Великая теорема
ФЕРМАТА

$$a^n + b^n = c^n$$

и ея доказательство въ видѣ общей формулы.

---ооо---

Доказалъ И. П. Спээкъ.

---ооо---

(Переводъ съ эстонскаго.)

НАРВА.
Типографія М. Н. Миниса.
1918.

Est. A - 15190

Великая теорема ФЕРМАТА

$$a^n + b^n = c^n$$

и ея доказательство въ видѣ общей формулы.

———ooo———

Доказалъ И. П. СПЭЭКЪ.

Tartu Riikliku Ülikooli Raamatukogu
22181

———ooo———

Переводъ съ эстонскаго.

НАРВА.
Типографія М. Н. Миниса.
1918.

Перепечатка и переводъ безъ разрѣшенія автора воспрещается.

Est. A
Rahva Raamatukogu Rahvamajakogu
22384

Теорема и условія ея доказательства.

ТЕОРЕМА.

$$a^n + b^n = c^n .$$

Требуется доказать въ видѣ общей формулы *невозможность* этого равенства, если a, b, c, n цѣлыя числа и если n нечетное, первоначальное, число или вообще число больше 2-хъ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Въ условіяхъ доказательства сказано, что **a, b, c, n** цѣлыя числа и что $n = 2$. *)

Но что за числа a, b, c? Могутъ ли они быть числа какія угодно?

Нѣтъ, они не могутъ быть любыя числа, иначе не получилось бы означеннаго въ теоремѣ равенства, напр. (I)

$$2^2 + 2^2 \text{ не } = 4^2$$
$$3^2 + 7^2 \text{ не } = 10^2$$
$$16^2 + 23^2 \text{ не } = 35^2$$
$$36^2 + 8^2 \text{ не } = 44^2$$

и т. д.

Очевидно, a, b, c должны быть какія то особенныя числа, между ними должны существовать извѣстныя отношенія, они должны подчиняться извѣстному математическому закону, неизмѣнному во всѣхъ случаяхъ, какія бы величины они ни выражали. Они должны быть числа извѣстной категоріи. (II)

При этомъ a и b должны быть числа неодинаковой величины, потому что a не есть b, и два одинаковыхъ числа во 2-й степени никогда не равняются какому либо третьему числу во 2-й степени, напр. (III)

во 2-й

во 2-й

—32.

8—72)

во 2-й

$b^n = c^n$

Опечатки.

Въ доказательствѣ встрѣчаются, не по винѣ автора, опечатки, на которыя просимъ обратить вниманіе, хотя онѣ исправлены отъ руки, въ особенности — 1) На стр. 7-ой, Форм. 14, (V[1]) въ послѣднемъ равенствѣ между c . c недостаетъ малой (круглой) скобки; въ формулѣ 15-ой въ послѣднемъ слагаемомъ въ малыхъ (круглыхъ) скобкахъ лишнее **c**; на страницѣ 8-ой въ формулѣ 20-ой первая строка въ концѣ имѣетъ двѣ послѣднія буквы $b^2—b^3$, а надо читать $a^2—a^3$, и тамъ же въ 20-ой строкѣ сверху вмѣсто слова **числа** надо читать **степени.** -- 2) На страницѣ 9-ой внизу, въ выноскѣ, 2½ строки отъ словъ „первое слагаемое"... текстъ перепутанъ, сдѣланы пропуски и даны неправильныя выраженія, — эти строки надо исключить вовсе.

Теорема и условія ея доказательства.

ТЕОРЕМА.

$$a^n + b^n = c^n.$$

Требуется доказать въ видѣ общей формулы *невозможность* этого равенства, если a, b, c, n цѣлыя числа и если n нечетное, первоначальное, число или вообще число больше 2-хъ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Въ условіяхъ доказательства сказано, что **a, b, c, n** цѣлыя числа и что n = 2. *)

Но что за числа a, b, c? Могутъ ли они быть числа какія угодно?

Нѣтъ, они не могутъ быть любыя числа, иначе не получилось бы означеннаго въ теоремѣ равенства, напр. (I)

$$2^2 + 2^2 \text{ не} = 4^2$$
$$3^2 + 7^2 \text{ не} = 10^2$$
$$16^2 + 23^2 \text{ не} = 35^2$$
$$36^2 + 8^2 \text{ не} = 44^2$$

и т. д.

