quantitatum ſecundæ & quartæ: dico igitur, & ipſas primæ & tertiæ æquè multiplices, ad æquè multiplices

ces quantitatum ſecundæ & quartæ, eandem habere rationem, id quod ſic colligitur, Quoniam ex hypotheſi, primæ & tertiæ æquè ſunt multiplices aſſignatæ, quibus ſi aliæ æquè aſſignentur multiplices: erunt illæ ultimò aſſignatæ, per propoſitionem præmiſſam tertiam, etiam ipſarum primæ & tertiæ æquè multiplices. Per eandem inſuper, cum ſecunda & quarta ſuas æquè multiplices, ex hypotheſi, habeant, ſi ipſis aliæ æquè multiplices aſſignentur: & illæ aliæ, ſecundæ & quartæ quantitatum æquè multiplices erunt. Quoniam autem quantitates, prima, ſecunda, tertia & quarta, ex hypotheſi, ſunt proportionales: multiplices igitur, de quibus iam ſermo fit, ex conuerſione definitionis quintæ huius, in defectu, æqualitate, & exceſſu æqualiter ſeſe habebunt, atq; deinde, cum hæ eædem multiplices, aliarum





Poſſunt numeri etiam ſic ordinari.



etiam

etiam, primarum ſcilicet quantitatum, multiplices ſint: & illę aliæ tandem ex quinta definitione ipſa, ordine, quo ſolent, proportionales erunt. Si prima igitur ad ſecundam & tertia ad quãtitatem quartam eandem rationem habuerint: & primæ &c. quod demonſtraſſe oportuit.

ΛΗΜΜΑ.

Ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη, ὅτι εἰ ὑπερέχει τὸ κ τοῦ μ· ὑπερέχει καὶ τὸ λ τοῦ ν, καὶ εἰ ἴσον· ἴσον, καὶ εἰ ἔλασσον· ἔλασσον. Δῆλον ὅτι, καὶ εἰ ὑπερέχει τὸ μ τοῦ κ· ὑπερέχει καὶ τὸ ν τοῦ λ, καὶ εἰ ἴσον· ἴσον, καὶ εἰ ἔλασσον· ἔλασσον. Καὶ διὰ τοῦτο ἔσται καὶ ὡς τὸ η πρὸς τὸ ε, οὕτως τὸ θ πρὸς τὸ ζ.

LEMMA, VEL ASSVMPTVM.

Quoniam igitur demonſtratum eſt, Si multiplex primæ quantitatis multiplicis excedat multiplicem multiplicis tertiæ: & multiplex multiplicis ſecundæ excedet multiplicem multiplicis quantitatis quartæ. Quòd ſi æqualis: æqualis. Si uerò minor fuerit: minor etiam erit. Manifeſtum autem eſt, Si multiplicis tertiæ quantitatis multiplex, excedat multiplicem multiplicis quantitatis primæ: quod tum & multiplex quartæ quantitatis multiplicis, multiplicem multiplicis quantitatis ſecundæ excedet, & ſi ſit æqualis: æqualis, ſi uerò minor: minor etiam ſit. Atque ideo etiam multiplex ſecundę ad multiplicem primę, ſicut multiplex quartæ ad multiplicem quantitatis tertiæ ſeſe habebit.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ· καὶ ἀνάπαλιν ἀνάλογον ἔσται.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifeſtum eſt, quòd ſi quatuor quantitates in proportione ſint, & permutatim etiam illas proportionales eſſe.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε.

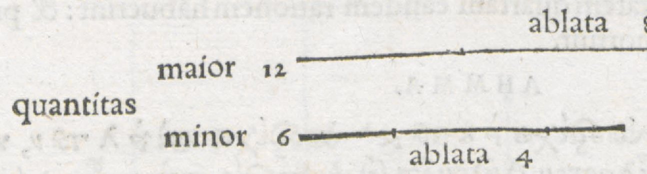
Ἐὰν μέγεθος μεγέθους ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον, ὅπερ ἀφαιρεθὲν ἀφαιρεθέντος· καὶ τὸ λοιπὸν τοῦ λοιποῦ ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ ὅλον τοῦ ὅλου.

PROPOSITIO V.

Si quantitas quantitatis multiplex fuerit, quemadmodum ablatum ablati: & reliquum reliqui, ut totum totius multiplex erit.

Sint duæ quantitates, quarum una ſit alterius multiplex, auferatur autem ab utraq; harum portio aliqua, quarum ſimiliter una alterius, ſicut tota totius, ſit multiplex: dico, & reliquarum quantitatum, ut tota totius, unam alterius multiplicem eſſe. Sicut ablatum maioris multiplex eſt, ex hypotheſi, ablati quantitatis minoris, ita multiplex eſto, ex ſtructura, maioris reſiduum quãtitatis alterius quartę: & erit ex propoſitione prima huius, maior quantitas aggregati, quod ex quarta quantitate & maioris ablato naſcitur, ſicut ablatum de maiore minoris quantitatis ablati, multiplex. Sed quia ita etiam, ex hypotheſi, multiplex eſt maior quantitas ipſius minoris: æquè igitur eſt multiplex maior quantitas utriuſq; ipſorum, aggregati ſcilicet iam commemorati, & minoris quantitatis: quare ęqualia inter ſe, aggregatum

& minor quantitas. Dempto igitur eo quod eſt eis commune, ablato ſcilicet minoris, ex utraq; parte: & reliqua, quarta ſcilicet quantitas, atq; reſiduum minoris, ex



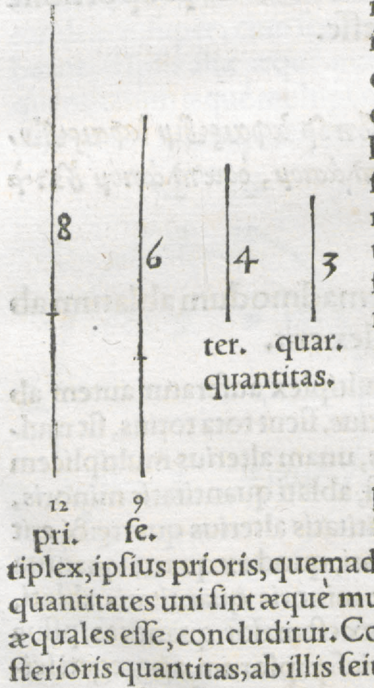
communi quadam noticia, inter ſe æqualia erunt. Quare quemadmodum, ex ſtructura, æquè eſt multiplex ablatum maioris ipſius minoris quantitatis ablati, & reſiduum maioris ipſius quartæ quantitatis: ita nunc propter æqualitatem, loco ſcilicet quartæ quantitatis reſiduo minoris ſumpto, & reſidua, quemadmodum ablata, inter ſe multiplicia erunt. Sed quia ut ablatum ablati, ſic ex hypotheſi, & maior quantitas ipſius minoris: quare & ablatum ablati, ut ipſæ quantitates, unum alterius multiplex erit. Si quantitas igitur quãtitatis multiplex fuerit, quemadmodum ablatum ablati: & reliquum reliqui, ut totum totius multiplex erit. quod demonſtraſſe oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ.

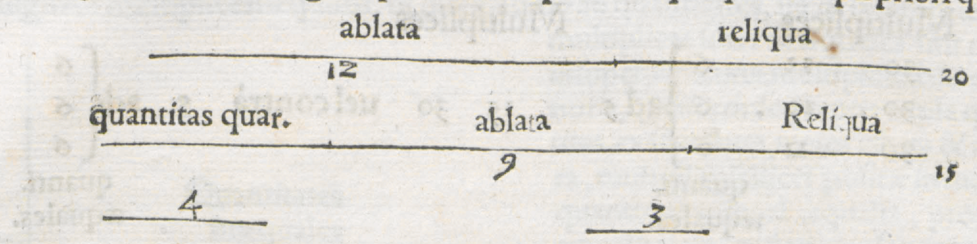
Ἐὰν δύο μεγέθη δύο μεγεθῶν ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσια, καὶ ἀφαιρεθέντα τινὰ τῶν αὐτῶν ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσια· καὶ τὰ λοιπὰ τοῖς αὐτοῖς, ἤτοι ἴσα ἐστὶ, ἢ ἰσάκις αὐτῶν πολλαπλάσια.

PROPOSITIO VI.

Si duæ quantitates duarum quantitatum æquè fuerint multiplices: & ablatæ quædam earundem æquè fuerint multiplices: reliquæ eiſdem aut æquales ſunt, aut æquè ipſarum multiplices.



Sint duarum quantitatum æquè multiplices, ſint etiam portiones quædam, de multiplicibus ablatæ, ad eaſdem duas æquè multiplices: dico, multiplicium reliquas quantitates, ijſdem duabus aut ęquales, utranq; utriq;, aut uerò earũ ęquè multiplices eſſe. Minores non poſſunt eſſe reliquæ ipſis quantitatibus poſitis, propterea quòd multiplices eis æqualiter aſſignatæ ſint. Eſto igitur primò quòd prioris multiplicis reliqua ſuæ quantitati æqualis ſit: dico ſanè, & poſterioris multiplicis reliquam ſuæ quantitati æqualem eſſe, id quod hoc modo demonſtrabitur. Sumatur ipſi poſteriori æqualis quantitas alia. Et quoniam portiones ablatæ, ex hypotheſi, ipſarum quantitatum, primæ ſcilicet & ſecundæ, ſunt æquè multiplices, cum quantitati priori, ſuæ multiplicis reliqua, ex hypotheſi, poſteriori uerò alia quędam quantitas, ex ſtructura, æqualis ſit, ſi reliqua multiplicis ſuæ prioris ablatæ, ſumpta deinde quantitas poſterioris multiplicis ablatæ acceſſerint: & hæ compoſitæ earundem quantitatũ æquè multiplices erunt. Sed quia etiam una compoſitarum, quæ eſt prior multiplex, ipſius prioris, quemadmodum poſterior poſterioris, eſt multiplex, cum duę quantitates uni ſint æquè multiplices: illas ex communi quadam noticia inter ſe æquales eſſe, concluditur. Communi igitur portione, quæ eſt ablata multiplicis poſterioris quantitas, ab illis ſeiuncta, & quæ relinquuntur, ex communi quadam noticia: atq; deinde, cum una reliqua poſteriorẽ quantitatem ęqualem habeat, & illa eadem poſterior quantitas & reliqua ipſius, & id ex communi quadam noticia, inter ſe æquales erũt. Sicut igitur prioris multiplicis reliqua quãtitas ipſi priori quantitati, ex hypotheſi, æqualis eſt: ita & poſterioris reliquam ipſi poſteriori quantitati æqualem eſſe neceſſariò ſequitur. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, Similiter oſtẽdemus, ſi prioris multiplicis reliqua ſuæ quantitatis multiplex ſit, quòd & poſterior ad ſuam tam multiplex eſſe debeat. Si duę igitur quantitates duarum quantitatum æquè fuerint multiplices, & ablatæ quædam earũdem æquè fuerint multiplices: reliquæ eiſdem aut æquales ſunt, aut æquè ipſarum multiplices. quod demonſtraſſe oportuit.

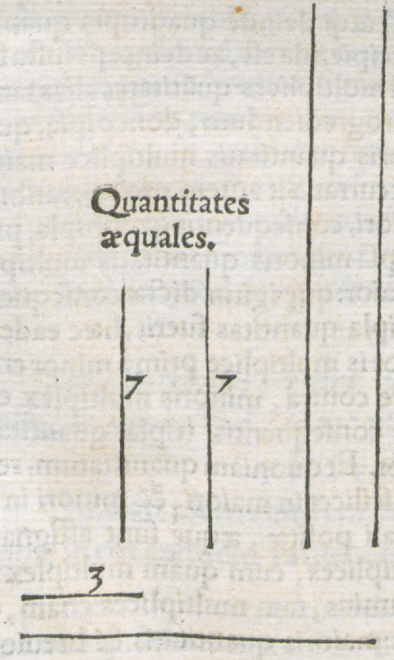


ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ.

Τὰ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· Καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὰ ἴσα.

PROPOSITIO VII.

Æqualia ad idem, eandem habent rationem. Et idem, ad æqualia.



Sint duæ quantitates æquales, ad aliam tertiã, quantamcunq;, relatæ: dico, neutram æqualium diuerſam ab alia cum tertia illa conſtituere rationem. Colligit hæc propoſitio ſuam demonſtrationem ex definitione 5 huius, in hunc modũ. Sumantur æqualium quantitatum æquè multiplices, & erunt hæ, ex communi quadam noticia, inter ſe æquales. Sumatur & ipſius quantitatis tertię aliqua utcunq; multiplex, & ordinentur quantitates, ut ſcilicet æqualium una, prima: alia, tertia: alia deinde, ubi plures eſſent, quinta: ac cæteræ deinceps prout naturalis imparium numerorum ordo requirit, uocentur. Illa tertia uerò, ut quæ æqualium omnium eſt communis conſequens, à paribus numeris, ſecundæ, quartæ & ſextæ, & cæ. nomen habeat. Et quoniam, quantum ad priorem partem, primæ & tertiæ, ac cæterarum, quarum impar eſt appellatio, quantitatum, æquè aſſignatæ multiplices, ſecundæ & quartæ, ac reliquarum deinde, ut quæ à pari numero nominantur, quantitatum æquè multiplices ęqualiter excedunt, uel eis omnino æquales, uel minores ijs ſunt: infertur, ex definitione 5 huius, ipſas quantitates, primam nimirum ad ſecundã, & tertiam ad quartam, ac reliquas deinde omnes, quamlibet ad ſuam, in eadem eſſe ratione: quare ſic patet pars prior. Poſterior uerò. Manentibus ijſdem quantitatibus, alio tamen ordine diſpoſitis, ita nimirum, ut quæ in priori ſecundæ & quartæ quantitatis nomen habuit, iam primæ & tertiæ appellationem ſortiatur. Prima uerò quæ prius, ſecunda nunc: & ſecunda deinde, quarta iam uocetur. Sicq; per eandem definitionem quintam: & poſterior huius propoſitionis pars obtinebitur, primam ſcilicet, hoc eſt illam, quæ iam eſt communis æqualium omnium antecedens, ad ſecundam, unam ex æqualibus, eſſe, ut eadem prima ad æquales omnes. Aequales igitur ad eandem, eandem habent rationem, &c. quod demonſtrari oportuit.

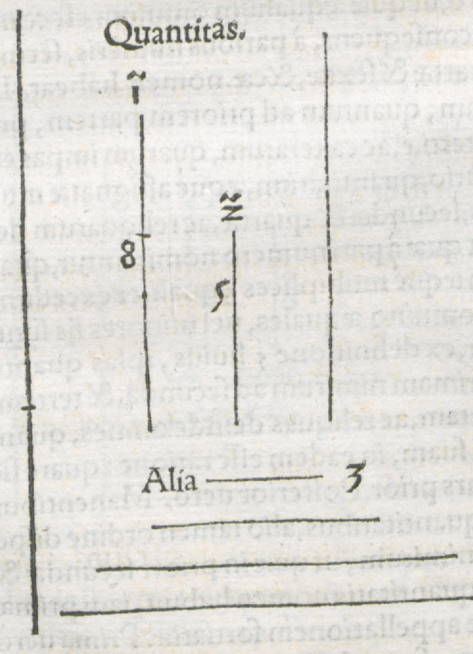
Multiplices					Multiplices				
30	12	6							6
30 .	12 .	6	ad 5	15	30	uel contrà	5	ad	6
30	12	6							6
		quanti. æquales.							quanti. æquales.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η.

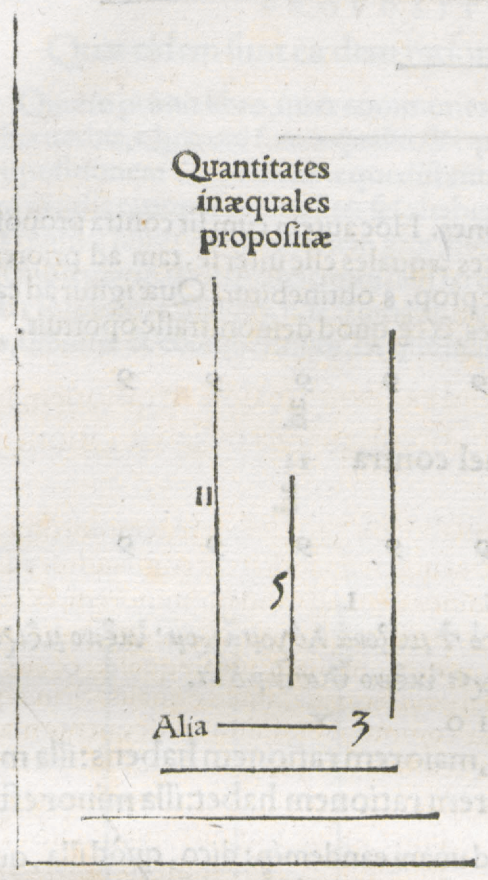
Τῶν ἀνίσων μεγεθῶν, τὸ μεῖζον πρὸς τὸ αὐτὸ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἔλαττον. Καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ ἔλαττον, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὸ μεῖζον.

PROPOSITIO VIII.

Inæqualium quantitatum, maior ad eandem, maiorem rationem habet, quàm minor. Et eadem ad minorem, maiorem habet rationem, quàm ad maiorem.



Sint quantitates quotcunq;, in præſentia autem, pro faciliori exemplo, duæ ſufficiant, & eſto quòd ex æquo ad unam & eandem quantitatem conferantur: dico igitur, quòd maior inæqualiũ: maiorem, minor uerò ad eandem: minorem, & contra, hæc eadem ad minorem inæqualium, maiorem, quàm ad maiorem, habeat rationem. Sumatur ex inæqualium maiori portio, quæ ſit minori æqualis: & erit altera quæ relinquitur portio, breuiori ſignatę aut æqualis, aut inæqualis. Si inæqualis, utra breuior fuerit, illius multiplex, quæ communi omnium conſequente maior ſit, accipiatur, quàm multiplex deinde hæc eadem ſumpta quantitas ſuæ inferioris fuerit, tam multiplex eſto etiam quantitas alia portionis in maiori maioris, alia inſuper ipſius minoris quantitatis. His multiplicib. tali ordine ſumptis, ipſius tandem omnium conſequentis dupla, tripla, atq; deinde quadrupla quantitas accipienda eſt, ac deinceps iuſta ſerie ad multiplices quãtitates alias tamdiu progrediendum, donec ipſa, quæ minoris quantitatis multiplice maior ſit, occurrat. Sit autem, pro operatione faciliori, conſequentis quadrupla, primò ipſa minoris quantitatis multiplice maior: quę igitur dictæ conſequentis tripla quantitas fuerit, hæc eadem minoris multiplice primò minor erit: quare contrà, minoris multiplex eadem conſequentis tripla quantitate maior. Et quoniam quantitatum, reliquæ ſcilicet in maiori, & minori in ea æquali poſitæ, æquè ſunt aſſignatæ multiplices, cum quàm multiplex ſit una unius, tam multiplices etiam, ex propoſitione prima huius, omnes omnium ſint: maioris quantitatis & breuioris in ea portionis æquè multiplices erunt. Sed cum ut breuioris portionis ita etiam, ex ſtructura minoris quantitatis multiplex ſumpta ſit: minoris & maioris quantitatum æquè multiplices erunt, quod eſt obſeruandũ. Rurſus quoniam quantitatum, poſitæ ſcilicet in maiori minori æqualis, & ipſius minoris, æquè ſunt, ex ſtructura aſſignatæ multiplices: ſequitur, ut quemadmodũ quantitates, ita & ipſarum æquè multiplices inter ſe æquales ſint: atq; inſuper, ſicut una, multiplex ſcilicet minoris, quàm conſequentis tripla quantitas, ex ſtructura, maior eſt, ita & altera, multiplex ſcilicet poſitæ in maiori quantitati minori æqualis, propter æqualitatem, eadem conſequentis tripla maior erit. Maior autem eſt, ſimiliter ex ſtructura, breuioris in maiori quantitate portionis multiplex ipſa conſequente: tota igitur totius maioris quãtitatis multiplex, ſimul utriſq;, conſequente ſcilicet & tripla eius, maior erit: quare etiam & eadem totius maioris multiplex, propter æqualitatem, conſequentis quadrupla maior erit: unde ſic ipſum etiam excedit. Sed quoniam multiplex minoris conſequentis quadruplam non excedit, ut patet ex ſtructura: maior igitur maiorem ad communem omnium conſequentẽ, quàm ipſa minor quãtitas ad eandẽ, ex definitione 7 huius, ratione habebit. Atq; hæc eſt prior huius propoſitionis pars. Porrò mox deinde, cõſequentibus loco antecedentiũ, & antecedentibus loco conſequentiũ ſumptis, per eandem allegatam 7 definitionem, conſequentis ad minorem, rationem maiorem, quàm ad maiorem quantitatem habebit. Eſto uerò nunc altera, quæ relinquitur, portio, breuiori ſignatæ æqualis, quia quantitates uel portiones in maiori æquales ſunt, tum utriuſuis portionis multiplex, quæ communi omnium conſequente maior ſit, quantitas ſumenda eſt. nam ſtructura deinde & demonſtratione ipſa, ut in priori, inſtituta, res ſucceſſum habebit. Si igitur inæqualium quantitatum ad unam & eandem collatio facta fuerit: maior maioris, quàm minoris quantitatis ad eam ratio erit. Contra uerò, eiuſdẽ ad minorem maior, quàm ad maiorem quantitatem ratio. quod demonſtraſſe oportuit.



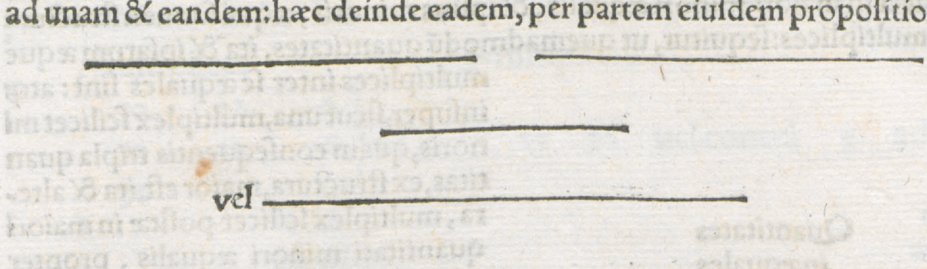
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ.

Τὰ πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον· ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. Καὶ πρὸς ἃ τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· κἀκεῖνα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

PROPOSITIO IX.

Quæ ad idem eandem habent rationem: æqualia inter ſe ſunt. Et ad quæ idem eandem rationem habet: & illa æqualia inter ſe ſunt.

Habeant quotcunq; quantitates ad unã eandemq; eandem rationem. Aut contrà, eſto quòd unius eiuſdemq; ad quotcunq; ſit una & eadem ratio: dico, utrum poſitum fuerit, illas quantitates inter ſe æquales eſſe. Hoc autem demonſtratione ad incommodum ducente, ex propoſitione octaua præcedenti, ſic patet. Niſi enim eſſent æquales quantitates illæ: ſequeretur, per partem præcedentis priorem, illas ad unam & eandem: hæc deinde eadem, per partem eiuſdem propoſitionis poſte-



riorem, ad illas, diuerſas conſtituere rationes. Hoc autem cum ſit contra propoſitionis noſtræ hypotheſim, illas quantitates æquales eſſe inter ſe, tam ad priorem quam etiam ad poſteriorē partem, ex hac prop. 8 obtinebitur. Quæ igitur ad eandem, eandem habent rationem quantitates, &c. quod demonſtraſſe oportuit.

7 7 7 Item 9 9 9 9 9
uel con. ad 5 ad uel contra ad 13 ad
7 7 7 9 9 9 9 9

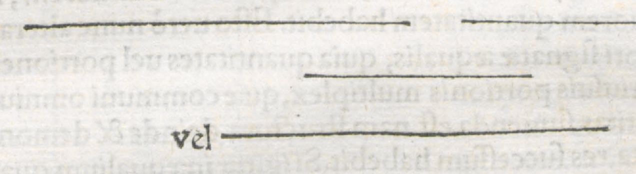
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι.

Τῶν πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἐχόντων, τὸ τὸν μείζονα λόγον ἔχον· ἐκεῖνο μεῖζόν ἐστι. Πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει· ἐκεῖνο ἔλαττόν ἐστι.

PROPOSITIO X.

Ad eandem rationem habentium, maiorem rationem habens: illa maior eſt. Ad quam autem eadem maiorem rationem habet: illa minor eſt.

Conferantur quotcunque quantitates ad unam eandemque: dico, quòd illa, quæ ex his maiorem ad communem earum conſequentem habuerit rationem, maior ſit: dico etiam, ad quam ipſa conſequens quantitas maiorem rationem habuerit,



eam contrà minorem eſſe. Nam ſi maiorem habens rationem, ad aliam non reputetur eſſe maior, erit illa alij aut æqualis, aut alia minor. Si æqualis, cum æqualium ad idem, ex priore parte propoſitionis ſeptimæ huius, eadem ſit ratio, harū uerò quantitatum, ex hypotheſi, ratio diuerſa, cōtra noſtram illam hypotheſim agetur, quod non permittitur. Eſto autem nunc, quòd maiorem rationem habens ad aliam, minor ſit, &c. Et quoniam, per priorem partem propoſitionis 8 huius, Inæqualium quantitatum maior ad eandem, maiorem rationem habet, quàm minor, erit id contra propoſitionis hypotheſim. Conſtat itaque propoſitionis prior pars. Poſterior eodem modo, ex poſterioribus allegatarum propoſitionum partibus, retinebitur. Ad eandem igitur, &c. quod demonſtraſſe oportuit.

Exemplum in numeris.

Antecedentes 7 6 4 9
Conſequens 5 uel 9
una & eadem quantitas.

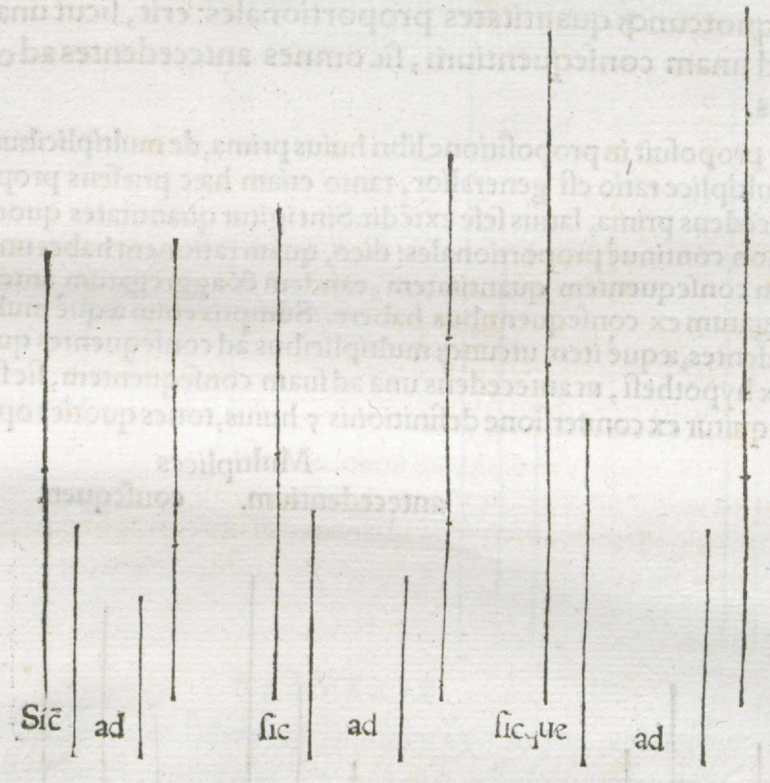
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ.

Οἱ τῷ αὐτῷ λόγοι οἱ αὐτοὶ· καὶ ἀλλήλοις εἰσὶν οἱ αὐτοί.

PROPOSITIO XI.

Quæ eidem ſunt eædem rationes: & inter ſe ſunt eædem.

Quæ in primo libro, inter communes notitias, autor de quantitatibus in genere his uerbis, Quæ uni ſunt æqualia, &c. propoſuit, in eodem etiam libro idem, per propoſitionem 30, in lineis æquediſtantibus, uerum eſſe demonſtrauit, id quoque iam in ipſis rationibus ſimiliter ſeſe habere, proponit, & hoc quidem per definitionis quintæ huius conuerſionem atque ipſam quintam, hac ſtructura. Sint rationes, exempli gratia, duæ qualeſcunque, alij tertiæ cuidam ſimiles & eædem: dico, eas & inter ſe ſimiles eaſdemque eſſe. Sumantur antecedentium quantitatū æquè multiplices, ſimiliter & cōſequentium. Et quoniam utraque duarum rationum, quæ ſunt ter-



tiæ ſimiles, antecedens quantitas, eſt ad ſuam conſequentē, ex hypotheſi, ut antecedens tertiæ rationis ad ſuam cōſequentem, & rurſus, quoniam tam antecedentium quàm etiam conſequentium, ex ſtructura, æquè ſunt aſſignatæ multiplices: ſequitur per conuerſionem definitionis quintæ huius, bis repetitam (ſunt enim duæ rationi uni ſimiles poſitæ) multiplices antecedentium, hoc eſt primæ & tertiæ quantitatum, in addendo, minuendo, uel æqualitate, reſpectu ſuarum conſequentium æqualiter ſeſe habere. Quemadmodum igitur ſe habet multiplex antecedentis in tertia ratione, ad multiplicem ſuæ conſequentis: ita etiam ſeſe habebunt multiplices antecedentium reliquarum duarum rationum, ad ſuarum conſequentium multiplices. Cum res igitur ita ſeſe habeat: per hanc ipſam quintam definitionem huius concluditur propoſitum, illas ſcilicet duas rationes inter ſe ſimiles eſſe & eaſdem. Quæ igitur eidem ſunt eædem rationes, & inter ſe ſunt eædem. quod demonſtraſſe oportuit.

Exemplum in numeris.

		6	12	18	24
Sint rationi	3 ad 2 eædem,	rationes	6 ad 4	9 ad 6 &	12 ad 8
		4	8	12	16
		6	12	18	24
		8	16	24	32

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ.

Ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ἀνάλογον, ἔσται ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα.

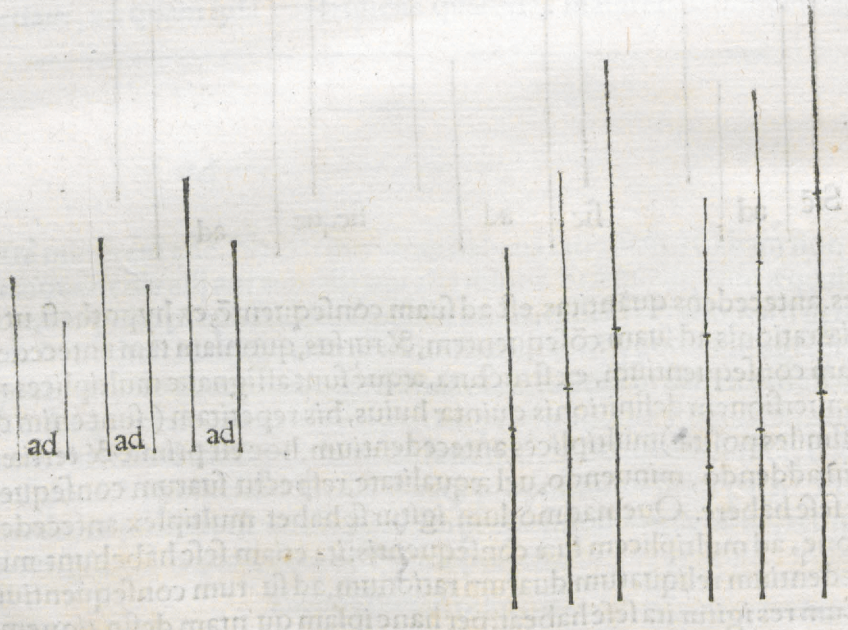
PROPOSITIO XII.

Si fuerint quotcunꝙ quantitates proportionales: erit, ſicut una antecedentium ad unam conſequentium, ſic omnes antecedentes ad omnes conſequentes.

Simile autor propoſuit in propoſitione libri huius prima, de multiplicibus. Itaꝙ, quanto ipſa multiplice ratio eſt generalior, tanto etiam hæc præſens propoſitio, quàm ipſa pręcedens prima, latius ſeſe extẽdit. Sint igitur quantitates quotcunꝙ, continuè uel non continuè proportionales: dico, quam rationem habet una antecedens ad ſuam conſequentem quantitatem, eandem & aggregatum antecedentium ad aggregatum ex conſequentibus habere. Sumptis enim æquè multiplicibus ad antecedentes, æquè item utcunꝙ multiplicibus ad conſequentes quantitates, cum ſit, ex hypotheſi, ut antecedens una ad ſuam conſequentem, ſic ſingulæ ad ſingulas: ſequitur ex conuerſione definitionis 5 huius, toties quoties opus fuerit eam repetendo, ut ſicut unius antecedentis multiplex à ſuæ conſequentis multiplice defecerit, uel ei æqualis ſit: ſiue uerò eandem exceſſerit, ſic & ſingulæ antecedentium ad conſequentium ſingulas multiplices ſeſe habere. Igitur ſi primæ quantitatis

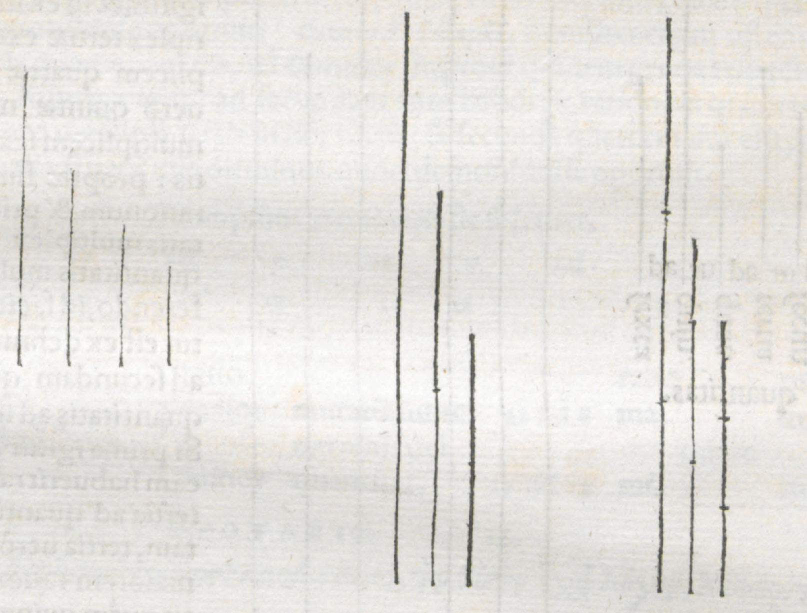
Multiplices

antecedentium. conſequen.



multiplex à ſuæ conſequentis multiplice defecerit, aut ei æqualis ſit, uel eandem exceſſerit: ſequitur, ut antecedentium multiplices ſingulæ, eodem modo ſuarum conſequentium multiplices reſpiciant. Quare, ſicut una ſuæ inferioris eſt multiplex, ita omnes omnium. Per primam igitur propoſitionem huius, bis repetitam, quàm multiplex eſt una unius, tam multiplex etiam aggregatum antecedentium, ad cõſequentium aggregatum erit. Ordinentur ergo iam quantitates, ſic, ut unius rationis antecedens ſit prima: ſua deinde conſequens, ſecunda: aggregatum uerò antecedentium, tertia, & conſequentium poſtea aggregatum, quantitas quarta. Et quia quantitatum, primæ & tertiæ, æquè ſunt aſſignatæ multiplices, ſecundæ inſuper & quartæ ſimiliter: infertur, ex definitione quinta, tandem id quod maximè uolebat propoſitio. Si fuerint igitur quotcunꝙ quantitates proportionales: erit ſicut una antecedentium ad unam conſequentium, ſic omnes antecedentes ad omnes conſequentes. quod demonſtraſſe oportuit.

Exemplum rationis ſeſquialteræ, continuæ,
in quantitatibus quatuor



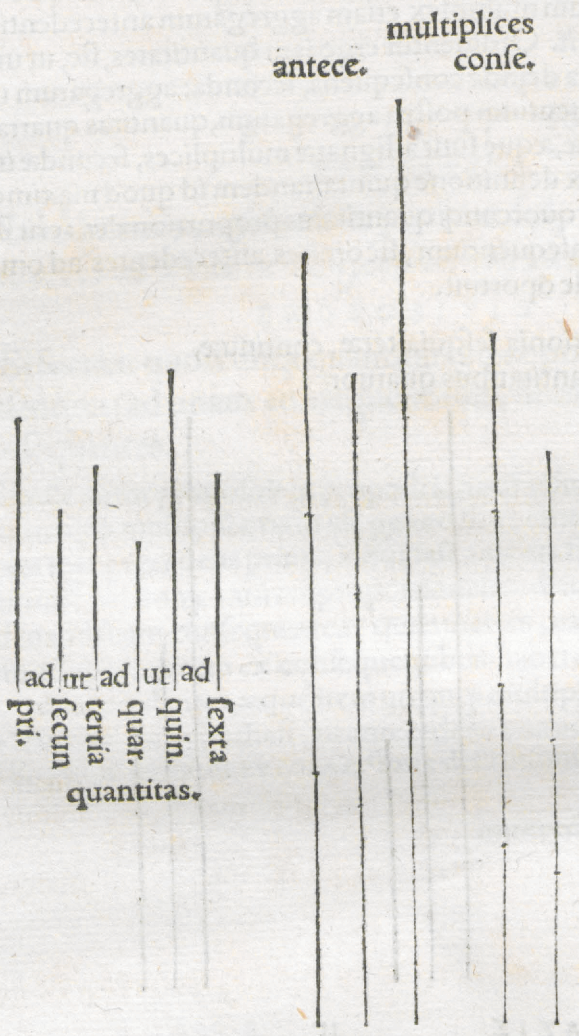
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τρίτον δὲ πρὸς τέταρτον μείζονα λόγον ἔχῃ ἤπερ πέμπτον πρὸς ἕκτον· καὶ πρῶτον πρὸς δεύτερον μείζονα λόγον ἕξει ἤπερ πέμπτον πρὸς ἕκτον.

PROPOSITIO XIII.

Si prima ad ſecundam eam habuerit rationem quam tertia ad quantitatem quartam, tertia uerò ad quartam maiorem rationẽ habuerit quàm quinta ad ſextam: & prima ad ſecundam maiorem rationẽ habebit quàm quinta ad ſextam.

