K. E. LIPHART

R
3216

Def. -od. [illegible]
lehed 1-4, lk. 1-76.

Euclidis

elementorum

Libri VI.

auctore

Johanne Scheubelio. —

Basileae

anno

M. D. L.

Ex. Cand. Morel
1792.

[illegible]

v. Liphart-Ratshof

R XII 1920: 5117.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ.

EVCLIDIS ELEMENTORVM GEOmetricorum liber primus.

EST hic liber primus totus ferè elementarius, non tantum ad reliquos ſequentes huius Operis libros, ſed etiam ad aliorum Geometrarum ſcripta intelligenda neceſſarius. Nam in hoc libro communium uocabulorum, quę ſubinde in geometriâ uerſanti occurrunt, definitiones continentur. Pręceptiones deinde ducendi perpendicularem, quomodo item Trilaterę figurę, ſecundum latera uel angulos diuerſæ, & Quadrilateræ, formari debeant. Figura item aliqua propoſita, quomodo illa in alterius formæ figuram permutanda ſit, præceptiones, ut diximus, traduntur. Cum igitur talia doceantur, & plura etiam alia, quàm hoc loco commemorare uoluimus, facile erit cuiuis, non ſolum quàm ſit neceſſarius, ſed etiam ad reliqua perdiſcenda liber iſte quàm utilis, perſpicere.

ΟΡΟΙ.

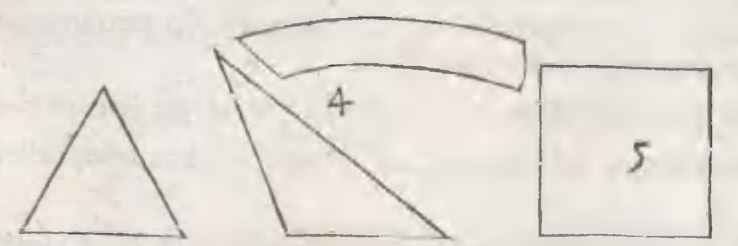
Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν. Γραμμὴ δέ, μῆκος ἀπλατές. Γραμμῆς δὲ πέρατα, σημεῖα. Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.

DEFINITIONES.

Punctum eſt, cuius pars nulla. 2. Linea uerò, longitudo latitudinis expers. Lineę autem termini puncta. 3. Recta linea eſt, quę ęquabiliter inter ſua puncta iacet.

Prima defini.

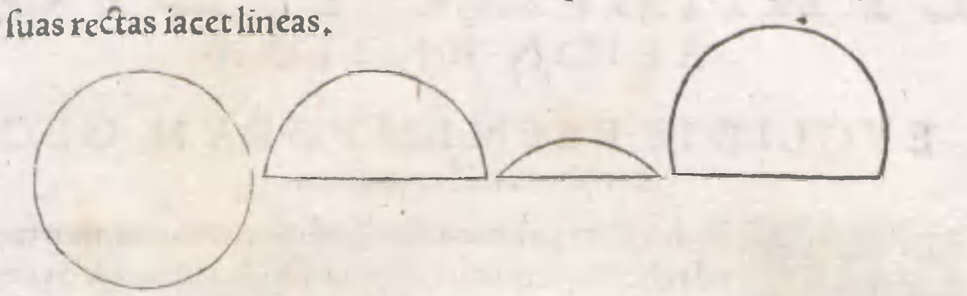
Ἐπιφάνειά ἐστιν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει. Ἐπιφανείας δὲ πέρατα, γραμμαί. Ἐπίπεδος ἐπιφάνειά ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται.



4. Superficies eſt, quę longitudinem & latitudinem tantum habet.

i4226258

Superficiei uerò termini, lineæ. 5. Plana ſuperficies eſt, quæ ęqualiter inter ſuas rectas iacet lineas.



Ἐπίπεδος γωνία ἐστίν, ἡ ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων, καὶ μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων, πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις. Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν γραμμαὶ εὐθεῖαι ὦσιν, Εὐθύγραμμος καλεῖται ἡ γωνία. Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα, τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, Ὀρθὴ ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν. Καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα, Κάθετος καλεῖται, ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν. Ἀμβλεῖα γωνία ἐστίν, ἡ μείζων ὀρθῆς. Ὀξεῖα δέ, ἡ ἐλάσσων ὀρθῆς.

6. Planus angulus, eſt in plano duarum linearum ſe mutuo tangentium, & non in directum iacentium, mutua inclinatio. 7. Quando uerò compræhendentes angulum lineæ, rectæ fuerint, Rectilineus uocatur ille angulus. 8. Quando autem recta ſuper rectam conſiſtens lineam, deinceps ſe habentes angulos æquales inter ſe fecerit, Rectus eſt uterq; æqualium angulorum. 9. Et inſiſtens recta linea, Perpendiculum: hoc eſt, Perpendicularis linea uocatur, illius ſuper quam ſteterit. 10. Obtuſus angulus eſt, qui maior recto. 11. Acutus uerò, qui minor eſt recto.

Ὅρος ἐστίν, ὅ τινός ἐστι πέρας. Σχῆμά ἐστι, τὸ ὑπό τινος ἤ τινων ὅρων περιεχόμενον.

12. Terminus eſt, quod cuiuſq; extremum eſt.

Vt, Lineæ termini ſunt, puncta: Superficiei, lineæ: Corporum uerò, ſuperficies, quemadmodum ſupra indicatum eſt.

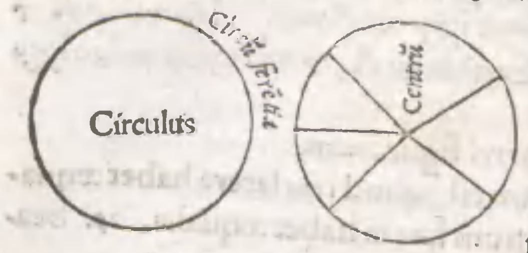
13 Figura eſt, quæ ſub aliquo aut aliquibus terminis comprehenditur.

Vt ſunt omnia, quæ uel ſub lineis, uel ſub ſuperficiebus compræhenduntur, ſpacia.

Κύκλος, ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον, ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον, ἣ καλεῖται Περιφέρεια, πρὸς ἣν ἀφ' ἑνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων,

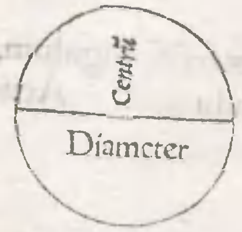
πᾶσαι

πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Κέντρον δὲ τοῦ κύκλου, τὸ σημεῖον καλεῖται.



14. Circulus, eſt figura plana, una linea compræhenſa, quæ Circumferentia appellatur, ad quã ab uno quodã puncto eorum, quæ intra figurã ſunt poſita, omnes cadentes rectæ lineę inter ſe ſunt ęquales. 15. Punctum uerò hoc, Centrum circuli appellatur.

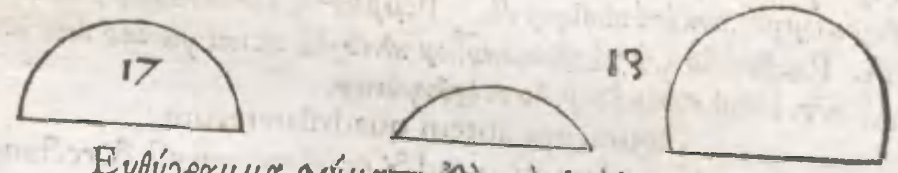
Διάμετρος δὲ τοῦ κύκλου, ἐστὶν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη, καὶ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ἥτις καὶ δίχα τέμνει τὸν κύκλον.



16 Diameter circuli, eſt recta quędam linea per centrum ducta, & ex utraq; parte in circuli circumferentiam terminata, & quæ circulum biſariam ſecat.

Ἡμικύκλιόν ἐστι, τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῆς διαμέτρου, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας. Τμῆμα δὲ κύκλου, ἐστὶ τὸ περιεχόμενον ὑπό τε εὐθείας, καὶ κύκλου περιφερείας.

17. Semicirculus, eſt figura, quę ſub diametro, atq; de circuli circumferentia ablata portione comprehenditur. 18. Sectio uerò circuli, eſt figura quę ſub recta linea, et circuli circumferentia compræhenditur.

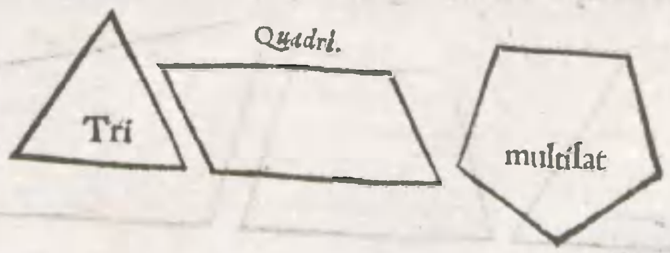


Εὐθύγραμμα σχήματα ἐστί, τὰ ὑπὸ εὐθειῶν περιεχόμενα.

Τρίπλευρα μὲν, τὰ ὑπὸ τριῶν. Τετράπλευρα δέ, τὰ ὑπὸ τεσσάρων. Πολύπλευρα δέ, τὰ ὑπὸ πλειόνων ἢ τεσσάρων εὐθειῶν περιεχόμενα.

19. Rectilineæ figuræ ſunt, quæ ſub rectis lineis compræhenduntur.

20. Trilateræ quidem, quæ ſub tribus. 21. Quadrilaterę uerò, quę ſub quatuor. 22. Multilaterę autem, quæ ſub pluribus quàm quatuor rectis lineis compræhenduntur.



Τῶν

Τῶν δὲ τριπλεύρων σχημάτων,

Ἰσόπλευρον μὲν τρίγωνον ἐστι, τὸ τρεῖς ἴσας ἔχον πλευράς. Ἰσοσκελὲς δὲ, τὸ τὰς δύο μόνας ἴσας ἔχον πλευράς. Σκαληνὸν δὲ, τὸ τὰς τρεῖς ἀνίσους ἔχον πλευράς.

Trilaterarum porrò figurarum,

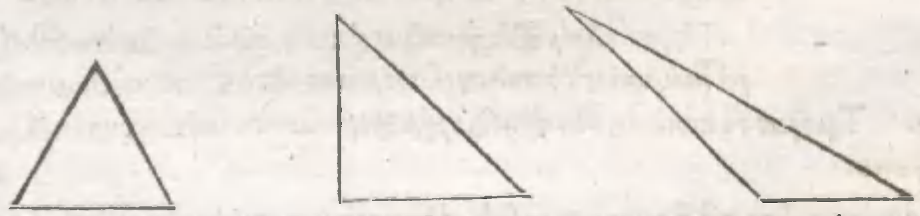
23. Aequilaterum quidē triangulum est, quod tria latera habet æqualia. 24. Isosceles uerò, quod duo tantum latera habet æqualia. 25. Scalenum autem, quod tria inæqualia habet latera.

Ἔτι τε τῶν τριπλεύρων σχημάτων,

Ὀρθογώνιον μὲν τρίγωνον ἐστι, τὸ ἔχον ὀρθὴν γωνίαν. Ἀμβλυγώνιον δὲ, τὸ ἔχον ἀμβλεῖαν γωνίαν. Ὀξυγώνιον δὲ, τὸ τρεῖς ὀξείας ἔχον γωνίας.

Amplius trilaterarum figurarum,

26. Rectangulum quidem triangulum est, quod habet rectū angulum. 27. Obtusiangulum uerò, quod habet obtusum angulum. 28. Acutiangulum autem, quod tres acutos angulos habet.



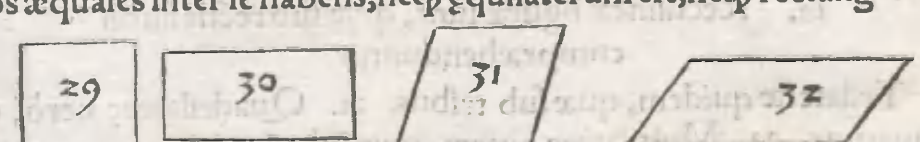
23 & 28 24 & 26 25 & 27

Τῶν δὲ τετραπλεύρων σχημάτων.

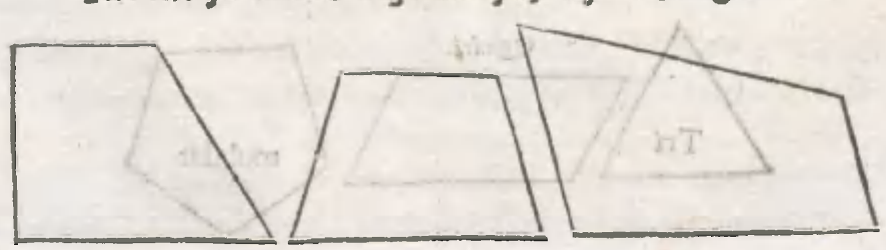
Τετράγωνον μέν ἐστιν, ὃ ἰσόπλευρόν τέ ἐστι, καὶ ὀρθογώνιον. Ἑτερόμηκες δὲ, ὃ ὀρθογώνιον μὲν, οὐκ ἰσόπλευρον δέ. Ῥόμβος δὲ, ὃ ἰσόπλευρον μὲν, οὐκ ὀρθογώνιον δέ. Ῥομβοειδὲς δὲ, τὸ τὰς ἀπεναντίον πλευράς τε καὶ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔχον, ὃ οὔτε ἰσόπλευρόν ἐστιν, οὔτε ὀρθογώνιον.

Figurarum autem quadrilaterarum,

29. Quadratum quidem est, quod & equilaterum est, & rectangulum. 30. Altera parte longius uerò, quod rectangulū quidem, at equilaterum non est. 31. Rhombus autem, qui æquilaterus, sed rectangulus non est. 32. Rhomboides deinde, quod ex opposito & latera & angulos æquales inter se habens, neq; equilaterum est, neq; rectangulum.



Τὰ δὲ παρὰ ταῦτα τετράπλευρα, Τραπέζια καλείσθω.

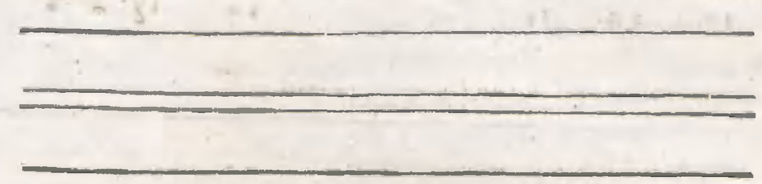


33. Præter

33. Preter has uerò, que reliquæ sunt figuræ quadrilatere, Mensulæ appellantur.

Παράλληλοι εἰσὶν εὐθεῖαι, αἵ τινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι, καὶ ἐκβαλλόμεναι ἐπ' ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις.

34. Parallelæ, sunt rectæ lineæ, quæ in eodem plano existentes, & ex utraq; parte in infinitū eiectæ, in neutram inter se mutuo coincidunt.

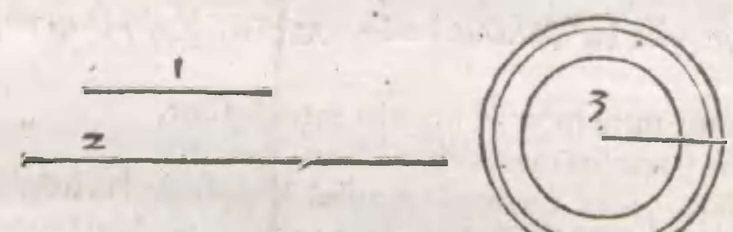


ΑΙΤΗΜΑΤΑ.

Ἠτήσθω, Ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον, εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν. Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν, κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ' εὐθείας ἐκβάλλειν. Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι, κύκλον γράφεσθαι.

Postulata.

Petatur, & primò quidem, Ab omni puncto ad omne punctum, rectam lineam ducere posse. Secundò uerò, Terminatam rectam lineam, secundum continuationem, in rectum eijcere. Tertiò tandem, Omni centro & interuallo, circulum describere.



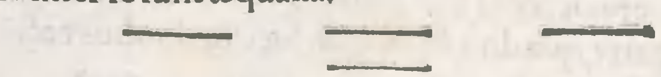
ΚΟΙΝΑΙ ΕΝΝΟΙΑΙ.

Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα.

COMMVNES NOTITIAE.

1 Quæ eidem æqualia: & inter se sunt æqualia.

13 13 13 13
13



Ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενα ἐστὶν ἴσα.

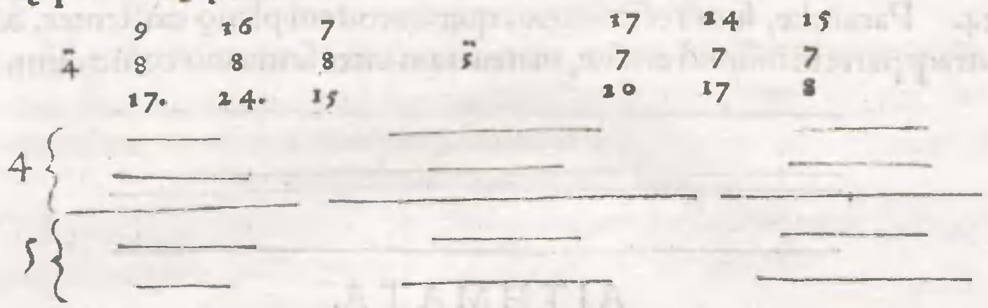
2 Si æqualibus æqualia adijciantur: tota sunt æqualia. 3 Et si ab equalibus equalia auferantur: quæ relinquuntur sunt æqualia

2 { 9 9 9 / 3 3 3 / 12 12 12 }
3 { 12 12 12 / 7 7 7 / 5 5 5 }

L Ἐὰν

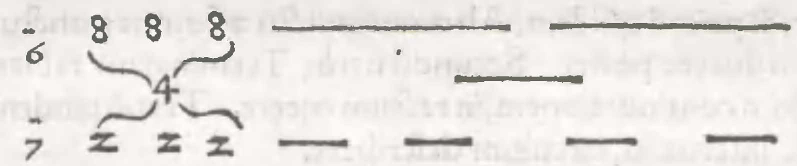
Ἐὰν ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἄνισα. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἀνίσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ λοιπά ἐστιν ἄνισα.

4 Si inæqualibus ęqualia adijciantur : tota ſunt inæqualia. 5. Et ſi ab inęqualibus ęqualia auferantur : reliqua ſunt inæqualia.



Τὰ τοῦ αὐτοῦ διπλάσια, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ ἡμίση, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

6 Quæ eiuſdem duplicia : ęqualia inter ſe ſunt. 7 Et quæ eiuſdem dimidia: ęqualia inter ſe ſunt.



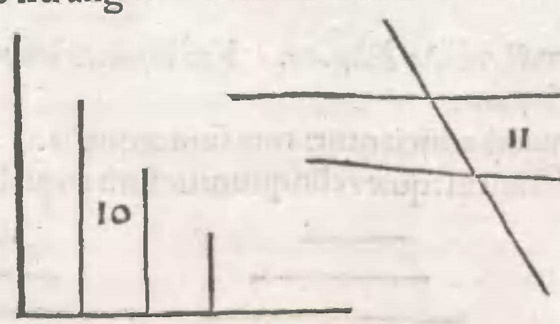
Τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ᾽ ἄλληλα, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζόν ἐστι.

8 Quæ congruunt inter ſe : ęqualia inter ſe ſunt.

9 Et totum parte ſua maius eſt.

Πᾶσαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα, τὰς ἐντὸς, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας, δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλόμεναι αἱ δύο αὗται εὐθεῖαι ἐπ᾽ ἄπειρον συμπεσοῦνται ἀλλήλαις, ἐφ᾽ ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες γωνίαι.

10 Omnes recti anguli: æquales inter ſe ſunt. 11 Et ſi in duas rectas recta linea incidens, internos, & in eadem parte angulos, duobus rectis minores fecerit : illas ambas productas infinitè, neceſſe eſt coincidere, ea in parte, qua duo iſti anguli fuerint duobus rectis minores.



Καὶ δύο εὐθεῖαι, χωρίον οὐ περιέχουσιν.

12 Et duæ rectæ lineæ: ſpacium non compræhendunt.

ΠΡΟΤΑ-

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.

ΠΡΩΤΗ. Α.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης, τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

PROPOSITIONES.

PRIMA. I.

Super data recta linea terminata, triangulū æquilaterum conſtituere.

Terminata recta linea data, propoſitum eſt, ſuper ea triangulum æquilaterum conſtituere. Officio igitur circini, ſecundum interuallum rectæ datæ, ex utraqꝫ illius extremitate, per tertium poſtulatū, circulus deſcribatur: atqꝫ ubi alter alterum ſupra lineam ſecat, inde ad utranqꝫ extremitatem datæ rectæ quędam linea demittatur, & pro poſitioni ſatisfactum erit, cum hæ duæ demiſſæ & recta terminata data, triangulum quale petitur comprehendant: id quod facile ex ſtructura & circuli definitione, bis uſurpata, atqꝫ illa communi noticia, Quæ uni ſunt æqualia, & inter ſe ſunt æqualia, demonſtrari poterit. Super data igitur recta terminata linea, triangulum æquilaterum conſtitutū eſt, quod feciſſe oportuit.

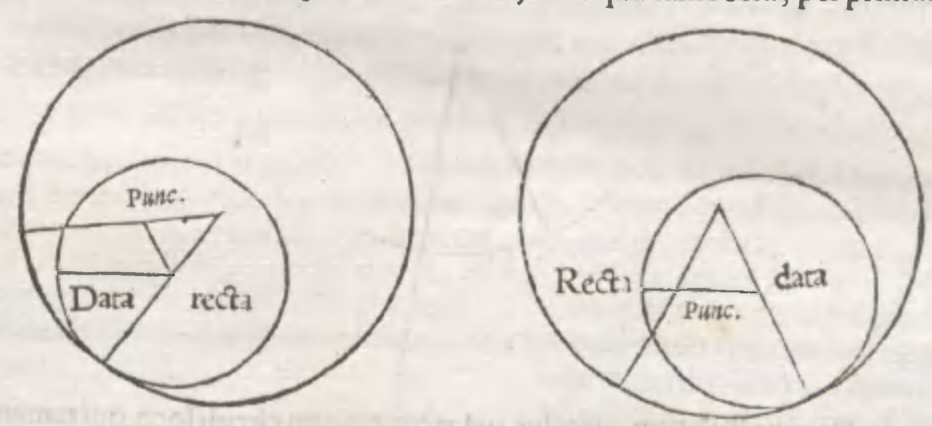
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β.

Πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι.

PROPOSITIO II.

Ad datum punctū, datæ rectæ lineæ, ęquadem rectam lineā ponere.

Puncto & recta linea data, deſcribatur primò circulus, cuius ſemidiameter ſit recta data: altera ipſius extremitate, utra fuerit, centri loco ſumpta. Quo facto, à centro circuli iam deſcripti, ad punctum datum, linea quadam recta, per primum po-



Ex bibl. univ. Dorp.

ſtulatum ducta, ſuper ea, per propoſitionem præcedentem, triangulum æquilaterum conſtituatur : atqꝫ id latus, quod ad centrum tendit, ad circumferentiam uſqꝫ producatur. Poſtea uerò ſecundum hanc ipſam continuatā, ex illa quoqꝫ extremitate, quam cum latere trianguli altero communem habet, circulus deſcribatur, & ubi tandem latus trianguli alterum uſqꝫ ad circumferentiam continuatum fuerit, confectum erit negocium. A' dato enim puncto linea, datæ æqualis, educta eſt: id quod adiectæ figuræ indicant. atque in hunc modum demonſtrari poteſt. Cum enim in maiori circulo, quæ ex ipſius centro egrediuntur rectæ lineæ, ex definitione, inter ſe æquales ſint cumqꝫ etiam ſuper recta, quam centrum circuli minoris et

punctum datum terminant, triangulum æquilaterum constitutum sit, huius uerò trianguli duo latera duarum maioris circuli semidiametrorum partes sint, partibus illis æqualibus ab æqualibus semidiametris subtractis, & quæ relinquuntur rectæ lineæ, ex communi quadam noticia inter se æquales erunt. Sed quia una harum, ex definitione circuli, datæ rectæ est æqualis: & altera, quæ nimirum ex dato puncto egreditur, ex communi quadam noticia, eidem rectæ datæ ęqualis erit. Ad datum igitur punctum, datæ rectæ lineæ ęqualis recta posita est, quod fecisse oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων, ἀπὸ τῆς μείζονος, τῇ ἐλάσσονι ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν.

PROPOSITIO III.

Duabus datis rectis lineis inęqualibus, à longiori, breuiori ęqualem rectam lineam abscindere.

Est huius propositionis triplex operatio, seu fabrica. Prima, ut officio circini quantitas breuioris accipiatur: ea deinde in longiore, ab extremitate una incipiendo, puncto aliquo signetur: & factum erit negotiū, id quod per cõmunem illam noticiā, Quæ uni sunt æqualia, et inter se sunt æqualia, demonstrari poterit.

Linea longior.

Breuior.

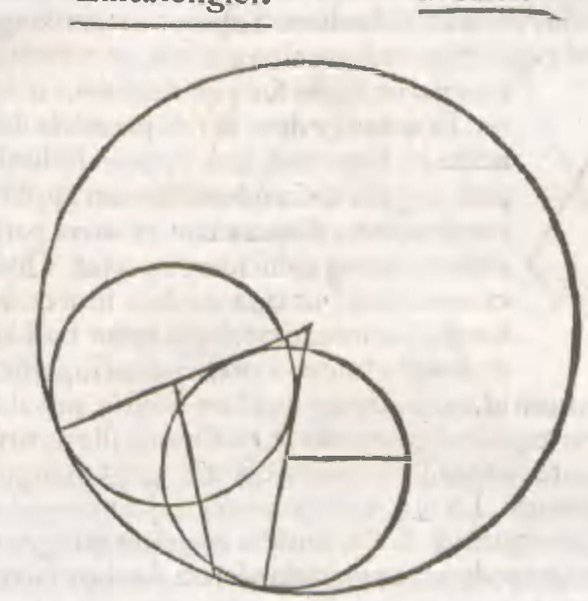
Secunda est, ut lineæ propositæ duabus suis extremitatibus utcunq; coniungentur, secundum quantitatem deinde, uel interuallū breuioris, ex coniunctionis puncto, per tertium postulatum, circulus, uel arcus tantum circuli loco, qui tamen longiorem rectā secat, describatur: & idem effectum erit. Huius autem demonstratio est ipsa circuli definitio supra tradita, cum lineæ à centro in circumferentiam cadentes, per eandem, inter se sint æquales.

Tertia huius operatio est, ut, per præcedentem propositionem secundam, primò ab extremitate longioris alterutra, tanquam à puncto aliquo dato, linea breuiori ęqualis educatur: atq; huic deinde à longiore, prout secunda huius propositionis operatio exigit, æqualis abscindatur. & tertiò, quod uolebat propositio, factum erit.

FIGVRA

FIGVRA OPERATIONIS TERTIAE.

Linea longior. Breuior.



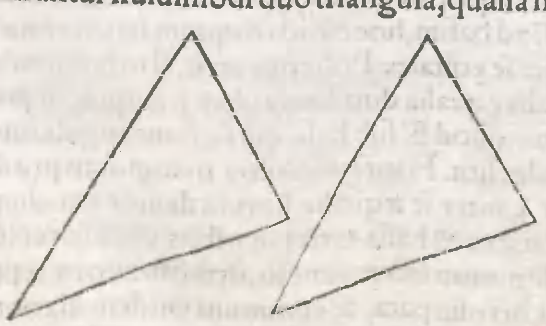
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην· καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἕξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

PROPOSITIO IIII.

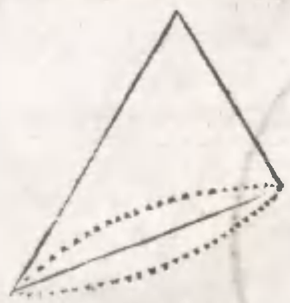
Si duo triangula duo latera duobus lateribus ęqualia habuerint, utrunque utrique, habuerint uerò & angulum angulo ęqualem, eum qui sub ęqualibus rectis lineis comprehenditur: & basim basi ęqualem habebunt, & triangulum triangulo ęquale erit, ac reliqui anguli reliquis angulis ęquales erunt, uterq; utriq;, sub quibus ęqualia latera subtenduntur.

Sumit hęc quarta propositio suā demonstrationē ab impossibili. Duplex enim est, ut norunt dialectici, demonstrationis genus. Vnum, quod ex ueris & concessis procedit, & directum dicitur. Alterum uerò, quod cum directè non possit obtineri, ab impossibili aliquo & absurda cõclusione suam demonstrationē cõfirmat, quod paucis tantum hic monere uoluimus. Nunc quantum ad propositionē. Pręscribantur huiusmodi duo triangula, qualia hęc propositio requirit, quorum nimirum unius duo latera, duobus lateribus alterius æqualia sint: atq; angulus deinde sub ęqualibus lateribus unius, angulo sub ęqualibus trianguli alterius comprehenso ęqualis: dico quod & horum triangulorum bases, ipsa quoq; triāgula tota, atq; reliqui anguli reliquis angulis utrinque inter se ęquales sint. Huius rei nunc accedere deberet ocularis quędam demonstratio: sed quia ad sensum quasi ita sese habere res apparet, & euidens est, tan-



L 3 quam

quam uera atq; omnibus nota relinquitur, cum statim, hoc si quis negare uelit, oppositum eius, ad extremum, Quod duę rectæ spacium comprehendant, ut sequitur, fateri cogatur, reductione ad absurdum. Superponatur triangulum unum alteri, sic ut anguli eorum ęquales, unus super altero iaceat, unum etiam ęqualium laterum unius, super suo ęquali alterius triãguli latere ponatur.



Et quia hęc duo, & reliqua etiam duo ex altera parte latera, ex hypothesi inter se æqualia sunt, ab ęqualibus etiam angulis descendunt: horum applicatorum laterum extremitates, reliqua etiam ex altera parte latera omnino conuenire atq; coincidere oportet. Quia uerò iam basiũ extremitates (ut quæ eædem sunt quæ descendentium laterũ,) conueniunt: basis igitur basi aut congruet, aut duæ rectæ lineæ cõprehendent superficiẽ. Posterius nõ conceditur, cum nimirum id, ex communi quadam noticia, pro absurdo habeatur. Congruẽt ergo bases: æquales igitur inter se, ex cõmuni illa noticia, Quæ congruunt inter se, æqualia inter se sunt. Congruet sic & triangulũ triangulo: quare & ipsa æqualia inter se, per eandẽ. Deniq; quia etiam reliqui duo anguli reliquis duobus angulis congruunt, uterq; utriq;: & illi tandem eo modo quo conueniunt, inter se æquales erunt. Cum igitur duo triangula duo latera duobus lateribus ęqualia habuerint, utrunq; utriq;, habuerint uerò & angulũ angulo ęqualem, eum qui sub æqualibus rectis compræhenditur: & basim basi ęqualem habebunt, & triangulum triangulo ęquale, ac reliqui anguli reliquis angulis ęquales erunt, uterq; utriq;, sub quibus ęqualia latera subtenduntur, quod demonstrari oportuit.

ADMONITIO.

Per puncta in figuris, repræsentatur ratio ducens ad absurdũ, ut qui facilis nõ esset in concedendo id quod uerum est, tandem cõuincatur reductione quadam ad imposibile, ut hac offensione absurditatis quodammodo resiliat ad confessionem ueri. Quod ut hoc loco, ita etiam aliјs locis à me factum reperient Lectores, designatione punctorum.

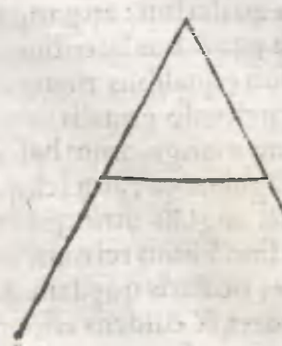
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε.

Τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων, αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Καὶ προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν, αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

PROPOSITIO V.

Isoscelium triangulorum: qui ad basim anguli, ęquales inter se sunt. Et ęqualibus rectis ulterius productis: qui sub basi anguli, ęquales inter se erunt.

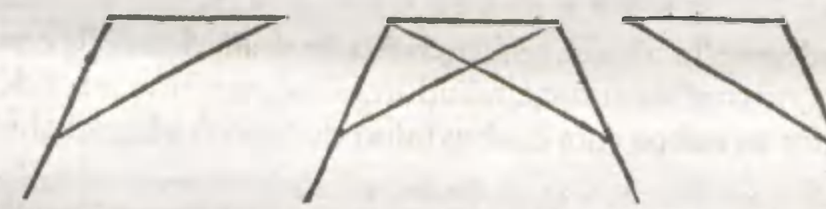
Sunt huius propositionis duæ partes, quarum prior quidem est, quòd in triangulis duũm æqualium laterum, anguli ad basim, hoc est ad reliquum latus tertium, sint inter se ęquales. Posterior uerò, si in huiusmodi triangulis ęqualia duo latera ultra triangulum producantur: quod & sub basi, qui sic fiunt anguli, inter se æquales sint.



Fiant latera ultra triangulum producta, per 3, inter se æqualia, horum deinde ęqualium extremitates cũ basis extremitatibus, duabus rectis, quæ sese mutuo secent iunctis, demõstratio ex 4 pręcedenti, bis usurpata, & communi tandem illa noticia, Si ab ęqualibus æqualia auferantur, & quæ relinquuntur, &cæ. sic colligetur. Quoniã enim inferius ad

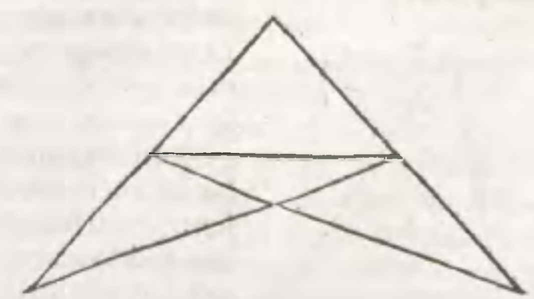
Isoscelis basim posita triangula (sumpto tamẽ ad utrũq; Isosceli descripto) duo latera ex hypothesi & structura, duobus lateribus æqualia, angulum pręterea

inter æqualia latera, angulo ęqualẽ habent: per pręcedentem quartã, & basim basi, hoc est, secantes sese mutuo sub Isoscelis basi lineas, ac reliquos duos angulos reliquis duobus angulis ęquales habebunt: quod est notandum. Rursus quoniam eadem duo inferius ad Isoscelis basim posita triangula, propter structuram quidem, & ea insuper, quæ iam demonstrata sunt, ex propositione 4 huius, inter se æqualia sunt, angulos etiam ęquales habent: iam statim posterior huius propositionis pars, quod scilicet sub basi anguli inter se æquales sint, manifesta erit. Quòd deinde quã tum ad partem priorẽ, ad basim etiam positi anguli inter se ęquales sint, ex cõmuni



illa noticia, Si ab æqualibus æqualia auferantur, &cæ. & id tandẽ manifestabitur. Constat itaque sic tota propositio. Isoscelium igitur triangulorum: qui ad basim sunt anguli, inter se ęquales erunt. Productis item æqualibus lateribus: & qui sub basi anguli, inter se æquales erunt, quod demonstrari oportuit.

SEQVITVR FIGVRA ALIA.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ϛ.

Ἐὰν τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσι, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραὶ, ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

PROPOSITIO VI.

Si trianguli duo anguli ęquales inter se fuerint: & sub ęqualibus angulis subtensa latera, ęqualia inter se erunt.

Esto

Esto triangulum, cuius duo anguli sint inter se æquales: dico & latera illis equalibus angulis subtensa, inter se æqualia esse. Si enim non sunt equalia: erit alterum eorum longius. ab eo ergo quod est longius, breuiori equale auferatur, iuxta illum angulum, qui est alteri æqualis, incipiendo, & claudatur triangulum. Et quoniam duo triangula, quæ nimirum latus, quod equis angulis interiacet, cōmune habent, huiusmodi sunt, qualia propositio precedens quarta requirit, cum per hanc quartam, et basis basi, totum deinde triāgulum toti triangulo, ac reliqui anguli reliquis angulis equales sint: partiale triangulum suo totali æquale erit. pars toti, quod est impossibile: partialis etiam angulus, ex communi illa noticia. Quæ uni sunt æqualia, & cæt. suo totali æqualis, quod & ipsum impossibile. Latus igitur unum alteri, propter hec inconuenientia, non inequale, sed æquale erit. Si igitur trianguli alicuius duo anguli equales inter se fuerint, & horum equaliū angulorum subtensa latera inter se æqualia erunt. quod demonstrasse oportuit.

Vel

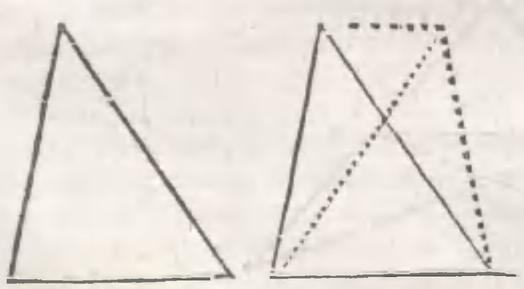
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, δυσὶ ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, οὐ συσταθήσονται, πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ, ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις.

PROPOSITIO. VII.

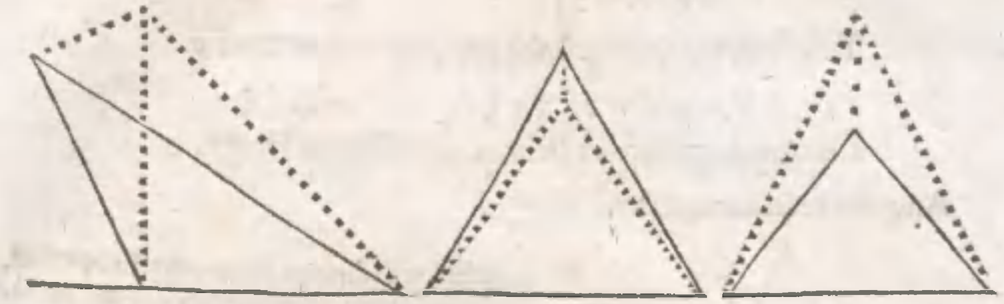
Super eadem recta, duabus eisdem rectis lineis alie duæ recte equales, utraque utrique, nō constituentur, ad aliud atque aliud punctum, ad easdē partes, eosdemque terminos cum duabus initio ductis rectis lineis habentes.

Sentētia est propositionis: Si super alicuius rectæ lineæ extremitatibus, à pūcto uno, extra lineā sumpto, duæ rectæ demissæ fuerint, quod tū à puncto quodā alio, in eadē qua prius parte constituto, ad extremitates datæ, aliæ duæ rectæ, quæ essent prioribus ductis equales, utraque suę cōterminali, demitti possint, hoc impossibile est. Si enim possibile, detur recta, à pūcto etiā extra datā sumpto, ad utranque extremitatē recta linea ducat. Sumat deinde, ut ita aduersario, uel minus credēti, mos geratur, in eadem qua prius parte, punctum aliud, à quo & ipso duæ ad extremitates datę rectæ tandem demittentur lineę. Et quia in hūc modum descripta figura, ex posterioribus una priorum unā secet aut non secet, utrum nunc contigerit, pūcta semper, per primū postulatum, recta quadā linea coniungēda sunt. Quòd si una unā secet, cū hic appareāt duo triangula, quorū utrūque Isosceles, qui in Isosceliū triāgulorū uno, per priorē partem quintæ, anguli sunt inter se equales, mox uni equalium unus angulus, quē nimirum habet à laterè, additus, de altero uerò unus ablatus: qui sic ueniūt anguli inequales, per eandem priorem quintæ partem, ratione alterius Isoscelis, inter se equales erunt. quod est impossibile. Esto autem nunc, quod non secet una unam, tum post punctorum coniunctionem, unius Isoscelis trianguli equalia latera ultra basim producantur. Et quoniā qui, ex posteriore parte quintę, anguli sunt inter se equales, si uni unus additus, de altero uerò unus ablatus fuerit, ex priore parte eiusdem quintę idem quod



Recta data. Recta data.

quod prius inferri potest. Sequitur ergo nunc, quomodocunque hoc tentabitur, incassum laborari, cum nec intra nec extra demissas rectas punctū aliud sumi possit. Super eadē igitur recta, duabus eisdē rectis, & reli. quod demōstrasse oportuit.



Recta data. Recta data.

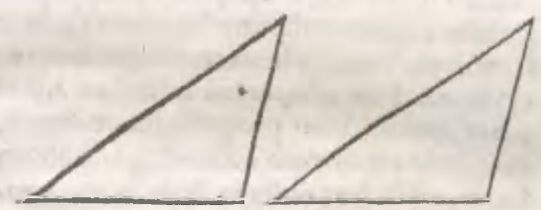
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η.

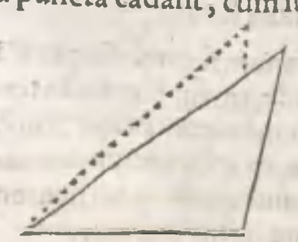
Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἔχῃ δὲ καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην· καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἕξει, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.

PROPOSITIO VIII.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus equalia habuerint, utrūque utrique, habuerint uero & basim basi equalem: & angulum angulo æqualem habebunt, eum qui sub equalibus lateribus comprehenditur.

Describantur huiusmodi duo triangula, qualia hæc propositio requirit: dico & angulos, qui sub æqualibus amborum triangulorum lateribus comprehenduntur, inter se equales esse. Colligit suam demonstrationem hęc propositio ex septima, ut precedens sexta ex quinta, ab impossibili hoc modo. Superponat triangulum unum alteri, sic ut basis basim, latera etiam latera, unumquodque suum equale, respiciant: ac posita basi super basi, una item extremitate unius in uno, super una basis extremitate in triangulo altero, cum ipsę bases inter se sint, ex hypothesi, equales: duę harum extremitates reliquæ coincident. atque sic etiam ipsæ bases, cum alias, ubi uidelicet una basis extra uel intra triangulū caderet, duæ rectę lineæ superficiē clauderent, id quod per communem quandam notitiam fieri posse negatum est: cōgruunt igitur bases. Et quia bases congruunt: latera sic lateribus aut congruent, aut non. Si prius: & angulus angulo congruet, & ei equalis erit, quod erat demonstrandum. Esto uero quòd non congruant latera basibus congruentibus, sed differant, hoc est, in diuersa puncta cadant, cum super unius rectæ extremitatibus duæ rectæ, ab uno puncto deductæ, prius constitutæ sint, iam uero aliæ duæ, super eisdem rectæ extremitatibus positæ, uersus eandem partem tendentes, in aliud punctum concurrant, contra propositionem pręmissam septimam id agi manifestum est. id quod fieri non solet: cum uidelicet Geometrę inde corum nimis atque turpe esset, si demōstratæ antea propositionis ueritatem & constantiam eandem non tueretur. Propter illud igitur inconueniens, congruentibus basibus: et reliqua latera, cū sint, ex hypothesi, inter se æqualia, congruere: atque sic angulos, quos dicta latera comprehendunt,





prælendunt, inter se equales esse, necesse erit. Si igitur duo triangula, duo latera duobus &cæ. quod demonstrasse oportuit.

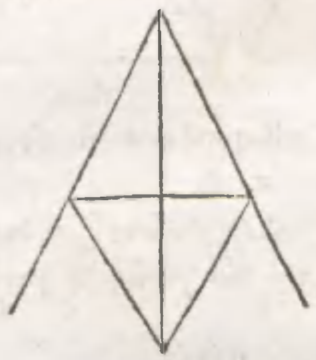
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ.

Τὴν δοθεῖσαν γωνίαν εὐθύγραμμον δίχα τεμεῖν.

PROPOSITIO IX.

Datum angulum rectilineum: bifariam secare.

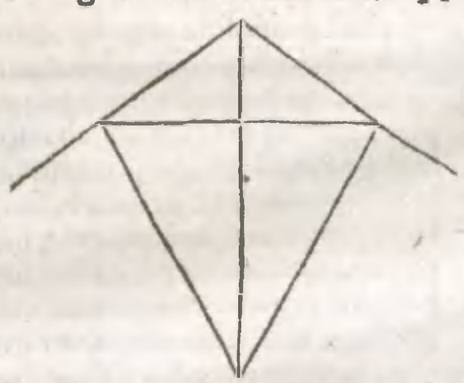
Angulus rectilineus datus.



Sit angulus rectilineus datus, atq; propositũ, eum bifariam secare. Officio igitur circini, ex rectis datum angulum continentibus, ab earũ contactu incipiẽdo, portiones sumant equales: quarum fines deinde linea quadam recta, ut Isosceles triangulũ fiat, iuncti, super illa, ex altera parte, triangulum equilaterum constituat. Quòd si tandem linea quadam recta alia angulus datus cum sibi opposito copuletur, propositioni iam satisfactum erit: id quod propositionis κατασκευὴ & propositio octaua manifestabunt.

ALIA DEMONSTRATIO HVIVS.

Sit angulus rectilineus datus, atq; propositum, eum bifariam secare. Signetur igitur in uno anguli latere pũctũ aliquod, huic deinde portioni, quę inter pũctũ hoc et angulũ iacet, equalis ab altero anguli latere, ab ipso angulo incipiẽdo, per propositionem tertiam auferatur, et connectantur harum portionum fines tertia quadam recta linea. Porrò super hac tertia, ex altera parte, per primam propositionem huius, triangulo equilatero cõstituto, angulis in super, quos hæc recta in diuersis triangulis subtendit, recta quadam linea alia iunctis, confectum erit negocium, cum hæc ipsa recta angulum propositum bifariam secet: id quod, ut prius, ostendi poterit.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην δίχα τεμεῖν.

PROPOSITIO X.

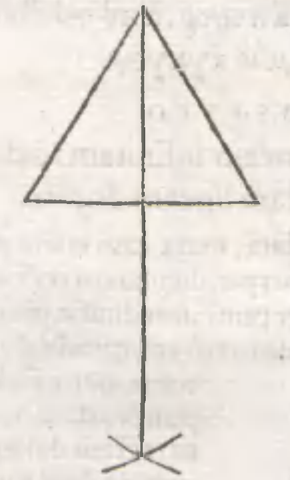
Datam rectam lineam terminatam: bifariam secare.

Sit recta linea terminata data, atq; propositum, eam bifariam secare. Super illa igitur triangulum æquilaterum constituatur: angulo deinde, quem hæc recta terminata subtendit, linea quadam recta alia, per propositionem nonam præcedentẽ, bifariam diuiso, factum erit negocium. Nam quæ angulum, ea ipsa, continuata tamen, & terminatam rectam lineam datam bifariam secet: cuius quidem rei demonstratio, ipsa structura & propositio quarta erunt. Data igitur recta terminata linea, bifariam secta est: quod fieri oportuit.

SEQVITVR

SEQVITVR FIGVRA.

Recta termi-



nata data.

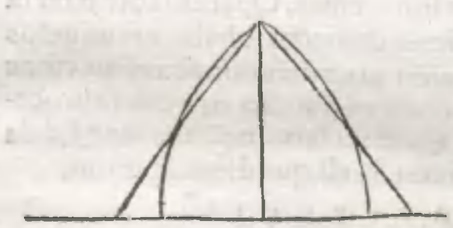
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ.

Τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου, πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

PROPOSITIO XI.

Data recta linea, à puncto in ea dato, ad angulos rectos lineam rectam excitare.

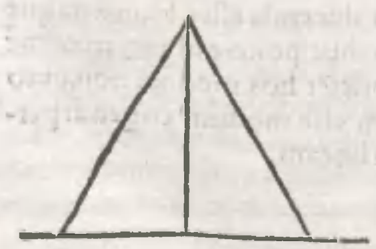
Sit recta linea data, in ea etiam punctũ datum, atq; propositum, ex puncto hoc, ipsius rectæ lineæ datæ, lineam rectam ad rectos angulos educere. Signentur ex utraq; parte puncti in linea, circini officio, æquales portiones. ex harum finibus deinde, circino prius ulterius expanso, duo circuli, uel arcus tantum, circulorum loco, sese mutuo secantes describantur. A' mutua tandem duorum arcuum intersectione linea recta ad punctum in linea datum si demissa fuerit: illam demissam à puncto in linea ad rectos angulos eductã esse, sic obtinebitur. Ducatur à communi arcuum intersectione ad utranq; illorum cũ recta data intersectionẽ, quædam recta linea. Et quoniã hic sunt duo triangula, qualia propositio octaua præcedens requirit, cũ illi anguli, quos recta data, & quæ ab arcuum intersectione demissa est linea, ἐφεξῆς constituunt, per eandem octauam, æquales inter se sint, atq; ob id deinde recti, ex definitione: hæc demissa ad angulos rectos educta erit, id quod fieri oportuit.



Recta data.

ALIA DEMONSTRATIO HVIVS.

Sit recta linea data, & quæ sequuntur. Signentur ex utraque parte puncti in linea æquales portiones, una quidem ad placitum, altera uero per propositionem tertiam præmissam. Super his deinde duabus portionibus, tanquam una linea, triangulo æquilatero per propositionẽ primam constituto, ad angulũ quem hæc tota subtendit, à puncto in linea sumpto, recta quædam linea ducatur. Erit autem hęc recta, ea quę petebatur, ad rectos scilicet angulos à puncto in linea dato educta: id quod, ut modo, mediante structura, ex propositione octaua, & definitione anguli recti, facile demonstrari poterit.



