

ETVERK — GRÜNTAL — MERESMAA — RATASSEPP  
MATEMAATIKA KESKKOOLIS

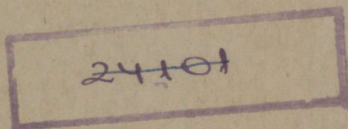
---

---

ELMAR ETVERK

# GEOMEETRIA

ÕPPERAAMAT V KLASSILE



KIRJASTUS- JA KOOLITARVETE MÜÜGIÜHING  
„KOOLI-KOOPERATIIV“

TALLINNAS 1937

# SISUKORD.

	Lk.
<b>1. osa. Tasapindade ja sirgjoonte vastast. asetsemine ..</b>	<b>205—221</b>
I. Ruumi põhikujundid .....	205
II. Tasapindade lõikumine ja paralleelsus .....	209
III. Sirge ja tasapinna lõikumine .....	215
IV. Ülesandeid .....	219
<b>2. osa. Geomeetrilised kehad ja nende joonestamine ....</b>	<b>221—242</b>
I. Geomeetriliste kehade liigitelu .....	221
II. Geomeetriliste kehade joonestamine .....	230
III. Ülesandeid .....	240
<b>3. osa. Keha pindala ja ruumala .....</b>	<b>242—268</b>
I. Tahkkeha pindala ja ruumala .....	242
II. Pöördkeha pindala ja ruumala .....	252
III. Ülesandeid .....	261
Märksõnastik .....	269
Mõned erikaalud .....	273
Trükivigade õiendus .....	273
Sisukord .....	274



# Stereomeetria. 2-56630

1. osa.

## TASAPINDADE JA SIRGJOONTE VASTASTIKUNE ASETSEMINE.

### I. Ruumi põhikujundid.

#### § 233.

**Geomeetrilise keha kirjeldamine.** Stereomeetria ehk ruumi-geomeetria ülesandeks on uurida niisuguseid kujundeid, mille punktid ei asetse ühel ja samal tasapinnal. Nende kujundite uurimiseks on vaja osata uuritavaid kujundeid kujutada, joonestada ja neist mudeleid valmistada.

Nagu majast kujutluse saamiseks peame oskama näha selle üksikosi nagu seinad, aknad, katus jne., nii peame iga ruumilise kujundi juures oskama näha neid lihtsamaid kujundeid, mis sellele esinevad. Omades kujutlust mõnest ruumilisest kujundist, võime seda kujundit kirjeldada. Kirjeldame, näiteks, risttahukat (joonis 190): see on **keha** (§ 2), mis on piiratud kuue ristkülikukujulise **tahuga**; tahud lõikuvad, moodustades risttahuka **servad**, ja viimased omakorda lõikuvad, moodustades risttahuka **tipud**. Servi on risttahukal 12 ja tippe on 8. Tipud on kõige lihtsemad geomeetrilised kujundid, nimelt punktid. Keha servad on sirglõigud: kui mingit serva, näiteks  $AB$ -d (joonis 190) mõlemast otsast piiramatult pikendada, siis tekib sirgjoon  $AB$ , mille üheks lõiguks on serv  $AB$ . Keha

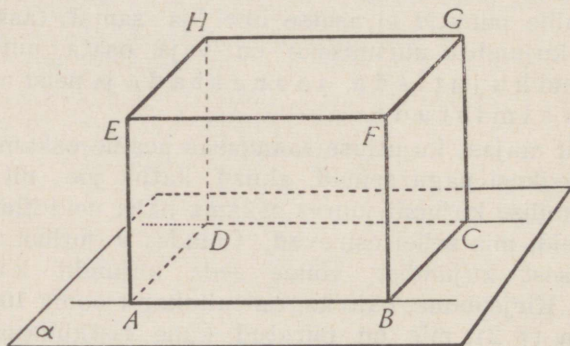
tahud on tasapinna tükid: kui mingit tahku, näiteks  $ABCD$ -d (joonis 190), piiramatult igas suunas laiendada, siis tekib tasapind, mille üheks tükiks on tahk  $ABCD$ .

**Punkt, sirgjoon ja tasapind on ruumi põhikujundid.** Nende kujundite vastastikuste asetsemisvõimaluste tundmaõppimine on vajalik, kui tahetakse geomeetrist keha kujutleda, joonestada või selle mudelit valmistada.

### § 234.

**Kahe sirgjoone vastastikused asendid ruumis.** Kui piiramatult pikendada risttahuka iga serva, siis tekib 12 sirget, mis on mitmesugustes asendites üksteise suhtes. Valides nende sirgete hulgast mistahes kaks sirget, võime veenduda, et nad kas

lõikuvad, nagu sirged  $AB$  ja  $BC$ , või on paralleelsed, nagu sirged  $AB$  ja  $DC$ , või ei lõiku ega ole ka paralleelsed, nagu sirged  $EF$  ja  $HD$ .



Joonis 190.

Viimasel juhul nimetatakse sirgeid **kiivsirgeteks**: sirged  $EF$  ja  $HD$  (samuti  $AB$  ja  $FG$  joonisel 190) on kiivsirged.

Seega võib kaks sirget olla teineteise suhtes ruumis kolmes asendis, kuid tasapinnal ainult kahes asendis (§ 55). Sellest selgub ka, et **kaks kiivsirget ei asetse ühel**

ja samal tasapinnal, sest kaks ühel ja samal tasapinnal asetsevat sirget kas lõikuvad või on paralleelsed.

### § 235.

**Kahe tasapinna vastastikused asendid.** Risttahuka tahud on kuue erineva tasapinna tükid. Valides nende tasapindade hulgast (joonis 190) mistahes kaks tasapinda, näeme, et nad kas omavad ühiseid punkte, nagu tasapinnad  $ABCD$  ja  $DCGH$ , või ei oma ühiseid punkte, nagu tasapinnad  $ABCD$  ja  $EFGH$ . Esimesel juhul öeldakse, et kaks tasapinda lõikuvad, ja teisel juhul — et nad on paralleelsed; seega:

kaks tasapinda on paralleelsed, kui neil ei ole ühtki ühist punkti.

### § 236.

**Sirge ja tasapinna vastastikused asendid.** Sirge ja tasapinna vastastikuste asendite eristamiseks vaatleme joonisel 190 esinevate sirgete asendeid tasapinna  $\alpha$  suhtes. Nende sirgete hulgas on sirgeid, mis

asetsevad tasapinnal  $\alpha$ , nagu sirged  $AB$  ja  $AD$ ;

lõikuvad tasapinnaga  $\alpha$ , nagu sirged  $AE$  ja  $CG$ ;

on paralleelsed tasapinnaga  $\alpha$ , nagu sirged  $EF$  ja  $FG$ .

Iga sirge on ruumis iga tasapinna suhtes ühes neist kolmest asendist; missuguses nimelt, seda otsustame järgnevate tunnuste abil:

1. Sirge asetseb tasapinnal, kui tal on selle tasapinnaga kaks ühist punkti (§ 12).
2. Sirge lõikub tasapinnaga, kui tal on selle tasapinnaga ainult üks ühine punkt.
3. Sirge on paralleelne tasapinnaga, kui tal ei ole selle tasapinnaga ühtki ühist punkti.

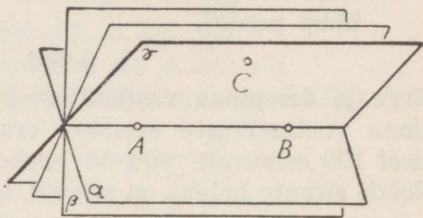
### § 237.

**Tasapinna määramine kolme punkti abil.** On teada, et kaht punkti läbib üks ja ainult üks sirgjoon, ehk teisiti:

sirgjoon on määratud oma kahe punktiga (§ 10). Nagu sirgjoont saab määrata lihtsemate kujundite — punktide — abil, nii saab ka tasapinda määrata lihtsemate kujundite, nimelt sirgete ja punktide abil. Tasapinna üks määramisviis väljendub aksioomis

**tasapind on määratud oma kolme punktiga, mis ei asetse ühel ja samal sirgel.**

Selle aksioomi mõistmiseks kujutleme kaht punkti  $A$  ja  $B$  (joonis 191) ühes tasapinnaga  $\alpha$ , millel asetsevad need punktid. On selge, et neid tasapindu, millel asetsevad punktid  $A$  ja  $B$ , on peale  $\alpha$  veel loendamatu palju; kaks neist on  $\beta$  ja  $\gamma$  (joonis 191). Punkte  $A$  ja  $B$  läbiv sirge asetseb igal ühel neist tasapindadest, sest tal on igauheda neist kaks ühist punkti. Kui peale punktide  $A$  ja  $B$  on antud väljaspool sirget  $AB$  veel üks punkt  $C$ , siis meie kujutluse järgi on olemas ainult üks tasapind, millel asetsevad punktid  $A$ ,  $B$  ja  $C$ . Seda mõtet väljendabki antud aksioom.



Joonis 191.

Järeldus: kui kahel tasapinnal on kolm ühist punkti, mis ei asetse ühel sirgel, siis need tasapinnad ühtuvad, sest need kolm punkti määravad ainult ühe tasapinna.

### § 238.

**Teised tasapinna määramisviisid. Teoreem:**  
tasapind on määratud selle tasapinna

1. ühe sirgega ja väljaspool sirget asetseva punktiga,
2. kahe lõikuva sirgega,
3. kahe paralleelse sirgega.

Tõestus. Kui on antud kas sirge ja väljaspool seda asetsev punkt või kaks lõikuvat sirget või kaks paralleelset sirget, siis saab neil kujunditel ikka valida kolm punkti  $A$ ,  $B$  ja  $C$ , mis ei asetse ühel sirgel. Need kolm punkti määravad ühe tasapinna (§ 237), millel asetsevad antud sirgete teised punktid. Kui viimaste hulgast valiksime mingi teise punktide kolmiku  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ , siis nendega määratud tasapind ühtuaks punktidega  $A$ ,  $B$  ja  $C$  määratud tasapinnaga, sest neil tasapindadel oleks kolm ühist punkti, mis ei asetse ühel sirgel. Seega on nende andmetega määratud ikka ainult üks tasapind.

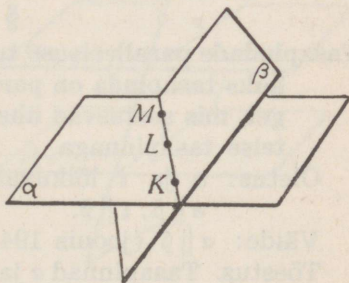
## II. Tasapindade lõikumine ja paralleelsus.

### § 239.

**Kahe tasapinna lõikejoon.** Kahel tasapinnal ei saa olla ainult üks ühine punkt, vaid on kas ühine joon või ei ole neil ühtki ühist punkti. Kahe tasapinna ühist joont nimetatakse nende lõikejooneks. Saab tõestada, et

**kahe tasapinna lõikejoon on sirge.**

Tõestus. Kui kahe tasapinna  $\alpha$  ja  $\beta$  lõikejoon (joonis 192) ei oleks sirge, siis ta peaks olema kõver. Kõverjoonel on võimalik valida kolm punkti  $K$ ,  $L$ ,  $M$  nii, et nad ei asetse ühel sirgel. Need kolm mitte ühel sirgel asetsevat punkti oleksid siis tasapindade  $\alpha$  ja  $\beta$  ühised punktid ja, järelikult, peaksid need tasapinnad § 237 järelduse tõttu ühtuma. Et antud tasapinnad ei ühtu, siis ei saa nende lõikejoonel olla kolme punkti, mis ei asetse ühel sirgel, ja seega on lõikejoon sirgejoon.

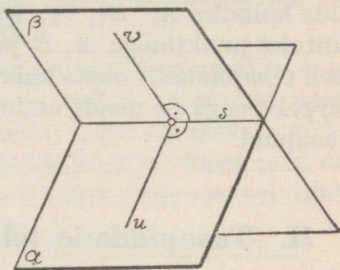


Joonis 192.

## § 240.

**Kahetahuline nurk.** Kahe tasapinna  $\alpha$  ja  $\beta$  lõikumisel tekib neli nurka (joonis 193); neid nurki nimetatakse **kahetahulisteks** nurkadeks. Kui kõrvaldada teisel pool tasapindade lõikesirget asetsevad pooltasapinnad, siis saame ühe kahtahulise nurga. Tasapindade lõikesirget  $s$  nimetatakse selle kahetahulise nurga **servaks** ja pooltasapindu  $\alpha$  ja  $\beta$  — selle kahetahulise nurga **tahkudeks**.

Kahetahulise nurga suurust mõõdetakse nn. **joonnurga** abil, mille ehitamine toimub järgnevalt: joonestame sirge  $s$  mingist punktist (joonis 193) tasapinnal  $\alpha$  kiire  $u$  nii, et  $u \perp s$  ja tasapinnal  $\beta$  kiire  $v$  nii, et  $v \perp s$ ; nurk, mille moodustavad kiired  $u$  ja  $v$ , ongi kahetahulise nurga **joonnurk**. Kui  $\widehat{uv} = 90^\circ$ , siis öeldakse, et kahetahuline nurk on täisnurk ja et antud tasapinnad ristuvad:  $\alpha \perp \beta$ . Kui  $\widehat{uv} \neq 90^\circ$ , siis on tasapindade  $\alpha$  ja  $\beta$  lõikumisel tekkinud nurkadest kaks teravat ja kaks nürid. Teravnurkse kahetahulise nurga joonnurka nimetatakse harilikult nende **kahe tasapinna vaheliseks nurgaks**.



Joonis 193.

## § 241.

**Tasapindade paralleelsuse tunnus väljendub teoreemis:**

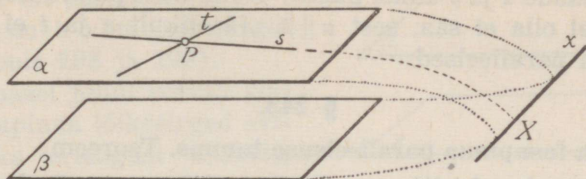
**kaks tasapinda on paralleelsed, kui kaks lõikuvat sirget, mis asetsevad ühel tasapinnal, on paralleelsed teise tasapinnaga.**

Oletus:  $s$  ja  $t$  lõikuvad ja asetsevad tasapinnal  $\alpha$ ;  
 $s \parallel \beta$ ;  $t \parallel \beta$ .

Väide:  $\alpha \parallel \beta$  (joonis 194).

Tõestus. Tasapinnad  $\alpha$  ja  $\beta$  kas lõikuvad või on paralleelsed. Kui nad lõikuvad, siis nende lõikesirge  $x$  asetseb tasa-

pinnal  $\alpha$  ja lõikub vähemalt ühega sirgetest  $s$  ja  $t$ . Lõikugu ta, näiteks, sirgega  $s$  punktis  $X$ . See punkt  $X$  asetseb nii sirgel  $s$ , kui ka tasapinnal  $\beta$ , sest sirge  $x$  kõik punktid aset-



Joonis 194.

sevad tasapinnal  $\beta$ . Kuid oletuse järgi sirge  $s$  ükski punkt ei või asetseda tasapinnal  $\beta$ . Järelikult ei või tasapinnad  $\alpha$  ja  $\beta$  lõikuda, vaid peavad olema paralleelsed.

Märkus. Saab tõestada, et punkti  $P$  väljaspool tasapinda  $\beta$  (joonis 194) läbib ainult üks tasapind  $\alpha$ , mis on paralleelne tasapinnaga  $\beta$  (vrd. § 56).

### § 242.

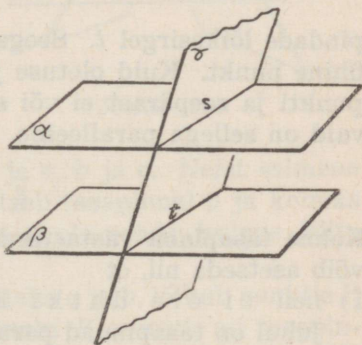
**Paralleelsete tasapindade tähtsam omadus väljendub teoreemis**

**paralleelsete tasapindade lõikamisel tasapinnaga tekivad paralleelsed lõikesirged.**

Oletus:  $\alpha \parallel \beta$ .

Väide:  $s \parallel t$  (joonis 195).

Tõestus. Sirged  $s$  ja  $t$  kas lõikuvad või on paralleelsed, sest nad asetsevad ühel ja samal tasapinnal  $\gamma$ . Kui  $s$  ja  $t$  lõikuvad mingis punktis  $X$ , siis see punkt peab asetsema tasapinnal  $\alpha$ , sest



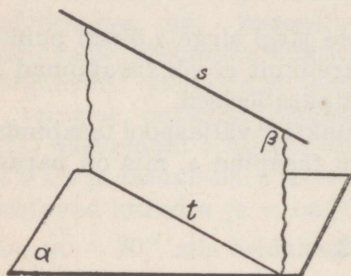
Joonis 195.

sirge  $s$  kõik punktid asetsevad tasapinnal  $\alpha$ . Samuti peab ka punkt  $X$  asetsema tasapinnal  $\beta$ , sest sirge  $t$  kõik punktid — nende hulgas ka  $X$  — asetsevad tasapinnal  $\beta$ . Seega on  $X$  tasapindade  $\alpha$  ja  $\beta$  ühine punkt. Kuid ühist punkti neil tasapindadel olla ei saa, sest  $\alpha \parallel \beta$ . Järelikult  $s$  ja  $t$  ei lõiku, vaid on paralleelsed.

### § 243.

**Sirge ja tasapinna paralleelsuse tunnus. Teoreem:**

**tasapinnal mitte asetsev sirge, mis on paralleelne tasapinnal asetseva sirgega, on paralleelne ka selle tasapinnaga.**



Joonis 196.

Oletus:  $s \parallel t$ ;  $t$  asetseb tasapinnal  $\alpha$ .

Väide:  $s \parallel \alpha$  (joonis 196).

Tõestus. Sirged  $s$  ja  $t$  määravad tasapinna  $\beta$ , mis lõikub  $\alpha$ -ga mööda sirget  $t$ . Kui sirge  $s$  lõikuks tasapinnaga  $\alpha$  mingis punktis  $X$ , siis see punkt asetseks nii tasapinnal  $\beta$  kui ka tasapinnal  $\alpha$ , järelikult ta asetseks nende tasa-

pindade lõikesirgel  $t$ . Seega oleks punkt  $X$  sirgete  $s$  ja  $t$  ühine punkt. Kuid oletuse järgi ei ole neil sirgetel ühist punkti ja seepärast ei või sirge  $s$  lõikuda taaspinnaga  $\alpha$ , vaid on sellega paralleelne.

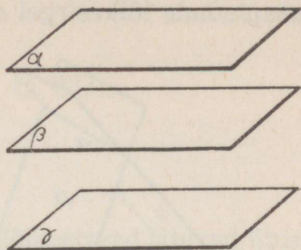
### § 244.

**Kolme tasapinna vastastikused asendid.** Kolm tasapinda võib asetseada nii, et

- 1) neil ei ole ühtki lõikesirget (joonis 197); sel juhul on tasapinnad paralleelsed;
- 2) neil on üks lõikesirge (joonis 191); sel juhul need tasapinnad kuuluvad ühte tasapindade kimpu;

- 3) neil on kaks lõikesirget (joonis 195); sel juhul kaks tasapinda nende hulgas on paralleelsed;
- 4) neil on kolm lõikesirget (joonis 198 ja 199).

Viimasel juhul võivad kolme tasapinna lõikesirged evi-  
da kaks erisugust asendit,  
nagu selgub järgnevast teo-  
reemist.



Joonis 197.

### § 245.

**Kolme tasapinna lõikesirged. Teoreem:**

**kolme tasapinna lõikesirged on kas paralleelsed või lõikuvad ühes ja samas punktis.**

Oletus: tasapindade  $\alpha$ ,  $\beta$  ja  $\gamma$  lõikesirged on  $a$ ,  $b$  ja  $c$  (joonis 198 ja 199).

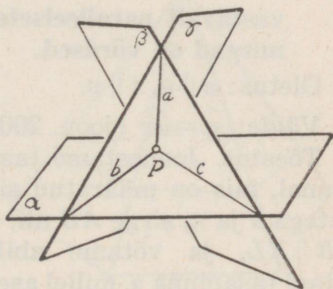
Väide: 1) sirgete  $a$ ,  $b$  ja  $c$  hulgas ei ole kiivsirgeid;

2) kui  $a$  ja  $b$  lõikuvad punktis  $P$ , siis ka  $c$  läbib punkti  $P$  (joonis 198);

3) kui  $a \parallel b$ , siis ka  $c \parallel b$  ja  $c \parallel a$  (joonis 199).

