I. POPOV

MATE-
MAATILISED
MEETODID
PÕLLU-
MAJANDUSES

I. POPOV

MATEMAATILISED MEETODID PÕLLUMAJANDUSES

KIRJASTUS „VALGUS“
TALLINN 1966

333 N
P 69

Originaali tiitel:

И. Г. Попов

Математические методы в экономических расчётах по сельскому хозяйству

Издательство «Колос»
Москва, 1964

Tõlkinud K. Tamjärv

Kaane kujundanud R. Kangert

Raamatus kirjeldatakse üldarusaadavalt matemaatiliste meetodite rakendamise aluseid põllumajanduse planeerimisel ja majandusliku efektiivsuse uurimisel. Peamist tähelepanu pööratakse sellele, kuidas püstitada ja lahendada ülesandeid optimaalsete variantide leidmiseks kolhooside ja sovhooside spetsialiseerimisel, põllumajandusliku tootmise paigutamisel, karja struktuuri kujundamisel, masina- ja traktoripargi töö organiseerimisel ning söödavarude kasutamisel.

Raamat on mõeldud plaaniorganite ja põllumajanduslike asutuste töötajatele, kolhooside ja sovhooside juhtijatele ja spetsialistidele ning põllumajanduse ökonoomikat, organiseerimist ja planeerimist õppivatele üliõpilastele. Raamatus on eri osa «Harjutusülesandeid», mille eesmärgiks on aidata lugejail suhteliselt lihtsate ülesannete iseseisva koostamise ja lahendamise teel matemaatilisi meetodeid põhjalikumalt tundma õppida.

TOIMETAJA EESSÕNA

Majanduslike protsesside planeerimise, analüüsimise ja juhtimise matemaatilised meetodid on hakanud viimastel aastatel kõigis rahvamajandusharudes, sealhulgas eriti põllumajanduses üha laiemalt levima. Sedamööda, kuidas on selgunud nende meetodite praktilise rakendamise võimalused ning tegelikud tulemused, mida nende abil ilma nimetamisväärsete lisakulutusteta võib saavutada, on kasvanud ka majandusalal töötajate huvi matemaatika vastavate harude, eeskätt lineaarse planeerimise vastu.

Kahjuks puudub meil sel alal siiani eestikeelne kirjandus. Ent ka mitmetes teistes keeltes avaldatud rohkearvuliste monograafiate ja artiklite seas pole kuigi palju neid, mille lugemisest oleks põllumajandusettevõtete töötajatele kasu. Takistuseks on suhteliselt pealiskaudsed teadmised matemaatikas. Kokkupuudetest nõudlikumas matemaatilises käsitluslaadis teostega on aga mõnelgi põllumajandusökonomistil, agronoomil ja loomakasvatajal sugenenud eelarvamus, nagu oleksid kõik need matemaatilised meetodid mõeldud rakendamiseks ainult matemaatikutele. Selliseid arvamuseavaldusi võib kuulda võrdlemisi tihti. Ometi on see täiesti väär. Matemaatilised meetodid majanduslike protsesside planeerimiseks, analüüsimiseks ja juhtimiseks on mõeldud just selleks, et neid rakendaksid eeskätt vastavate rahvamajandusharude töötajad, kes põrkavad iga päev kokku probleemidega, mida traditsiooniliste lihtsamate meetoditega lahendada ei saa. Kui nende meetodite rakendamine põllumajanduse spetsialistidele mingil põhjusel veel jõukohane pole, võiks see toimuda ka koostöös matemaatikutega. Ent tõepoolest tõhusaid, operatiivseid ja kasuga rakendatavaid tulemusi võib niiviisi saavutada ainult siis, kui koos töötavad põllumajanduse spetsialist, kes mõningal määral tunneb ka ise matemaatilisi planeerimismeetodeid, ning matemaatik, kellel on teadmisi põllumajandusest. Põllumajanduse eriteadlaste ja matemaatikute koostöös esinevate raskuste põhjuseks on enamasti nende eelduste mittetäitmine.

Eriti tähtis on, et põllumajanduse spetsialistid omandaksid kas või üldjoonteski majanduspraktikas üleskerkivate probleemide matemaatilise formuleerimise oskuse. Käesolev teos, mida kirjastus «Valgus» pakub ühe esimese matemaatilise planeerimise käsitlusena eesti põllumeeste lugemislauale, pole kaugeltki puudusteta. Ent jäägu need siin vaagimata. Tähtsam on, et raamatul on vähemalt üks oluline ja väga kaalukas positiivne külg. Temas on antud üldarusaadavas ja väga väheseid eelteadmisi nõudvas esitusladis korraga nii minimaalne hulk teadmisi lineaarse planeerimise meetoditest kui ka võrdlemisi üksikasjalik ülevaade vastavate ülesannete püstitamisel arendatavatest majanduslikest mõttekäikudest.

Matemaatikas ja eriti lineaarse planeerimise teoorias hästi kodus olev lugeja võib heita raamatu autorile ette kohati vahest liiga pikka peatumist niigi arusaadaval ja kergesti mõistetaval, ning teisal kiiret ülelibisemist tõepoolest sügavamat käsitlemist nõudvatest ja huvitavatest probleemidest. Ent kõigile neile metoodilistele ja muudele võimalikele vaieldavustele vaatamata on põhjust arvata, et just sellisena on I. Popovi teos omamoodi õnnestunud. Sellesse süvenemine nõuab lugejalt väga vähe, õieti ainult veidi kannatlikkust ja järjekindlust, võib aga pakkuda küllaltki mitmekülgseid teadmisi mitmes olulises ja muidu asjasse otseselt mittepühendatutele võrdlemisi raskesti omandatavas küsimuses.

Lugejaile — nii neile, kes leiavad endas piisavalt soovi ja tahtmist käesolev teos läbi lugeda ning kes huvituvad matemaatilise planeerimise üksikasjalikumast tundmaõppimisest, kui ka neile, kellele see raamat tundub vähepakkuv ja liiga pealiskaudne, et temaga aega raisata — tuleb soovitada oma teadmisi täiendada dots. Ülo Kaasiku peatselt ilmuva raamatu «Matemaatiline planeerimine» läbitöötamisega.

Nende lugejate abistamiseks, kes asuvad järgmise sama ainet käsitleva teosena läbi töötama mõnda venekeelset raamatut, ja ka selleks, et astuda väike samm matemaatilise planeerimise eestikeelse terminoloogia ühtlustamiseks, on lisatud raamatule valimik tõlkes kasutatud oskussõnu. Valimiku koostamisel on piirdutud ainult käesoleva teose originaalis sisalduvate ja seal suhteliselt sagedamini esinevate terminitega.

U. Mereste

SISSEJUHATUS

MATEMAATILISTE MEETODITE RAKENDAMINE MAJANDUSALASES UURIMISTEGEVUSES JA PLANEERIMISEL

Matemaatikal, mis uurib seaduspärasusi kvantitatiivsete suuruste vahelistes suhetes, on majandusteaduse arengus suur tähtsus. Juba sotsialistliku majanduse arenemise esimestest aastatest peale on teadlased ja praktikud rakendanud NSV Liidu rahvamajanduse planeerimisel suuremal või väiksemal määral kõrgema matemaatika ja matemaatilise statistika meetodeid. Juba kahekümnendate aastate algul koostati Kõrgemas Rahvamajanduse Nõukogus kogu riiki hõlmav tootmiskulude ja toodangu väljalaske ristbilanss. Kolmekümnendatel aastatel avaldasid meie majandusteadlased ja matemaatikud hulga artikleid, milles käsitleti kõrgema matemaatika meetodite rakendamist majanduse uurimisel ja mitmesugustes majanduslikes arvutlustes.

Uueks etapiks nii matemaatika enda arengus kui ka selle juurutamisel majandusse ja planeerimisse kujunes matemaatilise planeerimise meetodite loomine.

1939. aastal avaldati Leningradi professori L. V. Kantorovitši töö «Tootmise organiseerimise ja planeerimise matemaatilised meetodid», kus esitati mitmesuguste tehasesisese planeerimise ülesannete kohta käivate näidete varal lineaarse planeerimise alused. See oli esimene töö lineaarse planeerimise kohta maailmas. Veidi hiljem ilmus Leningradi professori V. V. Novožilovi artikkel, kus esitati matemaatiliste meetodite rakendamise alused rahvamajanduse planeerimisel. Kuid arvutuste keerukuse ja elektronarvutite puudumise tõttu ei levinud uued matemaatilised meetodid tol ajal kuigi laialdaselt.

Suure tõuke andis matemaatika arenemisele ja senisest laialdasemale rakendamisele teistel teadusaladel, sealhulgas majandusteaduses, elektronarvutite loomine. Sedamööda, kuidas laienes elektronarvutite tootmine, muutus aktuaalsemaks ka küsimus nende rakendamise võimalustest majanduslike nähtuste uurimisel ja majanduse planeerimisel. Ühtlasi hakkasid majandusteadlased ja matemaatikud intensiivsemalt tegelema majandusalaste ülesannete koostamise ja lahendamise meetodite loomisega. 1959. aastal moodustati NSV Liidu Teaduste Akadeemia Majandusteaduste Osakonna juurde majandusmatemaatiliste meetodite laboratoorium, mis 1963. aastal kujundati NSV Liidu Teaduste Akadeemia Majandusmatemaatika Keskinstituudiks (ЦЭМИ).[1] Laboratoorium tegeles majandusteaduslikes uurimistöödes rakendatavate uute meetodite väljatöötamisega ja nende juurutamise propageerimisega. 1959. aasta lõpul ilmus esimene, 1961. aastal aga veel teine köide akadeemik V. S. Nemtšinovi toimetatud teaduslike tööde kogumikust «Matemaatika rakendamine majandusteaduslikus uurimistegevuses». 1960. aasta aprillis peeti NSV Liidu Teaduste Akadeemia Majanduse Instituudis esimene üleliiduline teaduslik konverents matemaatika ja elektronarvutite rakendamisest majanduslikus uurimistegevuses ja majanduse planeerimisel. Sellel konverentsil arutasid matemaatikud ja majandusteadlased esmakordselt ühiselt, kuidas täiustada majandusteaduslike uurimistööde ja planeerimise meetodeid.

Viimastel aastatel on majandusmatemaatiliste meetoditega tegelemine märgatavalt intensiivistunud. Avaldatakse järjest uusi töid nii meie kui ka välismaa autoritelt.

1961. aastal andis kirjastus «Ekonomizdat» välja raamatu «Matemaatika ja elektronarvutite kasutamine planeerimisel», mille toimetasid A. G. Aganbegjan ja V. D. Belkin. On avaldatud A. L. Lurje, J. P. Gertšuki, I. J. Birmani jt. töid. 1962. a. anti välja A. G. Aganbegjani toimetusel õpik «Majandusharude ristbilansi koostamise alused» ja akadeemik V. S. Nemtšinovi monograafia «Majandusmatemaatilised meetodid ja mudelid».

1962. aastal peeti NSV Liidu Teaduste Akadeemia

[1] 1965. aastal loodi Tallinnas Majandusmatemaatika Keskinstituudi Eesti Filiaal, kes tegeleb peaasjalikult rahvamajanduse juhtimise automatiseerimise küsimustega Eesti NSV-s. — *Toimetaja märkus.*

Siberi Filiaalis üleliiduline teaduslik konverents matemaatilistest planeerimismeetoditest.

Tänu suurele efektiivsusele on matemaatilised meetodid saanud üldiselt tunnustatuks. Nad jõuavad peagi välja teaduslike laboratooriumide seinte vahelt ning antakse plaani- ja majandusorganite käsutusse. Siiski kulgeb uute matemaatiliste planeerimismeetodite väljatöötamine, eriti aga nende juurutamine praktikasse seni veel liiga aeglaselt.

Majanduslike nähtuste uurimise uute matemaatiliste meetodite väljatöötamine ja nende tarvituselevõtmine on praegu teadlaste ja praktikute tähtsamaid ülesandeid.

Kommunistliku Partei programmis, mis võeti vastu ajaloolisel XXII kongressil, on öeldud: «Kõigis planeerimise ja majanduse juhtimise lülides tuleb peatähelepanu koondada materiaalsete, tööjõu- ja finantsressursside ning loodusrikkuste kõige ratsionaalsemale ja efektiivsemale kasutamisele ning ülearuste kulutuste ja kadude likvideerimisele. Saavutada ühiskonna huvides kõige suuremaid tulemusi kõige väiksemate kulutustega — selline on majandusliku ülesehitustöö vankumatu seadus.» Ja edasi: «Majandusteadlaste tähelepanu peab olema suunatud sellele, et leida võimalused materiaalsete ja tööjõuressursside kõige efektiivsemaks kasutamiseks rahvamajanduses, et leida tööstusliku ja põllumajandusliku tootmise planeerimise ja organiseerimise parimad meetodid. . .»[1]. Majandusteaduse ülesanded on programmis äärmiselt selgelt sõnastatud. Selles on avaldatud optimaalse planeerimise üldkriteerium: saavutada suurimaid tulemusi minimaalsete kulutustega. Nende ülesannete lahendamine eeldab moodsate matemaatiliste meetodite ja elektronarvutite kasutamist.

Uute meetodite rakendamine loob reaalsed võimalused koostada kõige paremad plaanivariandid alates tsehhidest ja ettevõtetest kuni kogu rahvamajanduseni välja. Matemaatika ja elektronarvutite kasutuselevõtt annab võimaluse kogu rahvamajanduse planeerimis-, arvestus-, aruandlus- ja juhtimissüsteemi ümberkorraldamiseks, sadade tuhandete töötajate vabastamiseks kantseleitööst ja nende töö kasulikumaks rakendamiseks ühiskonnas.

---

[1] Nõukogude Liidu Kommunistliku Partei programm, Tallinn 1961, lk. 79 ja 118.

Tänu matemaatikale ja elektronarvutitele tõuseb majandusteadus uuele, kõrgemale tasemele ning muutub täppisteaduseks. Matemaatika ja elektronarvutite kasutamine majandusteaduslikus uurimistegevuses nõuab ka majandusteooria igakülgset süvendamist.

Arvutuste täpsus ei olene ainult kasutatava arvutusmasina tööst ega algoritmi iseärasustest, vaid peamiselt sellest, kas ülesanne on õigesti püstitatud, kas lähteandmed on õiged, s. o. usaldatavad ja majanduslikult õigesti mõtestatud. Seoses sellega tuleb majandusteadlastel senisest intensiivsemalt tegelda tootmistegevust igakülgselt iseloomustavate majanduslike näitajate, progressiivsete kulunormatiivide ja tootmise efektiivsuse kõige täpsemate kriteeriumide väljatöötamisega.

Majanduslike nähtuste matemaatiline formuleerimine ei ole mõeldav ilma vastavate teadmisteta matemaatika valdkonnas, veelgi vajalikum on aga seejuures majandusteaduse põhjalik tundmine. Majanduslikke ülesandeid võivad matemaatiliselt õigesti püstitada ainult need majandusteadlased, kes valdavad matemaatikat, või siis majandusteadlased koostöös matemaatikutega. Vaatamata nende suurele efektiivsusele edeneb uute matemaatiliste meetodite ja elektronarvutite kasutuselevõtmine praktikas seni aeglaselt. Selle üheks põhjuseks on vastavate oskustega inimeste vähesus.

Et matemaatika ja elektronarvutite rakendamise küsimust edukalt lahendada, tuleb rahvamajanduse planeerimise kõigis lülides, riiklikes plaaniorganites ja ettevõtetes pöörata suurt tähelepanu kaadri ettevalmistamisele. Rahvamajanduses kasutatavate elektronarvutite arv kasvab kiiresti. Praegu on üheks kõige aktuaalsemaks ülesandeks valmistada ette selliseid majandusteadlasi, kes oleksid võimelised rakendama planeerimistöös matemaatilisi meetodeid ja elektronarvuteid.

MATEMAATILISTE MEETODITE RAKENDAMISE VAJALIKKUS PÕLLUMAJANDUSLIKU TOOTMISE PLANEERIMISEL

Matemaatiliste meetodite, eriti aga lineaarse planeerimise meetodite rakendamiseks on põllumajanduses laialdasi võimalusi. Põllumajandus on väga suur ja seejuures üks tähtsamaid rahvamajandusharusid. Maaviljelus- ja loomakasvatussaaduste tootmine sõltub paljudest looduslikest ja majanduslikest teguritest. Tootmise tohutu ulatuse ning looduslike, klimaatiliste ja majanduslike tingimuste suurte erinevuste tõttu on põllumajanduse planeerimisel ja organiseerimisel ning kogu selle rahvamajandusharu juhtimisel suuri raskusi.

Lähematel aastatel peab põllumajanduse toodang nii palju kasvama, et põllumajandussaaduste vajadus oleks kõikjal täielikult rahuldatud. Põllumajanduse arendamiseks assigneeritakse suuri summasid. Kõigi põllumajandustöötajate keskseimaks ülesandeks on praegu tootmise mahu suurendamine, tööviljakuse tõstmine ja toodangu omahinna alandamine.

Sellistes tingimustes ilmneb nüüd suurem vajadus kui kunagi varem täiustada põllumajanduse arendamise planeerimisel ja majanduslikul analüüsimisel kasutatavaid võtteid, töötada välja uusi meetodeid, mis aitaksid tootmisvõimalusi paremini kasutada.

Nagu teada, on põllumajandusel teiste rahvamajandusharudega võrreldes hulk olulisi iseärasusi. Uute matemaatiliste planeerimismeetodite rakendamise seisukohalt tuleb neist silmas pidada järgmisi.

Esiteks on põllumajandus tihedalt seotud looduslike tingimustega, teda iseloomustab tootmise hooajalisus. Vastukaaluks sesoonsusele, samuti ka tihedate seoste tõttu looduslike tingimustega tuleb sovhoosides ja kolhoosides tegelda korraga mitme erineva tootmisharuga. Nii tootmise hooajalisus kui ka paljuharulisus põhjustavad majandite tegevuse planeerimisel ja juhtimisel täiendavaid raskusi.

Teiseks toodetakse põllumajanduses kümneid eri tooteid. Kogu mitmekesine toodang saadakse aga ühtede ja samade tootmisressursside — maa, tööjõu ja põllumajandusmasinate abil.

Kolmandaks on põllumajandus teiste majandusharudega võrreldes tunduvalt iseseisvam ja isoleeritum. Iga tsooni põllumajanduslike kõlvikute pindala ja töövõimeliste inimeste arvu saab igal antud perioodil enam-vähem täpselt ette kindlaks määrata. Ressursid, nagu söödad, seemnevili, istutusmaterjal, orgaaniline väetis, toodab iga majand endale ise. Muidugi on kaasaegne põllumajandus tihedalt seotud tööstuse ja teiste rahvamajandusharudega.

Põllumajandusettevõtted saavad linnast põllumajandusmasinaid, kütust, mineraalväetisi, mürkkemikaale, remondi- ja ehitusmaterjale. Nende tootmisressursside maht määratakse kindlaks majandusharude ristbilansi põhjal.

Neljandaks toodab põllumajandus toiduaineid ja tööstusele tooraineid, mis kasutatakse pärast töötlemist ära peamiselt kodanike isiklikuks tarbimiseks. Nii on vajalikku põllumajandustoodangu hulka igaks antud perioodiks võrdlemisi kerge leida ja seda saab teha suhteliselt täpselt.

Kahest esimesest iseärasusest tuleneb tootmise organisatsiooni ja planeerimise komplitseeritus ning variantide rohkus. Kolmas ja neljas iseärasus võimaldavad enamvähem täpselt kindlaks määrata tootmisressursid ja vajaliku toodangu hulga, s. o. need iseärasused kergendavad teataval määral planeerimist ja üldse majanduslikke arvutusi. Kokkuvõttena võib öelda, et kõik mainitud iseärasused iseloomustavad põllumajandust sellise rahvamajandusharuna, kus saab uusi matemaatilisi meetodeid ja elektronarvuteid õige laialdaselt rakendada.

Paljude põllumajanduse probleemide lahendamiseks vajalikud meetodid on juba praegu piisavalt läbi töötatud, nende järgi koostatakse ja lahendatakse elektronarvutitel mitmeid majandusmatemaatilisi ülesandeid. Muuseas näiteks ülesandeid põllumajanduse paigutuse ja spetsialiseerimise, kolhooside ja sovhooside tootmisharude koordineerimise, söödabaasi organiseerimise ja söödaressursside kasutamise, loomakasvatusmajandite ökonoomika ja organiseerimise, vajalike põllumajandusmasinate arvu leidmise ja nende parema kasutamise kohta.

Väljatöötamisel on matemaatilised meetodid põllumajanduslike ettevõtete optimaalse suuruse kindlaksmääramiseks, põllumajandussaaduste riikliku kokkuostu optimaalseks planeerimiseks ja neile saadustele teaduslikult põhjendatud hindade määramiseks.

LINEAARSE PLANEERIMISE MEETODITE LÜHIKE ISELOOMUSTUS

Majanduslikus analüüsis, tootmise organiseerimisel ja planeerimisel on seni kasutatud ja kasutatakse ka praegu ainult kõige lihtsamaid matemaatilisi tehteid ja valemeid. Tegelikus majapidamises kasutatakse laialdaselt geomeetria valemid. Nii arvutatakse täisnurkse põllulapi pindala tema pikkuse ja laiuse korrutisena, silotranšee ruumala leitakse tema pikkuse, keskmise laiuse ja sügavuse korrutisena. On olemas hulk valemeid ja tabeleid, mis kergendavad õige mitmesuguste vajalike suuruste arvutamist.

Majandusteadust ei rahulda aga üksnes muutumatute suuruste tundmine. Olulisem on teada, missugune on näitajate iseloom, missugused on nende muutumise seaduspärasused majanduslike hüviste tootmise protsessis, et otstarbekohaselt kasutada neid seaduspärasusi majanduslikus ülesehitustöös. Iga toote valmistamiseks, iga tööprotsessi organiseerimiseks on olemas lõpmatu hulk erinevaid võimalusi (variante). Ülesanne seisab järelikult selles, et leida nende seast parim variant, mis võimaldaks maksimaalselt säästa ühiskondlikku tööd ning anda rohkem toodangut väiksemate kulutustega.

Öeldust järeldub, et majandusalastes ülesannetes on esiteks palju omavahel erinevalt seotud tundmatuid, see tähendab, et need on keerulised ülesanded, ja teiseks, et nad on ekstreemväärtuse leidmise ülesanded ehk ekstreemumülesanded (ülesanded maksimumi või miinimumi leidmiseks).

Matemaatikas on ekstreemumülesannete diferentseerimise teel lahendamine ammugi tuttav. Kui aga ülesanne on avaldatud paljude tundmatutega lineaarvõrrandite süsteemina, siis diferentseerimise teel ekstreemväärtusi leida ei saa.

Lineaarvõrrandite lahendamine on seejuures küllaltki lihtne. Lineaarvõrrandite süsteemid aga võimaldavad praktilisteks vajadusteks piisava täpsusega reprodutseerida keerulisi majanduslikke nähtusi, mida mõjustab hulk omavahel seotud tegureid. Sellest ongi tekkinud vajadus leida matemaatilisi meetodeid, mis võimaldaksid kindlaks määrata ekstreemumi (maksimumi või miinimumi) lineaarvõrrandite süsteemi lahendamise teel. Selleks otstarbeks loodud meetodid on saanud tuntuks üldnimetusega lineaarne planeerimine.[1]

Lineaarse planeerimise meetoditega lahendatakse majanduses peamiselt optimaalsete plaanide koostamise ülesandeid. Lineaarne planeerimine võimaldab küllaltki lihtsate matemaatiliste meetoditega leida tootmisprotsessi organiseerimise parim (optimaalne) variant ja avastada kasutamata reserve. Ühtlasi tulevad päevavalgele ka mitteoptimaalse plaanivariandi kasutamisest tekkivad majanduslikud kaod.

Lineaarse planeerimise meetodid on kasutatavad niisuguste ülesannete puhul, mille tingimused on avaldatud lineaarvõrrandite või -võrratustena, mille lahendamise eesmärk (kriteerium) on selgesti väljendatud ja matemaatiliselt formuleeritud ning mille lahendamiseks on mitu võimalikku varianti.

Matemaatikas on tõestatud, et lineaarvõrrandite või -võrratuste süsteemi optimaalseks lahendiks on hüpertasapindade süsteemi poolt n-mõõtmelises ruumis kujundatud hulktahuka mingi ühe tipu või tahu väärtus. Seda laadi ülesande lahendamine toimub nii, et lähenetakse vähehaaval, samm-sammult sellele tahule või tipule, kus optimaalne lahend asub.

Lineaarse planeerimise kõigile põhimeetoditele on ühine see, et algul koostatakse esialgne mitteoptimaalne plaan. Esialgne plaan võetakse edasise lahenduskäigu aluseks ning hakatakse seda järk-järgult parandama, kuni saadakse optimaalne plaanivariant.

Lineaarse planeerimise meetodite eriti suuri hüvesid on see, et arvutamine kulgeb ainult ühes suunas — optimaalsele plaanile lähenemise suunas. Seejuures saab igal

[1] Vene keeles nimetatakse matemaatika vastavat osa terminiga *линейное программирование*, kusjuures sõna *программирование* on kahetähenduslik. Peale siin käsitletud mõiste tähistatakse temaga veel elektronarvutitele tööprogrammide (käskude süsteemi jms.) koostamist. Niisama kahetähenduslik on ka inglise *programming* ja saksa *Programmierung*. Et siin on tegemist kahe oluliselt erineva mõistega, on Tartu Riikliku Ülikooli arvutusmatemaatika kateeder teinud ettepaneku neid eesti keeles teineteisest eristada — nimetada *programmeerimiseks* ainult programmide koostamist, lineaarvõrrandite süsteemide abil majandusmatemaatiliste ülesannete lahendamist aga *lineaarseks planeerimiseks*. Käesoleva teose tõlkimisel on seda soovitust järjekindlalt rakendatud. — *Toimetaja märkus.*

järjekordsel arvutussammul teada, kas optimum on juba leitud või mitte, ja kui ei, siis millises suunas tuleb arvutamist jätkata.

Optimaalse plaani koostamine on seotud uute tehnoloogiliste meetodite loomise ja juurutamisega, tootmiskulude progressiivsete normide väljatöötamisega, tootmisprotsessi õige organiseerimise ja tootmisressursside otstarbekohase jaotamisega.

Lineaarse planeerimise meetodeid kasutades saab leida, kuidas tootmisressursse antud tehnoloogia ja kehtivate kulunormide kohaselt kõige paremini kasutada.

Paljusid majandusliku sisuga ülesandeid saab avaldada lineaarvõrrandite või -võrratuste süsteemina, näiteks kujul

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m.$$

On vaja leida antud süsteemi rahuldavad mittenegatiivsed muutujate väärtused, mille puhul etteantud lineaarse avaldise sihifunktsiooni ehk funktsionaali $C = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ väärtus muutub ekstreemseks, s. t. maksimaalseks või minimaalseks.

Kui süsteemis esinevad võrrandite asemel võrratused, siis saab neid abimuutujate avaldistesse sissevõtmisega kergesti võrranditeks teisendada.

Erinevaid ülesandeid tuleb nende lahendamisel ka erinevalt käsitleda. Lineaarse planeerimise raames on selleks kasutada hulk erinevaid meetodeid. Eriti levinud on neist simpleksmeetod ja jaotusmeetod. Kõige universaalsem on simpleksmeetod. Selle meetodi abil saab leida optimaalseid lahendeid paljudele majanduslikele ja tehnilistele ülesannetele, kui nende tingimused vastavad lineaarse planeerimise nõuetele.

Simpleksmeetodi eeliseks on, et ülesandes esinevaid erinevaid suurusi ei ole vaja ühismõõtsustada, s. o. mingisse ühtsesse mõõtühikusse ümber arvutada. Tootmisressursid ja kulukoefitsiendid võetakse ülesande tingimustesse samades mõõtühikutes, milles neid tavaliselt avaldatakse: hektarites, inimpäevades, masintundides, traktorvahetustes[1], söötühikutes, tsentnerites, rublades jne.

Selle erijoone tõttu saab ülesande tingimustesse võtta hulgaliselt erinevaid tegureid, mis nii- või teistsugusel määral avaldavad mõju tootmise tulemustele. Pealegi on erinevate naturaalühikute ümberarvutamine ühtsetesse tingühikutesse iseenesest küllaltki tülikas, mõnikord aga hoopis võimatu. Tinglike mõõtühikute kasutamisel suureneks ka arvutustulemuste moonutamise tõenäolisus. Võimalus võtta samasse ülesandesse paljusid erilaadseid suurusi laiendab tunduvalt simpleksmeetodiga lahendatavate ülesannete ringi. Kuid simpleksmeetodil ülesandeid lahendades on tarvis teha küllaltki palju arvutusi. Mõningaid mitte eriti keeruka struktuuriga lineaarse planeerimise ülesandeid võib aga lahendada ka lihtsamate meetodite abil. Laialdaselt on tuntud näiteks nn. transpordiülesande lahendamine jaotusmeetodil. Selle meetodi olemust käsitletakse V peatükis.

LINEAARVÕRRANDITE SÜSTEEMI MÕISTE

Lineaarne planeerimine kujutab endast uut osa matemaatikas, mis liitub lineaaralgebraga. Lineaaralgebra uurib mitme tundmatuga lineaarvõrrandite süsteeme. Lineaarseteks nimetatakse võrrandeid, milles leiduvad ainult esimese astme tundmatud. Graafiliselt kujutab

---

[1] Eri mõõtühikute korrutisena saadud kombineeritud mõõtühikute nimetused, nagu *traktorvahetus, masinvahetus, masintund, tsentnersöötühik* jt. on käesolevas töös järjekindlalt nimetavalise liitumusega, nagu neid tegelikult kasutatakse ja nagu see on ka sisuliselt õige (analoogiliselt niisamuti tuletatud ühikunimetustega *kilogramm-meeter, meeterkilogramm, tonnkilomeeter* jne.). E. Nurm jmt. on teinud ettepaneku tuletada vastavaid ühikunimetusi kahel eri viisil: nimetavaliselt, kui ühend koosneb võõr- (või rahvusvahelistest) sõnadest (*tonnkilomeeter, meeterkilogramm*) ja omastavaliselt, kui ühendatakse eesti «oma» sõnu (*vagunikilomeeter*). Mõned nii tuletatud terminid sisalduvad ka viimases «Õigekeelsuse sõnaraamatus». Et selline vahetegemine pole sisuliselt põhjendatud, ei ole seda soovitust siin järgitud. Vajadust selles küsimuses «ÕS-ist» hälbida on üksikasjalikumalt põhjendatud teisal; vt. U. Mereste, Kombineeritud mõõtühikute nimetused liitsõnadena, «Keel ja Kirjandus» 1958, lk. 352; Mida arvata «Õigekeelsuse sõnaraamatust», «Keel ja Kirjandus» 1961, lk. 115 ning toimetuse järelmärkust E. Nurme jt. artiklile «Õigekeelsuse sõnaraamatu» arvustuste puhul, «Keel ja Kirjandus» 1961, lk. 564. — *Toimetaja märkus.*

niisugust kahe tundmatuga lineaarvõrrandit tasapinnal sirgjoon. Siit pärineb ka nimetus — lineaarne.

Lineaarvõrrandite süsteemidega tutvumist alustatakse juba keskkooli matemaatikakursuse elementaaralgebra osas. Erinevalt elementaaralgebrast käsitleb kõrgem algebra määramata arvu tundmatute ja võrranditega lineaarvõrrandite süsteeme.

Olgu süsteemis m võrrndit ja igas võrrandis n tundmatut. Tundmatuid tähistame tähega x: $x_1, x_2 \ldots x_n$. Võrrandid nummerdatakse järjekorras samuti ühest kuni m-ini.

Tundmatu järjekorranumber tähistatakse indeksiga j, võrrandi järjekorranumber aga indeksiga i. Võrrandis järjekorranumbriga i tähistatakse muutuja x_j juurde kuuluvat kordajat sümboliga a_{ij}. i-nda võrrandi vabaliiget tähistatakse b_i.

Esitatud tähistusi kasutades võib lineaarvõrrandite süsteemi kirjutada üldkujul järgmiselt:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{array}$$

Lineaarvõrrandite süsteemi lahendiks nimetatakse antud süsteemi rahuldavate kõigi tundmatute väärtuse kogumit. Näiteks on kahest kahe tundmatuga võrrandist koosneva süsteemi

$$\begin{array}{r} 2x_1 + 3x_2 = 12 \\ 4x_1 - x_2 = 10 \end{array}$$

lahendiks arvud

$$x_1 = 3,\ x_2 = 2.$$

Kui võrrandisüsteemil on kas või üksainus lahend, nimetatakse teda lahenduvaks süsteemiks. Kui süsteemil ei ole ühtki lahendit, nimetatakse teda mittelahenduvaks. Sellise süsteemi näiteks sobib süsteem

$$\begin{array}{r} x_1 + 2x_2 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 = 6. \end{array}$$

Kui võrrandisüsteemil on ainult üks lahend, nimetatakse teda määratud süsteemiks. Süsteemi, millel on rohkem kui üks lahend, nimetatakse määramata süsteemiks. Määratud süsteemis on tundmatute arv võrrandite arvuga võrdne või sellest väiksem, s. o. $n=m$ või $n<m$. Määramata süsteemis on $n>m$.

Nii selgub, et võrrandisüsteem

$$3x_1+x_2+x_3=11$$
$$4x_1+2x_2=16$$

on määramata süsteem. Seda saab lahendada ainult siis, kui anda ühele tundmatutest mingi meelevaldne (suvaline) väärtus. Et meelevaldseid väärtusi võib igal suurusel olla kuitahes palju, siis on võrrandisüsteemil ka lõpmatu suur hulk lahendeid.

Et määramata süsteemi lahendada, muudetakse see määratud süsteemiks, andes tema mõnele tundmatule väärtuseks null. Võrdsustades ülaltoodud näite võrrandites olevad tundmatud kordamööda nulliga, saame järgmised kolm lahendit:

1) kui $x_1=0$, siis $x_2=8$, $x_3=3$;
2) kui $x_2=0$, siis $x_1=4$, $x_3=-1$;
3) kui $x_3=0$, siis $x_1=3$, $x_2=2$.

Majanduslikes ja teistes konkreetsetes ülesannetes on tundmatuteks teatud kindla majandusliku mõttega suurused (mõne tooteliigi toodangu hulk jne.) ja neil on tavaliselt mõtet ainult siis, kui nende väärtus on positiivne.

Meie näites toodud kolmest lahendist pakuvad huvi ainult kaks — esimene ja kolmas. Teises lahendis on $x_3=-1$, mistõttu see ei saa olla reaalne.

Oletame edasi, et x_1, x_2 ja x_3 tähendavad mingi kolme eri liiki toote toodangu hulki, mida võidakse saada tingimustel, mis sisalduvad vaadeldavas kahest kolme tundmatuga lineaarvõrrandist koosnevas süsteemis. Tundmatute kordajad tähendavad seejuures teatud ressursside kulunorme ühe toodanguühiku tootmiseks, vabaliikmed 11 ja 16 aga seda, kui palju ressursse on olemas. Oletame, et toodanguühik x_1 maksab 5 rubla, x_2 — 4 rubla, x_3 — 3 rubla. Tuleb leida lahend, mis tagaks maksimaalse maksumusega toodangu saamist.[1] Kahest reaalsest lahendist on ilmselt soodsam see, mille puhul $x_1=0$. Sel juhul on kogutoodangu maksumus $(8\cdot4+3\cdot3=)$ 41 rubla. Kol-

[1] Vt. märkus lk. 73.

manda lahendi puhul saadakse samal ajal kogutoodangut ainult ($3 \cdot 5 + 2 \cdot 3 =$) 21 rubla eest.

Esitatud näites puudutasime põgusalt mõningaid lineaarse planeerimise elemente. Matemaatika seisukohast on lineaarne planeerimine meetodite kogum positiivsete lahendite leidmiseks määramata lineaarvõrrandite süsteemidele.

Järgnevates peatükkides käsitletakse mõningaid neist meetodeist ja nende kasutamist põllumajanduse planeerimisel ning analüüsimisel.

I PEATÜKK

PÕLLUMAJANDUSETTEVÕTTE TOOTMISHARUDE OPTIMAALSE KOMBINATSIOONI LEIDMISE METOODIKA

ÜLESANDE PÜSTITAMINE

Vajadus tegelda sovhoosides ja kolhoosides korraga mitme tootmisharuga on tingitud põllumajandusliku tootmise spetsiifikast. Igas majandis tuleb eelkõige arendada neid tootmisharusid, mis antud oludes annavad suurimaid tulemusi. Iga üksiku tootmisharu efektiivsust tuleb käsitleda seoses teiste harudega. Oletagem näiteks, et põllundus annab teatud majandis palju suuremat tulu kui loomakasvatus. Kui aga selles majandis loomakasvatus üldse likvideerida, siis põllundusest saadavad tulud langeksid esmajoones põllumajandusliku tootmise hooajalisuse tõttu. Lisaks sellele jääks majand ilma ka orgaanilisest väetisest.

Eri tootmisharude kombineerimine vähendab kolhoosides ja sovhoosides põllumajandusliku tootmise hooajalisust, võimaldab põllumajandusmasinaid ja tööjõuressursse täielikumalt kasutada ning muudab tootmise rütmilisemaks. Samal ajal on aga ebasoovitav, kui ühes majandis tegeldakse liiga rohkete tootmisharudega. Asi on nimelt selles, et majandite mõõtmed on piiratud; seetõttu on tootmisharud seda väiksemad, mida rohkem neid on. Siin hakkab mõjuma teine tegur — suurtootmise eelised väiketootmisega võrreldes.

Järelikult tuleb kolhoosides ja sovhoosides eri tootmisharud selliselt kombineerida, et oleksid välditud kitsalt spetsialiseeritud majandite puudused ning kasutataks ära ka suurtootmise eelised.

Igas majandis on tootmisharude seostamiseks mitmeid eri võimalusi. Seostamise variante võib olla arvutu hulk. Valida tuleb neist antud looduslikes ja majanduslikes tingimustes optimaalne.

Tootmisharude kombineerimise optimaalse variandi leidmiseks kasutatakse lineaarse planeerimise meetodeid, eriti simpleksmeetodit.

Tutvumist selle meetodiga on otstarbekas alustada hästi lihtsast näitest.

Oletame, et on vaja välja arvutada, missuguses vahekorras kasvatada majandis kaht kultuuri — suhkrupeeti ja otra —, et saada maksimaalset hulka söötühikuid. Oletame, et nende kultuuride viljelemiseks on majandil 2000 ha põldu ja kõik vajalikud põllutöömasinad; mehhanisaatorid teevad hooaja jooksul 3200 traktorvahetust; hobustega ja käsitsi tehtavatel töödel tehakse 18 000 inimpäeva. Suhkrupeedi saagikus on 200 ts, odral 20 ts hektarilt. Tööjõu kulu hektarile on suhkrupeedil 22 inimpäeva hobu- ja käsitsitööd ja 4,5 traktorvahetust mehhaniseeritud töid; ühe hektari odra kohta on tööjõu kulu vastavalt 2 inimpäeva ja 0,5 traktorvahetust. Söötühikutesse ümberarvutamise koefitsient on suhkrupeedil 0,25 ja odral 1,2.

Seega võib saada suhkrupeeti igalt hektarilt 50, otra aga 24 tsentnersöötühikut. Suhkrupeet annab järelikult rohkem saaki. Kuid selleks, et kasvatada suhkrupeeti kõigil 2000 hektaril, ei jätku tööjõudu. Kui aga külvata ainult otra, saaksime kogu külvipinnalt ainult 48 000 tsentnersöötühikut. Seejuures jääks tunduv osa tööjõuvarudest kasutamata.

Neis tingimustes ei võimalda ilmselt kumbki kultuur omaette kõiki ressursse täielikult ära kasutada ega maksimaalselt söötasid saada. Järelikult tuleks viljelda mõlemaid kultuure teatud kindlas vahekorras. See vahekord ongi vaja välja arvutada.

Kuna me siiani veel ei tea, kui palju tuleb toota suhkrupeeti ja kui palju otra, siis tähistame suhkrupeedi koguse x_1-ga, odra koguse x_2-ga. Seejärel leiame kummagi kultuuri ühe tsentneri tootmiskulud, tuginedes andmeile saagikuse ja ühele hektarile kulutatava tööjõu normide kohta.

Need andmed ja tootmisressursside üldkogused esitame järgneva tabelina:

Tootmis-ressursid	Mõõtühik	Kulud ühe tsentneri kohta		Kokku tootmisres-sursse
		suhkru-peedil (x_1)	odral (x_2)	
Põllumaa	ha	0,005	0,05	2 000
Hobu- ja käsitsitöö	inim-päev	0,11	0,1	18 000
Mehhaniseeritud töö	traktor-vahetus	0,0225	0,025	3 200

Üldse toodetava suhkrupeedi koguse tähistasime x_1 ja vastava odrakoguse x_2. Et saada 1 ts suhkrupeeti, on vaja 0,005 ha põldu, ühe odratsentneri saamiseks vajatakse 0,05 ha põldu. Kokku kasutab majand nende kultuuride kasvatamiseks ära 2000 ha põldu. Neil andmetel võime kirjutada:

$$0{,}005x_1+0{,}05x_2\leqslant 2000.$$

Täpselt samuti võime tööjõu kulu kohta kirjutada:

$$0{,}11x_1+0{,}1x_2\leqslant 18\,000;$$
$$0{,}0225x_1+0{,}025x_2\leqslant 3\,200.$$

Võrdusmärki me vasakpoolse (tundmatu) ja parempoolse (teadaoleva numbrilise väärtusega) osa vahele veel ei pane. Kultuuride kasvatamise optimaalne variant võib osutuda selliseks, mille puhul kõiki tootmisressursse ei olegi vaja täielikult ära kasutada. Seepärast asetatakse avaldise poolte vahele märk «väiksem või võrdne» ($\leqslant$). Seejärel meenutame, et meil tuleb leida sellised x_1 ja x_2 väärtused, mis üldsummas annaksid maksimaalsel hulgal söötühikuid. Seejuures on söötühikuteks ümberarvutamise koefitsient x_1 puhul (suhkrupeedil) 0,25, x_2 puhul (odral) 1,2. Kui otsitav maksimumsuurus tähistada tähega «C», siis võime kirjutada:

$$\begin{array}{r} 0{,}005x_1+0{,}05x_2\leqslant 2\,000 \\ 0{,}11x_1+0{,}1x_2\leqslant 18\,000 \\ 0{,}0225x_1+0{,}025x_2\leqslant 3\,200 \\ \hline C=0{,}25x_1+1{,}2x_2. \end{array}$$

Enne kui selle ülesande otsesele lahendamisele asuda, tuleb võrratused teisendada võrranditeks. Selleks paigutame igasse võrratusse ühe abitundmatu. Tulemuseks saame:

$$\begin{aligned} 0{,}005x_1+0{,}05x_2+x_3 &= 2\,000 \\ 0{,}11x_1\ \ +0{,}1x_2\ \ +x_4 &= 18\,000 \\ 0{,}0225x_1+0{,}025x_2+x_5 &= 3\,200 \\ \hline C=0{,}25x_1+1{,}2x_2. \end{aligned}$$

Tuleb leida suuruste x_1 ja x_2 sellised väärtused, mis rahuldaksid kolme tundmatuga võrrandite süsteemi kõiki tingimusi ja muudaksid samaaegselt sihifunktsiooni $C=0{,}25x_1+1{,}2x_2$ väärtuse maksimaalseks. Lühidalt, tuleb leida antud tingimustes suuruse C maksimaalne väärtus. Ülesande tingimustel koostatud võrratusesüsteemi on võetud abitundmatud x_3, x_4, x_5. Koostasime oma võrratusesüsteemi eeldusel, et mõned tootmisressursid võivad jääda ka lõplikult ära kasutamata. Abitundmatute mõte selles seisabki, et näidata, kui suur hulk vastavat liiki ressursse on kasutamata (täpsemalt vaegkasutatud). Meie ülesandes tähendab x_3 põllumaa võimaliku vaegkasutamise ulatust, x_4 — kasutamata tööjõuressursse hobu- ja käsitsitööde ning x_5 mehhaniseeritud tööde puhul.

ÜLESANDE LAHENDAMINE

Juhime veel kord tähelepanu ülesande tingimustele. Need on sõnastatud lineaarvõrrandite süsteemina, mis koosneb kolmest viie tundmatuga võrrandist, s. t. $n>m$. Sellel süsteemil on lõpmatu hulk lahendeid. Lisaks ülesande tingimusi fikseerivate võrrandite süsteemile on meil veel sihifunktsioon $C=0{,}25x_1+1{,}2x_2$. Ülesande lahendite hulgast tuleb leida selline, mis vastaks sihifunktsiooni (funktsionaali) $C=0{,}25x_1+1{,}2x_2$ maksimaalsele väärtusele.

Vastavalt ülesande tingimustele tuleb leida suuruste x_1 ja x_2 mõned väärtused, see tähendab, et tuleb leida suhkrupeedi ja odra toodangute optimaalne suurus olemasolevates tingimustes. x_1 ja x_2 väärtusi me ei tea. Et saada üht võimalikest (esialgsetest) lahenditest, oletame, et $x_1=0$ ja $x_2=0$. Edasi lahendame ülesande abitundmatute suhtes. Ühtlasi jätame meelde, et neid tundmatuid, mille suhtes ülesannet lahendatakse, nimetatakse *põhi-* ehk *baasitundmatuteks,* kõiki teisi aga nimetatakse *kõrvaltundmatuteks.*[1] Nii saame järgmise lahendi:

$$x_3 = 2\,000 - 0{,}005x_1 - 0{,}05x_2$$
$$x_4 = 18\,000 - 0{,}11x_1 - 0{,}1x_2$$
$$x_5 = 3\,200 - 0{,}0225x_1 - 0{,}025x_2$$
$$\overline{}$$
$$C = 0{,}25x_1 + 1{,}2x_2.$$

Selles esimeses lahendivariandis on põhitundmatuteks x_3, x_4, x_5 ja C. Kõrvaltundmatute (x_1 ja x_2) väärtus on null, nagu eespool kokku lepitud; põhitundmatud on järelikult vabaliikmetega võrdsed.

Meie näites on $x_3 = 2000$, $x_4 = 18\,000$ ja $x_5 = 3200$. Seejuures tähistavad need tundmatud ülesande tingimuste kohaselt seda, kui palju vastavaid ressursse on veel kasutamata. Järelikult ei ole siiani kõik ressursid veel täielikult kasutatud. Seetõttu võrdub ka C nulliga. See tähendab, et saadud lahend pole ilmselt optimaalne. Seda tõestab ka järgmine puhtmatemaatiline tunnus: sihifunktsioonis (süsteemi viimasel real) on tundmatute x_1 ja x_2 kordajad positiivsed, kõigis teistes võrrandites aga negatiivsed. Siit järeldub, et kui anda neile tundmatutele mingisugused positiivsed väärtused, siis sihifunktsiooni C väärtus suureneb, tundmatute x_3, x_4 ja x_5 väärtused aga samaaegselt vähenevad.

Lühidalt, selleks et esialgset plaanivarianti paremaks teha, tuleb põhitundmatuteks võtta need tundmatud, mille kordajad on sihifunktsioonis positiivsed. Meie näites võiks selleks olla kas suurus x_1 või x_2, sest igal arvutussammul võib põhitundmatute hulka võtta ainult ühe uue kõrvaltundmatu. Seejuures eelistatakse suhteliselt suu-

---

[1] Matemaatilise planeerimise terminoloogia pole teisteski keeltes, sealhulgas ka vene keeles, veel täiesti välja kujunenud ja eri autorite oskuskeeles on palju lahkuminekuid. Austades raamatu autori I. Popovi keelepruuki on käesolevas tõlkes kasutatud järjekindlalt terminit *põhitundmatu* (I. Popovil основное неизвестное), ehkki siiani on rohkem levinud *baasitundmatu* (базисное неизвестное). Analoogiliselt kasutame ka vastandmõistet *kõrvaltundmatu* (неосновное неизвестное), ehkki kirjanduses on seda siiani nimetatud peaasjalikult *baasi mittekuuluvaks tundmatuks* (vt. ka näit. Ü. K a a s i k, Matemaatiline planeerimine). — *Toimetaja märkus.*

rema kordajaga tundmatut, kuid see ei ole alati kohustuslik. Meie näites on otstarbekohane võtta tundmatute hulka esmajoones x_2, s. t. lahendada võrrandisüsteem x_2 suhtes.

Samal ajal kerkib üles veel teine küsimus — missugune varasematest põhitundmatutest paigutada ümber kõrvaltundmatute hulka, et vabastada selle koht suurusele x_2? Vastuse sellele saame pärast mõningate arvutuste tegemist. Jagame kõigis võrrandites (välja arvatud sihifunktsiooni võrrandis) vabaliikmed vastavalt selle kõrvaltundmatu kordajaga, mis muudetakse põhitundmatuks, s. t. suuruse x_2 kordajaga. Seejärel võrdleme saadud jagatisi omavahel. Kõige väiksem jagatis juhatab kätte selle võrrandi, milles tuleb põhitundmatu asendada uuega. Teeme need arvutused ära:

$$2\,000 : 0{,}05 = 40\,000;$$
$$18\,000 : 0{,}1 = 180\,000;$$
$$3\,200 : 0{,}025 = 128\,000.$$

Kõige väiksema jagatise saame esimeses võrrandis. Järelikult tuleb just esimene võrrand lahendada x_2 suhtes. Seejärel paigutame saadud lahendi kõigisse teistesse võrranditesse x_2 asemele.

Enne kui arvutusi jätkata, selgitame lähemalt põhimõtet, mille kohaselt uue põhitundmatu koht kindlaks määratakse. Jagades vabaliikmeid põhitundmatuks muudetava tundmatu kordajatega, leidsime kõige väiksema jagatise. Tuletame meelde, et vabaliikmed on tootmisressursid, tundmatute kordajad on aga selle ressursiliigi kulunormid ühe tooteühiku tootmiseks, mida vastav tundmatu tähistab. Järelikult näitab nende suuruste omavaheline suhe, missuguseid võimalusi on teatud toote tootmiseks olemas. Meie näites tähistab x_2 odra kogutoodangut. Vastavalt ülesande tingimustele on ühe tsentneri odra tootmiseks vaja 0,05 ha põldu, 0,1 inimpäeva hobu- ja käsitsitööd ning 0,025 traktorvahetust mehhanismide tööd. Mehhanisaatorite tööajavaru (3200 traktorvahetust) võimaldaks kasvatada otra 128 000 tsentnerit ($=3200 : 0{,}025$), tööajavaru hobu- ja käsitsitöödel võimaldaks toota seda 180 000 tsentnerit ($=18\,000 : 0{,}1$). Kuid selleks, et olemasolevaid tööjõuressursse täielikult ära kasutada, tuleks ainult otra kasvatades külvipinda kehtivate normide järgi mitmekordselt suurendada. Ülesande tingimustes on aga ette nähtud, et külvipinda ei ole rohkem kui 2 000 hektarit. Seepärast paigutame x_2 ümber esimesse võrrandisse, mille järgi võib otra toota 40 000 tsentnerit ($2000 : 0{,}05 = 40\,000$). Väikseim jagatis nagu näitaks kätte, kus on tootmise kitsaskohad, mida põhjustavad olemasolevad tootmisressursid ja kulunormid.

Jätkame ülesande lahendamist.

Süsteemi esimesest võrrandist leiame x_2 väärtuse:

$$x_2 = 40\,000 - 0{,}1x_1 - 20x_3.$$

Paigutame nüüd suuruse x_2 selle väärtuse kõigisse teistesse võrranditesse:

$$\begin{aligned}
x_4 &= 18\,000 - 0{,}11x_1 - 0{,}1\,(40\,000 - 0{,}1x_1 - 20x_3)\\
x_4 &= 14\,000 - 0{,}1x_1 + 2x_3\\
x_5 &= 3\,200 - 0{,}0225x_1 - 0{,}025\,(40\,000 - 0{,}1x_1 - 20x_3)\\
x_5 &= 2\,200 - 0{,}02x_1 + 0{,}5x_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C &= 0 + 0{,}25x_1 + 1{,}2\,(40\,000 - 0{,}1x_1 - 20x_3);\\
C &= 48\,000 + 0{,}13x_1 - 24x_3.
\end{aligned}$$

Nii saame lahendi teise variandi:

$$\begin{aligned}
x_2 &= 40\,000 - 0{,}1x_1 - 20x_3\\
x_4 &= 14\,000 - 0{,}1x_1 + 2x_3\\
x_5 &= 2\,200 - 0{,}02x_1 + 0{,}5x_3\\
\hline
C &= 48\,000 + 0{,}13x_1 - 24x_3.
\end{aligned}$$

Teine lahendivariant näeb ette toota otra 40 000 tsentnerit ($x_2 = 40\,000$). Sellise suurusega toodang sisaldab 48 000 tsentnersöötühikut ($C = 48\,000$). Ka selle lahendivariandi puhul jääb tööjõuressursse rohkesti kasutamata: $x_4 = 14\,000$ ja $x_5 = 2200$. Teist plaanivarianti ei saa pidada optimaalseks. Et tööjõuressursse paremini ära kasutada, tuleb plaanis ilmselt suurendada kasvatatava suhkrupeedi kogust. Et teine variant pole optimaalne, sellele juhib tähelepanu ka x_1 positiivne kordaja sihifunktsioonis (0,13).

Jätkame lahendamist. Võtame nüüd suuruse x_1 põhitundmatute hulka. Et otsida talle kohta, leiame võrrandite vabaliikmete ja suuruse x_1 kordaja väikseima jagatise:

1) $40\,000 : 0{,}1 = 400\,000$
2) $14\,000 : 0{,}1 = 140\,000$
3) $2\,200 : 0{,}02 = 110\,000.$

Kõige väiksem (110 000) on jagatis kolmandas võrrandis. Järelikult tuleb x_1 asetada x_5 kohale. Kolmandast võrrandist leiame suuruse x_1 väärtuse:

$$x_1 = 110\,000 + 25x_3 - 50x_5$$

ja paigutame selle kõigisse teistesse võrranditesse:

$$x_2 = 40\,000 - 0{,}1\,(110\,000 + 25x_3 - 50x_5) - 20x_3$$
$$x_2 = 29\,000 - 22{,}5x_3 + 5x_5$$
$$x_4 = 14\,000 - 0{,}1\,(110\,000 + 25x_3 - 50x_5) + 2x_3$$
$$x_4 = 3\,000 - 0{,}5x_3 + 5x_5$$
$$C = 48\,000 + 0{,}13\,(110\,000 + 25x_3 - 50x_5) - 24x_3$$
$$C = 62\,300 - 20{,}75x_3 - 6{,}5x_5.$$

Ongi käes lahendi kolmas variant:

$$x_1 = 110\,000 + 25x_3 - 50x_5$$
$$x_2 = 29\,000 - 22{,}5x_3 + 5x_5$$
$$x_4 = 3\,000 - 0{,}5x_3 + 5x_5$$
$$C = 62\,300 - 20{,}75x_3 - 6{,}5x_5.$$

Kolmandas lahendis on sihifunktsiooni tundmatutel miinusmärgiga kordajad. Siin on paras aeg meenutada, et lineaarse planeerimise meetoditega lahendatavates ülesannetes peavad põhitundmtud olema positiivse väärtusega. Juhul, kui annaksime tundmatutele x_3 või x_5 mingi positiivse väärtuse, kutsuks see esile väärtuse vähenemise suurusel, mille maksimumi me otsime. Järelikult on lahenduskäik lõppenud. Kolmas variant ongi optimaalne.

Selle plaani järgi on antud tingimustes otstarbekohane toota suhkrupeeti 110 000 ts ($x_1 = 110\,000$) ja otra 29 000 ts ($x_2 = 29\,000$). Söötühikuteks ümberarvutatuna moodustab kogutoodang:

$110\,000 \cdot 0{,}25 + 29\,000 \cdot 1{,}2 = 62\,300$ tsentnersöötühikut ($C = 62\,300$).

Toodangu hulka saagikusega jagades leiame külvipinna suuruse, mis on

$$\text{suhkrupeedil } \frac{110\,000}{200} = 550 \text{ ha}$$

$$\text{odral } \frac{29\,000}{20} = 1\,450 \text{ ha}$$

Kokku 2 000 ha.

Mehhanisaatorite tööajakulu (traktorvahetustes):

suhkrupeedi kasvatamisel $550 \cdot 4{,}5 = 2475$
odra kasvatamisel $1450 \cdot 0{,}5 = 725$

Kokku 3200 traktorvahetust.

Tööjõukulu hobu- ja käsitsitöödel (inimpäevades):

suhkrupeedi kasvatamisel $550 \cdot 22 = 12\,100$
odra kasvatamisel $1450 \cdot 2 = 2\,900$

Kokku 15 000 inimpäeva.

Lähtetingimuste kohaselt oli tööaega hobu- ja käsitsitöödeks 18 000 inimtundi. Lahenduse kolmandas variandis $x_4 = 3000$. See tähendab, et 3000 inimpäeva jääb hobu- ja käsitsitöödel kasutamata. Ilmselt on see tööaeg antud tingimustes liigne. Et seda ära kasutada, on vajalik kas suurendada masinate arvu, mis võimaldab laiendada suhkrupeedi ja vähendada odra külvipinda või hoopis kasvatada mõnda muud rohkem tööd nõudvat põllukultuuri.

Vaadeldava ülesande järgi saab kindlaks teha ka põllumajandusmasinate tarviduse (vajaliku traktorvahetuste arvu), mis tagab kõigi tootmisressursside täieliku ärakasutamise. Lahendades ülesannet edasi kolmandast variandist lähtudes, peame siis kalduma reeglist kõrvale. Teinud kõigepealt kindlaks, et x_1 tuleb viia x_5 kohale, viime ta aga hoopis x_4 kohale ning vaatame, mis see annab.

Teisest võrrandist leiame seega, et x_1 väärtus on:

$$x_1 = 140\,000 + 20x_3 - 10x_4.$$

Paigutame x_1 selle väärtuse kõigisse teistesse võrranditesse:

$$x_2 = 40\,000 - 0{,}1\,(140\,000 + 20x_3 - 10x_4) - 20x_3$$
$$x_2 = 26\,000 - 22x_3 + x_4$$
$$x_5 = 2\,200 - 0{,}02\,(140\,000 + 20x_3 - 10x_4) + 0{,}5x_3$$
$$x_5 = -600 + 0{,}1x_3 + 0{,}2x_4$$

$$C = 48\,000 + 0{,}13\,(140\,000 + 20x_3 - 10x_4) - 24x_3$$
$$C = 66\,200 - 21{,}4x_3 - 1{,}3x_4.$$

Tulemuseks saame:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 140\,000 + 20x_3 - 10x_4 \\
x_2 &= 26\,000 - 22x_3 + x_4 \\
x_5 &= -600 + 0{,}1x_3 + 0{,}2x_4 \\
\hline
C &= 66\,200 - 21{,}4x_3 - 1{,}3x_4.
\end{aligned}
$$

Eelmise optimaalse lahendusega võrreldes suurenes siin otsitav maksimaalne suurus 3900 tsentnersöötühiku võrra. See on saadud suhkrupeedi tootmise suurendamisega 140 000 tsentnerini 110 000 ts asemel, samal ajal odra tootmist 29 000 tsentnerilt 26 000 tsentnerile vähendades. Maa ja tööjõud kasutatakse sel juhul täielikult ära. Puudu jääb aga 600 traktorvahetust mehhanismide tööaega. See tähendab, et oleks vaja hankida juurde veel umbes kaks traktorit.

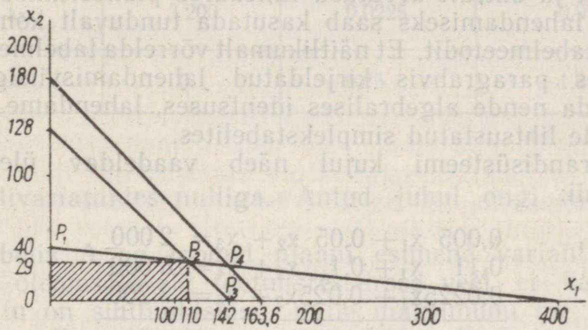
Meie lahendis $x_5 = -600$. Seega on rikutud tundmatute väärtuste mittenegatiivsuse nõuet. Kuid siin on sellel täiesti selge mõte. Esiteks võimaldab see kindlaks teha, kui palju mingisuguseid tootmisressursse on vaja juurde hankida. Teiseks saab niiviisi hinnata täiendavalt tehtud kulutuste majanduslikku efektiivsust. Nii selgub, et 600 traktorvahetust täiendavalt kulutatud mehhanismide tööaega võimaldab suurendada saaduste toodangut 3900 tsentnersöötühiku võrra. Iga täiendavalt kulutatud traktorvahetus annab 6,5 tsentnersöötühikut lisatoodangut.

LAHENDUSKÄIGU GRAAFILINE ILLUSTREERIMINE

Vaadeldav ülesanne oli esialgu formuleeritud võrratusesüsteemina (lk. 21), kusjuures igas võrratuses oli kaks tundmatut. Lineaarset võrratust või võrrandit, milles ei ole üle kahe tundmatu, saab kujutada tasapinnal sirgjoontena täisnurkses koordinaadistikus. Sirgete lõikepunktid kujutavad endast seejuures süsteemi lahendit. Kasutades neid võrratuste omadusi, esitame nüüd vaadeldava võrratusesüsteemi lahendi ka graafiliselt joonisel 1:

$$
\begin{aligned}
0{,}005x_1 + 0{,}05x_2 &\leqslant 2\,000 \\
0{,}11x_1 + 0{,}1x_2 &\leqslant 18\,000 \\
0{,}0225x_1 + 0{,}025x_2 &\leqslant 3\,200.
\end{aligned}
$$

Esimene võrratus on kujutatud joonisel sirgena, mis ühendab punkte $x_1 = 400\,000$ ja $x_2 = 40\,000$ (arvud joonise skaaladel on tuhandetes). See tähendab, et kasutatavalt põllupinnalt võiks saada kas 400 000 tsentnerit suhkrupeeti (x_1) või 40 000 tsentnerit otra (x_2). Teist võrratust esindab sirge, mis ühendab punkte $x_1=163\,600$ ja $x_2=180\,000$. See joon näitab, kuidas hobu- ja käsitsitööde ajafond piirab suhkrupeedi ja odra tootmise võimalusi. Viimane sirge, mis ühendab punkte $x_1=142\,000$ ja $x_2=128\,000$, näitab, kuidas mehhanismide tööajafond piirab tootmisvõimalusi.



Joon. 1.

Jooniselt on näha, et eespool nimetatud kahe kultuuri toodangut piiravad antud juhul peamiselt külvipind ja mehhanismide tööajafond. Seetõttu ongi just kasutada olevat maad ja mehhanismide tööaega iseloomustavate sirgete lõikepunkt P_2 ülesande optimaalseks lahendiks. Mis puutub punktidesse P_1 ja P_3, siis on need teisteks võimalikeks, kuid mitte optimaalseiks lahendeiks. Selles on kerge veenduda, kui esitatud joonist põhjalikumalt analüüsida.

Kui oletame, et mehhanismide tööajafondi saab suurendada, vahetab teise lahendivariandi puhul optimaalne lahend asukohta, nihkudes punktist P_2 punkti P_4.

SIMPLEKSMEETODI ALGORITM

Algoritmiks nimetatakse aritmeetiliste ja loogiliste tehete süsteemi, mille järgi toimub ülesande lahendamine.

Eelmises paragrahvis esitatud ülesannet lahendades me juba kasutasime simpleksmeetodi põhieeskirju. Pärast esimese lahendi leidmist parandasime seda järk-järgult, kuni jõudsime optimaalse lahendini. Tutvusime mitteoptimaalselt lahendilt täiuslikumale, lõplikule ehk optimaalsele lahendile ülemineku reeglitega.

Ühtlasi veendusime eespool vaadeldud näite varal, et selliste ülesannete lahendamine tavaliste algebraliste teisendamisvõtetega nõuab avaldiste paljukordset ümberkirjutamist ja ohtralt arvutusi. Lineaarse planeerimise ülesannete lahendamiseks saab kasutada tunduvalt kompaktsemat tabelmeetodit. Et näitlikumalt võrrelda tabelmeetodit eelmises paragrahvis kirjeldatud lahendamisviisiga ja veenduda nende algebralises identsuses, lahendame sama ülesande lihtsustatud simplekstabelites.

Võrrandisüsteemi kujul näeb vaadeldav ülesanne välja nii:

$$\begin{aligned} 0{,}005\,x_1 + 0{,}05\,x_2 + x_3 &= 2\,000 \\ 0{,}11\,x_1 + 0{,}1\,x_2 + x_4 &= 18\,000 \\ 0{,}0225x_1 + 0{,}025x_2 + x_5 &= 3\,200 \\ \hline C = 0{,}25x_1 + 1{,}2x_2. & \end{aligned}$$

Tuleb leida selle süsteemi niisugune lahend, kus sihifunktsiooni

$$C = 0{,}25x_1 + 1{,}2x_2$$

väärtus oleks antud tingimustel kõige suurem.

Eelmises paragrahvis sama ülesannet lahendades me juba kasutasime termineid «põhitundmatu», «kõrvaltundmatu» ja «vabaliige». Seejuures võtsime esimese lahendivariandi leidmisel süsteemi põhitundmatuteks abitundmatud, s. o. meie näites x_3, x_4 ja x_5.

Abitundmatute kasutamine esimese, edasiste arvutuste baasiks võetava lahendi leidmisel on arvutuskäigu lihtsustamise seisukohalt väga sobiv ning vastab kõigiti lineaaralgebra nõudeile. Koostame esimese lihtsustatud simplekstabeli (tabel A, lk. 31).