Sint ſex quantitates, & eſto quòd primæ ad ſecundam & tertiæ ad quartam ſit una & eadem ratio, quam uerò tertia ad quartã habet rationem, ea ſit ratione quintæ ad ſextam maior: dico igitur, quod & primæ ad ſecundam maior quàm quintæ ad ſextam ſit ratio. Quoniam enim tertię ad quartam maior eſt ratio, ex hypotheſi, quàm quintæ ad ſextam, ſumantur ipſarum tertiæ & quintæ æquè multiplices, quartæ deinde & ſextæ ſimiliter, ſic tamen, quòd multiplex tertiæ excedat multipli cem quartæ, non autem excedat multiplex quintæ ipſius ſextæ quantitatis multiplicem. Sumantur etiã ipſarum primę & ſecundę ſecundum multiplicitatem tertię & quartæ æquè multiplices. Et quoniam prima quantitas eſt ad ſecundam, ſicut tertia ad quartam, primæ uerò & tertiæ, ut antedẽtibus, ſecundæ inſuper & quartæ, ut conſequentib. æquè ſunt ex ſtructura, aſſignatæ multiplices: primæ igitur & tertiæ multiplices, ad multiplices ſecundæ & quartæ quantitatum, ex conuerſione definitionis 5 huius, in minuendo, æqualitate, & addendo æqualiter ſeſe habebunt. Cũ igitur, & id ex ſtructura, multiplex tertiæ excedat multiplicem quartæ, multiplex uerò quintæ non excedit multiplicem ſextæ quantitatis: propter ſimilitudinem rationum, & primæ quantitatis multiplex, ad ſecundæ quantitatis multiplicem cõferendo, id faciet: maior igitur eſt ex definitiõe 7 huius, ad ſecundam, quàm quintæ quantitatis ad ſextam ratio. Si prima igitur ad ſecũdam eam habuerit rationẽ quam tertia ad quantitatem quartam, tertia uerò ad quartam maiorem rationem habuerit quàm quinta ad ſextam: & prima ad ſecundam maiorem rationem habebit quàm quinta ad ſextam. quod demonſtraſſe oportuit.



Exemplum in numeris ſic ponitur.

18 16 9 8 12 12
maior minor ratio
6 ad 4 ut 3 ad 2 4 ad 3
pri. ſecun. ter. quar. quin. ſex. numerus

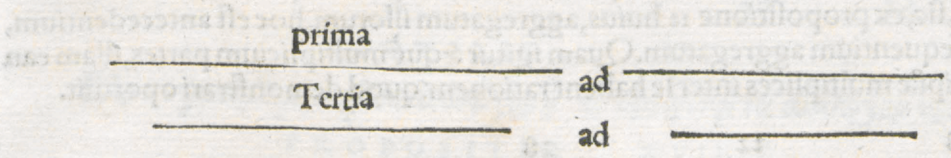
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τὸ δὲ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ· καὶ τὸ δεύτερον τοῦ τετάρτου μεῖζον ἔσται, κἂν ἴσον· ἴσον, κἂν ἔλασσον· ἔλασσον.

PROPOSITIO XIIII.

Si prima ad ſecundam eam habuerit rationem, quam tertia ad quartam, prima uerò ipſa tertia maior fuerit: & ſecunda quarta maior erit, quòd ſi æqualis: æqualis, ſi uerò minor: minor.

Sint quatuor quantitates, prima ad ſecundam ut tertia ad quartam: dico, quemadmodum prima maior eſt quàm tertia, uel ei æqualis, ſiue minor ea, ita & ſecunda erit reſpectu quantitatis quartę. Cum enim, ex hypotheſi, prima maior ſit quàm tertia: ſequitur ex priore parte propoſitionis octauæ huius, quòd prima maiorem quàm tertia ad ſecundam quantitatem, habeat rationem. Quoniam autem, quemadmodum prima eſt ad ſecundam, ita eſt & tertia, ex hypotheſi, ad quartam: propter illam rationum ſimilitudinem, & tertiæ ad quartam maior quàm eiuſdem tertiæ ad ſecundam ratio erit. Ad quam autem una & eadem quantitas maiorem habet rationem, illa, ut poſterior pars propoſitionis 10 huius teſtatur, minor eſſe cenſetur: minor igitur eſt quarta ipſa ſecunda, quare contrà ſecunda quàm quarta maior, quod demonſtraſſe oportuit. Ὁμοίως δὴ δείξομεν. Similiter etiam oſtendemus, quòd ſecunda quartæ æqualis, uel ea minor ſit, prout quidem prima reſpectu tertię poſita fuerit. Si prima igitur ad ſecundam eam habuerit rationem quam tertia ad quartam, prima uerò ipſa tertia maior fuerit: & ſecunda quarta maior erit, quòd ſi æqualis, æqualis, ſi uerò minor: minor. quod demonſtraſſe oportuit.



Exemplum in numeris ſic ſe habet.

15 ad 9 ut 5 ad 3
Vel 27 18 12 8

Quantitas		ratio			ratio		quan.
prima 27	ad ſecun. 18	maior	mutatis nunc terminis uel quantitat.	12 ad 8	ma.	quare	minor
tertia 12		minor		12 ad 18	mi.		maior.

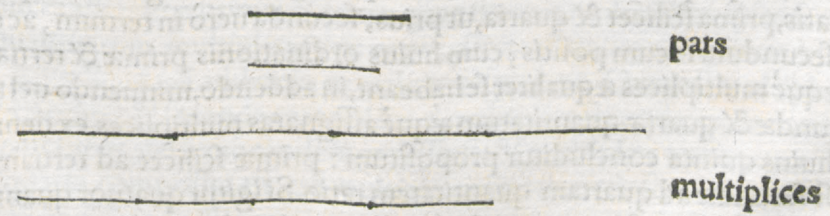
ΠΡΟΤΑΣΙΣ. ΙΕ.

Τὰ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ληφθέντα κατάλληλα.

PROPOSITIO XV.

Partes eodem modo multiplicium, eandem habent rationem, ad ſe ſumptæ.

Sint duæ uel plures quantitates, quarum unaquæq; ſit alterius cuiuſdam quantitatis, tanquam ſuæ multiplicis, pars: eſto tamen, ut quota pars eſt una unius, tota ſint etiam ſingulæ ſingularum: dico ergo, quòd quam ipſæ partes, illam eandem & multiplices inter ſe rationem habeant. Diſtribuantur multiplicium unaquæque in portiones ſuæ inferiori uel parti æquales. Et quoniam æquè ſunt parti-



bus, ex hypotheſi, aſſignatæ multiplices: erunt in una tot portiones ſuæ parti æquales, quot & in altera. Rurſus quoniam portiones cuiuſque multiplicis inter ſe ſunt æquales: erit ſingularum portionum ad portiones ſingulas, una & eadem ratio, & illa quidem, quæ eſt partis ad partem. Quare, ſicut eſt una unius multiplicis portio, uel æqualibus pro ęqualibus ſumptis, ſicut eſt una pars ad portionem alterius, uel partem, ſic, ex propoſitione 12 huius, aggregatum illorum, hoc eſt antecedentium, ad conſequentium aggregatum. Quam igitur æquè multiplicium partes, illam eandem & ipſæ multiplices inter ſe habent rationem. quod demonſtrari oportuit.

28 12 28

7 7 7 7 3 3 3 3 7 7 7 7

quare ſicut 7 ad 3, ſic 24 ad 12

7 3 3 3 3 3

12

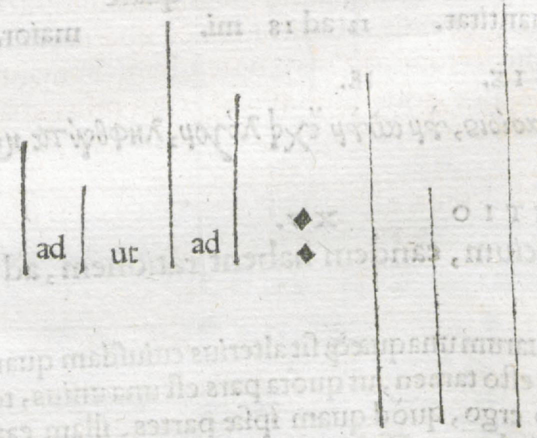
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙϚ.

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ· καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσται.

PROPOSITIO XVI.

Si quatuor quantitates proportionales fuerint: & permutatim hæ proportionales erunt.

Sint quatuor quantitates in ratione una: dico, quòd & permutatim, uel permutata ratione, hoc eſt, prima ad tertiam & ſecunda ad quartam, in una ratione ſint. Sumantur primæ & ſecundæ quantitatum æquè multiplices, atq; inſuper tertiæ & quartę: & erunt hæ, ex præmiſſa, bis uſurpata, in ea qua ſunt ipſæ partes ratione: atque deinde, ex propoſitione 11 huius ſimili ratione bis pro ſimili ſumpta, in una etiam & eadem ratione, prima ſcilicet multiplex ad ſecundam, & tertia ad multiplicem quartam. Sed cum fuerint quatuor quantitates proportionales, prima ad ſecundam ut tertia ad quartam, prima uerò ipſa tertia maior, uel ei æqualis, uel minor ea ſit, & ſecunda quartam, ex propoſitione 14 huius, ſic reſpiciet. Quatuor igitur iam quantitatibus ordinatis, prima ſcilicet & quarta, ut prius, ſecunda uerò in tertium, ac tertia deinde in ſecundum locum poſitis, cum huius ordinationis primæ & tertiæ quantitatum æquè multiplices æqualiter ſe habeant, in addendo, minuendo uel æqualitate, ad ſecundæ & quartæ quantitatum æquè aſſignatas multiplices, ex definitione tandem huius quinta concluditur propoſitum: primæ ſcilicet ad tertiam eam eſſe, quę eſt ſecundæ ad quartam quantitatem ratio. Si igitur quatuor quantitates proportionales fuerint: & permutatim hæ proportionales erunt. quod demonſtraſſe oportuit.



Exemplum in numeris.

21 9 56 24

7 ad 3 ut 28 ad 12

21 9

pri. 7 ter. 3

ſe. 28 quar. 12

56 24

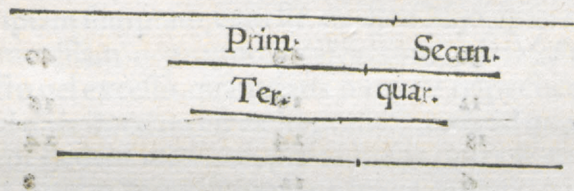
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ.

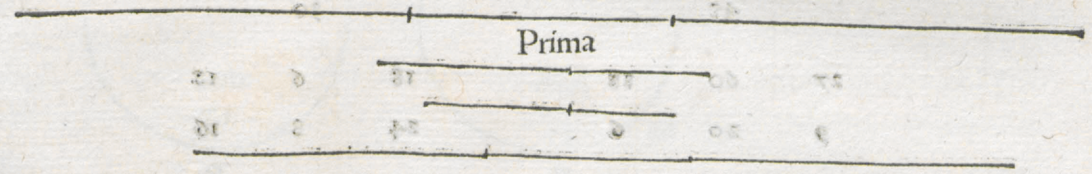
Ἐὰν συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ· καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται.

PROPOSITIO XVII.

Si compoſitæ quantitates proportionales fuerint: & diuiſæ hæ proportionales erunt.

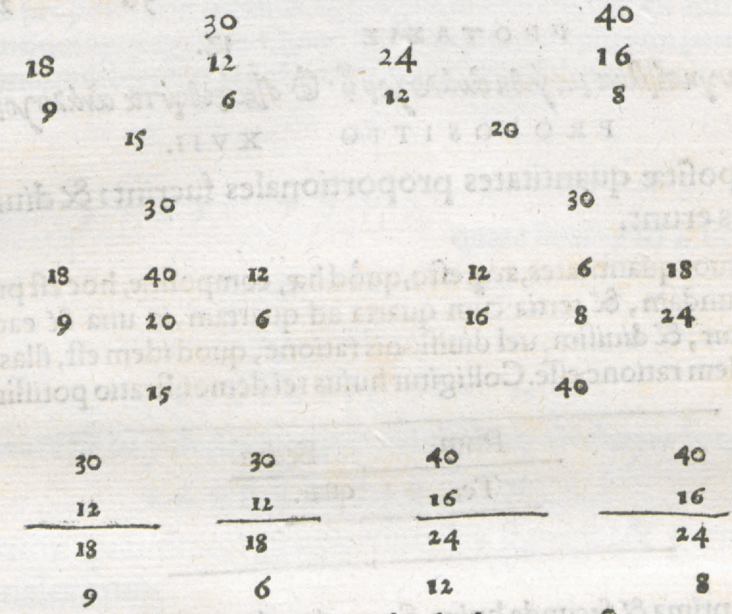
Sint quatuor quantitates, atq; eſto, quòd hæ, compoſitæ, hoc eſt prima cum ſecunda ad ſecundam, & tertia cum quarta ad quartam, in una & eadem ratione ſint: dico igitur, & diuiſim, uel diuiſionis ratione, quod idem eſt, illas quantitates in una & eadem ratione eſſe. Colligitur huius rei demonſtratio potiſſimum ex propoſitionibus prima & ſecunda huius. Sumptis enim quatuor quantitatum, primæ ſcilicet, ſecundæ, tertiæ & quartæ æquè multiplicibus: erit, ratione primæ & ſecundæ quantitatum, ut quàm multiplex eſt una unius, tam multiplices etiam ſint, per propoſitionem primam huius, omnes omnium, atq; deinde hoc idem, per eandem etiam propoſitionem, ratione quantitatum tertiæ & quartæ locum habet, ac tandem, cum ex hypotheſi, æquè ſint quatuor quantitatum aſſignatæ multiplices, commutatione facta primæ & ſecundæ, ut unius, tertiæ item & quartæ, & harum ut unius quantitatis æquè multiplices erunt, quòd eſt notandum. Sumantur rurſus ſecundæ & quartæ, utcunque aliæ æquè multiplices, cum prius etiam ipſarum ſecundæ & quartæ quantitatum æquè multiplices aſſignatæ ſint, modò ſumptæ ipſis prioribus multiplicibus iunctæ, earundem ſecundæ & quartæ quantitatum, ex propoſitione 2 huius, æquè multiplices erunt. Quoniam autem quantitates, prima cum ſecunda, ſecunda, tertia cum quarta, & ipſa quarta, ex hypotheſi proportionales ſunt, primæ uerò & tertiæ, atq; ſecundæ & quartæ quantitatum æquè multiplices aſſignatæ: primæ & tertiæ quantitatum multiplices, ipſas ſecundæ & quartæ quantitatum multiplices, ex conuerſione definitionis quintæ huius in minuendo, æqualitate uel addendo æqualiter reſpiciunt. Quare ſi multiplex primæ, hoc eſt ex prima & ſecunda compoſitæ, à multiplice ſecundæ quantitatis defecerit, ei æqualis fuerit, uel hanc eandem exceſſerit: & multiplex tertiæ, quæ ſcilicet ex tertia & quarta compoſita eſt, ad multiplicem quartæ conferendo, ſic ſe habebit, ac portionibus deinde illis, quas ex utraq; parte communes habent, ablatis atq; neglectis, cum de reſiduis multiplicibus, ex communi quadam noticia, quòd hæ



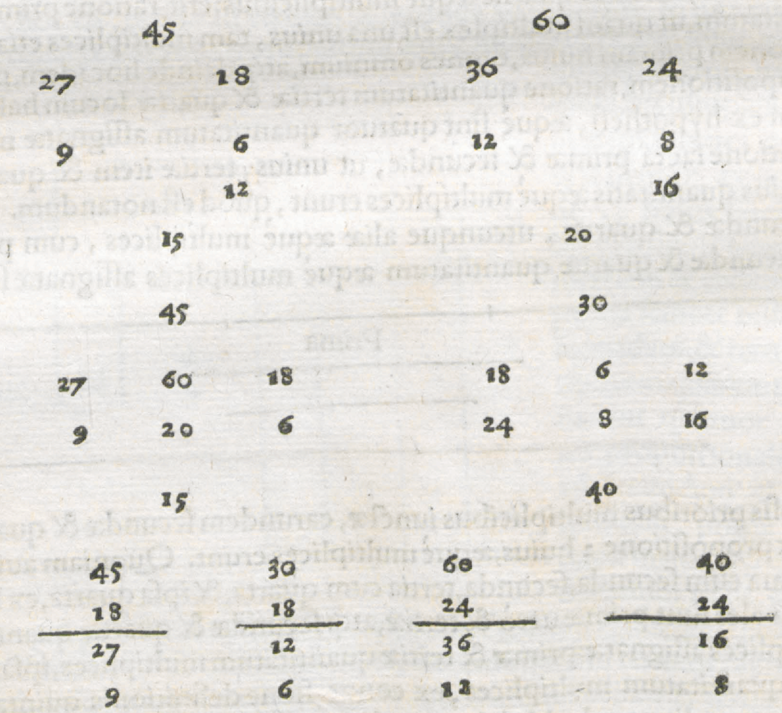


etiam ad ſuas inferiores ſic ſeſe habeant, nullum dubium ſit: ex definitione tandem 5 huius, id quod maximè uolebamus concluditur, primę ſcilicet ad ſecundam eſſe, ut eſt tertiæ ad quartam quantitatem ratio. Si compoſitæ igitur quantitates proportionales fuerint: & diuiſę hę proportionales erũt, quod demonſtraſſe oportuit.

Exemplum in numeris.



Idem exemplum, alijs multiplicibus expoſitum.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΗ.

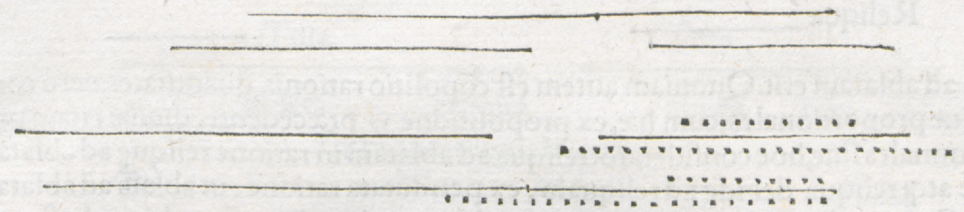
Ἐὰν διῃρημένα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ· καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσται.

PROPOSITIO XVIII.

Si diuiſæ quantitates proportionales fuerint: & compoſitæ hæ proportionales erunt.

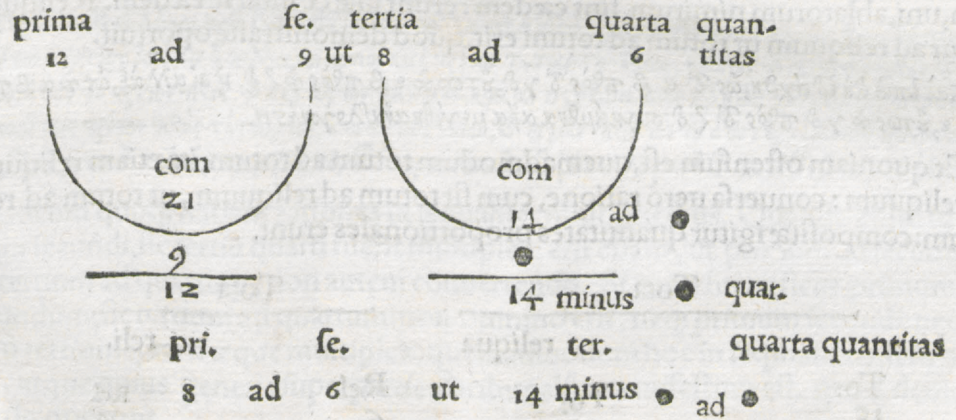
Sint

Sint quatuor quantitates diſiunctæ proportionales, prima ad ſecundam, & tertia ad quartam: dico igitur, & compoſitionis ratione eas proportionales eſſe. Nam ſi non, ſumatur loco quartæ quantitas alia, ad quam nimirum ſe habeat tertia cum quarta, ſicut prima cum ſecunda ad ſecundam. Et quoniam hæc ſumpta, quantitati quartæ minime æqualis eſſe poteſt (nam ſi æqualis eſſet, retineretur illa: atq; ſtatim pateret propoſitũ) erit aut minor illa, aut maior. Vtrum nunc horum ponitur, con-



trarium ſemper infertur, ſumptam ſcilicet, maiorem eſſe ipſa quarta, ubi poſita fuerit minor, uel contrà, eandem ſumptam, ipſa quarta maiorem poſitam, hac eadem minorem eſſe, hoc modo. Quoniam enim compoſita ex prima & ſecũda ad ſecundam, in ea eſt ratione, ex ſtructura, in qua eſt altera ex tertia & quarta compoſita quantitas, ad ipſam ſumptam, cum ſit σύνθεσις λόγου, ipſæ eædem, ſi ſeparatæ à ſeſe fuerint, per præmiſſam 17 proportionales erunt, prima ſcilicet ad ſecundam, ut tertia cum defectu uel exceſſu quantitatis ſumptæ reſpectu quartæ, ad quantitatem ſumptam. Sed quia ſic etiam eſt ex hypotheſi, tertia ad quantitatem quartam, cum quæ eidem ſunt eædem rationes, per 11 huius, inter ſe etiam eædem ſint: per primam tandem partem propoſitionis 14 huius quantitatem ſumptam ipſa quarta maiorem eſſe infertur, cum tamen ſit minor ea poſita. Vel, per tertiam partem eiuſdem 14, minor, cum ſit poſita maior. Quorum ſanè utrunq; cum nullo modo eſſe poſſit, quod nimirum una & eadem quantitas iam ſit alia quadam minor, atq; mox deinde etiam maior, uel contrà, concluditur uerum eſſe propoſitum. Si diuiſæ igitur quantitates proportionales fuerint: & compoſitæ hæ proportionales erunt, quod demonſtraſſe oportuit.

Sint pro exemplo quatuor hæ quantitates.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΘ.

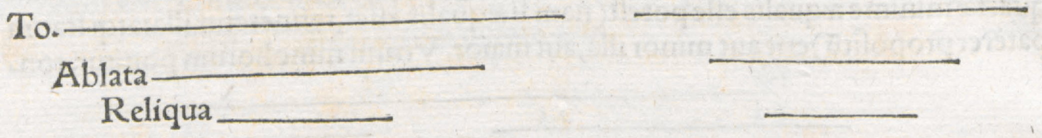
Ἐὰν ᾖ ὡς ὅλον πρὸς, ὅλον οὕτως ἀφαιρεθὲν πρὸς ἀφαιρεθέν· καὶ τὸ λοιπὸν πρὸς τὸ λοιπὸν ἔσται, ὡς ὅλον πρὸς ὅλον.

PROPOSITIO XIX.

Si fuerit ſicut totum ad totum, ſic ablatum ad ablatum: & reliquum ad reliquum, ut totum ad totum erit.

Sint

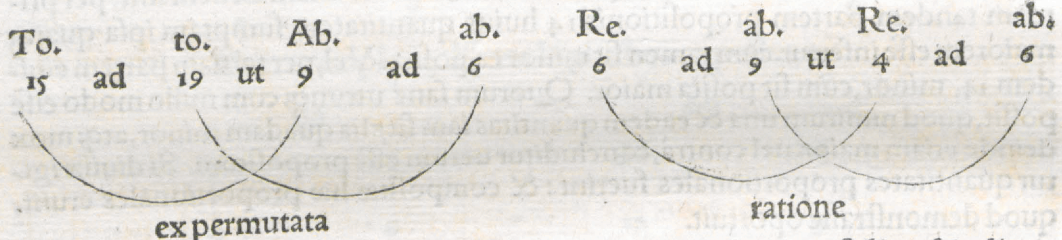
Sint duæ quantitates, portio etiam aliqua ab utraqꝫ quantitate ablata ſic, ut ablatæ portiones eam inter ſe quam ipſæ totæ habeant rationem: dico, quòd & reliquę eandem cum totis rationem habeant. Cum enim, ex hypotheſi, tota ſit ad quantitatem totam, ut portio ablata ad ablatam: ex permutata ratione, tota ad ablatam, ut



tota ad ablatam erit. Quoniam autem eſt cõpoſitio rationis, quantitates uerò compoſitæ proportionales, cum hæ, ex propoſitione 17 præcedenti, diuiſæ etiam proportionales ſint, hoc conſiderato: reliqua ad ablatam in ratione reliquę ad ablatam erit: atqꝫ reliqua deinde ad reliquam, ex permutata ratione, ut ablata ad ablatam erit. Quia uerò ut ablata ad quantitatem ablatam, ita etiam eſt, ex hypotheſi, tota quantitas ad totam: reliqua igitur quantitas ad reliquam, ex propoſitione 11 huius ut tota ad totam erit. Si fuerit igitur ſicut totum ad totum ſic ablatum ad ablatum: & reliquum ad reliquum, ut totum ad totum erit. quod demonſtraſſe oportuit.

Exemplum huius in numeris.

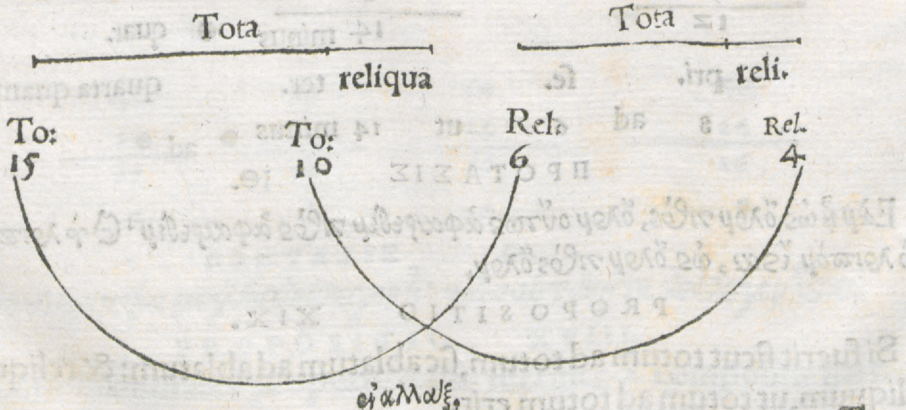
Totum 15 totum 10 eſt ex hypotheſi
ut ablatum 9 ad abla. 6, Igitur
& reliqua 6 reli. 4 ut
totum ad totum erit.



Ergo per 11 propoſitionem huius, cum duę rationes, totorum ſcilicet & reliquorum, uni, ablatorum nimirum, ſint eædem: erunt illæ & inter ſe eædem. Reliquum igitur ad reliquum ut totum ad totum erit. quod demonſtraſſe oportuit.

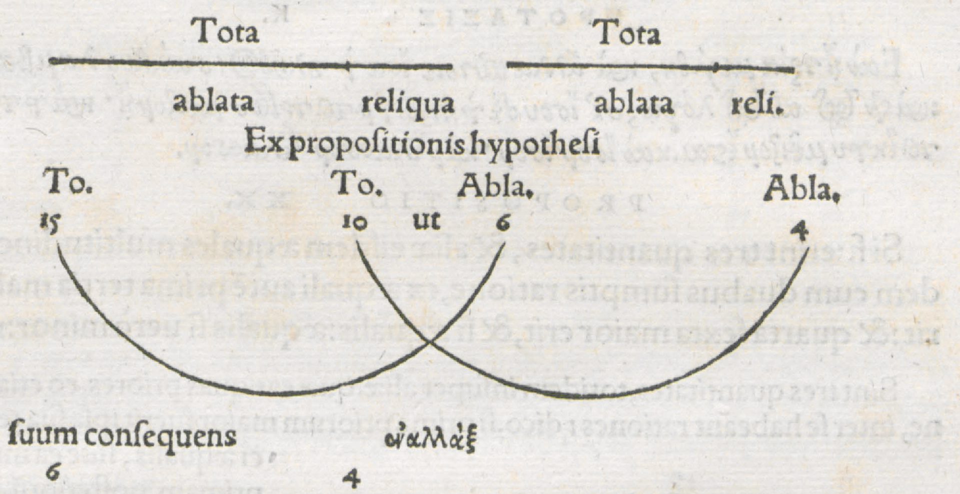
Καὶ ἐπεὶ δὴ ἐδείχθη, ὡς τὸ αβ πρὸς τὸ γδ, οὕτως τὸ εβ πρὸς τὸ ζδ. καὶ ἀλλάξ, ὡς τὸ αβ πρὸς τὸ βε, οὕτως τὸ γδ πρὸς τὸ ζδ· συγκείμενα ἄρα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστιν.

Et quoniam oſtenſum eſt, quemadmodum totum ad totum, ita etiam reliquum ad reliquum: conuerſa uerò ratione, cum ſit totum ad reliquum, ut totum ad reliquum: compoſitæ igitur quantitates proportionales erunt.



Ἐδείχθη δέ, ὡς τὸ αβ πρὸς τὸ αε, οὕτως τὸ γδ πρὸς τὸ γζ. εἰ γὰρ ὡς ἡγούμενον τὸ αβ πρὸς τὴν ὑπεροχὴν αὐτοῦ ἣν ὑπερέχει τοῦ ἑπομένου τοῦ εβ· καί ἐστιν ἀναστρέψαντι.

Demonſtratum eſt autem, nimirum ex propoſitionis huius hypotheſi & permutata ratione, ſicuti totum ad ablatum, ſic totum ad ablatum, cum ſit ut antecedens ad id quo ipſum excedit ſuum conſequens, ad reliquum ſcilicet: & rationis conuerſione quantitates proportionales erunt.



ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ· καὶ ἀναστρέψαντι ἀνάλογον ἔσται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifeſtum eſt, Si compoſitæ quantitates proportionales fuerint: & conuerſione rationis eas proportionales eſſe. quod demonſtraſſe oportuit.

Γεγόνασι δὲ οἱ λόγοι, καὶ ἐπὶ τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων, καὶ ἐπὶ τῶν ἀναλόγων. Ἐπειδήπερ ἐὰν πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τετάρτου· ἔσται, καὶ ὡς τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον, οὕτως τὸ τρίτον πρὸς τὸ τέταρτον. οὐκέτι δέ, καὶ ἀντιστρέφει. Ἐὰν γὰρ ᾖ ὡς τὸ πρῶτον πρὸς δεύτερον, οὕτως τρίτον πρὸς τέταρτον, οὐ πάντως ἔσται, καὶ τὸ μὲν πρῶτον τοῦ δευτέρου ἰσάκις πολλαπλάσιον, τὸ δὲ τρίτον τοῦ τετάρτου, καθάπερ ἐπὶ τῶν ἡμιολίων ἢ ἐπιτρίτων λόγων ἢ τῶν τοιούτων, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Locum quoqꝫ habent rationes in æqualiter multiplicibus. Quando enim ut primum ſecundi, ſic tertiũ quarti fuerit multiplex: erit etiam, ut primum ad ſecũdum, ſic tertium ad quartum, non autem conuertendo. Si enim fuerit ſicut primum ad ſecundum, ſic tertium ad quartum: non omnino erit, neqꝫ primum ſecundi: neque uerò tertium quarti æquè multiplex, quemadmodum hoc in ſequialteris, ſeſquitertijs, atque huius generis ſuperparticularibus alijs manifeſtum eſt. quod demonſtraſſe oportuit.

Exemplum prioris partis, ubi quantitates ſunt multiplices, atqꝫ ſic etiam proportionales.

Vt 9 3 6 2
item 36 9 12 3
uel 16 4 8 2, &c.

Exemplum partis poſterioris, ubi, licet quantitates ſint proportionales, tamen non contrà omnino æquè multiplices.

Vt	6	4	3	2
	4	3	12	9
	5	3	15	9

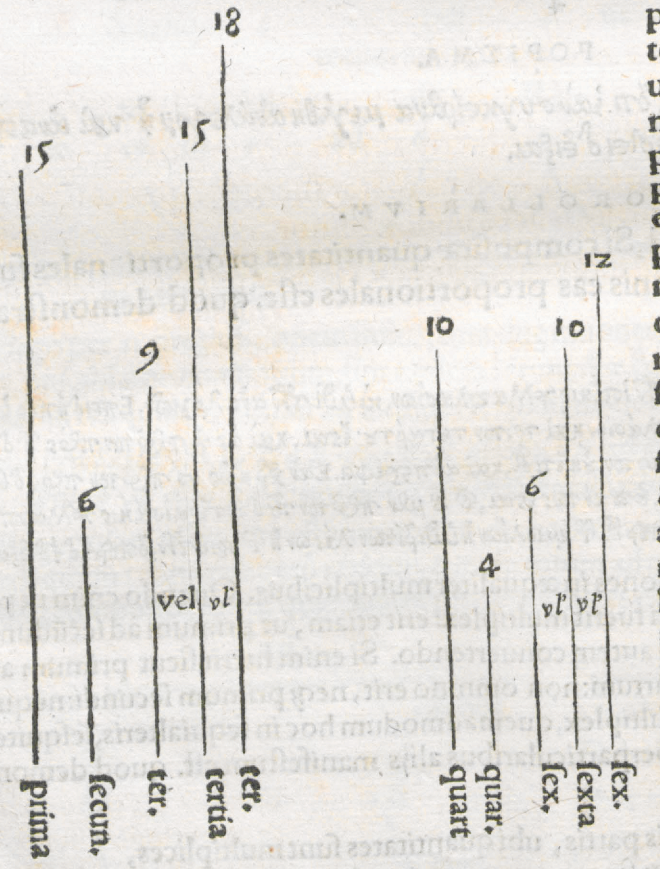
ΠΡΟΤΑΣΙΣ K.

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, δι᾽ ἴσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ· καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου μεῖζον ἔσται. καὶ ἴσον· ἴσον· κἂν ἔλασσον· ἔλασσον.

PROPOSITIO XX.

Si fuerint tres quantitates, & aliæ eiſdem æquales multitudine, in eadem cum duabus ſumptis ratione, ex æquali autẽ prima tertia maior fuerit: & quarta ſexta maior erit, & ſi æqualis: æqualis ſi uerò minor: minor.

Sint tres quantitates, totidem inſuper aliæ, quæ eas quas priores, eo etiam ordine, inter ſe habeant rationes: dico, ſi prima priorum maior fuerit ipſa ſua tertia, uel ei æqualis, ſiue ea minor: & primam poſteriorũ ipſa ſua tertia maiorem, ei æqualem, uel minorem ea eſſe. Quoniam enim prioris ordinis prima, ex hypotheſi, maior ponitur, quàm ipſa tertia: erit illius ad mediã, ex priore parte propoſitionis octauæ, maior quàm huius ad eandem mediam ratio. Sed quia rationes in utroque ordine ſunt inter ſe ſimiles & eædem, prior ſcilicet priori, poſterior uerò ratio poſteriori: & poſterioris ordinis prima ad mediam, maiorem quàm ipſa tertia rationem habebit: quare etiã, per priorem partem decimæ, prima poſterioris, hoc eſt quarta, eadem ſua tertia, hoc eſt ſexta quãtitate maior erit. Eodem modo, ſi prima quàm tertia minor fuerit, per eaſdẽ propoſitionum partes propoſitum inferri poterit. Quod ſi prima & tertia prioris ordinis quantitates æquales inter ſe fuerint, cũ, per priorem partem ſeptimæ, una & eadem ſit harum ad mediam quantitatem ratio, propter rationum ſimilitudinem, quæ in utroq; ordine eſſe præſupponitur: & in poſteriori ordine prima ipſa tertiæ ex priori parte proportioni nonæ æqualis erit, quod demonſtraſſe oportuit.



APPENDIX.

Eadem ratio & in hac, & proximè ſequenti propoſitione concludi poteſt, ſi quatuor aut plures etiam in uno ordine, totidem quoq; ſimilium rationum in altero quantitates poſitæ fuerint, ſi prima prioris maior ſit ſua ultima, ei æqualis uel minor ea: quòd & tum prima poſterioris ordinis, reſpectu ſuæ ultimæ, ſimiliter ſeſe habeat.

Exemplum in numeris, ubi prima eſt

	maior ulti.		ultimæ æqualis		minor ultima	
Prima	9	6	9	6	9	12
	6	4	6	4	6	8
	15	10	15	10	15	20
ultima	3	2	9	6	12	16
quant.	prior	poſter.	prior	poſt.	prior	poſterior ordo

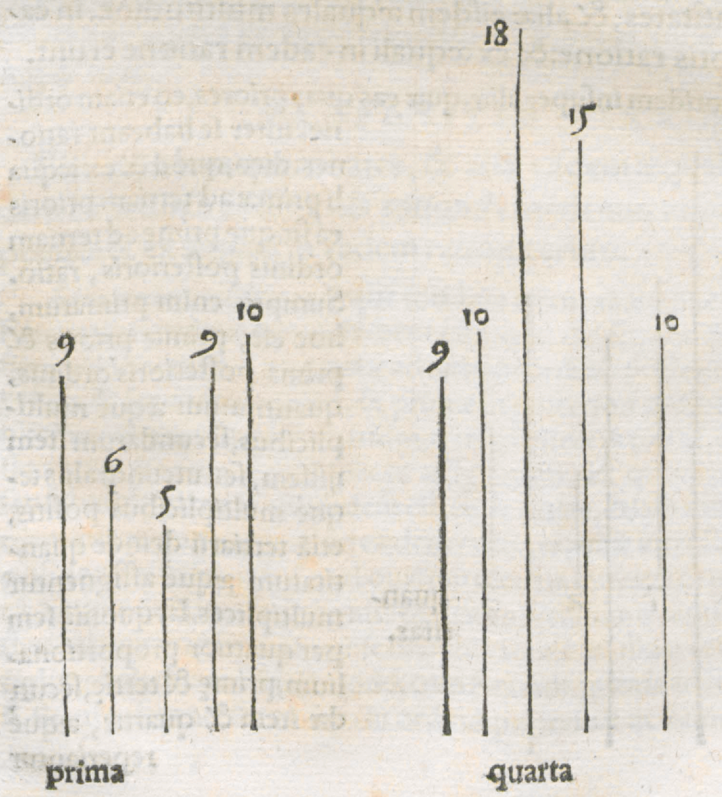
ΠΡΟΤΑΣΙΣ KA.

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾖ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, δι᾽ ἴσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ· καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου μεῖζον ἔσται κἂν ἴσον· ἴσον, κἂν ἔλασσον· ἔλασσον.

PROPOSITIO XXI.

Si fuerint tres quantitates, & aliæ eiſdem æquales multitudine, in eadem cum duabus ſumptis ratione fuerit autem perturbata earum proportio, ex æquali autem prima ipſa tertia maior fuerit: & quarta ſexta maior erit, & ſi æqualis: æqualis, ſi uerò minor: minor.

Sint tres quantitates, totidem inſuper aliæ, quæ eas quas priores inter ſe habeãt rationes, ſit tamen perturbata earum proportio: dico, ſi prima priorũ maior fuerit ipſa ſua tertia, uel ei æqualis, ſiue ea minor: & primam poſteriorum ipſa ſua tertia maiorem, ei ęqualem, uel minorem ea eſſe. Quoniam enim prioris ordinis prima, ex hypotheſi, maior ponitur quàm ipſa tertia: maiorem etiam ad ſecundã prima quàm ipſa tertia, ex priore parte propoſitionis 8 huius, habebit rationẽ. Quoniam autem quæ primæ ad ſecundã in priori, ea etiam eſt, ex hypotheſi, ratio ſecundę ad tertiã in ordine poſteriori: ſecũdæ igitur



ad tertiam in ordine poſteriori: ſecũdæ igitur ad tertiam ordinis poſterioris, maior quàm tertiæ ad ſecũdam in ordine priori ratio erit, unde ſic maior etiã quàm in eodem poſteriori ſecundę ad primam, eo quod eiuſdẽ ſecundę ad primã, ex noſtra hypotheſi & conuerſa ratione, ſit ut in priori tertiæ ad ſecundam ratio. Quare ex poſteriore parte propoſitionis decimę huius, concluditur propoſitũ, primam ſcilicet in ordine poſteriori ipſa ſua tertia, hoc eſt, quartam ſexta quantitate maiorem eſſe. Simili modo, æqualitatem: & quod etiam quantitas quarta quàm ſexta minor ſit, ſi prima tertiæ æqualis uel minor ea ponatur, inferemus. Si fuerint igitur tres quantitates, & alię eiſdem æquales multitudine, in eadem cum duabus ſumptis ratione. fuerit autem perturbata earum proportio, ex æquali autem prima ipſa tertia maior fuerit: & quarta ſexta maior erit, & ſi æqualis: æqualis, ſi uerò minor: minor. quod demonſtraſſe oportuit.