Recta data.

M 2 ΠΡΟΤΑΣΙΣ

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ.

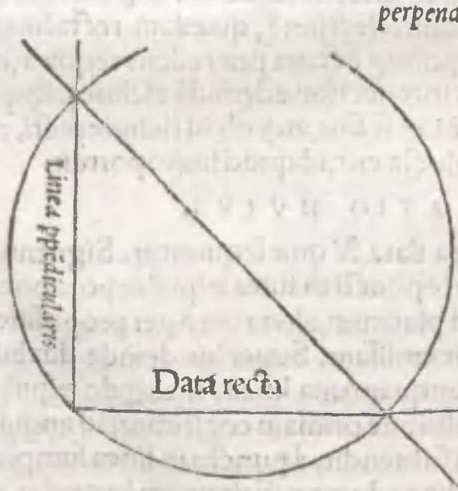
Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

PROPOSITIO XII.

Super datam rectam lineam infinitam: à dato puncto quod in ea non est, perpendicularem rectam lineam ducere.

Sit recta linea satis longa data, extra eam etiam punctum datum, atq; propositum, à puncto super rectam, perpendicularem rectam lineam demittere. Suscipiatur ex alterutra parte rectæ, per punctum diuisæ, punctum aliud, utcunq;, ac centro quidem, puncto dato: interuallo uerò eo, quod à duobus punctis intercipitur, circulus, per 3 postulatum describatur. Vel, Ex puncto dato describatur primò circulus tãtus, ut rectam datam in duobus locis interſecet, à quo eodem puncto deinde ad interſectionũ loca duabus rectis lineis ductis, secetur uel angulus ad centrum, quem hæ duæ rectæ includunt: per nonam, uel latus eundem angulum subtendens, si magis placet: per propositionẽ 10, bifariam. Dico ergo quod hęc, uel angulũ uel latus, secans linea, ea sit quæ petitur. Quoniam enim ad rectam hanc, quæ datæ rectæ insistit, angulos æquales esse ipsa κατασκευή, et propositio 4, si angulus: uel & propositio 8, si linea data, seu latus bifariam diuisum fuerit, demonstrabũt. Et quoniam sunt anguli deinceps se habentes, Quando autem recta rectæ insistens, deinceps se habentes angulos æquales inter se fecerit: uterq; æqualium angulorum ex definitione, rectus est, ac insistens, Perpendicularis uocatur, cum hæc recta ex puncto etiam dato procedat propositioni iam satisfactũ erit. Super datã igitur rectam lineã satis longã, à dato puncto quod in ea non erat, Perpendicularis educta est, quod fieri oportuit.

ALIVS MODVS DVCENDI *perpendicularem lineam.*

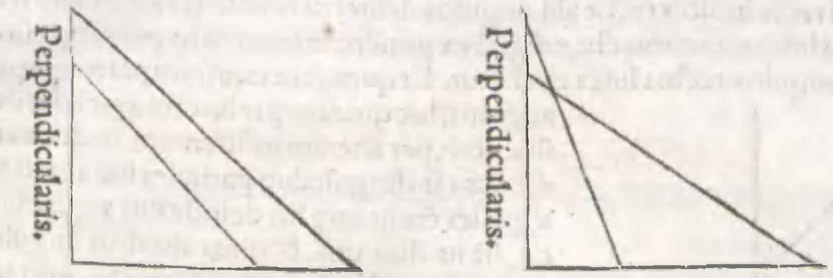


Est & tertius modus ducendi perpendicularem lineam, ex prima parte propositionis 31, tertij libri sequentis desumptus, eò spectans, si quando fortè ab alicuius rectæ extremitate ea ducenda esset. Huius itaque delineationem huc ponere libuit, maximè ob id, quod præter hos modos, non puto præterea alium esse modum erigendi perpendicularem lineam.

APPENDIX.

Ex præmissis duabus propositionibus discetur, quomodo triangulum orthogonium formari debeat. Posteaquam enim perpendicularis ad rectam ducta est, si deinde

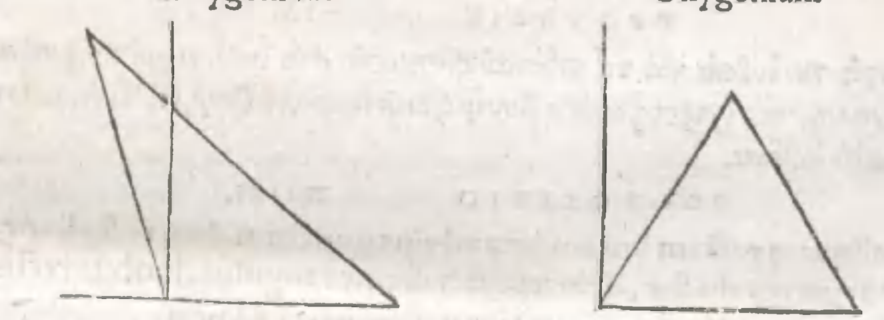
deinde huius extremitas, uel punctum aliquod in ea, cum data recta, uel similiter eius puncto aliquo, coniungatur: triangulum rectangulum descriptum erit, sict



De Obtusiangulo autem & Acutiangulo, quomodo formentur, si illorum angulos, à quibus denominata sunt, quis animaduerterit, non erit laboriosum facere, cum nullam singularem industriam hæ delineationes requirant, id quod ex sequẽti cuiusq; descriptione apparet.

Triangulum

Amblygonium Oxygonium



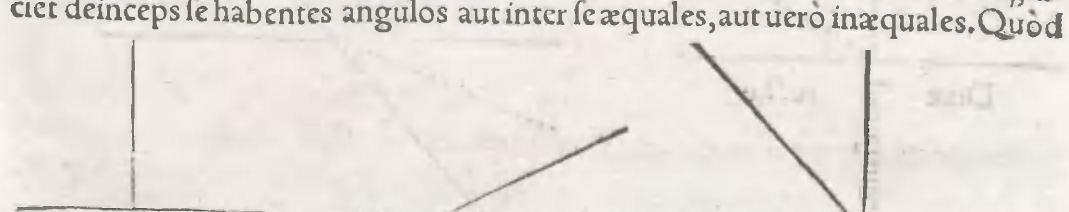
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ.

Ὡς ἂν εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα, γωνίας ποιῇ, ἤτοι δύο ὀρθάς, ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσει.

PROPOSITIO XIII.

Cũ recta linea super rectam consistens lineã, angulos fecerit: aut duos rectos, aut duobus rectis æquales faciet.

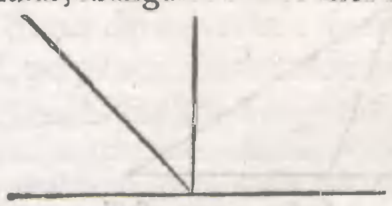
Consistat recta super rectam lineam, angulos faciens: dico illos esse, aut utrunq; rectum, aut ambos simul duobus rectis æquales. Nam linea insistens rectæ alij, faciet deinceps se habentes angulos aut inter se æquales, aut uerò inæquales. Quòd



si ęquales: uterq; ex definitione, rectus erit, id quod uult propositio. Sin uero inæquales, quia tamen unus tanto interuallo rectum excedit, quanto alter recto minor est (id quod linea à puncto in recta sumpto, πρὸς ὀρθὰς educta commonstrabit) propter excessus & defectus æqualitatem, iam hi duo anguli, licet non recti per se, tamen duobus rectis æquales sunt, id quod & ipsum habet propositio. Vnde sic patet ipsa tota. Si recta igitur linea super rectam consistens lineam angulos fecerit, aut duos rectos, aut duobus rectis angulis æquales faciet: quod demonstrasse oportuit.

ALIA EIVS QVO IN PROPOSITIONE *dicitur, Aut duobus rectis æquales, demonstratio.*

Quòd si recta insistēs rectæ alij, angulos deinceps se habētes inæquales fecerit, tū ex cōmuni linearum contactu, tanquā ex puncto in linea dato, per propositionē 11 huius, ad angulos rectos linea excitetur. Et quoniam ex utraq; parte semper unus



angulus, hic quidem per lineam πρὸς ὀρθὰς ductam: illic uero, per alteram insistentem, in duos angulos diuisus est: singuli duo partiales suo totali angulo æquales erunt. atq; his deinde illis æqualibus addi tis, sic ut duo uni, & unus duobus angulis accedat: tres anguli tribus æquales erunt, uno tandem communi angulo, qui nimirum sub perpendiculari & alia insistente comprehēditur, hic & illic ablato: duo anguli duobus æquales erunt. Quia autem duo ex una parte recti sunt: ex altera parte duo, quos nimirum recta, non ad rectos angulos ducta, & ea cui insistit, comprehendunt, duobus rectis angulis ęquales erunt. Si recta igitur linea super rectā cōsistens angulos fecerit, & cęt. quod demōstrari oportuit.

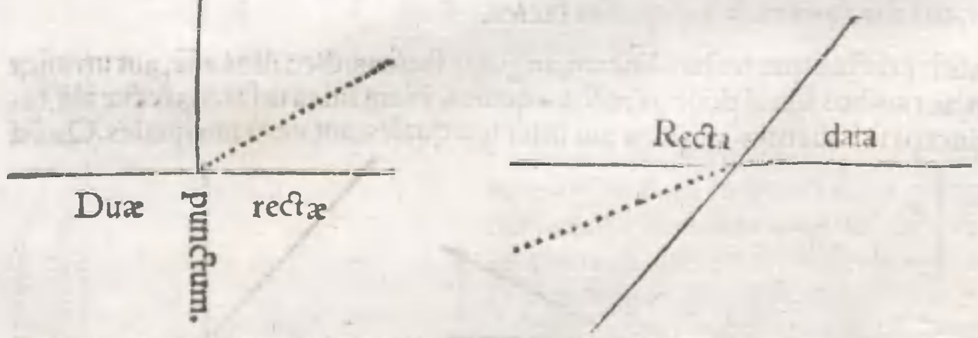
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ.

Ἐὰν πρός τινι εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δύο εὐθεῖαι μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ' εὐθείας ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

PROPOSITIO XIIII.

Si ad aliquam rectam lineam, atq; ad eius punctum duæ rectę lineæ, nō ad easdem partes ductæ, deinceps se habentes angulos duobus rectis æquales fecerint: in directum erunt inter se ipsæ rectæ lineæ.

Sit quædam recta linea, ad eius etiam unum aliquod punctum, duæ rectæ lineę non ad easdem partes ductæ, sic tamen, ut cum priori recta, angulos duobus rectis æquales faciant: dico quòd quæ ad punctū sunt ductæ rectæ lineę, ad amussim una alteri iuncta sit. Colligit suam demonstrationem hæc propositio ex propositione



ne 13 præcedēti ab impossibili. sic. Nisi enim hæ duæ rectæ, ad punctum prioris rectæ sic ductæ, una linea sint, si forte ab aliquo minus credente, atq; subtili nimis homine, una ductarū suo modo secundum continuationem in rectum eiecta fuerit, per præcedētem 13, & illam deinde communem noticiam, Si ab æqualibus æqualia, uel aliquod commune (quod idem est) subtrahatur, & cæ. inferri posset, partialē æqualem esse angulo suo totali. Sed quia hoc est contra rationem & notitiam quādam communem, quæ sonat, Totum esse qualibet sua parte maius. Non igitur con tinuari potest iuxta hoc punctū in directū aliter, neq; illa, cum qua iam hoc tertatū est, neq; etiā ducta recta altera: quare hæ duæ in directū iunctæ sunt. Si ad aliquā igitur

igitur rectam lineam, atq; ad eius punctum, duæ rectę lineæ, non ad easdem partes ductæ, deinceps se habentes & cæ. quod demonstrari oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιήσουσι.

PROPOSITIO XV.

Si duę rectę lineæ sese mutuo secuerint: ad uerticem angulos æquales inter se faciunt.

Sint duæ rectę lineæ sese mutuo secantes: dico, quòd anguli ad uerticem sint inter se æquales. Est huius propositionis demonstratio, propositio 13 præcedens, cū per eam recta rectę lineę insistens, semper duos angulos aut rectos, aut duobus re

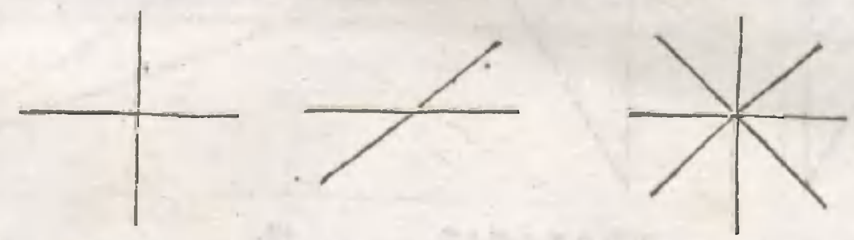
ctis ęquales faciat. Quare hac propositione bis usurpata, Cum quę uni ęqualia: illa & inter se ęqualia sint, communi angulo ab his ęqualibus ablato: anguli tandem κατὰ κορυφὴν ęquales manebūt. Si duę igitur rectę lineę sese mutuo secuerint: ad uerticem angulos ęquales inter se faciunt, quod demonstrasse oportuit.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι καὶ ὅσαι δήποτ' οὖν εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς πρὸς τῇ τομῇ γωνίας τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσουσι.

COROLLARIVM.

Hinc manifestum est, Quotquot rectas lineas, in eodē plano sese mutuo intersecantes: angulos efficere quatuor rectis ęquales.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙϚ.

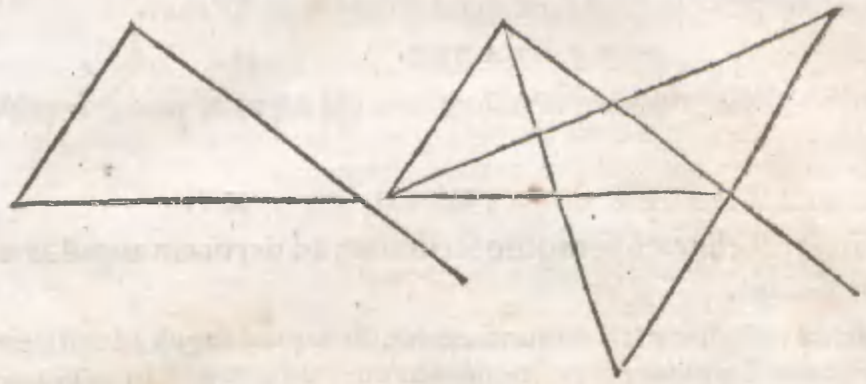
Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν ἐκβληθείσης, ἡ ἐκτὸς γωνία ἑκατέρας τῶν ἐντὸς, καὶ ἀπεναντίον, μείζων ἐστίν.

PROPOSITIO XVI.

Omnis trianguli uno latere producto: externus angulus utroq; interno, & opposito, maior est.

Sit triāgulum, productum etiam ulterius unum eius latus: dico, qui sic fit externus angulus, cum utroq; interno, & ex opposito constituto, maiorem esse. Secentur duo latera trianguli, quę sunt ad angulū externū, bifariam, deinde per diuisionū puncta, ab angulis, quos hęc eadem latera subtendunt, lineæ rectę ultra triangulū ducantur,

ducantur, sic, ut utriusque externa, suæ sit internæ portioni equalis. Extremitatibus



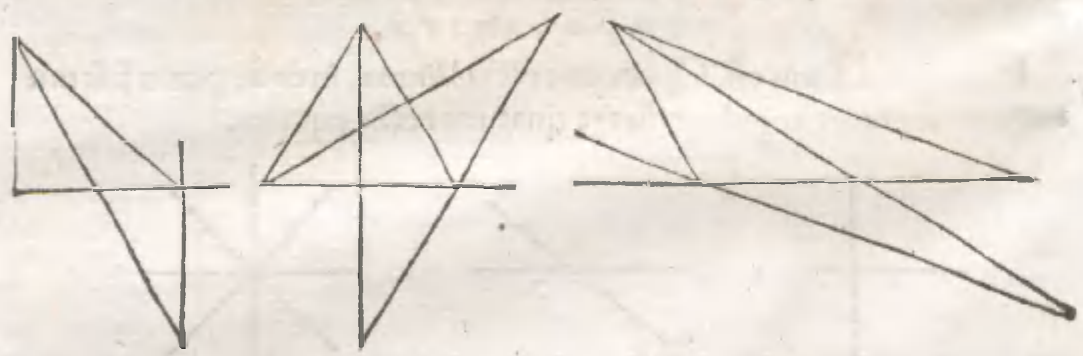
tandem harum rectarum cum puncto, quod est duarum diuisarum communis terminus, duabus rectis lineis cõnexis, demonstrationis figura parata erit. Qua nunc diligenter perspecta, propositionum decimæ quintæ & quartæ memor, rem ita sese habere facile perspiciet.

ADMONITIO.

Oportet autem, ut pro utroque interno & opposito angulo, quo nimirum externus maior esse demonstrari debeat, duo partialia triangula sumantur, quorum alterum quidem angulum illum, de quo agitur, integrum habet: alterum deinde, quod huic ad uerticem iunctum est, tum demum propositionibus allegatis res successum habebit, quod indicare necesse erat.

SEQVITVR GEOMETRICA FIGVRA alia, pro triangulo

orthogonio & isos. oxygonio & æquilat. amblygonio & scaleno.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ.

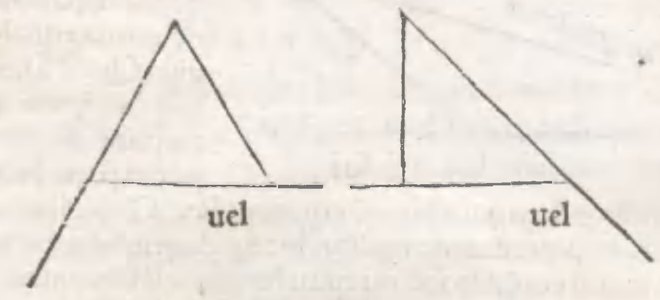
Παντὸς τριγώνου, αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι, πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

PROPOSITIO XVII.

Omnis trianguli, duo anguli duobus rectis minores sunt, omnifariam sumpti.

Proposito triãgulo qualicũque: dico, quoslibet eius duos angulos, duobus rectis minores esse. Producatur quoduis eius unũ latus ulterius. Et quoniã ex iam præmissa 16 propositione, angulus externus utroque interno & opposito maior est, & rursus quoniam ex communi quadam notitia, Si inæqualibus æqualia, uel aliquod commune adiectũ fuerit, ipsa tota inæqualia sunt: priorũ inæqualiũ utrique angulus, qui est externo

est externo ἐφεξῆς adiectus, & tota tandem inter se inæqualia esse conueniet: atque illud quidem maius, ubi scilicet est externus angulus: alterum uerò, duo nimirum interni anguli, minus.



Maius autem, cum ex propositione 13, duobus rectis angulis equale sit: alterum nũc, ut qui sunt duo interni anguli, propter angustiam, duobus rectis angulis minus erit. Et quoniam hoc nũc de duobus ad placitũ sumptis angulis, quod ipsi duobus rectis minores sint, demonstratum est: de singulis duobus amplius nullum dubium erit, quin & ipsi duobus rectis minores sint, subinde tamen alio atque alio latere ulterius producto. Omnis igitur trianguli duo anguli, & quæ sequuntur, quod demonstrasse oportuit.

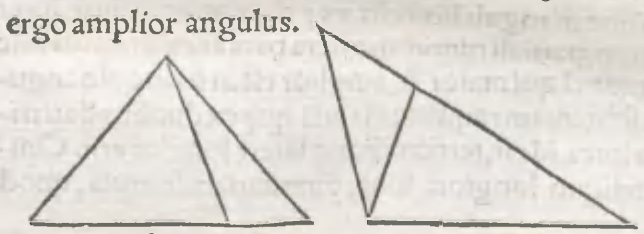
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΗ.

Παντὸς τριγώνου, ἡ μείζων πλευρὰ τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει.

PROPOSITIO XVIII.

Omnis trianguli, longius latus ampliorem angulum subtendit.

Sententia est propositionis. Quod latus alicuius trianguli est longius: illius etiã angulum quem subtendit, breuioris subtendentis angulo ampliorem esse. Describatur igitur triangulum, duum æqualiũ, uel trium inæqualium laterum: dico quòd, cuius anguli est latus longius, illum etiã ampliorem esse. Duorum angulorũ latera, cum ex hypothesi, unum eorum longius, alterũ uero breuius sit, abscindatur de longiori, per propositionẽ 3 huius, portio breuiori æqualis, ac triangulo formato, demonstratio ex propositionibus 5 et 16 præmissis sic colligetur.



Quoniam formatũ triangulũ cum sit ex structura Isosceles: erunt ipsius ad basim anguli inter se æquales. sed quia unus horũ æqualiũ, est alterius cuiusdã triãguli externus, unde sic utroque interno eiusdẽ triãguli & opposito, maior: & alter equalium eodẽ interno angulo maior erit. Alter autem cum sit eius, quem longius latus subtendit anguli pars, internus uerò is qui à breuiori latere subtenditur, argumento à maiori uel fortiori sumpto, si pars maior illo est: multo fortius igitur ipsum totum. Omnis igitur trianguli, longius latus ampliorem angulum subtendit: quod demonstrari oportuit.

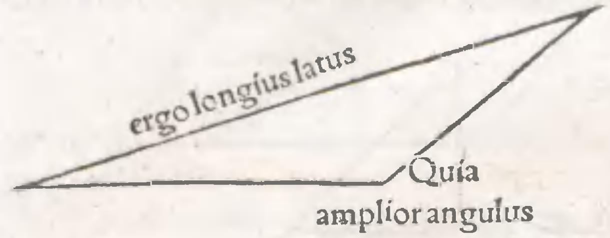
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΘ.

Παντὸς τριγώνου, ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει.

PROPOSITIO XIX.

Omnis trianguli, amplior angulus sub longiori latere subtenditur.

Sententia est propositionis. Qui angulus alicuius trianguli est amplior: illius etiam subtensum latus angustiorem angulum subtendente latere longius esse. Nam



si non fuerit longius illud, de quo dicit, latus, erit id reliquorũ uni aut ęquale, aut uno breuius. Quòd si uni equale fuerit: angulus quem subtendit, atque amplior est, ex hypothesi, ex priore parte propositionis 5, sibi alium æqualem angulum habebit: nõ ergo amplior. Quòd si uerò uno breuius, cum latus longius, ex pręcedente, ampliorem angulum subtendat: angulus qui positus est amplior, iã uno eorũ, illo scilicet cuius longius est subtensum latus, angustior erit. Sed quia non est: neque etiam eius latus alio breuius erit: longius ergo. In omni igitur triangulo amplior angulus longius latus requirit, seu sub longiori latere subtenditur, quod demonstrasse oportuit.

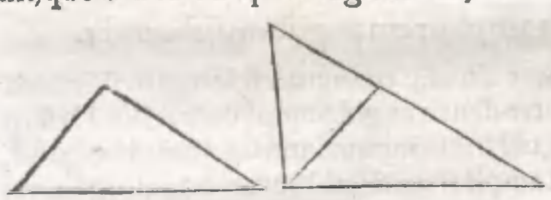
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Κ.

Παντὸς τριγώνου· αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι, πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

PROPOSITIO XX.

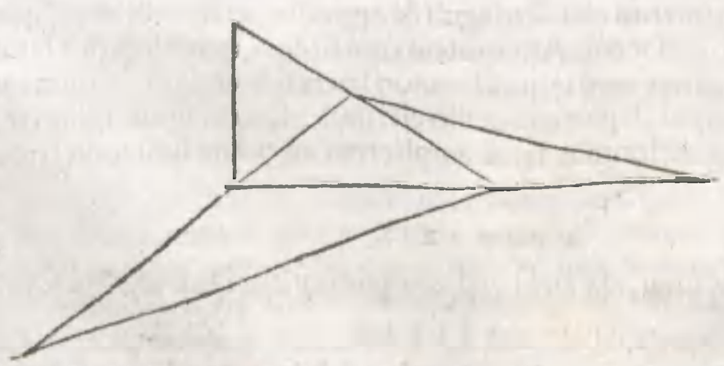
Omnis trianguli, duo latera reliquo longiora sunt, omnifariã sumpta.

Esto triangulum qualecunque: dico, quòd eius qualitercunque sumpta duo latera simul, tertio reliquo longiora sint. Horum duorum laterum, quæ demonstrari debeant, quòd tertio reliquo longiora sint, unum ad longitudinem lateris alterius, ex illa parte ubi est communis eorum copula, ultra triangulum continuatur, quę deinde hæc duo æqualia, uel hæ duæ ęquales rectæ lineæ compręhẽdũt angulum, is tertia quadam linea recta, ut triãgulum fiat, claudatur. Et



quoniam illi duo anguli, qui ratione trianguli Isoscelis, ex priore parte quintę, inter se ęquales sunt, mox ubi uni eorum, partiali nimirum, altera pars accessit: totus nũc altero æqualiũ maior erit. Sed quoniã qui maior & amplior est in triangulo angulus, longiorẽ ex propositione 19 subtensam requirit: illa etiã quę ex duobus dati trianguli lateribus cõtinuata est, ea linea, id est, tertio reliquo latere longior erit. Omnis igitur trianguli duo latera reliquo longiora sunt, omnifariam sumpta, quod demonstrasse oportuit.

SEQVITVR FIGVRA GENERALIS PRO *singulis binis lateribus exposita.*



ΠΡΟΤΑΣΙΣ

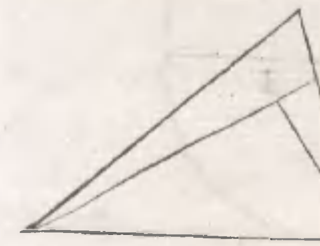
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΑ.

Ἐὰν τριγώνου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν ἀπὸ τῶν περάτων δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συσταθῶσιν· αἱ συσταθεῖσαι τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ἐλάττονες μὲν ἔσονται, μείζονα δὲ γωνίαν περιέξουσι.

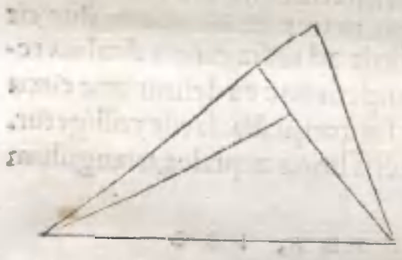
PROPOSITIO XXI.

Si super trianguli uno latere ab extremitatibus duæ rectæ lineæ interius constitutæ fuerint: hę constitutæ reliquis trianguli duobus lateribus breuiores quidem erunt, ampliorem autem angulum comprehendent.

Esto triangulum, duæ etiam rectæ lineę, in ipso concurrentes, super unius lateris extremitatibus constitutæ: dico, quòd constitutæ hæ reliquis duobus trianguli lateribus breuiores sint, ampliorem autem angulũ



comprœhendunt. Sunt huius propositionis duæ partes. Prior, quod interiores duæ rectæ exterioribus breuiores sint, id quod patet ex pręcedenti bis usurpata, cum per eam, duo quælibet latera uniuscuiusque trianguli, tertio longiora sint, & communi tandem illa notitia, Si ab æqualibus æqualia, uel aliquod commune, subtrahatur &cæ. Oportet tamen, ut prius ex interioribus lineis alterutra in continuum et rectum, ad latus usque exterius producatur, utque triangula illa duo partialia, quorum unius quidem unum latus, linea exterior: alterius uero trianguli unum, alterius exterioris lineæ pars, latus unum fuerit, sumantur, & succedet demonstratio. Posterior nunc, quod angulus sub interioribus eo, quem exteriores rectæ lineæ comprehendunt, maior fit, ex propositione 16, & illa bis usurpata, uera esse cõuincitur. Super



uno igit alicuius trianguli latere ad extremitates eius duę rectæ interius cõstitutę: reliquis duobus trianguli lateribus breuiores quidem sunt, ampliorem autem angulum comprehendunt, quod demonstrasse oportuit.

ALIA PRIORIS PARTIS DEMONSTRATIO.

Vsurpatis triangulis partialibus, quæ prius. Et quoniam ex præcedenti 20, duo quælibet latera omnis trianguli, tertio latere longiora sunt, & quoniam etiam, Inæqualibus æqualia si adijciantur: tota, ex communi quadã notitia, inæqualia sunt, utroque bis (uno tamen post alterum) usurpato, per id demũ quod dicitur, Longo breuius, lõgiore multo fortius breuius esse, argumento nimirum à maiori sumpto, concluditur tandẽ propositum, Interiores scilicet duas exterioribus duabus, siquidem secundum propositionis hypotheses constitutæ sint, breuiores esse. quod demonstrari oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΒ.

Ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις εὐθείαις, τρίγωνον συστήσασθαι. Δεῖ δὴ τὰς δύο τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι, πάντῃ μεταλαμβανομένας, διὰ τὸ καὶ παντὸς τριγώνου τὰς δύο πλευρὰς, τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι, πάντῃ μεταλαμβανομένας.

PROPOSITIO XXII.

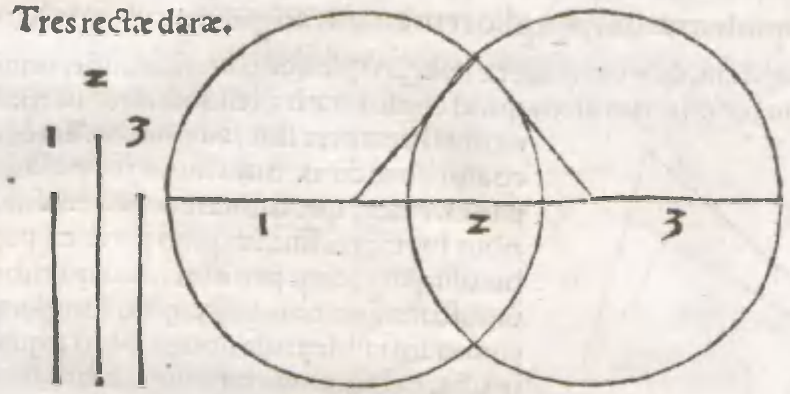
Ex tribus rectis lineis, quæ sunt tribus datis rectis lineis ęquales, triangulum constituere.

CAVTIO.

Oportet autem duas reliqua longiores esse, omnifariam sumptas, propterea quòd uniuscuiusque triãguli duo latera, reliquo longiora esse oporteat, omnifariam sumpta.

Datis tribus rectis lineis, quarum quæque duę reliqua tertia longiores sint, propositum est, ex alijs tribus rectis, quæ sunt datis tribus æquales, triangulum constituere. Ducatur igitur linea recta satis longa, ut quæ propositas rectas, adamussim cõ-

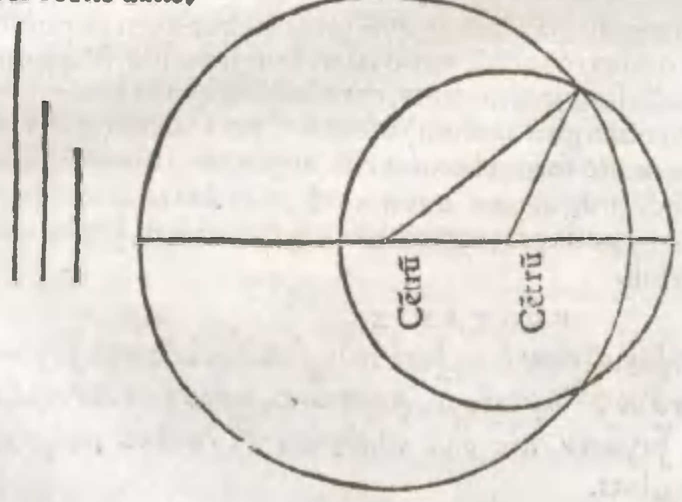
Tres rectæ datæ.



tinuatas, longitudine excedat. Hoc facto, portiones in ea, tribus datis rectis, singulæ singulis, æquales, ordine quo maximè placuerit, per 3 propositionem huius, separatim punctis signentur, ex pũctis deinde duobus intermedijs, tanquam ex duobus centris, secundum extremarum portionum quantitates seu interualla, duo circuli describantur, atque à puncto tandem intersectionis ad dicta centra duabus rectis lineis ductis, propositioni satisfactum erit, ut quidem hoc ex definitione circuli & illa communi notitia, Eidem æqualia, & inter se sunt æqualia, facile colligetur. Ex tribus igitur rectis lineis, quæ sunt tribus datis rectis lineis æquales, triangulum constitutum est, quod fecisse oportuit.

ALIA GEOMETRICA FIGVRA, PRO *triangulo scaleno constituendo.*

Tres rectæ datæ.



APPENDIX.

Ex hac propositione addiscuntur trium triangulorũ, Aequilateri scilicet, Isoscelis & Scaleni, delineationes: cum prima unius tantum, Aequilateri scilicet, formationem nobis proposuerit. Habentur ergo sic omnium triangulorum delineationes, hic quidem

hic quidem, eorum qui secundum diuersitatem laterum nomina sua sortiuntur: illic uerò, nimirum circa 11 & 12 propositiones, ubi de Perpendiculari ducenda sermo erat, prout considerantur hæc, & nomina sua habent ab angulis, quod obiter dicere uolui.

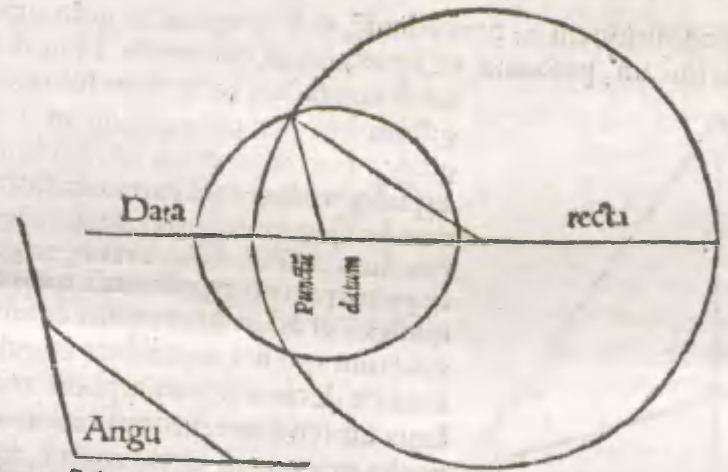
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΓ.

Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ, τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ, ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι.

PROPOSITIO XXIII.

Ad datam rectam lineam, datumque in ea punctum, dato angulo rectilineo, æqualem angulum rectilineum constituere.

Sit recta linea data, punctum etiam in ea datum: sitque deinde & angulus quidã rectilineus datus, atque propositum, ad id punctum ad hanc item rectam lineam, dato rectilineo æqualem rectilineum angulum constituere. Subtendatur primò dato angulo recta quædam linea, quomodocunque hoc fiat, ut appareat triangulum, ad



datam rectam deinde, secundum quantitatem trium rectarum, quæ sunt tribus formati iam trianguli lateribus æquales, triangulum, per propositionem 22 præmissam, constituatur, sic tamen, ut quę datum angulum comprehendunt latera, eorum portiones uel lineæ æquales, in data recta iuxta punctum signentur, et factum erit. Colligitur autem huius rei demõstratio ex structura, communi illa noticia, Eidem æqualia, & inter se sunt æqualia, propositione tandem octaua huius, quod indicandum erat. Ad datam igitur rectam lineam, datumque in ea punctum dato angulo rectilineo, æqualis angulus rectilineus constitutus est. quod fieri oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΔ.

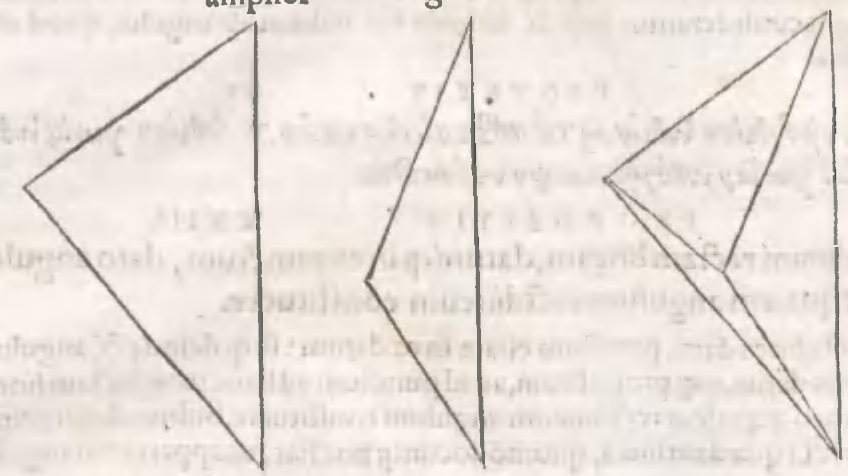
Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔχῃ, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην· καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἕξει.

PROPOSITIO XXIIII.

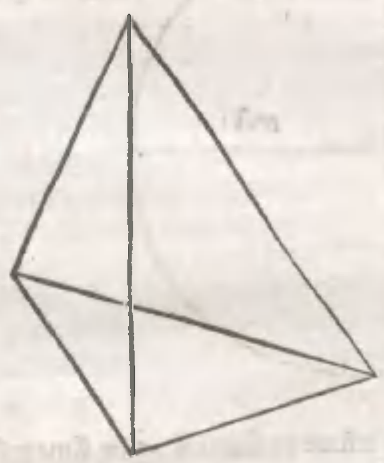
Si duo triangula duo latera duobus lateribus ęqualia habuerint, utrũque utrique, habuerint uerò angulum angulo ampliorem, eum qui sub æqualibus rectis comprehenditur: & basim basi longiorem habebunt.

Sint huiusmodi qualia hæc propositio requirit, duo triãgula: dico basim illius trianguli, quod sub ęqualibus rectis ampliorem cõprehendit angulum, alterius trianguli basi longiorem esse. Cum enim, ex hypothesi, angulus inter æqualia latera in uno

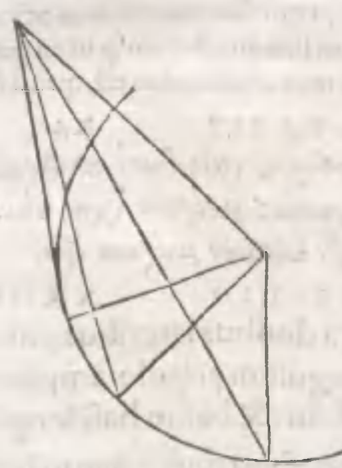
uno amplior ſit angulo, itidem inter æqualia latera, in triangulo altero, ille qui mi-



nor eſt, per propoſitionem 23 præcedentē, ut ſit ampliori angulo æqualis, augeatur, ab angulo lineam, proximæ rectæ æqualem, educendo. Huic deinde angulo totali iam facto, recta linea ſubtenſa: erit triangulum hoc, per propoſitionem 4, alij poſito æquale. Formetur nunc triangulum aliud, duas æquales rectas ſuis extremitatibus recta quadam linea coniungendo. Et quia triangulum, ex ſtructura, eſt Iſoſceles: erunt anguli ad baſim, ex priori parte propoſitionis quintæ, inter ſe æquales. Per additionem nunc & ſubtractionē angulorum qui his æqualibus angulis adhærent, cum ex decima nona ampliori angulo longius latus ſubtendatur, propoſitum tandem, ubi æqualis pro ęquali linea ſumitur, inferri poterit: Amplioris ſcilicet anguli in uno, baſim longiorem eſſe, quàm ſit baſis in altero triāgulo anguli anguſtioris, quod demonſtraſſe oportuit.



SEQVITVR FIGVRA PRO TRIANGVLIS TRIbus *expoſita, necnon ex tertio Euclidis libro deſumpta.*



APPENDIX.

Potuiſſet etiam econtrario, maior angulus, in ſtructura, & id per propoſitionem uigeſimam

uigeſimam tertiam præcedentem, ad æqualitatem minoris formari, & idem fuiſſet.

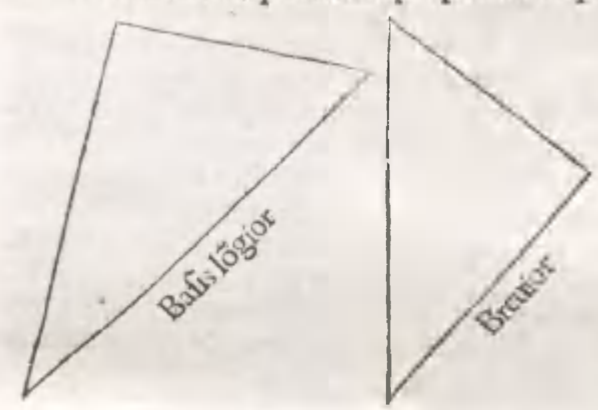
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΕ.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν βάσιν δὲ τῆς βάσεως μείζονα ἔχῃ· καὶ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἕξει, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.

PROPOSITIO XXV.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus ęqualia habuerint, utrũque utrique, habuerint uerò baſim baſi longiorem: & angulum angulo ampliorem habebunt, eum quem æquales rectæ lineæ comprehendunt.

Sint huiuſmodi, qualia hæc propoſitio requirit, duo triangula: dico, cuius trianguli baſis eſt longior, illius etiam angulum, quem æquales rectæ comprehendunt, ampliorem eſſe. Nam æquales ne ſint anguli, uetat hoc propoſitio 4, cum ſic & baſes, per eam, contra hypotheſim, inter ſe æquales eſſe deberent. Ampliorē deinde poſitū anguſtiore minorem, uel contrà, Anguſtiorem poſitum ampliore eſſe maiorem, per propoſitionē præcedentē nō admittitur. Quare ampliorē poſitum in uno, propter longiorē baſim, illo in triangulo altero, cuius eſt baſis breuior, ampliorem eſſe neceſſe eſt, quod demonſtrari oportuit.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚϚ.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, ἤτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν· καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ,

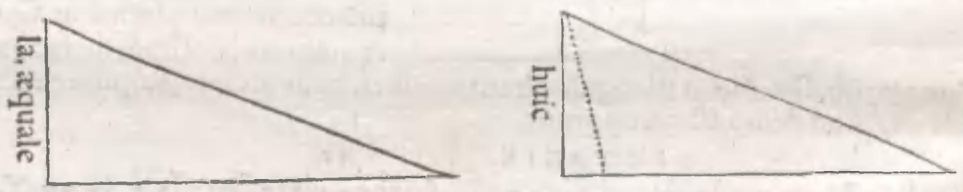
PROPOSITIO XXVI.

Si duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, utrunq; utriq;, unũq; latus uni lateri æquale, ſiue id quod eſt inter ęquales illos angulos, ſeu quod uni ęqualium angulorum ſubtenditur: & reliqua latera reliquis lateribus æqualia, utrunq; utriq;, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.

Sint huiuſmodi, qualia hæc propoſitio requirit, duo triangula, ubi ſcilicet duo

anguli unius, duobus angulis alterius ſint æquales, latus item unius unũ, lateri uni alterius

alterius trianguli,ſiue id quod ęqualibus angulis interijcitur, ſiue reliquorum alterum fuerit,æquale: dico quòd & reliqua latera reliquis lateribus, utrunq; utriq;, atque etiã reliquus angulus reliquo angulo æqualis ſit. Quantũ ad primum,ubi ſcilicet ęquale latus ęqualibus angulis interiectum eſt, ſi alterutrum ex reliquis non concedatur ſuo correſpondenti lateri in altero triangulo eſſe ęquale, ut ei inęquale ſit,certe concedendum erit.à longiori igitur (ut quidem ſuo modo fieri poterit) ex parte reliqui tertij anguli,per propoſitionem tertiam,portio, breuiori lateri ęqualis,abſcindatur: & à puncto tãdem ſectionis ad angulum cui hoc latus ſubtenſum eſt,linea recta ducatur. Deſcribitur autem ſic triangulum quoddam partiale aliud, quod, quia ſuo totali triangulo ſuperponitur,per propoſitionẽ deinde quartã, alij poſito triangulo ęquale eſt,infertur tandem per illam communem noticiam,Quæ uni ęqualia &cę. partialẽ angulum ſuo totali,uel contrà,totalẽ ſuo partiali angulo eſſe ęqualem, quod eſt impoſſibile.Alterum igitur reliquum latus in uno,alteri reliquo lateri in triangulo altero æquale eſt. Quoniam autem iam duo ſunt quartæ propoſitionis triangula,cum tertium latus,per hanc quartam,tertio ęquale ſit:reliqua duo latera reliquis duobus lateribus, utrunq; utriq;,ut infertur, ęqualia erunt. Quantum ad ſecundum,ubi ęquale latus uni ęqualium angulorum ſubtenditur: & hic reliqua duo latera & angulus in uno,reliquis duobus lateribus & angulo in triangulo altero ęqualia eſſe colligetur. Quod ſi concedatur, non erit opus ullam demonſtrationem adducere.Sin minus, erit alterutrũ è duobus in uno,ſuo correſpõdenti latere in altero triangulo lõgius:quod & ipſum,ſicut in priori parte huius factũ,ad ęqualitatem alterius ſi ponatur,atq; deinde triangulũ formetur, contra propoſitionem decimam ſextam,quarta tamen prius uſurpata, angulũ externum ſuo



interno oppoſito æqualẽ eſſe, ei qui hoc contradicit, obijciet. Quare qua ſanè ratione,quantũ ad latera,cõtrariũ quis inferre tentauerit,irridendũ ſe exponet. Quòd preterea & angulus reliquus reliquo angulo ſit ęqualis,id ex propoſitione 4 uel 8 habetur. Si igitur duo triangula duos angulos duobus angulis ęquales habuerint, utrunq; utriq;, unumq; latus, uni lateri, & reliqua, quod demonſtraſſe oportuit.

ADMONITIO.

Neceſſe autem uidetur, ut primò quidem ea,quæ inter æquales angulos poſita ſunt,latera,ęqualia inter ſe eſſe, atq; tum demum reliquorum duorum laterum,angulos nimirum ęquales ſubtendentium,æqualitas demonſtretur. Nam aliàs, ſi fortè hæc quæ ęquales angulos ſubtendunt latera,primò æqualia inter ſe eſſe demonſtrare quis conaretur,res fortè tardius ſucceſſura eſſet: id quòd obiter duxi indicandum. Idem ferè uſuuenit in propoſitione ſeptima libri ſexti, ubi non duorum reliquorum, hoc eſt tertiorum in triangulis angulorum, uerùm eorum qui inter proportionalia latera poſiti ſunt,angulorum æqualitas,primò demonſtranda eſt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΖ.

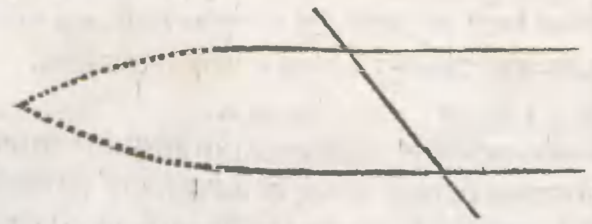
Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα, τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ· παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

PROPOSITIO XXVII.

Si in duas rectas recta linea incidens,alternatim angulos æquales inter ſe fecerit: parallelæ erunt inter ſe ipſæ rectæ lineæ.

Cadat

Cadat in duas rectas recta linea alia, eſto etiam quòd anguli qui ſic fiũt alternatim, ſint inter ſe ęquales: dico has duas rectas inter ſe parallelas eſſe. Nam ſi non:



productæ hę et continuatæ,in aliqua parte concurrent, unde ſic angulus externus formati trianguli, per propoſitionẽ 16, interno oppoſito æqualis. Hoc autem quia eſt cõtra propoſitionis hypotheſim,non concurrũt ergo. Quę autem in eodem plano exiſtentes rectæ lineæ,in neutra parte concurrunt,ſi eiectæ & continuatæ fuerint,cum,ex definitione, parallelæ ſint: parallelæ ſunt & iſtæ ductę. Si in duas igitur rectas recta linea incidens alternatim angulos ęquales inter ſe fecerit: parallelæ erunt inter ſe ipſæ rectę lineæ: quòd demonſtraſſe oportuit.

DEFINITIO ANGVLORVM ἘΝΑΛΛΆΞ.

Porro anguli ἐναλλὰξ poſiti, quos Alternatim uertimus,ſunt,quos incidens recta cum rectis datis interius,in diuerſis partibus, atq; ex oppoſito conſtituit & cõprehendit.

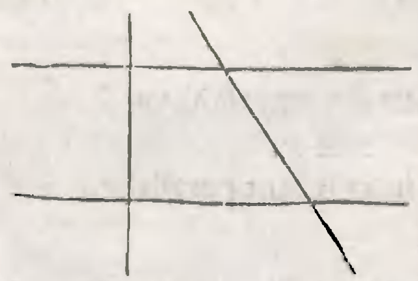
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΗ.

Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα, τὴν ἐκτὸς γωνίαν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιῇ, ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας· παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

PROPOSITIO XXVIII.

Si in duas rectas recta linea incidens,externum angulũ interno & oppoſito, & ad eaſdem partes æqualem fecerit, aut internos & ad eaſdem partes duobus rectis æquales: parallelæ erunt inter ſe ipſæ rectæ lineæ.

