Tartu Ülikool
Loodus- ja täppisteaduste valdkond
Matemaatika ja statistika instituut

Hans Kristjan Veri

Vektorväärtustega Lipschitzi funktsioonide ruumi Daugaveti omadus

Matemaatika eriala
Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendajad: Rainis Haller
Märt Põldvere

Tartu 2025

Vektorväärtustega Lipschitzi funktsioonide ruumi Daugaveti omadus

Bakalaureusetöö
Hans Kristjan Veri

Lühikokkuvõte.
Bakalaureusetöös kirjutatakse üksikasjaliselt lahti järgmise R. Medina ja A. Rueda Zoca teoreemi [J. Funct. Anal., 2025; teoreem 1] tõestus. **Teoreem.** *Kui M on täielik liinkaugusega nullpunktiga meetriline ruum ja X on Banachi ruum, siis ruumil* $\mathrm{Lip}_0(M, X)$ *on Daugaveti omadus.*
CERCS teaduseriala: P140 Jadad, Fourier analüüs, funktsionaalanalüüs.
Märksõnad: funktsionaalanalüüs, Banachi ruumid, normeeritud ruumid.

Daugavet property for spaces of vector-valued Lipschitz functions

Bachelor's thesis
Hans Kristjan Veri

Abstract. In this Bachelor's thesis, a detailed presentation of the proof of the following theorem by R. Medina and A. Rueda Zoca [J. Funct. Anal., 2025; Theorem 1] is given. **Theorem.** *If M is a complete length pointed metric space and X is a Banach space, then the space* $\mathrm{Lip}_0(M, X)$ *has the Daugavet property.*

CERCS research specialisation: P140 Series, Fourier Analysis, functional analysis.
Keywords: functional analysis, Banach spaces, normed spaces.

Sisukord

Sissejuhatus 4

1 Vajalikud eelteadmised 7

1.1 Jada nõrk koonduvus normeeritud ruumis . . . 7
1.2 Teoreem piisavast arvust funktsionaalidest . . . 8
1.3 Lipschitzi kujutused . . . 8
1.3.1 Lipschitzi kujutuse mõiste. Ruum $\mathrm{Lip}_0(M, X)$ . . . 8
1.3.2 McShane'i–Whitney jätkamisteoreem . . . 10
1.3.3 Piisav tingimus jada nõrgaks koonduvuseks nullelemendiks ruumis $\mathrm{Lip}_0(M, X)$ . . . 10
1.4 Daugaveti omadus . . . 12
1.5 Liinkaugusega ruum . . . 14

2 Bakalaureusetöös keskse teoreemi tõestus 16

2.1 Abitulemused bakalaureusetöös keskse teoreemi tõestuse jaoks . 16
2.2 Bakalaureusetöös keskse teoreemi tõestus . . . 22

Kirjandus 26

Sissejuhatus

Käesolev bakalaureusetöö on funktsionaalanalüüsi valdkonda kuuluv teaduslik uurimus Daugaveti omadusega ruumide kirjeldamisega tegelevast harust.

Definitsioon. Öeldakse, et Banachi ruumil X on *Daugaveti omadus*, kui mis tahes ühemõõtmelise pideva lineaarse operaatori $T\colon X \to X$ korral

$$\|T + I\| = \|T\| + 1, \tag{D}$$

kus I on ruumi X ühikoperaator (lineaarse operaatori $T\colon X \to X$ *ühemõõtmelisus* tähendab, et tema kujutishulk $\{Tx\colon x \in X\}$ on ruumi X ühemõõtmeline (vektor)alamruum). Võrdusele (D) viidatakse kui *Daugaveti võrdusele;* kui pideva lineaarse operaatori $T\colon X \to X$ puhul kehtib (D), siis öeldakse, et see operaator rahuldab Daugaveti võrdust.

Formaalselt toodi Daugaveti omadus sisse alles aastal 2000 ilmunud artiklis [KShSW, jaotise 2 esimene lõik], kus (vt [KShSW, teoreem 2.3]) muuhulgas tõestati, et kui iga mingis Banachi ruumis tegutsev ühemõõtmeline operaator rahuldab Daugaveti võrdust – s.t sellel ruumil on Daugaveti omadus – siis rahuldab Daugaveti võrdust koguni iga selles ruumis tegutsev nõrgalt kompaktne operaator (lineaarset operaatorit normeeritud ruumide vahel nimetatakse *nõrgalt kompaktseks,* kui ta teisendab lähteruumi kinnise ühikkera nõrgalt suhteliselt kompaktseks alamhulgaks sihtruumis). Kuid juba palju varem oli kirjandusest teada mitmeid näiteid ruumidest, millel eelneva definitsiooni terminites on Daugaveti omadus. Aastal 1963 tõestas I. Daugavet artiklis [Д], et iga ruumis $C[0, 1]$ tegutsev kompaktne operaator rahuldab Daugaveti võrratust (lineaarset operaatorit normeeritud ruumide vahel nimetatakse *kompaktseks,* kui ta teisendab lähteruumi kinnise ühikkera suhteliselt kompaktseks alamhulgaks sihtruumis). Selle tulemusega ongi motiveeritud nimetused Daugaveti omadus ja Daugaveti võrdus. Aastal 1966 tõestas G. Lozanovski artiklis [Л], et iga ruumis $L_1[0, 1]$ tegutsev kompaktne operaator rahuldab Daugaveti võrdust.

Täielikud nullpunktiga meetrilised ruumid, mille puhul Lipschitzi funktsioonide $M \to \mathbb{R}$ ruumil $\mathrm{Lip}_0(M)$ (vt. alajaotise 1.3.1 viimast lõiku lk 9) on Daugaveti omadus, kirjeldati ära artiklis [GPR, teoreem 3.5] L. García-Lirola, A. Procházka ja A. Rueda Zoca poolt: *ruumil* $\mathrm{Lip}_0(M)$ *on Daugaveti omadus parajasti siis, kui* M *on liinkaugusega ruum* (vt definitsiooni 1.17). Sama omadusega kompaktsed meetrilised ruumid, olid juba varem ära kirjeldatud artiklis [IKW, teoreem 3.3] (vt ka [IKW*]). Artiklis [GPR, Question 1] küsiti: kui (täieliku nullpunktiga meetrilise ruumi M puhul) ruumil $\mathrm{Lip}_0(M)$ on Daugaveti omadus, kas siis iga Banachi ruumi X korral on ruumil $\mathrm{Lip}_0(M, X)$ Daugaveti omadus? Artiklis [MR] andsid R. Medina ja A. Rueda Zoca järgneva teoreemiga sellele küsimusele jaatava vastuse.

Teoreem. *Kui M on täielik liinkaugusega nullpunktiga meetriline ruum, siis Banachi ruumil* $\mathrm{Lip}_0(M, X)$ *on Daugaveti omadus.*

Käesoleva bakalaureusetöö eesmärk on kirjutada üksikasjaliselt lahti eelneva Medina ja Rueda Zoca teoreemi – millele töös edaspidi viidatakse kui *bakalaureusetöös kesksele teoreemile* – tõestus, täiendades sellega originaalartikli skemaatilist stiili.

Bakalaureusetöö koosneb kahest paragrahvist.

Paragrahvis 1 esitatakse mõned väljapoole matemaatika bakalaureuseõppekava jäävad analüüsialased mõisted ja tulemused, mis on vajalikud bakalaureusetöös keskse teoreemi mõistmiseks ja tõestamiseks. Need mõisted ja tulemused on liigitatud järgmisteks teemadeks, millest igaühele on selles paragrahvis pühendatud omaette alajaotis: jada nõrk koonduvus normeeritud ruumis, teoreem piisavast arvust funktsionaalidest, Lipschitzi kujutused (Lipschitzi kujutuse ja ruumi $\mathrm{Lip}_0(M, X)$ mõiste, McShane'i–Whitney jätkamisteoreem, piisav tingimus jada nõrgaks koonduvuseks nullelemendiks ruumis $\mathrm{Lip}_0(M, X)$), Daugaveti omadus ning liinkaugusega meetriline ruum.

Paragrahvis 2 alajaotises 2.2 esitatakse bakalaureusetöös keskse teoreemi tõestus. Alajaotisse 2.1 on koondatud spetsiifilisemat laadi abitulemused selle teoreemi tõestuse tarvis.

Bakalaureusetöös kasutatakse funktsionaalanalüüsis standardseid tähistusi. Lahtist ja kinnist kera meetrilises ruumis M keskpunktiga w ja raadiusega r tähistatakse vastavalt sümbolitega $B(w, r)$ ja $\overline{B}(w, r)$, s.t

$$B(w,r) \coloneqq \{u \in M \colon d(u,w) < r\} \quad \text{ja} \quad \overline{B}(w,r) \coloneqq \{u \in M \colon d(u,w) \leqslant r\},$$

ning kinnist *sõõri* ruumis M ümber punkti w sfääride vahel raadiustega r ja R, kus $r < R$, tähistatakse sümboliga $\overline{C}(w, r, R)$, s.t

$$\overline{C}(w,r,R) \coloneqq \{u \in M \colon r \leqslant d(u,w) \leqslant R\}.$$

Normeeritud ruumi X kinnist ühikkera ja ühiksfääri tähistatakse vastavalt sümbolitega B_X ja S_X, s.t

$$B_X \coloneqq \{x \in X \colon \|x\| \leqslant 1\} \quad \text{ja} \quad S_X \coloneqq \{x \in X \colon \|x\| = 1\},$$

ning ruumi X kaasruumi sümboliga X^*.

Kui M on meetriline ruum, X on normeeritud ruum ja $f \colon M \to X$, siis hulka

$$\operatorname{supp} f := \{u \in M \colon f(u) \neq 0\}$$

me nimetame funktsiooni f *kandjahulgaks* ehk lihtsalt *kandjaks*. Juhime tähelepanu, et kirjanduses mõistetakse kandjahulga $\operatorname{supp} f$ all sageli hulga $\{u \in M \colon f(u) \neq 0\}$ sulundit ruumis M.