Exemplum in numeris, ubi prima.

	tertia maior		tertię æqualis		minor tertia	
prima	9	24	9	16	6	16
	8	18	8	18	8	18
tertia	6	16	9	16	9	24

Aliud exemplum.

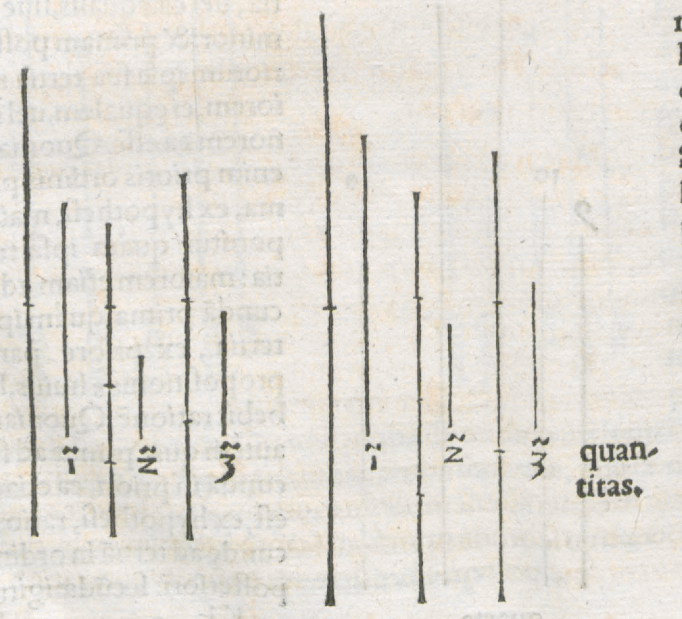
	9		16	24	12
	8			18	
9	6	12		16	

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΒ.

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται.

PROPOSITIO XXII.

Si fuerint tres quantitates, & aliæ eiſdem æquales multitudine, in eadem cum duabus ſumptis ratione: & ex æquali in eadem ratione erunt.



Sint tres quantitates, totidem inſuper aliæ, quæ eas quas priores, eo etiam ordine, inter ſe habeant rationes: dico, quòd & ex æquali primæ ad tertiam prioris ea ſit, quę primę ad tertiam ordinis poſterioris, ratio. Sumptis enim primarum, hoc eſt, primæ prioris & primæ poſterioris ordinis, quantitatum æquè multiplicibus, ſecundarum item ijſdem, ſeu utcunq; alijs æquè multiplicibus poſitis, etiã tertiarũ deinde quantitatum æquè aſſignentur multiplices. Et quoniã ſemper quatuor proportionalium, primę & tertię, ſecundæ item & quartæ, æquè reperiantur eſſe aſſignatę multiplices: erunt igitur ex propoſitione 4 huius, toties eam, quot in utroq; ordine quantitates reperiuntur, minus tamen uno, repetendo, & ipſæ multiplices, eodem ordine ſumptæ, inter ſe proportionales. Quoniam autem tres ſunt quantitates, prioris ſcilicet ordinis multiplices, aliæ deinde ipſis ęquales numero, multiplices ſcilicet quantitatum ordinis poſterioris, cum duabus ſumptis, & in eadem ratione, cum ſicut prima prioris ſua ultima uel maior, ei æqualis, uel minor ea fuerit, ſic & primã poſterioris ſuam ultimã ex propoſitione 20 huius reſpicere oporteat: per 5 definitionem huius tandem concluditur propoſitum, primam ſcilicet prioris ordinis ad ſuam ultimam ſeſe habere, ut ſe habeat prima poſterioris ad ſuam ultimam. Si fuerint igitur tres quantitates, & aliæ eiſdẽ æquales multitudine, in eadem cũ duabus ſumptis ratione: & ex æquali in eadem ratione erunt. quod demonſtraſſe oportuit.

APPENDIX.

Hæc propoſitio cum proximè ſequenti, quemadmodum præmiſſæ duæ, non de tribus tantum, uerumetiam de pluribus quantitatibus intelligi poteſt, ſi modò in uno tot, quot & in altero ordine, quantitates conſtituantur.

Exemplum in numeris ſit.

27	9	27	81
26	13	39	78
35	7	21	105
32	8	24	96

27	32		81	96
9	8	ut	27	24

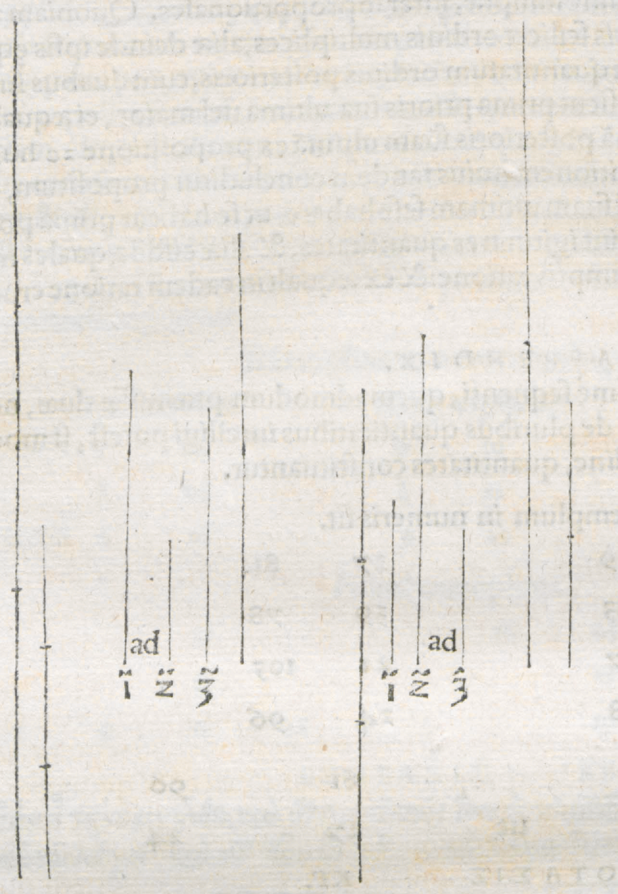
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΓ.

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾖ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία· καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται.

PROPOSITIO XXIII.

Si fuerint tres quantitates, & aliæ eiſdem æquales multitudine, in eadem cum duabus ſumptis ratione, fuerit autem perturbata earum proportio: & ex æquali in eadem ratione erunt.

Sint tres quantitates, atque totidem etiam aliæ, quæ eas quas priores, perturbato tamen ordine, inter ſe habent rationes: dico, quòd & ex æquali primæ ad tertiam prioris, ea ſit, quæ primæ ad tertiam ordinis poſterioris, ratio. Sumptis enim primæ & ſecundæ in priori, & primæ in poſteriori ordine quantitatis æquè multiplicibus, etiam reliquarum trium, tertiæ ſcilicet in priori, & ſecundę ac tertiæ in poſteriori ordine æquè multiplices aſſignentur. Et quoniam, quæ ipſarum partium ſeu ſubmultiplicium, illa eadem eſt, ex 15 huius, etiam multiplicium ratio, & quoniam etiam, quæ eidem ſunt eædem rationes, ipſæ inter ſe ſunt eædem, utraq; propoſitione bis uſurpata, ſemel quidem ratione multiplicium primæ & ſecundæ prioris, ac deinde etiam ratione multiplicium ſecundæ quantitatis & tertiæ ordinis poſterioris: quam priores inter ſe habent rationem, illam eandem & poſteriores multiplices habebunt. Simili modo, cum ſecunda prioris ad ſuam tertiam, ex hypotheſi, ſit, ut prima ad ſecundam in ordine poſteriori ac deinde, ex permutata ratione hæ nominatæ quantitates proportionales ſint: & ſecunda prioris ad primam poſterioris ut tertia illius, ad ſecundam huius, & multiplices quantitatum, ſecundę ſcilicet prioris & primæ poſterioris ordinis, per eaſdem decimam quintam & undecimam propoſitiones huius eã, quam multiplices tertiæ prioris, & ſecundę quantitatis ordinis poſterioris, habebunt rationem: atq; ex permutata deinde ratione, multiplices ſecundę & tertię prioris, ut multiplices primæ & ſecundæ quãtitatum ordinis poſterioris erunt. Oſtenſum autem eſt prius, quòd & multiplices quantitatum prioris ordinis, primæ & ſecundæ, in eadem ſint ratione, in qua ſunt multiplices ſecundę & tertiæ quantitatum ordinis poſterioris. Quoniam aũt tres ſunt quantitates, atq; totidem etiã aliæ, in eadem cum duabus ſumptis ratione, eſtq; earum perturbata ratio: quemadmodũ igitur prima maior tertia, uel ei æqualis ſiue minor ea fuerit, ita ex propoſitione 21 huius, & quarta reſpectu ipſius ſextæ erit. Quare per definitionem 5, huius concluditur tandem, ut quam in priori ordine prima ad tertiam habet rationem, illam eandem in poſteriori ordine prima ad tertiam habeat. Si fuerint igitur tres quãtitates, & aliæ eiſdem æquales multitudine, in eadem cum duabus ſumptis ratione, fuerit autem perturbata earum proportio: & ex æquali in eadem ratione erunt. quod demonſtraſſe oportuit.



Exemplum in numeris ſit.

Ordo

prior		posterior	
15	5	5	15
6	2	10	20
8	4	4	8

15 6 ut 20 8 6 15 ut 8 20

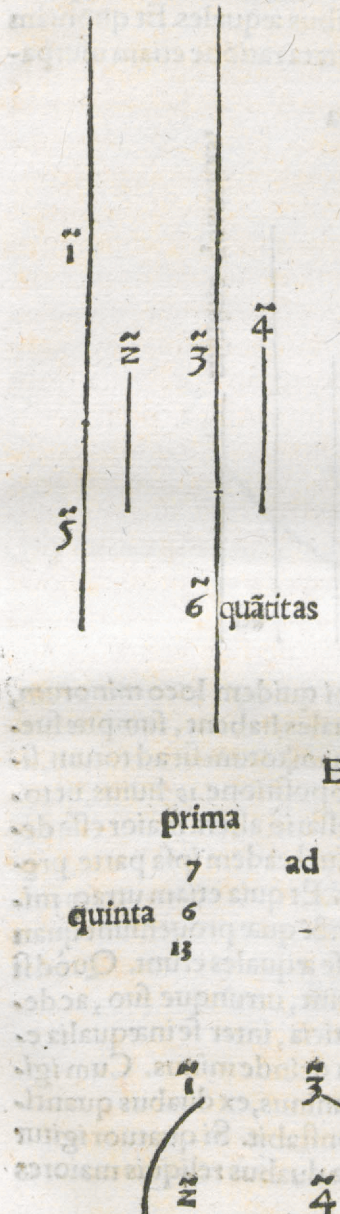
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΔ.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ἔχῃ δὲ καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν λόγον, καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον· καὶ συντεθὲν, πρῶτον καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, καὶ τρίτον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον.

PROPOSITIO XXIIII.

Si prima ad ſecundam eam habuerit rationem quam tertia ad quartam habuerit autem & quinta ad ſecundam eam rationem quam ſexta ad quartam: & compoſita, prima & quinta, ad ſecundam eam habebit rationem, quam tertia & ſexta ad quartam.

Sint ſex quantitates, & eſto quòd prima ad ſecundam ſit ut tertia ad quartã, ſimiliter quinta ad eandem ſecundam, ut ſexta ad quartam: dico ergo, & compoſitam ex prima & quinta, ad ſecundam, eam quæ eſt compoſitæ ex tertia & ſexta ad quartam, rationem habere. Quoniam enim prima ad ſecundam, ex hypotheſi, eſt, ut tertia ad quartam, & rurſus, quoniam quinta ad ſecũdam, ſimiliter ex hypotheſi, eſt ut ſexta ad quartam, ex conuerſa ratione uerò, ſecunda ad quintam ut quarta ad quantitatem ſextam: & prima ad quintam, iuxta ordinatam proportionem, ex æquali, per propoſitionem 22 huius, ut tertia ad ſextam erit. Eſt autem diuiſio rationis, unde ex rationis compoſitione, ut teſtatur propoſitio 18 huius, hæ quantitates proportionales erunt: prima igitur & quinta ad quintam, ſicut tertia & ſexta ad quantitatem ſextã. Quoniam aũt quinta ad ſecundam, ex hypotheſi, eſt ut ſexta ad quartã: quare rurſus per eandẽ ordinatam rationem, cũ duo iam quantitatum ordines appareant, cuiuſmodi ſcilicet hæc proportio requirit, infertur tandem propoſitũ, primam ſcilicet & quintam coniunctim ad ſecundam ſe habere, ut ſe habent tertia & ſexta, & ipſæ coniunctæ ad quantitatem quartam. Si prima igitur ad ſecundam eam habuerit rationem quam tertia ad quartam, habuerit autem & quinta ad ſecundam, &c. quod demonſtraſſe oportuit.



Exemplum huius in numeris ſic.

	prima		ſecunda		tertia		quarta
	7	ad	9	ut	21	ad	27
quinta	6	-		ſexta	18	-	
	13				39		

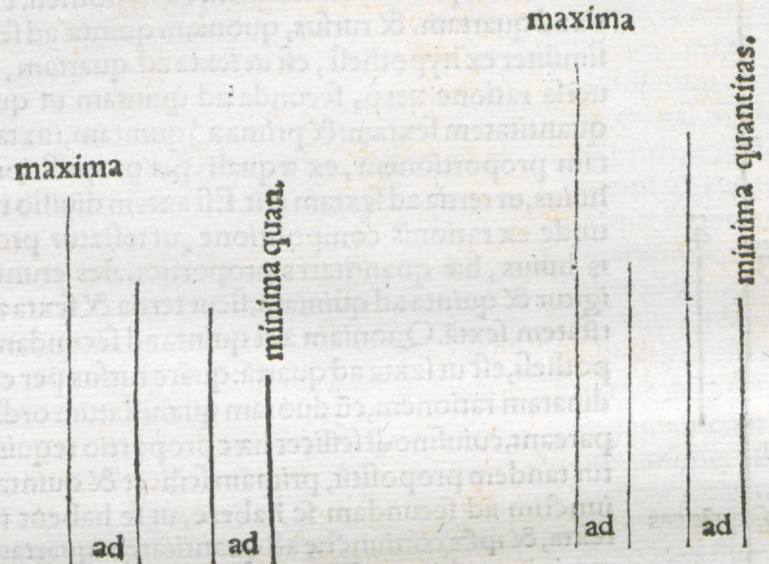
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΕ.

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ μέγιστον καὶ τὸ ἐλάχιστον, δύο τῶν λοιπῶν μείζονά ἐστι.

PROPOSITIO XXV.

Si quatuor quantitates proportionales fuerint, maxima & minima duabus reliquis maiores ſunt.

Sint quatuor eiuſdem generis quantitates proportionales, qualitercunq;, modò
non ſint in ratione æqualitatis, ut dicitur. nam hic nulla apparet quantitas maxima
uel minima, quod nunc eſt contra propoſitionis hypotheſim: dico, maximam cum
minima reliquis duabus quãtitatibus maiorem eſſe. Ponantur in maioribus quan-
titatibus portiones, ex propoſitione 3 primi, ſuis minoribus æquales. Et quoniam
quantitates maiores, aut ex hypotheſi ſtatim, aut permutata ratione etiam uſurpa-



ta, primò illam, quam ipſæ minores, ſecundò deinde, ubi quidem loco minorum,
portiones, quas ipſæ minores in maioribus ſignatæ æquales habent, ſumptæ fue-
rint, quam ipſæ portiones inter ſe habent rationem, cum iam totum ſit ad totum, ſi-
cut ablatum ad ablatum: & reliquum ad reliquum, ex propoſitione 19 huius, ut to-
tum ad totum erit. Quia autem ex maioribus una, neceſſariò altera maior eſſe de-
bet: & reliqua illius ex prima parte propoſitionis 14 ſola, uel eadem ipſa parte, præ-
miſſa tamen permutata ratione, huius reliqua maior erit. Et quia etiam utraq; mi-
nor ſuæ ablatæ eſt æqualis, ſi æqualibus æqualia addãtur: & quæ proueniunt quan
titates, utraq; uidelicet minor cum alterius ablata, inter ſe æquales erunt. Quòd ſi
iiſdem æqualibus inæqualia, reliqua ſcilicet, addita fuerint, utrunque ſuo, ac de-
bito ordine: & producta iam, ex communi quadam noticia, inter ſe inæqualia e-
runt. Illud quidem maius, quod plus acceperit, alterum deinde minus. Cum igi-
tur id quod maius eſt, ex maxima & minima, quod uerò minus, ex duabus quanti-
tatibus reliquis compoſitum ſit, propoſitio tandem conſtabit. Si quatuor igitur
quantitates proportionales fuerint, maxima & minima duabus reliquis maiores
ſunt. quod demonſtraſſe oportuit.

Exemplum in numeris ſit.

Maximus 27 — 21 ut 9 — 7 Minimus numerus

27
9
18

21
7
14

9 — 7 portiones minoribus æquales, & ablatæ ex totis.

18 — 14 Reliqui numeri.

Reliqua

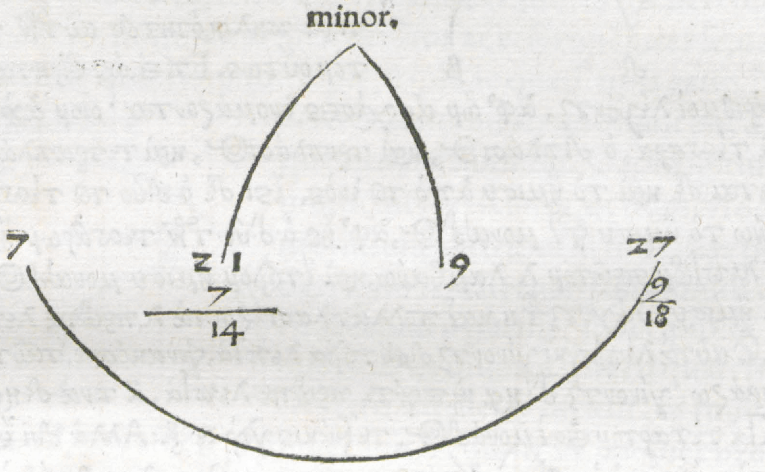
Reliqua 18 — 14 ut 27 — 21 Tota

Minor 9
ablata alte. 7
16
14
30 minus,
quia minus accepit

Minor 7
ablata alterius 9
16
18
34 productum
maius: quia maius acce.

Sequitur hoc idem exemplum,
numeris tamen aliter poſitis.

30
minor.



maior 34 numerus

27 — 21, ut 18 — 14

Minores
7
9
16
14
30

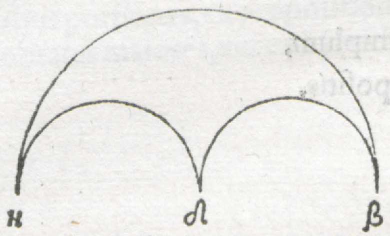
Ablatæ por.
7
9
16
18
34 &c.

FINIS LIBRI QVINTI.

LI ΣΧΟΛΙΟΝ

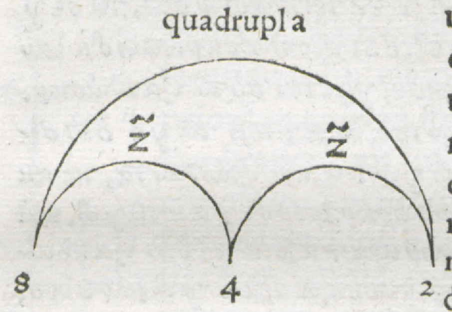
ΣΧΟΛΙΟΝ ΕΙΣ ΤΟ ϛ,
ΑΔΗΛΟΥ.

Λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν πηλικότητες τινῶν λόγων πολλαπλασιαζόμεναι ποιῶσι λόγον. Ἐκεῖνος ὁ λόγος συγκεῖσθαι ἐκ τῶν λόγων ἐκείνων λέγεται, ὧν αἱ πηλικότητες ποιοῦσιν αὐτόν. Πηλικότητας δὲ λέγει, ἀφ᾽ ὧν ὀνομάζονται· ὡς ἀπὸ τοῦ δύο ὁ διπλάσιος. Ἔστω λόγος τοῦ η πρὸς τὸν δ διπλασίων, καὶ αὐτοῦ δ πρὸς τὸν β διπλασίων, καὶ αὐτός· ὁ τετραπλάσιος οὖν λόγος τοῦ η πρὸς τὸν β συγκεῖσθαι λέγεται ἐκ τῶν δύο λόγων, τοῦ τε η πρὸς τὸν δ, καὶ τοῦ δ πρὸς τὸν β, ὅτι αἱ πηλικότητες αὐτῶν ποιοῦσιν αὐτὸν οὕτως. Ἐπεί, ὡς εἴρηται, πηλικότητες οἱ ἀριθμοὶ λέγονται, ἀφ᾽ ὧν αἱ σχέσεις ὀνομάζονται· οἷον ἀπὸ τοῦ δύο καὶ τρία καὶ τέσσαρα, ὁ διπλάσιος, καὶ τριπλάσιος, καὶ τετραπλάσιος λόγος. ὀνομάζεται δὲ καὶ τὸ ἥμισυ ἀπὸ τοῦ ἑνός. ἔστι δὲ ὁ δύο τοῦ τέσσαρα ἥμισυς. λαμβάνω τὸ ἥμισυ τῆς μονάδος, ἀφ᾽ ἧς ὁ δύο τῶν τεσσάρων ἥμισυς λέγεται, ὧν λεπτῶν πρῶτον λ λαμβάνω, καὶ ἕτερον ἥμισυ μονάδος, ἀφ᾽ ἧς πάλιν ὁ δ ἥμισυς λέγεται τοῦ η, καὶ πολλαπλασιάζω τὰ λ πρῶτα λεπτὰ ἐπὶ τὰ λ πρῶτα, καὶ αὐτὰ λεπτά, καὶ γίνονται δεύτερα λεπτά, ἐννακόσια. ταῦτα ἀναβιβάζω ἤτοι μοιράζω, γίνονται δέκα καὶ πέντε πρῶτα λεπτά, ἅτινα δεκαπέντε πρῶτα λεπτὰ τέταρτόν εἰσι μονάδος. τετράκις γὰρ ιε ξ. Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὁ μέσος τοῦ β, καὶ η, ὁ μ. καὶ ἐπεὶ τὰ δύο τοῦ μ, εἰκοστόν ἐστιν, λαμβάνω τὸ εἰκοστὸν τῆς μονάδος ὅ ἐστι λεπτῶν τριῶν. Ἐπεὶ πάλιν ὁ μ, πενταπλάσιός ἐστι τοῦ η μόριον τοῦ μ ὁ η λέγεται, πολλαπλασιάζω τὸ τρία τὸ εἰκοστὸν τοῦ ξ; παρὰ τὸ ε, ἀφ᾽ οὗ πέμπτον μόριον ὁ η τοῦ μ λέγεται, καὶ γίνονται ιε λεπτά, ἅπερ ἐστὶ τέταρτον μονάδος. καὶ οὕτως πάλιν ὁ β τοῦ η, τέταρτός ἐστι. Ἔστω πάλιν μεταξὺ τῶν δ καὶ ιβ, ὁ η. ἐπεὶ ὁ δ ἥμισυς ἐστὶ τοῦ η, ὁ δὲ η ὑφημιόλιος τοῦ ιβ. λαμβάνω τὰ λεπτὰ λ τὸ ἥμισυ τῆς μονάδος, καὶ ποιῶ τὰ μ λεπτὰ τὸ ὑφημιόλιον τῆς μονάδος, καὶ ποιῶ τὰ λ παρὰ τὰ μ, καὶ γίνονται χίλια διακόσια, δεύτερα λεπτά, ἀναβιβάζω ταῦτα, γίνονται πρῶτα λεπτὰ κ. τὰ κ τρίτον εἰσὶ μονάδος, καὶ ὁ δ οὖν τρίτον ἐστὶ τοῦ ιβ. Ἔστω μεταξὺ τοῦ β καὶ τοῦ ιβ ὁ δ. καὶ ἐπεὶ ὁ δύο τοῦ δ ἥμισυ ἐστίν, ὁ δὲ δ τοῦ ιβ ὑποτριπλάσιος, λαμβάνω τὰ λ λεπτά, τὸ τῆς μονάδος ἥμισυ· καὶ τὰ κ, τὸ τρίτον αὐτῆς. ἀπὸ γὰρ τοῦ τρία ὁ τριπλάσιος παρωνόμασται. καὶ ποιῶ τὰ λ ἐπὶ τὰ κ, γίνονται ἑξακόσια δεύτερα λεπτά. ταῦτα ἀναβιβάζω, καὶ γίνονται δέκα πρῶτα, τὰ δέκα, ἕκτον μονάδος, καὶ ὁ β ἕκτον τοῦ ιβ. Πάλιν ἔστω μεταξὺ τοῦ δ καὶ ε, ὁ κ. καὶ ἐπεὶ ὁ δ ὑποπενταπλάσιός ἐστι τοῦ κ, ὁ δὲ κ τετραπλάσιος τοῦ ε, λαμβάνω τὸ τῆς μονάδος πέμπτον, τὰ ιβ, καὶ τὸ δ, ἐφ᾽ οὗ ὁ ε τετραπλάσιον λέγεται τοῦ κ, καὶ ποιῶ τὸ τέταρτον παρὰ τὸ δωδέκατον, γίνονται μη ὑποεπιτέταρτος τῆς μονάδος. καὶ ὁ δ τοῦ ε, ὑποεπιτέταρτός ἐστιν. Ἔστω πάλιν μεταξὺ τοῦ β, καὶ δ ὁ γ. καὶ ἐπεὶ ὁ δ τοῦ γ ἐπίτριτός ἐστιν, ἐπεὶ ἔχει αὐτὸν καὶ τὸ τρίτον αὐτοῦ ὅ ἐστι μονάς. λαμβάνω τὴν μονάδα,



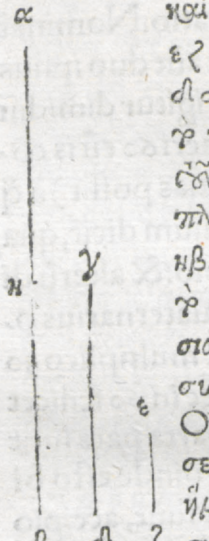
BREVIS HVIVS SEXTI LIBRI
INTERPRETATIO, INCERTI AVTORIS.

Ratio ex rationibus cõponi dicitur, quãdo rationum quantitates, hoc eſt denominationes, multiplicatæ, rationẽ cõſtituunt. Ratio ex rationib. cõpoſita dicit̃, quã uidelicet rationum denominationes cõponunt. Quantitates uerò, hoc eſt denominationes rationũ, dicunt̃, à quib. rationes denominãtur, ut à duob. dicitur dupla. Sit ratio octonarij ad quaternarium dupla, atq; etiã ipſius quaternarij ad binariũ dupla & ipſa: quadrupla igitur ratio, octonarij ad binarium, cõponi dicit̃ ex duab. rationib. octonarij ſcilicet ad quaternariũ, & quaternarij ad binariũ. ambarũ etenim rationũ denominationib. cõpoſita hęc denominatio cõſtituit̃. Quoniã ergo, ut dictũ modò eſt, quãtitates, ſeu denominatiões rationũ numeri dicuntur, à quib. habitudines nominãtur, deſcribũtur ac referunt̃ inter ſe, ueluti à binario ternario ac quaternario: dupla, tripla ac quadrupla ratio. Nominat̃ uerò & dimidiũ ab uno, ſunt aũt duo ipſius quaternarij dimidiũ. Capio igitur dimidiũ unius (integri ſcilicet, ut numeri 60 cũ is cõmodiſſimè diſtribui in minutias poſſit) à q̊ duo ipſius quaternarij dimidium dicit̃, quarũ acceptarũ partiũ, 30 accipio: & alterũ dimidiũ illius unius, à q̊ iterũ quaternarius octonarij medietas dicitur. & multiplico 30 prima minu. ad, hoc eſt cũ 30 min. & fiũt ſecũda min. 900, hęc in 60 ſcilicet traduco ſeu diuido, fiũt 15, prima min. q̃ ſanè 15 prima mi. quarta pars ſunt unius, ſeu integri. quater .n. 15, ſexaginta ſcilicet cõtinent. Proinde eſto binarij & octonarij medius 40. Et q̊niã 2 ipſius 40 uigincuplũ ſunt, accipio uigincuplum, unius ſeu integri, nẽpe tria minu. At uerò rurſus 40 quincuplũ ſunt octonarij: pars ipſius 40 octonari⁹ dicit̃, multiplico 3 uigincuplã partẽ ipſius 60, cũ 5 denominante octonariũ in 40, & fiunt 15 min. quarta pars integri, 60, ſ. q̃ denominatio q̊q; eſt inter 2 et 8, poſitos nũm. Eſto rurſus inter ipſos 4 & 12 octon. q̊niã 4. dimidiũ ſunt octonarij, 8 uerò ipſius duodenarij ſubſeſquialter: accipio mi. 30, dimidiũ integri, & facio 40 min. ſubſeſquialterꝝ integri, & facio 30 ad 40, & fiunt 1200 ſecun. mi. quib. diuiſis, fiunt prima mi, 20 & uiginti tertiũ ſunt integri: et quatuor igit̃ tertium ſunt duodenarij. Eſto inter binariũ & 12 quaternarius, & q̊niam binarius quaternarij dimidiũ eſt, quaternar. ṽò duodenarij ſubtriplus, accipio 30 min. unitatis ſeu integri dimidiũ: 20 deinde, tertiũ ipſius. à ternario enim tripla denominat̃, & facio 30 cũ 20, fiunt 60 ſecun. min. quib. in integrꝝ diuiſis, fiunt 10 prima, q̃ 10 ſexta pars ſunt integri: & 2 ſexta pars eſt duodenarij. Rurſus, ſit inter 4 & 5 num. 20. & q̊niã quaternar. ſubq̱ncuplus eſt ipſius 20, numerus ṽò 20 ad 5 quadruplus, accipio integri 5 partẽ, nimirꝝ 12, & quaterna. à q̊ quinarius quadruplus dicit̃ ipſius 20, & facio quadruplũ, ad 12, fiunt 48, ſubſeſq̱quartũ integri: & 4 ipſorꝝ 5 ſubſeſq̱quartũ eſt. Eſto rurſus inter 2 & 4 ternarius. Et quoniam 4 ad ternarium eſt ſeſquitertius, cũ ipſum & tertium ipſius, quæ eſt unitas, habeat, accipio integrꝝ,

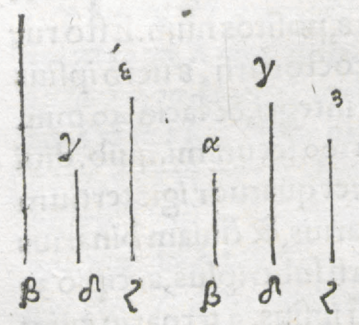


ἥτις ἐστὶ λεπτὰ ξ. ἀφ' ἧς, μονάδος τρίτου οὔσης τοῦ τρία, ὁ δ' ἐπίτριτος αὐτοῦ λέγεται. λαμβάνω καὶ τὸν λ, τὸ τῆς μονάδος ἥμισυ, διὰ τὸ τρία ἡμιόλιον εἶναι τοῦ β. ὀνομάζεται δὲ τὸ ἡμιόλιον ἀπὸ τοῦ ἡμίσεως. καὶ ποιῶ τὸν λ παρὰ τὴν μονάδα, ἤτοι ξ λεπτὰ, καὶ γίνονται χίλια ὀκτακόσια, δεύτερα λεπτά. ταῦτα ἀναβιβάζω, καὶ γίνεται λ πρῶτα λεπτὰ, ταῦτα ἥμισυ μονάδος. καὶ ὁ β τοῦ δ ἥμισύς ἐστιν.

Λόγος ἐκ δύο λόγων ἢ καὶ πλειόνων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες, πολυπλασιασθεῖσαι, ποιῶσί τινα πηλικότητα λόγου. ἐχέτω γὰρ τὸ α β, πρὸς τὸ γ δ λόγον δεδομένον, οἷον διπλάσιον ἢ τριπλάσιον, ἤ τινα ἄλλον. καὶ τὸ γ δ πρὸς τὸ ε ζ καὶ αὐτὸ δεδομένον. λέγω ὅτι ὁ τοῦ α β, πρὸς τὸ ε ζ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ α β πρὸς τὸ γ δ, καὶ τοῦ γ δ πρὸς τὸ ε ζ. ἤγουν ὅτι ἐὰν ἡ τοῦ α β, πρὸς τὸ γ δ λόγου πηλικότης πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὴν τοῦ γ δ πρὸς τὸ ε ζ λόγου πηλικότητα, ποιεῖ τὴν τοῦ α β πρὸς ε ζ. Ἔστω γὰρ πρότερον τὸ μὲν α β τοῦ γ δ μεῖζον,



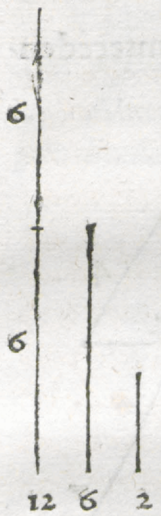
καὶ τὸ γ δ τοῦ ε ζ. καὶ ἔστω τὸ μὲν α β τοῦ γ δ διπλάσιον, τὸ δὲ γ δ τοῦ ε ζ τριπλάσιον. Ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν γ δ τοῦ ε ζ τριπλάσιόν ἐστι, τοῦ δὲ γ δ διπλάσιον τὸ α β, τὸ ἄρα α β τοῦ ε ζ, ἐστὶ ἑξαπλάσιον. ἐπεὶ δὴ ἐὰν τὸ τριπλάσιον τινὸς διπλασιάσωμεν, γίνεται αὐτοῦ ἑξαπλάσιον. τοῦτο γάρ ἐστι κυρίως σύνθεσις. ἢ οὕτως, ἐπεὶ τὸ α β τοῦ γ δ ἐστὶ διπλάσιον, διῃρήσθω τὸ α β εἰς τὰ τῷ γ δ ἴσα, καὶ ἔστω ταῦτα, τὰ α η η β. καὶ ἐπεὶ τὸ γ δ τοῦ ε ζ ἐστὶ τριπλάσιον, ἴσον δὲ τὸ α η τῷ γ δ, καὶ τὸ α η ἄρα, τοῦ ε ζ ἐστὶ τριπλάσιον. ὅλον ἄρα τὸ α β τοῦ ε ζ ἐστὶ ἑξαπλάσιον. ὁ ἄρα τοῦ α β πρὸς τὸ ε ζ λόγος, συνῆπται διὰ τοῦ γ δ μέσου ὅρου, συγκείμενος ἔκ τε τοῦ α β πρὸς γ δ, καὶ τοῦ γ δ πρὸς ε ζ λόγου. Ὁμοίως δὲ κἂν ἔλαττον ᾖ τὸ γ δ ἑκατέρων, τῶν α β ε ζ, συναχθήσεται. Ἔστω γὰρ πάλιν τὸ μὲν α β, τοῦ γ δ τριπλάσιον, τὸ δὲ γ δ ἥμισυ τοῦ ε ζ. Καὶ ἐπεὶ τὸ γ δ ἥμισύ ἐστι τοῦ ε ζ, τοῦ δὲ γ δ τριπλάσιον τὸ α β, τὸ α β ἄρα ἡμιόλιόν ἐστι τοῦ ε ζ. ἐὰν γὰρ τὸ ἥμισυ τινὸς τριπλασιάσωμεν, ἕξει αὐτὸ ἅπαξ καὶ ἡμισάκις. Καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν α β τοῦ γ δ ἐστὶ



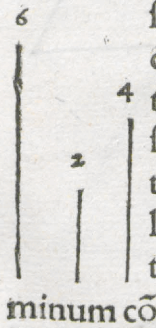
τριπλάσιον, τὸ δὲ γ δ τοῦ ε ζ ἐστὶ ἥμισυ, οἵων ἐστὶ τὸ α β ἴσων τῷ γ δ τριῶν, τοιούτων ἐστὶ τὸ ε ζ δύο, ὥστε ἡμιόλιόν ἐστι τὸ α β τοῦ ε ζ. ὁ ἄρα τοῦ α β πρὸς τὸ ε ζ λόγος, συνῆπται διὰ τοῦ γ δ μέσου ὅρου, συγκείμενος ἔκ τε τοῦ α β πρὸς γ δ, καὶ τοῦ γ δ πρὸς ε ζ λόγου. Ἀλλὰ δὴ πάλιν ἔστω τὸ γ δ ἑκατέρου τῶν α β ε ζ μεῖζον. καὶ ἔστω τὸ μὲν α β τοῦ γ δ ἥμισυ μέρος, τὸ δὲ γ δ τοῦ ε ζ ἐπίτριτον. Ἐπεὶ οὖν, οἵων ἐστὶ τὸ α β δύο, τοιούτων ἐστὶ τὸ γ δ τεσσάρων. οἵων δὲ τὸ γ δ τεσσάρων, τοιούτων τὸ ε ζ καὶ γ δ πέντε. καὶ οἵων ἄρα τὸ α β δύο, τοιούτων ε ζ τριῶν. συνῆπται ἄρα πάλιν ὁ τοῦ α β πρὸς ε ζ λόγος, διὰ τοῦ γ δ μέσου ὅρου, ὁ τῶν δύο πρὸς τὰ τρία. Ὁμοίως δὴ καὶ ἐπὶ πλειόνων, καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν πτώσεων. καὶ δῆλον ὅτι ἐὰν ἀπὸ τοῦ συγκειμένου λόγου εἷς ὁποσοσοῦν τῶν συντεθέντων ἀφαιρεθῇ, ἑνὸς τῶν ἁπλῶν ἀφανισθέντος, οἱ λοιποὶ τῶν συντιθέντων καταλειφθήσονται.

quod eſt 60 min. à q̊ integro tertiũ exiſtente ternarij, quaternarius ſeſq̃tertium ipſius dicit̃. accipio & 30, integri dimidiũ, per quæ 3 ad 2 ſeſquialteꝝ erit. nominat̃ uerò ſeſquialteꝝ à dimidio, & facio 30 ad integrum, utpote 60 min. & fiunt 1800, ſecunda min. his diuiſis, & fiunt 30 prima min. hæc dimidium ſunt integri: quare & binarius ipſius quaternarij dimidiũ eſt.