Habet hęc propoſitio duas partes,quarum utraq; ex ſua propria hypotheſi, duas illas lineas,in quas nimirum tertia cadit, parallelas eſſe infert. Prior autem patet ex pręcedenti,angulis,qui per propoſitionem 15 inter ſe ſunt ęquales,inter ſe mutatis. Poſterioris nunc demonſtratio ſic habetur. Quoniã enim recta rectę inſiſtens alij,et angulos faciens,ex propoſitione 13 aut duos rectos,aut duobus rectis ęquales angulos facit, & quoniam etiam, ex pręſenti hypotheſi, interni illi qui ad eaſdem partes ſunt anguli,duobus rectis ęquales ſunt, cũ tã illi duo, quos nimirum incidens cum alterutra rectarũ facit,quàm etiam hi, qui interius ex una & eadẽ parte appareãt anguli, duobus rectis,tanquã uni cuidam ęquales ſint: ex cõmuni quadã noticia, & illi duo his duobus angulis ęquales erũt: atq; de utroque deinde, eo angulo,quem hęc duo ęqualia cõmunem habent,ſubtracto: & qui relinquuntur anguli,ex communi quadam noticia, inter ſe ęquales erunt. Quia autem reliqui hi aut ἐναλλὰξ anguli ſunt,aut uerò ad eaſdem partes unus externus & alter internus oppoſitus, ſi ἐναλλὰξ fuerint: ex præcedenti 27: ſi uerò unus externus,alter internus, ex priore parte propoſitionis huius,tandem concluditur propoſitum,has ſcilicet rectas, in quas alia eo modo,ut dictum eſt, cadit, parallelas eſſe. Si igitur in duas rectas recta linea incidens, externum angulum interno, & oppoſito, & ad eaſdem partes æqualem fecerit: aut internos & ad eaſdem partes, duobus rectis ęquales: parallelæ erunt inter ſe hæ duæ rectæ lineæ, quod demonſtraſſe oportuit.



O ΠΡΟΤΑΣΙΣ

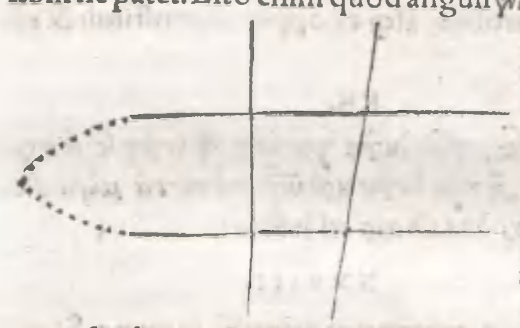
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΘ.

Ἡ εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα· τάς τε ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ· καὶ τὴν ἐκτὸς τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην· καὶ τὰς ἐντὸς, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας.

PROPOSITIO XXIX.

In parallelas rectas recta linea incidens: et alternatim angulos inter se æquales efficit: & externum interno & opposito, & ad easdem partes æqualem: & internos, & ad easdem partes, duobus rectis æquales facit.

Sunt huius propositionis partes tres, quarum singulæ parallelas rectas lineas, & rectam deinde aliam, quę in illas parallelas utcunque cadat, requirunt. Hinc itaque prima quidem pars, angulos alternatim positos æquales: secunda uerò, externum interno, & opposito atque ad easdem partes, æqualem: tertia autem, ipsos internos ad easdem partes, duobus rectis angulis ęquales esse asserit. Prima pars ab impossibili sic patet. Esto enim quòd anguli ἐναλλὰξ sint inter se inæquales. Et quoniam inęquales sunt anguli ἐναλλὰξ, alter nimirum altero amplior, angulo igitur eo qui amplior est ἐφεξῆς, ex æquo inæqualibus illis angulis addito: & ipsa tota, ex cõmuni quadam noticia, inter se æqualia erunt. Quia autem unũ eorum, maius scilicet, per propositionem 13, duobus rectis est æqualis, alterum quod minus est, duobus rectis angulis minus erit: ex illa igitur parte ubi minores duobus rectis sunt anguli, hæ duæ rectæ, ex communi quadam noticia concurrent. Non concurrunt autem, cum sint ex hypothesi, rectæ parallelæ: neque anguli etiam illi ἐναλλὰξ inęquales inter se erunt: æquales igitur eos esse, ut prima pars asserit, concedendum est. Quo nunc concesso, cum per propositionem 15 ad uerticem anguli sint inter se æquales, ęquali nunc pro ęquali angulo sumpto, uel illa cõmuni noticia, Quæ eidem æqualia, & inter se ęqualia sunt: etiam angulus externus interno opposito, atque in eadem parte sumpto, ęqualis erit, quod est secundũ. Non aliter per propositionem 13, & hic æquali pro ęquali angulo sumpto, tertię propositionis parti satisfieri poterit. In parallelas igitur rectas recta linea incidens, & quę sequuntur, quod demonstrasse oportuit.



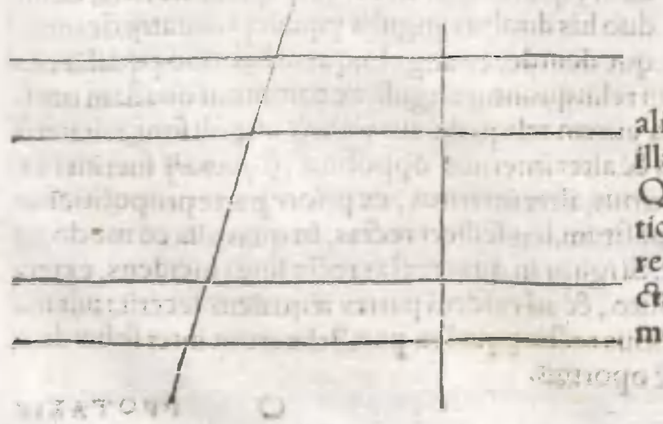
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Λ.

Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι· καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι.

PROPOSITIO XXX.

Quæ eidem rectæ lineæ parallelæ: & inter se sunt parallelæ.

Sint duæ uel plures rectæ uni alicui rectæ lineæ parallelæ: dico, illas & inter se parallelas esse. Quod quidem facile, ex propositionibus 29 & 27, uel 29 & 28, si recta prius alia in propositas rectas lineas utcunque inciderit, demonstrari potest.



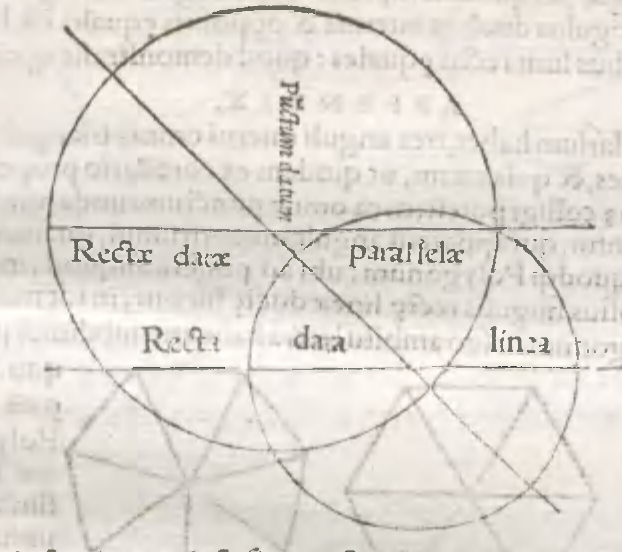
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΑ.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

PROPOSITIO XXXI.

A dato puncto, datæ rectæ lineæ: parallelam rectam lineam ducere.

Sit punctum datum, recta etiam linea data, atque propositum, à dato puncto educere rectam lineam, datæ rectæ parallelam. Signetur igitur in recta data punctum ubicunque, à quo deinde ad punctum datum, recta quadam linea ducta, ad hanc lineam atque ad punctum datum, angulorum modo descriptorum uni, uter is fuerit & eligatur, per propositionem 23, angulus æqualis constituatur. Quòd si tandem hæc ultimò ducta recta linea, uersus alteram partem in rectum, prout quidem hoc propositio 14 requirit, continuata fuerit: propositioni satisfactũ erit, cum hæc quæ iam ducta est linea, ipsa sit quæ quærebatur.



Demonstratio sumitur ex ipsa figuræ structura, si anguli, inter se ęquales facti, ἐναλλὰξ positi esse considerentur, id quod admonuisse oportuit.

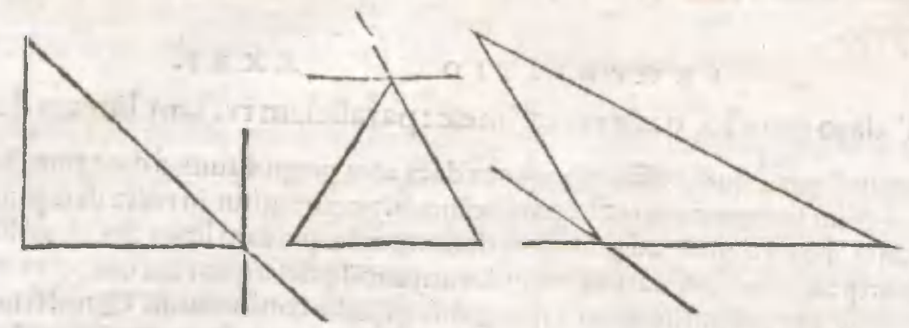
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΒ.

Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης, ἡ ἐκτὸς γωνία δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστί· Καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

PROPOSITIO XXXII.

Omnis trianguli uno latere producto: externus angulus duobus internis & oppositis æqualis est. Et trianguli tres interni anguli, duobus sunt rectis æquales.

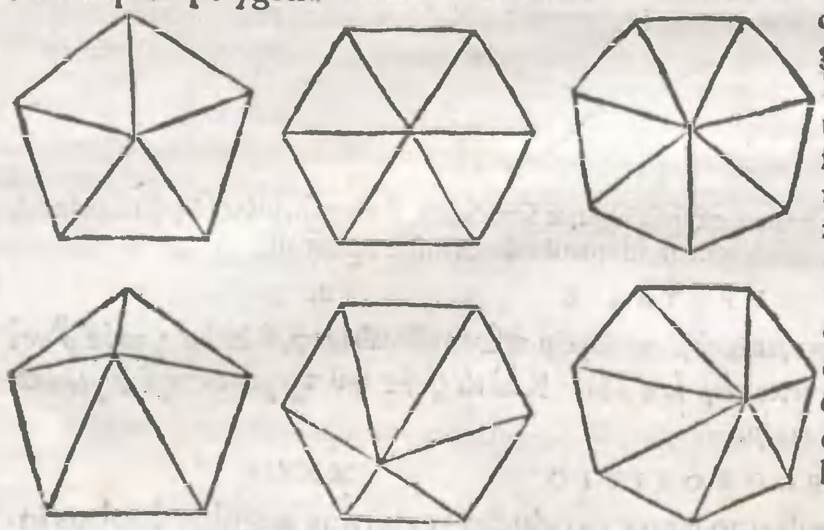
Sit triangulum, productum etiam ulterius unum eius latus: dico, quòd angulus qui sic fit externus, duobus internis & oppositis angulis ęqualis sit. Et quod etiam ratione corollarij, ex hac ipsa & tredecima propositione desumpti, Trianguli tres anguli interni, duobus rectis æquales sint. Ducatur per angulum externum linea, trianguli tertio lateri parallela. Et quoniam in parallelas rectas lineas recta incidens, tam alternatim positos angulos, ex prima parte propositionis 29, inter se æquales, quàm etiam externum interno opposito, atque in eadem parte constituto æqualem facit, ex secunda parte propositionis eiusdem, cum æqualia æqualibus additis, tota etiam, ex communi quadam noticia, inter se æqualia sint: ipsi propositio-



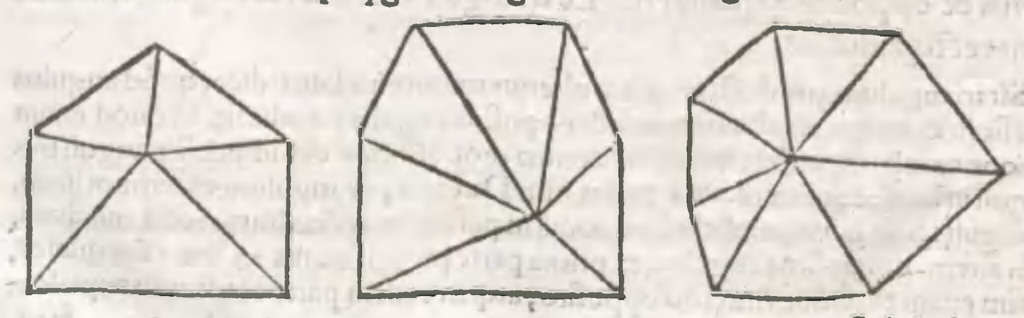
ni iam satisfactum erit. Corollarij uerò demonstratio, ex hac ipsa, & propositione præcedenti 13, unde nimirum illud desumptū est, intelligi potest, si interim ad horum duorum ęqualium utrunq;, tertium angulum interiorem reliquum, qui nimirum est externo ἐφεξῆς, aliquis assumpserit. Omnis igitur trianguli uno latere producto: externus angulus duobus internis & oppositis ęqualis est. Et trianguli tres interni anguli, duobus sunt rectis ęquales: quod demonstrasse oportuit.

APPENDIX.

Et quia, ut corollarium habet, tres anguli interni omnis trianguli, duobus rectis angulis sunt æquales, & quia etiam, ut quidem ex corollario propositionis 15, uel ipsa propositione 13 colligi potest, circa omne punctum, unde nimirum rectæ aliquot lineę egrediuntur, qui apparent anguli, uniuersi simul, quatuor rectis sunt æquales, cum unumquodq; Polygonum, ubi ad punctū aliquod, in ea ubiuis sumptum, ab angulis ipsius singulis rectę lineæ ductę fuerint, in tot triangula quot nimirum ipsum polygonum in suo ambitu latera habuerit, subdiuidi posit, sequitur, quòd omnes anguli uniuscuiusq; Polygoni simul, tot rectis angulis sint æquales, quot unitates habuerit numerus, quē quidē duplum laterū eorū, demptis inde quatuor, indicat. Hoc aūt ex sequentibus figuris et cernere & intelligere licebit.

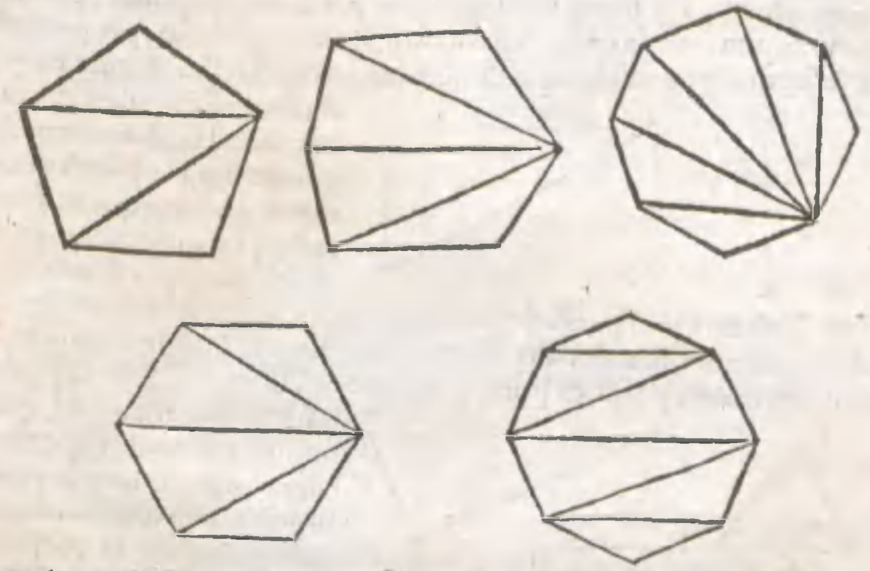


Idem in polygonis irregularibus intelligendum.



Subdiuiduntur

Subdiuiduntur etiam polygona in sua triangula, ubi ab uno propositi polygoni angulo ad omnes reliquos, præter eos quos à latere habet, angulos rectæ lineæ ductæ fuerint. Vel alio quodam modo, pro alicuius industria, in sua triangula subdiuidi polygona possunt. Primus tamen modus, cum ex demonstratione procedat, reliquis preferendus erit.



Atque hæc, de Polygonorum in sua triangula diuisione dicta, sufficiant.

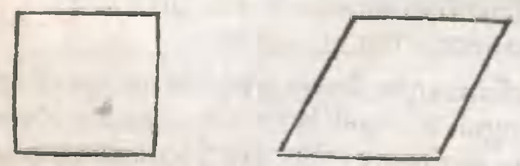
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΓ.

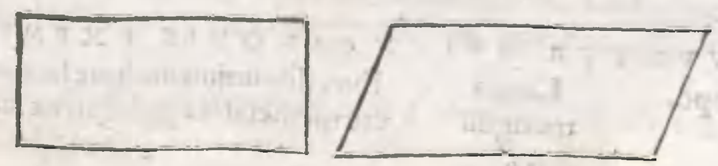
Αἱ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι· καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοι εἰσίν.

PROPOSITIO XXXIII.

Aequales & parallelas ad easdem partes rectæ lineæ coniungentes: & ipsæ æquales & parallelæ sunt.

Sint æquales & parallelæ rectę duę lineę, suis etiam extremitatibus utrinq; duabus rectis lineis alijs coniunctę: dico, quòd et ipsę rectę lineæ alię, ęquales inter se et parallelę sint. Ducta enim in figura diametro, cum ex prima parte propositionis 29, anguli alternatim positi sint inter se ęquales: quòd & coniungentes rectę inter se ęquales sint, ex propositiōe 4 intelligi poterit. Quòd uerò eędem rectę sint etiā parallelę, cum ex allegata propositione 4, anguli qui alternatim ponuntur, inter se ęquales sint: et id tandē, ex propositione 27, manifestabitur. Aequales igitur & parallelas ad easdem partes rectę lineę coniungentes, & ipsę ęquales & parallelę sunt: quod demonstrari oportuit.





ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΔ.

Τῶν παραλληλογράμμων χωρίων· καὶ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει.

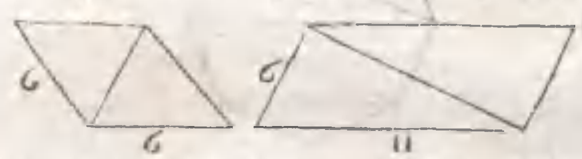
O 3 PROPOSITIO

PROPOSITIO XXXIIII.

Parallelogrammorum locorum. & latera & anguli opposita, æqualia inter se sunt. Et diameter ea bifariam secat.

Parallelogrammum, ut uocabuli ἔτυμον indicat, est figura, sub parallelis rectis lineis comprehensa. Fit autem seu describitur parallelogrammum, per ductam rectam lineam, punctumq; extra eã sumptum, si ex hoc puncto, per propositionem 31 & 3, rectę ductę parallela æqualis ducatur, utriusq; rectæ deinde extremitates, duabus rectis lineis iungantur: & erit, quod sic describitur, parallelogrammum, propterea quod posteriores ductæ, ęquè ut priores duæ rectæ, ex propositione 33 præcedenti, parallelæ & inter se ęquales lineæ sint.

Talium igitur parallelogrammorum locorum, seu talium figurarum, & latera & anguli opposita, æqualia inter se sunt. Ducatur in figura diameter. Et quoniã anguli alternatim positi, ex prima parte propositionis 29, inter se ęquales sunt, unde sic duo triangula, qualia propositio 26 requirit, apparent, quòd latera opposita inter se ęqualia sint, angulus item unus suo opposito ęqualis, per hanc 26 propositionem inferri potest.



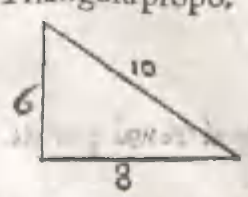
Et rursus quoniam, Si ęqualibus æqualia adijciãtur, ex cõmuni quadam noticia, ipsa tota ęqualia sunt: huius sententiæ memor, alterum etiam suo opposito angulo ęqualem esse, facile concedet. Patet itaq; prior propositionis pars. Posterior nunc, quòd scilicet diameter ipsum parallelogrammum bifariam secet, si quis suspicetur id nondum esse demonstratum, per propositionẽ quartam id deprehendet. Parallelogrammorum igitur locorum & latera & anguli opposita, æqualia inter se sunt. Et diameter ea bifariam secat, quod demonstrari oportuit.

APPENDIX.

Quoniam autem hęc propositio 34, & multę etiam sequentes, in numeris, quantitate nimirum discreta, non minus atq; in quantitate continua, ueræ esse reperiuntur, quo id ostendamus commodius, canonem quendam generalem, per quẽ omnis generis triangulorum (modo latera eorum nota fuerint) areæ inueniri possent, subijcere necesse fuit, his uerbis.

Trianguli, cuius aream propositum est inuenire, latera primò in unum colligãtur, à medietate deinde huius collecti singula trianguli latera subtrahantur. Relinquuntur autem tres numeri, qui unà cum medietate collecti ex lateribus, tanquam numero quarto, si inter se multiplicati fuerint, primus scilicet cum secundo, productum hoc cum tertio, quodq; iam producetur cum numero quarto (nec refert quo ordine numeri sumantur, qui ue pro primo, secundo, tertio uel quarto reputetur) tũ huius ultimi producti radice quadrata, quanta propositi trianguli area fuerit, manifestabitur.

SEQVVNTVR HVIVS CANONIS EXEMPLA.

Triangulũ propo.	Latera trianguli		Excessus uniuscuiusque lateris respectu medietatis, aggregati ex lateribus.
	10		2
	8		4
	6		6
	24	laterum summa,	Quatuor numeri
	12	laterum mediet.	2 4 6 12

Instituantur

Instituantur nunc multiplicationes.

prima		secunda		tertia	
12		6		24	
2		4		24	
24	primum	24	secun.	576	ultimũ productũ

Quadra. 5 7 6 (4) (Radix 24. Tanta igitur est trianguli, cuius latera sunt 10 8 6, area.

EXEMPLVM IN IRRATIONALIBVS.

Latera	Excessus
$\sqrt{180}$	$9 - \sqrt{45}$
12	$\sqrt{45} - 3$
6	$\sqrt{45} + 3$
Sum. $18 + \sqrt{180}$	Medietas $9 + \sqrt{45}$

Quatuor numeri.

$9 - \sqrt{45}$ $\sqrt{45} - 3$ $\sqrt{45} + 3$ $9 + \sqrt{45}$

36 primum 36 secundum productum

Tertiò multiplicentur 36
cum 36
producuntur 1296, cuius radix
quadrata 36. area est trianguli.

ABBREVIATIO CANONIS PER COMPENDIVM.

Cum tertiæ multiplicationis numeri, qui nimirum ex prima & secunda multiplicatione proueniunt, inter se fuerint æquales, id quod sæpe contingit, in his item duobus exemplis euidens est, eadem tertia multiplicatio negligitur, nec etiã extractione radicis quadratæ tum opus erit. Verùm statim per alterutrum productorum, primum uel secundum, trianguli area indicabitur.

EXEMPLVM CANONIS ALIVD.

Est autem in hac 34 propositione triangulum figuræ primæ.

Latera	Excessus
$\sqrt{72}$	$6 - \sqrt{18}$
6	$\sqrt{18}$
6	$\sqrt{18}$
Sum. $12 + \sqrt{72}$	Meditas $6 + \sqrt{18}$.

Primum productum sunt 18, secundum tantundem, tertium deinde 324. huius postea radix 18, area est trianguli, atq; medietas etiam parallelogrammi uel figurę primæ, quod hoc canone ostendere oportuit.

Potuisset ex cõpendio iam præscripto, tertia multiplicatio negligi, ac statim per 18 uel 18, primum scilicet uel secundum productum, quæstioni responderi, quod idem fuisset.

SEQVITVR TRIANGVLVM FIGVRAE SECVNDAE.

Latera	Excessus
$\sqrt{157}$	$\frac{17}{2} - \sqrt{\frac{157}{4}}$
11	$\sqrt{\frac{157}{4}} - \frac{5}{2}$
6	$\sqrt{\frac{157}{4}} + \frac{5}{2}$
Sum. $17 + \sqrt{157}$	Meditas $\frac{17}{2} + \sqrt{\frac{157}{4}}$

Quatuor

Quatuor numeri.

33 primum

$\frac{17}{2} - \sqrt{\frac{157}{4}}$ $\sqrt{\frac{157}{4}} - \frac{9}{2}$ $\sqrt{\frac{157}{4}} + \frac{5}{2}$ $\frac{17}{2} + \sqrt{\frac{157}{4}}$

33 ſecundum productum

Et quia tertiæ multiplicationis numeri inter ſe æquales ſunt, ideo ea omittitur, nec etiam, extractione radicis quadratæ, ut ſuperius dictū eſt, opus erit. Trianguli igiť propoſiti, hoc eſt parallelogrammi medietas, area, ſunt 33, quę erat inueniēda.

SEQVITVR TRIANGVLVM FIGVRAE TERTIAE.

Latera

6

6

$\sqrt{60} - \sqrt{12}$

Sum. 12 plus $\sqrt{60} - \sqrt{12}$

Exceſſus

$\sqrt{15} - \sqrt{3}$

$\sqrt{15} - \sqrt{3}$

6 minus $\sqrt{15} - \sqrt{3}$

Meditas 6 plus $\sqrt{15} - \sqrt{3}$

Quatuor numeri.

$\sqrt{15} - \sqrt{3}$ $\sqrt{15} - 3$ 6 minus $\sqrt{15} - \sqrt{3}$ 6 plus $\sqrt{15} - \sqrt{3}$

Primum $18 - \sqrt{180}$ ſecundum 36 minus $18 - \sqrt{180}$

Tertium productum 144. Atq; huius nunc radix quadrata, nimirum 12, area eſt trianguli.

SEQVITVR TRIANGVLVM FIGVRAE QVARTAE.

Latera

radix qua. reſidui $157 - \sqrt{9680}$

11

6

17 plus ra. qua. re. $157 - \sqrt{9680}$

Exceſſus

$8\frac{1}{2}$ minus ra. qua. re. $39\frac{1}{4} - \sqrt{605}$

ra. qua. re. $39\frac{1}{4} - \sqrt{605}$ minus $2\frac{1}{2}$

ra. qua. re. $39\frac{1}{4} - \sqrt{605}$ plus $2\frac{1}{2}$

Me. $8\frac{1}{2}$ plus ra. qua. re. $39\frac{1}{4} - \sqrt{605}$

Inſtituantur nunc multiplicationes.

Prima.

Radix qua. reſidui $39\frac{1}{4}$ $\sqrt{605}$ plus $2\frac{1}{2}$

Radix qua. reſidui $39\frac{1}{4} - \sqrt{605}$ minus $2\frac{1}{2}$

producuntur $39\frac{1}{4} - \sqrt{605}$ minus $6\frac{1}{4}$.

Secunda.

$8\frac{1}{2}$ plus radix qua. reſidui $39\frac{1}{4} - \sqrt{605}$

$8\frac{1}{2}$ minus radix qua. reſidui $39\frac{1}{4} - \sqrt{605}$

producuntur $72\frac{1}{4}$ minus $39\frac{1}{4} - \sqrt{605}$.

Tertia.

$39\frac{1}{4} - \sqrt{605}$ minus $6\frac{1}{4}$

$72\frac{1}{4}$ minus $39\frac{1}{4} - \sqrt{605}$

$2835\frac{13}{16} - \sqrt{\frac{50530205}{16}}$ item $245\frac{5}{16} - \sqrt{\frac{378125}{16}}$

minus $2145\frac{9}{16} - \sqrt{\frac{59650580}{16}}$

minus $451\frac{9}{16}$

Summa productorum.

plus $3081\frac{1}{8} - \sqrt{\frac{50650580}{16}}$

minus $2597\frac{1}{8} - \sqrt{\frac{50650580}{16}}$.

Facta ſubtractione, manent 484, cuius radix, 22, area eſt trianguli.

Vel,

Vel, quæſitis productis, primo ſcilicet & ſecundo, calculo exquiſitiore, ueniūt

$33 - \sqrt{605}$ primum

$\sqrt{605} - 33$ ſecundum.

Quibus nunc inter ſe multiplicatis, producuntur 484, ut prius: cuius etiam radix, ut prius, 22, trianguli aream repreſentabit.

SIMILE EXEMPLVM PER RATIONALES, PERinde ac ſi irrationales eſſent numeri, expoſitum.

Latera.

6

Radix qua. lineæ ex binis nominib. $40 + \sqrt{576}$, hoc eſt. 8,

10

Exceſſus.

Radix quadrata binomij $10 + \sqrt{36}$ plus, 2 hoc eſt 6

8, minus radix, qua. binomij $10 + \sqrt{36}$ hoc eſt. 4.

Radix quadrata binomij $10 + \sqrt{36}$ minus, 2 hoc eſt 2.

Med. 8, plus radix qua. binomij $10 + \sqrt{36}$ hoc eſt, 12.

Inſtituantur multiplicationes.

Prima.

Radix qua. binomij $10 + \sqrt{36}$, plus 2, hoc eſt 6

Radix qua. binomij $10 + \sqrt{36}$, minus 2, hoc eſt 2

producuntur $10 + \sqrt{36}$ minus 4, hoc eſt 12.

Secunda.

8, minus radix qua. binomij $10 + \sqrt{36}$. hoc eſt, 4.

8, plus radix qua. binomij $10 + \sqrt{36}$. hoc eſt, 12.

64 minus $10 + \sqrt{36}$, hoc eſt 48.

Cruciformes multiplicationes, cum æquales ſint numeri, negliguntur. Productorum igitur ſumma in utraque multiplicatione, ut apparet.

Tertia multiplicatio.

$10 + \sqrt{36}$ minus 4 hoc eſt, 12.

64 minus $10 + \sqrt{36}$ hoc eſt, 48.

$640 + \sqrt{147456}$ item $40 + \sqrt{576}$

minus $136 + \sqrt{14400}$

minus 256

pro. $680 + \sqrt{166464}$, minus $392 + \sqrt{14400}$

Hoc eſt,

$288 + \sqrt{82944}$, uel 576 ultimum productum.

Huius itaq; radix quadrata, nimirū 24, area eſt trianguli.

EST ET ALIVD TERTIAE FIGVRAE TRIANGVlum, ratione diametri longioris conſideratum, atq; huius quidem

latera ſunt 6, 6, $\sqrt{60} + \sqrt{12}$

P Laterum

Laterum ſumma 12, plus $\sqrt{60} - \sqrt{12}$

Exceſſus igitur, atq; deinceps quatuor numeri,

$\sqrt{15} + \sqrt{3}$ $\quad \sqrt{15} + \sqrt{3}$ $\quad$ 6 minus $\sqrt{15} + \sqrt{3}$ $\quad$ 6 plus $\sqrt{15} + \sqrt{3}$

Primum ſecundum productum

$18 + \sqrt{180}$ $\quad$ 36 minus $18 + \sqrt{180}$.

Tertium productum.

$648 + \sqrt{233280}$ minus $504 + \sqrt{233280}$

hoc eſt, 144. Area igitur trianguli 12, ut prius.

ALIVD ITEM TRIANGVLVM FIGVRAE
quartæ, cuius quidem

Latera ſunt	Exceſſus igitur
Ra.qua.bi. $157 + \sqrt{9680}$	$8\frac{1}{2}$ minus ra.qua.bi. $39\frac{1}{4} + \sqrt{605}$
11	ra.qua.bi. $39\frac{1}{4} + \sqrt{605}$ minus $2\frac{1}{2}$
6	ra.qua.bi. $39\frac{1}{4} + \sqrt{605}$ plus $2\frac{1}{2}$
17 plus ra.qua.bi. $157 + \sqrt{9680}$	$8\frac{1}{2}$ plus ra. qua. bi. $39\frac{1}{4} + \sqrt{605}$

Producta,

primum	ſecundum
$72\frac{1}{4}$ minus $39\frac{1}{4} + \sqrt{605}$	$39\frac{1}{4} + \sqrt{605}$ minus $6\frac{1}{4}$

Inuentio producti tertij.

$72\frac{1}{4}$ minus $39\frac{1}{4} + \sqrt{605}$

$39\frac{1}{4} + \sqrt{605}$ minus $6\frac{1}{4}$

$2835\frac{13}{16} + \sqrt{\frac{50530205}{16}}$ item $245\frac{5}{16} + \sqrt{\frac{378125}{16}}$

minus $451\frac{9}{16}$

minus $2145\frac{9}{16} + \sqrt{\frac{59650580}{16}}$

Summa productorum.

plus $3081\frac{1}{8} + \sqrt{\frac{59650580}{16}}$

minus $2597\frac{1}{8} + \sqrt{\frac{59650580}{16}}$.

Hoc eſt, facta ſubtractione, 484.

Huius nunc tertij producti radix quadrata, nimirum 22, area eſt trianguli. Atq; hactenus dicta de triangulorum areis inueſtigandis ſufficiant. Sequitur

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΕ.

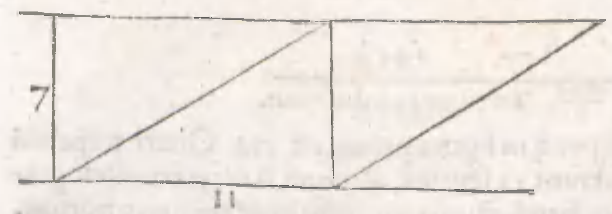
Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις· ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

PROPOSITIO XXXV.

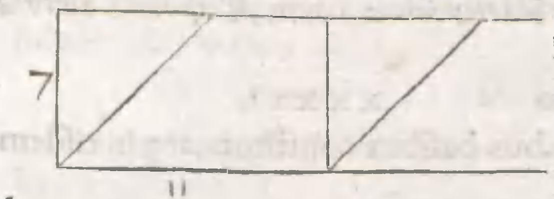
Parallelogramma ſuper eadem baſi conſtituta, atq; in eiſdem parallelis: æqualia inter ſe ſunt.

Poteſt huius propoſitionis figura geometrica tripliciter uariari. Aut enim parallelogrāmis ſuper una & eadem baſi, inter eaſdem item parallelas poſitis, alterum unius latus eſt diameter alterius, aut ea breuius, aut longius. Si primum, cum ex corollario propoſitionis præcedentis, Omne parallelogrammū à ſua ipſius diametro bifariam

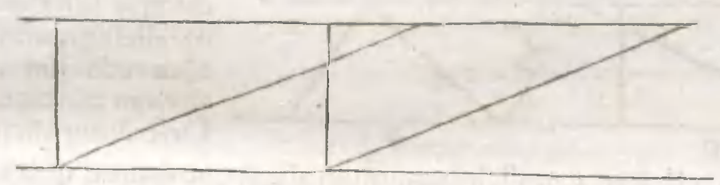
bifariam ſecetur, cumq; etiam ex cōmuni quadam noticia, Eiuſdem duplicia, inter ſe æqualia ſint, hoc quod propoſitio concludit, iam manifeſtum erit. Quòd ſi fuerit



ea breuius, cum parallelogrammorum locorum latera oppoſita inter ſe ęqualia ſint, hoc ipſo uſurpato bis: duo duorū parallelogrāmorum latera, ex communi quadam noticia, inter ſe æqualia exiſtent: deinde uerò communi portione ab illis æqualibus lateribus ſubtracta, & reſiduæ lineæ inter ſe æquales erūt. Sed quia illæ, ut quidem ſecunda pars propoſitionis 29, & ipſa propoſitio quarta



demonſtrant, ęqualium triangulorum latera ſunt, his ęqualibus triangulis cōmune trapezium ſi addatur: & producta, parallelogramma ſcilicet propoſita, inter parallelas & ſuper una eadeq; baſi conſtituta, per communem quādam noticiam, inter ſe æqualia erunt, quod demonſtraſſe oportuit. Si uerò alterum unius latus fuerit diametro alterius parallelogrammi longius, oportet ut media inter æquales lineas portio, ex ęquo illis æqualibus lineis addatur, quæ productæ, cū



et ipſę ęqualium triangulorum ſint latera, illis ęqualibus triangulis, primò id quod commune habent, ſubtrahi, reſiduis deinde trapezijs commune quoddam triangulum aliud addi oportet: & tum etiam ſecundum tertiæ figurę deſcriptionem, propoſitioni ſatisfactum erit. Quacunq; igitur ratione parallelogramma illa, (ſeruatis tamen hypotheſibus) deſcripta fuerint, propoſitio uera eſſe cognoſcetur. quod demonſtrari oportuit.

PER NVMEROS HAEC NVNC, VT PRAECEDENS, *tractari poteſt: id quod uno tantum exemplo indicabimus.*

Latera	Exceſſus
$\sqrt{533}$	$5\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{170}{4}} - \sqrt{\frac{533}{4}}$
$\sqrt{170}$	$5\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{170}{4}} + \sqrt{\frac{533}{4}}$
11	$\sqrt{\frac{533}{4}} + \sqrt{\frac{170}{4}} - 5\frac{1}{2}$
$\sqrt{533} + \sqrt{170} + 11$	Me. $\sqrt{\frac{533}{4}} + \sqrt{\frac{170}{4}} + 5\frac{1}{2}$

Inſtituantur multiplicationes.

prima	ſecunda
$5\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{170}{4}} - \sqrt{\frac{533}{4}}$	$\sqrt{\frac{533}{4}} + \sqrt{\frac{170}{4}} - 5\frac{1}{2}$
$5\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{170}{4}} + \sqrt{\frac{533}{4}}$	$\sqrt{\frac{533}{4}} + \sqrt{\frac{170}{4}} + 5\frac{1}{2}$
$30\frac{1}{4} - 42\frac{1}{2} - 133\frac{1}{4}$	$133\frac{1}{4} + 42\frac{1}{2} - 30\frac{1}{4}$
$+ \sqrt{\frac{90610}{4}}$	$+ \sqrt{\frac{90610}{4}}$
$\sqrt{\frac{90610}{4}} - 145\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{90610}{4}} + 145\frac{1}{2}$

 Tertia

Tertia multiplicatio.

$\sqrt{\frac{90610}{4}} + 145\frac{1}{2}$

$\sqrt{\frac{90610}{4}} - 145\frac{1}{2}$

producuntur $\frac{5929}{4}$, tertium productum.

Area igitur trianguli, ratione Trapezij in figura prima, eſt $38\frac{1}{2}$. Quare trapeziū integrum 77. Et quia tantū etiam faciunt 11 ſepties, alterum ſcilicet parallelogrāmum: & in numeris iam propoſitioni ſatisfactum erit, quod quidem fieri oportuit.

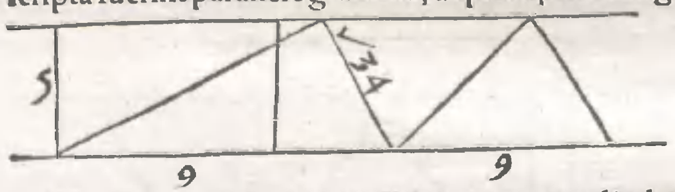
ΠΡΟΤΑΣΙΣ λϛ.

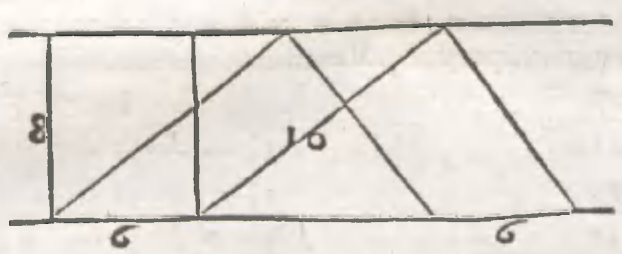
Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις· ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

PROPOSITIO XXXVI.

Parallelogramma ſuper æqualibus baſibus conſtituta, atq; in eiſdem parallelis: æqualia inter ſe ſunt.

Hæc propoſitio licet per ſe iam ſatis conſtare deberet, cum idem ſit æqualiū atq; earundem linearum intellectus, quo tamen dilucidius hęc appareat, poſtquam deſcripta fuerint parallelogramma, ut præcipitur, anguli ſuperiores duo unius, cum duobus inferioribus alterius parallelogrammi angulis, du abus rectis lineis, ſic ut altera alteram nō ſecet, copulentur. Deſcribitur aūt ſic, ut ex propoſitione 33 colligitur, parrallelogrammum aliud, quod nunc, quia cum utroque poſito, & inter lineas parallelas, & ſuper una atq; eadem baſi conſtitutum eſt: utrunq; poſitum huic deſcripto parallelogrammo alij, per propoſitionem præmiſſam, atq; illa tandem etiam inter ſe, per hanc communem noticiam, Quæ eidem æqualia, & inter ſe æqualia ſunt, æqualia eſſe oſtendūtur. Parallelogramma igit̄ ſuper ęqualibus baſibus & in eiſdem parallelis conſtituta: inter ſe ſunt æqualia, quod demonſtraſſe oportuit.





NVNC QVANTVM AD PRAXIM NVMERORVM.

Latera

13

9

$\sqrt{34}$

$22 + \sqrt{34}$

Exceſſus

$\sqrt{\frac{17}{2}} - 2$

$\sqrt{\frac{17}{2}} + 2$

$11 - \sqrt{\frac{7}{2}}$

$11 + \sqrt{\frac{17}{2}}$

primum	ſecun.	ter. pro.	Area trian.
$4\frac{1}{2}$	$112\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{2025}{4}}$	$22\frac{1}{2}$.

ALIVD

ALIVD TRIANGVLVM EX SECVNDA FIGVRA.

Latera

$\sqrt{208}$

10

6

$16 + \sqrt{208}$

Tertium pro. 576

Exceſſus

$8 - \sqrt{52}$

$\sqrt{52} - 2$

$\sqrt{52} + 2$

$8 + \sqrt{52}$

Area trianguli 24.

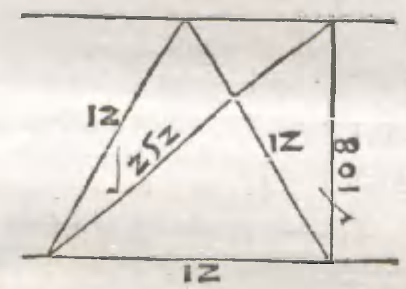
ΠΡΟΤΑΣΙΣ λζ.

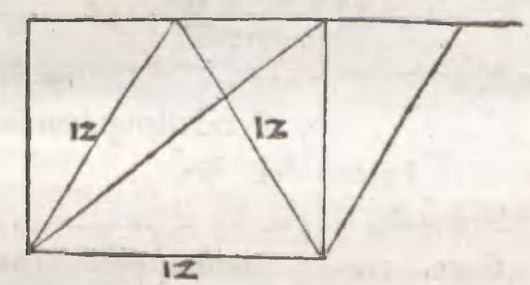
Τὰ τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις· ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

PROPOSITIO XXXVII.

Triangula ſuper eadem baſi cōſtituta, atq; in eiſdem parallelis: ęqualia inter ſe ſunt.

Sint inter lineas parallelas, ſuper una & eadem baſi conſtituta duo uel plura triangula: dico, illa inter ſe eſſe æqualia. Continuetur ea, quæ triangulorum uertices coniungit recta linea in utranq; partem, quantum ſatis fuerit, fiant etiam ex propoſitis triangulis parallelogramma, ducendo in unoquoq; triangulo, ab eius uno angulo, eorum qui ad baſim ſunt, lineam, lateri quod hunc eundem angulum ſub-





tendit, per propoſitionem 31, parallelam. Et quoniam deſcripta parallelogramma, cum ſuper eadem baſi, atq; in eiſdem parallelis conſtituta ſint, inter ſe æqualia eſſe, ex propoſitione 35 notum eſt. Et rurſus quoniam, quæ eiuſdem dimidia, ex communi quadam noticia æqualia inter ſe ſunt: deſcriptorum parallelogrammorum medietates, triangula ſcilicet poſita, inter ſe ęqualia erunt. Triangula igitur ſuper eadem baſi conſtituta, atq; in eiſdem parallelis: æqualia inter ſe ſunt, quod demonſtrari oportuit.

NVNC QVANTVM AD NVMERORVM PRAXIM.

Latera

12
12
12 } 6

Summa 36

Exceſſus

Medietas 18

Tertium productum 3888. Area $\sqrt{3888}$ uel $62\frac{4}{125}$ fere.

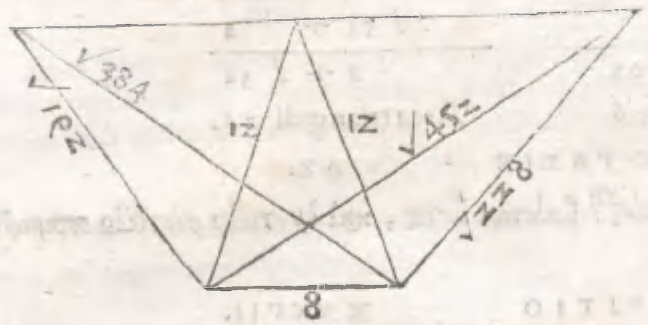
ALTERVM TRIANGVLVM HABET

Latera	$\sqrt{252}$	12	$\sqrt{108}$
Exceſ.	$\sqrt{27} + 6 - \sqrt{63}$	$\sqrt{27} - 6 + \sqrt{63}$	$\sqrt{63} + 6 - \sqrt{27}$

P 3 Summa

Summa lat. $\sqrt{252} + 12 + \sqrt{108}$		Med. $\sqrt{63} + 6 + \sqrt{27}$
Primum	ſecundum	ter. productum
$\sqrt{9072} - 72$	$\sqrt{9072} + 72$	3888 &cæ.

ALIA FIGVRA.



Habet hæc figura tria trian gula, quę, ut geometricè, ita et per numeros ſequēti calculo inter ſe equalia eſſe oſtenduntur.

Communis baſis.

Quantum igitur ad triangulum primum, cuius quidem

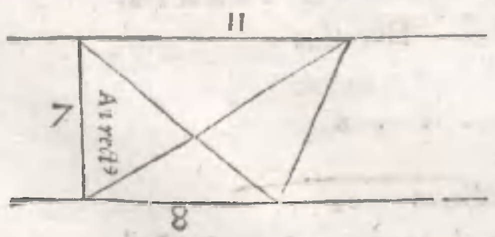
Latera ſunt	Exceſſus igitur
$\sqrt{384}$	$4 + \sqrt{48} - \sqrt{96}$
$\sqrt{192}$	$4 - \sqrt{48} + \sqrt{96}$
8	$\sqrt{96} + \sqrt{48} - 4$
$\sqrt{384} + \sqrt{192} + 8$	$\sqrt{96} + \sqrt{48} + 4$
Vltimum pro. 2048	Area trianguli $\sqrt{2048}$. uel $45\frac{23}{91}$ ferè.

Porrò triangulum ſecundum habet

Latera 12 12 8.		Exceſſus 4. 4 8.	
Summa lat. 32.	Medietas 16.	Primum productū 16.	
ſecun. 128,	tertium pro. 2048.	Area trian. $\sqrt{2048}$.	

Sequitur triangulum tertium, cuius quidem

Latera ſunt	Exceſſus igitur
$\sqrt{452}$	$4 + \sqrt{57} - \sqrt{113}$
$\sqrt{228}$	$4 - \sqrt{57} + \sqrt{113}$
8	$\sqrt{113} + \sqrt{57} - 4$
$\sqrt{452} + \sqrt{228} + 8$	$\sqrt{113} + \sqrt{57} + 4$
Vltimū pro. 2048.	Area trianguli ut ſuprà.



Area utriuſq; trianguli, ſunt 28. ęquales igitur inter ſe.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΗ.

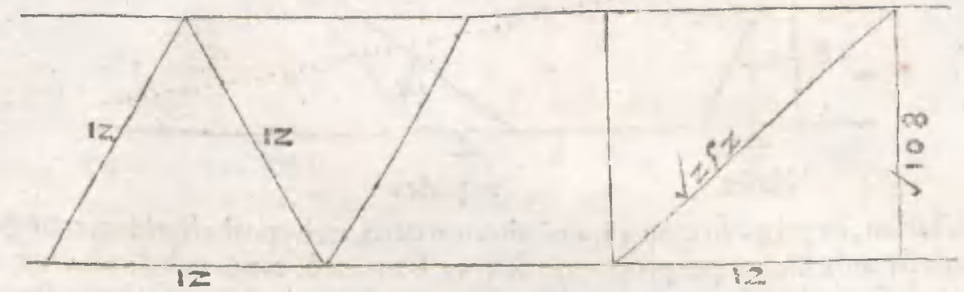
Τὰ τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις· ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν.

PROPOSITIO

PROPOSITIO XXXVIII.

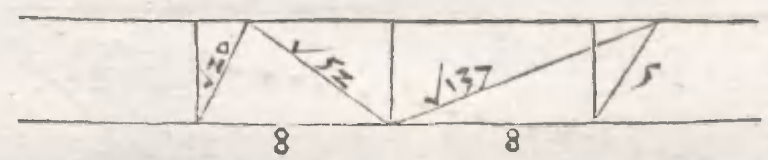
Triangula ſuper æqualibus baſibus conſtituta, atq; in eiſdem parallelis: æqualia inter ſe ſunt.

Propoſitis triangulis, ut præcipitur, eadem huius quæ præcedentis κατασκευὴ



atq; demonſtratio erit, ſi loco propoſitionis triceſimæ quintæ illic ſumptæ, hîc triceſima ſexta ſumatur.

ALIVD HVIVS PROPOSITIONIS EXEMPLVM.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΘ.