Очевидно, a, b, c должны быть какія то особенныя числа, между ними должны существовать извѣстныя отношенія, они должны подчиняться извѣстному математическому закону, неизмѣнному во всѣхъ случаяхъ, какія бы величины они ни выражали. Они должны быть числа извѣстной категоріи. (II)

При этомъ a и b должны быть числа неодинаковой величины, потому что a не есть b, и два одинаковыхъ числа во 2-й степени никогда не равняются какому либо третьему числу во 2-й степени, напр. (III)

$2^2 + 2^2 = 8$, и нѣтъ третьяго числа, которое во 2-й степени равнялось бы тоже 8-ми.

$3^2 + 3^2 = 18$, и нѣтъ третьяго числа, равнаго во 2-й степени 18-ти.

$4^2 + 4^2 = 32$, и нѣтъ третьяго числа, равнаго—32.

$5^2 + 5^2 = 50$, и нѣтъ третьяго, равнаго—50.

$6^2 + 6^2 = 72$, и нѣтъ третьяго, равнаго—72.

и т. д.

Числа, результаты, въ третьей колоннѣ (отъ 8—72) не равняются какому либо третьему числу, c, во 2-й

---

*) Въ извѣщеніи Геттингенскаго Общества Наукъ вмѣсто $a^n + b^n = c^n$ заявлены другія буквы, что, конечно, всеравно.

степени, такъ какъ отдѣльныя числа во 2-й степени даютъ результаты какъ разъ на половину меньшіе, чѣмъ полагалось бы, напр.

$$2^2 = 4 \qquad 5^2 = 25$$
$$3^2 = 9 \qquad 6^2 = 36$$
$$4^2 = 16 \qquad \text{и т. д.}$$

Здѣсь для примѣровъ взяты единицы перваго десятка или, какъ обыкновенно говорятъ, простыя. (IV)

Но могутъ ли примѣры съ другими единицами, т. е. съ десятками, сотнями, тысячами или ихъ различными соединеніями расходиться съ приведенными примѣрами?

Не могутъ. Потому что законъ счисленія или номераціи по десятиричной системѣ одинаковъ какъ для простыхъ единицъ, такъ и для единицъ десятковъ, сотень и прочихъ разрядовъ и классовъ числовыхъ величинъ и ихъ разнообразныхъ соединеній въ безконечной области чиселъ.

Да, наконецъ, если бы $a = b$, то ихъ можно было бы сложить, и тогда мы имѣли бы, напр.

$$(4 + 4) = 8; \text{ или } (4 + 4)^2 = 8^2;$$
$$8 = 8;\ 8^2 = 8^2;\ 8^3 = 8^3;\ 8^4 = 8^4$$

и т. д., благодаря чему теорема стала бы невозможной, такъ какъ: равныя числа въ равныхъ степеняхъ даютъ всегда равные результаты, въ какія бы степени ихъ ни возвышали.

Потому $a < b$ или наоборотъ, что, въ сущности, при рѣшеніи теоремы безразлично, какъ безразлично и перемѣна мѣстъ членовъ уравненія, т. е. вмѣсто $a^2 + b^2 = c^2$ сказать $c^2 = b^2 + a^2$ или $c^2 = a^2 + b^2$. (V)

Нетрудно и заключить, что c должно быть больше, чѣмъ a или b въ отдѣльности, потому что c должно, при возвышеніи въ одинаковую съ a и b степень $(n = 2)$, дать противовѣсъ a и b, т. е. дать равенство. (VI)

Но a и b вмѣстѣ $(a + b)$ должны быть больше c, такъ какъ сумма ихъ, равная c, дала бы примѣръ, приведенный въ положеніи III—IV, благодаря чему теорема стала бы невозможной. (VII)

И такъ, мы должны признать, во 1) что не всѣ числа удовлетворяютъ требованіямъ теоремы, а только числа a, b, c, къ которымъ, слѣдовательно, и относится требованіе о доказательствѣ, и во 2) что

$$a < b,$$
$$b < c$$
$$c < a + b.$$

Этихъ общихъ соображенiй достаточно, чтобы доказать теорему въ общемъ видѣ, т. е. дать общую формулу доказательства.