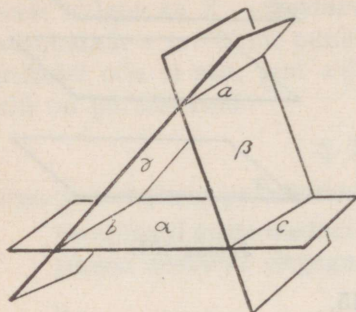
Tõestus. 1) Sirgetest  $a$ ,  $b$  ja  $c$  saab moodustada kolm sirgete paari, nimelt  $a$  ja  $b$ ,  $a$  ja  $c$ ,  $b$  ja  $c$ . Neist esimene asetseb tasapinnal  $\gamma$ , teine asetseb tasapinnal  $\beta$  ja kolmas asetseb tasapinnal  $\alpha$ . Järelikult ei ole nende hulgas kiivsirgeid.

2) Kui üks paar sirgeid, näiteks  $a$  ja  $b$ , lõikub punktis  $P$  (joonis 198), siis nende lõikepunkt  $P$  asetseb nii tasapinnal  $\alpha$ , kus asetseb sirge  $b$ , kui ka tasapinnal  $\beta$ , kus asetseb sirge  $a$ . Seega on punkt  $P$  tasapindade  $\alpha$  ja  $\beta$  ühine punkt.



Joonis 198.

Et tasapindade  $\alpha$  ja  $\beta$  kõik ühised punktid asetsevad nende tasapindade lõikesirgel  $c$ , siis asetseb ka  $P$  sirgel  $c$ , s. t.  $a$ ,  $b$  ja  $c$  lõikuvad punktis  $P$ .



Joonis 199.

3) Kui  $a \parallel b$ , siis peab olema ka  $c \parallel a$  ja  $c \parallel b$ , sest kui seda ei oleks, siis peaksid  $c$  ja  $a$  või  $c$  ja  $b$  lõikuma, millest tõestuse teise osa põhjal järgneks, et ka  $a$  ja  $b$  lõikuvad.

### § 246.

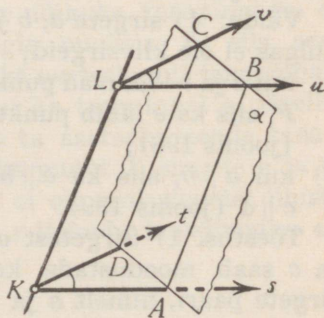
**Nurgad vastavalt paralleelsete haaradega. Teoreem:**

**vastavalt paralleelsete ja samasuunaliste haaradega nurgad on võrdsed.**

Oletus:  $s \parallel u$ ,  $t \parallel v$ .

Väide:  $\widehat{st} = \widehat{uv}$  (joon. 200).

Tõestus. Joonestame tasapinnal, mis on määratud sirgetega  $s$  ja  $u$ , sirge  $AB$  nii, et  $AB \parallel KL$ , ja võtame abiks mingi tasapinna  $\alpha$ , millel asetseb sirge  $AB$ . Kui  $t$  ja  $v$  on samasuunalised, siis tasapind  $\alpha$  lõikab ka neid haarasid punktides  $D$  ja  $C$ . Seega võib öelda, et  $AB \parallel DC \parallel KL$ , sest need on kolme tasapinna, nimelt  $\alpha$ ,  $us$  ja  $vt$ , lõikesirged, milledest üks paar, nimelt  $AB$  ja  $KL$ , on paralleelsed (§ 245 — 3. juht). Nüüd saab kergesti näidata, et nelinurgad  $ABLK$ ,  $DCLK$  ja  $ABCD$  on rööpkülikud, millest järeldub, et



Joonis 200.

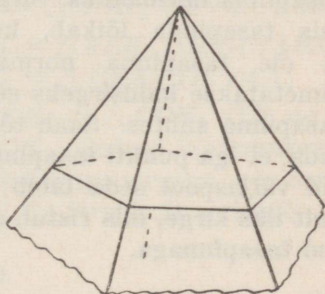
$$\begin{aligned} AK &= BL, \\ KD &= LC, \\ AD &= BC. \end{aligned}$$

$$\frac{\triangle AKD = \triangle BLC \text{ (§ 83)}}{\widehat{K} = \widehat{L}}.$$

### § 247.

**Ruumisnurk.** Kui kolme tasapinna lõikesirged läbivad ühist punkti (joonis 198), siis tekib selle punkti juures kaheksa nn. kolmetahulist nurka. Kolmetahulisel nurgal on kolm serva ja kolm tahku.

Ühes punktis võib lõikuda ka enam kui kolm tasapinda — üldiselt  $n$  tasapinda. Neid nurki, mis tekivad tasapindade lõikumisel ühes punktis, nimetatakse **ruumisnurkadeks**. On lõikuvaid tasapindu, näiteks, viis (joonis 201), siis tekiv ruumisnurk on viietahuline. Ruumisnurga igal tahul asetseb kaks ruumisnurga serva, mis moodustavad ruumisnurga ühe **tasanurga**. On selge, et  $n$ -tahulisel ruumisnurgal on  $n$  serva ja  $n$  tasanurka. Kui ruumisnurga lõikamisel tasapinnaga tekib kumer hulknurk (§ 101), siis nimetatakse ka seda ruumisnurka kumeraks. Saab tõestada, et kumera ruumisnurga tasanurkade summa on väiksem kui  $360^\circ$ .



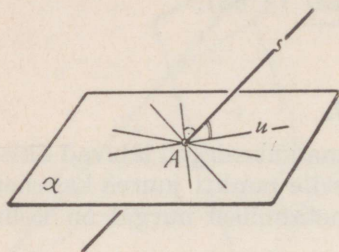
Joonis 201.

## III. Sirge ja tasapinna lõikumine.

### § 248.

**Tasapinna ristsirge definitsioon.** Lõigaku sirge  $s$  tasapinda  $\alpha$  punktis  $A$  (joonis 202). Joonestame tasapinnal  $\alpha$  läbi punkti  $A$  mingi sirge  $u$  ja vaatleme, kuidas muutub

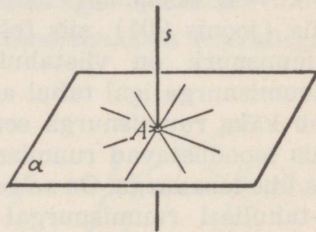
nurk sirgete  $s$  ja  $u$  vahel, kui sirget  $u$  pöörata tasapinnal  $\alpha$  ümber punkti  $A$ . Kui nurk sirgete  $s$  ja  $u$  vahel on täisnurk ja jääb täisnurgaks ka sirge  $u$  pöörlemisel punkti  $A$  ümber (joonis 203), siis ütleme, et sirge  $s$  on risti tasapinnaga  $\alpha$ . Seda väljendame definitsioonis:



Joonis 202.

**sirge on risti tasapinnaga, kui ta on risti kõikide sellel tasapinnal asetsevate sirgetega, mis läbivad antud sirge ja tasapinna lõikepunkti.**

Tasapinnaga ristuvat sirget nimetatakse sagedasti selle tasapinna **normaaliks**. Sirget, mis tasapinda lõikab, kuid ei ole tasapinna normaal, nimetatakse **kaldsirgeks** selle tasapinna suhtes. Saab tõestada, et iga punkti tasapinnal või väljaspool seda läbib ainult üks sirge, mis ristub antud tasapinnaga.



Joonis 203.

## § 249.

**Sirge ja tasapinna ristseisu tunnus. Teoreem:**

**sirge on risti tasapinnaga, kui ta on risti kahe sellel tasapinnal asetseva sirgega, mis läbivad antud sirge ja tasapinna lõikepunkti.**

Oletus:  $s \perp OA$ ;  $s \perp OB$ ;  $OA$  ja  $OB$  on tasapinnal  $\alpha$ .

Väide:  $s \perp \alpha$  (joonis 204).

Tõestus. Et tõestada sirge  $s$  ristumist tasapinnaga  $\alpha$ , peame eelmises §-is antud definitsiooni järgi näitama, et  $s$  ristub iga sirgega tasapinnalt  $\alpha$ , mis läbib punkti  $O$ .

Selle tõestamiseks võtame tasapinnal  $\alpha$  mistahes kolmanda sirge  $OC$  läbi  $O$  ja näitame, et  $s \perp OC$ .

Tõestuseks täiendame joonist järgmiselt:

- 1) sirgel  $s$  märgime punktid  $K_1$  ja  $K_2$  nii, et  $OK_1 = OK_2$ ;
- 2) lõikame sirged  $OA$ ,  $OB$  ja  $OC$  sirgega  $AB$ ;
- 3) ühendame punktid  $A$ ,  $B$  ja  $C$  punktidega  $K_1$  ja  $K_2$ .

Siis on:

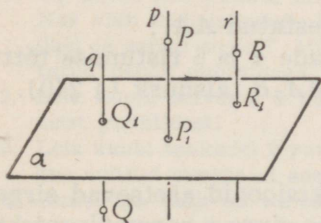
- 1)  $AK_1 = AK_2$ , sest  $\triangle AOK_1 = \triangle AOK_2$  (II v-t.; § 82);
- 2)  $BK_1 = BK_2$ , „  $\triangle BOK_1 = \triangle BOK_2$  (II v-t.; § 82);
- 3)  $\widehat{ABK}_1 = \widehat{ABK}_2$ , sest  $\triangle ABK_1 = \triangle ABK_2$  (III v-t.; § 83);
- 4)  $CK_1 = CK_2$ , sest  $\triangle CBK_1 = \triangle CBK_2$  (II v-t.);
- 5)  $\widehat{COK}_1 = \widehat{COK}_2$ , sest  $\triangle COK_1 = \triangle COK_2$  (III v-t.).

Seega on nurgad  $COK_1$  ja  $COK_2$  võrdsed kõrvunurgad, millest järeldub, et  $s \perp OC$ :  $s$  ristub iga sirgega, mis asetseb tasapinnal  $\alpha$  ja läbib punkti  $O$ ; järelikult  $s$  ristub ka tasapinnaga  $\alpha$ .

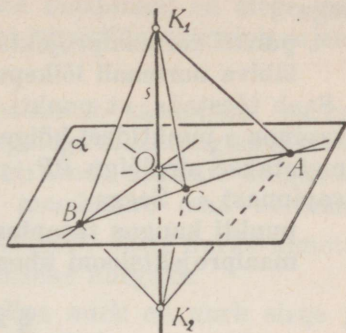
## § 250.

**Punkti kaugus tasapinnast.** Olgu antud väljaspool tasapinda  $\alpha$  punktid  $P, Q, R, \dots$ . Joonestame läbi antud punktide tasapinna  $\alpha$  normaalid

$p, q, r, \dots$  (joonis 205) ja leiame punktid, kus need normaalid lõikuvad tasapinnaga  $\alpha$ . Saadud punkte  $P_1, Q_1, R_1, \dots$  nimetatakse antud punktide  $P, Q, R, \dots$  normaalprojektioonideks tasapinnal  $\alpha$ .



Joonis 205.



Joonis 204.

Seega

**punkti normaalprojektsioon tasapinnal on seda punkti lähiva normaali lõikepunkt tasapinnaga.**

Saab tõestada, et punkti  $P$  normaalprojektsioon  $P_1$  on tasapinna  $\alpha$  punktidest kõige lähemal punktile  $P$ . Seetõttu nimetatakse sirglõigu  $PP_1$  pikkust punkti  $P$  kauguseks tasapinnast  $\alpha$ . Seega

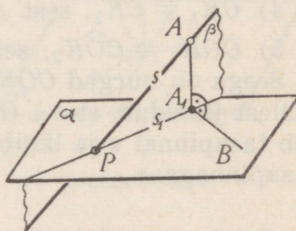
**punkti kaugus tasapinnast on punkti ja selle normaalprojektsiooni ühendslõigu pikkus.**

### § 251.

**Sirge ja tasapinna vaheline nurk.** Olgu antud tasapind  $\alpha$  ja sirge  $s$ , mis on kaldsirge  $\alpha$  suhtes (joonis 206). Ehitame tasapinna  $\beta$  nii, et

- 1) antud sirge asetseks tasapinnal  $\beta$  ja
- 2) tasapind  $\beta$  ristuks tasapinnaga  $\alpha$ .

See uus tasapind lõikub antud tasapinnaga mööda sirgjoont, mida tähistame  $s_1$ . Nüüd saab tõestada, et antud sirge  $s$  mistahes punkti  $A$  normaalprojektsioon asetseb sirgel  $s_1$ . Selleks joonestame tasapinnal  $\beta$  sirge  $AA_1 \perp s_1$  ja tasapinnal  $\alpha$  sirge  $A_1B \perp s_1$ , ning näitame, et  $AA_1$  on tasapinna  $\alpha$  normaal:



Joonis 206.

- 1)  $AA_1 \perp s_1$ , sest nii sai joonestatud  $AA_1$ ;
- 2)  $AA_1 \perp A_1B$ , sest tasapindade  $\alpha$  ja  $\beta$  ristumise tõttu on joonnurk  $AA_1B$  täisnurk (§ 240).

---

$AA_1 \perp \alpha$  (§ 249).

Seega sirge  $s$  punktide projektsioonid asetsevad sirgel  $s_1$ , mistõttu sirget  $s_1$  nimetatakse sirge  $s$  normaalprojektsiooniks tasapinnal  $\alpha$ :

**sirge normaalprojektsioon tasapinnal on sirge, millel asetsevad antud sirge punktide normaalprojektsioonid.**

Tasapinda lõikav sirge moodustab tasapinnal asetsevate ja lõikepunkti läbivate sirgetega mitmesuguseid nurki (joonis 202). Saab tõestada, et nende nurkade hulgas on kõige väiksem see, mis sirge moodustab oma normaalprojektsiooniga ( $\widehat{APA}_1$  joonisel 206). Seda nurka nimetatakse sirge ja tasapinna vaheliseks nurgaks.

**Sirge ja tasapinna vaheline nurk on nurk sirge ja selle normaalprojektsiooni vahel.**

#### IV. Ülesandeid.

305. Mitu kuubi serva lõikuvad ühe servaga, on paralleelsed ühe servaga, on kiivad ühe servaga?
306. Risttahuka kahe mitte ühel tahul asetseva tipu ühendamisel sirglõiguga tekib risttahuka diagonaal. Mitu risttahuka serva lõikuvad, on paralleelsed, on kiivad selle diagonaaliga?
307. Kui palju on horisontaalseid, kui palju vertikaalseid tasapindu, millel asetseb antud punkt?
308. Kui palju on horisontaalseid, kui palju vertikaalseid sirgeid, mis läbivad antud punkti?
309. Mitu horisontaalset sirget saab joonestada antud vertikaalsel tasapinnal läbi antud punkti?
310. Paljude aparaatide jaoks, nagu fotoaparaat, teodoliit (joonis 23), pikksilm, tarvitatakse kolme jalaga statiivi. Selgita, miks!
311. On antud neli punkti, mis ei asetse ühel ja samal tasapinnal. Kas võib leiduda nende hulgas kolm punkti, mis asetsevad ühel ja samal sirgel? Mitu sirget ja mitu tasapinda on määratud nende punktidega?
312. Leia kuubi servadel 3 punkti nii, et igal tahul asetseks üks neist punktidest!
313. Leia kuubi tahkudel 2 punkti nii, et oleks 5, 4, 3, 2, 1, 0 tahku, kus valitud punkte ei asetse!
314. Kuubi iga tahk on värvitud isevärvi ja nimelt üks paar vastastahke mustaks ja valgeks, teine paar vastastahke siniseks ja punaseks, kolmas paar vastastahke kollaseks ja roheliseks.

Missugused värvidekombinatsioonid esinevad tippude juures?  
Missugused värvidepaarid ei esine ühegi tipu juures?

315. Mitu kahetahulist nurka ja mitu kolmetahulist nurka on kuubil? Kui suur on kuubi kolmetahulise nurga tasanurkade summa?
316. Põhjenda, et risttahuka vastastahud on paralleelsed!
317. Põhjenda, et risttahuka iga serv on kahe tahuga risti!
318. Antud on sirge ja väljaspool seda punkt. Joonesta läbi antud punkti
- 1) antud sirgega paralleelne sirge;
  - 2) antud sirgega paralleelne tasapind;
  - 3) antud sirgega ristuv sirge;
  - 4) antud sirgega ristuv tasapind.

Märkus. Joonestamisülesannete lahendamisel ruumis tuleb kasutada üht või mitut abitasapinda, millede kohta eeldame, et neil tasapindadel saab lahendada planimeetriast tuntud joonestamisülesandeid.

319. Antud on tasapind ja väljaspool seda punkt. Joonesta läbi antud punkti
- 1) antud tasapinnaga paralleelne sirge;
  - 2) antud tasapinnaga paralleelne tasapind;
  - 3) antud tasapinnaga ristuv tasapind;
  - 4) antud tasapinnaga ristuv sirge.
320. Kuubi serva pikkus on  $a$  cm. Kui pikk on selle kuubi diagonaal?
321. Joonesta kuubi diagonaali ja tahu vaheline nurk loomulikus suuruses!
322. Risttahuka mõõted on 3 cm, 4 cm ja 5 cm. Kui pikk on selle risttahuka diagonaal?
323. Risttahuka mõõted on  $a$  cm,  $b$  cm ja  $c$  cm. Kui pikk on selle risttahuka diagonaal?
324. Kus asetsevad ruumis need punktid, mis on kahest antud punktist võrdsetel kaugustel?
325. Kus asetsevad ruumis need punktid, mis on antud kolmnurga tippudest võrdsetel kaugustel?
326. On antud kaks kiivsirget ja väljaspool neid punkt. Tõesta, et on olemas üks ja ainult üks sirge, mis läbib antud punkti ja lõikab mõlemaid antud kiivsirgeid!
327. Tõesta (vastuväiteliselt), et iga punkti tasapinnal või väljaspool seda läbib ainult üks antud tasapinna normaal!
328. Tõesta, et tasapinna normaalid on üksteise suhtes paralleelsed! Juhatus: võta kahel normaalil vabalt kaks punkti, leia nendega määratud sirge normaalprojektsioon ja kasuta tõi-

asja, et sirge ja tema normaalprojektsioon asetsevad ühel ja samal tasapinnal!

329. Tõesta, et kaks punkti, mis asetsevad ühekaugusel tasapinnast ja sellest ühel ja samal pool, määravad sirge, mis on selle tasapinnaga paralleelne!
330. Tõesta, et tasapind, mis on risti kahetahulise nurga servaga, on risti ka selle nurga tahkudega!

## 2. osa.

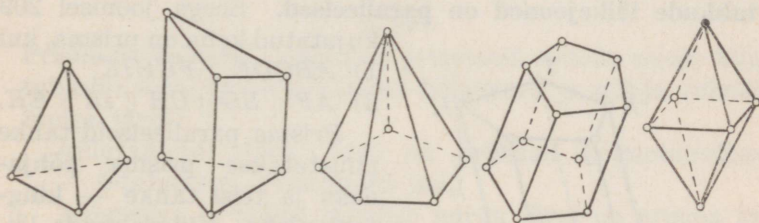
# GEOMEETRILISED KEHAD JA NENDE JONESTAMINE.

## I. Geomeetriliste kehade liigitelu.

### § 252.

**Tahkkeha.** Kuup ja risttahukas on piiratud ainult tasapinna tükkidega, kuid silindrit piirab ka üks kõverpinna tükk. **Kehi, mis on piiratud ainult tasapinna tükkidega, nimetatakse tahkkehadeks ehk hulktahkudeks** (joonis 207).

Tahkkeha piiravad tasapinna tükid on tahkkeha tahud; sirglõigud, kus lõikuvad tahkkeha tahud, on tahk-



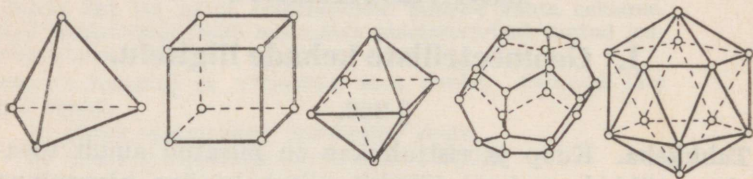
Joonis 207

keha s e r v a d; punktid, kus lõikuvad servad, on tahkkeha tipud. Tahkkeha iga serva juures on üks kahetahuline nurk ja iga tipu juures üks ruumisnurk.