Τὰ ἴσα τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

PROPOSITIO XXXIX.

Aequalia triangula, ſuper eadem baſi, atque ad eaſdem partes conſtituta: & in eiſdem ſunt parallelis.

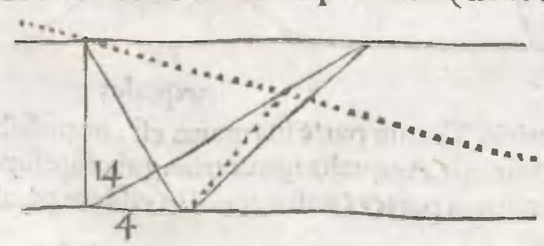
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Μ.

Τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

PROPOSITIO XL.

Aequalia triangula, ſuper æqualibus baſibus, atq; ad eaſdem partes conſtituta: & in eiſdem ſunt parallelis.

Requirunt hæ duæ propoſitiones æqualia, eiuſdem uel æqualium baſium triangula, & inde tandem inter lineas parallelas (ſi modo ad eaſdem partes fuerint cōſtituta) ea poſita eſſe inferunt. Triangulis itaq; huiuſmodi deſcriptis, propoſitionum demōſtrationes ab impoſsibili illo, Partem ſuo toti æqualem eſſe, colligentur. Nam recta quadā linea triangulorum uerticibus copulatis, ſi quis præter hanc

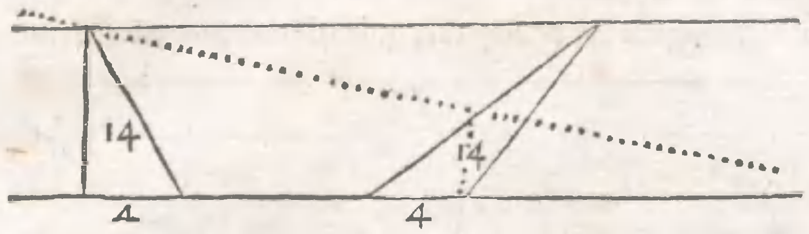


Baſis eadem

aliam ab unius trianguli uertice, tanquam à puncto ſignato, baſi parallelam ſtatuere uelit, faciat ſanè hoc, ſi poterit. Et quoniam fit, quod hæc ducta parallela alter-

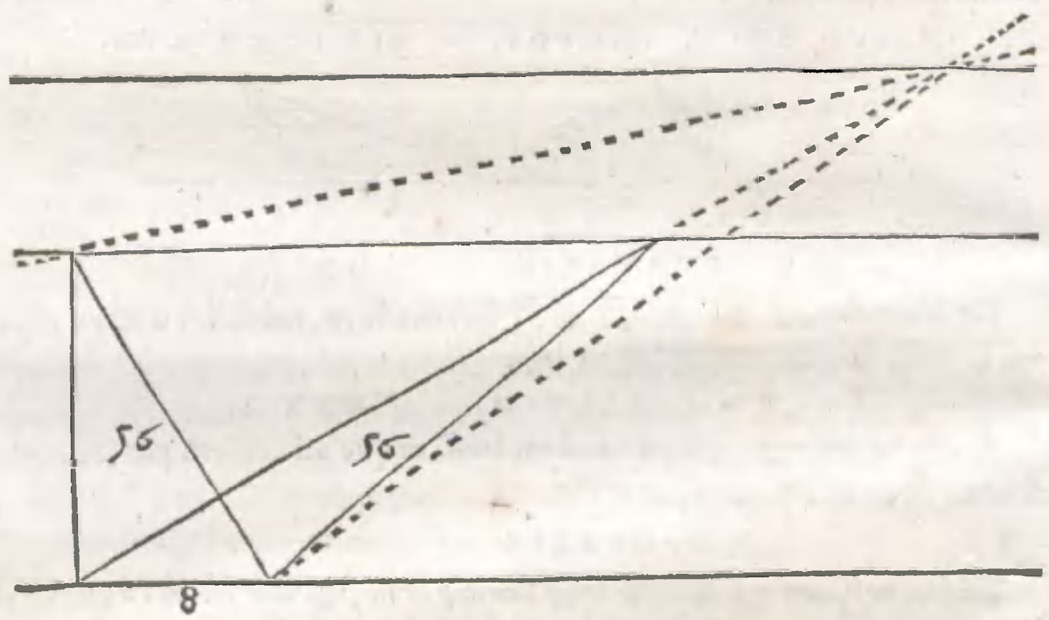
utrius

utrius trianguli, latera secet, aut non secet. Si primum. coniungatur punctum sectionis in uno latere, recta quadam linea, cum sibi opposita basis extremitate. Et quoniam duo triangula apparent, quorum unum quidem cum secundum aduersarij



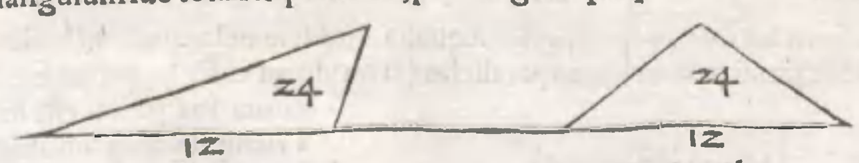
Bases aequales

structuram, ex propositione 35, uni: alterum uero, ex hypothesi, eidem triangulo equale sit: mox illi, aut per propositionem 37, si unam & eandem basim habuerint: aut uerò per propositionem 38, si separatæ, æquales tamen inter se, bases illorum fuerint, inter se æqualia erunt, partiale totali, quod est impossibile. Esto igitur iam



Basis eadem

quòd non secet parallela hæc alterius trianguli latera, tum huius trianguli unum latus ultra uerticem usque ad parallelam continuari, punctum deinde contactus cum opposita basis extremitate, ut modò, coniungi debet: & idē quod prius, partiale scilicet triangulum suo totali æquale esse, per allegatas propositiones inferetur. Hoc



Bases æquales

autem, quia ex communi illa noticia, Totum parte sua maius est, impossibile existit, propositionibus consentiendum erit. Aequalia igitur triangula, siue super eadē seu æqualibus basibus, atque ad easdem partes constituta: & in eisdem parallelis erunt, quod demonstrasse oportuit.

SEQVITVR NVMERORVM PRAXIS.

Prioris trianguli figuræ ultimæ

Latera sunt $\sqrt{212}$, 12, $\sqrt{20}$

Laterum summa $\sqrt{212} + 12 + \sqrt{20}$ Medietas $\sqrt{53} + 6 + \sqrt{5}$

Excessus igitur, ac per consequens quatuor numeri.

$\sqrt{5} + 6 + \sqrt{53}$ $\quad$ $5 - 6 + \sqrt{53}$ $\quad$ $\sqrt{53} + 6 - \sqrt{5}$ $\quad$ $\sqrt{53} + 6 + \sqrt{5}$

Instituantur multiplicationes.

Prima	Secunda
$\sqrt{5} + 6 - \sqrt{53}$	$\sqrt{53} + 6 + \sqrt{5}$
$\sqrt{5} - 6 + \sqrt{53}$	$\sqrt{53} + 6 - \sqrt{5}$
pro. $\sqrt{7632} - 84$	pro. $\sqrt{7632} + 84$

Tertia multiplicatio.

$\sqrt{7632} + 84$

$\sqrt{7632} - 84$

producuntur $7632 - 7056$, hoc est 576 tertium productum. Area igitur trianguli 24.

Triangulum posterius habet

Latera	Excessus igitur
12	$\sqrt{52} - 6$
$\left.\begin{matrix}\sqrt{52}\\ \sqrt{52}\end{matrix}\right\}$	6
$\sqrt{208} + 12$	$\sqrt{52} + 6$. Area 24.

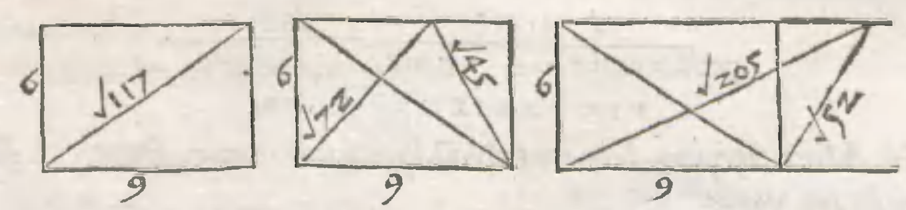
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΜΑ.

Ἐὰν παραλληλόγραμμον τριγώνῳ βάσιν τε ἔχῃ τὴν αὐτὴν, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ᾖ, διπλάσιον ἔσται τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου.

PROPOSITIO XLI.

Si parallelogrammum cum triangulo basim habuerit eandem, atque in eisdem parallelis fuerit: duplum erit parallelogrammum ipsius trianguli.

Statuantur parallelogrammum & triangulum super eadem basi, esto etiā quòd sint inter lineas parallelas: dico quòd parallelogrammum ad triangulum, duplū sit. Hoc quòd ducta in parallelogrammo diametro, ex 37 & secunda parte proposi-



tionis 34, cum per hanc quidem triangulorum unumquodque sui parallelogrammi dimidium esse, per illam uerò, triangula quorū eadem est basis et eadem altitudo, æqualia esse demonstratum sit, facile colligetur.

NVMERORVM PRAXIS.

Et primo quidem trianguli, cuius latera sunt 9 $\sqrt{72}$ $\sqrt{45}$

Laterum summa $9 + \sqrt{72} + \sqrt{45}$ Medietas $4\frac{1}{2} + \sqrt{18} + \sqrt{11\frac{1}{4}}$

Excessus, ac per consequens quatuor numeri.

Primus $\sqrt{11\frac{1}{4}} + \sqrt{18} - 4\frac{1}{2}$ secundus $\sqrt{11\frac{1}{4}} - \sqrt{18} + 4\frac{1}{2}$

tertius $4\frac{1}{2}$ $\sqrt{18}$ $\sqrt{11\frac{1}{4}}$ quartus $4\frac{1}{2} + \sqrt{18} + \sqrt{11\frac{1}{4}}$

Primum	secundum	tertium pro.
$\sqrt{1458} - 27$	$\sqrt{1458} + 27$	$729.$

Area trianguli 27. Et tanta etiã est medietas parallelogrammi, cum 6 nouies, uel contrà 9 sexies, 54 constituant.

Aliud triangulum.

Latera	Excessus
$\sqrt{117}$	$7\frac{1}{2} - \sqrt{29\frac{1}{4}}$
9	$\sqrt{29\frac{1}{4}} - 1\frac{1}{2}$
6	$\sqrt{29\frac{1}{4}} + 1\frac{1}{2}$
$15 + \sqrt{117}$	$7\frac{1}{2} + \sqrt{29\frac{1}{4}}$

Productum primum 27, secundum 27, Area trianguli 27.

Tertium triangulum.

Latera	Excessus
$\sqrt{205}$	$\sqrt{13} + 4\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{205}{4}}$
9	$\sqrt{13} - 4\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{205}{4}}$
$\sqrt{52}$	$\sqrt{\frac{205}{4}} + 4\frac{1}{2} - \sqrt{13}$
$\sqrt{205} + 9 + \sqrt{52}$	$\sqrt{\frac{205}{4}} + 4\frac{1}{2} + \sqrt{13}.$

Instituantur multiplicationes.

Prima	secunda
$\sqrt{13} + 4\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{205}{4}}$	$\sqrt{\frac{205}{4}} + 4\frac{1}{2} - \sqrt{13}$
$\sqrt{13} - 4\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{205}{4}}$	$\sqrt{\frac{205}{4}} + 4\frac{1}{2} + \sqrt{13}$
$13 - 20\frac{1}{4} - 51\frac{1}{4}$	$51 + 20\frac{1}{4} - 13$
$+ \sqrt{4151\frac{1}{4}}$	$+ \sqrt{4151\frac{1}{4}}$
producuntur $\sqrt{4151\frac{1}{4}} - 58\frac{1}{2}$	prod. $\sqrt{4151\frac{1}{4}} + 58\frac{1}{2}$

Tertia multiplicatio.

$\sqrt{4151\frac{1}{4}} + 58\frac{1}{2}$

$\sqrt{4151\frac{1}{4}} - 58\frac{1}{2}$

producuntur 729. Quare Area trianguli 27

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΜΒ.

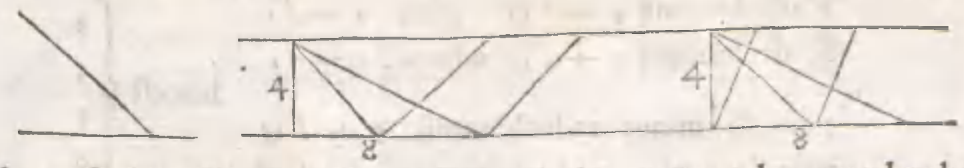
Τῷ δοθέντι τριγώνῳ, ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι, ἐν τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ.

PROPOSITIO XLII.

Dato triangulo : æquale parallelogrammum constituere, in dato angulo rectilineo.

Petit hæc propositio triangulũ, atq; huic deinde æquale iubet formari seu describi parallelogrammum, cuius quidem unus angulus, alij cuidam rectilineo angulo dato, æqualis sit, quod sic fiet. Continuetur trianguli basis in utramlibet partem. huic deinde basi per trianguli uerticem, prout habet propositio 31, recta parallela ducatur. Hoc facto, diuidatur basis, per 10 propositionem, bifariam, & ad punctũ illud

illud diuisionis, atq; ipsam basim, angulus dato æqualis, ex propositione 23 constituatur, cuius deinde latus alterum, si usq; ad lineam, quæ per uerticem trianguli ducta est, continuatum, ei etiam ab alterutra basis extremitate, tanquam à puncto aliquo dato, per propositionem 31, recta parallela ducta fuerit, ubi tandem hæc usque ad lineam, per uerticem transeuntem continuabitur, res confecta erit, id quod



sic demonstrabitur. De parallelogrammo, quin dato unũ angulum æqualem habeat, nullum est dubium, cum id in structura ex propositione 23 præuisum sit. Quòd uerò idem parallelogrammum dato triangulo æquale sit, postquam à trianguli uertice ad punctum basis medium linea recta ducta fuerit: & id ex propositionibus 38 & 41, atq; communi tandem illa noticia, Quæ eiusdem duplicia, &cæ. facile perspicietur. Dato igitur triangulo, æquale parallelogrammum, in dato rectilineo angulo constitutum est, quod fecisse oportuit.

ADMONITIO.

Quòd si angulus datus fuisset acutior, obtusior, uel omnino rectus, tũc linea hęc, ut latus futuri parallelogrammi, à puncto diuisionis in basi, secũdum huius anguli quantitatem ducenda fuisset. Hæc enim 23, de angulo formando, propositio, in genere proposita est, sic ut nihil referat, quocunq; modo rectilineus angulus fuerit propositus.

Area trianguli figuræ ultimæ, ut sequens calculus indicat, est $\sqrt{243}$. Atq; tanta est etiam parallelogrammi constituti area. Bene igitur.

Latera	Excessus	
6	3	
6	3	Vltimum productum 243
6	3	Area igitur trianguli $\sqrt{243}$.
Sum. 18	Med. 9	

ALIVD AEQVILATERVM TRIANGVLVM, laterum irrationalium.

Latera	Excessus		
$\sqrt{48}$		pro. primum	12
$\sqrt{48}$	$\sqrt{12}$	secundũ	36
$\sqrt{48}$		tertium	432
$\sqrt{432}$	$\sqrt{108}$	Area trianguli	$\sqrt{432}.$

ALIVD EXEMPLVM.

Latera trianguli sunt

6		6
$8 - \sqrt{4},$	hoc est	6
Radix binomij $20 + \sqrt{256}$		6

Summa laterum $14 - \sqrt{4}$, plus radix binomij $20 + \sqrt{256}$ 18
hoc est
Huius medietas $7 - \sqrt{1}$, plus radix binomij $5 + \sqrt{16}$ 9

Excessus, ac per consequens quatuor numeri

Radix binomij $5 + \sqrt{16}$ plus $1 - \sqrt{1}$ 3
Radix binomij $5 + \sqrt{16}$ minus $\sqrt{1} - 1$. 3
hoc est
$7 - \sqrt{1}$ minus radix binomij $5 + \sqrt{16}$ 3
$7 - \sqrt{1}$ plus radix binomij $5 + \sqrt{16}$ 9

Instituantur multiplicationes.

Prima.

Radix binomij $5 + \sqrt{16}$ plus $1 - \sqrt{1}$
Radix binomij $5 + \sqrt{16}$ minus $\sqrt{1} - 1$
producuntur $5 + \sqrt{10}$ minus $\sqrt{4} - 2$
hoc est 9

Secunda.

$7 - \sqrt{1}$ minus radix binomij $5 + \sqrt{16}$
$7 - \sqrt{1}$ plus radix binomij $5 + \sqrt{16}$
pro. $50 - \sqrt{196}$ minus $5 + \sqrt{16}$
hoc est 27

Tertia multiplicatio est 27 secundi
cum numero 9 producto primo.
& producuntur 243, ultimo.
Area igitur trianguli $\sqrt{243}$.

VEL ALITER.

Summa laterum 6 plus $8 - \sqrt{4}$, plus radix bin. $20 + \sqrt{256}$. 18
hoc est
Huius medietas 3 plus $4 - \sqrt{1}$ plus radix bin. $5 + \sqrt{16}$ 9

Excessus, & per consequens quatuor numeri.

Radix binomij $5 + \sqrt{16}$ minus 3 plus $4 - \sqrt{1}$
Radix binomij $5 + \sqrt{16}$ plus 3 minus $4 - \sqrt{1}$
3 plus $4 - \sqrt{1}$ minus radix binomij $5 + \sqrt{16}$
3 plus $4 - \sqrt{1}$ plus radix binomij $5 + \sqrt{16}$

Instituantur multiplicationes.

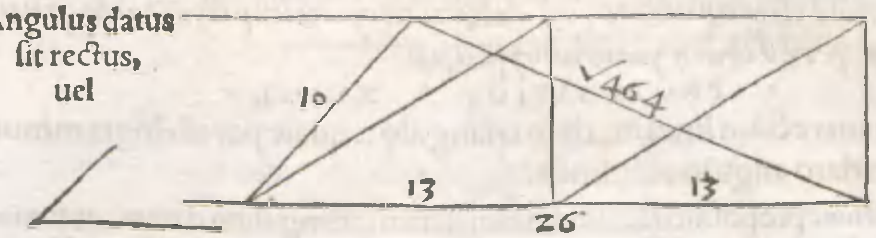
Prima. Radix binomij $5 + \sqrt{16}$ minus 3 plus $4 - \sqrt{1}$
Radix binomij $5 + \sqrt{16}$ plus $\sqrt{3}$ minus $4 - \sqrt{1}$
producuntur $5 + \sqrt{16}$ minus 9 minus $17 - \sqrt{64}$
hoc est 9.

Secunda. 3 plus $4 - \sqrt{1}$ minus radix binomij $5 + \sqrt{16}$
3 plus $4 - \sqrt{1}$ plus radix binomij $5 + \sqrt{16}$
9 plus $17 - \sqrt{64}$ minus $5 + \sqrt{16}$
plus $12 - \sqrt{9}$, bis
Summa productorum, sunt 27. &c.

ALIA

ALIA FIGVRA GEOMETRICA.

Angulus datus sit rectus, uel



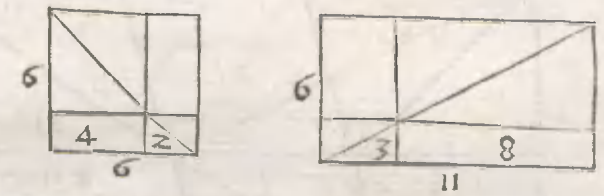
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΜΓ.

Παντὸς παραλληλογράμμου, τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων τὰ παραπληρώματα, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

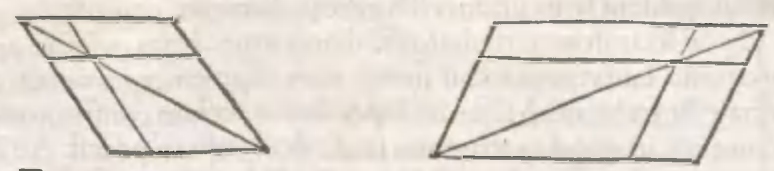
PROPOSITIO. XLIII.

Omnis parallelogrammi, eorum quæ circa diametrum sunt parallelogrammorum supplementa, inter se sunt æqualia.

Sit parallelogrammum, ducta etiam in eo diameter, puncto deinde in uno aliquo parallelogrammi latere ubiuis sumpto, ex hoc ad oppositũ usq; latus reliquis



duobus parallela ducta, ubi hæc diametrum secuerit, per hoc sectionis punctum prioribus lateribus similiter parallela ducenda est, & figura parata erit: dico igitur nunc, quòd ipsius parallelogrammi supplementa, hoc est, ea per quæ diameter non transit, parallelogramma, inter se æqualia sint. Nam cum diameter parallelogrammum, ut auditum est, bifariam secet, subtractis ab æqualibus triangulis, medietatibus scilicet parallelogrammi, æqualibus triangulis bis, quæ tandem relinquuntur, ex communi quadam notitia, æqualia erunt. Quia autem reliqua hæc ea sunt, quæ circa diametrum consistunt parallelogrammorum supplementa: ergo. Omnis igitur parallelogrammi, eorum quæ circa diametrum sunt parallelogrammorum supplementa, inter se sunt æqualia. quod demonstrasse oportuit.



Diameter $\sqrt{108}$. Diameter $\sqrt{223}$.

SEQVITVR TRIANGVLORVM CALCVLVS.

primi Latera	primi excessus	secundi Latera	secundi excessus
$\sqrt{108}$	$6 - \sqrt{27}$	$\sqrt{223}$	$8\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{223}{4}}$
6	$\sqrt{27}$	11	$\sqrt{\frac{223}{4}} - 2\frac{1}{2}$
6	$\sqrt{27}$	6	$\sqrt{\frac{223}{4}} + 2\frac{1}{2}$
$12 + \sqrt{108}$	$6 + \sqrt{27}$	$17 + \sqrt{223}$	$8\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{223}{4}}$

Primum productum 9. secun. 27 tertium 243. Area $\sqrt{243}$

Pri. pro. $16\frac{1}{2}$ secun. $49\frac{1}{2}$ ter. $\frac{3267}{4}$. Area $\sqrt{816\frac{3}{4}}$

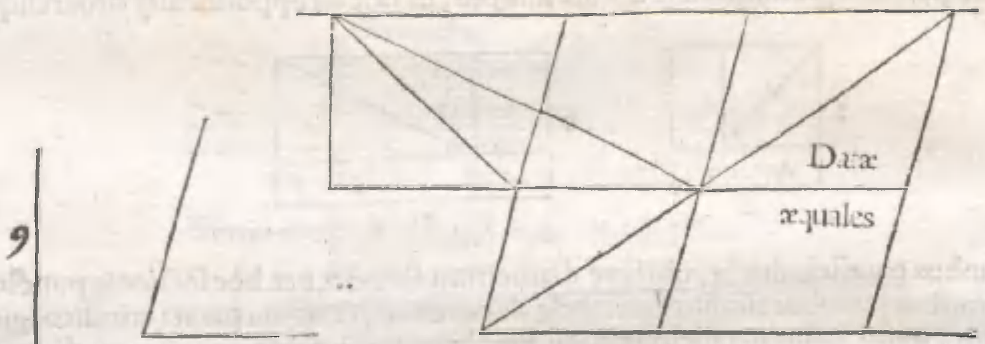
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΜΑ.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν, τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

PROPOSITIO XLIIII.

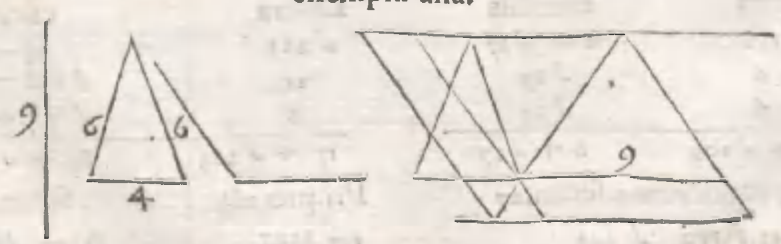
Ad datam rectam lineam, dato triangulo æquale parallelogrammum ponere, in dato angulo rectilineo.

Requirit hæc propositio rectam lineam datam, triangulum datum, atq; etiam angulum rectilineum datū. Proponit autem, quomodo ad datam rectam lineam, parallelogrammum, quod & triangulo dato æquale sit, angulum etiam dato angulo æqualem habeat, constituendum sit. Est huius propositionis structura facilis, propter hypotheses, quas cum propositione præcedente 42. communes habet. Primo enim parallelogrammum, quod dato triangulo æquale sit, angulum insuper angulo æqualem habeat, per eandem 42. constituendum est. Et quoniam dicit propositio, ad datam rectam lineam, altero igitur iam descripti parallelogrammi latere, eorum quæ angulum, dato æqualem compræhendūt, ultra parallelogrammum ad longitudinem rectæ datæ, per secundū postulatum, prolongato, secundū pro-



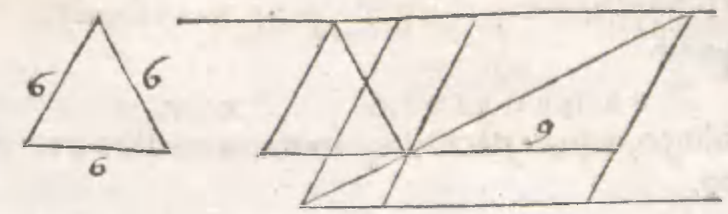
longatam illam portionem & parallelogrãmi latus, quod cū portione prolongata angulum facit, aliud cum sua diametro parallelogrammū describatur. Et quoniam hæc diameter, ex una eius parte continuata, & latus parallelogrammi alterum, similiter continuatum, propter incidentem lineam, quæ (ut facile ex tertia parte propositionis 29 colligitur) in una & eadem parte, duos interiores angulos duobus rectis minores facit, ex communi quadam notitia concurrunt, continuetur utrunq; horum, diameter scilicet & latus illud alterum, donec concurrant, atq; ex triangulo formato, cuius quidem latus unum est hæc tota diameter, compleatur parallelogrammum. Quòd si tandem partialis iuxta diametrum, linea, usq; ad oppositum in parallelogrammo latus continuatū fuerit, cum supplementorum utrunq; dato triangulo æquale sit, ex his uerò alterum super datam rectam constitutum: propositioni satisfactum erit, id quod ex structura facile demonstrari potest. Ad datam igitur rectam lineam, in dato angulo rectilineo parallelogrammum dato triangulo æquale positum est, quod fieri oportuit.

SEQVVNTVR NVNC HVIVS PROPOSITIONIS exempla alia.

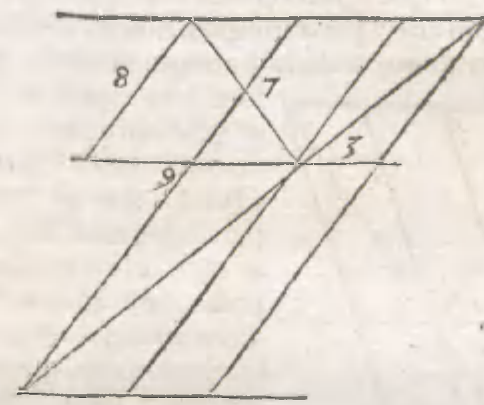


Idem

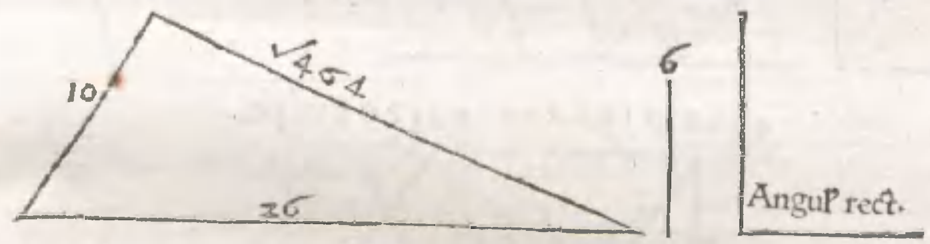
Idem exemplum, mutato tamen Isosceli in triangulum æquilaterum.

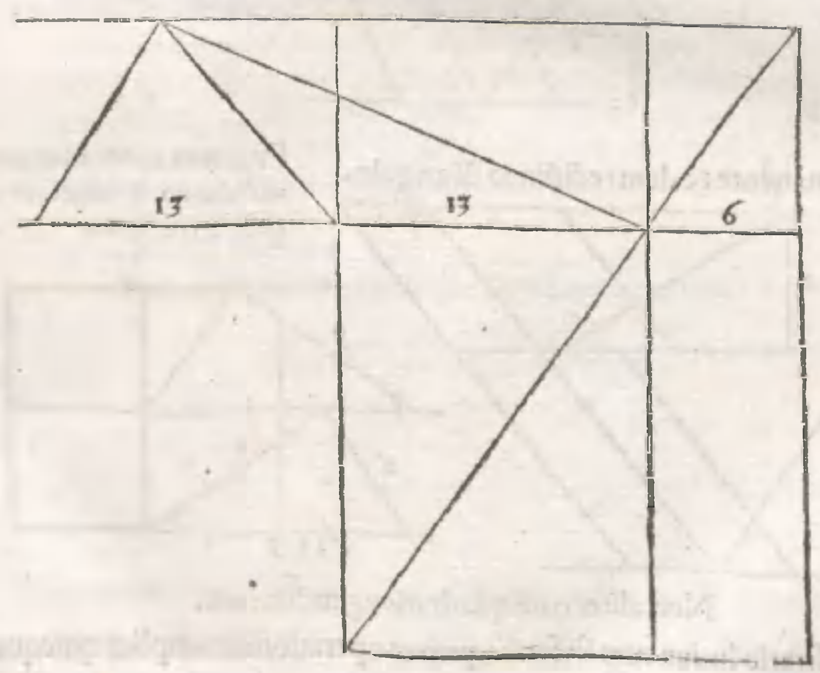


Adhuc aliter, triangulum autem esto Scalenum, linea uerò data 3 punctorum.



ALIVD EXEMPLVM.





ΠΡΟΤΑΣΙΣ

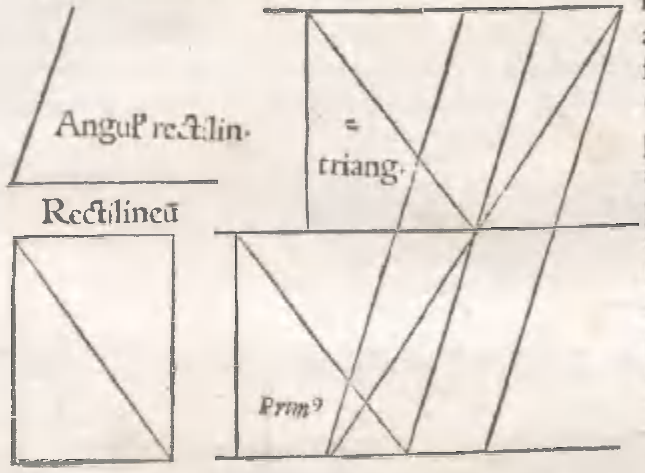
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΜΕ.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι, ἐν τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ.

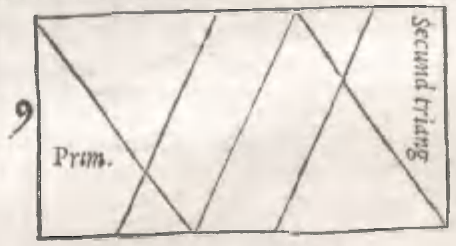
PROPOSITIO XLV.

Dato rectilineo, æquale parallelogrammum constituere, in dato angulo rectilineo.

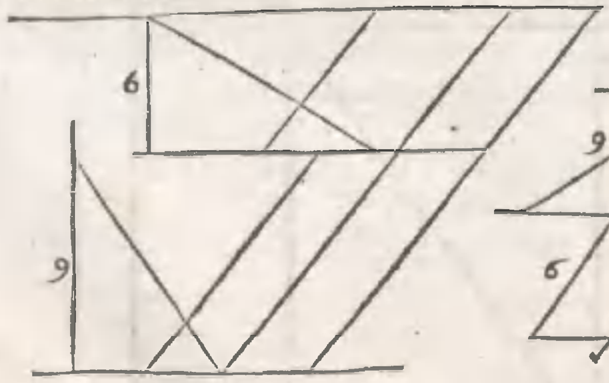
Quod præcedens 42 de triangulo tantū proposuit, petit uel iubet hæc fieri cum omni rectilineo. Estq; hæc præsens quàm superior magis generalis, & latius patet. Sit itaq; datum rectilineum qualecumque, gratia tamen exempli, & propter faciliorem operationem, Quadrilaterum altera parte longius. Illud primò in duo triangula, per diametrum ductam, soluendum: parallelogrammum deinde, quod angulum dato æqualem habeat, triangulo uni ęquale, per propositionem 42, cōstituendum est. Quòd si iam ad unum huius parallelogrāmi latus, tanquam ad rectam lineam datā, per propositionem 44 præcedentem, alteri triangulo æquale parallelogrammum, quod & ipsum angulum dato æqualem habuerit, cōstituatur, satisfactum propositioni erit.



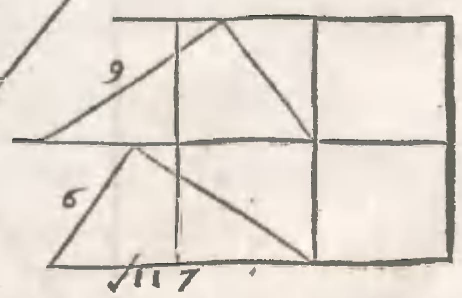
ALIA FIGVRAE DISPOSITIO.



Aliter manente eodem rectilineo & angulo.



Præterea aliter, manente rectilineo, sed mutato angulo in rectum.

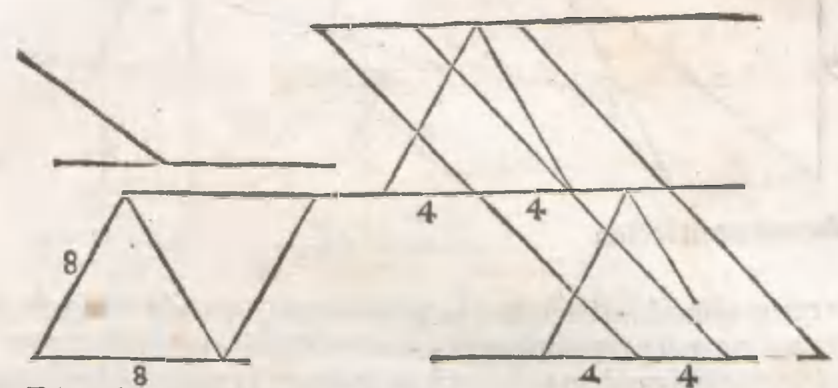


Non aliter cum quadratis agendum erit.

Demonstratio huius cum sit facilis, præter operationem amplius quicquam addere

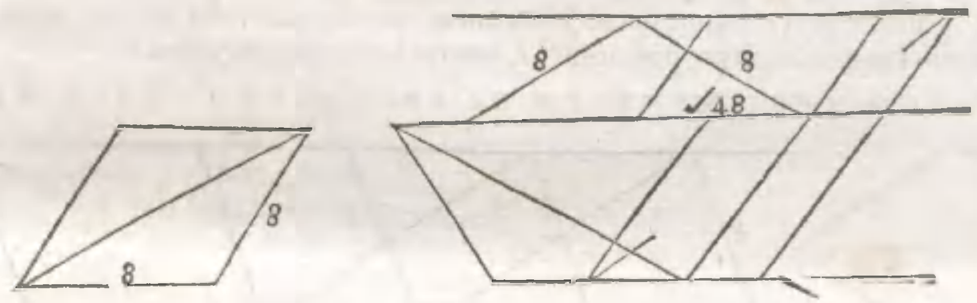
dere nolui, copiosum tantum, propter difficilem huius praxim, in exemplis me uarijs ostendens.

DE RHOMBO.

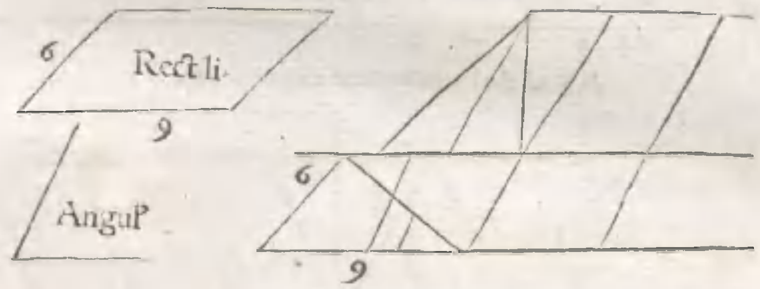


Rhombus datus.

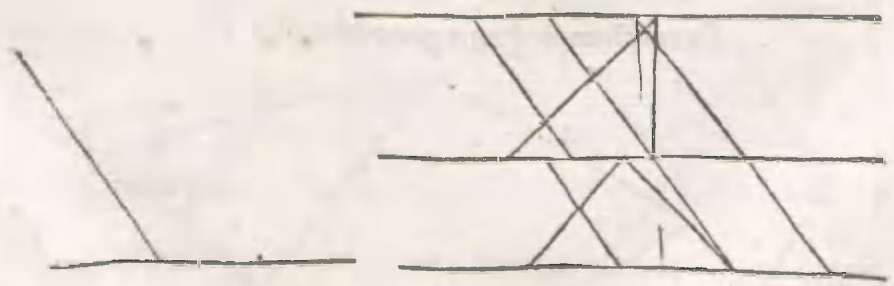
De eodem Rhombo, aliter tamen in triangula soluto.



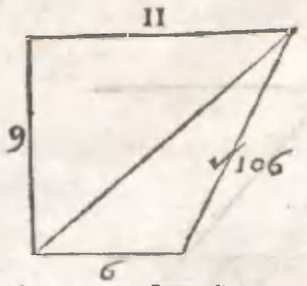
SIC ETIAM QVADRILATERVM, QVOD RHOMboides appellatur, uariari poterit, ut sequitur.

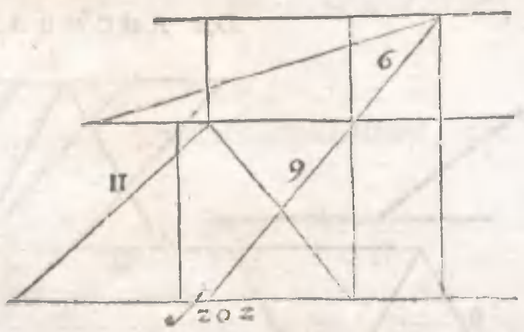


Idem aliter, mutato acuto in angulum obtusum.



EXEMPLVM DE QVADRILATERO IRREGVLARI.

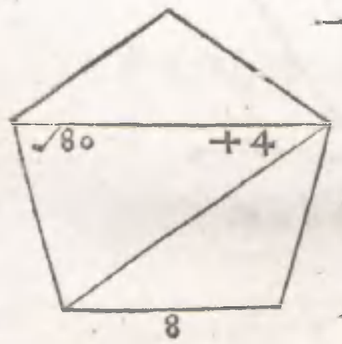


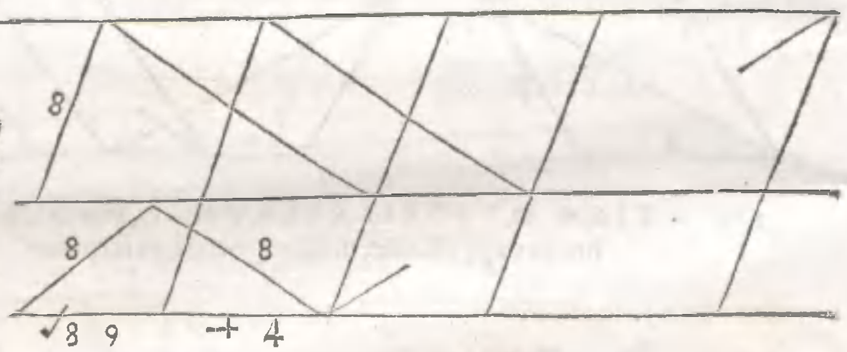


Angulus autem sit rectus

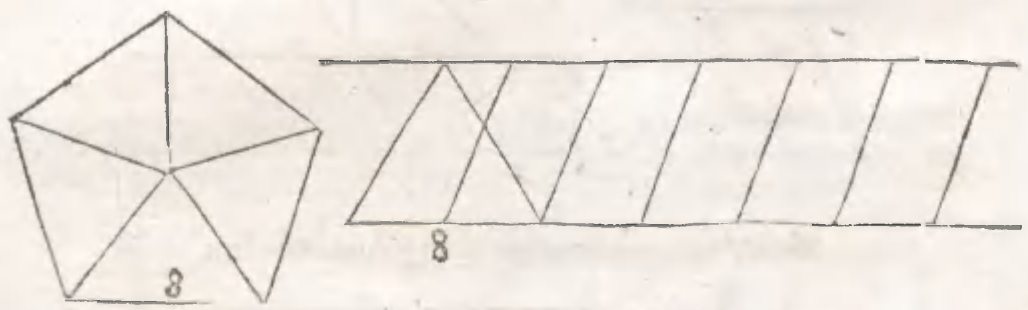
Proinde quemadmodum hactenus in quadrilateris, secundo triangulo æquale parallelogrammum, per propositionem 44. ad rectam datam constitutum est, ita eodem modo nunc, ubi quidem rectilineū propositum pentagonū fuerit, eo in sua triangula soluto: & triangulo tertio per eandem propositionem æquale parallelogrammū addi poterit, atq; sic deinde etiam absolui triangulū quartum in Hexagonis, & quintū in Heptagonis, ac ordine deinceps. Quomodo autem unumquodq; propositum polygonum, uel rectilineum in sua triangula solui debeat, id per appendicem quandam propositionis 32, iam traditum atq; ostensum est.

SEQVITVR EXEMPLVM DE PENTAGONO REGVLARI.

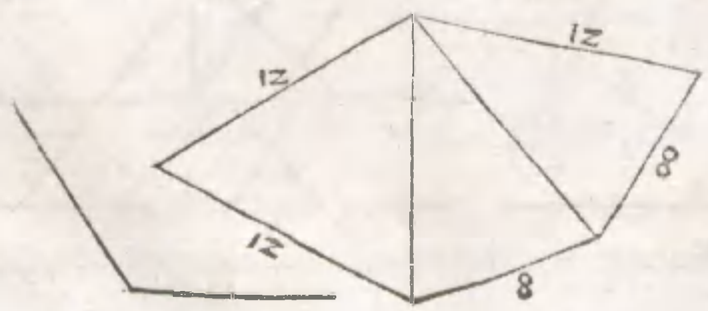




Aliud de Pentagono exemplum.

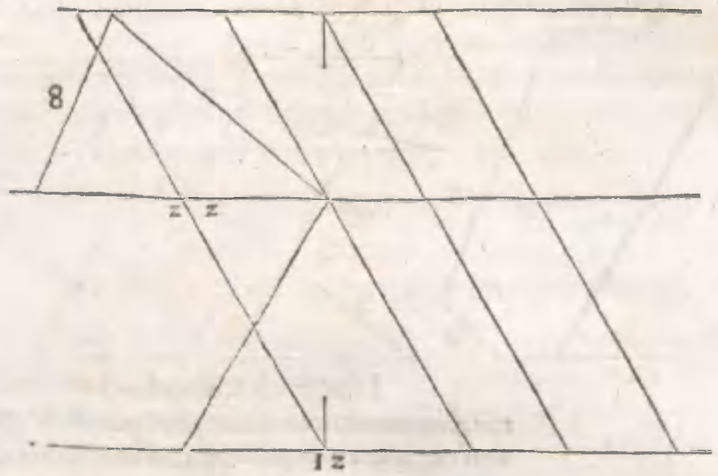


Exemplum, de Pentagono irregulari.

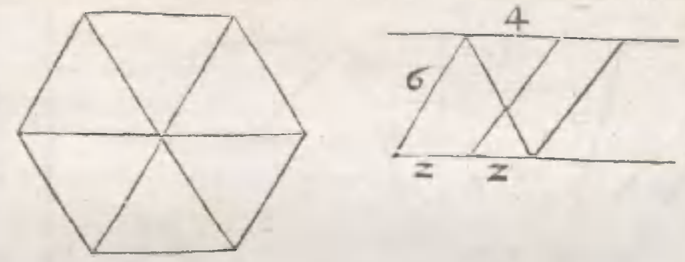


Constitutio

Constitutio huius pentagoni irregularis.

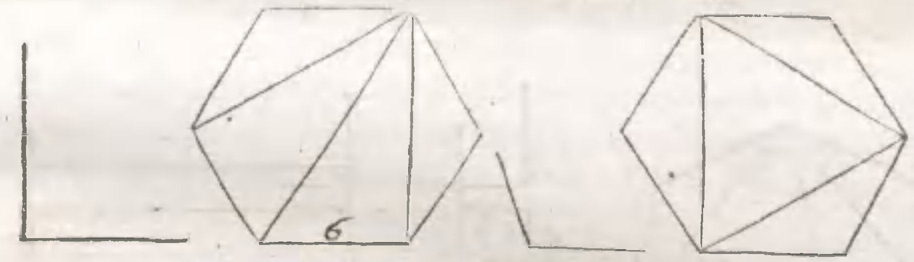


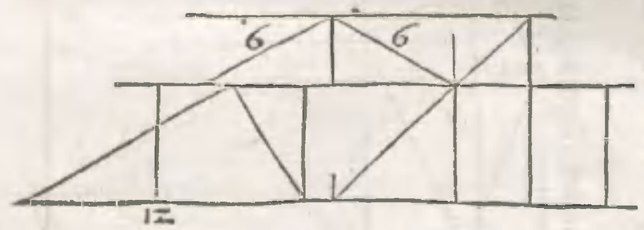
EXEMPLVM HEXAGONI REGVLARIS.



Hoc nūc sexies (cum sex sint triangula inter se æqualia) hexagono parallelogrāmū æquale, in dato angulo rectilineo cōstitutum erit.

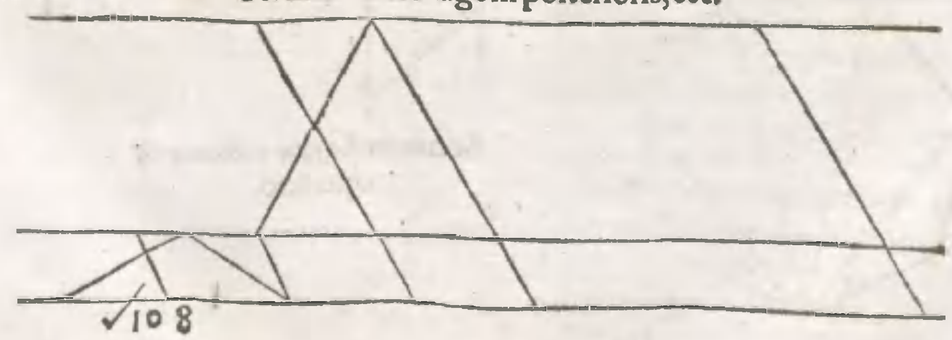
Vel fit illa hexagoni in triangula diuisio.



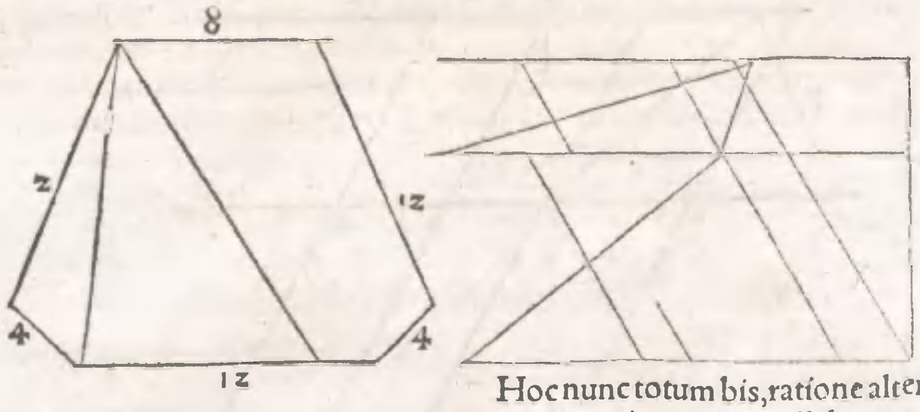


Constitutio hexagoni prioris in paralellogrāmū, quod dato rectilineo angulo æqualem angulum habeat.

Constitutio hexagoni posterioris, &c.

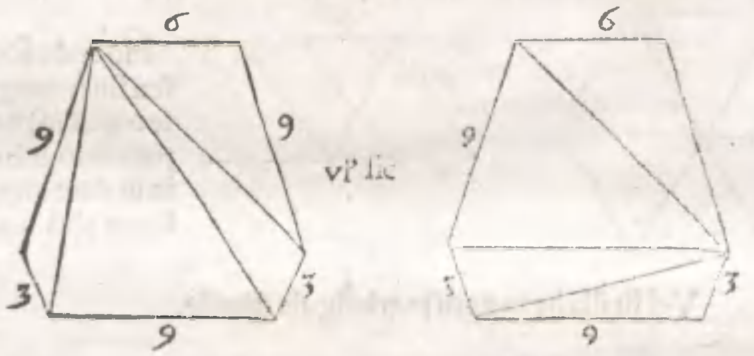


EXEMPLVM HEXAGONI IRREGVLARIS.