Iga simplekstabel sisaldab ülesande lahendi kõigist võimalikest variantidest ühe. Sealjuures eeldatakse, et põhitundmatud on tabeli kõigil ridadel võrdsed vabaliikmetega. Esimeses lahendis (tabel A) $x_3 = 2000$, $x_4 = 18\,000$, $x_5 = 3200$ ja $C = 0$. Kõrvaltundmatud võrdsustatakse kõigis

Tabel A

Põhitundmatud	Vabaliikmed	Kõrvaltundmatud	
		x_1	x_2
x_3	2 000	0,005	$\boxed{0{,}05}$
x_4	18 000	0,11	0,1
x_5	3 200	0,0225	0,025
C	0	−0,25	−1,2

lahendivariantides nulliga. Antud juhul ongi $x_1=0$ ja $x_2=0$.

Tabelis A on toodud plaani esimene variant, mille alusel olemasolevaid tootmisressursse veel ei kasutata. Seetõttu on sihifunktsioon, mille maksimumi me otsime, võrdne nulliga ($C=0$), s. o. tootmisplaani esimene variant toodangu valmistamist veel ette ei näe.

Mõni sõna sihifunktsioonist. Võrrandisüsteemis esineb ta kujul $C=0{,}25x_1+1{,}2x_2$. Simplekstabelis said sihifunktsiooni võrrandi tundmatute kordajad endale vastupidised märgid, antud juhul miinusmärgid. Lühidalt öeldes talitatakse siin nii, et täites esimest simplekstabelit võrrandisüsteemi andmetega, muudetakse sihifunktsiooni tundmatute kordajate märgid vastupidisteks. Esitatud näite sihifunktsioon $C=0{,}25x_1+1{,}2x_2$ kirjutatakse tabelisse kujul $C=0-(-0{,}25x_1-1{,}2x_2)$.

Sihifunktsiooni tundmatute kordajate märkide muutumine on funktsiooni $\Delta_j=z_j-c_j$ määratud funktsiooniks muutmise tagajärg. Seda funktsiooni ja täielike simplekstabelite iseärasusi käsitletakse järgmistes paragrahvides. Meetodi kõigi peensuste esitamine juba käsitluse algul teeks selle mõistmise tarbetult raskeks. Pealegi ei olene ülesande lahendamise käik ega saadava tulemuse täpsus sellest, missuguseid simplekstabeleid kasutatakse — lihtsustatud või täielikke.

Pöördume tagasi tabeli A käsitlemisele, mis sisaldab esimese plaanivariandi. Niipea kui see plaanivariant on valmis, tekib otsekohe mitu uut küsimust: kas antud variant on optimaalne või mitte, ja kui see pole optimaalne, siis kuidas seda paremaks muuta?

Kui ülesandeid lahendatakse simplekstabelites, võib lahendi optimaalsuse matemaatilist kriteeriumi sõnastada järgmiselt: maksimiseerimisülesande lahendamisel on lahend optimaalne siis, kui sihifunktsiooni kõigi tundmatute kordajad on plussmärgiga: minimiseerimisülesande lahendamisel on aga lahend optimaalne siis, kui kõik nimetatud kordajad on miinusmärgiga.

Meie näites on tabelis A mõlemad sihifunktsiooni kordajad miinusmärgiga. Järelikult ei ole koostatud plaan optimaalne. Tuleb leida teine, parem variant. Plaani hakatakse järk-järgult paremaks muutma niiviisi, et mõned kõrvaltundmatud muudetakse põhitundmatuteks ja paigutatakse endiste põhitundmatute asemele, mis muudetakse kõrvaltundmatuteks. Selliste ümberpaigutuste tegemiseks tuleb koostada uus simplekstabel.

Tekib küsimus, missugune kõrvaltundmatu muuta põhitundmatuks ja missugune põhitundmatu arvata kõrvaltundmatute kilda. Esimesele küsimusele annavad vastuse sihifunktsiooni kordajad. Maksimiseerimisülesande lahendamisel muudame põhitundmatuteks need kõrvaltundmatud, mille kordajad on sihifunktsioonis miinusmärgiga. Seejuures eelistatakse seda sihifunktsioonis miinusmärgiga kordajat omavat tundmatut, mille absoluutväärtus on suurim. Järelikult on meie näites otstarbekohane viia põhitundmatute hulka kõigepealt x_2.

Teisele küsimusele vastamine eeldab mõningaid arvutusi. Et teha kindlaks, missuguse tundmatu kohale x_2 tuleb panna, jagame kõigis ridades vabaliikmed samal real oleva kõrvaltundmatu kordajaga (s. o. suuruse x_2 kordajaga). Real, kus see jagatis on kõige väiksem, ongi vaja põhitundmatu välja vahetada. Vabaliikmeid jagatakse seejuures ainult positiivsete kordajatega. See tuleneb tundmatute mittenegatiivsuse nõudest kui ühest matemaatilise planeerimise meetoditel lahendatavate ülesannete kohta kehtivast põhitingimusest.

Meie näites on need jagatised:

$$2\,000 : 0{,}05 = 40\,000;$$
$$18\,000 : 0{,}1 = 180\,000;$$
$$3\,200 : 0{,}025 = 128\,000.$$

Kõige väiksem on jagatis esimesel real. Järelikult paigutame omavahel ümber x_2 ja x_3. Selleks koostame teise simplekstabeli, s. t. koostame teise plaanivariandi (tabel B lk. 35).

Kõik järjekordse simplekstabeli näitajad leiame teatud kindlate reeglite järgi, tuginedes eelmise tabeli andmetele. Nimetatud reeglid on formuleeritavad nelja valemi näol. Enne valemite esitamist lepime kokku tähistuses. Põhitundmatute hulka võetava tundmatu tähistame x_h. Tundmatu, mis eemaldatakse põhitundmatute seast, tähistatakse x_r. Veergu või rida, kus asub x_h või x_r, nimetatakse vastavalt kas h-ndaks või r-indaks veeruks või reaks. Kõik vana (s. o. varem koostatud) tabeli arvud tähistame Z_{ij}. Uue (koostatava) tabeli arvusid tähistame Z'_{ij}. h-ndat veergu nimetatakse juhtveeruks (vanas tabelis). Analoogiliselt nimetatakse ka r-indat rida juhtreaks. Kordajat, mis asub h-nda veeru ja r-inda rea ristumiskohal, nimetatakse juhtelemendiks[1] ning tähistatakse Z_{rh}. Vastavalt tähistatakse ka kõik juhtrea arvud tähtedega Z_{rj}, kõik juhtveeru arvud aga Z_{ih}. Peale selle tuleb panna tähele, et mingi konkreetse rea numbriks on kõigis simplekstabelites põhitundmatu number. Nii näiteks on tabelis A esitatud ülesande tingimused ridades, mille numbrid on 3, 4 ja 5. Veergude numbrid määratakse kindlaks kõrvaltundmatute numbrite järgi. Tabelis A on veergude numbriteks 1 ja 2. Vabaliikmete veeru numbriks on null, nullreaks aga sihifunktsiooni rida.

Nüüd võib asuda valemite üleskirjutamisele ja järjekordse uue tabeli (tabeli B) arvude leidmisele.

Uue juhtelemendi kohal asuv kordaja leitakse valemiga

$$Z'_{hr} = \frac{1}{Z_{rh}}.$$

Meie näite andmetel on

$$Z'_{23} = \frac{1}{Z_{32}} = \frac{1}{0,05} = 20.$$

---

[1] Simplekstabelis ümbritsetakse juhtelement paremaks esiletõstmiseks raamiga. Märgitagu, et eesti keeles on *juhtelementi* nimetatud ka veel *juhtliikmeks* ja *sõlmelemendiks* (I. Kull). Vene keeles on selles mõistes käibel samuti mitu terminit: центральный элемент, генеральный член, ключевой элемент, главный элемент, ключевой член jt. — *Toimetaja märkus*

Uue tabeli juhtrea ülejäänud arvud leitakse valemiga

$$Z'_{hj} = \frac{Z_{rj}}{Z_{rh}}.$$

Meie näite andmetel on

$$Z'_{20} = \frac{Z_{30}}{Z_{32}} = \frac{2000}{0{,}05} = 40\,000;$$

$$Z'_{21} = \frac{Z_{31}}{Z_{32}} = \frac{0{,}005}{0{,}05} = 0{,}1.$$

Uue tabeli juhtveeru ülejäänud arvud leitakse valemiga

$$Z'_{ir} = -\frac{Z_{ih}}{Z_{rh}}.$$

Meie näite andmetel on

$$Z'_{43} = -\frac{Z_{42}}{Z_{32}} = -\frac{0{,}1}{0{,}05} = -2;$$

$$Z'_{53} = -\frac{Z_{52}}{Z_{32}} = -\frac{0{,}025}{0{,}05} = -0{,}5;$$

$$Z'_{03} = -\frac{Z_{02}}{Z_{32}} = -\frac{(-1{,}2)}{0{,}05} = 24.$$

Kõik teised järjekordse uue tabeli arvud leiame valemiga

$$Z'_{ij} = Z_{ij} - \frac{Z_{ih}}{Z_{rh}} \cdot Z_{rj}.$$

Meie näite andmetel on

$$Z'_{40} = Z_{40} - \frac{Z_{42}}{Z_{32}} \cdot Z_{30} = 18\,000 - \frac{0{,}1}{0{,}05} \cdot 2000 = 14\,000;$$

$$Z'_{50} = Z_{50} - \frac{Z_{52}}{Z_{32}} \cdot Z_{30} = 3200 - \frac{0{,}025}{0{,}05} \cdot 2000 = 2200;$$

$$Z'_{00} = Z_{00} - \frac{Z_{02}}{Z_{32}} \cdot Z_{30} = 0 - \frac{(-1{,}2)}{0{,}05} \cdot 2000 = 48\,000;$$

$$Z'_{41} = Z_{41} - \frac{Z_{42}}{Z_{32}} \cdot Z_{31} = 0{,}11 - \frac{0{,}1}{0{,}05} \cdot 0{,}005 = 0{,}1;$$

$$Z'_{51} = Z_{51} - \frac{Z_{52}}{Z_{32}} \cdot Z_{31} = 0{,}0225 - \frac{0{,}025}{0{,}05} \cdot 0{,}005 \quad = 0{,}02;$$

$$Z'_{01} = Z_{01} - \frac{Z_{02}}{Z_{32}} \cdot Z_{31} = -0{,}25 - \frac{(-1{,}2)}{0{,}05} \cdot 0{,}005 = -0{,}13.$$

Leitud arvud paigutame tabelisse B.

Tabel B

Põhitundmatud	Vabaliikmed	Kõrvaltundmatud	
		x_1	x_3
x_2	40 000	0,1	20
x_4	14 000	0,1	−2
x_5	2 200	$\boxed{0{,}02}$	−0,5
C	48 000	−0,13	24

Tabelis B on toodud teise plaanivariandi arvud. Selle variandi kohaselt tuleks kasvatada 40 000 ts ($x_2 = 40\,000$) otra. See annaks 48 000 tsentnersöötühikut (C=48 000). Samuti näeme tabelist, et 14 000 inimpäeva ja 2200 traktorvahetust jäävad kasutamata. Nende ressursside ärakasutamiseks on nähtavasti otstarbekohane võtta plaani odra kasvatamise kõrval ka töömahukamate kultuuride, näiteks suhkrupeedi kasvatamine.

Koos plaani majandusliku analüüsiga hindame vastava matemaatilise kriteeriumi abil ka selle optimaalsust. Maksimumi leidmisel võib optimaalse lahendi sihifunktsiooni võrrandis olla ainult positiivseid kordajaid. Tabelis B on sihifunktsiooni liikmel x_1 negatiivne kordaja (−0,13). Järelikult ei ole tabelis B sisalduv plaan optimaalne.

Koostame uue tabeli (tabel C, lk. 36).

Tabeli C koostamisel võtame suuruse x_1 põhitundmatute hulka.

Tabel C

Põhi-tundmatud	Vaba-liikmed	Kõrvaltundmatud	
		x_5	x_3
x_2	29 000	−5	22,5
x_4	3 000	−5	0,5
x_1	110 000	50	−25
C	62 300	6,5	20,75

Leiame suuruse x_r väärtused:

$$\frac{40\,000}{0,1}=400\,000;$$

$$\frac{14\,000}{0,1}=140\,000;$$

$$\frac{2\,200}{0,02}=110\,000.$$

Järelikult x_5 ongi x_r. Paigutame x_1 ja x_5 vastavalt ümber.

Tabelis C on sihifunktsioonis ainult positiivsed kordajad. Järelikult on optimaalne lahend käes, millega ongi koostatud optimaalne plaan. Kolmas variant (tabel C) näeb ette kasvatada 110 000 ts suhkrupeeti ja 29 000 ts otra. Kogutoodanguna saadakse seejuures 62 300 tsentnersöötühikut. Maa ja mehhanismide tööaeg kasutatakse nüüd täielikult ära, sest x_3 ja x_5 on siin kõrvaltundmatuteks ja järelikult on nad võrdsed nulliga. Kasutamata jääb hobu- ja käsitsitöödel 3 000 inimpäeva ($x_4=3\,000$).

Lahenduse kontroll

Kasutatav külvipind (hektarites):

$$\text{suhkrupeet}\quad \frac{110\,000}{200}=550$$

$$\text{oder}\quad \frac{29\,000}{20}=1\,450$$

$$\text{Kokku}\quad 2\,000.$$

Kasutatud mehhanismide tööaeg (traktorvahetustes):

suhkrupeedi kasvatamiseks		550 · 4,5 = 2475
odra	„	1450 · 0,5 = 725
	Kokku	3200.

Kasutatav tööaeg hobu- ja käsitsitöödel (inimpäevades):

suhkrupeedi kasvatamiseks		550 · 22 = 12 100
odra	„	1450 · 2 = 2 900
	Kokku	15 000.

Kasutamata jääb 18 000 − 15 000 = 3 000 inimpäeva.

Kogutoodang (tsentnersöötühikutes):

suhkrupeet		110 000 · 0,25 = 27 500
oder		29 000 · 1,2 = 34 800
	Kokku	62 300.

Seega vastavad tabelis C olevad arvutustulemused ülesande tingimustele, põhitundmatute väärtus aga vastab sihifunktsiooni väärtusele, mille maksimumiks on antud tingimuste puhul 62 300 tsentnersöötühikut.

ÜLESANDE MATEMAATILINE KUJU [1]

Eelmistes paragrahvides käsitleti elementaarse näite varal ülesannete koostamist ja lahendamist selle kohta, kuidas põllumajandusettevõtetes eri tootmisharusid optimaalselt kombineerida. Vaadeldud materjali põhjal võib teha mõningaid üldistusi.

Seni oleme tegelnud kahe eri liiki põllumajandussaaduse tootmise optimaalse vahekorra leidmisega ühes majandis. Ent kolhoosides ja sovhoosides ei kasvatata kaht ega kolme, vaid kümneid eri liike saadusi. Meetodid, mis võimaldavad leida kahe tootmisharu kombinatsiooni, sobivad ka selleks, et leida kolme-nelja ja üldse mistahes arvu tootmisharude optimaalne kombinatsioon.

[1] Käesolevas osas ja üldse kogu käesolevas peatükis esitatud materjali täienduseks on soovitatav tutvuda järgmiste varem eesti keeles ilmunud artiklitega: Ü. K a a s i k, Lineaarsed planeerimisülesanded, «Matemaatika ja Kaasaeg» II, Tartu Riiklik Ülikool, Tartu 1964, lk. 31—46 ja I. K u l l, Lineaarsest planeerimisest, «Matemaatika, Metoodiliste artiklite kogumik» III, Tallinn 1965, lk. 11—35. — *Toimetaja märkus.*

Valmistatagu majandis l eri liiki tooteid. Tootmises kasutatakse m eri liiki tootmisressursse. j-inda toote ühe ühiku tootmiseks kulutatakse i-ndat liiki ressursse koguses a_{ij}. i-ndat liiki ressursside kogus majandis on b_i. j-inda toote ühiku hind on c_j. Üksikute tootmisharude toodangu hulk ei ole teada. Ülesanne tuleb formuleerida ja lahendada selliselt, et antud tingimustes saada maksimum kogutoodangut C.

Tähistame j-indat liiki toote toodangu hulka x_j.

Sõnastame nüüd ülesande nii: leida suuruse C maksimum, kui

$$C = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_lx_l,$$

tingimustel, et

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1l}x_l &\leqslant b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2l}x_l &\leqslant b_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{ml}x_l &\leqslant b_m \end{aligned}$$

ja teades, et

$$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \ldots, x_l \geqslant 0.$$

Sama ülesannet saab kirjutada lühemalt, kasutades summa märki Σ.

Leida funktsiooni

$$C = \sum_{j=1}^{l} c_j x_j$$

maksimum tingimustel, et

$$1)\ \sum_{j=1}^{l} a_{ij}x_j \leqslant b_i\,(i = 1;\ 2 \ldots m);$$

$$2)\ x_j \geqslant 0.$$

Vaatleme veel üht eelmisega analoogilist ülesannet.

On vaja leida kolme põllukultuuri — nisu, tatra ja kartuli — külvipindade optimaalne vahekord. Loetletud kultuuride kasvatamiseks on majandil 6000 ha põllumaad, 5000 inimpäeva mehhaniseeritud ja 9000 inimpäeva hobu- ja käsitsitööde tegemiseks. Planeeritud saagikus on nisul 20 ts/ha, tatral 10 ts/ha ja kartulil 100 ts/ha.

Töökulu hektari kohta (inimpäevades):

	nisu	tatar	kartul
mehhanismidega tehtavatel töödel	0,5	1,0	5,0
hobu- ja käsitsitöödel	0,5	0,5	20,0

Tsentneri hind on nisul 4 rbl., tatral 10 rbl. ja kartulil 3 rbl.

Tuleb leida nende põllukultuuride külvipindade selline kombinatsioon, et saadava toodangu maksumus (s. o. toodang rahalises väljenduses) oleks maksimaalne.

Koostame abitabeli. Ühtlasi lepime kokku, et tähistame kultuuride kogutoodangud (ts) järgmiselt: nisu kogutoodang — x_1, tatar — x_2, kartul — x_3.

Tehnoloogiliste koefitsientide[1] *tabel*

Tootmis-ressursid	Mõõt-ühik	Kulud 1 ts tootmiseks			Tootmis-ressursid kokku
		nisu	tatar	kartul	
Künd	ha	0,05	0,1	0,01	6 000
Mehhanismide töö	inim-päev	0,025	0,1	0,05	5 000
Hobu- ja käsitsitöö	inim-päev	0,025	0,05	0,2	9 000
1 ts hind	rbl.	4	10	3	

Teades andmeid tootmisressursside kohta ja nende kulunorme ühe toodanguühiku kohta, koostame võrratusesüsteemi:

$$\begin{array}{c}
0{,}05x_1+0{,}1x_2+0{,}01x_3\leqslant 6\,000\\
0{,}025x_1+0{,}1x_2+0{,}05x_3\leqslant 5\,000\\
0{,}025x_1+0{,}05x_2+0{,}2x_3\leqslant 9\,000\\
\hline
C=4x_1+10x_2+3x_3.
\end{array}$$

Leida suuruse C maksimum.

Teisendame võrratused abitundmatute appivõtmise teel võrranditeks. Sihifunktsiooni kirjutame ümber sellisel kujul, nagu see võetakse simplekstabelisse:

$$\begin{array}{c}
0{,}05x_1+0{,}1x_2+0{,}01x_3+4x=6\,000\\
0{,}025x_1+0{,}1x_2+0{,}05x_3+x_5=5\,000\\
0{,}025x_1+0{,}05x_2+0{,}2x_3+x_6=9\,000\\
\hline
C=0-(-4x_1-10x_2-3x_3).
\end{array}$$

[1] Tehnoloogilisi koefitsiente nimetatakse majandusmatemaatika kirjanduses ka veel otsekulude koefitsientideks (коэффициенты прямых затрат). — *Toimetaja märkus.*

Leida suuruse C maksimum.

Lahendame ülesande lihtsustatud simplekstabelis. Äsja tuletatud võrrandisüsteemi andmed paigutame tabelisse A.

Tabel A

Põhi-tundmatud	Vabaliik-med	Kõrvaltundmatud		
		x_1	x_2	x_3
x_4	6 000	0,05	0,1	0,01
x_5	5 000	0,025	$\boxed{0,1}$	0,05
x_6	9 000	0,025	0,05	0,2
C	0	−4	−10	−3

Tabelis A sisaldub nüüd esimene plaanivariant ehk esimene lahend. Sihifunktsiooni kordajate märkide järgi otsustades ei ole see lahend optimaalne. Plaanivariandi andmete paremaks muutmiseks koostame tabeli B, kasutades selleks eespool vaadeldud simpleksmeetodi algoritmi.

On hõlbus näha, et käesoleval juhul on põhitundmatute x_h hulka toodavaks tundmatuks x_2, mille kordaja sihifunktsiooni reas on (−10). Seejärel leiame suuruse x_r, s. t. tundmatu, mille kohale x_h tuuakse. Jaganud kõigis ridades vabaliikmed x_2 positiivse kordajaga, saame jagatised: 60 000, 50 000, 180 000. Väikseim jagatis on real x_5. Järelikult on x_5 antud juhul x_r. h-nda veeru ja r-inda rea ristumiskohal asub (0,1), mille ümbritseme raamiga.

Seejärel asume järgmise tabeli (tabel B) näitajate arvutamisele.

Kooskõlas esimese valemiga on h-nda veeru ja r-inda rea ristumiskohal tabelis B asuv kordaja juhtelemendi pöördväärtus, mis tõendab, et meie näites on see:

$$Z'_{hr} = \frac{1}{Z_{rh}};$$

$$Z'_{25} = \frac{1}{Z_{52}} = \frac{1}{0,1} = 10.$$

Teised juhtrea näitajad leiame teise valemi järgi sel teel, et jagame kõik tabeli r-indas reas olevad arvud tabeli juhtelemendiga.

Meie näites saame siis

$$Z'_{20}=\frac{5\,000}{0,1}=50\,000;\quad Z'_{21}=\frac{0,025}{0,1}=0,25;$$

$$Z'_{23}=\frac{0,05}{0,1}=0,5.$$

Analoogiliselt leitakse ka r-inda veeru näitajad. Ainus erinevus seisab siin selles, et jagatise märk muudetakse vastupidiseks.

Meie näites saame

$$Z'_{45}=-\frac{0,1}{0,1}=-1;\quad Z'_{65}=-\frac{0,05}{0,1}=-0,5;$$

$$Z'_{05}=-\frac{(-10)}{0,1}=100.$$

Lõpuks leitakse kõik ülejäänud tabeli B arvud valemiga

$$Z'_{ij}=Z_{ij}-\frac{Z_{ih}}{Z_{rh}}\cdot Z_{rj}.$$

Meie näites on

$$Z'_{40}=6\,000-\frac{0,1}{0,1}\cdot 5\,000=1\,000;$$

$$Z'_{60}=9\,000-\frac{0,05}{0,1}\cdot 5\,000=6\,500;$$

$$Z'_{00}=0-\frac{(-10)}{0,1}\cdot 5\,000=500\,000;$$

$$Z'_{41}=0,05-\frac{0,1}{0,1}\cdot 0,025=0,025;$$

$$Z'_{61}=0,025-\frac{0,05}{0,1}\cdot 0,025=0,0125;$$

$$Z'_{01}=-4-\frac{(-10)}{0,1}\cdot 0,025=-1,5;$$

$$Z'_{34}=0,01-\frac{0,1}{0,1}\cdot 0,05=-0,04;$$

$$Z'_{63} = 0{,}2 - \frac{0{,}05}{0{,}1} \cdot 0{,}05 = 0{,}175;$$

$$Z'_{03} = -3 - \frac{(-10)}{0{,}1} \cdot 0{,}05 = 2.$$

Tabel B

Põhi-tundmatud	Vaba-liikmed	Kõrvaltundmatud		
		x_1	x_5	x_3
x_4	1 000	0,025	−1	0,04
x_2	50 000	0,25	10	0,5
x_6	6 500	0,0125	−0,5	0,175
C	500 000	−1,5	100	2

Arvutuse tulemusena saadi teine plaanivariant. Selle variandi kohaselt tuleb toota 50 000 ts tatart ($x_2 = 50\,000$) maksumusega 500 000 rbl. ($C = 500\,000$). Seejuures jääb kasutamata 1000 ha maad ja 6500 inimpäeva hobu- ja käsitsitööd ($x_4 = 1000$; $x_6 = 6500$). Peale selle on tabelis B sihifunktsiooni real x_1 kordaja negatiivne $(-1{,}5)$. Järelikult ei ole ka see variant veel optimaalne. Arvutuste jätkamiseks koostame eespool kirjeldatud meetodil tabelid C ja D.

Tabelis D leiame püstitatud ülesandele optimaalse lahendi.

Tabel C

Põhi-tundmatud	Vaba-liikmed	Kõrvaltundmatud		
		x_4	x_5	x_3
x_1	40 000	40	−40	−1,6
x_2	40 000	−10	20	0,9
x_6	6 000	−0,5	0	0,195
C	560 000	60	40	−0,4

Tabel D

Põhi-tundmatud	Vaba-liikmed	Kõrvaltundmatud		
		x_4	x_5	x_6
x_1	89 231,2	35,897	−40,0	8,205
x_2	12 307,5	−7,692	20,0	−4,615
x_3	30 769,0	−2,564	0	5,128
C	572 306,8	58,974	40,0	2,051

Lahenduse kontroll

Külvipinnad (ha):

nisu	89 231,2 : 20 = 4 461,56
tatar	12 307,5 : 10 = 1 230,75
kartul	30 769,0 : 100 = 307,69
	Kokku . . 6 000,0.

Kogutoodangu maksumus:

89 231,24 · 4 + 12 307,5 · 10 + 30 769 · 3 = 572 306,96 rbl.

Töökulud mehhaniseeritud töödel (inimpäevades):

nisu kasvatamiseks		4 461,56 · 0,5 = 2 230,78
tatra	„	1 230,75 · 1 = 1 230,75
kartuli	„	307,69 · 5 = 1 538,45
Kokku		4 999,98 ≈ 5 000.

Töökulud hobu- ja käsitsitöödel (inimpäevades):

nisu kasvatamiseks		4 461,56 · 0,5 = 2 230,78
tatra	„	1 230,75 · 0,5 = 615,375
kartuli	„	307,69 · 20 = 6 153,8
Kokku		8 999,855 ≈ 9 000.

* * *

Et simpleksmeetodist oleks kergem aru saada, lahendasime seni ülesandeid kas algebralise teisendamise teel või lihtsustatud simplekstabelites. Esimese simplekstabeli koostamisel oli seejuures vaja muuta sihifunktsiooni tundmatute kordajate märgid vastupidisteks. Selle vajaduse selgitamiseks (mida me eespool ei tõestanud) võtame kasutusele mõned täiendavad tähistused, seejärel aga lahendame eespool vaadeldud ülesande niinimetatud täielikes simplekstabelites. Kui ülesandeid lahendatakse simplekstabelites, leitakse sihifunktsiooni tundmatute kordajad (Δ_j) valemiga

$$\Delta_j = z_j - c_j,$$

kus c_j — süsteemi sihifunktsiooni võrrandis olevate tundmatute kordajad;

z_j — sihifunktsiooni kuuluvate põhitundmatute kordajate ja j-inda veeru kordajate korrutiste summa:

$$z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i z_{ij}.$$

Vaatleme seda lähemalt arvnäite varal.

$$\begin{aligned} 0{,}05x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}01x_3 + x_4 &= 6000 \\ 0{,}025x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}05x_3 + x_5 &= 5000 \\ 0{,}025x_1 + 0{,}05x_2 + 0{,}2x_3 + x_6 &= 9000 \\ \hline C = 4x_1 + 10x_2 + 3x_3 & \end{aligned}$$

Leida suuruse C maksimum.

Parima lahendi otsinguid alustatakse sellest, et esmalt leitakse üks võimalikest lahenditest. Käesoleval juhul on kõige lihtsam lahendada süsteem tundmatute x_4, x_5 ja x_6 suhtes, mis võimaldavad ilma igasuguste arvutusteta saada esimese lähtelahendi. Täielikule simplekstabelile üleminekuks kirjutame välja meie süsteemi uuel kujul.

Leida suuruse C maksimum tingimustel, et

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Vabaliikmed
0,05	0,1	0,01	1	0	0	6000
0,025	0,1	0,05	0	1	0	5000
0,025	0,05	0,2	0	0	1	9000

Lahenduskäik on esitatud tabelis. Optimaalse lahendi saame neljandal sammul, sest siis on kõik kordajad $\Delta_j \geqslant 0$.

C_j / C_i	Põhi (baasi)-tundmatud	Vabaliikmed	4	10	3	0	0	0	Variant (samm)
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_4	6 000	0,05	0,1	0,01	1	0	0	I
←0	x_5	5 000	0,025	$\boxed{0{,}1}$	0,05	0	1	0	
0	x_6	9 000	0,025	0,05	0,2	0	0	1	
Z_j		0	0	0	0	0	0	0	
Δj		0	−4	−10	−3	0	0	0	
←0	x_4	1 000	$\boxed{0{,}025}$	0	−0,04	1	−1	0	II
→10	x_2	50 000	0,25	1,0	0,5	0	10	0	
0	x_6	6 500	0,0125	0	0,175	0	−0,5	1	
Z_j		500 000	2,5	10	5	0	100	0	
Δj		500 000	−1,5	0	2	0	100	0	
→4	x_1	40 000	1	0	−1,6	40	−40	0	III
10	x_2	40 000	0	1	0,9	−10	20	0	
←0	x_6	6 000	0	0	$\boxed{0{,}195}$	−0,5	0	1	
Z_j		560 000	4	10	2,6	60	40	0	
Δj		560 000	0	0	−0,4	60	40	0	
4	x_1	89 231,2	1	0	0	35,9	−40,0	8,2	IV
10	x_2	12 307,5	0	1	0	−7,69	20,0	−4,61	
→3	x_3	30 769,0	0	0	1	−2,56	0	5,13	
Z_j		572 306,8	4	10	3	58,97	40,0	2,05	
Δj		572 306,8	0	0	0	58,97	40,0	2,05	

On ilmne, et vaadeldav lahendivariant ei erine millegagi lahendist, mille saime lihtsustatud tabelites. Edaspidi teemegi arvutusi peamiselt lihtsustatud tabelites.

Erinevalt lihtsustatud simplekstabelitest, mille koostamist vaatlesime eespool, on täielikel tabelitel veel täiendavaid veerge ja ridu. Kõigil põhi- ja kõrvaltundmatuil on neis eri veerud. Peale selle on täielikes tabelites veel veerg C_i ja read C_j[1] ja Z_j. Põhitundmatute veergudes on samanimelise veeru ja rea ristumiskohas alati kordajaks üks, kõigis teistes ridades null. Esimese lahendivariandi kõrvaltundmatute veergudes on real Δ_j olevad kordajad võrdsed vastava tooteühiku hinnaga, mille märk on aga muudetud vastupidiseks.

Iga järjekordne täielik tabel arvutatakse eelmise tabeli andmetel sellesama simpleksalgoritmi järgi, mida käsitlesime eespool.

Mõni sõna ka veeru C_i ja ridade C_j ning Z_j täitmise korra kohta.

Real C_j on sihifunktsiooni võrrandi kordajad. Meie näites on seal saaduste hinnad. Lisatundmatuteks on meie näites x_4, x_5 ja x_6. Et neid sihifunktsiooni võrrandis pole, on real C_j vastavate tundmatute kohal nullid. Veerus C_i on kõigis tabelites real C_j vastavate tundmatute kohal olevad arvud. Meie näites on esimese lahendivariandi puhul veerus C_i nullid, sest põhitundmatutena esinevad siin x_4, x_5 ja x_6, mille kordajateks on real C_j samuti nullid. Teises lahendivariandis on veerus C_i real x_2 arv 10, ülejäänud ridades aga nullid. Ka see vastab reas C_j olevatele arvudele. Lahenduse neljandas variandis on veerus C arvud 4, 10, 3. Need on sihifunktsiooni võrrandi kordajad, seega saaduste hinnad.

Ridades Z_j ja Δ_j olevad arvud leitakse valemitega

$$\Delta_j = Z_j - C_j$$

$$Z_j = \Sigma C_i Z_{ij}.$$

Et esimeses tabelis on rea C_i kordajad tavaliselt nullid, siis on ka real Z_j kordajateks nullid.

Seetõttu on real Δ_j kordajateks esimeses tabelis kordajad realt C_j, ent vastupidiste märkidega.

Järgmisse tabelisse tulevad Δ_j ja Z_j kordajad võib arvutada kahel viisil. Esiteks võib Δ_j väärtused leida simpleksalgoritmi üldiste reeglite kohaselt, nagu seda on

---

[1] Rida C_j on mitte tabeliväljal, nagu siin antud vormi kohase täieliku simplekstabeli teised read, kaasa arvatud ka Z_j, vaid tabelipeas, veergude $x_1 \ldots x_6$ pealkirjade kohal. Real C_j on tabelis lk. 45 arvud 4, 10, 3, 0, 0, 0. — *Toimetaja märkus.*

tehtud eespool. Seejärel, teades Δ_j ja C_j väärtusi, leiame Z_j valemi järgi:

$$Z_j = C_j + \Delta_j.$$

Meie näites on lahenduskäigu teisel sammul veerus x_1 real Z_j kordaja $-2{,}5$ ja real Δ_j kordaja $-(-1{,}5)$. Need kordajad on saadud järgmiste arvutustega:

$$\Delta_j = Z'_{01} = -4 - \frac{-10}{0{,}1} \cdot 0{,}025 = -1{,}5,$$

ning edasi:

$$Z_j = C_j + \Delta_j; \quad Z_j = 4 + (-1{,}5) = 2{,}5.$$

Samad arvud oleks võinud leida ka teise valemi abil:

$$Z_j = \Sigma C_i Z_{ij}.$$

Teises lahendivariandis oleks siis

$$Z_j = 0 \cdot 0{,}025 + 10 \cdot 0{,}25 + 0 \cdot 0{,}0125 = 2{,}5.$$

Teades nüüd Z_j väärtust, leiame suuruse Δ_j, mis on

$$\Delta_j = Z_j - C_j; \quad \Delta_j = 2{,}5 - 4 = -1{,}5.$$

Võimalus saada samu tulemusi kahel erineval viisil lubab kontrollida tehtud arvutuste õigsust.

MAAVILJELUSE JA LOOMAKASVATUSE OMAVAHELISE SEOSTAMISE ISEÄRASUSI

Eespool vaatlesime, kuidas koostada ülesannet maaviljeluse tootmisharude optimaalse kombinatsiooni leidmiseks. Selliste ülesannete lahendamise tulemusi võib kasutada tootmise organiseerimisel ja planeerimisel. Ent eri tootmisharude optimaalse vahekorra otsimine ei saa majandis toimuda nii, et algul määrata see kindlaks maaviljeluses, seejärel loomakasvatuses, või vastupidi.

Maaviljelus- ja loomakasvatusharud on kõigis põllumajandusettevõtetes lahutamatult seotud. Järelikult on selleks, et leida maaviljeluse tootmisharude optimaalset vahekorda kogu majandis, vaja võtta ülesannete tingimustesse sisse vajalikud tundmatud ja võrrandid, milles väljenduvad ka loomakasvatustoodangut piiravad kulunormid ning kitsendused. Peale tööjõu piiravad loomakasvatuse arendamist söödad, hooned, kariloomade arv ja produktiivsus. Loetletud kitsendustest on otsustav enamasti söödabaas.

Lähtudes sellest on loomakasvatustoodangu ratsionaalse suuruse ja arengusuuna kindlaksmääramiseks otstarbekohane võtta ülesandesse kitsendused kõigepealt söötade ja tööjõu kohta. Järgnevalt võib saadud tulemusi täpsustada kõiki muid tegureid arvesse võttes.

Kitsendus töökulu kohta võetakse loomakasvatusalasesse ülesandesse samuti nagu taimekasvatuses.

Tunduvalt keerukam on võtta ülesandesse andmeid söötade kohta. Looduslikelt kõlvikutelt saadava sööda koguse võib eraldi välja arvutada. Mis puutub põllundusest saadava kultuursööda kogusesse, siis on see tundmatu. Viimane määratakse kindlaks sama ülesande lahendamisel, millega leitakse kõigi tootmisharude ja kultuuride optimaalsed vahekorrad.

Tekkivatest raskustest võib üle saada järgmisel viisil. Söötade hankimise allikad võib jaotada kahte rühma. Esimesse rühma kuuluvad põldudelt saadavad söödad, nagu kõigi söödakultuuride kogusaagid, osa mittesöödakultuuride (kartuli, teravilja) põhitoodangust ja kõigi kultuuride jäätmed. Kõikide nende söötade üldkogus ei ole varem teada, see sõltub külvipinna struktuurist, mis on vaja alles kindlaks määrata. Teise söötade saamise allikate rühma kuuluvad reservis olevad looduslikud heina- ja karjamaad ning lõpuks — ostusöödad. Neist allikatest saadavate söötade koguse võib arvutada koostatava ülesande lahendusest sõltumata.

Seega võib plaaniperioodil majandi kasutada oleva üldise söötade koguse avaldada kahest liidetavast koosneva summana. Üks liidetavatest on seejuures teada — see on teise rühma kuuluvatest allikatest saadav sööt; teine liidetav aga — põldudelt saadav sööt — on tundmatu.

Meie näites on iga kultuuri toodang x_j.

Kui j-inda kultuuri saagist söötadeks kasutatav osa tähistada d_j, söötade söötühikuteks ümberarvutamise koefitsient q_{hj}, muudest allikatest saadavate söötade (välja arvatud põllundusest saadavate söötade) kogus — D_h (tsentnersöötühikutes), siis võib söötade üldkoguse (tsentnersöötühikutes), mis majand saab, kirjutada järgmise avaldisena:

$$D_h + \sum_{j=1}^{l'} d_j q_{hj} x_j.$$

Peale selle on võrranditel, mis piiravad üldises võrrandisüsteemis[1] söötade kaudu loomakasvatussaaduste tootmist, mõnevõrra omapärane kuju, nimelt järgmine (olgu selle võrrandi järjekorranumber h):

$$\sum_{j=l'+1}^{l} a_{hj} x_j - \sum_{j=1}^{l'} d_j q_{hj} x_j \leqslant D_h.$$

Siin on l tootmisharude üldarv majandis ja l' — tootmisharude arv maaviljeluses.

Söödaressursside suurust ja nende kulutamist väljendatakse mitte ühe võrrandiga, vaid terve võrrandisüsteemiga.

Asi on nimelt selles, et mõnede loomaliikide mõningaid söötasid ei saa üksteisega asendada. Nii näiteks on sigade põhisöödaks kontsentraadid, söödajuurvili ja kartul. Lammaste söödaks on peamiselt karjamaarohi ja toorsöödad. Pealegi tuleb arvesse võtta mitte ainult söötühikute hulka, vaid ka seda, kui palju sisaldavad söödad seeduvat proteiini ja teisi toitaineid.

Seetõttu tuleb ülesande lahendamisel jaotada kõik söödavarud 3—5 rühma, näiteks silo ja haljassööt, toorsöödad, kontsentraadid, söödajuurvili ja kartulid ning muud söödad.

Iga söödarühma kohta koostatakse eraldi võrrand. Võrrandid koostatakse ka seeduva proteiini varude ja nende kulutamise kohta. Vaadeldavas ülesandes võib seega kogu söödabaasi suurust ja koostist väljendada vähemalt viie võrrandiga. Nende võrrandite struktuur on analoogiline eespool toodud nn. söödavõrranditega.

Esitame näite. On vaja leida, misssuguses vahekorras toota teravilja ja silomaisi ning piimakarjasaadusi, et saada rahalises väljenduses maksimum kogutoodangut.

Nimetatud tootmisharude arendamiseks on kasutada 10 000 ha põldu ja 200 000 inimpäeva tööaega. Majandil on 1000 ha looduslikke karjamaid, mille igalt hektarilt saadakse hooaja jooksul plaani kohaselt 5 tsentnersöötühikut, kokku 5000 tsentnersöötühikut. Peale selle kavat-

[1] Üldist võrrandisüsteemi vt. lk. 38.

setakse söödaks kasutada kogu silomaisi saak ja 20% teravilja kogutoodangust. Söötühikutesse ümberarvutamise koefitsient on teraviljal keskmiselt 1,1 ja silomaisil 0,2. Teravilja planeeritud saagikus on 20 ts hektarilt, silomaisil 400 ts hektarilt. Töökulu ühe hektari kohta on teraviljal 2, silomaisil 20 inimpäeva. Töökulu ühe looma kohta on loomakasvatuses 25 inimpäeva aastas. Söödakulu ühe tsentneri piima kohta on 1,2 tsentnersöötühikut, loomade ühe tsentneri kaaluiibe kohta 5 tsentnersöötühikut. Lehma keskmine produktiivsus on 2500 kg (25 ts) aastas. Karja aastane kaaluiive on 2 ts ühe looma kohta.

Toodete tsentnerihind on teraviljal 4 rbl., piimal 12 rbl. ja loomade kaaluiibel 80 rbl.

Tuleb märkida, et loomakasvatusharudes, kus toodetakse üheaegselt 2—3 toodet või isegi rohkem, on sobivam teha arvutused põhikarja ühe looma kohta, mitte toodangu ühe tsentneri kohta. Niisugused loomakasvatusharud on veisekasvatus, lambakasvatus ja linnukasvatus. Seetõttu võtame oma ülesandes arvutuste aluseks teravilja ja maisi puhul ühe tsentneri, veiste puhul aga ühe lehma.

Et toodangu hulk eri tootmisharudes pole teada, tähistame:

teravilja toodangu x_1;
silomaisi toodangu x_2;
lehmade arvu x_3.

Seejärel asume ülesannet matemaatiliselt formuleerima.

Koostame abitabeli.

Tootmis-ressursid	Mõõt-ühik	Kulud: 1 ts teravilja kohta (x_1)	1 ts maisisilo kohta (x_2)	1 lehma kohta (x_3)	Tootmis-ressursse kokku
Põld	ha	0,05	0,0025	—	10 000
Tööajafond	inimpäev	0,1	0,05	25	200 000
Loomasööt	tsentner-söötühik	—	—	40	$5000+$ $+0{,}22x_1+$ $+0{,}2x_2$
Toodangu ühe tsentneri arvestus-hind	rbl.	3,2	0	460	

Tabelis ridadel «sööt» ja «arvestushind» olevad andmed vajavad täiendavat selgitamist. Söödakulu ühe lehma kohta määratakse kindlaks järgmiselt. Ülesande tingimustes on öeldud, et karja aastatoodang ühe lehma kohta on 25 ts piima ja 2 ts noorkarja kaaluiivet. Peale selle on teada üldine söödakulu ühe toodanguühiku kohta. Nende andmete alusel on söödakulu ühe lehma kohta $25 \cdot 1{,}2 + 2 \cdot 5 = 40$ tsentnersöötühikut. Samal viisil on määratud veiste kogutoodang ühe loomühiku kohta, mis on 460 rbl. Söödaressursside kogumahu võib kirjutada üles kolmest liidetavast koosneva summana. Esimeseks liidetavaks on seejuures teadaolev suurus — 5000 tsentnersöötühikut. See on looduslikelt karjamaadelt saadud loomasööda hulk. Põldudelt saadava sööda hulk tuleb aga leida arvutuste teel. Ülesande tingimuste kohaselt on plaanis kasutada 20% teravilja kogutoodangust loomasöödaks, kusjuures teravilja kogutoodangut tähistati x_1. Teravilja söötühikutesse ümberarvutamise koefitsient on 1,1. Seega saab majand teraviljakasvatusest $0{,}2 \cdot 1{,}1 \cdot x_1 = 0{,}22x_1$ tsentnersöötühikut söötasid. Maisisilo kasutatakse kõik söödaks; söötühikutesse ümberarvutamise koefitsient on silol 0,2. Seega on kolmandaks liidetavaks $0{,}2x_2$.

Teravilja kehtiv tsentnerihind on 4 rubla, tabelis aga on hinnaks 3,2 rbl. Hinda on vähendatud (korrigeeritud) proportsionaalselt söödaks kasutatava osaga teravilja kogutoodangust. Kui teravilja madalam tsentnerihind tähistada tähega c'_j, j-inda kultuuri saagist loomasöödaks kasutatav osa tähega d_j, siis arvutatakse parandatud hind valemiga

$$c'_j = c_j(1 - d_j).$$

Meie näites on selle avaldise väärtus $c'_1 = 4(1 - 0{,}2) = 3{,}2$. Sellise võttega saab vältida korduvat arvestamist, mis oleks muidu söötade kui lõpptoodangu arvestuses paratamatu, sest nende maksumus liidetakse loomakasvatussaaduste maksumusega. Samal põhjusel on silo arvestushind null. Eespool toodud tabeleid kasutades koostame võrratusesüsteemi

$$\begin{aligned} 0{,}05x_1 + 0{,}0025x_2 &\leqslant 10\,000 \\ 0{,}1x_1 + 0{,}05x_2 + 25x_3 &\leqslant 200\,000 \\ 40x_3 &\leqslant 5000 + 0{,}22x_1 + 0{,}2x_2 \end{aligned}$$

$$C = 3{,}2x_1 + 460x_3$$

Leida tuleb suuruse C maksimum.

Teisendame abitundmatute abil võrratused võrranditeks; kolmanda võrratuse tundmatud aga viime paremalt poolt võrrandi vasakule poole, mille tulemusena saame järgmise võrrandisüsteemi:

$$\begin{aligned} 0{,}05x_1+0{,}0025x_2+x_4 &= 10\,000 \\ 0{,}1x_1+0{,}05x_2+25x_3+x_5 &= 200\,000 \\ -0{,}22x_1-0{,}2x_2+40x_3+x_6 &= 5000 \\ \hline C=3{,}2x_1+460x_3 & \end{aligned}$$

Leida suuruse C maksimum (vt. lk. 53).

Arvutuste kontroll

Külvipind (ha):

teravili	154 214,6 : 20 = 7 710,73
silomais	915 708 : 400 = 2 289,27
Kokku	10 000

Kogutoodangu maksumus (rbl.):

teravili	154 214,60 · 3,2 = 493 486,72
loomakasvatussaadused	5 551,72 · 460 = 2 553 791,20
Kokku	3 047 278

Veiste söödavajaduse katmiseks toodetakse (tsentnersöötühikutes):

looduslikelt kõlvikutelt saadavat sööta	5 000
teravilja 154 214,6 · 0,2 · 1,1 = 33 927,2	
silo 915 708 · 0,2 = 183 141,6	
Kokku	222 068,8

Ühe söödal oleva lehma kohta vajatakse aastas 40 tsentnersöötühikut. Järelikult saab toodetava söödaga pidada 222 068,8 : 40 = 5551,7 lehma.

Töökulu (inimpäevades):

teravilja tootmiseks	7 710,73 · 2 = 15 421,46
silo „	2 289,27 · 20 = 45 785,40
loomakasvatuses	5 551,72 · 25 = 138,793
Kokku . .	199 999,86 ≈ 200 000

Väiksed kõrvalekaldumised arvutustulemustes on tingitud ümardamisest.

Ülesande lahendus.

Põhitundmatud	Vabaliikmed	Kõrvaltundmatud			Lahendivariandid
		x_1	x_2	x_3	
x_4	10 000	0,05	0,0025	0	
x_5	200 000	0,1	0,05	25	
$\leftarrow x_6$	5 000	−0,22	−0,2	$\boxed{40}$	I
C	0	−3,2	0	−460	
		x_1	x_2	x_6	
$\leftarrow x_4$	10 000	$\boxed{0,05}$	0,0025	0	
x_5	196 875	0,2375	0,175	−0,625	II
$\rightarrow x_3$	125	−0,0055	−0,005	0,025	
C	57 500	−5,73	−2,3	11,5	
		x_1	x_2	x_6	
$\rightarrow x_1$	200 000	20	0,05	0	
$\leftarrow x_5$	149 375	−4,75	$\boxed{0,1631}$	−0,625	III
x_3	1 225	0,11	−0,0047	0,025	
C	1 203 500	114,6	−2,0135	11,5	
		x_4	x_5	x_6	
x_1	154 214,6	21,46	−0,3065	0,19157	
$\rightarrow x_2$	915 708,0	−29,12	6,1313	−3,8314	IV
x_3	5 551,7	−0,028	0,02897	0,0069	
C	3 047 280	55,723	12,3433	3,785	

Nii võib kolhooside ja sovhooside eri põllumajandusharude kombineerimise ülesande matemaatilise mudeli kirjutada järgmisel kujul.

Leida avaldise

$$C = \sum_{j=1}^{l} c_j x_j$$

maksimum tingimustel, et

1) $\sum_{j=1}^{l} a_{ij}x_j \leqslant b_i \qquad (i=1, 2 \ldots m);$

2) $\sum_{j=l'+1}^{l} a_{hj}x_j - \sum_{j=1}^{l'} v_{hj}x_j \leqslant D_h \qquad (h \in i); \qquad$ 3) $x_j \geqslant 0,$

kus a_{ij} on i-ndat liiki ressursside kulu j-inda toote ühe ühiku tootmiseks;

b_i — i-ndat liiki ressursside hulk;

a_{hj} — h-ndat liiki toitaine kulu j-inda loomakasvatustoote ühe ühiku kohta;

$$v_{hj} = d_j \cdot q_{hj},$$

kus d_j — j-inda kultuuri saagist söödaks kasutatav osa;

q_{hj} — h-nda toitaine sisaldus j-inda sööda ühikus;

D_h — mujalt, mitte põllundusest saadud h-ndat liiki sööda kogus;

c_j — toodangu ühiku hind (omahind);

x_j — j-indat liiki toote toodang;

l — ülesandesse võetud tootmisharude üldarv majandis;

l' — tootmisharude arv maaviljeluses (kultuuride arv).

Nimetame siin käsitletud ülesannet edaspidi esimeseks mudeliks.

PÕLDUDE JAOTAMINE MULLAVILJAKUSE JÄRGI

Sageli jaotatakse põlde majandeis nende viljakuse, pinnareljeefi, asukoha ja teiste suuruste järgi. Sel juhul tuleb eespool käsitletud mudelit täiendada, et neid erinevusi saaks arvestada.

Ülesande koostamiseks jaotatakse kogu põllumaa r osaks. Seejärel määratakse kindlaks, missugust agrotehnikat igal üksikul põllul kasutatakse ja missugune on neil eri kultuuride saagikus. Saadud andmete alusel arvutatakse tehnoloogilised koefitsiendid.

Oletame, et võtsime ülesandesse uue teguri, milles väljendub põldude erinev mullaviljakus. Matemaatiliselt kirjutatakse see üles täiendava võrratusesüsteemi kujul. Lepime kokku, et kasutame järgmisi tähistusi:

r — erineva viljakusega maatükkide arv;
S_k — k-nda maatüki pindala;
a_{jk} — k-ndal maatükil kasvatatava j-inda kultuuri saagikuse pöördväärtus;
x_{jk} — k-ndal maatükil kasvatatava j-inda saaduse toodang;
l' — majandis kasvatatavate kultuuride arv.

Kasutades neid tähistusi, võib täiendava kitsenduste süsteemi välja kirjutada nii:

$$\sum_{j=1}^{l'} a_{jk} x_{jk} \leqslant S_k.$$

Kui ühendada käsitletud võrratusesüsteem esimese mudeliga, saame ülesandele järgmise sõnastuse.

Leida avaldise

$$C = \sum_{j=1}^{l'} \sum_{k=1}^{r} c_{jk} x_{jk} + \sum_{j=l'r+1}^{n} c_j x_j$$

maksimaalne väärtus tingimustel, et

$$1) \quad \sum_{j=1}^{l'} a_{jk} x_{jk} \leqslant S_k;$$

$$2) \quad \sum_{j=1}^{l'} \sum_{k=1}^{r} a_{ijk} x_{jk} + \sum_{j=l'r+1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i;$$

$$3) \quad \sum_{j=l'r+1}^{n} a_{hj} x_j - \sum_{j=1}^{l'} \sum_{k=1}^{r} v_{hjk} x_{ik} \leqslant D_h;$$

$$4) \quad x_j \geqslant 0 \qquad (n = l'r + l - l').$$

Nii sõnastatud ülesannet nimetame edaspidi teiseks mudeliks.

Mis puutub loomakasvatushoonete ja suguloomade arvuga seotud kitsendustesse, siis nende esimesse või teise mudelisse võtmine sõltub ülesande lahendamise eesmärgist. Kui eesmärgiks on määrata kindlaks eeloleva aasta konkreetne tootmisplaan, siis on sellised kitsendused vajalikud. Kui aga tahetakse selgitada, missugune tootmissuund on antud oludes üldiselt kõige parem, siis pole neid kitsendusi vaja.

Kitsendus laudas olevate loomakohtade arvu näol on otstarbekohane ülesandesse võtta ühes, kogu karja hõlmavas võrratuses, kusjuures kõik andmed arvutatakse eelnevalt ümber tinglikesse loomakohtadesse. Tinglike loomakohtade arvule tuleb tugineda ülesande koostamisel ka siis, kui arvutatakse tehnoloogilisi koefitsiente eri loomade kohta. Tingühikutesse ümberarvutamine võimaldab eri tootmisharude parima kombinatsiooni leidmise ülesandega hõlmata korraga kõiki loomakasvatusharusid.

Missugusel kujul karja taastootmisega seotud kitsendused esitatakse, seda vaadeldakse allpool karja optimaalse koostise leidmise mudeli sõnastamisel. Tegelikkuses võivad seda liiki ülesanded kujuneda õige suureks, m (s. o. ridade arv) võib olla 30 või rohkem ja n (s. o. veergude arv) 60 või rohkem.

Praegu ei ole muidugi veel võimalik plaani koostamisel igas sovhoosis ja kolhoosis selliseid suuri ülesandeid lahendada, sest selleks oleks vaja elektronarvuteid ning üsna palju raha. Ent juba praegu on võimalik ja vajalik lahendada selliseid ülesandeid eri vööndite tüüpiliste majandite kohta, et saadud tulemusi kasutada ka teistes üldilmelt sarnastes majandites, arvestades muidugi ka viimaste konkreetseid töötamisolusid. Kui aga mõtelda tulevikule, siis ei ole kaugel aeg, kus suuremates põllumajandusettevõtetes hakatakse sellisteks arvutusteks laialdaselt kasutama elektronarvuteid.

* * *

Vaatleme nüüd lihtsa arvnäite varal, kuidas koostatakse ja lahendatakse eri kultuuride kasvatamise optimaalse kombineerimise ülesannet niisuguses majandis, kus esineb tunduvalt erineva mullaviljakusega põlde.

Olgu vaja leida nisu ja päevalille külvipindade optimaalne vahekord. Nende kultuuride kasvatamiseks saab kasutada 5000 ha põldu, millest 3000 ha on väga viljakad. Nisu ja päevalille saagikuseks esimesel ja teisel maatükil võiks olla (tsentnerites hektarilt):

	I maatükk	II maatükk
nisu	25	16
päevalill	20	10

Edasi oletame, et mehhaniseeritud ja käsitsitöid tuleb ühe hektari kohta teha mõlemal maatükil võrdselt ning et selleks kulub nisul 1 inimpäev mehhaniseeritud ja 2 inimpäeva käsitsitööd, ühe hektari päevalille kohta aga vastavalt 5 ja 10 inimpäeva. Majandil on kasutada tööjõudu järgmiselt: mehhaniseeritud töödel 7500 inimpäeva ja käsitsitöödel 20 000 inimpäeva. Ühe tsentneri nisu hind on 6 rbl., ühe tsentneri päevalille hind 15 rbl. Tuleb leida nisu ja päevalille külvipindade optimaalne vahekord, et antud oludes saada rahalises väljenduses maksimaalselt toodangut.

Koostame abitabeli.

	Mõõtühik	Kulud 1 ts kohta I maatükil		Kulud 1 ts kohta II maatükil		Tootmisressursse kokku
		nisu (x_1)	päevalill (x_2)	nisu (x_3)	päevalill (x_4)	
I põld	ha	0,04	0,05	0	0	3 000
II põld	,,	0	0	0,0625	0,1	2 000
Mehhaniseeritud töö	inimpäev	0,04	0,25	0,0625	0,5	7 500
Käsitsitöö	,,	0,08	0,5	0,125	1,0	20 000
1 ts hind	rbl.	6	15	6	15	

Võrrandisüsteem:

$$0{,}04x_1+0{,}05x_2+0+0+x_5=3\,000$$
$$0+0+0{,}0625x_3+0{,}1x_4+x_6=2\,000$$
$$0{,}04x_1+0{,}25x_2+0{,}0625x_3+0{,}5x_4+x_7=7\,500$$
$$0{,}08x_1+0{,}5x_2+0{,}125x_3+x_4+x_8=20\,000$$
$$C=0-(-6x_1-15x_2-6x_3-15x_4)$$

Leida suuruse C maksimaalne väärtus.

Põhi-tund-matud	Vaba-liik-med	Kõrvaltundmatud				Lahendi-variandid
		x_1	x_2	x_3	x_4	
x_5	3 000	0,04	0,05	0	0	I
x_6	2 000	0	0	0,0625	0,1	
$\leftarrow x_7$	7 500	0,04	$\boxed{0,25}$	0,0625	0,5	
x_8	20 000	0,08	0,5	0,125	1,0	
C	0	−6	−15	−6	−15	
		x_1	x_7	x_3	x_4	
$\leftarrow x_5$	1 500	$\boxed{0,032}$	−0,2	−0,0125	−0,1	II
x_6	2 000	0	0	0,0625	0,1	
$\rightarrow x_2$	30 000	0,16	4,0	0,25	2,0	
x_8	5 000	0	−2,0	0	0	
C	450 000	−3,6	60	−2,25	15	
		x_5	x_7	x_3	x_4	
$\rightarrow x_1$	46 875	31,25	6,25	−0,390 625	−3,125	III
$\leftarrow x_6$	2 000	0	0	$\boxed{0,0625}$	0,1	
x_2	22 500	−5,0	5,0	0,3125	2,5	
x_8	5 000	0	−2,0	0	0	
C	618 750	112,5	37,5	−3,65625	3,75	
		x_5	x_7	x_6	x_4	
x_1	59 375	31,25	6,25	6,25	−2,5	IV
$\rightarrow x_3$	32 000	0	0	16	1,6	
x_2	12 500	−5,0	5,0	−5.0	2,0	
x_8	5 000	0	−2,0	0	0	
C	735 750	112,5	37,5	58,5	9,6	

A r v u t u s t u l e m u s t e k o n t r o l l

Külvipind (ha):

I maatükk

nisu	59 375 : 25 =	2 375
päevalill	12 500 : 20 =	625
K o k k u		3 000

II maatükk

nisu	32 000 : 16 = 2 000

Mehhaniseeritud töö kulu (inimpäevades):

nisu harimiseks	2375 · 1 + 2 000 =	4 375
päevalille „	625 · 5 =	3 125
K o k k u		7 500

Käsitsitööd tehakse (inimpäevades):

nisu harimiseks	4 375 · 2 =	8 750
päevalille „	625 · 10 =	6 250
K o k k u		15 000

Kasutamata jäänud ajafond käsitsitööl

$$5\,000\ (x_8 = 5\,000).$$

Kogutoodangu maksumus (rbl.):

nisu	(59 375 + 32 000) · 6 =	548 250
päevalill	12 500 · 15 =	187 500
K o k k u		735 750

Neljandas (optimaalses) variandis on C = 735 750.

Esimese peatüki lõpus esitame mõningaid teatmeid lineaaralgebrast.

LÜHIDALT LINEAARALGEBRAST[1]

Maatriksid ja tehted nendega. Ristkülikukujulist tabelit, mis sisaldab m rida ja n veergu ning milles on mn arvu, nimetatakse maatriksiks. Selline tabel piiratakse tavaliselt ümarsulgudega ja tähistatakse tähega A või tähtedega a_{ij}. Näiteks:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}a_{m2}\ldots a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})$$

Kui maatriksis A vahetada read vastavalt ümber veergudega, siis saame eespool toodud maatriksi A transponeeritud maatriksi, mida märgitakse sümboliga A′.

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11}a_{21}\ldots a_{m1} \\ a_{12}a_{22}\ldots a_{m2} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{1n}a_{2n}\ldots a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ji})$$

Kui $m=n$, siis nimetatakse maatriksit A ruutmaatriksiks, kusjuures arvu n nimetatakse maatriksi järguks. Kui kõik ruutmaatriksi elemendid, välja arvatud peadiagonaalil asetsevad, on nullid, siis nimetatakse maatriksit diagonaalmaatriksiks. Sellist diagonaalmaatriksit, mille peadiagonaali kõik elemendid on võrdsed ühega, nimetatakse ühikmaatriksiks. Ühikmaatriksit tähistatakse tähtedega E või I.

Kui $n=3$, siis on ühikmaatriksiks

$$I_3 = \begin{pmatrix} 100 \\ 010 \\ 001 \end{pmatrix}$$

[1] Lineaaralgebra põhjaliku käsitlusena on eesti keeles ilmunud G. K a n g r o, Kõrgem algebra, Tallinn 1962, mis on mõeldud õpikuks matemaatikaüliõpilastele. Põllumajanduse spetsialistidele mõnevõrra kergemini mõistetav on TPI raamatupidamise eriala üliõpilastele väljaantud M. Tamme õpik: M. T a m m, Lineaaralgebra ja lineaarprogrammeerimine I ja II, TPI, Tallinn 1962. Metoodiliselt väga hea lühiesitusena võib soovitada ka eespool juba viidatud I. Kulli artiklit (vt. lk 37, joonealune märkus). — *Toimetaja märkus.*

Maatriksit, mis koosneb ühest veerust, nimetatakse veeruvektoriks, ühest reast koosnevat maatriksit aga reavektoriks.

Selleks, et korrutada mingit arvu α (skalaari) maatriksiga, korrutatakse selle arvuga maatriksi iga elementi eraldi. Seega on

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} \dots \alpha a_{1n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha a_{m1} \dots \alpha a_{mn} \end{pmatrix} = \alpha a_{ij}$$

Et maatrikseid liita, tuleb liita kõik nende elemendid.

Maatriksit A võib teise maatriksiga B korrutada ainult sel tingimusel, kui maatriksi A veergude arv on võrdne maatriksi B ridade arvuga. Sealjuures leitakse korrutis $AB = C$ järgmiselt: maatriksi C i-nda rea j-indas veerus olev element saadakse maatriksi A i-nda rea elementide ja maatriksi B j-inda veeru vastavate elementide korrutiste summana, s. o.

$$C_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} \dots + a_{in}b_{nj}.$$

Maatriksite korrutis ei ole kommutatiivne, mistõttu $AB \neq BA$.

Igale ruutmaatriksile vastab mingi arv, mida nimetatakse determinandiks. Determinandi tähiseks on [A]. Determinant saadakse kõigi maatriksielementide selliste korrutiste liitmise teel, millest igaühes on üks ja ainult üks element maatriksi igast reast ja veerust.

Determinantidel on järgmised omadused.

1. Kui kas või ainult ühe rea või veeru kõik elemendid on nullid, siis on ka kogu determinant võrdne nulliga.
2. Maatriksi transponeerimine ei muuda determinandi väärtust.
3. Kui maatriksis kaks rida või kaks veergu omavahel ümber vahetada, siis determinandi märk muutub vastupidiseks.
4. Kui maatriksis on kaks ühesuguste või proportsionaalsete elementidega rida või kaks ühesuguste või proportsionaalsete elementidega veergu, siis võrdub determinant nulliga.
5. Maatriksi mingi ühe rea või veeru kõigi elementide korrutamisel arvuga K suureneb determinant K korda.

6. Determinandi suurus ei muutu, kui maatriksi mingi rea või veeru igale elemendile liita arv, mis on võrdne mõne teise rea või veeru vastavate elementide ja arvu K korrutisega.

Maatriksi A astakuks nimetatakse ridade arvu kõige suuremas maatriksisse A mahtuvas ruutmaatriksis, mille determinant erineb nullist.

Ruutmaatriksit nimetatakse regulaarseks ehk kõdumata maatriksiks, kui tema determinant ei võrdu nulliga. Kui determinant võrdub nulliga, siis nimetatakse sellist maatriksit singulaarseks ehk kõdunud maatriksiks.

Elemendi a_{ij} miinoriks nimetatakse maatriksi determinanti, mis on saadud ruutmaatriksist A selle i-nda rea ja j-inda veeru mahakriipsutamise teel.

Miinor, mille sümboliks on võetud $(-1)^{i+j}$, on elemendi a_{ij} alamdeterminandiks. Kui elemendi a_{ij} miinori tähiseks võtta D_{ij}, alamdeterminant aga tähistada A_{ij}, siis on $A_{ij}=(-1)^{i+j}$. Alamdeterminant D_{ij} ühtib miinoriga kuni märgi (+, −) täpsusega.

Ruutmaatriksi A adjungeeritud maatriksiks nimetatakse sellist maatriksit $I=A_{ij}$, mille i-ndas reas on j-inda veeru elemendiks transponeeritud maatriksi A′ elemendi a_{ij} alamdeterminant.

Nii on

$$I=\begin{Bmatrix} A_{11}A_{21}\ldots A_{n1} \\ A_{12}A_{22}\ldots A_{n2} \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ A_{1n}A_{2n}\ldots A_{nn} \end{Bmatrix}$$

Maatriksit B nimetatakse ruutmaatriksi A pöördmaatriksiks, kui $AB=E$. Maatriksi A pöördmaatriksi tähiseks on A^{-1}. Korrutis $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$. Pöördmaatriks leitakse valemiga:

$$A^{-1}=\frac{1}{[A]}\cdot I,$$

s. t. et leida pöördmaatriksit A^{-1}, tuleb determinandi [A] pöördväärtus korrutada maatriksi A adjungeeritud maatriksiga I.

Olgu möödaminnes märgitud, et simpleksmeetodi abil ülesannete lahendamisel koostatakse üksteise järel aina uusi tabeleid, milles kõrvaltundmatute kordajaiks on pöördmaatriksi elemendid. Käesoleva peatüki osas «Simpleksmeetodi algoritm» käsitleti näiteks tootmisharude optimaalse kombinatsiooni leidmise elementaarse ülesande lahendivariante. Esitame siin veel kord esimese ja kolmanda variandi (tabelid A ja B).