Tahkkehi liigitatakse nende tahkude arvu järgi **neli-**

tahkudeks, viistahkudeks, kuustahkudeks jne. Vähem kui neli tahku ei saa tahkkehale olla.

Tahkude kuju järgi eristatakse korrapäraseid ja korrapäratuid tahkkehi. **Korrapärase tahkkeha on tahkkeha, mille tahud on võrdsed korrapäraseid hulknurgad ja mille kahetahulised nurgad on võrdsed.** Saab tõestada, et korrapäraseid tahkkehi on ainult viis (joonis 208); korrapäraseid võivad olla nimelt nelitahk ehk **tetraeeder**, kuustahk ehk **heksaeeder** (kuup), kaheksatahk ehk **oktaeeder**, kaks-teisttahk ehk **dodekaeeder** ja kaks-kümmendtahk ehk **ikosaeeder**.



Joonis 208.

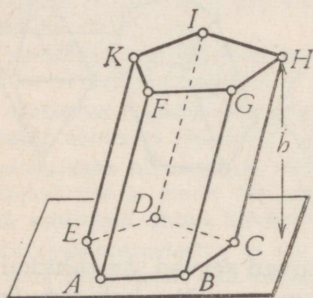
## § 253.

**Prisma.** Üks tahkkehade eriliik on prismad. **Prisma on tahkkeha, mille kaks tahku on paralleelsed ja mille teiste tahkude lõikejooned on paralleelsed.** Seega joonisel 209

kujutatud keha on prisma, kui

- 1)  $ABCDE \parallel FGHIK$ ,
- 2)  $AF \parallel BG \parallel CH \parallel DI \parallel EK$ .

Prisma paralleelseid tahke nimetatakse prisma **põhjadeks** ja teisi tahke — **külg-tahkudeks**. Külg-tahkude lõikejooned põhjadega on **põhiservad** ja külg-tahkude vahelised lõikejooned on **külgservad**. Prisma põhjade tasapindade vaheline ristlõik ( $h$  joonisel 209) on prisma **kõrgus**.



Joonis 209.

Tõestame teoreemi:

**prisma külgtahud on rööpkülilikud ja põhjad on võrdsed hulknurgad.**

Tõestus. 1) Vaatleme, näiteks, tahku  $ABGF$ :

prisma definitiooni järgi on  $AF \parallel BG$ ;

prisma definitioonist järgneb

(§ 242), et  $AB \parallel FG$ ;

järelikult (§ 111)  $ABGF$  on rööpkülilik.

Samal viisil saab tõestada, et ka teised külgtahud on rööpkülilikud.

Järeldus: **prisma külgservad on võrdsed.**

2) Tõestuse esimesest osast järeldub, et

$AB = FG; BC = GH; CD = HI \dots$  (§ 112);

§ 246 järgi on  $\widehat{ABC} = \widehat{FGH}; \widehat{BCD} = \widehat{GHI}; \dots$

$\underline{ABCDE = FGHIK.}$

Samal viisil nagu tõestasime, et prisma põhjad on võrdsed hulknurgad, saab tõestada, et

**prisma lõikamisel põhjaga paralleelse tasapinnaga tekib põhjaga võrdne hulknurk.**

## § 254.

**Prismade liigitelu.** Liigitame prismasid esiteks nende külgtahkude arvu järgi ja teiseks külgserva ja põhja vahelise nurga järgi:

külgtahkude arvu järgi on prismad kolmetahulised, 4-tahulised, 5-tahulised jne.;

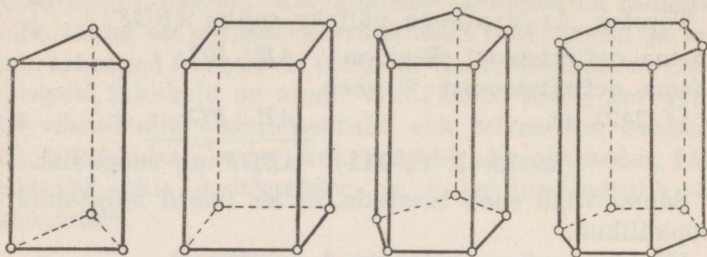
külgserva ja põhja vahelise nurga järgi on prisma kas **püstprisma** või **kaldprisma**.

**Püstprisma** on prisma, mille külgservad on põhjaga **risti**; vastasel korral on prisma **kaldprisma**. On kerge tõestada, et püstprisma külgtahud on ristkülilikud.

Püstprismad liigitatakse põhja kuju järgi **korrapäras**teks ja **korrapäratuteks** prismadeks.

**Korrapärane prisma** on püstprisma, mille põhjaks on

**korrapärane hulknurk.** Joonisel 210 on kujutatud korrapärane kolme-, nelja-, viie- ja kuuetahuline prisma. Korrapärase prisma külgtahud on võrdsed ristkülikud.



Joonis 210.

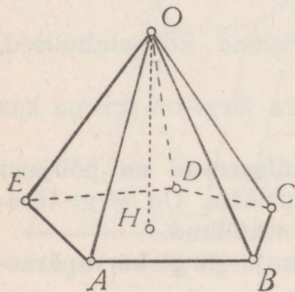
Mõnele sagedamini esinevale prismale on antud eriline nimetus. Näiteks

**prismat**, mille põhjaks on rööpkülik, nimetatakse **rööptahukaks**;

**püstprismat**, mille põhjaks on ristkülik, nimetatakse **risttahukaks**. Seega on rööptahuka kõik tahud rööpkülikud ja risttahuka kõik tahud — ristkülikud. Risttahuka erikuju on kuup, s. o. risttahukas, mille kõik tahud on võrdsed.

### § 255.

**Püramiid.** Teine tahkkehade eriliik on püramiidid. Püramiid on tahkkeha, mille üks tahk on hulknurk ja teised tahud on ühise tipuga kolmnurgad.



Joonis 211.

Joonis 211 kujutab viie-tahulist püramiidi; selle põhjaks on viisnurk  $ABCDE$  ja külgtahudeks on kolmnurgad, mille ühine tipp on punkt  $O$ . Seda tippu nimetatakse püramiidi tipuks. Vii-

masest põhja tasapinnani minev normaali lõik  $OH$  on püramiidi kõrgus. Püramiidi servi liigitatakse, nagu prismalgi, külgservadeks ja põhiservadeks.

Tõestame teoreemi:

**püramiidi lõikamisel põhjaga paralleelse tasapinnaga tekib põhjaga sarnane hulknurk.**

Oletus:  $A_1B_1C_1D_1 \parallel ABCD$ .

Väide:  $A_1B_1C_1D_1 \sim ABCD$  (joonis 212).

Tõestus. Et põhja tasapind ja lõike tasapind on paralleelsed, siis on (§ 242)

$$A_1B_1 \parallel AB; B_1C_1 \parallel BC;$$

$$C_1D_1 \parallel CD; \dots$$

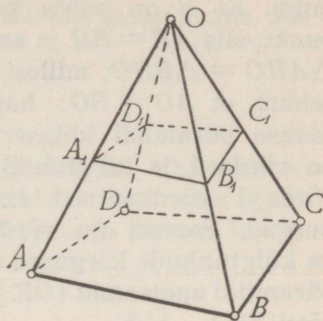
Sellest järeldub, et külgtahkudel on sarnased kolmnurgad (§ 202), ja seega püramiidi lõike ja põhja küljed on võrdelised.

Et lõike ja põhja vastavate nurkade haarad on vastavalt paralleelsed ja samasuunalised (§ 246), siis

$$A_1\widehat{B}_1C_1 = A\widehat{B}C; B_1\widehat{C}_1D_1 = B\widehat{C}D; \dots$$

Seega on lõige põhjaga sarnane hulknurk, sest nende nurgad on vastavalt võrdsed ja küljed võrdelised.

Märkus. Põhjaga paralleelne tasapind tükeldab püramiidi kaheks kehaks; neist alumine (joonis 212) on **tüvipüramiid** ja ülemine on selle tüvipüramiidi täienduspüramiid. Tüvipüramiidil on kaks põhja.



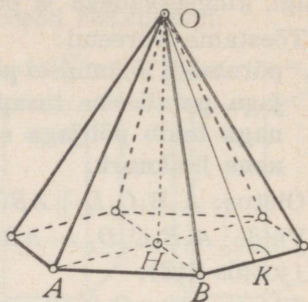
Joonis 212.

## § 256.

**Püramiidide liigitelu.** Külgtahkude arvu järgi liigitatakse püramiide kolmetahulisteks, neljatahulisteks, viietahulisteks jne. püramiidideks. Peale selle saab püramiide veel liigitada korrapärasteks ja korrapäratuteks. **Püramiid on**

korrapärane, kui tema põhjaks on korrapärane hulknurk ja kõrgus lõikab põhja selle keskpunktis.

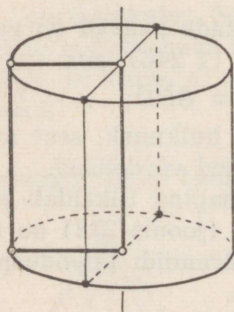
Joonis 213 kujutab korrapärast kuuetaolist püramiidi. Et  $H$  on põhja keskpunkt, siis  $AH = BH$  ja seega  $\triangle AHO = \triangle BHO$ , millest järeldub, et  $AO = BO$ : korrapärase püramiidi külgservad on võrdsed ja külgtahud on võrdsed võrdhaarsed kolmnurgad. Samuti on võrdsed ka külgtahkude kõrgused ehk püramiidi apoteemid ( $OK$  joonisel 213).



Joonis 213.

### § 257.

**Silinder.** Kui laseme ristkülikul pöörelda selle ühe külje ümber (joonis 214), siis tekib keha, mida nimetatakse silindriks. Silinder on piiratud kolme pinnatükiga, nimelt kahe võrdse ja paralleelse ringiga ja ühe tükiga kõverast pinnast, mida nimetatakse silindriliseks pinnaks. Silindrit piiravad ringid on silindri põhjad ja silindri line pind on külgpind.



Joonis 214.

Sirglõiku, mille ümber toimub ristküliku pöörlemine, nimetatakse silindri teljeks ja sellega paralleelset ristküliku külge — silindri moodustajaks; ristküliku ülejäänud

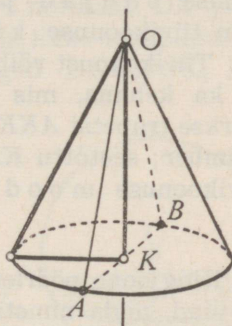
nud kaks külge on silindri põhjade raadiused. Silindri telg on seega tema põhjade keskpunkte ühendav sirglõik. Et see sirglõik on risti mõlema põhjaga, siis on ta ühtlasi ka silindri kõrguseks.

Kui silindrit lõigata tasapinnaga, millel asetseb silindri telg, siis tekib lõige, mida nimetatakse **telglõikeks**. Silindri telglõige on ristkülik, mille üks külg võrdub silindri põhja läbimõõduga ja teine külg — moodustajaga.

Kui silindrit lõigata põhjaga paralleelse tasapinnaga, siis tekib põhjaga võrdne ring.

### § 258.

**Koonus.** Täisnurkse kolmnurga pöörlemisel ühe kaateti ümber tekib keha, mida nimetatakse koonuseks (joonis 215). **Koonus on piiratud ühe ringiga ja ühe nn. koonilise pinnatükiga.** Neist esimene on koonuse põhja ja teine — koonuse külgpind. Sirglõik, mis ühendab koonuse tippu põhja keskpunktiga, on koonuse telg. Et viimane on risti põhjaga, siis on ta ka ühtlasi koonuse kõrguseks. Sirglõik, mis ühendab koonuse tippu põhja ringjoone mingi punktiga, on koonuse moodustaja. Täisnurkse kolmnurga pöörlemisel tekkiva koonuse moodustajad on võrdsed, sest nad võrduvad pöörleva kolmnurga hüpotenuusiga.



Joonis 215.

Kui koonust lõigata tasapinnaga, millel asetseb koonuse telg, siis lõikab see tasapind koonuse põhja mööda läbimõõtu ja koonuse külgpinda — mööda kaht moodustajat. Koonuse telglõige on seega võrdhaarne kolmnurk, mille aluseks on koonuse põhja läbimõõt ja haaraks — koonuse moodustaja ( $\triangle AOB$  joonisel 215).

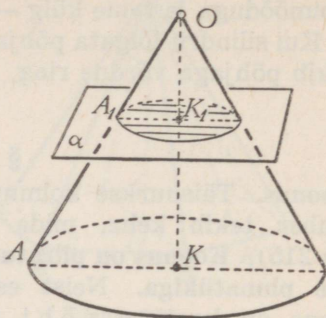
Koonuse lõikamisel põhjaga paralleelse tasapinnaga tekib ringikujuline lõige, sest kui  $OK$  ristub põhjaga (joo-

nis 216), siis ristub ta ka tasapinnaga  $\alpha$ , millest järeldub, et kolmnurga  $AKO$  pöörlemisel ümber  $OK$  jääb  $A_1K_1$  tasapinnale  $\alpha$  ja kujundab ringi.

Koonuse lõikamisel põhjaga paralleelse tasapinnaga tükeldub koonus kaheks kehaks; neist üks on **tüvikoonus** ja teine selle täienduskoonus.

Tüvikoonus on piiratud kolme pinnatükiga, nimelt kahe ringiga ja ühe koonilise pinnatükiga; esimesed kaks on tüvikoonuse põhjad ja kolmas on tüvikoonuse külgpind.

Tüvikoonust võib vaadelda ka kehana, mis tekib täisnurkse trapetsi  $AKK_1A_1$  (joonis 216) pöörlemisel külje  $KK_1$  ümber; seetõttu  $KK_1$  on tüvikoonuse telg ja  $AA_1$  on tüvikoonuse moodustaja.

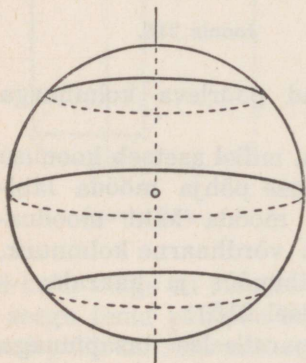


Joonis 216.

### § 259.

**Kera.** Ringjoone pöörlemisel selle läbimõõdu ümber tekib kõver pind, mida nimetatakse **sfääriliseks pinnaks** (joonis 217).

Seda pinda iseloomustab omadus, et tema kõik punktid asetsevad võrdsetel kaugustel ühest kindlast punktist, mida nimetatakse selle pinna keskpunktiks. Keha, mida piirab sfääriline pind, on sfäär ehk kera. Sirglõik, mis ühendab kaks kerapinna punkti, läbib keskpunkti, on kera läbimõõt ehk diameeter; keskpunkt tükeldab läbimõõdu kaheks raadiuseks.



Joonis 217.

Ühe ja sama kera raadiused on võrdsed ja samuti on läbimõõdud võrdsed.

Kui kera lõigata tasapinnaga, mis läbib kera keskpunkti, siis tekib ringikujuline lõige, sest selle lõike piirjoone kõik punktid asetsevad samal tasapinnal olevast kera keskpunktist võrdsetel kaugustel. Seda lõiget nimetatakse kera suurringiks; kera suurringi raadius võrdub kera raadiusega.

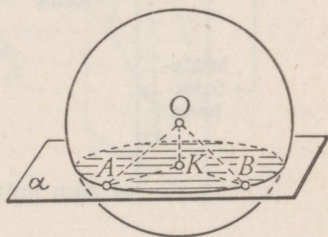
Tõestame, et kera iga lõige tasapinnaga on ring. Olgu kera lõigatud tasapinnaga  $\alpha$ , mille ühised punktid kera pinnaga olgu  $A, B, \dots$  (joonis 218). Näitame nüüd, et punktid  $A, B, \dots$  asetsevad ringjoonel. Selleks ehitame kera keskpunktist  $O$  lõike tasapinnale  $\alpha$  normaali  $OK$  ja ühendame punktid  $O$  ja  $K$  kera pinna ja lõike tasapinna ühiste punktidega  $A, B, \dots$ . Et kolmnurgad  $AOK, BOK, \dots$  on täisnurksed ( $\widehat{K} = 90^\circ$ ), ühe ühise kaatetiga ( $OK$ ) ja võrdsete hüpotenuusidega ( $AO = BO = \dots$ ), siis on ka nende teised kaatetid võrdsed:

$$AK = BK = \dots$$

Seega asetsevad punktid  $A, B, \dots$  ringjoonel, mille keskpunktiks on punkt  $K$ . Selle ringjoone raadius

$$r_1 = \sqrt{r^2 - p^2},$$

kus  $p = OK$  on lõike tasapinna kaugus kera keskpunktist ja  $r = AO$  on kera raadius.

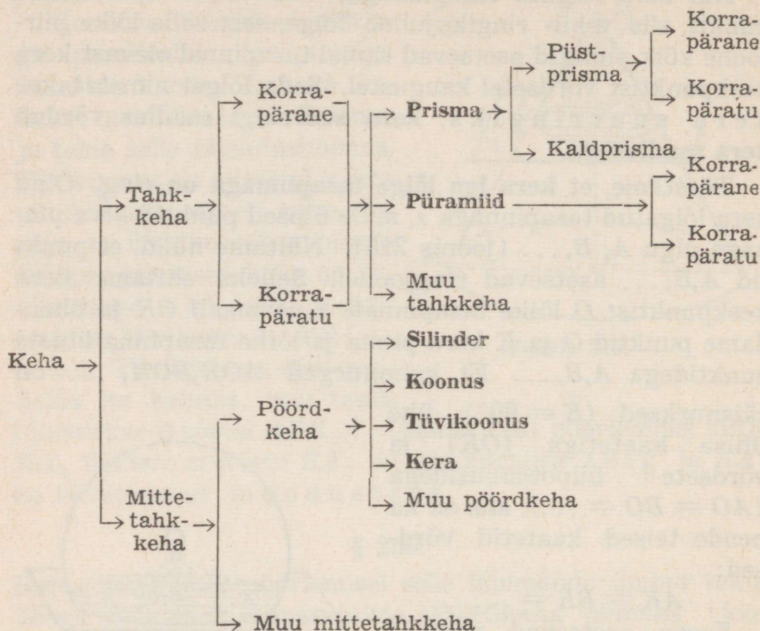


Joonis 218.

## § 260.

**Kokkuvõte kehade liigitelust.** Kolmes viimases §-is kirjeldatud kehad, nimelt silinder, koonus, tüvikoonus ja kera, tekivad ühe tasapinnalise kujundi pöörlemisel sirge ümber. Kõiki niisuguseid kehi nimetatakse pöördkehadeks. Viima-

sed moodustavad ühe tähtsama rühma mittetahkkehade hulgas. Korraldades kõik kirjeldatud kehad ühte skeemi, saaksime järgneva kokkuvõtte kehade liigitelust:

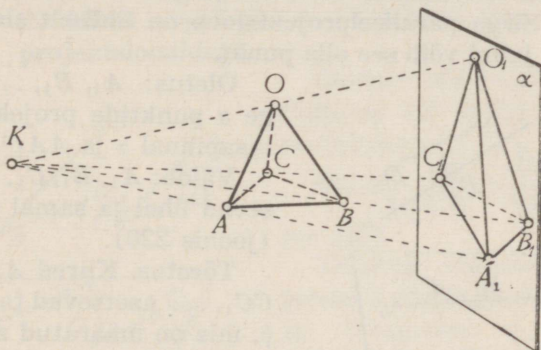


## II. Geomeetriliste kehade joonestamine.

### § 261.

**Tsentraalprojektsioon ja paralleelprojektsioon.** Tasapinnalise kujutise saamiseks kehast valgustame keha, näiteks, päikeskiirtega ja joonistame varju, mis tekib keha taha paigutatud tasapinnal. Saadud varjujoonis ongi keha kujutis tasapinnal; ta näitab keha kuju ja tema abil saab otsustada teisigi keha kohta käivaid geomeetrilisi küsimusi.