Числа a, b, c должны имѣть извѣстныя ариѳметическiя отношенiя и умѣщаться въ извѣстныя ариѳметическiя пропорцiи, на основанiи которыхъ мы и дадимъ общую формулу доказательства теоремы.

Положимъ, что

$$c - a = b - x, \qquad (1)$$

тогда $x = (a + b - c)$ (или: $b + a - c$). (2)

И мы имѣемъ:

$$\mathbf{c - a = b - (a + b - c)} \qquad (3)$$

Теперь умножимъ послѣднюю пропорцiю (3) на **c**, чтобы сразу получить всѣ данныя числа во 2-ой степени, при чемъ **c** будетъ во 2-ой степени въ чистомъ видѣ, а другiя съ нѣкоторыми приростами, которые мы выдѣлимъ особо; кромѣ того, послѣдующiй крайнiй членъ пропорцiи увеличится **c** разъ.*) И тогда мы имѣемъ:

$$\mathbf{c.\ c - (c.\ a) = c.\ b - [c.\ (a + b - c)]} \qquad (4)$$

Это будетъ по другому выраженiю то же:

$$\mathbf{c.\ c = c^2};- \qquad (\mathrm{I}^1) \quad (5)$$
$$\mathbf{c.\ a = a^2 + (c.\ a - a^2)};- \qquad (\mathrm{II}^1)$$
$$\mathbf{c.\ b = b^2 + (c.\ b - b^2)};- \qquad (\mathrm{III}^1)$$
$$\mathbf{c.\ (a + b - c) = c.\ (a + b - c)},- \qquad (\mathrm{IV}^1)$$

и тогда пропорцiя (4) принимаетъ слѣдующiй видъ:

$$\mathbf{c^2 - [a^2 + (c.\ a - a^2)] = [b^2 + (c.\ b - b^2)] - [c.\ (a + b - c)]} \qquad (6)$$

Въ этой пропорцiи (6) по условiю теоремы

$$\mathbf{c^2 = a^2 + b^2}$$

тогда должно:

$$\mathbf{[(c.\ a - a^2) + (c.\ b - b^2)] = [c.\ (a + b - c)]}, \qquad (7)$$

потому что въ пропорцiи (6) провѣрочно:

$$\mathbf{\{c^2 + [c.\ (a + b - c)]\} =}$$
$$\mathbf{\{[a^2 + (c.\ a - a^2)] + [b^2 + (c.\ b - b^2)]\}}$$

или обратно: сумма среднихъ членовъ = суммѣ крайнихъ; и если однѣ части среднихъ ($\mathbf{a^2 + b^2}$) = первому крайнему ($\mathbf{c^2}$), то другiя части среднихъ ($\mathbf{c.\ a -}$ $\mathbf{- a^2}$) + ($\mathbf{c.\ b - b^2}$) должны = послѣдующему крайнему, какъ сказано: [$\mathbf{c.\ (a + b - c)}$].

Если мы пропорцiю (6) умножимъ на **c**, то мы всѣ данныя числа теоремы сразу возвысимъ въ 3-ью степень, при чемъ **c** будетъ въ 3-ьей степени въ

---

*) Происхожденiе и даже величины приростовъ понятны, потому что мы вмѣсто **a. a** или $\mathbf{a^2}$ взяли **c. a**, вмѣсто **b. b** или $\mathbf{b^2}$ взяли **c. b.** и такъ какъ **c > a** и **> b**, то отсюда у **a** приростъ: ($\mathbf{c.\ a - a^2}$) и у **b**: ($\mathbf{c.\ b - b^2}$), а ($\mathbf{a + b - c}$) просто увеличивается **c** разъ: **c.** ($\mathbf{a + b - c}$).