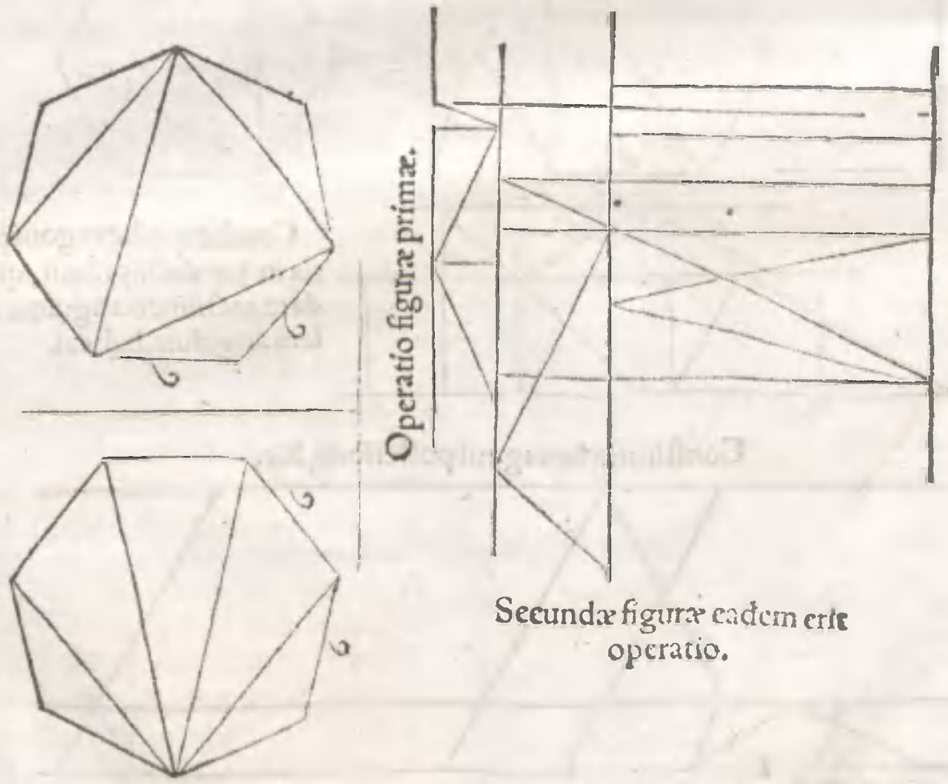


Hoc nunc totum bis, ratione alterius parallelogrammi: exoritur totũ parallelogrammum, toti rectilineo æquale. quod erat faciendum.

Aliter, similis formæ hexagonum irregulare, in sua triangula solutum.



EXEMPLVM DE HEPTAGONO REGVLARI.



Secundæ figuræ eadem erit operatio.

Quòd

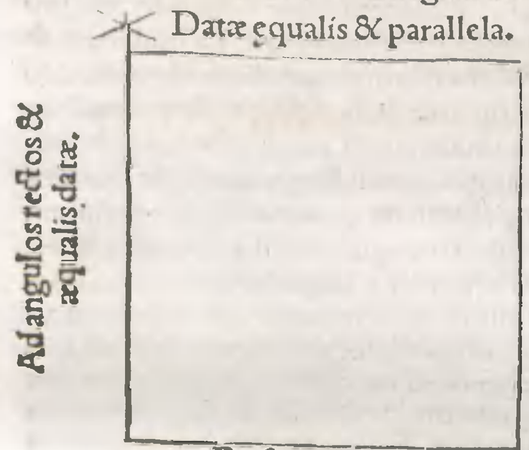
Quòd si à puncto heptagoni medio, hoc est à centro, septem ad ipsius angulos rectæ ductæ fuissent lineæ, cum sic heptagonum in septem inter se æqualia triangula resolutum sit, uni eorum æquali parallelogrammo constituto, eo deinde septies sumpto, res confecta erit. Sic cum irregulari heptagono & reliquis multorum laterum figuris omnibus, postquam hæ in triangula resolutæ fuerint, agendum erit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Μϛ.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας, τετράγωνον ἀναγράψαι.

PROPOSITIO. XLVI.

A' data recta linea, quadratum describere.



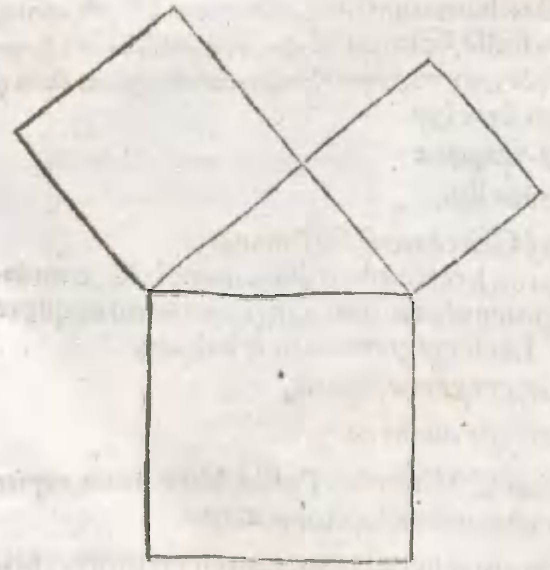
Sit data recta linea, atq; propositum, ab ea, hoc est secundum eius quantitatem, quadratum describere. Ab una igitur rectę extremitate, tanquam à puncto in linea sumpto, per propositionem 11. ad angulos rectos linea excitetur: atque hac, per propositionem 3. ad æqualitatem datæ posita, ab eius extremitate altera, & libera adhuc, tanquam à puncto dato, datæ rectæ ęqualis & parallela ducatur. Quòd si tandem altera ductæ parallelæ extremitas, cum altera datæ extremitate, recta linea cõiungatur, propositioni satisfactum erit. Demonstrationem huius, qui eorum quæ in structura facta sunt, eorum item quæ hactenus tradita recordabitur, ex definitione tandẽ quadrati facile colligere poterit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΜΖ.

Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις.

PROPOSITIO XLVII.

In rectangulis triangulis: quadratum quod à latere rectum angulum subtendente describitur, æquale est eis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur quadratis.



Sit triangulum rectangulum, quadrata etiam à singulis lateribus, per propositionem præcedentem, descripta: dico, quadratum lateris subtendentis angulum rectum, tantum esse, quanta sunt quadrata, quæ à reliquis duobus lateribus, angulum rectum comprehendentibus, describuntur. Demittatur ab angulo trianguli recto, tanquam à puncto dato, super suam subtensam, per propositionem 12. linea perpendicularis, atque

hæc

hæc ad latus usq; oppositum per quadratum cõtinuetur, & erit quadratum lateris, angulum rectum subtendentis, in duo parallelogramma diuisum, quorum unum quidem uni, alterum uerò alteri reliquorum laterum quadrato æquale esse, sic demonstrabitur. Quoniam enim triangulum ex hypothesi rectangulum est, singuli etiam quadratorum anguli, ex definitione, recti sunt: angulus in orthogonio rectus cum utroq; eorum qui sunt ei ἐφεξῆς, duobus rectis angulis æquales erunt. Illud igitur utriusq; quadrati latus, quod quidem extra triangulum est positum, illi trianguli lateri, cui applicatum est, ex propositione 14, adamussim iunctum, & cum eo una linea erit, quod est notandum. Præterea, quoniam anguli recti, ex communi quadam noticia, inter se sunt æquales, & quoniam etiam, Si æqualibus æqualia, uel aliquod commune adijciatur, quæ inde colliguntur æqualia sunt: per hec duo, bis usurpata, erunt ex utraque parte rectanguli, circa acutos angulos, duo duobus, angulis æquales, quod & ipsum notandum. His igitur nunc demonstratis, pro positionis ueritas tali, ut sequitur, linearum ductu haberi potest. Demittantur ab angulo triãguli recto, ad remotiores ab eo duos quadrati iam diuisi angulos, duo rectæ lineæ. Et quoniam his duabus rectis duo triangula descripta sunt, cum hæc eadem triangula, atq; ipsorum parallelogramma, unam & eandem basim habeant, in eisdem etiam parallelis constituta sint: triangula parallelogrammorum dimidia, uel contra, hæc ad illa duplicia esse, per propositionem 41. iamdudum conclusum est. Ducantur ultimò, etiam ab acutis rectanguli trianguli angulis duæ rectę lineę, quarum utraq; per latus eundem angulum subtendens, usq; ad angulum quadrati illum, cui idem acutus hactenus non est cõiunctus, continuetur. Describuntur autem sic duo triangula alia, quæ similiter suorum parallelogrammorum, hoc est, quadratorum à lateribus duobus descriptorũ, dimidia sunt, cum sic ęqualia etiam sint ex propositione 4, bis usurpata, triangulis prioribus descriptis, utrunq; suo: ad illa priora triangula, eadem quadrata duplicia erunt. Sed quia ad illa priora duplicia etiam sunt, ut quidem demonstratũ est, duo partialia diuisi quadrati parallelogramma: per cõmunem igitur noticiam, Quæ eiusdem duplicia, æqualia inter se sunt, parallelogramma partialia, quadratum nimirum lateris, angulum rectum subtendentis, reliquorum duorum laterum quadratis æquale erit. In rectangulis igitur triangulis, quadratum quod à latere rectum angulum subtendente describitur, æquale est eis, quę à lateribus rectum angulũ continentibus describuntur quadratis, quod demonstrari oportuit.

APPENDIX.

Porrò ex Apollodoro refert Laertius, hanc olim propositionem à Pythagora, Italicę philosophiæ principe, inuentam fuisse, sic inquiẽs. φησὶ δὲ Ἀπολλόδωρος ὁ λογιστικός, ἑκατόμβην θῦσαι αὐτόν, εὑρόντα ὅτι τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ ὑποτείνουσα πλευρὰ ἴσον δύναται ταῖς περιεχούσαις. Καὶ ἔστιν ἐπίγραμμα οὕτως ἔχον.

Ἡνίκα Πυθαγόρης τὸ περικλεὲς εὕρατο γράμμα
  Κεῖν' ἐφ' ὅτῳ κλεινὴν ἤγαγε βουθυσίην.

Hæc in Latinum sermonem è Græco uersa, sic sonant.

Refert autem Apollodorus supputator, hecatomben illum immolasse, cum inuenisset, quòd trianguli rectanguli hypotenusa tantum posset, quantum ea quę rectum angulum continerent latera. Et est epigramma sic se habens,

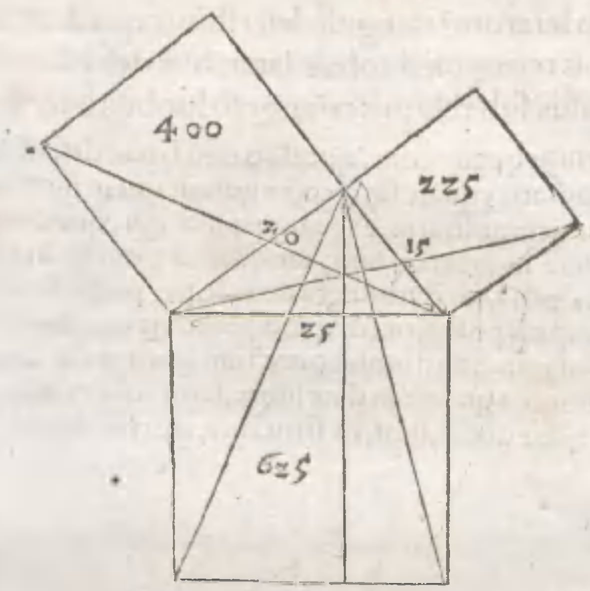
Postquam à Pythagora est præclara reperta figura,
  Tunc centum ille boum sacra peregit ouans.

Hoc idem attribuit Pythagoræ etiam L. Vitruuius Pollio, libro nono, capite quarto suæ architecturæ: atque hunc locum uidere Lector poterit.

Citauimus autem hęc libenter, cùm propter uetustatem, tum etiam propter honorificam

norificam & Pythagoræ & propositionis huius mentionem, cum illius in omnibus ferè rationibus nõ sit mediocris usus. Hinc eo maiori studio & diligentia perdiscenda, memoriæq; commendanda est.

SEQVITVR HVIVS PROPOSITIONIS FIGVRA GEOmetrica alia, unà cum numeris explicata.



OPERATIO TRIANGVLORVM QVANTVM AD areas inueniendas.

Triangulum unum, cuius

Latera quidem sunt	Excessus uerò
$\sqrt{1450}$	$20 - \sqrt{\frac{1450}{4}}$
25	$\sqrt{\frac{1450}{4}} - 5$
15	$\sqrt{\frac{1450}{4}} + 5$
Summa $40 + \sqrt{1450}$	Medietas $20 + \sqrt{\frac{1450}{4}}$

Quatuor numeri.

$20 - \sqrt{\frac{1450}{4}}$. $\sqrt{\frac{1450}{4}} - 5$. $\sqrt{\frac{1450}{4}} + 5$. $20 + \sqrt{\frac{1450}{4}}$.

Productum pri. $37\frac{1}{2}$, secundum $337\frac{1}{2}$, tertium $\frac{50625}{4}$ atq; area tandem trianguli $112\frac{1}{2}$. Et tanta est etiam medietas parallelogrammi partialis, uel quadrati, quod est à parte dextra.

Triangulum alterum, quod habet

Latera	Excessus itaq;
$\sqrt{1625}$	$\frac{45}{2} - \sqrt{\frac{1625}{4}}$
25	$\sqrt{\frac{1625}{4}} - 2\frac{1}{2}$
20	$\sqrt{\frac{1625}{4}} + 2\frac{1}{2}$
$45 + \sqrt{1625}$	$\frac{45}{2} + \sqrt{\frac{1625}{4}}$

Productum primum 100, secundum 400, tertium 40000, atq; tandem trianguli area, 200. medietas scilicet alterius partialis parallelogrammi, uel quadrati partis sinistræ. Quare, &c.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

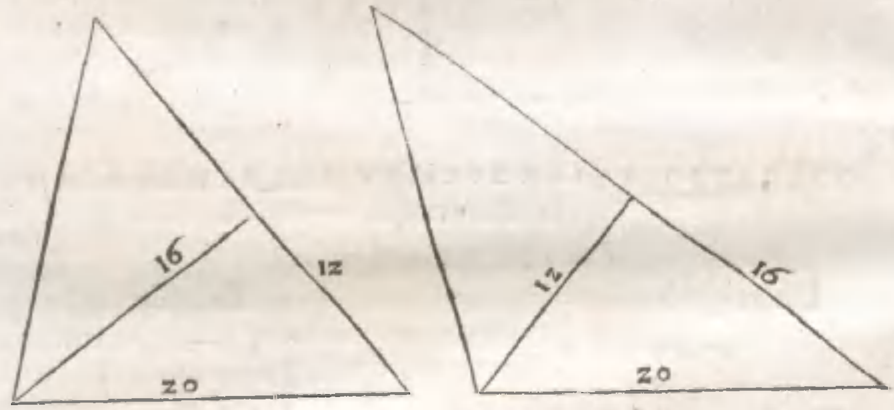
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΜΗ.

Ἐὰν τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετράγωνον, ἴσον ᾖ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τετραγώνοις· ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν, ὀρθή ἐστι.

PROPOSITIO XLVIII.

Si quod ab uno laterum trianguli deſcribitur quadratum, æquale fuerit eis quæ à reliquis trianguli duobus lateribus deſcribuntur quadratis: angulus cõprehenſus ſub reliquis trianguli duobus lateribus, rectus eſt.

Sit triangulum, cuius quadratum, quod ab uno latere deſcribitur, reliquorum duorum laterum quadratis ęquale ſit: dico, angulum quem illud latus ſubtendit, rectum eſſe. id quod ſic demonſtratur. Ab angulo illo, qui, quòd rectus ſit, demonſtrari debet, atq; à latere huius recti uno, tanquam à puncto in recta dato, linea, per propoſitionem 11, πρὸς ὀρθὰς ducatur, ea deinde, per propoſitionem 3, lateri circa hunc rectum alteri, æquali poſita, per id quod petitione quadam permiſſum eſt, nimirum quòd ab omni puncto ad omne punctum linea recta duci poſſit, claudatur tandem triangulum. Et quoniam duæ lineæ, latus ſcilicet trianguli unum, & extra triangulum πρὸς ὀρθὰς ducta, ſunt, ex ſtructura, inter ſe æquales: quod quadrata,



ta, ab his æqualibus deſcripta, inter ſe æqualia ſint, manifeſtum eſt. Hinc æqualibus his quodam communi, quadrato ſcilicet lateris alterius, ad quod nimirum extra triangulum linea πρὸς ὀρθὰς ducta eſt, addito: & producta iam, uel collecta, inter ſe æqualia erunt. Quoniam autem utrunq; horum, unum quidem ex hypotheſi, alterum uerò ex propoſitione præcedenti, unius lateris quadrato æquale eſt: & horum duorum quadratorum latera inter ſe æqualia erunt. Igitur, cũ iam duo, qualia ipſa 8. propoſitio requirit, triangula appareãt: angulus ille quem propoſiti trianguli latus, quod in reliqua duo poteſt, ſubtendit, per eandem octauam, rectus erit. Si igitur ab uno alicuius trianguli latere quadratum deſcriptum, à reliquorum duorum laterum deſcriptis quadratis æquale fuerit: angulus ille, quem hoc latus ſubtendit, rectus erit. quod demonſtraſſe oportuit.

FINIS LIBRI PRIMI.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

EVCLIDIS ELEMENTORVM GEOmetricorum liber ſecundus.

SVmit ex hoc libro ſecundo Arithmeticus pulchra ſui calculi compendia, multæ item regularum Algebræ æquationes, & nonnulla etiam harum regularum fundamenta, per huius ſecundi libri propoſitiones demonſtrare ſolet. Habet pręterea is liber propoſitiones duas, unam quidem pro Amblygonio, alteram deinde pro Oxygonio triangulo. illæ uerò quantum utilitatis, ſi in re aſtronomica ad penultimam propoſitionem primi, de Orthogonio triangulo expoſitam, referantur, afferre ſoleant, norunt qui in hac diſciplina aliquandiu uerſati ſunt. Quare ſi nullum alium præterea uſum haberet, ob has duas ſaltem propoſitiones præſens hic liber maximopere amplectendus & perdiſcendus eſſet.

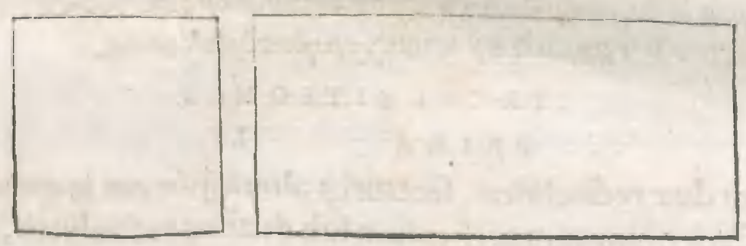
ΟΡΟΙ.

Πᾶν παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον περιέχεσθαι λέγεται, ὑπὸ δύο, τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν

DEFINITIONES.

Prima. Parallelogrammum rectangulum quid.

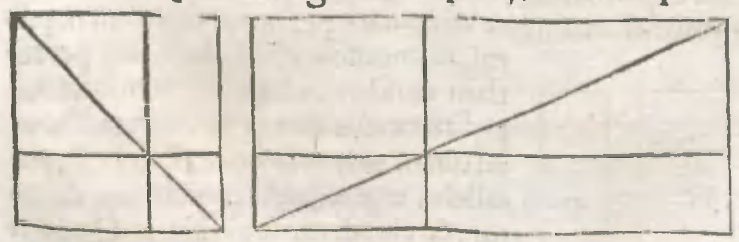
Omne parallelogrammum rectangulum ſub duabus, rectum angulum comprehendentibus, rectis lineis dicitur contineri.



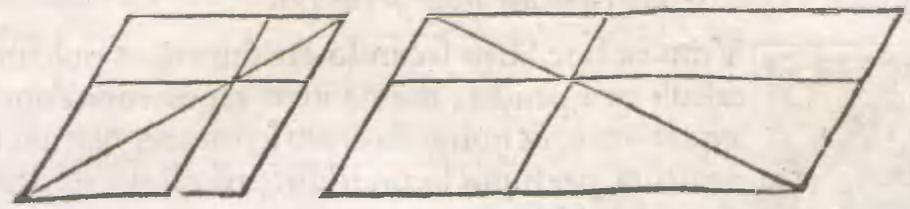
Παντὸς δὲ παραλληλογράμμου χωρίου, τῶν περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ ἓν παραλληλογράμμων ὁποιονοῦν, σὺν τοῖς δυσὶ παραπληρώμασι, Γνώμων καλείσθω.

Secunda. Gnomon quid.

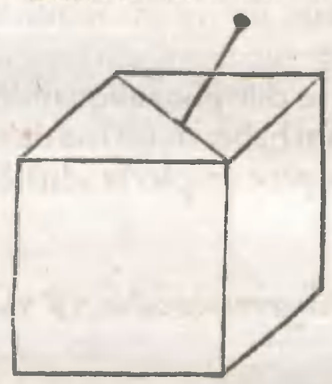
Omnis parallelogrammi ſpacij, eorum quæ circa diametrum illius ſunt parallelogrãmorum unumquodque, cum duobus ſupplementis, Gnomon uocetur.



Sententia definitionis est, Omnis parallelogrammi, quod quidem per ductam ipsius diametrum, ac duas deinde in eo rectas, quæ sese mutuò in communi quodam diametri puncto secant, lineas ductas, in quatuor partialia parallelogramma alia diuisum est, utrunq; eorum, per quæ diameter transit, cum reliquis duobus parallelogrammis, quæ extra diametrum sunt posita, atq; supplementa uocata, Gnomonem nominari.



Est hæc Gnomonis definitio generalior, quàm quæ à Vitruuio est posita, cum hæc rectum tantum angulum, illa uerò cuiuscunq; generis angulos, modo parallelogrammum fuerit spacium, consideret. Definit autem ferè his uerbis Gnomonem Vitruuius, lib. 9. cap. 7. Architecturæ, eum esse ac formari, quando ex medio planiciei linea πρὸς ὀρθὰς erigitur.



ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.

ΡΡΩΤΗ. Α.

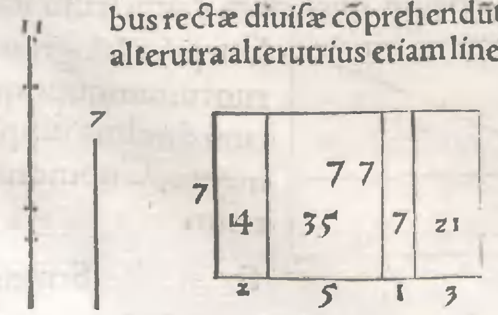
Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι, τμηθῇ δὲ ἡ ἑτέρα αὐτῶν εἰς ὅσα δήποτε τμήματα, τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν, ἴσον ἐστὶ, τοῖς ὑπό τε τῆς ἀτμήτου καὶ ἑκάστου τῶν τμημάτων περιεχομένοις ὀρθογωνίοις.

PROPOSITIONES.

PRIMA I.

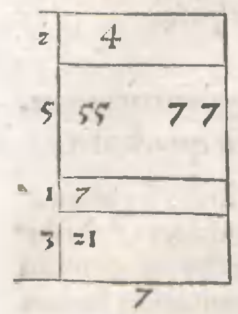
Si fuerint duæ rectæ lineæ, seceturq; altera ipsarum in quotcunq; segmenta: rectangulum comprehensum sub duabus rectis lineis, æquale est eis, quæ ab insecta & quolibet segmentorum rectangulis comprehenduntur.

Sint duæ rectę lineæ, harum etiam altera in partes quotcunq; diuisa: dico, rectangulum sub duabus datis rectis cōprehensum, eis, quæ sub indiuisa & singulis partibus rectæ diuisæ cōprehendūtur rectangulis, æquale esse. Excitetur ex alterutra alterutrius etiam lineæ extremitate, per propositionem 11. primi, ad angulos rectos linea, eaq; per tertiam eiusdem, ad æqualitatem alterius posita, ex eius altera extremitate, lineæ, ad quam πρὸς ὀρθὰς linea posita est, parallela, eiq; æqualis, recta linea ducatur, & claudatur superficies. Quòd si

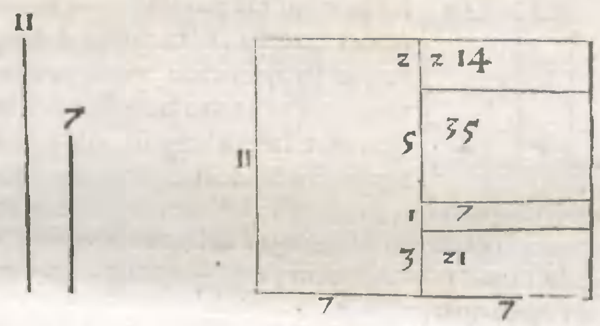


iam

iam ex singulis diuisæ lineæ punctis, lineæ rectę, eis quæ ab extremitatibus eiusdem diuisæ modò eductæ sunt, per 31 primi, parallelæ, ad latus usq; oppositum tendentes, ductę fuerint, hac structura tandem propositio sic retinebitur. Quoniam enim totale ipsis partialibus parallelogrammis, ut apparet, æquale est, totale autem cum sub duabus rectis datis, ęquali pro æquali linea sumpta, partialia item singula sub indiuisa & singulis partibus diuisę, & hic æquali subinde pro æquali linea sumpta, contineantur: sub duabus igitur datis comprehensum rectangulū eis quæ sub indiuisa & singulis partibus diuisæ continētur rectangulis, æquale erit. Si fuerint igitur duæ rectę lineæ, quarum altera quidem in segmenta quotcunq; secetur: rectangulum sub duabus rectis lineis comprehensum, ęquale est eis, quæ ab insecta & quolibet segmentorum rectangulis comprehenduntur, quod demonstrari oportuit.



POTEST FIGVRA ETIAM SIC INSTITVI.



Quia uerò omnes huius secundi libri propositiones generaliter & de lineis & de numeris intelligi, atq; per ea declarari possunt, ideo etiam, ut quæq; propositio suos proprios numeros, suas etiam conuenientes & debitas lineas haberet, diligenter curauimus, id quod boni consulere Lector uelit.

APPENDIX.

Solent Arithmetici nō rarò in multiplicatione, numerum unum eorum, qui inter se multiplicari debent, in partes aliquot distribuere: alterum deinde, cum partibus distributi singulis multiplicare, ac multiplicationis tandem productum, per horum partialium productorum summam repręsentare: atq; id certe compendio quodam, quod ex hac propositione desumptum est, facere eos, studiosi sciant.

EXEMPLVM SIT.

Indiuisus	diuisus in par.	Alias multiplicatione sic,
74	37	
1480	20	74
740	10	37
370	5	518
148	2	222
2738	ijdem numeri	2738

Huius compendij frequens usus est circa multiplicationem in regula Proportionum.

Quòd si uerò numeri illi propositi æquales inter se fuerint, utuntur pro hac prima, sequenti propositione secunda, ut quæ idem sub una recta linea, uel numero, bis tamen eo repetito, proponit, atq; in hoc prima à secunda propositione differt.

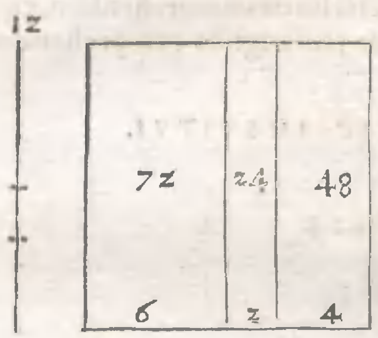
ΠΡΟΤΑΣΙΣ B.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὰ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑκατέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενα ὀρθογώνια, ἴσα ἐστὶ, τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης τετραγώνῳ.

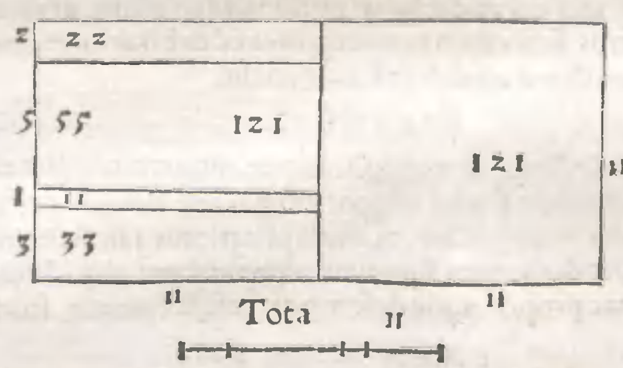
PROPOSITIO II.

Si recta linea ſecetur utcunq;: quę ſub tota & utroq; ſegmentorum rectangula comprehenduntur, æqualia ſunt ei quod à tota fit quadrato.

Sit recta linea in partes utcunq; diuiſa: dico, quæ ſub tota & utroq; ſegmentorum rectangula comprehenduntur, æqualia eſſe ei quadrato, quod à tota deſcribitur. Deſcribatur à recta data quadratũ, ex puncto deinde uel punctis diuiſionum ſingulis (nam & plurium ſegmentorum lineam hęc propoſitio ferre poteſt) ad angulos rectos lineæ, uel ſi magis placet, utriq; eorum, quæ diuiſæ datæ ad rectos inſiſtunt, laterum parallelæ, uſque ad oppoſitum latus ducantur. Et quoniam partialia per ductas parallelas deſcripta parallelogramma, ei quod à recta diuiſa deſcriptum eſt, quadrato, per propoſitionem pręcedẽtem æqualia ſunt, interiores etiam à punctis ductæ rectæ lineæ, & quadrati latera ſingula, uel hoc ſolum, cui interiores ductę inſiſtũt, omnes ſunt lineæ inter ſe equales, æquali ſubinde pro æquali linea ſumpta: hęc ut præcedens tandem manifeſta erit. Si recta igitur linea ſecetur utcunq;: quæ ſub tota & uno q;, uel quolibet ſegmentorum rectangula comprehenduntur, æqualia ſunt ei quod à tota fit quadrato. quod demonſtrari oportuit.



POTEST FIGVRA ETIAM SIC INSTITVI.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ.

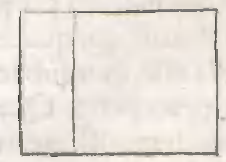
Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχε, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ προειρημένου τμήματος τετραγώνῳ.

PROPOSITIO III.

Si recta linea ſecetur utcunq;: rectangulum ſub tota & uno ſegmentorum comprehenſum, ęquale eſt ei quod ſub ſegmentis comprehenditur rectangulo, atq; ei quod à prædicto ſegmento deſcribitur quadrato.

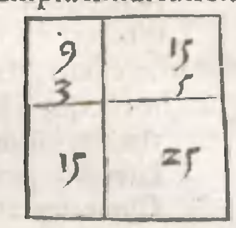
Sit recta linea ſecta utcunq;: dico, rectangulum quod ſub tota & uno eius ſegmentorum cõprehenditur, id ęquale eſſe rectangulo ſub ſegmentis comprehenſo, cum

cum quadrato prędicti ſegmenti. Deſcripta figura ut requiritur, demonſtratio ex propoſitione prima ſumi poterit, ſegmento illo in quod tota diuiſa ducta eſt, pro altera linea ſumpto. Erunt enim ſic duæ rectæ, una diuiſa, ipſa ſcilicet expoſita, & altera indiuiſa, dictum nimirum ſegmentum, de quo unumquemq; admonitum eſſe uolui.



Alia diſpoſitio.

Sunt hic compendio quodam, duo exempla ſimul iuncta.



ALIA HVIVS REI DEMONSTRATIO.

Deſcribatur ab uno ſegmentorum, utrum hoc fuerit, quadratum: latere deinde quadrati eo, quod diuiſæ rectę opponitur, ad quantitatem ſegmenti alterius ſecundum continuationem in rectum ciecto, à termino illo, tanquam à puncto dato, reliquis duobus quadrati lateribus, per propoſitionem 31. primi, parallela ducatur. Et quoniam, quod ſic deſcriptum eſt totum, duobus, quadrato ſcilicet deſcripto, & rectangulo cuidam, ęquale eſt, totum autẽ cum ſub tota recta & linea quadam uni ſegmentorum æquali comprehendatur, alia uerò duo, unum quidem ſub ſegmentis diuiſę comprehenſum, alterum uerò ex priori ſegmento quadratum deſcriptũ eſſe appareat, id quod uolebat propoſitio, iam ſic ſe habere manifeſtè patet. Si recta igitur linea ſecetur utcunq;: rectangulũ ſub tota & uno ſegmentorum comprehenſum, equale eſt ei, quod ſub ſegmentis comprehenditur rectangulo, atq; ei, quod à prædicto ſegmento deſcribitur quadrato. quod demonſtraſſe oportuit.

Eſt autem huius textus ſigura geometrica ea, quæ ex ſuperioribus eſt in ordine prima.

HAEC PROPOSITIO IN NVMERIS SIC SE HABET.

partes
Totus 8
14 {
14 6
8
112 æquales

8 8
6 8
48 64
112

partes
Totus 12
29 {
29 17
12
348 æquales

17 12
12 12
204 144
348

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ.

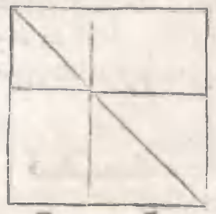
Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχε, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετράγωνον, ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις, καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

PROPOSITIO IIII.

Si recta linea ſecetur utcunq;: quadratũ quod à tota deſcribitur, ęquale eſt quadratis, quæ fiunt à ſegmentis, & ei quod bis ſub ſegmentis comprehenditur rectangulo.

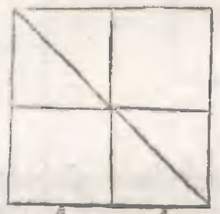
Sit recta quædam linea data, in duo etiam ſegmenta utcunq; diuiſa: dico, quòd quadratum

quadratum à tota descriptũ, æquale sit quadratis quæ à segmentis fiunt, & ei quod sub segmentis comprehenditur bis. Est hæc quarta nihil aliud quàm tertia propositio repetita bis, id quod cuilibet manifestabitur, qui quadratum totius (mutato nomine) duo rectangula esse, quæ sub tota & duobus segmentis comprehenduntur, perceperit. Quare cum iam tertia demonstrata sit, hanc quartam demonstrare non erit necesse. Quia uerò non mediocris est, in Arithmeticis præsertim, huius propositionis usus, propriam eius demonstrationem adducere libuit in hunc modum. Describatur à recta data quadratum, ducatur etiam in eo diameter à puncto deinde, uel punctis (nam ut præcedens, ita & hæc de pluribus segmentis intelligi potest) diuisionum singulis, lineis, quę à latere sunt, parallelæ ad oppositum usq; latus ducantur, ubi tandem hæ diametrum secant, per puncta illa, reliquis lateribus parallelis ductis, figura parata erit: dico ergo ut suprà.



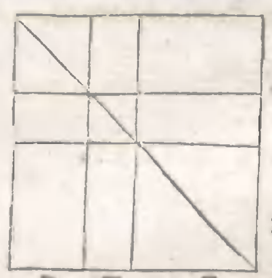
3 5

Quantum ad demonstrationem, primò demonstrandũ erit, parallelogramma illa, per quæ nimirum diameter transit, quadrata esse, & hoc quidem tali modo. Ex data recta descriptum est quadratum, cuius latera cum, ex definitione, inter se sint æqualia: qui in utraq; parte ad diametrum ponuntur anguli partiales, ex priore parte propositionis 5. primi, inter se ęquales erunt.



4 4

Et quia cuilibet partiali, ut interno est æqualis, , ex secunda parte propositionis 29. primi alius externus, æqualibus pro æqualibus angulis sumptis, singuli duo in quolibet per quod diameter transit parallelogrãmo, anguli inter se æquales erunt: quare & latera cuiusq; trianguli, quæ illos æquales angulos subtendunt, ex propositione 6. primi æqualia: atq; tandem æqualium laterum, ex 34. & communi illa noticia, Quæ eidem sunt æqualia, & inter se sunt æqualia, hæc ipsa parallelogramma, quod est notandum. Ad hæc, quia etiam ex parte tertia propositionis 29 primi, atq; ipsa 34 eiusdem, facile rectangula esse ostenduntur, cum per illam quidem, anguli horum parallelogrammorũ interiores, ex eadem parte sumpti, duobus rectis ęquales sint, per hanc uerò, angulos oppositos ęquales inter se habeant: quadrata igitur ex definitione rectangula illa, atq; segmentorum etiam, rectæ diuisæ quadrata erunt, quod primò demonstrandum erat. Nunc uerò, quoniam horum quadratorum, hoc est parallelogrammorum supplementa, ex propositione 43. primi, inter se ęqualia sunt, atq; unum quidem eorum, propter linearum æqualitatem, id quòd sub segmentis diuisæ comprehenditur: & alterum quoq; simili se modo habebit.



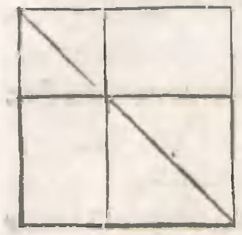
3 2 5

Ambo igitur simul ei, quod sub segmentis comprehenditur bis, æqualia erunt. Hinc quatuor illa, duo nimirum quadrata, & duo supplementa, duorum segmentorum quadratis, atq; ei quod sub segmentis comprehenditur bis, æqualia erunt. Sed quia quatuor priora, totius rectæ diuisæ quadrato, ut apparet, atq; etiam ex tertia præcedenti usurpata bis, manifestum est, ęqualia sunt: & posteriora tandem, ex communi quadã noticia, eidem quadrato æqualia erunt. Si recta igitur linea secetur utcunq;: quadratum quod à tota describitur, æquale est quadratis quæ fiunt à segmentis, & ei quod bis sub segmentis comprehenditur rectangulo. quod demonstrasse oportuit.

Ἑτέρα δεῖξις. Aliter idem ostendere.

Maneat prior dispositio. Et quoniam quadratorũ latera, ex definitione, inter se ęqualia sunt: anguli ad diametrum partiales, ex utraq; parte, per priorem partẽ propositionis quintæ primi, inter se ęquales erunt. Et rursus quoniam quadratorum anguli

anguli sunt recti, & id ex definitione: uterq; æqualium angulorum in utroq; triangulo, ex corollario propositionis 32. primi medietas recti erit. Hinc sicut partialium triangulorum unumquodq;, ex secunda parte propositionis 29. primi, angulum rectum habet, ita etiam uniuscuiusq; tertium angulum medietatem recti esse, manifestũ erit. Singula igitur triangula, ex propositione 6. primi, Isoscelia, Quadrilatera insuper, ex propositione 34. & illa communi noticia, Quæ eidem æqualia, &c. æquilatera erũt. Et quia unumquodq; etiam rectum angulum unum, cum totius rectæ diuisæ quadrato communẽ habet, unum deinde ex secunda parte propositionis 29 primi: & reliqui, illis scilicet rectis oppositi, singuli recti erunt: quadrata igitur sunt ea, per quæ diameter transit, quadrilatera: atq; illis etiam, quæ à segmentis diuisæ fiunt, æqualia. Reliqua nunc, ut in priori, demonstrantur.



ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτων φανερόν ἐστιν, ὅτι ἐν τοῖς τετραγώνοις χωρίοις, τὰ περὶ τὴν διάμετρον παραλληλόγραμμα, τετράγωνά ἐστιν.

COROLLARIVM.

Ex hoc sanè manifestum est, Quòd in quadratis spacijs circa diametrum parallelogramma, quadrata sint.

APPENDIX.

Hac propositione non rarò utuntur Logistici in regulis Algebræ. per eas enim numerorum irrationalium additionem, Aequationem deinde, in qua, tribus quantitatibus, naturalis ordinis uel æqualibus medijs, propositis, duæ maioris appellationis, tertiæ, cui minor est appellatio, adæquantur, & alia quædam demonstrare solent.

PRIMO QVANTVM AD ADDITIONEM.

Additturi √ 18 ad √ 32 uel id genus, irrationalium numerorum, addunt primò illorum irrationalium quadratos, uno deinde cum irrationali altero multiplicato, numerum qui producitur, propter duo supplementa, bis sumunt. Postremò huius quartę propositionis memores, quæ dicit, Quadratum lineæ, uel numeri, ὡς ἔτυχε diuisi, tantum esse, quantum ex quadratis partium illius, cum eo quod ex una parte cum altera multiplicata bis sumpto, efficitur: omnia hæc, tam quadrata partium, quàm etiam duo supplementa, quę nimirum ex multiplicatione unius partis diuisi numeri cum altera, bis repetita nascuntur, simul iungunt, idq; propterea quidẽ, ut totius compositi seu in partes diuisi numeri quadratum habeat, per huius tandem quadrati radicem, quantum sit ipsum latus uel totus numerus, enuncient.

SEQVITVR CALCVLVS.

50
√ 13 ad √ 32
√ 576, bis
√ 2304
hoc est 48. duo supplementa

Addantur nunc 50, partium quadratis
48, duo supplementa
ueniunt 98, quadratum totius
quare √ 98 ipsum latus,
hoc est partium seu surdorum propositorum summa.

ALIVD EXEMPLVM.

Addantur √ 13 ad √ 21
√ 273, bis
√ 1092, duo supplementa
34, quadrata partium,
quare 34 + √ 1092, quadratum totius compositæ lineæ uel numeri.

numeri. Huius igitur radix quadrata, quæ est

Radix collecti $34 + \sqrt{1092}$, uel $\sqrt{21} + \sqrt{13}$, numerus ipse.

Quomodo autem uera radix posita, utpote $\sqrt{21} + \sqrt{13}$, ex hoc collecto, quod Ex binis nominibus prima dicitur, inueniri debeat, id iamdudum traditum est.

SEQVITVR QVAESTIO.

Est numerus quidam diuisus in duas partes, partes autem cum sint 13 & 21, quantus ipse totus numerus sit, quæritur. Facit 34.

Id quod per additionem partium ad se, facile deprehenditur.

Quòd si quis exercendi ingenij gratia altius hoc quærere uelit, ad quartã huius secundi libri propositionem confugiat necesse est, atq; sic operetur.

Partes propositæ sunt 13 & 21, Partium quadrata 169 & 441, Quod fit, una parte cum altera multiplicata, 273

bis

duo supplementa 546

Partium quadrata 610

quadratum igitur totius 1156, atq; tandem

ipse totus numerus, 34, qui quærebatur.

ALIA QVAESTIO.

Partes alicuius numeri sunt 49 & 36, quantus est ipse totus.

Facit 85.

Nam quadrata partium sunt 2401, & 1296. multiplicatio uerò unius partis cum altera bis, producit 3528. Omnia hæc simul iuncta, ueniunt 7225, quare huius radix quadrata, 85, ipse totus numerus, qui ex additione datorum constituitur. Atq; hæc de additione dicta sufficiant. Sequitur

AEQVATIO.

Tradidimus in regularum Algebræ descriptione tres æquationes, tanquam potiores, quibus subinde, per has regulas ænigmata soluere cupientes opus habent. Quoniam uerò secundam æquationem per tres canones descripsimus, primus autem eorum ex hac quarta propositione est desumptus, atq; nihil aliud ferè esse uidetur, cum idipsum sic sese habere manifestauerimus, propositio etiã paulo ante demonstrata sit, & hunc canonẽ tandẽ demonstratũ & fundatum esse, nemo dubitet.

Porrò canonis huius tractatio, est de tribus naturalis ordinis quantitatibus, quando uidelicet maiores duę, id est harum numeri, minimæ quantitatis seu characteris numero æquantur. ut est

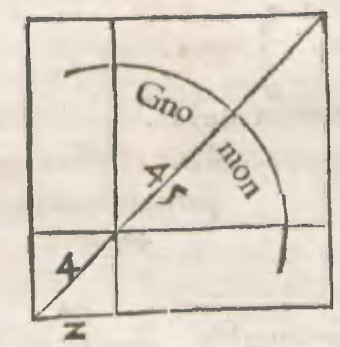
Prima + radix Numero.

Tum ad quadratum (ut paucis repetantur priora) dimidij numeri characteris medij, numerus characteris minimi addi, à radice deinde huius collecti quadrata, dimidium characteris medij subtrahi debet: quo facto, quęsiti numeri compos aliquis erit, cũ uidelicet per id quod relinquitur, radicis ualor exprimatur. ut Esto quòd per alicuius exempli operationem eò peruentum sit, ut 1 prima + 4 radix æquales sint 45 N. huius geometrica solutio uel demonstratio talis erit.

Quoniam enim, ut canon habet, ad quadratum dimidij numeri characteris medij, numerus characteris minimi addi, à radice deinde huius collecti quadrata dimidium numeri characteris medij subtrahi debet, hoc certe si quis propositionem hanc quartam, ac canonem etiam altius perpenderit, unam rem esse, alijs tamen atque alijs expressam uerbis, asseret. Nam ultimum quadratum, pro quadrato alicuius totius, puta numeri in partes diuisi habebit: dimidium uerò radicis characteris medij, alteram huius diuisi partem: numeros deinde additos, cum ipsorum additio

ditio quadratum efficiat, Gnomonem, ut quem, ex definitione, utrunq; circa diametrum parallelogrammum, & duo supplementa cõstituunt, exponet. Hac expositione tandem, huius quartæ propositionis memor, ex toto quadrato radicem eliciet. Et quia hæc ex partialium quadratorum radicibus composita est, cum unius partialis quadrati radix, dimidium scilicet numeri characteris medij, nota sit: & altera tandem, radix nimirum propositi in exemplo quadrati, subtractione nota erit, id quod pro declaratione huius canonis dicendum erat.

SEQVITVR HVIVS REI FIGVRA GEOMETRICA.



49
quadratum ultimum & totius diuisi.

Quadratum medietatis medij.

Est demonstratio uel expositio geometrica, puerilis quidem illa, sed quæ rem fidelissimè explicat.

SEQVITVR QVAESTIO CVM CANONI, TVM etiam propositioni accommoda.

Diuidatur numerus in partes duas, quarum quadrata simul, unà cum numero, quem producunt partes inter se multiplicatæ bis 1764 constituant. Vna autem pars cum sit 13 (atq; tantam esse medietatem quantitatis mediæ intelligendum est) quanta fuerit altera quæritur.

Facit 29.

ACCEDIT ET TERTIVS HVIVS QVARTAE PROpositionis, quem habet in Numeris, usus.

In radicibus eliciendis cum semper inuenti numeri quadratum inuestigandum sit, ille uerò numerus subinde, quàm diu sanè durat huiusmodi operatio, una figura crescat, ne totus inuentus semper in se multiplicandus sit, ubi propositionem hanc quartam intellexerint Arithmetici, compendiosius inuentorum quadrata assequentur, per hunc modum. Habito de numero iam inuento, tanquam de una parte totius, quadrato, recipiatur etiam quadratum de numero uel parte altera: una deinde parte cũ altera multiplicata, is qui producitur numerus bis sumatur. Quòd si tandem hoc duplum prioribus duobus partium quadratis cõiungetur, per id collectum tandem commodè, iuxta hanc quartam propositionem, quadratum totius inuenti numeri exprimi poterit.

Huius rei tale sumatur exemplum.

Inuenta est radix ex aliquo numero 6. cuius quadratum quidẽ 36. accedit autem huic radici seu inuento numero, cum nondum ad finem hæc radicis extractio perducta sit, figura alia, nimirum 4, atq; sic aucta est prior inuẽta radix: creuit enim à 6 in 64, atq; huius totius iam desideratur quadratũ, uel quadratus numerus. Prioris igitur figuræ uel inuenti numeri, tanquam unius partis radicis diuisæ, quadrato habito, accipiatur & quadratum alterius, secundò scilicet inuenti numeri, 4, quod erit 16. Et quia numerus primò inuentus, 6. secundum iam locum occupat, unde ratione loci sic, non sex amplius, sed sexaginta significat, ipsius igitur quadrato, 36

T scilicet,

ſcilicet duæ figuræ nihili proponendæ ſunt. Poſtremò una cum altera parte multiplicata bis, producuntur 480. Hæc omnia ſi in unam ſummam colligantur, quantum ſit quadratum de 64, apparebit.

SEQVITVR PRAXIS.

	Partes	partium quadra.	Aliàs multiplicatione ſic
Tota radix uel numerus 64	60	3600	64
	4	16	cum 64
Quod producitur, una parte cum altera multiplicata bis		480	256
			384
Summa productorum		4096	4096

Quòd ſi uerò adhue una figura acceſſerit, 8 ſcilicet, operatio ſic inſtituatur.