Keha varjujoonist nimetatakse harilikult keha **projektsiooniks** ja tasapinda, millel on saadud joonis — **projektsiooni tasapinnaks**. Kehade kujutamiseks kasutatakse kahe-suguseid projektsioone, nimelt tsentraalprojektsioone ja paralleelprojektsioone. **Tsentraalprojektsiooniks** nimetatakse keha varjujoonist sel juhul, kui varjutekitavad kiired ehk nn. projektivad kiired lähtuvad punktitaolisest valgusallikast. Joonis 219 kujutab kolmetahulise püramiidi tsentraalprojektsiooni tekkimist; sellel on punkt  $K$  projektsiooni keskpunkt,  $\alpha$  — projektsiooni tasapind,  $KA_1$ ,  $KB_1, \dots$  — projektivad kiired ja  $O_1A_1B_1C_1$  — püramiidi  $OABC$  tsentraalprojektsioon.



Joon. 219.

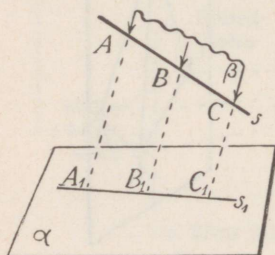
Kui projektsiooni keskpunkt  $K$  viia kaugemale projektsiooni tasapinnast, siis vähenevad projektivate kiirte vahelised nurgad ja need kiired lähenevad paralleelseisule. **Projektsiooni, mis saadakse keha valgustamisel paralleelsete kiirtega, nimetatakse paralleelprojektsiooniks**. Et Päike asetseb Maast kaugel, siis on päikesekiired peaaegu paralleelsed ja seega on nende poolt tekitatud varjud paralleelprojektsioonid. Vastandina viimaseile on meie silma võrkkiel tekkivad kujutised tsentraalprojektsioonid, sest valgustatud esemest vaatleja silma tulevad valguskiired

läbivad silma optilise keskpunkti. Samuti on ülesvõtted tsentraalprojektsioonid. Tsentraalprojektsioonis tehtud kujutisi nimetatakse sagedasti ka **perspektiivseteks kujutisteks**; see kujutamiseviis leiab rakendamist maalikunstis, sest ta võimaldab kujutada esemeid nii, nagu näeb meie silm. Kehade kujutamine paralleelprojektsioonis leiab rakendamist tehnikas ja teaduses, sest ta võimaldab kergesti keha mõõtude kindlakstegemist.

## § 262.

**Paralleelprojektsiooni põhiseadused.** Paralleelprojektsioone tasapinnal iseloomustavad kolm järgnevat teoreemi.

I. Sirge paralleelprojektsioon on üldiselt sirge; erijuhul võib see olla punkt.



Joon. 220.

Oletus:  $A_1, B_1, \dots$  on sirge  $s$  punktide projektsioonid tasapinnal  $\alpha$  ja  $AA_1 \parallel BB_1 \parallel \dots$

Väide:  $A_1, B_1, C_1, \dots$  asetsevad ühel ja samal sirgel  $s_1$  (joonis 220).

Tõestus. Kiired  $AA_1, BB_1, CC_1, \dots$  asetsevad tasapinnal  $\beta$ , mis on määratud sirgega  $s$  ja punktiga  $A_1$ ; järelikult asetsevad kiirte  $BB_1, CC_1, \dots$  ja tasapinna  $\alpha$  lõikepunktide  $B_1, C_1, \dots$  tasapindade  $\beta$  ja  $\alpha$

lõikejoonel  $s_1$ . Et kahe tasapinna lõikejoon on sirge, siis on sirge  $s$  projektsioon  $s_1$  sirgjoon.

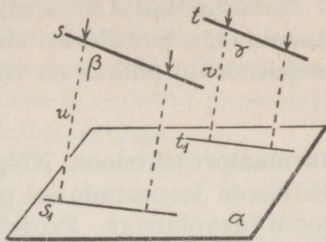
Kui sirge  $s$  on paralleelne projektivate kiirtega, siis selle sirge projektsioon on sirge  $s$  ja tasapinna  $\alpha$  lõikepunkt.

II. Rööbikute sirgete paralleelprojektsioonid on rööbikud sirged.

Oletus:  $s \parallel t$ ;  $s$  ja  $t$  paralleelprojektsioonid on vastavalt  $s_1$  ja  $t_1$ .

Väide:  $s_1 \parallel t_1$  (joonis 221)

Tõestus. Sirgeid  $s$  ja  $t$  projektivad kiired asetsevad tasapindadel  $\beta$  ja  $\gamma$ , mis on paralleelsed, sest kaks lõikuvat sirget  $s$  ja  $u$  tasapinnal  $\beta$  on paralleelsed kahe lõikuva sirgega  $t$  ja  $v$  tasapinnal  $\gamma$  (§ 241 ja § 243). Paralleelsete tasapindade  $\beta$  ja  $\gamma$  lõikamisel tasapinnaga  $\alpha$  tekivad paralleelsed lõikesirged  $s_1$  ja  $t_1$  (§ 242).



Joon. 221.

### III. Rööbikud sirglõigud on võrdelised oma paralleelprojektsioonidega.

Oletus:  $AB \parallel CD$ ;  $A_1B_1$  ja  $C_1D_1$  on  $AB$  ja  $CD$  paralleelprojektsioonid.

Väide:  $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1}$  (joonis 222).

Tõestus. Joonestame tasapinnal  $\beta$  sirglõigu  $AB_2 \parallel A_1B_1$  ja tasapinnal  $\gamma$  sirglõigu  $CD_2 \parallel C_1D_1$ . Et eelmise teoreemi (II) järgi  $A_1B_1 \parallel C_1D_1$ , siis on ka  $AB_2 \parallel CD_2$ .

Oletuse järgi on  $AB \parallel CD$ .

§ 246 järgi on siis  $\widehat{BAB_2} = \widehat{DCD_2}$ .

Samal viisil saab, et  $\widehat{ABB_2} = \widehat{CDD_2}$ .

Kolmn. I sarn. tunnuse järgi on  $\triangle ABB_2 \sim \triangle CDD_2$ . Et sarn. kolmn. küljed on võrdelised, siis on  $AB : AB_2 = CD : CD_2$ .

Et nelinurgad  $AB_2B_1A_1$  ja  $CD_2D_1C_1$  on rööpkülilikud, siis

$$\begin{cases} AB_2 = A_1B_1, \\ CD_2 = C_1D_1. \end{cases}$$

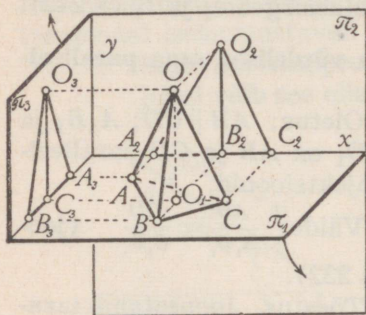
Asendamisel saab, et

$$AB : A_1B_1 = CD : C_1D_1.$$

Järeldus: kui  $AB \parallel \alpha$ , siis  $A_1B_1 = AB$ , s. t. projektsiooni-tasapinnaga paralleelse sirglõigu pikkus ja selle paralleelprojektsiooni pikkus on võrdsed.

### § 263.

**Normaalprojektsioon.** Kõige lihtsem on keha paralleelprojektsiooni joonestada sel puhul, kui kiired on risti projektsiooni tasapinnaga. Projektsiooni, mille tekitavad projektsioonitasapinnaga ristuvad kiired, nimetatakse rist- ehk normaalprojektsiooniks. Et keha ristprojektsioon ühele

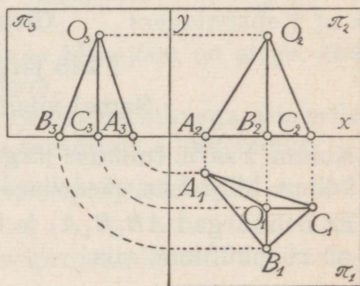


Joonis 223.

tasapinnale ei anna selget kujutlust kehast, siis projektitakse keha kahele, mõnikord ka kolmele, üksteise suhtes ristiseisvale tasapinnale. Harilikult võetakse esimeseks tasapinnaks rõhktasapind ( $\pi_1$  joonisel 223) ja teisteks tasapindadeks kaks ristuvat püsttasapinda ( $\pi_2$  ja  $\pi_3$  joonisel 223). Et kujutatav keha asetseb harilikult põhjaga tasapinnal  $\pi_1$ , siis nimetatakse sel-

leel saadud projektsiooni **põhijooniseks**; ülejäänud kaks projektsiooni on **püstjoonis** (tasapinnal  $\pi_2$ ) ja **küljjoonis** (tasapinnal  $\pi_3$ ). Joonisel 223 kujutatud püramiidi põhijoonis on  $\triangle ABC$ , püstjoonis on  $\triangle A_2C_2O_2$  ja küljjoonis on  $\triangle B_3A_3O_3$ .

Keha normaalprojektsioonide saamiseks ühel tasapinnal pöörame tasapinna  $\pi_1$  ümber projektsioonitelje  $x$  noolega näidatud suunas  $90^\circ$  võrra ja tasapinna  $\pi_3$  ümber



Joonis 224.

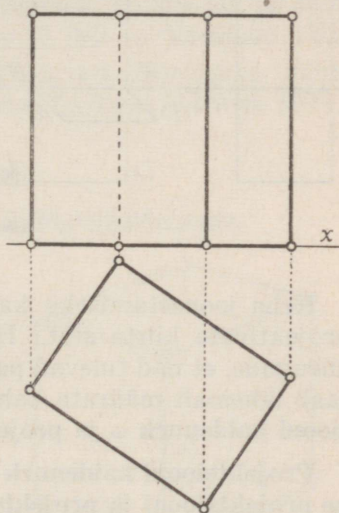
projektsioonitelje  $y$  noolega näidatud suunas samuti  $90^\circ$  võrra. Nii tehes oleme kõik kolm projektsiooni saanud püsttasapinnal  $\pi_2$ , nagu näha joonisel 224. Ühe ja sama punkti projektsioonid on seejuures ühendatud punktiirjoonega; viimased on risti projektsiooniteljega.

### § 264.

**Keha joonestamine normaalprojektsioonis.** Ülesanne: risttahukas, mille mõõted on 21 cm, 28 cm ja 31 cm, asetseb nii, et kõige väiksem tahk on rõhttasapinnal. Joonestada selle risttahuka põhi- ja püstjoonis, võttes risttahuka asend püsttasapinna suhtes vabalt.

Lahendus. Et joonis loomulikus suuruses jooniselehele ei mahu, siis joonestame mõõdus 1 : 10 (joonis 225). Joonestamist teostame järgmises järjekorras:

- 1) joonestame projektsioonitelje  $x$ ;
- 2) joonestame risttahuka põhijoonise, milleks on ristkülik mõõtudega 2,1 cm ja 2,8 cm;
- 3) põhijoonise tippudest joonestame projektsiooniteljele ristjooned;
- 4) joonestame risttahuka külgservade püstprojektsioonid pikkusega 3,1 cm ja ühendame nende otspunktid.

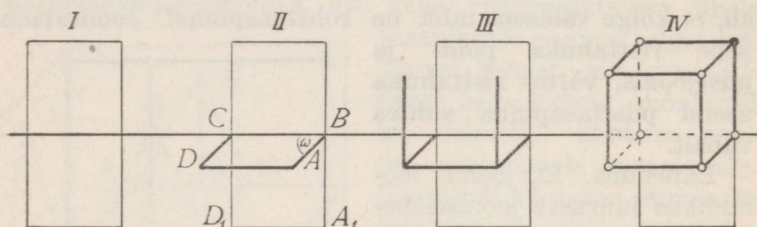


Joonis 225.

### § 265.

**Kaldprojektsioon.** Keha normaalprojektsiooni järgi on raske saada küllalt selget kujutlust kehast ja seepärast tar-

vitatakse keha kujutamiseks sageli kaldprojektsiooni, s. t. niisugust paralleelprojektsiooni, mille puhul projektivad kiired ei ole risti projektsioonitasapinnaga. Selle projektsiooni näitena vaatleme joonist 226, mis kujutab ühe tahuga vastu püsttasapinda asetseva kuubi kaldprojektsiooni joonestamise käiku. Selles joonises I kujutab kuupi normaalprojektsioonis (põhi- ja püstjoonis) ning IV sama kuupi kaldprojektsioonis; II ja III näitavad joonestamise üksikuid samme.



Joonis 226.

Keha joonestamiseks kaldprojektsioonis on vaja anda projektivate kiirte siht. Harilikult valitakse kiirte siht niisugune, et nad tulevad paremalt poolt ülevalt. Seda sihti saab lähemalt määrata kahe andmega, milleks on projektsiooni kaldenurk  $\omega$  ja projektsiooni lühendustegur  $q$ .

Projektsiooni kaldenurk on püsttasapinnaga ristuva sirge projektsiooni ja projektsioonitelje vaheline nurk. Joonisel 226 (II) on see nurk  $45^\circ$ , sest püsttasapinnaga ristuva serva projektsioon  $AB$  moodustab projektsiooniteljega nurga  $\omega = 45^\circ$ .

Projektsiooni lühendustegur on arv, millega tuleb korrutada püsttasapinnaga ristuva sirglõigu pikkust, et saada selle sirglõigu projektsiooni pikkust. Joonisel 226 on see tegur  $q = \frac{1}{2}$ , sest  $AB = \frac{1}{2} \cdot A_1B_1$ ;  $A_1B_1$  pikkus võrdub serva tõelise pikkusega.

Projektsiooni kaldenurk  $\omega$  ja lühendustegur  $q$  valitakse nii, et joonestamine oleks võimalikult lihtne; hari-likult  $\omega$  on kas  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  või  $90^\circ$ , ja  $q$  on kas  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$  või  $\frac{1}{4}$ .

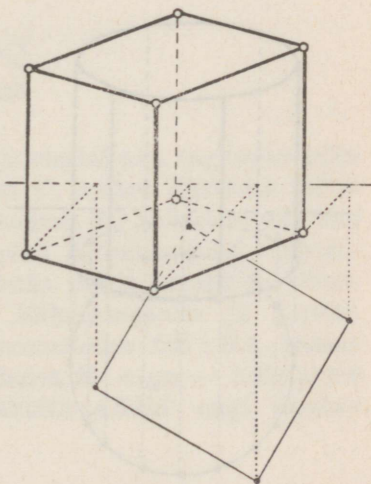
Kokkuvõttes toimub joonisel 226 kujutatud kuubi joonestamine järgmiselt:

- 1) Joonestatakse kuubi põhi- ja püstjoonis (I);
- 2) vastavalt antud  $\omega$  ja  $q$  suurustele joonestatakse kuubi põhja kaldprojektsioon  $ABCD$  (II);
- 3) joonestatakse kuubi külgservade projektsioonid, mis on üksteisega paralleelsed (§ 262-II) ja esinevad loomulikus pikkuses (§ 262 — järeldus) (III);
- 4) joonestatakse ülejäänud servad, kusjuures nähtamatud servad joonestatakse katkeva joonega (IV).

## § 266.

Näiteid kehade joonestamisest kaldprojektsioonis.

I. Joonestada kuup servaga 25 mm, võttes põhijoonise asend projektsioonitelje suhtes vabalt ( $\omega = 45^\circ$ ,  $q = \frac{1}{2}$ ). Lahenduseks mõtleme kuubi põhja igast tipust ristlõigud püsttasapinnani (joonis 227). Et põhijoonises need ristlõigud esinevad loomulikus pikkuses, siis saab antud  $\omega$  ja  $q$  järgi joonestada nende ristlõikude kaldprojektsioone. Viimaste otspunktide ühendamisel saame kuubi põhja kaldprojektsiooni. Selle tippudest joonestame külgservad risti projektsiooniteljega.



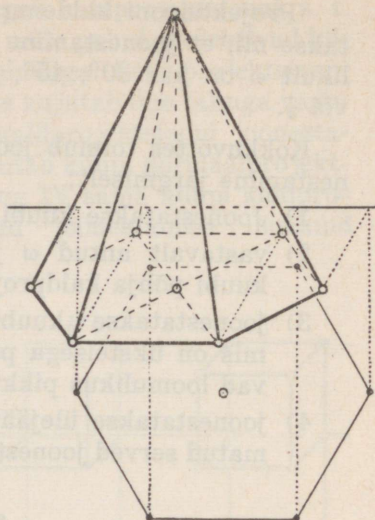
Joonis 227.

II. Joonestada korrapä-rane kuuetahuline püramiid põhiservaga 8 cm ja kõrgusega 15 cm ( $\omega = 60^\circ$ ;  $q = \frac{1}{2}$ ; asend — vabalt).

Eelmise ülesande eeskujul joonestame esiteks püsttasapinnal püramiidi põhja (mõõdus 1:4) ja selle järgi põhja kaldprojektsiooni. Viimase keskpunkti püstitame kõrguse ja ühendame püramiidi tipu põhja tippudega (joonis 228).

III. Joonestada silinder, mille põhja raadius on 1,5 m ja kõrgus on 2,7 m ( $\omega = 90^\circ$ ;  $q = \frac{1}{3}$ ).

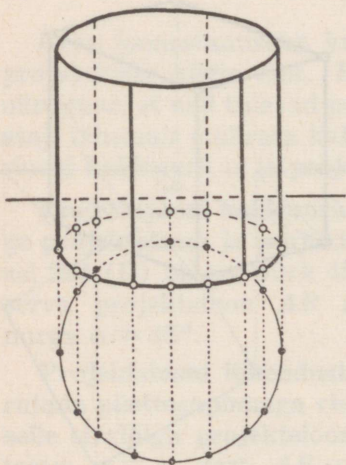
Silindri põhijoonis on ring-



Joonis 228.

joon. Selle kaldprojektsiooni joonestamiseks võtame ringjoonel küllalt tihedalt punkte ja leiame nende punktide kaldprojektsioonid. Viimased ühendame kõverjoonega, mis võimalikult hästi läbib kõiki leitud punkte. Selleks ühendamiseks on kasulik tarvitada kõverjoonlauda ehk lekaali.

Silindri ülemise põhja projektsiooni joonestamiseks joonestame küllaldase arvu moodustajaid ja ühendame nende otspunktid endisel viisil (joonis 229).

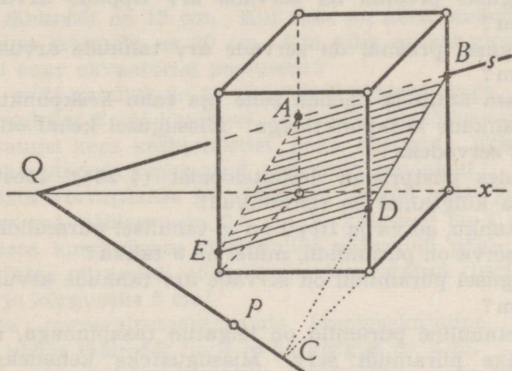


Joonis 229.

## § 267.

**Keha lõikamine tasapinnaga.** Ülesanne: antud on risttahukas kaldprojektsioonis; joonestada selle keha lõige tasapinnaga, millest on antud lõikejoon püsttasapinnaga ja üks punkt risttahuka põhja tasapinnal.

Olgu  $s$  lõiketasapinna ja püsttasapinna lõikejoon ja  $P$  lõiketasapinna üks punkt põhitasapinnal (joonis 230). Et risttahuka tagumine tahk on vastu püsttasapinda, siis



Joonis 230.

sirglõik  $AB$  on lõiketasapinna ja risttahuka tagumise tahu lõikejoon. Edasi leiame punkti  $C$ , milles lõikuvad lõiketasapinna ja põhitasapinna lõikejoon  $PQ$  ja risttahuka üks põhiserv. Selles punktis lõikuvad lõiketasapind, parempoolse tahu tasapind ja risttahuka põhja tasapind. Ühendades punktid  $B$  ja  $C$ , saame lõiketasapinna ja parempoolse tahu lõikejoone  $BD$ . Joonestades  $DE \parallel BA$ , saame lõikejoone esitahuga, ja ühendades  $E$   $A$ -ga — lõikejoone vasakpoolse külgtahuga. Rööpkülik  $ABDE$  ongi otsitav lõige.