чистомъ видѣ, а другія съ нѣкоторыми приростами, которые опять, какъ и при предыдущихъ пропорціяхъ (4), (5), (6), выдѣлимъ особо; кромѣ того, всѣ остальныя части пропорціи увеличиваются c разъ. И тогда мы имѣемъ:

$$c.\ c^2 - \{c.\ [a^2 + (c.\ a - a^2)]\} = \{c.\ [b^2 + (c.\ b - b^2)]\} - \\ -\{c.\ [c.\ (a + b - c)]\} \qquad (8)$$

Это будетъ по другому выраженію то же:

$$
\begin{aligned}
c.\ c^2 &= c^3; - && (\mathrm{I}^1)\\
c.\ a^2 &= a^3 + (c.\ a^2 - a^3), && (\mathrm{II}^1)\\
[c.\ (c.\ a - a^2)] &= [c.\ (c.\ a - a^2)]; - && (\mathrm{III}^1)\\
c.\ b^2 &= b^3 + (c.\ b^2 - b^3), && (\mathrm{IV}^1)\\
[c.\ (c.\ b - b^2)] &= [c.\ (c.\ b - b^2)]; - && (\mathrm{V}^1)\\
\{c.\ [c.\ (a + b - c)]\} &= \{c.\ [c.\ (a + b - c)]\}, && (\mathrm{VI}^1)
\end{aligned}
\qquad (9)
$$

и тогда пропорція (8) принимаетъ слѣдующій видъ:

$$c^3 - \{a^3 + (c.\ a^2 - a^3) + [c.\ (c.\ a - a^2)]\} = \\ = \{b^3 + (c.\ b^2 - b^3) + [c.\ (c.\ b - b^2)]\} - \{c.\ [c.\ (a + b - c)]\}. \qquad (10)$$

Въ этой пропорціи (10) третье слогаемое перваго средняго члена + (плюсъ) третье слогаемое второго средняго члена = (равняются) послѣдующему крайнему, т. е.,

$$\{[c.\ (c.\ a - a^2)] + [c.\ (c.\ b - b^2)]\} = \{c.\ [c.\ (a + b - c)]\}, \qquad [9]\ [\mathrm{III}^1, \mathrm{V}^1, \mathrm{VI}^1]$$

потому что эти слогаемыя и послѣдующій крайній членъ состоятъ изъ:

$$[(c.\ a - a^2) + (c.\ b - b^2)] = [c.\ (a + b - c)], \qquad [7]$$

умноженныя — каждое слогаемое и послѣдній крайній членъ въ отдѣльности на одного и того же множителя c, какъ объ этомъ сказано въ объясненіи къ (8).

Когда мы это равенство [9] изъ пропорціи (10) исключимъ,*) то у насъ по подобію пропорціи (7) останется другая половина пропорціи—другое равенство, а именно:

$$c^3 - [a^3 + (c.\ a^2 - a^3)] = [b^3 + (c.\ b^2 - b^3)] - 0\ (\text{нуль}) \qquad (11)$$

По этой формулѣ мы видимъ, что a^3 + еще одно слогаемое и $+ b^3$ и еще одно слогаемое $= c^3 + 0$, какъ сумма среднихъ членовъ пропорціи всегда = суммѣ ея крайнихъ членовъ; и если теперь сравнивать c^3 съ одной и $(a^3 + b^3)$ съ другой стороны, то ясно, что

$$c^3 > (a^3 + b^3) \\ \text{на } [(c.\ a^2 - a^3) + (c.\ b^2 - b^3)]\ ^{**)} \qquad (12)$$

*) Конечно, можно это равенство и не исключить изъ формулы, а сохранять и въ дальнѣйшихъ доказательствахъ, но отъ исключенія дѣло не пострадаетъ, между тѣмъ исключеніемъ упрощается и сокращается производство дѣйствій.

**) Формулировка должна быть понятна, такъ какъ (11): если c^3 безъ $[a^3 + (c.\ a^2 - a^3)] = [b^3 + (c.\ b^2 - b^3)]$, то $c^3 > [b^3 + (c.\ b^2 - b^3)]$ на $[a^3 + (c.\ a^2 - a^3)]$, слѣдовательно, $c^3 = b^3 + (c.\ b^2 - b^3) + a^3 + (c.\ a^2 - a^3)$, отсюда: $b^3 + a^3 < c^3$ или наоборотъ, какъ указано въ (12).

Слѣдовательно, $a^n + b^n$ не $= c^n$, если n больше 2-хъ, въ данномъ случаѣ 3 (нечетное, первоначальное).