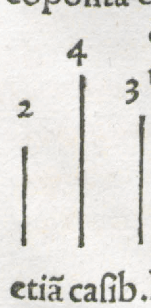
Ratio ex duab. ſiue ex plurib. rationib. cõponi dicitur, quando rationũ quãtitates, hoc eſt denominationes, multiplicatę, aliquã rationis quãtitatẽ cõſtituunt. Habeat igit̃ primũ ad ſecundũ, rationẽ datã, ueluti duplã, aut triplã, ſiue aliquã aliã, habeat & ſecundũ ad tertiũ, rationẽ, & ipſam datã: dico ꝙ primi ad tertiũ ratio, ex primi ad ſecundũ, & ſecũdi ad tertiũ rationibus, cõpoſita ſit. Aut, quando primi ad ſecundũ rationis quantitas cum ſecundi ad tertium rationis quãtitate multiplicata fuerit, quantitatẽ primi ad tertiũ cõſtituit. Sit igit̃, et primò quidẽ, primũ maius ſecundo, ſecundũ



itẽ maius tertio, eſto etiã, ꝗd primũ quidẽ ad ſecundum duplã, ſecundũ ṽò ad ipſum tertiũ triplã rationẽ habeat. Quoniã em̃ ſecundũ triplũ eſt ipſius tertij, ipſius uerò ſecundi duplũ ipſum primũ: primũ igit̃ ipſi⁹ tertij ſexcuplũ erit. qm̃. n. ſi triplũ alicui⁹ duplicauerimus, ipſius ſexcuplũ ꝓducitur: hoc enim eſt ꝓpriẽ cõpoſitio. Aut ſic, qm̃ primũ ſecundi duplũ eſt, ſubdiuidat̃ primũ in partes ipſi ſecundo æquales: uocẽtur aũt hæ prior & poſterior. Et qm̃ ſecundũ ipſius tertij triplũ eſt, æqualis uerò eſt prior primi pars ipſi ſecundo: & hęc eadẽ pars, ut ipſum ſecundũ, tertij tripla erit. primũ igit̃ ipſius ſecundi eſt ſexcuplũ. q̃ igitur primi ad tertiũ ratio (cõiuncta ꝑ ſecundũ, mediũ terminũ) ex primi ad ſecundũ & ſecundi ad tertiũ ratione, cõpoſita eſt. Similiter ṽò & ſi minus fuerit ſecundũ utriſq; ipſoꝝ, primo ſcilicet & tertio, cõtrahẽtur illa. Eſto em̃ iteꝝ primũ quidẽ ſecundi triplum,



ſecundũ ṽò tertij dimidiũ. Et qm̃ ſecundũ eſt tertij dimidiũ, ſecundi ṽò triplũ eſt ipſum primũ: primũ igit̃ ipſius ſecũdi ſeſq̃alteꝝ erit. qm̃. n. ſi dimidiũ alicuius triplicauerimus, habet̃ ipſum ſemel & dimidiũ. Et qm̃ primũ ſecũdi triplũ, ſecundũ ṽò ipſius tertij dimidiũ eſt: qualiũ primũ eſt trium ſecundo æqualiũ, talium eſt & tertiũ duoꝝ, quaꝓpter ſeſquialteꝝ eſt primũ ipſius tertij. primi igit̃ ad tertiũ ratio (ut q̃ per ſecundũ, mediũ eius terminum cõiuncta eſt) ex primi ad ſecundum et ſecundi ad tertium ratione cõpoſita eſt. Sed rurſus, ſit ſecundũ utriſq; illoꝝ, primo & tertio, maius, & ſit quidẽ primũ ſecũdi dimidia pars, ſecundũ ṽò tertij ſeſq̃tertiũ. Quoniã igit̃ quantũ eſt primi dimidiũ, tãta eſt ſecũdi quarta: quãta ṽò eſt ſecundi q̃rta pars, tãta eſt primi cũ tertio una quinta: dimidia igit̃ primi, tertia deinde tertij, inter ſe æqualia erunt. Primi igitur ad tertium, nimiꝝ 2 ad 3, ratio, ꝑ ſecundum, mediũ eius terminum, cõiuncta eſt. Similiter etiã & in plurib. in reliq̃s etiã caſib. Et manifeſtum eſt, ꝙ ſi à cõpoſita ratiõe una qualiſcunq; cõpoſitaꝝ auferat̃, una ſimpliciũ ſublata, reliq̃ ratiões cõpoſitaꝝ cõprehẽdant̃.



ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΝ ΕΚΤΟΝ.

EVCLIDIS ELEMENTORVM GEOMETRICORUM liber ſextus.

ΟΡΟΙ.

Ὅμοια σχήματα εὐθύγραμμά ἐστιν, ὅσα τάς τε γωνίας ἴσας ἔχει κατὰ μίαν, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς, ἀνάλογον.

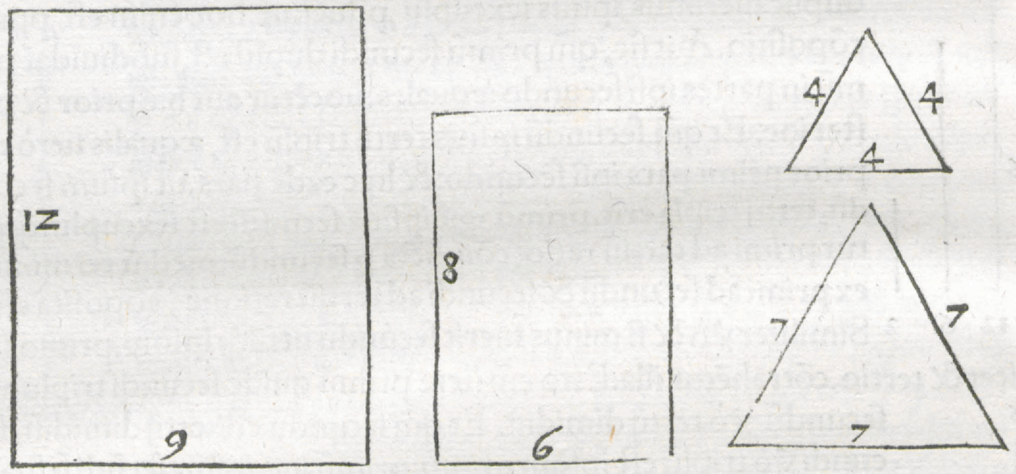
Ἀντιπεπονθότα δὲ σχήματά ἐστιν, ὅταν ἑκατέρῳ τῶν σχημάτων ἡγούμενοί τε καὶ ἑπόμενοι λόγοι ὦσιν.

DEFINITIONES.

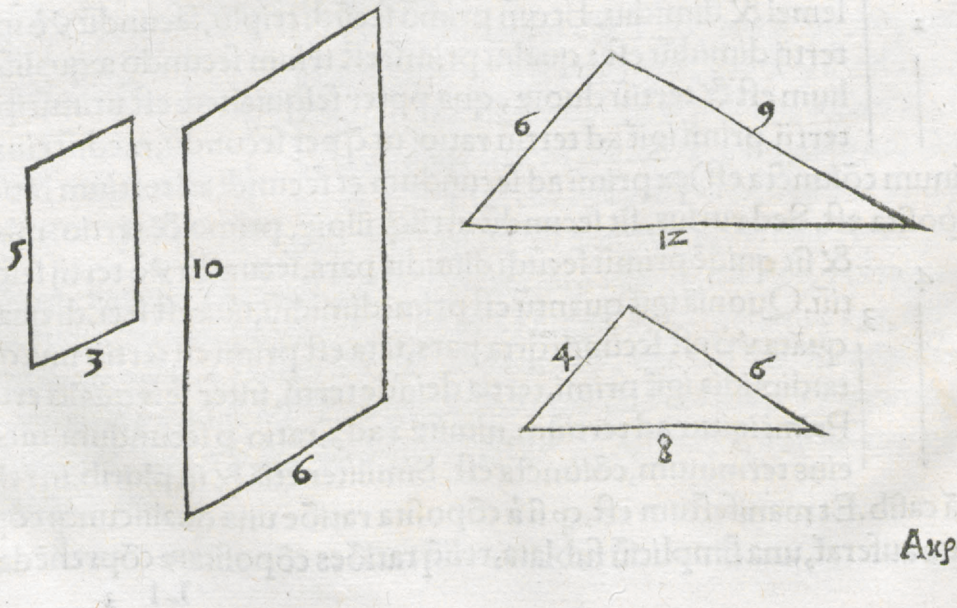
1 Similes figuræ rectilineæ ſunt, quæ & angulos æquales habent ad unum, & quæ circa angulos æquales latera, proportionalia.

2 Reciprocæ autem figuræ ſunt, quando in utraq; figura antecedentes & conſequentes termini rationales fuerint.

Exempla definitionis primæ.



Exempla definitionis ſecundæ.



Ακρον

Ἄκρον καὶ μέσον λόγον εὐθεῖα τετμῆσθαι λέγεται, ὅταν ᾖ ὡς ἡ ὅλη πρὸς τὸ μεῖζον τμῆμα, οὕτως τὸ μεῖζον πρὸς τὸ ἔλασσον.

3 Secundum extremam & mediam rationem recta linea diuidi dicitur, quando fuerit, ſicut tota ad maius ſegmentum, ſic maius ad ſegmentum minus.

Tota		Tota	
12		8	
√180 — 6	18 — √180	√80 — 4	12 √80
maius ſegmentum	minus	maius	minus

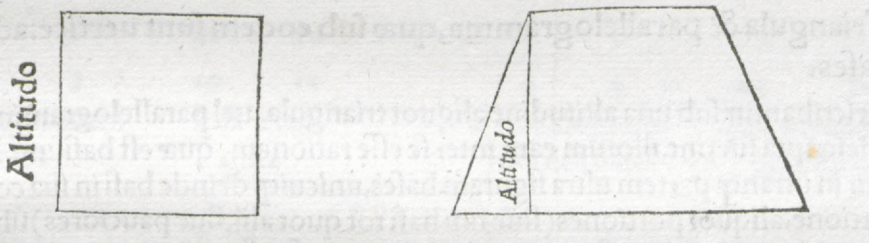
12 ad √180 — 6 ut √180 — 6 ad 18 — √180

Similiter 8 √80 — 4 √80 — 4 12 √80

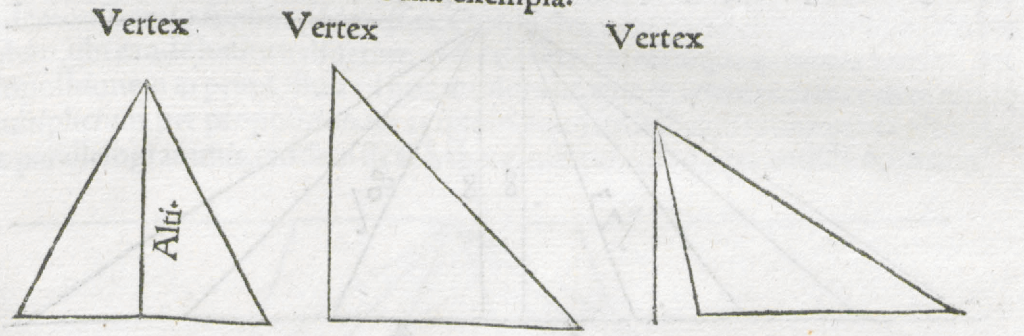
Ὕψος ἐστὶ παντὸς σχήματος, ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀγομένη.

4 Altitudo uniuſcuiuſque figuræ eſt, à uertice ad baſim ducta perpendicularis.

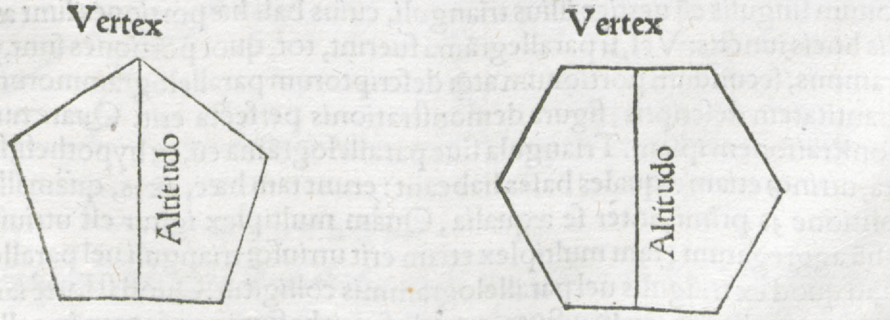
Sunt autem huius definitionis exempla hæc.



Alia exempla.



Similiter alia.



Λόγος

Λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖσαι, ποιῶσί τινα λόγον.

5 Ratio ex rationibus componi dicitur, quando rationum quantitates multiplicatæ inter ſe, aliquam effecerint rationem.

Vt rationē duplam, cuius quantitas eſt 2, componunt & conſtituunt rationum ſequialteræ & ſeſquitertiæ, quantitates, $1\frac{1}{2}$ & $1\frac{1}{3}$, multiplicatæ inter ſe, ut ſequitur.

Componentes		Compoſita ratio
$\frac{3}{1\frac{1}{2}}$	$\frac{4}{1\frac{1}{3}}$	$\frac{12}{6}$ uel $\frac{2}{1}$
Seſquialtera	Seſquitertia	Dupla

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.

ΠΡΩΤΗ. Α.

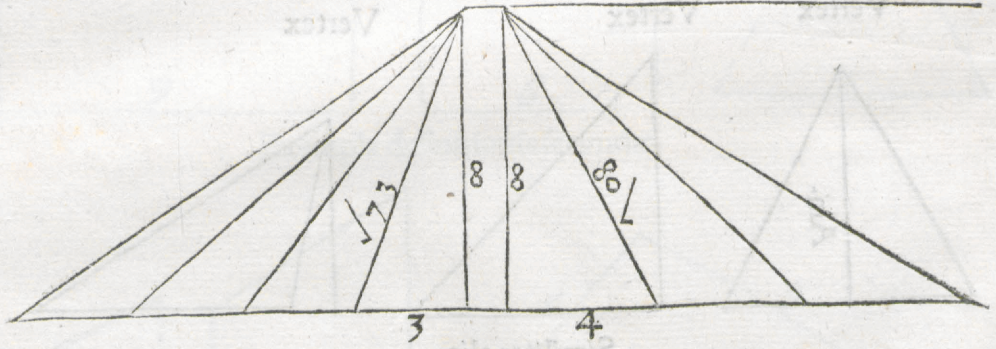
Τὰ τρίγωνα καὶ τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα, πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις.

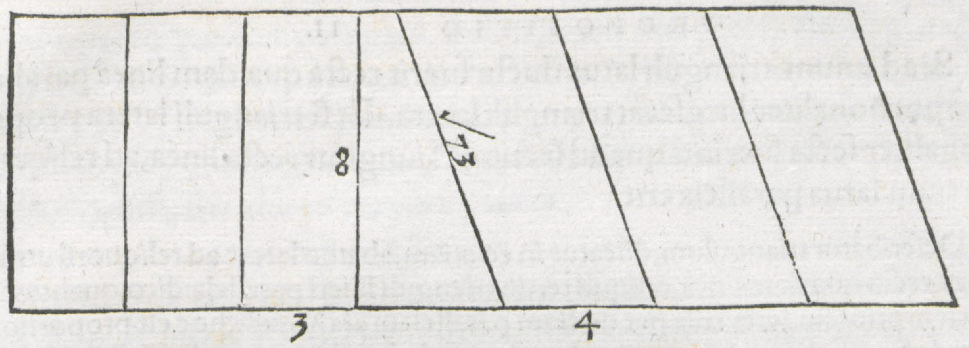
PROPOSITIONES.

PRIMA. I.

Triangula & parallelogramma, quæ ſub eodem ſunt uertice: ad ſe ſunt ut baſes.

Deſcribantur ſub una altitudine aliquot triangula, uel parallelogramma: dico, utra deſcripta fuerint, illorum eam inter ſe eſſe rationem, quæ eſt baſium. Prolongentur in utranq; partem ultra figuram baſes, unicuiq; deinde baſi in ſua continuata portione, aliquot portiones (ſiue uni baſi tot quot alij, ſiue pauciores) ſibi ſumantur æquales, atq; tandem, ſi quidē triangula propoſita fuerint, extremitatibus portionum ſingulis cū uertice illius trianguli, cuius baſi hæ portiones ſunt æquales, rectis lineis iunctis: Vel, ſi parallegrāma fuerint, tot, quot portiones ſunt, parallelogrammis, ſecundum portionum atq; deſcriptorum parallelogrammorum laterum quantitatem deſcriptis, figura demonſtrationis perfecta erit. Quare nunc ad demonſtrationem ipſam. Triangula ſiue parallelogrāma cū, ex hypotheſi, ſint æque alta, utrinq; etiam æquales baſes habeant: erunt tam hæc, ex 36, quàm illa, ex propoſitione 38 primi, inter ſe æqualia. Quàm multiplex igitur utriuſque baſis baſiū aggregatum, tam multiplex etiam erit utriuſq; trianguli uel parallelogrammi, id quod ex triāgulis uel parallelogrammis colligitur. Quod ſi forte iam baſium aggregatum in una, ex ſtructura, æquale fuerit baſium aggregato in collatione altera: & ipſa tota triangula, ex 38, ſeu parallelogramma, ex propoſitione 36 primi, ex utraq; parte inter ſe æqualia erunt. Quòd ſi uerò unum alterum exceſſerit, uel ab eo defecerit: & triangula ſeu parallelogrāma tum eodē modo ſeſe habebunt. Quatuor igitur nunc quantitatib. toties quidē prout multa uel pauca triangula ſeu parallelogramma propoſita fuerint, ordinatis, quarum prima & ſecūda ſint baſes triangulorum ſeu parallelogrammorum poſitorum, tertia uerò quantitas & quarta baſibus his ſuperpoſita triangula ſeu parallelogramma, cum iam primæ & tertiæ, ſecundæ item & quartæ æque ſint aſſignatæ multiplices: infertur tandem, per definitionem 5 quinti, id quod uolebat propoſitio: Triangula ſcilicet & parallelogramma, ſi ſub uno & eodē uertice fuerint, in ſuarum baſium ratione eſſe. quod demonſtrari op ortuit.

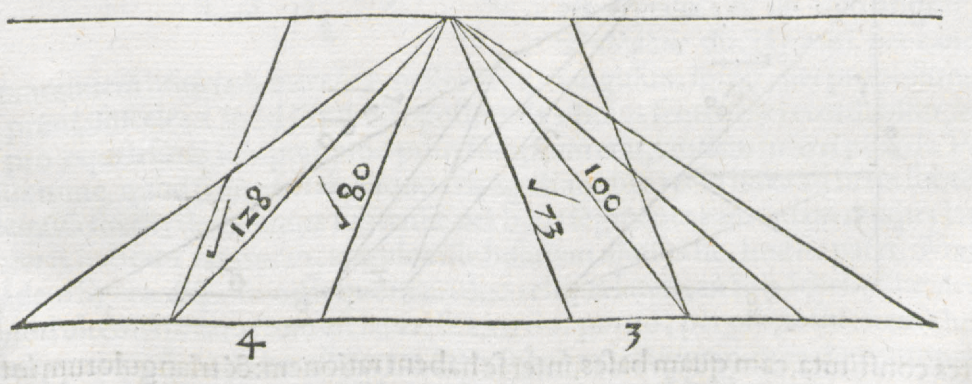




8	9	32	36	12	9	72	96
4	3	16	12	4	3	24	32
Triangulorum baſes		Ipſa triangula		Parallelogrammorum baſes		Ipſa parallelogramma.	

APPENDIX.

Poteſt hæc res de triangulis tantū demonſtrari, ut ſcilicet ſit (cū de uno dicatur) in demonſtrando facilior progreſſus. Quo facto, cum parallelogrammum & triangulum, ubi eandē baſim habuerint, atq; etiā inter lineas æquediſtantes fuerint, per propoſitionem 41 primi, illud ad hoc duplum ſit, cumq; etiam partes eodem modo multiplicium, per propoſitionem 15 quinti, eandem habeant rationem: & alterum, de parallelogrammis, tandem ſic ſe habere infertur. quod admonuiſſe oportuit.



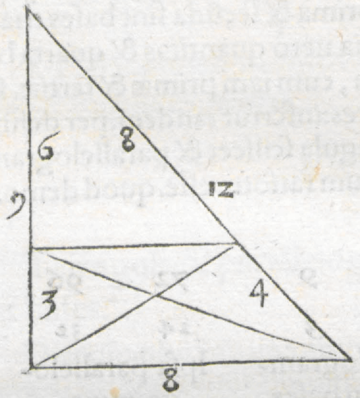
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β.

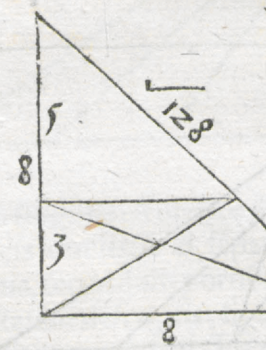
Ἐὰν τριγώνου παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν ἀχθῇ τις εὐθεῖα παράλληλος, ἀνάλογον τεμεῖ τὰς τοῦ τριγώνου πλευράς. Καὶ ἐὰν αἱ τοῦ τριγώνου πλευραὶ ἀνάλογον τμηθῶσιν.

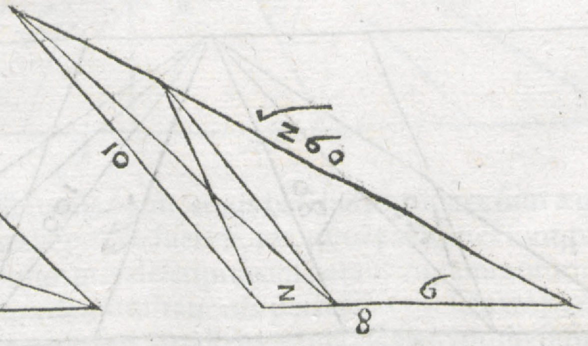
τμηθῶσιν· ἡ ἐπὶ τὰς τομὰς ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα παρὰ τὴν λοιπὴν ἔσται τοῦ τριγώνου πλευρὰν παράλληλος.

PROPOSITIO II.

Si ad unum trianguli latus ducta fuerit recta quædam linea parallela: proportionaliter hæc ſecat trianguli latera. Et ſi trianguli latera proportionaliter ſecta fuerint: quę ad ſectiones iungitur recta linea, ad reliquum tertium latus parallela erit.







Deſcribatur triangulum, ducatur in eo etiam, ab uno latere ad reliquorũ utrumlibet, recta quædam linea, reliquo tertio trianguli lateri parallela: dico, quantum ad partem priorem, latera illa per ductam parallelam ἀναλογικῶς, hoc eſt proportionaliter, ſecta eſſe, ſic ſcilicet, quemadmodum ſe habet ſuperior unius ſecti lateris pars ad ſuam inferiorem, uel contrà, inferior ad ſuperiorem, ita in altero ſuperior uel inferior pars ad reliquam ſe habeat. Porrò ſi recta in triangulo ducta linea, duo eius latera proportionaliter ſecet: hæc ducta, quantum ad partem poſteriorem, lateri tertio parallela erit. Quantum igitur ad partem priorem. Cum triangulum per ductam parallelam, ut apparet, in quadrilaterum & triangulũ diuiſum ſit, ductis in quadrilatero duabus diametris: erunt quæ ſic fiunt triangula, propterea quòd unam & eandẽ lineam, ductam ſcilicet perpendicularẽ, pro baſi habeant, in eiſdem item parallelis ſint, ex propoſitione 37 primi, inter ſe æqualia: eorum igitur, ad reliquum ultra quadrilaterum triangulum, per priorem partem propoſitionis 7 quinti, una & eadem ratio. Cumqꝫ etiam horum duorum æqualium triangulorum utrunqꝫ, cum tertio reliquo æquealtum ſit, atqꝫ ſic, ex præmiſſa prima bis uſurpata, eam, quã baſes, inter ſe habeant rationẽ. cum quæ eidẽ ſint eædem rationes, ex propoſitione 11 quinti, hæ inter ſe etiã eædem ſint, hæc propoſitione bis uſurpata, prior pars tandẽ manifeſtabitur. Sequitur poſterior. Maneat eadem figuræ diſpoſitio. Et quoniam latera, per ductam in triangulo lineam, ἀναλογικῶς ex hypotheſi ſecta ſunt, & quoniam etiam triangula, ad has portiones uel laterum partes conſtituta, eam quam baſes, inter ſe habent rationem: & triangulorum inter tertium latus & ductam in triangulo lineam comprehẽſorum, ad tertium reliquũ, per propoſitionem 11 quinti, una & eadem ratio erit: unde ſic etiam, per priorem partem nonæ eiuſdem quinti, eadem triangula inter ſe æqualia: atqꝫ tandem, per propoſitionem 39 primi, inter lineas æquediſtantes. Ducta ergo in triangulo hæc

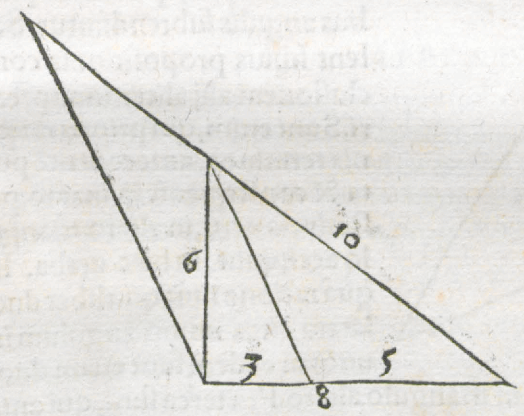
recta linea, tertio lateri æquediſtans erit. In triangulo igitur ſi ad unum eius, &cæ. quod demonſtraſſe oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ. Γ.

Ἐὰν τριγώνου γωνία δίχα τμηθῇ, ἡ δὲ τέμνουσα τὴν γωνίαν εὐθεῖα τέμνῃ καὶ τὴν βάσιν· τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς. Καὶ ἐὰν τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς· ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν τομὴν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα, δίχα τέμνει τὴν τοῦ τριγώνου γωνίαν.

PROPOSITIO III.

Si trianguli angulus bifariam ſecetur, ſecans autem angulum recta linea ſecet & ipſam baſim: baſis ſegmenta eandem habebunt rationem reliquis ipſius trianguli lateribus. Et ſi baſis ſegmenta eandem habuerint rationem reliquis ipſius triãguli lateribus: à uertice ad ſectionem ducta recta linea, bifariam ſecat ipſius trianguli angulum.



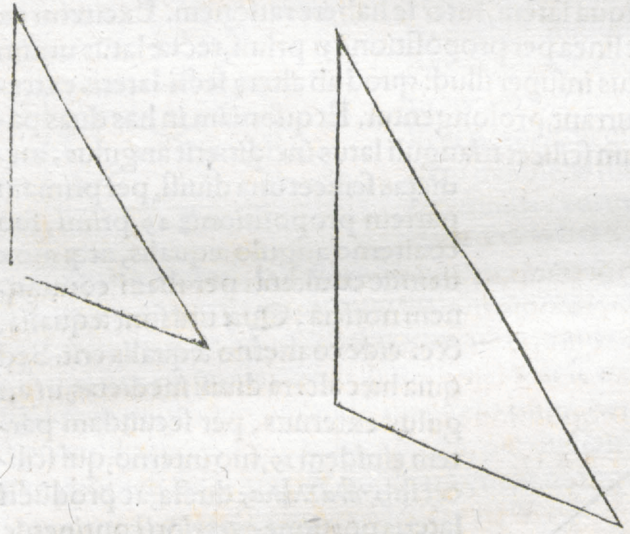
Deſcribatur triangulum qualitercunqꝫ, ducatur etiam ab uno eius angulo ad latus ſuum ſubtendens recta linea, quæ, per propoſitionem 9 primi, ipſum angulum bifariam, latus uerò eius utcunqꝫ ſecet: dico, quantum ad partem priorem, ſecti lateris ſegmenta eam, quam duo reliqua latera, inter ſe habere rationem. Excitetur ex alterutra ſecti lateris extremitate linea per propoſitionẽ 31 primi, rectæ latus unum ſecanti, parallela, hæc deinde, latus inſuper illud: quod ab altera ſecti lateris extremitate egreditur, uſqꝫ dum concurrant, prolongentur. Et quoniam in has duas parallelas recta quædam linea, unum ſcilicet trianguli latus incidit: erit angulus, medietas ſcilicet una diuiſi, per primam partem propoſitionis 29 primi, ſuo coalterno angulo æqualis, atqꝫ mox deinde & altera, per illam communem noticiã, Quæ uni ſunt æqualia, &c. eidẽ coalterno æqualis erit. Sed quia hæc altera diuiſi medietas, ut angulus externus, per ſecundam partem eiuſdem 29, ſuo interno, qui ſcilicet ſub παραλλήλως ducta, ac producti lateris portione exteriori continetur, eſt æqualis: & illi duo anguli, ad παραλλήλως ductã poſiti, per eandem communem noticiam, inter ſe æquales erũt: triangulum igitur, per propoſitionem 6 primi, iſoſceles. Quòd ſi quis propoſitionis 2 huius ſententiæ recordabitur, æquali pro æquali linea ſumpta: quod prius ſumptum erat, tandem inferri poterit. Poſterius nunc, quod ſcilicet, ſi ab aliquo trianguli angulo recta linea ad ſuam ſubtẽſam demiſſa fuerit, ſic ut huius ſubtenſæ uel baſis ſegmenta eam quam reliqua latera, inter ſe habeant rationem, angulus ille bifariam diuiſus ſit, hoc ſic patet. Maneat eadem figuræ diſpoſitio. Et quoniam duo reliqua latera, ex hypotheſi, illud deinde quod ulterius protractum eſt latus, & exterior portio, per propoſitionem 2 huius, eam, quam ipſę diuiſi lateris partes, inter ſe habent rationem, quia duę rationes uni ſunt eædem: illæ ex 11 quinti, & inter ſe eædem erunt. Hæ duæ igitur lineæ, portio ſcilicet exterior, & alterum trianguli latus, per ſecundam partem propoſitionis nonæ quinti, inter ſe æquales erunt. ſicqꝫ triangulum iſoſceles, cuius anguli ad baſim, lineam ſcilicet παραλλήλως ductam, per priorem partem quintæ primi, inter ſe ſunt æquales. Quia uerò unus, ex prima parte propoſitionis 29 primi, uni: alter uerò, ex ſecunda parte eiuſdem, alteri diuiſi anguli parti eſt æqualis: ut ipſi iſoſcelis ad baſim anguli, ex priore parte quintæ primi: ſic propter æqualitatem iam, & diuiſi anguli partes inter ſe æquales erunt, quare bifariam diuiſus. Si igitur trianguli angulus bifariam ſecetur, &c. quod demonſtraſſe oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ.

Τῶν ἰσογωνίων τριγώνων· ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· καὶ ὁμόλογοι. αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραί.

PROPOSITIO IIII.

Æquiangulorum triangulorum: proportionalia ſunt latera, quæ circum æquales angulos: & ſimilis rationis latera, quæ ſubter æquales illos angulos ſubtenduntur.



Fiant duo triangula, qualia propoſitio hæc quarta requirit, hoc modo. deſcribatur primò unum qualitercunq;, ducta deinde recta linea ad eius unam extremitatem per propoſitionem 23 primi, unus angulus uni, ad alterã deinde, uerſus illam & eandẽ partem, alius alij trianguli angulo ęqualis conſtituatur, ac continuatis duab. illis rectis donec concurrant, triangulũ hoc, ei quod prius deſcriptũ eſt, æquiangulum erit. Dico ergo nunc, cum ſint triangula ęquiãgula, quòd & illorũ quæ ſunt circa æquales angulos, latera, proportiõnalia ſint: eiuſdemq; & ſimilis rationis latera, quæ ſub æqualibus angulis ſubtenduntur. Solent huius propoſitionis concluſionem alij aliter interpretari. Sunt enim, qui prioris rationis terminos, antecedentẽ puta & conſequentem, in uno, poſterioris uerò, in altero triangulo accipiunt, in hæc uerba. In qua ratione ſunt quælibet duo latera circa unum angulum in uno: in eadem ſunt etiam duo, circa angulum ſumpto æqualem, latera, in triangulo altero. Præterea ſunt, qui antecedentes in uno, in altero uerò triangulo conſequentes rationum terminos accipiunt, hoc modo. In qua ratione ſunt quælibet duo latera, duos in duobus triangulis æquales inter ſe angulos ſubtendentia: in eadem ſunt etiam ſingula reliqua ad ſua ſingula. Cuius ſanè concluſionis duplex interpretatio, cũ in ſcholis recepta ſit, utriuſq; etiam demonſtrationem adducendam duximus. Prioris igitur talis eſto. Coniungentur triangula ſic, ut unum unius & alterum latus trianguli alterius ſit linea una: utq; anguli etiam, ad hęc latera exteriores, ipſis medijs, uterq; ſuo remotiori, ſint æquales. Et quoniam in duas rectas, quę ſunt extrema horum triangulorum latera, ex duobus lateribus compoſita recta linea incidit, cum qui ſic deſcribuntur anguli, ex ſtructura & propoſitione 17 primi (æquali tamẽ pro æquali angulo ſumpto) duobus rectis angulis minores ſint: in eadem parte hæc duo latera, uel has duas rectas continuatas cõcurrere, ex quadam communi noticia, neceſſe eſt. Continuentur ergo ut cõcurrant. Et quoniã id quod ſic deſcribitur, ex prima parte propoſitionis 28 primi, bis uſurpata, parallelogrammũ eſſe cõſtat, parallelogrammi inſuper latera oppoſita, ex propoſitione 34 primi, inter ſe ęqualia ſunt: per propoſitionem 2 huius & permutatam rationem utroque bis uſurpato, æquali ſubinde pro æquali linea ſumpta, ex æqua ratione, quantum ad priorem concluſionis interpretationem, propoſitioni ſatisfactum erit. Vel, per propoſitionem ſecundam huius, bis uſurpatam, cum duæ rationes uni eædem ſint, atq; illæ ſic, ex propoſitione 11 quinti, inter ſe eædem: & poſterior concluſionis interpretatio manifeſta erit. Aequiangulorum igitur triangulorum, proportionalia ſunt latera, quæ circũm æquales angulos: & ſimilis rationis latera, quæ ſubter æquales illos angulos ſubtenduntur. quod demonſtraſſe oportuit.

APPENDIX.

Et licet utraq; cõcluſionis interpretatio, ut diximus, in ſcholis recepta ſit, tamen cum non conueniat ex unius propoſitionis hypotheſibus duplicem concluſionis colligere interpretationem, quòd ex noſtra ſententia, prior poſteriori interpretationi præferenda ſit, lectorem ſcire uolumus. Habet tamen & poſterior ſuam defenſionem, cum ſit, ut conijcere licet, ex propoſitione 14 huius petita.

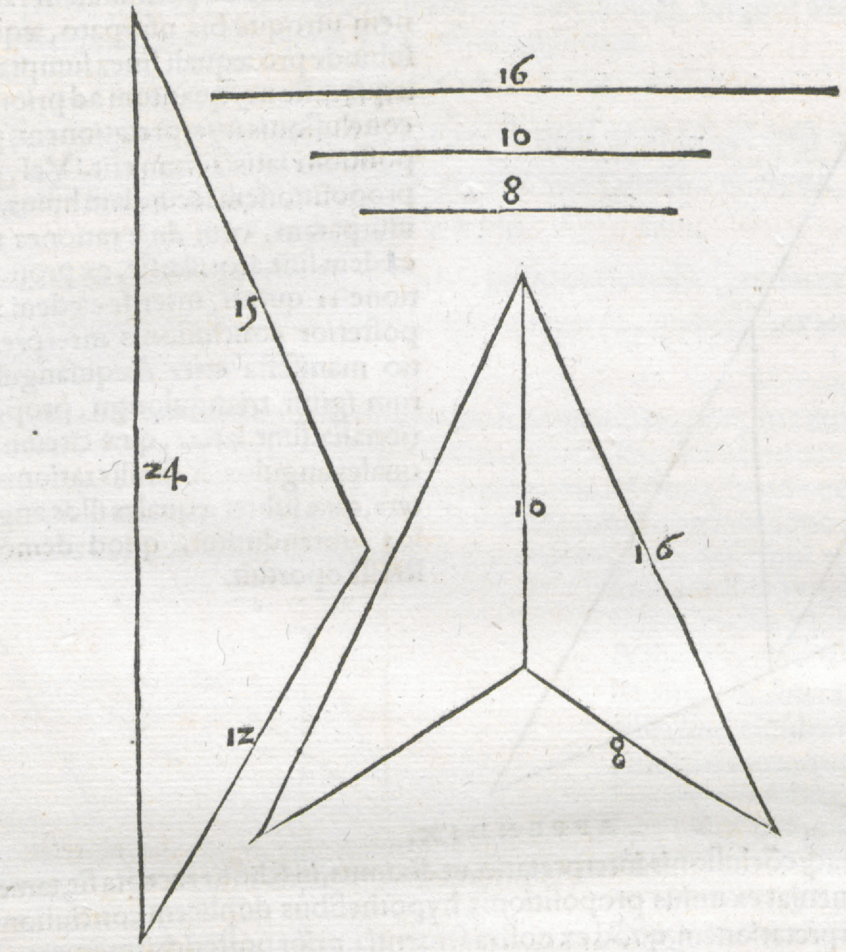
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχῃ· ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα· καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ᾽ ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

PROPOSITIO V.

Si duo triangula latera proportionalia habuerint: æquiangula erunt triangula: & æquales habebunt angulos, ſub quibus ſimilis rationis latera ſubtenduntur.

Deſcribatur primò triangulum qualitercunq;, ex tribus deinde rectis lineis alijs quæ eas inter ſe quas deſcripti trianguli latera, rationes habent, aliud triangulum, per propoſitionem 22 primi, conſtituatur. Erunt autem deſcripta duo triangula, qualia propoſitio hæc quinta requirit: quare dico, quòd ea etiam æquiangula ſint, angulos item qui ſub ſimilis rationis lateribus ſubtendũtur, æquales habeant. Conſtituantur ad unum utriuſuis trianguli latus, atq; ad eiuſdem lateris extremitates, ex illa parte quæ eſt extra triangulũ, per propoſitionem 23 primi, duo anguli, ad utrãq; nimirum extremitatem unus, duobus in altero triangulo angulis æquales. Et quoniam per continuationem linearum, illo triangulo clauſo, tertius angulus huius, tertio alterius triãguli angulo, ex corollario propoſitionis 32 primi, eſt æqualis: hæc duo triangula primò æquiangula, atq; inde, ex propoſitione 4 huius, late-



rum etiam proportionalium erunt. Duo igitur ſimul compoſita triangula, per propoſitionem 11 quinti, & nonam eiuſdem, utroq; bis ſumpto, æquilatera, per octauam deinde & 4 primi, uel octauam ſolũ, ter repetitam, etiam æquiangula erunt. Quare per communem illam notitiam, Quæ uni ſunt æqualia, &c. quantum ſatis fuerit ea repetita, infertur tandem concluſio, triangula ſcilicet talia propoſita, inter ſe etiam æquiangula eſſe: atq; inſuper, quod anguli in utroq;, ſub quibus ſimilis rationis latera ſubtenduntur, æquales ſint. Si duo igitur triangula latera proportionalia habuerint: æquiangula erunt triangula: & æquales habebũt angulos, ſub quibus ſimilis rationis latera ſubtenduntur. quod demonſtraſſe oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ς.