### III. Ülesandeid.

331. Joonista kolm viistahku: püramiid, prisma ja keha, mis tekib prisma lõikamisel põhjaga mitteparalleelse tasapinnaga. Mitu serva ja mitu tippu on igal joonistatud kehal?
332. Mitu tahku, serva ja tippu on  $n$ -tahulisel prismal?
333. Mitu serva on prismal, millel on  $2t$  tippu?
334. Mitu tahku on prismal, millel on  $3s$  serva?
335. Tõesta, et prisma lõikamisel tasapinnaga, mis on paralleelne külgservaga, tekivad külgtahkudel lõikejooned, mis on paralleelsed külgservaga!
336. Missugusel prismal on servade arv tippude arvust 7 võrra suurem?
337. Missugusel prismal on servade arv tahkude arvust 16 võrra suurem?
338. Joonista kuup ja ühenda selle iga tahu keskpunkt selle tahu lähistahkude keskpunktidega! Missugusel kehal on need sirg-lõigud servadeks?
339. Lähtudes püstprisma definitsioonist (§ 254), tõesta, et püstprisma külgtahud on ristkülikud!
340. Mitu tahku, serva ja tippu on  $n$ -tahulisel püramiidil?
341. Mitu serva on püramiidil, millel on 9 tahku?
342. Missugusel püramiidil on servade arv tahkude arvust 10 võrra suurem?
343. Kolmetahuline püramiid on lõigatud tasapinnaga, millel asetseb üks püramiidi serv. Missugusteks kehadeks tükeldub püramiid?
344. Kolmetahuline prisma on lõigatud tasapinnaga, mis on määratud ühe põhiservaga ja mitte samal tahul asetseva tipuga. Missugusteks kehadeks tükeldub prisma?
345. Neljatahuline püramiid, mille põhiservad on 4,5 cm, 3,5 cm, 3,2 cm ja 5,4 cm, on lõigatud põhjaga paralleelse tasapinnaga nii, et põhja ja lõiketasapinna vahele jäänud külgservade lõigud on  $\frac{1}{2}$  külgservadest. Kui pikad on lõike küljed?
346. Kui pikk on korrapärase neljatahulise püramiidi apoteem, kui püramiidi kõrgus on 15 cm ja põhiserv on 16 cm?
347. Korrapärase neljatahulise püramiidi külgserv on 9 dm ja põhiserv on 8 dm. Kui kõrge on püramiid?
348. Korrapärase kuetahulise püramiidi kõrgus on 1,5 m ja põhiserv on 1,2 m. Leia apoteemi ja külgserva pikkused?
349. Kus asetsevad ruumis need punktid, mis on antud sirgest, näiteks, 10 cm kaugusel?
350. Kuidas asetsevad need sirged, mis läbivad tasapinnal või väl-

jaspool seda antud punkti ja moodustavad antud tasapinnaga võrdsed nurgad, näiteks  $30^\circ$ ?

351. Kui kõrge on koonus, mille moodustaja on 9,7 cm ja põhja raadius on 6,5 cm?
352. Koonuse kõrgus on  $x$  cm ja põhja raadius  $2x$  cm. Kui suur on telglõike ümbermõõt?
353. Tüvikoonuse põhjade läbimõõdud on 15 cm ja 10 cm, kõrgus on 6 cm. Kui pikk on moodustaja?
354. Tüvikoonuse moodustaja on 7,4 cm, kõrgus 7 cm ja suurema põhja raadius 6 cm. Kui pikk on väiksema põhja raadius?
355. Kus asetsevad ruumis need punktid, milledest antud sirglõik paistab täisnurgas?
356. Kera läbimõõt on 12 cm. Kui suur on kera ümbermõõt?
357. Gloobuse läbimõõt on 20 cm. Kui pikk on sel gloobusel meridiaani kaar ekvaatorist pooluseni?
358. Kera, mille raadius on 15 cm, lõigati tasapinnaga, mis asetseb keskpunktist 8 cm kaugusel. Kui pikk on lõike raadius?
359. Kui kaugel kera keskpunktist peab asetsema lõike tasapind, et lõike pindala oleks pool suurringi pindalast?
360. Valmista korrapärase kuuetaahulise prisma põhi- ja püstjoonis, kui prisma põhiserv on 2,5 cm ja külgserv on 4 cm!
361. Valmista korrapärase viietahulise püramiidi põhi- ja püstjoonis, võttes püramiidi põhja ümberjoonestatud ringi raadiuseks 2 cm ja kõrguseks 5 cm!
362. Kujuta normaalprojektsioonis koonusekujuline kartulikuhi, mille põhja läbimõõt on 4 m ja kõrgus on 2 m!
363. Kujuta normaalprojektsioonis tüvikoonus, mille põhjade läbimõõdud on 6 cm ja 4 cm ning kõrgus on 3,5 cm!
364. Kujuta kaldprojektsioonis põhitasapinnal asetsev ruut küljega 4 cm, võttes  $\omega = 45^\circ$  ja  $q = \frac{1}{2}!$
365. Kujuta kaldprojektsioonis põhitasapinnal asetsev korrapärane kuusnurk küljega 3 cm, võttes  $\omega = 45^\circ$  ja  $q = \frac{1}{2}!$
366. Kujuta kaldprojektsioonis kuup servaga 3,5 cm, kui kuup asetseb nii, et põhja diagonaal on risti püsttasapinnaga, võttes  $\omega = 45^\circ$  ja  $q = \frac{1}{2}!$
367. Kujuta kaldprojektsioonis korrapärane neljatahuline püramiidi, mille põhiserv on 5 cm ja kõrgus 4 cm, võttes  $\omega = 60^\circ$  ja  $q = \frac{1}{3}!$
368. Kujuta kaldprojektsioonis põhitasapinnal asetsev ringjoon raadiusega 3 cm, võttes  $\omega = 60^\circ$  ja  $q = \frac{1}{2}!$
369. Kujuta kaldprojektsioonis silinder, mille põhja raadius on 3 cm ja kõrgus on 5 cm, võttes  $\omega = 90^\circ$  ja  $q = \frac{1}{2}!$
370. Kujuta kaldprojektsioonis koonus, mille põhja raadius on 25 cm ja kõrgus on 45 cm, võttes  $\omega = 90^\circ$  ja  $q = \frac{1}{2}!$

371. Risttahukal, mille põhiservad on 3,4 dm ja 5 dm, on pealmine osa tasapinnaga nii ära lõigatud, et ülejäänud keha kolm külgserva on 2 dm, 2,5 dm ja 3 dm. Kujuta ülejäänud keha kaldprojektsioonis, võttes  $\omega$  ja  $q$  vabalt!
372. Joonesta kaldprojektsioonis vabalt kuup ja lõika see tasapinnaga, millest on antud lõikejooned püst- ja põhitasapinnaga!
373. Korrapärane neljatahuline püramiid põhiservaga 15 cm ja kõrgusega 18 cm, on lõigatud põhjaga paralleelse tasapinnaga, mis poolitab kõrguse. Joonesta saadud tüvipüramiidi kaldprojektsioon, võttes  $\omega = 45^\circ$  ja  $q = \frac{1}{2}$ !

### 3. osa.

## KEHA PINDALA JA RUUMALA.

### I. Tahkkeha pindala ja ruumala.

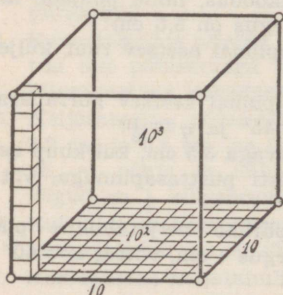
#### § 268.

**Ruumalaühikud.** Et võrrelda kahe mistahes keha ruumala, selleks on vaja mõõta nende kehade ruumalaid ja võrrelda saadud mõõtarve. Mõõta keha ruumala tähendab

leida, mitu korda mõõdetav ruumala on suurem ruumalaühikuks võetud ruumalast, või missuguse osa ruumalaühikust ta moodustab.

Ruumalaühikuks tarvita- takse niisuguste kuupide ruumalaid, mille servade pikkusteks on pikkusühikud. Nii on kuupmeeter ( $m^3$ ) niisuguse kuubi ruumala, mille serva pikkus on 1 m ja lii-

ter (l) ehk  $dm^3$  — kuubi ruumala, mille serva pikkus on 1 dm. Kui üks pikkusühik on teisest 10 korda suurem, siis vastav ruumalaühik on teisest ruumalaühikust  $10^3 = 1\,000$



Joonis 231.

korda suurem, nagu selgub suurema kuubi tükeldamisel väiksemateks (joonis 231); seega:

$$\begin{aligned} 1 \text{ m}^3 &= 1\,000 \text{ dm}^3 \\ 1 \text{ dm}^3 &= 1\,000 \text{ cm}^3 \\ 1 \text{ cm}^3 &= 1\,000 \text{ mm}^3 \end{aligned}$$

### § 269.

**Risttahuka ruumala** arvutamise eeskirja väljendab teoreem:

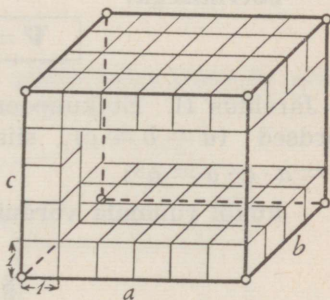
**risttahuka ruumala võrdub tema kolme lähisserva korrutisega.**

Oletus: risttahuka kolme lähisserva pikkused on  $a$  cm,  $b$  cm ja  $c$  cm.

Väide: risttahuka ruumala  $V = abc$  cm<sup>3</sup>.

Tõestame teoreemi neil juhtudel, kus 1)  $a$ ,  $b$  ja  $c$  on täisarvud ja 2)  $a$ ,  $b$  ja  $c$  on kümnendmurrud.

1) Kui  $a$ ,  $b$  ja  $c$  on täisarvud, näiteks  $a = 6$ ,  $b = 4$  ja  $c = 5$  (joonis 232), siis on võimalik risttahukat tükeldada kuupideks servaga 1 cm. Et tükeldamisel tekkivas röhkhis on niisuguseid kuupe  $a \cdot b$  ja neid kihte on üldse  $c$ , siis antud risttahukas tükeldub  $abc$  kuubiks servaga 1 cm. Seega on antud risttahuka ruumala  $V = abc$  cm<sup>3</sup>.



Joonis 232.

2) Kui  $a$ ,  $b$  ja  $c$  on murdarvud, näiteks  $a = 6,5$ ,  $b = 4,8$ ,  $c = 5,3$ , siis on võimalik leida niisugune pikkusühik, milles servade pikkused väljenduvad täisarvudes. Antud juhul

on uueks ühikuks mm ja servade pikkused uutes ühikutes on  $a_1 = 65$  mm,  $b_1 = 48$  mm ja  $c_1 = 53$  mm. Vastavalt 1. juhule on risttahuka ruumala  $V_1 = a_1 b_1 c_1$  mm<sup>3</sup>, mille avaldamisel cm<sup>3</sup>-es saab, et  $V = \frac{V_1}{1000} = \frac{a_1 b_1 c_1}{1000} = \frac{a_1}{10} \cdot \frac{b_1}{10} \cdot \frac{c_1}{10} = a \cdot b \cdot c$ . Seega on ka sel puhul ruumala,  $V = abc$  cm<sup>3</sup>.

Märkus. Kui risttahuka servade pikkused väljenduvad harilikudes murdudes, siis on teoreem tõestatav 2. juhu eeskujul; kui servade pikkused väljenduvad irratsionaalarvudes, siis on teoreem õige ükskõik kui täpsete lähisväärtuste korral, mistõttu ta loetakse õigeks ka sel juhul, kui servad on irratsionaalsed.

Järeldus I. Risttahuka kahe lähisserva korrutist võib nimetada risttahuka põhja pindalaks  $S$ , sest risttahukal võib iga tahu võtta põhjaks; kolmas serv on siis risttahuka kõrgus  $h$ . Seda arvestades võib öelda, et

risttahuka ruumala võrdub põhja pindala ja kõrguse korrutisega:

$$V = S \cdot h.$$

Järeldus II. Et kuup on risttahukas, mille servad on võrdsed ( $a = b = c$ ), siis võib öelda, et kuubil on  $V = a \cdot a \cdot a = a^3$ :

kuubi ruumala võrdub tema serva kuubiga.

## § 270.

**Risttahuka tükeldamine.** Kui risttahukat lõigata tema diagonaaltsापिनागा (*AEGC* joonisel 233), siis ta tükeldub kaheks kolmetahuliseks püstprismaks, mille põhjadeks on võrdsed täisnurksed kolmnurgad. Need kaks kolmetahulist püstprismat on võrdsed, s. t. neid saab nii teineteise sisse paigutada, et nende vastavad tipud, servad

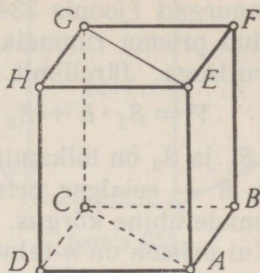
ja tahud ühtuvad. Sellest järeldub, et need prismad on ruumvõrdsed, s. t. võrdsete ruumaladega. Seega

**diagonaalatasapind tükeldab risttahuka kaheks ruumvõrdseks prismaks.**

Seda asjaolu saab kasutada kolmetahulise prisma ruumala arvutamiseks juhul, kui põhjaks on täisnurkne kolmnurk. Olgu  $ACDEGH$  niisugune prisma (joonis 233) põhja pindalaga  $S$  ja kõrgusega  $h$ . Selle prisma ruumala

$$V = S \cdot h,$$

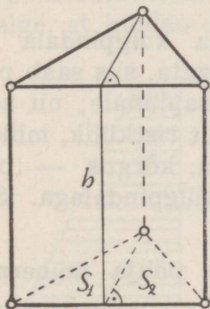
sest ühendades antud prisma teise samasuguse prismaga  $ABCEFG$ , saame risttahuka, mille põhja pindala on  $2S$ , kõrgus  $h$  ja ruumala —  $2S \cdot h$ ; järelikult on antud kolmetahulise prisma ruumala  $V = \frac{2S \cdot h}{2} = S \cdot h$ .



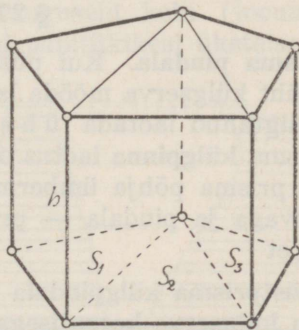
Joonis 233.

## § 271.

**Püstprisma ruumala. Teoreem: püstprisma ruumala võrdub põhja pindala ja kõrguse korrutisega.**



Joonis 234.



Joonis 235.

Tõestame teoreemi esiteks kolmetahulise püstprisma kohta ja siis iga püstprisma kohta.

Kolmetahulise püstprisma saab lõigata kaheks kolmetahuliseks püstprismaks, mille põhjadeks on täisnurksed kolmnurgad (joonis 234). Eelmise §-i järgi on kummagi saadud prisma ruumala võrdne põhja pindala ja kõrguse korrutisega. Järelikult on esialgse prisma ruumala

$$V = S_1 \cdot h + S_2 \cdot h = (S_1 + S_2) \cdot h = S \cdot h,$$

kus  $S_1$  ja  $S_2$  on lõikamisel saadud prismade põhjade pindalad,  $S$  — esialgse prisma põhja pindala ja  $h$  — nende prismade ühine kõrgus.

Kui prisma on  $n$ -tahuline ( $n > 3$ ), siis joonisel 235 näidatud viisil on võimalik prismat tükeldada kolmetahulisteks prismadeks. Olgu viimaste põhjade pindalad  $S_1, S_2, S_3, \dots$ ; nende kõrgus võrdub esialgse prisma kõrgusega  $h$ . Seega on esialgse prisma ruumala

$$V = S_1 \cdot h + S_2 \cdot h + S_3 \cdot h + \dots = (S_1 + S_2 + S_3 + \dots) \cdot h.$$

Et sulgudes olev avaldis võrdub esialgse prisma põhja pindalaga  $S$ , siis

$$V = S \cdot h,$$

mis oligi tarvis tõestada.

## § 272.

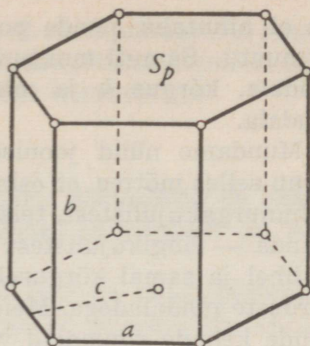
**Püstprisma pindala.** Kui püstprisma külgpindala pappudel üht külgserva mööda lahti lõigata, siis saab prisma kõik külgtahud laotada ühele tasapinnale; nii saadav püstprisma külpinna laotus on kujult ristkülik, mille alus võrdub prisma põhja ümbermõõduga, kõrgus — prisma külgservaga ja pindala — prisma külgpindalaga. Sellest selgub, et

**püstprisma külgpindala võrdub põhja ümbermõõdu ja külgserva korrutisega.**

Liites külgpindalaga põhja kahekordse pindala, saame

püstprisma pindala. Avaldame korrapärase prisma pindala. Olgu korrapärase  $n$ -tahulise prisma põhiserv  $a$  cm, külgserv  $b$  cm ja põhja apoteem  $c$  cm (joonis 236); siis selle prisma pindala

$$\begin{aligned} S &= S_k + 2 \cdot S_p = \\ &= na \cdot b + 2 \cdot \frac{na \cdot c}{2} = \\ &= na \cdot b + na \cdot c = \\ &= na (b + c). \end{aligned}$$



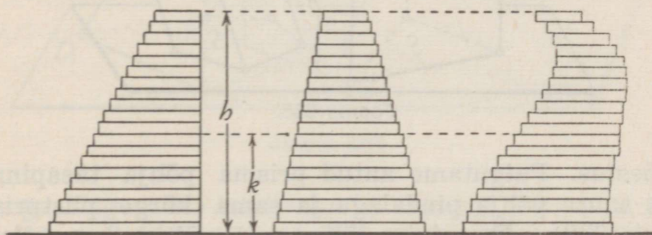
Joonis 236.

### § 273.

**Cavalieri aksioom.** Paljude kehade ruumalade võrdlemist ja ruumala valemite tuletamist on kõige kergem teostada nn. Cavalieri aksioomi abil, mida võib sõnastada järgmiselt:

**kaks keha on ruumvõrdsed, kui nende põhjade pindalad on võrdsed, kõrgused on võrdsed ja ühel ja samal kõrgusel tehtud põhjaga paralleelsete lõigete pindalad on võrdsed.**

Selle aksioomī mõistmiseks lõikame virna papitükikesi, mis järk-järgult väiksemaks muutuvad, ja moodustame neist papitükikestest mitmesuguseid kehi (joonis 237). On selge, et kuidas me neid papitükikesi üksteise suhtes



Joonis 237.

ka ei nihutaks, nende poolt moodustatud keha ruumala ei muutu. Samuti muutumatuks jääb nende kehade põhja pindala, kõrgus  $h$  ja mistahes kõrgusel  $k$  tehtud lõike pindala.

Muudame nüüd joonisel 237 kujutatud papitükikeste virnu selles mõttes, et esimese virna moodustame, näiteks, kolmnurgakujulistest, teise — nelinurgakujulistest ja kolmanda — ringikujulistest papitükikestest, kuid ikkagi nii, et ühel ja samal kõrgusel  $k$  asetsevad papitükikesed on võrdsete pindaladega. Meie kujutluse järgi on ka sel juhul nende kehade ruumalad võrdsed ja seda asjaolu väljendabki Cavalieri aksiom.

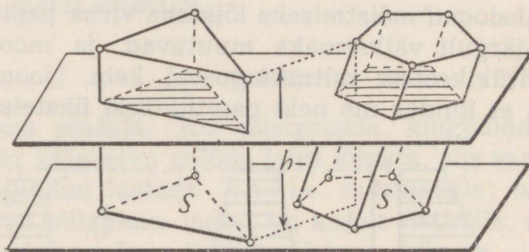
### § 274.

**Prisma ruumala.** Cavalieri aktsiooni abil saab tõestada teoreemi

**iga prisma ruumala võrdub põhja pindala ja kõrguse korrutisega.**

Oletus: prisma põhja pindala on  $S$  cm<sup>2</sup> ja kõrgus on  $h$  cm.

Väide: prisma ruumala  $V = S \cdot h$  cm<sup>3</sup>.



Joonis 238.

Tõestus. Paigutame antud prisma põhja tasapinnale sama suure põhja pindalaga ja sama kõrge püstprisma (joonis 238). Et prisma lõikamisel põhjaga paralleelse tasapinnaga tekib põhjaga võrdne hulknurk, siis võib

Cavalieri aktsiooni põhjal öelda, et need prismad on ruumvõrdsed. Sellest jäeldub, et ka kaldprisma ruumala võrdub tema põhja pindala ja kõrguse korrutisega.