Kõikjal bakalaureusetöös on M meetriline ruum, milles on vähemalt kaks elementi ning X on mittetriviaalne Banachi ruum üle korpuse $\mathbb{K}$ (see tähendab, et $X \neq \{0\}$), kus $\mathbb{K}$ on reaalarvude korpus $\mathbb{R}$ või kompleksarvude korpus $\mathbb{C}$. Erandiks on paragrahvi 1 alajaotised 1.1 ja 1.2, kus loobutakse ajutiselt eeldusest, et X on *täielik* normeeritud ruum (s.t Banachi ruum), eeldades vaid, et X on normeeritud ruum. X^* on kõikjal bakalaureusetöös ruumi X kaasruum ehk pidevate lineaarsete funktsionaalide ruum $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$.

1 Vajalikud eelteadmised

Selle paragrahvi kahes esimeses alajaotises me loobume ajutiselt eeldusest, et X on *täielik* normeeritud ruum, eeldades vaid, et X on normeeritud ruum. Rõhutame, et kogu ülejäänud töös me eeldame, et X on *täielik* normeeritud ruum, s.t Banachi ruum.

1.1 Jada nõrk koonduvus normeeritud ruumis

Definitsioon 1.1. Olgu (x_n) jada ruumis X ning olgu $x \in X$. Öeldakse, et jada (x_n) koondub *nõrgalt* elemendiks x ruumis X, kui

$$x^*(x_n) \to x^*(x) \quad \text{iga } x^* \in X^* \text{ korral.}$$

Sellisel juhul kirjutatakse: $x_n \to x$ nõrgalt ruumis X.

Lause 1.11 tõestus allpool kasutab järgnevat kahte lauset 1.2 ja 1.3.

Lause 1.2. *Olgu Y normeeritud ruum üle sama korpuse, mis X, olgu $T\colon X \to Y$ pidev lineaarne operaator ning olgu (x_n) jada ruumis X ja $x \in X$. Kui $x_n \to x$ nõrgalt ruumis X, siis $Tx_n \to Tx$ nõrgalt ruumis Y.*

Tõestus. Eeldame, et $x_n \to x$ nõrgalt ruumis X. Lause tõestuseks peame näitama, et $y^*(Tx_n) \to y^*(Tx)$ iga $y^* \in Y^*$ korral. Olgu $y^* \in Y^*$. Kuna operaator $T\colon X \to Y$ ja funktsionaal $y^*\colon Y \to \mathbb{K}$ on pidevad ja lineaarsed, siis ka nende kompositsioon $y^* \circ T\colon X \to \mathbb{K}$ on pidev ja lineaarne, s.t $y^* \circ T \in X^*$, järelikult $(y^* \circ T)(x_n) \to (y^* \circ T)(x)$ (sest $x_n \to x$ nõrgalt ruumis X). Kuna iga $n \in \mathbb{N}$ korral $(y^* \circ T)(x_n) = y^*(Tx_n)$ ning $(y^* \circ T)(x) = y^*(Tx)$, siis $y^*(Tx_n) \to y^*(Tx)$, nagu soovitud. $\square$

Tähistame iga $n \in \mathbb{N}$ korral $e_n := (\delta_{nk})_{k=1}^{\infty}$, kus δ_{nk} on Kroneckeri delta; teisisõnu, sümbol e_n tähistab arvjada, mille n-s element on 1 ning kõik ülejäänud elemendid on nullid. Selline arvjada koondub nulliks, seega arvjadasid e_n võib tõlgendada (Banachi) ruumi c_0 elementidena.

Lause 1.3. *Jada $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ koondub nõrgalt nullelemendiks ruumis c_0.*

Lause 1.3 tõestus toetub järgnevale ruumi c_0 kaasruumi kirjeldavale teoreemile 1.4. Meenutame, et kui Y on normeeritud ruum üle sama korpuse, mis X, siis pidevat lineaarset bijektsiooni $T\colon X \to Y$, mille pöördoperaator on samuti pidev, nimetatakse normeeritud ruumide *isomorfismiks.* Kui seejuures $\|Tx\| = \|x\|$ iga $x \in X$ korral, siis öeldakse, et T on *isomeetriline isomorfism.*

Teoreem 1.4 (vt nt [OO, lk 163, teoreem 2]). *Kujutus* $J\colon \ell_1 \to c_0^*$, *kus*

$$(Ja)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \xi_k \qquad \text{kõikide } a = (\alpha_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_1 \text{ ja } x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty} \in c_0 \text{ korral,}$$

on isomeetriline isomorfism.

Lause 1.3 tõestus. Olgu $f \in c_0^*$. Lause tõestuseks piisab näidata, et $f(e_n) \to 0$. Kuna isomeetriline isomorfism J teoreemist 1.4 on sürjektsioon, siis leidub $a = (\alpha_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_1$ selliselt, et $Ja = f$. Nüüd iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$f(e_n) = (Ja)(e_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \delta_{nk} = \alpha_n$$

(siin δ_{nk} on Kroneckeri delta), seega piisab lause tõestuseks näidata, et $\alpha_n \to 0$. See koonduvus on ilmne, sest arvrida $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ koondub – ruumi ℓ_1 definitsiooni põhjal koondub see arvrida isegi absoluutselt – ning koonduva arvrea üldliige koondub nulliks. □

1.2 Teoreem piisavast arvust funktsionaalidest

Bakalaureusetöös keskse teoreemi (vt teoreemi Sissejuhatuses või teoreemi 2.9) tõestus kasutab järgnevat järeldust klassikalisest Hahn–Banachi jätkamisteoreemist.

Teoreem 1.5 (teoreem piisavast arvust funktsionaalidest; vt nt [OO, lk 170, järeldus 1]). *Iga* $x \in X$ *korral leidub* $x^* \in X^*$ *nii, et* $\|x^*\| = 1$ *ja* $x^*(x) = \|x\|$.

1.3 Lipschitzi kujutused

1.3.1 Lipschitzi kujutuse mõiste. Ruum $\mathrm{Lip}_0(M, X)$

Kõikjal selles jaotises on N ja O meetrilised ruumid.

Definitsioon 1.6. Kujutust $f\colon M \to N$ nimetatakse *Lipschitzi kujutuseks,* kui leidub arv $L \in \mathbb{R}$ selliselt, et

$$d(f(x), f(y)) \leqslant L d(x, y) \quad \text{kõikide } x, y \in M \text{ korral;}$$

sel juhul öeldakse ka, et f on *L-Lipschitzi kujutus.* Vähimat niisuguse omadusega arvu L tähistatakse sümboliga $\mathrm{Lip}(f)$ või $\|f\|_{\mathrm{Lip}}$.

Märgime, et Lipschitzi kujutuse $f\colon M \to N$ puhul vähim niisuguse omadusega arv L tõepoolest leidub, sest sellise kujutuse puhul, kui hulgas M on rohkem kui üks element, on hulk

$$\left\{ \frac{d(f(u), f(v))}{d(u, v)} \colon u, v \in M,\ u \neq v \right\}$$

mittetühi ja ülalt tõkestatud ning selle hulga ülemine raja ehk vähim ülemine tõke ongi vähim niisuguse omadusega arv L.

Lipschitzi kujutusi nimetatakse ka *Lipschitzi operaatoriteks* või (eriti arvväärtuseliste kujutuste puhul) *Lipschitzi funktsioonideks.*

Lause 1.7. *Olgu $f\colon M \to N$ ja $g\colon N \to O$ Lipschitzi kujutused. Siis ka kompositsioon $g \circ f\colon M \to O$ on Lipschitzi kujutus, kusjuures* $\mathrm{Lip}(g \circ f) \leqslant \mathrm{Lip}(g) \cdot \mathrm{Lip}(f)$.

Tõestus. Lause tõestuseks piisab märkida, et mis tahes $u, v \in M$ korral

$$\begin{aligned} d((g \circ f)(u), (g \circ f)(v)) &= d(g(f(u)), g(f(v))) \\ &\leqslant \mathrm{Lip}(g) \cdot d(f(u), f(v)) \\ &\leqslant \mathrm{Lip}(g) \cdot \mathrm{Lip}(f) \cdot d(u, v). \end{aligned}$$

□

Kõigi Lipschitzi kujutuste $M \to X$ hulk on vektorruum loomulike tehete suhtes; seda vektorruumi tähistatakse sümboliga $\mathrm{Lip}(M, X)$. Kui X on arvude ruum $\mathbb{K}$, siis $\mathrm{Lip}(M, X)$ asemel (ehk siis $\mathrm{Lip}(M, \mathbb{K})$ asemel) kirjutatakse tavaliselt lihtsalt $\mathrm{Lip}(M)$. Juhime tähelepanu, et funktsioon $\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}}$ on poolnorm vektorruumil $\mathrm{Lip}(M, X)$, kuid pole mitte kunagi norm, sest mis tahes konstantne kujutus $f\colon M \to X$ on Lipschitzi kujutus, mille puhul $\|f\|_{\mathrm{Lip}} = 0$.

Definitsioon 1.8. Meetrilist ruumi koos selles fikseeritud elemendiga nimetatakse *nullpunktiga meetriliseks ruumiks.* Seda fikseeritud elementi nimetatakse *nullpunktiks* ja tähistatakse sümboliga 0.

Olgu M nullpunktiga meetriline ruum. Sümboliga $\mathrm{Lip}_0(M, X)$ tähistatakse kõigi selliste Lipschitzi kujutuste $f\colon M \to X$ hulka, mille korral $f(0) = 0$. Kui X on arvude ruum $\mathbb{K}$, siis $\mathrm{Lip}_0(M, X)$ asemel (ehk siis $\mathrm{Lip}_0(M, \mathbb{K})$ asemel) kirjutatakse tavaliselt lihtsalt $\mathrm{Lip}_0(M)$. On hästi teada, et $\mathrm{Lip}_0(M, X)$ on vektorruum loomulike tehete suhtes ning, veelgi enam, Banachi ruum normi $\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}}$ suhtes (vt nt [CMN, lk 368, teoreem 8.1.3, 2]).