	Partes	partium quadrata	Multiplicatione ſic
Totus numerus 648	640	409600	648
	8	64	cum 648
Ex partium multiplicatione repetitum bis		10240	&c.
Summa omnium, & quadratum totius		419904	

Atq; hactenus de propoſitione quarta. ſequitur

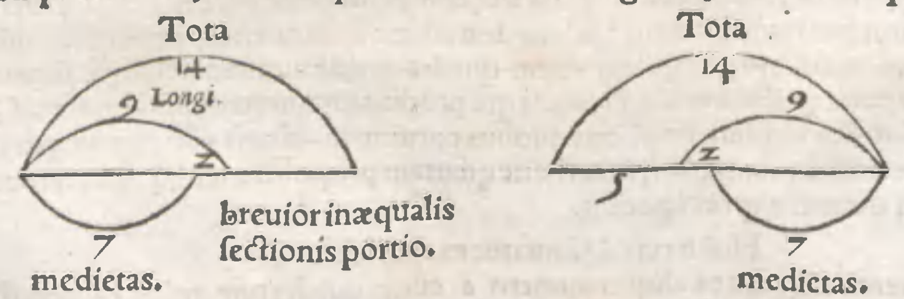
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα· τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνῳ.

PROPOSITIO V.

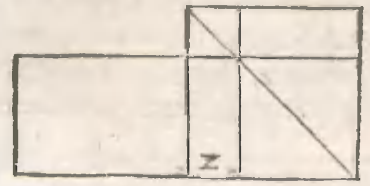
Si recta linea ſecetur in æqualia & non æqualia: rectangulum, quod ſub inæqualibus ſegmentis totius comprehenditur, unà cum quadrato eo quod à medio ſectionũ fit, æquale eſt ei quod à dimidio fit quadrato.

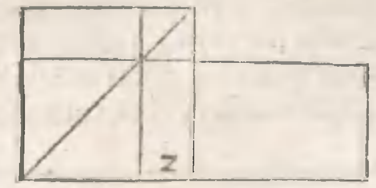
Sit recta quædam linea propoſita, atq; hæc primũ in duo æqualia, deinde etiam in duo inæqualia diuidatur: dico, rectangulum ſub portionibus inæqualis diuiſionis comprehenſum, unà cum quadrato exceſſus longioris portionis inæqualium



ſuper medietatem lineæ, æqualia eſſe quadrato medietatis. Deſcribatur à dimidia illa, in qua eſt punctum inæqualis diuiſionis, quadratum, cuius diameter cum una datæ extremitate copuletur, atq; ab inæqualis diuiſionis puncto, per diametrum ad latus uſq; oppoſitum, reliquis duobus quadrati lateribus parallela ducatur. Et quia hæc diametrum ſecat, ubi ex puncto interſectionis, utriſq;, hoc eſt, & rectæ datę, & lateri ei oppoſito, altera parallela, datæ æqualis, ducta, ea deinde per tertiam parallelam, cum extremitate datæ, quę adhuc libera eſt, copulata fuerit, figura parata

parata erit. Dico ergo nunc, ut ſuprà. Quoniam enim ſupplementa omnis parallelogrammi inter ſe æqualia ſunt, his nunc æqualibus quadrato breuioris portionis, tanquam communi addito: & quæ colliguntur, ex cõmuni quadam noticia, æqua-





lia erunt. Sed quia unum ex his alij cuidam, cum quo nimirum æqualem baſim habet, atq; in eiſdem eſt parallelis, ex propoſitione 36. primi, eſt æquale: & alterum, ex communi quadam noticia, eidem æquale erit. His igitur æqualibus nunc, ut tandem concludatur, ſi utriq; id quod alterum ęquale ad complendum medietatis quadratum requirit, addatur: & producta, hoc eſt rectangulum ſub portionibus inæqualibus comprehenſum, cum quadrato quod ab intermedia portione deſcribitur, & quadratum medietatis, inter ſe æqualia erunt. Si igitur recta linea ſecetur in æqualia, & non æqualia: rectangulũ quod ſub inæqualibus ſegmentis totius comprehenditur, unà cum quadrato eo quod à medio ſectionum fit, æquale eſt ei quod à dimidio fit quadrato. quod demonſtraſſe oportuit.

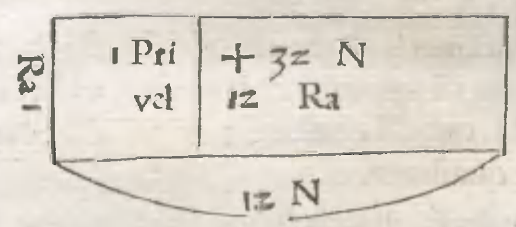
APPENDIX.

Habet & hæc propoſitio ſuum in Numeris locum, cum per eam tertius ſecundæ æquationis canon, (quo nimirum maximi & minimi characterum numeri, medij characteris numero ęquales eſſe proferũtur) demonſtrari ſoleat in hunc modũ.

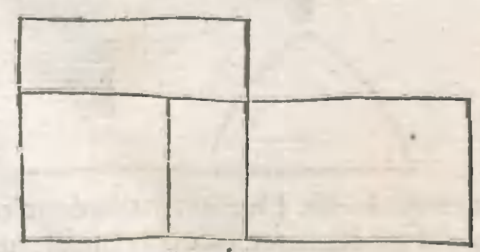
Eſto exempli gratia, quòd

1 prima + 32 N æquales ſint 12 rad.

Deſcribatur igitur primò quadratum, propoſitæ æquationis unam primam repræſentans. huic deinde quadrato, ex una eius parte, eiuſdem altitudinis rectangulum, numeros in æquatione uni primę adhærentes ſignificans applicetur. Et



quoniam hoc totum rectangulum, ex hypotheſi, 12 radicibus ęquale eſt, cum breuius eius latus ratione quadrati, ſit una radix: eius latus longius, 12 unitates erunt. Eo igitur longiori latere, ut canon præcipit, bifariam diuiſo, erit hoc idem longius latus, linea, qualem propoſitio hæc quinta requirit, εἰς ἴσα ſcilicet καὶ ἄνισα diuiſa, quod eſt notandum. Deſcribatur nunc ab una medietate diuiſæ quadratum, compleaturq; figura. Et quoniam medietatis quadrato, rectangulum numerorum cum quadrato lineæ,

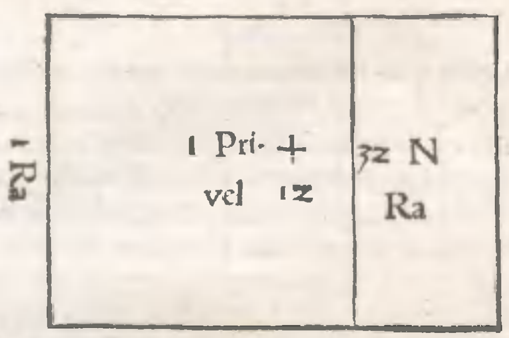


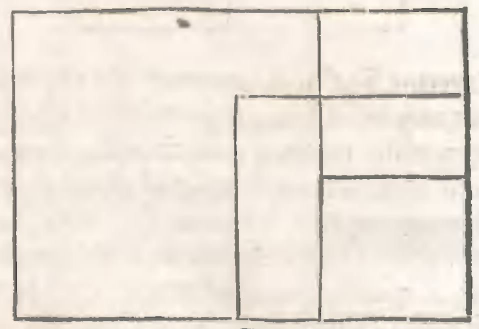
portio quæ à dimidio characteris medij ſubtrahi debet.

qua rectanguli longius latus medietatem diuiſæ excedit, ex hac quinta, æquale eſt, ubi horum æqualium uni rectangulum numerorum: alteri uerò id, quod rectangulo numerorum, ex propoſitionibus quadrageſima tertia & triceſima ſexta primi, ac communi illa noticia, Si ęqualibus ęqualia adijciantur, etc. æquale eſt, ablatum fuerit: & quæ relinquuntur tandem, ex communi quadam

 noticia,

noticia,inter se æqualia erunt. Quia autem ex utraq; parte unũm & idem parallelogrammum, quadratum scilicet circa diametrum alterum, relinquitur, quadratum uerò illud notum est, cum uidelicet totum,hoc est quadratum medietatis,& subtractum deinde,hoc est,parallelogrammum uel rectangulum numerorum,nota sint: & eius radix nota erit.Ea igitur(ut quidem habet descriptio figurarum prima) à radice totius quadrati, quod uidelicet à medietate numeri characteris medij descriptum est,subtracta: Vel ea,(ut habet descriptio figurarum secunda)radici eiusdem





Portio
quæ dimidio characteris medij
addi debet.

totius quadrati,addita:alterius quadrati, quod in æquatione propositum est, radicem notam relinqui necesse erit: id quod pro huius canonis demonstratione, uel pro eius ad hanc propositionem applicatione,dicendum erat.

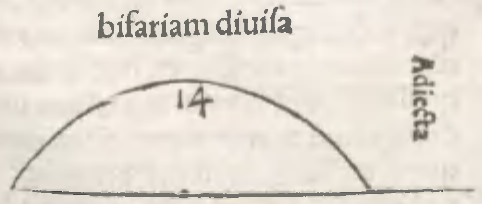
ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5.

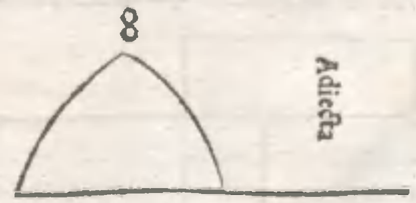
Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα, ἐπ' εὐθείας· τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τῆς προσκειμένης περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνου, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης, ὡς ἀπὸ μιᾶς, ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.

PROPOSITIO VI.

Si recta linea bifariam secetur,adijciaturq; aliqua ei in rectũ recta linea: rectangulum comprehensum sub tota cũ apposita & apposita, unà cum quadrato dimidiæ lineæ,æquale est ei quod à coniuncta ex dimidia & apposita,tanquam ab una, describitur quadrato.

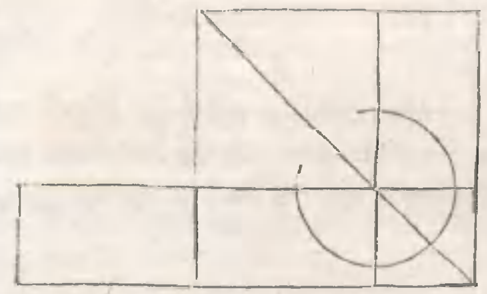
Sit recta linea proposita,qua bifariam diuisa, alia ei in rectum linea iungatur,rectangulo deinde & quadratis secundum suas lineas descriptis:dico, rectangulum sub tota,ex recta data scilicet & adiecta composita,& adiecta comprehensum,unà cum quadrato quod à medietate diuisæ describitur, quadrato à medietate diuisæ

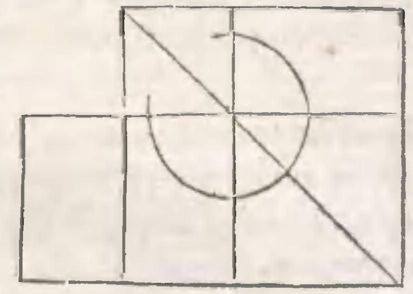




& adiecta, tanquam ab una linea, descripto æquale esse. Ducatur in quadrato eo, quod à medietate diuisæ cum adiecta descriptũ est, diameter, sic ut per quadratum etiam,à medietate diuisæ descriptum,tanquam diameter transeat,deinde latus quadrati eius, quod à medietate descriptum est alterum,usq; ad oppositum rectanguli latus continuetur. Et quoniam super æqualibus basibus, atq; in eisdem parallelis constituta

constituta parallelogramma, ex propositione 36. primi inter se æqualia sunt. Et rursus, quoniam etiam parallelogrammorum supplementa omnis parallelogrãmi spacij,ex propositione 43 eiusdem primi,æqualia, cum duo uni æqualia esse appareant, illa deinde inter se, ex cõmuni quadã noticia ęqualia sint, horum æqualium utriq;,parallelogrammo eo quod ad rectam,ex dimidia & apposita cõpositam,ponitur addito: & quę fiunt rectangulũ scilicet sub tota & adiecta comprehensum,&





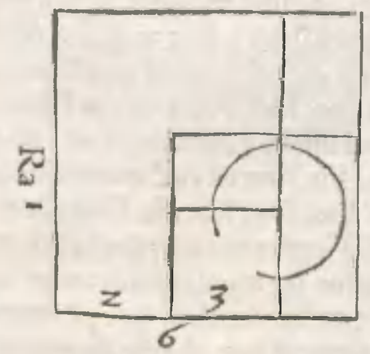
Gnomon,qui quadrato medietatis circumscribitur, inter se æqualia erunt. Ipsum igitur medietatis quadratum,ubi his æqualibus adiectum fuerit,iuxta propositionis tandem conclusionem, id quod sub tota, ex data scilicet & adiecta composita, & adiecta comprehenditur rectangulum, unà cum quadrato medietatis diuisæ,ei quod à linea ex medietate & adiecta, constituta descriptum est,quadrato, æquale erit.Si recta igitur linea bifariã secetur, adijciaturq; aliqua ei in rectum recta linea: rectangulum comprehensum sub tota cum apposita & apposita,unà cum quadrato dimidiæ lineæ, æquale est ei quod à coniuncta ex dimidia & apposita,tanquam ab una describitur quadrato. quod demonstrasse oportuit.

APPENDIX.

Vtuntur hac propositione Logistici in regulis Algebræ,pro demonstratione canonis secundi in æquatione secunda.

Conferuntur in hoc canone duo minorum characterum numeri, cum numero characteris maximi, dicendo, 6 radices + 16 numeris,sunt æquales uni primæ ubi tum geometrice sic agendum erit.

Describatur primò quadratum, quod propositæ æquationis primam repręsentet. Et quoniam id ex hypothesi, 6 radicibus & 16 N. æquale est, pro rectangulo numerorum parte aliqua ab eodẽ resecta,quod relinquitur tandem rectangulum, radicibus solum æquale erit. Describantur nunc duo quadrata, quorum quidem



unius latus sit propositarum radicum medietas, alterius uerò, hæc eadem radicum medietas, unà cum rectanguli numerorum latere ei in rectũ iuncto. Et quoniam rectangulum numerorũ, tanquã id quod sub tota composita et adiecta seu apposita comprehenditur, unà cum quadrato dimidiæ lineæ, per hanc sextam propositionem, ei quod à recta ex dimidia & adiecta composita,tanquam ab una linea describitur, quadrato æquale est, unum autem horum, rectangulum scilicet numerorum cum quadrata dimidię,notum cum sit: & alterum, quadratum

 scilicet

ſcilicet lineæ, à dimidia & adiecta compoſitæ, iam notum erit: quare & ipſius latus notum. Id autem cum à latere quadrati primò deſcripti, in dimidia diuiſæ lineæ altera deficiat, per additionem igitur huius ad latus notum: & ipſius tandem primò deſcripti quadrati latus, hoc eſt radicis ualor notus erit: id quod paucis, quemodo ex hac propoſitione geometricè is canon declarari ac retineri poſſit, indicare uoluimus. Atq; hæc quidem, pro demonſtratione canonũ ſecundæ æquationis in regulis Algebræ dicta, ſufficiant. Quas uerò ſubtiliores illi demonſtrationes habent, eas ſuo tempore peculiari quodam libello Lectori communicabimus.

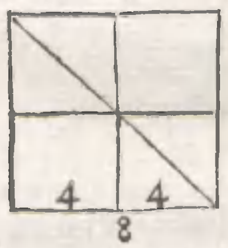
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ.

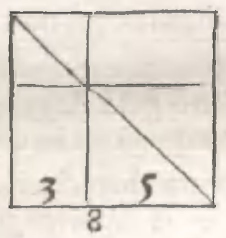
Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀφ' ἑνὸς τῶν τμημάτων, τὰ συναμφότερα τετράγωνα, ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

PROPOSITIO VII.

Si recta linea ſecetur utcunq;: quod à tota, quodq; ab uno ſegmentorum, utraq; ſimul quadrata, æqualia ſunt ei, quod bis ſub tota & dicto ſegmento comprehenditur rectangulo, & ei quod à reliquo ſegmento fit quadrato.

Sit recta linea ſecta utcunq;, hoc eſt, in æqualia uel non æqualia: dico, quòd quadratum totius & quadratum alterutrius ſegmenti æqualia ſint rectangulo ſub tota & ſumpto ſegmento comprehenſo bis, cum alterius ſegmenti quadrato. Formetur ex recta data figura, prout ipſa propoſitio exigit, & prout habet propoſitio huius quarta: & ducatur diameter, per ſingula quadrata tranſiens. Et quoniam ex propoſitione quarta huius, quadratũ totius quadratis partium, & ei quod cõprehenditur ſub partibus bis, æquale eſt, æqualibus nunc æquali, quadrato ſcilicet unius ſegmenti, ex æquo addito: mutatis deinde appellationibus, propoſitioni ſatisfactum erit.





ALIA HVIVS, ET CLARIOR DEMONSTRATIO.

Ex linea, ut quidem propoſitio requirit, figura formata, cum τὰ παραπληρώματα omnis parallelogrammi ſpacij inter ſe ſint æqualia, cumq; etiam æqualia, uel aliquod commune, ut hoc loco eſt dicti ſegmenti quadratum, æqualibus additum, quæ inde colliguntur æqualia ſint: hæc duo æqualia ſimul ſumpta, ad utrunq; æqualium dupla erunt. Sed quia ad utrunq; eorũ duplum etiã eſt, quod ſub tota & dicto ſegmento comprehenditur bis, cum ex communi quadam noticia Euſdem duplicia, inter ſe æqualia ſint: & hæc duo, hoc eſt, Gnomon cum quadrato dicti ſegmenti, & quod ſub tota ac dicto ſegmento comprehenditur bis, inter ſe æqualia erunt. atque hæc tandem, ſi alterius ſegmenti quadratum ex æquo acceperint: cum ſic & collecta æqualia ſint, conſtat tandem propoſitum. Si recta linea igitur ſecetur utcunque, quod à tota, quod'que ab uno ſegmentorum, utraq; ſimul quadrata, æqualia ſunt ei, quod bis ſub tota & dicto ſegmento comprehenditur rectangulo, & ei quod à reliquo ſegmento fit quadrato, quod demonſtrari oportuit.

APPENDIX

APPENDIX.

Habet & hæc propoſitio ſuum in Arithmeticis uſum, cum per eam modus ſubtrahendi radices quadratorum irrationales retineatur.

Quo ingenio Arithmetici radices quadratorum irrationales, unam ab altera ſolent ſubtrahere, ex hac propoſitione didicerunt. Poſtquam enim per eam quadratum alicuius rectæ diuiſæ, cum quadrato alterutrius ſegmenti, ei quod ſub tota & dicto ſegmento continetur bis, cum eo quod à reliquo ſegmento deſcribitur quadrato, æquale eſſe cognouerunt, facilis illis fuit omnis ſubtractio. Nam mutatis numerorum appellationibus, numerum ſcilicet à quo ſubtrahitur, totum: ſubtrahendum deinde, unum ſegmentum: reſiduum porrò, alterum diuiſæ rectæ ſegmentum eſſe conſiderantes, ſtatim hac propoſitione freti, quadrata numerorum, eius ſcilicet à quo ſubtrahitur, atq; etiam ſubtrahendi, in unum colligunt. Et quia collectum id ex hac propoſitione, tanto maius eſt quadrato reſidui, quantum ſub his duobus numeris, toto ſcilicet & uno ſegmento, cõtinetur bis, ut de quadrato reſidui, deq; ipſo reſiduo illis conſtaret, mox illud comprehenſum bis de quadratorũ collecto ſubtrahunt, quod quidem obiter circa hanc propoſitionem indicandum erat.

SEQVITVR HVIVS REI EXEMPLVM.

A $\sqrt{75}$ debet ſubtrahi $\sqrt{27}$, inſtituitur ergo operatio ſic,

Numerus ſubtrahendus, hoc eſt, unum ſegmentum,		numero à quo ſubtrahitur, hoc eſt, à toto,
$\sqrt{27}$	à	$\sqrt{75}$

102 Totius & ſubtrahendi quadratum
90 Quod ſub toto & ſubtrahendo bis
12 Quadratum reſidui numeri
Quare $\sqrt{12}$, ipſe reſiduus numerus.

SEQVITVR QVAESTIO.

De numero 34 ſubtracta ſunt 13, quæritur de reſiduo. Facit 21.

Id quod per ſubtractionem 13 à toto numero, facile deprehenditur.

Quòd ſi quis, exercendi ingenij gratia, hoc altius quærere uelit, ad ſeptimam huius ſecundi libri propoſitionem confugiat neceſſe eſt, atque ſic operationem ſuam inſtituat.

	Vnum ſegmentum		toto
Subtrahantur	13	à	numero 34
quadrata	169		1156

Quadratorum ſumma 1325
minus 884, hoc eſt, eo quod ſub toto, & dicto ſegmento continetur bis,
manent 441, quadratum reſidui
Quare 21, numerus reſiduus.

ALIA QVAESTIO.

Sunt duo numeri. Quoniam autem unius numeri quadrato 49. continentur, compoſitus uerò ex illis cum quadratum habeat 121, quantus ſit numerus alter, quæritur. Facit 4.

121 49

170
minus 154
manent 16
Quare 4 &c.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

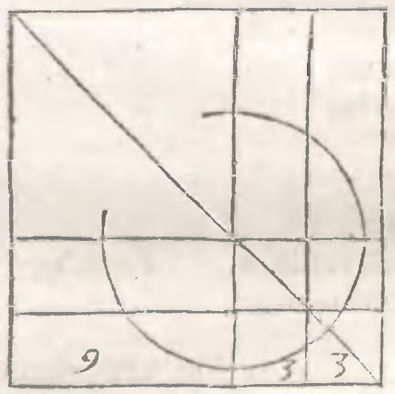
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε· τὸ τετράκις ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνου, ἴσον ἐστὶ, τῷ τε ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος, ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.

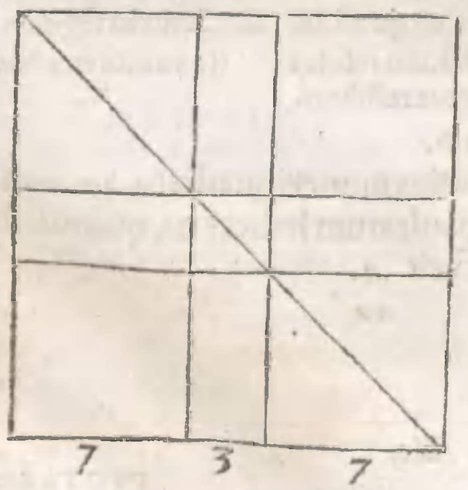
PROPOSITIO VIII.

Si recta linea ſecetur utcunq;: rectangulum quod ſub tota & uno ſegmentorum comprehenditur quater, cum eo quadrato quod à reliquo ſegmento deſcribitur, ęquale eſt ei quod à tota & dicto ſegmento, tanquam ab una linea deſcribitur quadrato.

Sit recta linea ſecta: utcunq; dico, quòd rectangulum, ſub tota & uno ſegmentorum comprehenſum, quater, unà cum quadrato alterius ſegmenti, ęquale ſit quadrato, quod à tota & dicto priori ſegmento, tanquam ab una recta, deſcribitur. Deſcribatur primò quadratum, cuius latus ſit ipſa recta data, cum alterutra eius portione ſibi adamuſſim iuncta: à punctis deinde, coniunctionis ſcilicet uno, & diuiſionis altero, duæ per quadratum hoc tendentes ad augulos rectos lineæ excitentur, quadrati tandem diametro ducta, ubi hæc duas ad rectos ductas lineas ſecuerit, per ea puncta, tanquã à pũctis datis, reliquis duobus quadrati lateribus, per propoſitionem 31 primi, parallelæ ducantur, & erit huius propoſitionis figura parata. quam quidem ſi quis diligenter inſpexerit, atq; τῆς κατασκευῆς, necnon eorum etiam quæ in propoſitionibus 36 & 43 primi tradita ſunt, memor fuerit, facili opera propoſitioni, ex quarta huius, ſatisfacere poterit.



Diuiſa	Vnum ſegmentorum.
12	
9 3	3
12	12
3	& 3
36	15
quater	cum 15
144	75
81	15
225	225



Diuiſa	Vnum ſegmentorum.
10	
in 7 & 3	7
10	10
7	& 7
70	17
quater	cum 17
280	119
9	17
289	289

numeri æquales.

ALIA HVIVS ET CLARIOR DEMONSTRATIO.

Sit recta data, ea etiam utcunq; diuiſa: dico &c. Quoniam recta in duo diuiſa eſt, ſegmento ei quod in collatione cum tota diuiſa ſumitur, ad partem etiam ubi ponitur, æqualis recta alia adamuſſim iungatur, quadrato deinde ab hac tota compoſita per 46 primi deſcripto, dupla figura deſcribatur. Et quoniam rectæ diuiſæ alia recta, uni ſegmentorũ æqualis, adamuſſim iuncta eſt, cum parallelogrammorum latera oppoſita, ut in primo libro demonſtratum eſt, inter ſe ęqualia ſint: illæ etiam quas hæ duæ rectæ, hoc eſt ſegmentum id, & recta ei æqualis, lineas ſibi ęquales habent, inter ſe æquales erunt, ſuper ijs deinde parallelogramma poſita, cum hęc etiam æquealta ſint, ex propoſitione 36 primi inter ſe æqualia. Sed quoniam ſupplementa omnis parallelogrammi, ut iam ſępe dictum, inter ſe æqualia ſunt: & hæc quatuor parallelogramma, quæ ſuper illo ſegmento & ſua æquali, atq; alijs duabus, his æqualibus, rectis conſtituta ſunt, ex communi quadam noticia, inter ſe ęqualia erunt, atq; deinde horum quatuor aggregatũ, ad id quod ſuper idem ſegmentum eſt poſitum parallelogrammum, quadruplum. Pari ratione & reliqua quatuor, circa uel extra diametrum poſita parallelogramma, inter ſe æqualia, ac totum deinde ad id quod ſupra alterum diuiſæ ſegmentum eſt poſitum, quadruplũ. Illud igitur prius cum hoc aggregato, quæ ambo ſimul Gnomonis figuram referunt, ad rectangulum, ſub tota & uno ſegmentorum comprehenſum, quadruplum erit. Quare alterius ſegmenti quadrato ex ęquo illis appoſito: gnomon cum illo alterius ſegmenti quadrato, hoc eſt, totius compoſitę, ut unius lineæ, quadratum, ei quod ſub tota & dicto ſegmento comprehenditur quater, cum eodem alterius ſegmenti quadrato, ęquale erit. Si recta igitur linea ſecetur utcunq;: rectangulũ, quod ſub tota & uno ſegmentorum comprehenditur quater, cum eo quadrato quod à reliquo ſegmento deſcribitur, ęquale eſt ei quod à tota & dicto ſegmẽto, tanquam ab una linea deſcribitur quadrato. quod demonſtrari oportuit.

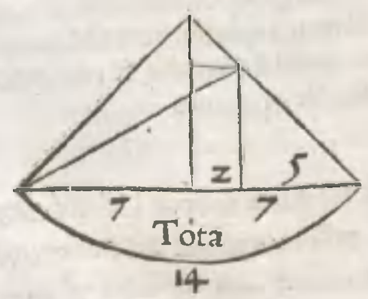
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα· τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων τετράγωνα, διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας, καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου.

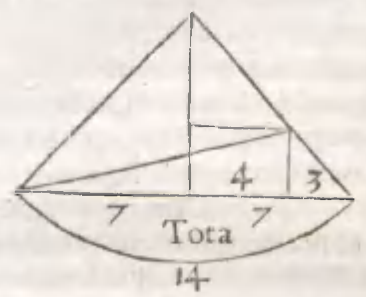
PROPOSITIO IX.

Si recta linea ſecetur in æqualia, & non æqualia: quæ ab inæqualibus ſegmentis totius fiunt quadrata, dupla ſunt eius quod à dimidia, & eius quod à medio ſectionum fit quadratorum.

Sit recta linea, in duo æqualia, in duo etiam inæqualia diuiſa: dico, quadrata inæqualium ſegmentorum ſimul ſumpta, dupla eſſe quadratorũ, quorum unum quidem à medietate lineæ, alterum uerò ab ea quæ diuiſionum punctis interiecta eſt linea, deſcribitur. Excitetur ex puncto æqualis diuiſionis in linea, per propoſitionem 11. primi, ad angulos rectos linea, eaq; per 3 eiuſdem, ad æqualitatem medietatis diuiſæ poſita, ab eius altera extremitate duæ ad rectæ diuiſæ extremitates lineæ demittantur. Deſcribuntur autem ſic duo triangula, rectangula, & Iſoſcelia, ut patet ex ſtructura. Excitetur rurſus ex puncto inæqualis diuiſionis, alia ad angulos rectos linea, uel ſi mauis, priori ad rectos ductę linea parallela, eaq; ad latus uſq; oppoſitum continuata, ab huius & lateris oppoſiti contactu, ad priorem in triangulo πρὸς ὀρθὰς ductam linea diuiſę parallela ducatur. Et deſcribuntur alia duo triangula,



quæ & ipſa, ut patebit, rectangula ſunt, & iſoſcelia. Quòd ſi tandem à communi horum duorum triangulorum copula, ad illam rectæ diuiſæ extremitatem, quæ huic quodammodo è regione poſita eſt, linea recta ducatur, huius propoſitionis figura conſtituta erit, cuius quidem explicatio & demonſtratio talis. Quoniam ad punctum æqualis diuiſionis conſtitutorum triangulorum utrunq; iſoſceles eſt, ex ſtructura, & orthogonium, cum anguli eorum ad baſim, per priorem partem propoſitionis quintæ primi, inter ſe æquales ſint, uterq; in utroq; triangulo angulus, primò, ex corollario propoſitionis 32 primi, medietas recti: angulus deinde integer, quem recta diuiſa ſubtendit: rectus erit. Ad hæc, cum linea ex communi partialium triangulorum copula ueniens, ut habet propoſitionis ſtructura, diuiſæ rectæ ſit parallela, deinde uerò alia quædam recta, quæ uidelicet ex puncto ęqualis diuiſionis in recta data πρὸς ὀρθὰς excitata eſt, in illas parallelas incidat: angulus externus, ex ſecunda parte propoſitionis 29 primi, ſuo interno & oppoſito æqualis eſt. Quia uerò rectus eſt ipſe internus, ex ſtructura: & externus ſic rectus erit. rectangulũ igitur eſt illud partiale triangulum, atq; deinde per corollarium propoſitionis 32 primi, & ſextam propoſitionem eiuſdem, idem etiam iſoſceles. In hunc modum, & alterum partiale triangulum, ut rectangulum & iſoſceles ſit, demonſtrabitur. Nunc autem cum trianguli rectanguli & iſoſcelis, eius quidem, cuius latera ſunt, ſubtenſa indiuiſa, medietas rectæ indiuiſa, & perpendicularis, medietati diuiſæ ęqualis, quadratũ lateris rectum angulum ſubtendentis, reliquis duorum laterum, quadratis, per propoſitionem 47 primi, æquale ſit: erit propter æqualitatem laterum, illud ad utrunq; eorum duplum. Eſt itaq; quadratum hypotenuſæ huius rectanguli, quadrato medietatis rectæ diuiſæ duplũ, quod eſt notandum. Pari ratione etiam in triangulo rectãgulo & Iſoceli partiali ſuperiori, cuius nimirum alterũ circa rectũ angulũ latus, pars eſt perpendicularis, ex ęqualis diuiſionis puncto excitatæ, quadratum ſubtenſæ angulo recto, ad quadratum lineæ, quæ ex communi partialium triangulorum copula, medietati rectæ diuiſæ eſt ad æquediſtantiã ducta, duplum erit: quare etiam ad quadratum ſuæ ęqualis, lineæ ſcilicet, quę inter diuiſionis puncta iacet, duplum. Cum aũt iam duæ lineæ ſint, quarum utriuſq; quadratũ, ad alterius lineæ quadratum duplum eſt, & illarum quadrata ſimul ſumpta, ad harũ ſimul ſumpta quadrata dupla erunt. Sed illarum linearum quadrata, quæ ſunt ad alia dupla, æqualia ſunt, quadrato lineę, ex communi partialium triangulorum copula ad angulum oppoſitum ductæ, cuius quadrato etiam (cum hæc linea duorum orthogoniorum triangulorum rectos ſubtendat) ſi ęqualis pro æquali linea ſumatur, ſegmentorum inæqualis diuiſionis quadrata æqualia ſint, per communem tandem illam noticiam: Quę eidem ęqualia, & inter ſe ſunt æqualia, propoſitum inferri poterit, nimirum. Si igitur recta linea ſecetur in æqualia & non æqualia: quæ ab inæqualibus ſegmentis totius fiunt quadrata, dupla ſunt eius quod à dimidia, & eius quod à medio ſectionum fit quadratorum. quod demonſtraſſe oportuit.



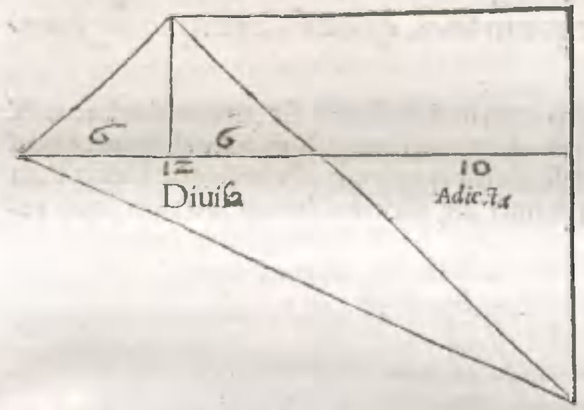
ΠΡΟΤΑΣΙΣ I.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθείας, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς προσκειμένης τὰ συναμφότερα τετράγωνα, διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας, καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης, ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντος τετραγώνου.

PROPOSITIO X.

Si recta linea ſecetur bifariam, adijciaturq; aliqua ei adamuſſim recta linea: quod à tota cum appoſita, & quod ab appoſita, utraq; ſimul quadrata, dupla ſunt eius quod à dimidia, & eius quod ab adiacente ex dimidia & adiecta, tanquam ab una, deſcriptorum quadratorum.

Sit recta linea propoſita, ea etiam bifariam diuiſa, atq; alia deinde ei adamuſſim adiecta: dico, duo quadrata, compoſitæ ſcilicet lineæ & adiectæ, dupla eſſe ad quadrata linearum, unius quidem, quæ eſt medietas rectæ datæ, alterius uerò, quæ ex medietate altera atq; ei adiecta eſt compoſita. Erigatur ex puncto æqualis diuiſionis ad angulos rectos linea, atq; ea ad æqualitatem medietatis rectæ diuiſæ poſita, altera eius extremitas duabus rectis, cum duabus extremitatibus rectæ diuiſę coniungantur, rectam illam, quæ per coniunctionis punctum tranſierit, ulterius continuando. Fiant autem duo triangula, rectangula atq; Iſoſcelia, in quorum utroque uterq; angulorum ad baſim, ex ſtructura & propoſitione 32 primi, medietas recti eſt, quod eſt notandum. Porrò ſecundum quantitatem ad rectos ductæ, atq; eius quæ ex medietate rectæ diuiſę & adiecta compoſita eſt, lineæ, parallelogrammum rectangulum deſcribatur, latus illud eius, quod ad rectos ductæ lineę oppoſitum eſt & parallelum, ultra adiectam rectam cõtinuando. Et quia hanc continuatam, cum illa, quæ per coniunctionis punctum tranſit, propterea quòd in eas alia recta cadens, ex illa parte duos angulos duobus rectis minores facit, ex cõmuni quadam noticia in libro primo expoſita, concurrere neceſſe eſt, continuentur igitur ambę ut triangulum fiat: & erũt quæ ſic apparẽt duo triangula, tam totale quàm partiale, ex ſtructura & ſecunda parte propoſitionis 29 primi, rectangula & Iſoſcelia, quod & ipſum notandum. Vltimò ducatur & alia recta, cuius termini ſint reliquę extremitates datæ & continuatę linearum, & erit figura, unde nunc huius propoſitionis demonſtratio elici poterit, hoc modo parata. Et quoniam quadratum lineæ ultimò ductæ, per propoſitionem 47 primi, quadratis linearum, compoſitę nimirum ex data & adiecta, & ipſius adiectæ, ęquale eſt, idem etiam quadratum, cum ipſius latus duorum orthogoniorum triangulorum rectos ſubtendat, ęquale, per eandem 47, quadratis duarum linearũ, quę ab extremitate ad rectos ductę altera, per extremitates rectæ diuiſæ deſcendunt: per hanc communem noticiam, Quæ eidem æqualia, &cæ. quadrata priora, compoſitæ ſcilicet & additę lineæ, deſcendentium linearum quadratis ęqualia erunt. Sed quia deſcendentium quadrata, ratione ſuorum triangulorum, quę & rectangula & Iſoſcelia ſunt, ad quadrata, medietatis diuiſę & compoſitæ deinde ex altera medietate & adiecta, dupla ſunt: propter ęqualitatem quadratorum, deſcendentium ſcilicet linearum, compoſitæ deinde & adiectę, conſtabit propoſitum. Compoſitę ſcilicet & adiectę linearum quadrata, dupla eſſe quadratorum, medietatis lineæ diuiſę, & eius quæ ex medietate & adiecta compoſita eſt. Si recta igitur linea ſecetur bifariam, adijciaturq; aliqua ei adamuſſim recta linea: quod à tota cũ appoſita, & quod ab appoſita, utraq; ſimul quadrata, dupla ſunt eius quod à dimidia, & eius quod ab adiacente ex dimidia & adiecta, tanquam ab una, deſcriptorũ quadratorum. quod demonſtrari oportuit.



SEQVITVR EXEMPLVM IN NVMERIS.

Totus 14		Adiectus
7	7	9

Operatio.

Totus & adie.	Adiectus	Dimidius	Dimidius & adie.
23	9	7	16
529	81	49	256

610 duplus 305

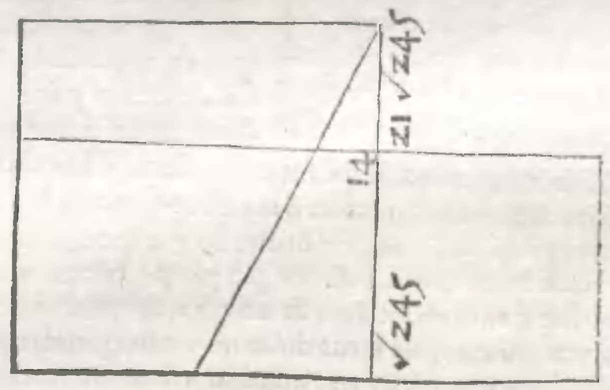
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τεμεῖν, ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

PROPOSITIO XI.

Datam rectam lineam ſecare, ut quod ſub tota & altero ſegmento comprehenditur rectangulum, æquum ſit ei, quod fit à reliquo ſegmento quadrato.

Sit recta linea data, atq; propoſitum eam in duo ſecare ſic, ut quod ſub tota & uno ſegmento, breuiori ſcilicet, comprehenditur rectangulum, æquale ſit ei, quod ab altero, hoc eſt longiori ſegmento deſcribitur quadrato. Deſcribatur à recta data quadratum, ſicuti docet propoſitio in primo 46, illorum deinde laterum, quæ re-



ctæ datæ inſiſtunt, altero biſariam diuiſo, à diuiſionis puncto linea quædam recta uſq; ad alteram datæ extremitatem ducatur, & deſcribitur triangulum rectangulum. Porrò medietas lateris diuiſi, quæ à puncto diuiſionis & angulo huius trianguli recto intercipitur, eouſq; prolongetur, donec lateri, in triangulo rectum angulum ſubtendenti, æqualis fiat. & ubi deinde ſecundum quantitatem partis prolongatę exterioris, quadratum ad ipſam deſcriptum, latus item huius quadrati, quod exteriori parti oppoſitum eſt, per quadratum primò deſcriptum continuatum fuerit, propoſitioni tandem ſatisfactum erit. Id quod, cum tam quadratorum, ex definitione, quàm etiam parallelogrammorum oppoſita latera, ex propoſitione 34 primi, inter ſe ęqualia ſint, ſexta propoſitio huius & penultima primi, ęqualibus ſubinde pro æqualibus ſumptis, ab æqualibus item eodem communi ſubtracto, clarè manifeſtabunt.

SEQVITVR

SEQVITVR EXAMEN HVIVS DIVISIOnis in numeris.

Totus	Longius ſegmen.	Breuius
14	√245 — 7	21 — √245

in ſe

cum

21 — √245	√245 — 7
cum 14	√245 — 7

Producuntur

294 — √48020,	294 — √48020
Id quod continetur ſub toto & breuiori.	Quadratum ſegmenti longioris.

Numeri, uel producta æqualia.

APPENDIX.

Hanc lineæ diuiſionem requirit propoſitio nona libri quarti, quę nimirum proponit, quomodo Iſoſceles triangulum, cuius uterq; angulorum ad baſim ad tertium reliquum duplus ſit, formari debeat, id quod abſq; huius diuiſionis cognitione aliàs abſolui nequit. Quas deinde proprietates habet hęc eadem ſic diuiſa linea, quid item conducat, aliquo modo oſtendit liber Euclidis tredecimus, cuius obiter Lectorem admonendum eſſe duximus.

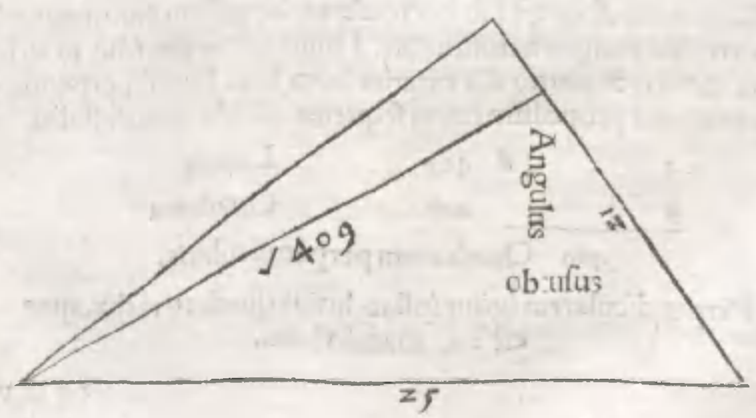
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ.

Ἐν τοῖς ἀμβλυγωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον, μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ἀμβλεῖαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων, τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ἐφ᾽ ἣν ἐκβληθεῖσα ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐκτὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ἀμβλείᾳ γωνίᾳ.

PROPOSITIO XII.

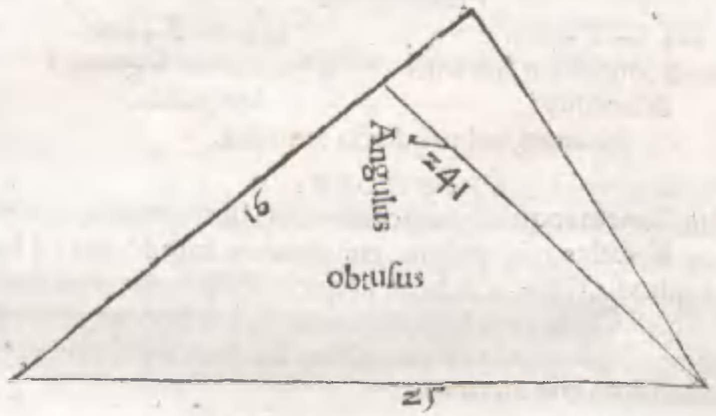
In obtuſiangulis triangulis: quod ab obtuſum angulum ſubtendente latere fit quadratum, maius eſt quadratis, quæ fiunt à lateribus obtuſum angulum comprehendentibus, comprehenſo bis ſub uno eorum quæ ſunt circa obtuſum angulum, in quod, cum protractum fuerit, perpendicularis cadit, atq; aſſumpta extra ſub perpendiculari ad obtuſum angulū.

Obtuſiangulo triangulo expoſito, uno etiam eorum quę circa obtuſum ſunt angulum latere, ex parte illius anguli, adeò ultra triangulum continuato, ut in id ab



 angulo

angulo trianguli acuto, opposito quodammodo, perpendicularis commode cadere possit, atq; hæc postea ducta, figura descripta erit: dico ergo, quadratum, quod à latere obtusum angulū subtendente describitur, maius esse, quàm sunt quadrata, quæ ab ijs quæ circa obtusum angulum sunt, lateribus describuntur, eo quantum est id, quod bis cōprehenditur sub uno latere eorum, quæ circa obtusum angulum sunt, atq; eo, quod à dicto latere, si illud ultra obtusum angulum prius protractum fuerit, & demissa ab angulo, quem hoc latus subtendit, perpēdiculari intercipitur. Demonstratio huius, quia est facilis, cum ex propositione penultima primi, usurpa



ta bis, quarta tamen huius, propter sumptionem æqualium pro æqualibus interposita, procedat, Lectori eam ut inde colligat commendabimus. In obtusiangulis igitur triangulis: quadratum lateris subtendentis angulū obtusum, tanto maius est reliquorū duorū laterum quadratis, quantum est id, quod bis comprehenditur sub alterutro reliquorum, & portione eidem alteri extra triangulum in directū adiecta, quæ à perpendiculari ab angulo huic lateri opposito demissa, & angulo obtuso intercipitur, quod demonstrasse oportuit.

APPENDIX.

Quomodo uerò, amblygonio triangulo, cuius tria latera nota sint, exposito, portionis exterioris quantitas, quanta deinde sit perpendicularis, in numeris inueniri debeat, sequenti calculo manifestabitur.

Quantum ad figuram priorem.

Trianguli latera	25	√ 409	12
Laterum quadrata	625	409	144

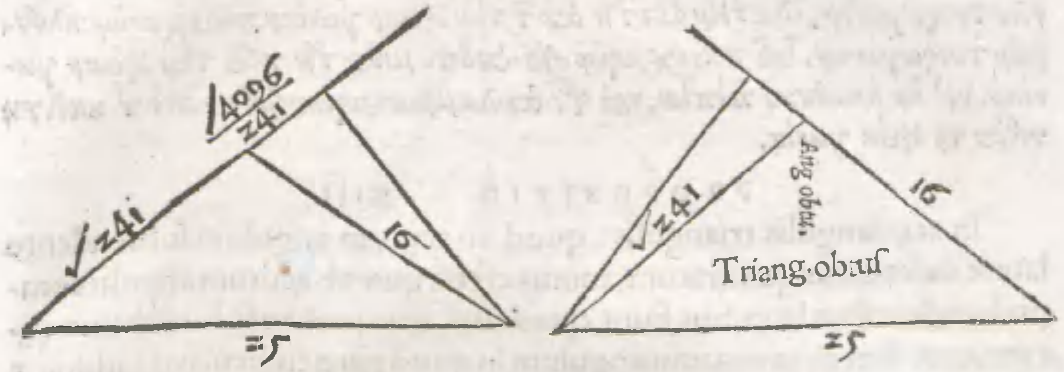
625
553 Et tantum est quod sub latere ultra triangulum continuato, & portione
72 exteriori comprehenditur bis. Huius igitur dimidio 36 in latus notum
12 diuiso: & portio illa exterior nota fiet. Porrò perpendicularis nunc quanta sit, penultima propositio primi sequenti calculo manifestabit.

3	√ 409	Latera
9	409	Quadrata
400	Quadratum perpendicularis.	

Perpendicularem igitur ipsam, huius quadrati radix, quæ est 20, manifestabit.

SEQVVNTVR

SEQVVNTVR HVIVS PROPOSITIONIS DVAE figuræ aliæ.

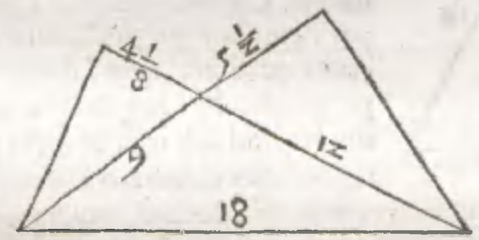


Calculus figuræ posterioris.

Trianguli latera	25	16	√ 241
Laterum quadrata	625	256	241

Facta subtractione, manent 128, id quod sub latere ultra triangulum continuato, & portione exteriori comprehenditur bis, cuius dimidio 64 in latus notum 16 diuiso, exeūt 4, portio exterior. Perpendicularis igitur 15, quod examinari potest.

ALIA FIGVRA, IN QVA DVO EXEMPLA simul exposita sunt.



Examen illius in numeris.

Latera

Subtendens angulum obtusum		Includentia angulum obtusum		
18		9		12
Qua- 324	dra-	81	ta	144
225		225		
99				

$\underbrace{81 \quad 144}_{225}$

99 duplum rectanguli, quare $49\frac{1}{2}$, rectangulum ipsum, quod nimirum sub alterutro circa obtusum angulum latere, 9 aut 12, & sua exteriori prolongata portione, ab eodē angulo & ipsa perpendiculari intercepta comprehenditur, id quod sequens calculus clarè manifestabit.

Latus alterum	9	Latus alterum	12
Intercepta portio	$5\frac{1}{2}$	Intercepta portio	$4\frac{1}{8}$
	45		48
	$4\frac{1}{2}$		$1\frac{1}{2}$
	$49\frac{1}{2}$ re-	uel	$49\frac{1}{2}$ re-

ctangulum comprehensum sub alterutro latere & intercepta portione, ut suprà ostensum est. Quare &c.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

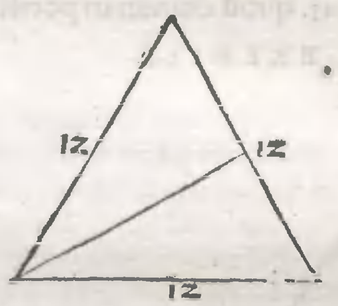
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ.