Tabel A

Põhi-tundmatud	Vaba-liikmed	Kõrval-tundmatud	
		x_1	x_2
x_3	2 000	0,005	0,05
x_4	18 000	0,11	0,1
x_5	3 200	0,0225	0,025
C	0	−0,25	−1,2

Tabel B

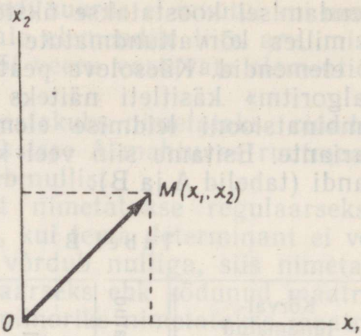
Põhi-tundmatud	Vaba-liikmed	Kõrval-tundmatud	
		x_5	x_3
x_2	29 000	−5	22,5
x_4	3 000	−5	0,5
x_1	110 000	50	−25
C	62 300	6,5	20,75

Neis tabelites on tundmatud x_1 ja x_2 vahetanud oma kohad tundmatutega x_5 ja x_3. Koostame nende tundmatute ridade ja veergude ristumiskohtadel asuvatest elementidest kaks maatriksit ning leiame nende maatriksite korrutise:

$$\begin{pmatrix} 0{,}025 & 0{,}0225 \\ 0{,}05 & 0{,}005 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 22{,}5 \\ 50 & -25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nii selgubki, et tabeli B elementidest koostatud maatriks on tabeli A pöördmaatriks.

Vektorid ja vektorruumid. Mingile punktile M vastab tasapinnal arvude x_1 ja x_2 järjestatud paar, mis on punkti M koordinaatideks. Punkti M (x_1; x_2) võib vaadelda kui vektorit koordinaatidega x_1 ja x_2. Järelikult vastab tasapinnal igale punktile kahemõõtmeline vektor, mis algab punktis (0; 0) ja lõpeb punktis (x_1; x_2). Analoogiliselt vastab kolmemõõtmelises ruumis igale punkti asendit ruumis iseloomustavate arvude järjestatud reale vektor alguspunktiga (0; 0; 0) ja lõpp-punktiga (x_1; x_2; x_3). n arvust koosnevat järjestatud hulka $a_1 a_2 \ldots a_n$ nimetatakse



Joon. 2.

n-mõõtmeliseks vektoriks. Üksikuid arvusid a_1; $a_2 \ldots a_n$ nimetatakse vektori koordinaatideks.

Vektorite põhiomadused.

1. Kaks vektorit $A(a_1 \ldots a_n)$ ja $B(b_1 \ldots b_n)$ on võrdsed, kui nende vastavad koordinaadid on võrdsed, s. o. $a_i = b_i$.

2. Vektorite $A(a_1 \ldots a_n)$ ja $B(b_1 \ldots b_n)$ summa on vektor $C(a_1 + b_1 \ldots a_n + b_n)$.

3. Vektori A korrutiseks skalaariga (arvuga) α on vektor $B = \alpha A = (\alpha a_1 \ldots \alpha a_n)$.

4. Igale vektorite paarile vastab nende skalaarkorrutiseks nimetatav reaalarv $AB = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n$. Vektoreid korrutatakse samuti nagu maatrikseid. Iga veeruvektorit võib vaadelda kui maatriksit, millel on m rida ja üksainus veerg. Analoogiliselt on reavektor maatriks, millel on n veergu ja üksainus rida.

5. Vektorite $A_1 A_2 \ldots A_n$ süsteemi nimetatakse lineaarselt sõltumatuks, kui võrrand $K_1 A_1 + K_2 A_2 + \ldots + K_n A_n = 0$ kehtib ainult sel juhul, kui $K_1 = K_2 = \ldots = K_n = 0$.

Vastupidisel juhul on vektorite süsteem lineaarselt sõltuv.

Sõltumatute n-mõõtmeliste vektorite kogumit nimetatakse n-mõõtmeliseks ruumiks.

Süsteemi kuuluvat lineaarselt sõltuvat vektorit võib väljendada ülejäänud vektorite lineaarse kombinatsioonina. Kui osatakse teha kindlaks, kas vektorid on lineaarselt sõltuvad või mitte ja leida üht vektorit teiste kaudu, siis saab võrrandite arvu süsteemis tunduvalt vähendada.

n-mõõtmelises ruumis ei saa olla rohkem kui n lineaarselt sõltumatut vektorit. n-mõõtmelise ruumi n lineaarselt sõltumatust vektorist koosnevat süsteemi nimetatakse selle ruumi baasiks. n-mõõtmelise ruumi mistahes vektorit võib avaldada selle ruumi baasivektorite lineaarse kombinatsioonina.

II PEATÜKK

LÄHTEINFORMATSIOONI ETTEVALMISTAMINE, ÜLESANNETE LAHENDAMINE JA TULEMUSTE ANALÜÜS

LÄHTEINFORMATSIOONI ETTEVALMISTAMISE METOODIKA

Eespool käsitletud majandusmatemaatiliste mudelitega saab lahendada vastavaid ülesandeid nii kolhooside, sovhooside, sovhoositrustide, tootmisvalitsuste kui ka oblastite ja vabariikide mastaabis.

Majanduslikult põhjendatud optimaalse plaani koostamiseks annavad materjali plaaniliste ja normatiivsete näitajate alusel tehtavad arvutused.

Majandusmatemaatika meetoditega lahendatavate ülesannete ettevalmistamisel tuleb teha palju arvutusi ja analüüse. Et lahendada näiteks ülesannet selle kohta, kuidas tootmisharusid mingis ühes põllumajandusettevõttes või põllumajandusettevõtete rühmas optimaalselt kombineerida, tuleb:

1) koguda ja ette valmistada aruande- ja plaaniandmed ning normatiivid;

2) määrata kindlaks ülesandesse lülitatavate tootmisharude loend;

3) leida külvipinna, tööjõu ja söötade kulu, omahinna, väetiste, kapitaalmahutuste jms. koefitsiendid ja sõnastada vastavad kitsendused;

4) määrata kindlaks vajalikud lisakitsendused;

5) määrata optimaalsuse kriteerium, s. o. koostada sihifunktsioon.

Vaatleme, milles seisab nende tööde sisu ja kuidas neid tehakse.

Lähteandmete ettevalmistamine. Ülesande koostamiseks vajalikke andmeid sisaldavad peamiselt järgmised dokumendid: kolhooside ja sovhooside aastaaruanded, kultuuride ja kariloomade tehnoloogilised kaardid, kehtivad külvi- ja söötmisnormid, andmed söötade toitainesisalduse kohta ja muud normatiivid, hinnakirjad, toodangu riigile müümise plaanilised kohustused, tootlusnormid, andmed maa kasutamise kohta.

Kõiki neid dokumente kontrollitakse ja analüüsitakse hoolikalt. Kontrollimisega saab varakult kõrvaldada ebatäpsused ja vead. Ühtlasi selgub seejuures, mille kohta pole veel küllaldaselt andmeid ning astutakse samme, et neid saada või ise välja töötada. Aruandeandmetelt nõutakse eeskätt tõepärasust, plaanilistelt andmetelt aga majanduslikku ja tehnilist põhjendatust.

Tootmisharude loendi koostamine. Iseseisvate tootmisharudena lülitatakse ülesandesse üksikuid kultuure, kultuurirühmi, loomaliike ja loomade rühmi. Seejuures peetakse silmas, et arvutlustesse lülitatavad tootmisharud oma tootmistehnoloogia ja lõpptoodangu poolest üksteisest oluliselt erineksid ning omaksid majandis küllalt suurt tähtsust.

On teada, et meie kolhoose ja sovhoose arendatakse paljuharuliste majanditena. Seejuures on tootmisharusid peaaegu kõigis kolhoosides ja ka paljudes sovhoosides ülemäära palju. See on üks tootmise organiseerimise ebakohti, millest aegapidi vabanetakse. Arenenumad majandid loobuvad madala saagikusega väheefektiivsete kultuuride viljelemisest, vähendavad tootmisharude arvu ning lähevad üle ainult selliste kultuuride ja loomakasvatussaaduste tootmisele, mis annavad nende asukoha looduslikes ja majanduslikes tingimustes kõige paremaid tulemusi. Selles kolhooside ja sovhooside ajakohastumises etendavad matemaatilised meetodid tähtsat osa.

Arusaadavalt oleneb arvutlustesse lülitatav tootmisharude loend sellest, millele majand on spetsialiseerunud. Teraviljakasvatuse piirkondades võetakse ülesandesse iseseisvate tootmisharudena peamised teraviljakultuurid. Linnalähedastes tsoonides, kus teraviljakasvatusele pole spetsialiseerutud, vaadeldakse neid rühmiti, näiteks: taliteraviljad, suviteraviljad. Linnalähedastes majandites, mis on spetsialiseerunud köögivilja, kartuli, piima ja muude lähemas ümbruskonnas müüdavate saaduste tootmisele, võetakse ülesandesse iseseisvate tootmisharudena aga eeskätt tähtsaimad köögiviljad, näiteks kapsas, porgand jne.

Tootmisharude eristamise täpsus sõltub ka sellest, kuidas ülesannet lahendatakse. Kui arvutusi tehakse käsitsi, siis ei tohi ülesandesse lülitada rohkem kui 8—10 tootmisharu. Elektronarvutite kasutamisel rajatakse ülesanne tootmisharude detailsemale eristamisele. Sel juhul vaadeldakse tootmisharusid sellisel arvul, mis on majanduslikult kõige otstarbekohasem.

Tootmisharude loendi koostamisel arvestatakse mitte ainult saaduste tootmises, vaid ka nende kasutamises avalduvaid iseärasusi. Kõigepealt käib see söötade kohta.

Sööt on maaviljeluse lõpptoode, loomakasvatuses on see aga samal ajal tootmisvahend. Seepärast tuleb söötadeks kasutatavat maaviljeluse toodangut käsitleda ülesande koostamisel teisiti kui muid tooteid. Sel juhul, kui söödaks kasutatakse mitte mõne kultuuri põhi-, vaid kõrvaltoodangut (põhk, pealsed), arvestatakse seda kui söödaviljana kasutatavat osa vastava kultuuri toodangust. Sellekohaste arvutluste metoodikat on tutvustatud esimeses peatükis. Kasutatakse aga söödaviljana ära osa põhitoodangust, võetakse kultuur ülesandesse kahe eraldi tootmisharuna, näiteks a) suhkrupeet tööstustooraineks ja b) söödasuhkrupeet. Samuti talitatakse ka kartuli, teramaisi ja mitmete muude kultuuridega.

Käsitsi arvutamisel võib paljudes kolhoosides ja sovhoosides rajada ülesande järgmisele tootmisharude loendile: teraviljad (välja arvatud mais), teramais, suhkrupeet, päevalill, kartul ja köögivili, silomais, veisekasvatus, seakasvatus, lambakasvatus, linnukasvatus. Kokku kümme tootmisharu.

Kui tootmisharude optimaalse kombinatsiooni leidmise ülesannet lahendatakse elektronarvutil, võib kasutamiseks soovitada järgmist kultuuride ja loomakasvatusharude loendit: 1) talirukis; 2) talinisu; 3) talioder; 4) suvinisu; 5) suvioder; 6) kaer; 7) teramais (seemneks); 8) teramais (söödaks); 9) toidukaunviljad; 10) söödakaunviljad; 11) hirss; 12) tatar; 13) suhkrupeet tööstustooraineks; 14) söödasuhkrupeet; 15) päevalill; 16) muud õlikultuurid (välja arvatud päevalill); 17) kiulina; 18) kanep ja muud kiudtaimed; 19) kartul (söögikartul ja tööstustooraine); 20) söödakartul; 21) köögivili; 22) söögikõrvitsalised; 23) silomais; 24) muud silokultuurid (välja arvatud mais); 25) söödajuurvili; 26) söödakõrvitsalised; 27) mitmeaastased heintaimed (seemne- ja söödakultuurid); 28) üheaastased heintaimed (seemne- ja söödakultuurid); 29) aiandid; 30) viinamarjaistandused; 31) marjaaiad; 32) veisekasvatus; 33) seakasvatus; 34) lambakasvatus; 35) linnukasvatus (munad); 36) lihalindude kasvatus; 37) küülikukasvatus; 38) ulukikasvatus; 39) kalakasvatus; 40) hobusekasvatus; 41) mesindus.

Arusaadavalt on esitatud loend ainult näiteks. Igas konkreetses majandis või majandite rühmas tuleb koostada selline tootmisharude loend, mis vastab tema looduslikele ja tootmisoludele.

Koefitsientide ja kitsenduste leidmine külvipinna, tööjõu- ja söödakulu ning omahinna kohta. Külvipinna kasutamise koefitsiendiks on näitarv, mille väärtus on pöördvõrdeline saagikuse näitajaga.

Aruandeline saagikus leitakse 3—4 viimase aasta saagikuste keskmisena. Majandi plaanilise saagikuse kindlaksmääramisel arvestatakse ka eesrindlaste kogemusi.

Peetagu silmas, et külvipinna ärakasutamise koefitsiendi arvutamisel tuginetakse nn. puhassaagikusele, s. o. ühe hektari keskmisele kogusaagile, millest seemnevili on maha arvatud. Kui põhitoodang ja seeme ei ole naturaalselt ühelaadsed (näit. heintaimede ja haljassööda, söödajuurvilja, silokultuuride jm. puhul), jagatakse kogusaak puhassaagikuse leidmiseks tegeliku koristuspinna ja kasutatud seemnevilja all olnud külvipinna summaga.

Põllupind, mida ülesandesse lülitatavad kultuurid võivad katta, leitakse sel teel, et põldude üldpindalast lahutatakse mustkesade ja ülesandesse mittelülitatavate kultuuride all olevate külvipindade summa. Kui ülesandeid koostatakse plaaniperioodiks ette, tuleb arvestada ka uusi ülesküntavaid maatükke.

Tihti külvatakse pärast ühe kultuuri koristamist samale maatükile veel teist korda, s. t. et ühelt põllult saadakse kaks saaki. Ka see maaviljeluse omapärasus peegeldub ülesandes. Selleks koostatakse spetsiaalne võrratus, kus tundmatuteks liikmeteks on kõrrepõldudele külvatavad kultuurid, kitsendusteks on aga neile eelnenud kultuuride all olnud pindalad. Põhja-Kaukaasias on näiteks peamisteks kõrrele külvatavateks kultuurideks silomais ja heinaks ning haljassöödaks kasutatav sudaani rohi, mis külvatakse taliteraviljade ja üheaastaste heintaimede kõrrepõldudele.

Kõrrepõldudele külvatavad kultuurid võetakse ülesandesse nagu iseseisvad tootmisharud, nende all olevat külvipinda aga arvestatakse nagu teistest erineva mullaviljakusega maid.

Majandi eri põldude mullaviljakus on tihti väga erinev, seepärast koostatakse nii mitu maade kasutamist iseloomustavat võrratust, kui mitu erineva mullaviljakusega põldu on olemas. Kui sellele lisada vajadus peegeldada topeltkülve, siis kasvab võrratuste arv veel kaks korda.

Ometi ei tuleks külvipindu ülesande koostamisel mullaviljakuse järgi liiga detailselt diferentseerida. Eraldi on vaja käsitleda ainult niisuguseid maatükke, mis üksteisest oluliselt erinevad. Kõigepealt eristatakse niisutatavaid ja mitteniisutatavaid külvipindu. Viimased jaotatakse omakorda 2—3 rühma, kui nad erinevad üksteisest mullaviljakuse poolest rohkem kui 10%. Maatükkide liiga täpne diferentseerimine mullaviljakuse järgi teeb ülesande lahendamise väga raskeks, arvutuste tulemused aga muutuvad ainult tühisel määral.

Tööjõukulusid ja -varusid väljendatakse töönormidega, aasta kestel ning kõige pingelisemal tööperioodil olemasolevate tööjõuressursside suurusega, mehhanisaatorite tööjõu kulunormidega ja selle varudega nii aasta kestel kui ka kõige pingelisemal tööperioodil.

Esimese võrratuse koostamiseks võetakse tööjõu kohta vajalikud andmed kolhooside ja sovhooside aastaaruannetest. Tegelikud andmed mehhanisaatorite töökulu kohta võib leida majandis peetavast tööjõu esmasarvestusest. Kui ülesannet koostatakse plaaniperioodiks, võetakse vastavad andmed tehnoloogilistelt kaartidelt. Eriti pingelise tööperioodi alguse ja kestuse määramiseks koostatakse töökulude kalenderplaan (mida praktikas tihti ka graafikuks kutsutakse).

Aruandelise ülesande lahendamisel võetakse andmed üldise tööjõuvaru kohta kolhoosi aastaaruandest, kus on toodud ülesandesse lülitatud tootmisharudes tehtud inimpäevade üldarv. Plaanilise ülesande puhul leitakse tööjõuvarude suurus tööliste keskmise nimistulise arvu ja ühe töölise aastakeskmise tootluse[1] alusel. Selle normi kindlaksmääramisel arvestatakse tegelikku tootlust eelmistel aastatel ja majandi arenguperspektiive.

Tööjõu kulunormid ja kõigi tööjõuressursside üldsuurus avaldatakse inimpäevades või inimtundides. Mis puutub mehhanisaatorite töösse, siis võib seda avaldada kas mehhanisaatorite tehtud inimpäevade (inimtundide) või ka mõne muu näitajaga: tingtraktorite (15-hobujõuliste traktorite) traktorvahetustes, pehmekünni hektarites, ent ka tehtud tööde maksumuses.

Loetletud mehhanisaatorite töökulu näitajatest on kõige täpsem traktorvahetuste arv. Mehhaniseeritud tööde kulud rublades on toodud aastaaruannetes; tehtud inimpäevade, traktorvahetuste ning ülesharitud tingkünnihektarite arvu võib leida ainult tehnoloogilistelt kaartidelt või esmasarvestuse dokumentidest.

Tööjõukulude võrratuste koostamisel kerkib järgmine küsimus: mitu pingelisemat tööperioodi ülesandesse võtta. On teada, et sellised perioodid on kevadel, suvel ja sügisel. Eri rajoonides ei lange pingelisemad tööperioodid ajaliselt kokku. Mida rohkem selliseid perioode ülesandes kajastub, seda täpsemad on arvutused. Ei tohi aga ka unustada, et iga uus võrratus teeb ülesande keerulisemaks, millega suureneb ühtlasi nii ülesande ettevalmistamiseks kui ka lahendamiseks vajalik töökulu.

Peamiseks loomakasvatuse arengut piiravaks tingimuseks on söödaressursid. Võtame vaadeldavasse ülesandesse vähemalt 5—6 söötade varusid ja söödakulu iseloomustavat võrratust. Need võrratused peegeldavad söötade varusid ja kulunorme peamiste söödarühmade kaupa: kontsentraadid, koresöödad, haljassöödad, mahlakad söödad. Peale selle iseloomustatakse spetsiaalsete võrratustega seeduva proteiini, karotiini- ja fosforisisaldust söödaratsioonides ning nende kulutamist.

Kõik söödad lülitatakse ülesandesse söötühikutes. See võimaldab erinevate söötade liitmist ühes võrratuses. Et aga mõnede loomaliikide puhul kõik söödad pole oma-

---

[1] *Tootlus* (vene k. выработка) on keskmiselt ühe töölise või töötaja kohta tulev toodangu hulk või maksumus perioodis. Selle leidmiseks jagatakse toodangu hulk (naturaalühikuis) või maksumus (rahas) tööliste või töötajate perioodikeskmise arvuga. Varem on eesti keeles kasutatud selles mõttes ka terminit *väljatöötus*, mida ei saa aga õnnestunuks pidada. — *Toimetaja märkus.*

vahel asendatavad (eriti sea- ja linnusöödad), tuleb koostada söötade kohta 5—6 võrratust. Eri võrratuste koostamine valkude, fosfori ja karotiini kohta on tingitud nende tähtsaimate toitainete sisalduse tunduvast kõikumisest söötades, nende mitteküllaldane esinemine söödaratsioonis oleks aga äärmiselt ebasoovitav. Sellist puudujääki ei saa mingisuguse lisasööda abil hõlpsalt korvata, nagu seda võib teha siis, kui ratsioonis on vähe kaltsiumi.

Söötade tegelikud kulunormid määratakse loomaliikide ja -rühmade kaupa kindlaks aastaaruannete andmeil. Plaaniperioodiks määratakse söötade kulunormid kindlaks vastavate normatiivide alusel.

Söödaressursid lülitatakse ülesandesse esimeses peatükis kirjeldatud metoodika alusel. Looduslikelt heina- ja karjamaadelt saadavate ning ostusöötade hulk leitakse nimelt tavalisel viisil. Mis puutub põllundusest saadavatesse söötadesse, siis need võetakse ülesandesse muutuvsuurustena.

Rahalises väljenduses võidakse saaduste tootmiskulud lülitada ülesandesse kahel eri viisil. Juhul, kui nende kulude üldsumma on fikseeritud, esinevad nad ühe tootmisvõimalusena. Tootmisotstarbeks kasutada olevaid rahasummasid ning nende kulutamise norme iseloomustavad võrratused ei erine nimelt põhimõtteliselt millegagi võrratustest, mis iseloomustavad külvipinda, tööjõukulu jne.

Ent aasta jooksul tootmisvajadusteks kasutatav rahasumma ei tarvitse ka teada olla. See vastab praktikale isegi rohkem. On teada, et kolhoosid ja sovhoosid saavad jooksvate tootmisvajaduste katteks laenu. Laenu antakse tegelikult tehtud tööde mahu katmiseks plaaniliste hinnete järgi. Laenu summa määratakse kindlaks majandi poolt koostatud ja kinnitatud aastatootmisplaani alusel.

Kui ülesanne lahendatakse eesmärgiga leida minimaalne kulude summa, siis on sihifunktsiooni tundmatute kordajateks toodete omahinnad. Ülesandeid tootmisharude optimaalse kombinatsiooni leidmiseks lahendatakse üksikmajandites (või majandirühmades) siiski peaasjalikult maksimumi leidmise teel. Sel juhul on peamiseks eesmärgiks olemasolevate tootmisvõimaluste maksimaalne ärakasutamine. Pealegi on nii plaaniperioodi toodangu maht kui ka sortiment ülesande koostamisel tundmatud suurused.

Ülesande tingimustesse võetakse sisse ka toodete omahinnad. Et aga rahaliste kulutuste üldsumma ei esineks jäiga kitsendusena, võetakse ta ülesandesse mõnevõrra omapärasel viisil. Vastavat võtet selgitame järgmise näite varal.

Olgu vaja leida, kuidas kombineerida optimaalselt nisu ja suhkrupeedi tootmist. Selleks on kasutada 1000 ha põldu ja 15 000 inimpäeva tööjõudu. Nisu saagikus on 20, suhkrupeedi saagikus 200 tsentnerit hektarilt. Tööjõudu kulub ühe tsentneri nisu peale 0,2 ja ühe tsentneri suhkrupeedi peale 0,1 inimpäeva. Ühe tsentneri omahind on nisul 3, suhkrupeedil 2 rubla. Nisutsentneri müügihind on 5, suhkrupeedil 2,5 rubla.

Optimiseerimiskriteerium on maksimaalne toodangu maksumus.[1]

Tähistame toodetava nisu koguse tähega x_1 ja suhkrupeedi koguse x_2. Koostame võrratused

$$0{,}05x_1+0{,}005x_2 \leqslant 1\,000;$$
$$0{,}2x_1+0{,}1x_2 \leqslant 15\,000.$$

Neist võrratustest iseloomustab esimene külvipinna suurust, teine töökulu. Niisamuti tuleb koostada ka toodangu omahinna võrratus. Ülesande tingimustest on teada toodanguühiku omahind, ent kogu toodangu valmistamiseks vajalike tootmiskulude üldsumma ei ole teada. Tähistame selle x_3. Nüüd koostame kolmanda võrratuse:

$$3x_1+2x_2 \leqslant x_3$$

ehk

$$3x_1+2x_2-x_3 \leqslant 0.$$

Et suurus x_3 ei jääks ülesande lahendamisel passiivseks suuruseks, viime ta sihifunktsiooni võrrandisse ja

---

[1] Eestikeelses majandusteaduslikus terminoloogias tähendab *maksumus* hindade ja koguste korrutist (resp. korrutiste summat). *Toodangu maksumus* on põhimõtteliselt samatähenduslik mõnevõrra kohmakama väljendiga *toodang rahalises väljenduses* (продукция в денежном выражении). Märgitagu, et toodangut võib rahas väljendada väga mitmesugustes hindades, näit. omahinnas, hulgihinnas, jaehinnas jne., mispuhul kõneldakse toodangu maksumusest omahinnas, maksumusest hulgihinnas jne. Majanduslikes arutlustes on hinna ja maksumuse järjekindel eristamine väga tähtis. Maksumuse kasv ei tarvitse alati tähendada toodete (resp. kaupade) kallinemist; maksumus suureneb sedamööda, kuidas toodangu hulk kasvab. Hinna suurenemine tähendab aga alati toodete kallimaks muutumist. — *Toimetaja märkus.*

lahutame ta kogutoodangu maksumusest. Selle tagajärjel väljendab sihifunktsiooni võrrand nüüd kogutoodangu maksimaalset maksumust, millest on maha arvatud tootmiskulud, s. o. maksimaalset puhastulu:

$$C = 5x_1 + 2{,}5x_2 - x_3.$$

Pärast abitundmatute sissevõtmist võib kogu koostatava ülesande kirjutada üles järgmise võrrandisüsteemina:

$$\begin{aligned} 0{,}05x_1 + 0{,}005x_2 + x_4 &= 1\,000 \\ 0{,}2x_1 + 0{,}1x_2 + x_5 &= 15\,000 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_6 &= 0 \\ \hline C = 5x_1 + 2{,}5x_2 - x_3. & \end{aligned}$$

Nõutakse suuruse C maksimumi leidmist.

Ülesanne lahendatakse simpleksmeetodil. Tuleb lisada, et kirjeldatud võttega võib ülesande tingimustesse võtta mitte ainult tootmiskulude üldsummat, vaid ka selle üksikuid elemente: töötasu, söödakulu, seemne-, väetisekulu jne. Üksikasjalikumalt leidub selle kohta informatsiooni IV peatükis, kus jooksvate tootmiskulude kõrval vaadeldakse ka seda, kuidas ülesande tingimustesse lülitada kapitaalmahutusi.

Lisakitsenduste püstitamine maaviljeluse ja loomakasvatuse üksikute tootmisharude kohta. Uute, suure tulevikuga, ent praegu veel mitte küllalt kasulike tootmisharude areng on n.-ö. alt tõkestatud. Nii-öelda ülevalt on tõkestatud kõige efektiivsemad tootmisharud ja kultuurid, mille viljelemise laiendamine oleneb tingimustest, mida ülesandesse võetud ei ole.[1] Lehmade arvu ei saa näiteks aasta jooksul karja enda loomuliku paljunemise teel rohkem suurendada kui majandis juba olevate vasikate ja plaanitaval aastal lehmadeks saavate mullikate arvu võrra.

Optimaalsuskriteeriumi kindlaksmääramine. Ülesande lahendamise eesmärk sõnastatakse spetsiaalse, sihifunktsiooniks nimetatava võrrandiga. Sihifunktsiooni tundmatute kordajateks võivad olla nii naturaalsed kui ka raha-

---

[1] Alt tõkestatuteks loetakse majandusmatemaatika erialases kõnepruugis suurusi, mille kohta määratakse kindlaks kohustuslik miinimumväärtus, näit. «mitte vähem kui X». Ülalt tõkestatud suuruste lubatud maksimumväärtust võib sõnades väljendada «mitte rohkem kui X». — *Toimetaja märkus.*

lised näitajad. Teatud tootmisharude ja kultuuride puhul rakendatakse tundmatute kordajatena söötühikutesse ümberarvutamise koefitsiente. Kui ülesandesse on võetud ka tehnilisi kultuure, nagu kiulina, päevalill, puuvill, samuti tehnilisi loomakasvatusharusid, on kõige otstarbekam kasutada rahalisi näitajaid: omahinda, müügihinda ja ühe toodanguühiku kohta tulevat puhastulu summat.

Ülesandeid võib lahendada mitmest erinevast optimaalsuskriteeriumist lähtudes, et tagada antud toodanguhulga valmistamist minimaalsete kuludega, s. o. minimaalse omahinnaga, või valmistada antud tootmisressurssidest maksimaalsel hulgal toodangut. Viimasel juhul võetakse optimaalsuskriteeriumiks majandi kõigi tootmisharude maksimaalne kogutoodang.

Huvi pakub optimaalsuskriteeriumina ka maksimaalne puhastulu. Puhastulu on otseselt seotud kogutoodangu hulga ja omahinnaga. Ent vaatamata näilisele universaalsusele pole ka tema täiesti puudusteta. Seepärast kasutatakse puhastulu ikka koos teiste optimaalsuskriteeriumidega.

Ühe ja sama ülesande lahendamine mitme eri optimaalsuskriteeriumi alusel annab materjali lõpliku, antud oludes kõige parema ja reaalsema plaani koostamiseks.

Tuleb märkida, et kõik põllumajandusettevõtete plaanide koostamisel leitavad optimaalsed väärtused on iseloomult suhtelised ja kehtivad ainult teatud kindlatel tingimustel.

ÜLESANDE KOOSTAMISE JA LAHENDAMISE NÄIDE

Eespool kirjeldatud metoodikat kasutades koostame nüüd ülesande konkreetse majandi andmetel. Võtame sel eesmärgil vaatluse alla ühe suure sovhoosi Moskva oblastist. Ülesande lähteandmed on saadud 1962. aasta aruandest. Ülesande parameetrid: 12 muutujat (arvestamata vabaliikmeid), 10 põhi- ja 3 lisakitsendust.

Ülesande maatriks on toodud lehekülgedel 76 ja 77.

Tootmisharude nimekirjast on ülesandes välja jäetud tööloomad ja aiandus. Neis tootmisharudes kasutatud tootmisressursid (tööjõud, söödad) on maha arvatud ka varude üldsummast. Heina- ja karjamaadelt saadud, samuti ostusöödad on võetud ülesandesse teadaolevate

Ülesande maatriks

Tootmisressursid	Mõõtühik	Teravili x_1	Kaunvili x_2	Sööda-suhkrupeet x_3	Kartul x_4	Köögivili x_5
Külvipind	ha	0,105	0,093	0,0093	0,019	0,0057
Tööjõukulu üldse	inimpäev	0,68	0,6	0,35	0,74	0,43
kõige pingelisemal tööperioodil	„	0,126	0,52	0,059	0,24	0,1
Mehhanismide kasutamise kulud	rbl.	1,55	1,43	0,33	0,72	0,4
Söödad: kontsentreeritud	tsentnersöötühik	−0,231	0	0	0	0
koresööt	„	−0,17	−0,17	0	0	0
silo ja haljassööt	„	0	0	0	0	0
söödajuurvili	„	0	0	−0,2	−0,08	−0,009
Proteiin	ts	−0,025	−0,007	−0,011	−0,004	−0,001
Karotiin	g	−0,23	−0,2	0	0	−0,06
Kaunvili	ts		1			
Kartul	„				1	
Köögivili	„					1
Toodangu 1 ts hind	rbl.	4,88	20	0	6,2	8,0

suurustena. Maaviljelusest saadud söötade hulk leitakse ülesande lahendamise käigus. Sihifunktsiooni võrrandi kordajateks on võetud hinnad, millega majandi toodang 1962. aastal realiseeriti.

Ülesande elektronarvuti abil lahendamisel saadud tulemused ja majandi tootmisharude tegelik struktuur on esitatud tabelis lk. 78.

Silo-kultuurid	Põldhein heinaks	Põldhein haljas-söödaks	Veise-kasvatus	Sea-kasvatus	Lamba-kasvatus	Linnu-kasvatus	
x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	
0,014	0,046	0,008	0	0	0	0	$\leqslant$ 8 599,44
0,27	0,15	0,05	54,8	4,15	7,23	73,06	$\leqslant$ 245 275,37
0,05	0,023	0,023	5,4	0,63	0,74	0,092	$\leqslant$ 42 068,08
0,486	0,306	0,03	0	0	0	0	$\leqslant$ 149 720,00
0	0	0	9,13	5,91	0,29	76,02	$\leqslant$ 42 718,03
0	−0,49	0	9,975	0,062	2,36	0,50	$\leqslant$ 5 340,82
−0,2	0	−0,2	19,48	0,23	2,58	2,86	$\leqslant$ 11 323,41
0	0	0	3,77	0,42	0,06	2,28	$\leqslant$ 3 750,40
−0,014	−0,05	−0,02	4,38	1,00	0,504	11,7	$\leqslant$ 9 262,26
−1,5	−2	−4	318,5	4,6	51	58	$\leqslant$ 215 732,74
							$\leqslant$ 5 000
							$\leqslant$ 50 000
							$\leqslant$ 20 000
0	0	0	426,3	112,1	26,5	945,7	

Tegeliku ja optimaalse tootmisharulise struktuuri kõrvutamisel selgub, et optimaalne variant lubab teiste tingimuste muutumatuks jäämisel toodangut rohkem kui 20% suurendada.

Loetleme peamised ülesande lahendamisest tulenevad järeldused.

1. Tootmise spetsialiseerimine ja universaalsuse välti-

Tootmisharud	Aruande järgi		Optimaalne variant	
	kogus	summa (rbl.)	kogus	summa (rbl.)
Teravili ts	42 250	206 180	48 294	235 675
Kaunvili ts	2 100	42 000	5 000	100 000
Söödasuhkrupeet ts	1 600	—	10 777	—
Kartul ts	19 600	141 520	50 000	310 000
Köögivili ts	15 240	121 920	20 000	160 000
Silomais ts	32 600	—	—	—
Heintaimed heinaks ts	28 560	—	12 184	—
Heintaimed haljassöödaks ts	120 400	—	167 363	—
Veised (lehmad)	1 700	724 710	2 005	854 731
Seakasvatus (kaaluiive, ts)	3 300	370 260	6 018	675 220
Lambakasvatus (lammaste arv)	4 400	116 600	—	—
Linnukasvatus (lindude arv)	15 200	143 746	—	—
Kokku	—	1 866 936	—	2 335 626

mine on toodangu väljalaske suurendamise ning tööviljakuse tõstmise suurimaid reserve.

2. Spetsialiseerimine eeldab mitme tootmisharu optimaalset kombineerimist, mille viljelemine annab vastavates looduslikes ja majanduslikes oludes kõige paremaid tulemusi.

3. Tootmisharude optimaalsed vahekorrad võivad pidevalt muutuda, olenevalt tootmistingimuste muutumisest.

TOOTMISHARUDE KOMBINEERIMISE VAJALIKKUSE MAJANDUSMATEMAATILINE ANALÜÜS

On üldtuntud tõsiasi, et meie põllumajandusettevõtete enamik on kujunenud paljuharulisteks ettevõteteks. Spetsialiseerimine on aga üks tootmise efektiivsuse tõstmise tähtsamaid tegureid. Missugused objektiivsed põhjused tingivad siis põllumajandusettevõtete paljuharulisuse?

Kaasaegsed matemaatilised meetodid lubavad leida majandi optimaalse tootmisharulise struktuuri mistahes looduslikes ja majanduslikes oludes. Tootmise optimaalse struktuuri leidmise metoodikat on tutvustatud eespool. Täienduseks tuleb aga tutvuda veel ka sellega, kuidas majandusliku analüüsi teel leida, missuguseid tootmisharusid on põllumajandusettevõtetes hädavajalik üheskoos arendada, et tõsta põllumajandusliku tootmise efektiivsust.

Edasises on toodud arvutlusi selle kohta, kuidas eri tootmisharusid omavahel optimaalselt kombineerida, neid võimalikult reaalsetele oludele lähendada püüdes.

Olgu tarvis leida, missugune on majandis optimaalne vahekord teravilja, kaunvilja, silomaisi, söödasuhkrupeedi, põldheina ja kartuli tootmisel, samuti veise- ja seakasvatuse arendamisel.

Majandi käsutuses on järgmised tootmisressursid: 25 000 ha külvipinda, 5000 ha looduslikke heina- ja karjamaid, tööjõuressursse aastas 270 000 inimpäeva, sealhulgas 40 000 inimpäeva eriti pingsal tööperioodil (septembris). Saagikus (tsentnerites hektarilt): teraviljal 20, kaunviljal 16, silomaisil 4000, suhkrupeedil 200, kultuurheinal 25, kartulil 100. Looduslike heina- ja karjamaade saagikus on 6 tsentnersöötühikut hektarilt.

Tööjõukulu maaviljelustoodangu ühe tsentneri, sigade kaaluiibe ühe tsentneri ja ühe veise kohta on toodud järgmises tabelis (inimpäevades).

	Teravili	Kaunvili	Silomais	Suhkrupeet	Põldhein	Sigade kaaluiive	Lehmad	Kartul
Tööjõukulu üldse	0,1	0,5	0,02	0,02	0,01	2	20	0,2
eriti pingelisel perioodil	0,01	0,1	0,002	0,01	0	0,2	2,0	0,1

Arvestades karja konkreetset koostist, on veiste söödakulu aastanormid ühe lehma kohta [1]: koresööta ja silo 40 tsentnersöötühikut, kontsentraate ja suhkrupeeti 5 tsentnersöötühikut, karotiini 200 g; sigade söödanormid on ühe tsentneri kaaluiibe kohta vastavalt 0,9, 5, 0,5 ja 4.

Looduslikelt heina- ja karjamaadelt saab majand 30 000 söötühikut, 3000 ts proteiini ja 180 000 g karotiini. Põllunduse toodangust on nähtud ette kasutada söötadeks $^1/_5$ kogu teraviljatoodangust, $^1/_2$ kaunviljasaagist ning kogu silomaisi-, suhkrupeedi- ja põldheinasaak. Lisaks sellele kasutatakse söödana ära ka 40% teraviljapõhust ja 50% kaunviljapealsetest.

Plaani on vaja võtta vähemalt 20 000 ts kartuli kasvatamine. Muude tootmisharude kohta lisakitsendusi ei ole.

Toodete hinnad (rublades tsentneri kohta): teravili 4,5, kaunvili 10, kartul 3, sealiha (eluskaalus) 80. Veiste toodang, arvestatud ühe lehma kohta, on 500 rbl. (piim, vasikad ja kaaluiive). Söödakultuuride toodangut korduva arvestuse vältimiseks rahas ei väljendata.

Erinevate söötade ühe tsentneri toiteväärtust iseloomustavad järgmised andmed:

Toiteelemendid	Mõõtühik	Teravili (keskmiselt	Kaunvili	Põhk	Maisisilo	Suhkrupeet	Põldhein
Söötühikuid	ts-sü	1,25	1,25	0,2	0,2	0,25	0,5
Seeduv proteiin	ts	0,060	0,270	0,01	0,014	0,012	0,06
Karotiin	g	0,1	0,3	0,2	1,0	0,0	5,0

Optimaalsuskriteeriumiks on maksimaalne kogutoodangu maksumus.

Enne kui asuda koostama võrratuste süsteemi, leiame eraldi spetsiaalsed kordajad võrranditele, mis iseloomus-

[1] Söödakulu arvutlemisel on analoogilises kontekstis vene keeles teatud ulatuses kasutusel kujundlik erialaväljend *в расчете на структурную корову*, mille all mõeldakse «keskmiselt ühe lehma kohta, arvestades karja konkreetset koostist» (s. o. näit. noorloomade osatähtsust karjas jms.). Et *структурная корова* pole ühikunimetus ega rangemalt võttes üldse termin, ei ole käesolevas töös sellele otsest tõlkevastet püütud anda. — *Toimetaja märkus.*

tavad oma majandi teraviljast laekuvaid söödaressursse, s. o. kordajad v_{hj}. Nagu teada, on $v_{hj} = d_j \cdot q_{hj}$, kus d_j on söödaks kasutatav osa vastava kultuuri saagist ning q_{hj} on h-nda toiteelemendi sisaldus j-inda sööda ühikus. Arvutluse tulemused on koondatud järgmisse tabelisse.

Söötade rühmad ja toiteelemendid	Mõõtühik	Teravili			Kaunvili		
		söödaks kasutatav osa saagist	toitainesisaldus	kordaja	d_j	q_{hj}	v_{hj}
Koresöödad (põhk)	tsentner-söötühik	0,4	0,2	0,08	0,5	0,2	0,1
Teravili	ts	0,2	1,25	0,25	0,5	1,25	0,625
Seeduv proteiin							
põhus	"	0,4	0,01	0,04	0,5	0,01	0,005
terades	"	0,2	0,06	0,012	0,5	0,27	0,135
Kokku proteiini	"	—	—	0,016	—	0,28	0,14
Karotiin							
põhus	g	0,4	0,2	0,08	0,5	0,2	0,1
terades	"	0,2	0,1	0,02	0,5	0,3	0,15
Kokku karotiini	"	—	—	0,1	—	—	0,25

Silomaisi, suhkrupeedi ja põldheina kohta on kordajaid v_{hj} lihtsam arvutada. Ülesande tingimuste kohaselt kasutatakse kogu nende kultuuride toodang söödaks, seetõttu on nende puhul $d_j = 1$; mistõttu ka $v_{hj} = q_{hj}$.

Jääb veel meenutada, et tera- ja kaunvilja hinda tuleb vähendada proportsionaalselt suurusega d_j. Teravilja hind, millest söödad on maha arvatud, on $c'_1 = 4{,}5(1 - 0{,}2) = 3{,}6$ ning kaunvilja hind $c'_2 = 10 \cdot (1 - 0{,}5) = 5$.

Tähistame iga tootmisharu toodangu hulga tsentnerites järgmiselt: teravili — x_1; kaunvili (oad, herned) — x_2; silomais — x_3; söödasuhkrupeet — x_4; põldhein — x_5; veised (lehmad) — x_6; sealiha (eluskaalus) — x_7; kartul — x_8.

Ülesande tingimuste ja abiarvutluste alusel koostame olemasolevate varude, tootmiskulude normide ja toodangu hinnakordajate koondtabeli (vt. lk. 84). Tabeli andmetel

Võrrandisüsteem

$$
\begin{array}{llllll}
0{,}05\,x_1 & +0{,}0625x_2 & +0{,}0025x_3 & +0{,}005x_4 & -0{,}04x_5 & \\
0{,}1\,x_1 & +0{,}5\,x_2 & +0{,}02\,x_3 & +0{,}02\,x_4 & +0{,}01x_5 & +\ 20x_6\ + \\
0{,}01\,x_1 & +0{,}1\,x_2 & +0{,}002\,x_3 & +0{,}01\,x_4 & & +\ 2x_6\ + \\
-0{,}08\,x_1 & -0{,}1\,x_2 & -0{,}2\,x_3 & & -0{,}5\,x_5 & +\ 40x_6\ + \\
-0{,}25\,x_1 & -0{,}625\,x_2 & & -0{,}25\,x_4 & & +\ 5x_6\ + \\
-0{,}016x_1 & -0{,}14\,x_2 & -0{,}014\,x_3 & -0{,}012x_4 & -0{,}06x_5 & +\ 5x_6\ + \\
-0{,}1\,x_1 & -0{,}25\,x_2 & -\ x_3 & & -5\,x_5 & +200x_6\ + \\
\hline
\end{array}
$$

$$C=0-(-3{,}6x_1-5x_2-$$

koostame võrrandisüsteemi, millesse võtame otsekohe ka abitundmatud (lk. 82—83).

Ülesande lahendamisel võetakse optimaalsuskriteeriumiks põllumajandustoodangu maksimaalne hulk.

Enne ülesande lahendamisele asumist vaatleme lühidalt sellesse kuuluvate tootmisharude omavahelisi seoseid ja püüame loogiliste arutlustega arvutuste tulemusi ette ära arvata.

Ülesande tingimuste kohaselt realiseeritakse ainult viie tootmisharu — teravilja-, kaunvilja-, veise-, sea- ja kartulikasvatuse toodangut. Nende tootmisharude puhul on võetud ülesandesse ka toodete hinnad.

Tera- ja kaunvilja-, samuti kartulitoodangut piiravad kolm tegurit: külvipinna suurus, kogu aasta jooksul kasutada olev tööjõud ning tööjõuressursid eriti pingelisel tööajal.

Kui piirduda ainult majandis tegelikult olemasolevate ressursside kulunormidega teraviljatoodangu ühiku kohta, siis on siin peamiseks kitsenduseks külvipind. Kui kogu 25 000 ha suurusele põllupinnale külvata ainult kõrsvilja, siis saaksime 20 ts hektarisaagi puhul 500 000 ts teri. Tsentnerihinnaga 3,6 rbl. saaksime kokku 1,8 miljoni rubla eest toodangut. Kui kogu põllupinnale külvata ainult kaunvilja, siis saagikusega 16 ts/ha ja hinnaga 5 rbl. tsentner saaksime toodangut kokku 2 milj. rbl. eest.

Märgitagu, et siin ei ole arvestatud seda teraviljakogust, mis ülesande tingimuste kohaselt kulutatakse söötadeks. Kui arvestada ka seda toodangu osa, siis saaksime toodangut ainuüksi kõrsvilja külvamisel 2,25 milj. rubla eest ja ainult kaunvilja külvamisel 4 milj. rbl. eest.

$$
\begin{array}{llllllllll}
+0{,}01x_8 + x_9 & & & & & & & & = & 25\,000 \\
+0{,}2\ x_8 & + x_{10} & & & & & & & = & 270\,000 \\
+0{,}1\ x_8 & & + x_{11} & & & & & & = & 40\,000 \\
 & & & + x_{12} & & & & & = & 30\,000 \\
 & & & & + x_{13} & & & & = & 0 \\
 & & & & & + x_{14} & & & = & 3\,000 \\
 & & & & & & + x_{15} & & = & 180\,000 \\
x_8 & & & & & & & - x_{16} + x_{17} & = & 20\,000 \\
\hline
\end{array}
$$

$500x_6 - 80x_7 - 3x_8)$

Rääkimata sellest, et niisugune kitsas spetsialiseerumine ei ole praktiliselt teostatav, jääksid sel juhul kasutamata ka tööjõuvarud. Nii kasutatakse 270 000-st inimpäevast ära ainult 50 000, kui kasvatada üksnes teravilja.

Kui kasvatada ainult kartulit, siis ei saaks seda kõige pingelisemal tööperioodil olemasolevate tööjõuvarude vähesuse tõttu toota rohkem kui 400 000 ts (40 000 : 0,1). Hinnaga 3 rbl. tsentner annaks see toodangut kokku 1,2 milj. rbl. eest.

Korraga nii maaviljelust kui ka loomakasvatust arendades saab kogutoodangu üldist mahtu tunduvalt suurendada. Seda võib näidata järgmise elementaarse arvutlusega. Ühelt hektarilt saadav kõrsviljade terasaagi maksumus on 90 rbl. (=20·4,5), kaunviljasaagi maksumus 160 rbl. (=16·10). Samal ajal annab üks hektar maisi 400 ts silo ehk 80 tsentnersöötühikut. Kui kasvatada ühe hektari maisi kohta 0,4 ha teravilja, võib antud koostisega karja puhul tagada sööt kahele lehmale, kellelt saadava toodangu maksumus on 1000 rbl. (=2·500). Täpselt samuti arutledes selgub, et hektar suhkrupeeti annab 200 ts ehk 50 tsentnersöötühikut saaki. Kui kasvatada iga hektari suhkrupeedi kohta niisama palju kaunvilja (et rahuldada söödaratsiooni valguvajadust), võib toota 11 ts sealiha (eluskaalus). Hinnaga 80 rbl. tsentner moodustab see 880 rbl.

Edasi vaatleme lühidalt loomakasvatusharusid ja püüame määrata kindlaks nende majanduslikku efektiivsust.

Kui otsustada loomakasvatuses kulutatava tööjõu ja toodangu hindade alusel, siis on kõige efektiivsemaks toot-

Tootmisressursid ja nende kulunormid toodangu ühe tsentneri kohta

Tootmisressursid	Mõõtühik	Teravili x_1	Kaunvili x_2	Maisisilo x_3	Suhkrupeet x_4	Põldhein x_5	Kartul x_8	Veisekasvatuse kulud, arvestatud ühe lehma kohta x_6	Kulud sigade eluskaalu kaaluibe 1 ts kohta x_7	Kokku tootmisressursse b_i
Külvipind	ha	0,05	0,0625	0,0025	0,005	0,04	0,01	0	0	25 000
Tööjõuressursid:										
kokku	inimpäev	0,1	0,5	0,02	0,02	0,01	0,2	20	2	270 000
pingelisel perioodil	,,	0,01	0,1	0,002	0,01	0	0,1	2,0	0,2	40 000
Söödad:										
koresöödad ja silo	tsentnersöötühik	−0,08	−0,1	−0,2	0	−0,5	0	40	0,9	30 000
kontsentraadid ja söödajuurvili . .	,,	−0,25	−0,625	0	−0,25	0	0	5	5	0
Seeduv proteiin .	ts	−0,016	−0,14	−0,014	−0,012	−0,06	0	5	0,5	3 000
Karotiin	g	−0,1	−0,25	−10	0	−5	0	200	4	180 000
Toodanguühiku hind	rbl.	3,6	5,0	0	0	0	3,0	500	80	

misharuks meie näites seakasvatus. Seakasvatus annab iga kulutatud inimpäeva kohta 40 rbl. eest toodangut, veisekasvatus ainult 25 rbl. eest. Teiselt poolt selgus eespool söödabaasi uurimisel tehtud arvutlustest, et maa kasutamise seisukohalt on kõige tõhusamaks kultuuriks mais. Maisisilo on aga omakorda veiste põhiline sööt. Seetõttu korvatakse veisefarmis tekkivatest suurtest tööjõukuludest osa söötade tootmisel saadavate säästudega. See ei tähenda aga hoopiski, et maaviljeluses olekski tarvis toota ainult maisisilo ja mõningane kogus söödateravilja, ja et sellest piisaks veisekasvatuse edukaks arendamiseks. Asi on selles, et kogu külvipinna peaasjalikult maisi alla võtmiseks ei jätkuks tööjõudu, ühe osa põllupinna tühjaksjätmine oleks aga ebaotstarbekohane, sest ühe inimpäeva kohta saadakse maaviljeluses isegi rohkem toodangut kui loomakasvatuses. Siit tulenebki järeldus, et põllumajandusettevõtetes on vaja tegelda üheaegselt mitme tootmisharuga.

Demonstreerime seda ülalpool koostatud ülesande lahendamisega. Et teksti tabelitega mitte üle koormata, esitame ainult optimaalse lõppvariandi (lk.86).

Esitatud tingimuste kohaselt osutub otstarbekohaseks ülesandesse võetud kaheksast tootmisharust jätta optimaalsesse plaani seitse, nimelt tera- ja kaunvilja-, silomaisi, söödasuhkrupeedi, kartuli-, veise- ja seakasvatus.

Püstitatud tingimustel on külvipinna struktuur optimaalses plaanis järgmine:

					Protsentides summast
teravili	207 588,4	: 20	=	10 379,42 –	41,51
kaunvili	195 976,2	: 16	=	12 248,5 –	49,0
silomais	798 116	: 400	=	1 995,29 –	8,0
söödasuhkrupeet	35 359,2	: 200	=	176,79 –	0,69
kartul	20 000	: 100	=	200 –	0,8
Kokku				25 000,0	100,0

Külvipindade sellise struktuuri korral on loomakasvatusele tagatud kindel söödabaas. Toodetavad söödad lubavad pidada veisekarja, milles on karja konkreetset koostist arvestades keskmiselt 4922 lehma, ning toota 31 910 ts sealiha (eluskaalus). Majandi kogutoodangu maksumus on 6 810 998 rbl., sealhulgas maaviljelustoodangut

Põhi-tundmatud	Vaba-liikmed	Kõrvaltundmatud							
		x_{10}	x_{15}	x_{16}	x_{11}	x_5	x_{14}	x_{12}	x_9
x_1	207 588,4	23,34	3,22	0,013	−0,028	0,675	0,065	−9,515	−0,72
x_4	35 359,2	−1,54	1,059	−0,0056	0,787	−0,092	−0,239	−1,149	−6,75
x_7	31 910,0	0,992	−0,543	0,0074	0,024	0,035	0,24	2,078	0,017
x_2	195 976,2	−1,63	−4,38	0,043	−0,015	−0,018	0,179	6,19	0,60
x_6	4 922,0	−0,106	0,21	−0,0016	−0,0034	−0,0088	−0,027	0,2	0,019
x_{13}	3 585,8	1,29	0,31	−0,2	−0,015	0,54	−0,106	−0,46	−0,036
x_3	798 116,0	−21,08	41,7	−1,32	−0,616	3,24	−5,0	40,09	3,67
x_8	20 000	0	0	0	0	0	0	0	1
C	6 810 998	102,38	51,26	0,048	0,096	0,78	6,81	100,01	8,04

1 797 198 rbl., veisekasvatuse toodangut 2 461 000 rbl. ja seakasvatuse toodangut 2 552 800 rbl. eest.

Esitasime toodud näite selle demonstreerimiseks, et mitme maaviljelus- ja loomakasvatusharu rööbitine arendamine on teatud tingimustes täiesti vältimatu. Seosed tootmisharude vahel on tihtipeale küllaltki keerulised. Vaatleme mõningaid neist lähemalt.

Esitatud näites tuli söödasuhkrupeet võtta plaani optimaalsesse varianti. Seejuures on suhkrupeet oma saagikuse ja töökulu poolest vähem efektiivne kui mais. Ülesande tingimuste kohaselt oli maisi saagikus 80, suhkrupeedi saagikus 50 tsentnersöötühikut hektarilt. Üldised töökulutused on nende kultuuride ühe tsentneri kohta võrdsed, ent eriti pingelisel tööhooajal on suhkrupeedi töökulu 5 korda suurem kui maisil.

Suhkrupeedikasvatuse optimaalsesse plaani sissevõtmine seletub sellega, et meie ülesandes on ta söötade hankimise allikana kontsentraatidega peaaegu võrdne. Need mõlemad söödad on sobivad peamiselt seakasvatuses. Seakasvatus on aga tööjõukulutuste seisukohalt efektiivsem kui veisekasvatus. Seetõttu osutub suhkrupeedi efektiivsus lõppkokkuvõttes tunduvalt kõrgemaks kui esialgu näib.

Põldheina saagikuse mõningane tõus või karotiini kulunormi tõstmine võib vaadeldud näite tingimuste kohaselt tagada optimaalses plaanis teatud koha ka põldheinale.

Tootmisharude optimaalse kombinatsiooni leidmine on suures põllumajandusettevõttes keeruline ülesanne. See on selge juba esitatud näidetestki. Tuleb aga arvestada seda, et toodud näited olid maksimaalselt lihtsustatud. Siiani pole veel puudutatud niisuguseid tagasisidemeid, nagu külvikordi ja orgaaniliste väetiste kaudu avalduvat loomakasvatuse seost maaviljelusega, peaaegu üldse pole arvestatud ka eri põllutööde tegemise tähtaegu. Seejuures avaldavad kõik need ja paljud muudki põllumajanduse iseärasused nii- või teistsugust mõju ka eri tootmisharude kombineerimisele. Arusaadavalt võiks tootmisharude optimaalse kombinatsiooni leidmiseks võtta koostatavasse ülesandesse veel palju lisatingimusi. Nagu mistahes teiseski majandusmatemaatilises ülesandes, saame siingi seda täpsema tulemuse, mida täpsemalt ülesande koostamisel arvestatakse tootmise tingimusi ja iseärasusi.

III PEATÜKK

MATEMAATILISTE MEETODITE RAKENDAMINE LOOMAKASVATUSE ORGANISEERIMISEL JA PLANEERIMISEL [1]

SÖÖDAVARUDE OPTIMAALSE KASUTAMISVIISI LEIDMISE METOODIKA

Kindel söödabaas on otsustavaks tingimuseks loomakasvatuse arengus. Söödakultuuride külvipindade struktuuri ja saagikuse tõstmise kõrval on söödabaasi tugevdamise seisukohalt oluline tähtsus ka söötade õigel kasutamisel.

Olenevalt east, eluskaalust ja produktiivsusest vajab iga loom teatud hulga toitaineid. Mingi toitaine vähesus looma söödaratsioonis halvab tema kasvu ja vähendab produktiivsust. Kui loomadele antakse sööta piiramatult, siis korvatakse mõnede toiteelementide vähesust söödas sellega, et loomad söövad rohkem. Tagajärjeks on toodanguühiku kohta ettenähtud söödanormi ületamine.

Söötade tähtsaimaks toiteelemendiks on seeduv proteiin. Selle vähesus alandab järsult loomade produktiivsust ja põhjustab söötade ülekulu. Teiselt poolt on ebasoovitav ka loomade valkainetega ülesöötmine. See avaldaks halba mõju looma organismi arengule, rääkimata sellest, et söötmine läheks liiga kulukaks.

Alati tuleb püüda selle poole, et söödaratsioonis sisal-

---

[1] Käesolevas peatükis käsitletud materjali täienduseks sobib tutvuda T. Akkeli artikliga «Lineaarse planeerimise rakendamine loomakasvatuses» (vt. «Matemaatika ja Kaasaeg» VI, TRÜ, Tartu 1965, lk. 27—37). — *Toimetaja märkus.*

duks piisaval hulgal kõiki organismile vajalikke toitaineid. See on eduka loomakasvatuse ja loomade produktiivsuse tõstmise alus. Peale selle tuleb söödaratsioonide koostamisel arvestada ka söötade hinnaerinevusi. Ratsioon peab olema efektiivne nii toiteväärtuse kui ka söötade hankimiskulude madaluse poolest.

Et toiteväärtuselt ühesugused ratsioonid võivad koosneda erinevatest söötadest, siis tekib võimalus luua suur hulk erinevaid ratsioonivariante. Sellega ühenduses kerkib vajadus leida suure hulga võimalike söödaratsioonide seast optimaalne.

Optimaalsena mõistetakse siin sellist söödaratsiooni, mis vastab toitainete koostiselt loomade bioloogilistele vajadustele ja on seejuures kõige odavam.

Käsitleme selliste ülesannete koostamise ja lahendamise metoodikat lihtsa näite varal. Olgu tarvis koostada nuumsigade söödaratsioon. Sigade eluskaal on 50—60 kg, ööpäevane kaaluiive 400—500 g. Ühe looma kohta on ööpäevas vaja 2,5 söötühikut ja 240 g seeduvat valku.

Nuumatakse kuivsöötadega. Söödaratsioon koosneb maisiteradest ja päevalilleõli kookidest. Üks kilogramm õlikooke sisaldab 1 söötühiku ja 400 g seeduvat proteiini, kilogramm maisiteri aga 1,25 söötühikut ja 80 g proteiini. Arvutuste lihtsustamiseks on andmed toitainesisalduse kohta võetud ümardatult. 1 kg õlikooke maksab 5 kopikat, kilo maisiteri 4 kopikat.

On vaja koostada selline söödaratsioon, mis rahuldab loomade toitainevajaduse ja oleks seejuures võimalikult odav. Tähistame vajaliku õlikookide koguse x_1 ja maisiterade koguse x_2.

Võrratuste süsteem on siis

$$\begin{array}{c} x_1+1{,}25x_2\geqslant 2{,}5 \\ 400x_1+80x_2\geqslant 240 \\ \hline C=5x_1+4x_2. \end{array}$$

Leida tuleb suuruse C minimaalne väärtus.

Korraldame võrratused ümber võrranditeks ja lihtsustame nende kordajaid. Saame

$$\begin{array}{c} 4x_1+5x_2-x_3=10 \\ 5x_1+x_2-x_4=3 \\ \hline C=5x_1+4x_2. \end{array}$$

Antud kujul ei saa aga selle võrrandisüsteemi alusel veel asuda ülesannet lahendama. Asi on nimelt selles, et üks peamisi lineaarse planeerimise ülesannete lahendatavuse tingimusi on otsitavate muutujate mittenegatiivsuse nõue. Meie võrrandisüsteemis on aga negatiivsed kordajad suurustel x_3 ja x_4, mida ülesande lahenduskäigu algul tuleb vaadelda põhitundmatutena.

Selle puuduse kõrvaldamiseks paigutatakse süsteemi igasse võrrandisse, kus abitundmatutel on negatiivsed kordajad, vabalt võetud positiivse kordajaga tundmatu, näiteks y. Et vältida lahendustulemuste moonutumist, kasutatakse ülesande lahendamiseks nn. fiktiivse tundmatu võtet.

Fiktiivse tundmatu võte seisab selles, et sihifunktsiooni paigutatakse fiktiivne tundmatu väga suure kordajaga, mida tähistatakse tähega M. Suurusena M mõistetakse tunduvalt suuremat arvu kõigi teiste antud ülesandesse kuuluvate arvudega võrreldes.

Pärast seda omandab võrrandisüsteem kuju

$$\begin{aligned} 4x_1+5x_2-x_3+y_1&=10\\ 5x_1+x_2-x_4+y_2&=3\\ \hline C=5x_1+4x_2+M\,(y_1&+y_2). \end{aligned}$$

Avaldame võrranditest suuruste y_1 ja y_2 väärtused ja paigutame need sihifunktsiooni.

$$\begin{aligned} y_1&=10-4x_1-5x_2+x_3\\ y_2&=3-5x_1-x_2+x_4\\ \hline y_1+y_2&=13-9x_1-6x_2+x_3+x_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C=5x_1+4x_2+M\,(13-9x_1-6x_2+x_3+x_4)&=\\ =12M-[(9M-5)\,x_1+(6M-4)\,x_2-Mx_3-Mx_4]&. \end{aligned}$$

Seejärel koostame simplekstabeli ja asume meile juba tuntud reeglite kohaselt ülesannet lahendama.

Optimaalseks osutub lahenduse kolmas variant, sest siis on kõigi kõrvaltundmatute kordajad negatiivsed.

Antud juhul leiame sihifunktsiooni minimaalset väärtust. Erinevalt maksimumi leidmisest paigutame põhitundmatute hulka siin need kõrvaltundmatud, millel on sihifunktsioonis (nullreal) positiivsed kordajad. Lahenduse võib lugeda leituks, kui kõigi kõrvaltundmatute kordajad on nullveerus muutunud kas negatiivseks või nulliks. See on miinimumi leidmisel optimaalsuse matemaatiline kriteerium.

Tabel A

Põhitundmatud	Vabaliikmed	Kõrvaltundmatud			
		x_1	x_2	x_3	x_4
y_1	10	4	5	-1	0
$\leftarrow y_2$	3	$\boxed{5}$	1	0	-1
C	0 $-13M$	-5 $+9M$	-4 $+6M$	0 $-M$	0 $-M$

Suuruse x_1 viime järgmises tabelis põhitundmatute hulka; suuruse y_2 arvame põhitundmatute seast välja.

Tabel B

Põhitundmatud	Vabaliikmed	Kõrvaltundmatud			
		y_2	x_2	x_3	x_4
$\leftarrow y_1$	7,6	$-0,8$	$\boxed{4,2}$	-1	0,8
$\rightarrow x_1$	0,6	0,2	0,2	0	$-0,2$
C	3 $+7,6M$	$+1$ $-1,8M$	-3 $+4,2M$	0 $-M$	-1 $+0,8M$

Edasi arvame suuruse x_2 põhitundmatute hulka, suuruse y_1 viime kõrvaltundmatuks ja suuruse y_2 võib arvutustest välja jätta (vt. tabel C, lk. 92).

Selle variandi kohaselt peaks söödaratsiooni koostisse kuuluma 0,238 kg õlikooke (x_1) ja 1,81 kg maisiteri (x_2). Söödaratsiooni hind on sel juhul 8,43 kopikat.

Tabel C

Põhi-tundmatud	Vaba-liikmed	Kõrvaltundmatud		
		y_1	x_3	x_4
x_2	1,81	0,238	−0,238	0,19
x_1	0,238	−0,04762	0,04762	−0,238
C	8,43	+0,714 −M	−0,714	−0,44

Lahendi õigsuse kontrollimine

Söötühikute sisaldus söödaratsioonis

$$0{,}238 \cdot 1 + 1{,}81 \cdot 1{,}25 = 0{,}238 + 2{,}262 = 2{,}5;$$

proteiinisisaldus

$$0{,}238 \cdot 400 + 1{,}81 \cdot 80 = 95{,}2 + 144{,}8 = 240.$$

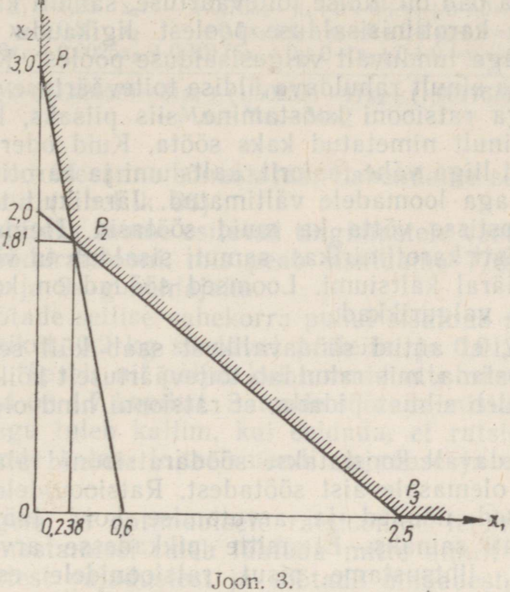
Seega sisaldab leitud söödaratsioon söötühikuid ja seeduvat proteiini vajalikul hulgal.

Söödaratsiooni hind on kehtivate hindade puhul kõige väiksem just nimelt siis, kui sööta antakse niisuguses vahekorras — 0,238 kg õlikooke ja 1,81 kg maisi.

LAHENDUSKÄIGU GRAAFILINE ILLUSTRATSIOON

Joonisel 3 on näitlikult esitatud kolm võimalikku lahendust. 1. Ratsioon võib koosneda ainult maisist (P_1). Et selles sisalduks vajalikul hulgal valku, on vaja veel lisaks 3 kg maisiteri. Sellise söödaratsiooni hinnaks on 12 kopikat. 2. Ratsioon võib koosneda ainult õlikookidest (P_3). Et tagada ka loomade söötühikutevajaduse rahuldamine, kulub sinna juurde veel 2,5 kg õlikooke ja ratsiooni hinnaks oleks 12,5 kopikat. 3. Parimaks variandiks on segu (P_2), mis koosneb 1,81 kg maisiteradest ja 0,238 kg õlikookidest. Sellise segu hind on $0{,}238 \cdot 5 + 1{,}81 \cdot 4 = 8{,}43$ kopikat.