1.3.2 McShane'i–Whitney jätkamisteoreem

Kõikjal selles alajaotises on N ruumi M mittetühi alamruum.

Definitsioon 1.9. Olgu $\phi\colon N \to O$ Lipschitzi kujutus ning olgu $f\colon M \to O$ kujutuse ϕ jätk (s.t $f|_N = \phi$). Kui f on Lipschitzi kujutus, siis öeldakse, et f on kujutuse ϕ *Lipschitzi jätk*. Kui seejuures mingi reaalarvu $L \geqslant 0$ korral f on L-Lipschitzi kujutus, siis öeldakse, et f on kujutuse ϕ *L-Lipschitzi jätk*.

On ilmne, et kui $f\colon M \to O$ on kujutuse $\phi\colon N \to O$ Lipschitzi jätk, siis $\mathrm{Lip}(f) \geqslant \mathrm{Lip}(\phi)$. Järgnev McShane'i–Whitney jätkamisteoreem ütleb muuhulgas, et igal Lipschitzi funktsioonil $\phi\colon N \to \mathbb{R}$ leidub Lipschitzi jätk $f\colon M \to \mathbb{R}$, mille puhul $\mathrm{Lip}(f) = \mathrm{Lip}(\phi)$.

Teoreem 1.10 (McShane'i–Whitney jätkamisteoreem, vt nt [CMN, lk 211–212, teoreem 4.1.1]). *Olgu $L \in \mathbb{R}$, $L \geqslant 0$, ning olgu $\phi\colon N \to \mathbb{R}$ L-Lipschitzi funktsioon. Defineerime funktsioonid $\check{\phi}, \widehat{\phi}\colon M \to \mathbb{R}$ võrdustega*

$$\check{\phi}(u) = \sup_{v\in N}\bigl(\phi(v) - L\,d(v,u)\bigr) \quad \textit{iga } u \in M \textit{ korral}$$

ja

$$\widehat{\phi}(u) = \inf_{v\in N}\bigl(\phi(v) + L\,d(v,u)\bigr) \quad \textit{iga } u \in M \textit{ korral.}$$

Siis $\check{\phi}$ ja $\widehat{\phi}$ on funktsiooni ϕ L-Lipschitzi jätkud. Kui $f\colon M \to \mathbb{R}$ on funktsiooni ϕ L-Lipschitzi jätk, siis

$$\check{\phi}(u) \leqslant f(u) \leqslant \widehat{\phi}(u) \quad \textit{iga } u \in M \textit{ korral.}$$

1.3.3 Piisav tingimus jada nõrgaks koonduvuseks nullelemendiks ruumis $\mathrm{Lip}_0(M,X)$

Lause 1.11 (vt [MR, lemma 2.8]; vt ka [CCGMR, lemma 1.5]). *Olgu M nullpunktiga meetriline ruum ning olgu (f_n) tõkestatud jada ruumis $\mathrm{Lip}_0(M,X)$. Kui kandjahulgad*

$$U_n := \operatorname{supp} f_n = \{u \in M\colon f_n(u) \neq 0\}, \qquad n = 1,2,\dots,$$

on paarikaupa lõikumatud, siis $f_n \to 0$ nõrgalt ruumis $\mathrm{Lip}_0(M,X)$.

Tõestus. Eeldame, et hulgad U_n, $n = 1,2,\dots$, on paarikaupa lõikumatud. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $\|f_n\| \leqslant 1$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral. Defineerime kujutuse

$$T\colon c_0 \ni (\xi_k)_{k=1}^{\infty} \longmapsto \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k f_k \in \mathrm{Lip}_0(M,X) \tag{1.1}$$

(selle definitsiooni korrektsuses veendume allpool). Lause tõestuseks piisab näidata, et see kujutus on pidev ja lineaarne. Tõepoolest, iga $n \in \mathbb{N}$ korral $Te_n = f_n$ (elemendid $e_n \in c_0$, $n = 1, 2, \ldots$, on defineeritud jaotises 1.1 lk 7 lausele 1.3 eelnevas lõigus). Lause 1.3 põhjal $e_n \to 0$ nõrgalt ruumis c_0, järelikult, kui meie operaator T oleks pidev ja lineaarne, siis lause 1.2 põhjal $Te_n \to 0$ nõrgalt ruumis $\mathrm{Lip}_0(M, X)$, s.t $f_n \to 0$ nõrgalt ruumis $\mathrm{Lip}_0(M, X)$, nagu soovitud.

Olgu $(\xi_k)_{k=1}^{\infty} \in c_0$. Kujutuse T definitsiooni korrektsuse tõestuseks piisab näidata, et rida valemis (1.1) koondub ruumis $\mathrm{Lip}_0(M, X)$. Selleks veendume kõigepealt, et

($\sharp$) *mis tahes mittetühja lõpliku alamhulga $J \subset \mathbb{N}$ korral*

$$\Big\| \sum_{k \in J} \xi_k f_k \Big\| \leqslant 2 \max_{k \in J} |\xi_k|. \tag{1.2}$$

Olgu $J \subset \mathbb{N}$ mittetühi lõplik alamhulk ning olgu $u, v \in M$. Kuna hulgad U_k, $k = 1, 2, \ldots$, on paarikaupa lõikumatud, siis saab leiduda ülimalt üks selline $i \in J$, et $u \in U_i$, ja ülimalt üks selline $j \in J$, et $v \in U_j$. Edasises ongi $i \in J$ ja $j \in J$ sellised naturaalarvud, et $u \in U_i$ ja $v \in U_j$; märgime, et sellised i ja j eksisteerivad vastavalt parajasti siis, kui $u \in \bigcup_{k \in J} U_k$ ja $v \in \bigcup_{k \in J} U_k$. Tähistame $g := \sum_{k \in J} \xi_k f_k$ ja $K := \max_{k \in J} |\xi_k|$. Võrratuse (1.2) tõestuseks piisab näidata, et $\|g(u) - g(v)\| \leqslant 2K d(u, v)$.

Vaatleme kõigepealt juhtu, kus $u, v \in \bigcup_{k \in J} U_k$. Kui $i = j$, siis $g(u) = \xi_i f_i(u)$ ja $g(v) = \xi_i f_i(v)$, seega

$$\|g(u) - g(v)\| = \|\xi_i f_i(u) - \xi_i f_i(v)\| = |\xi_i| \, \|f_i(u) - f_i(v)\| \leqslant K \|f_i\| d(u, v) \leqslant K d(u, v);$$

kui $i \neq j$, siis $g(u) = \xi_i f_i(u)$, $g(v) = \xi_j f_j(v)$ ja $f_i(v) = f_j(u) = 0$, seega

$$\begin{aligned} \|g(u) - g(v)\| &\leqslant \|\xi_i f_i(u) - \xi_j f_j(v)\| = \|\xi_i (f_i(u) - f_i(v)) + \xi_j (f_j(u) - f_j(v))\| \\ &\leqslant |\xi_i| \, \|f_i(u) - f_i(v)\| + |\xi_j| \, \|f_j(u) - f_j(v)\| \\ &\leqslant K \|f_i\| d(u, v) + K \|f_j\| d(u, v) \\ &\leqslant K d(u, v) + K d(u, v) = 2K d(u, v). \end{aligned}$$

Kui $u \in \bigcup_{k \in J} U_k$ ja $v \notin \bigcup_{k \in J} U_k$, siis vastavalt $g(u) = \xi_i f_i(u)$ ja $g(v) = 0 = f_i(v)$, seega

$$\begin{aligned} \|g(u) - g(v)\| &= \|\xi_i f_i(u)\| = \|\xi_i f_i(u) - \xi_i f_i(v)\| = |\xi_i| \, \|f_i(u) - f_i(v)\| \\ &\leqslant K \|f_i\| d(u, v) \leqslant K d(u, v); \end{aligned}$$

kui $u \notin \bigcup_{k \in J} U_k$ ja $v \in \bigcup_{k \in J} U_k$, siis sümmeetria põhjal samuti $\|g(u) - g(v)\| \leqslant K d(u, v)$. Lõpetuseks, kui $u, v \notin \bigcup_{k \in J} U_k$, siis $g(u) = 0$ ja $g(v) = 0$ ning seega $\|g(u) - g(v)\| = 0$.

Väide ($\sharp$) on tõestatud.

Kuna ruum $\mathrm{Lip}_0(M, X)$ on täielik, siis valemis (1.1) esineva rea koonduvuse tõestuseks selles ruumis saame rakendada Cauchy kriteeriumit. Fikseerime vabalt reaalarvu $\varepsilon > 0$. Cauchy kriteeriumi põhjal piisab valemis (1.1) esineva rea koonduvuse tõestuseks ruumis $\mathrm{Lip}_0(M, X)$ leida indeks $N \in \mathbb{N}$ selliselt, et

$$n, p \in \mathbb{N},\ \ n \geqslant N \qquad \Longrightarrow \qquad \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} \xi_k f_k \right\| < \varepsilon. \tag{1.3}$$

Kuna $\xi_k \to 0$, siis leidub indeks $N \in \mathbb{N}$ selliselt, et $|\xi_k| < \frac{\varepsilon}{2}$ iga indeksi $k \geqslant N$ korral. Kui nüüd $n, p \in \mathbb{N}$, kusjuures $n \geqslant N$, siis väite ($\sharp$) põhjal

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} \xi_k f_k \right\| \leqslant 2 \max_{n+1 \leqslant k \leqslant n+p} |\xi_k| < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon;$$

niisiis implikatsioon (1.3) kehtib ja seega valemis (1.1) esinev rida koondub ruumis $\mathrm{Lip}_0(M, X)$.

Oleme näidanud, et kujutus T on korrektselt defineeritud.