Ἐν τοῖς ὀξυγωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον, ἔλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων, τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν, ἐφ' ἣν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐντὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ὀξείᾳ γωνίᾳ.

PROPOSITIO XIII.

In acutiangulis triangulis: quod ab acutum angulum ſubtendente latere deſcribitur quadratum, minus eſt eis quæ ab acutum angulũ comprehendentibus lateribus fiunt, quadratis, comprehenſo bis ſub uno eorum, quæ ſunt circa acutum angulum in quod perpendicularis cadit, atq; aſſumpta interius ſub perpendiculari ad acutum angulum.

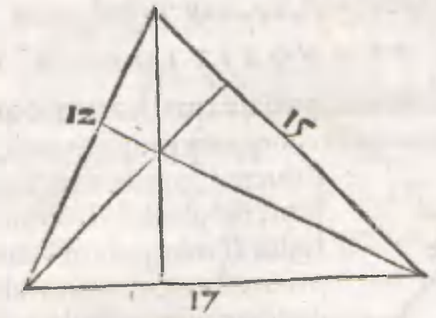
Sit triangulum acutiangulum, atq; in eo acutus angulus ſumptus, ab utrouis deinde ex reliquis angulo ad ſuum ſubtenſum latus, per propoſitionem 12 primi, recta perpendiculari ducta: dico, quadratum quod à latere rectum angulum ſubtendente deſcribitur, minus eſſe quàm ſunt quadrata, quæ à lateribus circa acutum angulum deſcribuntur, eo quantũ eſt id quod ſub uno latere eorum quæ circa acutum angulum ſunt, in quod ſcilicet perpẽdicularis cadit, atq; ſub intercepta, à perpendiculari & acuto angulo, portione comprehenditur bis. Cum enim unum circa acutum angulum latus per demiſſam perpendicularem utcunq; diuiſum ſit: erunt quadrata, quæ à diuiſo illo latere & intercepta à perpendiculari anguloq; acuto, portione deſcribuntur, ei quod ſub tota & dicta portione comprehenditur bis cum quadrato alterius portionis, per 7 huius æqualia: atq; his æqualibus communi quodam, quadrato ſcilicet perpendicularis, addito: illa tria quadrata his tribus, rectangulo nimirũ bis ſumpto & duobus quadratis æqualia erunt. Sed quia utrobiq; duobus quadratis, ratione anguli recti, ex penultima primi unius lineæ quadratum æquale eſt, mutatione æqualium facta, loco ſcilicet duorum quadratorum laterum circa rectos angulos, ex utraq; parte, rectos angulos ſubtendentiũ, quæ ſcilicet non diuiſa ſunt, quadratis ſumptis: & quadrata laterum quæ ſunt circa acutum angulum, ei quod ſub diuiſo latere & intercepta portione comprehenditur bis, atq; quadrato lateris, angulum acutum ſubtendentis, æqualia erunt: quadratum igitur lateris, acutum angulum ſubtendentis, ſolùm quadratis eorum, quęcirca acutum angulum ſunt, laterũ minus erit in rectangulo, quod ſub diuiſo latere, atq; intercepta a perpendiculari & acuto angulo portione, comprehẽditur bis. In oxygonijs igitur triangulis, quadratum lateris ſubtendentis angulum acutum tanto minus eſt reliquorum laterum quadratis, quantum eſt id quod bis comprehenditur ſub altero illorum, in quod nimirum perpendicularis cadit, & portione a perpendiculari anguloq; acuto intercepta. quod demonſtraſſe oportuit.



APPENDIX.

Quam uim habeant hæ duæ propoſitiones, 12 ſcilicet de Amblygonio, & 13 de Oxygonio, unà cum penultima primi de triangulo Orthogonio, experietur is, qui aliquando in triangulorum tractationem, in qua ſemper ex tribus notis ad reliquorũ trium noticiam, mediante arcuum & chordarũ tabula, perueniendum, inciderit.

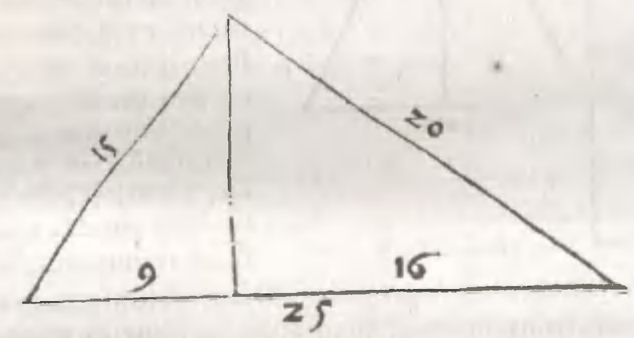
TRIA EXEMPLA VNA FIGVRA EXPOSITA.



ADMONITIO.

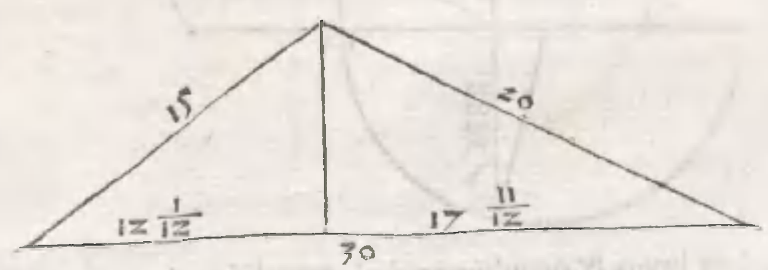
Non autem eſt neceſſe, ut omnes trianguli propoſiti anguli acuti ſint, ut quidem id Acutianguli trianguli definitio requirit. Sed generaliter (cum nullum triangulum ſit, quod non acutum angulum habeat) de omnibus, cuiuſcunq; generis fuerint, triangulis, hæc propoſitio intelligi, per ea inſuper declarari poteſt, id quod per ſequentia duo exempla manifeſtabitur.

PRO TRIANGVLO RECTANGVLO.



In hoc triangulo rectãgulo, quindecies 15, ratione unius acuti anguli, tanto minus ſunt quàm uicies quinquies 25, & uicies 20, quantum eſt quod ſub 20 & 20, uel quod ſub 25 & 16 continetur bis. Sic ratione alterius acuti, cuius ſubtenſum latus ſunt 20, ubi uicies 20, tanto minus ſunt quàm uicies quinquies 25, & quindecies 15, quantum eſt quod ſub 15 & 15, uel quod ſub 25 & 9 continetur bis. id quod multiplicatione cernere licet.

PRO TR.ANGVLO OBTVSIANGVLO.



Similiter etiam in triangulo obtuſiangulo, quindecies 15, ratione unius acuti anguli, minus ſunt quàm tricies 30 & uicies 20, quantum eſt quod ſub 30 & $17\frac{11}{17}$ continetur bis. Sic ratione alterius acuti anguli, cuius ſubtenſum latus ſunt 20, ubi uicies 20 tanto minus ſunt quàm tricies 30 & quindecies 15, quantum eſt quod ſub 30 & $12\frac{1}{12}$ continetur bis. id quod examinari poteſt.

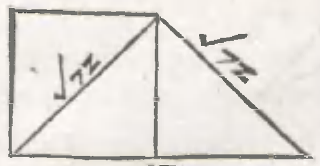
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ.

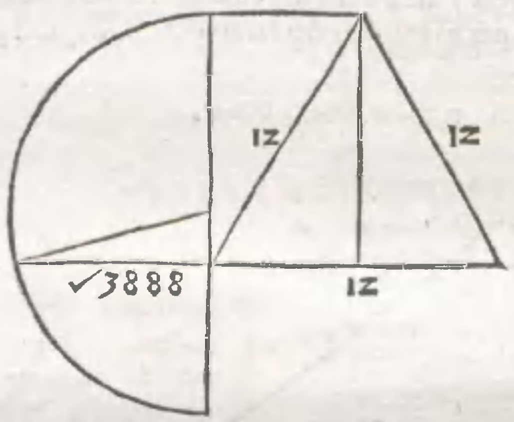
Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ, ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι.

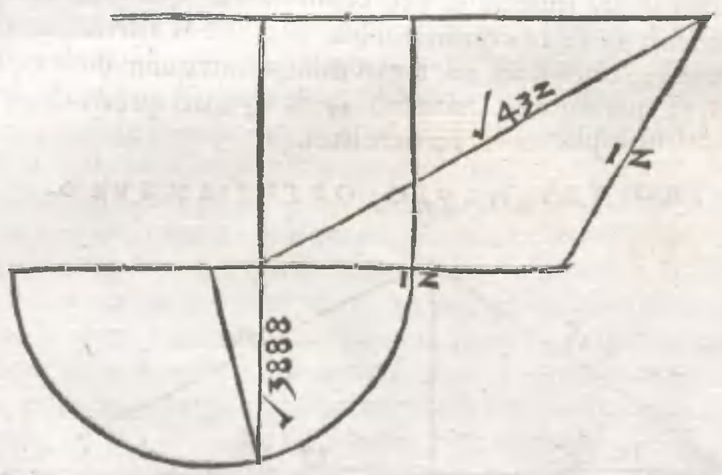
PROPOSITIO XIIII.

Dato rectilineo, æquale quadratum constituere.

Sit rectilineum datum qualecunq;, atq; propositum, quadratum ei æquale constituere. Quia uerò rectilineum datum, uel triangulum, uel plurium laterum rectilineum esse potest. Igitur si triangulum fuerit, ei ex propositione 42 primi: si uerò plurium laterum rectilineum, ex 45 eiusdem primi æquale parallelogrammum constituendum est. Quòd si quadratum fuerit hoc constitutum parallelogrammum, factum erit propositum. Sin minus, ex duobus huius parallelogrammi lateribus, ijs quidem quę sunt iuxta unum & eundem angulum, alterum alteri adamussim adijciatur, utrouis scilicet huius anguli latere, secundum quantitatem alterius, longiore facto. Deinde secundum hanc totam, ex duobus lateribus compositam lineam, tanquam diametrum, ex eius medio, quod quidem per propositionem 10 primi haberi potest, semicirculus describatur. Quòd si tandem per punctum coniunctionis laterum ea, quæ ad idem punctum terminatur, linea usque ad circumferentiam continuata fuerit: propositioni satisfactum erit. Nam hæc continuata portio ea linea est, cuius uidelicet quadratum rectilineum referre debet, id quod per lineam, à centro ad intersectionem circumferentiæ cũ iam inuenta, rectam ductam, ex quinta huius & penultima primi, æquali interim pro æquali linea sumpta, ab æqualibus etiam deinde æquali, uel eodem communi ablato, facile demonstrabitur. Dato igitur rectilineo, æquale quadratum constitutum est. quod fieri oportuit.

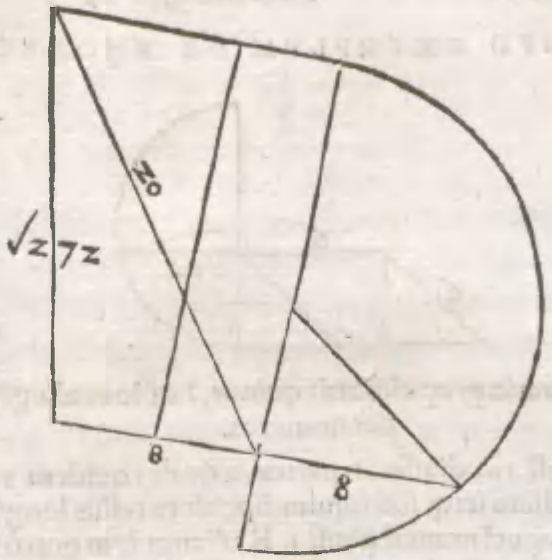






SEQVITVR

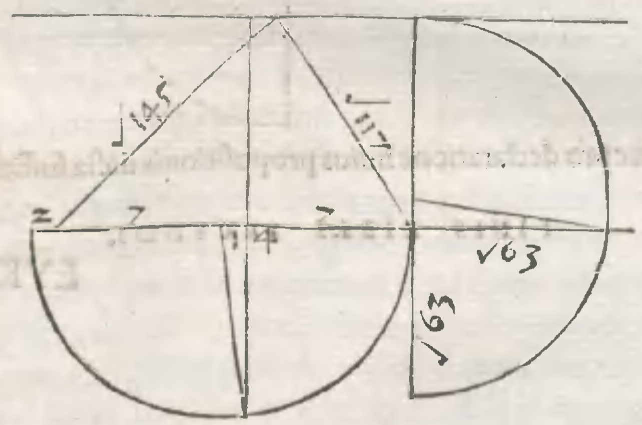
SEQVITVR HVIVS PROPOSITIONIS GEOmetrica figura alia.



PORRO CALCVLVS TRIANGVLI DATI IN hac figura, sic se habet.

Latera	Excessus			
20	$\sqrt{68} - 6$	Productum	Primum	32
$\sqrt{272}$	$14 - \sqrt{68}$		secund.	128
8	$\sqrt{68} + 6$		tertium	4496.
$28 + \sqrt{272}$	$14 + \sqrt{68}$			

atq; huius radix quadrata 64, Trianguli, Parallelogrammi & Quadrati area. Quoniam autem unum parallelogrammi latus est notum, 4 scilicet, area etiam nota, nimirum 64: & alterum latus, diuisione, notum erit. Est autem illud 16.



Inuentio areæ trianguli, cuius

Latera sunt	Excessus uerò
14	$\sqrt{\frac{117}{4}} + \sqrt{\frac{145}{4}} - 7$
$\sqrt{145}$	$\sqrt{\frac{117}{4}} - \sqrt{\frac{145}{4}} + 7$
$\sqrt{117}$	$7 + \sqrt{\frac{145}{4}} - \sqrt{\frac{117}{4}}$
$14 + \sqrt{145} + \sqrt{117}$	$7 + \sqrt{\frac{145}{4}} + \sqrt{\frac{117}{4}}$

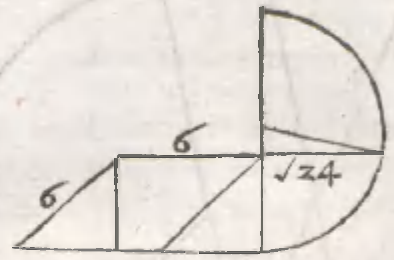
Primum

Primum — ſecundum productum

$\sqrt{4241\frac{1}{4}} + 16\frac{1}{2}$ — $\sqrt{4241\frac{1}{4}} - 16\frac{1}{2}$

Tertium prod. 3969 — Area trianguli 63

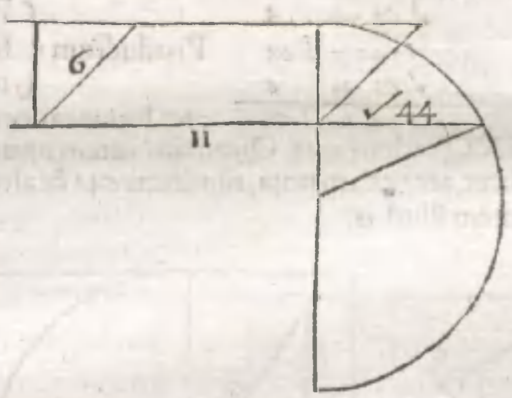
ALIVD EXEMPLVM DE RHOMBO.



Declaratio propoſitionis quintæ, hoc loco allegatæ, per numeros.

Totus numerus eſt 10, diuiſus in partes, æquales quidem 5 & 5. in inæquales uerò 6 & 4. Medium itaq; ſectionum, hoc eſt exceſſus longioris portionis reſpectu medietatis lineę uel numeri diuiſi 1. Rectangulum porrò ſub partibus inæqualibus comprehenſum, ſunt 24, cum quadrato unitatis, ueniunt 25. & tantum eſt etiam quadratum numeri 5, hoc eſt medietatis diuiſi. quod oſtendere libuit.

ALIA ET VLTIMA HVIVS PROPOSITIONIS GEOmetrica figuratio de Rhomboide.



Atq; hæc pro declaratione huius propoſitionis dicta ſufficiant.

FINIS LIBRI SECVNDI.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ.

EVCLIDIS ELEMENTORVM GEOmetricorum liber tertius.

HActenus Euclides proſecutus demonſtrationum euidentiſſimis rationibus, proprietates ſimpliciſſimas recti linearum figurarum, ſuperioribus duobus libris: nunc in tertio, quæ circuli ſunt propria πάθη (quod ad doctrinam elementorum pertinet, quæ planè Geometrica & abſtracta eſt) explanare aggreditur. Non enim quę cœleſtium, aut quæ aliorum proprietas ſit circulorum conſideratur hoc loco, nam ſubiectis cum rebus nihil commune habet geometria ſincerior, quippe cõcretione atq; adiunctione certorum ſubiectorum, mox in aliarum ſcientiarum titulos cum degeneret, ut Aſtronomiæ, Architectonicæ, Opticæ, & ſimilium, quarum ipſa ſibi ſcientiam non arrogat quidem, uerùm illas tamen abſq; geometria intelligi non poſſe aut addiſci, nemo mediocriter etiam eruditus ignorat. Liber præſens uel hoc nomine præſtat præcedentibus, quòd nimirum hic de proprietatibus tractat perfectiſſimæ figuræ, nempe de Circulo, ſiquidem pro natura ſubiectarum rerum ſcientię aliæ alijs ſunt prętponendæ. Vtilis porrò eſt ad cognitionem Chordarum, & arcuũ pręciſionem in circulis, quippe cum quæ eſt angulorum, eadem ſit quoq; arcuum & chordarum inter ſe ratio. Præterea de circulis cõtingentibus & ſeſe mutuo ſecantibus, quòd illud quidem uno, hoc uerò duobus tantum punctis fiat. Quinetiam oſtendit, Contingentiæ angulum, omniũ acutorum rectilineorum angulorum eſſe minimũ: Diametrum item, omnium rectarum linearum in circulo longiſſimam. & id genus multa complectitur hic liber tertius. Docet præterea, tribus punctis ſignatis (modo non fuerint in una recta linea) circulus per illa tranſiens, quo pacto deſcribatur. Quomodo deinde in corpore aliquo ſolido, ſphæricum ſeu parallelepipedum illud fuerit, duo puncta oppoſita, ut quæ in ſphęricis Poli nomen habeant, inueniantur. Quæ ambo in inſtrumentorum compoſitionibus quàm ſummè ſint neceſſaria, nullis non qui hoc in genere ſcientiæ uerſati ſunt, & ſe in eo aliquantum exercuerunt, manifeſtum eſt.

ΟΡΟΙ.

Ἴσοι κύκλοι εἰσίν, ὧν αἱ διάμετροι εἰσὶν ἴσαι. ἢ ὧν αἱ ἐκ τῶν κέντρων, ἴσαι εἰσίν.

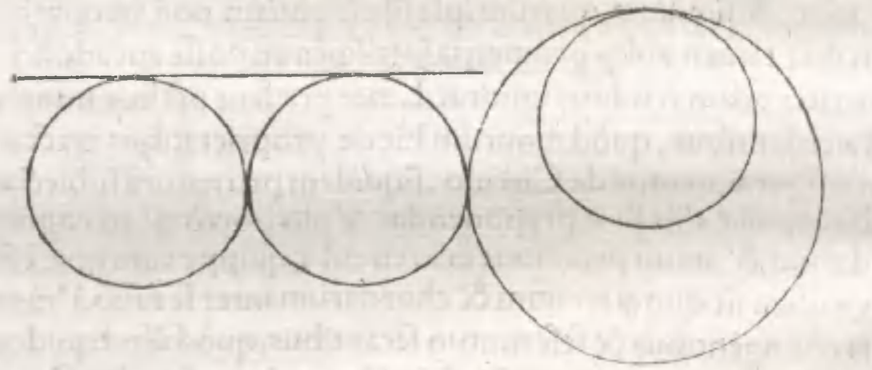
DEFINITIONES.

1 Aequales circuli sunt, quorum diametri sunt æquales. Aut, quorum quæ ex centris, æquales sunt.

Εὐθεῖα κύκλου ἐφάπτεσθαι λέγεται, ἥτις ἁπτομένη τοῦ κύκλου, καὶ ἐκβαλλομένη, οὐ τέμνει τὸν κύκλον. Κύκλοι ἐφάπτεσθαι ἀλλήλων λέγονται, οἵτινες ἁπτόμενοι ἀλλήλων, οὐ τέμνουσιν ἀλλήλων.

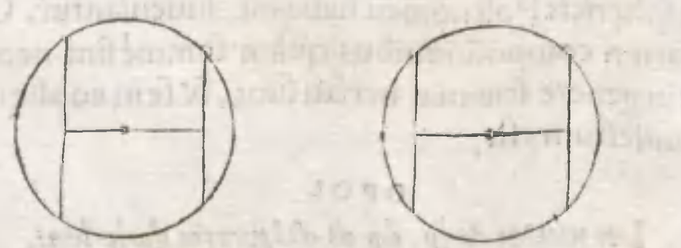
2 Recta linea circulum tangere dicitur, quæ tangens circulum, & eiecta, circulum non secat.

3 Circuli tangere sese mutuo dicuntur, qui sese mutuo tangentes, sese mutuo non secant.



Ἐν κύκλῳ ἴσον ἀπέχειν τοῦ κέντρου εὐθεῖαι λέγονται, ὅταν αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπ' αὐτὰς κάθετοι ἀγόμεναι, ἴσαι ὦσι. Μεῖζον δὲ ἀπέχειν λέγεται, ἐφ' ἣν ἡ μείζων κάθετος πίπτει.

4 In circulo æqualiter distare à centro rectæ lineæ dicuntur, cum à centro in eas perpendiculares ductæ, æquales fuerint. Plus uerò distare dicitur, in quam longior perpendicularis cadit.



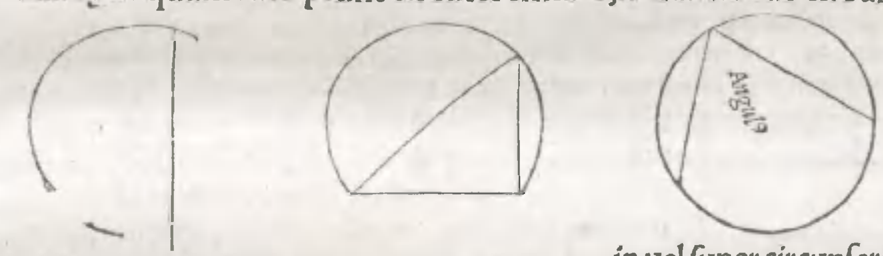
Τμῆμα κύκλου, ἐστὶ τὸ περιεχόμενον σχῆμα, ὑπό τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας.

Sectio

5 Sectio circuli, est figura comprehensa sub recta linea, & circuli circunferentia.

Τμήματος γωνία, ἐστὶν ἡ περιεχομένη ὑπό τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας. Ἐν τμήματι δὲ γωνία ἐστὶν, ὅταν ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ τμήματος ληφθῇ τι σημεῖον, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τὰ πέρατα τῆς εὐθείας, ἥτις ἐστὶ βάσις τοῦ τμήματος, ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν ἐπιζευχθεισῶν εὐθειῶν. Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν εὐθεῖαι ἀπολαμβάνωσι τινὰ περιφέρειαν, ἐπ' ἐκείνης λέγεται βεβηκέναι ἡ γωνία.

6 Sectionis angulus est, qui sub recta linea, & circuli circũferentia comprehenditur. 7 In sectione uerò angulus est, cũ in sectionis circunferentia punctum aliquod sumptum, atq; de illo ad rectę lineæ fines, quę est sectionis basis, rectæ lineę ductæ fuerint, comprehensus sub coniunctis rectis angulus. 8 Quando autem comprehendentes angulum rectæ lineę aliquam suscipiunt circũferentiam, in illa dicitur esse angulus.

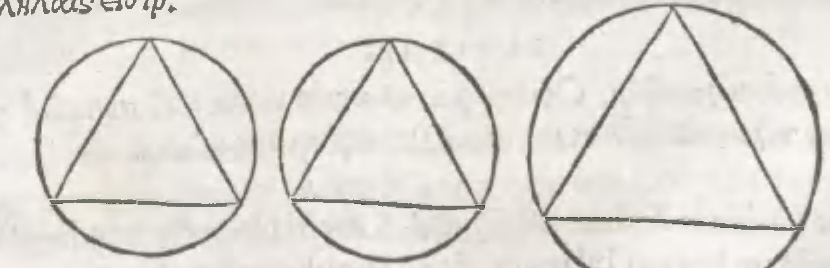


in uel super circunferentia.

Τομεὺς κύκλου ἐστὶν, ὅταν πρὸς τῷ κέντρῳ αὐτοῦ τοῦ κύκλου σταθῇ ἡ γωνία, τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῶν τὴν γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῶν περιφερείας.

9 Sector circuli est, cum ad centrum circuli steterit angulus, comprehensa figura sub angulum comprehendentibus rectis lineis, & assumpta sub eis circunferentia.

Ὅμοια τμήματα κύκλου, ἐστὶ τὰ δεχόμενα γωνίας ἴσας. ἢ, ἐν οἷς αἱ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.



Similes

10 Similes sectiones circuli sunt, quæ angulos ęquales suscipiunt. Aut, in quibus anguli inter se æquales sunt.

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.

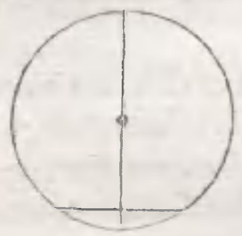
ΠΡΩΤΗ. Α.

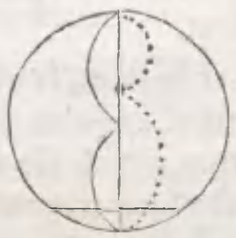
Τοῦ δοθέντος κύκλου, τὸ κέντρον εὑρεῖν.

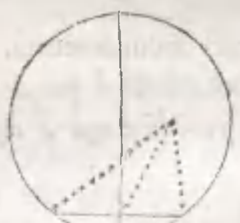
PRIMA I.

Dati circuli, centrum inuenire.

Sit circulus datus, atque propositum, illius centrum inuenire. Ducatur in circulo recta quædam linea utcunq;, ita tamen, ut utraq; eius extremitas in circuli sit circumferentia, hac deinde recta, per propositionem 10 primi bifariam diuisa, à puncto diuisionis huius ad angulos rectos linea, quæ similiter utraq; extremitatē in circunferentia habeat, per 11 eiusdem, excitetur. Quòd si tandem hęc ad rectos ducta bifariam diuisa fuerit: punctum huius diuisionis centrum circuli erit. Id quod ab impossibili, ubi aliud quoddam, præter hoc, centrum signatum fuerit, demonstrari poterit, hoc modo. In hac ipsa per mediæ diuisionis punctum transeunte linea, centrum aliud nullum statui potest: alioqui sequeretur statim, ex structura, & circuli definitione, æquali pro æquali linea sumpta, Partialem sua totali linea esse longiorem: uel contra, Totalem sua partiali breuiorem, quod est impossibile. Statuatur ergo nunc extra πρὸς ὀρθὰς ductam punctum loco centri aliud, à quo etiam tres lineæ rectę, una quidem ad communem duarum linearum intersectionem, reliquæ deinde duæ ad duas primò ductæ extremitates, ducantur. Et quia triangula quæ sic fiunt, huiusmodi sunt, qualia propositio in primo octaua requirit: anguli qui à duabus semidiametris subtenduntur, per eandem, inter se æquales erunt: ex definitione igitur uterq; rectus. Quia autem, ut habet cōmunis quædam noticia. Omnes recti anguli inter se sunt æquales, ea mediante, & quia prius etiā ex hoc communi duorum rectorum angulorum puncto πρὸς ὀρθὰς linea educta est, infertur tandem, ampliorem angulum angustiori: uel contra, angustiorem angulo ampliori esse æqualem, quod cum & ipsum absurdum sit: operationem constare, punctum deinde in linea πρὸς ὀρθὰς ducta, medium, centrū circuli esse, nemini dubium erit. Ὁμοίως δὴ δείξομεν: Simili modo demonstrabitur, quòd nullum punctum aliud, præter hoc quod in medio huius ductæ signatum est, centrum circuli esse possit. Dati igitur circuli centrum inuentum est, quod fieri oportuit.







ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, Ὅτι ἐὰν ἐν κύκλῳ τὶς εὐθεῖα εὐθεῖαν τινὰ δίχα, καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνῃ· ἐπὶ τῆς τεμνούσης ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

COROLLARIVM.

Ex hoc sanè manifestum est, Quòd, si in circulo recta quędam linea rectam quandam lineam bifariam, & ad angulos rectos secet: in secante sit centrum circuli.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

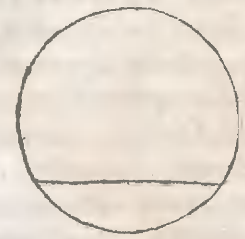
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β.

Ἐὰν κύκλου ἐπὶ τῆς περιφερείας ληφθῇ δύο τυχόντα σημεῖα· ἡ ἐπὶ τὰ αὐτὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα, ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου.

PROPOSITIO II.

Si in circuli circumferentia duo puncta utcunq; accepta fuerint: ad ipsa puncta ducta recta linea, intra ipsum circulum cadet.

Sit circulus, duo etiam puncta in ipsius circumferentia utcunq; signata: dico, si hæc puncta linea quadam recta coniungentur, hanc rectam intra circulum cadere oportere. Colligitur huius propositionis demonstratio ab impossibili. Nisi enim intra circulum cadat recta hæc, statim contrà illam communem noticiam, quæ dicit, Totum parte sua maius esse, inferri potest, quòd pars suo toto maior sit, hoc nimirum modo. Linea illa recta, qua cum puncta, in circunferentia accepta, copulantur, si intra circulum non cadat, extra circulum aut in ipsam circuli circunferentiam, cadere eam oportet. Cadat ergo primò extra, si fieri potest, & quæratur per propositionem præmissam, circuli centrum, à quo etiam duæ rectæ ad duo in circunferentia accepta puncta ducantur. Et quoniam hæ duæ rectæ, ex definitione circuli, sunt inter se æquales: trianguli igitur quod sic descriptum est, ἰσοσκελὲς erit, habens ad basim positos angulos, ex priore parte propositionis quintæ primi, inter se æquales. Ducatur præterea & alia recta quædam linea, à centro circuli utcunq;, per circunferentiam usq; ad basim trianguli isoscelis, eam continuando. Et quia per hanc rectam isosceles triangulum in duo partialia triangula diuiditur, quorum cum utriusq; unū latus ulterius productum sit: erit ex propositione 16 primi, utriusq; externus angulus suo interno & opposito, uno scilicet æqualium, maior: quare & altero æqualium maior erit. Cum autem iam, ut tandem concludatur, triangulum appareat, unum habens angulum reliquorum altero maiorem, maior uerò angulus, ut testatur propositio in primo 19, longius latus requirat, hac ipsa propositione hic usurpata, æquali deinde linea pro æquali sumpta, infertur tandem, partialem sua totali linea esse longiorem, quod est impossibile. Non ergo extra circulum cadit puncta copulans recta linea. Similiter etiam, quòd non in ipsam circunferentiam cadat, demonstrabitur: cadet itaq; intra ipsum circulum. In circuli igitur circūferentia, ad duo puncta, utcunq; accepta, linea recta ducta, in circulum eam cadere necesse est, quod demonstrasse oportuit.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ.

Ἐὰν ἐν κύκλῳ εὐθεῖα τὶς διὰ τοῦ κέντρου εὐθεῖαν τινὰ μὴ διὰ τοῦ κέντρου δίχα τέμνῃ· καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τεμεῖ. Καὶ ἐὰν πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνῃ· καὶ δίχα αὐτὴν τεμεῖ.

PROPOSITIO III.

Si in circulo recta quædam linea per centrum extensa, quandam non per centrum ductam rectam lineam bifariam secet: & ad angulos rectos eam secabit. Et si ad angulos rectos eam secet: & bifariā quoq; eam secabit.

Y Præparetur

Præparetur figura, qualem ſcilicet requirit hæc propoſitio, hoc eſt, deſcribatur circulus, in quo etiam duæ rectę, una quidem per centrum tranſiens, altera uerò præter illud, à priori tamen, uel bifariam, uel ad angulos rectos ſecta, ducatur: dico, ſi bifariam: & ad angulos rectos, ſi uerò ad angulos rectos: & bifariam etiam per centrum ductam alteram ſecare oportere. Quantum ad partem priorem, coniungantur extremitates eius quæ non per centrum tranſit rectæ lineæ, cum centro circuli duabus rectis. Et quoniam hæ duæ rectæ, ut duorū triangulorum latera, ex definitione circuli, inter ſe æquales ſunt, cum quoq; reliqua duo unius ex ſtructura, reliquis duobus alterius trianguli lateribus ęqualia ſint: anguli etiam, quos rectę, à centro circuli ad extremitates ductę, ſubtendunt, per propoſitionem 8 primi, inter ſe æquales erunt. Quoniā uerò recta linea rectæ inſiſtens lineæ, quando deinceps ſe habentes angulos æquales inter ſe facit, uterq; ex definitione quadam in primo expoſita, rectus eſt: anguli etiam illi duo, quos ſcilicet propoſitio 8 demonſtrauit eſſe inter ſe æquales, recti erunt. Pręter centrum igitur ducta ab illa altera per centrum tranſeunte recta linea, cū ex hypotheſi bifariam ab ea ſecta ſit, ad angulos etiam rectos ſecabitur, atq; hæc pro parte propoſitionis priore. Poſterioris uerò partis demonſtratio, eadem ſtructura manente, ex 26 primi ſic colligi poterit. Cum enim duo partialia triangula, ex ſtructura, rectangula ſint, ipſum uerò totum, ex definitione circuli, iſoſceles: habebunt hæc partialia triangula duos angulos duobus angulis, utrunq; utriq; æquales. Et quia etiam latus unum lateri uni, uel deſcendentes à centro rectas lineas, uel perpendicularis portionem ambobus communem, æquale habent: & reliqua, per allegatam ex primo propoſitionem, reliquis æqualia habebunt. Quare recta non per centrum tranſiens linea, ab altera quæ per centrum in eam ad angulos rectos cadit, bifariam diuiſa eſt. Si in circulo igitur, recta quædam linea per centrum extenſa, quandam non per centrum ductam rectam lineam bifariam ſecet: & ad angulos rectos eam ſecabit. Et ſi ad angulos rectos eam ſecet: & bifariam quoq; eam ſecabit. quod demonſtraſſe oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ.

Ἐὰν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι, οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

PROPOSITIO IIII.

Si in circulo duę rectæ lineæ, non per centrum extenſæ, ſeſe mutuo ſecuerint: ſeſe mutuo bifariam non ſecabunt.

Deſcribatur circulus, ducantur etiam in eo duæ rectæ lineæ, quarum neutra per centrum tranſeat, altera tamen alteram ſecet: dico rectas has bifariam ſeſe mutuo non ſecare. Sumit hæc propoſitio ſuam ab impoſſibili demonſtrationem per præcedentis tertiæ partem priorem, bis quidem, cum duæ ſint rectæ lineæ, uſurpatam, & communem illam noticiam, quæ dicit, Omnes rectos angulos inter ſe eſſe æquales, cum per hæc, ſi mutuo una alteram bifariam ſecaret, ſtatim ubi linea à centro ad communem ductarum interſectionem ducta eſſet, minorem angulum maiori æqualem eſſe in-

ferretur.

ferretur. Hoc autem quia nemini intelligenti perſuaderi poteſt: per inæqualia igitur, & non æqualia, ſeſe huiuſmodi lineæ, ut uult propoſitio, ſecabunt. Si in circulo igitur duæ rectæ lineæ, non per centrum extenſæ, ſeſe mutuo ſecuerint: ſeſe mutuo bifariam non ſecabunt. quod demonſtraſſe oportuit.

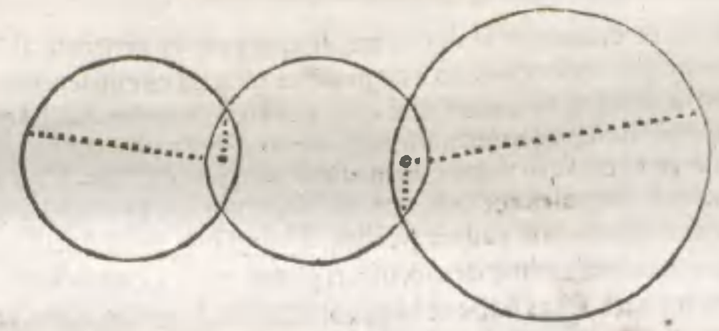
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε.

Ἐὰν δύο κύκλοι τέμνωσιν ἀλλήλους, οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

PROPOSITIO V.

Si duo circuli ſeſe mutuo ſecent: non erit eorum idem centrum.

Sint duo circuli ſeſe mutuo ſecantes, dico quòd eorum non ſit idem centrum. Et huius propoſitionis, ut præcedentis, demonſtratio ab impoſſibili ſumitur. Si enim centrum unum & idem habuerint illi ſeſe mutuo ſecātes circuli, cum centrum non extra, ſed in circulo ſedem ſuam habeat, in nullo loco alio, quàm in portione, utriq; circulo communi, id eſſe poterit. eo igitur in loco illo cōſtituto, inde ad communem circulorum interſectionem linea recta ducatur, & erit hæc utriuſq; circuli ſemidiameter. Ducatur & alia recta ab eodem centro poſito, per communem portionem uſq; ad circunferentiam utriuslibet circuli cōtinuata. Et quoniam hęc tota,



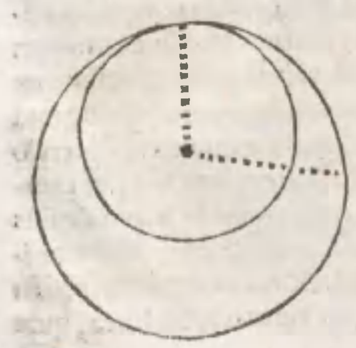
unius: pars uerò eius, alterius circuli eſt ſemidiameter: erit utraq;, pars uidelicet & ipſa tota, primò ductæ rectæ, quæ & ipſa utriuſq; circuli ſemidiameter eſt, æqualis. unde ſic etiam, per communem quandam noticiam, ipſæ inter ſe æquales, pars uidelicet toti, quod eſt impoſſibile. Punctum ergo id quod ſumptum eſt, aut ſi aliud quoddam ſumeretur, centrum circulorum eſſe, haudquaquam poteſt. Duorum igitur ſeſe mutuo ſecantium circulorum, unum & idem centrum non erit. quod demonſtrari oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ς.

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντός, οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

PROPOSITIO VI.

Si duo circuli ſeſe mutuo interius tetigerint: nō erit eorū idem centrū.



Sint duo circuli, qui ſeſe interius mutuo tangant: dico, eorum non idem eſſe centrum. Sed eſto ſanè idem, ſi fieri poteſt, & connectatur id cum circulorum contactu, atque poſtea ab eodem communi centro poſito ad exterioris circuli circūferentiam, ubicūq; hoc fuerit, alia recta linea ducta. quòd neq; hoc, neq; aliud ullum punctum, horum tangentium circulorum centrum eſſe poſſit, ab impoſſibili, ut in præcedenti, demonſtrabitur. Si duo circuli

culi

culi igitur, ſeſe mutuo interius tetigerint: non erit eorum idem centrum. quod demonſtraſſe oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ.

Ἐὰν κύκλου ἐπὶ τῆς διαμέτρου ληφθῇ τί σημεῖον, ὃ μή ἐστι κέντρον τοῦ κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου προσπίπτωσιν εὐθεῖαι τινὲς πρὸς τὸν κύκλον· μεγίστη μὲν ἔσται, ἐφ᾽ ἧς τὸ κέντρον· ἐλαχίστη δὲ, ἡ λοιπή. Τῶν δὲ ἄλλων, ἀεὶ ἡ ἔγγιον, τῆς διὰ τοῦ κέντρου, τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστί. Δύο δὲ μόνον εὐθεῖαι, ἴσαι, ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου προσπεσοῦνται πρὸς τὸν κύκλον, ἐφ᾽ ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης.

PROPOSITIO VII.

Si in diametro circuli aliquod ſumatur punctum, quod non ſit centrum circuli, ab eoq; puncto rectæ quædam lineæ in circulum cadāt: longiſſima quidem erit, in qua centrum: breuiſſima uerò, reliqua. Aliarum uerò, ſemper propinquior ei quæ per centrum protenditur, remotiore longior eſt. Duæ autem ſolùm rectæ lineæ æquales, ab eodem puncto in circulum cadunt, ad utraſq; partes breuiſſimæ.

Sit circulus, in eo etiam ducta diameter, in qua præter centrum aliud ſumatur punctum: dico primò, quotquot ab hoc puncto uſq; ad circunferentiam rectæ lineæ ductæ fuerint, illarum omnium eam quæ per centrum tranſierit, longiſſimam, diametrum uerò perficiens, omnium breuiſſimam eſſe. Ex alijs autem, ſemper propinquior ei quæ per centrum tranſit, remotiore longior extabit. Poſtremò, quòd duæ tantùm inter ſe æquales rectæ lineæ, ab hoc puncto, ex utraq; parte breuiſſimæ, in circuli circunferentiam cadere poſſint. Habet hæc propoſitio quatuor partes, quæ in hunc modum ordine demonſtrari poterunt. Connectantur in circulo ductarum extremitates, quas habent in circunferentia, ſingulæ, cum centro circuli,

ſingulis rectis lineis. Et quoniam duo quælibet latera omnis trianguli, ex propoſitione 20 primi, reliquo tertio longiora ſunt, tertio porrò longiora duo latera, in præſentia, ex definitione circuli & illa communi noticia, Si æqualibus æqualia addantur, &cę. uni rectæ alij æqualia ſunt, cum hæc alia centrum circuli contineat: quod in propoſitione primò proponitur, iam manifeſtum erit. Rurſus quoniam ex eadē propoſitione 20 primi, quælibet duo trianguli latera reliquo tertio longiora ſunt, tertium porrò latus ex definitione circuli, uni rectæ alij æquale eſt: & tertio longiora duo latera eadem recta alia longiora erunt. Cum autem hæc alia per punctum, præter centrum in diametro acceptum, tranſeat, communi ex æquo de illis inæqualibus portione ablata: & quod in propoſitione ſecundò proponitur manifeſtum erit. Tertium nūc patet ex propoſitione 24 primi. Porrò ut quartum etiam retineatur, ducenda eſt, per propoſitionem 23 primi, ex centro recta linea, quæ cum

cum ſemidiametro per punctum tranſeunte, angulum faciat, illi angulo, qui ex altera parte ſub eadem ſemidiametro, atq; ex centro ductarum linearum una continetur, æqualem, eaq; ad circunferentiam uſq; continuata, ab ipſius in circunferentia extremitate ad punctum recta linea ducatur. Et quoniam duo triangula, qualia propoſitio in primo 4 requirit, apparent: baſes igitur illorum, hoc eſt, lineæ illæ, quæ ad utraſque partes breuiſſimæ ſunt poſitæ, à puncto item in diametro præter centrum accepto egrediuntur, per hanc 4, inter ſe æquales erunt. Nec alia etiam, in illa eadem parte, ab hoc puncto ei quæ in altera parte eſt poſita, æqualis educi poteſt. Nam ſi fortè ab aliquo minus credēti hoc tentaretur, qui rectam aliam

alteri æqualem duceret, dum cui hæc ſic ducta ex communi illa noticia, Quæ uni ſunt æqualia &c. æqualis eſſe deberet, mox per 3 partem propoſitionis huius, eadem longior eſſe oſtendi poteſt: id quod fieri nequit. Poteſt etiam aliter hæc quarta pars demonſtrari in hunc modum. Ducatur alia, ſi ita poſſibile uidetur, recta linea, ei quæ ex altera parte breuiſſimæ poſita eſt, rectæ ęqualis, cuius in circūferentia extremitas cum recta quadam linea iuncta, demonſtratio ſic colligetur. Quoniam anguli ex utraq; parte ad centrū poſiti, ex propoſitione 8 primi, inter ſe æquales ſunt, unus uerò partialis angulus alterius trianguli totali, ut iam ex 4 primi demonſtratum, æqualis: ille partialis tandem angulus, ex communi illa noticia, Quę uni ſunt æqualia &c. ſuo totali angulo æqualis erit, quod eſt impoſſibile. Duæ igitur ſolùm rectę lineæ æquales, ab eodem puncto in circulum cadunt ad utraſq; breuiſſimæ lineæ partes. Si in circuli igitur diametro punctum aliquod ſumatur, quod non ſit centrum circuli, ab eoq; puncto rectæ quędam lineæ in circulum cadant: longiſſima quidem erit, in qua centrum: breuiſſima uerò, reliqua. Aliarum uerò, ſemper propinquior ei quæ per centrum protenditur, remotiore longior eſt. Duæ autem ſolùm rectæ lineæ, æquales, ab eodem puncto in circulum cadunt, ad utraſque partes breuiſſimę. quod demonſtraſſe oportuit.

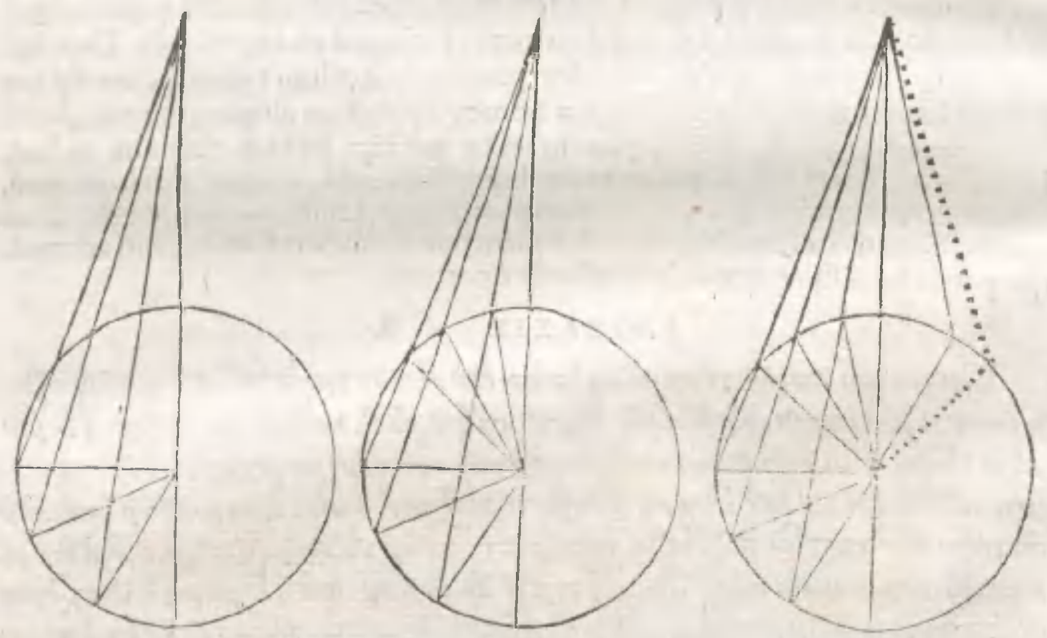
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η.

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τί σημεῖον ἐκτὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον διαχθῶσιν εὐθεῖαί τινες, ὧν μία μὲν διὰ τοῦ κέντρου, αἱ δὲ λοιπαὶ ὡς ἔτυχε· τῶν μὲν πρὸς τὴν κοίλην περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν, μεγίστη μὲν, ἡ διὰ τοῦ κέντρου· τῶν δὲ ἄλλων, ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἔσται. τῶν δὲ πρὸς τὴν κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν, ἐλαχίστη μέν ἐστιν, ἡ μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς διαμέτρου. τῶν δὲ ἄλλων, ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς ἐλαχίστης τῆς ἀπώτερόν ἐστιν ἐλάττων. Δύο δὲ μόνον εὐθεῖαι ἴσαι προσπεσοῦνται ἀπὸ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον ἐφ᾽ ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης.

PROPOSITIO VIII.

Si extra circulum aliquod ſumatur punctum, ab hoc uerò puncto ad circulum percurrant rectæ quædam lineæ, quarum una quidem per centrum, reliquæ uerò ut accidit: in concauam circūferentiam cadentium linearum, longiſſima quidem eſt quæ per centrum currit. Aliarum autem, ſemper propinquior ei quæ per centrum, remotiore longior erit. In conuexam uerò circumferentiam cadentium linearum, breuiſſima quidem eſt, dem est, quæ inter punctũ & diametrum, aliarum aũt, semper breuissimę propinquior, remotiore breuior est. Duæ autem solũ rectæ lineæ, æquales, cadunt ab hoc puncto in circulum ad utrasq; partes breuissimæ.