Vaadeldud näide on struktuurilt väga algeline. Praktikas tuleb tegemist ikka palju suurema hulga tundma-



Joon. 3.

tutega. Sellega muutuvad arvutused ka keerulisemaks, ehkki ülesande lahendamise metoodika jääb põhimõtteliselt endiseks.

*

Vaatleme veel üht näidet, mis on eelnenust mõnevõrra keerulisem. Olgu vaja koostada söödaratsioon sigade nuumamiseks, kelle eluskaal on 30—40 kg ja keskmine kaaluiive 300—400 g ööpäevas. Iga looma kohta on vaja ööpäevas 1,6 söötühikut, 200 g seeduvat proteiini, 12 g kaltsiumi, 9 g fosforit ja 12 mg karotiini.

Farmis on olemas otra, ube, heina- ja kalajahu. Nende söötade 1 kg toitainesisaldus on järgmine:

	Oder	Oad	Heina-jahu	Kala-jahu
Söötühikuid (kg)	1,20	1,25	0,76	0,8
Seeduvat proteiini (g)	80	250	200	530
Kaltsiumi (g)	1,2	1,5	13,7	67
Fosforit (g)	3,3	4,0	1,7	32
Karotiini (mg)	1,6	2,5	101,76	—
Sööda hind pro kg (kop.)	3	4	5	7

Oder ja oad on üldise toiteväärtuse, samuti kaltsiumi-, fosfori- ja karotiinisisalduse poolest ligikaudu võrdsed, erinevad aga tunduvalt valgusisalduse poolest. Kui seada eesmärgiks ainult rahuldava üldise toiteväärtuse ja valgusisaldusega ratsiooni koostamine, siis piisaks, kui võtta sellesse ainult nimetatud kaks sööta. Kuid oder ja uba sisaldavad liiga vähe fosforit, kaltsiumi ja karotiini. Need ained on aga loomadele vältimatud. Järelikult tuleb ratsiooni koostisse võtta ka muid söötasid. Heinajahu on näiteks hästi karotiinirikas, samuti sisaldab ta võrdlemisi suurel määral kaltsiumi. Loomsed söödad on kaltsiumi-, fosfori- ja valgurikkad.

Selgub, et antud söödavalikust saab küll sellist ratsiooni koostada, mis rahuldab toiteväärtuselt kõik nõuded. Ühtlasi tuleb silmas pidada, et ratsiooni hind oleks minimaalne.

Arusaadavalt koostatakse söödaratsioonid alati ainult majandis olemasolevaist söötadest. Ratsioonidele esitatavad üldised nõuded ja arvutamise kord jäävad seejuures alati samaks. Et mitte pikkadesse arvutustesse takerduda, lihtsustame pisut ratsioonidele esitatavaid nõudeid.

Oletagem, et ratsioon peab olema piisava üldise toiteväärtusega ning valgu- ja karotiinisisaldusega. Sel juhul on silmanähtav, et ratsiooni koostisse on vaja võtta vähemalt kolm sööta: oder, oad ja heinajahu. Eri söötade vahekord tuleb määrata kindlaks selliselt, et ratsiooni hind oleks minimaalne.

Tähistused: x_1 — odra, x_2 — ubade ja x_3 — heinajahu hulk.

Koostame võrratused

$$\begin{aligned} 1{,}2\,x_1 &+ 1{,}25\,x_2 + 0{,}76\,x_3 \geqslant 1{,}6 \\ 0{,}08\,x_1 &+ 0{,}25\,x_2 + 0{,}2\,x_3 \geqslant 0{,}2 \\ 0{,}0016x_1 &+ 0{,}0025x_2 + 0{,}10176x_3 \geqslant 0{,}012 \end{aligned}$$

$$C = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3$$

Ülesanne: leida suuruse C minimaalne väärtus.

Võtame võrratustesse ka abi- ja fiktiivsed tundmatud. Sihifunktsiooni avaldisse paigutame fiktiivse tundmatu suure kordajaga M.

Tulemusena saame võrrandid

$$1{,}2\ x_1 + 1{,}25\ x_2 + 0{,}76x_3 - x_4 + 0 + 0 + y_1 + 0 + 0 = 1{,}6$$
$$0{,}08\ x_1 + 0{,}25\ x_2 + 0{,}2x_3 + 0 - x_5 + 0 + 0 + y_2 + 0 = 0{,}2$$
$$0{,}0016x_1 + 0{,}0025x_2 + 0{,}10176x_3 + 0 + 0 - x_6 + 0 + 0 + y_3 = 0{,}012$$

$$C = 1{,}812M - [(1{,}2816M - 3)x_1 + (1{,}5025M - 4)x_2 + (1{,}06176M - 5)x_3 - \\ - Mx_4 - Mx_5 - Mx_6]$$

Seega on ülesanne sõnastatud. Lahendame selle simpleksmeetodil (tabel lk. 96).

Lahenduseks saame esitatud tingimustele vastava optimaalse söödaratsiooni, mis peab sisaldama 778,2 g otri, 476 g ube ja 94 g heinajahu.

Eri söötade sellise vahekorra puhul sisaldub ratsioonis 1,6 söötühikut, 0,2 kg seeduvat proteiini ja 0,012 g karotiini, s. o. täpselt nii palju, kui normid ette näevad. Ratsiooni hind on 4,7 kopikat. Samade söötade mistahes teistsugune segu tuleb kallim, kui eeldada, et ratsioon peab katma nende kolme toiteelemendi vajaduse ja et hinnad on samad.

Märkigem, et optimaalsete ratsioonide leidmise ülesannete sõnastamisel tuleb lähtuda mitte ainult loomade bioloogilistest vajadustest ja söötade hindadest, vaid ka sellest, kui palju söötasid majandis on.

Sageli juhtub, et sööt on iseenesest väga tõhus, näiteks kontsentraadid, majandis on neid aga vähevõitu. Või vastupidi, mõni sööt on vähetõhus, näiteks põhk, majandis on seda aga palju ja järelikult tuleb see ka ära kasutada. Loomad võivad mõningaid söötasid tarbida ainult teatud kindla maksimumkoguseni. Võib näiteks juhtuda, et silo on majandis kõige tõhusam sööt ja et see sisaldab kõiki vajalikke toitaineid piisaval määral, ent on üldiselt teada, et loomi ei saa sööta ainult siloga.

Öeldut tuleb ülesande koostamisel arvestada, see tähendab, et ülesandesse tuleb iga söödaliigi kohta võtta vastavad lisakitsendused. Mõnede söötade tarbimine on seejuures ülevalt, teistel alt tõkestatud. Arvutades näiteks lehmade söödaratsioone, kes annavad ööpäevas 10 l piima, võime võtta ülesandesse järgmised lisakitsendused: kontsentraate mitte üle 3 kg, silo mitte üle 40 kg, põhku mitte vähem kui 2 kg, heina mitte üle 6 kg.

Esialgu on otstarbekohane arvutada ja leida optimaalne ratsioon ilma lisakitsendusteta. Kui arvutlused annavad selliseid tulemusi, mis majandis olevate söödavarude koostisega täielikult ei sobi või kui leitud ratsioon

Põhi-tundmatud	Vaba-liikmed	Kõrvaltundmatud						Lahendi-variandi nr.
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
y_1	1,6	1,2	1,25	0,76	−1	0	0	
←y_2	0,2	0,08	$\boxed{0,25}$	0,2	0	−1	0	I
y_3	0,012	0,0016	0,0025	0,10176	0	0	−1	
C	0 1,812M	−3 1,2816M	−4 1,5025M	−5 106176M	0 −M	0 −M	0 −M	
		x_1	y_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
←y_1	0,6	$\boxed{0,8}$	−5	−0,24	−1	5	0	
→x_2	0,8	0,32	4	0,8	0	−4	0	II
y_3	0,01	0,0008	−0,01	0,09976	0	0,01	−1	
C	3,2 0,61M	−1,72 0,8008M	16 −6,01M	−1,8 −0,14024M	0 −M	−16 −5,01M	0 M	
		y_1	x_3	x_4	x_5	x_6		
→x_1	0,75	1,25	−0,3	−1,25	6,25	0		
x_2	0,56	−0,4	0,896	0,4	−6	0		III
←y_3	0,0094	−0,001	$\boxed{0,1}$	0,001	0,005	−1		
C	4,49 0,0094M	2,15 −1,001M	−2,316 0,1M	−2,15 0,001M	−5,2 −0,005M	0 −M		
		y_3	x_4	x_5	x_6			
x_1	0,7782	3	−1,247	6,265	−3			
x_2	0,475776	−8,96	0,39104	−6,0448	8,96			IV
→x_3	0,094	10	0,01	0,05	−10			
C	4,71 0	23,16 −M	−2,128 0	−5,15 0	−23,16 0			

ei vasta loomade bioloogilistele iseärasustele, siis lülitatakse ülesandesse ka lisakitsendused ja arvutused tehakse uuesti.

Lisakitsendusi tähistatakse matemaatikas üldisel kujul nõnda: $x_j \gtrless d_j$.

Segude koostamise ülesande matemaatiline üldmudel on järgmine.

Nõutakse suuruse

$$C = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

minimaalse väärtuse leidmist tingimustel, et

1) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geqslant b_i \ (i = 1; 2 \ldots m)$;

2) $x_j \geqslant 0$;

3) $x_j \gtrless d_j$

(nende söötade kohta, mille suhtes rakendatakse lisakitsendusi).

Tähistused:

n — erinevate söötade arv, kusjuures iga sööt sisaldab m erinevat toitainet;
a_{ij} — i-nda toitaine sisaldus j-inda sööda ühikus;
b_i — ratsiooni nõutav toitainetesisaldus;
c_j — j-inda sööda ühe ühiku hind;
x_j — j-inda sööda hulk ratsioonis.

Tutvusime lihtsate näidete varal, kuidas arvutatakse kariloomadele optimaalseid söödaratsioone. Praktiliste ülesannete lahendamisel kujuneb arvutustööde maht arusaadavalt tunduvalt suuremaks. Optimaalne söödaratsioon peab rahuldama mitte ainult loomade söötühikute ja valguvajaduse, vaid ka nende kaltsiumi-, fosfori-, vitamiinija mikroelementide vajaduse. Pealegi on igas majandis kasutusel mitte kaks või kolm, vaid tunduvalt suurem arv erinevaid söötasid. Esitame nüüd eelmistest mõnevõrra keerulisema näite.

Olgu tarvis arvutada optimaalne söödaratsioon lehmadele, kelle eluskaal on 400 kg, ööpäevane lüps 12 kg ja piima rasvasus 3,8%. Nende päevaratsioon peab sisaldama 10 söötühikut, 1090 g seeduvat proteiini, 80 g kaltsiumi, 45 g fosforit ja 420 mg karotiini.

Majandis on järgmisi söötasid: teravilja, maisisilo, põldheina, suviviljapõhku, kartulit, kliisid. Nende söötade iga kilogrammi toiteväärtust iseloomustavad järgmised andmed.

	Mõõtühik	Teravili (x_1)	Maisisilo (x_2)	Põldhein (x_3)	Suvivilja-põhk (x_4)	Kartul (x_5)	Kliid (x_6)
Söötühikuid	kg	1,18	0,2	0,51	0,22	0,3	0,84
Seeduv proteiin	g	102	14	60	10	16	34
Kaltsium	g	0,8	1,5	10,4	4,4	0,2	1,2
Fosfor	g	3,4	0,5	1,8	0,7	0,7	4,6
Karotiin	mg	2	15	30	5	0	1

Majandis endas toodetud ja ostetud söötade (kliid) hinnad olid järgmised (kopikates kilogrammi kohta): teravili 2,0, maisisilo 0,5, põldhein 1,2, suviviljapõhk 0,1, kartul 1,5 ja kliid 5,0.

Koostame järgmise võrratuste süsteemi, tähistades iga üksikut sööta ratsioonis tähega x_j:

$$\begin{aligned}
1{,}18x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}51x_3 + 0{,}22x_4 + 0{,}3x_5 + 0{,}84x_6 &\geqslant 10\\
102\,x_1 + 14\,x_2 + 60\,x_3 + 10\,x_4 + 16\,x_5 + 34\,x_6 &\geqslant 1090\\
0{,}8\,x_1 + 1{,}5x_2 + 10{,}4\,x_3 + 4{,}4\,x_4 + 0{,}2x_5 + 1{,}2\,x_6 &\geqslant 80\\
3{,}4\,x_1 + 0{,}5x_2 + 1{,}8\,x_3 + 0{,}7\,x_4 + 0{,}7x_5 + 4{,}6\,x_6 &\geqslant 45\\
2\,x_1 + 15\,x_2 + 30\,x_3 + 5\,x_4 + 0 + x_6 &\geqslant 420
\end{aligned}$$

On vaja leida sellised süsteemi rahuldavad tundmatute väärtused, et avaldis

$$C = 2x_1 + 0{,}5x_2 + 1{,}2x_3 + 0{,}1x_4 + 1{,}5x_5 + 5x_6$$

oleks minimaalne.

Võtame nüüd ülesandesse lisakitsendused. Oletagem, et kontsentraatide vähesuse tõttu ei saa neid võtta ratsiooni rohkem kui 250 g iga liitri piima kohta ehk mitte rohkem kui 3 kg lehma kohta ööpäevas, kui iga lehm lüpsab 12 l päevas. Et seda arvestada, võtame ülesandesse täiendava võrratuse:

$$x_1 + x_6 \leqslant 3.$$

Mõnede söötade kohta rakendatakse lisakitsendusi loomade bioloogilisi iseärasusi arvestades. Meie näites on eriti odavaks söödaks suviviljapõhk. Oletagem aga, et lüpsilehmade päevaratsioonis ei tohi seda olla rohkem kui 2 kg. Selleks lülitame ülesandesse täiendava võrratuse:

$$x_4 \leqslant 2.$$

Pärast seda omandab ülesanne, millesse on võetud ka abi- ja fiktiivsed tundmatud, järgmise kuju:

$$\begin{array}{l}
1{,}18x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}51x_3 + 0{,}22x_4 + 0{,}3\,x_5 + 0{,}84x_6 - x_7 + y_1 = 10 \\
102\,x_1 + 14\,x_2 + 60\,x_3 + 10\,x_4 + 16\,x_5 + 34\,x_6 - x_8 + y_2 = 1090 \\
0{,}8\,x_1 + 1{,}5x_2 + 10{,}4\,x_3 + 4{,}4\,x_4 + 0{,}2\,x_5 + 1{,}2\,x_6 - x_9 + y_3 = 80 \\
3{,}4\,x_1 + 0{,}5x_2 + 1{,}8\,x_3 + 0{,}7\,x_4 + 0{,}7\,x_5 + 4{,}6\,x_6 - x_{10} + y_4 = 45 \\
2\,x_1 + 15\,x_2 + 30\,x_3 + 5\,x_4 + 0 + x_6 - x_{11} + y_5 = 420 \\
x_1 + 0 + 0 + 0 + 0 + x_6 + x_{12} + 0 = 3 \\
0 + 0 + 0 + x_4 + 0 + 0 + x_{13} + 0 = 2 \\
\hline
C = 2x_1 + 0{,}5x_2 + 1{,}2x_3 + 0{,}1x_4 + 1{,}5x_5 + 5x_6 + M(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5).
\end{array}$$

Edasi avaldame fiktiivsete tundmatute väärtused esimesest viiest võrrandist, paigutame need sihifunktsiooni avaldisse, koostame esimese simplekstabeli ja asume ülesannet lahendama.

Sel viisil arvutati elektronarvutiga eri lehmarühmade söödaratsioonid Moskva oblasti Malino sovhoosis. Saadud tulemused on esitatud tabelis.

	Mõõt-ühik	Ööpäevas 15—19 l lüpsvad lehmad		Ööpäevas 5—9 l lüpsvad lehmad	
		sovhoosi plaani järgi	optimaalse plaani järgi	sovhoosi plaani järgi	optimaalse plaani järgi
Koresöödad	kg	6,0	8,2	6,0	5,2
Silo	„	20,0	19,0	10,0	9,5
Kontsentraadid . . .	„	8,5	5,1	5,5	3,73
Ööpäevase ratsiooni hind	rbl.	1,30	0,95	0,83	0,57
Ratsiooni optimiseerimisest saadud säästmine	%	—	27,0	—	31,3

Vaatlesime optimaalse koostisega ratsiooni leidmise ülesande koostamise ja lahendamise üldist metoodikat. Öeldule tuleb lisada, et praktiliselt pole mingisugust vajadust lahendada niisuguseid pikki arvutusi nõudvaid ülesandeid, et leida iga söödaratsioon eraldi. Asi on selles, et kõigi loomade söödaratsioonid koostatakse majandites peaaegu samadest söötadest, mida võetakse neisse erinevais vahekordades. Kui koostada kirjeldatud metoodika kohaselt ülesanded kõigi ratsioonide arvutlemiseks, siis erineks suurem osa neist ülesandeist üksteisest ainult vabaliikmete veeruvektori (b_i) poolest. Maatriks (a_{ij}) ja reavektor (c_j) on kõigis ülesandeis täpselt ühesugused. See võimaldab samadest söötadest koostatavate mitmesuguste erinevate ratsioonide leidmiseks vajalike arvutuste tunduvat vähendamist.

Selgitame seda näite varal. Oletagem, et on vaja koostada 400-kilogrammise eluskaaluga ja 12-kilogrammise päevatootlusega lehmade söödaratsioon, milles oleks piisavalt söötühikuid, seeduvat proteiini ja karotiini. Ühe lehma kohta on vaja ööpäevas 10 söötühikut, 1,1 kg seeduvat proteiini ja 0,5 g karotiini.

Ratsioon koostatakse maisisilost, suhkrupeedist ja peenestatud kaunviljast. Nende söötade ühe kilogrammi toiteväärtust iseloomustavad järgmised andmed:

	Mõõtühik	Maisisilo	Suhkrupeet	Kontsentraadid	Ratsioonis peab sisalduma mitte vähem kui
Söötühikud	kg	0,2	0,25	1,0	10
Seeduv proteiin	„	0,015	0,01	0,2	1,1
Karotiin	g	0,0204	0	0,002	0,5

Söötade hinnad (pro kg) on järgmised: silo 1 kopikas, suhkrupeet 2 kopikat ja kontsentraadid 8 kopikat. Maisisilo kogust söödaratsioonis märgime x_1, suhkrupeedi kogust x_2 ja kontsentraatide kogust x_3. Koostame võrrandisüsteemi, millesse on võetud ka abi- ja fiktiivsed tundmatud:

$$\begin{aligned}
0{,}2\ x_1 + 0{,}25x_2 + \quad\ \ x_3 - x_4 + y_1 &= 10\\
0{,}015\ x_1 + 0{,}01x_2 + 0{,}2\ \ x_3 - x_5 + y_2 &= 1{,}1\\
0{,}0204x_1 + 0 \quad + 0{,}002x_3 - x_6 + y_3 &= 0{,}5
\end{aligned}$$

$$C = x_1 + 2x_2 + 8x_3 + M(y_1 + y_2 + y_3)$$

Enne esimese simplekstabeli koostamist märkigem, et fiktiivsed tundmatud tuleb sihifuktsiooni võrrandisse võtta esialgu nende väärtustega, mis leitakse, kui iga võrrand lahendatakse vastava fiktiivse tundmatu suhtes. Selle küllaltki vaevanõudva arvutustööga jõutakse suuruse M numbriliste kordajate kindlakstegemiseni. Nimetatud kordajate väärtused on võrdsed vastavate veeruvektorite kordajate summaga.

Vaadeldavas näites

$$C = 11{,}6M - [(0{,}2354M - 1)x_1 + (0{,}26M - 2)x_2 + \\ + (1{,}202M - 8)x_3 - Mx_4 - Mx_5 - Mx_6)].$$

Viimases avaldises on tundmatute kordajate märgid muudetud ühtlasi vastupidisteks, vastavalt valemile

$$\triangle j = Z_j - c_j.$$

Lahendame selle ülesande lühendatud simplekstabelites (tabelid vt. lk. 102—103).

Esitatud tingimuste kohaselt leitud optimaalne ratsioon koosneb 36 kilogrammist silost ($x_1 = 36$) ja 2,8 kilogrammist kontsentraatidest ($x_3 = 2{,}8$).

Selline ratsioon sisaldab:

söötühikuid	$36 \cdot 0{,}2 + 2{,}8 \cdot 1{,}0 = 10$ kg;
seeduvat proteiini	$36 \cdot 0{,}015 + 2{,}8 \cdot 0{,}2 = 1{,}1$ kg;
karotiini	$36 \cdot 0{,}0204 + 2{,}8 \cdot 0{,}002 = 0{,}74$ kg.

Karotiini sisaldab ratsioon 0,24 g ($x_6 = 0{,}24$) võrra rohkem, kui norm ette näeb. Põhjuseks on see, et karotiini poolest eriti rikas maisisilo on antud söötade hulgas ühtlasi kõige odavam.

Ratsiooni hind on $36 \cdot 1 + 2{,}8 \cdot 8 = 58{,}4$ kopikat.

Suhkrupeeti ratsiooni koostisse ei sattunud. Seda põhjustab asjaolu, et ta on silost tunduvalt kallim. On hõlpus märgata, et ühe söötühiku hind on meie näites ühesugune nii suhkrupeedi ($2 : 0{,}25 = 8$ kopikat) kui kontsentraatide puhul (8 kopikat). Kontsentraadid aga sisaldavad tunduvalt rohkem seeduvat proteiini.

Viimane (viies) lahendivariant annab meile põhitundmatute väärtused ja ka kõrvaltundmatute kordajate süsteemi. Nimetatud kordajatel on täiesti selgelt avalduv majanduslik mõte.

Nii on näiteks suuruse x_2 (suhkrupeet) kordaja real x_3

Põhi-tundmatud	Vaba-liikmed	Kõrvaltundmatud						Lahendi-variant
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
y_1	10,0	0,2	0,25	1,0	-1	0	0	
$\leftarrow y_2$	1,1	0,015	0,01	$\boxed{0,2}$	0	-1	0	I
y_3	0,50	0,0204	0	0,002	0	0	-1	
C	0 11,6M	-1 0,2354M	-2 0,26M	-8 1,202M	0 $-M$	0 $-M$	0 $-M$	
		x_1	x_2	y_2	x_4	x_5	x_6	
$\leftarrow y_1$	4,5	0,125	0,2	-5	-1	$\boxed{5}$	0	
$\rightarrow x_3$	5,5	0,075	0,05	5	0	-5	0	II
y_3	0,489	0,02025	$-0,0001$	$-0,01$	0	0,01	-1	
C	44 4,989M	$-0,4$ 0,14525M	$-1,6$ 0,1999M	40 $-6,01M$	0 $-M$	-40 5,01M	0 $-M$	
		x_1	x_2	x_4	y_1	x_6		
$\rightarrow x_5$	0,9	0,025	0,04	$-0,2$	0,2	0		
x_3	10,0	0,2	0,25	$-1,0$	1,0	0		III
$\leftarrow y_3$	0,48	$\boxed{0,02}$	$-0,0005$	0,002	$-0,002$	-1		
C	80 0,48M	0,6 0,02M	0 0,005M	-8 0,002M	8 $-1,002M$	0 $-M$		

		y_3	x_2	x_4	x_6		
$\leftarrow x_5$	0,3	−1,25	0,040625	−0,2025	$\boxed{1,25}$		
x_3	5,2	−10,0	0,255	−1,02	10,0		IV
$\rightarrow x_1$	24,0	50,0	−0,025	0,1	−50,0		
C	65,6	−30 −M	0,015	−8,06	30		
		x_2	x_4	x_5			
$\rightarrow x_6$	0,24	0,0325	−0,162	0,8			
x_3	2,8	−0,07	0,6	−8,0			V
x_1	36,0	1,6	−8,0	40,0			
C	58,4	−0,96	−3,2	−24			

$(-0,07)$ ja real x_1 $(1,6)$, sihifunktsiooni real $(-0,96)$. Lõpuks, real x_6 on selle kordajaks 0,0325. Loetletud kordajate mõte on järgnevas. Kui võtta antud tingimustel ratsiooni 1 kg suhkrupeeti, siis tuleb sellega koos vähendada ratsioonis silo kogust 1,6 kg võrra ja suurendada kontsentraatide hulka 0,07 kg võrra. Sellisel juhul oleks ratsioonis piisavalt söötühikuid ja seeduvat proteiini nagu varemgi. Ratsiooni hind tõuseks 0,96 kopika võrra ning karotiini liigsus väheneks 0,0325 g võrra.

Kui võtta ratsiooni koostisse 5 kg suhkrupeeti, siis kujuneb selle koostis järgmiseks:

suhkrupeeti 5 kg;

kontsentraate $2,8-(-0,07\cdot 5)=3,15$ kg;

silo $36-1,6\cdot 5=28$ kg.

Ratsiooni hind oleks $58,4+0,96\cdot 5=63,2$ kopikat.

Karotiini liigsus väheneks kuni $0,24-0,0325\cdot 5=$ $=0,0775$ grammini.

Niisiis iseloomustavad kõrvaltundmatute kordajad simplekstabelites söötade üksteisega asendamise võimalusi ratsioonis [1]. Ka abitundmatute, meie näites suuruste x_4 ja x_5 juurde kuuluvad kordajad pole majandusliku mõtteta.

Kirjutame need kaks veeruvektorit maatriksi näol välja ja korrutame selle esimese lahendivariandi vabaliikmete veeruga. Maatriksite korrutamise reegel nõuab, et ühe maatriksi veergude arv peab olema võrdne teise ridade arvuga. Võtame seetõttu esimesesse kaks nullveergu. Ühes omavahel korrutatavatest maatriksitest muudame kõigi liikmete märgid vastupidisteks.

$$\begin{pmatrix} +0,162 & -0,8 & 0 & 0 \\ -0,6 & +8,0 & 0 & 0 \\ +8,0 & -40,0 & 0 & 0 \\ +3,2 & +24,0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10,0 \\ 1,1 \\ 0,5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 0,74 \\ 2,8 \\ 36,0 \\ 58,4 \end{matrix}$$

Toodud maatriksite korrutisena saime viienda lahendivariandi vabaliikmete veeru. Tõsi küll, üks arv ei lange täpselt kokku vastava vabaliikmega. Esimesele reale saime 0,74, lahenduse viiendas variandis on $x_6=0,24$. See tähendab, et saadud ratsioonis on karotiini 0,24 g võrra vajaka, sest x_6 on abitundmatu, mis näitab, kui suureks kujuneb

[1] Vt. lähemalt artiklist Е. М. Четыркин, Нормативные модели в экономике животноводства, kogumikus «Применение математики в экономических исследованиях», 2. köide, Москва 1961, lk. 296.

karotiini võimalik ülekulu. Arv 0,74 näitab karotiini kogust, mis antud ratsioonis sisaldub. Ülesande tingimuste kohaselt peab ratsioonis olema karotiini vähemalt 0,5 g $(=0{,}74-0{,}24)$.

Simplekstabelite kirjeldatud omadusi kasutades võib neist ilma tööd ja vaeva nõudvate arvutusteta välja lugeda samadest komponentidest koosnevad optimaalsed söödasegud ka teiste loomade jaoks. Toodagu sellegi kohta näide. 12 kuni 18 kuu vanuste noorveiste söötmiseks on normide järgi vaja ööpäevas 8 söötühikut, 0,9 kg seeduvat proteiini ja 0,4 g karotiini.

Kasutades eespool toodud ülesande viiendat lahendivarianti (lk. 103), leiame otsitava ratsiooni koostise, kuhu kuulub

kontsentraate $(-0{,}6)\cdot 8+8\cdot 0{,}9=2{,}4$ kg;

silo $8\cdot 8-40\cdot 0{,}9=28$ kg.

Selline ratsioon sisaldab 0,576 g $(=0{,}162\cdot 8-0{,}8\cdot 0{,}9)$ karotiini.

Ratsiooni hind on $3{,}2\cdot 8+24\cdot 0{,}9=47{,}2$ kopikat.

Pandagu tähele, et selline meetod on kasutatav ainult siis, kui kõik ratsioonid koostatakse samadest ja samasuguste hindadega söötadest ja ülesandes muutub ainult vabaliikmete veerg, kusjuures vabaliikmed muutuvad teatud kindlas proportsioonis. Kõigil muudel juhtudel tuleb teha läbi täielikud arvutused simpleksmeetodil.

Kui optimaalsete ratsioonide leidmise ülesannet mõneti täiendada, võib põhimõtteliselt samasugusel viisil leida ka söödakultuuride külvipindade optimaalse struktuuri, millel on loomakasvatusliku suunaga majandites suur rakenduslik tähtsus. Antud juhul liitub ratsioonide koostise arvutlemine küll rohkem majandi optimaalse spetsialiseerumissuuna leidmise ülesandega. Selliseid ülesandeid võib lahendada kas teatud kindla mahuga toodangu valmistamiseks vajalike kulude minimaalse summa või antud tootmisressurssidest saadava maksimaalse toodangu leidmise teel.

LÜHIKESED REEGLID ÜLESANNETE KOOSTAMISEKS JA LAHENDAMISEKS

Nüüd, kus oleme juba tutvunud mitme näitega, võime sõnastada lühidalt ülesannete püstitamise ja nende simpleksmeetodiga lahendamise peamised reeglid.

1. Ülesande lahendamiseks vajalike andmete ettevalmistamiseks tuleb koostada võrrandisüsteemi ja vabaliikmete kordajate tabel.

Ülesannetes, millega taotletakse leida kolhooside ja sovhooside tootmisharude kombineerimise ning külvipindade struktuuri kujundamise optimaalseid plaane, samuti paljudes muudes analoogilistes ülesannetes on võrrandisüsteemi kordajateks ühe toodanguühiku kohta tulevad tootmiskulud. Tabelisse kuuluvad vabaliikmed iseloomustavad iga liiki tootmisressursse, nagu põllupind, inimpäevad, traktorvahetused, söödad jne.

Ülesannetes, millega määratakse söödavarude ja -ratsioonide optimaalset koostist, iseloomustavad võrrandisüsteemi kordajad eri toitainete sisaldust sööda ühes ühikus, vabaliikmed aga toitainete vajadust.

2. Tabelite ja lisakitsenduste alusel (kui neid on) koostatakse võrratusesüsteem, mis väljendab matemaatiliselt ülesande tingimusi.

3. Ülesande lahendamise eesmärk sõnastatakse eri võrrandiga — sihifunktsiooniga. Sihifunktsiooni tundmatute kordajateks võivad olla nii rahalised kui ka naturaalsed näitajad. Rahalisteks on näiteks hind, omahind, kasum ühe toodanguühiku realiseerimisest jne.; naturaalsed on näiteks söötühikutesse ümberarvutamise koefitsiendid, toodanguühiku valmistamiseks kulutatav inimtundide arv jne.

4. Et ülesande lahendamisele asuda, teisendatakse võrratused võrranditeks abitundmatute sissevõtmise teel. Neisse võrranditesse, kus abitundmatud osutuvad negatiivseks, võetakse peale selle veel fiktiivsed tundmatud. Samal ajal teisendatakse ka sihifunktsiooni, kuhu võetakse sisse fiktiivsete tundmatute väärtused suure kordajaga M. Sel juhul lahendatakse ülesanne fiktiivsete tundmatute võttega.

5. Saadud võrrandisüsteemi alusel koostatakse esimene simplekstabel ja asutakse ülesannet lahendama. Ülesanne lahendatakse samm-sammult, simplekstabelite seeria koostamise teel eespool kirjeldatud meetodil.

KARJA STRUKTUURI PLANEERIMINE

Loomakasvatuse organiseerimisel ja planeerimisel on sovhoosides ja kolhoosides üheks kõige tähtsamaks küsimuseks antud tingimustes karja optimaalse koostise leidmine. Toodangu hulk ja selle omahind sõltuvad väga olulisel määral karja struktuurist. Piimakarja- ja karakull-lammaste kasvatuses on hea, kui võimalikult suur protsent loomadest on emasloomad. Lihaveiste, liha-rasvalammaste ja sigade kasvatuses, kus põhilise osa toodangust annavad noorloomad ja loomade nuumamine, on emasloomade osatähtsus karjas tunduvalt väiksem; siin on tähtis, et nuumataks maksimaalsel arvul loomi. Võimalikult kõik noorloomad tuleb ellu jätta, üles kasvatada ja nuumata.

Üldse oleneb karja struktuur järgmistest teguritest: emasloomade viljakusest, noorloomade üleskasvatamise kestusest, esmasloomade kandmisajast, karja paljunemise intensiivsusest, loomakasvatusharude majandamise suundadest, söödabaasi iseloomust, loomade pidamis- ja söötmisoludest. On ilmne, et nende tegurite vahelisi seoseid arvestades võib iga mistahes loomaliigi puhul saada lõpmata suure hulga karja struktuuri erinevaid variante. Ülesanne seisab järelikult selles, et leida antud tingimustes optimaalne variant.

Tuleb märkida, et emasloomade viljakuse suurendamine ja nende kasutamisaja pikendamine, samuti remontkarja kuuluvate noorloomade üleskasvatamise aja lühendamine vähendavad emasloomade osatähtsust karjas. Vastupidises suunas mõjuvad karja struktuurile lihaloomadeks ettenähtud noorloomade üleskasvatamise ja nuumamise aja lühendamine. Sisuliselt taandub ülesanne järelikult nuumatavate noorloomade optimaalse pidamisaja leidmisele, mida võib väljendada kõverjoonelise funktsiooniga.

Olgu lihaloomade pidamise kulud püsivad. Muudame karja struktuuri, tõstes pidevalt nuumal olevate noorloomade osatähtsust. Kogutoodang hakkab sellest suurenema. Teatud punktis ületab toodangu maksumus kulude summa, kari hakkab andma kasumit. Seejärel tõuseb kasum maksimumi. Noorloomade pidamise aja pikendamisel nende täisikka jõudmiseni hakkab loomade ööpäeva-keskmine kaaluiive vähenema. Selle tagajärjel hakkab vähenema ka antud karja edasise pidamise efektiivsus. Järgnevas tabelis on toodud andmed vasikate kuukeskmise kaaluiibe kohta sündimisest kuni aastaseks saamiseni Araslanovi järgi.

Vasikate vanus (kuudes)	Eluskaal (kg)	Absoluutne kaaluiive kuus (kg)	Suhteline kaaluiive kuus (%)
Sündimisel	30	—	—
1	45	15	50
2	65	20	44
3	90	25	38
4	120	30	33
5	150	30	25
6	180	30	20
7	205	25	14
8	230	25	12
9	255	25	11
10	275	20	8
11	295	20	7
12	315	20	6

Saadava kogutoodangu sõltuvust lihatootmissuunaga karja struktuurist iseloomustab järgmine kõverjoonelise funktsiooni avaldis:

$$y = ax^2 + bx + c,$$

kus x on noorloomade osatähtsus karjas.

Antud juhul leiame karja optimaalse struktuuri arvutlemisega samaaegselt ka noorkarja nuumal pidamise optimaalse kestuse. Viimasel ülesandel on ka iseseisev tähtsus.

Praegu tegelevad meil noorkarja kasvatamisega spetsiaalsed majandid. Nende töö korraldamisel on nuumamise kestus eriti suure tähtsusega. Nuumamisperioodi pikkus oleneb mitte ainult loomade kasvuerisustest, vaid ka söödabaasi olukorrast ja kogu loomakasvatuse süsteemist. Kõiki neid iseärasusi ja tingimusi võib väljendada ka matemaatiliselt.

Alustame ülesannete käsitlemist lihtsamatest juhtumitest. Olgu tarvis leida noorsigade tapamajja saatmise optimaalne tähtaeg. Eeldame seejuures, et söötade hinnad ja karjapidamise kulud eri aastaaegadel oluliselt ei muutu. Põhiliseks muutuvsuuruseks on noorloomade ööpäeva-keskmine kaaluiive tootmiskulude ühe rubla kohta. Viimase muutumist võib matemaatiliselt kirjeldada enamasti parabooliga:

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Selle funktsiooni ekstreemumpunkt ei lange aga käesoleval juhul kokku ülesande optimaalse lahendiga. See on ka täiesti mõistetav. Ükski mõistlik peremees ei hakka ju oma noorloomi tapma just siis, kui nende pidamine on muutunud kõige efektiivsemaks. Vaadeldavas ülesandes ei tulegi seetõttu kindlaks määrata seda momenti, millal noorkarja pidamise efektiivsus on maksimaalne, vaid millal nuumamisega tegelev majand annab maksimaalselt tulu või millal kogutoodangu ja tootmiskulude jagatis on maksimaalne. Kui kulud on püsivalt ühesugused ja moodustavad igas ajaühikus suuruse p, siis tekib neid x ajaühiku pikkuse perioodi jooksul kokku px. Olgu kogutoodangu väljalase f(x). Siis saadakse x ajaühiku pikkuse perioodi jooksul toodangut

$$\int_0^x f(x)\,dx.$$

Kogutoodangu üldist hulka võib meie ülesandes väljendada järgmise funktsioonina:

$$y = \int_0^x (ax^2 + bx + c)\,dx.$$

Leida tuleb järgmise jagatise maksimum

$$y = \frac{\int_0^x (ax^2 + bx + c)\,dx}{px}.$$

Leidnud selle funktsiooni tuletise ja võrdsustanud selle nulliga, saame pärast lihtsaid teisendusi valemi

$$x = -\frac{3b}{4a}.$$

Siin tuleb märkida, et kaaluiibe efektiivsuse muutumist pole sugugi vaja eranditult kujutada parabooliga

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Suurus x ei tarvitse olla alati teises astmes, ent ta peab olema alati positiivne. Seepärast võib seda funktsiooni kirjutada üldisemal kujul

$$y=ax^{\alpha}+bx+c.$$

Niisugusel juhul taandub ülesanne funktsiooni

$$y=\int_{0}^{x}\frac{(ax^{\alpha}+bx+c)\,dx}{px}$$

ekstreemumi leidmisele. Funktsiooni ekstreemum (maksimum) leitakse punktis

$$x=\left(\frac{(\alpha+1)b}{2a\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}.$$

Parameetrid a, b ja α leitakse statistiliste vaatlustega hangitavate massiliste andmete alusel kas keskmistena või vähimruutude meetodi abil.

Esitatud valemite lihtsus on väga meelitav. Nende lähteparameetrite leidmisel aga tekib tõsiseid raskusi. Kui a, b ja α on rahuldava täpsusega kindlaks tehtud, siis võimaldavad nende valemite alusel tehtavad arvutlused leida karja optimaalse struktuuri, samuti optimaalsed tähtajad, mille jooksul tuleb noorloomi nuumal pidada. Kui aga parameetrite a, b ja α leidmiseks pole piisavalt andmeid, tuleb ülesande lahendamiseks kasutada teisi meetodeid.

Ülesannet võib sõnastada ka lineaarvõrrandite süsteemina ja lahendada see lineaarse planeerimise meetoditega. Sel juhul piisab, kui on teada andmed farmi tootmiskulude ja toodangu väljalaske kohta soo ja vanuse järgi moodustatud loomarühmade kaupa.

Et ülesannet matemaatiliselt sõnastada, arutleme järgmiselt. Kõigi antud liiki loomade arvu võrdsustame ühega. Kogu kari jaotub soo ja vanuse järgi n rühmaks. On vaja leida iga üksiku rühma osatähtsus. Tähistame need osatähtsused x_j. Ühelt loomalt igas rühmas teatud perioodi (päeva, kuu, aasta) jooksul saadava toodangu maksumuse tähistame c_j. Ühe looma pidamiskulud sama perioodi jooksul on vastavalt a_{ij}.

Kui kari võib anda ise juurdekasvu, siis jaguneb ta loomade soo ja vanuse alusel järgmisteks rühmadeks: 1) emasloomad, 2) isas-suguloomad, 3) mitmesuguse vanusega noorloomad.

Tähistame emasloomade viljakuskoefitsiendi tähega P, noorloomade eri rühmade võrdelisuskoefitsiendi tähega k_j, vanemasse allrühma kuuluvate noorloomade ja emasloomade arvu võrdelisuskoefitsiendi tähega k'. Peale selle lepime veel kokku, et emasloomade osatähtsust karjas tähistame x_1 ja noorloomade eri vanuserühmi x_j. Kui $(j=2, 3 \ldots n)$, siis on allrühmas x_2 kõige nooremad noorloomad (vastsündinud). Eeldame edasi, et kõik noorloomade allrühmad järjestatakse alates noorematest ja lõpetades vanematega; x_n on sel juhul kõige vanemate noorloomade rühm. Rühma x_n arvel toimubki põhikarja remont ja suurendamine.

Kasutusele võetud tähistused võimaldavad karja optimaalse koostise leidmise ülesandele anda järgmine sõnastus.

Leida avaldise

$$C = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

maksimum tingimustel, et

1) $\sum_{j=1}^{n} x_j = 1;$
2) $x_2 - Px_1 \leqslant 0;$
3) $x_j + 1 - k_j x_j \leqslant 0;$
4) $x_1 - k'x_n \leqslant 0;$
5) $x_j \geqslant 0 \qquad (j=2, 3 \ldots n).$

Lähemat selgitust vajab koefitsient k_j. Kui karjas toimub lihtne taastootmine ja kõik sündinud noorloomad sajaprotsendiliselt ellu jäetakse ning üles kasvatatakse, siis on $k_j = 1$.

Laiendatud taastootmise puhul on vanemate noorloomade rühmad nooremate rühmadest arvuliselt väiksemad.

Kui vahetu suhtena[1] väljendatud emasloomade arvu kasvutempo märkida tähega T, ellujäetavate noorloomade osatähtsus üldse sündivate loomade arvust tähega B ja kalendriaasta osades mõõdetav intervall noorloomade eri vanuserühmade vahel tähega t, siis

$$k_j = [1 - (1-B)t] \cdot (1 - tT).$$

[1] Vahetuteks suheteks nimetatakse arvu 1 osades avaldatud suhtarve. Et saada neist protsente, tuleb neid sajaga korrutada. — *Toimetaja märkus.*

Oletagem, et on tarvis leida suurus k_j näiteks 6 kuu kuni ühe aasta vanuste noorveiste rühma kohta. Olgu lehmade arvu aastane juurdekasv 10% ehk 0,1. Kuue kuu (s. o. poole aasta) jooksul moodustab see siis $0{,}1 \cdot 0{,}5 = 0{,}05$. Olgu edasi teada, et noorloomadest langeb välja 3%, s. t. et nende säilimiskoefitsient B on 0,97.

Sel juhul

$$k_j = [1 - (1 - 0{,}97) \cdot 0{,}5] \cdot (1 - 0{,}5 \cdot 0{,}1) = 0{,}9358.$$

Mis puutub suurusesse k', siis iseloomustab see noorkarja vanema rühma ja kogu põhikarja vahelist proportsiooni. Suuruse k' valem on toodud leheküljel 114.

Karja võib loomade soo ja vanuse järgi jaotada suuremaks või väiksemaks arvuks rühmadeks olenevalt loomaliikidest, loomakasvatuse suunast, samuti arvestades ülesande lahendamise võimalusi.

Loomade detailsema rühmitamise korral saadakse täpsemaid tulemusi, ent ülesande ettevalmistamine ja lahendamine nõuab rohkem tööd.

Vaatleme üht näidet sellise ülesande koostamise kohta. Olgu tarvis leida seakarja optimaalne koostis, et saada antud tingimustes maksimaalset puhastulu. Iga emis annab aastas 20 põrsast.

Eri rühmadesse kuuluvate sigade pidamise efektiivsust iseloomustavad järgmised andmed (ühe sea kohta).

Vanuserühmad	Looma keskmine ööpäevane kaaluiive (g)	Kaaluiive 3 kuu jooksul (kg)	Kaaluiibe maksumus (rbl.)	Pidamise kulud (rbl.)	Kasum või kahjum (rbl.)
Suguemised	0	0	0	45	−45
Noorsead:					
kuni 3 kuu vanused	250	22,5	22,5	22	0,5
3—6 kuu vanused	500	45,0	45,0	27	18
6—9 kuu vanused	600	54,0	54,0	31	23
9—12 kuu vanused	450	40,5	40,5	34	6,5

Emiste põhikarjast on ette nähtud igal aastal uuendada 20% ja suurendada põhikarja 10%. Põrsaste ellujäämise koefitsient on 92%. Tähistame soo ja vanuse järgi moodustatud rühmad järgmiselt:

suguemised				— x_1;
kuni 3 kuu vanused noorsead				— x_2;
3—6	„	„	„	— x_3;
6—9	„	„	„	— x_4;
9—12	„	„	„	— x_5.

Seejärel koostame võrrandite ja võrratuste süsteemid.

Esimene võrrand iseloomustab kogu karja üldist koostist:

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1.$$

Järgmine võrrand, millega iseloomustatakse suguemiste ja kuni kolme kuu vanuste noorsigade arvulist vahekorda, saab kuju

$$x_2-5x_1\leqslant 0.$$

Emiste ja noorema rühma põrsaste arvuline suhe määratakse kindlaks sel teel, et emiste aastaviljakus (põrsaste arv ühe emise kohta aastas) korrutatakse selle osaga kalendriaastast, mille jooksul vastav noorloomade rühm kujuneb $(P\cdot t)$. Meie näites on noorsigade allrühmade vanuseintervalliks 3 kuud. Järelikult

$\frac{3}{12}=0{,}25$; $P=20$, kust $x_2\leqslant 20\cdot 0{,}25x_1$ ehk $x_2-5x_1\leqslant 0$.

Seejärel koostame vastavalt lk. 111 toodud valemitele võrratused, milles väljenduvad noorsigade kõigi vanuserühmade vahelised seosed.

Meie näite andmetel

$$k_j=[1-(1-0{,}92)\cdot 0{,}25]\cdot(1-0{,}25\cdot 0{,}1)=0{,}9555.$$

Arvutuste lihtsustamiseks ümardame saadud tulemust, nii et suurus $k_j=0{,}96$.

Pärast neid arvutusi võime kirjutada üles järgmised võrratused:

$$x_3-0{,}96\ x_2\leqslant 0$$
$$x_4-0{,}96\ x_3\leqslant 0$$
$$x_5-0{,}96\ x_4\leqslant 0$$

Lõpuks on vaja koostada võrratus, mis iseloomustaks vanema rühma remontnoorsigade ja põhiemiste arvulist vahekorda.

Vastavalt ülesande tingimustele uuendatakse igal aastal 20% põhiemistest, peale selle suurendatakse nende arvu igal aastal veel 10%. Järelikult moodustab vanema rühma remontnoorkari 30% põhikarjast ehk $0{,}3x_1$.

Selleks, et noorsigade vanema rühma ja emiste arvud ülesandes võrdelisse sõltuvusse seada, tuleb teha kindlaks võrdelisuskordaja k′.

Tegelikes arvutustes kasutamiseks leitakse k′ järgmise valemiga:

$$k' = \frac{T+N}{PB},$$

kus T on põhikarja suurenemise tempo;
N on loomade põhikarjast väljapraakimise norm;
P on emiste viljakuse koefitsient;
B on noorloomade säilimiskoefitsient.

Meie näites on

$$T=0{,}1;\ N=0{,}2;\ P=20 \text{ ja } B=0{,}92;$$

$$k' = \frac{0{,}1+0{,}2}{20 \cdot 0{,}92} = \frac{0{,}3}{18{,}4} = 0{,}0163.$$

Niisiis kujuneb kuues võrratus järgmiseks

$$x_1 - 0{,}0163\ x_2 \leqslant 0.$$

Optimaalsuskriteeriumiks võtame maksimaalse puhastulu summa, s. o.

$$C = -45x_1 + 0{,}5x_2 + 18x_3 + 23x_4 + 6{,}5x_5.$$

Kui võtame koostatud võrratustesse abitundmatud, saame järgmise võrrandisüsteemi:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrrl}
x_1 + x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & +x_6 & & & & & & & = 1 \\
-5x_1 + x_2 & & & & & +x_7 & & & & & & = 0 \\
-0{,}96x_2 + x_3 & & & & & & +x_8 & & & & & = 0 \\
 & -0{,}96x_3 + x_4 & & & & & & +x_9 & & & & = 0 \\
 & & -0{,}96x_4 + x_5 & & & & & & +x_{10} & & & = 0 \\
 & & & -0{,}0163x_5 & & & & & & +x_{11} & & = 0
\end{array}$$

$$C = -45x_1 + 0{,}5x_2 + 18x_3 + 23x_4 + 6{,}5x_5.$$

Leida tuleb suuruse C maksimaalne väärtus.

Karja optimaalse struktuuri leidmine on väga tähtis, kuid sugugi mitte ainus tähtis ülesanne loomakasvatuses. Juhime edaspidi lugeja tähelepanu võimalustele koostada veel õige mitmesuguseid majandusmatemaatilisi ülesandeid loomakasvatuse organiseerimise ja planeerimise täiustamiseks, kasutades selleks näiteid veisefarmi kohta.

MÕNINGATEST VEISEFARMI ORGANISEERIMISEGA SEOTUD ÜLESANNETEST

Tootmise optimaalne organiseerimine ja planeerimine on veisefarmis seotud paljude eri raskusastmeisse kuuluvate ülesannete lahendamisega. Tehtavate arvutluste keerulisus ja efektiivsus olenevad farmi tööoludest, samuti ka eesmärkidest, mida farmi töö organiseerimisega ja ka farmi edasisel väljaarendamisel tahetakse saavutada. Vastavalt farmile antud põhilistele ülesannetele tuleb sõnastada, koostada ja lahendada ka vastavad majandusmatemaatilised ülesanded. Farmile võib olla antud näiteks üks järgmistest ülesannetest:

1) toota maksimaalne kogus piima;

2) saada toodangu realiseerimisest maksimaalset rahalist sissetulekut;

3) saada maksimaalset puhastulu;

4) tagada kogu aasta jooksul piima ühtlane tootmine minimaalse omahinnaga;

5) tagada maksimaalne lihatoodang.

Igaüht neist ülesannetest võib üles seada ja lahendada kas staatilise ülesandena (ühe aasta kohta) või dünaamilise ülesandena (mitme üksteisele järgneva aasta kohta).

Maksimaalse piimakoguse tootmine. Nagu teada, muutub lehma produktiivsus tema laktatsiooniperioodi jooksul. Mingil ühekordsel lüpsmisel saadava piima hulk oleneb peaasjalikult lehmade poegimisajast, nende söötmise ja pidamise tingimustest.

Muude võrdsete tingimuste puhul on lehmade piimatootlus maksimaalne, kui nad poegivad sügis-talvisel perioodil (novembrist jaanuarini). Selle põhjuseks on, et sel juhul satub laktatsioonikõverasse kaks maksimumi, esimene neist satub teisele kuule pärast poegimist, teine kevadele. Järelikult, kui tahetakse loomadelt saada maksimaalsel hulgal piima, siis tuleb korraldada paaritamine nii, et kõik lehmad poegiksid nimetatud kuudel. See on selge ka ilma igasuguste spetsiaalsete arvutusteta.

Asi muutub aga põhjalikult, kui vaadelda ülesannet mitte üldisel kujul, vaid mingi ühe konkreetse majandi (või hulga majandite) seisukohalt.

On teada, et kui kõik lehmad poegiksid ajavahemikul novembrist jaanuarini, siis oleks farmide töö mitmeti raskendatud. Oleks vaja täiendavaid soojustatud ruume nii lehmadele kui ka vasikatele, samuti tekiks hooajaline vajadus töötajate järele, kes hoolitseksid poegivate lehmade ja vastsündinud vasikate eest. Nende raskuste tõttu läheks kogu aastase piimatoodangu suurenemisest tekkiv oletatav kasu täiendavate kulude katteks. Pealegi ei kasvaks ka lehmade tootlus nende pidamisel ja söötmisel vältimatult tekkivate raskuste tõttu nii suureks kui oodatud.

Toodangu realiseerimisest maksimaalse rahalise sissetuleku saamine. Laekuvate rahaliste sissetulekute summa oleneb realiseeritava toodangu hulgast ja hindadest. Talvekuudel on piima keskmine müügihind kõrgem, lehmade tootlus aga muudel võrdsetel tingimustel madalam kui suveperioodil. Peale selle oleneb sissetulekute summa ka müüdavate loomade arvust. Seetõttu tuleb võtta ülesandesse ka sellised tingimused, mis on seotud karja taastootmise ja struktuuriga, noorloomade üleskasvatamise, nuumamise ja karjatamisega. Kui vaadelda asja dünaamiliselt, mitme järjestikuse aasta läbilõikes, muutub ülesanne veelgi keerulisemaks.

Maksimaalse kasumi saamine. Seda liiki ülesande lahendamisel tuleb arvestada kõiki eelmise ülesande tingimusi, peale selle aga veel tootmiskulusid (toodangu maksumust omahinnas). Seejuures tuleb silmas pidada, et omahind, s. o. ühe toodanguühiku kohta tulev tootmiskulude summa, kõigub loomakasvatuses tunduval määral olenevalt aastaaegadest. Seetõttu kujuneb keeruliseks mitte ainult dünaamiline ülesanne, vaid ka juba selle staatiline variant on küllaltki keerulise ülesehitusega.

Ühtlase piimatoodangu ja minimaalse omahinna tagamine aasta jooksul. Üks põhilisi linnalähedaste tsoonide piimakarjandusele esitatavaid nõudeid on, et ta varustaks linnarahvast kogu aasta jooksul pidevalt värske piimaga.

Kuidas pidevalt ühtlastes kogustes piima toota, pole raske välja arvutada, ülesande nõuete kohaselt tuleb aga lehmade poegimisajad aasta jooksul niiviisi jaotada ja üldse kogu farmi töö nii korraldada, et saada piima ka minimaalsete tootmiskuludega.

Maksimaalse lihatoodangu tagamine. Maksimaalse lihakoguse tootmine oleneb otseselt ühelt poolt lehmade arvust karjas ja teiselt poolt tapamajja saadetavate lehmade keskmisest eluskaalust. Keskmine eluskaal oleneb omakorda loomade nuumamise ajalisest kestusest ja intensiivsusest. Peale selle tuleb silmas pidada, et liha ei või minna maksma kui palju tahes. On tarvis arvestada tootmiskulusid, müügihindu ja paljusid muidki asjaolusid.

Ehkki ka seda ülesannet võib käsitleda staatilisena, eeldab just tema lahendamine teiste eeltoodud ülesannete lahendamisest sagedamini dünaamilist lähenemist. See on tingitud eelkõige sellest, et noorveiste üleskasvatamine ja nuumamine võib kesta 1,5 kuni 2 aastat ja kauemgi.

FARMIDE OPTIMAALSE SUURUSE LEIDMISE MAJANDUSMATEMAATILISTEST MEETODITEST

Ettevõtte suurus on üks tähtsamaid tegureid, millest sõltub töö ühiskondlik produktiivsus.

Meie kolhoosid ja sovhoosid on sotsialistlikud suurettevõtted. Nad on keskmiselt mitu korda suuremad kui oma saadusi turustavad keskmised farmid USA-s. Selles peitub meie põllumajanduse üks olulisemaid eeliseid.

Ent sellest, et majandid on suured, ei ole veel küllalt. On vaja, et osataks igal konkreetsel ajavahemikul leida, kui suured peaksid olema nii ettevõtted üldse kui ka nende majandisisesed tootmisüksused.

Põllumajanduslik tootmine kontsentreerub pidevalt. See toimub nii sisemise akumulatsiooni, s. o. majandite kasvu arvel, kui ka eri ettevõtete ühendamise teel. Mäletame hästi 50-ndatel aastatel toimunud kolhooside massilist ühendamist. Sama protsess jätkub ka praegu. Ent mõningatel juhtudel on ka üksikuid liiga suuri ettevõtteid mitmeks iseseisvaks osaks jaotatud. Seda kõike tehakse selleks, et luua kõige ratsionaalsema suurusega ettevõtteid. Tekib küsimus, missugustest tingimustest oleneb põllumajandusettevõtte ratsionaalne suurus.

Kapitalistliku põllumajanduse analüüsimise andmetel annab V. I. Lenin sellele järgmise vastuse: «Teoreetiliselt on mõeldav ükskõik kui suure kapitali igasugune rakendamine ükskõik kui suure pindala juures, kuid enesestmõistetavalt oleneb see olemasolevatest majanduslikest, tehnilistest, kultuurilistest jne. tingimustest, ja kogu küsimus seisab just selles, millised tingimused antud momendil antud maal valitsevad... Siin on nõutav eeskätt ja rohkem kui kusagil mujal protsessi käsitlemine *tervikuna*, kõigi tendentside arvestamine ja nende resultaadi või nende summa, nende tulemuse kindlaks tegemine.»[1]

V. I. Lenin juhib seega tähelepanu mitte ainult tootmisüksuse mõõtmeid mõjustavatele põhilistele tingimustele, vaid kriipsutab alla ka probleemi keerulisust ning selle lahendamisel avalduda võivate tendentside vastuolulisust.

Käsitlemata kolhooside ja sovhooside suuruse kindlaksmääramise probleemi kogu ulatuses, püüame ainult näidata, et selle lahendamisel võivad matemaatilised meetodid osutuda äärmiselt kasulikuks.

Vaadelgem küsimust loomakasvatusfarmi ratsionaalsest suurusest. On teada, et suurtel farmidel, nagu üldse suurettevõtetel on olulisi eeliseid väikestega võrreldes. Suurtes farmides on eeldusi tööde laiaulatuslikuks mehhaniseerimiseks, töö organiseerimise taseme tõstmiseks ja spetsialiseerimise süvendamiseks. Selle tagajärjel vähenevad tootmiskulud ja ettevõtte tasuvus suureneb. Ühtlasi on aga selge, et ettevõtteid ei saa lõpmatuseni suurendada. Loomakasvatusfarmide kohta käivate näidete varal paistab see eriti hõlpsalt silma. Loomade arvu suurenedes kasvavad ka ühe toodanguühiku kohta tulevad transpordikulud. Võib saabuda moment, kus transpordikulude kasv ületab säästu, mis saadakse suurtootmise arendamisest. Sellistel juhtudel on farmide edasine suurendamine ebaotstarbekohane.

Anname sellele ülesandele matemaatilise formuleeringu.

Jaotame kõik tootmiskulud kolme kategooriasse:

püsivkulud (c), mis ei olene toodangu hulgast;

muutuvkulud (x), mida tuleb ühe toodanguühiku kohta seda vähem, mida suuremad on farmid. Sellesse rühma kuulub suurem osa tootmiskulusid;

---

[1] V. I. L e n i n, Teosed, 22. köide, Tallinn 1953, lk. 60.

muutuvkulud (x), mida farmide suurenedes tuleb ühe toodanguühiku kohta rohkem (transpordikulud ja mõned muud kulud).

Ühele toodanguühikule langevate tootmiskulude üldsumma y olenevuse farmi suurusest võib siis avaldada järgmise valemi kujul

$$y = c + \frac{b}{x} + ax^{\alpha} \quad ,$$

kus α on tavaliselt vahemikus $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Leiame selle funktsiooni tuletise

$$y' = -\frac{b}{x^2} + a\alpha x^{\alpha - 1} \quad ,$$

kust

$$x = \left(\frac{b}{a^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{\alpha + 1}} .$$

Suuruste b, a ja α konkreetsed väärtused leitakse vähimruutude meetodil statistiliste vaatlustega hangitud suurest hulgast tegelikest andmetest.

Olenevalt kohalikest oludest võib sellel üldvalemil olla mitmesuguseid konkreetseid erivorme. Nii toob J. Novikov oma artiklis «Piimafarmide optimaalse suuruse arvutlemise metoodika» [1] valemi

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{2a}{c}\right)^2} .$$

Seda valemit kasutades esitab autor konkreetsed arvutlused ja ettepanekud, kuidas olenevalt karjapidamise ja söötmise viisidest ning maa kasutamise intensiivsusest leida selliste Leningradi oblasti piimafarmide optimaalsed suurused, kuhu kuulub 250 kuni 600 lehma.

On täiesti enesestmõistetav, et tootmistingimuste muutudes muutuvad ka farmide optimaalsed suurused.

Seadnud eespool ülesande leida loomakasvatusfarmi optimaalne suurus, arvestasime kaht peamist vastuolulist tegurit: ühelt poolt suurtootmise efektiivsust ja teiselt poolt tootmisettevõtte suurenemisega paratamatult kaasaskäivat transpordikulude kasvu. Samadest asjaoludest lähtub oma arvutlustes ka J. Novikov. Ülesande niisuguse seade korral esinevad transpordikulud ettevõtte suuruse ainsa piirajana. Loomakasvatusfarmide puhul, samuti

[1] Vt. ajakiri «Экономика сельского хозяйства» 1961, пг. 8.

mitmete muude tootmisüksuste puhul, kelle tegevus on seotud suure hulga transportimist halvasti taluvate toodete veoga (juurvilja konserveerimise tehased, võitehased, suhkrutehased jt.), on küsimuse selline asetamine kõigiti põhjendatud. Ent isegi loomakasvatusfarmides pole transpordikulud alati ainsaks tootmisettevõtte suurust tingivaks asjaoluks.

Kui asuda uurima, kui suured peaksid olema põllumajandusettevõtted üldse, siis tuleb siin arvestada paljusid sotsiaalseid, ajaloolisi, majanduslikke, looduslikke, klimaatilisi ja muid asjaolusid. Kolhooside ja sovhooside optimaalset suurust mõjustavate kõikide tegurite matemaatiline kirjeldamine on muidugi võimalik, kuid see probleem alles ootab teaduslikku lahendamist.

IV peatükk

PÕLLUMAJANDUSLIKU TOOTMISE OPTIMAALSE PAIGUTUSE PLANEERIMISE MEETODID

KÜSIMUSE ASETUS

Põllumajanduse ökonoomikas ja planeerimises on tootmise paigutuse ning spetsialiseerimise küsimused olnud alati esmajärgulise tähtsusega ja on seda ka praegu. NSV Liidu tohutu suur territoorium, mille looduslikud ja majanduslikud tingimused on väga mitmekesised, raskendab tunduvalt selle probleemi lahendamist. Põllumajandusliku tootmise pidev ja äärmiselt kiire kasv muudab küsimuse aga üha aktuaalsemaks.

NLKP programmis on öeldud, et püsivalt kõrgete saakide saamiseks, samuti loomakasvatuse kiireks arendamiseks on vaja kõrvuti muude abinõudega «. . . viia läbi põllumajanduse teaduslikult põhjendatud paigutamine looduslike ja majanduslike tsoonide ja piirkondade kaupa, saavutada põllumajanduses sügavam ja stabiilsem **spetsialiseerumine,** kusjuures kõigepealt suurendataks nende põllumajandussaaduste tootmist, milleks on olemas kõige paremad tingimused ja mis on võimalik kõige väiksemate kulutustega . . .».

Eri tsoonides ja ettevõtetes ei kulutata samalaadsete toodete valmistamiseks kaugeltki mitte ühepalju ühiskondlikku tööd. Kogu põllumajandustoodangu tootmiskulude ja tarbija kätte toimetamise kulude üldsumma sõltub olulisel määral sellest, kuidas põllumajandussaaduste tootmine on tsoonide, mikrorajoonide ja ettevõtete vahel jaotatud.

Toodangu omahind on mõnes vabariigis ning looduslikus ja majandusrajoonis tihtipeale mitu korda kõrgem kui teistes. Nii oli kolhoosides toodetud teraviljatsentneri omahind 1961. aastal Ukrainas 2,6 rbl., Moldaavias 3,2 rbl., Põhja-Kaukaasias 2,4 rbl., sellal kui sama näitaja oli Valgevenes 7,8 rbl., Lätis 8,8 rbl. ja Vene NFSV Volga-Vjatka majanduspiirkonnas 8,5 rbl. Lõunapoolsete aladega võrreldes on teravilja omahind NSV Liidu Euroopa-osa põhjarajoonides tavaliselt 4 kuni 3 korda kõrgem. Kui aga vaadelda kartuli omahinda, saame vastupidise pildi. Kartuli omahind oli 1961. aastal Põhja-Kaukaasia kolhoosides 6,3 rbl., Ukraina NSV Donetsi-Dnepriäärses majanduspiirkonnas 4,3 rbl. ja Moldaavias 6,5 rbl. tsentner. Samal ajal oli kartuli tsentneri omahind Läti NSV-s 3 rbl., Valgevene NSV-s 2,9 rbl. ja Volga-Vjatka rajoonis 2,5 rbl.

Samasuguseid suuri erisusi toodete omahinnas võib täheldada ka teistes rajoonides ning peaaegu kõigi tooteliikide puhul juba pikemat aega. Need erisused on püsiva iseloomuga.

Esitatud andmetest nähtub, et põllumajandussaaduste tootmise õigem paigutamine ja rajoonide spetsialiseerimine on toodangu suurendamise ja selle omahinna alandamise suur ja täiesti reaalne reserv.

Saaduste tootmise ratsionaalse paigutamise küsimuse lahendamisel tuleb võtta arvesse ka toodangu veokulusid ning püüda neid alandada. Viimase probleemi lahendamiseks tuleb taotleda saaduste tootmise ja tarbijale kättetoimetamise üldist kulude vähendamist.

Mitte kõigi põllumajandussaaduste tootmiskulude üldsummas pole transpordikuludel silmapaistvat osatähtsust. Seda iseloomustavad andmed lk. 123 toodud tabelis.

Tabelist selgub, et villa tootmiskuludest moodustavad veokulud tühise osa. Samasuguste, odavalt transporditavate toodete hulka kuuluvad peale villa veel puuvill, kiulina ja muud kiudained ning õlikultuuride seemned. Liha transportimise kulud 1000 km kaugusele moodustavad umbes 1% tema omahinnast.

Teiselt poolt näitavad andmed, et teravilja, kartuli ja suhkrupeedi puhul on transpordikulude osa vägagi oluline. Tuhande kilomeetri kaugusele vedamisel tõuseb kartuli omahind 10%, suhkrupeedi omahind aga rohkem kui 20%.

Mõnede põllumajandussaaduste keskmised omahinnad Vene NFSV kolhoosides ja raudteel vedamise kulud 1961. aastal.