Teoreemi tõestuseks jääb näidata, et kujutus T on pidev ja lineaarne. Ilmselt on see kujutus lineaarne. Selle kujutuse pidevuse tõestuseks piisab näidata, et see kujutus on tõkestatud. Mis tahes $x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty} \in c_0$ korral

$$\|Tx\| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k f_k \right\| = \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n} \xi_k f_k \right\| \leqslant \limsup_{n\to\infty} 2 \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\xi_k| \leqslant 2\|x\|,$$

seega kujutus T on tõkestatud (kusjuures $\|T\| \leqslant 2$). □

1.4 Daugaveti omadus

Bakalaureusetöös keskse teoreemi (vt teoreemi Sissejuhatuses või teoreemi 2.9) tõestus kasutab järgnevat piisavat tingimust selleks, et Banachi ruumil oleks Daugaveti omadus.

Lause 1.12 (vrd [R, teoreem 2.1, (1)⇔(5)]). *Kui*

($\sharp$) *mis tahes $x, y \in S_X$ ja mis tahes reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leiduvad element $z \in X$ ja jada (x_n) ruumis X selliselt, et $\|z - y\| < \varepsilon$, $x_n \to z$ nõrgalt ruumis X ning iga $n \in \mathbb{N}$ korral $\|x_n\| \leqslant 1 + \varepsilon$ ja $\|x + x_n\| \geqslant 2 - \varepsilon$,*

siis ruumil X on Daugaveti omadus.

Lause 1.12 tõestus toetub järgnevale teoreemile 1.14, mille sõnastamiseks me peame kõigepealt sisse tooma Banachi ruumi ühikkera *viilu* mõiste.

Definitsioon 1.13. Hulka

$$\{y \in B_X\colon \operatorname{Re} x^*(y) > 1-\alpha\}, \quad \text{kus } x^* \in S_{X^*} \text{ ja } \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0,$$

nimetatakse ühikkera B_X *viiluks.*

Teoreem 1.14 (vt [W, lemma 2.2])**.** *Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *ruumil X on Daugaveti omadus,*

(ii) *iga $x \in S_X$, iga ühikkera B_X viilu S ja iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub $x_0 \in S$ nii, et $\|x + x_0\| \geqslant 2-\varepsilon$.*

Lause 1.12 tõestus. Kehtigu ($\sharp$) ning olgu $x \in S_X$, olgu S ühikkera B_X viil ja olgu $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Teoreemi 1.14 põhjal piisab lause tõestuseks leida element $x_0 \in S$ nii, et $\|x + x_0\| > 2-\varepsilon$.

Olgu $x^* \in S_{X^*}$ ja reaalarv $\alpha > 0$ sellised, et $S = \{y \in B_X\colon \operatorname{Re} x^*(y) > 1-\alpha\}$. Valime elemendi $y \in S_X \cap S$ nii, et $\operatorname{Re} x^*(y) > 0$; siis leidub reaalarv $\beta > 0$ nii, et $\operatorname{Re} x^*(y) > 1-\alpha+3\beta$ ja $\operatorname{Re} x^*(y) > 2\beta$. Valime reaalarvu δ selliselt, et $0 < \delta < 1$, $\frac{1-\alpha+\beta}{1+\delta} > 1-\alpha$, $\delta < \beta$ ja $2\delta < \varepsilon$. Rahuldagu element z ja jada (x_n) väite ($\sharp$) tingimusi, kus arv ε on asendatud arvuga δ. Kuna $x_n \to z$ nõrgalt ruumis X, siis leidub $n \in \mathbb{N}$ selliselt, et $|x^*(x_n) - x^*(z)| < \beta$ ja seega

$$\begin{aligned}|x^*(x_n) - x^*(y)| &\leqslant |x^*(x_n) - x^*(z)| + |x^*(z) - x^*(y)| < \beta + \|z-y\| < \beta + \delta \\ &< \beta + \beta = 2\beta\end{aligned}$$

ning järelikult $\operatorname{Re} x^*(x_n) > \operatorname{Re} x^*(y) - 2\beta$. Märgime, et

$$1+\delta \geqslant \|x_n\| \geqslant \|x + x_n\| - \|x\| \geqslant 2-\delta-1 = 1-\delta > 0.$$

Defineerime $x_0 := \frac{x_n}{\|x_n\|}$; siis $x_0 \in S_X$, kusjuures

$$\operatorname{Re} x^*(x_0) = \frac{\operatorname{Re} x^*(x_n)}{\|x_n\|} > \frac{\operatorname{Re} x^*(y) - 2\beta}{1+\delta} > \frac{1-\alpha+\beta}{1+\delta} > 1-\alpha,$$

seega $x_0 \in S$ ning

$$\begin{aligned}\|x + x_0\| &\geqslant \|x + x_n\| - \|x_0 - x_n\| = \|x + x_n\| - |1 - \|x_n\|| \\ &\geqslant 2-\delta-\delta > 2-\varepsilon.\end{aligned}$$

$\square$

1.5 Liinkaugusega ruum

Järgnevas definitsioonis tähistab Lip(M) Lipschitzi funktsioonide $M \to \mathbb{R}$ (vektor)ruumi.

Definitsioon 1.15 (vt [IKW, definitsioon 2.2]).

- Öeldakse, et ruum M on *lokaalne* (ingl *local*), kui iga funktsiooni $f \in$ Lip(M) ja iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leiduvad teineteisest erinevad punktid $u, v \in M$ nii, et $d(u, v) < \varepsilon$ ja
$$\frac{f(u) - f(v)}{d(u, v)} > \|f\|_{\mathrm{Lip}} - \varepsilon. \tag{1.4}$$
- Olgu $f \in$ Lip(M) ja olgu $\varepsilon > 0$. Öeldakse, et punkt $m \in M$ on funktsiooni f *ε-punkt,* kui punkti m mis tahes ümbruses leiduvad teineteisest erinevad punktid u ja v, mis rahuldavad tingimust (1.4).
- Öeldakse, et ruum M on *levinult lokaalne* (ingl *spreadingly local*), kui iga funktsiooni $f \in$ Lip(M) ja iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub lõpmatult palju funktsiooni f ε-punkte.

  Teisisõnu, M on levinult lokaalne, kui iga funktsiooni $f \in$ Lip(M) ja iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral hulk
$$\Big\{m \in M\colon \inf_{r>0} \|f|_{\overline{B}(m,r)}\|_{\mathrm{Lip}} > \|f\|_{\mathrm{Lip}} - \varepsilon\Big\}$$
  on lõpmatu.

Definitsioon 1.16 (vt nt [BH, lk 12]). Olgu $u, v \in M$. Pidevat funktsiooni $\gamma\colon [0, 1] \to M$ nimetame *liiniks* (ingl *path*) punktist u punkti v, kui $\gamma(0) = u$ ja $\gamma(1) = v$.

Kui γ on liin punktist u punkti v, siis liini γ *pikkus* on
$$L(\gamma) := \sup\Big\{\sum_{i=1}^{n} d(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i))\colon n \in \mathbb{N},\ 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1\Big\}.$$

Kui liini γ pikkus on lõplik, siis öeldakse, et see liin on *sirgestuv.*

Definitsioon 1.17 (vt nt [BH, lk 12, definitsioon 1.18]). Öeldakse, et M on *liinkaugusega ruum* (ingl *length space*), kui mis tahes $u, v \in M$ korral
$$d(u, v) = \inf\{L(\gamma)\colon \gamma \text{ on liin punktist } u \text{ punkti } v\}.$$

Bakalaureusetöös keskse teoreemi (vt teoreemi Sissejuhatuses või teoreemi 2.9) tõestus kasutab järgneva teoreemi implikatsiooni (i)$\Rightarrow$(ii).

Teoreem 1.18 (vt [GPR, lause 3.4])**.** *Olgu M täielik meetriline ruum. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *M on liinkaugusega ruum,*

(ii) *M on levinult lokaalne,*

(iii) *M on lokaalne.*

Märkus. Teoreemi 1.18 implikatsioon (i)$\Rightarrow$(ii) on tõestatud artiklis [IKW, lause 2.3 ja selle tõestusele järgnev lõik]; implikatsioon (ii)$\Rightarrow$(iii) on triviaalne. Implikatsioon (iii)$\Rightarrow$(ii) on artiklis [IKW, lause 2.6] tõestatud kompaktse ruumi M jaoks; implikatsiooni (iii)$\Rightarrow$(i), samuti nagu ka implikatsiooni (ii)$\Rightarrow$(i) selles artiklis adresseeritud pole. Implikatsioon (iii)$\Rightarrow$(i) on tõestatud artiklis [GPR, lause 3.4].

2 Bakalaureusetöös keskse teoreemi tõestus

Selle paragrahvi alajaotises 2.2 esitame bakalaureusetöös keskse teoreemi (vt teoreemi Sissejuhatuses) tõestuse. Alajaotisse 2.1 on koondatud spetsiifilisemat laadi abitulemused selle teoreemi tõestuse tarvis.

2.1 Abitulemused bakalaureusetöös keskse teoreemi tõestuse jaoks

Bakalaureusetöös keskse teoreemi (vt teoreemi Sissejuhatuses või teoreemi 2.9) tõestus kasutab selle alajaotise tulemustest vahetult ainult lemmat 2.1, lauset 2.4 ja lemmat 2.8. Ülejäänud selle alajaotise tulemused on abitulemused nende kolme tulemuse tõestamise jaoks.

Lemma 2.1. *Olgu $A \subset M$ lõpmatu alamhulk, olgu $g \in \mathrm{Lip}_0(M, X)$, $g \neq 0$, ning olgu $\varepsilon > 0$. Siis leiduvad (loenduv) alamhulk $\{u_n : n \in \mathbb{N}\} \subset A$, reaalarvud $\beta_n > 0$, $n = 1, 2, \dots$, ja kujutus $h \in \mathrm{Lip}_0(M, X)$ selliselt, et*

(1) $\|h\| = \|g\|$ *ja* $\|h - g\| < \varepsilon$,

(2) *kerad* $\overline{B}(h(u_n), \beta_n)$, $n = 1, 2, \dots$, *on paarikaupa lõikumatud.*

Lemma 2.1 tõestus toetub järgnevatele kahele lemmale.