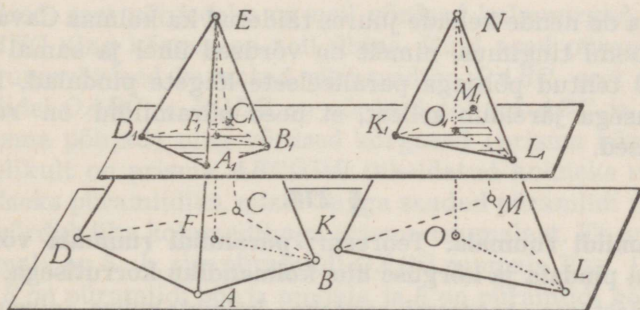
### § 275.

**Ruumvõrdsed püramiidid.** Teoreem: püramiidid on ruumvõrdsed, kui nende põhjade pindalad on võrdsed ja kõrgused on võrdsed.

Oletus:  $S = P$ ;  $EF = NO$ ;  $S$  ja  $P$  on kahe püramiidi põhjade pindalad,  $EF$  ja  $NO$  on nende püramiidide kõrgused (joonis 239).

Väide: püramiid  $EABCD$  on ruumvõrdne püramiidiga  $NKLM$ .

Tõestus. Cavalieri aksiom seab kolm tingimust, mis peavad olema täidetud, et kehad oleksid ruumvõrdsed. Neist tingimusest on oletuse järgi kaks täidetud. Näitame, et on täidetud ka kolmas tingimus. Selleks paigutame püramiidid põhjadega ühele ja samale tasapinnale ja lõikame neid tasapinnaga, mis on paralleelne põhjade tasa-



Joonis 239.

pinnaga. Olgu selle tasapinna ja esimese püramiidi lõigeknelinurk  $A_1B_1C_1D_1$  (joonis 239). Et see lõige on põhjaga sarnane nelinurk (§ 255), siis on nende pindalade jagatis

võrdne nende vastavate külgede jagatise ruuduga (§ 214). Tähistanud esimese püramiidi põhja pindala tähega  $S$  ja lõike pindala tähega  $S_1$ , võib kirjutada

$$\frac{S_1}{S} = \left(\frac{A_1 B_1}{AB}\right)^2 = \left(\frac{B_1 E}{BE}\right)^2 = \left(\frac{F_1 E}{FE}\right)^2,$$

sest  $\triangle A_1 B_1 E \sim \triangle ABE$  ja  $\triangle B_1 E F_1 \sim \triangle BEF$  (joonis 239). Kui teise püramiidi põhja pindala on  $P$  ja lõike pindala on  $P_1$ , siis samuti on

$$\frac{P_1}{P} = \left(\frac{O_1 N}{ON}\right)^2.$$

Neist tulemustest järeldeb, et

$$S_1 = \left(\frac{F_1 E}{FE}\right)^2 \cdot S \quad \text{ja} \quad P_1 = \left(\frac{O_1 N}{ON}\right)^2 \cdot P.$$

Et oletuse järgi on  $S = P$  ja  $FE = ON$  ning tõestuse järgi on  $F_1 E = O_1 N$ , siis on ka

$$S_1 = P_1.$$

Seega on nende kehade juures täidetud ka kolmas Cavalieri aksioomi tingimus, nimelt on võrdsed ühel ja samal kõrgusel tehtud põhjaga paralleelsete lõigete pindalad. Koos oletusega järeldeb sellest, et need püramiidid on ruumvõrdsed.

### § 276.

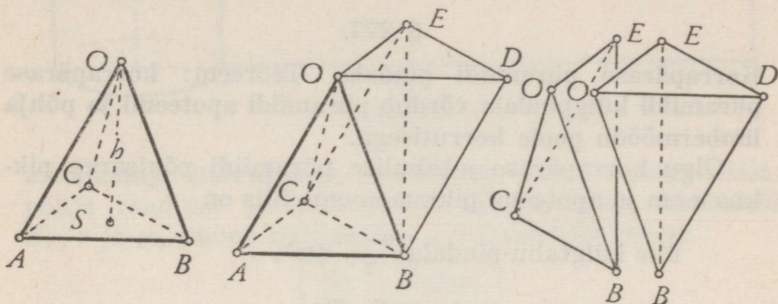
**Püramiidi ruumala.** Teoreem: püramiidi ruumala võrdub põhja pindala ja kõrguse ühe kolmandiku korrutisega.

Tõestame teoreemi esiteks kolmetahulise püramiidi kohta ja siis mistahes püramiidi kohta.

Olgu püramiidi  $OABC$  põhja  $ABC$  pindala  $S$  ja püramiidi kõrgus  $h$  (joonis 240). Tõestame, et selle püramiidi ruumala  $V = \frac{1}{3} S \cdot h$ .

Tõestuseks kasutame kolmetahulist prisma  $ABCODE$ ,

millel on püramiidiga ühine põhi  $ABC$  ja üks ühine külgserv  $AO$ , järelikult ka ühine kõrgus  $h$ . Kui sellest prismast eraldada püramiid  $OABC$ , siis jääb järele neljatahuline püramiid, mille tipp on  $O$  ja põhi on  $BDEC$ . Lõikame selle



Joonis 240.

neljatahulise püramiidi tasapinnaga  $OBE$  kaheks kolmetahuliseks püramiidiks  $OBDE$  ja  $OBEC$ . Viimased on ruumvõrdsed, sest põhjadeks on neil võrdsed kolmnurgad  $BDE$  ja  $BEC$  ning kõrgus on neil ühine. Kuid need püramiidid on ruumvõrdsed ka antud püramiidiga  $OABC$ , sest püramiididel  $OABC$  ja  $BODE$  on võrdsed põhjad  $ABC$  ja  $ODE$  (prisma põhjad) ning võrdsed kõrgused (prisma kõrgus). Järelikult on prisma  $ABCODE$  tükeldatud kolmeks ruumvõrdseks püramiidiks, mistõttu iga saadud püramiidi ruumala võrdub ühe kolmandikuga prisma ruumalast. Et prisma ruumala on  $S \cdot h$ , siis püramiidi  $OABC$  ruumala  $V = \frac{1}{3} S \cdot h$ , kus  $S$  on püramiidi põhja pindala ja  $h$  on püramiidi kõrgus.

Olgu nüüd mistahes püramiidi põhja pindala  $S$  ja kõrgus  $h$ . Näitame, et ka sel juhul on  $V = \frac{1}{3} S \cdot h$ . Selleks kujutleme antud püramiidi kõrval teist püramiidi, nimelt kolmetahulist, mille põhja pindala on samuti  $S$  ja kõrgus  $h$  (joonis 239). Nagu tõestasime, on viimase ruumala

$V_1 = \frac{1}{3} S \cdot h$ . Kuid Cavalieri aksioomi järgi on need püramiidid ruumvõrdsed (§ 275), järelikult on ka

$$\mathbf{V = \frac{1}{3} S \cdot h.}$$

### § 277.

**Korrapärase püramiidi pindala.** Teoreem: korrapärase püramiidi külgpindala võrdub püramiidi apoteemi ja põhja übermõõdu poole korrutisega.

Olgu korrapärase  $n$ -tahulise püramiidi põhiserva pikkus  $a$  cm ja apoteemi pikkus  $m$  cm. Siis on

$$\text{ühe külgtahu pindala } \frac{a \cdot m}{2} \text{ cm}^2,$$

$$n \text{ külgtahu pindala } n \cdot \frac{a \cdot m}{2} = \frac{1}{2} na \cdot m \text{ cm}^2.$$

Tähistades püramiidi põhja übermõõdu  $na$  sümboliga  $2p$  ja külgpindala sümboliga  $S_k$ , saab

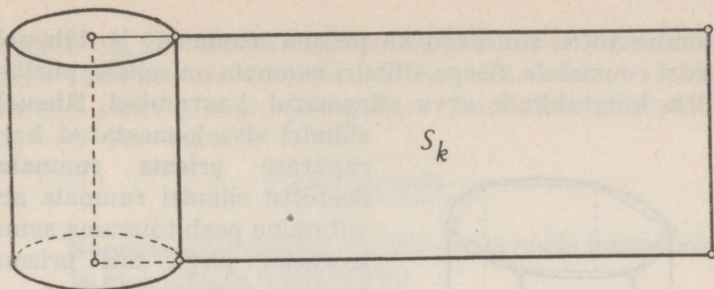
$$S_k = \frac{1}{2} \cdot 2p \cdot m = p \cdot m,$$

mis oligi tarvis tõestada. Liites püramiidi külgpindalaga selle püramiidi põhja pindala  $S_p$ , saame püramiidi pindala  $S = S_k + S_p$ .

## II. Pöördkeha pindala ja ruumala.

### § 278.

**Silindri pinnalaotus ja pindala.** Valmistame paberist silindri külpinna mudeli, lõikame selle üht moodustajat mööda lahti ja laotame silindri külpinna tasapinnale. Saadud ristkülik on silindri külpinna laotus ja selle pindala võrdub silindri külgpindalaga. Et selle ristküliku alus võrdub silindri põhja übermõõduga ja kõrgus võrdub moodustajaga, siis silindri külgpindala võrdub põhja übermõõdu ja



Joonis 241.

**moodustaja korrutisega.** Tarvitades silindri külgpindala, põhja raadiuse ja moodustaja tähistamiseks sümboleid  $S_k$ ,  $r$  ja  $m$ , saame külgpindala arvutamiseks valemi

$$S_k = 2\pi r m.$$

Liites külgpindalaga põhjade pindalad, saame silindri pindala

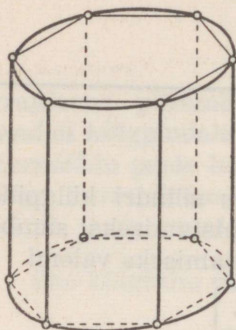
$$S = S_k + 2 \cdot S_p = 2\pi r m + 2\pi r^2 = 2\pi r (m + r).$$

### § 279.

**Silindri ruumala.** Joonestame silindri põhja sisse mingi korrapärase hulknurga, näiteks korrapärase kuusnurga, ja ehitame korrapärase kuuetaahulise prisma, millele see kuusnurk on põhjaks ja mille kõrgus võrdub silindri kõrgusega (joonis 242). Seda prismat nimetatakse **silindri sissejoonestatud prismaks**. Lähtudes silindri põhja ümber joonestatud hulknurgast, saab samalaadiliselt ehitada silindri ümberjoonestatud prismat.

Joonestame silindri sisse peale korrapärase 6-tahulise prisma veel korrapäraseid 12-, 24-, 48-tahulised prismad jne., ehk teisiti: laseme silindri sissejoonestatud korrapärase 6-tahulise prisma külgtahkude arvu piiramatult kahekordseks muutuda. Külgtahkude arvu piiramatul kasvamisel prisma põhja pindala suureneb ja läheneb silindri põhja pindalale, kuid prisma kõrgus ei muutu. Põhja pindala suu-

renemise tõttu suureneb ka prisma ruumala ja läheneb silindri ruumalale. Seega silindri ruumala on selleks piiriks, millele külgtahkude arvu piiramatul kasvamisel läheneb



Joonis 242.

silindri sissejoonestatud korrapärase prisma ruumala. Seetõttu silindri ruumala arvutamine peab toimuma sama teoreemi järgi, mis prisma ruumala arvutamine, s. t.

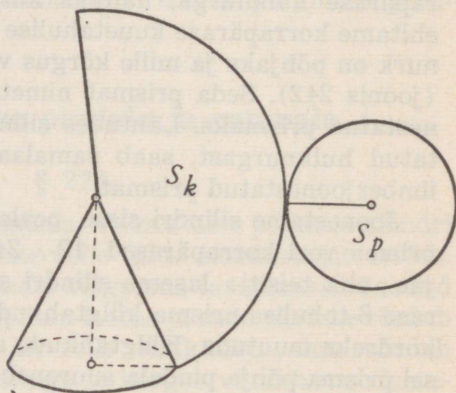
**silindri ruumala võrdub põhja pindala ja kõrguse korrutisega.**

Kui silindri põhja raadius on  $r$  cm ja kõrgus  $h$  cm, siis  $\text{cm}^3$ -es avaldatult on ruumala

$$V = \pi r^2 h.$$

### § 280.

**Koonuse pinnalaotus ja pindala.** Kui, näiteks, paberist valmistatud koonuse külgpinna mudel üht moodustajat mööda lahti lõigata ja tasapinnale laotada (joonis 243), siis tekib koonuse külgpinna laotus. Koonuse külgpinna laotus on sektor, mille kaare pikkus võrdub koonuse põhja ümbermõõduga ja raadius võrdub koonuse moodustajaga. Kui koonuse põhja raadius on  $r$  cm ja moodustaja on  $m$  cm, siis külgpinna laotamisel saadud sektori kaare



Joonis 243.

pikkus on  $2\pi r$  cm ja raadius on  $m$  cm. Tähistame koonuse külgpindala sümboliga  $S_k$ . Et sektori pindala võrdub kaare pikkuse ja raadiuse poole korrutisega, siis  $S_k = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot m$ , s. t.

$$S_k = \pi r m.$$

**Koonuse külgpindala võrdub põhja poole übermõõdu ja moodustaja korrutisega.**

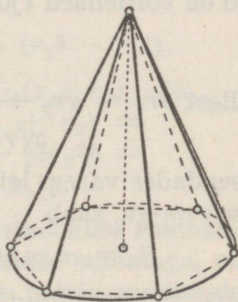
Liites koonuse põhja pindala ja külgpindala, saame koonuse pindala

$$S = \pi r m + \pi r^2 = \pi r (m + r).$$

### § 281.

**Koonuse ruumala.** Ehitame koonuse sisse korrapärase  $n$ -tahulise püramiidi, s. t. püramiidi, mille põhjaks on koonuse põhja sissejoonestatud korrapärane  $n$ -nurk ja kõrguseks on koonuse kõrgus (joonis 244). Kui selle püramiidi külgtahkude arv kasvab, siis püramiidi ruumala suureneb, sest põhja pindala suureneb. Laseme selle püramiidi külgtahkude arvu piiramatult kasvada; selle tagajärjel püramiidi põhja pindala läheneb koonuse põhja pindalale ja püramiidi ruumala läheneb koonuse ruumalale. Seega koonuse ruumala on selleks piiriks, millele külgtahkude arvu piiramatul kasvamisel läheneb koonuse sissejoonestatud korrapärase püramiidi ruumala. Seetõttu püramiidil ja koonusel on üks ja seesama ruumala arvutamise eeskiri:

**koonuse ruumala võrdub põhja pindala ja kõrguse ühe kolmandiku korrutisega.**



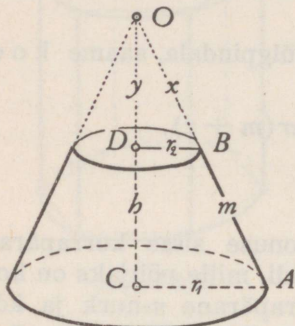
Joonis 244.

Tähistades koonuse kõrgust  $h$ -ga ja põhja raadiust  $r$ -ga, on ruumala

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

### § 282.

**Tüvikoonuse pindala.** Tähistame tüvikoonuse põhjade raadiusi tähtedega  $r_1$  ja  $r_2$ , kõrgust tähega  $h$  ja moodustajat tähega  $m$ ; vastava täiendus-



Joonis 245.

koonuse moodustaja olgu  $x$  (joonis 245). Tüvikoonuse külgpindala saab vaadelda kahe koonuse külgpindalade vahena, milledest esimese raadius on  $r_1$  ja moodustaja on  $m+x$  ning teise raadius on  $r_2$  ja moodustaja on  $x$ . Seega on tüvikoonuse külgpindala

$$\begin{aligned} S_k &= \pi r_1(m+x) - \pi r_2 x = \pi r_1 m + \pi r_1 x - \pi r_2 x = \\ &= \pi r_1 m + \pi x(r_1 - r_2). \end{aligned}$$

Avaldame täienduskoonuse moodustaja  $x$  tüvikoonuse elementide kaudu. Et sarnaste kolmnurkade  $BDO$  ja  $ACO$  küljed on võrdelised (joonis 245), siis

$$\frac{x}{x+m} = \frac{r_2}{r_1},$$

millest  $xr_1 = xr_2 + mr_2$ , seega  $xr_1 - xr_2 = r_2 m$  ja

$$x(r_1 - r_2) = r_2 m.$$

Asendades varem leitud  $S_k$  avaldises  $x(r_1 - r_2)$  sellega võrdse  $r_2 m$ -ga, saab

$$S_k = \pi r_1 m + \pi r_2 m = \pi m(r_1 + r_2).$$

Et  $\pi(r_1 + r_2) = \pi r_1 + \pi r_2 = \frac{1}{2} \cdot (2\pi r_1 + 2\pi r_2)$ , siis võib öelda, et

tüvikoonuse külgpindala võrdub põhjade ümbermõõtude poole summa ja moodustaja korrutisega.

$$S_k = \pi m(r_1 + r_2)$$

Liites külgpindalaga põhjade pindalad, saab tüvikoonuse pindala

$$S = \pi m(r_1 + r_2) + \pi r_1^2 + \pi r_2^2.$$

### § 283.

**Tüvikoonuse ruumala.** Tüvikoonuse ruumala saab arvutada kahe koonuse ruumalade vahena. Kui tüvikoonuse põhjade raadiused on  $r_1$  ja  $r_2$ , kõrgus on  $h$  ja täienduskoonuse kõrgus on  $y$  (joonis 245), siis tüvikoonuse ruumala

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\pi r_1^2(h + y) - \frac{1}{3}\pi r_2^2 y = \\ &= \frac{1}{3}\pi r_1^2 h + \frac{1}{3}\pi r_1^2 y - \frac{1}{3}\pi r_2^2 y = \\ &= \frac{1}{3}\pi r_1^2 h + \frac{1}{3}\pi y(r_1^2 - r_2^2). \end{aligned}$$

Et sarnaste kolmnurkade  $BDO$  ja  $ACO$  küljed on võrdelised, siis

$$\frac{y}{y+h} = \frac{r_2}{r_1},$$

millest kergesti saab, et  $y = \frac{r_2 h}{r_1 - r_2}$ . Asendame viimasega  $y$  varem leitud  $V$  avaldises:

$$V = \frac{1}{3}\pi r_1^2 h + \frac{1}{3}\pi \frac{r_2 h}{r_1 - r_2} \cdot (r_1^2 - r_2^2).$$

Et  $r_1^2 - r_2^2 = (r_1 + r_2) \cdot (r_1 - r_2)$ , siis

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\pi r_1^2 h + \frac{1}{3}\pi r_2 h (r_1 + r_2) = \\ &= \frac{1}{3}\pi r_1^2 h + \frac{1}{3}\pi r_1 r_2 h + \frac{1}{3}\pi r_2^2 h = \\ &= \frac{1}{3}\pi h (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2). \end{aligned}$$

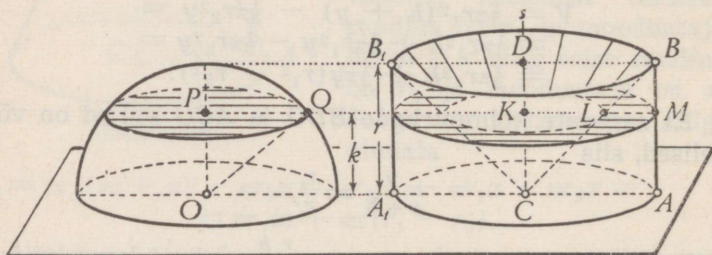
Eelviimasest reast on näha, et tüvikoonuse ruumala võrdub kolme niisuguse koonuse ruumalade summaga, mis on tüvikoonusega ühekõrgused ja mille põhja raadiuseks on ühel tüvikoonuse ühe põhja raadius, teisel — tüvikoonuse

teise põhja raadius ja kolmandal — nende raadiuste geometriline keskmine.

### § 284.

**Kera ruumala.** Kera ruumala valemi tuletamiseks näitame Cavalieri aksioomi abil, et poolkera ruumala võrdub niisuguse silindri ja koonuse ruumalade vahega, millel põhjade raadiused ja kõrgused võrduvad poolkera raadiusega.