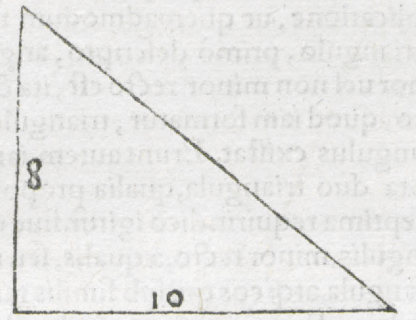
Ἐὰν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον· ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα· καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ᾽ ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

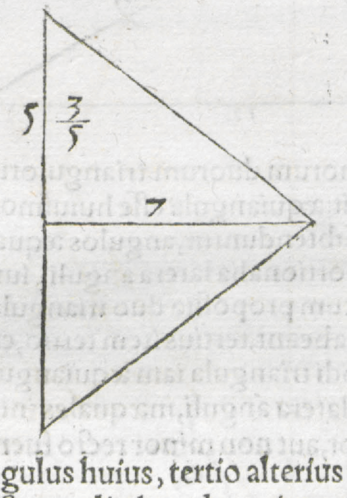
PROPOSITIO VI.

Si duo triangula unum angulum uni angulo æqualẽ, circa item æquales angulos latera proportionalia habuerint: æquiangula erunt triangula: & æquales habebunt angulos, ſub quibus ſimilis rationalis latera ſubtenduntur.

Deſcribatur

Deſcribatur primò triangulum, ducatur etiam recta quædam linea, ad cuius extremitatem deinde alteram, per propoſitionem 23 primi, angulo, qui ſit uni ex triangulo æqualis, conſtituto, fiat ut hæ rectæ eam, quam in triangulo, circa ſumptum angulum latera, inter ſe habeant rationem, & coniunctis extremitatibus tertia quadam linea, quod ſic deſcribitur triangulum, & prius deſcriptum, huiuſmodi qualia hæc propoſitio requirit, triangula erunt: dico ergo nunc, quòd & æquiangula ſint hæc eadem triangula: angulos item, qui ſub ſimilis rationis lateribus ſubtenduntur, æquales habeant. Conſtituantur ad unum utriuſuis trianguli latus, atq; ad eiuſdem lateris extremitates, ex illa parte quæ eſt extra triangulum, per 23 primi, duo anguli, duobus in triangulo altero angulis æquales, Et quoniam per continuatio-





nem linearum illo triangulo clauſo, tertius angulus huius, tertio alterius trianguli angulo, ex corollario propoſitionis 32 primi, eſt æqualis: hæc duo triangula primò æquiangula, atq; deinde ex propoſitione 4 huius, laterum etiam proportionalium erunt. Sed quia rationũ quantitatibus inter ſe collatis, inde, atq; etiã ex propoſitionis hypotheſi, duæ rationes eidem eædem ſunt, cum hæ duæ, ex propoſitione undecima quinti, etiam inter ſe eædem ſint, unam deinde uel antecedentem uel conſequentem (pro ut quidem inſtituta collatio fuerit) quantitatem habeant: duo illa ſimul compoſita triangula, per propoſitionem 9 quinti, quartam deinde primi, & æquilatera & ęquiangula erunt. Quia uerò unum ex his uni ex datis, per ſtructuram eſt æquiangulum, & alteri datorum idem æquiangulum erit: quare ſic & ipſa inter ſe, per communem quandam noticiam: proportionalium igitur laterum, ex propoſitione 4. Si igitur, &c. quod demonſtraſſe oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ.

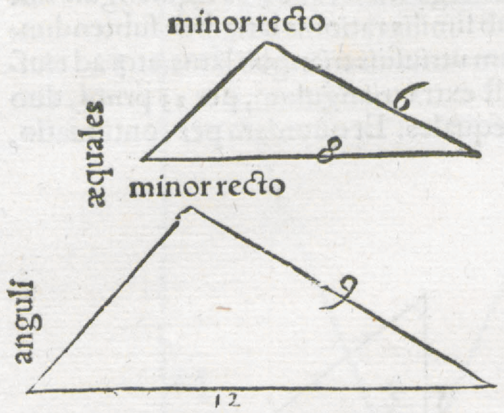
Ἐὰν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἄλλας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, τῶν δὲ λοιπῶν ἑκατέραν ἅμα, ἤτοι ἐλάσονα, ἢ μὴ ἐλάσονα ὀρθῆς· ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας περὶ ἃς ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί.

PROPOSITIO VII.

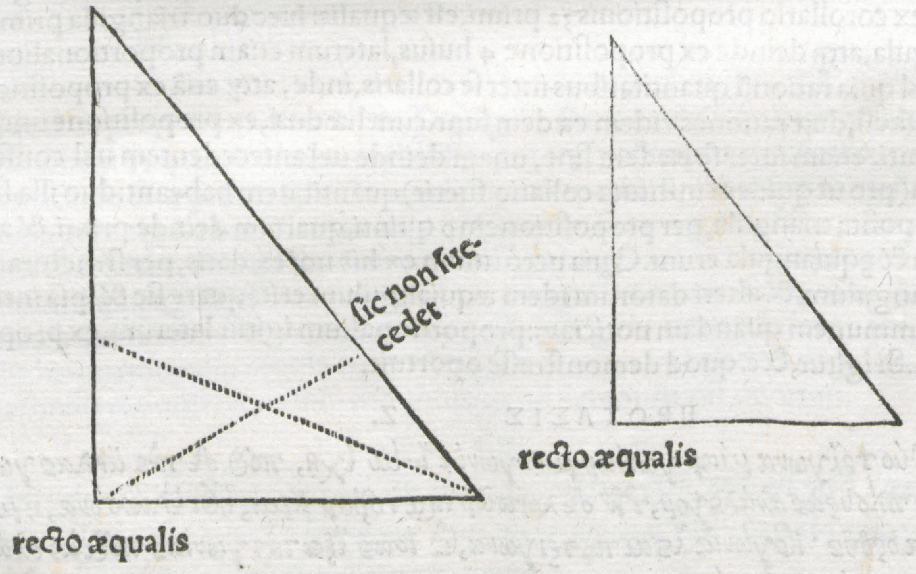
Si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem, circa autẽ alios angulos latera proportionalia habuerint, reliquorum uerò utrunque ſimul aut minorem, aut non minorem recto: æquiangula erunt triangula,

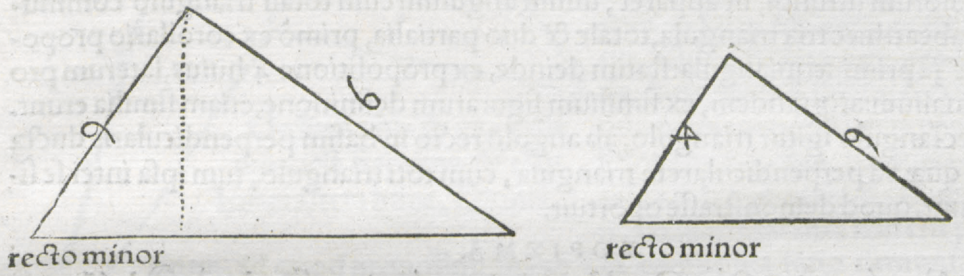
&

& æquales habebunt angulos, circa quos proportionalia ſunt latera.



Deſcribatur triangulum, ducatur etiam recta quædam linea, ad cuius alteram extremitatem angulus, uni ex triangulo æqualis, per 23 primi conſtituatur. Ex duobus deinde trianguli lateribus, quæ ſunt circa alium, quàm cui æqualem poſuimus angulum, proportionales partes deſumptæ, una in alterutra linea, ab angulo iam formato incipiendo, ſignetur: altera uerò pars, ex hoc puncto, angulo formato ſubtendatur: quæ ubi alterã lineam attigerit, quanta ipſa, ut tertium trianguli latus, eſſe debeat, apparebit. Danda autem eſt opera in hac alterius proportionalis partis applicatione, ut quemadmodum tertius in triangulo, primò deſcripto, angulus minor uel non minor recto eſt, ita & in altero, quod iam formatur, triangulo, tertius angulus exiſtat. Erunt autem iam deſcripta duo triangula, qualia propoſitio hæc ſeptima requirit: dico igitur, ſiue uterque ex reliquis horum duorum triangulorum angulis, minor recto, æqualis, ſeu maior recto, fuerit: æquiangula eſſe huiuſmodi triangula, atque eos qui ſub ſimilis rationis lateribus ſubtenduntur, angulos æquales habere. Primò igitur, aut enim illi duo, inter proportionalia latera anguli, ſunt inter ſe æquales, aut inæquales. Si æquales fuerint, cum propoſita duo triangula duos etiam angulos, ex hypotheſi, inter ſe æquales habeant, tertius item tertio, ex corollario propoſitionis 32 primi, ęqualis ſit: huiuſmodi triangula iam æquiangula eſſe cõcluditur. Quod ſi ijdem inter proportionalia latera anguli, inæquales inter ſe fuerint, tum, ſiue reliquorum uterque ſimul, aut minor, aut non minor recto fuerit, maiori angulo, ut minori æqualis fiat, per rectam quandam lineam, quemadmodum docet propoſitio in primo 23, ſuccurrendum eſt. Et quoniam duo triangula ſunt, partiale unum, & alterum poſitum, quorum duo anguli unius, duobus alterius trianguli angulis æquales ſunt, unus quidem uni, ex hypotheſi, alter uerò alteri, ex ſtructura per propoſitionem 23 primi, cum & tertius nunc tertio angulo, ex corollario propoſitionis 32 primi, æqualis ſit: triangula hæc, partiale ſcilicet & alterum poſitum, æquiangula, hinc etiam ex propoſitione 4 huius, laterum proportionalium erunt. Quoniam autem rationum quantitatibus inter ſe collatis, inde, atque etiam ex propoſitionis hypotheſi, duæ rationes eidem eædem ſunt, cum hæ duæ ex prop. 11 quinti, etiã inter ſe eædem ſint, unam inſuper quantitatem communem habeant: quæ reliquæ duæ harũ ſimilium rationum quantitates ſunt, alterius nimirum partialis trianguli duo latera, ex propoſitione nona quinti inter ſe æquales erunt. Triangulum igitur iſoſceles, habens angulos, qui ad baſim ſunt, ex priore parte propoſitionis quintæ primi, inter ſe æquales, id quod in genere obſeruandum eſt. Quòd ſi iam ex propoſito receptum ſit, utrunque reliquorum non minorem recto eſſe, cum ſic propter æqualitatem, & alter huius iſoſcelis angulus, non minor, hoc eſt rectus uel maior recto exiſtat: duo in triangulo anguli, non minores duobus rectis exiſtentes, collocentur. Id autem, cum obſtante propoſitione in primo 17, per quam omnis trianguli duo quilibet anguli, duobus rectis minores ſunt, nullo modo eſſe poſſit: neque etiam inæquales, ſed æquales inter ſe inter proportionalia latera anguli erunt. Quare, &c. Sed eſto iam ex propoſito utrunque reliquorum minorem recto eſſe: cum ſic alter, huius iſoſcelis, ad baſim poſitus angulus, recto minor ſit, ac per conſequens huius iſoſcelis angulus exterior, per prop. 13 primi, recto maior: & ille qui in triangulo altero, ex corollario allegato, eidem exteriori eſt æqualis, ſimiliter recto angulo maior erit, cum tamen ſit poſitus recto minor, quod nunc eſt impoſſibile, unum & eundem angulum, iam minorem, atque deinceps angulo recto maiorem eſſe. Illos igitur ſub proportionalibus lateribus comprehenſos angulos, non inæquales, ſed æquales inter ſe eſſe oportet: quare reliquus angulus reliquo, ex corollario, ęqualis erit. Aequiangula igitur triangula huiuſmodi propoſita. Si duo igitur triangula unum angulum uni angulo æqualem, circa autem alios, &c. quod demonſtraſſe oportuit.





APPENDIX.

Præcepimus autem in ſtructura, maiori angulo, ut minori æqualis fieret, ſuccurrendum eſſe, & rectè quidem. Quòd ſi contrà aliquis, minorem ad æqualitatem maioris, per eandem propoſitionem 23 primi, augere uellet, tam facili opera propoſitionis demonſtrationem inde colligere poſſet.

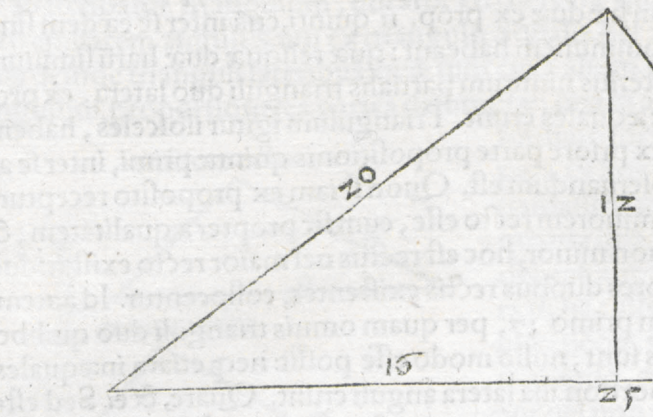
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η.

Ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ· τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα, ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις.

PROPOSITIO VIII.

Si in rectangulo triangulo ab angulo recto in baſim perpendicularis ducta fuerit: quæ ad perpendicularem triangula, cùm toti triangulo, tum ipſa inter ſe ſimilia ſunt.

Deſcribatur triangulum rectangulum, demittatur etiam ab eius angulo recto, per propoſitionem 12 primi, ad ſuam ſubtenſam linea perpendicularis: dico quòd partialia illa triangula, totali, atque etiam ſibijpſis, ſimilia ſint. Cum enim, ex quadam communi noticia, omnes recti anguli inter ſe æquales ſint, partialium inſuper



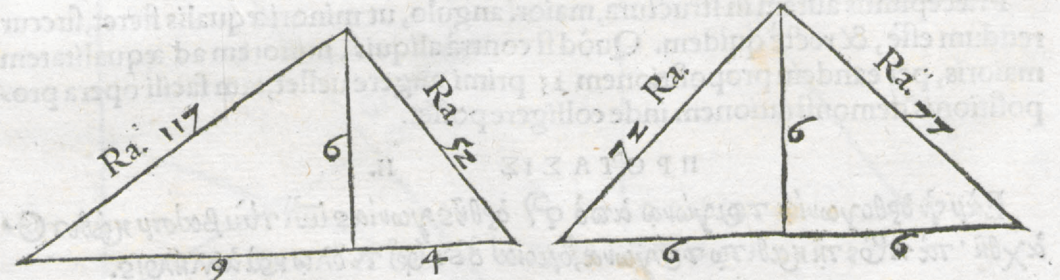
triangulorum utrunq;, ut apparet, unum angulum cum totali triangulo commu-
nem habeat: hæc tria triangula, totale & duo partialia, primò ex corollario propo-
ſitionis 32 primi, æquiangula: ſtatim deinde, ex propoſitione 4 huius, laterum pro
portionalium: atq; tandem, ex ſimilium figurarum definitione, etiam ſimilia erunt.
Si in rectangulo igitur triangulo, ab angulo recto in baſim perpendicularis ducta
fuerit: quæ ad perpendicularem triangula, cùm toti triangulo, tum ipſa inter ſe ſi-
milia ſunt. quod demonſtraſſe oportuit.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν· Ὅτι, ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ· ἡ ἀχθεῖσα τῶν τῆς βάσεως τμημάτων μέση ἀνάλογόν ἐστι. Καὶ ἔτι τῆς βάσεως καὶ ἑνὸς ὁποτερουοῦν τῶν τμημάτων, ἡ πρὸς τῷ τμήματι πλευρὰ, μέση ἀνάλογόν ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifeſtum eſt, ſi in rectangulo triangulo ab angulo recto in baſim perpendicularis ducta fuerit: hanc ductam inter baſis ſegmenta mediam proportionalẽ eſſe. Et inſuper, inter ipſam baſim, & utrunq; ſegmentum, latus, quod ad idẽ ſegmentum ponitur, mediũ proportionale.



Numeri uel quantitates proportionales.

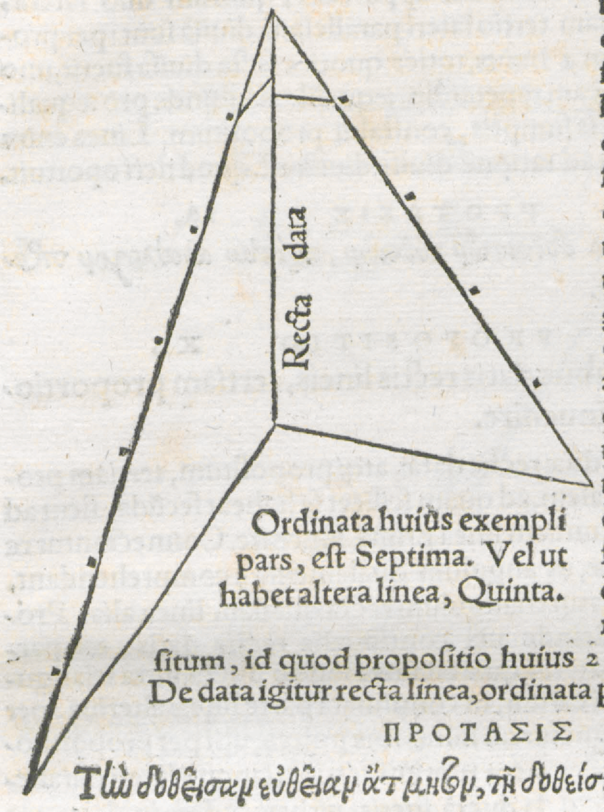
9	6	4	6	6	6
13	$\sqrt{117}$	9	12	$\sqrt{72}$	6
13	$\sqrt{52}$	4	12	$\sqrt{72}$	6

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ.

Τῆς δοθείσης εὐθείας, τὸ προσταχθὲν μέρος ἀφελεῖν.

PROPOSITIO IX.

De data recta linea, ordinatam partem abſcindere.



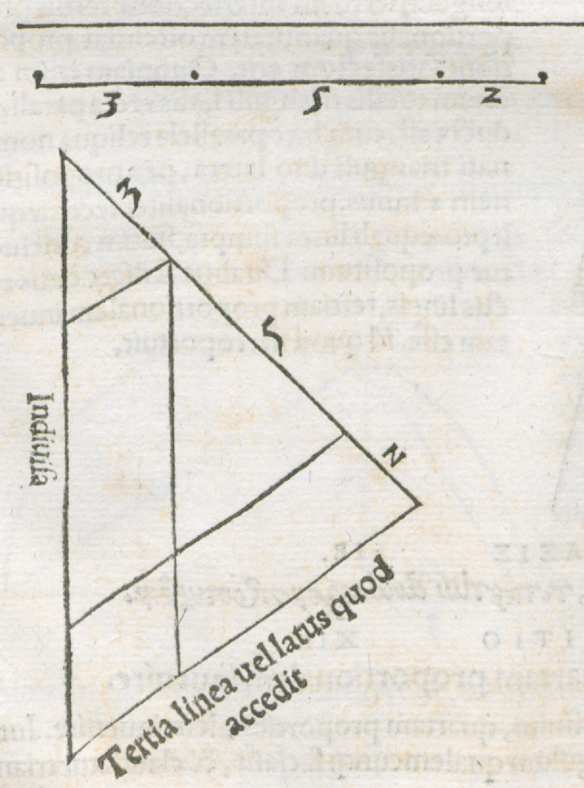
Ordinata huius exempli pars, eſt Septima. Vel ut habet altera linea, Quinta.

Sit data recta linea, atq; propoſitum, ordinatam ab ea partem, utpote ſeptimam, tertiam, tredecimã, uel aliam quamcunq;, abſcindere. Alia igitur recta, ſatis longa, lineæ rectæ datæ angulariter applicetur, in qua officio circini, utcunq; extenſi, ab angulo deſcendẽdo, ſeptem uel tredecim, hoc eſt tot, quot quidem ordinatæ partis, quæ abſcindi debet, denominatio requiſiuerit, æquales partes ſignentur, finis deinde ſeptimæ (ſi quidẽ illa pars ordinata fuerit) cum altera datæ extremitate, linea quadam recta, ut triangulum fiat, iungatur. Quòd ſi iam à fine primæ partis, huic ultimò ductæ rectæ, tanquam uni trianguli lateri, per propoſitionem 31 primi, parallela ducta, eaq; ad datam rectam uſque continuata fuerit, factum iam erit propoſitum, id quod propoſitio huius 2 & compoſita ratio demonſtrabũt. De data igitur recta linea, ordinata pars abſciſſa eſt. quod fieri oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι.

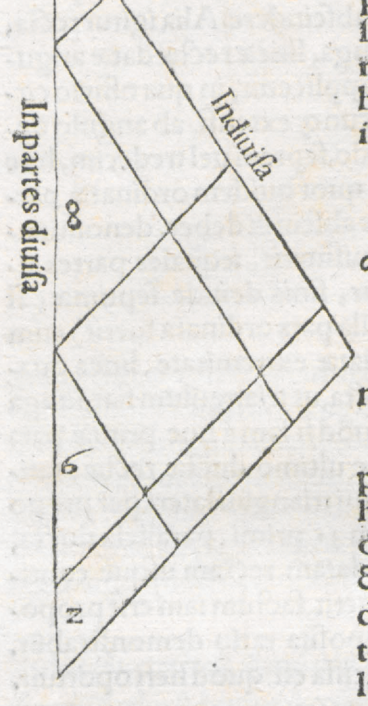
Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄτμητον, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τετμημένῃ ὁμοίως τεμεῖν.

PROPOSITIO X.



Datam rectam lineam non ſectam, datę rectæ lineæ ſectę ſimiliter ſecare.

Sint duæ rectæ lineæ datæ, una quidem indiuiſa, altera uerò in partes, quot & qualitercunq; diuiſa, atq; propoſitum, indiuiſam in partes ſecũdum rationes partium diuiſæ diuidere. Applicentur lineæ angulariter, accedat etiam tertia linea, qua liberæ datarum extremitates, ut triangulum fiat, iungantur, à punctis tandem diuiſionũ ſingulis, tertiæ lineæ parallelæ ductæ, atq; ad indiuiſam lineam uſq; continuatæ: propoſitioni ſatisfactũ erit, atq; demonſtratio talis. Ducantur à punctis diuiſionum ſingulis, illo tantùm, quod eſt tertiæ lineæ proximum, dempto, indiuiſæ lineę parallelæ, atque hæ ad tertiam uſque lineam, ut parallelogramma fiant, continuentur. Et quoniam parallelogrammorum locorum latera oppoſita, per propoſitionem 34 primi, inter ſe æqualia ſunt: triangula etiam hic appareant, quorum duo latera, per lineam tertio lateri parallelam, diuiſa ſunt: per propoſitionem 2 huius, toties, quoties ſecta diuiſa fuerit, uno minus, eam repetendo, æqualibus ſubinde pro æqualibus lineis ſumptis, conſtabit propoſitum. Linea enim indiuiſa ad rationē diuiſę diuiſa eſt. quod fieri oportuit.



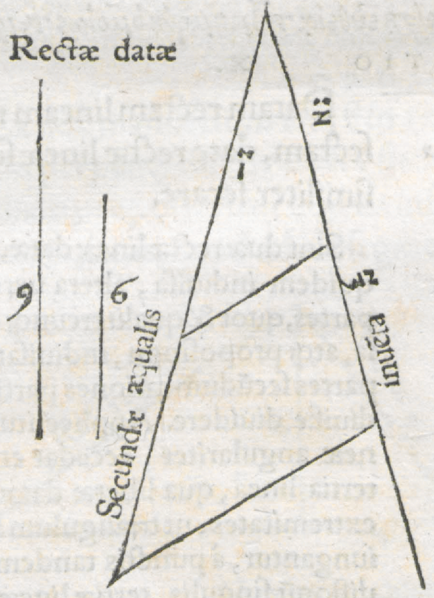
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, τρίτην ἀνάλογον προσευρεῖν.

PROPOSITIO XI.

Duabus datis rectis lineis, tertiam proportionalem inuenire.

Sint duæ rectæ datæ, atq; propoſitum, tertiam proportionalem, ad quam ſcilicet ſe habeat ſecūda, ſicut ad hanc ſecundam linea prima, inuenire. Connectantur rectæ datæ, ut angulum qualemcunq; comprehendant, & claudatur triangulum recta quadam linea alia. Productis deinde uel continuatis rectis datis, ex parte tertij lateris, quæ eſt linea modò ducta, ultra triangulum, uni earum, in continuata parte lineæ alterius, per propoſitionem 3 primi, æqualis ſignetur, ab huius fine poſtea, ubi per propoſitionem 31 primi, tertio trianguli lateri parallela ducta fuerit, cū hæc eadem in altera prolongata per ſuam interſectionē tertiæ proportionalis quantitatem oſtendat, propoſitioni ſatisfactum erit. Quoniam enim ad unum totalis trianguli latus recta parallela ducta eſt, cum hæc parallela reliqua nominati trianguli duo latera, per propoſitionem 2 huius, proportionaliter ſecet: æquali pro æquali linea ſumpta, ſtatim concluditur propoſitum: Duabus ſcilicet datis rectis lineis, tertiam proportionalem inuentam eſſe. id quod fieri oportuit.



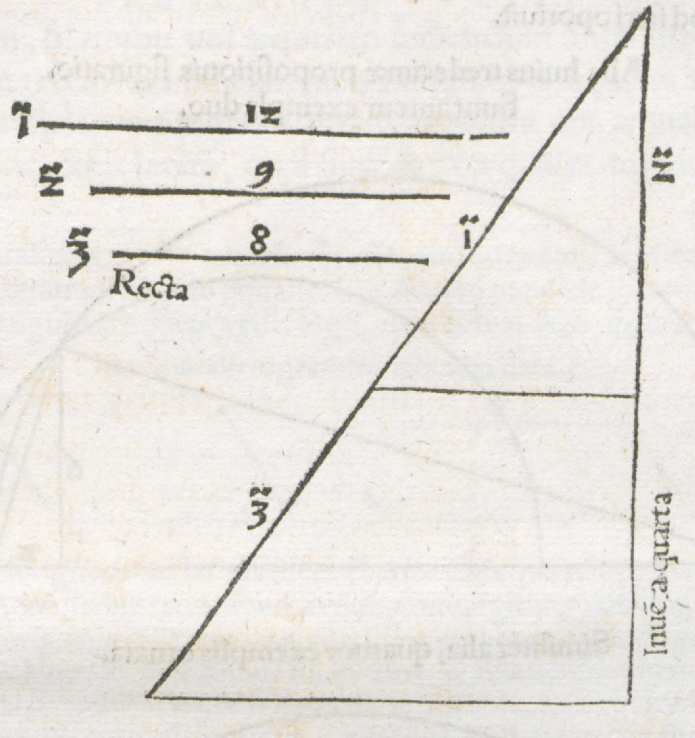
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ.

Τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν, τετάρτην ἀνάλογον προσευρεῖν.

PROPOSITIO XII.

Tribus datis rectis lineis, quartam proportionalem inuenire.

Sint tres rectæ datæ, atq; propoſitum, quartam proportionalem inuenire. Iungantur prima recta & tertia, ut angulum qualemcunq; faciant, & claudatur triangulum. Secunda deinde, uel alia, ſecundæ æqualis, primæ ad amuſſim iuncta, tertia uerò ultra triangulum continuata, à fine huius ſecundæ, ad continuatam uſq;, tertio trianguli lateri, per propoſitionem 31 primi, parallela ducatur: & erit portio, rectæ tertiæ & huic ſectioni interiacens, linea illa quæ quæritur. Hoc autem patet ex 2 propoſitione huius, æquali pro æquali linea ſumpta. Tribus igitur datis rectis lineis, quarta proportionalis inuenta eſt. quod feciſſe oportuit.



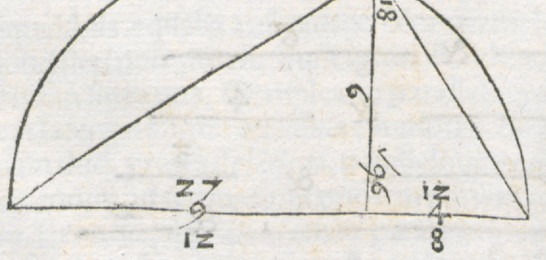
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, μέσην ἀνάλογον προσευρεῖν.

PROPOSITIO XIII.

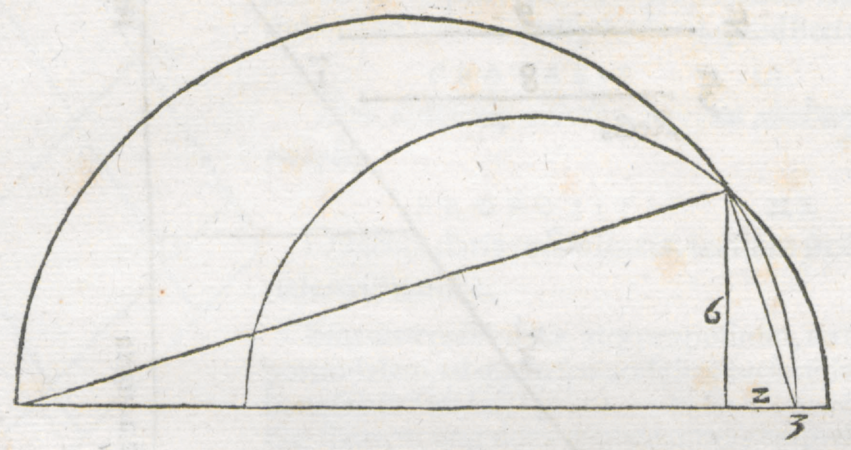
Duabus datis rectis lineis, mediam proportionalem inuenire.

Sint duæ rectæ datæ, atq; propoſitum, mediam ipſarum proportionalem, ad quam ſcilicet ſe habeat una ex datis, ſicut hæc ipſa media ad alteram, inuenire. Coniungātur ad amuſſim duæ rectæ datę: ex his deinde cōpoſita bifariā diuiſa, ex puncto diuiſionis ſuper ipſam totam, ad interuallum alterutrius medietatis, ſemicirculus deſcribatur. Quòd ſi tandem à puncto coniunctionis datarum, tanquam à puncto in hac recta dato, ad angulos rectos linea ad circumferentiam uſque ducta fuerit: quòd hæc ducta, media datarum proportionalis ſit, ſic demonſtrabitur. Iungantur extremitates rectæ, ex duabus compoſitæ, cum interſectione ad rectos ductæ & ſemicircūferentiæ, duabus rectis lineis. Et quoniā angulus in ſemicirculo, ex prima parte propoſitionis 31 tertij, rectus eſt, cum ab eo ad baſim per-

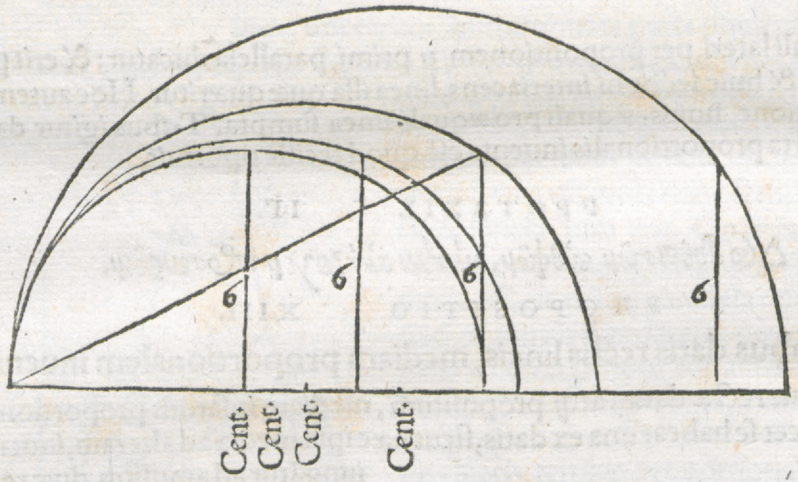


pendicularis recta demiſſa ſit: ex priore parte corollarij propoſitionis 8 huius, res tandem demonſtratā erit, lineam ſcilicet illam, quam diximus, mediam inter datas proportionalem eſſe. Duabus igitur datis rectis lineis, media proportionalis inuenta eſt, quod fieri oportuit.

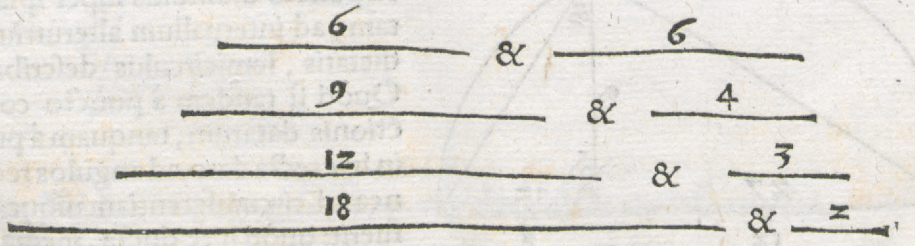
Alia huius tredecimæ propoſitionis figuratio,
Sunt autem exempla duo.



Similiter alia, quatuor exemplis ornata.



Datæ autem rectæ lineæ ſunt,



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ.

Τῶν ἴσων τε, καὶ μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν παραλληλογράμμων· ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. Καὶ ὧν παραλληλογράμμων,

μίαν

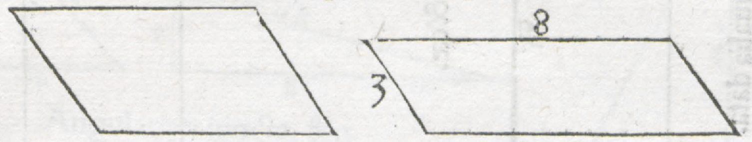
μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν, ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα.

PROPOSITIO XIIII.

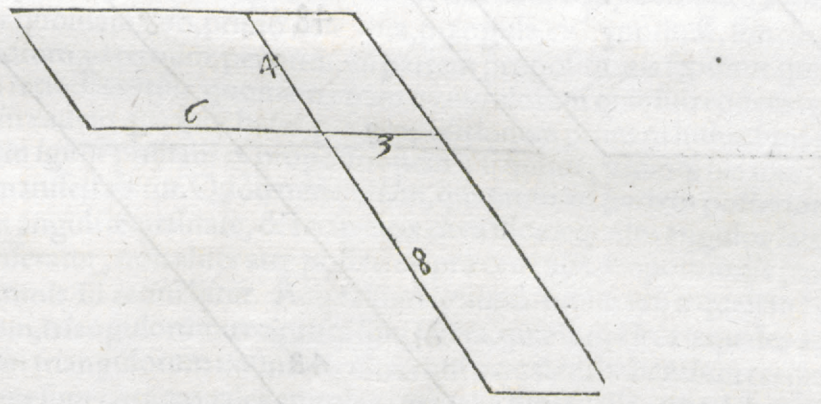
Æqualium, & unum uni æqualem habentium angulum, parallelogrammorum: reciproca ſunt latera, quæ ſunt circa æquales angulos. Et quorum parallelogrammorum unum angulum uni æqualem habentium, reciproca ſunt latera, quæ ſunt circa æquales angulos: æqualia ſunt & illa.

Sint duo parallelogramma æqualia: & eſto, quòd unus angulus unius, ſit uni alterius parallelogrammi angulo ęqualis: dico, horum parallelogrammorum latera, circa æquales angulos, reciproca eſſe. Reciproca autem dico ea parallelogramma,

Duo parallelogramma æqualia data. &c.