Lemma 2.2. *Olgu $A \subset M$ lõpmatu alamhulk. Siis leiduvad punktid $u_n \in A$ ja reaalarvud $r_n > 0$, $n = 1, 2, \dots$, selliselt, et kinnised kerad $\overline{B}(u_n, r_n)$, $n = 1, 2, \dots$, on paarikaupa lõikumatud.*

Lemma 2.3 (vrd [MR, lemma 2.6])**.** *Olgu $g \in \mathrm{Lip}_0(M, X)$, olgu punktid $u_n \in M \setminus \{0\}$, $n = 1, 2, \dots$, sellised, et mingite reaalarvude $r_n > 0$, $n = 1, 2, \dots$, korral on kerad $\overline{B}(u_n, r_n)$, $n = 1, 2, \dots$, paarikaupa lõikumatud, ning olgu $\varepsilon > 0$. Siis leidub kujutus $g_0 \in \mathrm{Lip}_0(M, X)$ selliselt, et*

(1) $\|g - g_0\|_{\mathrm{Lip}} \leqslant \varepsilon$,

(2) $g_0(u_k) \neq g_0(u_n)$ *kõikide teineteisest erinevate $k, n \in \mathbb{N}$ korral.*

Lemma 2.1 tõestus. Lemma 2.2 põhjal leiduvad punktid $u_n \in A$ ja reaalarvud $r_n > 0$, $n = 1, 2, \dots$, selliselt, et kinnised kerad $\overline{B}(u_n, r_n)$, $n = 1, 2, \dots$, on paarikaupa lõikumatud. Üldisust kitsendamata võime eeldame, et $0 \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{B}(u_n, r_n)$. Lemma 2.3 põhjal leidub kujutus $g_0 \in \mathrm{Lip}_0(M, X)$ selliselt, et $\|g - g_0\|_{\mathrm{Lip}} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ ja $g_0(u_k) \neq g_0(u_n)$ kõikide teineteisest erinevate $k, n \in \mathbb{N}$ korral. Defineerime $h := \frac{\|g\|}{\|g_0\|} g_0$; siis ilmselt ka $h(u_k) \neq h(u_n)$ kõikide teineteisest erinevate $k, n \in \mathbb{N}$ korral. Lemma 2.2 põhjal eeldame üldisust kitsendamata, et leiduvad reaalarvud

$\beta_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, selliselt, et kerad $\overline{B}(h(u_n), \beta_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, on paarikaupa lõikumatud (selleks tuleb hulga $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ mingi loenduv alamhulk vajadusel ümber tähistada hulgaks $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$); niisiis tingimus (2) kehtib. Ka tingimus (1) kehtib, sest

$$
\begin{aligned}
\|h - g\| &= \left\| \frac{\|g\|}{\|g_0\|}\, g_0 - g \right\| \\
&\leqslant \left\| \frac{\|g\|}{\|g_0\|}\, g_0 - g_0 \right\| + \|g_0 - g\| = \big| \|g\| - \|g_0\| \big| + \|g_0 - g\| \\
&\leqslant \|g_0 - g\| + \|g_0 - g\| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

□

LEMMA 2.2 TÕESTUS. Tähistame hulga A isoleeritud punktide hulga tähega C.

Vaatleme kõigepealt juhtu, kus hulk C on lõpmatu. Sel juhul leidub loenduv alamhulk $\{u_n : n \in \mathbb{N}\} \subset C$. Iga $n \in \mathbb{N}$ korral on u_n hulga A isoleeritud punkt, seega leidub reaalarv $\gamma_n > 0$ selliselt, et $u_k \notin \overline{B}(u_n, \gamma_n)$ iga arvust n erineva $k \in \mathbb{N}$ korral. Nüüd kerad $\overline{B}\big(u_n, \frac{\gamma_n}{2}\big)$, $n = 1, 2, \ldots$, on paarikaupa lõikumatud. Tõepoolest, kui mingite teineteisest erinevate $k, n \in \mathbb{N}$ korral leiduks $u \in \overline{B}\big(u_k, \frac{\gamma_k}{2}\big) \cap \overline{B}\big(u_n, \frac{\gamma_n}{2}\big)$, siis saaksime vastuolu:

$$
d(u_k, u_n) \leqslant d(u_k, u) + d(u, u_n) \leqslant \frac{\gamma_k}{2} + \frac{\gamma_n}{2} < \frac{1}{2} d(u_k, u_n) + \frac{1}{2} d(u_k, u_n) = d(u_k, u_n).
$$

Jääb vaadelda juhtu, kus hulk C on lõplik. Tähistame $B := A \setminus C$; siis hulk B on lõpmatu, kusjuures iga hulga B punkt on hulga A kuhjumispunkt ning, veelgi enam, iga hulga B punkt on hulga B enda kuhjumispunkt. Valime punktid u_n ja reaalarvud $r_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, induktiivselt järgmise eeskirja järgi. Kõigepealt valime vabalt $u_1, u_2 \in B$ ja reaalarvu $r_1 > 0$ selliselt, et $u_2 \notin \overline{B}(u_1, r_1)$. Edasi, eeldame, et mingi $n \in \mathbb{N}$ korral on meil leitud punktid $u_1, \ldots, u_{n+1} \in B$ ja reaalarvud $r_1, \ldots, r_n > 0$ selliselt, et kerad $\overline{B}(u_k, r_k)$, $k = 1, \ldots, n$, on paarikaupa lõikumatud ja $u_{n+1} \notin \bigcup_{k=1}^{n} \overline{B}(u_k, r_k)$. Siis $M \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \overline{B}(u_k, r_k)$ on punkti u_{n+1} ümbrus, järelikult leidub punktist u_{n+1} erinev $u_{n+2} \in (M \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \overline{B}(u_k, r_k)) \cap B$ (siin me arvestasime, et u_{n+1} on hulga B kuhjumispunkt). Valime reaalarvu $r_{n+1} > 0$ selliselt, et $r_{n+1} < d(u_{n+1}, u_k) - r_k$ iga $k \in \{1, \ldots, n\}$ korral ning $r_{n+1} < d(u_{n+2}, u_{n+1})$. Siis kerad $\overline{B}(u_k, r_k)$, $k = 1, \ldots, n+1$, on paarikaupa lõikumatud, sest mis tahes $u \in \overline{B}(u_{n+1}, r_{n+1})$ ja $k \in \{1, \ldots, n\}$ korral

$$
d(u, u_k) \geqslant d(u_k, u_{n+1}) - d(u_{n+1}, u) > r_k + r_{n+1} - r_{n+1} = r_k,
$$

ning $u_{n+2} \notin \overline{B}(u_{n+1}, r_{n+1})$ ja seega $u_{n+2} \notin \bigcup_{k=1}^{n+1} \overline{B}(u_k, r_k)$. □

LEMMA 2.3 TÕESTUS. Üldisust kitsendamata eeldame, et $0 \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{B}(u_n, r_n)$.

Iga $n \in \mathbb{N}$ korral olgu $\varphi_n \in \mathrm{Lip}_0(M, \mathbb{R})$ selline Lipschitzi funktsioon, et

(1′) $\varphi_n(u_n) \neq 0$,

(2′) iga $u \in M \setminus \overline{B}(u_n, r_n)$ korral $\varphi_n(u) = 0$,

(3′) $\|\varphi_n\|_{\mathrm{Lip}} \leqslant 1$.

Sellise funktsiooni φ_n saamiseks võib selle esmalt defineerida ruumi M alamruumil $\{u_n\} \cup (M \setminus \overline{B}(u_n, r_n))$ tingimustega $\varphi_n(u_n) = r_n$ ja $\varphi_n(x) = 0$ iga $u \in M \setminus \overline{B}(u_n, r_n)$ korral ning seejärel jätkata saadud Lipschitzi funktsioon McShane'i–Whitney jätkamisteoreemi 1.10 abil Lip-normi säilitavalt kogu ruumile M. Siis $\|\varphi_n\|_{\mathrm{Lip}} \leqslant 1$, sest iga $u \in M \setminus \overline{B}(u_n, r_n)$ korral $|\varphi_n(u_n) - \varphi_n(u)| = r_n < d(u_n, u)$.

Olgu (ε_n) selline positiivsete arvude jada, et $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \varepsilon$, ning olgu $x \in S_X$. Defineerime induktiivselt positiivsete arvude jada (δ_n) nii, et

(1″) $\delta_n \leqslant \varepsilon_n$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral,

(2″) $g(u_k) + \delta_k \varphi_k(u_k)\, x \neq g(u_n) + \delta_n \varphi_n(u_n)\, x$ kõikide teineteisest erinevate $k, n \in \mathbb{N}$ korral.

Selleks võtame $\delta_1 = \varepsilon_1$ ning, edasi, kui mingi $n \in \mathbb{N}$ korral on sobivad arvud $\delta_1, \ldots, \delta_n$ leitud, siis valime δ_{n+1} järgmiselt. Märkame, et hulk

$$A := \{g(u_{n+1}) + \delta \varphi_{n+1}(u_{n+1})\, x \colon 0 < \delta < \varepsilon_{n+1}\}$$

on lõpmatu, sest $x \neq 0$ ja $\varphi_{n+1}(u_{n+1}) \neq 0$. Samas on hulk

$$B := \big\{g(u_k) + \delta_k \varphi_k(u_k)\, x \colon k \in \{1, \ldots, n\}\big\}$$

lõplik. Seega pole võimalik, et $A \subset B$, järelikult saame leida hulga A elemendi, mis ei kuulu hulka B, s.t leidub $\delta_{n+1} \in (0, \varepsilon_{n+1})$ nii, et

$$g(u_{n+1}) + \delta_{n+1} \varphi_{n+1}(u_{n+1})\, x \notin B.$$

Defineerime $g_0 := g + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \varphi_n(\cdot)\, x$. Märgime, et see rida koondub ruumis $\mathrm{Lip}_0(M, X)$, sest see ruum on täielik ja see rida koondub absoluutselt:

$$\|g\| + \sum_{n=1}^{\infty} \|\delta_n \varphi_n(\cdot)\, x\| = \|g\| + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \|\varphi_n\|_{\mathrm{Lip}} \|x\| \leqslant \|g\| + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \|g\| + \varepsilon.$$