Tooted	Tootmis-omahind (rbl/ts)	Raudteel 1000 km kaugusele vedamise kulud (rbl/ts)	Omahind pluss 1000 km kaugusele vedamise kulud (rbl/ts)	Veokulude osatähtsus (%) kulude üldsummast	Keskmine veokaugus (km)
Teravili (välja arvatud mais)	3,80	0,42	4,22	10,0	1 694
Kartul	2,90	0,33	3,23	10,2	1 149
Suhkrupeet . .	1,60	0,46	2,06	22,4	159
Vill	260,30	0,40	260,70	0,15	2 045

Analoogilised on tulemused ka piima ja köögivilja vedamisel.

Põllumajandussaaduste tootmise ratsionaalse paigutamise probleemi lahendamisel tuleb niisiis üksikute tooteliikide, eelkõige teravilja, kartuli, köögivilja, suhkrupeedi ja piima tootmistingimuste kõrval arvestada ka transpordikulusid. See tähendab, et nimetatud põllumajandussaaduste tootmise ratsionaalse paigutamise ülesandesse tuleb võtta ka nende vedamise kulusid arvestavad tingimused. Ainult see on eelduseks optimaalse lahenduse leidmisel küsimusele, kuidas jaotada põllumajandussaaduste tootmist majanduspiirkondade, tootmisvalitsuste ja üksikute kolhooside ning sovhooside vahel.

Põllumajandussaaduste tootmise paigutamise ja spetsialiseerimise probleemi lahendamise üldist kriteeriumi võib sõnastada järgmiselt: iga saadust tuleb toota seal, kus tema tootmine ja tarbijale toimetamine läheb maksma kõige vähem ühiskondlikult vajalikku tööd; kõikide saaduste tootmine peab olema paigutatud nii, et toodete valmistamise ja valmistoodangu tarbimiskohta vedamise kulude üldine summa oleks minimaalne, või nii, et antud tootmistingimustes saadaks maksimaalne hulk toodangut. See tähendab, et minimaalsete kuludega peab toimuma kogu põllumajandussaaduste üldmassi, mitte aga sellesse kuuluvate üksikute saaduste tootmine.

On tuntud fakt, et oleks otstarbekohane koondada enamiku põllumajandussaaduste tootmine mõnesse üksikusse NSV Liidu piirkonda (näit. Krasnodari kraisse). Seda aga ei saa teha, sest sealseist tootmisvõimalustest, eeskätt aga Krasnodari krai maapinnast ei piisaks selleks. Tekib küsimus, missuguseid tooteid ja missuguses ulatuses seal toota. Et kõikide saaduste tootmist ei saa keskendada nende tootmiseks kõige soodsamatesse maakohtadesse, siis tuleb toota paljusid saadusi ka teistes rajoonides.

Vaatleme tingliku näite varal, kuidas lahendatakse tootmise optimaalse paigutamise ülesanne, mis tagab vajaliku põllumajandussaaduste koguse tootmise minimaalsete tootmiskuludega.

Olgu kasutada kaks erineva mullaviljakusega põldu. Kummagi põllu pindala on 1000 hektarit. Kogu see maa tuleb külvata täis nisu ja otra. Nisu saagikus on esimesel põllul 20 ja teisel 12 tsentnerit hektarilt; oder annab vastavalt 18 ja 9 ts/ha. Peale selle on teada, et otra tuleb toota mitte vähem kui 4500 ts. On vaja leida, missugusele põllule ja kui palju tuleb külvata nisu ja otra, et saada maksimaalne hulk teravilja.

Et oder on antud tingimustes vähemsaagikas kultuur, külvame seda parajasti nii palju, kui on vaja 4500 ts saagi saamiseks. Pealegi külvame seda madalama viljakusega (s. o. teisele) põllule. Järelikult tuleb odra alla võtta $\frac{4500}{9} = 500$ ha. Teise põllu ülejäänud osale ja kogu esimesele põllule külvatakse nisu. Sel juhul on teravilja saak:

nisusaak esimeselt põllult	1000 · 20 = 20 000 ts;
nisusaak teiselt põllult	500 · 12 = 6 000 ts;
odrasaak ~~esimeselt~~ põllult	500 · 9 = 4 500 ts;
Kokku	30 500 ts.

Vaatleme nüüd teist varianti. Oletagem, et otsustasime külvata otra esimesele põllule. Sel juhul tuleb selleks, et saada 4500 ts saaki, külvata otra 250 (=4500 : 18) hektarile. Ülejäänud osale esimesest põllust ja kogu teisele põllule külvatakse nisu. Teravilja kogusaak kujuneb sel juhul järgmiseks:

nisu esimeselt põllult	750 · 20 = 15 000 ts;
nisu teiselt põllult	1000 · 12 = 12 000 ts;
otra esimeselt põllult	250 · 18 = 4 500 ts;
Kokku	31 500 ts.

Selgub, et külvide paigutamise teine variant tagab samades tingimustes 1000 tsentneri võrra suurema teraviljasaagi.

Põllumajandussaaduste tootmise paigutamise ülesande lahendamine nõuab tegelikult kümnete ja sadade erisuste arvestamist üksteisega tihedasti seotud tootmisalade tootmistingimustes.

Põllumajandussaaduste tootmise riigi territooriumile paigutamine on tihedasti seotud üksikute tsoonide, rajoonide, samuti kolhooside ja sovhooside spetsialiseerimisega. Paigutus ja spetsialiseerimine on ühtse majandusliku protsessi — ühiskondliku tööjaotuse — kaks erinevat külge. Tootmise areng kutsub esile vajaduse pidevalt täiustada põllumajanduse geograafilist paigutust ja spetsialiseerimist ning tänapäevastada põllumajandustoodangu varumise planeerimise meetodeid, põllumajandusmasinate, väetiste ja muude tootmisvahendite jaotamist.

Nagu teaduslikes uuringutes, nii on ka praktilises planeerimistöös põllumajandussaaduste tootmise paigutuse küsimusi lahendatud siiani reeglipäraselt ainult üksikute, tähtsamate põllumajanduslike tootmisharude kohta. Kõiki muid, nn. kõrval- ehk teenindavaid tootmisharusid on nii või teisiti põhiliste harudega kohandatud. Pealegi on ühe või teise tootmisharu põhiliseks või kõrvaliseks pidamine olnud pahatihti juhuse asi.

Seejuures on põllumajanduses kõigi eri saaduste tootmiseks või mistahes tootmisharu arendamiseks kasutada ikka needsamad tootmisvõimalused: maa, põllumajandusmasinad, tööjõud. Ühe tootmisharu laiendamine kitsendab vältimatult teiste tootmisharude arengu võimalusi. Siit järeldub, et põllumajandussaaduste tootmise geograafilise paigutuse ja spetsialiseerimise probleeme ei tuleks uurida ja lahendada mitte üksikute tootmisharude kaupa, vaid kompleksselt. Samuti ei saa põllumajandusliku tootmise paigutuse probleemi käsitleda ja lahendada eraldi üksikute majanduspiirkondade kohta, isoleerides neid kogu riigi kui terviku põllumajanduse paiknemise probleemidest.

Põllumajanduse paigutuse ja spetsialiseerimise küsimus on üks suuremaid kogu rahvamajandust hõlmavaid probleeme. Optimaalse variandi võib leida ainult siis, kui põllumajanduslike tootmisharude paigutuse ülesanne lahendatakse korraga kõigi põllumajanduslike tootmisharude ja kõigi majanduspiirkondade ning põllumajandusettevõtete kohta. Sellise ülesande lahendamine on võimatu ilma moodsate matemaatiliste meetodite ja kiiretoimeliste elektronarvutite abita. Matemaatilised meetodid ja elektronarvutid lubavad leida optimaalse paigutusvariandi, milles on arvestatud kõiki hetketingimusi, olemasolevaid võimalusi, kehtivaid tootmiskulude norme ja koguseid, milles eri tooteid vajatakse. Mida suurema täpsusega need näitajad kindlaks määratakse, seda efektiivsemaks osutub ka ülesande elektronarvutitega leitav lahend.

Ülesannete koostamiseks ja hilisemaks elektronarvutitega lahendamiseks vajaliku lähteinformatsiooni õige läbitöötamine nõuab põllumajandusliku tootmise ökonoomika ja organiseerimise spetsialistide tõsist ja küllaltki vaevarikast tööd. Üksikasjalikumalt on sellest juttu eespool.

Mis puutub vastava ülesande koostamise metoodikasse, ülesande matemaatilisse formuleerimisse, siis on selleks otstarbeks välja töötatud põllumajandussaaduste tootmise optimaalse paigutusvariandi leidmise matemaatilised mudelid, mida on ka praktikas katsetatud. Järgmises osas on neid mudeleid tutvustatud.

Majandite spetsialiseerimist käsitledes puutusime juba esimeses peatükis (maatükkide diferentseerimisel mullaviljakuse järgi) kokku ka paigutuse probleemidega. Ent seal toodud ülesandes arvestati paigutuse kui teguri mõju ainult osaliselt, ainult põllu mullaviljakuse seisukohalt. Sellest ei piisa. Ülesandesse on vaja võtta veel täiendusi, et peale põllumaa viljakuse arvestada igas tsoonis ka varustatust tööjõuga, põllumajandusmasinate ja muude tootmisvahenditega.

PÕLLUMAJANDUSSAADUSTE TOOTMISE PAIGUTUSE MATEMAATILISED MUDELID

Lihtsaim mudel. Erinevalt spetsialiseerimisülesannetest on põllumajandussaaduste tootmise paigutuse ülesannetes oluline tähtsus üksikute eri liiki toodete toodangu mahu kohta tehtavatel kitsendustel. On ju tarvis toota mitte ainult maksimaalne hulk toodangut, nagu seda taotletakse üksikute majandite kohta lahendatavates ülesannetes, vaid koostada ka niisugune plaan, mis tagaks kõigi eri saaduste tootmise vähemalt teatud kindlas koguses.

Tootmiskulude norme ja olemasolevaid tootmisressursse iseloomustavad võrratused koostatakse seda liiki ülesandes tsoonide ja rajoonide läbilõikes. Iga tsooni võrratuste süsteem peegeldab endas selle tsooni optimaalseks spetsialiseerimiseks lahendatava ülesande tingimusi. Tsoonide kaupa koostatud ülesannete seeria ühendatakse hiljem üheks suureks ülesandeks sel teel, et lisatakse talle veel täiendav võrratuste süsteem. Nimetatud täiendavad võrratused täidavad kahesuguseid ülesandeid. Nad seostavad omavahel üksikute tsoonide kohta koostatud ülesandeid ja tõkestavad altpoolt üksikute saaduste toodanguid.

Ülesande matemaatiline kuju on järgmine.

Leida avaldise

$$C = \sum_{j=1}^{l} \sum_{k=1}^{r} c_{jk} x_{jk}$$

maksimum (või miinimum) tingimustel, et

1) $\sum_{j=1}^{l} a_{ijk} x_{jk} \leqslant b_{ik}$;

2) $\sum_{j=l'+1}^{l} a_{hjk} x_{jk} - \sum_{j=1}^{l'} v_{hjk} x_{jk} \leqslant D_{hk}$;

3) $\sum_{k=1}^{r} x_{jk} \geqslant Q_j$;

4) $x_{jk} \geqslant 0$.

Tähistused:

a_{ijk} — i-ndat liiki ressursside kulu j-inda toote ühe ühiku valmistamiseks k-ndas tsoonis;
b_{ik} — i-ndat liiki ressursside hulk k-ndas rajoonis;
l — tootmisharude (tooteliikide) üldarv;
l' — maaviljeluse tootmisharude arv;

$$v_{hjk} = d_{jk} \cdot q_{hjk},$$

kus
d_{jk} — j-inda toote osa, mis kasutatakse ära loomasöödaks k-ndas tsoonis;

q_{hjk} — h-nda toiteelemendi sisaldus j-inda toote ühikus k-ndas tsoonis;

D_{hk} — h-ndat liiki söötade hulk k-ndas tsoonis, mis saadakse looduslikelt heina- ja karjamaadelt, samuti väljastpoolt oma majandit;

Q_j — j-inda toote vajalik hulk;

r — tsoonide (paigutuskohtade) arv;

c_{jk} — j-inda toote ühiku hind või omahind k-ndas tsoonis;

x_{jk} — j-inda toote toodangu hulk k-ndas tsoonis.

Näitlikkuse mõttes esitatakse allpool vaadeldava ülesande elementaarne maatriksi skeem (vt. lk. 129).

Oletagem, et uuritakse, kuidas neli tootmisharu kolme tsooni optimaalselt ära paigutada. Iga tsooni jaoks on ülesandesse võetud olemasolevate tootmisvõimaluste ja -kulude kohta kolm kitsendust.

Eri toodete toodangut tõkestatakse täiendavate võrratustega ainult altpoolt. Kui antud tingimustes seatakse ülesanne leida maksimaalse suurusega kogutoodang või puhastulu, siis mõnede kõige efektiivsemate toodete toodangu maht planeeritakse suurem kui Q_j.

Kui optimaalsuskriteeriumiks võetakse etteantud mahuga toodangu valmistamine minimaalsete kuludega, võetakse plaani toota kõiki saadusi varem kindlaksmääratud hulgal. Sel juhul peab täiendavas süsteemis kehtima võrdus

$$\sum_{k=1}^{r} x_{jk} = Q_j.$$

Mainitud võrratusesüsteemis on suuruse x_j kordajateks ühed. Seejuures on võrratused koostatud nagu transpordiülesandes ja summeerimine toimub suuruse k järgi. Suuremates tegelikes ülesannetes tuleb aga sellest skeemist kõrvale kalduda. Esiteks on mõnikord otstarbekas tõkestada alt mitte iga üksiksaaduse toodangut eraldi, vaid ühelaadsete toodete rühmi, näiteks toiduteraviljade, iga liiki liha jne. toodangut. Teiseks ei ole suuruse x_j kordajaks lisavõrratustes sugugi mitte alati üks, vaid suurus a_{ij}. Eelkõige juhtub seda loomakasvatusharudes, s. o. niisugustes tootmisharudes, kus kaasnevatel toodanguliikidel on oluline tähtsus. Loomakasvatuse mitmesugustes haru-

Maatriksi skeem

Tsoonid	Tsoonid ja tootmisharud / Ressursid (kitsendused)	Mõõtühik	I tsoon				II tsoon				III tsoon				b_i
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	
I	A		a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}									$\leqslant b_1$
	B		a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}									$\leqslant b_2$
	C		a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}									$\leqslant b_3$
II	A						a_{45}	a_{46}	a_{47}	a_{48}					$\leqslant b_4$
	B						a_{55}	a_{56}	a_{57}	a_{58}					$\leqslant b_5$
	C						a_{65}	a_{66}	a_{67}	a_{68}					$\leqslant b_6$
III	A										a_{79}	a_{710}	a_{711}	a_{712}	$\leqslant b_7$
	B										a_{89}	a_{810}	a_{811}	a_{812}	$\leqslant b_8$
	C										a_{99}	a_{910}	a_{911}	a_{912}	$\leqslant b_9$
Lisakitsendused	I toode	ts	I				I				I				$\geqslant Q_1$
	II toode	,,		I				I				I			$\geqslant Q_2$
	III toode	,,			I				I				I		$\geqslant Q_3$
	IV toode	,,				I				I				I	$\geqslant Q_4$

$$C = c_1 x_1 + \ldots + c_{12} x_{12}$$

des on otstarbekohane võtta tootmisressursside kulunormid ülesandesse arvestatuna põhikarja ühe looma kohta, lisavõrratustes aga üksikute konkreetsete saaduste — piima, liha, villa jne. — toodang altpoolt tõkestada.

Öeldu illustreerimiseks esitame lihtsa arvnäite.

Olgu tarvis koostada optimaalne plaan, kuidas järgmiste tingimuste kohaselt teravilja ja kartuli tootmist kahe tsooni vahel jaotada.

Näitajad	Tsoon	Teraviljad	Kartul
Saagikus (ts/ha)	I	20	100
	II	16	80
Tööjõukulu (inimpäev/ha)	I	1	10
	II	1,6	16

Tootmisressursid: esimeses tsoonis 500 000 ha põllupinda ja 900 000 inimpäeva, teises tsoonis 400 000 ha põllupinda ja 1 000 000 inimpäeva.

Kahes tsoonis kokku tuleb toota mitte vähem kui 14 milj. tsentnerit teravilja ja vähemalt 5 milj. tsentnerit kartulit. Teravilja hind on 5 rbl. ja kartuli hind 3 rbl. tsentner.

Leida, kui palju teravilja ja kartulit võib üldse toota ja kui palju saab neid toota kummaski tsoonis. Järelikult tuleb leida nelja erineva tundmatu väärtused.

Tootmiskulude koefitsiendid ühe tsentneri toodangu kohta

Tootmisressursid	Mõõtühik	I tsoon		II tsoon		Kokku tootmisressursse (tuh.)
		teravili	kartul	teravili	kartul	
		x_1	x_2	x_3	x_4	
Põllupind I tsoonis	ha	0,05	0,01	—	—	500
Töö I tsoonis	inimpäev	0,05	0,1	—	—	900
Põllupind II tsoonis	ha	—	—	0,0625	0,0125	400
Töö II tsoonis	inimpäev	—	—	0,10	0,20	1000

Koostame võrratusesüsteemi

$$\begin{array}{llll}
0{,}05x_1+0{,}01x_2 & & & \leqslant 500\,000 \\
0{,}05x_1+0{,}1x_2 & & & \leqslant 900\,000 \\
 & 0{,}0625x_3+0{,}0125x_4 & & \leqslant 400\,000 \\
 & 0{,}1x_3 \quad +0{,}2x_4 & & \leqslant 1\,000\,000 \\
x_1 \quad + & x_3 & & \geqslant 14\,000\,000 \\
\quad x_2 & + \quad x_4 & & \geqslant 5\,000\,000 \\
\hline
 & C=5x_1+3x_2+5x_3+3x_4 & &
\end{array}$$

Leida suuruse C maksimum.

Lihtsustame neid avaldisi, võttes neisse ühtlasi abi- ja fiktiivsed tundmatud. Saame uue süsteemi.

$$\begin{array}{llllllllll}
5x_1+x_2 & & +x_5 & & & & & & & =50 \\
x_1+2x_2 & & & +x_6 & & & & & & =18 \\
 & 5x_3+x_4 & & & +x_7 & & & & & =32 \\
 & x_3+2x_4 & & & & +x_8 & & & & =10 \\
x_1 \quad +x_3 & & & & & & -x_9 & & +y_1 & =14 \\
\quad x_2 \quad +x_4 & & & & & & & -x_{10} & +y_2 & =\ 5 \\
\hline
\end{array}$$

$$C=-19M-[(-M-5)x_1+(-M-3)x_2+(-M-5)x_3+ \\ +(-M-3)x_4+Mx_9+Mx_{10}]$$

Et teksti tabelitega mitte üle koormata, esitame ainult esimese ja seitsmenda (optimaalse) lahendivariandi. Lihtsustamise eesmärgil on vabaliikmed avaldatud miljonites (vt. tabel lk. 132).

Arvutuste tulemusena selgub, et teravilja tuleks toota

I tsoonis	(x_1)	9 110 000 ts
II tsoonis	(x_3)	6 014 000 ts
Kokku		15 124 000 ts

ehk 1 124 000 ts võrra rohkem kui miinimumülesandes ette nähtud.

Põhitundmatud	Vabaliikmed	Kõrvaltundmatud						Lahendivariant
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_9	x_{10}	
x_5	50	$\boxed{5}$	1	0	0	0	0	
x_6	18	1	2	0	0	0	0	
x_7	32	0	0	5	1	0	0	I
x_8	10	0	0	1	2	0	0	
y_1	14	1	0	1	0	-1	0	
y_2	5	0	1	0	1	0	-1	
C	0 $-19M$	-5 $-M$	-3 $-M$	-5 $-M$	-3 $-M$	0 M	0 M	
		x_5	x_8	x_7	x_6			
x_1	9,110	0,22	$-0{,}5$	0	$-0{,}11$			
x_{10}	1,441	$-0{,}11$	0,83	$-0{,}11$	0,55			
x_9	1,124	0,22	$-0{,}166$	0,22	$-0{,}11$			
x_4	1,986	0,01	0,11	$-0{,}1$	$-0{,}005$			VII
x_3	6,014	$-0{,}021$	0,11	0,2	0,005			
x_2	4,445	$-0{,}01$	0,29	0	0,55			
C	94,913	0,67	1,6	0,7	1,111			

Kartulit saadakse

I tsoonis	(x_2)	4 445 000 ts
II tsoonis	(x_4)	1 986 000 ts
Kokku		6 431 000 ts

ehk 1 431 000 ts võrra rohkem kui miinimumülesandes ette nähtud.

Rahas saadakse selle toodangu eest

$$15\,124\,000 \cdot 5 + 6\,431\,000 \cdot 3 = 94\,913\,000 \text{ rbl.},$$

mis vastab sihifunktsiooni (C) väärtusele optimaalse lahendi puhul.

Tulemusena saadakse tootmise sellise paigutuse korral mõlemas tsoonis maksimaalne kogutoodang ja olemasolevad tootmisvõimalused kasutatakse täielikult ära.

Nagu näitest selgub, nõuab antud mudeli kasutamine õige ohtralt arvutusi. Tegelikus töös lahendatakse selliseid ülesandeid elektronarvutitel. Käsitsi on mõeldav arvutada optimaalseid plaane 3—4 tootmisharu paigutamiseks mitte rohkem kui 3—4 territooriumile (tsooni).

Põllumajandussaaduste tootmise optimaalse paigutuse ülesannete lahendamine vabariikide ja tsoonide kaupa võimaldab avastada suuri reserve põllumajandussaaduste toodangu suurendamiseks ja omahinna alandamiseks.

Elektronarvutitega sellist laadi ülesannete lahendamisel omandatud kogemused näitavad, et kirjeldatud meetod on väga tulemusrikas.

Nii koostati aruandeliste andmete alusel ja lahendati ära ülesanne põllumajandussaaduste tootmise paigutamise kohta Vene NFSV suur-majanduspiirkondade läbilõikes. Tulemusena saadi tootmise paigutuse variandid, mis võimaldavad toota sama koguse põllumajandussaadusi 20% odavamalt.

Tootmise paigutuse mudel, milles arvestatakse toodangu veokulusid. Mõnede põllumajandussaaduste tootmise ja tarbimiskohta vedamise kulude üldsummas on transpordikulude osatähtsus suur. Sellised tooted on teravili, piim, köögivili, kartul, suhkrupeet ja mõned teised. On täiesti arusaadav, et nende toodete kohta põllumajandussaaduste tootmise paigutuse optimaalset plaani koostades tuleb arvestada ka veokulusid.

Et siin on juttu matemaatilistest mudelitest, siis on silmanähtav, et ülaltoodud mudelit on vaja täiendada veel tingimustega, milles väljenduksid vastavate saaduste transpordikulud. Täiendatuna omandab ülesanne järgmise kuju.

Leida avaldise

$$C = \sum_{j=1}^{l} \sum_{k=1}^{r} c_{jk} x_{jk} + \sum_{j=1}^{l} \sum_{k=1}^{r} \sum_{p=1}^{r} c_{jkp} x_{jkp}$$

miinimum tingimustel, et

$$1)\ \sum_{j=1}^{l} a_{ijk} x_{jk} \leqslant b_{jk} \qquad (i = 1,2\ldots m');$$

$$(k = 1,2\ldots r)$$

$$2)\ \sum_{j=l'+1}^{l} a_{hjk} x_{jk} - \sum_{j=1}^{l'} v_{hjk} x_{jk} \leqslant D_{hk} \quad (h \in i);$$

$$3)\ \sum_{k=1}^{r} x_{jk} \geqslant Qj;$$

4) $\sum_{k=1}^{r} x_{jkp} = d_{ip}$;

5) $\sum_{p=1}^{r} x_{jkp} \leqslant x_{jk}$;

6) $x_{jk} \geqslant 0$; $x_{jkp} \geqslant 0$.

Kõnealusesse mudelisse täiendavalt võetud sümbolite tähendused on järgmised:

c_{jkp} — j-inda toote ühe ühiku veokulud p-ndast tsoonist k-ndasse tsooni;

x_{jkp} — p-ndast tsoonist k-ndasse tsooni veetud j-inda toote hulk (veoste maht);

d_{jp} — j-inda toote vajadus p-ndas tsoonis;

l — maaviljeluse ja loomakasvatuse tootmisharude arv tsoonis;

l' — maaviljeluse tootmisharude arv;

m' — kitsenduste arv tsoonis.

ÜLESANNETE PÕHILISED PARAMEETRID

Eespool vaadeldud mudelitega saab koostada ükskõik kui suuri ülesandeid. Ülalpool on juba rõhutatud, et põllumajandussaaduste tootmise paigutamine on kompleksprobleem. Selle õigeks lahendamiseks tuleb ühe korraga arvesse võtta kõiki mitmekesiseid tootmistingimusi ja tootmisharude ning kultuuride kõiki iseärasusi. Tootmisharude (või kultuuride) loetelu, millele ülesanne rajatakse, võib olla kas väga lühike (kokkusurutud) või siis väga detailne. Ülesandesse võib näiteks lülitada järgmise loetelu: 1) talirukis, 2) talinisu, 3) talioder, 4) suvinisu, 5) teramais (seemneks), 6) teramais (muu), 7) suvioder, 8) kaer, 9) sinep, 10) hirss, 11) riis, 12) hernes, 13) vikk, 14) suhkrupeet (tööstustooraine), 15) päevalille seemned, 16) kiulina (kiud), 17) kanep (kiud), 18) õlilina ja muud õlikultuurid, 19) muud tehnilised kultuurid (tubakas, eeterõli-kultuurid), 20) kartul (söögikartul ja tööstustooraine), 21) köögivili, 22) söögikõrvitsalised, 23) silomais, 24) söödasuhkrupeet, 25) sileeritavad söödakaunviljad, 26) muud silokultuurid, 27) söödakartul, 28) söödakõrvitsalised ja -juurvili, 29) üheaastased heintaimed, 30) üheaastased haljassöödataimed, 31) mitmeaastased heintaimed, 32) mitmeaastased haljassöödataimed, 33) viljapuuaiad, 34) marjaaiad, 35) viinamarjaistandused, 36) veisekasvatus 37) seakasvatus, 38) peenvillalammaste kasvatus, 39) karevillalammaste kasvatus, 40) liha-rasvalammaste kasvatus, 41) linnukasvatus (munad), 42) lihalindude kasvatus, 43) küülikukasvatus, 44) põdrakasvatus, 45) ulukikasvatus, 46) kalakasvatus, 47) mesindus, 48) tööloomad.

Iga tootmisharu võib olla ülesandes esindatud hulga tundmatutega, olenevalt tema intensiivsusest (saagikus, produktiivsus jms.), mistõttu tundmatute arv võib igas tsoonis ulatuda mitmesajani.

Kõneldes tootmise paigutusest riigi territooriumil, pidasime siiani silmas enamasti suuri tsoone — majanduspiirkondi, oblasteid, tootmisvalitsuste piirkondi. Iga tootmisharu ja kogu rahvamajanduse põhiliseks tootmisüksuseks on siiski ettevõte. Tootmise paigutus, eriti tema optimaalne paigutus eeldab paigutust mitte lihtsalt mingisugusele suurele territooriumile, vaid mingisse konkreetsesse ettevõttesse.

Nagu teada, oli NSV Liidus 1964. aasta 1. jaanuaril 48 800 kolhoosi ja sovhoosi. Kõige üldisemalt arutledes võib äsja tutvustatud mudelile tuginedes koostada üheainsa ülesande, mille lahendamisel võib saada kogu NSV Liidu põllumajandussaaduste tootmise paigutuse optimaalse variandi üksikute kolhooside ja sovhooside kaupa. Selline ülesanne oleks aga niivõrd hiiglaslik, et seda ei saaks praktiliselt lahendada, sest temas oleks miljoneid tundmatuid.

Selle tehnilist laadi takistuse ületamiseks koostatakse niisugused ülesanded, mida saab praeguste elektronarvutitega lahendada. Ülesande mõõtmeid vähendatakse esiteks temasse võetavate tootmisharude loendi lühendamise, teiseks tsoonide liitmise teel. Seega jaguneb üks ülesanne mitmeks väiksemaks. Tootmise optimaalse paigutuse ülesanne lahendatakse niiviisi samm-sammult.

Põllumajandussaaduste tootmise optimaalse paigutuse planeerimise mudelit on otstarbekohane kasutada põllumajandussaaduste tootmise ja varumise plaanide koostamisel kahes erinevas suunas — ülalt alla ja alt üles liikudes.

Arvutluste skeem ülalt alla liikudes võiks olla ligikaudu järgmine. Eelkõige tehakse kindlaks, kui palju tuleb põllumajandussaadusi toota kogu riigis üldse. Sellegi ülesande lahendamisel võidakse kasutada matemaatilisi meetodeid ja elektronarvuteid. Seejärel lahendatakse ülesanded, et leida optimaalne variant põllumajandussaaduste tootmise jaotamiseks vabariikide vahel. Igas vabariigis leitakse põllumajandusliku tootmise paigutuse optimaalsed variandid suurte looduslik-majanduslike tsoonide läbilõikes. Vene NFSV jaotatakse sel eesmärgil näiteks kümneks majanduspiirkonnaks. Seejärel lahendatakse analoogilised ülesanded igas majandusrajoonis oblastite ja oblastisiseste looduslik-majanduslike piirkondade läbilõikes. Moskva oblastis on selliseid tsoone näiteks neli. Järgneb ülesande lahendamine igas oblastisiseses rajoonis tootmisvalitsuste piirkondade läbilõikes ning viimaste raames üksikute sovhooside ja kolhooside kaupa.

Kirjeldatud skeemis oli 6 astet. Seejuures pole ühelgi astmel rohkem kui viisteist paigutusühikut, enamasti on neid aga alla kümne.

Et ülesanne ei kasvaks lahendajatel üle pea, tuleb üldplaneerimisel lähtuda rangelt piiratud tootmisharude loendist (mitte üle 15—20). Aluseks võib võtta näiteks järgmise tootmisharude loendi: 1) teravili (kaasa arvatud ka kaunvili), 2) suhkrupeet ja söödajuurvili, 3) puuvill, 4) päevalill ja muud õlikultuurid, 5) kartul, 6) lina ja muud kiukultuurid, 7) köögivili ja kõrvitsalised, 8) teramais, 9) silomais, 10) mitmeaastased heintaimed, 11) üheaastased heintaimed, 12) aiad ja viinamarjaistandused, 13) veisekasvatus, 14) seakasvatus, 15) lambakasvatus, 16) linnukasvatus.

Tootmisharude loend piirdub seega 16 haruga. Seejärel võetakse analoogiline operatsioon ette ka kitsenduste loendis.

Ülesande sõnastusse tuleb peale kitsenduste eri tsoonides olemasolevate tootmisvahendite kohta võtta kitsendused ka kõigi lõpptoodete kohta, mida tuleb toota kindlasti vähemalt teatud kindlaksmääratud kogus.

Tsoonide, tootmisharude ja kitsenduste arv sõltub arusaadavalt sellest, mida planeeritakse. Plaani koostamise eri astmetel on kirjeldatud mudeli järgi koostatava maatriksi mõõtmed erinevad, kord suuremad, kord väiksemad.

Nii näiteks olid ühe esimese, põllumajandussaaduste tootmise Vene NFSV majanduspiirkondadesse optimaalse paigutamise variandi leidmiseks koostatud ülesande põhilised parameetrid järgmised.

Tootmisharude ja kultuuride loend: 1) taliteraviljad, 2) suvinisu, 3) teramais, 4) oder ja kaer, 5) tangukultuurid, 6) kaunviljad, 7) suhkrupeet, 8) päevalill, 9) lina ja kanep, 10) kartul, 11) köögivili ja kõrvitsalised, 12) silomais, 13) heintaimed, 14) haljassöödad, 15) viljapuu- ja marjaaiad, viinamarjaistandused, 16) veisekasvatus, 17) seakasvatus, 18) lambakasvatus, 19) linnukasvatus, 20) tööloomad.

Nimetatud tootmisharude paigutust uuriti järgmise 10 majanduspiirkonna läbilõikes: 1) Loode, 2) Kesk-, 3) Volga-Vjatka, 4) Kesk-Mustmullavööndi, 5) Volgaäärne, 6) Põhja-Kaukaasia, 7) Uraali, 8) Lääne-Siberi, 9) Ida-Siberi ja 10) Kaug-Ida majanduspiirkond.

Kõigi nende majanduspiirkondade kohta olid ülesandesse võetud järgmised tootmisressursid: 1) külvipind, 2) üldised tööjõuvarud (inimpäevades), 3) tööjõuvarud pingelisemal tööperioodil (inimpäevades), 4) tehnilised seadmed (rbl.), 5) tootmiskulud (rbl.), söödad (tsentnersöötühikuis), 6) kontsentreeritud söödad, 7) koresöödad, 8) mahlakad ja haljassöödad, 9) seeduv proteiin (ts), 10) karotiin (g).

Ülesande tingimustes arvestati olemasolevaid ressursse ja kulunorme ühe toodanguühiku kohta.

Peale selle tõkestati kogu Vene NFSV põllumajandussaaduste tootmist alt, millega tagati kõigi saaduste tootmine vähemalt piisavas koguses.

Kirjeldatud tüüpi ülesande maatriksi mõõtmeid saab leida vastavate valemitega.

a) M a a t r i k s i m õ õ t m e d ü l e s a n d e s, m i l l e s e i a r v e s t a t a t r a n s p o r d i k u l u s i d, on

$$m = pr + l$$

ja

$$n = lr + m,$$

kus m — võrrandite arv;
n — tundmatute arv;
p — igas tsoonis arvestatavate kitsenduste arv (tootmisressursside liigid);
l — tootmisharude arv;
r — tsoonide (ehk paigutuskohtade) arv.

Kui kasutatakse fiktiivsete tundmatute võtet, võetakse sisse veel fiktiivsed tundmatud, millede arv on võrdne tootmisharude kohta altpoolt kehtestatud kitsendustega. Fiktiivsete tundmatute arv ei tohi ületada tootmisharude arvu. Seega on

$$n = lr + m + l.$$

Käsitletava ülesande maatriksi mõõtmed on seega

$$m = 10 \cdot 10 + 20 = 120;$$
$$n = 200 + 120 + 20 = 340$$

(kaasa arvatud ka abi- ja fiktiivsed tundmatud).

Lisakitsenduste arv ei võrdu tavaliselt tootmisharude arvuga. Asi on nimelt selles, et altpoolt pole vaja tõkestada mitte kõigi 20 tootmisharu, vaid ainult nende tootmisharude toodangu hulka, mis annavad lõpptoodangut (kaubatoodangut). Pealegi piiratakse suhteliselt ühelaadsete toodete (mitmesuguste teraviljakultuuride, iga liiki liha jne.) toodangut summaarselt.

Lisakitsendusi rakendati ülesandes järgmiste saaduste kohta: 1) suvinisu, 2) teramais, 3) tangukultuurid, 4) muud tera- ja kaunviljad, 5) suhkrupeet, 6) päevalill, 7) lina ja kanep, 8) kartul, 9) köögivili ja kõrvitsalised, 10) viljapuu- ja marjaaiad, viinamarjaistandused, 11) liha, 12) piim, 13) vill, 14) munad.

Kokku oli kahekümne tootmisharu peale 14 lisakitsendust. Nagu juba ülalpool öeldud, järgneb esimese ülesande lahendamisele analoogiliste ülesannete lahendamine põllumajandussaaduste tootmise optimaalse paigutuse leidmiseks oblastite, kraide ja vabariikide igas suur-majanduspiirkonnas. Vajadus teha arvutusi astmeti on põhjustatud praegu olemasolevate elektronarvutite siiani veel mittepiisavast võimsusest.

b) *Maatriksi mõõtmed ülesandes, milles arvestatakse ka transpordikulusid.*

Põllumajandussaaduste tootmise paigutuse kohta lahendatavate ülesannete suurus, milles arvestatakse ka transpordikulusid, oleneb mitte ainult tootmisharude üldisest arvust tsoonis, vaid ka nende tootmisharude arvust, millede puhul transpordikulusid arvesse võetakse.

Seda tüüpi ülesannete suurus, s. o. võrrandite üldarv m ja tundmatute üldarv n leitakse järgmiste valemitega:

$$m = pr + l + 2l'r;$$
$$n = lr + m + r(l')^2,$$

kus p — eri liiki tootmisressursside arv;
l — tootmisharude arv;
r — tsoonide arv;
l' — tootmisharude arv, millede puhul arvestatakse transpordikulusid.

Oletagem näiteks, et tegeldakse põllumajandussaaduste tootmise paigutuse optimaalse plaani koostamisega Vene NFSV 10 majanduspiirkonna kohta. Seejuures on võetud vaatluse alla 20 iseseisvat tootmisharu ja kultuuri ning igas tsoonis arvestatakse 10 eri liiki tootmisressursse. Transpordikulusid arvestatakse viie tootmisharu puhul. Nii on meie näites $l=20$, $p=10$, $r=10$ ja $l'=5$. Sel juhul on ülesande mõõtmed järgmised:

$m=pr+l+2l'r=10\cdot10+20+2\cdot10\cdot5=220$ võrrandit;
$n=lr+m+r(l')^2=20\cdot10+220+10\cdot(5)^2=670$ tundmatut.
Maatriksis on järelikult $670\cdot220=147\,400$ elementi.

KAPITAALMAHUTUSTE OPTIMAALSE PAIGUTUSE PROBLEEM PÕLLUMAJANDUSES

Tootmise paigutuse optimaalset varianti ei saa leida, ilma et arvestataks ka kapitaalmahutuste paigutamise plaani. Teisest küljest vaadatuna ei saa aga leida ka kapitaalmahutuste paigutamise optimaalset plaani, ilma et ülesande lahendamisel ei arvestataks tootmise paigutamise optimaalse plaani leidmise ülesande lahendamisel saadud tulemusi. Sellise ülesande lahendamisel vaadeldakse kapitaalmahutusi ühe tootmisressursina. Tootmisressursid esinevad kõigis tsoonides mistahes tootmisharu arengu kitsendustena.

Erinevalt külvipinnast, olemasolevast tööjõust jms. pole kapitaalmahutused kui tootmisressursside eri liik tsoonide vahel objektiivselt jaotatud. Kõigis tsoonides üldse tehtavate kapitaalmahutuste summa võetakse ülesandesse teada oleva suurusena. See summa tuleb tsoonide vahel parimal võimalikul viisil ära jaotada. Kui kapitaalmahutuste summa võetakse ülesandesse tundmatu suurusena, siis määratakse ühtaegu kindlaks ka kõigi tsoonide ja tootmisharude kapitaalmahutuste vajadus. Ülesanne koostatakse seejuures nõnda, et selle lahendamisel saadaks kapitaalmahutuste optimaalne paigutusvariant.

Tootmisressursside ühe liigina erinevad kapitaalmahutused oluliselt sellistest ressurssidest, nagu maa, töö jms. Kapitaalmahutused tõstavad maa ja tööjõuvarude kasutamise tõhusust. See tähendab, et kui võtta eespool käsitletud tootmise paigutuse ülesandesse samaaegselt ka kapitaalmahutuste optimaalset paigutust nõudev tingimus, siis muutuvad muutuvsuurusteks kordajad a_{ij}, mida siiani käsitasime püsivate suurustena. Tekib olukord, kus lineaarsed võrrandid muutuvad mittelineaarseteks. Et säilitada ülesande tingimusi väljendavaid võrrandeid lineaarsetena, võetakse kapitaalmahutused kui eri liik tootmisressursse ülesandesse teisiti kui teised ressursid. Vaatleme seda lihtsa näite varal.

Olgu vaja leida kahe tootmisharu — teraviljakasvatuse ja kartulikasvatuse — optimaalne kombinatsioon. Nende tootmisharude arendamiseks on kasutada järgmised ressursid: 10 000 hektarit maad ja 21 000 inimpäeva. Teravilja saagikus on 20 ja kartuli saagikus 100 ts hektarilt. Tööjõudu kulub ühe tsentneri teravilja peale 0,1 ja ühe tsentneri kartuli peale 0,12 inimpäeva. Neil andmeil koostame kahest kahe tundmatuga võrratusest koosneva süsteemi. Lepime eelnevalt kokku, et tähistame teravilja kogutoodangu tähega x_1 ja kartuli kogutoodangu x_2.

$$0{,}05x_1+0{,}01x_2 \leqslant 10\,000$$
$$0{,}1\;x_1+0{,}12x_2 \leqslant 21\,000$$

Peale selle on teada, et tööde mehhaniseerimise taset majandis võib tõsta uute masinate ostu, s. o. kapitaalmahutuste tegemise teel. Oletagem, et vajalik kapitaalmahutuste summa on mõlema tootmisharu kohta kokku 40 000 rbl. Selle tagajärjel tõuseb tööviljakus ja väheneb töökulu toodanguühiku kohta. Teiste sõnadega — tekib võimalus valmistada samade tööjõuressurssidega rohkem toodangut. Antud juhul on kapitaalmahutused nagu tööjõuressursside suurendamise täiendavaks allikaks, sest toodanguühiku valmistamiseks vajaliku tööjõu vähenemist võib tinglikult vaadelda ka tööjõuvarude suurenemisena. Selgitame seda näitega.

Olgu $ax=b$, kus a on tööjõu kulunorm ühe toodanguühiku kohta, x on toodangu kogus ja b on tööjõuvaru. Eeldagem veel, et mehhaniseerimise paranemisega väheneb tööjõukulu kaks korda, see tähendab, et meie esialgne võrrand omandab nüüd kuju

$$\frac{a}{2} \cdot x = b$$

ehk $ax = 2b$.

Niisiis selgub, et ühe toodanguühiku valmistamiseks vajaliku tööjõu kulunormi vähenemine kaks korda on põhimõtteliselt samaväärne tööjõuvarude kahekordse suurenemisega.

Pöördume nüüd tagasi eespool koostatud võrratusesüsteemi vaatlemisele. Olemasolevaid tööjõuvarusid ja nende kasutamist väljendab meie näites võrratus

$$0{,}1x_1 + 0{,}12x_2 \leqslant 21\,000.$$

Tööjõu kulunormid on 0,1 ja 0,12. Need arvud on antud juhul tundmatute kordajateks. Nende muutmine, s. t. muutuvsuurusteks ümberkujundamine on ülesande lahendamisel küllaltki keeruline. Niisuguse tehte sooritamine tähendaks lineaarsete võrratuste (resp. võrrandite) mittelineaarseteks muutmist, mis on iseendastki mõista ebasoovitav.

Teisiti on lugu arvuga 21 000, s. o. vabaliikmega. Ressursside hulga, s. t. vabaliikme muutmisega oleme ülesannete lahendamisel juba korduvalt kokku puutunud. Kasutasime seda võtet näiteks söödavarude suuruse leidmisel. Nagu teada, täiendatakse söödavarusid sööda-, ent tihtipeale ka teiste kultuuride saakidest. Söötade hulga suurenedes avarduvad ka loomakasvatussaaduste tootmise laiendamise võimalused.

Analoogilist pilti pakuvad ka kapitaalmahutused. Esiteks võimaldavad nad suurendada tootmisressursse (tööjõuvarusid), teiseks laienevad seetõttu toodangu suurendamise võimalused. Üksikutes tootmisharudes tehtavad kapitaalmahutused tuleb võtta ülesandesse nähtavasti nii, et nad võiksid ülesande lahendamise käigus täita oma funktsioone, s. o. mõjustada ülesande tulemusi kõrvuti teiste tootmisharudega, nagu eriline majandusliku tegevuse ala; teiselt poolt peavad kapitaalmahutused esinema kitsendustena.

Et võrratuste süsteemi võtta tingimused, mis iseloomustavad kapitaalmahutuste poolt optimaalsele plaanile avaldatavat mõju, tuleb leida kapitaalmahutuste efektiivsuse koefitsient a_{ij}.

Selle koefitsiendi leidmist kirjeldame allpool. Siin oletagem, et kapitaalmahutuste iga 100 rbl., mis on paigutatud teraviljakasvatusse, võimaldab hoida kokku 4 inimpäeva ja sama summa mahutamine kartulikasvatusse säästab 6 inimpäeva. Tähistame teraviljakasvatusse tehtavad kapitaalmahutused tähega x_3 ja kartulikasvatusse paigutatavad x_4.

Lõppeks tuleb teravilja- ja kartulikasvatusse paigutatud kapitaalmahutused seostada nende kultuuride külvipinnaga. Asi on nimelt selles, et mingi tegeliku mehhaniseerimistaseme, samuti nagu mingi teatava efektiivsuse taseme puhul on ühe hektari kohta tehtaval kapitaalmahutuste summal teatud maksimumpiir. Oletagem, et teraviljakasvatuses on selleks piiriks 10 rbl., kartulikasvatuses 100 rbl. hektari kohta. Kui mõista kapitaalmahutusi mehhaniseerimiskuludena, siis on selleks piiriks masinate maksumus, mis on vaja soetada antud kultuuri viljelemise täielikuks mehhaniseerimiseks. Niisiis võime ülesande tingimused kirjutada üles järgmise võrratuste süsteemina:

$$
\begin{aligned}
0{,}05x_1 + 0{,}01x_2 &\leqslant 10\,000 \\
0{,}1x_1 + 0{,}12x_2 - 4x_3 - 6x_4 &\leqslant 21\,000 \\
-0{,}05x_1 + 10x_3 &\leqslant 0 \\
-0{,}01x_2 + x_4 &\leqslant 0 \\
100x_3 + 100x_4 &\leqslant 40\,000.
\end{aligned}
$$

Olgu optimaalsuskriteeriumiks kogutoodangu maksimaalne maksumus. Toodete hinnad on: teraviljal 4 rbl. ja kartulil 3 rbl. tsentner. Järelikult tuleb antud juhul leida lineaarfunktsiooni

$$C = 4x_1 + 3x_2$$

maksimum.

Teisendame võrratused võrranditeks ja lahendame ülesande lihtsustatud simplekstabelites (lk. 143—144).

Vaatleme saadud lahendivariante. Esimeses variandis ehk esimeses tabelis kujutab veerg x_3 endast teraviljatootmisse paigutatud kapitaalmahutusi iseloomustavat vektorit. Ka rida x_7 iseloomustab teraviljatoodangu suurendamiseks tehtud kapitaalmahutusi. Veeru x_3 ja rea x_7 ristumiskohal olev kordaja (10,0) seostab selle rea antud tingimustel kapitaalmahutuste maksimumsummaga ühe teraviljahektari kohta, s. o. koefitsiendiga 100 reas x_9 ja veerus x_3. Kordaja (—4) veerus x_3 vihjab sellele, et kapitaalmahutuste iga 100 rubla tagab nelja inimpäeva säästmise.

Põhi-tund-matud	Vaba-liik-med	Kõrvaltundmatud				Lahendi-variant
		x_1	x_2	x_3	x_4	
←x_5	10 000	$\boxed{0,05}$	0,01	0	0	I
x_6	21 000	0,1	0,12	−4	−6	
x_7	0	−0,05	0	10,0	0	
x_8	0	0	−0,01	0	1,0	
x_9	40 000	0	0	100	100	
C	0	−4	−3	0	0	
		x_5	x_2	x_3	x_4	
→x_1	200 000	20	0,2	0	0	II
←x_6	1 000	−2	$\boxed{0,1}$	−4	−6	
x_7	10 000	1	0,01	10,0	0	
x_8	0	0	−0,01	0	1,0	
x_9	40 000	0	0	100	100	
C	800 000	80	−2,2	0	0	
x_1	198 000	24	−2	8	12	III
→x_2	10 000	−20	10	−40	−60	
x_7	9 900	1,2	−0,1	10,4	0,6	
←x_8	100	−0,2	0,1	−0,4	$\boxed{0,4}$	
x_9	40 000	0	0	100	100	
C	822 000	36	22	−88	−132	
		x_5	x_6	x_3	x_8	
x_1	195 000	30	−5	20	−30	IV
x_2	25 000	−50	25	−100	150	
x_7	9 750	1,5	−0,25	11,0	−1,5	
→x_4	250	−0,5	0,25	−1,00	2,5	
←x_9	15 000	50	−25	$\boxed{200}$	−250	
C	855 000	−30	55	−220	330	

Põhi-tund-matud	Vaba-liik-med	Kõrvaltundmatud				Lahendi-variant
		x_5	x_6	x_9	x_8	
x_1	193 500	25	−2,5	−0,1	−5	V
x_2	32 500	−25	12,5	0,5	25	
x_7	8 925	−1,25	1,125	−0,055	12,25	
x_4	325	−0,25	0,125	0,005	1,25	
$\rightarrow x_3$	75	0,25	−0,125	0,005	−1,25	
C	871 500	25	27,5	1,1	55	

Arusaadavalt oleks võimalik veerus x_3 kõiki kordajaid esitada mitte 1 hektari, vaid ühe tsentneri teravilja kohta arvutatuna. Selleks tuleks nimetatud kordajad jagada teravilja saagikusega (s. o. kahekümnega).

Kordaja (−0,05) real x_7 väljendab suhet külvipinna ja saagikuse vahel. Veeru x_3 ja rea x_7 kohta öeldu kehtib täiel määral ka veeru x_4 ja rea x_8 kohta, mis iseloomustavad kartulitoodangu olenevust täiendavalt tehtavatest kapitaalmahutustest.

Teises ja kolmandas variandis otsitakse optimaalset plaani, ilma et kapitaalmahutusi oleks veel tegelikult tehtud.

Tulemusena on saadud kolmandas variandis plaan, mille kohaselt tuleks toota 198 000 ts teravilja ja 10 000 ts kartulit. Seejuures kasutataks täielikult ära nii põllupind kui ka tööjõuvarud. Kogutoodangu maksumus oleks sel juhul 822 000 rbl. Kui kapitaalmahutuste mõju ei tuleks arvestada, siis võiks ülesande sellega lahendatuks lugeda.

Võttes aga ülesandesse tingimused, mis iseloomustavad tööjõukulu vähenemist kapitaalmahutuste mõjul, osutub, et kolmaski lahendivariant pole veel lõplik. Suuruse C kordajate väärtused on veergudes x_3 ja x_4 väiksemad kui null.

Jätkame arvutusi. Optimaalse lahenduse saame viienda variandi näol. Võrreldes kolmanda lahendivariandiga tuleb viienda järgi kartulitoodangut 22 500 tsentneri võrra suurendada ja teraviljatoodangut 4500 ts võrra vähendada. Kogutoodangu maksumus suureneb sellega 49 500 rbl. võrra.

Viiendas (optimaalses) lahendivariandis on $x_7=8925$ ja $x_4=325$. Esimene neist suurustest on teravilja külvipind kapitaalmahutusi arvestamata, teine iseloomustab kartulitootmise suurendamiseks vajalike kapitaalmahutuste summat. Ülesande tingimuste kohaselt on kapitaalmahutuste maksimaalsumma ühe hektari kohta 100 rbl. Järelikult võib sellesse tootmisharru planeerida $325 \cdot 100 = 32\,500$ rbl., s. o. enamuse kapitaalmahutustest. See on ka täiesti arusaadav, sest ülesande tingimustest on näha, et kapitaalmahutuste efektiivsus on kartulikasvatuses suurem kui teraviljakasvatuses. Paigutatuna kartulikasvatusse annab sada rubla 6 inimpäeva, teraviljakasvatuses aga 4 inimpäeva säästu.

Tekib küsimus, miks ei kasutata kartulikasvatuses ära kogu kapitaalmahutuste summat? Põhjendus peitub järgmistes asjaoludes. Optimaalsuskriteerium on käesolevas ülesandes maksimaalne kogutoodang. Keskmiselt ühe inimpäevaga valmistatava kogutoodangu hulk on meie näites kummaski tootmisharus erinev. Ülesande tingimuste kohaselt kulutatakse ühe tsentneri teravilja peale 0,1 inimpäeva ja tsentner teravilja maksab 4 rbl. Järelikult saame iga inimpäeva kohta 40 rbl. eest teravilja $(=4:0{,}1)$. Kartulitsentneri peale kulutatakse 0,12 inimpäeva ja tsentner kartuleid maksab 3 rbl. Siin toodetakse igas inimpäevas keskmiselt 25 rbl. eest toodangut $(=3:0{,}12)$.

Iga kartulikasvatusse mahutatud saja rublaga säästab majand 6 inimpäeva, mille samas tootmisharus ärakasutamine võimaldab anda täiendavalt 150 rbl. eest toodangut. Teraviljakasvatusse mahutatud saja rublaga säästab majand 4 inimpäeva ja saab sellega täiendavalt toota 160 rbl. eest teravilja.

Täiendava toodangu saamise seisukohalt osutuvad niisiis teraviljatootmisse paigutatavad kapitaalmahutused tõhusamateks kui kartulikasvatusse paigutatud summad.

Võib-olla oleks otstarbekohane paigutada kõik kapitaalmahutused just teraviljatootmisse? Ka selline lahendus poleks optimaalne. Põhjus on selles, et põllupind on piiratud. Seda pole rohkem kui 10 000 hektarit. Kasutades kõik kapitaalmahutuste summad ära teraviljakasvatuse peale, säästaks majand iga saja rubla kohta 4 inimpäeva, ent samas tootmisharus neid tööjõuvarusid kasutada ei saaks, sest selleks ei piisaks vaba põllupinda. Oleksime sunnitud säästetud tööaja ära kasutama rohkem tööjõudu nõudvas tootmisharus — kartulikasvatuses, kus saaksime täiendavat toodangut iga 4 inimpäeva kohta mitte 160 rbl. nagu teraviljakasvatuses, vaid ainult 100 rbl. eest.

Arusaadavalt on otstarbekam kasutada kapitaalmahutuste summad ära kartulikasvatuse mehhaniseerimiseks, kus saja rubla mahutamisega säästetakse tööaega mitte 4, vaid 6 inimpäeva. Selle tagajärjel saab majand täiendavat toodangut 150 rbl. eest ($25 \cdot 6 = 150$).

Siinjuures on vaja pisut täpsemalt peatuda veel sellel, miks kapitaalmahutuste tegemise tulemusena teraviljakasvatuses säästetud tööaega ei saa ära kasutada samas tootmisharus. Meenutagem, et ülesande tingimuste kohaselt kulutati teraviljahektari harimiseks 2 inimpäeva ja kartulihektari peale 12 inimpäeva. Kui toodetaks ainult teravilja, siis võiks ka tööjõudu üldse säästmata külvata kogu põllupinna teravilja alla ja 1000 inimpäeva jääks veel tööaega tagavaraks, mida võiks kasutada teistes tootmisharudes. See tähendab, et juba ülesande seades sisaldub tingimus, mis ei luba majandil teraviljatootmises saadud tööajasääste samas tootmisharus ära kasutada.

Teisiti on lugu kartulikasvatusega. Siin kulutatakse keskmiselt 12 inimpäeva hektarile. Kui täiendavaid kapitaalmahutusi mitte arvestada, ei saaks kartuli alla võtta rohkem kui 1750 hektarit ($21\,000 : 12 = 1750$). Sel juhul jääb 8250 hektarit põllupinda vabaks. Täiendavad kapitaalmahutused, mille arvel säästetakse tööaega, võimaldavad neid säästetud inimpäevi ka samas tootmisharus ära kasutada.

Ent ka kartuli kasvupinna laiendamisel on antud tingimustes oma piirid. Üht neist, mis piiras kartuli kasvatamist 1750 hektariga, on juba käsitletud. Teiseks piiriks on kapitaalmahutuste summa (40 000 rbl.). Iga kartulikasvatusse mahutatud 100 rbl. tagab 6 inimpäeva suuruse tööaja säästu. Kui mahutada sellesse 40 000 rbl., säästetakse järelikult $\frac{40\,000 \cdot 6}{100} = 2400$ inimpäeva. Kasutades need võimalused ära ainult kartulikasvatuses, võiks kartuli külvipinda suurendada 200 hektari võrra ($2400 : 12 = 200$). Nii võiks kartuli üldist kasvupinda tänu kapitaalmahutustele suurendada kuni 1950 hektarini ($1750 + 200$). 1950 hektarit — see ongi kartuli viljelusala teine piir antud tingimustes.

Edasi võib oletada, et kapitaalmahutuste summa kujuneb tunduvalt suuremaks (näiteks laenu arvel). Olgu see summa kuitahes suur, kartuli külvipinna suurenemise põhilise kitsendusena esinevad siis jällegi tööjõuvarud.

Asi on nimelt selles, et maksimaalne kapitaalmahutuste summa ühe hektari kohta on 100 rbl. Selle summa korral on tagatud tööaja säästmine 6 inimpäeva. Tööjõukulu ühele kartulihektarile, sääst maha arvatud, on 6 inimpäeva (12—6). Kartuli kasvupinda võib suurendada kuni 3500 hektarini (=21 000 : 6). See on kartuli kasvupinna suurendamise kolmas piir.

Neljandaks piiriks on lõppeks külvipinna suurus. Et kogu põllupind kartuli alla võtta, selleks oleks tarvis kas tööjõuvarusid mitu korda suurendada või eeldada, et tootmise tehnoloogias tehakse niivõrd põhjalikke uuendusi, et tööjõukulu alaneks 2,1 inimpäevani hektari kohta (=21 000 : 10 000).

Pöördume nüüd taas eespool leitud optimaalse lahendivariandi (V variandi) juurde.

Optimaalse plaani kohaselt tuleb toota teravilja 193 500 ts ($x_1=193\,500$) ja kartulit 32 500 ts ($x_2=32\,500$).

Üldine külvipind on

teraviljal	193 500 : 20 = 9675 ha;
kartulil	32 500 : 100 = 325 ha;
Kokku	10 000 ha.

Vaatleme, kuidas selle plaani realiseerimine on tagatud tööjõuga. Ülesande tingimustes, kus polnud arvestatud mehhaniseerimistaseme tõusu, olid tööajanormideks ühe tsentneri teravilja kohta 0,1 ja ühe tsentneri kartuli kohta 0,12 inimpäeva. Järelikult on selleks, et toota ülaltoodud kogus põllumajandussaadusi, vaja kulutada tööaega

teravilja tootmisele	193 500 · 0,1 = 19 350 inimpäeva;
kartuli tootmisele	32 500 · 0,12 = 3 900 inimpäeva;
Kokku	23 250 inimpäeva.

Seejuures on ülesande tingimuste kohaselt neis tootmisharudes kasutada 21 000 inimpäeva. Täiendav 2250 inimpäeva suurune tööajavaru (=23 250 — 21 000) pole midagi muud kui kapitaalmahutuste arvel saadud tööajasääst.

Arvutame, kui suur see sääst on. Optimaalse plaani kohaselt jaotus kapitaalmahutuste üldsumma järgmiselt:

teraviljakasvatusse	7 500 ($x_3 = 75$)	rbl.;
kartulikasvatusse	32 500 ($x_4 = 325$)	rbl.;
Kokku	40 000 rbl.	

Ülesande tingimuste kohaselt tagab 100 rbl. kapitaalmahutusi teraviljakasvatuses tööajasäästuna keskmiselt 4 ja kartulikasvatuses 6 inimpäeva. Järelikult säästetakse ühtekokku

teravilja kasvatamisel	$75 \cdot 4 = 300$	inimpäeva;
kartuli kasvatamisel	$325 \cdot 6 = 1\,950$	inimpäeva;
Kokku	2 250	inimpäeva.

Niisiis selgub, et kapitaalmahutuste tagajärjel oleksid tööaja varud nagu kasvanud 250 inimpäeva võrra. Tegelikult tööjõuvarud muidugi ei kasvanud, vaid vähenes toodanguühiku kohta kulutatav ajanorm. Võime arvutada välja ka selle, kui palju esialgsed kulunormid kummaski tootmisharus vähenesid.

Teraviljatootmises säästeti 300 inimpäeva. Järelikult on tegelik töökulu teraviljatootmisel optimaalse plaani järgi $19\,350 - 300 = 19\,050$ inimpäeva. Siit selgub, et ühe teraviljatsentneri kohta kulutatakse tööaega $19\,050 : 193\,500 = 0{,}0984$, mitte aga 0,1 inimpäeva.

Kartulikasvatuses on üldine töökulu analoogiliselt $3900 - 1950 = 1950$ inimpäeva. Ühe tsentneri kartuli peale kulutati $1950 : 32\,400 = 0{,}06$, mitte aga 0,12 inimpäeva. See tähendab, et kartulikasvatuses on tööviljakus kapitaalmahutuste tõttu tõusnud kahekordseks. Samasugune suhe selgub ka ülesande tingimustest.

Optimaalses plaanis on lõppeks $x_7 = 8925$. See arv vastab nende teraviljade külvipinnale, mida haritakse (tinglikult) justnagu ilma täiendavate kapitaalmahutusteta. Suuruse x_3 väärtus näitab esiteks teraviljakasvatusse paigutatud kapitaalmahutuste üldist summat. Sealjuures on see summa väljendatud sadades rublades, sest kapitaalmahutuste ühikuks võtsime eespool 100 rbl. Teiselt poolt näitab suurus x_3, kui suurt teraviljakultuuride külvipinda võib kapitaalmahutuste maksimumsumma tagada. Ülesande tingimuste kohaselt on kapitaalmahutuste ühik (100 rbl.) maksimaalsummaks 10 ha teravilja kohta. Järelikult $x_3 = 750$ tähendab, et plaanis on teraviljakasvatuses ära kasutada kapitaalmahutusi 7500 rbl. ja et see summma võimaldab kompleksselt mehhaniseerida teraviljakasvatuse 750 hektaril. Teraviljakultuuride all olev üldpindala on 8925+750=9675 ha.

Lõpuks paar sõna otsitava suuruse C muutumisest.

Kolmandas lahendivariandis on C=822 000. See on kogutoodangu maksumus, mis oleks saadud ilma kapitaalmahutusteta. 40 000 rubla kasutamine kapitaalmahutusteks võimaldas tõsta maaviljeluse intensiivsust ning suurendada kartuli kasvupinda. Selle tagajärjel kasvas kogutoodangu maksumus 871 500 rublani, s. o. 49 500 rbl. võrra. Antud juhul tasuvad kapitaalmahutused ennast täielikult ära vähem kui ühe aastaga. Ent siin me ei käsitle kapitaalmahutuste tasuvusaega. Meid huvitab, miks ka kogutoodang kasvas antud juhul just nimelt 49 500 rbl. võrra.

Ülalpool on juba öeldud, et ülesande tingimuste kohaselt saadakse teraviljakasvatuses inimpäeva kohta 40 rbl. eest ja kartulikasvatuses 25 rbl. eest toodangut. Tänu kapitaalmahutustele säästeti 2250 inimpäeva, millest 300 inimpäeva kasutati ära teraviljakasvatuses ja 1950 inimpäeva kartulikasvatuses. Eespool toodud normide kohaselt saadakse säästetud tööaja arvel toodangut järgmise summa eest:

teravilja	300 · 40 = 12 000 rbl.;
kartuleid	1950 · 25 = 48 750 rbl.;
Kokku	60 750 rbl.

Täiendavat toodangut saadi siiski ainult 49 500 rbl. eest. Vahe 11 250 rbl. kujuneb tööajavarude ümberjaotumise tõttu tootmisharude vahel. Pöördume taas tagasi kolmanda plaanivariandi juurde, kus kogutoodangu maksumuseks oli ette nähtud 822 000 rbl. Selle variandi kohaselt nähti ette toota kartuleid ainult 10 000 ts ja kulutada sellele kultuurile 1200 inimpäeva (10 000 · 0,12).

Viienda (optimaalse) lahendivariandi järgi oli kartuli tootmiseks ette nähtud kulutada 1950 inimpäeva (32 500 · · 0,06). Siin on selle tõttu, et kapitaalmahutuste mõjul töökulu tsentneri kohta 2 korda vähenes, kartuli kasvupind rohkem kui 3 korda suurenenud ja üldine tööajakulu kartulikasvatuses 750 inimpäeva võrra kasvanud.

Et aga meie ülesandes kapitaalmahutuste efektiivsus avaldub üldiste tööjõuressursside suurenemise kujul, siis jääb toodangu väljalase keskmiselt ühe inimpäeva kohta muutumatuks, olles teraviljatootmises 40 rbl. ja kartulikasvatuses 25 rbl. Ühe inimpäeva kasutamine kartulikasvatuses, selle asemel et kasutada see ära teraviljakasvatuses, põhjustab kogutoodangu vähenemist 15 rbl. eest. See ongi moodustanud otsitava vahe — 11 250 rbl. ($750 \cdot 15 = 11\,250$ rbl.). Lõpptulemusena on kogutoodang kapitaalmahutuste suurenemise tõttu kasvanud $60\,750 - 11\,250 = 49\,500$ rbl. võrra.

Käsitlesime üksikasjalikult, kuidas võtta ülesandesse kapitaalmahutuste optimaalset jaotamist tagavaid tingimusi ning arvestada nende mõju tööajanormidele. Arusaadavalt avaldavad kapitaalmahutused mõju ka paljudele teistele normatiividele, kõigepealt aga toodangu omahinnale, samuti põllumajanduskultuuride saagikusele ja loomade produktiivsusele.

Kapitaalmahutusi endid võib vaadelda esiteks kui masinate ostmiseks, ehituste püstitamiseks, kuivendustööde tegemiseks jms. ettenähtud spetsiaalsummasid, teiseks aga ka kui tootmisvahendite täiendamiseks soetatavaid naturaalseid esemeid, näit. traktoreid, kombaine või muid masinaid.

Lõpuks vaatlesime, kuidas kapitaalmahutusi optimaalselt jaotada ühe majandi kahe tootmisharu vahel. Kirjeldatud metoodika jääb põhimõtteliselt samaks ka siis, kui kapitaalmahutusi jaotatakse majandite (tsoonide) spetsialiseerimise plaani koostamise, samuti põllumajandussaaduste tootmise paigutuse plaani koostamise ülesandes suure hulga tootmisharude vahel.