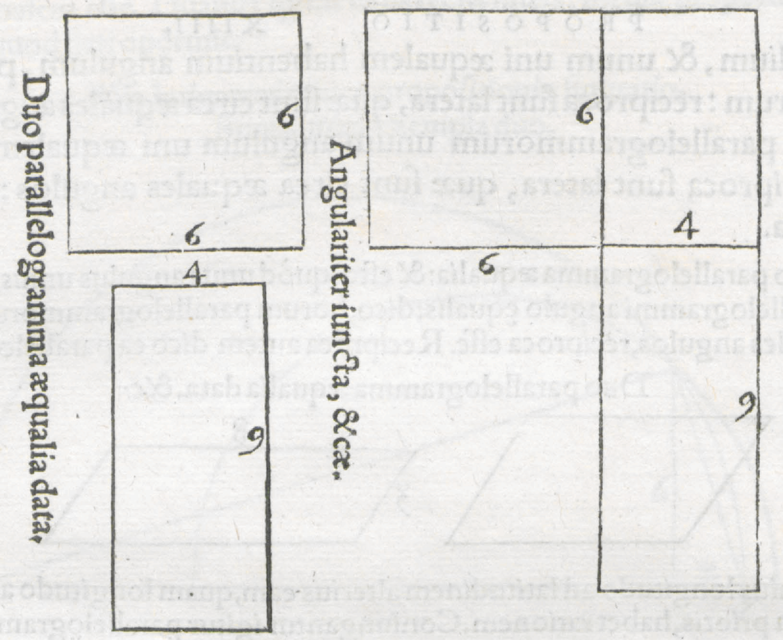


quorum unius longitudo ad latitudinem alterius eam, quam longitudo alterius ad latitudinem prioris, habet rationem. Coniungantur igitur parallelogramma, ut angulum faciant, utꝗ; anguli illorum æquales, ſint circa unum punctum, longitudo inſuper unius & latitudo parallelogrammi alterius adamuſſim unam lineam conſtituant. Quibus ſic coniunctis, & reliqua duo circa æquales angulos latera, una linea erunt, ſequeretur enim aliàs, ſi alterutrum horum cõtinueretur, ſiue per propoſitionem 15 primi, & communem illam noticiam, Eidem æqualia, &c. ſeu per propoſitionem 13 eiuſdem primi bis uſurpatam, & communem illam noticiam, Si ab æqualibus æqualia auferantur, &cæ. partialem angulum ſuo totali eſſe æqualem, quod fieri non poteſt. Sunt igitur & reliqua duo horum angulorum latera, adamuſſim linea una. Compleatur parallelogrammum tertium, ſecundum quantitatem laterum anguli utriuſuis exterioris: eritꝗ; demõſtrationis figura parata. Et quoniam duo, primò deſcripta, parallelogramma, ex hypotheſi, ſunt inter ſe æqualia: erit eorum ad tertium, per priorem partem propoſitionis 7 quinti, una & eadem ratio. Et rurſus, quoniam etiam parallelogrammorum, quæ ſub eodem uertice ſunt poſita, in eadem qua ipſæ baſes, per primam huius, ſunt ratione, hac prima propoſitione, deinde 11 quinti, utraꝗ; bis uſurpata, prior pars manifeſtabitur. Quòd nunc etiam, quantum ad partem poſteriorem, parallelogramma, quæ unum angulum uni æqualẽ, latera etiã circa illos ęquales angulos reciproca habeãt: inter ſe æqualia



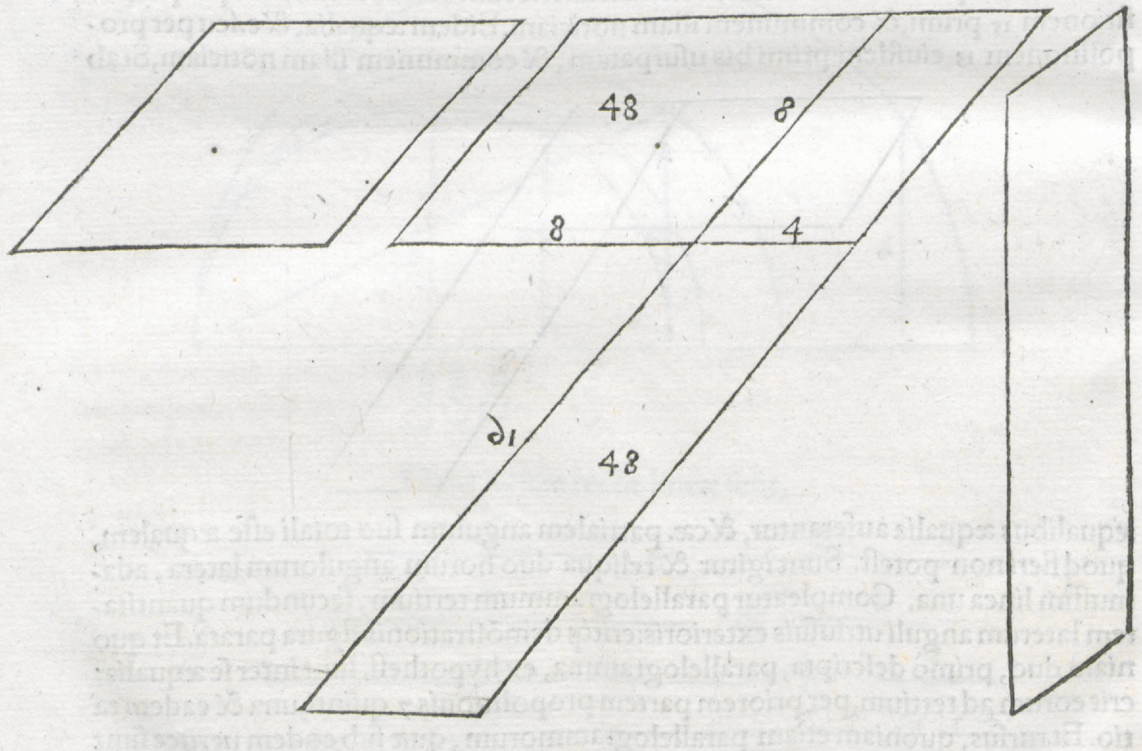
ſint,

ſint, cum, ex eadem prima huius, bis uſurpata, & 11 propoſitione quinti, parallelogramma poſita cum tertio unam & eandem rationem habeant: per priorem partem propoſitionis 9 quinti, id tandem retinebitur. Aequalium igitur & unum uni æqualem habentium angulum, &c. quod demonſtraſſe oportuit.


Duo parallelogramma æqualia data.

Angulariter iuncta, &c.

Tertia huius propoſitionis geometrica figuratio.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ.

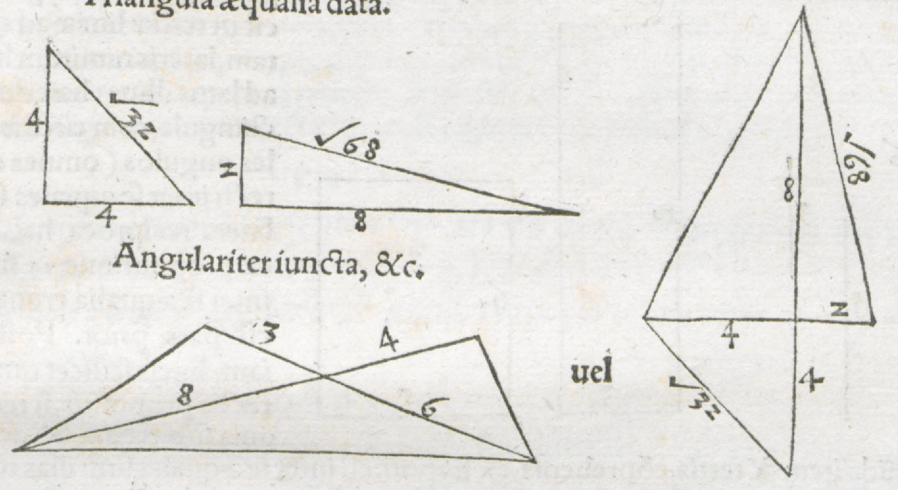
Τῶν ἴσων, καὶ μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν τριγώνων· ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραί, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. Καὶ ὧν μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραί, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα.

PROPOSITIO

PROPOSITIO XV.

Æqualium, & unum uni æqualem habentium angulum, triangulorum: reciproca ſunt latera, quæ ſunt circa æquales angulos. Et quorum triangulorum unum angulum uni æqualem habentium reciproca ſunt latera, quæ ſunt circa æquales angulos: æqualia ſunt & illa.

Sint duo triangula æqualia, & eſto quod unus angulus unius ſit uni alterius trianguli angulo æqualis: dico, horum triangulorum latera, circa æquales angulos, reciproca eſſe. Coniungantur triangula, ut angulum faciant, utq; anguli illorum æquales, quemadmodum in præmiſſa, ſint circa unum punctum, antecedens inſuper in uno & ſuum conſequens in triangulo altero, ad amuſſim unam lineam faciant: adamuſſim igitur ſic, ſuperiori ratione, & reliqua duo latera erunt. Deſcribatur triangulum tertium, per lineam quandam rectam, ab uno angulo unius ad alterum, in eadem parte alterius trianguli angulum, ductam, eritq; demonſtrationis figura parata. Et quoniam duo, primò deſcripta, triangula, ex hypotheſi, ſunt inter ſe æqualia: erit eorum ad tertium, per priorem partem propoſitionis ſeptimæ quinti, una & eadem ratio. Et rurſus, quoniam etiam triangulorum quæ ſub eodem uertice ſunt poſita, in eadem qua ipſæ baſes, per propoſitionem primam huius, ſunt ratione: per eandem igitur primam & propoſitionem 11 quinti, utranq; bis uſurpatam, prior pars manifeſtabitur. Quòd nunc etiam, quantum ad partem poſteriorē, ex unius illorum anguli æqualitate, & reciprocis circa illos æquales angulos lateribus, æqualitas inferatur, non aliter atq; poſterior præcedentis propoſitionis pars, de parallelogrammis id retinebitur. Aequalium igitur & unum uni æqualem habentium angulum, triangulorum: reciproca ſunt latera, quæ ſunt circa æquales angulos. Et quorum triangulorum unum angulum uni æqualem habentium reciproca ſunt latera, quæ ſunt circa æquales angulos: æqualia ſunt & illa. quod demonſtraſſe oportuit.


Triangula æqualia data.

Angulariter iuncta, &c.

uel

ΠΡΟΤΑΣΙΣ. Ιϛ.

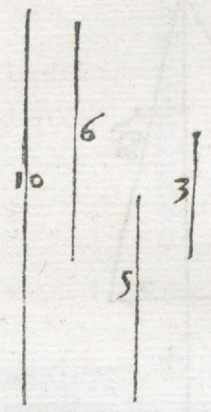
Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι· τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ, τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Καὶ ἐὰν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

PROPOSITIO XVI.

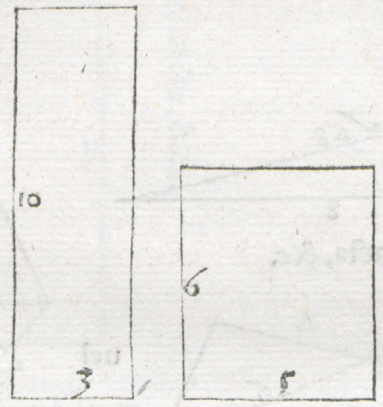
Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: quod ſub extremis comprehenditur rectangulum, æquale eſt ei, quod ſub medijs comprehenditur rectangulo. Et ſi ſub extremis comprehenſum rectangulum, æquale fuerit ei quod ſub medijs comprehenditur rectangulo: quatuor rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint quatuor rectæ lineę proportionales, prima ſcilicet ad ſecundam ut tertia ad quartam: dico rectangulum ſub prima & quarta comprehenſum, ei quod ſub ſecunda & tertia comprehenditur rectangulo æquale eſſe. Deſcribãtur ex quatuor rectis proportionalibus duo rectangula, utrunqꝫ ex ſuis lineis. Et quoniam primæ ad ſecundam, lateris ſcilicet unius ad latus rectanguli alterius, ex hypotheſi, eſt ut tertiæ lineæ ad quartam, lateris nimirum huius ad latus illius: hæc duo rectangula, cum circa æquales angulos (omnes enim recti inter ſe ęquales ſunt) latera reciproca habeant, ex propoſitione 14 huius, inter ſe æqualia erunt: quę eſt pars prior. Poſterior iam, lineis ſcilicet quatuor rectis propoſitis, ſi rectangula ſub prima & quarta, ſub ſecũda item & tertia, cõprehenſa, ex hypotheſi inter ſe æqualia ſint: illas tum lineas proportionales eſſe, ſic patet. Cum rectangula, ex hypotheſi, inter ſe æqualia ſint, cumqꝫ etiam omnes anguli recti inter ſe æquales: ipſa rectangula primò æquiangula erunt, atque deinde circa æquales angulos, ex priore parte propoſitionis 14 huius, latera reciproca habebunt, quæ eſt pars poſterior. Si quatuor igitur rectæ lineæ proportionales fuerint: quod ſub extremis comprehenditur rectangulum, æquale eſt ei, quod ſub medijs comprehenditur rectangulo. Et ſi ſub extremis comprehenſum rectangulum, æquale fuerit ei quod ſub medijs comprehenditur rectãgulo: quatuor rectæ lineæ proportionales erũt. quod demonſtraſſe oportuit.

Rectæ quatuor proportionales



Rectangula ex ſuis lineis deſcripta



ALIA HVIVS PROPOSITIONIS DEMONSTRATIO.

Quatuor rectis lineis expoſitis, dico, ſi hæ rectæ, ex hypotheſi, proportionales fuerint, prima ſcilicet ad ſecundam ut tertia ad quartam: & quæ ſub prima & quarta, ſub ſecunda item & tertia linea comprehenduntur rectangula, inter ſe æqualia eſſe. Quòd ſi harum rectarum rectangula, quæ ſub prima & quarta, ſubqꝫ ſecunda & tertia comprehenduntur, ex hypotheſi, inter ſe æqualia ſint: & ipſas rectas proportionales eſſe oportere. Quantum igitur ad partem priorem, excitentur à duabus, primæ & ſecundæ, rectarum extremitatibus, utræ hæ fuerint, per propoſitionem 11 primi, duæ ad angulos rectos lineę: de priori deinde excitata, à cõmuni puncto incipiendo, recta quartæ æqualis, ab altera uerò, tertiæ datæ æqualis recta, per propoſitionẽ 3 primi, abſcindatur, cõpleanturqꝫ parallelogrãma. Et quoniam prima ad ſecundam, ex hypotheſi, eſt ut tertia ad lineam quartam, cum lineis tertiæ & quartæ æquales aliæ in parallelogrammis poſitæ ſint, æqualibus illis pro tertia & quarta ſumptis: deſcriptorum parallelogrammorum circa æquales angulos latera reciprocè proportionalia erunt: unum igitur parallelogrammum, ex priori parte propoſitionis 14 huius, alteri æquale. Quare cum unũ ſub prima & alia quadam

recta, quartæ æquali: alterum uerò ſub ſecunda & alia, tertię æquali, recta linea contineatur, æquali pro æquali linea habita atque uſurpata: prior pars nunc manifeſta erit. Eſto autem iam, quantum ad partem poſteriorem, quòd ſub prima & quarta comprehenſum rectangulum, ei quod ſub ſecunda & tertia cõprehenditur rectangulo, æquale ſit: dico, quòd quatuor rectæ propoſitæ illo ordine proportionales ſint. Eiſdem namqꝫ conſtructis, quoniam quod ſub prima & quarta comprehenditur rectangulum, ex hypotheſi, ſub ſecunda & tertia comprehenſo, æquale eſt: hæc deſcripta rectangula, cum unum quidem ſub prima & alia quadam recta, quartæ æquali, alterum uerò ſub ſecundæ æquali & tertia linea contineatur, æqualitas inſuper linearum nullam uarietatem inducat, inter ſe æqualia erunt, atqꝫ æquiangula etiam, propterea quòd omnes recti anguli inter ſe ſunt æquales. Aequalia uerò & æquiangula parallelogramma, cum ex priore parte propoſitionis 14 huius, latera circa æquales angulos reciprocè proportionalia habeant: iam ſtatim propter æqualitatem linearum, ſuperiori ratione, & poſterior huius propoſitionis pars manifeſta erit. Si igitur quatuor rectæ lineæ, &c. quod demonſtraſſe oportuit.

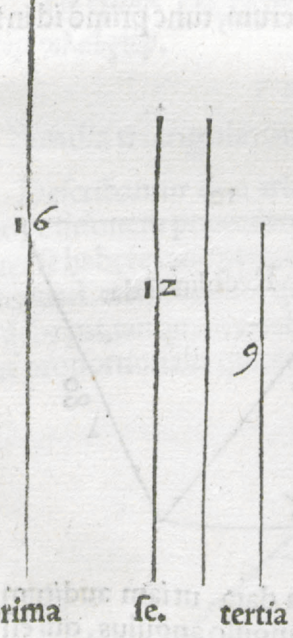
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ.

Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι· τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ. Καὶ εἰ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ᾖ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ· αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

PROPOSITIO XVII.

Si tres rectæ lineæ proportionales fuerint: quod ſub extremis comprehenditur rectangulum, æquale eſt ei quod à media quadrato. Et ſi ſub extremis comprehenſum rectangulum æquale fuerit ei, quod à media quadrato: tres rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint tres rectæ lineæ proportionales, prima ſcilicet ad ſecundam, ut hæc ipſa ſecunda ad tertiam: dico, rectangulum ſub prima & tertia comprehenſum, ei quod à media deſcribitur quadrato, æquale eſſe. Quoniam enim ad ſecundam linea prima, hæc deinde eadem ſecunda ad tertiam lineam confertur, pro ſecunda collatione, puncto inter ſecundam lineam & tertiam ad placitum ſumpto, ad id per propoſitionem 2 primi, linea recta ſecundæ æqualis ponatur, & erit ex priore parte propoſitionis 7 quinti, ſecundæ, & ſuæ æqualis ad lineam tertiam una & eadem ratio. Quatuor igitur cum ſint lineæ proportionales, duarum item æqualium eadem ſit quæ eſt unius, bis ſumptæ, lineæ conſideratio prior propoſitionis pars, ex pręcedentis propoſitionis parte priore concludi poterit, atqꝫ deinde etiam, ex poſteriore ipſa poſterior. Si igitur tres rectæ lineæ proportionales fuerint: quod ſub extremis, &c. quod demonſtraſſe oportuit.

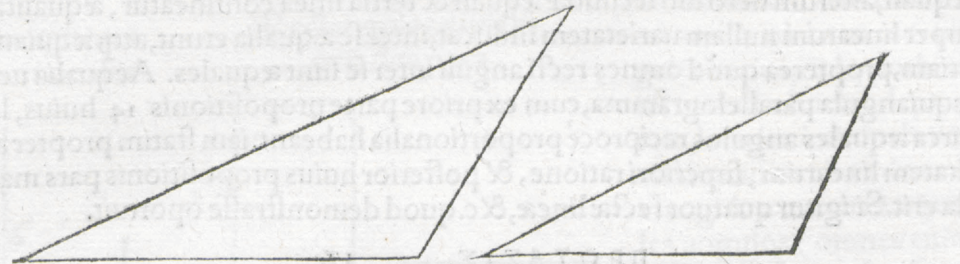


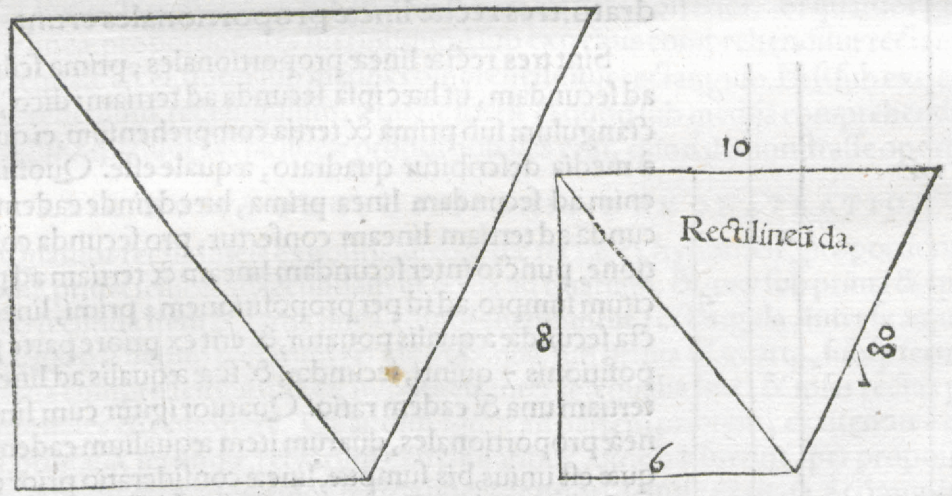
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΗ.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ, ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον ἀναγράψαι.

PROPOSITIO XVIII.

A' data recta linea, dato rectilineo, ſimile ſimiliterq́; poſitum rectilineum deſcribere.





Sit recta linea data, rectilineum item datum, atq; propoſitum, à recta data ipſi dato rectilineo ſimile, ſimiliterq́; propoſitum rectilineum deſcribere. Rectilineum illud datum aut erit Trilaterum, quadrilaterum, aut multilaterũ. Si trilaterum, hoc eſt triangulum, fuerit rectilineum datum, ad unam extremitatem datæ, per propoſitionem 23 primi, unus angulus uni, ad alteram deinde, uerſus illam & eandem partem, per eandem etiam propoſitionem, alius alij trianguli angulo æqualis conſtituatur, & continuatis lineis, donec altera alteri occurrat, cum tertius ſic tertio trianguli angulo æqualis ſit: hæc duo triangula iam æquiangula, deinde etiam per propoſitionem 4 huius, laterum proportionalium erunt. Quare ex definitione rectilinearum ſimilium, à data recta dato rectilineo trilatero, ſimile trilaterum deſcriptum eſt. Quòd ſi iam unum, minus ſcilicet, alteri quod maius eſt, trilatero, uel triangulo applicetur ſic, ut unum angulum ambo cõmunem habeant: tum hæc etiam ſimiliter poſita erunt. Quare factum eſt, quod propoſitio requirebat. Sed eſto iam quòd rectilineum datum ſit quadrilaterum, uel multilaterum, tunc primò id in ſua triangula ſoluendum, & cum uno eorum ac recta linea data, ut iam auditum eſt, pergendum erit, & uidendum deinde, quam in hoc triangulo angulus, qui eſt uni integro in rectilineo angulo æqualis, ſubtenſam habeat, ut ſcilicet, ea cognita, ad ipſius extremitates alterius in rectilineo trianguli, quod ſcilicet primò abſoluto cohæret, duo anguli æquales collocentur, atq; continuatis lineis donec concurrant, cum tertius ſic tertio huius alterius trianguli angulo æqualis ſit: triangula hæc, ex ſtructura æquiangula erunt, deinde etiam, ex 4 huius, laterum proportionalium, atq; tandem ex definitione, inter ſe etiam ſimilia. Non aliter cum tertio, ac reliquis rectilinei triangulis ſingulis agendum erit. Et quoniam rectilineum, quale propoſitum erat, eo modo tandem deſcribitur, propoſitioni igitur ſatiſfactũ erit, quod ſic demonſtrari poteſt. Quoniam enim rectilinei, ſuper recta data deſcripti, tot triangula ſunt, quot ipſius rectilinei dati: ex ſtructura igitur & communi illa noticia, Si æqualibus æqualia addantur, &c. hæc duo rectilinea iam æquiangula erunt. Et quia ex propoſitione 4 huius, propter proportionalitatẽ laterum ipſorum triangulorum, euidenter apparet, illa etiam proportionalium laterum eſſe: per definitionem tandem ſimilium ſuperficierum concluditur propoſitum.

APPENDIX.

Eſt hoc loco notandum, poſtquam primum iam triangulum abſolutum, ac cum alijs deinde operari cœptum fuerit, ut partiales anguli ſingulorum, debito ordine ſuis partialibus æqualibus, & non temerè quilibet cuilibet, coniungantur. Nam hoc animaduerſo, non erit laborioſum, neq; etiam moleſtum, qualicunque rectilineo, regulari uel irregulari, multorum item uel paucorum laterum, dato, ſimile ſimiliterq́; poſitum à data recta linea rectilineum deſcribere.

APPENDIX II.

Quoniam propoſitio mentionem facit rectilinei, & rurſus quoniam ſub rectilineo, ut quidem ex definitione patet, omnes rectarum linearum figuræ, ſiue trilateræ hæ, quadrilateræ uel multilateræ fuerint, comprehendantur: in genere de omnibus rectarum linearum figuris hanc propoſitionem intelligendã colligimus. Hinc etiam factum, quòd per triangula, tanquam rectarum linearum figuram primam, hanc propoſitionem primò declarauimus.

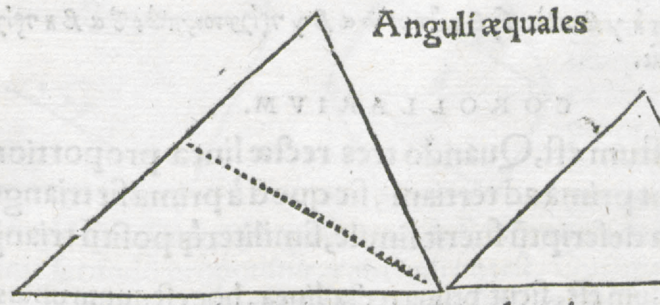
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ.

Τὰ ὅμοια τρίγωνα· πρὸς ἄλληλα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστί, τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

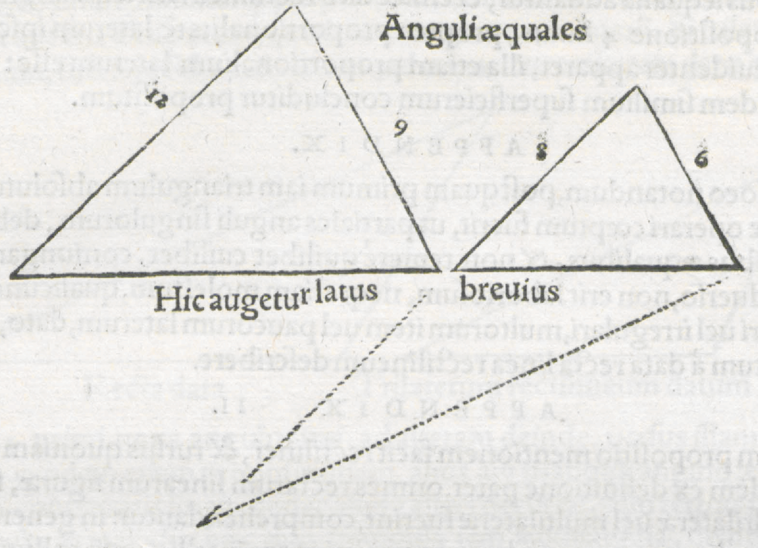
PROPOSITIO XIX.

Similia triangula: inter ſe in dupla ratione ſunt, ſimilis rationis laterũ.

Deſcribantur duo triangula, unum quidem qualitercunq;, alterum uerò per propoſitionem præcedentem, huic ſimile: dico igitur, triangula hæc duplicatam inter ſe habere rationem, quam habet latus unius ad ſimilis rationis latus trianguli alterius. Lateribus illis, quorum rationem duplicatam inter ſe ipſa triangula habere debeant, tanquam duabus rectis datis, per propoſitionem 11 huius, tertia continuè proportionalis quærenda eſt, & id quidem uel longiori latere abbreuiato, uel breuiori aucto. atque ex hoc puncto deinde, ſeu inuentæ proportionalis termino, ad angulum quem abbreuiatum uel auctum latus ſubtendit, linea recta ducenda.



Fiunt autem ſic duo triangula, quorum alterum, cuius ſcilicet tertia proportionalis eſt unum latus, alteri integro adhuc, ex poſteriore parte propoſitionis 15 huius, eſt æquale: id quod nulli nõ, hypotheſiũ propoſitionis ac rationis permutatę, quodq; rationes uni eædẽ, per propoſitionem 11 quinti, etiã inter ſe eædem ſint, memori, occurrere poterit. Rurſus, quoniam tres ſunt lineę proportionales, duo ſcilicet propoſitorum duorum triangulorum latera, & tertia ad ea proportionalis inuẽta, cum ſic prima ad tertiam, ex quadam definitione in quinto expoſita, ſit in ratione eiuſdem primæ ad lineam ſecundam duplicata, triangula deinde (quorum baſes ſunt prima & tertia lineæ) per propoſitionem primam huius, in ſuarum ſint baſium ratione, ſimilium rationum quantitatibus alijs pro alijs ſumptis: & hæc ipſa triangula primæ lineæ ad ſecundam rationem duplicatam habebunt. Quia uerò prima & tertia lineæ ſunt expoſitorum ſimilium triangulorum ſimilis rationis latera, triangula porrò ipſa, unum quidem uni ex datis, alterum uerò alteri datorum æqualis: hoc conſiderato, propoſitum iam concludi poteſt. Similium igitur triangulorum ratio, &c. quod demonſtraſſe oportuit.



ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι κἂν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν· ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης τρίγωνον, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, ὅμοιον, καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον.

Ἐπείπερ ἐδείχθη, ὡς ἡ γ β πρὸς τὴν β κ, οὕτως τὸ α β γ τρίγωνον, πρὸς τὸ α β κ τρίγωνον, τουτέστι τὸ δ ε ζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifeſtum eſt, Quando tres rectæ lineæ proportionales fuerint, quòd ſit, ſicut prima ad tertiam, ſic quod à prima fit triangulum, ad id quod à ſecunda deſcriptũ fuerit ſimile, ſimiliterq; poſitũ triangulum.

Quoniam oſtenſum eſt, ſicut prima recta linea, hoc eſt unum unius trianguli latus, ad tertiam proportionalem inuentam: ſic & harum primę & tertiæ linearum triangula, hoc eſt (æquali nimirum pro æquali triangulo ſumpto) triangulum primæ ad triangulum lineæ ſecundæ, quod erat demonſtrandum.

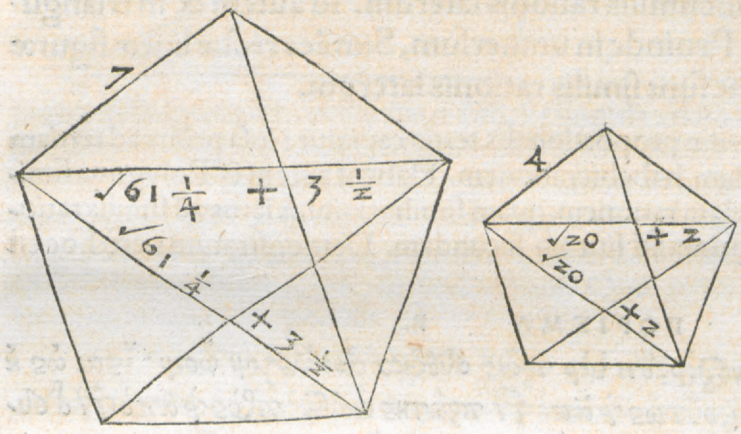
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Κ.

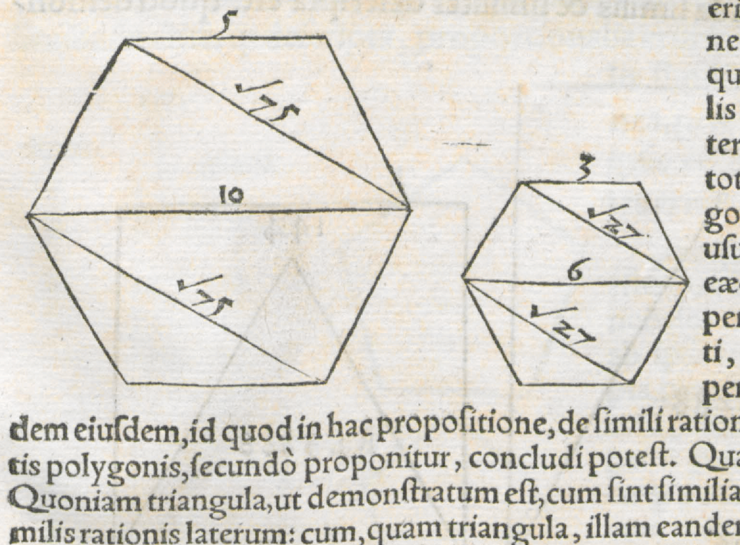
Τὰ ὅμοια πολύγωνα εἰς τὰ ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖται, καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος, καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις. Καὶ τὰ πολύγωνα διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν.

PROPOSITIO XX.

Similia polygona: in ſimilia triangula diuiduntur, & æquali numero, & ſimili ratione totis. Et polygona duplicatam rationem habent, quam ſimilis rationis ad ſimilis rationis latus.

Deſcribantur duo polygona, unum quidem qualitercunq;, alterum uerò per propoſitionem 18, huic ſimile: dico igitur, quòd hæc polygona in ſimilia, & numero æqualia triangula ſubdiuidantur, & quòd etiam triangula cum polygonis eandem rationem habeant. Polygonorum inſuper ratio ea ſit, quæ eſt lateris unius ad ſimilis rationis latus polygoni alterius duplicata. Diuidantur polygona per lineas rectas in ſua triangula. Et quoniam polygona, ex hypothethi, ſunt ſimilia, ſimiles porrò figuræ rectilineę, ut ex definitione patet, æquales angulos ad unum, & quæ circa æquales angulos ſunt latera, proportionalia habent, iam ſtatim aliquot: ſubtractis uerò ſubinde æqualib. ab angulis æqualibus, partialibus nimirum ab ipſis totis, ſingula unius ſingulis triangulis polygonij alterius pèr propoſitionem 6 huius, æquiangula erunt: quare per propoſitionem 4 huius, & ſimilium figurarum definitionem, etiam ſimilia. Polygona igitur deſcripta in ſimilia, & æquali numero, triangula ſubdiuiſa ſunt, quod eſt primùm. Quantum ad ſecundũ, quòd ſcilicet triangula illam, quam polygona, inter ſe habeant rationem. Quoniam enim polygonorum triãgula, ut demonſtratum eſt, inter ſe ſimilia ſunt: erit illorum, per propoſitionem præcedentem, ratio, quę eſt lateris unius ad ſimilis rationis latus trianguli alterius duplicata. Hoc nunc toties, quot in utrouis polygono triangula reperiũtur, uſurpato, cum quæ eidem eædem ſunt rationes, ipſæ, per propoſitionem 11 quinti, & inter ſe eædem ſint: per propoſitionem 12 tandem eiuſdem, id quod in hac propoſitione, de ſimili ratione triangulorum cum totis polygonis, ſecundò proponitur, concludi poteſt. Quantum igitur ad tertium, Quoniam triangula, ut demonſtratum eſt, cum ſint ſimilia, in dupla ratione ſunt ſimilis rationis laterum: cum, quam triangula, illam eandem & ipſa polygona inter ſe habeant rationem; & polygona ſimilis rationis laterum duplicatam rationem habebunt,





habebunt. Similia igitur polygona, in ſimilia triangula diuiduntur, &cæ. quod demonſtraſſe oportuit.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

Ὡσαύτως δὴ, καὶ ἐπὶ τῶν ὁμοίων τετραπλεύρων δειχθήσεται, ὅτι ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἐπὶ τῶν τριγώνων. Ὥστε καθόλου, τὰ ὅμοια εὐθύγραμμα σχήματα πρὸς ἄλληλα ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Καὶ ἐὰν τῶν α β, ζ η τρίτην ἀνάλογον λάβωμεν, τὴν ξ. ἡ β α πρὸς τὴν ξ, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ α β πρὸς τὴν ζ η. ἔχει δὲ καὶ τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον (ὅμοιον) καὶ τὸ τετράπλευρον πρὸς τὸ τετράπλευρον, διπλασίονα λόγον, ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον, τουτέστιν ἡ α β πρὸς τὴν ζ η. ἐδείχθη δὲ τοῦτο καὶ ἐπὶ τῶν τριγώνων.

COROLLARIVM.

Similiter etiam in ſimilibus quadrilateris demonſtrari poterit, quòd hæc in dupla ratione ſint ſimilis rationis laterum. Id autem & in triangulis demonſtratum eſt. Proinde in uniuerſum, Similes rectæ lineæ figuræ inter ſe in dupla ratione ſunt ſimilis rationis laterum.

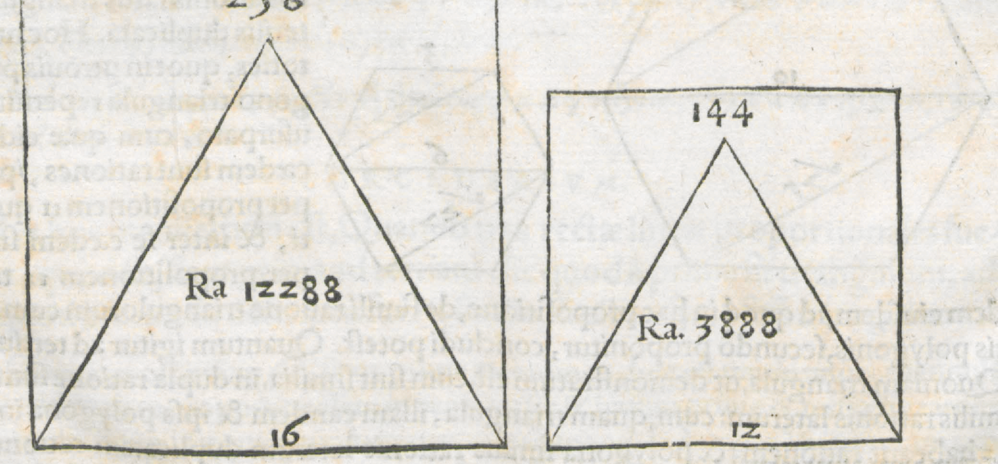
Nam ſi duarum linearum proportionalis tertia capiatur: ipſa prima ad tertiam duplam, quàm ad ſecundam, habebit rationem. Habent autem & Polygona ſimilia, quadrilatera item duplam rationem, quam ſimilis rationis latus ad ſimilis rationis latus hoc eſt, quam prima ad lineam ſecundam. Demonſtratum uerò hoc eſt & in triangulis, hinc.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

Ὥστε καὶ καθόλου φανερὸν, ὅτι ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν· ἔσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

COROLLARIVM II.

Proinde etiam in uniuerſum manifeſtum eſt, Quòd ſi tres rectæ lineæ proportionales fuerint: erit, ſicut prima ad tertiam, ſic quæ à prima ſpecie ad eam quæ à ſecunda ſimilis & ſimiliter deſcripta eſt. quod demonſtraſſe oportuit.



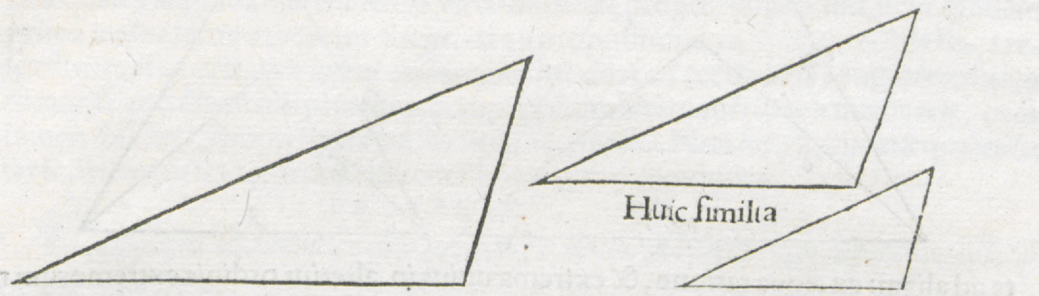
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΑ.

Τὰ τῷ αὐτῷ εὐθυγράμμῳ ὅμοια, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὅμοια.

PROPOSITIO XXI.

Quæ eidem rectilineo ſimilia, & inter ſe ſunt ſimilia.

Deſcribatur primò rectilineum unum qualitercunq; ad placitum, per propoſitionem deinde 18 huius, duo uel plura alia deſcripto ſimilia: dico, illa & inter ſe ſimilia eſſe. Quoniam enim ſingula, per propoſitionem 18 deſcripta, rectilinea, ei quod primò deſcriptum eſt, ſimilia ſunt: cum ſic ſingula etiam cum eodẽ primo, ex conuerſione definitionis ſimilium figurarum, æquiangula ſint, ac circa æquales angulos latera proportionalia habeant: porrò eidem æqualia, illa ex communi quadam noticia, & inter ſe æqualia: quæ inſuper eidem eædem ſunt, rationes, illæ ex propoſitione 11 quinti, inter ſe eædem ſint: per definitionem tandem, & illa ſecundò deſcripta rectilinea, inter ſe ſimilia erunt. Quæ igitur eidem rectilineo, &cæ. quod demonſtraſſe oportuit.

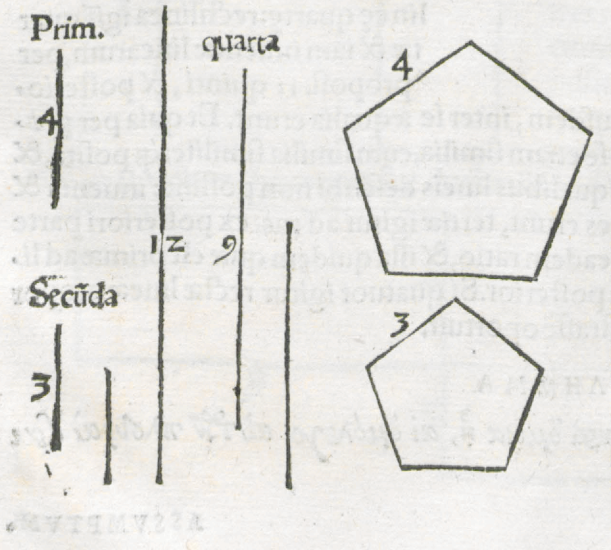


ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΒ.