Kujutus g_0 rahuldab tingimusi (1) ja (2). Tõepoolest, tingimus (2) on ilmselt täidetud arvude δ_n valiku tingimuse (2″) põhjal. Tingimus (1) on täidetud, sest

$$\|g_0 - g\|_{\mathrm{Lip}} = \Big\|\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \varphi_n(\cdot)\, x\Big\|_{\mathrm{Lip}} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \|\varphi_n\|_{\mathrm{Lip}} \|x\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \varepsilon.$$

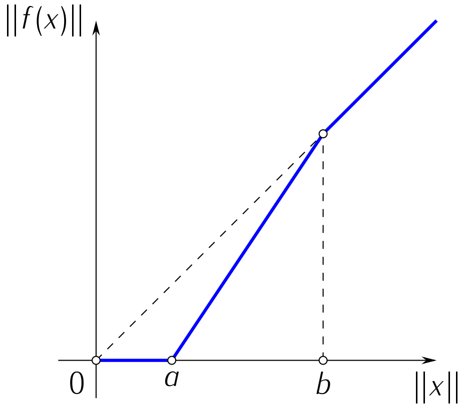
□

Lause 2.4 (vt [MR, lause 2.4]). *Olgu arvud $a, b \in \mathbb{R}$ sellised, et $0 < a < b$.*

(a) *Olgu kujutus $f\colon X \to X$ defineeritud võrdustega*

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{kui } \|x\| \leqslant a, \\ \dfrac{b}{b-a}\left(1 - \dfrac{a}{\|x\|}\right)x, & \text{kui } a \leqslant \|x\| \leqslant b, \\ x, & \text{kui } b \leqslant \|x\|. \end{cases}$$

Siis f on Lipschitzi kujutus, kusjuures $\|f\|_{\mathrm{Lip}} \leqslant \frac{b}{b-a}$.



Joonis 1: Kujutuse f käitumist selgitav joonis

(b) *Olgu $x_0 \in X$. Siis leidub Lipschitzi kujutus $\phi\colon X \to X$ nii, et $\phi(x) = x_0$, kui $x \in \overline{B}(x_0, a)$, ja $\phi(x) = x$, kui $x \in X \setminus B(x_0, b)$, ning $\|\phi\|_{\mathrm{Lip}} \leqslant \frac{b}{b-a}$.*

Lause 2.4 tõestamiseks on otstarbekas eelnevalt tõestada järgnev lemma.

Lemma 2.5 ([MR, Lemma 2.3]). *Olgu $f\colon X \to X$ ning olgu $L, r, R \in \mathbb{R}$ sellised, et $L \geqslant 0$ ja $0 < r < R$. Kui ahendid*

$$f|_{\overline{B}(0,r)}, \quad f|_{\overline{C}(0,r,R)} \quad \text{ja} \quad f|_{X\setminus B(0,R)} \tag{2.1}$$

on L-Lipschitzi kujutused, siis ka f on L-Lipschitzi kujutus.

Lause 2.4 tõestus. (a). Kuna ahendid $f|_{\overline{B}(0,a)}$ ja $f|_{X\setminus B(0,b)}$ on $\frac{b}{b-a}$-Lipschitzi kujutused (sest need ahendid on vastavalt 0-Lipschitzi kujutus ja 1-Lipschitzi kujutus), siis lemma 2.5 põhjal jääb väite tõestuseks näidata, et ahend $f|_{\overline{C}(0,a,b)}$ on $\frac{b}{b-a}$-Lipschitzi kujutus. Olgu $x, y \in \overline{C}(0, a, b)$ (s.t. $a \leqslant \|x\| \leqslant b$ ja $a \leqslant \|y\| \leqslant b$). Üldisust kitsendamata eeldame, et $\|x\| \leqslant \|y\|$. Siis

$$\|f(y) - f(x)\| = \frac{b}{b-a}\left\|y - x - \frac{a}{\|y\|}y + \frac{a}{\|x\|}x\right\|$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{b}{b-a}\Big\| y - x - \frac{a}{\|x\|}y + \frac{a}{\|x\|}x + \frac{a}{\|x\|}y - \frac{a}{\|y\|}y \Big\| \\
&\leqslant \frac{b}{b-a}\left(\left(1 - \frac{a}{\|x\|}\right)\|y-x\| + \left|\frac{a}{\|x\|} - \frac{a}{\|y\|}\right|\|y\|\right) \\
&= \frac{b}{b-a}\left(\left(1 - \frac{a}{\|x\|}\right)\|y-x\| + \frac{a\big|\|y\| - \|x\|\big|}{\|x\|\|y\|}\|y\|\right) \\
&\leqslant \frac{b}{b-a}\left(\left(1 - \frac{a}{\|x\|}\right)\|y-x\| + \frac{a}{\|x\|}\|y-x\|\right) \\
&= \frac{b}{b-a}\|y-x\|,
\end{aligned}
$$

seega ahend $f|_{\overline{C}(0,a,b)}$ on $\frac{b}{b-a}$-Lipschitzi kujutus, nagu soovitud.

(b). Olgu $f\colon X \to X$ Lipschitzi kujutus lause osast (a). Defineerime kujutuse $\phi\colon X \ni x \mapsto x_0 + f(x - x_0) \in X$. Ilmselt $\|\phi\| = \|f\| \leqslant \frac{b}{b-a}$. Kui $x \in \overline{B}(x_0, a)$, siis $\|x - x_0\| \leqslant a$, seega $f(x - x_0) = 0$ ning järelikult

$$\phi(x) = x_0 + f(x - x_0) = x_0 + 0 = x_0.$$

Kui $x \in X \setminus B(x_0, b)$, siis $\|x - x_0\| \geqslant b$, seega $f(x - x_0) = x - x_0$ ning järelikult

$$\phi(x) = x_0 + f(x - x_0) = x_0 + x - x_0 = x.$$

□

Lemma 2.5 on järeldus järgnevast lemmast.

Lemma 2.6. *Olgu kumer alamhulk $A \subset X$ ja reaalarv $r > 0$ sellised, et*

$$A_1 := A \cap \overline{B}(0, r) \neq \emptyset \qquad \textit{ja} \qquad A_2 := A \cap \{x \in X \colon \|x\| \geqslant r\} \neq \emptyset,$$

ning olgu $f\colon A \to X$ ja $L \in \mathbb{R}$, $L \geqslant 0$. Kui ahendid $f|_{A_1}$ ja $f|_{A_2}$ on L-Lipschitzi kujutused, siis ka f on L-Lipschitzi kujutus.

Lemma 2.5 tõestus. Eeldame, et ahendid (2.1) on L-Lipschitzi kujutused. Kuna $\overline{B}(0, r) = \overline{B}(0, R) \cap \overline{B}(0, r)$ ja $\overline{C}(0, r, R) = \overline{B}(0, R) \cap \{x \in X \colon \|x\| \geqslant r\}$, kusjuures ahendid $f|_{\overline{B}(0,r)}$ ja $f|_{\overline{C}(0,r,R)}$ on L-Lipschitzi kujutused, siis lemma 2.6 põhjal on ka $f|_{\overline{B}(0,R)}$ L-Lipschitzi kujutus. Kuna $\overline{B}(0, R) = X \cap \overline{B}(0, R)$ ja $X \setminus B(0, R) = X \cap \{x \in X \colon \|x\| \geqslant R\}$, kusjuures ahendid $f|_{\overline{B}(0,R)}$ ja $f|_{X \setminus B(0,R)}$ on L-Lipschitzi kujutused, siis jällegi lemma 2.6 põhjal on ka f L-Lipschitzi kujutus. □

Lemma 2.6 tõestus omakorda toetub järgnevale lemmale.

Lemma 2.7. *Olgu elemendid $x, y \in X$ ja arv $r \in \mathbb{R}$ sellised, et $\|x\| \leqslant r \leqslant \|y\|$. Siis leidub reaalarv $t \in [0,1]$ selliselt, et $\|x + t(y-x)\| = r$.*

Lemma 2.6 tõestus. Olgu $x, y \in A$. Lemma tõestuseks piisab näidata, et $\|f(y) - f(x)\| \leqslant L\|y-x\|$. Kui $x, y \in A_1$ või $x, y \in A_2$, siis see võrratus kehtib (eelduse põhjal, et ahendid $f|_{A_1}$ ja $f|_{A_2}$ on L-Lipschitzi kujutused). Lemma tõestuseks jääb tõestada see võrratus juhul, kui $x \in A_1$ ja $y \in A_2$. Sellisel juhul leidub lemma 2.7 põhjal reaalarv $t \in [0,1]$ selliselt, et $\|z\| = r$, kus $z := x + t(y-x)$. Nüüd, arvestades, et $z, y \in A_2$ ja $x, z \in A_1$ ning et ahendid $f|_{A_2}$ ja $f|_{A_1}$ on L-Lipschitzi kujutused, saame

$$\begin{aligned}\|f(y) - f(x)\| &\leqslant \|f(y) - f(z)\| + \|f(z) - f(x)\| \\ &\leqslant L\|y-z\| + L\|z-x\| = L(1-t)\|y-x\| + Lt\|y-x\| \\ &= L\|y-x\|,\end{aligned}$$

nagu soovitud. □

Lemma 2.7 tõestus. Defineerme funktsiooni $\phi\colon [0,1] \ni t \mapsto \|x + t(y-x)\| \in \mathbb{R}$. Ilmselt on ϕ pidev funktsioon. Kuna $\phi(0) = \|x\|$ ja $\phi(1) = \|y\|$, siis Bolzano–Cauchy teoreemi põhjal lõigus pideva funktsiooni vahepealsetest väärtustest leidub $t \in [0,1]$ selliselt, et $\|x + t(y-x)\| = \phi(t) = r$. □

Lemma 2.8 (vt [MR, lemma 2.7])**.** *Rahuldagu Lipschitzi kujutused $h\colon M \to X$ ja $S\colon M \to X$ ning punkt $m \in M$ ja arvud $R, \delta \in \mathbb{R}$, kus $0 < \delta < R$, tingimusi*

(1) *$h(u) = h(m)$ iga $u \in B(m,R)$ korral,*

(2) *$S(u) = S(m)$ iga $u \in M \setminus \overline{B}(m,\delta)$ korral.*

Siis $\mathrm{Lip}(h + S) \leqslant \max\{\mathrm{Lip}(h), \mathrm{Lip}(S)\}\left(1 + \frac{2\delta}{R-\delta}\right)$.