Asetsegu ühel ja samal tasapinnal poolkera raadiusega  $r$  ja silinder põhja raadiusega  $r$  ja kõrgusega  $r$  (joonis 246). Kui sellest silindrist lõigata välja koonus, mille põhja raadiuseks on  $DB = r$  ja kõrguseks on  $DC = r$ , siis silindrist jääb järele pöördkeha, mis tekib kolmnurga  $ABC$  pöörlemisel sirge  $s$  ümber. Sel pöördkehal ja poolkeral on



Joonis 246.

võrdsed põhjade pindalad ja võrdsed kõrgused; tõestame, et nende lõikamisel põhjaga paralleelse tasapinnaga tekivad võrdsete pindaladega lõiked. Kui seda saab tõestada, siis on Cavalieri aksioomi järgi need kehad ruumvõrdsed.

Kui poolkera lõigata põhjaga paralleelse tasapinnaga, mille kaugus põhja tasapinnast on  $k$ , siis tekib ringikujuline lõige raadiusega  $PQ$ . Selle lõike pindala

$$S_1 = \pi \cdot PQ^2 = \pi(OQ^2 - OP^2) = \pi(r^2 - k^2).$$

Teise keha lõikamisel sama tasapinnaga tekib rõnga-

kujuline lõige, mille sisemine raadius on  $KL = KC = k$  ja välimine raadius on  $KM = r$ . Selle lõike pindala

$$S_2 = \pi \cdot KM^2 - \pi \cdot KL^2 = \pi \cdot r^2 - \pi \cdot k^2 = \pi(r^2 - k^2).$$

Seega on  $S_1 = S_2$ , millest järeldub, et need kehad on ruumvõrdsed.

Tuletame nüüd kera ruumala valemi:

silindri  $AA_1B_1B$  ruumala on  $\pi r^2 \cdot r = \pi r^3$ ;

koonuse  $BB_1C$  ruumala on  $\frac{1}{3}\pi r^2 \cdot r = \frac{1}{3}\pi r^3$ ;

nende ruumalade vahe on  $\pi r^3 - \frac{1}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3$ ;

poolkera ruumala võrdub seega  $\frac{2}{3}\pi r^3$ ,

millest järeldub, et kera ruumala

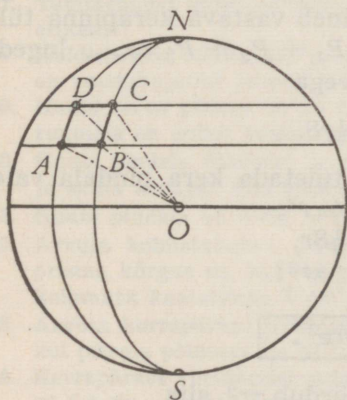
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

## § 285.

**Kera pindala.** Kera pindala valemi tuletamiseks näitame, et kera ruumala võrdub pindala ja raadiuse ühe kolmandiku korrutisega.

Selle tõestamiseks olgu kera pind kaetud kahe joontesüsteemiga, nimelt suurringjoontega, mis läbivad ühe

diameetri otspunkte  $N$  ja  $S$ , ja ringjoontega, mis tekivad kera lõikamisel selle diameetriga ristuvate tasapindadega (joonis 247). Maateaduse eeskujul nimetame esimesi jooni meridiaanideks ja teisi jooni paralleelideks. Paralleelid ja meridiaanid tükeldavad kera pinna kolmnurgakujulisteks ( $NDC$ ) ja nelinurgakujulisteks ( $ABCD$ ) tükeldeks. Ühendame nelinurga  $ABCD$  tipud kera keskpunk-



Joonis 247.

tiga ja vaatleme püramiidi, mille põhjaks on t a s a n e nelinurk  $ABCD$  ja mille tipp asetseb kera keskpunktis. Olgu selle püramiidi põhja pindala  $P_1$  ja kõrgus  $h_1$ . Selle ruumala  $V_1 = \frac{1}{3} P_1 \cdot h_1$ . Täidame nüüd kogu kera niisuguste püramiididega; olgu nende põhjade pindalad  $P_1, P_2, P_3, \dots$  ja kõrgused vastavalt  $h_1, h_2, h_3 \dots$ . Kui kera pind on tükeldatud küllalt väikesteks osadeks, siis nende püramiidide ruumalade summa on ligikaudu võrdne kera ruumalaga  $V$ :

$$V \approx \frac{1}{3}P_1h_1 + \frac{1}{3}P_2h_2 + \frac{1}{3}P_3h_3 + \dots + \frac{1}{3}P_n \cdot h_n.$$

Laseme nüüd kera pinda tükeldavat joontevõrgustikku ikka tihedamaks muutuda, nii et punktid  $A, B, C$  ja  $D$  lähenevad üksteisele. Selle tagajärjel

- 1) püramiidide arv kasvab piiramatult,
- 2) iga püramiidi kõrgus läheneb kera raadiusele,
- 3) nende püramiidide ruumalade summa läheneb kera ruumalale. Seetõttu võib öelda, et kera ruumala

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}P_1r + \frac{1}{3}P_2r + \frac{1}{3}P_3r + \dots = \\ &= \frac{1}{3}r(P_1 + P_2 + P_3 + \dots) \end{aligned}$$

Et pinnatükkide arvu kasvamisel tasase nelinurga  $ABCD$  pindala ikka vähem erineb vastava kerapinna tüki pindalalt, siis võime summa  $P_1 + P_2 + P_3 + \dots$  lugeda võrdseks kera pindalaga  $S$ . Seega

$$V = \frac{1}{3}rS.$$

Saadud valemist on kerge tuletada kera pindala valemit. Varem leidsime, et  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ ;

$$\text{nüüd saime, et } V = \frac{1}{3}Sr.$$

$$\text{Järelikult } \frac{1}{3}Sr = \frac{4}{3}\pi r^3;$$

Seega

$$\boxed{S = 4\pi r^2.}$$

Et kera suurringi pindala võrdub  $\pi r^2$ , siis

**kera pindala võrdub neljakordse suurringi pindalaga.**

### III. Ülesandeid.

374. Mitu  $\text{cm}^3$  on 12  $\text{dm}^3$ , 0,38  $\text{dm}^3$ , 4  $\text{m}^3$ , 0,067  $\text{m}^3$ ,  $x \text{ m}^3$ ,  $x \text{ m}^3 y \text{ dm}^3$ ?
375. Mitu  $\text{dm}^3$  on 80  $\text{cm}^3$ , 5400  $\text{mm}^3$ , 4300  $\text{cm}^3$  5000  $\text{mm}^3$ ,  $x \text{ cm}^3$ ,  $x \text{ cm}^3 y \text{ mm}^3$ ?
376. Mitu hl rukkeid on risttahukakujulises salves, mille mõõted on 3,2 m, 1,8 m ja 1,5 m?
377. Mitu kg petrooleumi mahutab risttahukakujuline nõu, mille mõõted on 26 cm, 24 cm ja 14 cm?
378. Risttahukakujulisse klaasvanni valati 9 l vett. Kui kõrgelt täidab see vesi vanni, kui vanni põhja mõõted on 35 cm ja 18 cm?
379. Üks jooksev meeter ruudukujulise ristlõikega lattrauda, mille tahu laius on 16 mm, kaalub 2,01 kg. Leia selle raua erikaal!
380. Mitu kg kaalub ruudukujulise ristlõikega raudlatt, mille pikkus on 2,5 m ja tahu laius on 68 mm, kui selle raua erikaal on 7,85?
381. Kui suur pindala on risttahukal, mille mõõted on 15 cm, 12 cm ja 22 cm?
382. Avalda risttahuka pindala  $S$  mõõdete  $a$ ,  $b$  ja  $c$  kaudu!
383. Risttahuka pindala on 936  $\text{cm}^2$  ja tema mõõted on võrdelised arvudega 2, 5, 6. Leia risttahuka mõõted!
384. Kuidas muutuvad risttahuka pindala ja ruumala, kui risttahuka kõik mõõted suurenevad või vähenevad  $n$  korda?
385. Näita, et avaldis  $(a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$  esitab risttahuka pindala, kui  $a$ ,  $b$  ja  $c$  on risttahuka mõõted!
386. Kuubi diagonaali pikkus on 10 cm. Kui suur on kuubi pindala?
387. Tammepuust kuup servaga 8,5 cm kaalub 424 g. Leia tamme erikaal!
388. Kuldlehekesi toodetakse paksusega  $\frac{1}{800}$  mm. Kui pika servaga on ruudukujuline leheke, mis kaalub 1 g?
389. Kuubi serva pikkus on 15 cm. Kui pikk serv on kuubil, mille ruumala on antud kuubi ruumalast 2 korda suurem?
390. Kuubi pindala ( $\text{cm}^2$ -es) ja ruumala ( $\text{cm}^3$ -es) väljenduvad ühe ja sama arvuga. Kui pikk on kuubi serv?
391. Kuubi pindala on 0,492  $\text{m}^2$ . Arvuta ruumala!
392. Arvuta kolmetahulise püstprisma pindala ja ruumala, kui prisma kõrgus on 14,5 cm ja prisma põhjaks on täisnurkne kolmnurk kaatetitega 8 cm ja 3,9 cm!
393. Arvuta korrapärase kolmetahulise prisma pindala ja ruumala, kui prisma põhiserv on 12 cm ja külgserv on 17 cm!
394. Korrapärase viietahulise prisma põhiserv on 3,8 cm ja külgserv on 8,4 cm. Arvuta prisma külgpindala!
395. Kui palju kaalub trapetsikujuline tükk 2-millimeetrise paksu-

- sega raudplekki, kui selle trapetsi alused on 0,9 m ja 1,6 m ning kõrgus on 1,2 m?
396. Mitu  $m^3$  mulda tuleb kraavikaevamisel selle pikkuse iga meetri kohta välja võtta, kui kraavi sügavus on 1,20 m, põhjalaius — 0,30 m ja pealtlaius — 2,50 m?
397. Arvuta korrapärase kuuetaahulise prisma ruumala, kui prisma kõrgus on 15 cm ja põhiserv on 8 cm!
398. Korrapärase kuuetaahulise prisma ruumala on  $480\text{ cm}^3$  ja kõrgus on 20 cm. Kui suur on selle prisma pindala?
399. Ülemiste järve pindala on  $9,5\text{ km}^2$ . Kui palju suureneb järve vee hulk, kui vee pind tõuseb 10 cm võrra? Kui palju on järves vett, kui selle keskmiseks sügavuseks võtta 4,5 m?
400. Korrapärase neljataahulise püramiidi iga serva pikkus on  $a$  cm. Avalda püramiidi pindala  $S$  serva pikkuse  $a$  abil!
401. Kolmetahulise püramiidi iga serva pikkus on  $a$  cm. Avalda püramiidi pindala  $S$  serva pikkuse  $a$  abil!
402. Korrapärase neljataahulise püramiidi kõrgus on 35 cm ja põhiserv on 46 cm. Arvuta püramiidi pindala ja ruumala!
403. Paviljoni katus on korrapärase kaheksataahulise püramiidi kujuline põhiservaga 4,6 m ja külgservaga 7 m. Mitu lehte katuseplekki kulub selle katuse katmiseks, kui igale  $m^2$ -le kulub 1,2 lehte?
404. Püramiidist, mille põhja pindala on  $67,5\text{ cm}^2$  ja kõrgus on 12 cm, eraldati põhjaga paralleelse lõike abil uus püramiid, mille kõrgus on 4 cm. Arvuta viimase püramiidi põhja pindala!
405. Püramiid, mille kõrgus on 10 cm, on lõigatud põhjaga paralleelse tasapinnaga nii, et saadud lõike pindala on pool põhja pindalast. Kui kaugel püramiidi tipust asetseb lõike tasapind?
406. Püramiidi põhjaga paralleelne lõige poolitab kõrguse. Leia põhja pindala ja lõike pindala suhe!
407. Kui palju kaalub korrapärase neljataahuline graniidist püramiid, mille põhiserv on 2,8 m ja kõrgus on 3,5 m?
408. Egiptuse suurima püramiidi (Cheopsi püramiidi) põhiserv on 233 m ja kõrgus on 147 m. Mitu  $m^3$  kivi on tarvitatud selle ehitamiseks, kui mitte arvestada käike ja kambreid nende väikseuse tõttu?
409. Korrapärase neljataahulise püramiidi kõrgus on 1,8 dm ja ruumala on  $1,944\text{ dm}^3$ . Kui pikk on põhiserv?
410. Avalda korrapärase neljataahulise püramiidi ruumala ja pindala ta põhiserva  $a$  kaudu, kui külgserv moodustab põhjaga  $45^\circ$ -se nurga!
411. Korrapärase neljataahulise püramiidi pindala on  $229,5\text{ cm}^2$  ja külgpindala on  $157,25\text{ cm}^2$ . Arvuta püramiidi ruumala!

412. Korrapärase kolmetahulise püramiidi kõrgus on 12 cm ja põhiserv on 9 cm. Arvuta püramiidi ruumala ja pindala!
413. Korrapärase kolmetahulise püramiidi iga serv on 10 cm. Arvuta selle püramiidi ruumala!
414. Korrapärase tetraeedri apoteem on  $m$ . Avalda tetraeedri pindala  $m$  abil!
415. Korrapärase kuuetahulise püramiidi kõrgus on 12 cm ja põhiserv on 6 cm. Arvuta püramiidi ruumala ja pindala!
416. Korrapärase kuuetahulise püramiidi külgserv on 10,6 cm ja apoteem on 9 cm. Arvuta püramiidi ruumala ja pindala!
417. Korrapärase kuuetahulise püramiidi põhiserv on 2,4 dm ja külgserv on 7,6 dm. Arvuta püramiidi ruumala ja pindala!
418. Korrapärase oktaeedri serv on 5 cm. Arvuta selle oktaeedri pindala ja ruumala.
419. Püramiidi põhjaks on romb, mille diagonaalid on 12 cm ja 15 cm. Arvuta püramiidi ruumala, kui kõrgus on 21 cm!
420. Missuguse osa kuubi ruumalast moodustab püramiidi ruumala, kui püramiidi põhjaks on kuubi üks tahk ja püramiidi tipuks on kuubi keskpunkt?
421. Püramiidi põhjaks on ristkülik külgedega 22 cm ja 16 cm. Arvuta püramiidi pindala ja ruumala, kui iga külgserva pikkus on 25 cm!
422. Arvuta tabeli andmete põhjal silindri puuduvad suurused!

Näide nr.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8
Silindri								
põhja raadius (cm)	5	16	7	12,5				
põhja pindala (cm <sup>2</sup> )					43	5280	1490	5,5
kõrgus (cm)	12				6,1			
külgpindala (cm <sup>2</sup> )		3017				12880		
täispindala (cm <sup>2</sup> )			967				4500	
ruumala (cm <sup>3</sup> )				2450				27,5

423. Üks jooksev meeter ümmarrauda läbimõõduga 38 mm kaalub 8,903 kg. Leia selle raua erikaal!

424. 10.000 m vasktraati läbimõõduga 5 mm kaalub 1767 kg. Leia selle traadi erikaal!
425. Mitu m terastraati läbimõõduga 2 mm kaalub 1,25 kg?
426. Silindrikujuline purk ,mille sisemine läbimõõt on 16 cm ja kõrgus on 15 cm, on täidetud soolaga, mis kaalub 6,3 kg. Leia soola erikaal!
427. Ajalehe teatel torm tõi 1934. a. kevadel New Yorgi kohale tolmutpilve, milles arvati olevat 300 milj. tonni tolmu. Kui paksu kihina oleks katnud see tolmu linna maa-ala, kui New Yorki mõelda ringina, läbimõõduga 30 km ja kui tolmu erikaal on 1,5?
428. Mitu  $\text{cm}^2$  plekki kulub liitrise silindrikujulise kaaneta nõu valmistamiseks, kui nõu kõrgus on 5 cm ja kui valtsimiseks kuluvat plekki mitte arvestada?
429. Kuidas muutub silindri ruumala, kui
- põhja raadiust suurendada 3 korda?
  - kõrgust suurendada 5 korda?
  - põhja raadiust suurendada 4 korda ja kõrgust suurendada 2 korda?
  - põhja raadiust vähendada 1,5 korda ja kõrgust suurendada 4,5 korda?
430. Kui suurendada silindri kõrgust 3 korda ja põhja läbimõõtu 2 korda, siis ruumala saab  $0,96 \text{ m}^3$  suuruseks. Kui suur on esialgne ruumala?
431. Silindri külgpindala on võrdne põhjade pindalade summaga ja põhja läbimõõt on 16 cm. Kui kõrge on silinder?
432. Silindri telglõige on ruut küljega  $a$  cm. Avalda silindri pindala ja ruumala  $a$  abil.
433. Ristküliku üks külj on teisest kaks korda pikem. Kuidas suhtuvad nende silindrite ruumalad (pindalad), mis tekivad selle ristküliku pöörlemisel üks kord pikema ja teine kord lühema külje ümber?
434. Kui raske on 3 m pikkune raudtoru, mille välimine läbimõõt on 60 mm ja sisemine läbimõõt on 50 mm?
435. Kui raske on 25 cm pikkune alumiiniumtoru, mille välimine läbimõõt on 24 mm ja seina paksus on 3 mm?
436. Mitu l vett voolab 45 min. vältel läbi toru, mille läbimõõt on 4 cm, kui vee voolu kiirus on 6 cm/sek.?
437. Ajalehe teatel katkes 1. III 29. Helsingi veevärgi üks peajuhtmetest läbimõõduga 61 cm, millest kahe tunni kestes voolas välja  $10\,000 \text{ m}^3$  vett. Katkemiskoha ümbruses tõusis vesi 0,5 m kõrgusele maapinnast. Arvuta ,kui suur oli vee voolu kiirus kat-

kenud juhtmes ja kui suure maa-ala täitis väljavoolanud vesi keskmise sügavusega 0,5 m?

438. Arvuta tabeli andmete põhjal koonuse puuduvad suurused.

Koonuse \ Näide nr.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
põhja raadius (cm)	4	9						12
kõrgus (cm)	7		8,4					
moodustaja (cm)		15	11,5	5,1		24		
põhja pindala (cm <sup>2</sup> )				36,3	128,7			
külgpindala (cm <sup>2</sup> )					321	1356	307	
täispindala (cm <sup>2</sup> )							534	
ruumala (cm <sup>3</sup> )								400

439. Kui palju kaalub koonusekujuline liivahunnik, mille kõrgus on 1,3 m ja põhja ümbermõõt on 15 m?

440. Mitu katusekivi kulub torni koonusekujulise katuse katmiseks, kui katuse kõrgus on 3,8 m, torni läbimõõt on 8,4 m ja ühele m<sup>2</sup>-le kulub 15 kivi?

441. Koonusekujulise kartulikuhja ümbermõõt on 11,9 m ja kõrgus on 1,6 m. Mitu kvintaali kartuleid on kuhjas, kui 1 hl kartuleid kaalub 72 kg?

442. Plekist on vaja valmistada trehter, mille koonusekujulise osa kõrgus on 9 cm ja põhja läbimõõt on 11,2 cm. Kui suur peab olema selleks võetava sektori raadius ja kesknurk?

443. Paberist väljalõigatud sektorist raadiusega 13 cm. ja nurgaga 125° valmistati koonuse külgpinna mudel. Leia selle põhja läbimõõt!

444. Koonuse telglõige on võrdkülgne kolmnurk ümbermõõduga 42 cm. Arvuta koonuse ruumala!

445. Koonuse telglõike pindala ja põhja pindala on võrdsed. Arvuta põhja pindala, kui koonuse kõrgus on 11 cm!

446. Koonuse telglõike pindala on  $P$  cm<sup>2</sup> ja põhja ümbermõõt on  $ü$  cm. Avalda koonuse ruumala  $P$  ja  $ü$  abil!

447. Kuidas muutub koonuse ruumala, kui

- põhja läbimõõtu suurendada 5 korda?
- kõrgust vähendada 2,5 korda?
- põhja läbimõõtu vähendada 4 korda ja kõrgust suurendada 8 korda?