Peatume veel põllumajandussaaduste tootmise spetsialiseerimise ja paigutuse planeerimise matemaatilistel mudelitel, milles on arvestatud ka kapitaalmahutuste efektiivsust. Kapitaalmahutusi iseloomustavate tingimuste ülesandesse lülitamine muudab selle täielikumaks ja ühtlasi keerulisemaks. Et kergendada ülesandesse võetud täienduste mõistmist, vaatleme neid kõigepealt ühenduses spetsialiseerimisülesandega, mille mudel on kõige lihtsam. I peatükis käsitletud spetsialiseerimise optimaalse planeerimise ülesande matemaatiline mudel on järgmine.

Leida avaldise

$$C = \sum_{j=1}^{l} c_j x_j$$

maksimum tingimustel, et

1) $\sum\limits_{j=1} a_{ij}x_j \leqslant b_i$;

2) $\sum\limits_{=l'+1}^{l} a_{hj}x_j - \sum\limits_{j=1}^{l'} v_{hj}x_j \leqslant D_h$;

3) $x_j \geqslant 0$.

Kapitaalmahutuste efektiivsust iseloomustavate tingimuste ülesandesse võtmine on seotud uute sümbolite rakendamisega:

a_{pj} — p-ndat liiki kapitaalmahutuste piirnorm j-inda tootmisharu või ühelaadsete tootmisharude rühma toodangu ühe ühiku kohta;

b_{ij}^{p} — p-ndat liiki kapitaalmahutuste efektiivsus, mida väljendab i-ndat liiki ressursside säästunorm j-inda tootmisharu toodanguühiku kohta;

x_{pj} — p-ndat liiki kapitaalmahutuste summa j-indas tootmisharus;

B — kapitaalmahutuste üldsumma.

Kapitaalmahutusi arvestav mudel on lõplikul kujul järgmine. Leida avaldise

$$C = \sum_{j=1}^{l} c_j x_j + \sum_{j=l+1}^{2l} \sum_{p=1}^{q} c_{pj}x_{pj}$$

maksimum tingimustel, et

1) $\sum\limits_{j=1}^{l} a_{ij}x_j - \sum\limits_{j=l+1}^{2l} \sum\limits_{p=1}^{q} b_{ij}^{p} x_{pj} \leqslant b_i$;

2) $\sum\limits_{j=l'+1}^{l} a_{hj}x_j - \sum\limits_{j=1}^{l'} v_{hj}x_j \leqslant D_h$;

3) $a_{pj}x_{pj} - a_{ij}x_j \leqslant 0$;

4) $\sum\limits_{j=l+1}^{2l} \sum\limits_{p=1}^{q} \leqslant B$;

5) $x_j \geqslant 0$.

Mudelile tuleks lisada kaks selgitust. Kapitaalmahutusi võidakse mingis ühes tootmisharus teha mitmeti. Selleks, et suurendada teraviljatoodangut, võib näiteks kas laiendada külvipinda uudismaade tegemise ja sookuivenduse teel või tõsta juba kasutusel olevatel põllupindadel saagikust, harides põldusid ja hooldades külve paremini. Kummalgi juhul kujuneb kapitaalmahutuste efektiivsus erinevaks. Täpselt samuti on kapitaalmahutuste efektiivsus erinev ka tootmisharuti. Peale selle oleneb nende efektiivsus ka sellest, missuguste tootmisressursside arvel säästusid saadakse, kas tööaja, maa, rahasummade või muude sellesarnaste arvel. Seetõttu ongi kapitaalmahutuste efektiivsuse näitajal b_{ij}^{p} kolm indeksit.

Kapitaalmahutuste efektiivsus on eri tootmisharudes põhimõtteliselt erinev. Need erisused on aga kohati väheolulised. Nii on kapitaalmahutuste efektiivsus eri teraviljakultuuride puhul väga vähe erinev. Seepärast võetakse maatriksi mõõtmete vähendamiseks ühesugused kultuurid ja tootmisharud ülesandesse rühmade kaupa. Seetõttu võib mudeli kolmanda võrratusesüsteemi kirjutada kujul

$$a_{pj}x_{pj} - \sum_{j} a_{ij}x_{j} \leqslant 0.$$

Siin on koondatud summamärgi alla ühelaadsete tootmisharude rühmad, mille ulatuses kapitaalmahutuste efektiivsus on ligikaudu ühesugune.

Nagu teada, rajatakse põllumajandussaaduste tootmise paigutuse ülesanne, milles arvestatakse ka kapitaalmahutuste efektiivsust, matemaatilisel kujul spetsialiseerimisülesande mudelile. Seejuures võetakse viimasesse paigutusobjektide arvu iseloomustav parameeter ja nn. seostamisblokki kujutav võrratusesüsteem, mis on ühtaegu nii valmistatava toodangu hulka kui ka sortimenti tagavate kitsenduste süsteem.

Kui transpordikulusid ei arvestata, omandab paigutusmudel järgmise kuju.

Leida avaldise

$$C = \sum_{j=1}^{l} \sum_{k=1}^{r} c_{jk}x_{jk} + \sum_{j=l+1}^{2l} \sum_{p=1}^{q} \sum_{k=1}^{r} c_{pjk}x_{pjk}$$

maksimum (miinimum) tingimustel, et

$$1) \quad \sum_{j=1}^{l} a_{ijk}x_{jk} - \sum_{j=l+1}^{2l} \sum_{p=1}^{q} b_{ijk}x_{pjk} \leqslant b_{ik};$$

$$2) \quad \sum_{j=l'+1}^{l} a_{hjk}x_{jk} - \sum_{j=1}^{l'} v_{hjk}x_{jk} \leqslant D_{hk};$$

3) $a_{pjk}x_{pjk} - a_{ijk}x_{jk} \leqslant 0$;

4) $\sum_{p=1}^{q} \sum_{j=l+1}^{2l} \sum_{k=1}^{r} x_{pjk} \leqslant B$;

5) $\sum_{k=1}^{r} x_{jk} \geqslant Q_j$;

6) $x_{jk} \geqslant 0$.

LÄHTEINFORMATSIOONI ETTEVALMISTAMINE

Nagu teada, oleneb põllumajandussaaduste tootmise õige paigutamine paljudest omavahel seotud majanduslikest ja looduslikest teguritest. Kõige tähtsamad on nende seas: põllumajanduslike kõlvikute pindala, tööjõu ja põllumajandussaadustega varustatus, tootmise intensiivsus, transpordiolud, kliima jms. Olenevalt sellest, kui täpselt ja õigesti kõik põllumajandussaaduste tootmise paigutust mõjustavad tingimused määratletakse ja ülesandesse võetakse, vastavad ka lahendamisel saadud tulemused optimaalsele variandile. Seepärast eeldab käsitletud ülesannete jaoks lähteinformatsiooni ettevalmistamine ökonomistidelt, agronoomidelt, zootehnikutelt ja inseneridelt tõsiseid teaduslikke uuringuid ja ohtralt tehnilisi arvutustöid.

Asudes näiteks koostama ülesannet selle kohta, kuidas plaaniperioodil paigutada põllumajandussaaduste tootmist liiduvabariikide ja suur-majanduspiirkondade läbilõikes, tuleb valmistada ette andmed, mis iseloomustaksid:

1) põhiliste põllumajandussaaduste vajadust nii kogu riigis üldse kui ka üksikutes vabariikides ja majandusrajoonides;

2) kui palju on igas vabariigis (rajoonis) a) põllumajanduslikke kõlvikuid, sealhulgas põllumaad, b) tööjõuvarusid nii kogu aastaks kui ka pingelisemal tööperioodil;

3) tootmiskulude normatiive ja muid näitajaid, nagu a) kõikide põllumajanduskultuuride, samuti looduslike heina- ja karjamaade saagikust, millest oleneb maapinna «kulu» maaviljelustoodangu ühiku kohta, b) tööjõukulu eraldi kõigi maaviljelus- ja loomakasvatussaaduste kohta,

c) toodanguühiku omahind, s. o. tööjõu ja tootmisvahendite kulu toodanguühiku kohta rahalises väljenduses;

4) söödakulu loomakasvatuse toodanguühiku kohta söödarühmade (kore-, haljas-, mahlakad ja kontsentreeritud söödad) ja toiteelementide kaupa;

5) sõnniku tootmisnormid loomaliikide ja -rühmade kaupa ning sõnnikuga väetamise normid kultuuride kaupa;

6) mineraalväetistega väetamise normid kultuuride kaupa;

7) kapitaalmahutuste vajadus ja nende efektiivsuse normid tootmisharude ja kultuuride kaupa.

Nimetatud näitajate ettevalmistamine eeldab, et kasutataks statistika- ja plaaniorganite, samuti teadusliku uurimise instituutide, katsejaamade, sordiaretusjaamade jt. asutuste andmeid.

Peatume lühidalt põhilistel metoodilistel küsimustel, mis tekivad põllumajandussaaduste tootmise paigutuse ülesande koostamiseks plaaniperioodi kohta vajaliku lähteinformatsiooni kogumisel. Aruandeandmete alusel leitavad näitajad tuleb arvutada mitme aasta keskmistena, et eemaldada neist juhuslike tegurite ja tingimuste mõju.

Põllumajanduslike kõlvikute pindala määratakse kindlaks aruandeandmete alusel, võttes arvesse uute maatükkide ülesharimise ja kõlvikute transformeerimise perspektiive. Põllumaa üldpind jaotatakse niisutatavaks ja mitteniisutatavaks. Saagikuse planeerimisel maa erinevates tsoonides (rajoonides) võetakse arvesse igasuguseid andmeid, mis võimaldavad täpsemalt põhjendada seda äärmiselt suure tähtsusega näitajat. Peale tegeliku keskmise saagikuse võetakse kolhoosides ja sovhoosides arvesse eriti saagikust eesrindlikes majandites, sordiaretusjaamades ja katsejaamades. Peale selle võetakse arvesse maaviljeluskultuuri tõusu mõju, eeskätt kasutatavate mineraal- ja orgaaniliste väetiste hulga kasvu, uute viljasortide kasutuselevõttu ja agrotehnika parandamist maaviljeluse kompleksse mehhaniseerimise teel.

Saagikuse ette kindlaksmääramine pole keeruline mitte ainult seetõttu, et ta on mitme muutuja funktsioon, vaid ka seetõttu, et need muutujad on ise üksteisega vastastikku seotud.

Tööaja ja materjalide keskmised kulunormid toodanguühiku kohta arvutatakse välja hoolikalt läbitöötatud tehnoloogiliste kaartide alusel kultuuride ja tootmisharude kaupa eraldi iga üksiku rajooni ja erineva tootmistingimuste kompleksi kohta. Tehnoloogilistel kaartidel on arvestatud ka mõju, mida tootmiskulude vähenemisele avaldavad uued põllumajandusmasinad, tootmise parem organiseerimine ja eesrindlaste kogemuste kasutamine.

Siinkohal tuleb märkida, et tööaja ja materjalide kulu eri toodete valmistamisele peab olema plaaniperioodil otseselt seotud kapitaalmahutustega. Selle seose kuju ülesande tingimusi iseloomustavate võrrandite süsteemis on tutvustatud ühes eespool toodud näites (lk. 142).

Mis puutub normatiivide arvutamise metoodikasse, siis vaatleme seda lähemalt kahe kõige tähtsama näitaja — plaanilise omahinna ja mehhanismide vajaduse — kohta toodavate näidete varal.

TOODANGU PLAANILISE OMAHINNA ARVUTLEMISE METOODIKAST

Toodangu omahind on tähtsaim ettevõtte majanduslikku tegevust iseloomustav näitaja. Omahinda akumuleeruvad kõik toodangu valmistamisega (otseselt või kaudselt) seotud kulud. Rahalise näitajana on omahinnas võimalik summeerida igasuguseid toodangu valmistamise kulusid, samuti liita erinevate toodete valmistamise kulusid ja kõrvutada neid kogutoodangu maksumusega ning arvutada välja toodangu tasuvus (rentaablus).

Nagu teada, võib omahinda jaotada üksikuteks elementideks. Maaviljelustoodangu omahinda kuuluvad järgmised peamised kululiigid: 1) seeme, 2) väetised ja taimekaitsevahendid, 3) palk, 4) põllumajandusmasinate ekspluatatsioonikulud (kütus, jooksev remont, amortisatsioonieraldised), 5) lisakulud. Loomakasvatustoodangu omahinna põhilised elemendid on: 1) söödad, 2) palk, 3) loomakasvatushoonete, seadmete ja veokite ekspluatatsioonikulud, 4) loomade veterinaarse teenindamise kulud, 5) lisakulud.

Vaatleme, kuidas arvutletakse perspektiivseid normatiive omahinna üksikute elementide kohta. Alustame maaviljeluse tootmisharudest.

Kui käsitada maaviljelustoodete omahinda summaarse näitajana, siis oleneb see kahest lähtesuurusest: saagikusest ja külvipinna ühe hektari kohta tulevast kulude summast. Jaotasime kõik kulud viieks elemendiks. Esimene neist on seemnekulu. Põllumajanduskultuuride enamiku puhul kasutatakse seemneviljana ära üks osa nende valmistoodangust. Seejuures võetakse omatoodetud seemnevili tootmiskuludesse omahinnaga. Seepärast jääb toodangu omahind muutumatuks, kui arvata seemnevili kogutoodangust maha ja samal ajal vähendada seemnevilja maksumuse võrra ka kulude summat. Selgitame seda arvnäite varal. Olgu kulude üldsumma ühe nisuhektari kohta 60 rbl., saagikus 20 ts hektarilt ja nisu omahind 3 rbl. tsentner (=60 : 20). Oletagem, et nisu külvisenorm on 2 ts hektarile. Saagikus miinus seemnevili on seega 18 ts hektarilt. Hektari kohta kasutatud seemnevilja maksumus omahinnas on 6 rbl. (=2 · 3). Siit järeldub, et tootmiskulusid langeb hektarile ilma seemneviljakuluta 54 rbl. (=60−6). Ühe tsentneri nisu omahind on järelikult 54 : 18=3 rbl.

Teades saagikust ja külvisenormi, võib seemneviljakulu toodangu omahinna arvutlusest järelikult välja jätta.

Nende kultuuride puhul, mille tootmisel tavaliselt kasutatakse ostetud seemnevilja (näit. mais) või mille seeme pole identne lõpptoodanguga (näit. suhkrupeet), võib kehtivate normide kohaseid seemnevilja hankimise kulusid arvestada eri real kõrvuti muude otseste kuludega.

Teiseks toodangu omahinna elemendiks on mineraal- ja orgaaniliste väetistega väetamise kulud. Väetiste kasutamise tõttu suureneb hektarile langevate kulude summa. Ent tänu saagikuse tõusule alaneb toodangu tsentneri omahind. Seetõttu tuleb väetamise kulud võtta ülesandesse niiviisi, et nad oleksid saagikusega otseselt seotud. Selleks võib kasutada samasugust võtet nagu kapitaalmahutuste kohta käsitletud ülesandes.

Kolmas omahinnaelement on palk. Palgafondi summa oleneb kulutatud tööajast ja ühe tööajaühiku (inimtunni, inimpäeva) eest makstavast palgast. Ajaühiku eest makstava tasunormi määramisel võetakse aluseks varasem tegelik tasu ja selle tõusmise võimalused tulevikus. Mis puutub keskmisse tööajakulusse toodanguühiku kohta, siis on see muutuv suurus. Maaviljeluse tootmisharudes oleneb see saagikusest ja töö mehhaniseerimise astmest. Keskmiselt ühe hektari kohta kulutatava tööaja hulk sõltub peamiselt tööde mehhaniseerimisest. Viimane aga omakorda oleneb kapitaalmahutustest.

Kui mehhaniseerimise tagajärjel saavutatava tööaja säästmisnormid, samuti ühe ajaühiku eest makstava tasu normid on teada, siis pole palka kui omahinna elementi ülesandesse raske lülitada.

Esitame selle kohta näite. Kulutatagu ühe hektari suhkrupeedi kohta keskmiselt 20 inimpäeva. Tööde kompleksne mehhaniseerimine võimaldab neid kulusid vähendada kuni 5 inimpäeva võrra. Inimpäeva eest makstakse baasiperioodil keskmiselt 2 rbl., s. o. 40 rbl. $(=20 \cdot 2)$ hektari kohta. Töötajate kvalifikatsiooni tõusmise, samuti töötasunormide tõusmise tõttu kasvab inimpäeva eest makstav tasu tööde komplekssel mehhaniseerimisel 4 rublani, s. o. suureneb kahekordseks. Et aga tööajakulu väheneb 4 korda, kahaneb ühe hektari kohta tulev palgafond 20 rbl. võrra. Niisiis säästetakse tööde komplekssel mehhaniseerimisel keskmiselt 15 inimpäeva ja 20 rubla (varem palgana välja makstud) hektari kohta. Kui suur osa suhkrupeedi kasvupinnast kompleksselt mehhaniseerida, selle küsimuse lahendus oleneb kapitaalmahutuste summast ja nende jaotamisest.

Neljas tootmiskulude element on põllumajandusmasinate otsesed ekspluatatsioonikulud. See summa oleneb masinate arvust, maksumusest ja tehtud tööde hulgast. Masinate ekspluatatsioonikuludesse kuuluvad kütuse- ja määrdeainete kulud, jooksva remondi kulud ja amortisatsioonisummad. Koos tööde mehhaniseerimise kasvuga võivad need kulud keskmiselt ühe hektari kohta kasvada, ent saagikuse suurenemise tõttu keskmiselt ühe toodangutsentneri kohta nad vähenevad. Samuti tuleb võtta arvesse ka seda, et mehhaniseerimistaseme tõusuga ühenduses kulud (välja arvatud töötasu) külvipinna ühe hektari kohta sugugi mitte alati ei suurene. Tehnika arenedes tööühiku omahind üldiselt alaneb.

Et kõiki neid põllumajandusmasinate ekspluatatsioonikulude muutumise erisusi ülesandes kajastada, tuleb teha kindlaks, kui suured on ekspluatatsioonikulud külvipinna ühe hektari ja toodanguühiku kohta praegu ja missugusteks nad kujunevad pärast tööde kompleksset mehhaniseerimist. Nende suuruste vahe ongi koefitsient b_{ij}^{p}, mis võimaldab masinate soetamiseks tehtavat kapitaalmahutuste summat kultuuride kaupa ära jaotada. Vastava seose võib matemaatiliselt üles kirjutada analoogiliselt tööajakuludega, mille suurus muutub olenevalt kapitaalmahutustest.

Loomakasvatuses on tähtsaimaks kuluelemendiks söödad. Söötasid toodetakse seejuures maaviljeluse tootmisharudes. Maaviljelustoodangu omahind kujuneb välja ülesande lahendamisel. See nn. optimaalne omahind kantakse hiljem üle loomakasvatuse tootmiskuludesse. Loomade söödaratsioonid määratakse samuti kindlaks vastava ülesande lahendamisel. Loomakasvatuses töötavate inimeste palgakulu, samuti ruumide ja seadmete ekspluatatsioonikulud võetakse ülesandesse nagu maaviljeluseski. Mis puutub karja veterinaarse teenindamise kuludesse, siis vastavad normid on küllaltki püsivad.

Lisakulude suurus leitakse aruandeaasta vastavate näitajate põhjal, võttes arvesse omahinna alandamise ülesannet.

PÕLLUMAJANDUSMASINATE VAJADUSE LEIDMINE

Põrmugi vähem tähtis pole ka täiendavalt vaja minevate põllumajandusmasinate hulga leidmine ja nende otstarbekohane jaotamine.

NSV Liidu põllumajandus on moodsate masinatega küllaldaselt varustatud. Kolhoosidele ja sovhoosidele kuulub üle kahe miljoni traktori (täpsemalt 15-hobujõulise tingtraktori), sadu tuhandeid kombaine ja muid koristusmasinaid, miljoneid külvi- ja maaharimismasinaid ning -seadmeid.

Põllumajanduse areneva mehhaniseerimisega kasvab põllumajandusmasinate ärakasutamise astme majanduslik tähtsus. Tööde õigeaegne sooritamine on põllumajanduses eriti tähtis. Külvitööd, külvide hooldamine ja saagi koristamine peavad toimuma kindlaksmääratud ajal ja seejuures väga lühikese aja jooksul. Eri kultuuride viljelemisel kasutatakse seejuures kitsalt spetsialiseeritud külvi- ja koristusmasinaid. Selliseid masinaid kasutatakse aasta jooksul ainult mõned päevad. Siit kasvabki välja masinate optimaalse vajaduse ja parema kasutamise probleem, mis puudutab mitte ainult põllumajanduslikke spetsiaalmasinaid, vaid ka traktoreid.

Traktoreid kasutatakse äärmiselt mitmekesistel töödel alates künnist ja lõpetades veoste transportimisega. Traktorid töötavad nii suvel kui talvel. Ühtlasi on aga traktorite kasutamises veel suuri reserve. Üheks neist on põllumajandusliku tootmise hooajalisuse vähendamine. Peale selle pole töö- ja materjalikulu mitmesuguste tööde sooritamisel eri tsoonides ja eri traktoritega kaugeltki ühesugune. Siit tekib traktorite tsoonide ja tööliikide järgi optimaalse jaotamise probleem. Analoogiline ülesanne kujuneb välja teraviljakombainide ja muude tähtsamate koristus- ja külvimasinate jaotamisel.

Tsoonide, rajoonide ja majandite vahel põllumajandusmasinate optimaalse jaotamise ülesanne tuleb lahendada samaaegselt tootmise paigutuse ja septsialiseerimise ülesandega. Masinate jaotamist juba väljakujunenud spetsialiseerumissuuna järgi ei saa lugeda õigeks. Sel juhul ei võeta arvesse tehnika mõju spetsialiseerimisele. Seejuures on põllumajandusmasinad tähtsamaid tegureid, millest oleneb tootmise areng, selle mastaabid, spetsialiseerimise aste.

Öeldu ei tähenda, et põllumajandusmasinate vajaduse ja parema kasutamise organiseerimise kohta poleks eraldi ülesandeid otstarbekas lahendada. Ent vastavate ülesannete lahendamine annab tõhusamaid tulemusi, kui nad ühendada üheks kompleksülesandeks.

Vajaliku põllumajandusmasinate arvu ja nende eri tööde vahel jaotamise ülesanne kujuneb võrdlemisi suureks. Kui lülitada see väljaarendatud kujul põllumajandussaaduste tootmise paigutuse üldisesse ülesandesse, muutuks viimane ülemäära raskesti lahendatavaks. Seepärast võetakse põllumajandusmasinate kasutamise näitajad tootmise paigutuse ülesandesse kokkusurutumal kujul. Erinevad põllumajandusmasinad liidetakse suuremateks rühmadeks, kuhu võetakse parameetrite ja ülesannete poolest lähedased masinad, näiteks: üldotstarbelised traktorid, rühvelkultuuride harimise traktorid, järelhaagitavad teraviljakombainid, iseliikuvad teraviljakombainid jne.

Tööde üldist hulka võib väljendada kas tingkünnihektarites (ehk nn. pehmekünnihektarites), tingtraktorite traktorvahetustes või tehtud tööde maksumusega (s. o. tehtud töödega rahalises väljenduses).

Põllumajandusmasinate näol olemasolevate üldiste ressursside suurus määratakse kindlaks tegelikult olemasolevate masinate ja kapitaalmahutuste arvel juurdesoetatavate masinate vastavates ühikutes avaldatud arvu alusel. Masinate arv nende liikide ja tsoonide (paigutusobjektide) järgi, mida on otstarbekas juurde soetada, leitakse ülesande lahendamise tulemusena olenevalt kapitaalmahutuste üldsummast ja selle jaotusest optimaalses plaanivariandis.

LISAKITSENDUSED JA OPTIMAALSUS-KRITEERIUMID

Eri käsitelu vajavad lisakitsendused ja sihifunktsioon (funktsionaal). Vaadeldavas ülesandes nimetame lisakitsendusteks võrratusi, mis tõkestavad eri toodete koguseid alt või ülalt.

Kui majandite optimaalse spetsialiseerimise ülesannet lahendatakse tootmisharude ja toodete kaupa ilma lisakitsendusteta, siis tootmise paigutuse ülesande lahendamisel on lisakitsendused vältimatud. Seejuures võib lisakitsendusi selles ülesandes jaotada kahte rühma. Esimese rühma moodustavad kitsendused, milles väljendub eri toodete vajalik (üldine) hulk, mida ei jaotata tsoonide kaupa. Need kitsendused etendavad ülesandes kahesugust osa. Nad tagavad, et väljalaskeplaani võetakse tooteid kindlas sortimendis ja koguses. Peale selle seovad need kitsendused ühtseks põllumajandussaaduste tootmise optimaalse paigutuse ülesandeks eri ülesandeblokke (ehk osaülesandeid), mis on tegelikult iseseisvad ülesanded üksikute rajoonide optimaalse spetsialiseerimise kohta. Teise rühma moodustavad üksikute eri toodete valmistamist tsoonide kaupa (alt ja ülalt) tõkestavad kitsendused. Need kitsendused pole kohustuslikud. Peale selle pole nad ka üldse soovitatavad, sest nad määravad üksikute tootmisharude paigutuse juba ette kindlaks ning kitsendavad sellega võimalusi leida optimaalset lahendit ülesande lahendamisel elektronarvutil. Kui ülesandes kajastada kõiki tootmistingimusi küllalt täielikult ja täpselt, siis võib arvutuste tulemusena (ka ilma teist liiki lisakitsendusteta) saada põllumajandussaaduste tootmise põhimõtteliselt optimaalse paigutuse plaani.

Põllumajandussaaduste tootmise paigutuse planeerimise probleemi matemaatiliste meetoditega lahendamisel on kõige tähtsamaks küsimuseks optimaalsuskriteerium. Juhul, kui taotletakse seda, et leida optimaalne variant, kus nimelt valmistada teatud kindel hulk toodangut, siis võivad olla loomulikeks ja täiesti rahuldavateks optimaalsuskriteeriumideks: a) tootmiskulude minimaalne summa (rublades) mingi ette kindlaks määratud toodanguhulga valmistamiseks; b) minimaalne tööajakulu (inimpäevades). Põllumajanduse praegusel arenguetapil on aga kõige tähtsam leida lahendus sellele, kuidas toota antud ressurssidest maksimaalne kogus toodangut. Maksimumi leidmist eeldava ülesande lahendamisel võivad olla rahuldavateks kriteeriumideks: a) kogutoodangu maksimaalne maksumus võrreldavates hindades ja b) maksimaalne puhastoodang.

Puhastoodangu võtmisel sihifunktsiooni on oluline tähtsus. Sel juhul määratakse kindlaks mitte lihtsalt maksimaalne toodangu maksumus, vaid ühtlasi ka antud tingimustes kõige tulusamate toodete maksimaalne kogus.

Loetlesime mitu võimalikku kriteeriumi seetõttu, et igal neist on oma hüved ja pahed.

*

Suure ülesande lahendamine nõuab palju arvutiaega. Peale selle nõuab palju tööd ka valmis ülesande lahendamiseks ettevalmistamine. Seejuures on iseloomulik, et kogu ülesannete koostamise ja lahendamisega seotud töö peab olema tehtud äärmiselt täpselt. Vigu ei tohi tekkida kusagil, ehkki on tegemist kümnete tuhandete arvudega. Asi on nimelt selles, et koostatav ja lahendatav ülesanne ei ole tavaline arvude tulbastik, ehkki see oma välisilmelt midagi taolist meenutab. Iga ülesanne on omaette keeruline võrrandisüsteem. Iga võrrand on bilanss (kas materiaalne, rahaline või tööajabilanss), kogu ülesanne aga keeruline bilansside süsteem.

Ülesande lahendamisel muutuvad kogu selle bilansside-süsteemi näitajad korduvalt. Muutumatuks jäävad ainult kogu süsteemi üksikliikmete vahelised proportsioonid. Niivõrd tihedad seosed kümnete tuhandete arvude vahel nõuavad maksimaalset tähelepanelikkust ja juveliiri täpsust ülesande lahendamiseks ettevalmistamisel.

Ülesannete lahendamisel saadud tulemusi uuritakse ja analüüsitakse hoolega. Kõigepealt kontrollitakse, kas saadud tulemused vastavad ülesande tingimustele. See toimub otseste arvutustega. Sihifunktsiooni väärtus peab vastama otsitavate tundmatute väärtustele. Peale selle peavad ka kulutatud tootmisressursid vastama igas tootmisharus kulunormide ja kogutoodangu korrutisele. Pärast kontrollimist, kas tulemused vastavad ülesande tingimustele, asutakse lahendi majanduslikule analüüsimisele. Uuritakse lähemalt saadud tulemuste praktilise kasutamise võimalikkust ja otstarbekust. Tulemuste analüüsimine nõuab sellega tegelevatelt ökonomistidelt mitte ainult suurt tähelepanelikkust, vaid ka head ettevalmistust.

Elektronarvutite kaasabil saadud plaan erineb tavaliste meetoditega koostatud plaanist kas suuremal või vähemal määral. Arvuti plaanivariant on seda reaalsem, mida täpsemalt kõik plaanitava objekti tootmisalased iseärasused on matemaatiliselt formuleeritud ja masinasse sisestatud.

V PEATÜKK

JAOTUSMEETOD JA SELLE RAKENDAMINE PÕLLUMAJANDUSE PLANEERIMISEL

Jaotusmeetodi põhiülesandeks on laialt tuntud transpordiülesanne. Nimetuse on vastav ülesandetüüp saanud oma esialgse kasutusala järgi. Esimesed seda liiki ülesanded püstitati ja lahendati veoste transportimisega ühenduses. Analoogiliste ülesannete lahendamine on NSV Liidus praegu küllaltki laialt levinud üksikute linnade, suurte majanduspiirkondade ja kogu riigi mastaabis teostatavate veotööde planeerimisel.

On tehtud arvutusi tsemendi ja söe optimaalse veoskeemi leidmiseks Siberi ja Kaug-Ida raudteedel, samuti söe vedamiseks kogu NSV Liidu territooriumil.

1960. aasta andmetel tehtud arvutused näitasid, et söe veoplaani optimaalne variant oleks võimaldanud saavutada NSV Liidus tol ajal kehtinud tegeliku plaaniga võrreldes suuri sääste (vt. tabel lk. 164) [1].

Veelgi suuremaid sääste annavad matemaatilised meetodid ja elektronarvutid tootmisprotsesside, tootmisvõimsuste kasutamise, tootlike jõudude paigutuse jms. planeerimisel. Mida keerulisem on planeeritav protsess, seda suurem on uute meetodite efektiivsus, kui ülesanded on õigesti koostatud.

Põllumajanduse planeerimisel kasutatakse põllumajandusmasinate vajaduse leidmisel ja nende kasutamise organiseerimisel ning veoste transportimise optimaalsete

---

[1] И. Я. Бирман, Транспортная задача линейного программирования, Москва 1962.

Ülesande lahendamisel seatud eesmärk	Mõõt-ühik	Kulud 1960. aastaks kinnitatud plaani järgi	Kulud optimaalse plaani järgi	Säästt	
				absoluut-arvudes	%
Minimaalne tonnkilomeetrite hulk	milj. tonn-kilom.	201 364	187 665	13 699	6,8
Minimaalne kulude summa (veoste maksumus omahinnas)	tuh. rbl.	744 367	671 419	72 948	9,8
Minimaalne tariifijärgsete veokulude summa	„	602 127	555 763	46 364	7,7

plaanide koostamisel jaotusmeetodit. Mõningate täienduste ja lisanditega saab selle abil lahendada ka kõige keerulisemaid tootmisalaseid probleeme.

TÖÖ OPTIMAALNE JAOTAMINE ERI LIIKI TRAKTORITE VAHEL

Põllumajanduse üha areneva tehniseerimise tõttu on tekkinud vajadus töötada välja ning kolhoosides ja sovhoosides kasutusele võtta põllumajandusmasinate ja traktorite komplekteerimise ning kasutamise moodsamaid meetodeid. Üheks kõige tähtsamaks küsimuseks on tööde jaotamine eri liiki traktorite ja muude masinate vahel. Seda saab lahendada lineaarses planeerimises tuntud jaotusmeetodiga.

Jaotusmeetodiga lahendatavad ülesanded on simpleksmeetodil lahendatavate ülesannete erijuhtum. Tutvume seda liiki ülesannete koostamise ja lahendamise metoodikaga konkreetse näite varal.

Oletagem, et majandis on 18 traktorit ДТ-54, 15 traktorit «Belaruss» ja 6 traktorit ДТ-20. Suvel kasutatakse traktoreid põldude kündmiseks ja harimiseks, rühvelkultuuride hooldamiseks, veo- ja muudel töödel. Seejuures on üht marki traktoreid otstarbekam kasutada üht liiki, teist marki traktoreid teist liiki töödel. Arusaadavalt tuleb traktoreid paigutada tööle nii, et tööde tegemisel tekkivate kulude üldsumma oleks minimaalne.

Esimesel pilgul võib näida, et soovitava tulemuseni võib jõuda ka ilma eriliste arvutusteta, et piisab sellest, kui panna traktorid niiviisi tööle, et kasutada neist igaüht ainult nendel töödel, mida nad teevad hektari kohta keskmiselt odavamalt kui teised traktorimargid.

Tegelikult ei ole asi hoopiski nii lihtne. Esitame selle kohta väikese näite. Olgu tarvis teha kokku 6000 tingkünnihektarit töid, sealhulgas 4000 ha kultiveerimistöid ja 2000 hektarit heinaniitu. Sellest tööst tuleb teha 3000 hektarit traktoritel ДТ-54 ja 3000 hektarit «Belarussidel». Tingkünnihektari omahind on rublades hektari kohta:

	ДТ-54	«Belaruss»
põllu kultiveerimisel	4.50	4.00;
heinaniidul	3.40	3.20.

Omahinna kohta teada olevate andmete alusel näib olevat otstarbekas kasutada traktoreid järgmiselt. Teha traktoritega «Belaruss» 2000 hektarit heina ja kultiveerida 1000 hektarit põldu, traktoreid ДТ-54 kasutada aga ainult kultiveerimiseks. Kulude üldsumma on siis

$$2000 \cdot 3{,}2 + 1000 \cdot 4{,}0 + 3000 \cdot 4{,}5 = 23\,900 \text{ rbl.}$$

Katsume jaotada tööd traktorite vahel ka teisiti. Teeme kogu heina ära traktoritel ДТ-54. Sel juhul on kulude üldsumma

$$2000 \cdot 3{,}4 + 1000 \cdot 4{,}5 + 3000 \cdot 4{,}0 = 23\,300 \text{ rbl.}$$

Teine lahendivariant võimaldab seega kulusid vähendada 600 rbl. võrra ehk 2,5 protsenti.

Arusaadavalt tuleb traktoritele tööülesannete jaotamisel arvestada majandis ka tööde tähtaegu ja paljusid muid tegureid. Siiski tuleb alati taotleda seda, et töid tehtaks minimaalsete töö- ja materjalikuludega. Nimetatud eesmärk on saavutatav sel teel, et leitakse tööjõuressursside ja masinate kasutamise optimaalne varinat. Ülesande saab lahendada jaotusmeetodiga.

Asugem taas meie ülesande juurde. Kahe suvekuu jooksul on tarvis teha ära järgmised tööd:

lihtkultiveerimine	10 000 ha
kündmine	5 000 „
rühvelkultuuride kultiveerimine	2 000 „
heinategu	10 000 „
ühekordne äestamine	20 000 „

Tööde omahind olenevalt kasutatud traktorimargist on järgmine (rbl/ha):

Töö	ДТ-54	«Belaruss»	ДТ-20
Lihtkultiveerimine	1.—	—.90	1.20
Künd	3.20	3.40	—
Rühvelkultuuride kultiveerimine	—	1.—	1.10
Heinategu	—.80	—.70	1.—
Äestamine	—.27	—.25	—.40

Arvutame nüüd kõik need tööd ümber naturaalsetesse tingühikutesse ja leiame ühe tingkünnihektari harimise omahinna eri traktorimarkide ja tööde läbilõikes. Saame järgmised andmed:

Töö	Tingkünnihektari omahind (rbl.) tööde tegemisel traktoritega			Tehtud töid füüsilistes hektarites	Tingkünnihektaritesse ümberarvutamise koefitsient	Tehtud töid tingkünnihektarites
	ДТ-54	«Belaruss»	ДТ-20			
Lihtkultiveerimine	4,50	4,10	5,40	10 000	0,22	2 200
Kündmine	2,70	2,80	—	5 000	1,2	6 000
Rühvelkultuuride kultiveerimine	—	4,00	4,40	2 000	0,25	500
Heinategu	3,50	3,00	4,30	10 000	0,23	2 300
Äestamine	3,40	3,10	5,00	20 000	0,08	1 600
						12 600

Traktori keskmine tootlus on suveperioodil plaani kohaselt traktoril ДТ-54 400, «Belarussil» 300 ja traktoril ДТ-20 150 tingkünnihektarit.

Kogu hooaja jooksul teevad eri marki traktorid töid järgmisel hulgal:

ДТ-54	400 · 18 = 7200	tingkünnihektarit;
«Belaruss»	300 · 15 = 4500	„ ;
ДТ-20	150 · 6 = 900	„ ;
Kokku	12 600	„ .

Nüüd on meil olemas kõik vajalikud andmed, et leida, kuidas töid eri marki traktorite vahel optimaalselt jaotada.

Arvutamine toimub eri tabelites, mis on kujult küllaltki lihtsad. Kirjutame ülesande tingimused järgmisse tabelisse:

Töö	Tingkünnihektari omahind (rbl.)			Tööde hulk (tingkünnihektarites)
	ДТ-54	«Belaruss»	ДТ-20	
I. Lihtkultiveerimine .	4,50	4,10	5,40	2 200
II. Kündmine	2,70	2,80	—	6 000
III. Rühvelkultuuride kultiveerimine . .	—	4,00	4,40	500
IV. Heinategu	3,50	3,00	4,30	2 300
V. Äestamine	3,40	3,10	5,00	1 600
Hooajanorm (tingkünnihektarites)	7 200	4 500	900	12 600

Et asuda töid eri marki traktorite vahel jaotama, jagame kõik tabeli lahtrid[1] kaheks osaks (vt. lk. 169). Lahtri ülaossa kirjutame seejärel hektari omahinna, alaossa aga (nagu murru nimetajasse) tööde hulga tingkünnihektarites.

Antud juhul on teada tehtavate tööde üldhulk tingkünnihektarites nii tööde kui ka traktorimarkide läbilõikes.

[1] Lahtrid on tabeli ridade ja veergude ristumiskohtades asuvad «ruudud». Majandusettevõtete tegelikus töös nimetatakse lahtriteks pahatihti ekslikult veergusid. — *Toimetaja märkus.*

Tööde koguhulk tuleb traktorite vahel niiviisi ära jaotada, et nad kõik kokku tuleksid nii odavad kui võimalik.

Kasutades leheküljel 167 toodud tabeli andmeid, võime ülesandele anda nüüd matemaatilise sõnastuse:

$$
\begin{aligned}
x_{11}+x_{12}+x_{13} &= 2\,200\\
x_{21}+x_{22}+x_{23} &= 6\,000\\
x_{31}+x_{32}+{}_{33} &= 500\\
x_{41}+x_{42}+x_{43} &= 2\,300\\
x_{51}+x_{52}+x_{53} &= 1\,600\\
x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}+x_{51} &= 7\,200\\
x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}+x_{52} &= 4\,500\\
x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}+x_{53} &= 900
\end{aligned}
$$

$$
\begin{gathered}
C=4{,}5x_{11}+4{,}1x_{12}+5{,}4x_{13}+2{,}7x_{21}+2{,}8x_{22}+\\
+4x_{32}+4{,}4x_{33}+3{,}5x_{41}+3x_{42}+4{,}3x_{43}+3{,}4x_{51}+\\
+3{,}1x_{52}+5x_{53}.
\end{gathered}
$$

Leida tuleb suuruse C miinimum.

Esitatud ülesanne vastab kõigile nõuetele, mis esitatakse lineaarse planeerimise meetoditega lahendatavatele ülesannetele. Seda võib lahendada simpleksmeetodil. Et aga ülesande struktuur pole kuigi keeruline, saab teda lahendada ka lihtsamalt, jaotusmeetodil. Kasutades lk. 167 toodud tabelit, koostame kõigepealt esialgse plaani tööde jaotamiseks eri marki traktorite vahel. Esialgne plaan koostatakse nn. diagonaalvõttega.

Reeglit, millel see võte põhineb, nimetatakse tihtilugu ka loodenurga reegliks. Võtte olemus seisab selles, et plaanilised näitajad kirjutatakse tabelisse alates lahtrist, mis asub esimesel real esimeses veerus, s. o. lahtrist, mis asub tabelivälja vasakus ülanurgas, ehk kui vaadata tabelit nagu maakaarti, siis loodenurgas.

Igasse lahtrisse, kuhu üldse plaanilisi näitajaid kirjutatakse, märgitakse maksimaalselt võimalik suurus. Iga selline suurus sõltub ridade ja veergude kokkuvõtetest. Et lähemalt selgitada, kuidas plaani esimene variant koostatakse, tähistame tabeli lahtrid sümboliga k_{ij}, kus i on rea ja j veeru järjekorranumber. Meie näites paigutame tabeli A koostamisel lahtrisse k_{11} arvu 2 200. Sellest suuremat arvu sinna panna ei saa, sest vastava rea summa on samuti 2200, ehkki esimese veeru summa on tunduvalt suurem — 7200.

Pole raske mõista, et pärast lahtri k_{11} täitmist on plaaniliste andmete jaotamine esimeses reas lõpetatud, esimeses veerus on aga veel võrdlemisi suur summa jaotamata (7200—2200=5000). Plaani koostamist jätkates liigume seetõttu edasi lahtri k_{21}, s. o. teise rea esimese lahtri juurde. Lahtrisse k_{21} kirjutame 5000, s. o. kogu esimeses tulbas säilinud jäägi. Teise rea summa (6000) lubab seda. Sellega on lõpetatud plaaniliste suuruste jaotamine esimeses veerus, ja läheme edasi lahtri k_{22}, s. o. teise veeru teise rea juurde. Lahtrisse k_{22} paigutame väärtuse 1000 — teise rea siiani veel jaotamata jäägi (6000—5000=1000) — ja läheme edasi lahtri k_{32} juurde, kuhu märgime 500 jne. Seejärel parandatakse nõnda saadud plaani samm-sammult, kuni jõutakse optimaalse plaanivariandini.

Tabel A

Tööd	ДТ-54	„Belaruss"	ДТ-20	Töid kokku	
I	4,5 / 2200	4,1	5,4	2200	
II	2,7 - / 5000	2,8 / 1000	x / x	6000	1,8
III	x / x	4,0 / 500	4,4	500	0,6
IV	3,5	3,0 / 2300	4,3	2300	1,6
V	3,4	3,1 / 700	5,0 / 900	1600	1,5
Kokku	7200	4500	900	12 600	
	-4,5	-4,6	-6,5		

Liikudes tabeli peadiagonaali pidi ülevalt vasakult paremale alla, jaotasime kõik tööd traktorimarkide vahel ära, milles seisneski esimese plaanivariandi koostamine.

Edasi on vaja:

1) teha kindlaks, kas saadud plaan on optimaalne;
2) parandada seda, kui plaan optimaalne ei ole.

Plaani optimaalsust kontrollitakse nn. nullkorrektuuri võttega. See toimub nii, et ridadesse ja veergudesse märgitud tööde omahindadele (või tööhinnetele) liidetakse sellised arvud, et lahtritesse, kuhu on märgitud tööde üldmaksumused, jääksid summadena nullid. Meie näites (tabelis A) tuleks veergudele liita arvud (—4,5), (—4,6) ja (—6,5); ridadele aga (esimene välja arvatud) 1,8; 0,6 ja 1,5.

Selgitame neid tehteid lähemalt. Tabeli A lahtris, mis asub esimese rea ja esimese veeru ristumiskohas, on tööühiku omahind 4,5 rbl. Lühiduse mõttes tähistame tööde omahindu lahtrites C_{ij}, kus i on rea ja j veeru järjekorranumber. Meie näites on $c_{11}=4{,}5$: $c_{21}=2{,}7$, $c_{22}=2{,}8$ jne.

Ülesande lahendamise metoodika kohaselt tuleb järjekordse tabeli koostamisel lahtrites, kuhu on paigutatud plaaniandmed, muuta suuruse c numbrilised väärtused nullideks. Selleks tuleb vastavad arvud algebraliselt liita suuruse c_i kõigi väärtustega antud real või suuruse c_j kõigi väärtustega antud veerus. Meie näites on $c_{11}=4{,}5$. Et muuta see arv nulliks, tuleb esimeses veerus (või siis esimeses reas) lahutada suuruse c kõigist väärtustest 4,5. Alustame arvutusi esimesest veerust. Lahutanud suurusest c_{11} 4,5, saame $c_{11}=0$. Ühtaegu tuleb lahutada 4,5 ka kõigist teistest suuruse c_{i1} väärtustest.

Tulemusena saame esimesse veergu järgmised tinglikud omahinnad (või hinnad) $c_{11}=0$; $c_{21}=-1{,}8$; c_{31} ei tule arvesse; $c_{41}=-1$; $c_{51}=-1{,}1$.

Kõigist äsja leitud suurustest huvitab meid eelkõige suurus c_{21}. Et selles lahtris on plaaniarv, tuleb järelikult ka c_{21} muuta nulliks. Seda saab teha, kui kõigile teises reas olevatele hinnetele, s. o. suurustele c_{21} liita 1,8, sest $c_{21}=-1{,}8$.

Seejärel asume teise veeru juurde. Ülevalt esimeses lahtris asub selles veerus plaanilise näitajana suurus c_{22}. Pärast seda, kui teise rea tööhinnetele liideti 1,8, muutus c_{22} suuremaks, nii et nüüd $c_{22}=2{,}8+1{,}8=4{,}6$. Järelikult tuleb selleks, et suuruse c_{22} väärtus muutuks nulliks, kõigist teises veerus olevatest c_{i2} väärtustest lahutada 4,6.

Sellises järjekorras leiame liidetavad kõigile veergudele ja ridadele niisuguse arvestusega, et järjekordses uues maatriksis oleks kõigis plaaniandmeid sisaldavates lahtrites c_{ij} väärtuseks null.

Seejärel koostame uue tabeli (tabel B), mille kõigis neis lahtrites, kus tabelis A olid plaaniandmed, on «null-omahind». Muudes lahtrites on kas positiivsed või negatiivsed «omahinnad» («hinded»).

Tabel B

Tööd	ДТ-54	„Belaruss"	ДТ-20	Töid kokku	
I	0	-0,5	-1,1	2200	
II	0	0	x x	6000	
III	x x	0	-1,5	500	
IV	0,6	0	-0,6	2300	
V	0,4	0	0	1600	
Kokku	7200	4500	900	12600	

Uus tabel sisaldab tööde tinglikke (arvestuslikke) «omahindu», mille mõte seisneb järgmises. Kõigis lahtrites, kus olid plaaniandmed, muutsime omahinna nulliks. Viimasega on hõlpus võrrelda kõiki muid omahinnanäitajaid, et teha kindlaks, kas plaan on optimaalne ja avastada teid plaani parandamiseks. Tabelist B selgub, et esimese veeru neljandas ja viiendas reas on omahinnad positiivsed: 60 ja 40 kop. Kõigis teistes lahtrites, peale nende, mis olid täidetud tabelis A, on negatiivsed omahinnad. Varem arvudega täidetud lahtrites on kõikjal omahinnaks null. Negatiivsed arvud, nagu teada, on nullist väiksemad. Meie eesmärgiks on leida niisugust plaani, mille kohaselt saaks teha töid minimaalsete kuludega. Järelikult pole meie plaani esimene variant (tabelis A) optimaalne, sest seal on lahtreid, kus tööde omahind on alla nulli (tabel B).

Tabelis B sisalduvad negatiivsed omahinnad näitavad peale selle veel, kuidas plaani esimest varianti parandada. Nähtavasti tuleb selleks plaanilised tööd nullomahinnaga lahtritest paigutada ümber lahtritesse, kus on negatiivsed omahinnad. Kui selliseid (s. o. negatiivse omahinnaga) lahtreid on mitu, siis täidetakse kõigepealt see lahter, milles olev omahind on absoluutväärtuselt kõige suurem.

Plaaniliste andmete ümberpaigutamine nullomahinnaga lahtritest negatiivsete omahindadega lahtritesse, s. o. plaani korrigeerimine, toimub järgmiselt. Tabeli B tabeliväljale joonestatakse nelinurkne siirdeahel (ehk ümberpaigutusahel)[1], mille üks tipp peab asuma kindlasti varem väljavalitud negatiivse omahinnaga lahtris, teised aga lahtrites, kus on plaaniandmeid. Seejuures paigutame plaaniandmeid ühest lahtrist teise, liikudes negatiivse omahinnaga lahtrist rida või veergu pidi kaugemale. Seejuures peame kinni sellisest järjekorrast, et võtame esimesest plaaniandmete lahtrist, kus on siirdeahela esimene tipp, osa plaanisummast või isegi kogu summa, mille liidame selles lahtris olevale summale, kus on kolmas tipp. Edasi talitame analoogiliselt: lahtrist, kus on kolmas tipp, lahutame ja lahtrile, kus on neljas tipp, liidame ühe ja sama summa jne.

Tabelisse B joonestame oma näites kaks nelinurkset siirdeahelat. Esimeses (ülemises) paigutame teise veeru esimesse ritta 1000 hektarit. Teises viime 500 hektarit üle kolmanda veeru kolmandale reale. Tulemusena saame tööde jaotamiseks eri marki traktorite vahel uue plaani (vt. tabel B′). Leitud plaani optimaalsust kontrollime nullkorrektuuri teel. Koostame tabeli C ja kui see osutub vajalikuks, joonestame ka sellele siirdeahelad ja paigutame neis plaani parandamise eesmärgil arve ümber. Jätkame seda seni, kuni ilmneb, et koostatud plaan on optimaalne.

Kolmanda lahendivariandi optimaalsuse kontrollimiseks koostame tabeli D.

Ühes lahtris (esimesel veerul viiendal real) on omahind tabelis D negatiivne. Järelikult pole ka plaani kolmas variant optimaalne. Seda saab muuta paremaks, kui vastav hulk töid üle viia viiendasse ritta esimesse veergu.

Neljanda plaanivariandi optimaalsuse kontrollimiseks koostame tabeli E.

---

[1] Tihtipeale kujuneb sellest õige keeruline täisnurkne kujund. Ühele tabeliväljale võib kujuneda ka mitu siirdeahelat.

Tabel B′

Tööd	ДТ-54	„Belaruss"	ДТ-20	Töid kokku	
I	0 nr.1 1200	-0,5 nr.0 1000	-1,1	2200	
II	0 nr.2 6000	0 nr.3	x x	6000	
III	x x	0 nr.1	-1,5 nr.0 500	500	1,0
IV	0,6	0 2300	-0,6	2300	-0,5
V	0,4	0 nr.2 1200	0 nr.3 400	1600	-0,5
Kokku	7200	4500	900	12600	
		0,5	0,5		

Tabel C

Tööd	ДТ-54	„Belaruss"	ДТ-20	Töid kokku	
I	0 1200	0 1000	-0,6	2200	
II	0 6000	0,5	x x	6000	
III	x x	1,5	0 500	500	-0,6
IV	0,1	0 1900	-0,6 400	2300	
V	-0,1	0 1600	0	1600	
Kokku	7200	4500	900	12600	
			0,6		

Tabel D

Tööd	ДТ-54	„Belaruss"	ДТ-20	Töid kokku	
I	0	0 2200	0	2200	
II	0 6000	0,5	x x	6000	-0,1
III	x x	0,9	0 500	500	
IV	0,1	0 1900	0 400	2300	
V	-0,1 1200	0 400	0,6	1600	
Kokku	7200	4500	900	12600	
	0,1				

Tabel E

Tööd	ДТ-54	„Belaruss"	ДТ-20	Töid kokku	
I	0,1	0 2200	0	2200	
II	0 6000	0,4	x x	6000	
III	x x	0,9	0 500	500	
IV	0,2	0 1900	0 400	2300	
V	0 1200	0 400	0,6	1600	
Kokku	7200	4500	900	12600	

Tabelis E enam negatiivseid arve pole. Järelikult on neljas variant optimaalne. Tööd on selles eri marki traktorite vahel jaotatud järgmiselt. Traktorid ДТ-54 künnavad 6000 ha ja äestavad 1200 ha (tingkünnihektarites); traktorid ДТ-20 kultiveerivad rühvelkultuure 500 ha ja niidavad 400 ha heina; kõik ülejäänud tööd tehakse ära «Belarussidega».

Kui tööd niiviisi ära jagada, siis tekib kulusid

$$2200 \cdot 4{,}1 + 6000 \cdot 2{,}7 + 500 \cdot 4{,}4 + 1900 \cdot 3{,}0 + 400 \cdot 4{,}3 + \\ + 1200 \cdot 3{,}4 + 400 \cdot 3{,}1 = 40\,160 \text{ rbl.}$$

Esimese variandi kohaselt oleks kulude summa olnud

$$2200 \cdot 4{,}5 + 5000 \cdot 2{,}7 + 1000 \cdot 2{,}8 + 500 \cdot 4 + \\ + 2300 \cdot 3 + 700 \cdot 3{,}1 + 900 \cdot 5 = 41\,770 \text{ rbl.}$$

Niisiis selgub, et optimaalne variant tagab esialgse plaaniga võrreldes 1610 rbl. suuruse säästu.

Väärib tähelepanu, et ühes lahtris, kus plaaniandmeid ei ole, esineb tabelis E null rubla suurune hind: $c_{13} = 0$. See ütleb antud juhul, et tabelis E saadud plaan pole ainus optimaalne plaan. Siia võib rajada siirdeahela tippudega c_{12}, c_{13}, c_{43} ja c_{42}. Seda ahelat pidi võib seejärel üldiste reeglite kohaselt ümber paigutada mistahes positiivse arvu, mis ei ole suurem kui 400. Tulemusena võime saada suure hulga uusi plaane, mis on kõik optimaalsed. See tähendab, et kõigi nende plaanide puhul on tööde sooritamise üldkulude summad võrdsed.

Jaotusmeetodit saab kasutada mitte ainult miinimum-, vaid ka maksimumülesannete lahendamiseks. Kui näiteks kultuuride külvipinnad ja saagikused on antud, võib nad eri põldudele nii ära jaotada, et saadakse kas maksimaalse suurusega kogutoodang (rahalises väljenduses) või maksimaalne puhastulu. Analoogilise ülesande võib lahendada ühelaadsete kultuuride rühmade, näiteks teraviljade või kõigi söödakultuuride kohta, et saada tsentnerites või söötühikutes mõõdetuna maksimaalse suurusega toodangut.

Maksimumi leidmisel lahendatakse ülesanne samuti nagu miinimumi leidmisel. Erisus seisab üksnes selles, et esialgselt koostatud lahendivarianti parandatakse plaaniarvude üleviimisega tabeli neisse lahtritesse, kus on plussmärgiga hinnad.

Olgu näiteks teada üksikute teraviljakultuuride külvipinnad, erineva mullaviljakusega põldude suurused ja kultuuride saagikused põldude kaupa. Nõutakse, et kultuurid külvataks põldudele nii, et oleks tagatud maksimaalse kogutoodangu saamine. Tabelis A on lahtrite ülaosas andmed saagikuse, alaosas külvipinna suuruse kohta. Veergude kokkuvõtted on põldude pindalad, ridade summad eri kultuuride külvipinnad.

Tabel A

Põllud / Kultuurid	A	B	C	Kokku	
Nisu	20 / 1500	15 / 1500	10 /	3000	
Oder	25 /	16 / 500	12 / 500	1000	-1
Hirss	30 /	12 /	5 / 1200	1200	6
Kokku	1500	2000	1700	5200	
	-20	-15	-11		

Optimaalne variant saadakse tabelisse D. Võrdleme esimest ja neljandat varianti. Esimene annab võimaluse saada 72 500, neljas 91 900 tsentnerit teravilja. Enamsaak on seega 19 400 tsentnerit ehk 26,76%.

Nii võime ütelda, et jaotusmeetodil seisab ülesannete koostamine ja lahendamine järgmises.

1. Plaaniandmed (tööde hulk, veoste hulk, külvipinnad jms.) muudetakse ühismõõtseiks, s. o. sellisteks, et nad oleksid samades mõõtühikutes: tingkünnihektarites, tonnkilomeetrites, hektarites jne.).

2. Koostatakse hindade ja esialgsete plaaniandmete maatriks.

3. Kontrollitakse koostatud plaani optimaalsust. Seda tehakse nullkorrektuuri põhimõttel. Maatriksi ridades ja veergudes olevatele hindadele liidetakse niisugused arvud,

et kõigis lahtrites, kus on plaanilisi andmeid, muutuksid hinnad nullideks. Tulemusena saadakse uus maatriks. Kui uues maatriksis on kõik hinnad, mis pole nullid, ühesuguse märgiga (miinimumi leidmisel pluss-, maksimumi leidmisel miinusmärgiga), siis on plaan optimaalne. Kui hindade lahtrites on erinevate märkidega hindu, siis ei ole plaan optimaalne ja seda tuleb parandada.

4. Plaani parandamine toimub nii, et plaaniandmeid paigutatakse maatriksi null-lahtritest ümber «kasulikumatesse» lahtritesse, s. t. maksimumi leidmise ülesannetes negatiivsete hindadega ja miinimumi leidmise ülesannetes positiivsete hindadega lahtritesse. Kui selliseid lahtreid on mitu, paigutatakse plaaniandmed ümber kõigepealt

Tabel B

	A	B	C	Kokku	
I	0 / 1000	0 / 2000	-1	3000	16
II	4	0	0 / 1000	1000	
III	16 / 500	3	0 / 700	1200	
Kokku	1500	2000	1700	5200	
	-16	-16			

Tabel C

	A	B	C	Kokku	
I	0 / 300	0 / 2000	15 / 700	3000	
II	-12	-16	0 / 1000	1000	15
III	0 / 1200	-13	0	1200	
Kokku	1500	2000	1700	5200	
			-15		

Tabel D

	A	B	C	Kokku	
I	0	0 2000	0 1000	3000	
II	3 300	-1	0 700	1000	
III	0 1200	-13	-15	1200	3
Kokku	1500	2000	1700	5200	
	-3				

neisse lahtritesse, kus olevate hindade absoluutväärtused on kõige suuremad.

5. Plaaniandmeid paigutatakse ühest lahtrist teise niiviisi, et uude hinnamaatriksisse joonestatakse nelinurkne siirdeahel, mille üks tipp on selles lahtris, kuhu plaaniandmeid tuleks teistest ümber paigutada. Ahela teised tipud peavad olema lahtrites, kus juba varem on plaaniandmeid.

Siirdeahelal on alati paarisarv tippe. Ahela tipud nummerdatakse alates tühjast lahtrist, milles olev tipp saab järjekorranumbri null. Seejärel vaadatakse läbi kõik paarituarvulise järjekorranumbriga tipud. Kõige väiksem sellises lahtris olev plaaniline arv paigutatakse ahelat pidi ümber tühja lahtrisse. Tulemusena jääb tühjaks lahter, kus see plaaniline arv oli, väljavalitud uus lahter aga osutub täidetuks.

6. Pärast plaaniliste andmete ümberpaigutamist kirjutatakse kõigi nende lahtrite andmed, mida siirdeahel ei riivanud, uude maatriksisse muutumatul kujul ümber. Tulemusena saadakse uus plaanivariant, mille optimaalsust tuleb kontrollida. Kui plaan ei osutu optimaalseks, tuleb kogu kirjeldatud tsüklit korrata. Nii tehakse senikaua, kuni leitakse optimaalne plaan.

7. Optimaalses plaanis ettenähtud kulude summat või väljalastava toodangu hulka võrreldakse kas esialgse plaaniga või mõne muu plaanivariandiga.

Kirjeldatud ülesannet sõnastatakse matemaatiliselt järgmiselt.

Leida avaldise

$$C=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

miinimum tingimustel, et

1) $\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=b_i$; 3) $\sum_{j=1}^{n} a_j=\sum_{i=1}^{m} b_i$;

2) $\sum_{i=1}^{m} x_{ij}=a_j$; 4) $x_{ij}\geqslant 0$.

Tähistused:

n — eri tööde arv;

m — eri liiki (marki) tootmisvahendite arv;

c_{ij} — i-nda tootmisvahendiga tehtava j-inda töö omahind (ühiku kohta);

x_{ij} — i-ndat liiki tootmisvahenditega tehtava j-indat liiki töö hulk;

a_j — j-inda töö üldine hulk;

b_i — i-ndat liiki ressursside hulk (i-ndat marki traktorite arv).

Jaotusmeetodil lahendatavate ülesannete puhul tuleb kõigi maatriksite koostamisel järgida reeglit, et plaaniandmetega täidetud lahtrite arv, mida tähistatakse tähega k, peab olema võrdne avaldisega $n+m-1$.

Kui maatriksis on näiteks 5 veergu ja 4 rida, siis peab plaaniandmeid sisaldavate lahtrite arv olema $4+5-1=8$. See reegel tagab võimaluse paigutada plaani parandamise iga järjekordse sammu puhul maatriksi lahtritesse siirdeahel plaaniarvude ümberpaigutamiseks.

Kui mõnes plaanivariandis on $k<n+m-1$, tekib siirdeahela tabeliväljale mahutamisel raskusi. On tarvis koostada näiteks selline veoplaan, et veokulude üldsumma oleks minimaalne. Vedude hulk ja veokulud on esitatud järgmises tabelis.

Sihtpunktid / Lähetuspunktid	Veokulud (rbl.) A	B	C	D	Veoste üldhulk lähetuspunktides
I	5	8	3	7	400
II	8	9	8	5	500
III	4	3	7	6	300
Veoste üldhulk sihtpunktides	450	250	200	300	1200

Koostame esialgse veoplaani (tabel A) ja hakkame seda samm-sammult parandama, koostades selleks tabelid B, C, D, E, F, G.

Tabelis C tekkis vajadus rajada selline siirdeahel, mis hõlmaks kolmanda rea ja neljanda veeru. On aga hõlpsalt nähtav, et üldkehtiva reegli kohaselt sellist ahelat rajada ei saa. Sellisel juhul tuleb koostada esialgne plaan teist diagonaali pidi, nagu seda ongi tehtud tabelis D.

Soovitud tulemuse saame tabelis G. Esimese variandi kohaselt oli veokulude summa (tabel D andmeil)

$$4\cdot300+8\cdot150+9\cdot250+8\cdot100+3\cdot100+$$
$$+7\cdot300=7850 \text{ rbl.}$$

Optimaalse variandi kohaselt on kulude summa (tabel G)

$$5\cdot200+3\cdot200+8\cdot200+5\cdot300+4\cdot50+$$
$$+3\cdot250=5650 \text{ rbl.}$$

Säästs on (7850 − 5650 =) 2200 rubla ehk 28,02%.

Tabel A

	A	B	C	D	Kokku	
I	5 / 400	8	3	7	400	
II	8 / 50	9 / 250	8 / 200	5	500	-3
III	4	3	7	6 / 300	300	
Kokku	450	250	200	300	1200	
-	-5	-6	-5	-6		

Kui samasuguseid raskusi, millest eespool juttu oli, tekib ka teist diagonaali pidi esialgset plaani koostades, võetakse kasutusele maatriksi ühe lahtri tingliku täitmise võte. Seda tehakse järgmiselt. Kui tekib vajadus minna ühelt täidetud lahtrilt teisele mitte piki rida või veergu (s. o. mitte mööda sirget, mis teeb lahtrites täisnurkseid pöördeid), vaid mööda diagonaali, siis täidetakse üks

Tabel B

	A	B	C	D	Kokku	
I	0 250	2	-2 200	1	400	
II	0 250	0 250	0	-4	500	
III	-1	-3	2	0 300	300	
Kokku	450	250	200	300	1200	
			2			

Tabel C

	A	B	C	D	Kokku
I	0	2	0	1	400
II	0	0	2	-4	500
III	-1	-3	4	0	300
Kokku	450	250	200	300	1200

Tabel D

	A	B	C	D	Kokku	
I	5	8	3 100	7 300	400	1
II	8 150	9 250	8 100	5	500	-4
III	4 300	3	7	6	300	
Kokku	450	250	200	300	1200	
	-4	-5	-4	-8		

Tabel E

	A	B	C	D	Kokku	
I	2	4	0 / 200	0 / 200	400	-7
II	0 / 400	0	0	-7 / 100	500	
III	0 / 50	-2 / 250	3	-2	300	
Kokku	450	250	200	300	1200	
		2	7	7		

Tabel F

	A	B	C	D	Kokku	
I	-5 / 200	-1	0 / 200	0	400	5
II	0 / 200	2	7	0 / 300	500	
III	0 / 50	0 / 250	10	5	300	
Kokku	450	250	200	300	1200	
			-5			

Tabel G

	A	B	C	D	Kokku	
I	0 / 200	4	0 / 200	5	400	
II	0 / 200	2	2	0 / 300	500	
III	0 / 50	0 / 250	5	5	300	
Kokku	450	250	200	300	1200	

samal real või veerul asuv naaberlahter tingimisi. Sellesse lahtrisse kirjutatakse null. Ridade ja veergude kokkuvõtteid see null ei muuda. Ent järjekordse uue tabeli koostamisel tuleb lugeda see lahter täidetuks. Nagu kõigis teistes plaaniandmeid sisaldavates lahtrites, tuleb ka selles muuta hind nulliks.

JAOTUSMEETODI PUHUL KEHTIVAID TÄIENDAVAID KITSENDUSI

Eespool käsitletud ja jaotusmeetodil lahendatud näites oli x_{ij} tõkestatud ainult alt. Tegelikus töös tekib tihti aga vajadus tõkestada suurusi mitte ainult alt, vaid ka ülalt. Ülaltoodud näites osutus tööde eri marki traktorite vahel jaotamise plaan selliseks, et 500 tingkünnihektarit rühvelkultuure tuli kultiveerida täielikult ainult traktoritega ДТ-20. See plaan tuleb aga seostada vastavate tööde sooritamise agrotehniliste tähtaegadega.