Tõestus. Tähistame $K := \max\{\mathrm{Lip}(h), \mathrm{Lip}(S)\}\left(1 + \frac{2\delta}{R-\delta}\right)$. Fikseerime vabalt $u, v \in M$ ja tähistame

$$A := \|h(u) + S(u) - (h(v) + S(v))\| = \|h(u) - h(v) + S(u) - S(v)\|.$$

Lemma tõestuseks piisab näidata, et $A \leqslant K d(u,v)$. Kui $u, v \in B(m,R)$ või $u, v \in M \setminus \overline{B}(m,\delta)$, siis vastavalt $A = \|S(u) - S(v)\| \leqslant \mathrm{Lip}(S)\, d(u,v) \leqslant K d(u,v)$ ja $A = \|h(u) - h(v)\| \leqslant \mathrm{Lip}(h)\, d(u,v) \leqslant K d(u,v)$; niisiis piisab lemma tõestuseks tõestada võrratus $A \leqslant K d(u,v)$ juhul, kui $u \in M \setminus B(m,R)$ ja $v \in \overline{B}(m,\delta)$. Eeldamegi, et $u \in M \setminus B(m,R)$ ja $v \in \overline{B}(m,\delta)$. Siis $h(v) = h(m)$ ja $S(u) = S(m)$, seega

$$\begin{aligned}A &= \|h(u) - h(m) + S(m) - S(v)\| \\ &\leqslant \|h(u) - h(m)\| + \|S(m) - S(v)\| \leqslant \mathrm{Lip}(h) d(u,m) + \mathrm{Lip}(S) d(v,m) \\ &\leqslant \max\{\mathrm{Lip}(h), \mathrm{Lip}(S)\}(d(u,m) + d(v,m)),\end{aligned}$$

niisiis jääb lemma tõestuseks veenduda, et

$$d(u, m) + d(v, m) \leqslant \left(1 + \frac{2\delta}{R - \delta}\right) d(u, v).$$

Veendume selles:

$$\begin{aligned} d(u, m) + d(v, m) &\leqslant d(u, v) + d(v, m) + d(v, m) = d(u, v) + 2d(v, m) \\ &\leqslant d(u, v) + 2\delta = \left(1 + \frac{2\delta}{d(u, v)}\right) d(u, v) \\ &\leqslant \left(1 + \frac{2\delta}{R - \delta}\right) d(u, v), \end{aligned}$$

sest $d(u, v) \geqslant d(u, m) - d(m, v) \geqslant R - \delta$. □

2.2 Bakalaureusetöös keskse teoreemi tõestus

Selles jaotises tõestame bakalaureusetöös keskse teoreemi (teoreem Sissejuhatuses). Parema jälgitavuse huvides sõnastame selle teoreemi siinkohal uuesti.

Teoreem 2.9 (sama, mis teoreem Sissejuhatuses; vt [MR, teoreem 1])**.** *Kui M on täielik liinkaugusega nullpunktiga meetriline ruum, siis Banachi ruumil* $\mathrm{Lip}_0(M, X)$ *on Daugaveti omadus.*

Tõestus. Olgu M täielik liinkaugusega nullpunktiga meetriline ruum ning olgu $f, g \in S_{\mathrm{Lip}_0(M,X)}$ ja $0 < \varepsilon < 2$. Lause 1.12 põhjal piisab teoreemi tõestuseks leida kujutus $h \in \mathrm{Lip}_0(M, X)$ ja jada (f_n) ruumis $\mathrm{Lip}_0(M, X)$ nii, et $\|h - g\| < \varepsilon$, $f_n \to h$ nõrgalt ruumis $\mathrm{Lip}_0(M, X)$ ning iga $n \in \mathbb{N}$ korral $\|f_n\| \leqslant 1 + \varepsilon$ ja $\|f + f_n\| \geqslant 2 - \varepsilon$.

Kuna $\|f\| = 1$, siis leidub $y^* \in S_{X^*}$ nii, et $\|y^* \circ f\|_{\mathrm{Lip}} > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ (märgime, et funktsioon $y^* \circ f : M \longrightarrow \mathbb{K}$ on Lipschitzi funktsioon lause 1.7 põhjal). Tõepoolest, kuna

$$\sup_{u,v \in M, u \neq v} \frac{\|f(u) - f(v)\|}{d(u, v)} = \|f\|_{\mathrm{Lip}} = 1,$$

siis leiduvad teineteisest erinevad $u_0, v_0 \in M$ selliselt, et

$$\frac{\|f(u_0) - f(v_0)\|}{d(u_0, v_0)} > 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Teoreemi 1.5 põhjal leidub $y^* \in S_{X^*}$, selliselt, et

$$\begin{aligned} \frac{(y^* \circ f)(u_0) - (y^* \circ f)(v_0)}{d(u_0, v_0)} &= \frac{y^*(f(u_0)) - y^*(f(v_0))}{d(u_0, v_0)} = y^* \left(\frac{f(u_0) - f(v_0)}{d(u_0, v_0)}\right) \\ &= \left\|\frac{f(u_0) - f(v_0)}{d(u_0, v_0)}\right\| > 1 - \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

aga siit järeldub, et $\|y^* \circ f\|_{\mathrm{Lip}} > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$, nagu soovitud.

Kuna ruum M on liinkaugusega, siis teoreemi 1.18 põhjal on M levinult lokaalne, seega hulk

$$A := \left\{ m \in M : \inf_{r>0} \|(y^* \circ f)|_{\overline{B}(m,r)}\|_{\mathrm{Lip}} > 1 - \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

on lõpmatu. Lemma 2.1 põhjal leiduvad (loenduv) alamhulk $\{w_n : n \in \mathbb{N}\} \subset A$, reaalarvud $\beta_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, ja kujutus $h \in S_{\mathrm{Lip}_0(M,X)}$ selliselt, et $\|h - g\| < \varepsilon$ ja kerad $\overline{B}(h(w_n), \beta_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, on paarikaupa lõikumatud. Üldisust kitsendamata eeldame, et $0 \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{B}(h(w_n), \beta_n)$. Paneme tähele, et ka kerad $\overline{B}(w_n, \beta_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, on paarikaupa lõikumatud, sest mis tahes $n \in \mathbb{N}$ ja $u \in \overline{B}(w_n, \beta_n)$ korral

$$\|h(u) - h(w_n)\| \leqslant \|h\|\, d(u, w_n) = d(u, w_n) \leqslant \beta_n,$$

seega $h(u) \in \overline{B}(h(w_n), \beta_n)$ ning järelikult $h(\overline{B}(w_n, \beta_n)) \subset \overline{B}(h(w_n), \beta_n)$. Viimasest sisalduvusest järeldub ka, et $0 \notin \overline{B}(w_n, \beta_n)$, sest vastasel korral $0 = h(0) \in \overline{B}(h(w_n), \beta_n)$, mis on vastuolus eelnevalt saaduga.

Iga $n \in \mathbb{N}$ korral valime reaalarvu α_n nii, et $0 < \alpha_n < \beta_n$ ja $\frac{\beta_n}{\beta_n - \alpha_n} < 1 + \varepsilon$; siis lause 2.4, (b), põhjal leidub Lipschitzi kujutus $\phi_n : X \to X$ selliselt, et $\phi_n(x) = h(w_n)$, kui $x \in \overline{B}(h(w_n), \alpha_n)$, ja $\phi_n(x) = x$, kui $x \in X \setminus B(h(w_n), \beta_n)$, ning $\|\phi_n\|_{\mathrm{Lip}} \leqslant \frac{\beta_n}{\beta_n - \alpha_n}$; niisiis, kujutuse $h_n := \phi_n \circ h : M \to X$ puhul

$$\|h_n\| \leqslant \|\phi_n\| \|h\| = \|\phi_n\| \leqslant \frac{\beta_n}{\beta_n - \alpha_n}$$

(siin me kasutasime lauset 1.7) ning iga $u \in \overline{B}(w_n, \alpha_n)$ korral $h_n(u) = h(w_n)$. Tõepoolest, kui $u \in \overline{B}(w_n, \alpha_n)$, siis

$$\|h(u) - h(w_n)\| \leqslant \|h\|_{\mathrm{Lip}} d(u, w_n) \leqslant 1 \cdot \alpha_n = \alpha_n,$$

seega $h(u) \in \overline{B}(h(w_n), \alpha_n)$ ning järelikult $h_n(u) = \phi_n(h(u)) = h(w_n)$. Kuna $h(0) = 0 \notin \overline{B}(h(w_n), \beta_n)$, siis $h_n(0) = \phi_n(h(0)) = h(0) = 0$; niisiis $h_n \in \mathrm{Lip}_0(M, X)$.

Paneme tähele, et $h_n \to h$ nõrgalt ruumis $\mathrm{Lip}_0(M, X)$. Tõepoolest, see nõrk koonduvus on samaväärne nõrga koonduvusega $h_n - h \to 0$ ruumis $\mathrm{Lip}_0(M, X)$. Lause 1.11 põhjal piisab viimatimainitud koonduvuse tõestuseks veenduda, et kandjahulgad $\mathrm{supp}(h_n - h)$, $n = 1, 2, \ldots$, on paarikaupa lõikumatud. Olgu $n \in \mathbb{N}$ suvaline. Kui mingi $u \in M$ korral $h(u) \notin B(h(w_n), \beta_n)$, siis

$$h_n(u) - h(u) = \varphi_n(h(u)) - h(u) = h(u) - h(u) = 0,$$

seega kandjahulka $\operatorname{supp}(h_n - h)$ saavad kuuluda ainult sellised punktid $u \in M$, mille korral et $h(u) \in B(h(w_n), \beta_n)$ ehk, teisisõnu, $u \in h^{-1}(B(h(w_n), \beta_n))$; niisiis $\operatorname{supp}(h_n - h) \subset h^{-1}(B(h(w_n), \beta_n))$. Kuna kerad $B(h(w_n), \beta_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, on paarikaupa lõikumatud, siis ka nende kerade originaalid $h^{-1}(B(h(w_n), \beta_n))$ on paarikaupa lõikumatud ning järelikult ka kandjahulgad $\operatorname{supp}(h_n - h)$ on paarikaupa lõikumatud; seega tõepoolest $h_n - h \to 0$ nõrgalt ruumis $\operatorname{Lip}_0(M, X)$ ehk, teisisõnu, $h_n \to h$ nõrgalt ruumis $\operatorname{Lip}_0(M, X)$.