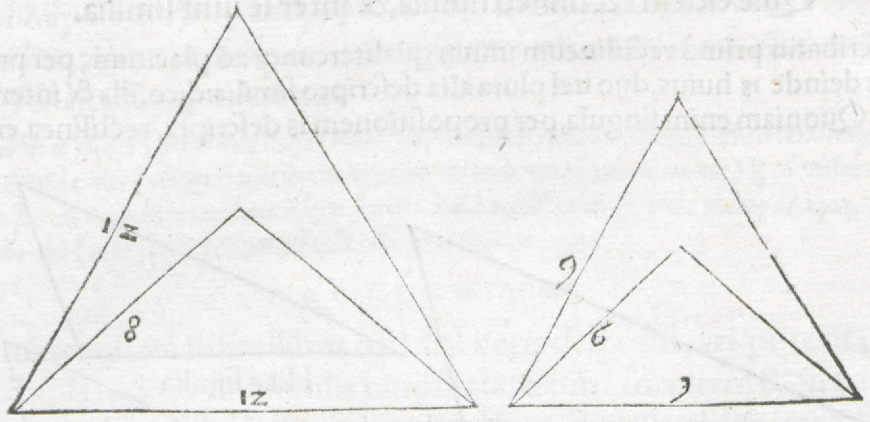
Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν· καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα, ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα, ἀνάλογον ἔσται. Κἂν τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα, ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα, ἀνάλογον ᾖ· καὶ αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

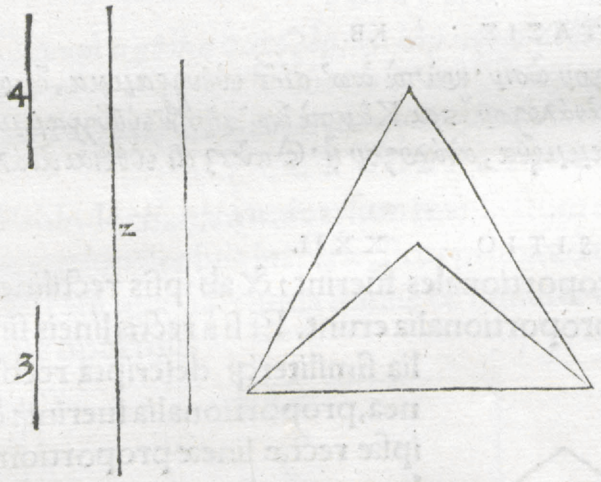
PROPOSITIO XXII.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: & ab ipſis rectilinea, ſimilia ſimiliterq; deſcripta, proportionalia erunt. Et ſi à rectis lineis ſimilia ſimiliterq; deſcripta rectilinea, proportionalia fuerint: & ipſæ rectæ lineæ proportionales erunt.



Sint quatuor rectæ lineæ, atque eſto quòd hæ ex hypotheſi proportionales ſint: dico ergo rectilinea, ab ipſis ſimilia, ſimiliterq; deſcripta, proportionalia eſſe. Deſcribantur à prima & ſecunda rectis lineis per 18 præcedentem, ſimilia ſimiliterq; poſita rectilinea, hoc idẽ fiat cum rectis lineis tertia & quarta per eandem, primę deinde et ſecundæ, tanquam duabus rectis datis, per propoſitionem 11 huius, tertia proportionalis inueniatur, atq; hoc idem contingat lineis tertia & quarta. Et quoniam prima ad ſecundam eſt, ex hypotheſi, ut tertia ad lineam quartam, ſecunda uerò ad aliam quandam, ex ſtructura, ſicut quarta ad aliam: ex æqua ratione, & extrema unius in alterius ordinis extremorum ratione erunt: per corollarium igitur ſecundum propoſitionis 20 huius, patebit prior pars. Sed eſto iam, quòd à rectis quatuor datis rectilinea deſcripta, ſimilia ſimiliterq; poſita ſint: quòd tum ipſæ rectæ proportionales ſint, ſic retinetur. Inueniatur per 12 huius, primæ, ſecundæ & tertiæ, tanquam tribus rectis lineis datis, quarta proportionalis: ab hac deinde quarta, per propoſitionem 18 huius, rectilineum, tertio rectilineo ſimile ſimiliterq; poſitum, deſcribatur. Et quoniam prima, ſecunda, tertia, & iam inuẽta, quatuor ſunt, ex ſtructura, lineæ proportionales, à prima uerò & ſecunda, â tertia item & ipſa inuenta, ſimilia ſimiliterq; poſita rectilinea deſcripta ſunt, cum ipſa rectilinea eo ordine, ex priore parte propoſitionis huius, proportionalia ſint: rectilineum primæ ad rectilineum lineæ ſecundę, ſicut tertiæ ad inuentę rectilineũ erit. Sed quia ſic etiã eſt, ex hypotheſi, rectilineũ tertiæ, ad rectilineũ lineę quartę: rectilinea igit̃ quartæ & iam inuentæ linearum, per propoſi. 11 quinti, & poſteriorem partem propoſitionis nonæ eiuſdem, inter ſe æqualia erunt. Et quia per propoſitionem 21 præcedentem, inter ſe etiam ſimilia, cum ſimilia ſimiliterq; poſita, & inter ſe æqualia, rectilinea, ab inæqualibus lineis deſcribi non poſſint: inuenta & quarta poſita, lineæ inter ſe æquales erunt, tertiæ igitur ad eas, ex poſteriori parte propoſitionis nonæ quinti, una & eadem ratio, & illa quidem quæ eſt primæ ad lineam ſecundam. Atq; hæc eſt pars poſterior. Si quatuor igitur rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. quod demonſtraſſe oportuit.





ΛΗΜΜΑ.

Ὅτι δὲ ἐὰν εὐθύγραμμα ἴσα καὶ ὅμοια ᾖ, αἱ ὁμόλογοι αὐτῶν πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, δείξομεν οὕτως.

ASSVMPTVM.

Quòd uerò, ſi rectilinea æqualia fuerint, & ſimilia, ſimilis rationis latera ipſorum æqualia inter ſe ſunt, ſic demonſtrabimus.

Sint æqualia & ſimilia rectilinea, ea nimirum, quæ à quarta & inuenta linea deſcripta ſunt, cum hæc, ex definitione ſimilium figurarum, latera habeãt circa æquales angulos proportionalia: dico, illorum ſimilis rationis latera inter ſe æqualia eſſe, id quod ab impoſſibili ſic demonſtrari poteſt. Eſto quòd inæquales inter ſe ſint, quarta & inuenta (propter illas enim id aſſumptum eſt) æqualium ac ſimilium rectilineorum lineæ. Et quoniam æqualia ac ſimilia ſunt hæc rectilinea, cum quæ circa æquales angulos habent latera, ex definitione proportionalia ſint, ſicut quidem prima maior tertia uel minor fuerit, ita ex propoſitione 14 quinti, ſecũda linea reſpectu quartæ erit, duæ igitur rectæ cum ſint duabus rectis alijs longiores, utraq; utraq;: & rectilineũ ſub prioribus comprehẽſum altero rectilineo maius erit, cum tamen ipſa, ex hypotheſi, ſint poſita inter ſe æqualia. Non ſunt igitur inæquales inter ſe, ſed æquales, quarta & inuenta lineæ. quod demonſtraſſe oportuit.

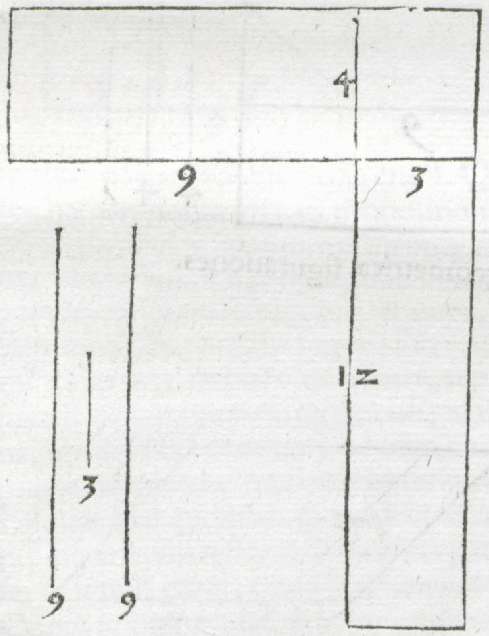
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΓ.

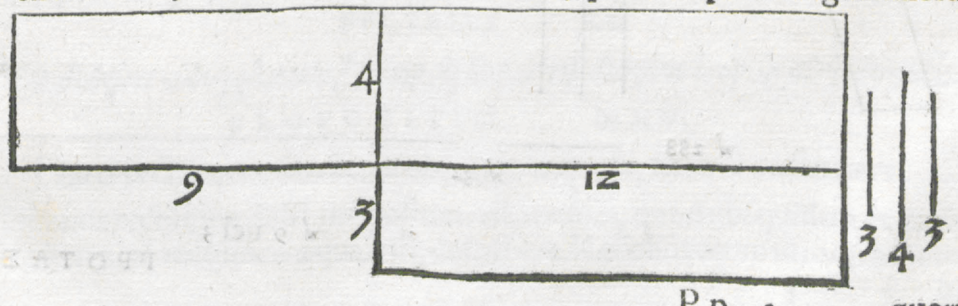
Τὰ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα, πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

PROPOSITIO XXIII.

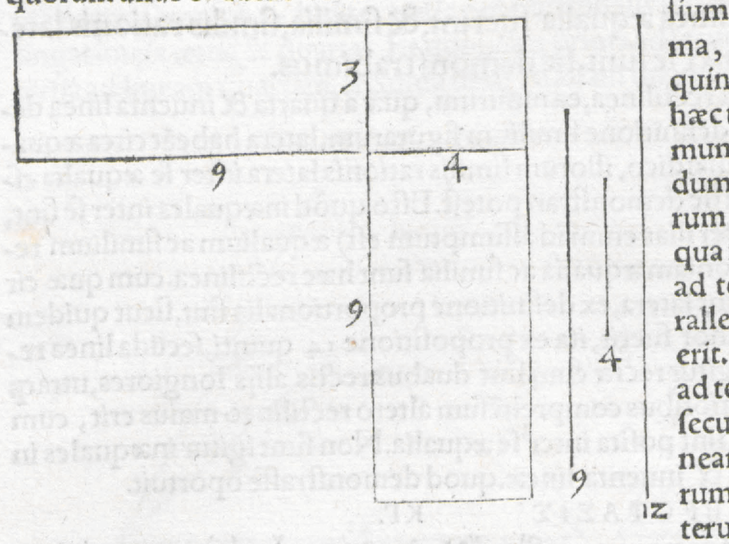
Æquiangula parallelogramma, inter ſe rationem habent eam, quæ ex lateribus componitur.

Sint duo parallelogramma æquiangula: dico illorum inter ſe rationem, ex laterum ſuorum, quę ſunt circa æquales angulos, rationibus compoſitam eſſe. Coniungantur parallelogramma cum angulis ſuis, quos habent æquales inter ſe, angulariter ſic, ut unum latus unius, uel parallelogrammi uel anguli, uni lateri, alterius ſit in directum una linea: & erunt, ex propoſitione 14 primi, & reliqua duo circa illos angulos latera in directum iuncta. deſcribatur etiam ſecundum alterutrius anguli externi, & laterum ipſius quãtitatem, parallelogrammũ tertiũ, quas uerò rationes habent circa ęquales angulos latera, in ijſdem rationibus continuo ponantur. iam tres rectæ lineæ aliæ, prima quidẽ ad placitum ducta, ſecunda uerò & tertia ex propoſitione 12 huius, primæ adiungantur. Et quoniam quas habent latera parallelogrammorum inter ſe rationes, illas habẽt iam ex ſtructura, hæ tres rectæ ductæ, & rurſus, quoniam parallelogrammorum,

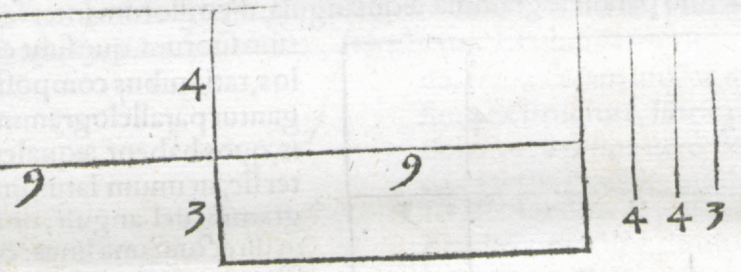




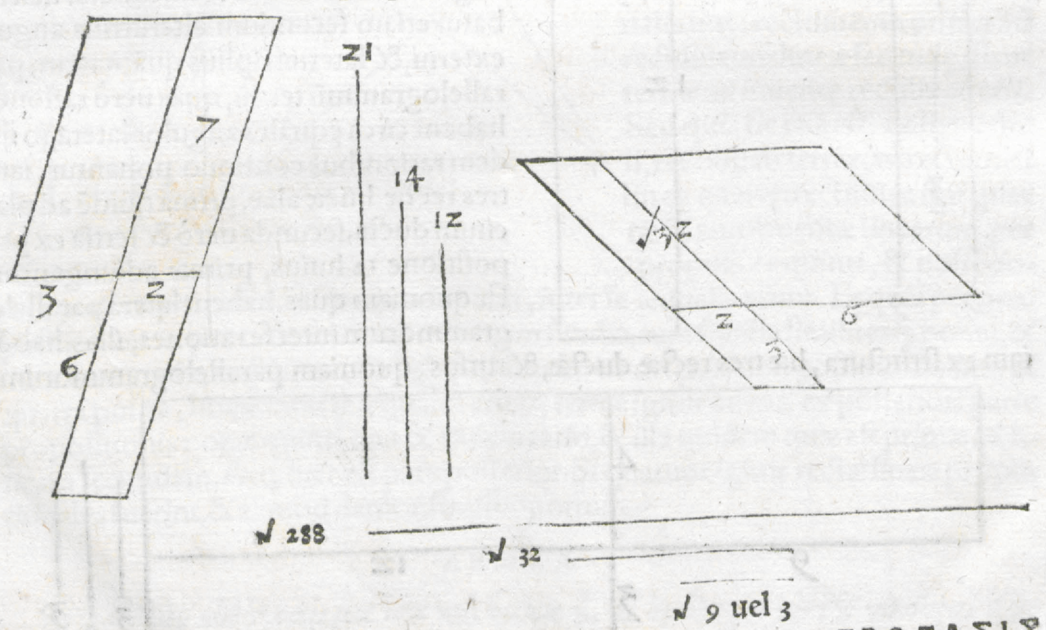
quorum unus & idem uertex fuerit, ex prima propoſitione huius, in ſuarum baſium ſunt ratione, hac ipſa prima, propoſitione deinde 11 quinti, utraq; bis uſurpata, & hæc tria parallelogramma, primum ſcilicet, tertium & ſecundum, in ductarum trium linearum ratione erunt, unde ex æqua ratione ſicut prima ducta ad tertiam, ſic & primum parallelogrammum ad ſecũdum erit. Sed quoniã primæ lineæ ad tertiam ratio, ex primæ ad ſecundam, & ſecundæ ad lineam tertiam, hoc eſt ex datorum parallelogrammorum laterum, rationibus, compoſita eſt: & parallelogrammum igitur prius ad poſterius, rationem ex laterum rationibus compoſitam habebit. Aequiangula igitur parallelogramma, &cæ. quod demonſtraſſe oportuit.



Poſſunt huius ſecundæ figurationis parallelogramma etiam ſic applicari.



Aliæ duæ huius propoſitionis geometricæ figurationes.



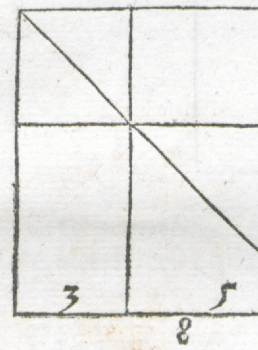
ΠΡΟΤΑΣΙΣ. ΚΔ.

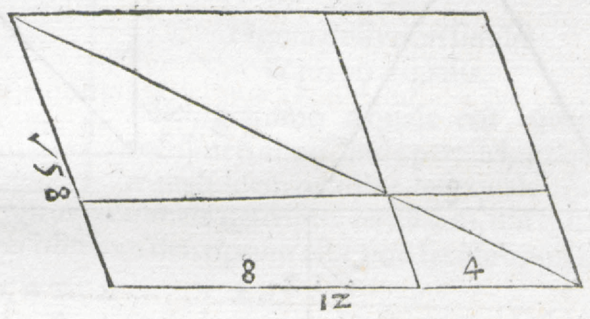
Παντὸς παραλληλογράμμου, τὰ περὶ τὴν διάμετρον παραλληλόγραμμα, ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ, καὶ ἀλλήλοις.

PROPOSITIO XXIIII.

Omnis parallelogrammi, quę circa diametrum parallelogramma, tam toti quàm ipſa inter ſe ſimilia ſunt.

Deſcribatur parallelogrammum, cum ſua diametro, lineæ deinde rectæ duæ, ſeſe mutuo in diametro ſecantes, quarum una quidem duobus, altera uerò reliquis duobus parallelogrammi lateribus parallela ſit, ducantur, & figura parata erit: dico ergo iam, quòd partialia, per quæ ſcilicet totius parallelogrammi diameter tranſit, parallelogramma, & toti, & ſibijpſis inter ſe, ſimilia ſint. Quoniam enim in utroq; triangulo, duabus ſcilicet totius parallelogrammi medietatibus, ducta eſt linea, tertio in triangulo lateri parallela, cum ſic reliqua duo latera in utroq; triangulo, ex propoſitione ſecunda huius, per ductam parallelam proportionaliter ſecta ſint, hac propoſitione bis uſurpata (ſunt enim duo triangula:) & parallelogrammi latera per has duas, ſeſe mutuò in diametro ſecantes rectas lineas, ex propoſitione 11 quinti, proportionaliter ſecta erunt. Quia autem diuiſæ quantitates proportionales, hæ compoſitæ etiã, ex propoſitione 18 quinti, proportionales ſunt: partialium igitur parallelogrammorum utrunq;, ex permutata ratione cum ipſo totali parallelogrammo laterum proportionalium erunt. Præterea, quoniam lineæ, in diametro parallelogrammi ſeſe mutuo ſecantes, oppoſitis ſuis lineis, ex ſtructura parallelæ ſunt: triangula partialia ſingula ſuis totalibus, ex ſecunda parte propoſitionis 29 primi, toties eam, quoties opus fuerit, repetendo, æquiangula, atq; ſtatim etiã totale parallelogrammum utriq; partiali parallelogrammo æquiangulum erit: proportionalium deinde laterum, ex 4 huius, eorum quæ circa ęquales angulos. Et quia proportionalium laterum: ſimile igitur utrunq; ipſi toti per definitionem, quod eſt notandum. Sed quoniam, quę eidem rectilineo ſimilia, illa & inter ſe ſimilia eſſe, propoſitio 21 huius teſtatur, & hæc ipſa partialia parallelogramma, eadem ratione, inter ſe ſimilia erunt, quod & ipſum notandum. Conſtat autem ſic tota propoſitio. Omnis igitur parallelogrammi, quæ circa diametrum parallelogramma, tam toti quàm ipſa inter ſe ſimilia ſunt, quod demonſtraſſe oportuit.





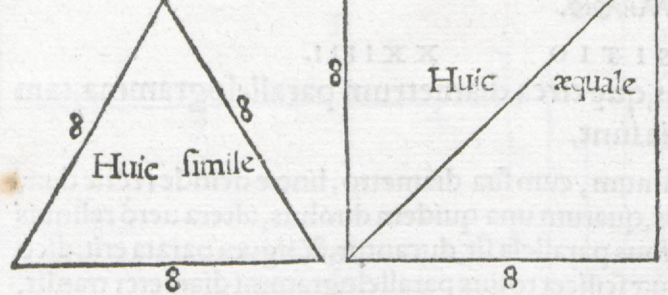
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΕ.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ, ὅμοιον, καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι ἴσον, τὸ αὐτὸ συστήσασθαι.

PROPOSITIO XXV.

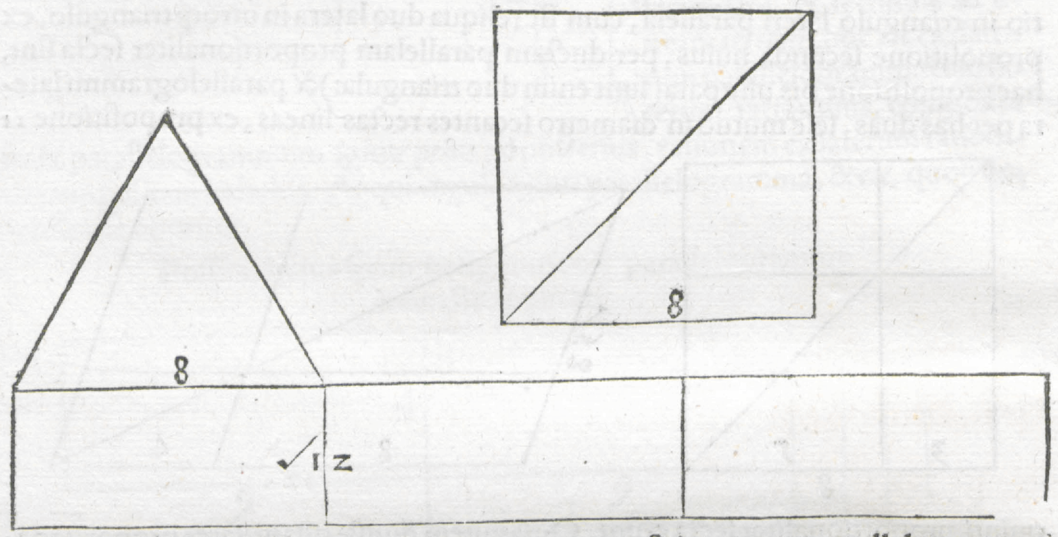
Dato rectilineo, ſimile, & alij dato æquale, idem conſtituere.

Duobus rectilineis datis, propoſitum eſt, tertium, quod uni quidem ex datis ſimile, alteri uerò rectilineo æquale ſit, deſcribere. Rectilineorum utroq; in ſua trian



Vel contra, inueniatur, &c.

gula ſoluto, ad unum latus illius rectilinei, cui debet fieri tertium ſimile, tanquam ad rectam lineam datam, per propoſitionem 44 primi, in dato alterius rectilinei uno angulo, tot parallelogramma, in quot triangula idem prius rectilineum ſolutum eſt, unicuiq; ſcilicet triangulo unum æquale, ordine prætendantur, et erit totum compoſitũ toti priori rectilineo æquale. Eodem modo ad unum huius totius compoſiti rectilinei latus, quod ſcilicet lateri, in rectilineo ſumpto, minimè eſt oppoſitum, per eandem 44 propoſitionem, tot parallelogramma, in quot triangula alterum rectilineum diuiſum eſt, unicuiq; ſcilicet unũ æquale, in priori rectilineo angulo, prætẽdantur.



Erit aũt ſic illud huius totius parallelogrãmi latus, atq; prioris parallelogrãmi deſcripti, quod ſcilicet in rectilineo ſumptũ eſt, ex prop. 14 primi adamuſſim una linea. Media igitur proportionali, inter dicta latera, per prop. 13 huius, inuenta, ab ea tandem rectilineũ, quod ſit priori rectilineo ſimile, ſimiliterq́; poſitum, per propoſitionem 18 huius deſcribatur: & propoſitioni ſatisfactum erit, quod ſic demonſtratur.

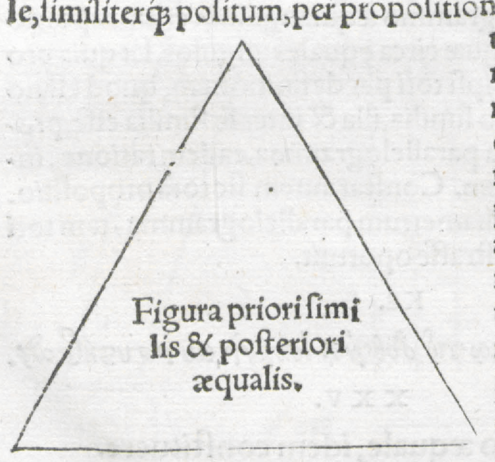
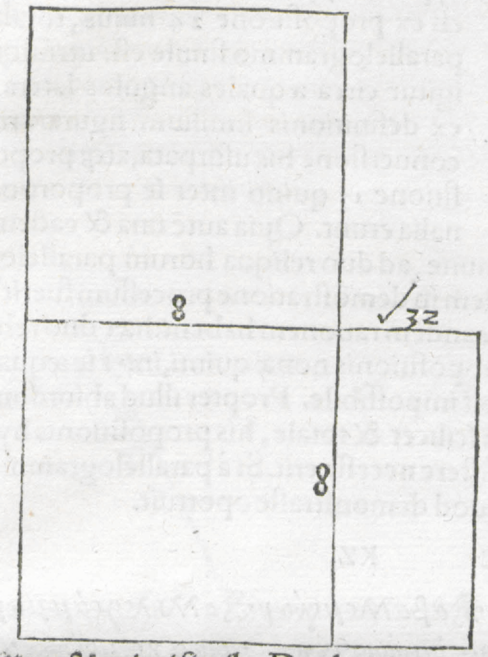


Figura priori ſimilis & poſteriori æqualis.

√ 21845⅓

Quoniam tres ſunt lineæ proportionales, duorum nimirum parallelogrammorum, quæ duobus rectilineis, utrunq; utriq;, æqualia ſunt, duo latera, & media inter ea linea proportionalis inuenta, cum ab harum prima, atq; etiam ſecunda, ſimilia, ſimiliterq́; poſita rectilinea deſcripta ſint: prima ad lineam tertiam erit, ex corollario propoſitionis uiceſimæ ſecundo, ut quod à prima, ad id quod à ſecunda ſimiliter deſcriptum eſt rectilineũ. Et rurſus, quoniam parallelogramma, quæ ſub eodem uertice ſunt poſita, ex prima huius, in ſuarum baſium ſunt ratione: quam rationem igitur habet rectilineum primum, ad id quod ex propoſitione 18 iam deſcriptum eſt, illam eandem habet etiam, ex propoſitione undecima quinti (duæ enim rationes uni ſunt eædem) parallelogrammum, priori rectilineo æquale, ad id quod poſteriori rectilineo æquale eſt, parallelogrammum, atq; ex permutata ratione deinde, per propoſitionem 16 quinti, rectilineum ad parallelogrammum ut rectilineum ad parallelogrammum. Sed quia rectilineum in priori collatione, eſt ſuo parallelogrammo, ex ſtructura æquale: & in poſteriori ſic, propter rationum ſimilitudinem, rectilineum ſuo parallelogrammo æquale erit. quare & rectilineo alteri, huic parallelogrammo æquali, idem rectilineum ęquale erit. Eſt autem & priori ſimile. Duobus igitur rectilineis deſcriptis, tertiũ iam, uni quidem ſimile, alteri uerò ęquale, idem rectilineum deſcriptum eſt. quod feciſſe oportuit.



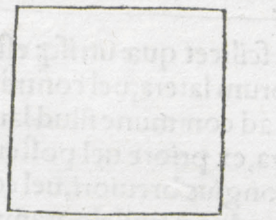


Figura poſteriori ſimilis & priori æqualis.

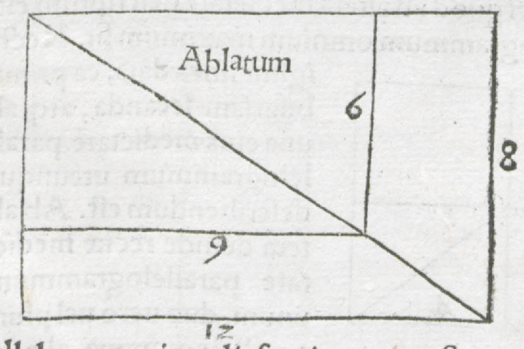
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚϚ.

Ἐὰν ἀπὸ παραλληλογράμμου παραλληλόγραμμον ἀφαιρεθῇ, ὅμοιόν τε τῷ ὅλῳ καὶ ὁμοίως κείμενον, κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ· περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρόν ἐστι τῷ ὅλῳ.

PROPOSITIO XXVI.

Si à parallelogrammo parallelogrammum auferatur, & ſimile toti & ſimiliter poſitum, communem angulum habens ei: circa eandem diametrum eſt toti.

Deſcribatur parallelogrammum, ab eo deinde aliud, ſibi ſimile ſimiliterq́; poſitum, communem etiam cum totali angulum habens, parallelogrammum auferatur: dico, ablatum circa totalis parallelogrammi diametrum conſiſtere.



Sumit hæc propoſitio ſuam demonſtrationem ab abſurdo illo, Partem ſuo toti, uel contrà, Totũ ſuæ parti æqualem eſſe, hoc modo. Ducatur ablati parallelogrammi diameter, ab angulo, quem cum totali communem habent incipiendo. Quod ſi hæc, ulterius continuata, diameter etiam parallelogrammi totalis fuerit: uerum eſt quod dicit propoſitio. Si uerò non, ducatur ab eodem communi angulo, ſi poſſibile ſit, linea recta alia, quæ ſit totalis parallelogrammi diameter: puncto deinde interſectionis, huius diametri & lateris parallelogrammi ablati. linea, quæ per ablatum parallelogrammum tranſeat, & inſuper duobus

bus totalis parallelogrammi lateribus, parallela ſit, per propoſitionem 31 primi, excitetur. Et quoniam parallelogrammorum utrunq;, ablatum quidem, ex hypotheſi, quod uerò iam formatum eſt ex propoſitione 24 huius, totali parallelogrammo ſimile eſt: utriuſq; igitur circa æquales angulos latera, ex definitionis ſimilium figurarum conuerſione bis uſurpata, atq; propoſitione 11 quinti inter ſe proportionalia erunt. Quia autẽ una & eadem

linea, illa ſcilicet quæ utriſq; eſt latus commune, ad duo reliqua horum parallelogrammorum latera, uel contrà (prout quidem in demõſtratione proceſſum fuerit) hæc duo ad commune illud latus, unam & eandem rationem habent: hæc duo reliqua latera, ex priore uel poſteriore parte propoſitionis nonæ quinti, inter ſe æqualia erũt, longius breuiori, uel contrà, quod eſt impoſsibile. Propter illud abſurdum igitur hæc duo parallelogramma, ablatum ſcilicet & totale, his propoſitionis hypotheſibus, circa eandem diametrum conſiſtere neceſſe erit. Si à parallelogrammo igitur parallelogrammum auferatur, &c. quod demonſtraſſe oportuit.

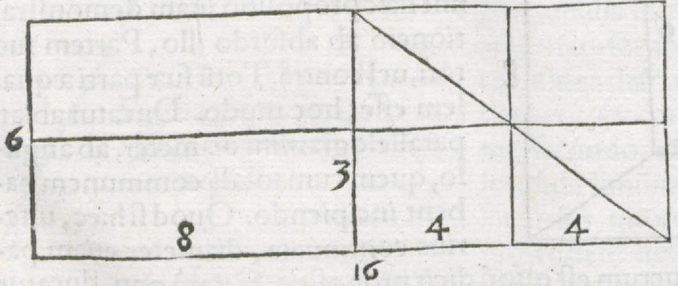
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΖ.

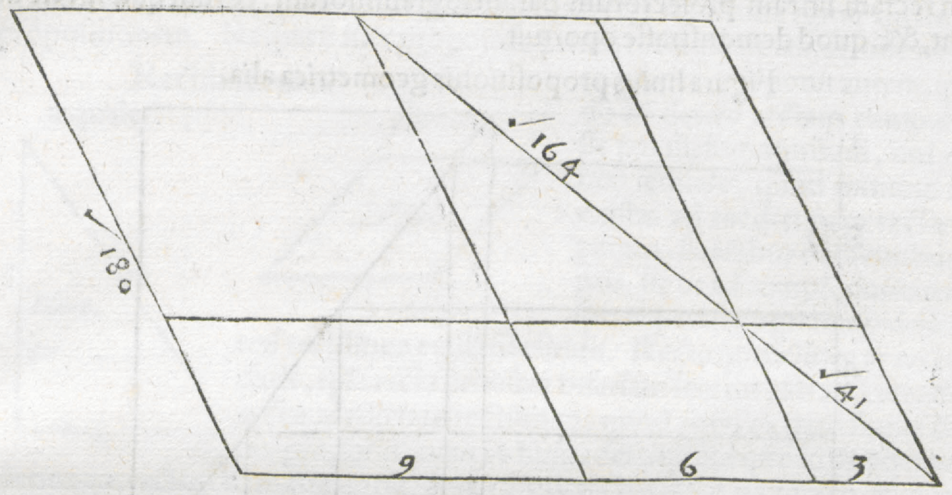
Πάντων τῶν παρὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν παραβαλλομένων παραλληλογράμμων, καὶ ἐλλειπόντων εἴδεσι παραλληλογράμμοις, ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις, τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφομένῳ· μέγιστόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβαλλόμενον παραλληλόγραμμον, ὅμοιον ὂν τῷ ἐλλείμματι.

PROPOSITIO XXVII.

Omnium, circa eandem rectam lineam proiectorum parallelogrammorum, eorum quæ ſpecie deficiunt parallelogrammis, ſimilibus, ſimiliterq; poſitis ei, quod à dimidia linea deſcribitur: ſi deficientia conferantur, erit quod ad dimidium proiectum eſt, & ſimile ſumpto exiſtit, omnium maximum.

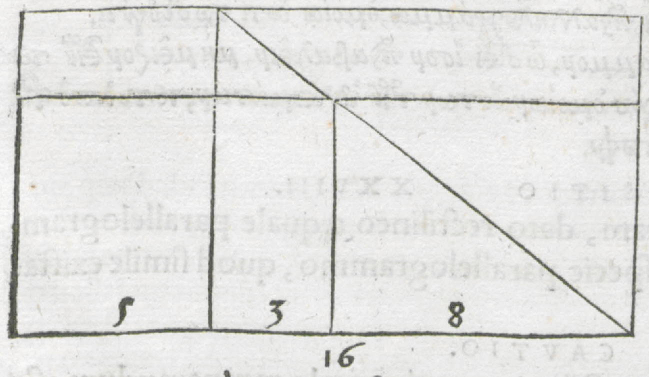
Senſus propoſitionis eſt. Si eidem rectæ lineæ applicentur aliquot parallelogramma, unum quidem ad ipſius rectæ medietatem, alia deinde ad ipſam rectam utcunq;, quæ tamen ſingula, ad completionem rectæ, deficiant in parallelogrammis, ſpecie ſimilibus & ſimiliter poſitis, ei quod ab altera medietate deſcriptum eſt: quòd tum medietati applicatũ parallelogrammum omnium maximum ſit. Recta igitur linea data, ea primũ bifariam ſecanda, atq; ab una eius medietate, parallelogrammum utcunque deſcribendum eſt. Ab altera deinde rectæ medietate parallelogrammum unum, duo uerò uel plura parallelogramma alia, à uarijs, ad placitum ſumptis, diuiſæ lineæ partibus, quæ ſint medietate ipſius rectę uel longiores uel breuiores deſcribantur. eſto tamẽ quòd ſingulę in parallelogrammis ei, quod primò ab una medietate diuiſæ deſcriptum eſt, ſimilibus, deficiant. Dico igitur, quod tum, ſi deficientia conferantur, id quod à media deſcriptum eſt parallelogrammum, omnium maximum ſit. Cum enim illa, in quibus ad rectam poſita parallelogramma deficiunt, ſimilia inter ſe, alterum item alterius ſit ablatum, unum deinde angulum communem habeant: circa eandem diametrũ hæc, ex præcedenti propoſitione 26, conſiſtunt. qua igitur ducta, figura item deſcripta, ut ſcilicet παραπληρώματα appareant, demonſtratio ſic ſuccedet. Quoniam ſupplementa omnis parallelogrammi inter ſe æqualia ſunt, æqualia inſuper uel aliquod commune æqualibus additum, æqualia proueniunt. Et rurſus, quoniam quæ ſub eodem uertice ſunt parallelogramma, ſi æquales baſes habuerint, æqualia inter ſe ſunt, eo ordine procedendo, cum duo uni æqualia ſint, æqualium uno pro altero ſumpto, unum ſupplementum tandem cum altero ſimili, partiali ei, quod ad medietatem rectæ ponitur, parallelogrammo, æquale erit. Illis igitur æqualibus altero ſupplemento adiecto: ipſe gnomon, qui ſcilicet, propter æqualitatem parallelogrammorum, pars eſt eius, quod à medietate altera deſcriptum eſt, parallelogrammi, alteri parallelogrammo æquale erit: totum igitur eo maius. Omnium igitur circa eandem diametrum, &c. quod demonſtraſſe oportuit.





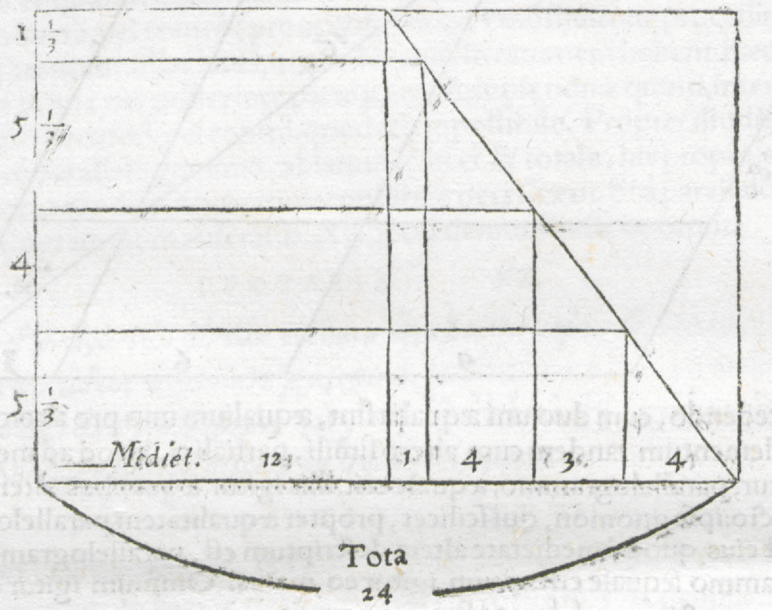
ALITER.

Sit rurſus à rectæ lineæ medietate deſcriptum parallelogrammum, in medietate altera deficiens, ab ipſa recta uerò parallelogrammum aliud, quod deficiat in parallelogrammo ſimili ei, in quo à medietate deſcriptum defecerat. eſto autem quòd illud alterum ſit priori deſcripto parallelogrammo altius: dico ergo adhuc, id quod à medietate rectæ deſcriptum eſt parallelogrammum, maius eſſe, &c. Quoniam enim illa, in quibus ad rectam lineam poſita parallelogramma deficiunt, ut in ſuperiori figuratione ſeſe habent, ducta diametro, alia etiam recta linea propter ſupplementa accedente, demonſtratio ſic ſuccedet. Parallelogramma, quorum unum eſt parallelogrãmi ſpacij ſupplementum, habẽs pro latere, lineam medietati rectæ æqualem, alterum uerò quod huic continuatum eſt, cum æquales baſes habeant, æquè etiam alta ſint: erunt illa, ex 36 primi, inter ſe æqualia. Et quia



etiam parallelogrammorum ſupplementa omnis parallelogrammi ſpacij, inter ſe æqualia ſunt, cum duo uni æqualia, illa & inter ſe æqualia eſſe, ex quadam communi noticia receptum ſit, ab horum ęqualium uno parallelogrammum, per quod diameter tranſit, ablatum : id quod relinquitur, alteri æqualiũ inæquale erit. Quòd ſi tandem his inæqualibus id, quod alterum eorum ad complendum parallelogrammum, à medietate diuiſæ deſcriptum, deſiderat, ex æquo adiectum fuerit, cum quæ ſic proueniant, ex communi quadã noticia inter ſe inæqualia ſint, maius autem eorum, id quod à medietate deſcriptum eſt, parallelogrammum, minus uerò alterum à recta data, &c. deſcriptum, concluditur propoſitum. Omnium igitur circa eandem rectam lineam proiectorum parallelogrammorum, eorum quæ ſpecie deficiunt, &c. quod demonſtraſſe oportuit.