Traktori ДТ-20 päevane tootlusnorm on kultiveerimisel 16 hektarit ehk 4 tingkünnihektarit. Majandis on traktoreid ДТ-20 6 tükki, nende päevane tootlus $4 \cdot 6 = 24$ tingkünnihektarit. Järelikult on kultiveerimiseks tarvis $500 : 24 = 21$ päeva. See võib agrotehniliste tähtaegadega mitte kooskõlastuda. Oletagem, et kultiveerimine peab olema lõpetatud hiljemalt 10 päeva jooksul. Sel juhul tuleks traktoritega ДТ-20 kultiveerida $6 \cdot 16 \cdot 10 = 960$ hektarit, mis on $960 \cdot 0{,}25 = 250$ tingkünnihektarit.

See tähendab, et jaotades töid eri marki traktorite vahel, tuleb tabelisse (leheküljel 169) paigutada kolmanda rea ja kolmanda veeru ristumiskohal olevasse lahtrisse vastav kitsendus, s. o. $x_{33} \leqslant 240$. Selle tagajärjel muutub ülesande lahenduse käik mõnevõrra juba teisest sammust alates. Erinevus on selles, et kirjutame nüüd x_{33} kohale tabelisse mitte 500, nagu tehti siis, kui lahendasime ülesannet ilma lisakitsendusteta, vaid 240. Ülejäänud 260 hektarit jaotatakse tabeli muude lahtrite vahel ära tavalisel viisil.

Lisakitsendustega ülesannete lahendamisel tuleb pidada silmas järgmist. Pärast seda, kui tabeli mingisse lahtrisse on ülesande lahendamise ajal kirjutatud sisse kitsendus, langeb see nagu välja ülesande üldisest süsteemist.

Lisakitsendusi võib olla ka mitu. Põhimõtteliselt võib püstitada kitsendusi suruse x_{ij} kõigi väärtuste kohta. Üldkujul võetakse kitsendused ülesande tingimustesse võrratustena

$$x_{ij} \leqslant d_{ij};$$

$$x_{ij} \geqslant d_{ij},$$

kus d_{ij} tähendab i-ndat liiki tootmisvahenditega tehtavate j-indat liiki töö maksimaalset võimalikku või minimaalselt vajalikku hulka.

Lisakitsendused teevad ülesande lahendamise mõnevõrra keerulisemaks. Seejuures võimaldavad nad aga majandi tegelikke töötingimusi täielikumalt arvesse võtta.

Nn. DIFERENTSIAALRENDI MEETOD

Jaotusülesande lahendamise algoritm, mille põhimõtte esitas A. L. Lurje ja üksikasjalikult välja töötas A. L. Brudno, on saanud nimetuse «diferentsiaalrendi meetod». Käsitleme seda meetodit näite varal.

Olgu vaja jagada mitmesugused traktoritööd eri liiki traktorite vahel nii, et kõik tööd kokku tehtaks minimaalsete kuludega. Arvutusteks vajalikud lähteandmed on esitatud järgmises tabelis (A).

Tabel A

Traktorimargid / Tööd	ДТ-54 (10 tk)	„Belaruss" (12 tk)	ДТ-20 (8 tk)	Tööde hulk (tingkünnihektarites)	Jaotamata jääk
Kultiveerimine	4,5	4,1	4,6	4400	4400
Heinaniitmine	3,5	3,3	4,0 / 1200	2300	1100
Äestamine	3,4	3,1 / 1600	5,0	1600	-5500
Tootlusnorm hooajal (tingkünnihektarites)	3500	3600	1200	8300	
Väikseim vahe	0,1	0,2			

Edasi arutleme nõnda. Et teha tööd ära kõige väiksemate kuludega, laseme eri marki traktoreil teha kõigepealt neid töid, mida nad teevad kõige odavamalt. Ühe tingkünnihektari omahind on kõigi traktorimarkide ja tööliikide puhul märgitud lahtrite ülaossa. Märgime iga traktorimargi minimaalsed omahinnad sõõriga. Seejärel jaotame plaaniülesanded ainult nende lahtrite vahel, kus omahindadel on sõõr ümber.

Kui plaaniülesanded on niiviisi ära jaotatud, siis teeme kindlaks, kui suur osa plaanis ettenähtud tööde üldkogusest on üldse jaotatud, ühtlasi aga leiame, missugusel real on töid veel liiga vähe, missugusel liiga palju.

Meie näites on sõõridega ümbritsetud omahindu ainult teisel ja kolmandal real. Teisele reale kirjutasime kolmandasse veergu 1200 ha, s. t. et traktoritel ДТ-20 võib niita heina 1200 hektarilt. Üldse tuleb aga heina niita 2300 hektarit. Järelikult jääb teisel real 1100 hektarit (2300—1200) veel jaotamata. See tähendab, et antud reale kujuneb plussmärgiga jääk. Märgime selle viimasesse parempoolsesse veergu (+1100).

Kolmandal real on sõõr ümber kahel omahinnal (esimeses ja teises veerus). Tööde üldhulk on sellel real (äestamine) 1600 tingkünnihektarit. Kogu selle tööde hulga võib teha ära nii traktoritega ДТ-54 kui ka «Belarussidega». Valime kahest võimalikust variandist selle, mille omahind on madalam. Seega kirjutame kolmanda rea teise lahtrisse 1600. Ent sellel real on sõõridega ümbritsetud omahindu nii esimeses kui teises veerus. Kui lähtuda traktorite ДТ-54 ja «Belaruss» hooajatootlusest, siis võiks nendega teha kokku 7100 (3500+3600) tinghektarit kündi. Järelikult ei kasutata kolmandal real olevatel andmetel tarktoreid täielikult ära. Real on töid liiga vähe, mis annab miinusmärgiga saldo. Vajaka on 5500 tinghektarit kündi (=7100−1600).

Mis puutub esimesse reasse, siis jäävad kõik selle tööd jaotamata. See tähendab, et real on töid liiga palju, mis annab plussmärgiga saldo. Liigseid töid on kokku 4400 tingkünnihektarit.

Märkigem muuseas, et esimesel real on liigseid töid niisama palju, kui palju on neid viimasel real puudu (4 400+1100=5 500).

Viimase võrdluse numbrilist väärtust nimetatakse jaotamata jäägiks. Seegi jääk on vaja ära jagada. Selleks leitakse eelnevalt igas reas vahe sõõriga ümbritsetud omahinna ja temale suuruse poolest kõige lähema omahinna vahel mingil niisugusel real, kus on veel jaotamata töid ehk kus eespool kirjeldatud vahe on plussmärgiga. Maatriksi neis veergudes, kus on kas või üksainus sõõr kas või ühel pluss-saldoga real, selliseid vahesid ei arvutata.

Saadud vahed kirjutatakse maatriksi kõige alumise rea alla. Arvnäite andmetel on need

esimeses veerus 3,5 – 3,4 = 0,1;

teises veerus 3,3 – 3,1 = 0,2.

Kolmandas veerus seda vahet ei leita, sest seal on sõõriga ümbritsetud omahind pluss-saldoga real.

Kui kõigis veergudes on hinnavahed leitud, siis valitakse nende seast välja väikseim (meie näites 0,1), mida nimetatakse «vaherendiks».

Nüüd asutakse koostama teist tabelit, mis on konstruktsioonilt esimesega analoogiline. Tööde hulga kirjutame muudatusteta uude tabelisse ümber. Samuti ei muutu pluss-saldoga ridades ka omahind, miinus-saldoga ridades aga liidetakse omahinnaga vaherent.

Uue tabeli koostamine lõpetatud, asume jaotama plaaniandmeid. Selleks ümbritseme kõigepealt iga veeru minimaalse omahinna sõõriga. Veergudes, kus võrdseid minimaalseid omahindu on kaks või rohkem, ümbritsetakse nad kõik sõõridega. Seejärel jaotame tööde plaanilise üldkoguse sõõridega märgitud lahtrite vahel, alates sellest reast või veerust, kus on ainult üks sõõriga omahind.

Nii väheneb tabelis B jaotamata jääk 1100 ha võrra ja on nüüd ainult 4400 ha. Nimetatud jääk leitakse eespool (lk. 185) kirjeldatud meetodil sõõridega lahtreis olevate plaaniandmete summa ja jaotatavate tööde üldise hulga vahena [8300 – (1100 + 1600 + 1200) = 4400]. Vaherent on nüüd 0,6.

Asume kolmandat tabelit (C) koostama. Kirjeldatud viisil jätkuvad arvutused seni, kuni jaotamata jääk on lõpuks võrdne nulliga.

Kolmandas tabelis on jaotamata jääk veel ainult 3200. Vaherent on nüüd 0,3.

Koostame järgmise, neljanda tabeli (D).

Jaotamine on sellega lõppenud. Ülesanne on lahendatud.

«Diferentsiaalrendi meetodi» rakendamisel peetagu sil-

Tabel B

Traktorimargid / Tööd	ДТ-54	„Belaruss"	ДТ-20	Tööde hulk (tingkünnihektarites)	Jaotamata jääk
Kultiveerimine	4,5	4,1	4,6	4400	4400
Heinaniitmine	3,5 / 1100	3,3	4,0 / 1200	2300	-2400
Äestamine	3,5	3,2 / 1600	5,1	1600	-2000
Tootlusnorm hooajal (tingkünnihektarites)	3500	3600	1200	8300	
Väikseim vahe	1,0	0,9	0,6		

Tabel C

Traktorimargid / Tööd	ДТ-54	„Belaruss"	ДТ-20	Tööde hulk (tingkünnihektarites)	Jaotamata jääk
Kultiveerimine	4,5	4,1	4,6 / 1200	4400	3200
Heinaniitmine	4,1 / 2300	3,9	4,6	2300	-1200
Äestamine	4,1	3,8 / 1600	5,7	1600	-2000
Tootlusnorm hooajal (tingkünnihektarites)	3500	3600	1200	8300	
Väikseim vahe	0,4	0,3	-		

Tabel D

Traktorimargid / Tööd	ДТ-54	„Belaruss"	ДТ-20	Tööde hulk (tingkünnihektarites)	Jaotamata jääk
Kultiveerimine	4,5	4,1 / 3200	4,6 / 1200	4400	0
Heinaniitmine	4,4 / 2300	4,2	4,9	2300	0
Äestamine	4,4 / 1200	4,1 / 400	6,0	1600	0
Tootlusnorm hooajal (tingkünnihektarites)	3500	3600	1200	8300	
Väikseim vahe					

mas, et jaotamata jääk peab arvutustöö igal sammul kas vähenema või vähemalt muutumatuks jääma.

Kui jaotamata jääk suureneb, siis on arvutustesse sattunud viga.

TRANSPORDIÜLESANDE LAHTINE MUDEL

Eespool vaadeldud transpordiülesande üldkuju on järgmine.

Leida avaldise

$$C = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

miinimum tingimusel, et

1) $\sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = b_i$;

2) $\sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = a_j$;

3) $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j = \sum\limits_{i=1}^{m} b_i$;

4) $x_{ij} \geqslant 0$.

See on nn. kinnine mudel. Tegelikus elus esineb aga tihtipeale juhtumeid, kus

$$\Sigma a_j \neq \Sigma b_i.$$

Nii on näiteks siis, kui hankijate pakkumisvõimalused ületavad transpordiülesandes nõudmise või kui olemasolevate traktorite võimsus ületab traktorite jaotamise ülesandes plaaniga ettenähtud tööde üldhulga. Sel juhul kasutatakse transpordiülesande niinimetatud lahtist mudelit.

Neil tingimustel koostatud ülesande lahendamisele asudes teisendatakse lahtine mudel kinniseks. Selleks võetakse ülesandesse fiktiivne tarbija, kelle vajadused võrdsustatakse valmistatud toodangu hulga ja tegelikult nõutava hulga vahega.

Kui tähistada fiktiivse tarbija vajadused tähega a_{n+1}, siis

$$\sum_{j=1}^{n} a_j + a_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} b_i.$$

Eeldatakse, et fiktiivsele tarbijale antavate toodete tootmis- ja veokulud on kõigil hankijail võrdsed, s. o.

$$C_{1n+1} = C_{2n+1} = \ldots = C_{mn+1}.$$

Missugune on suuruse C_{in+1} absoluutväärtus, sellel pole tähtsust.

Kui rakendada lahtise mudeli järgi lahendatavas ülesandes toodete valmistamis- ja transportimiskulusid iseloomustavaid kriteeriume, siis saab arvutada välja kas ühtainsat toodet või enam-vähem ühelaadset toodangut väljavate ettevõtete paiknemise optimaalse variandi.

Seos fiktiivse tarbijaga iseloomustab seda laadi ülesandes vastava tootmisharu ebaratsionaalsust. Sama ülesannet saab püstitada ka nii, et leida optimaalsed punktid, kus tuleks korraldada mingi toote täiendavat tootmist.

Olgu teatud liiki toodangu hankijaid kolm (I, II, III) ja tarbijaid samuti kolm (A, B, C). Hankijad toodavad 1500 ühikut, tarbijail läheb vaja ainult 1250 ühikut. Üleliia on seega 250 ühikut. Tarvis on teada, kus on tootmist kõige otstarbekohasem vähendada. Ettevõtete tootmisvõimsusi iseloomustavad järgmised andmed: I — 600, II — 400 ja III — 500 ühikut. Tarbijal A on vaja 450 ühikut, B-l 360 ühikut ja C-l 440 ühikut. Andmed toodete omahinna ja tarbijaile vedamise kulude kohta on toodud tabelis lk. 190.

Hankija	Toodangu omahind pluss tarbijale vedamise kulud			Valmistatava toodangu hulk
	A	B	C	
I	10	9	6	600
II	12	13	8	400
III	5	7	11	500
				1500 [1]
Vajatava toodangu hulk	450	360	440	1250

Et tarbimist tootmisega tasakaalustada, võtame juba arvutuste algul ülesandesse ka fiktiivse tarbija. Tähistame selle tähega D (meie näites on fiktiivse tarbija vajadus 250 ühikut). Fiktiivsele tarbijale mineva toodangu omahinna ja veokulud võrdsustame kõigi hankijate puhul nulliga.

Lahendame ülesande jaotusmeetodiga. Koostame plaani esimese variandi (tabel A).

Uute hindade järgi on tabelis B kõige kasulikum lahter kolmanda rea ja esimese veeru ristumiskohal (—12), mis oli tabelis A tühi. Koostame veoplaani parandamiseks siirdeahela. Tabelisse B kantud kuusnurkses ahelas viime 210 ühikut üle teise lahtrisse ja saame teise plaanivariandi.

Tabelis B leitud plaani optimaalsuse kontrollimiseks koostame tabeli C.

Plaan ei ole optimaalne. Jätkame selle parandamist. Paigutame esimese rea kolmanda tulba ristumiskohal olevasse lahtrisse 40 ühikut. Seejärel koostame tabeli D.

Tabelis D sisalduva plaani optimaalsuse kontrollimiseks koostame jällegi uue tabeli (E).

Kui vaadelda kordajaid variandi E lahtrites, arvestades ka diferentsiaalrente, siis on nad kõik kas nullid või suuremad kui null, mis on plaani optimaalsuse tunnuseks. Selle plaani kohaselt selgub, et liigsed tootmisvõimsused fiktiivsele tarbijale saadetava 250 ühiku tootmiseks on teise hankija juures. Järelikult on käesoleval juhul ots-

[1] 1500 ühikut on kõigis ettevõtetes valmistatava toodangu koguhulk.

Tabel A

Tarbija / Lähetaja	A	B	C	D	Kokku toodetakse	
I	10 / 450	9 / 150	6	0	600	
II	12	13 / 210	8 / 190	0	400	-4
III	5	7	11 / 250	0 / 250	500	-7
Kokku vajatakse	450	360	440	250	1500	
	-10	-9	-4	7		

Tabel B

	A	B	C	D	Kokku	
I	0 / 240	0 / 360	2	7	600	-12
II	-2	0	0 / 400	3	400	
III	-12 / 210	-9	0 / 40	0 / 250	500	
Kokku	450	360	440	250	1500	
	12	12				

Tabel C

	A	B	C	D	Kokku	
I	0 / 200	0 / 360	-10 / 40	-5	600	
II	10	12	0 / 400	3	400	-10
III	0 / 250	3	0	0 / 250	500	
Kokku	450	360	440	250	1500	
			10			

Tabel D

	A	B	C	D	Kokku	
I	0	0 360	0 240	-5	600	
II	0	2	0 200	-7 200	400	
III	0 450	3	10	0 50	500	-7
Kokku	450	360	440	250	1500	
	7			7		

Tabel E

	A	B	C	D	Kokku	
I	7	0 310	0 290	2	600	
II	7	2	0 150	0 250	400	
III	0 450	-4 50	3	0	500	4
Kokku	450	360	440	250	1500	
	-4					

tarbekohane vähendada teise hankija poolt valmistatava toodangu hulka 250 ühiku võrra.

Niisamuti lahendatakse ülesandeid ka siis, kui tooteid vajatakse rohkem, kui neid toodetakse, ja on vaja luua uusi ettevõtteid. Sel juhul annab ülesande lahend vastuse küsimusele, kus on parim koht uute ettevõtete ehitamiseks või juba töötavate rekonstrueerimiseks.

Üldkujul on jaotusülesande lahtine mudel järgmine.

Leida avaldise

$$C = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

miinimum (maksimum) tingimustel, et

$$1)\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij}=b_i; \qquad 3)\ \sum_{j=1}^{n} a_j \gtrless \sum_{i=1}^{m} b_i;$$

$$2)\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij}=a_j; \qquad 4)\ x_{ij} \geqslant 0.$$

JAOTUSÜLESANNETE LIGIKAUDNE LAHENDAMINE

Eespool käsitletud jaotusülesande lahendamise meetodid võimaldavad leida täpse optimaalse lahendi. Nende meetodite rakendamine eeldab aga küllaltki pikki arvutusi. Suurte praktiliste ülesannete lahendamine nende abil käsitsi on võrdlemisi raske. Et saada läbi vähemate arvutustega, on töötatud välja erilised ligikaudsed ehk aproksimatsioonimeetodid. Ühe sellise meetodi on esitanud W. Vogel. Käsitleme Vogeli aproksimatsioonimeetodit lihtsa näite varal.

Olgu vaja koostada optimaalne plaan veoste transportimiseks punktidest A, B ja C punktidesse I, II, III ja IV. Kui palju lähtepunktides veoseid on, palju neid igasse sihtkohta vedada on vaja, samuti veohinnad ühe veoseühiku kohta on esitatud tabelis.

Saaja / Lähetaja	I	II	III	IV	Olemasolev kogus
A	7	9	8	10	600
B	6	10	8	4	400
C	3	7	11	9	500
Vajadus	450	360	440	250	1500

Tarvis on koostada niisugune plaan, et veokulude üldsumma oleks minimaalne. Koostame selleks maatrikstabeli (tabel A, lk. 194).

Tabelis A on tooteühiku veokulud antud negatiivsete suurustena. Kulude selline kirjutusviis vastab nende majanduslikule mõttele ja on kõige otstarbekohasem ka matemaatilises mõttes. Tabelisse A on võetud üks täiendav rida ja üks täiendav veerg, kuhu on kirjutatud vastava rea või veeru kõige soodsamate veokulude absoluutne vahe. Meie näites on kõige kasulikumateks veosuundadeks esiteks A I, kus veokulud veoseühiku kohta on 7 rbl., ja A III, kus kulud on 8 rbl. Nende kulusummade absoluutne vahe on 1 rbl. Teises reas on kõige kasulikumateks veosuundadeks B IV ja B I, mille veokulude vahe on 2 rbl. Ja lõppeks, kolmandas reas on kõige soodsamate veosuundade B II ja B I veokulude absoluutne vahe 4 rbl.

Kahe kõige soodsama veosuuna veokulude vahed on veergudes 3, 2, 0 ja 5 rubla. Edasi leiame, missugune vahe on nii täiendavas reas kui ka veerus kõige suurem. Meie näites on selleks 5 rubla.

Plaanilist veostesummat hakkame jagama alates sellest reast või veerust, mille soodsaimate kulude vahe oli kõige suurem. Antud juhul on selleks neljas veerg. Selles on aga kolm rida ehk kolm lahtrit. Valime neist meie jaoks kõige soodsama ja kirjutame sinna plaanilise veose suuruse, arvestades nii hankijate võimalusi kui tarbijate vajadusi. Selliseks lahtriks osutub B IV, kus ühiku veokulud on 4 rubla. Sellesse lahtrisse saame kirjutada mitte rohkem kui 250 ühikut. See on vastava veosesaaja maksimaalne vajadus, ehkki hankijal B oleks võimalik lähetada 400 ühikut (vt. tabel B).

Tabel A

Saaja / Lähetaja	I	II	III	IV	Vahede veerg	Olemasolev kogus
A	−7	−9	−8	−10	1	600
B	−6	−10	−8	−4	2	400
C	−3	−7	−11	−9	4	500
Vahede rida	3	2	0	5		
Vajadus	450	360	440	250		1500

Pärast lahtri B IV täitmist teeme neljanda veeru kõigisse teistesse lahtritesse ristid, vastava veeru all oleva soodsaimate veokulude vahe ümber joonestame aga sõõri selle märgiks, et teda on juba arvestatud, ning jätkame arvutusi sama metoodika kohaselt. See tähendab, et leiame jälle kõigi ridade ja veergude soodsaimate veokulude vahed, valime neist välja kõige suurema ja täidame suurima vahe reas või veerus ühe lahtri.

Märgitagu, et selle meetodi eeliseks pole mitte ainult ülesande lahendamise igal sammul uue kuludemaatriksi koostamisest vabanemine, vaid ka see, et ülesande lahendamiseks pole vaja koostada tervet tabelite seeriat. Kõik arvutused võivad toimuda ühes tabelis, milles lahenduskäigu igal sammul leitakse ja tõmmatakse maha (või ümbritsetakse sõõriga) mõni ridade või veergude kohta leitud vahe.

Aproksimatsioonimeetodil leitud ülesande lahend on esitatud tabelis B.

Tabel B

Saaja / Lähetaja	I	II	III	IV	Vahede veerg	Olemasolev kogus
A	-7 / x	-9 / 310	-8 / 290	-10 / x	1 1 1	600
B	-6 / x	-10 / x	-8 / 150	-4 / 250	2 2 2	400
C	-3 / 450	-7 / 50	-11 / x	-9 / x	4 4 4	500
Vahede rida	3	2 1	0 0	5		
Vajadus	450	360	440	250		1500

Lõpptulemusena saime veoste jaotamise plaani, mis langeb täpselt kokku optimaalsega. Üldiselt võib aga teistsuguste arvude korral esineda mõnesuguseid hälbeid. Siiski võib selle meetodiga lahendada õige suuri ülesandeid praktilises töös täiesti piisava täpsusega. Peale selle võib teha ka nii, et leida Vogeli meetodil ülesande esimene lahendivariant ja edasi täpsustada seda juba eespool vaadeldud täpsemate meetoditega.

Aproksimatsioonimeetodil lahendatakse nii minimiseerimis- kui maksimiseerimisülesandeid. Maksimiseerimisülesande lahendamisel loetakse maksimaalse vahega real või veerul kõige soodsamaks suurima positiivse väärtusega lahter. Peale selle leitakse ka nimetatud vahed ise kahe suurima positiivse hinna vahena.

Mõnikord võib ligikaudsel meetodil jaotamisülesandeid lahendades juhtuda, et vahed on võrdsed. Niisugustel juhtudel on kõige lihtsam võtta ühesuguste suurimate vahedega ridadest või veergudest ükskõik missugune ja jätkata ülesande lahendamist tavalisel viisil. Kõige täpsemaid tulemusi saadakse aga siis, kui võetakse seejuures arvesse nn. teist järku vahede vahekorda. Teiste sõnadega võiks ütelda, et kui pärast vahede leidmist ilmneb, et võrdseid suurimaid vahesid on kaks või rohkem, siis tekib küsimus, missugust rida või veergu plaaniandmete paigutamisel eelistada. Sellele küsimusele vastuse leidmiseks talitatakse niiviisi, et veergudes ja ridades, kus suurimad vahed on ühesugused, leitakse kulude kokkuhoiu seisukohalt kõige kasulikum lahter ja täidetakse see. Kui ka selliseid lahtreid on mitu, siis eelistatakse neist (kulude suuruse seisukohalt) ühtviisi kasulikest seda, mis on soodsaim nii ridu kui veergusid pidi vaadates. See tähendab, et valitakse välja nn. sadulpunkt.[1]

---

[1] Н. Рейнфельдь. У. Фогель, Математическое программирование, Москва 1960.

VI PEATÜKK

PÕLLUMAJANDUSALASTES MAJANDUSLIKES UURINGUTES KASUTATAVATE MATEMAATILISTE MEETODITE ARENDAMISE KÜSIMUSI

MAJANDUSMATEMAATILISE ÜLESANDE LAHENDI ANALÜÜS

Majandusmatemaatiliste ülesannete koostamise ja lahendamise teel leitakse tootmisressursside kasutamise optimaalne variant. Selle kõrval on majandusmatemaatilised meetodid tähtsaiks abivahendeiks majandusnähtuste kõigekülgsel uurimisel. Seda osa täidavad nad juba alates ülesande mudeli konstrueerimise momendist.

Majandusmatemaatiline mudel on majanduslike nähtuste vahel valitsevate üldiste seoste ja seaduspärasuste matemaatilisel kujul antud kontsentreeritud kirjeldus. Arusaadavalt nõuab sellise mudeli koostamine matemaatika tundmist. Ent veelgi põhjalikumalt tuleb tunda majandust, selle arenguseadusi ja -seaduspärasusi.

Majandusmatemaatiline mudel kirjeldab majanduslikku nähtust (protsessi) kõige üldisemal kujul. Selles peituvad nii mudeli head kui ka halvad küljed. Mudeli abil saab kokkusurutult ja näitlikult kujutada omavahel seotud keerulisi majanduslikke protsesse, avastada ja täpselt määratleda nende vahel palja silmaga hoopiski mitte nähtavaid seoseid. Ühtlasi jäävad aga mudelis peegeldumata paljud nähtuse erisused, milledest mõned on vägagi olulised.

Ühe mudeli järgi võib koostada suure hulga kõige erinevamaid majandusliku sisuga ülesandeid.

Majandusmatemaatilise mudeli konstrueerimine on esimene samm majanduslike nähtuste matemaatiliste meetoditega süvendatud uurimisele asumisel. Siin on kohane meenutada K. Marxi sõnu, et teadus saavutab alles siis oma arengus täiuse, kui tal õnnestub rakendada matemaatikat.[1]

Teine, ja mitte vähem tähtis etapp on majandusmatemaatilise mudeli järgi lahendatava konkreetse ülesande jaoks vajalike lähteandmete hankimine. Nimetatud andmete hankimisel määratakse kindlaks ülesande põhilised parameetrid, kogutakse, töödeldakse ja analüüsitakse läbi suur hulk lähteinformatsiooni. Põllumajandusalaste majandusmatemaatiliste ülesannete põhilisteks parameetriteks on tootmisharude arv ja kasutatavate tehnoloogiate arv, tootmisressursid ja nende elemendid. Lähteinformatsiooni põhilised elemendid on tootmisressursside hulk, kulunormid, toodete hinnad, toodangu kogus. Lähteinformatsiooni näitajate läbitöötamine on laadilt loominguline töö. See eeldab põhjalikke teadmisi mitte ainult konkreetses ökonoomikas, vaid ka tootmise tehnoloogias.

Kolmas etapp majandusmatemaatiliste meetodite kui majanduslike nähtuste uurimise vahendite kasutamises on arvutustega saadud vahe- ja lõpptulemuste analüüs. Soovimata vähendada kahe eelmise etapi tähtsust, tuleb siiski ütelda, et kolmas etapp on kõige tähtsam. Seepärast peatume sellel üksikasjalikumalt ja esitame mõned konkreetsed näited.

Esimene näide. Olgu tarvis leida nisu ja kartuli külvipinna optimaalne kombinatsioon järgmistel tingimustel: üldine külvipind on 8000 ha, tööajafond mehhaniseeritud töödel 10 000 ning hobu- ja käsitsitöödel 50 000 inimpäeva. Nisu saagikus on 20 ts, kartuli saagikus 100 ts hektarilt. Töökulu ühe hektari kohta on nisu kasvatamisel 0,6 inimpäeva, mehhanismidega 2 inimpäeva, hobustega tehtavaid töid ning käsitsitöid ühe kartulihektari kohta vastavalt 4,6 ja 22 inimpäeva. Nisu hind on 5, kartuli hind 4 rubla tsentner.

Märgime nisu kogusaagi tähega x_1 ja kartuli kogusaagi x_2. Kirjutame ülesande tingimused ning lahendamise eesmärgi üles lineaarsete võrrandite süsteemina.

---

[1] Воспоминания о Марксе и Энгельсе, Москва 1956, lk. 66.

$$
\begin{aligned}
0{,}05x_1 + 0{,}01x_2 + x_3 \quad &= 8\,000\\
0{,}03x_1 + 0{,}046x_2 \quad + x_4 &= 10\,000\\
0{,}1x_1 + 0{,}22x_2 \quad\quad + x_5 &= 50\,000\\
\hline
C = 5x_1 + 4x_2 &
\end{aligned}
$$

Leida suuruse C maksimum.
Koostame esimese simplekstabeli.

Tabel A

Põhitundmatud	Vabaliikmed	Kõrvaltundmatud	
		x_1	x_2
$\leftarrow x_3$	8 000	$\boxed{0{,}05}$	0,01
x_4	10 000	0,03	0,046
x_5	50 000	0,1	0,22
C	0	−5	−4

Tabelis A sisaldub plaani esimene võimalik variant. Põhitundmatud ja vabaliikmed on võrdsed, kõrvaltundmatud on nullid. Kõik põhitundmatud on tabelis A olemuselt abitundmatud, mis on võetud kasutusele selleks, et võrratused võrrandeiks teisendada. Nagu teada, on abitundmatute mõtteks vaadeldavas ülesandes kasutamata ressursside võimalik hulk. Järelikult selguvad vabaliikmete veerust kõik olemasolevad, ent siiani veel kasutamata tootmisvõimalused. Kõrvaltundmatute veergudesse on kirjutatud i-nda ressursi kulunormid j-inda toote ühiku kohta. Sihifunktsiooni real on kõrvaltundmatute veergudesse võetud j-inda toote hinnad vastupidise märgiga; vabaliikmete veerus on aga null, mis näitab, et kogutoodangu maksumus on antud plaanivariandi puhul null. See vastab täiesti ka ülesande tingimustele, kust on näha, et tootmisressursse ei kasutata.

Läheme tuntud reeglite kohaselt üle teise plaanivariandi juurde, mis sisaldub tabelis B (vt. lk. 200).

Vaatleme lähemalt tabeli B andmete majanduslikku sisu. Vabaliikmete veerg sisaldab teise plaanivariandi andmeid. Selle plaani kohaselt on ette nähtud külvata kogu maale ainult nisu. Tulemusena saadakse 160 000 ts nisu ($8000 \cdot 20 = 160\,000$), $x_1 = 160\,000$. 8000 hektari nisu

Tabel B

Põhitundmatud	Vabaliikmed	Kõrvaltundmatud	
		x_3	x_2
$\rightarrow x_1$	160 000	20	0,2
$\leftarrow x_4$	5 200	−0,6	$\boxed{0,04}$
x_5	34 000	−2	0,2
C	800 000	100	−3

viljelemiseks kulutatakse mehhanismidega tehtavatel töödel $8000 \cdot 0{,}6 = 4800$ inimpäeva.

Kasutamata jääb mehhanismidega tehtavate tööde võimalikust üldhulgast $10\,000 - 4800 = 5200$ inimtundi. Abitundmatu x_4 näitab neid kasutamata ressursse. Analoogiliselt tehtaks hobu- ja käsitsitöid $8000 \cdot 2 = 16\,000$ inimpäeva ja kasutamata jääks $50\,000 - 16\,000 = 34\,000$ inimpäeva ($x_5 = 34\,000$). Lõppeks on $C = 800\,000$. See on nisu kogutoodangu maksumus: $160\,000 \cdot 5 = 800\,000$.

Kõrvaltundmatute veergudes olevad andmed iseloomustavad ülesande tingimuste võrrandite kohaselt endiselt kulunormatiive, sihifunktsiooni rida aga toodangu maksumust. Tehtud arvutuste tõttu on need näitajad aga muutunud. Nii on näiteks normid muutunud veerus x_3, mis asub nüüd veeru x_1 endisel kohal. Külvipinna, mehhaniseeritud ning hobu- ja käsitsitööde ühe teraviljatsentneri kohta arvutatud kulunormide asemel on tabelis B normid ühe nisutsentneri kohta (20 — saagikus, 0,6 — töökulu mehhaniseeritud ja 2 — töökulu hobu- ja käsitsitöödel). Need normid vastavad täielikult ülesande lähtetingimustele. Hektarilt saadava teravilja maksumus on 100 rbl. Ka see vastab ülesande tingimustele ($20 \times 5 = 100$). Veerus x_3 olevad andmed ütlevad, et kui vähendada nisu külvipinda 1 hektari võrra, siis väheneb kogutoodang x_1 20 ts võrra, kasutamata jäänud tööaja hulk suureneb mehhaniseeritud töödel 0,6 (x_4) ning hobu- ja käsitsitöödel (x_5) 2 inimpäeva võrra. Kogutoodangu maksumus väheneb sellest lõppude lõpuks 100 rbl. võrra.

Ja samuti vastupidi — kui suurendada nisu külvipinda ühe hektari võrra, siis suuruse x_1 väärtus kasvab

20 tsentneri võrra, kogutoodangu maksumus C 100 rbl. võrra ning suuruste x_4 ja x_5 väärtused vähenevad 0,6 ja 2 inimpäeva võrra.

Nii selgub, et tabelis B on veerus x_3 kõigil kordajail teatud majanduslik tähendus.

Ülesande tingimuste kohaselt on x_2 kartuli kogutoodang tsentnerites. Tabelis A tähendasid suuruse x_2 kordajad ülesande tingimuste võrranditest pärinevaid ressursside kulunorme ühe tsentneri kartulite kohta, sihifunktsioonis aga vastupidise märgiga võetud tsentnerihindu rublades. Nende kordajate numbrilisteks väärtusteks olid 0,01, 0,046, 0,22 ja (-4). Tabelis B on nende kordajate asemel 0,2, 0,04, 0,2 ja (-3). Mida need kordajad tähendavad?

Vaatleme neid ükshaaval. Rea x_1 ja veeru x_2 ristumiskohas olev kordaja 0,2 väljendab suhet ühe tsentneri kartuli ja ühe tsentneri nisu kasvatamiseks vajaliku põllupinna vahel ehk teiste sõnadega kartuli ja nisu saagikuste suhet $(20:100=0{,}2)$. Ühtlasi näitab kordaja 0,2, et ühe tsentneri kartuli tootmine kutsub muutumatu suurusega põllupinna korral esile nisutoodangu vähenemise 0,2 tsentneri võrra.

Muud veerus x_2 olevad kordajad tähendavad, et kui võtta plaani toota üks tsentner kartuleid, siis nõuab see 0,4 inimpäeva mehhaniseeritud ja 0,2 inimpäeva hobu- ja käsitsitöid. Töökulu vähenemine ühe kartulitsentneri kohta on ülesande lähtetingimustes antud normidega võrreldes seletatav sellega, et koos kartulikasvatuse laiendamisega vähendatakse nisukasvatust, sest üldine külvipind ei saa olla suurem kui 8000 hektarit. Iga enamtoodetud kartulitsentneriga väheneb nisutoodang 0,2 tsentneri võrra. Siit siis ka ühe kartulitsentneri kohta tulevate töökulude «vähenemine» mehhaniseeritud töödel 0,006 $(0{,}03 \cdot 0{,}2=0{,}006)$ ning hobu- ja käsitsitöödel 0,02 $(0{,}1 \cdot 0{,}2=0{,}02)$ inimpäeva võrra.

Tabelis B on kartuli tsentnerihind alanenud 4 rublalt 3 rublale. Kordaja (-3) tähendab tabelis B seda, et iga tsentner kartuleid suurendab kogutoodangu maksumust 3 rubla võrra. Just nimelt kolme, ja mitte nelja rubla võrra, ehkki tsentner kartuleid maksab 4 rubla! Seegi toimub ikka samal põhjusel, nimelt seetõttu, et antud tingimustes põhjustab ühe tsentneri kartulite rohkem tootmine nisutoodangu vähenemise 0,2 tsentneri võrra. Nisu hind on 5 rbl. tsentner. Seetõttu läheb üks rubla «kaduma» (0,2 · 5 = 1 rbl.).

Suuruse x_2 kordajad iseloomustavad põllumaa kasutamise ekvivalentsust ja võrdlevat efektiivsust kartuli ja nisu viljelemise puhul, sest tabelis B on esitatud plaanivariant, milles tootmist limiteerivaks ressursiks on põllupind. Selles on lihtsate arvutustega kerge veenduda. Kartuli hind on langenud 4 rublalt 3 rublale, s. o. 25%. See tähendab, et ühelt hektarilt saadava kogutoodangu maksumuse seisukohalt vaadates on kartuli efektiivsus antud tingimustes 4 korda kõrgem kui nisul. Ja tõepoolest: ühelt nisuhektarilt saame saaki 100 rbl. eest (20×5), kartulihektarilt aga 400 rbl. eest (100 · 4).

Kui arvutusi jätkata, saame järgmise plaanivariandi, kus väljendub peale maa veel mingi muu ressursi, näiteks mehhaniseeritud tööde tegemiseks kasutada oleva tööjõu limiteeriv mõju, mistõttu kõrvaltundmatute kordajate majanduslik sisu muutub veelgi keerulisemaks.

Jätkame arvutusi ja koostame tabeli C.

Tabel C

Põhitundmatud	Vabaliikmed	Kõrvaltundmatud	
		x_3	x_4
x_1	134 000	23	−5
→ x_2	130 000	−15	25
x_5	8 000	1	−5
C	1 190 000	55	75

Tabelis C sisaldub kolmas, sealjuures optimaalne plaanivariant. Antud tingimustes on nisu ja kartuli külvipindade vahekord optimaalne, kui

nisu külvatakse $\frac{134\,000}{20} = 6700$ hektarile ja

kartuleid pannakse $\frac{130\,000}{100} = 1300$ hektarile

Kokku 8000 hektarit.

Kogutoodangu maksumus on sel juhul

$$134\,000 \cdot 5 + 130\,000 \cdot 4 = 1\,190\,000 \text{ rbl.}$$

Hobu- ja käsitsitöödel jääb kasutamata sealjuures 8000 inimpäeva ($x_5 = 8000$).

Vaatleme, missugused on kõrvaltundmatute kordajad. Suurusel x_3 on tabelis C kordajateks 23, (-15), 1 ja 55. Meenutame, et suurus x_3 väljendas tabelis A kasutamata jäänud maapinna suurust. Kõrvaltundmatute kilda ülekantuna iseloomustab ta endiselt maad. Ainult tema numbriliseks väärtuseks on võetud null nagu kõigil kõrvaltundmatuil. Veerus x_3 olevad kordajad näitavad, et kui liita olemasolevatele tootmisvõimalustele üks hektar põllumaad, siis võimaldab see 23 tsentneri võrra teraviljasaaki suurendada. Samaaegselt toodetaks nüüd kartuleid 15 tsentneri võrra vähem, kasutamata tööajavaru hobu- ja käsitsitöödel suureneks 1 inimpäeva võrra ja kogutoodangu maksumus kasvaks 55 rbl. võrra.

Nisu külvipinna laiendamine 1 hektari võrra lubab suurendada teraviljatoodangut just 23 ts, ja mitte 20 ts võrra (saagikus on 20 ts!), seepärast et sellega koos väheneb kartulitoodang 15 ts võrra, mille tagajärjel vabaneb 0,15 hektari suurune pindala. Sellelt pinnalt saadakse 3 ts nisu ($0{,}15 \cdot 20 = 3$). Kartulikasvatuse vähenemine on käesoleval juhul tingitud mehhaniseeritud tööde tegemiseks vajaliku tööjõu vähesusest.

Kerge on mõista ka seda, mille arvel kogutoodangu maksumus kasvab 55 rubla võrra. Kirjeldatud juhul rohkem saadud 23 ts teravilja maksab 115 rbl. ($23 \cdot 5 = 115$). Ent samal ajal vähenes kartulisaak 15 tsentneri ehk 60 rbl. võrra ($15 \cdot 4 = 60$). Lõpptulemusena kasvab kogutoodangu maksumus ainult 55 rbl. võrra hektari kohta.

Analoogiliselt võib käsitleda ka suuruse x_4 kordajate majanduslikku sisu. Suuruse x_4 kordajad (-5), 25, (-5) ja 75 näitavad, et tööjõuressursside suurendamine mehhaniseeritud töödel 1 inimpäeva võrra lubab teha plaanis järgmisi korrektiive: vähendada teraviljatoodangut 5 ts võrra, suurendada kartulitoodangut 25 ts võrra. Ühenduses sellega väheneb hobu- ja käsitsitöödel kasutamata tööajavaru 5 inimpäeva võrra, kogutoodangu maksumus aga suureneb 75 rbl. võrra.

Nende ridade, kuhu on kantud ülesande tingimused, kõrvaltundmatute kordajad kujutavad endast üldiselt normatiive, mis seovad vabaliikmete veerus olevad suurused ja tundmatuteks olevad toodangu hulgad või tootmisvõimalused ühtseks materiaalsete bilansside süsteemiks. Need kordajad pakuvad ülesande lahendamisel saadud plaanide täiendava korrigeerimise vahenditena suurt huvi nii optimaalses kui ka mistahes eelnevates plaanivariantides. Nii võib näiteks suuruse x_4 kordajaile tuginedes tabeli C andmetel öelda, et mehhaniseeritud töödel kasutatavate tööjõuressursside suurendamine ühe inimpäeva võrra lubab suurendada kartulitoodangut 25 ts võrra, kui samal ajal nisutoodangut 5 tsentneri võrra vähendada ning kasutada täiendavalt 5 inimpäeva hobu- ja käsitsitöödel. Selle tulemusena kasvab kogutoodangu maksumus 75 rbl. võrra. Kui on teada kulud, mida põhjustab ühe täiendava inimpäeva ärakasutamine mehhaniseeritud ja 5 täiendava inimpäeva tegemine hobu- ja käsitsitöödel, siis pole sugugi raske leida, kui otstarbekohane selline üritus on.

Kõigist käsitletud kõrvaltundmatute kordajatest pakuvad kõige suuremat huvi sihifunktsiooni real olevad kordajad. Meie näites on seal kordajad tabelis A (−5) ja (—4), tabelis B 100 ja (—3) ning tabelis C 55 ja 75. Tabelis A, mis sisaldab ülesande lähtetingimusi, kordajad (—5) ja (—4) on vastupidise märgiga võetud hinnad. Arusaadavalt võib ülesande eesmärgist olenevalt võtta hindade asemele ka omahindu, tööviljakust jms. Siin ei ole aga praegu juttu esialgsete kordajate valikust sihifunktsiooni, vaid nende muutmisest arvutuste tegemise ajal. Tabelis B on meil sihifunktsiooni real kõrvaltundmatute veergudes juba kordajad 100 ja (−3). Nende tähendusest on juba eespool räägitud. Tabelis C saavad vastavad kordajad väärtuse 55 ja 75. Tekib küsimus, miks on ühe hektari maa hinnanguks[1] tabelis B 100, ent tabelis C ainult 55, ja kuidas see võiks muutuda veel edaspidi, kui oleks tegemist suurema ülesandega.

Küsimuse esimesele poolele võib vastata lühidalt. Tabelis B on maa ainus tootmist limiteeriv vahend. On loomu-

---

[1] Majandusmatemaatiliste ülesannete vahe- ja lõpptulemustena saadud tundmatute kordajate majandusliku sisu käsitlemisel on otstarbekohane teha järjekindlat vahet hinna ja hinnangu vahel (nagu seda I. Popov käesolevas peatükis teebki). Hind (цена) on mingi tegelik, plaaniline või muu hind (tariif, määr jne.), mis esineb sellisena ka majanduslikus tegelikkuses; hinnang (оценка) on ülesande lahendamise eeskirjade kohaselt sooritatavate arvutusoperatsioonide tagajärjel saadud tingimuslik suurus. Nii ühed kui teised esinevad lineaarse planeerimise ülesannetes tundmatute kordajatena ja täidavad puhtformaalsest seisukohast vaadatuna ühesuguseid funktsioone. — *Toimetaja märkus.*

lik, et ühe hektari põllupinna hinnang peab sel juhul vastama toodangu hulgale, mis sellelt pinnalt saadakse. Tabelis B on nähtud ette võtta kogu külvipind nisu alla. Saagikusega 20 tsentnerit hektarilt ja hinnaga 5 rbl. tsentner tagab üks hektar põllupinda seega 100 rbl. eest saaki.

Kui oleksime tabeli B koostamisel võtnud suuruse x_2 põhitundmatuks ning paigutanud ta suuruse x_3 kohale, siis oleks ühe hektari hinnang tõusnud isegi kuni 400 rublani. Sel juhul poleks meil aga piisanud tööjõudu. Kui aga tabeli B koostamisel suurus x_2 siiski põhitundmatuks võtta (algoritm võimaldab seda), siis peaksime ta paigutama suuruse x_4 kohale, et mitte rikkuda ülesande tingimusi. Sel juhul oleks ühe mehhaniseeritud töödel tehtud inimpäeva hinnang tõusnud tabelis B kuni 87 rublani. Samal ajal oleks aga veerus x_1 ühe tsentneri nisu hinnanguks 2,4 rbl. Lahendades ülesannet edasi ja koostades tabeli C, jõuaksime samadele andmetele, mis me eespool (lk. 202) tabelis C juba saime. Seda võib iga lugeja iseseisvalt kontrollida.

Tabelis C saadud ühe hektari maa hinnang 55 rbl. iseloomustab antud tingimustes maa kasutamise suhtelist efektiivsust, võrreldes teiste ressurssidega; kordaja 75 on aga mehhaniseeritud töödel kulutatud inimpäeva suhtelise efektiivsuse näitaja. Antud tingimustes võimaldaks teraviljakultuuride külvipinna suurendamine ühe hektari võrra kogutoodangut 55 rbl. võrra suurendada. Ent miks mitte 100 rbl. võrra? Seepärast, et teravilja külvipinda suurendades oleme sunnitud samal ajal mehhaniseeritud tööjõu vähesuse pärast maakasutuse seisukohalt tunduvalt tõhusama kultuuri — kartuli — kasvupinda vähendama. Ja ainult seetõttu, et mehhaniseeritud töödel kasutatakse tööaega nisukasvatuses tõhusamalt kui kartulikasvatuses, tekib võimalus ja vajadus ressursse nende tootmisharude vahel ümber jaotada.

Teine näide. Soovides rõhutada erinevate lahendivariantide majandusliku analüüsimise metoodika suurt tähtsust, vaatame veel üht, veidi keerukamat näidet.

Olgu vaja leida, kuidas majandis optimaalselt kombineerida nelja tootmisharu: teraviljakasvatust, silomaisi kasvatust, piimakarjandust ja seakasvatust. Tootmisvõimalused: 10 000 ha külvipinda ja peale selle veel 1000 ha looduslikke heina- ja karjamaid, 20 050 inimpäeva tööaega mehhaniseeritud tööde ja 120 000 inimpäeva hobu- ja käsitsitööde tegemiseks.

Looduslike söödakõlvikute saagikus on keskmiselt 10 tsentnersöötühikut hektarilt. Põllundustoodangust on ette nähtud kulutada loomasöödaks kogu silomaisi saak ja 40% teravilja kogusaagist. Teraviljakultuuride saagikus on 20 ts ja silomaisi saagikus 400 ts (valmissilo) hektarilt. Teravilja söötühikutesse ümberarvutamise koefitsient on 1,0 ja silol 0,2.

Kulunormid ühe tooteühiku kohta ja hinnad on esitatud tabelis.

Tootmisvõimalused	Mõõtühik	Kulud				Kokku tootmisvõimalusi
		1 ts teravilja kohta x_1	1 ts silo kohta x_2	ühe lehma kohta x_3	sigade kaaluiibe 1 ts kohta x_4	
Põllumaa	ha	0,05	0,0025	—	—	10 000
Tööajafond mehhaniseeritud töödeks	inimpäev	0,018	0,01	0,25	0,03	20 050
Tööajafond hobu- ja käsitsitöödeks	„	0,1	0,037	5,0	1,9	120 000
Söödad	tsentnersöötühik	—	—	50	10	$10\,000+0{,}4x_1+0{,}2x_2$
Hind	rbl.	4	0	500	100	

Koostame võrrandisüsteemi

$$
\begin{aligned}
&+0{,}05x_1 +0{,}0025x_2 +0 +0 +x_5 = 10\,000\\
&+0{,}018x_1 +0{,}01x_2 +0{,}25x_3 +0{,}03x_4 +x_6 = 20\,050\\
&+0{,}1x_1 +0{,}037x_2 +5x_3 +1{,}9x_4 +x_7 = 120\,000\\
&-0{,}4x_1 -0{,}2x_2 +50x_3 +10x_4 +x_8 = 10\,000
\end{aligned}
$$

$$C=0+4\cdot(1-0{,}4)x_1+0+500x_3+100x_4$$

Leida suuruse C maksimum.

Põhitundmatud	Vabaliikmed	Kõrvaltundmatud				Lahendivariant
		x_1	x_2	x_3	x_4	
x_5	10 000	0,05	0,0025	0	0	I
x_6	20 050	0,018	0,01	0,25	0,03	
x_7	120 000	0,1	0,037	5,0	1,9	
$\leftarrow x_8$	10 000	−0,4	−0,2	$\boxed{50,0}$	10,0	
C	0	−2,4	0	−500	−100	
		x_1	x_2	x_8	x_4	
$\leftarrow x_5$	10 000	$\boxed{0,05}$	0,0025	0	0	II
x_6	20 000	0,02	0,011	−0,005	−0,02	
x_7	119 000	0,14	0,057	−0,1	0,9	
$\rightarrow x_3$	200	−0,008	−0,004	0,02	0,2	
C	100 000	−6,4	−2,0	10	0	
		x_5	x_2	x_8	x_4	
$\rightarrow x_1$	200 000	20	0,05	0	0	III
$\leftarrow x_6$	16 000	−0,4	$\boxed{0,01}$	−0,005	−0,02	
x_7	91 000	−2,8	0,05	−0,1	0,9	
x_3	1 800	0,16	−0,0036	0,02	0,2	
C	1 380 000	128	−1,68	10	0	
		x_5	x_6	x_8	x_4	
x_1	120 000	22	−5	0,025	0,1	IV
$\rightarrow x_2$	1 600 000	−40	100	−0,5	−2,0	
$\leftarrow x_7$	11 000	−0,8	−5	−0,075	$\boxed{1,0}$	
x_3	7 560	0,016	0,36	0,0182	0,1928	
C	4 068 000	60,8	168	9,16	−3,36	

Vaadleme eri lahendivariantides saadud tulemuste tähendust. Esimeses lahendivariandis esindavad vabaliikmed olemasolevaid ressursse, mida veel ei kasutata. Tulemusena on koguloodangu maksumus null rubla (C=0),

Põhi-tund-matud	Vaba-liikmed	Kõrvaltundmatud				Lahendi-variant
		x_5	x_6	x_8	x_7	
x_1	118 900	22,08	−4,5	0,0325	−0,1	V
x_2	1 622 000	−41,6	90,0	−0,65	2,0	
x_4	11 000	−0,8	−5,0	−0,075	1,0	
x_3	5 439,2	0,17	1,324	0,0326	−0,1928	
C	4 104 960	58,112	151,2	8,908	3,36	

Viies lahendivariant on optimaalne. Kogutoodangu maksumus koosneb selles järgmistest elementidest:

teraviljad	118 900 · 2,4 =	285 360 rbl.;
sigade kaaluiive	11 000 · 100 =	1 100 000 rbl.;
veisefarmi toodang	5439,2 · 500 =	2 719 600 rbl.;
Kokku		4 104 960 rbl.

Külvipinnad:

teraviljakultuuridel	118 900 : 20 =	5 945 ha;
silomaisil	1 622 000 : 400 =	4 055 ha;
Kokku		10 000 ha.

Söödavarud:

looduslikud söödakõlvikud		10 000 ts-sü;
silomais	1 662 000 · 0,2 =	324 000 ts-sü;
söödateravili	118 900 · 0,4 =	47 560 ts-sü;
Kokku		381 960 ts-sü.

Söödavajadus:

veistele	5 439,2 · 50 =	271 960 ts-sü;
sigadele	11 000 · 10 =	110 000 ts-sü;
Kokku		381 960 ts-sü.

Vaatleme eri lahendivariantides saadud tulemuste tähendust. Esimeses lahendivariandis esindavad vabaliikmed olemasolevaid ressursse, mida veel ei kasutata. Tulemusena on kogutoodangu maksumus null rubla (C=0).

Kõrvaltundmatute kordajateks on sihifunktsioonis j-inda toote hinnad (vastupidise märgiga), ülesande tingimusi sisaldavates ridades aga i-nda ressursi kulunormid j-indat liiki toodangu valmistamiseks.

Ülesande teises lahendivariandis on neis arvudes toimunud mõningaid muudatusi. Põhitundmatute väärtuste muutumine on silmanähtav. Olemasoleva 10 000 tsentnersöötühiku suuruse söödavaru arvel on nähtud ette pidada 200 lehma. See tagab 100 000 rbl. eest toodangu saamist. Tööjõuvarudest kasutatakse ära mehhaniseeritud töödel 50 inimpäeva ning hobu- ja käsitsitöödel 1000 inimpäeva.

Erilist huvi pakub kõrvaltundmatute kordajate muutumine. Sihifunktsiooni real on endiste —2,4; 0, —500 ja —100 asemel nüüd —6,4; —2,0; 10 ja 0.

Uued kordajad tähendavad järgmist: 6,4 on ühe teraviljatsentneri hind, mille puhul on võetud arvesse, et 40% teravilja kogusaagist kasutatakse ära söötadeks. Miks just 6,4 rbl.? Asi on selles, et antud tingimustel on ühe tsentnersöötühiku hinnang 10 rbl. (suuruse x_8 kordaja on 10), sest ühe lehma pidamiseks on vaja 50 tsentnersöötühikut aastas, lehmalt saadava kogutoodangu maksumus on aga 500 rbl. ($500 : 50 = 10$). Ülesande tingimuste kohaselt läheb 40% teraviljasaagist omakorda jällegi söötadeks ($0{,}4 \cdot 10 = 4$ rbl.). Ülejäänud 60% teravilja kogutoodangust müüakse hinnaga 4 rbl. tsentner, seega saadakse müümisel kogutoodangu iga tsentneri eest $4 \cdot 0{,}6 = 2{,}4$ rbl. Nii selgubki, et üldine sissetulek ühe tsentneri teravilja müügist on $0{,}6 \cdot 4 + 0{,}4 \cdot 10 = 6{,}4$ rbl.

Silo hinnang on 2 rbl., sest ühes tsentneris silos sisaldub 0,2 tsentnersöötühikut, kust selgub, et $0{,}2 \cdot 10 = 2$ rbl. Ühe tsentneri sealiha hinnang on null. See tähendab, et kui antud tingimustes võtta plaani mitte lehmade pidamine, vaid sealiha tootmine, siis ei põhjustaks see ei kogutoodangu vähenemist ega ka suurenemist. Põhjuseks on, et ülesande tingimuste kohaselt on söötade kasutamise efektiivsus neis mõlemas loomakasvatusharus võetud ühesuguseks: üks tsentnersöötühik tagab loomakasvatustoodete saamise 10 rbl. eest.

Huvitavad muutused on toimunud kõrvaltundmatute kordajatega ridades x_6, x_7 ja x_8. Mis puutub reasse x_5, siis on see jäänud siiani muutumatuks. Vaatleme lähemalt suuruse x_1 kordajaid. Ühe tsentneri nisu tootmise võtmine plaani eeldab 0,14 inimpäeva kulutamist käsitsitöödel.

Sellega võib suurendada loomade arvu 0,008 lehma võrra, kogutoodangu maksumus aga kasvab 6,4 rbl. võrra. Ühe teraviljatsentneri kohta tulevad tööjõukulud suureneksid mehhaniseeritud töödel 0,018-lt 0,02-le inimpäevale, hobu- ja käsitsitöödel aga 0,1-lt 0,14-le inimpäevale.

Tööjõu kulunormide suurenemine teises lahendivariandis seletub sellega, et siin on võetud põhitundmatuks suurus x_3 (lehmade arv); see on aga seotud suurusega x_1. Suuruse x_1 väärtuse suurenemine kutsub esile vastava kasvu ka suuruse x_3 väärtustes. Iga x_3 toodanguühiku peale kulutatakse omakorda jällegi mitte ainult söötasid, vaid ka tööjõudu. Seepärast on tööjõu kulunormid teraviljatsentneri kohta suurenenud. Normid on seejuures kasvanud täiesti vältimatu suuruse võrra. Seda on hõlpus kontrollida. On teada, et igast toodetud teraviljatsentnerist kulutatakse 0,4 ts söödaks. Ühe lehma pidamiseks kulub aastas 50 tsentnersöötühikut. Ühe tsentneri teravilja toiteväärtus on võrdne ühe tsentnersöötühikuga. Järelikult saab 0,4 ts teraviljast toita lehma $0{,}4 : 50 = 0{,}008$ aasta kestel. Ühe lehma peale kulutatakse aastas keskmiselt 0,25 inimpäeva mehhaniseeritud töid, lehma pidamiseks 0,008 aasta kestel kulub selleks aga $0{,}25 \cdot 0{,}008 = 0{,}002$ inimpäeva. Siit järeldub, et $0{,}02 = 0{,}018 + 0{,}002$. Samasuguse arvutluse koostame hobu- ja käsitsitööde kohta. Tööjõu aastane kulunorm on ühe lehma kohta 5 inimpäeva, 0,008 aasta pikkuse perioodi kohta aga on see $5 \cdot 0{,}008 = 0{,}04$. Siit leiame, et $0{,}14 = 0{,}1 + 0{,}04$. Vastavalt on muutunud ka suuruse x_2 kordajad.

Suuruse x_8 kordajad (—0,005), (—0,1) ja 0,02 tähendavad, et antud tingimustes lubab iga täiendavalt toodetav tsentnersöötühik suurendada lehmade arvu 0,02 lehma võrra, kusjuures kasutatakse täiendavalt ära mehhaniseeritud töödel 0,005 ning hobu- ja käsitsitöödel 0,1 inimpäeva. Kogutoodangu maksumus suureneb sellest 10 rbl. võrra. Suuruse x_4 kordajad (—0,02), 0,9 ja 0,2 tähendavad, et ühe tsentneri sealiha tootmine kutsub antud tingimustes esile veiste arvu vähenemise 0,2 lehma võrra, tööjõukulu suurenemise hobu- ja käsitsitöödel 0,9 inimpäeva võrra ja vähenemise mehhaniseeritud töödel 0,02 inimpäeva võrra. Kogutoodangu maksumus jääks muutumatuks.

Analoogiliselt võiks seletada kõiki kordajaid ja vabaliikmeid ka III, IV ja V lahendivariandis.

Vaatleme nüüd lühidalt lahendi viiendat (optimaalset) varianti. Selle variandi kohaselt on nähtud ette toota

teravilja	118 900 ts;
silo	1 622 000 ts;
sealiha	11 000 ts;
pidada lehmi	5 439 tk.

Saadava kogutoodangu maksumus on 4 104 960 rbl. Vaatleme nüüd, mida tähendavad kõrvaltundmatute kordajad selles lahendivariandis. Suuruse x_5 kordajad 22,08, (—41,6), —0,8, 0,17 ja 58,112 tähendavad, et antud tingimustes lubab iga täiendavalt kasutusele võetud hektar põllumaad suurendada teraviljatoodangut 22,08 tsentneri võrra, kusjuures samaaegselt silo toodang väheneks 41,6 ts võrra; söödavarud suureneksid, millega ühtaegu võiks vähendada sealiha toodangut 0,8 ts ja suurendada veiste arvu 0,17 lehma võrra. Kõigi nimetatud muutuste tulemusena kasvaks kogutoodangu maksumus 58,112 rbl. võrra. Suuruse x_6 kordajad (—4,5), 90,0, (—5), 1,324 ja 151,2 tähendavad, et antud tingimustes võimaldaks iga mehhaniseeritud töödel tehtav täiendav inimpäev suurendada maisisilo toodangut 90 ts võrra. Samal ajal vähendatakse teravilja toodangut 4,5 ts võrra. Söödavarude suurendamine võimaldab suurendada veiste arvu 1,324 lehma võrra, kui samal ajal sealiha tootmist 5 ts võrra vähendatakse. Kogutoodangu maksumus suureneb sellest 151,2 rbl. võrra. Analoogiline on ka suuruste x_7 ja x_8 kordajate tähendus.

Eraldi tuleb käsitleda kordajaid nullreal (sihifunktsiooni real): $58{,}112x_5$, $151{,}2x_6$, $3{,}36x_7$ ja $8{,}908x_8$. Need arvud ütlevad, et antud tingimustes kasvab kogutoodang iga täiendavalt kasutusele võetava külvipinna hektari arvel 58,112 rbl. võrra, ühe täiendava inimpäeva arvel mehhaniseeritud töödel 151,2 rbl. ning hobu- ja käsitsitöödel 3,36 rbl. võrra ning iga täiendavalt toodetud tsentnersöötühiku mõjul 8,908 rbl. võrra.

Tuleb rõhutada, et käsitletud võrrandites olevad kordajad, mis iseloomustavad nii ülesande tingimusi kui ka selle lahendamise eesmärke, on erandlikult suure tähtsusega majandusliku analüüsi ja tootmise planeerimise vahendid. Ühtlasi ei tohi nende tähtsust ka mitte üle hinnata, nagu seda mõned majandusteadlased ja matemaatikud mõnikord kalduvad tegema.

Niisiis piisab meie näites sellest, kui suurendame mehhaniseeritud töödel kasutatava tööjõu ressursse 2200 inim-

Põhitundmatud	Vabaliikmed	Kõrvaltundmatud				Lahendivariant
		x_5	x_2	x_8	x_4	
x_1	200 000	20	0,05	0	0	
x_6	18 250	−0,4	0,01	−0,005	−0,02	
$\leftarrow x_7$	91 000	−2,8	$\boxed{0{,}05}$	−0,1	0,9	III
x_3	1 800	0,16	−0,0036	0,02	0,2	
C	1 380 000	128	−1,68	10	0	
		x_5	x_7	x_8	x_4	
x_1	109 000	22,8	−1	0,1	−0,9	
x_6	50	0,72	−0,2	0,035	−0,38	
$\rightarrow x_2$	1 820 000	−56	20	−2	18	IV
x_3	8 352	−0,0416	0,072	0,0128	0,2648	
C	4 437 600	33,92	33,6	6,64	30,24	

päeva võrra või vähendama tööjõu kulunorme ühe tsentneri silo kohta 0,002 inimpäeva võrra, et tulemusena saada kõigist eelmistest oluliselt erinev optimaalne lahendivariant.

Suurendades mehhaniseeritud töödel kasutatavaid tööjõuressursse 2250 inimpäeva võrra, saame järgmised, s. o. kolmanda ja neljanda lahendivariandi uuel kujul (lk. 212).

Neljas lahend on optimaalne. Sel juhul iga mehhaniseeritud töödel täiendavalt kasutatud inimpäev annaks 151,2 rbl. eest rohkem kogutoodangut kui leheküljel 208 toodud viies lahendivariant, sest

$$\frac{4\,437\,600-4\,104\,960}{22\,250-20\,050}=151{,}2.$$

Ülesande teise variandi optimaalses lahendis on nullreal avaldised $33{,}92x_5$, $33{,}6x_7$, $6{,}64x_8$ ja $30{,}24x_4$. Võrreldes eespool leitud esimese optimaalse lahendiga on siin maa hinnang tunduvalt langenud: 58,112-lt 33,92-le rublale. Tugevasti on tõusnud ühe inimtunni käsitsitöö hinnang: 3,36-lt rublalt 33,6 rublale, tsentnersöötühiku hinnang aga on langenud 8,908-lt 6,64-le rublale.

Siit tuleneb järeldus, et kõik kordajad (ehk hinnangud) on üksteisega vastastikku seotud ja mõjustavad üksteist. Mida täielikumalt on ülesande koostamisel võetud arvesse kõik ressursid, nende kulunormid ja esialgsed toodangu lähtehinnad, seda objektiivsemad on ülesande lahendamise käigus nii vahetulemustes kui ka optimaalses lahendivariandis sisalduvad arvutuslikult leitud normatiivid ja hinnangud.

Tuleb märkida ka seda, et teise ülesande neljandas lahendivariandis oli suurus x_4 (sealihatoodang) kõrvaltundmatu. Sihifunktsiooni real on suuruse x_4 kordajaks (s. o. hinnanguks) 30,24. Arusaadavalt pole see sealiha tsentnerihind. See kordaja on positiivne ja antud juhul näitab ta, et kui võtta suurus x_4 põhitundmatuks, s. t. võtta tootmisplaani ühe tsentneri sealiha tootmine, siis väheneb kogutoodangu maksumus 30 rubla ja 24 kopika võrra (sigade kaaluiibe iga tsentneri kohta). Suuruse x_4 muud kordajad, s. o. (—0,9), (—0,38), 18 ja 0,2648 iseloomustavad seakasvatuse osatähtsust majandi üldises tootmisharude süsteemis.

Kui võtta plaani ühe tsentneri sealiha tootmine, siis tingib see teraviljatoodangu suurendamist 0,9 ts võrra, maisisilo toodangu vähendamist 18 ts võrra ja veiste arvu vähendamist 0,2648 lehma võrra. Ka mehhaniseeritud töödel kasutamata jääv tööaeg suureneb 0,38 inimpäeva võrra.

Oletagem, et meil on tarvis toota 1000 ts sealiha. Sel juhul peaks üldises tootmisplaanis olema antud tingimustel ette nähtud:

1) toota teravilja
$x_1 = 109\,000 + 0{,}9 \cdot 1000 = 109\,900$ ts;

2) toota maisisilo
$x_2 = 1\,820\,000 - 18 \cdot 1000 = 1\,802\,000$ ts;

3) pidada lehmi
$x_3 = 8\,352 - 0{,}2648 \cdot 1000 = 8087{,}2$ tk;

4) toota sealiha
$x_4 = 1000$ ts;

5) saada kogutoodangut
$C = 4\,437\,600 - 30{,}24 \cdot 1000 = 4\,407\,360$ rbl.;

6) jätta mehhaniseeritud töödel kasutamata
$x_6 = 50 + 0{,}38 \cdot 1000 = 430$ inimpäeva.