448. Arvuta tabeli andmete põhjal tüvikoonuse puuduvad suurused!

Näide nr.	1.	2.	3.	4.
Tüvikoonuse				
ühe põhja raadius (cm)	8	10	7	15
teise põhja raadius (cm)	5	4	3	10
kõrgus (cm)	6			
moodustaja (cm)		9		
pindala (cm <sup>2</sup> )				2433
ruumala (cm <sup>3</sup> )			316	

449. Koonus on lõigatud põhjaga paralleelse tasapinnaga, mis poolitab kõrguse. Missuguse osa koonuse ruumalast moodustab tekkinud tüvikoonuse ruumala?
450. Leia palgi ruumala, kui palgi pikkus on 4,5 m ja otste läbimõõdud on 26 cm ja 14 cm.
451. Mitu l mahutab tüvikoonuse-kujuline pang, mille sügavus on 30 cm, pealtlaius — 28 cm ja põhjalaius — 18 cm?
452. Tüvikoonuse ühe põhja raadius on  $r$ . Avalda pindala ja ruumala  $r$  abil, kui moodustaja võrdub  $r$ -ga ja kui teise põhja raadius on pool moodustajast!
453. Tüvikoonuse telglõige on võrdhaarne trapets alustega 18 cm ja 14 cm; telglõike pindala on 208 cm<sup>2</sup>. Leia tüvikoonuse ruumala!
454. Täisnurkne trapets alustega 35 cm ja 25 cm ning kõrgusega 16 cm pöörleb ümber külje, mis on alustega risti. Kui suur pindala on sel pöörlemisel tekkival kehal?

455. Arvuta tabeli andmete põhjal kera puuduvad suurused!

Kera \ Näide nr.	1.	2.	3.	4.	5.
läbimõõt (cm)	18				
ümbermõõt (cm)		42,1			
suuringi pindala (cm <sup>2</sup> )			6305		
pindala (cm <sup>2</sup> )				7088	
ruumala (cm <sup>3</sup> )					12770

456. Maakera pindalast on 29,4% maismaad. Mitu ruutkilomeetrit on maismaad, kui Maa raadius on 6371 km?

457. Kuu raadius on 1740 km. Arvuta Kuu ruumala!

458. Olgu kahe kera raadiuste jagatis  $k$ . Tõesta, et nende kerade pindalade jagatis on  $k^2$  ja ruumalade jagatis on  $k^3$ !

459. Marsi raadius on 0,54 Maa raadiusest. Missugune osa Maa pindalast (ruumalast) on Marsi pindala (ruumala)?

460. Päikese raadius on 109 korda suurem Maa raadiusest. Mitu korda on Päikese ruumala suurem Maa ruumalast?

461. Kui pikk on tinast kera raadius, kui kera kaalub 1 kg?

462. Mitu korda suureneb kera ruumala, kui kera pindala suureneb 2,25 korda?

463. Kera on lõigatud osadeks kolme üksteisega ristuva ja kera keskpunkti läbiva tasapinnaga. Kui suur on kera iga niisuguse osa pindala?

464. Kera pindala (cm<sup>2</sup>-es) ja ruumala (cm<sup>3</sup>-es) väljenduvad ühe ja sama arvuga. Leia kera raadius!

465. Poolkera piirav pindala on 600 cm<sup>2</sup>. Kui pikk on kera raadius?

466. Raudkera ümbermõõduga 50,2 cm on paigutatud vette. Mitu kg kaotab seejuures kera oma kaalust?

467. Mitu tinakuuli raadiusega 1 cm saab valada 1 kg tinast?

468. Silindri sisse, mille põhja läbimõõt ja kõrgus on võrdsed, on joonestatud võimalikult suur kera ja koonus. Leia nimetatud kolme keha ruumalade suhted!

469. Silindrikujulisest palgist, mille pikkus oli 5,4 m, tahuti võimalikult suur ruudukujulise ristlõikega palk. Kui suur on ära-

tahatud puitu (laastude) ruumala, kui ümmarguse palgi läbimõõt oli 28 cm?

470. Kahe korrapärase neljatahulise prisma külginna laotused on võrdsed ristkülikud, mille üks külg on teisest 2 korda pikem. Ühe prisma külgservaks on ristküliku pikem külg ja teise prisma külgservaks on ristküliku lühem külg. Kuidas suhtuvad nende ristkülikute ruumalad?
471. Ruut, mille diagonaali pikkus on  $d$  cm, pöörleb ümber diagonaali. Arvuta selle pöördkeha pindala ja ruumala!
472. Võrdhaarne täisnurkne kolmnurk, mille kaateti pikkus on  $a$  cm, pöörleb ümber sirge, mis on risti ühe kaatetiga ja läbib hüpotenuusi ühe otspunkti. Arvuta selle pöördkeha pindala ja ruumala!
473. Võrdhaarne täisnurkne kolmnurk, mille pindala on  $50 \text{ cm}^2$ , pöörleb ümber hüpotenuusi. Arvuta selle pöördkeha pindala ja ruumala!
474. Silindri külginna laotus on ruut küljega  $a$  cm. Avalda silindri pindala ja ruumala  $a$  abil!
475. Silindrikujuline metallitükk, mille põhja läbimõõt ja kõrgus on võrdsed, valatakse keraks. Mitu korda suureneb või väheneb ta pindala?
476. Elavhõbedas ujub metallkera läbimõõduga 4,6 cm, olles parajasti pooleni vedelikus. Kui palju kaalub see kera?

# Märksõnastik.

Numbrid osutavad lehekülgi.

Aksioom 9, 47, 247.  
Algmõiste 14.  
Alus 42, 76, 87.  
Alusnurk 42.  
Apoteem 125, 226.  
Aritmeetiline keskmine 137  
Arvmõõt 185.  
Cavalieri aksioom 247.  
Definitsioon 14.  
Deltoidid 106.  
Diagonaal 39, 83.  
Diagonaaltasapind 244.  
Diameeter 12, 228.  
Dodekaeeder 222.  
Eukleidese teoreem 128.  
Geomeetria 1, 9, 11.  
Geomeetriline keha 2, 3.  
~ keskmine 137.  
Haar 15, 42, 87.  
Heksaeder 222.  
Hulktahk 221.  
Hulknurk 83.  
~, lihtne 84.  
~, korrapärane 84, 107.  
~, kumer 84.  
~a pindala 113, 126.  
Hüpoteenus 63.  
Ikosaeder 222.  
Irratsionaalne arv 136.  
Joon 2, 3.  
Jonelement 127.

Joonmõõt 185.  
Joonnurk 210.  
Kaar 13.  
Kaare pikkus 158.  
~ mööduühikud 13.  
Kaatet 63.  
Kahetahuline nurk 210.  
Kaldlõik 33, 63.  
Kaldprojektsioon 236.  
Kaldsirge 216.  
Kaugus 4, 33, 48, 217.  
Kauguse kaudne mõõtmine  
71.  
Keha, geomeetriline 2, 3.  
Kera 228.  
~ pindala 259.  
~ ruumala 258.  
~ suuring 229.  
Keskmine võrdeline 169.  
Kesknurk 17.  
Keskristsirge 34.  
Keskpunkt 12, 44, 96, 108,  
228, 231.  
Kiir 7.  
Kiirteteoreem 165.  
Kiivsirged 206.  
Kimp, kiirte 166.  
Kimp, tasapindade 212.  
Kolmnurga alus 76.  
~ kesklõik 78.  
~ kõrgus 76.

- ~ külg 56, 59, 62.
- ~ küljepoolitaja 79.
- ~ lahendamine 188, 196.
- ~ mediaan 79.
- ~ määramine 64, 67.
- ~ pindala 123.
- ~ raskuskese 79.
- ~ sisenurk 58.
- ~ sisen. poolitaja 170.
- ~ sissejoonestatud ring-  
joon 41.
- ~ välisnurk 58.
- ~ ümberjoonestatud ring-  
joon 37.
- Kolmnurk 56.
- ~, korrapärane 139.
- ~, nürinurkne 58.
- ~, teravnurkne 58.
- ~, täisnurkne 58.
- ~, võrdhaarne 42, 61.
- ~, võrdkülgne 43, 44.
- Kolmnurkade sarnasus  
175 jj.
- ~ võrdsus 63 jj.
- Kongruentsmärk 64.
- Kooniline pind 227.
- Koonus 227.
- ~e pindala 254.
- ~e ruumala 255.
- Korrapärane hulknurk  
107, 108, 125, 142, 198.
- ~ kaheksanurk 140.
- ~  $2n$ -nurk 141.
- ~ kolmnurk 139.
- ~ kuusnurk 139.
- ~ nelinurk 140.
- ~ tahkkeha 222.
- Kuldlöige 199.
- Kumer 17, 84, 215.

- Kuup 224.
- Kõrvunurgad 22.
- Kõverjoon 4.
- ~e pikkus 148.
- Kõverjoonlaud 238.
- Kõõl 12.
- Kõõlhulknurk 149.
- Kõõlkolmnurk 106.
- Külgjoonis 234.
- Lekaal 238.
- Läbimõõt 12, 228.
- Lähisnurgad 50.
- Lühendustegur 236.
- Mall 22.
- Mediaan 79.
- Moodustaja 226, 227.
- Murdjoon 4.
- Mõõde 3.
- Mõõtari 6.
- Mõõtmine 6, 13, 21, 120,  
242.
- Nelinurk 86.
- Neljas võrdeline 168.
- Normaalprojektsioon 217,  
234.
- Normaal, tasapinna 216.
- Nurgad rööpsirgete juures  
53.
- ~ vastavalt ristuvate haa-  
radega 55.
- ~ vastavalt rööpsete haa-  
radega 54, 214.
- Nurgafunktsioonid 190,  
204.
- Nurga koosinus 190, 191.
- ~ kootangens 190, 191.
- ~ mõõduühikud 21.
- ~ lahutamine 21.
- ~ liitmine 20.

- Nurgapoolitaja 38, 107, 170  
 Nurga siinus 190, 191.  
 ~ tangens 190, 192.  
 ~ üleviimine 19.  
 Nurk 15.  
 ~, kahetahuline 210.  
 ~, kahe tasapinna vahe-  
 line 210.  
 ~, puutuja ja kõõlu vahe-  
 line 102.  
 ~, sirge ja tasapinna va-  
 heline 218.  
 Nurkade võrdsus 15.  
 Nürinurk 17.  
 Oktaeeder 222.  
 Oletus 25.  
 Oomega ( $\omega$ ) 236.  
 Paralleelide aksioom 47.  
 Paralleelprojektsioon 231,  
 232.  
 Paralleelsed sirged 46.  
 ~ sirglõigud 46.  
 Parallelogramm 90.  
 Perspektiivne kujutis 232.  
 ~ sarnasus 173.  
 Pii ( $\pi$ ) 151, 153.  
 Piirdenurk 101, 103.  
 Piirväärtus 151.  
 Pikkusühikud 7, 14.  
 Pind 2, 3.  
 Pindala 113.  
 Pindalaühikud 120.  
 Pindvõrdne 113.  
 Plaanistamine 184.  
 Planimeetria 11.  
 Prisma 222.  
 ~ ruumala 248.  
 Projektsioon 127, 231.  
 ~i kaldenurk 236.  
 ~i lühendustegur 236.  
 Punkt 2, 3.  
 ~i potents 183.  
 Puutepunkt 99.  
 Puutujahulknurk 149.  
 Puutujakolmnurk 105.  
 Puutujanelinurk 105.  
 Põhijoonis 234.  
 Põiknurgad 50.  
 Pöördkeha 229.  
 Pöördteoreem 25.  
 Püramiid 224.  
 ~, korrapärane 226.  
 ~i pindala 252.  
 ~i ruumala 250.  
 Püstjoonis 234.  
 Püstprisma 223.  
 ~ ruumala 245.  
 ~ pindala 246.  
 Pythagorase teoreem 129.  
 Raadius 12, 228.  
 Radian 159.  
 Ratsionaalne arv 136.  
 Ring 12.  
 Ringi ruutimine 156.  
 ~ pindala 154, 155.  
 ~ sektor 17.  
 ~ ümbermõõt 155.  
 Ringjoon 12.  
 Ringjoone lõikaja 98, 182.  
 ~ pikkus 150.  
 ~ puutuja 99.  
 ~ sirgestamine 156.  
 Riskülik 93, 94.  
 ~u pindala 121.  
 Risttahukas 205, 224.  
 Risttahuka ruumala 243.  
 Ristlõik 63.  
 Ristuvad sirged 16, 32.

Romb 39, 40, 46.  
 ~i pindala 124.  
 Ruumalauhikud 242.  
 Ruumi põhikujundid 206.  
 Ruumisnurk 215.  
 Ruut 94, 96.  
 Rööpkülik 90.  
 ~u pindala 123.  
 Rööplüke 53.  
 Rööptahukas 224.  
 Sarnased hulknurgad 172.  
 Sarnasus, perspektiivne  
 173.  
 Sektor 17.  
 ~i pindala 159.  
 Serv 205, 210, 221.  
 Sfäär 228.  
 Sfääriline pind 228.  
 Silinder 226.  
 Silindri ruumala 253.  
 ~ pindala 252.  
 Silindriline pind 226.  
 Sirge (sirgjoon) 7.  
 Sirglõik 4.  
 Sirglõikude jagatis (suhe)  
 162.  
 ~ mõõtmise 6.  
 ~ summa ja vahe 5.  
 ~ võrdelisuus 162.  
 Sirgnurk 16.  
 Sisnurk 58, 84.  
 Sissejoonestatud prisma  
 253.  
 Spiraal 11.  
 Stereomeetria 11.  
 Sümmeetria 28.  
 Sümmeetriakeskpunkt 108.  
 Sümeetriatelg 29, 33.  
 Sümmeetriline kujund 28.

Tahk 205, 210, 221.  
 Tahkkehha 221.  
 ~, korrapärane 222.  
 Tasapind 10.  
 Tasapinna määramine 208.  
 ~ normaal 216.  
 Tasapindade kimp 212.  
 Telg 226.  
 Telglõige 227.  
 Teodoliit 22.  
 Teoreem 9.  
 Teoreemi tõestus 9.  
 Teravnurk 16.  
 Thalese teoreem 104.  
 Tetraeeder 222.  
 Tipp 15, 56, 83, 205.  
 Tippnurgad 23.  
 Tipunurk 42.  
 Trapets 87.  
 ~i kesklõik 88.  
 ~i pindala 124.  
 Tsentraalprojektsioon 231.  
 Täisnurk 16.  
 Täispoore 16.  
 Tüvikoonus 228.  
 ~e pindala 256.  
 ~e ruumala 257.  
 Tüvipüramiid 225.  
 Vastavad nurgad 50, 64.  
 Võrdelised sirglõigud 163.  
 Võrdhaarne kolmnurk 42,  
 61.  
 Võrdkülgne kolmnurk 43.  
 Võrre 163.  
 Väide 25.  
 Välisnurk 58, 86.  
 Ümberjoonestatud prisma  
 253.  
 Ümbermõõt 83, 149, 155.

## Mõned erikaalud.

Alumiinium .....	2,7	Kuld .....	19,3
Bensiin .....	0,7	Liiv, kuiv .....	1,4
Elavhõbe .....	13,6	Petrooleum .....	0,8
Graniit .....	2,6	Raud, taotav .....	7,7
Hõbe .....	10,5	Teras .....	7,8
Jää .....	0,9	Tina .....	11,4
Klaas, akna .....	2,6	Vask .....	8,9

## Trükivigade õiendus.

21. lk. 10. reas a. peab olema	„sissaldab”	asemel	„sisaldab”
36. „ 6. „ ü. „	„sirgele t“	„	„sirgele s“
51. „ joonises 54 „	„c“	„	„C“
78. „ 14. reas a. „	„L”	„	„ $\widehat{L}$ ”
84. „ 11. „ a. „	„tipp”	„	„tippu”
90. „ 18. „ a. „	„Rööplik”	„	„Rööpkülik”
124. „ 4. „ a. „	„trapeetsi”	„	„trapetsi”
133. „ tuleb valem „ $h^2 = b^2 - g^2$ ”	vahetada	eelneva reaga	
140. „ 5. reas ü peab olema	„ $a_4$ ”	asemel	„ $a_2$ ”
142. „ 7. „ a. „	„ $2n$ -nurga”	„	„ $n$ -nurga”
145. „ 8. „ a. „	„2,5”	„	„8,4”
145. „ 6. „ a. „	„10”	„	„1,0“
166. „ 12. „ ü. „	„ $D_1C$ ”	„	„ $D_1C_1$ ”
181. „ 14. „ ü. „	„kolmnurgas”	„	„hulknurgas”
182. „ 10. „ a. „	„punktis”	„	„punkti”

# Sisukord.

## Planimeetria.

<b>1. osa. Sirgjoon, ringjoon ja nurk.</b> .....	1—27
I. Geomeetriline keha .....	1
II. Sirglõik .....	4
III. Sirgjoon ja tasapind .....	7
IV. Ringjoon .....	12
V. Nurk .....	14
VI. Ülesandeid .....	26
<b>2. osa. Kujundite sümmeetria</b> .....	27—45
I. Sümmeetrilised punktid ja sirglõigud .....	27
II. Kahe punkti sümmeetriatelg .....	33
III. Nurga sümmeetriatelg .....	38
IV. Võrdhaarne kolmnurk .....	42
V. Ringjoone sümmeetria .....	44
VI. Ülesandeid .....	45
<b>3. osa. Paralleelsed sirged</b> .....	46—56
I. Sirgete vastastikused asendid .....	46
II. Nurgad kahe sirge lõikumisel kolmandaga .....	50
III. Vastavalt risti või rööbiti asetsev. haaradega nurgad .....	54
IV. Ülesandeid .....	55
<b>4. osa. Kolmnurk.</b> .....	56—83
I. Kolmnurkade liigitelu ja nurgad .....	56
II. Kolmnurga külgede ja nurkade omadusi .....	59
III. Kolmnurkade võrdsus .....	63
IV. Kolmnurkade võrdsuse rakendusi .....	70
V. Tähtsamad jooned ja punktid kolmnurgas .....	76
VI. Ülesandeid .....	80
<b>5. osa. Nelinurk</b> .....	83—98
I. Hulknurk .....	83
II. Trapets .....	87
III. Rööpkülik .....	90
IV. Erikujulised rööpkülikud .....	93
V. Ülesandeid .....	96
<b>6. osa. Ringjoon ja hulknurk</b> .....	98—112
I. Ringjoone puutuja .....	98

II. Piirdenurk .....	101
III. Hulknurga sisse- ja ümberjoonestatud ringjoon ....	104
IV. Ülesandeid .....	111
<b>7. osa. Hulknurga pindala .....</b>	<b>113—147</b>
I. Kujundite pindvõrdsus .....	113
II. Hulknurga teisendamine pindvõrdseks ruuduks ...	116
III. Pindala mõõtmine .....	120
IV. Pindalateoreemid täisnurksest kolmnurgast .....	127
V. Ratsionaalne ja irratsionaalne pikkus .....	135
VI. Korrapärase hulknurga elementide arvutamine ...	138
VII. Ülesandeid .....	145
<b>8. osa. Ringjoone pikkus ja ringi pindala .....</b>	<b>148—161</b>
I. Ringjoone pikkus .....	148
II. Ringi pindala .....	154
III. Kaare pikkus ja sektori pindala .....	158
IV. Ülesandeid .....	160
<b>9. osa. Hulknurkade sarnasus .....</b>	<b>162—203</b>
I. Võrdelised sirglõigud .....	162
II. Sarnased hulknurgad .....	171
III. Hulknurkade sarnasuse rakendusi .....	181
IV. Täisnurkse kolmnurga lahendamine .....	188
V. Ülesandeid .....	199
Nurgafunktsioonid .....	204

## *Stereomeetria.*

<b>1. osa. Tasapindade ja sirgjoonte vastast. asetsemine ..</b>	<b>205—221</b>
I. Ruumi põhikujundid .....	205
II. Tasapindade lõikumine ja paralleelsus .....	209
III. Sirge ja tasapinna lõikumine .....	215
IV. Ülesandeid .....	219
<b>2. osa. Geomeetrilised kehad ja nende joonestamine ....</b>	<b>221—242</b>
I. Geomeetriliste kehade liigitelu .....	221
II. Geomeetriliste kehade joonestamine .....	230
III. Ülesandeid .....	240
<b>3. osa. Keha pindala ja ruumala .....</b>	<b>242—268</b>
I. Tahkkeha pindala ja ruumala .....	242
II. Pöördkeha pindala ja ruumala .....	252
III. Ülesandeid .....	261
Märksõnastik .....	269
Mõned erikaalud .....	273
Trükivigade õiendus .....	273
Sisukord .....	274