Figura huius propoſitionis geometrica alia.



Habet hæc figura quatuor rectilinea, unum quidem ad medietatem ductæ proiectum, tria deinde alia, ut oportuit, ad aliquam datæ partem. Et quia ſingula ad totius datæ rectæ completionẽ in aliquo rectilineo deficiunt toti ſimili : dico igitur, quod ad medietatẽ comparatum eſt rectilineum, unoquoq; ex reliquis maius eſſe. Id quod præter geometricam rationem uel in numeris patet, atque ob id etiam hæc figura poſita eſt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΗ.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ, ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ, ὁμοίῳ ὄντι τῷ δοθέντι.

Δεῖ δὴ τὸ διδόμενον εὐθύγραμμον, ᾧ δεῖ ἴσον παραβαλεῖν, μὴ μεῖζον εἶναι τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβαλλομένου ὁμοίων ὄντων τῶν ἐλλειμμάτων, τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας, καὶ ᾧ δεῖ ὅμοιον ἐλλείπειν.

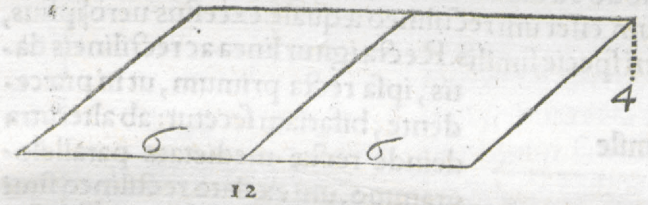
PROPOSITIO XXVIII.

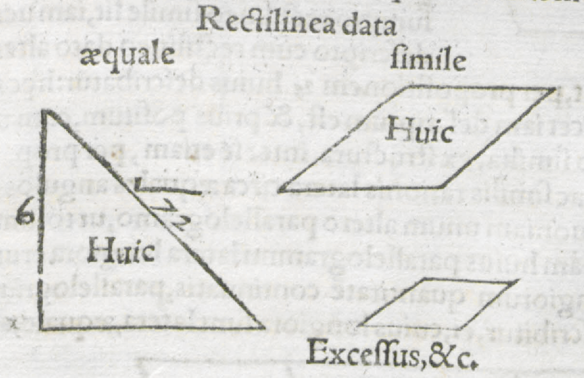
Ad datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum comparare deficiens ſpecie parallelogrammo, quod ſimile exiſtat rectilineo dato.

CAVTIO.

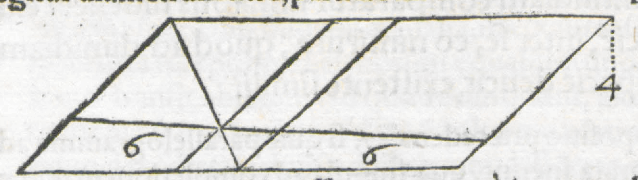
Oportet autem datum rectilineum, cui æquale comparandum eſt, non maius eſſe eo, quod ad dimidiam comparatũ ſimilibus uidelicet exiſtentibus, deficientibus ſpecie, inter ſe, eo nimirum, quod ad dimidiam comparatur, ei quod ſimile ſpecie deficit, exiſtente ſimili.

Quoniam enim, ut habet propoſitio præcedens 27, ſi quæ parallelogramma ad rectam quandam lineam comparata fuerint, quæ ſingula ad completionem rectæ lineæ deficiunt ſpecie parallelogrammis, ſimilibus ſimiliterq; poſitis ei, quod à dimidia deſcribitur, cum quod ad medietatem rectæ comparatur, ex propoſitione præcedenti 27 omnium maximum ſit : hinc ergo factum eſt, quod huic 28 propoſitioni hæc cautio tanquam obſeruatu digna adiecta ſit. Nunc igitur quantum ad propoſitionem. Requirit hæc propoſitio primò rectam lineam, deinde uerò duo rectilinea: proponit autem, quomodo ad datam rectam comparãdum ſit parallelogrammum, uni rectilineo æquale, quod minime maius exiſtat ad medietatem rectæ comparato, ſimilibus exiſtentibus ſumptis, ſic ut ad completionem rectæ, ſpecie parallelogrammo deficiat, alteri rectilineo exiſtente ſimili. Recta igitur linea ac rectilineis datis, ipſa recta primùm bifariam ſecetur, ab alterutra deinde rectæ medietate rectilineo, quod alteri ex dato ſimile exiſtat, per propoſitionem 18 huius deſcripto, à quo id deficiet ad completionem rectæ, etiam cõpleatur: & erit ille defectus alteri rectilineo, διὰ τὸν διορισμόν, aut æquale, aut eo maius. Si æquale, factum erit propoſitum : parallelogrammum nimirum ad rectam datam, uni rectilineo dato æquale, deficiens ſpecie parallelogrammo, quod alteri dato rectilineo ſimile eſt, comparatum. Quòd ſi defectus ille altero rectilineo maior fuerit: & quod à rectæ medietate, per propoſitionem 18 deſcriptum eſt rectilineum, propter æqualitatem, eodem altero rectilineo maius erit. In quo igitur excedit, tali exceſſui parallelogrammum, quod etiam ut ipſum totum alteri dato ſimile ſit, per propoſitionem 25 huius deſcribatur, & erit illud cũ rectilineo dato uno, iam toti parallelogrammo æquale: toti etiam per ſe, ex propoſitione 21 huius, ſimile : laterum igitur, quæ habet circa æquales angulos, proportionalium. Et quoniã huic toti, quod ſcilicet dato uni rectilineo ſimile, ad medietatem etiam rectæ poſitum eſt, alteri rectilineo cum iam deſcripto parallelogrammo æquale eſt : erit contrà, hoc totum parallelogrammũ iam deſcripto ſolo maius : quare & illius, quàm huius, latera longiora. In longioribus igitur breuioribus æqualibus ſignatis, compleatur parallelogrammum : eritq; illud ei, quod per propoſitionem 25. deſcriptum eſt, parallelogrammo æquale: ipſi inſuper toti ex propoſitione 21 huius, ſimile: circa eandem





igitur diametrum hæc, partiale nimirum & totale parallelogrammum ex 26 huius conſiſtunt. Ducatur ergo diameter, & deſcribatur figura. Et quoniam totum hoc parallelogrammum rectilineo uni, & exceſſui æquali deſcripto parallelogrammo, eſt æquale, aſſignatum uerò in eo parallelogrammum, exceſſui ęquale, cum ex communi quadam noticia, ſi ab æqualibus æqualia ſubtrahantur: & ea quę relinquuntur æqualia ſint: ſubtractione igitur facta, gnomon, qui ex una parte relinquitur, rectilineo cuidam, ex altera parte relicto, æqualis erit. Sed quia ipſi gnomoni, ut ex primò libro facile colligitur, æquale eſt ad rectam comparatum parallelogrammum: quare ex communi quadam noticia, eidem relicto rectilineo hoc parallelogrammum æquale erit, deficitq; ſpecie parallelogrammo, ad complendum totum, eo quod eſt alteri rectilineo dato ſimile. Ad datam igitur rectam lineam, dato rectilineo, &c. quod fieri oportuit.



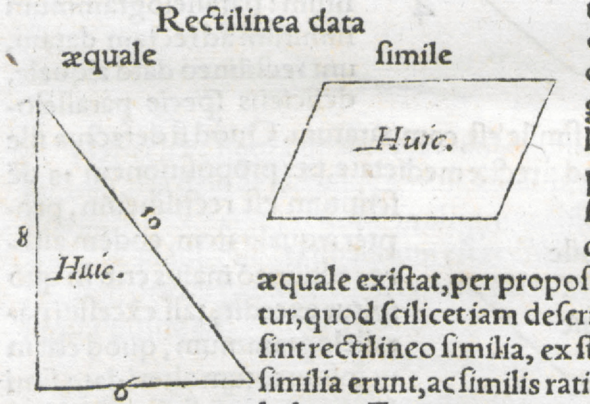
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΘ.

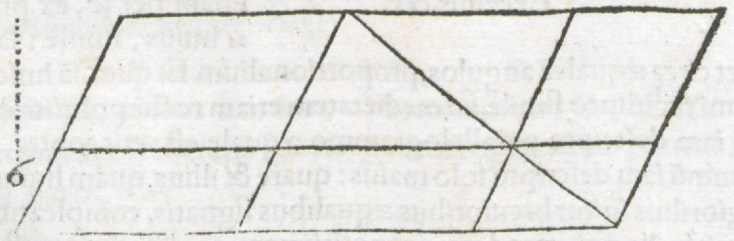
Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν, τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ, ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ὑπερβάλλον εἴδει παραλληλογράμμῳ, ὁμοίῳ τῷ δοθέντι.

PROPOSITIO XXIX.

Ad datam rectam lineam dato rectilineo æquale parallelogrammum comparare, excedens ſpecie parallelogrammo, ſimili dato.

Et hæc propoſitio, ut præcedens 28 duo rectilinea, & rectam lineam datam requirit. Proponit autem, quomodo ad datam rectam comparandum ſit parallelogrammum, quod quidem ipſum eſſet uni rectilineo æquale: exceſſus uero ipſius, qui eſt ultra rectam lineam, alteri ſpecie ſimilis. Recta igitur linea ac rectilineis datis, ipſa recta primum, ut in præcedente, bifariam ſecetur: ab alterutra deinde rectæ medietate parallelogrammo, uni ex dato rectilineo ſimili, per propoſitionem 18 huius, deſcripto, aliud deinde, quod & ipſum ſumpto rectilineo ſimile ſit, iam uerò deſcripto cum rectilineo dato altero æquale exiſtat, per propoſitionem 25 huius deſcribatur: hęc igitur, quod ſcilicet iam deſcriptum eſt, & prius poſitum, cum uni ſint rectilineo ſimilia, ex ſtructura, inter ſe etiam, per prop. 21, ſimilia erunt, ac ſimilis rationis latera circa æquales angulos habebunt. Et quoniam unum altero parallelogrãmo, ut totum ſu parte, maius eſt: & latera illius quâm huius parallelogrammi latera longiora erunt. Breuioribus igitur ad ſuarum longiorum quantitatẽ continuatis, parallelogrãmo etiã deinde cõpleto: quod ſic deſcribitur, ei, cuius longiora ſunt latera, æquale, atq; etiam ſimile erit: quare & alteri deſcripto, cuius nimirum latera continuata ſunt,





ex 21 huius ſimile: circa eandem igitur hæc duo parallelogramma diametrum, ex propoſitione 26, conſiſtunt. Ducatur igitur diameter, & deſcribatur figura. Et quoniam totum hoc parallelogrammi ſpacium, ſuo gnomoni & alteri parallelogrammo ad medietatem rectæ comparato, ut ſuis partibus, eſt æquale, æquale etiam ex communi quadam noticia, huic alteri parallelogrammo & uni rectilineo, ablato de illis communi: & reliquus gnomon, ex una parte, rectilineo æqualis erit. Cum igitur ſupplementa omnis parallelogrãmi ſpacij, ex propo. 43 primi. cumq; etiam parallelogramma, ſuper æqualibus baſibus in eiſdem item parallelis conſtituta, ex 36 eiuſdem, inter ſe æqualia ſint: huius memor, æquali pro æquali, hoc eſt, loco gnomonis ipſo rectilineo, ſumpto, res tandem concludetur. Ad datã igitur rectam lineam dato rectilineo, &c. quod feciſſe oportuit.

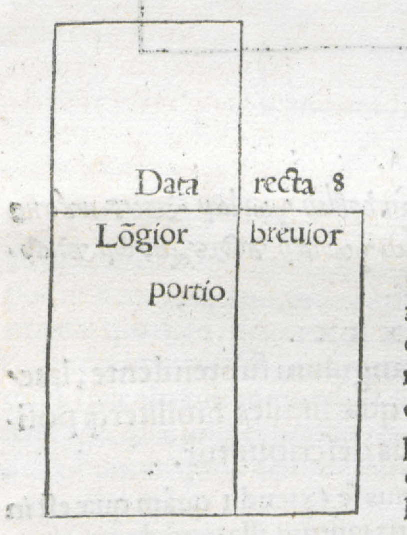
ΠΡΟΤΑΣΙΣ. Λ.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμεῖν.

PROPOSITIO XXX.

Datam rectam lineam terminatam, per extremam ac mediam rationem ſecare.

Proponit hæc propoſitio idem quod in ſecundo propoſitio decima, ſub alijs tamen uerbis. Sit igitur recta linea terminata data, atq; propoſitum, eam per extremam & mediam rationem ſecare. Deſcribatur igitur, per propoſitionem 46 primi, à recta data quadratum, ad lineam deinde, rectæ datæ πρὸς ὀρθὰς inſiſtentem, alterutram, parallelogrammum, quod ipſi quidem quadrato æquale: ultra uerò quadratum de eo proiectum, eidem quadrato etiam ſimile ſit, per propoſitionem 29 comparetur. Et quia per huius parallelogrammi alterum latus, quod ſcilicet per quadratum tranſit, recta data, ut iuſſum, diuiſa eſt: propoſitioni igitur ſatisfactum erit: demonſtratio deinde hocmodo colligenda. Quoniam enim à recta data deſcriptũ, quadratum eſt ex ſtructura: quadratum igitur eſt & id, propter ſimilitudinem, quod ultra quadratum de parallelogrammo porrigitur. Et rurſus, quoniam parallelogrammum, ad latus rectæ datæ conterminale, per propoſitionem 29 applicatum, æquale eſt, ex ſtructura, rectæ datæ quadrato: igitur eo quod hæc duo æqualia commune habent, de ijs ablato, & quę relinquuntur, per communem quandam noticiam, inter ſe ęqualia erunt. Sed quia ſunt etiam æquiangula: latera igitur eorum circa æquales angulos, ex priore parte propoſitionis 14 huius, reciprocè proportionalia erunt. Quare, cum quadratorum latera ex definitione, inter ſe æqualia ſint, parallelogramma inſuper latera oppoſita, ex propoſitione 34 primi, æqualia inter ſe habeant: ex definitione lineæ, extrema & media ratione diuiſæ, iam infertur propoſitum, quòd ſcilicet recta data, extrema & media ratione diuiſa ſit, quod fieri oportuit.



Portio lon. $\sqrt{80} - 4$
breuior $12 - \sqrt{80}$

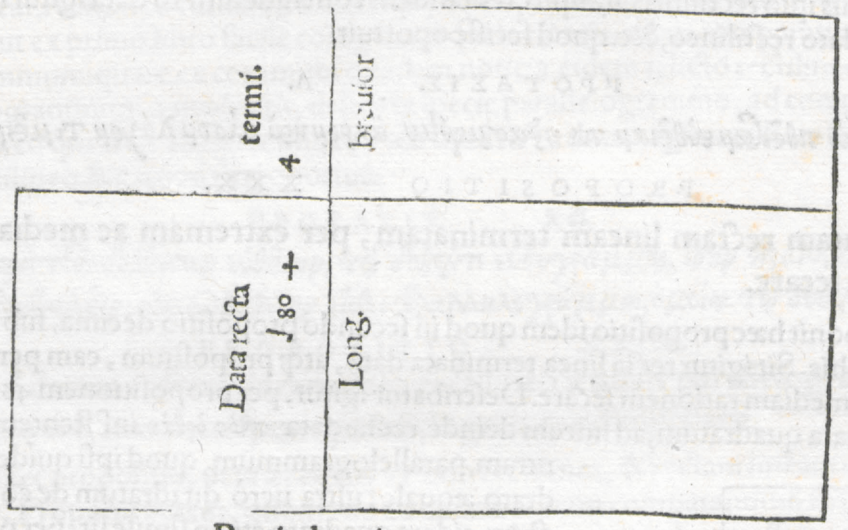
Exemplum in numeris.

Sit totus numerus

10 18 24 39 52 &c.

Portio maior	minor
$\sqrt{125}$ — 5	15 — $\sqrt{125}$
$\sqrt{205}$ — 9	27 — $\sqrt{205}$
$\sqrt{718}$ — 12	36 — $\sqrt{718}$
$\sqrt{1901\frac{1}{4}}$ — $19\frac{1}{2}$	$58\frac{1}{2}$ — $\sqrt{1901\frac{1}{4}}$
$\sqrt{3380}$ — 26	78 — $\sqrt{3389}$

Exemplum geometricum aliud.



Portio longior 8
breuior $\sqrt{8}$ — 4

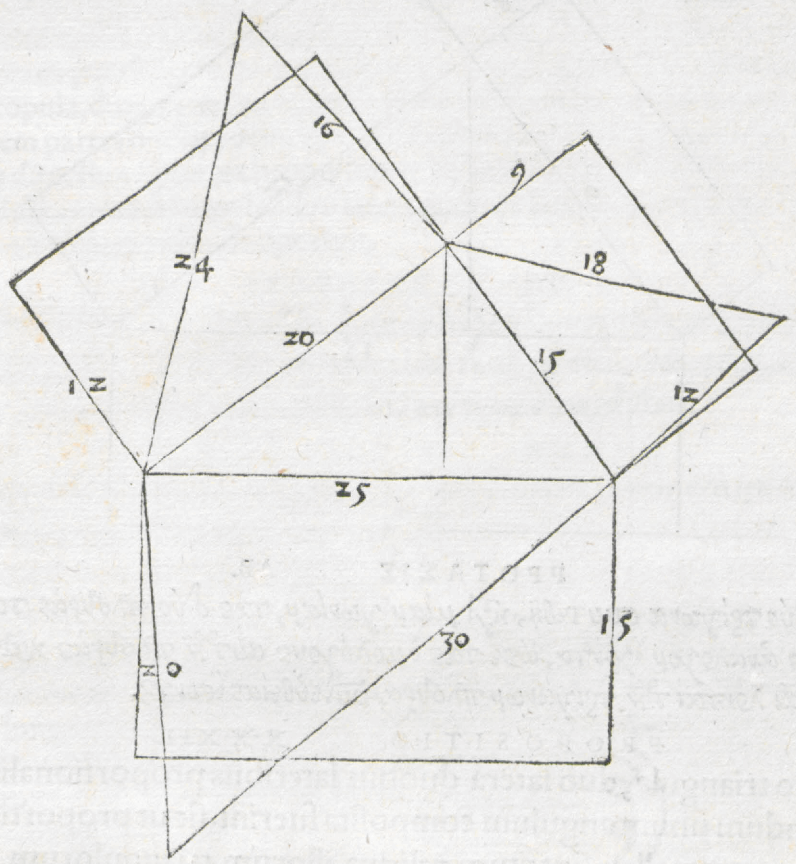
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΑ.

Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις· τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς εἶδος, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν εἴδεσι, τοῖς ὁμοίοις καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις.

PROPOSITIO XXXI.

In rectangulis triangulis: quæ, ab rectum angulum ſubtendente, latere ſpecies deſcripta fuerit, ea æqualis eſt eis, quæ ſimiles ſimiliterq́ poſitæ à lateribus rectum angulum continentibus deſcribuntur.

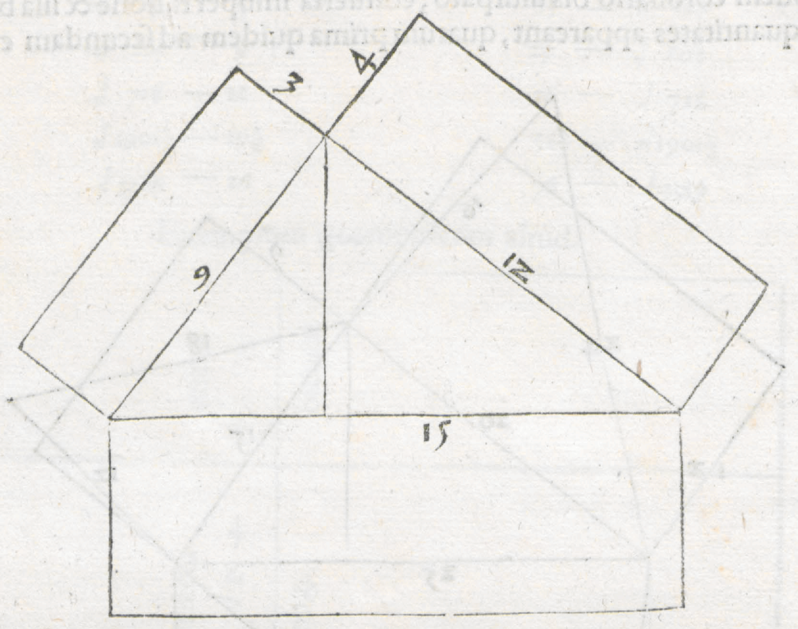
Eſt hæc propoſitio aliquanto generalior, & latius ſe extendit quàm quæ eſt in primo quadrageſima ſeptima, cum hæc de quadratis tantùm, illa uerò de omnis generis rectarum linearum figuris, modò ſimilis delineationis fuerint, intelligatur. Sit igitur triangulum rectangulum, ab illius etiam unoquoque latere rectilineum deſcriptum, primum quidem à latere uno, ut lubet, à reliquis deinde reliqua, quemadmodum docet propoſitio 18: dico ergo, rectilineum lateris quod ſubtendit angulum rectum, reliquis duorum laterum rectilineis æquales eſſe. Ducatur ab angulo trianguli recto, per propoſitionem 12 primi, ad baſim perpendicularis. Et quoniam partialia deſcripta triangula, per propoſitionem 8 huius, & toti, & ipſa inter ſe ſimilia ſunt: æquiangula igitur hæc, & latera circa æquales angulos proportionalia habebunt. ſcilicet, ſicut ſe habet ſubtendens rectũ totalis trianguli, ad utrunq́ circa rectum angulum latus, ſic & in utroq́ partiali triangulo, recto angulo ſubtenſa, ad utrunq́ alterum. Sed quoniam tribus rectis lineis proportionalibus exiſtentibus, cum, per corollarium ſecundum propoſitionis 20 huius, prima ſit ad tertiam, ut quæ à prima ad illam quę à ſecunda, ſimilis ſimiliterq́ poſita ſpecies deſcribitur, ratio, eodem corollario bis uſurpato, conuerſa inſuper ratione & illa bis ſumpta, cum ſex quantitates appareant, quarum prima quidem ad ſecundam eſt ut tertia ad quartam, quinta uerò ad eandem ſecundam ut ſexta ad quartam, atq́ ita, per propoſitionem 24 quinti, prima cum quinta ad ſecundam, ſicut tertia cũ ſexta ad quantitatem quartam: ſicut prima cum quinta ſecundæ, ita & tertia cum ſexta quartæ quantitati æqualis ſit, hinc propoſitioni ſatisfactũ erit. In triangulis igitur rectangulis, quæ ab rectum angulum ſubtendente latere ſpecies deſcripta fuerit, ea æqualis eſt eis, quæ ſimiles ſimiliterq́ poſitæ à lateribus rectum angulum continentibus deſcribuntur. quod demonſtraſſe oportuit.



ALITER.

Figuræ, à rectanguli trianguli lateribus deſcriptæ, ſunt, ex hypotheſi, inter ſe ſimiles: & quoniam ſimiles figuræ, ex corollario propoſitionis 20 huius ſecundo, in duplicata ratione ſunt ſimilis rationis laterum, habet uerò & quadratum ad quadratum ſuorum laterum duplicatam rationem: & rectilinei igitur ad rectilineum, ex propoſitione 11 quinti, ut quadrati ad quadratum ratio erit. Hæc ſic omnia bis uſurpata, cum etiam iam ſex quantitates, quales propoſitio 24 quinti requirit, appareant, per eandem & propoſitionem quadrageſimam ſeptimam primi, de triangulis rectangulis expoſitam, infertur tandem propoſitum.

Alia huius propoſitionis figuratio.

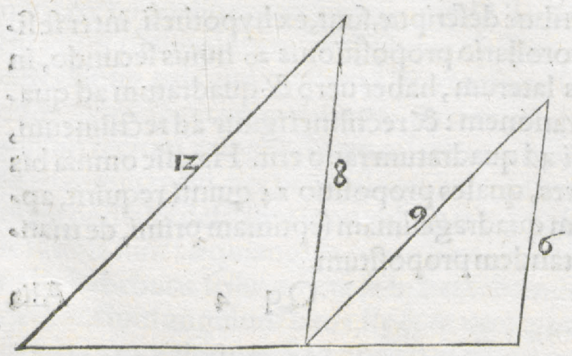


ΓΡΟΤΑΣΙΣ ΛΒ.

Ἐὰν δύο τρίγωνα συντεθῇ, κατὰ μίαν γωνίαν, τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἀνάλογον ἔχοντα, ὥστε τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς καὶ παραλλήλους εἶναι· αἱ λοιπαὶ τῶν τριγώνων πλευραὶ ἐπ' εὐθείας ἔσονται.

PROPOSITIO XXXII.

Si duo triangula, duo latera duobus lateribus proportionalia habentia, ſecundum unum angulum compoſita fuerint, ſic ut proportionalia illorum latera parallela ſint: tum reliqua illorum triangulorum latera in rectam lineam erunt.



Sint duo triangula qualia hæc propoſitio requirit, quorum unius duo latera illam, quam duo alterius trianguli latera rationem conſtituant. Hęc autem applicentur ſecundum unum eorum angulum ſic, ut latera rationis in uno, duobus lateribus rationis in triangulo altero ſint parallela: dico, quod tertium unius, & tertium latus trianguli alterius, adamuſſim unam lineam conſtituant. Quoniam enim latera rationis in uno, lateribus rationis in triangulo altero, ex hypotheſi, ſunt lineæ parallelæ, cum in eas etiam cadat recta quædam linea alia, unum ſcilicet ex parallelis latus: αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι, ex prima parte propoſitionis 29 primi, inter ſe æquales erunt. Eadem igitur parte bis uſurpata: & anguli qui in utroq; triangulo inter proportionalia latera continentur, ex communi quadam noticia, inter ſe æquales erunt: atq; deinde triangula ipſa, ex priore parte propoſitionis 6 huius æquiangula, tandem duo anguli ad tertium unius, duobus angulis ad tertium latus trianguli alterius, æquales erunt. Duobus igitur æqualibus his, utri hi fuerint, angulis, anguli coalterni, qui & ipſi, ut iam demonſtratum eſt, inter ſe æquales ſunt, additi: & duo duobus, duo inquam anguli in uno triangulo, duobus extra illud ęquales erunt. Addito inſuper his æqualibus angulo quodam communi, tertio ſcilicet huius trianguli angulo: tres in triangulo anguli tribus alijs æquales erunt. Sed cum omnis trianguli tres anguli interiores, ex corollario propoſitionis 32 primi, duobus rectis ęquales ſint: & alij tres duobus rectis angulis æquales erunt. Quoniam autem ad aliquam rectam lineam quæ eſt, unum ex parallelis latus, atq; ad eius punctum, quod eſt commmunis triangulorum copula, duæ rectæ lineæ, tertia nimirum duorum triangulorum latera, non ad eaſdem partes ductæ, deinceps ſe habentes angulos duobus rectis æquales faciunt: in directum igitur, ex propoſitione 14 primi, hæc duo tertia latera una linea erunt. Si duo igitur triangula, duo latera duobus lateribus proportionalia habentia, &c. quod demonſtraſſe oportuit.

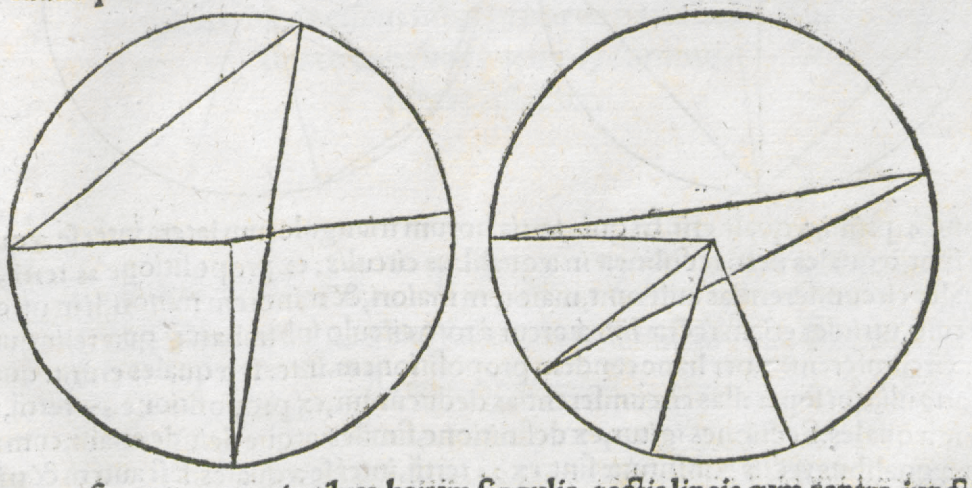
ΓΡΟΤΑΣΙΣ ΛΓ.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις, αἱ γωνίαι τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσι ταῖς περιφερείαις ἐφ' ὧν βεβήκασιν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις, ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι. Ἔτι δὲ καὶ οἱ τομεῖς, ἅτε πρὸς τοῖς κέντροις συνιστάμενοι.

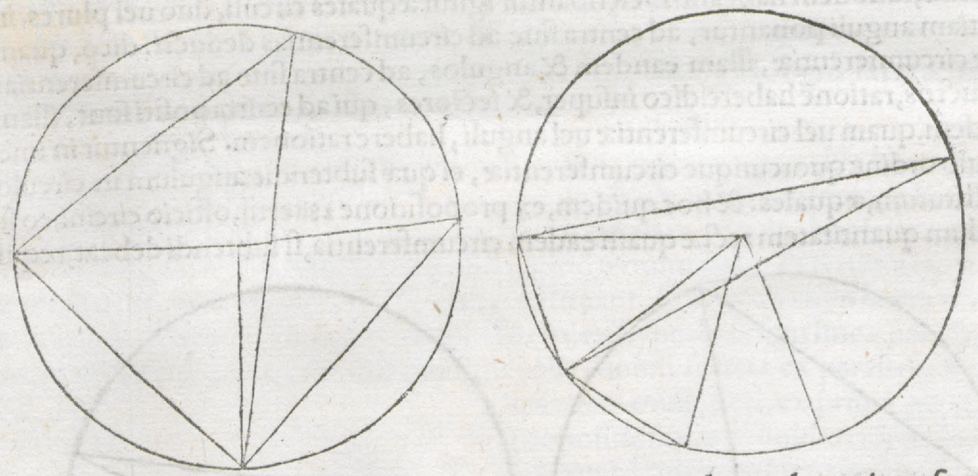
PROPOSITIO XXXIII.

In æqualibus circulis, angulis eandem habent rationem ipſis circumferentijs ſuper quibus conſtituuntur, illi ſiue ad centrum ſiue ad circumferentias conſtituti ſunt: Inſuper uerò & ſectores, ad centra conſtituti.

Habet hæc propoſitio partes duas, requirit circulos æquales, & dicit: Si in æqualibus circulis anguli poſiti fuerint, illos eandem quam ipſæ circumferentiæ à quibus deducuntur rationem habere, ſiue ad centra illi, ſeu ad circumferentias poſiti fuerint. Inſuper quod etiam ſectores ad centra, illam, quam uel anguli uel circumferentiæ, rationem habeant. Deſcribantur igitur æquales circuli, duo uel plures, in ijs etiam anguli ponantur, ad centra ſiue ad circumferentias deducti: dico, quam ipſæ circumferentiæ, illam eandem & angulos, ad centra ſiue ad circumferentias deductos, rationē habere: dico inſuper, & ſectores, qui ad centra poſiti ſunt, illam eandem, quam uel circumferentiæ uel anguli, habere rationem. Signentur in uno circulo ordine quotcunque circumferentiæ, ei quæ ſubtendit angulum in circulo conſtitutum, æquales: & hoc quidem, ex propoſitione 28 tertij, officio circini, eo ſecundum quantitatem rectæ quam eadem circumferentia, ſi ſubtendi debeat, requirit, extenſo, atq; extremitatibus harum ſingulis, rectis lineis cum centro iunctis, hoc idem, ſecundum illam uel aliam multitudinem, fiat etiam in circulis alijs. Et quoniam æquales ſunt, ex ſtructura, circumferentiæ inter ſe, æquales autem circumferentiæ,



cumferentiæ, ex propoſitione 27 tertij, in æqualibus circulis, æquales angulos ſub-
tendunt: & ipſi anguli ſic inter ſe æquales erunt. Sicut igitur in unoquoq; circulo,
circumferentiarum aggregatum ad unam, illam ſcilicet, quæ in eodem circulo an-
gulum ſubtendit, eſt multiplex: ſic & angulorum aggregatum ad illũ eundem an-
gulũ multiplex erit. Quare ſi circumferentiarum aggregatum in uno, ęquale fuerit
aggregato circumferẽtiarum in alio circulo, uel maius uel minus eo: & angulorum
aggregata eodem modo ſeſe habebunt. Sunt autem iam quatuor quantitates, duo
ſcilicet anguli ad centra poſiti, horum deinde angulorum circumferentiæ ſubtenſę,
quarum cum primæ & tertiæ aſſignatæ multiplices æqualiter ſe habeant, in adden
do, minuendo & æqualitate, reſpectu multiplicium, quæ ipſis ſecundæ & quartæ
aſſignatæ ſunt: erunt illæ quantitates, ex definitione 5 quinti, in eadem ratione, pri
ma ſcilicet ad ſecundam, ut tertia ad quartam, circumferentiarum nempe, ut angu-
lorum ad centra poſitorum, ratio. Quoniam autem ad centra deductorum angulo
rum ratio, ea eſt ex 20 tertij, & propoſitione 15 quinti, quæ eſt angulorum qui ad
circumferentias deducti ſunt, cum duæ rationes eidem eædem, ipſæ ex 11 quinti
inter ſe eædem ſint: prior propoſitionis pars iam manifeſta erit. Poſterior nunc,
quòd & ſectorum ad centra, ut circumferentiarum ſit ratio, ſic demonſtrari poteſt.
Maneat prior diſpoſitio, linearum deinde ipſorum ſectorum extremitates, quas ha
bent, uterq; in ſua circumferentia, lineis rectis coniungantur. Hoc idem fiat ex al-
tera parte cum ſectoribus proximis, & ſignentur in quatuor iſtis circumferentijs
uel arcubus, quatuor puncta utcunq;, atq; ab ijs ad eorum arcuum fines rectæ lineę
ducantur. Et quoniam quæ ex centro circuli ad circumferentiam uſq; egrediuntur
rectæ lineæ, ex definitione circuli, inter ſe ſunt æquales, cum ſic in utroq; circulo
duo triangula appareant, quorum duo latera unius, duobus lateribus in triangulo
altero ſunt æqualia, angulus etiam inter illa, angulo, ut iam oſtenſum eſt, æqualis:
& tertium latus tertio lateri: totum deinde triangulum toti triangulo, ex propoſi-



tione 4 primi, æquale erit. Et quia tertia horum triangulorum latera inter ſe æqua-
lia ſunt, æquales uerò rectilineæ in æqualibus circulis, ex propoſitione 28 tertij, æ-
quales circumferentias auferunt, maiorem maiori, & minorem minori, ſi in utroq;
circulo, utriuſq; etiam rectæ lineæ arcus à toto circulo ſubtrahatur: quæ relinquun
tur circumferentiæ, per hanc eandem propoſitionem, inter ſe æquales erunt: quare
& anguli, qui ſuper illas circumferentias deducuntur, ex propoſitione 27 tertij, in-
ter ſe æquales. Sectiones igitur, ex definitione, ſimiles: atque deinde etiam, cum ſu-
per æqualibus rectis conſtitutæ ſint, ex 24 tertij, inter ſe æquales. Eſt autem & trian
gulum triangulo æquale: totus igitur ſector toti ſectori æqualis, atq; ideo & ſecto-
res in utroq; circulo tandem omnes, inter ſe æquales erunt. Quotuplex igitur eſt in
utroq; circulo circumferentiarum aggregatum ad unam, illam ſcilicet, quæ in eo-
dem

---

dem circulo ſectorem ſubtendit, tam multiplex eſt etiam ſectorum aggregatum ad illum eundem ſectorem. Ergo ſicut ſe habet prima ex illis quatuor, ad tertiam, in addendo, minuendo, uel æqualitate: ita & ſecũda erit, reſpectu quantitatis quartę. Sunt autem iam quatuor quantitates, duo ſcilicet ſectores ad centra poſiti, horum deinde ſectorum circumferentiæ ſubtenſæ, quibus cum primæ & tertiæ, ſecundæ item & quartæ æquè ſint aſſignatæ multiplices, erunt illæ quantitates, ut ſuprà, in eadem ratione: prima ſcilicet ad ſecundam, ut tertia ad quartam: hoc eſt, Sectorum ut circumferentiarum, uel propter ſimilitudinem, ut angulorum ratio. In circulis igitur æqualibus, eadem ratio angulorum eſt, quę circumferentiarum ſuper quibus conſtituuntur, ſiue ad centra ſiue ad circumferentias conſtituti ſint. Itidemq; ſectores, qui ad centra conſiſtunt. quod demonſtraſſe oportuit.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Καὶ δῆλον, ὅτι καὶ ὡς ὁ τομεὺς πρὸς τὸν τομέα, οὕτω καὶ ἡ γωνία πρὸς τὴν γωνίαν.

COROLLARIUM.

Et manifeſtum eſt, quòd ſicut ſector ad ſectorem: ita & angulus ad angulum.

FINIS LIBRI SEXTI.

IOANNES SCHEUBELIUS

candido Lectori S.

Habes ita, candide Lector, ſex libros geometriæ Euclidis priores, ex traditione noſtra, unà cum regulis Algebræ. Quod ſi fortè in aliquibus locis hallucinati ſumus (id quod in hoc hactenus inuſitato ac lubrico demonſtrationis genere facile accidere potuit) quia tamen paſſim multa inuenientur, quibus oblectare ſeſe ſtudioſus harum rerum poterit, lapſus in hac re noſtri apud te facile, ut ſpero, ueniam merebuntur. Quòd ſi candorem & iudicium non iniquum his adhibitum animaduertero, poſteriores etiam nouem libros pari ſtudio illuſtrare conabor, tecumq; communicare fideliter.

BASILEAE, PER IOANNEM
Heruagium, Anno ſalutis humanæ M. D. L.
Menſe Septembri.