Если мы пропорцію (11) умножимъ на c, оставляя нуль (0) безъ вниманія, т. е., исключая его, какъ ненужнаго въ дальнѣйшемъ, (но не забывая о его существованіи, какъ послѣдуюшаго крайняго члена пропорціи,) то мы всѣ данныя теоремою числа сразу возвысимъ въ 4-ую степень, при чемъ c будетъ въ 4-ой степени въ чистомъ видѣ, другія съ приростами, какозыя обозначаемъ особо; кромѣ того, прибавочныя слогаемыя увеличиваются c разъ. И тогда мы имѣемъ:

$$c.\,c^3 - \{c.\,a^3 + [c.\,(c.\,a^2 - a^3)]\} = \{c.\,b^3 + [c.\,(c.\,b^2 - b^3)]\} \quad (13)$$

Это значитъ по подобію формулъ (4), (5), (9):

$$\left.\begin{array}{lr} c.\,c^3 = c^4;\, - & (I^1) \\ c.\,a^3 = a^4 + (c.\,a^3 - a^4), & (II^1) \\ c.\,(c.\,a^2 - a^3) = c.\,(c.\,a^2 - a^3);\, - & (III^1) \\ c.\,b^3 = b^4 + (c.\,b^3 - b^4);\, - & (IV^1) \\ c.\,(c.\,b^2 - b^3) = c.\,(c.\,b^2 - b^3) & (V^1) \end{array}\right\} \quad (14)$$

и потому пропорція (13) принимаетъ слѣдующій видъ:

$$\begin{array}{l} c^4 - \{a^4 + (c.\,a^3 - a^4) + [c.\,(c.\,a^2 - a^3)]\} = \\ = \{b^4 + (c.\,b^3 - b^4) + [c.\,(c.\,b^2 - b^3)]\} \end{array} \quad (15)$$

И если теперь сравнивать c^4 съ одной и $a^4 + b^4$ съ другой стороны, то очевидно, что

$$c^4 > (a^4 + b^4)$$

на

$$\{(c.\,a^3 - a^4) + [c.\,(c.\,a^2 - a^3)] + (c.\,b^3 - b^4) + [c.\,(c.\,b^2 - b^3)]\} \quad (16)$$

Слѣдовательно, $a^n + b^n$ не $= c^n$, если n больше 2, въ данномъ случаѣ 4 (четное, составное).

Если мы всѣ составныя части пропорціи (15) умножимъ на c, то этимъ возведемъ данныя въ теоремѣ числа въ 5-ую степень, при чемъ c будетъ въ 5-ой степени въ чистомъ видѣ, а другія съ нѣкоторыми приростами, которые мы обозначаемъ особо; кромѣ того, добавочныя слогаемыя увеличиваются c разъ. И тогда мы имѣемъ:

$$\begin{array}{l} c.\,c^4 - \{c.\,a^4 + [c.\,(c.\,a^3 - a^4)] + [c.\,c.\,(c.\,a^2 - a^3)]\} = \\ \{c.\,b^4 + [c.\,(c.\,b^3 - b^4)] + [c.\,c.\,(c.\,b^2 - b^3)]\} \end{array} \quad (17)$$

Это значитъ по подобію формулъ (4), (5), (9), (14):

$$\left.\begin{array}{lr} c.\,c^4 = c^5;\, - & (I^1) \\ c.\,a^4 = a^5 + (c.\,a^4 - a^5), & (II^1) \\ c.\,(c.\,a^3 - a^4) = c.\,(c.\,a^3 - a^4), & (III^1) \\ c.\,c.\,(c.\,a^2 - a^3) = c.\,c.\,(c.\,a^2 - a^3);\, - & (IV^1) \\ c.\,b^4 = b^5 + (c.\,b^4 - b^5) & (V^1) \\ c.\,(c.\,b^3 - b^4) = c.\,(c.\,b^3 - b^4) & (VI^1) \\ c.\,c.\,(c.\,b^2 - b^3 = c.\,c.\,(c.\,b^2 - b^3) & (VII^1) \end{array}\right\} \quad (18)$$

и потому пропорція (17) принимаетъ слѣдующій видъ:

$$c^5 - \{a^5 + (c.\,a^4 - a^5) + [c.\,(c.\,a^3 - a^4)] + [c.\,c.\,(c.\,a^2 - a^3)]\} = \{b^5 + (c.\,b^4 - b^5) + [c.\,(c.\,b^3 - b^4)] + [c.\,c.\,(c.\,b^2 - b^3)]\} \quad (19)$$