Edasi toimime iga $n \in \mathbb{N}$ korral järgmiselt. Valime reaalarvu $r_n > 0$ selliselt, et $5r_n < \alpha_n$ ja $0 < \frac{\beta_n}{\beta_n - \alpha_n}\left(1 + \frac{8r_n}{\alpha_n - 5r_n}\right) < 1 + \varepsilon$ (selline r_n leidub, sest $0 < \frac{\beta_n}{\beta_n - \alpha_n} < 1 + \varepsilon$). Kuna $w_n \in A$, siis $\|(y^* \circ f)|_{\overline{B}(w_n, r_n)}\|_{\mathrm{Lip}} > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$, järelikult leiduvad teineteisest erinevad $u_n, v_n \in \overline{B}(w_n, r_n)$ selliselt, et $|\sigma_n| > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$, kus

$$\sigma_n := \frac{y^*(f(v_n)) - y^*(f(u_n))}{d(v_n, u_n)}.$$

Olgu funktsioon $s_n \colon M \to \mathbb{R}$ normi säilitav Lipschitzi jätk funktsioonile

$$\tilde{s}_n \colon (M \setminus \overline{B}(w_n, 3r_n)) \cup \{u_n, v_n\} \to \mathbb{R},$$

kus

$$\tilde{s}_n(u) = \begin{cases} 0, & \text{kui } u \in M \setminus \overline{B}(w_n, 3r_n), \\ 0, & \text{kui } u = u_n, \\ d(u_n, v_n), & \text{kui } u = v_n \end{cases}$$

(selline jätk eksisteerib McShane'i–Whitney jätkamisteoreemi 1.10 põhjal). Siis $\|s_n\| = 1$, sest $\|\tilde{s}_n\| = 1$. Siin arvestasime, et mis tahes $u \in \overline{B}(w_n, 3r_n)$ korral

$$\begin{aligned} |\tilde{s}_n(v_n) - \tilde{s}_n(u)| &= |\tilde{s}_n(v_n)| = d(u_n, v_n) \\ &\leqslant d(u_n, w_n) + d(w_n, v_n) \leqslant r_n + r_n = 2r_n = 3r_n - r_n \\ &\leqslant d(u, w_n) - d(w_n, v_n) \leqslant d(u, v_n) = d(v_n, u). \end{aligned}$$

Kuna $\beta_n > \alpha_n > 3r_n$, siis $0 \in M \setminus \overline{B}(w_n, \beta_n) \subset M \setminus \overline{B}(w_n, 3r_n)$, seega $s_n(0) = \tilde{s}_n(0) = 0$. Kuna $\|y^*\| = 1$, siis leidub $y \in S_X$ nii, et $|y^*(y)| > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ ja $|\sigma_n + y^*(y)| = |\sigma_n| + |y^*(y)|$. Defineerime kujutuse $S_n \colon M \to X$ võrdusega $S_n := s_n(\cdot)\, y$. Ilmselt $S_n \in \operatorname{Lip}_0(M, X)$, kusjuures $\|S_n\| = 1$, ning $S_n(u_n) = 0$ ja $S_n(v_n) = d(u_n, v_n)\, y$. Lõpuks defineerime $f_n := h_n + S_n$.

Teoreemi tõestuseks jääb näidata, et jada (f_n) rahuldab tõestuse esimeses lõigus loetletud tingimusi.

Kõigepealt märgime, et $f_n \to h$ nõrgalt ruumis $\operatorname{Lip}_0(M, X)$. Tõepoolest, eelnevalt tõestasime, et $h_n \to h$ nõrgalt ruumis $\operatorname{Lip}_0(M, X)$, seega soovitud nõrgaks koonduvuseks $f_n \to h$ jääb näidata, et $S_n \to 0$ nõrgalt ruumis $\operatorname{Lip}_0(M, X)$. See koonduvus järeldub lausest 1.11, sest iga $n \in \mathbb{N}$ korral $\operatorname{supp}(S_n) \subset B(w_n, 3r_n) \subset \overline{B}(w_n, \alpha_n)$ ning seega kandjahulgad $\operatorname{supp}(S_n)$, $n = 1, 2, \dots$, on paarikaupa lõikumatud.

Olgu nüüd $n \in \mathbb{N}$. Veendume, et $\|f_n\| \leqslant 1 + \varepsilon$. Selleks paneme tähele, et lemma 2.8 eeldused on täidetud, kui seal võtta $m = u_n$, $R = \alpha_n - r_n$, $\delta = 4r_n$ ning $h = h_n$ ja $S = S_n$. Tõepoolest, kui $u \in \overline{B}(u_n, \alpha_n - r_n)$, siis

$$d(u, w_n) \leqslant d(u, u_n) + d(u_n, w_n) \leqslant \alpha_n - r_n + r_n = \alpha_n,$$

seega $u \in \overline{B}(w_n, \alpha_n)$ ning järelikult $h_n(u) = h_n(w_n) = h_n(u_n)$; kui $u \in M \setminus \overline{B}(u_m, 4r_n)$, siis

$$d(u, w_n) \geqslant d(u, u_n) - d(u_n, w_n) > 4r_n - r_n = 3r_n,$$

seega $u \in M \setminus \overline{B}(w_m, 3r_n)$ ning järelikult $S_n(u) = 0 = S_n(u_n)$. Lemma 2.8 annab nüüd, et

$$\|f_n\| \leqslant \max\{\|h_n\|, \|S_n\|\} \left(1 + \frac{8r_n}{\alpha_n - 5r_n}\right) \leqslant \frac{\beta_n}{\beta_n - \alpha_n} \left(1 + \frac{8r_n}{\alpha_n - 5r_n}\right) < 1 + \varepsilon.$$

Teoreemi tõestuseks jääb veel veenduda, et $\|f + f_n\| \geqslant 2 - \varepsilon$:

$$\begin{aligned}
\|f + f_n\| &\geqslant \frac{\|(f + f_n)(v_n) - (f + f_n)(u_n)\|}{d(v_n, u_n)} \geqslant \frac{|y^*((f + f_n)(v_n) - (f + f_n)(u_n))|}{d(v_n, u_n)} \\
&= \left| \frac{y^*(f(v_n)) - y^*(f(u_n))}{d(v_n, u_n)} + \frac{y^*(h_n(v_n) - h_n(u_n))}{d(v_n, u_n)} + \frac{y^*(S_n(v_n) - S_n(u_n))}{d(v_n, u_n)} \right| \\
&= |\sigma_n + 0 + y^*(y)| = |\sigma_n| + |y^*(y)| \\
&> 1 - \frac{\varepsilon}{2} + 1 - \frac{\varepsilon}{2} = 2 - \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Kirjandus

[BH] M. R. Bridson, A. Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 319, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[CCGMR] B. Cascales, R. Chiclana, L. C. García-Lirola, M. Martín, A. Rueda Zoca. *On strongly norm attaining Lipschitz maps.* J. Funct. Anal. **277** (2019), no. 6, 1677–1717.

[CMN] Ş. Cobzaş, R. Miculescu, A. Nicolae. *Lipschitz functions.*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 2241, Springer, Cham, 2019.

[GPR] L. García-Lirola, A. Procházka, A. Rueda Zoca. *A characterisation of the Daugavet property in spaces of Lipschitz functions.* J. Math. Anal. Appl. **464** (2018), no. 1, 473–492.

[IKW] Y. Ivakhno, V. Kadets, D. Werner. *The Daugavet property for spaces of Lipschitz functions*, Math. Scand. **101** (2007), no. 2, 261–279.

[IKW*] ______. *Corrigendum to: The Daugavet property for spaces of Lipschitz functions [mr2379289].* Math. Scand. **104** (2009), no. 2, 319.

[KShSW] V. M. Kadets, R. V. Shvidkoy, G. G. Sirotkin, D. Werner. *Banach spaces with the Daugavet property.* Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000), no. 2, 855–873. MR 1621757

[MR] R. Medina, A. Rueda Zoca. *A characterisation of the Daugavet property in spaces of vector-valued Lipschitz functions.* J. Funct. Anal. **289** (2025), no. 1, Paper No. 110896, 19.

[R] A. Rueda Zoca. *The Daugavet property in spaces of vector-valuedLipschitz functions.* J. Funct. Anal. **286** (2024), no. 2, Paper No. 110208, 22.

[W] D. Werner. *Recent progress on the Daugavet property.* Irish Math. Soc. Bull.(2001), no. 46, 77–97.

[OO] E. Oja, P. Oja. *Funktsionaalanalüüs.* Tartu Ülikool, Tartu, 1991.

[Д] И. К. Даугавет. *Об одном свойстве вполне непрерывных операторов в пространстве C.* Успехи мат. наук **18** (1963), вып. 5 (113), 157–158.

[Л] Г. Я. Лозановский. *О почти интегральных операторах в KB-пространствах.* Вестник Ленинград. унив., сер. мат. мех. астроном. **21** (1966), вып. 2, 35–44.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Hans Kristjan Veri,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose

   „Vektorväärtustega Lipschitzi funktsioonide ruumi Daugaveti omadus",

   mille juhendajad on Rainis Haller ja Märt Põldvere, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguste kehtivuse lõppemiseni.

2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commonsi litsentsiga CC BY NC ND 3.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni

3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Hans Kristjan Veri

21.08.2025