Võime niisiis üldistavalt öelda, et kõrvaltundmatute kordajad on koefitsiendid, mis väljendavad tootmisharude-vahelisi proportsioone plaani üldises süsteemis. Nad võimaldavad juba väljaarvutatud optimaalsesse plaani hõlpsalt korrektiive teha.

*

Optimaalse plaani kordajad võime saada ka nn. duaalülesande lahendamisel. Demonstreerime seda ühe eespool toodud arvnäite abil.

Teise näite esialgsel lahendamisel saime optimaalse plaani viienda lahendivariandina (lk. 208). Selles variandis oli tootmisressursside ühikute hinnanguteks: põllumaal (x_5) 58,112 rbl., mehhaniseeritud töödel (x_6) 151,2 rbl., hobu- ja käsitsitöödel (x_7) 3,36 rbl., söötadel (x_8) 8,908 rbl.

Nagu muud optimaalse plaani andmed, on ka ülaltoodud hinnangud saadud nn. otseülesande, s. o. lk. 206 võrrandisüsteemi näol formuleeritud ülesande lahendamisel simpleksmeetodiga. Selle ülesande duaalülesanne saadakse otseülesande transponeerimisel. Transponeerimisel muutuvad veerud ridadeks, read veergudeks, sihifunktsiooni kordajad muutuvad vabaliikmeteks, vabaliikmed aga sihifunktsiooni kordajaiks. Kui otseülesandes leiti maksimum, siis tuleb duaalülesandes leida miinimum. Tähistame ülesandesse kuuluvad tundmatud y_j ja fiktiivsed tundmatud v_j.

Olgu meil teada võrrandisüsteem (s. o. otseülesanne):

$$\begin{array}{llllllllll}
0{,}05x_1 & +0{,}0025x_2 & +0 & +0 & +x_5 & & & & = & 10\,000 \\
0{,}018x_1 & +0{,}01x_2 & +0{,}25x_3 & +0{,}03x_4 & & +x_6 & & & = & 20\,050 \\
0{,}1x_1 & +0{,}037x_2 & +5x_3 & +1{,}9x_4 & & & +x_7 & & = & 120\,000 \\
-0{,}4x_1 & -0{,}2x_2 & +50x_3 & +10x_4 & & & & +x_8 & = & 10\,000
\end{array}$$

$$C=0+2{,}4x_1+0+500x_3+100x_4.$$

Leida suuruse C maksimum.

Duaalülesanne on sel juhul:

$$\begin{array}{llllllllll}
0{,}05y_1 & +0{,}018y_2 & +0{,}1y_3 & -0{,}4y_4 & +v_1 & & & & = & 2{,}4 \\
0{,}0025y_1 & +0{,}01y_2 & +0{,}037y_3 & -0{,}2y_4 & & +v_2 & & & = & 0 \\
0 & +0{,}25y_2 & +5y_3 & +50y_4 & & & +v_3 & & = & 500 \\
0 & +0{,}03y_2 & +1{,}9y_3 & +10y_4 & & & & +v_4 & = & 100
\end{array}$$

$$f(y)=10\,000y_1+20\,050y_2+120\,000y_3+10\,000y_4.$$

Leida suuruse f(y) miinimum.

Kasutame duaalülesande lahendamiseks fiktiivsete tundmatute meetodit (tabelid lk. 215—216).

Optimaalseks osutub viies lahend, sest selles on kõrvaltundmatute kordajad nullreal miinusmärgiga. Otsitavad optimaalse plaani näitarvud saime siin põhitundmatute väärtustena. Neiks on: maa (y_1) 58,11 rbl. hektar, tööjõud mehhaniseeritud töödel (y_2) 151,5 rbl. inimpäev, hobu- ja käsitsitöödel (y_3) **3,36** rbl. inimpäev, söödad (y_4) 8,905 rbl. tsentnersöötühik.

Ülesande lahendus

Põhitundmatud	Vabaliikmed	Kõrvaltundmatud				Lahendivariant
		y_1	y_2	y_3	y_4	
v_1	2,4	0,05	0,018	0,1	−0,4	I
v_2	0	0,0025	0,01	0,037	−0,2	
v_3	500	0	0,25	5,0	50,0	
←v_4	100	0	0,03	1,9	$\boxed{10,0}$	
f(y)	0 602,4M	−10 000 0,0525M	−20 050 0,308M	−120 000 7,037M	−10 000 59,4M	
		y_1	y_2	y_3	v_4	
v_1	6,4	0,05	0,0192	0,176	0,04	II
v_2	2,0	0,0025	0,0106	0,075	0,02	
←v_3	0	0	$\boxed{0,1}$	−4,5	−5,0	
→y_4	10,0	0	0,003	0,19	0,1	
f(y)	100 000 8,4M	−10 000 0,0525M	−20 020 0,1298M	−118 100 −4,249M	1 000 −5,94M	
		y_1	v_3	y_3	v_4	
v_1	6,4	0,05	−0,192	1,04	1,0	III
←v_2	2,0	0,0025	−0,106	$\boxed{0,552}$	0,55	
→y_2	0	0	10,0	−45	−50	
y_4	10,0	0	−0,03	0,325	0,25	
f(y)	100 000 8,4M	−10 000 0,0525M	200 200 −1,298M	−1 019 000 1,592M	−1 000 000 0,55M	

Põhitundmatud	Vabaliikmed	Kõrvaltundmatud y_1	v_3	v_2	v_4	Lahendivariant
$\leftarrow v_1$	2,6318	$\boxed{0,04529}$	0,0077	−1,884	−0,0363	IV
y_3	3,6232	0,004529	−0,192	1,8116	0,9964	
$\rightarrow y_2$	163,35	0,20385	1,36	81,5218	−5,172	
y_4	8,8226	−0,00147	0,0324	−0,5887	−0,0738	
f (y)	3 792 000 2,6318*M*	−5385 0,04529*M*	4522,5 −0,9923*M*	1 846 014 −2,884*M*	15 307,97 −1,0363*M*	
—	—	v_1	v_3	v_2	v_4	
$\rightarrow y_1$	58,11	22,08	0,17	−41,592	−0,8014	V
y_3	3,36	−0,1	−0,192	2,0004	0,9997	
y_2	151,2	−4,501	1,3254	90,0	−5,0086	
y_4	8,908	0,0325	0,03265	−0,65	−0,075	
f (y)	4 104 921	118 900 −*M*	5 438,0 −*M*	1 622 007 −*M*	10 992 −*M*	

Leitud hinnangud langevad peaaegu täielikult kokku otseülesande lahendamisel saadud optimaalse plaani andmetega. Mõningad vähetähtsad kõrvalekaldumised on tingitud arvude ümardamisest.

Käsitletud näidetest ja kordajate a_{ij} ning c_j majandusliku sisu analüüsist tuleneb kaks tähtsat järeldust.

Esimene järeldus. Et üheski ettevõttes, samuti nagu kogu rahvamajanduses täiesti vabu ressursse tavaliselt pole, siis väljendab mingi tootmisharu arendamise efektiivsust vahe tema laiendamisel saadava absoluutse efekti ja ressursside ümberpaigutamisega seotud kadude vahel. Nimetatud vahe pole midagi muud kui ühiskondliku töö säästt.

Teine järeldus. Kui ülesanne hõlmab kõiki rahvamajandusharusid ja kõiki tootmisvõimalusi, samuti teaduslikult põhjendatud kulunormatiive ja hindu, siis saadakse tema lahendamise tulemusena sihifunktsiooni reale kordajad, mis näitavad, kui suur on mingi tootmisressursi ühe ühiku tootmisse rakendamisest saadav ühiskondliku töö sääst teiste ressurssidega võrreldes. Ülesande tingimusi sisaldavates ridades olevad kordajad kujutavad endast rahvamajandusharude arengu proportsionaalsuskoefitsiente.

MÕNINGAID MATEMAATILISTE PLANEERIMISMEETODITEGA SEOTUD PROBLEEME PÕLLUMAJANDUSES

Eelmistes peatükkides on käsitletud mitmeid majanduslikes uuringutes ja põllumajanduse planeerimises kasutatavaid matemaatilisi mudeleid. Neid tuleb vaadelda selle suure töö algusena, mis seisab ees uute mudelite konstrueerimisel ja juba loodute täiendamisel ning üldse põllumajanduse uurimisel kasutatavate matemaatiliste meetodite edasisel väljaarendamisel.

Vaatleme lühidalt, missugustes põhilistes suundades see töö kulgeb. Eespool tutvustatud mudelitest oli üks peamisi ja kõige keerulisemaid põllumajandussaaduste tootmise paigutamise ja spetsialiseerimise optimaalse variandi leidmise ülesande mudel. Praegusel kujul võimaldab see mudel ja tema rakendamise metoodika põllumajanduse planeerimisel püstitada ja lahendada väga olulise tähtsusega praktilisi ülesandeid. Samal ajal on see mudel, niisamuti nagu teisedki lineaarsed mudelid, põhimõtteliselt staatiline. Nende mudelite järgi koostatud ülesannetega saab leida, kuidas antud ressursse antud normide kohaselt ja antud kindla perioodi (tavaliselt aasta) jooksul optimaalselt kasutada. Ent põllumajandussaaduste tootmise, paigutuse ja spetsialiseerimise probleemide lahendamisel ei saa jätta tähele panemata, et vaadeldavad protsessid muutuvad pidevalt.

Üldiselt võttes võib seda dünaamikat võtta arvesse nii, et lahendatakse plaaniperioodi iga aasta kohta eraldi ülesanne ja saadud tulemusi üldistatakse. See töö nõuab aga esiteks küllalt palju vaeva ja teiseks ei taga ta sugugi optimaalsete tulemuste saamist.

Seepärast on põllumajandussaaduste tootmise paigutuse ja spetsialiseerimise optimaalse plaani leidmise ülesande lahendamiseks vajaliku dünaamilise mudeli loomine üheks kõige põletavamaks küsimuseks.

Teine suur ja siiani lahendamata küsimus matemaatiliste meetodite kasutamisel põllumajanduses on tootmisettevõtete optimaalse suuruse kindlaksmääramine. Viimastel aastatel on sellele küsimusele pööratud suurt tähelepanu. Ent nagu siiani, nii jääb see probleem ka tulevikus aktuaalseks. Mitte seepärast, et seni pole veel leitud, missugune on sovhoosi ja kolhoosi kõige parem suurus kõigis tsoonides ja tootmissuundades, vaid seepärast, et otsitav on iseenesest ajas muutuv suurus.

Üksikud seni tehtud katsed leida matemaatiliste meetodite kaasabil põllumajandusettevõtete optimaalne suurus on taandunud vastuoluliste tendentside arvestamisele, mis avalduvad tootmiskulude ja tooraine ning valmistoodangu transpordikulude muutumises. Seejuures on aga üks otsustavaid tegureid, millest ettevõtte suurus oleneb, tema juhitavus. Kui sovhoose ja kolhoose on tulnud mitmeks väiksemaks jagada, on arvestatud enamasti just seda, et majand on olnud liiga suur ja raskesti juhitav. Põllumajandusettevõtete optimaalse suuruse leidmisel tuleb arvestada kõigepealt objektiivseid majanduslikke tegureid. Enamasti on nende tegurite mõju võimalik matemaatiliste meetoditega arvestada.

Siiski on olemas ka hulk selliseid tegureid, mida ei saa matemaatiliselt arvestada. Tähtsaimad neist on ettevõtte juhtkonna töööskus, tootmise organisatsioon ja juhtimise süsteem, kogu ettevõtte töötajaskonna kvalifikatsioon ja teadlikkus jms.

Äärmiselt keeruline on saagikuse planeerimine. Keerulisus ei seisne seejuures selles, et saagikust mõjustab palju tegureid, vaid selles, et seda, kuidas saagikus neist konkreetselt sõltub, on raske kindlaks teha. Et selliseid sõltuvussuhteid päevavalgele tuua, on vaja suurt hulka katse- ja muid andmeid.

Sellist laadi andmeid võib hankida põllumajandusettevõtetest, instituutidest, katsejaamadest ja muudest asutustest. Kogutud andmete uurimine ja üldistamine, samuti vastavate katsete korraldamine loob tegeliku aluse, millele võib rajada saagikuse ja seda mõjustavate tegurite vaheliste funktsionaalsete seoste käsitluse.[1] Selliste sõltuvussuhete kindlakstegemine on tegelikuks baasiks, millele

---

[1] Saagikuse olenevus teda mõjustavatest teguritest on oma olemuselt korrelatiivne. Seda on näidanud paljud uurimused. Kogutud andmete statistilisel töötlemisel võib neid seoseid teatud tingimustel funktsionaalsetena kirjeldada, nende põhiolemust see aga ei muuda. — *Toimetaja märkus.*

võib tugineda saagikuse planeerimisel elektronarvutite abil.

Matemaatika ja elektronarvutite rakendamise seisukohalt põllumajanduses pole sugugi vähem tähtis ka väärtusseaduse toimega seotud näitajate (hinna, omahinna, kasumi) optimaalse planeerimise ja analüüsimise metoodika väljatöötamine.

Põhiliste rahaliste näitajate optimaalne planeerimine on kolhoosides ja sovhoosides, samuti aga kogu põllumajanduses kui paljude iseärasustega rahvamajandusharus, seotud suurte raskustega. Siiani on paljud neist küsimustest veel läbi uurimata. Võib aga kindlalt väita, et nende meetodite väljatöötamine teostub juba kõige lähemas tulevikus.

Matemaatiliste meetodite majandusteaduses ja planeerimises kasutamise suur efektiivsus on silmanähtav. Nende meetodite ja elektronarvutite kasutusele võtmine tegelikus planeerimistöös ja tootmise juhtimises ei saa toimuda isevoolu teel. Selleks on vaja teha palju mitmesuguseid ettevalmistustöid. Eriti vajalik on uue raamatupidamis- ja aruandlussüsteemi ellurakendamine, planeerimise ja tootmise juhtimise täiuslikumate meetodite väljatöötamine, matemaatiliste meetodite ja elektronarvutite kasutamisel rajanevate teaduslike uuringute laiendamine, selleks vajaliku töötajaskonna ettevalmistamine ja ümberkvalifitseerimine.

Vastava ettevalmistusega inimeste puudumine on üks tõsisemaid takistusi matemaatiliste meetodite planeerimispraktikasse juurutamisel. Seda puudust ei saa kõrvaldada üleöö. Ent juba praegu tuleb võtta kasutusele konkreetseid abinõusid matemaatilisi meetodeid valdavate põllumajandusökonomistide ettevalmistamiseks.

Matemaatiliste uurimismeetoditega tegelemine on majandusteaduse uusi suundi. Tulevik kuulub sellele suunale.

HARJUTUSÜLESANDEID

ÜLESANDEID I JA II PEATÜKI KOHTA

1. **ülesanne.** Leida kahe kultuuri — suhkrupeedi ja odra — külvipindade optimaalne vahekord, et saada maksimaalne hulk toodangut (tsentnersöötühikuis). Tootmisressursid: 2000 ha maad, 22 500 inimpäeva tööaega.

Saagikus on suhkrupeedil 250 ja odral 20 ts hektarilt. Tööaega kulub ühe hektari kohta suhkrupeedil 25 ja odral 2 inimpäeva. Söötühikutesse ümberarvutamise koefitsiendid on suhkrupeedil 0,25 ja odral 1,2.

2. **ülesanne.** Leida kahe kultuuri — nisu ja kartuli — külvipindade optimaalne vahekord. Tootmisressursid: 7000 ha põllumaad, masinate tööaega 9400 traktorvahetust, hobu- ja käsitsitöödeks tööaega 45 000 inimpäeva.

Töökulu hektari kohta, saagikus ja hinnad

	Nisu	Kartul
Masinate tööaja kulu (traktorvahetustes)	0,6	4,6
Tööajakulu hobu- ja käsitsitöödel (inimpäevades)	2,0	22,0
Saagikus (ts/ha)	20,0	100,0
Toodangu 1 ts hind (rbl.)	5,0	4,0

3. **ülesanne.** Leida kolme kultuuri — nisu, tatra ja kartuli — külvipindade optimaalne vahekord. Tootmisressursid: külvipinda 6000 ha, tööaega mehhaniseeritud töödele 5000 ning hobu- ja käsitsitöödel 9000 inimpäeva.

Töökulu hektari kohta, saagikus ja hinnad

	Nisu	Tatar	Kartul
Tööajakulu mehhaniseeritud töödel (inimpäevades)	0,5	1	5
Tööajakulu hobu- ja käsitsitöödel (inimpäevades)	0,5	0,5	20
Saagikus (ts/ha)	20	10	100
Toodangu 1 tsentneri hind (rbl.) . .	4	10	3

Optimaalsuskriteeriumiks on maksimaalne kogutoodangu maksumus.

4. **ülesanne.** Leida kolme tootmisharu — teravilja-, söödasuhkrupeedi- ja seakasvatuse — optimaalne vahekord.

Tootmisressursid: 5000 ha põldu ja 100 000 inimpäeva tööaega. Söödana kasutatakse ära 50% teraviljasaagist ja kogu suhkrupeedisaak. Söötühikutesse ümberarvutamise koefitsient on teraviljal 1,2 ja suhkrupeedil 0,25.

Tootmiskulud, toodete hinnad ja olemasolevad tootmisvõimalused

Tootmisvõimalused	Mõõtühik	Kulud ts kohta			Kokku tootmisvõimalusi
		teraviljal x_1	suhkrupeedil x_2	sigade kaaluiibel x_3	
Põllupind	ha	0,05	0,005	—	5000
Tööjõud	inimpäev	0,1	0,1	2	100 000
Söödad	tsentnersöötühik	—	—	5	$0+0{,}5\cdot 1{,}2x_1+0{,}25x_2$
Toodangu tsentnerihind	rbl.	5	3	60	

Optimaalsuskriteeriumiks on maksimaalne kogutoodangu maksumus.

5. **ülesanne.** Leida kolme tootmisharu — teraviljakasvatuse, silomaisikasvatuse ja piimakarjanduse — optimaalne vahekord. Majand võib kasutada nendes tootmis-

harudes 10 000 ha põllumaad ja 200 000 inimpäeva tööaega. Söödaks kavatsetakse kasutada 20% teravilja kogutoodangust ja kogu silomaisi saak. Söötühikutesse ümberarvutamise koefitsient on teraviljal 1,1 ja maisisilol 0,2. Teravilja saagikus on 20 ja maisil 400 tsentnerit hektarilt. Loomakasvatuse produktiivsus keskmiselt ühe lehma kohta on 2500 kg piima ja 2 ts noorkarja kaaluiivet.

Tööaega kulub ühe teraviljahektari kohta 2, silomaisi hektari kohta 20 ja ühe lehma kohta 25 inimpäeva aastas. Sööta kulub ühe tsentneri piima tootmiseks 1,2 ja ühe tsentneri noorkarja kaaluiibe kohta 5 tsentnersöötühikut.

Toodangu hinnad: teraviljal 4, piimal 12 ja noorveiste kaaluiibel 80 rubla tsentner.

Optimaalsuskriteeriumiks on maksimaalne kogutoodangu maksumus.

6. **ülesanne.** Leida nelja tootmisharu — teravilja-, silomaisi-, veise- ja seakasvatuse — optimaalne kombinatsioon. Ressursid: 10 000 hektarit põldu ja 200 000 inimpäeva tööjõudu.

Söödana on plaanis ära kasutada 20% teravilja kogutoodangust ja kogu valmistatav silo. Maisisilo tuleb valmistada vähemalt 800 000 tsentnerit. Söötühikutesse ümberarvutamise koefitsient on teraviljal 1,00 ja maisisilol 0,2.

Loomakasvatuse tootmiskulud

Tootmisvõimalused	Ühe lehma kohta	Ühe tsentneri sealiha kohta
Tööaeg (inimpäevades)	20	2
Kontsentreeritud söödad (tsentnersöötühikutes)	4	5
Silo (tsentnersöötühikutes)	46	0,5

Teravilja hind on 5 ja sealiha hind 80 rbl. tsentner. Veisekasvatus annab ühe lehma kohta keskmiselt 500 rbl. eest toodangut.

Optimaalsuskriteeriumiks on maksimaalne kogutoodangu maksumus.

7. **ülesanne.** Leida tootmisharude optimaalne kombinatsioon piimakarjandusliku suunaga majandis. Majandis

kasvatatakse tera- ja silomaisi. Loomakasvatusharudest on esindatud ainult veisekasvatus. Tootmisvõimalused: 4000 hektarit põldu, 1000 hektarit looduslikke heina- ja karjamaid. Töötajate aastakeskmine arv 430 inimest, kellest 400 töötavad maaviljeluses ja loomakasvatuses. Iga tööline töötab aastas keskmiselt 250 inimpäeva.

Maaviljeluse ja loomakasvatuse arendamiseks võib seega kasutada üldse $250 \cdot 400 = 100\,000$ inimpäeva.

Söötades kasutatakse ära 40% teravilja kogutoodangust ja kogu valmistatav maisisilo. Saagikus on teraviljadel 25, maisil 500 tsentnerit hektarilt. Ühe tsentneri teravilja hind on 4 rbl. Söötühikutesse ümberarvutamise koefitsient on teraviljal 1,2 ja silol 0,2. Looduslikelt heina- ja karjamaadelt kavatsetakse saada 4200 tsentnersöötühikut. Ühe hektari viljelemiseks kulub teraviljakasvatuses 2,5 ja maisikasvatuses 12,5 inimpäeva.

Loomakasvatuse produktiivsus on keskmiselt 3000 kg piima ja 2 ts noorloomade kaaluiivet ühe lehma kohta. Selle toodangukoguse maksumus on kokku 420 rbl. (30 ts piima à 10 rbl. = 300 rbl. ja 2,0 ts liha à 60 rbl. = 120 rbl.).

Sööta kulub ühe tsentneri piima kohta 1, ühe tsentneri kaaluiibe kohta 6 ja üldse 42 tsentnersöötühikut keskmiselt ühe lehma kohta. Tööajakulu keskmiselt ühe lehma kohta on 21 inimpäeva aastas.

Toodud andmetel tuleb leida teraviljakasvatuse, silomaisikasvatuse ja piimakarjanduse optimaalne kombinatsioon sellise arvestusega, et kogutoodangu maksumus oleks maksimaalne.

8. **ülesanne.** Leida nelja tootmisharu kombinatsioon majandis järgmistel eeldustel. Tootmisharud: teraviljakasvatus, silomaisi kasvatus, veise- ja seakasvatus. Ressursid: 8000 hektarit põldu, 2300 hektarit heina- ja karjamaid; hobu- ja käsitsitöödel töötab 300 inimest, kes töötavad aastas igaüks keskmiselt 250 päeva, mehhaniseeritud töödel 100 inimest, kes töötavad igaüks keskmiselt 100 päeva aastas.

Saagikus: teraviljal 20 ts ja silomaisil 400 ts hektarilt, heina- ja karjamaadel 4 tsentnersöötühikut hektarilt. Söötühikutesse ümberarvutamise koefitsient on teraviljal 1,2 ja silol 0,2.

Põllundustoodangust kasutatakse söötadena ära 60% teravilja kogusaagist ja kogu maisisaak.

Loomakasvatuse produktiivsus on 2500 kg piima ja 2 tsentnerit noorloomade kaaluiivet keskmiselt ühe lehma kohta.

Tööaja- ja söödakulu ning hinnad

Ressursid	Mõõtühik	Kulud 1 ha kohta		Kulud 1 ts kohta		
		teraviljal	maisil	piimal	veiste kaaluibel	sigade kaaluibel
Hobu- ja käsitsitööd	inimpäev	2	20	0,1	1	1,5
Mehhaniseeritud tööd	„	0,4	4	0,01	0,02	0,02
Söödad	tsentner-söötühik	—	—	1,2	5	6
Hind	rbl/ts	5	1	15	70	80

Optimaalsuskriteeriumiks on maksimaalne kogutoodangu maksumus.

V 9. **ülesanne.** Leidke põhiliste kultuuride optimaalne kombinatsioon kolhoosi maaviljeluses. Ressursid: 6000 hektarit põldu, 200 töövõimelist inimest, 40 traktorit (ümberarvutatult 15-hobujõulisteks tingtraktoriteks), 15 teraviljakombaini. Muid põllumajandusmasinaid ja seadmeid on piisavalt. (tööpäevi 250 päeva aastas)

Kolhoosis viljeldakse teravilja, kartulit, silomaisi ja üheaastasi heintaimi. Maaviljeluses eristatakse kaht pingelisemat tööperioodi, mis kestavad kevadel 15 ja sügisel 30 päeva (vt. tabel lk. 225). tööpäevi 13 ja 26

Optimaalsuskriteeriumiks on maksimaalne kogutoodangu maksumus.

10. **ülesanne.** Leida maaviljelus- ja loomakasvatusharude optimaalne kombinatsioon kartuli- ja köögiviljakasvatuse sovhoosis.

Ülesande I variant. Tootmisvõimalused: 2000 ha põllumaad, aastakeskmine töötajate arv 1000 inimest, 20 traktorit (ümberarvutatult 15-hobujõulisteks tingtrak-

Saagikus, hinnad ja kulunormid hektari kohta pingelisematel tööperioodidel. (Kuulub 10. ülesande juurde.)

Näitarv	Teraviljad	Silomais	Kartul	Üheaastased heintaimed
Saagikus (ts/ha)	15	300	125	25
Toodangu hind (rbl/ts)	4,0	1,0	3,0	3,0
Inimpäevi kevadel	0,12	1,2	10	0,1
Inimpäevi sügisel	0,3	1,2	20	0,1
Traktorvahetusi kevadel	0,06	0,12	0,5	0,05
Traktorvahetusi sügisel	0,09	0,3	1,0	0,02
Kombainvahetusi sügisel	0,12	—	—	—

toriteks). Põhilised tootmisharud: köögiviljakasvatus, kartulikasvatus, söödakultuurid, seakasvatus ja piimakarjandus. Maaviljeluse pingelisim tööperiood: sügisel 45 päeva, loomakasvatuses talvel 6 kuud. Tuleb arvestada, et talvel töötab osa taimekasvatajaid loomakasvatuses, sügisel aga abistavad farmitöötajad põllutöödel. Töötajate ühelt toot-

Kulunormid

Kulud	Kulusid 1 ha kohta: köögiviljakasvatuses	Kulusid 1 ha kohta: kartulikasvatuses	Kulusid 1 ha kohta: söödakultuuride kasvatuses	Kulusid sealiha 1 ts kohta (eluskaalus)	Kulusid keskmiselt ühe lehma kohta
Maaviljeluse pingelisemal tööperioodil:					
inimpäevi	25	16	10	—	—
traktorvahetusi . . .	1	0,8	0,5	—	—
Loomakasvatuse pingelisimal tööperioodil inimpäevi	—	—	—	4	30
Söödakulu (tsentnersöötühikuis) [1]	—	—	—	8	50

[1] Loomakasvatuses ühe toodanguühiku kohta tuleva söödakulu leidmisel on võetud arvesse kõigi antud karja kuuluvate loomade (emasloomade, isas-suguloomade ja noorloomade) söötmise kulud.

ınisalalt teisele ümberpaigutamine võib toimuda nii, et töötajate arv maaviljeluses ei ületaks 70% ja loomakasvatuses 50% sovhoosi töötajate üldarvust.

Saagikus on kartulil 160 ts, köögiviljadel 250 ts hektarilt, söödakultuuridel 50 tsentnersöötühikut hektarilt. Kariloomade söödaks kasutatakse kartuli- ja köögivilja saagist 10% ja kogu söödakultuuride saak. Peale selle kasutatakse majandis ära 1000 ts ostetud kontsentraatsöötasid. Veisefarmi toodangu väljalase on 3000 kg piima ja 2 ts liha (eluskaalus) keskmiselt ühe lehma kohta.

Toodangu hinnad: köögivili 2,5, kartul 3, piim 12, sealiha (eluskaalus) 90, veiste kaaluiive 80 rbl. tsentner.

Optimaalsuskriteeriumiks on maksimaalne kogutoodangu maksumus.

II variant. Leida tootmisharude optimaalne kombinatsioon tingimusel, et väljastpoolt söötasid juurde ei saada.

11. **ülesanne.** Leida tootmisharude optimaalne vahekord teraviljasovhoosis. Tootmisvõimalused: põllumaad 20 000 ha, töölisi 600 inimest, 200 traktorit (ümberarvutatult 15-hobujõulisteks tingtraktoriteks), 50 teraviljakombaini.

Peale teraviljatootmise tegeleb majand lihaveiste kasvatuse, piimakarjanduse ja seakasvatusega. Kasutatakse ainult oma majandis toodetud söötasid. Kõige pingelise-

Kulud külvipinna hektari kohta maaviljeluses, toodangu ühe tsentneri kohta sea- ja ühe lehma kohta veisekasvatuses

Kulud	Teraviljakultuurid	Söödakultuurid	Veisekasvatus (1 lehma kohta)	Seakasvatus
Maaviljeluse pingelisimal tööperioodil:				
inimpäevi	0,1	0,05	—	—
traktorvahetusi . .	0,12	0,1	—	—
kombainvahetusi . . .	0,15	—	—	—
Loomakasvatuse pingelisimal tööperioodil				
inimpäevi	—	—	20	2
Söödakulu (tsentnersöötühikuis)	—	—	40	6

mad tööperioodid kestavad taimekasvatuses sügisel 30 päeva ja loomakasvatuses talvel 6 kuud. Loomakasvatuses võib talveperioodil töötada mitte üle 50% ja suveperioodil mitte üle 30% töötajate üldarvust.

Teraviljakultuuride saagikus on keskmiselt 15 tsentnerit, söödakultuuridel 25 tsentnersöötühikut hektarilt. Looduslikelt heina- ja karjamaadelt saab majand 24 000 tsentnersöötühikut. Peale selle kasutatakse kariloomade söödana ära kogu söödakultuuride toodang ja 10% teravilja kogusaagist.

Toodete tsentnerihinnad: teraviljal 4, sealihal 60 rubla. Veisefarmi toodangu maksumus keskmiselt ühe lehma kohta 450 rbl.

12. **ülesanne.** Leida tootmisharude optimaalne kombinatsioon suures teraviljasovhoosis. Tootmisressursid: 35 000 ha põllumajanduslikke kõlvikuid, sealhulgas 25 000 ha põldu, 10 000 ha karja- ja heinamaid; maaviljeluses ja loomakasvatuses töötab keskmiselt 800 töötajat aastas, kes teevad igaüks keskmiselt 250 päeva tööd aastas, sealhulgas 34 päeva pingelisemal tööperioodil. Aasta pingelisim tööperiood kestab 40 päeva — 1. septembrist kuni 10. oktoobrini. Sovhoos viljeleb teravilju, silomaisi, suhkrupeeti, ühe- ja mitmeaastasi heintaimi. Loomakasvatus on esindatud kahe tootmisharuga — veise- ja seakasvatusega.

Vajalikud söödad saadakse järgmistest allikatest: looduslikelt heina- ja karjamaadelt saab majand 50 000 tsentnersöötühikut, söötadena kasutatakse ära kogu maisisaak ja põldheinasaak, 50% suhkrupeedi- ja 10% teraviljasaagist. Suhkrupeeti tuleb kasvatada vähemalt 40 000 tsentnerit.

Tööajakulu hektari kohta ja saagikus

Kultuurid	Saagikus (ts/ha)	Töökulu 1 ha kohta (inimpäevades)	
		üldse	sealhulgas pingelisemal tööperioodil
Teravili	20	2	0,5
Silomais . . .	400	10	2
Suhkrupeet . .	200	10	2
Heintaimed . . .	25	2	0,5

Ülesande koostamisel on kõik söödaressursid jaotatud kaheks rühmaks: a) silo, kore- ja haljassöödad, b) kontsentraadid ja söödajuurikad. Söötühikuteks ümberarvutamise koefitsiendid on silol 0,2, suhkrupeedil 0,25, teraviljal 1,1 ning põldheinal 0,5.

Tööaja- ja söödakulu loomakasvatuses

Näitajad	Ühe lehma kohta	Sigade kaaluiibe ühe tsentneri kohta
Tööajakulu (inimpäevades)		
üldse	20	2
pingelisemal tööperioodil . .	2	0,1
Söödakulu (tsentnersöötühikutes)		
silo, kore- ja haljassöödad	40	1
kontsentraadid ja söödajuurikad	5	5

Produktiivsus: 3000 kg piima ja 2,5 ts noorloomade kaaluiivet keskmiselt ühe lehma kohta. Toodangu hinnad: piim 12, veiste kaaluiive 60, sigade kaaluiive 70, teravili 4 ja suhkrupeet 3 rbl. tsentner.

Optimaalsuskriteeriumiks on maksimaalne kogutoodangu maksumus.

13. **ülesanne.** Kasutades oma kolhoosi või sovhoosi aastaaruannet, samuti teatmekirjandust, koostada ülesanne majandi tootmisharude optimaalseks kombineerimiseks, arvestades seda, et ülesanne lahendatakse elektronarvutiga.

Ülesande põhinõuded: kultuuride ja tootmisharude arv ei tohi ületada kümmet. Põhikitsendustena kasutada külvipinda (eraldi niisutatav külvipind, kui sellist on olemas) ja töökulu mehhaniseeritud ning hobu- ja käsitsitöödel. Söödad jaotatakse kahte rühma: a) kore- ja haljassöödad ning silo, b) kontsentraadid ja söödajuurikad. Eraldi ridadena tuleb võtta ülesandesse seeduva proteiini ja karotiinibilanss. Peale põhiliste tuleb võtta ülesandesse ka paarkolm kõrvalkitsendust. Optimaalsuskriteeriumid: a) maksimaalne kogutoodang, b) maksimaalne puhastulu.

14. **ülesanne.** Koostada optimaalne ööpäevane söödaratsioon sigade nuumamiseks. Sigade eluskaal on 30—40 kg, ööpäevane kaaluiive 500 g. Ühe sea kohta on vaja ööpäevas 2,3 kilogrammsöötühikut ja 270 g seeduvat proteiini. Söödaratsioon koostatakse kahest eri kontsentraatsöödast: odrast ja ubadest. Ühes odrakilogrammis sisaldub 1,2 söötühikut ja 80 g seeduvat proteiini, kilogramm ube sisaldab 1,25 söötühikut ja 280 g seeduvat proteiini. Üks kilogramm otri maksab 3 kop. ja kilogramm ube 4 kopikat.

Optimaalsuskriteeriumiks on ratsiooni minimaalne maksumus.

15. **ülesanne.** Koostada eelmise ülesande andmetel optimaalne söödaratsioon, arvestades järgmisi lisaandmeid. Otsitavas ratsioonis peab sisalduma vähemalt 8 mg karotiini. Peale odra ja ubade võetakse ratsiooni ka heinajahu. Kilogramm otri või ube sisaldab 1 mg karotiini, üks kilogramm heinajahu — 100 mg. Üks kilogramm heinajahu sisaldab 0,75 söötühikut ja 100 g seeduvat proteiini. Kilogramm heinajahu maksab 4,5 kopikat.

16. **ülesanne.** Koostada ööpäevane söödaratsioon 450-kilogrammise eluskaaluga lehmadele, kes annavad ööpäevas 10 kg piima rasvasusega 3,8%. Ühe sellise lehma ratsioon peab sisaldama 9 söötühikut, 960 g seeduvat proteiini ja 370 mg karotiini.

Sööda ühe kilogrammi toiteväärtus ja hind

	Mõõtühik	Metsahein	Maisisilo	Kontsentraatsööt (oder)	Suhkrupeet
Söötühikuid	kg	0,4	0,2	1	0,25
Seeduvat proteiini . .	g	50	10	100	12
Karotiini	mg	20	15	1	0
Hind	kop.	1,0	0,5	2	1,5

Ratsioon koostatakse heinast, maisisilost, kontsentraatidest ja suhkrupeedist.

Optimaalsuskriteeriumiks on ratsiooni minimaalne hind.

17. **ülesanne.** Arvutada 60—70-kilogrammise eluskaaluga ja 600-grammise ööpäevase kaaluiibega sigade söödaratsiooni koostis. Ühe sea kohta on ööpäevas vaja 2,8 söötühikut, 340 g seeduvat proteiini, 14 g kaltsiumi, 11 g fosforit ja 12 mg karotiini. Seejuures ei tohi ratsioonis olla taimepealseid ja kliisid rohkem kui 2 kg ja silo mitte üle 1 kilogrammi.

Sööda ühe kilogrammi toiteväärtus ja omahind

	Maisiterad	Päevalillepealsed	Nisukliid	Maisisilo	Heinajahu
Söötühikuid (kg)	1,34	1,09	0,71	0,2	0,70
Seeduvat proteiini (g)	78	396	126	14	120
Kaltsiumi (g)	0,4	3,3	1,8	1,5	13,1
Fosforit (g)	3,1	9,9	10,1	0,5	1,7
Karotiini (mg)	4	2	4	15	100
Omahind (kop.)	4	5	3	1	3,5

Optimaalsuskriteerium — ratsiooni minimaalne omahind.

18. **ülesanne.** Arvutada majandi jaoks välja söödakultuuride külvipinna kõige soodsam koostis. Ülesande koostamiseks vajalikud andmed võtta oma majandi aruannetest. Seejuures arvutada teatmekirjanduse andmeil eelnevalt välja söötühikute, valkainete, karotiini, fosfori ja kaltsiumi vajadus loomakasvatuses.

Ülesande lahendamisel on tarvis näha ette täiendavaid kitsendusi kontsentreeritud ja koresöötade, samuti mõnede loomade ning silo kohta.

ÜLESANDEID IV PEATÜKI KOHTA

19. **ülesanne.** Arvutada välja, kuidas optimaalselt jaotada teravilja- ja suhkrupeedikasvatust kahe tsooni vahel. Külvipinda on esimeses tsoonis 10 miljonit, teises 15 mil-

jonit hektarit, võimalikud rahalised kulutused on vastavalt 1 400 000 ja 1 800 000 rubla. Kummaski tsoonis tuleb toota teravilja vähemalt 500 miljonit ja suhkrupeeti vähemalt 400 miljonit tsentnerit.

Saagikus ja omahind

	I tsoon		II tsoon	
	saagikus (ts)	omahind (rbl/ts)	saagikus (ts)	omahind (rbl/ts)
Teravili	20	4	25	2,5
Suhkrupeet	200	2,5	250	2,1

Optimaalsuskriteeriumiks on kogu toodangu tootmiseks vajalike kulude minimaalne summa.

20. **ülesanne.** Leida eelmise ülesande andmetel teravilja- ja suhkrupeedikasvatuse optimaalse paigutamise plaan, arvestades seda, et kapitaalmahutused oleksid tootmisharude vahel kõige efektiivsemalt jaotatud. Mõlemale tsoonile kokku on kapitaalmahutuste üldsummaks ette nähtud 1 miljard rubla; ühe tsentneri teravilja kohta esimeses tsoonis 0,6 rbl., teises tsoonis 0,5 rbl., tsentneri suhkrupeedi kohta vastavalt 0,4 ja 0,2 rbl. Teravilja hind on 4,5 ja suhkrupeedi hind 2,6 rbl. tsentner.

Optimaalsuskriteeriumiks on maksimaalne kogutoodangu maksumus.

21. **ülesanne.** Koostada optimaalne plaan, kuidas jaotada teraviljakasvatust, suhkrupeedikasvatust ja sealiha tootmist kolme tsooni vahel.

Kõigis kolmes tsoonis kokku tuleb toota vähemalt 120 milj. tsentnerit teravilja, 200 milj. ts suhkrupeeti ja 8 milj. ts sealiha.

Söödaks kasutatakse 30% teravilja ja 20% suhkrupeedi kogusaagist. Ühe tsentneri sealiha tootmiseks kulutatakse 6 tsentnersöötühikut. Toodete hinnad: teravili 3, suhkrupeet 2 ja sealiha 60 rbl. tsentner.

Optimaalsuskriteeriumiks on maksimaalne kogutoodangu maksumus.

Tootmisressursid, saagikus ja tootmiskulud

	Tsoonid		
	I	II	III
Põllupind (tuh. ha) . .	2 000	3 000	4 000
Inimpäevi (tuh.)	6 000	5 000	10 000
Saagikus (ts/ha)			
teraviljal	20	16	12
suhkrupeedil	200	150	120
Tööajakulu (inimpäevades hektari kohta)			
teraviljal	1,5	1,6	1,2
suhkrupeedil	20	20	20
Tööajakulu 1 ts sealiha tootmiseks (inimpäevades)	2	2	1,8

ÜLESANDEID V PEATÜKI KOHTA

22. **ülesanne.** Jaotada traktoritööd eri marki traktorite vahel nii, et tööde tegemisega seotud kulude üldsumma oleks minimaalne. Majandis on 4 traktorit C-80, 20 traktorit ДТ-54, 10 «Belarussi» ja 4 traktorit КДП-35.

Traktoritööde hulk ja omahind

Tööd	Tööde 1 ha omahind traktoril (rbl.)				Tööde hulk		
	C-80	ДТ-54	«Belaruss»	КДП-35	füüsilisi ha	tingkünnihektaritesse ümberarvutamise koefitsient	tingkünnihektareid
Kultiveerimine	0,80	1,00	0,90	0,85	15 000	0,22	3 300
Kündmine . .	2,40	3,00	3,40	3,20	5 000	1,2	6 000
Külvamine . .	—	—	1,00	0,95	5 000	0,25	1 250
Ühekordne äestamine . . .	0,20	0,27	0,25	0,27	20 000	0,08	1 600
Põhukoristamine	—	0,80	0,70	0,85	8 040	0,23	1 850
Tööde maht .	2 000	7 700	3 100	1 200	—	—	14 000

Lisakitsendused: tööde jaotamisel tuleb pidada silmas, et traktoritega «Belaruss» saab põhku koristada kõige rohkem 4000 hektarilt, traktoritega КДП-35 saab aga kultiveerida mitte üle 3000 hektari.

23. **ülesanne.** Esimene variant. Jaotada teraviljakultuuride külvipinnad erineva mullaviljakusega põldude (maatükkide) vahel niiviisi, et teravilja üldsaak osutuks maksimaalseks.

Kultuuride külvipinnad, põldude suurus ja saagikus

Teraviljad	Saagikus eri põldudel (ts/ha)				Külvipinna suurus (ha)
	I	II	III	IV	
Mais . . .	50	40	20	15	1 000
Nisu	20	12	11	7	6 000
Oder	22	15	10	9	1 200
Hirss	28	10	6	4	1 800
Põldude suurus (ha)	2 000	3 000	3 500	1 500	10 000

Teine variant. Lahendada sama ülesanne järgmiste täiendavate kitsendustega: a) I põllule ei saa külvata rohkem kui 600 ha maisi ja b) mitte üle 800 hektari hirssi.

24. **ülesanne.** Jaotada söödakultuuride külvipinnad eri mullaviljakusega põldude (maatükkide) vahel niiviisi, et saadaks maksimaalne hulk söötühikuid.

Kultuuride külvipinnad, põldude suurus ja saagikus

Söödakultuurid	Saagikus eri põldudel (ts/ha)				Külvipind (ha)
	I	II	III	IV	
Silomais . . .	10	40	70	100	1 400
Vikk	8	12	16	30	1 300
Sudaanirohi . .	9	14	24	35	900
Kartul	10	24	36	50	150
Söödakõrvitsalised	7	11	15	25	250
Põldude suurus (ha)	700	800	1 500	1 000	4 000

Ülesanne lahendatakse kahes variandis: a) lisakitsendusega, et pool taliviljade külvipinnast peab paiknema IV maatükil ja b) et kartuli külvipind peab olema täielikult IV maatükil.

25. **ülesanne.** Koostada veoste transportimise optimaalne plaan.

Arvutusteks vajalikud andmed

Hankijad	Ühe veoseühiku tarbijale toimetamise kulud (rbl.)					Veetav kogus
	I	II	III	IV	V	
A	8	7	6	9	5	400
B	4	10	8	3	6	540
C	2	3	6	5	3	360
D	5	4	8	9	7	500
Vajalik kogus	320	480	620	110	270	1 800

Optimaalsuskriteeriumiks on kõigi veoste transportimiseks vajalike kulude minimaalne üldsumma.

VALIMIK MAJANDUSMATEMAATIKA OSKUSSÕNU

Sõnastikku võetud sõnadele on antud ainult nende sisu käesoleva teose kontekstis väljendavaid vasteid. Nii näiteks on *машинное время* vasteks allpool ainult *arvutiaeg* (s. o. elektronarvuti tööaeg), ehkki teistsugustel puhkudel võiks selle vasteks olla ka *masinaaeg*. Niisamuti on venekeelse *отрасль* vasteks siin ainult *tootmisharu*, ehkki teistsugustes seostes võiks selleks olla näiteks ka *rahvamajandusharu, majandusharu,* lihtsalt *haru* jne.

VENE — EESTI

алгоритм	algoritm
базис пространства	ruumi baas
базисное неизвестное	põhitundmatu, baasitundmatu
базисное решение	baaslahend
блок задачи	ülesande blokk
вариант решения	lahendivariant
вектор	vektor
вектор базиса	baasivektor
вектор-столбец	veeruvektor
вектор-строка	reavektor
векторное пространство	vektorruum, lineaarne ruum
величина	suurus
вершина (многогранника)	tipp
возможное решение	lubatav lahend
вспомогательная таблица	abitabel
выражение	avaldis
генеральный член	juhtelement
гиперплоскость	hüpertasand, (-tasapind)
главная строка	juhtrida
главный диагонал	peadiagonaal
главный столбец	juhtveerg
грань (многогранника)	tahk
двойственная задача	duaalülesanne

двумерный	kahemõõtmeline
действительное число	reaalarv
диагональная матрица	diagonaalmaatriks
диагональный метод	diagonaalvõte
динамическая задача	dünaamiline ülesanne
дополнительное неизвестное	abitundmatu
дополнительное ограничение	lisakitsendus
дополнительное переменное	abimuutuja
допустимое решение	lubatav lahend
единичная матрица	ühikmaatriks
задача на максимум	maksimiseerimisülesanne
задача на минимум	minimiseerimisülesanne
закрытая модель	kinnine mudel
искусственное неизвестное	fiktiivne tundmatu, tehistundmatu
исходная информация	lähteinformatsioon
квадратная матрица	ruutmaatriks
клетка	lahter
ключевая строка	juhtrida
ключевой столбец	juhtveerg
колонка цифр	arvutulp
конец (вектора)	lõpp-punkt
конечный продукт	lõpptoodang, -toode
координаты вектора	vektori koordinaadid
коэффициент	kordaja, koefitsient
коэффициент перевода	ümberarvutuskoefitsient
критерий оптимальности	optimaalsuskriteerium
критерий оптимизации	optimaalsuskriteerium
линейная алгебра	lineaaralgebra
линейная форма	lineaarvorm
линейное неравенство	lineaarvõrratus
линейное программирование	lineaarne planeerimine
линейное уравнение	lineaarvõrrand
линейно-зависимые (векторы)	lineaarselt sõltuvad
линейно-независимые (векторы)	lineaarselt sõltumatud
максимизация	maksimiseerimine
математическая модель	matemaatiline mudel
математический метод	matemaatiline meetod
математическое программирование	matemaatiline planeerimine
матрица	maatriks
машинное время	arvutiaeg
межотраслевой баланс	tootmisharude ristbilanss
метод апроксимации	lähendusmeetod, aproksimatsioonimeetod
метод дифференциальных рент	«diferentsiaalrendi meetod»
метод M	fiktiivse tundmatu meetod, tehistundmatu meetod
метод условно-натуральных единиц	naturaalsete tingühikute meetod
минимализация	minimiseerimine
минимизация	minimiseerimine
минор	miinor
многогранник	hulktahukas, polüeeder
множество	hulk

модель	mudel
модель размещения	paigutusmudel
нарастающий итог	järgsumma
натуральный показатель	naturaalnäitaja
начало (вектора)	alguspunkt
неизвестное	tundmatu
неопределенная система (уравнений)	määramata süsteem
неоптимальный	mitteoptimaalne
неособенная матрица	regulaarne maatriks, kõdumata maatriks
неосновное неизвестное	kõrvaltundmatu, baasi mittekuuluv tundmatu
неотрицательное значение	mittenegatiivne väärtus
неполная симплексная таблица	lihtsustatud simplekstabel
нераспределенный остаток	kasutamata jääk
несовместная система уравнений	mittelahenduv võrrandisüsteem
нулевая корректировка	nullkorrektuur (-i võte)
нулевая строка	nullrida
нулевой столбец	nullveerg
n-мерное пространство	n-mõõtmeline ruum
n-мерный вектор	n-mõõtmeline vektor
обратная матрица	pöördmaatriks
обратная связь	tagasiside
ограничение	kitsendus
ограничиваться	tõkestama
ограничиваться сверху	ülalt tõkestama
ограничиваться снизу	alt tõkestama
определенная система (уравнений)	määratud süsteem
определитель	determinant
оптимальное планирование	optimaalne planeerimine
оптимальное решение	optimaalne lahend
оптимальный план	optimaalne plaan
основное неизвестное	põhitundmatu, baasitundmatu
основное ограничение	põhikitsendus
особенная матрица	singulaarne maatriks, kõdunud maatriks
открытая модель	lahtine mudel
отрасль	tootmisharu
отрицательная строка	miinussaldoga rida
оценка	hinnang
параметр	parameeter
первоначальное решение	alglahend
переменная величина	muutuvsuurus, muutuja
переменное	muutuja
перечень отраслей	tootmisharude loend
плоскость	tasand, tasapind
подматрица	alammaatriks
полная симплексная таблица	täielik simplekstabel
положительная строка	pluss-saldoga rida
порядок матрицы	maatriksi järk
правило неотрицательности значения неизвестных	tundmatute mittenegatiivsuse nõue

правило северо-западного угла	loodenurga reegel
предварительный план	esialgne plaan
преобразование	teisendamine, teisendus
приведение к единому измерителю	ühismõõtsustamine
приниматься равным	võrdsustama
проверка на оптимальности	optimaalsuse kontroll
проекция (вектора)	koordinaat
производное	tuletis
производственные ресурсы	tootmisvõimalused, tootmisressursid
произвольное значение	meelevaldne väärtus
промежуточная рента	vaherent
простейшая симплексная таблица	lihtsustatud simplekstabel
прямая задача	otseülesanne
прямоугольник для перестановки	siirdeahel, ümberpaigutusahel
ранг (матрицы)	astak
распределительный метод	jaotusmeetod
расчет	arvutlus (kalkulatsioon), arvutus
решение	lahendamine, lahendus, lahend
свободное переменное	vaba muutuja
свободный член	vabaliige
связывающий блок	siduv blokk
седловая точка	sadulpunkt
симплекс-метод	simpleksmeetod
симплексная таблица	simplekstabel
симплексный метод	simpleksmeetod
система неравенств	võrratusesüsteem
система прямоугольных координат	ristkoordinaadistik
система уравнений	võrrandisüsteem
скаляр	skalaar
скалярное произведение	skalaarkorrutis
совместная система уравнений	lahenduv võrrandisüsteem
совокупность	kogum
соизмерение	ühismõõtsustamine
соизмеренность	ühismõõtsus
соизмеримая (величина)	ühismõõtsustatav
соизмеритель	ühismõõtsustaja
сокращенная симплексная таблица	lihtsustatud simplekstabel
составление задачи	ülesande koostamine
составляющие (вектора)	koordinaadid
сравнительная эффективность	suhteline efektiivsus, — tõhusus
статическая задача	staatiline ülesanne
стоимостный показатель	rahaline näitaja
столбец	veerg
строка	rida
структурное неизвестное	päristundmatu (vastand: tehistundmatu, fiktiivne tundmatu)
табличный метод	tabelmeetod
технологический коэффициент	tehnoloogiline koefitsient, otsekulude koefitsient

транспонированная матрица	transponeeritud maatriks
транспортная задача	transpordiülesanne
трехмерный	kolmemõõtmeline
упорядоченное множество	järjestatud hulk
условная единица	tingühik
физическая единица измерения	naturaalühik, naturaalne mõõtühik
функциональ	funktsionaal
целевая строка	sihifunktsiooni rida
целевая функция	sihifunktsioon
целевое уравнение	sihifunktsiooni võrrand
центральный элемент	juhtelement
цепочка для перестановки	siirdeahel, ümberpaigutusahel
шаг вычисления	arvutussamm
ЭВМ	elektronarvuti, raal
экономико-математический метод	majandusmatemaatiline meetod
экономическая математика	majandusmatemaatika
экстремализация	ekstremiseerimine
экстремальная задача	ekstreemumülesanne
экстремальное значение	ekstreemväärtus, ekstreemum
электронно-вычислительная машина	elektronarvuti, raal
элемент матрицы	maatriksi element

EESTI — VENE

abimuutuja	дополнительное переменное
abitabel	вспомогательная таблица
abitundmatu	дополнительное неизвестное
alammaatriks	подматрица
alglahend	первоначальное решение
algoritm	алгоритм
alguspunkt (vektoril)	начало
alt tõkestama	ограничиваться снизу
aproksimatsioonimeetod	метод апроксимации
arvutiaeg	машинное время
arvutlus (kalkulatsioon)	расчет
arvutulp	колонка цифр
arvutussamm	шаг вычисления
astak	ранг
avaldis	выражение
baasitundmatu	основное неизвестное, базисное неизвестное
baasivektor	вектор базиса
baaslahend	базисное решение
determinant	определитель
diagonaalmaatriks	диагональная матрица
diagonaalvõte	диагональный метод
«diferentsiaalrendi meetod»	метод дифференциальных рент
duaalülesanne	двойственная задача
dünaamiline ülesanne	динамическая задача

ekstreemväärtus	экстремальное значение
ekstreemum	экстремальное значение
ekstreemumülesanne	экстремальная задача
ekstremiseerimine	экстремализация
elektronarvuti	электронно-вычислительная машина, ЭВМ
esialgne plaan	предварительный план
fiktiivne tundmatu	искусственное неизвестное
fiktiivse tundmatu meetod	метод M
funktsionaal	функционал
hinnang	оценка
hulk	множество
hulktahukas	многогранник
hüpertasand	гиперплоскость
jaotusmeetod	распределительный метод
juhtelement	генеральный член, центральный член
juhtrida	главная строка, ключевая строка
juhtveerg	главный столбец, ключевой столбец
järgsumma	нарастающий итог
järjestatud hulk	упорядоченное множество
kahemõõtmeline	двумерный
kasutamata jääk	нераспределенный остаток
kinnine mudel	закрытая модель
kitsendus	ограничение
koefitsient	коэффициент
kogum	совокупность
kolmemõõtmeline	трехмерный
koordinaadid	координаты, составляющие проекции
kordaja	коэффициент
kõdumata maatriks	неособенная матрица
kõdunud maatriks	особенная матрица
kõrvaltundmatu	неосновное неизвестное
lahend	решение
lahendamine	решение
lahendivariant	вариант решения
lahendus	решение
lahenduv võrrandisüsteem	совместная система уравнений
lahter (tabelis)	клетка
lahtine mudel	открытая модель
lihtsustatud simplekstabel	сокращенная симплексная таблица, простейшая симплексная таблица, неполная симплексная таблица
lineaaralgebra	линейная алгебра
lineaarne planeerimine	линейное программирование
lineaarne ruum	линейное пространство
lineaarselt sõltumatud (vektorid)	линейно-независимые
lineaarselt sõltuvad (vektorid)	линейно-зависимые
lineaarvorm	линейная форма
lineaarvõrrand	линейное уравнение

lineaarvõrratus	линейное неравенство
lisakitsendus	дополнительное ограничение
loodenurga reegel	правило северо-западного угла (диагональный метод)
lubatav lahend	допустимое решение, возможное решение
lõpp-punkt (vektoril)	конец
lõpptoodang	конечный продукт
lähendusmeetod	метод апроксимации
lähteinformatsioon	исходная информация
maatriks	матрица
maatriksi element	элемент матрицы
maatriksi järk	порядок матрицы
majandusmatemaatika	экономическая математика
majandusmatemaatiline meetod	экономико-математический метод
maksimiseerimine	максимизация
maksimiseerimisülesanne	задача на максимум
masinaaeg	vt. arvutiaeg
matemaatiline meetod	математический метод
matemaatiline mudel	математическая модель
matemaatiline planeerimine	математическое программирование
meelevaldne väärtus	произвольное значение
miinor	минор
miinussaldoga rida	отрицательная строка
minimiseerimine	минимизация, минимализация
minimiseerimisülesanne	задача на минимум
mittelahenduv võrrandisüsteem	несовместная система уравнений
mittenegatiivne väärtus	неотрицательное значение
mitteoptimaalne	неоптимальный
mudel	модель
muutuja	переменное, переменная величина
muutuvsuurus	переменная величина
määramata võrrandisüsteem	неопределенная система уравнений
määratud võrrandisüsteem	определенная система уравнений
naturaalnäitaja	натуральный показатель
naturaalsete tingühikute meetod	метод условно-натуральных единиц
naturaalühik	физическая единица измерения
n-mõõtmeline ruum	n-мерное пространство
n-mõõtmeline vektor	n-мерный вектор
nullkorrektuuri võte	нулевая корректировка
nullrida	нулевая строка, целевая строка
nullveerg	нулевой столбец
optimaalne lahend	оптимальное решение
optimaalne plaan	оптимальный план
optimaalne planeerimine	оптимальное планирование
optimaalsuse kontrollimine	проверка на оптимальности
optimaalsuskriteerium	критерий оптимальности, критерий оптимизации
otseülesanne	прямая задача

paigutusmudel	модель размещения
parameeter	параметр
peadiagonaal	главный диагонал
pluss-saldoga rida	положительный ряд
polüeeder	многогранник
põhikitsendus	основное ограничение
põhitundmatu	основное неизвестное, базисное неизвестное
päristundmatu	структурное неизвестное
pöördmaatriks	обратная матрица
rahaline näitaja	стоимостный показатель
reaalarv	действительное число
reavektor	вектор-столбец
regulaarne maatriks	неособенная матрица
rida	строка
ristkoordinaadistik	система прямоугольных координат
ruumi baas	базис пространства
ruutmaatriks	квадратная матрица
sadulpunkt	седловая точка
siduv blokk	связывающий блок
sihifunktsioon	целевая функция
sihifunktsiooni rida	целевая строка
sihifunktsiooni võrrand	целевое уравнение
siirdeahel	цепочка для перестановки, прямоугольник для перестановки
simpleksmeetod	симплексный метод, симплекс-метод
simplekstabel	симплексная таблица
singulaarne maatriks	особенная матрица
skalaar	скаляр
skalaarkorrutis	скалярное произведение
staatiline ülesanne	статическая задача
suhteline efektiivsus	сравнительная эффективность
suurus	величина
tabelmeetod	табличный метод
tagasiside	обратная связь
tahk	грань
tasand	плоскость
tehistundmatu	искусственное неизвестное, фиктивное неизвестное
tehistundmatu meetod	метод M
tehnoloogiline koefitsient	технологический коэффициент
teisendamine	преобразование
teisendus	преобразование
tingühik	условная единица
tipp	вершина
tootmisharu	отрасль
tootmisharude loend	перечень отраслей
tootmisharude ristbilanss	межотраслевой баланс
tootmisressursid	производственные ресурсы
tootmisvõimalused	производственные ресурсы
transponeeritud maatriks	транспонированная матрица

transpordiülesanne	транспортная задача
tuletis	производное
tundmatu	неизвестное
tundmatute mittenegatiivsuse nõue	правило неотрицательности значения неизвестных
tõkestama	ограничиваться
täielik simplekstabel	полная симплексная таблица
vabaliige	свободный член
vaba muutuja	свободное переменное
vaherent	промежуточная рента
veerg	столбец
veeruvektor	вектор-столбец
vektor	вектор
vektori koordinaadid	составляющие вектора, координаты вектора, проекции вектора
vektorruum	векторное пространство
võrdsustama	приниматься равным
võrrandisüsteem	система уравнений
võrratusesüsteem	система неравенств
ühikmaatriks	единичная матрица
ühismõõtne	соизмеримый
ühismõõtsus	соизмеренность
ühismõõtsustaja	соизмеритель
ühismõõtsustamine	соизмерение, приведение к единому измерителю
ühismõõtsustatav	соизмеримая
ülalt tõkestama	ограничиваться сверху
ülesande blokk	блок задачи
ülesande koostamine	составление задачи
ümberarvutuskoefitsient	коэффициент перевода
ümberpaigutusahel	vt. siirdeahel

SOOVITATAV KIRJANDUS

Kaasik, Ü., Matemaatiline planeerimine, Tallinn 1966 (ilmumisel).

Kangro, G., Kõrgem algebra, Tallinn 1962.

Tamm, M., Lineaaralgebra ja lineaarprogrammeerimine, I—II, Tallinna Polütehniline Instituut, Tallinn 1962.

* * *

Akkel, T., Lineaarse planeerimise rakendamine loomakasvatuses. — «Matemaatika ja Kaasaeg», VI, TRÜ, Tartu 1965, lk. 27—37.

Kaasik, Ü., Lineaarsed planeerimisülesanded. — «Matemaatika ja Kaasaeg», II, TRÜ, Tartu 1963, lk. 31—46.

Kull, I., Lineaarsest planeerimisest. — «Matemaatika», Metoodiliste artiklite kogumik III, Tallinn 1965. lk. 11—35.

* * *

Аганбегян А. Г., Белкин В. Д., Бирман И. Я. и др. Применение математики и электронной техникц в планировании. Экономиздат, 1961.

Аллен Р. Математическая экономия. Перевод с английского. Изд-во иностранной литературы, 1963.

Белкин В. Д. Цены единого уровня и экономические измерения на их основе. Экономиздат, 1963.

Беллман Р. Динамическое программирование. Перевод с английского. Изд-во иностранной литературы, 1960.

Березин, И. С. и Жидков Н. П. Методы вычислений, изд. 2-е, тт. 1 и 2. Физматгиз, 1962.

Бирман И. Я. Транспортная задача линейного программирования. Экономиздат, 1962.

Брудно А. Л. Метод дифференциальных рент Лурье для определения плана оптимальных перевозок. Доклады АН СССР, 1960, т. 131, № 6.

Вентцель Е. С. Теория вероятностей. Физматгиз, 1962.

Гасс С. Линейное программирование. Перевод с английского. Физматгиз, 1961.

Герчук Я. П. Проблемы оптимального планирования. Линейное программирование. Экономиздат, 1961.

Дадаян В. С., Коссов В. В. Баланс экономического района как средство плановых расчетов. Изд-во АН СССР, 1962.

Канторович Л. В. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. Изд-во АН СССР, 1960.

Китов А. И. и Криницкий Н. А. Электронные цифровые машины и программирование. Физматгиз, 1962.

Кравченко Р. Г. Экономика и электроника. Сельхозиздат. 1963.

Леонтьев В. и др. Исследования структуры американской экономики. Перевод с английского. Госстатиздат, 1958.

Линейные неравенства и смежные вопросы. Сборник статей под редакцией Г. У. Куна и А. У. Таккера, перевод с английского. Изд-во иностранной литературы, 1959.

Льюс Р. Д., Райфа Х. Игры и решения. Перевод с английского. Изд-во иностранной литературы, 1961.

Методы оптимального проектирования сельскохозяйственных производственных процессов. Сельскохозяйственная академия имени К. А. Тимирязева, 1962.

Народнохозяйственные модели. Теоретические вопросы потребления. Изд-во АН СССР, 1963.

Немчинов В. С. Экономико-математические методы и модели. Соцэкгиз, 1962.

Основы разработки межотраслевого баланса. Учебное пособие под редакцией А. Аганбегяна. Экономиздат, 1962.

Планирование и экономико-математические методы. Изд-во «Наука», 1964.

Попов И. Г. Линейное программирование в экономических расчетах по сельскому хозяйству. МИНХ имени Г. В. Плеханова, 1961.

Применение математики в экономических исследованиях, т. 1 и 2, под редакцией В. С. Немчинова, Соцэкгиз, 1959 и 1961.

Рейнфельд Н. и Фогель У. Математическое программирование. Методы решения производственных и транспортных задач. Перевод с английского. Изд-во иностранной литературы, 1960.

Ромакин М. И. Элементы линейной алгебры и линейного программирования. Изд-во «Высшая школа», 1963.

Романовский П. И. Общий курс математического анализа в сжатом изложении. Физматгиз, 1962.

Саати Т. Л. Математические методы исследования операций. Перевод с английского. Военное издательство Министерства обороны СССР, 1963.

Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры, изд. 2-е. Физматгиз, 1963.

Фергюсон Роберт О. и Сарджент Лоурен Ф. Линейное программирование. Методы и применение. Госстатиздат, 1962.

Фишер Р. А. Статистические методы для исследователей. Перевод с английского. Госстатиздат, 1958.

Эрроу К. Дж., Гурвиц Л., Удзава Х. Исследования по линейному и нелинейному программированию. Перевод с английского. Изд-во иностранной литературы, 1962.

Юдин Д. Б. и Гольштейн Е. Г. Линейное программирование. Физматгиз, 1963.

SISUKORD

Попов Иван Герасимович

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
В ЭКОНОМИЧЕСКИХ РАСЧЕТАХ
ПО СЕЛЬСКОМУ ХОЗЯЙСТВУ

На эстонском языке

Издательство «Валгус»
Таллин, Пярнуское шоссе, 10

*

Toimetaja U. Mereste

Kunstiline toimetaja R. Tungla

Tehniline toimetaja L. Krikmann

Korrektor H. Kull

Ladumisele antud 23. XII 1965. Trükkimisele antud 11.V 1966. Paber 54×84, 1/16. Trükipoognaid 15,5. Tingtrükipoognaid 13. Arvestuspoognaid 13,08. Trükiarv 3000. Tellimise nr. 9842. Hans Heidemanni nimeline trükikoda, Tartu, Ülikooli 17/19. I Trükipaber nr. 1 — Ligatne Paberivabrik — Läti NSV

Hind 64 kop.

4—1—4

64 kop.