И если теперь сравнивать c^5 съ одной и $a^5 + b^5$ съ другой стороны, то очевидно, что

$$c^5 > a^5 + {}^5b$$

на

$$\{(c.\,a^4 - a^5) + [c.\,(c.\,a^3 - a^4)] + [c.\,c.\,(c.\,\overset{a}{\cancel{b}}{}^2 - \overset{a}{\cancel{b}}{}^3)] + (c.\,b^4 - b^5) + [c.\,(c.\,b^3 - b^4)] + [c.\,c.\,(c.\,b^2 - b^3)]\} \quad (20)$$

Слѣдовательно, $a^n + b^n$ не $= c^n$, или n больше 2-хъ, въ данномъ случаѣ 5 (нечетное, первоначальное).

Если мы сравниваемъ, на сколько $c^3 > (a^3 + b^3)$, на сколько $c^4 > (a^4 + b^4)$ и на сколько $c^5 > (c^5 + b^5)$, то замѣчаемъ: чѣмъ больше степень, начиная съ 3-й включительно, тѣмъ разность между c^n съ одной и $a^n + b^n$ съ другой стороны больше, т. е. чѣмъ выше степень, тѣмъ $c^n > a^n + b^n$, если n вообще больше 2-хъ.

И если бы мы все продолжали возвышеніе степеней, то разность эта все увеличивалась и увеличивалась-бы — безконечно, какъ сами ~~числа~~ степени a, b, c, безконечны. Разумѣется, возвышеніе a, b, c въ 6-ую, 7-ую и т. д. степень — дѣло напрасное, потому что изъ приведенныхъ примѣровъ до 5-ой степени мы вполнѣ убѣдились въ невозможности равенства $a^n + b^n = c^n$, сели n больше 2-хъ.

Доказательство теоремы по этой формулѣ достаточно было бы довести только до 3-й степени, или, если угодно, до 4-ой a, b, c включительно, такъ какъ съ 5-ой степени начинается, какъ извѣстно изъ теоріи, повтореніе въ степеняхъ единицъ, и потому продолженіе возвышенія степеней отъ 4-ой дальше ничего новаго или неожиданнаго не можетъ дать. Но мы всетаки для наглядности и большей убѣдительности довели доказательство до 5-ой степени включительно.

И какія бы числа, малыя или большія, мы подъ a, b, c ни подразумѣвали и въ какія бы степени ихъ ни возвышали, они, взятыя конкретно по нашей общей буквенной формулѣ, составленной изъ ариѳметическихъ пропорцій, всегда оправдаютъ какъ теорему, такъ и ея доказательство по этой формулѣ.

И исключенія изъ этого правила быть не можетъ, такъ какъ $c > a$ и $> b$ и отношенія и пропорція ихъ $c - a = b - (a + b - c)$ постоянно сохраняются, какъ сохраняются подобныя же отношенія и пропорціональность при всѣхъ другихъ пропорціяхъ, полученныхъ отъ нея (первоначальной) черезъ умноженіе или возвышеніе. *)

Поэтому, на основаніи сказаннаго, по нашей общей формулѣ изъ ариѳметическихъ пропорціи — теорема Фермата $a^n + b^n = c^n$ доказана.

И. П. Спэкв.

*) Въ формулѣ (20) съ наглядностью вырисовывается даже путь, по которому легко обозначать, не производя предыдущихъ ариѳметическихъ дѣйствій, на сколько c^6, c^7, c^{11}, c^{25}, и т. д. больше $a^6 + b^6$, $a^7 + b^7$, $a^{11} + b^{11}$, $a^{25} + b^{25}$ и т. д., такъ какъ при n, большемъ 2, слогаемыя, составляющія сумму, на которую c^n больше $a^n + b^n$, представляютъ, начиная съ права на лѣво, восходящую по показателямъ степеней лѣстницу возвышенія приростовъ, умноженныхъ, какъ при a, такъ и при b, каждый приростъ въ отдѣльности, по подобію (20)~~: первое слогаемое, съ правой стороны, на 1 c, второе — на 2 c, третье на 3 c, четвертое, когда оно образуется, на 4 c, пятое на 5 c и т. д.~~

4
1.—

ESTICA
A-1519C
2238