Sit circulus, extra illum etiam punctum acceptum, à quo aliquot rectæ lineæ, per circulum currentes, usq; ad concauam circunferentiam ducantur. Esto autem quòd ductarum una per centrum, aliæ uerò utcunq; transeant. Dico itaq;, in concauam circunferentiam cadentium linearum longissimã esse, quæ per centrum transit. Ex aliis autem, semper propinquiorem ei, quę per centrum transit, remotiore longiorem. Linearum uerò partialium, extra in conuexam circunferentiam circuli cadentium, quę puncto & diametro interiacet, illam omnium breuissimam. Ex aliis autem, semper breuissimæ propinquiorem, remotiore breuiorem esse. Ad hæc dico etiam, duas tantum ab hoc puncto rectas lineas, quæ ex utraq; parte breuissimæ, in circulum cadunt, æquales educi posse. Habet hæc propositio quinque partes, quarum prima & secunda, ubi prius à contactibus, pręter centrum ductarum & circunferentiæ, ad centrum rectæ lineæ ductę fuerint, illa quidem ex propositione 20 primi, per quam duo quælibet latera in triangulo, tertio longiora sunt, recta una pro duabus sibi ęqualibus sumpta, hæc uerò ex 24 eiusdem primi retineri poterunt. Quòd si & ab intersectionibus iam, præter centrum ductarum cum circunferentia, rectæ lineę ad centrum ductæ fuerint: tertiæ quoque &



quartæ partibus per easdem primi propositiones, ab inæqualibus tamen interim æqualibus subtractis, satisfieri poterit. Superest igitur nunc ut quintæ parti, quæ uidelicet duas solùm rectas lineas, ab hoc puncto æquales, ex utraq; parte breuissimæ, in circulum cadere asserit, satisfaciamus: quod quidem ab impossibili hoc modo fieri debet. Ducatur per 23 primi, ex centro recta linea, quæ cum semidiametro per circũferentiam ad punctum continuata, angulũ faciat, illi angulo, qui ex altera parte sub eadem semidiametro atq; ex centro ductarum linearum una continetur, æqualẽ, & connectatur huius ductæ extremitas quam habet in circunferentia, per primum postulatum in primo, cum puncto extrà sumpto, recta quadam linea, quòd nunc hæc recta ei, quæ ex altera parte diametri ad punctum continuata est, ęqualis sit, & sola etiam, sic ut nulla æqualis alia ex hoc puncto egrediatur, utrunq; non

non aliter, quàm in precedenti quarta pars, retinebitur. Si extra circulum igitur aliquod sumatur punctum, ab hoc uerò puncto ad circulum percurrant rectæ quædam lineæ, quarum una quidem per centrum, &cę. quod demonstrari oportuit.

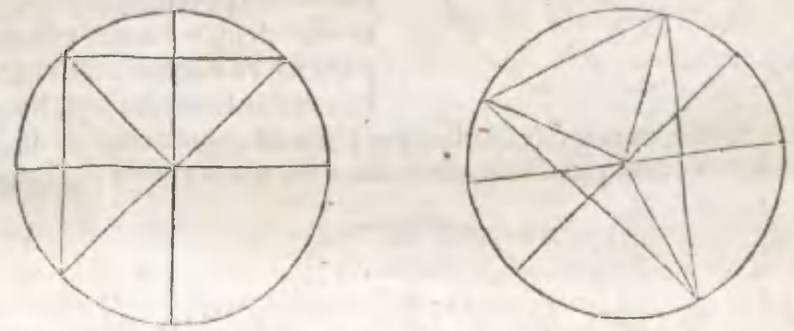
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ.

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐντὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσιν πλείους ἢ δύο εὐθεῖαι ἴσαι, τὸ ληφθὲν σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ κύκλου.

PROPOSITIO IX.

Si in circulo acceptum fuerit punctum aliquod, ab hoc uerò puncto ad circulum cadant plures quàm duę rectæ lineæ æquales: acceptum punctum centrum est ipsius circuli.

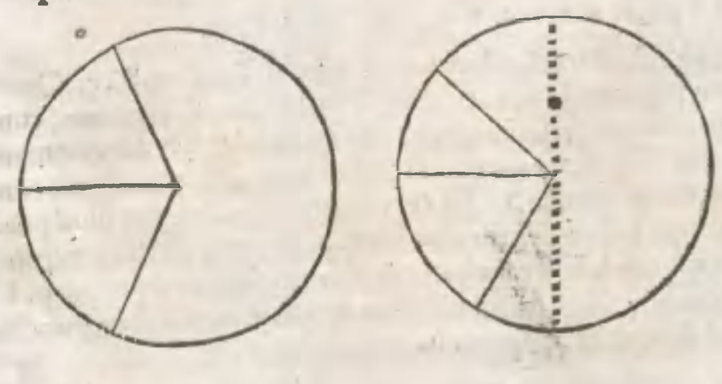
Sit circulus, in eo etiam punctum signatum sic, ut plures quàm duę rectæ lineæ inde usq; ad circumferentiam ductę inter se æquales sint: dico, signatum punctum centrum circuli esse. Coniungantur ductarum extremitates, quas habet in circumferentia singulæ, singulis rectis quibusdam lineis, coniungentium deinde duabus, uel omnibus si placet, bifariam diuisis, à punctis harum diuisionum rectæ lineę ad signatum in circulo punctum ducantur, continuenturq; ex utraq; parte usq; in cir-



cumferentiam. Et quoniam circa quamlibet ultimò iam ductarum linearum duo triangula sunt, quorum anguli ad illam, κατὰ τὴν κατασκευὴν & propositionem 8 primi, inter se æquales sunt, & quia deinde ex definitione 8 eiusdem, etiam recti: erit in harum ductarum qualibet, ex corollario primæ huius, centrum circuli. Hoc autem cũ ita sese habeat, nullibi potius fuerit, quàm in puncto uel intersectione omnium communi, quod scilicet est punctum signatum.

ALITER HOC IDEM AB ABSVRDO OSTENDI POTEST.

Esto circulus, in eo etiam punctum acceptum, sic ut, si fortè inde plures quàm duæ rectæ lineæ usq; ad circũferentiam ductæ fuerint, illæ inter se æquales sint: dico acceptum punctum centrum circuli esse. Sed negetur sanè, non esse centrum circuli punctum id, & si placet, sumatur aliud, atq; per illud acceptumq; prius punctum recta linea ducta ea ex utraq; parte in circũferentiam continuetur. Et quoniam in circuli diametro præter cẽtrum acceptum est punctum aliud, unde etiam plures rectæ ad circumferentiam ductæ sunt, cum illa in qua est centrum circuli, ex prima parte



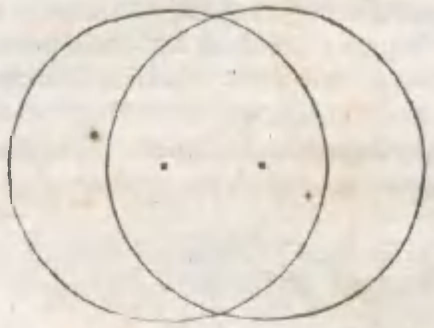
parte propositionis septimæ huius, omnium sit longissima, ex reliquis uerò, centro propinquior, ex 3 parte eiusdem, remotiore longior existat, contra hypothesim hoc inducitur, cum per eam, ex puncto ductæ rectæ inter se positæ sint æquales. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, & reli. Similiter etiam ostendemus, quòd nullum aliud præter id quod acceptum fuerit, punctum, centrum circuli esse possit. Punctum igitur in circulo acceptum, unde plures quàm duæ inter se æquales rectæ lineæ ad circunferentiam ductæ sunt, centrum circuli erit. quod demonstrasse oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ I.

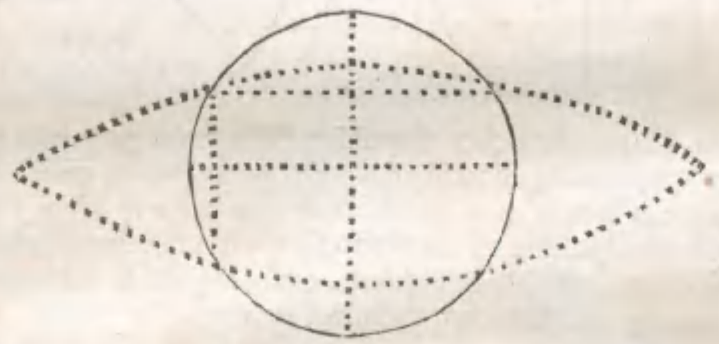
Κύκλος οὐ τέμνει κύκλον κατὰ πλείονα σημεῖα, ἢ δύο.

PROPOSITIO X.

Circulus non secat circulum in pluribus punctis, quàm duobus.



Sit circulus unus, alius deinde priorem secans: dico, quòd hæc sectio duobus tantum punctis contingat. Quòd si negetur hoc, atque affirmaret aliquis, pluribus duobus punctis, quatuor scilicet, circulum secare circulũ, describatur sanè si fieri potest, in hunc modum figura: una deinde harum intersectionum puncto, cũ duobus collateralibus duabus rectis lineis iuncto, his postea rectis bifariam diuisis, ex punctis diuisionum lineæ ad angulos rectos ducantur. Et quoniam unum & idem punctum, cõmunis nimirum ad rectos ductarum sectio,



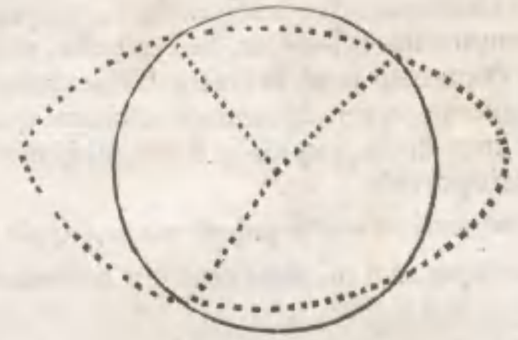
ex corollario propositionis primæ huius, bis usurpato, utriusq; circuli centrum esse demonstratur, cum id propositioni quintæ præmissæ maximè aduersetur, infertur tandem ueram esse propositionem, nimirum, Si circulus circulum secet, non in pluribus duobus locis id fieri, quod demonstrasse oportuit.

ALIA HVIVS REI DEMONSTRATIO.

Secat rursus circulus circulum in pluribus punctis quàm duobus, &cę. Quæratur, per propositionem primam huius, prioris descripti circuli centrum, cum eo deinde tribus rectis lineis tria intersectionum puncta copulentur. Et quoniam intra circulum, posteriorem scilicet, acceptum est punctum quoddam, à quo cum plures duabus ad illius circumferentiam rectæ egrediantur ęquales: erit illud punctum, per pręcedentem propositionem huius, eiusdem posterioris circuli centrum, atq; sic centrum duorum, mutuo sese secantium circulorum, id quod per propositionem quintam est impossibile. Non igitur circulus circulum in pluribus punctis quàm duobus secat, quod demonstrari oportuit.

HVIVS

HVIVS AVTEM REI GEOMETRICA FIguratio talis est.



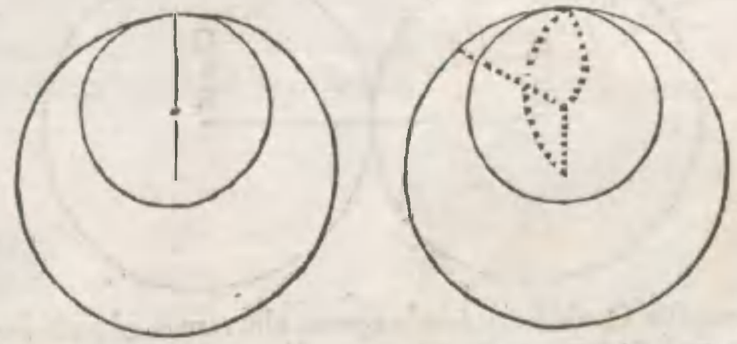
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ.

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντὸς, καὶ ληφθῇ αὐτῶν τὰ κέντρα· ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα καὶ ἐκβαλλομένη, ἐπὶ τὴν συναφὴν πεσεῖται τῶν κύκλων.

PROPOSITIO XI.

Si duo circuli sese mutuo intus tetigerint, atq; accepta fuerint eorum centra: ad eorum centra ducta recta linea & eiecta, in contactum circulorum cadit.

Sint duo circuli, quorum unus alterum intus tangat, & quærantur centra amborum: dico, si per hæc centra ducta fuerit recta quædam linea, atq; cõtinuata ulterius, hãc in contactũ circulorum cadere, id quod facilè ab absurdo, ut sequitur, demonstrari potest. Recta à centro ad centrum circuli ducta, quia hęc per centrũ maioris circuli continuata, subinde contra cõclusionem, magis ac magis à circulorum contactu recedit, cum ab authore non sit determinatum, ex qua parte recta continuari debeat, illa parte, tanquam frustra inde producturus lineam, posthabita, continuationem rectæ per minoris circuli centrum instituenda est. Instituatur ergo sic. Quòd si ita factum, non contingat in contactum cadere hanc rectam, in alium certè circumferentiæ locum eam cadere necesse erit. Sit sanè, & ducatur ab utriusq; circuli centro ad eorum contactum recta linea. Et quoniam ex tribus rectis lineis, una

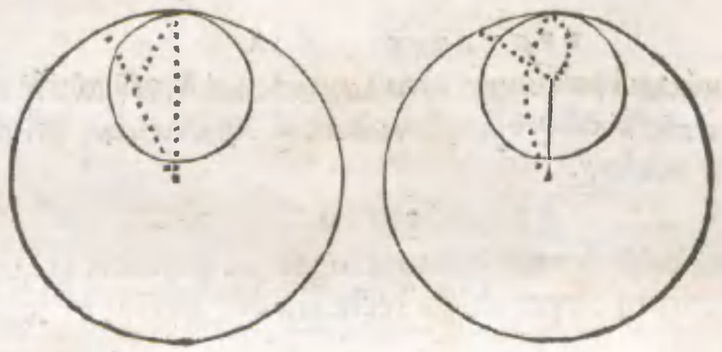


quidem, quæ à centris circulorum intercepta est, duabus uerò quæ à centris ad contactum circulorũ rectę ductę sunt, triangulum constitutũ est, cum omnis trianguli duo quælibet latera, ut iam sæpe demonstratum est, tertio latere longiora sint: & in proposito triangulo intercepta à centris linea, & ea quæ à centro interioris ad contactum ducta est, ut duo trianguli latera, reliquo tertio, ea nimirum linea, quæ à contactum exterioris egreditur atq; ad contactum ducta est, longiora erunt. Quare longiora

giora etiam ea quæ huic tertio lateri, ex definitione circuli, eſt linea æqualis. Atq; communi ab inæqualibus ablato, intercepta ſcilicet à centris linea: remanentiũ partium una, à centro ſcilicet interioris ad contactum ducta, reliqua, altera ſcilicet, quę à centris per circulum continuata eſt, longior. Sed quia illa, ex definitione circuli, huius parti æqualis eſt: & partialis tandem ſua totali linea longior erit, quod fieri nullo modo poteſt. Si igitur per centra duorum circulorum, quæ ſeſe mutuo intus tangunt, recta quędam linea ducta, atq; eiecta fuerit, in circulorum contactum ea cadet. quod demonſtrari oportuit.

Ὁμοίως κἂν ἐκτὸς ᾖ τοῦ μικροῦ κέντρον τοῦ μείζονος κύκλου, δείξομεν αὐτὸ ἄτοπον.

Similiter etiam, Si extra paruum circulum centrum maioris circuli fuerit, abſurditatem oſtendemus.



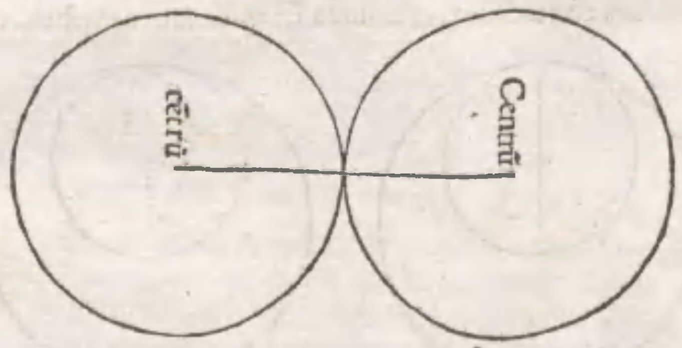
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ.

Ἐὰν δύο κύκλοι ἅπτωνται ἀλλήλων ἐκτὸς, ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη, διὰ τῆς ἐπαφῆς ἐλεύσεται.

PROPOSITIO XII.

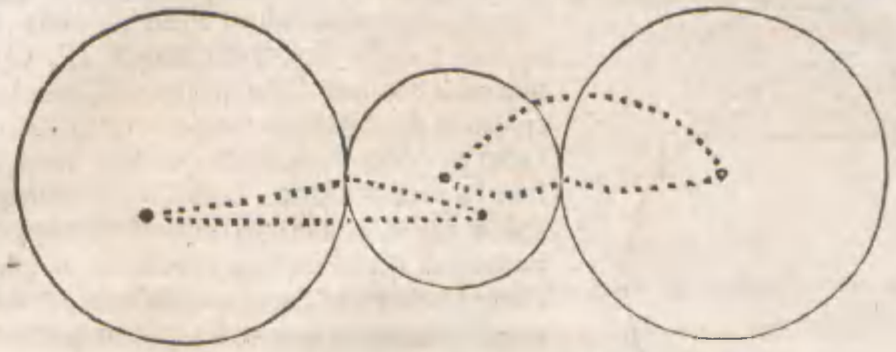
Si duo circuli ſeſe mutuo exterius tetigerint; ad centra eorum applicata recta linea, per contactum tranſibit.

Sint duo circuli, quorum unus alterum extra tangat, & quærantur centra amborum: dico, ſi per hæc centra ducta fuerit recta quædam linea, eam per circulorum



contactum tranſire. Quòd ſi hoc forte negetur, aliò eam certè inclinare concedendum erit. Sit ſanè, & ducatur ab utriuſq; circuli centro ad eorum contactum recta linea. Et quoniam quæ ex centro ad circumferentiam ducuntur rectæ lineæ, ſunt, ex definitione circuli, inter ſe æquales, eadem definitione bis uſurpata, æqualibus item lineis æqualibus additis: duæ à centris ad contactum ductæ rectæ lineæ, reliquis duabus, quæ & ipſæ à centris ad ſuas circumferentias ductę ſunt, rectis lineis æquales erunt. Ipſa igitur totali, quæ à centro ad centrum ducta eſt, ut tertio trianguli

guli latere, breuiores, quod eſt contra propoſitionem quandã in primo expoſitam, qua dicitur, quòd Omnis trianguli duo quælibet latera adamuſſim ſumpta, reliquo tertio longiora ſint. Si duo igitur circuli extrà ſeſe mutuo tetigerint: ad centra eorum applicata recta linea, per contactum tranſibit. quod demonſtraſſe oportuit.



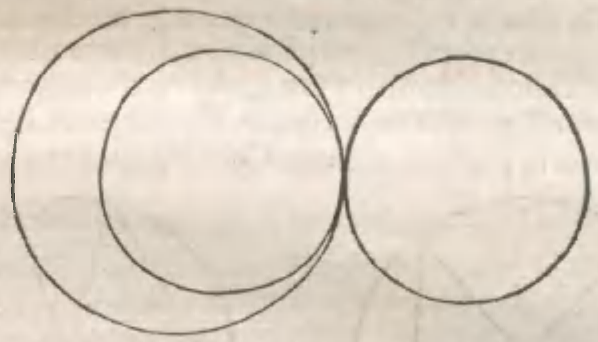
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ.

Κύκλος κύκλου οὐκ ἐφάπτεται πλείονα σημεῖα ἢ καθ' ἕν, ἐάν τε ἐντὸς, ἐάν τε ἐκτὸς ἐφάπτηται.

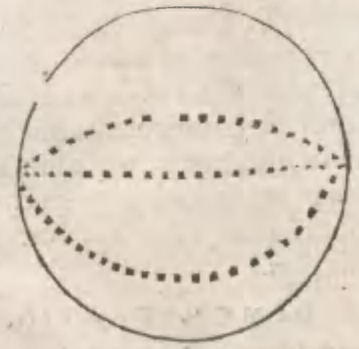
PROPOSITIO XIII.

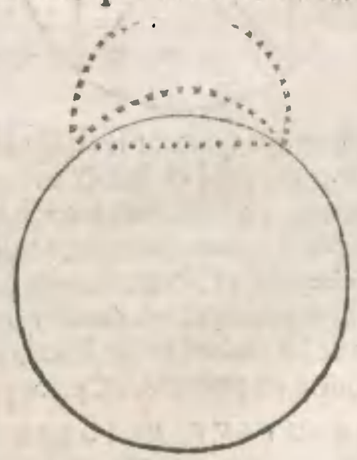
Circulus circulum non tangit in pluribus punctis uno, ſiue intus ſiue extra tangat.

Deſcribatur circulus, dico impoſſibile eſſe alium deſcribi poſſe circulum, qui deſcriptum priorem uel intus, uel extra etiam, in pluribus punctis quàm in uno



tangat. Quòd ſi uideatur poſſibile, ſit ſanè: tangat autem hunc primò intus in duobus locis, & ducatur per centra circulorum recta quædam linea: hæc autem in utranq; partem continuata, cum ex propoſitione 11 huius, in circulorum cõtactum cadat, quæ ex definitione circuli, lineæ ſunt in-

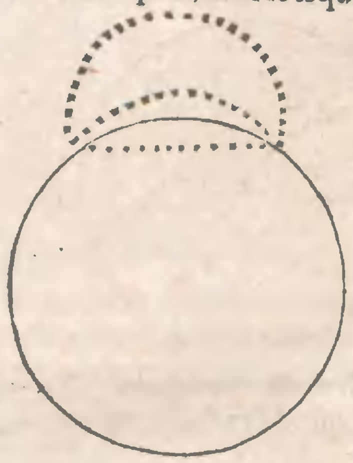




ter ſe æquales, mox intercepta à centris portione, uni earum addita, ab altera uerò

hac

hac eadem ablata, quæ ſic fiunt lineæ inæquales, ex eadem circuli definitione, ſecundò uſurpata, inter ſe æquales erunt: id quod rationi minime eſt conſentaneum.



Circulus igitur circulum intus tangens, uno tantum puncto hoc faciat neceſſe eſt. Quantum ad ſecundum. Eſto quòd extrà, circulus circulum in duobus locis tangat, atq; ducta à contactu in contactum recta quadam linea, cum hæc, ex propoſitione 2 huius, intra utrunq; circulum cadat, atq; id fieri hic nullo modo poſſit, propterea quod nullius circuli aliqua pars in altero ſit: exterius circulus circulum in pluribus punctis uno non tanget. Et quia neq; etiam interius, ut auditum eſt. Circulus igitur circulum tangens, in uno tantum puncto hoc ſiat neceſſe erit, & non in pluribus, interius ſiue exterius hoc accidat, quod demonſtrari oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ.

Ἐν κύκλῳ αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου. Καὶ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι ἀπὸ τοῦ κέντρου ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

PROPOSITIO XIIII.

In circulo æquales rectæ lineæ: æqualiter diſtant à centro. Et æqualiter diſtantes à centro: æquales inter ſe ſunt.

Deſcribatur circulus, in eo etiam rectæ quædam lineæ æquales ducantur. Et quia æquales: pro priore propoſitionis parte dico, eas etiam æqualiter à centro diſtare. Quòd ſi rectæ in circulo ductæ in æquali à centro diſtantia fuerint: & lineas has, ratione partis poſterioris, inter ſe æquales eſſe conueniet. Quæ quidem ambæ propoſitionis partes ſic retineri poterunt. Coniungantur extremitates ductarum

cum circuli centro quatuor rectis lineis. Et quoniam duo triangula deſcripta ſunt, quorum anguli, quos ex una & eadem parte in circumferentia habent, quia per propoſitionem 8 primi, ſunt inter ſe æquales, poſtquam ſuper æquales in circulo ductas lineas, à centro, per propoſitionem 12 primi, perpendiculares ductæ fuerint, cum illæ per has, ex poſteriore parte propoſitionis 3 huius, æqualiter ſecentur: & ipſe perpendiculares tandem, ex 4 eiuſdem primi, inter ſe æquales erunt: in quas deinde hæ cadunt rectæ lineæ, ex 4 definitione huius, æqualiter à centro diſtabunt: quod eſt primum, uel prior propoſitionis pars.

ALIA HVIVS PRIORIS PARTIS DEMONSTRATIO.

Maneat eiuſdem diſpoſitionis figura, niſi quod duæ, ex una parte ab extremitatibus ad centrum ductę, rectę lineæ poſſint omitti, prioris partis demonſtratio etiam

etiam ſic colligi poterit. Quoniam enim recta linea in circulo per centrum extenſa, rectam lineam in circulo ductam aliam, quæ non per centrum tranſit, ad angulos rectos ſecans, ipſam, ex poſteriore parte propoſitionis tertiæ huius, bifariam ſecat, hac eadem parte bis uſurpata, & quia etiam rectæ in circulo ductæ, ex hypotheſi ſunt inter ſe æquales: quæ de his in circulo ductis æqualibus lineis per perpendiculares abſcinduntur lineę, inter ſe æquales erunt. Sed ſunt etiam ęquales inter ſe, ex definitione circuli à centro ductæ lineæ, quæ cum harum æqualium extremitatibus coniunctæ ſunt: per penultimam igitur propoſitionem primi, atq; illis duabus communibus notitijs, Quę uni ſunt æqualia, &c. & item, Si ab æqualibus æqualia ſubtrahantur, & reliqua, res tandem cõcluditur. Lineas ſcilicet ad illas à centro perpendiculares, eo quod quadrata, inter ſe ęqualia habeãt, ęquales eſſe, id quod nunc eſt æqualis ipſarum à centro diſtantiæ argumentũ. Sed eſto iam, quantum ad partem poſteriorẽ, quòd rectę ductę æqualiter à centro diſtent: dico ipſas ductas inter ſe æquales eſſe, & hac quidem demonſtratione. Cadant ad ęqualiter ductas à centro perpendiculares, coniungatur etiam alterutra utriuſq; æqualiter diſtantium extremitas cum centro circuli. Et quoniam perpendiculares ductæ, ex definitione Linearũ ęqualiter à centro diſtãtium, inter ſe ſunt æquales, cum ab æqualibus rectis non poſſint deſcribi diuerſa quadrata: & harum æqualium rectarum quadrata æqualia erunt. Iis igitur perpendicularium quadratis à ſubtendentium rectos, quę & ipſę, ex definitione, inter ſe ęquales ſunt, quadratis ſubtractis: & reſidua quadrata, per 47 primi, inter ſe æqualia erunt: atq; tandem ſic etiam æqualium quadratorũ latera ęqualia. Sed quia utrunq; ex 2 parte propoſitionis 3 huius, rectę ductæ eſt medietas: & ipſæ ductę inter ſe æquales erunt, quod eſt ſecundum. In circulo igitur æquales rectæ lineæ, æqualiter, & re. quod demonſtraſſe oportuit.

ALIA EIVS QVOD IN HAC PROPOSITIONE SEcundò proponitur, demonſtratio.

Cadant ad æqualiter ductas à centro perpendiculares, coniungatur etiam alterutra utriuſq; æqualiter diſtantium extremitas cum centro circuli. Et quoniam quę ex centro ad circumferentiam ducuntur rectę lineę, inter ſe æquales ſunt: quadratum igitur unius quadrato alterius ex centro ductę lineę, æquale erit. Rurſus quoniam utriuſq; ex centro ductæ quadrato, duarum linearum quadrata, ex 47 primi æqualia ſunt: etiam quæ ab illis duabus deſcribuntur quadrata, harum duarum linearum quadratis, ex cõmuni illa noticia, Eidem æqualia &c. bis uſurpata æqualia erunt. Porrò ab utroque æqualium illo quadrato quod à perpendiculari utrobiq; deſcribitur, ſubtracto, cũ ipſæ perpẽdiculares (ut ex hypotheſi & definitione quadam colligere licet) una alteri ęqualis ſit, & reſidua quadrata, ex communi quadam noticia, inter ſe æqualia erunt. Quare & horum ęqualium quadratorum latera, æqualia. At uerò horum æqualium laterum, duplices ſunt, ex poſteriore parte propoſitionis tertię huius, rectę in circulo ductæ: & ipſæ ductę tandem ex illa cõmuni noticia. Eiuſdem duplicia &c. inter ſe æquales erunt. In circulo igitur æquales rectę lineæ, æqualiter diſtant à centro. Et æqualiter diſtantes à centro, æquales inter ſe ſunt. quod demonſtrari oportuit.

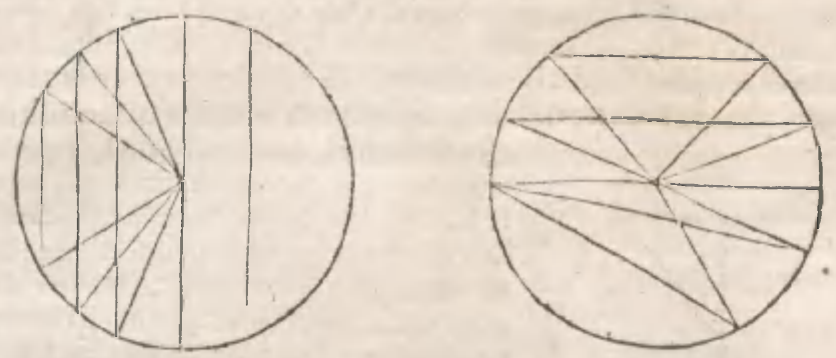
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ.

Ἐν κύκλῳ, μεγίστη μὲν ἐστὶν ἡ διάμετρος. τῶν δὲ ἄλλων, ἀεὶ ἡ ἔγγιον τοῦ κέντρου, τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστίν.

PROPOSITIO XV.

In circulo, longissima quidem est diameter. Aliarum uerò, semper per propinquior centro, remotiore longior est.

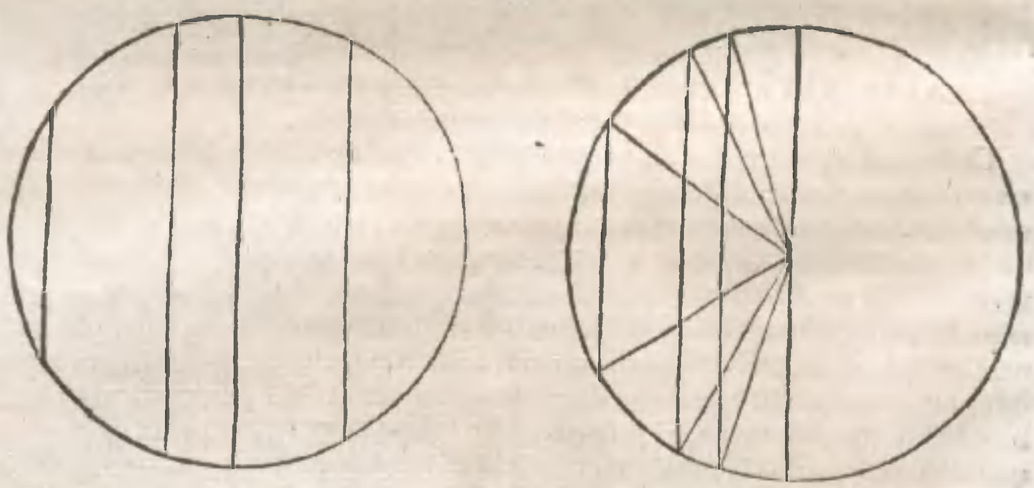
Sit circulus, in eo etiam aliquot rectę lineæ ductæ. Esto autem quòd una harum per circuli centrum, reliquæ uerò utcunq; transeant: dico per centrum transeuntem ex ductis omnium longissimam, aliarum uerò quamlibet centro propinquiorem, remotiore longiorem esse. Vtrisq; enim omnium præter centrum ductarum extre-



mitatibus, rectis lineis cum centro copulatis, prior propositionis pars ex propositione 20 primi, una tamen recta subinde pro duabus alijs sibi ęqualibus sumpta, demōstrabitur. Posterior deinde ex 24 eiusdē retineri potest. quod indicasse oportuit.

APPENDIX.

Oportet autem, ut omnes rectæ ductę ex una diametri parte appareant, & quidem ideo ut cognoscatur, quæ linea ex reliquis diametro uel centro propinquior, quæ item ab eo remotior sit. Quare si una, uel plures etiam ex altera diametri parte



conspiciantur rectæ lineę, in qua parte pauciores fuerint, eius lineæ ad alteram partem traducendę sunt hoc modo. Continuentur in rectum singularum ductarum, quibus in altera parte æquales ducendę sunt, perpendiculares ad suarum ipsarum longitudinem ultra centrum: deinde ab extremitatibus harum, tanquam rectarum datarum per 11 primi, ad angulos rectos lineæ, ex utraq; parte usq; ad circūferentiam continuatæ excitentur. Et quoniam hæ singulę, rectis in priori parte ductis, ex definitione Rectarum in circulo æqualiter à centro distantium, æquales sunt, quæq; suę, æquali nunc uel ęqualibus pro ęqualibus usurpatis, demonstratio ut premissa est absoluatur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

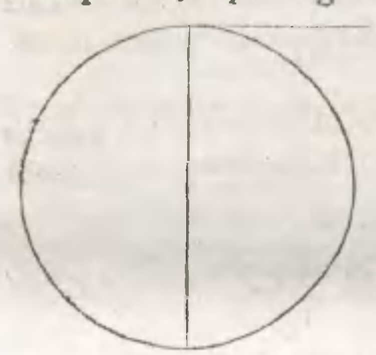
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϛ.

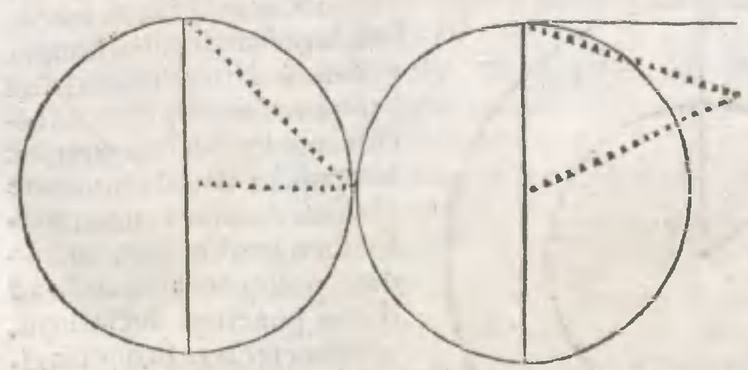
Ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη, ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου. Καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας, ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται. Καὶ ἡ μὲν τοῦ ἡμικυκλίου γωνία, ἁπάσης ὀξείας γωνίας εὐθυγράμμου μείζων ἐστίν· ἡ δὲ λοιπὴ, ἐλάττων.

PROPOSITIO XVI.

Quæ à diametri circuli extremitate ad angulos rectos ducitur, extra ipsum circulum cadet. Et in locum, inter ipsam rectam lineam & circumferentiam, altera recta non cadet. Et semicirculi quidem angulus, omni acuto rectilineo angulo amplior est. Reliquus autem, angustior.

Describatur circulus, ducatur in eo etiam diameter, dico primùm, si quę linea ab alterutra diametri extremitate ad rectos. excitetur angulos: extra circulum eam cadere oportere, neq; ex angulo, sub ipsa & circūferentia comprehenso, aliam rectam educi posse. Angulum præterea semicirculi, qui sub diametro & circumferentia continetur, omnium acutorum rectilineorum maximū: qui uerò sub circumferentia & ad rectos excitata, omnium acutorum minimum esse. Habet hæc propositio quatuor partes, quę ordine sic demonstrari possunt. In ipsam circumferentiam, cum sit latitudinis expers omnis linea, ad rectos excitata cadere non potest, cadet ergo intra uel extra ipsam circumferentiam. Quod si intra cadere sumptū fuerit, mox, si possibile sit, ea ducta, & ad circumferentiam usq; continuata, clauso item triangulo, extremitate huius ad rectos ductæ altera, recta quadam linea cum centro copulata. Et quoniam triangulum quod sic describitur ex definitione circuli, isoscelis est: duo igitur ipsius anguli quos ad basim habet, inter se æquales erunt. Quia uerò unus eorū est rectus, ratione ductæ ad rectos angulos lineæ: & alter sic rectus erit, quod est contra propositionē in primo 17, quæ dicit, Omnis trianguli duos angulos, quomodocunq; sumptos, duobus rectis minores esse. Vel contra corollarium propositionis in primo 32, quod quidem dicit, Omnis trianguli non duos tantùm, sed tres eius internos angulos, duobus rectis æquales esse. Ab extremitate igitur diametri ad angulos rectos ducta linea, intra circulum non cadet. Et quia neq; in ipsam etiā circumferentiam, ut dictum est: extra circulum ergo, ut uult propositio, ea cadet, id quod primò erat demonstrandum. Quòd uerò inter ductam & circumferentiam cadere nulla alia possit, impediunt propositio in primo 19, atq; deinde circuli definitio. Alia enim quadam interposita, si ad ipsam deinde à centro, per 12 primi, perpendicularis ducatur, cum rectus in triangulo angulus utroq; reliquo amplior sit, ex propositione etiam 19 primi, ampliori angulo longius latus subtendatur: statim ex definitione circuli, æquali tamen pro æquali linea sumpta, partialem sua totali linea longiorem esse, inferri potest: quod est impossibile. Patet itaq; id quod secundò





cundò demonstrandum erat. Et quia hoc nunc constat: angulum igitur illũ, quem diameter & circumferentia continent, omnium acutorum rectilineorum maximũ: reliquum deinde, sub circũferentia & ad rectos angulos excitata comprehensum minimum esse, sequi necesse est, cum aliàs si statueretur unus angulus illo maior, alius deinde hoc reliquo minor: ex loco inter circumferentiam atq; ad rectos angulos ductam, cõtra secundam partem huius, alia recta educi posset. Hoc autem cum demonstratum sit esse impossibile: quod igitur tertiò & quartò propositũ est, iam demonstratum erit. Constat itaq; tota propositio, quod erat demonstrandum.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτων φανερόν. Ὅτι ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐφάπτεται τοῦ κύκλου. Καὶ ὅτι εὐθεῖα κύκλου καθ' ἓν μόνον ἐφάπτεται σημεῖον.

COROLLARIVM.

Ex hoc sanè manifestum est, Quòd à diametri circuli extremitate ad rectos angulos ducta: ipsum circulum tangat. Et quòd recta linea circulum in uno tantum puncto tangat.

Ἐστι δὴ πρὸ Quoniam rectam lineam, duobus in circuli circumferentia punctis comprehensam, intra ipsum cadere, ex 2 propositione huius ostensum est. quod admonuisse oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ.

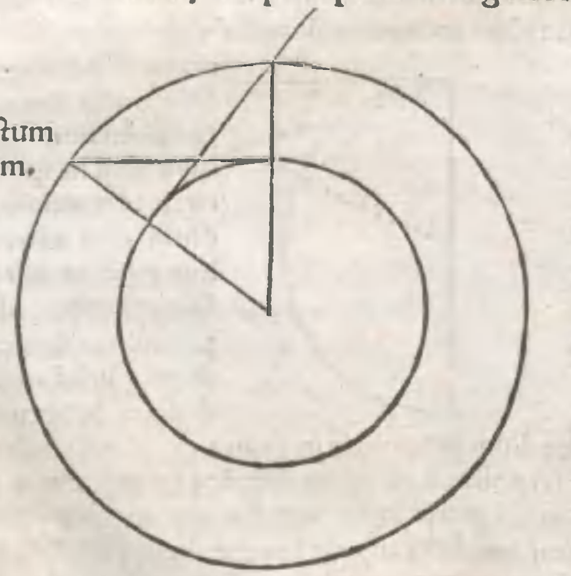
Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, τοῦ δοθέντος κύκλου, ἐφαπτομένην εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

PROPOSITIO XVII.

A dato puncto, dato circulo, contingentem rectam lineam ducere.

Sit punctum datum, circulus item datus, atq; propositũ, à puncto ad circulum contingentem rectam lineam ducere. Ipsum igitur punctum cum centro circuli, (quod quidem semper, ubi ignotum id fuerit, ex propositione prima huius inueniri licet) per postulatum primum, recta quadam linea coniungatur, atq; ubi hæc recta circulum secuerit, inde per 11 primi ad angulos rectos linea excitetur. Porrò hac eadem recta, qua cum pũctum datum & centrũ circuli iuncta sunt, loco semidiametri sumpta ex dati circuli cẽtro alius describatur circulus, atq; ubi is ad rectos angulos ductam secat, ex hoc puncto alia ad centrum recta linea ducatur, à cuius intersectione tandem cum circulo dato, postquam linea recta ad datum punctum ducta fuerit, cum hæc recta ea sit quę maximè petitur propositioni satisfactum erit, id quod hoc modo demõstrabitur. Quoniã enim hac præparatione duo triangula descripta sunt, quorum duo latera unius duobus lateribus trianguli alterius, ex definitione circuli, bis usurpata, æqualia

Punctum datum.



æqualia sunt, angulum etiam inter æqualia latera, angulo ęqualem habent, cum uidelicet ille sit, qui ad centrum ponitur, bis sumptus: ex propositione igitur 4 primi, & reliquum tertium latus reliquo tertio lateri: anguli insuper reliqui angulis reliquis: ac totum triangulum toti triangulo æquale erit. Quia autem unus angulus ex reliquis in triangulo uno, is nimirũ quem ad rectos ducta, & una dati circuli semidiameter comprehendunt, est rectus: & in altero qui huic, propter æqualitatẽ subtensarum, est æqualis, linea item ad rectos ductam secante, & altera dati circuli semidiametro includitur. rectus angulus erit. Hoc igitur cum ita sit: secans hæc, ut diximus, ex priore parte corollarij propositionis 16 huius, circulum datum tangere dicitur. Et quia hæc secans à puncto dato etiam egreditur: factum igitur quod maxime uolebat propositio. A dato scilicet puncto, dato circulo contingens recta linea ducta est. quod fieri oportuit.

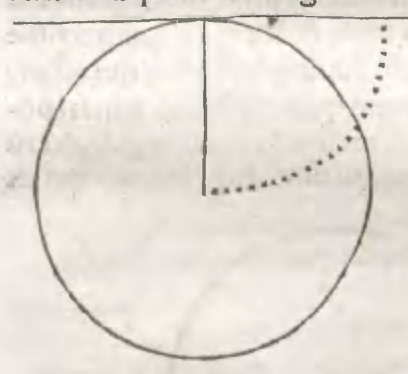
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΗ.

Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἐπιζευχθῇ τις εὐθεῖα· ἡ ἐπιζευχθεῖσα, κάθετος ἔσται ἐπὶ τὴν ἀπτομένην.

PROPOSITIO XVIII.

Si circulum tetigerit recta quædam linea, à centro uerò in contactum ducta fuerit recta quædam linea alia: ducta, in contingente perpendicularis erit.

Describatur circulus, cum etiam tangens recta linea ducatur: dico igitur, si à centro ad punctum contactus recta quędam linea ducta fuerit, quòd hæc recta ad contingentem sit perpendicularis. Si uerò non, ducatur per propositionem 12 primi, à centro ad ipsam contingentem recta perpendicularis alia. Et quoniam perpendicularis hæc, propter æqualem & erectum situm, angulos cum contingente ἐφ' ἧς, æquales inter se facit, unde sic uterq; eorum, ex quadam definitione, rectus est: ratione recti huius, qui nimirũ est in triangulo, uterq; ex reliquis eiusdem trianguli angulis, recto angulo minor erit. Quia uerò ampliori angulo omnis trianguli, ex propositione 19 primi, longius latus subtenditur: ex definitione igitur circuli, æquali tamen pro æquali linea sumpta, partialis linea sua totali longior erit, cum tamen contrà Totalis, ex cõmuni quadam noticia, linea sua partiali longior esse debeat. Quare præter contactum à centro in contingẽtem ducta, ad ipsam perpendicularis non erit. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι οὐδ' ἄλλη τις πλὴν τῆς & reliqua. Simili quoq; ratione ostenditur, quod nulla etiam alia, præter eam quæ à centro ad contactum tendit, ad contingentem perpendicularis esse possit. Quare hæc ipsa quæ à centro ad contactum ducitur recta linea, in cõtingentem perpendicularis erit. Si igitur circulum tetigerit recta quædam linea, à centro uerò in contactum ducta fuerit recta quędam linea alia: ducta, in contingente perpendicularis erit. quod demonstrasse oportuit.



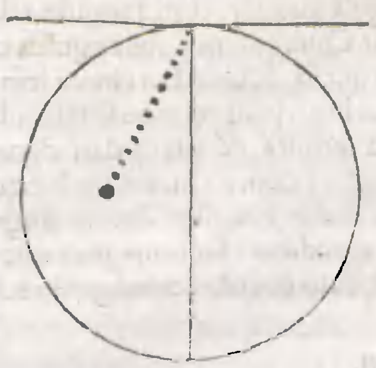
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΘ.

Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ ἁφῆς τῇ ἐφαπτομένῃ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ· ἐπὶ τῆς ἀχθείσης ἔσται τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

PROPOSITIO XIX.

Si circulum tetigerit recta quædam linea, à contactu uerò ipsi tangenti ad angulos rectos recta linea ducta fuerit: erit in ducta centrum circuli.

Describatur circulus, eum etiam tangens linea recta ducatur: dico, si à contactu, tanquam à puncto in contingente dato, per 11 primi, ad rectos angulos linea per circulum ducta fuerit, in ea centrum circuli esse. Quod si non, erit id necessariò extra eam alibi. Eo igitur alibi constituto atq; signato, inde etiam recta quadam linea ad punctum contactus ducta, cum hæc, per præmissam 18, ad contingentem perpendicularis existat: angulus minor maiori, uel partialis suo totali, ex definitione, qua omnes rectos æquales inter se esse intelligitur, æqualis erit: quod est impossibile. Punctum igitur extra perpendicularem alibi constitutum, centrum circuli non erit: in ipsa ergo contingentis per circulum ducta perpendiculari id esse necesse est. Si circulum igitur recta quędam linea tetigerit, à contactu uerò &c. quod demonstrasse oportuit.



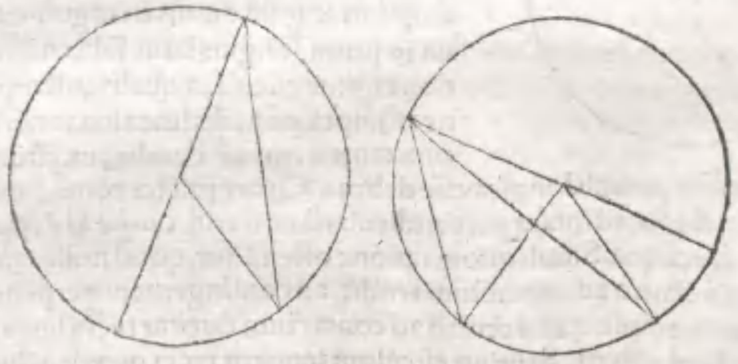
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Κ.

Ἐν κύκλῳ, ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία, διπλασίων ἐστὶ τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ, ὅταν τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν ἔχωσιν αἱ γωνίαι.

PROPOSITIO XX.

In circulo, qui ad centrum angulus, duplus est eius qui ad circumferentiam, quando eandem circumferentiam basim habuerint ipsi anguli.

Describatur circulus, in eo etiam duo ponantur anguli, unus quidem ad centrum, alter uerò ad circumferentiam, sic ut ambos unus & idem circumferentiæ arcus subtendat: dico, ad centrum positum angulum, duplum esse eius, qui ad circumferentiam ponitur. Huius propositionis figuratio quia tripliciter uariari potest, triplici etiam demonstratione hic opus erit. Aut enim ad centrũ anguli alterũ latus anguli in circũferentia alteri lateri coniungetur, aut non. Si primum, cum ex



definitione circuli à centro ad circumferentiam exeuntes lineæ, inter se æquales sint, unde sic triangulum isosceles appareat, qui anguli, ex priore parte propositionis 5 primi, sunt inter se æquales, hi simul sumpti, ad utrunq; ęqualium dupli erunt. Sed quia his simul, ut duobus internis & oppositis trianguli angulis, æqualis est, ex propositione 32 primi, angulus ad centrum positus, ut eiusdem trianguli angulus externus: & ad utrunq; æqualium idem externus, ad centrum positus angulus duplus erit, quod ostendisse oportuit. Sed esto iam quòd nõ coniungantur latera: quia uerò tum accidit, quòd unum latus unius, latus unũ alterius anguli secet, aut non secet, Si secet, diametro ab angulo qui est ad circumferentiam per centrum ducta, cum

cta, cum tam totalis quàm etiam partialis ad centrum externus trianguli angulus, per easdẽ propositiones primi bis usurpatas, suo interno opposito angulo duplus sit, partialibus ab ipsis totalibus subtractis, cum hi & illi eodem modo sese habeāt: & residui anguli, unus ad alterum, circa centrum quidem ad eum qui est ad circumferentiam duplus erit. Quòd si unũ unius, unum latus alterius anguli non secet, ducatur ab angulo qui est ad circumferentiam, per angulum ad centrum recta quædam linea, & demonstratio (partialibus tamen utriusq; anguli simul sumptis) ut modò succedet, angulum scilicet ad centrum eius, qui est ad circumferentiam, duplum esse. Angulus igitur qui ad centrum in circulo ponitur, duplus est eius qui ad circumferentiam, qualitercunque sanè hi, modo una & eadem circumferentia subtenduntur, descripti fuerint. quod demonstrasse oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΑ.

Ἐν κύκλῳ, αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

PROPOSITIO XXI.

In circulo, qui in eodem segmento sunt anguli, æquales inter se sunt.

Describatur circulus, in eo etiam aliquot super uno & eodem segmento anguli: dico, illos angulos inter se æquales esse. Quod quidem, ductis à segmenti terminis ad centrum duabus rectis lineis, per præcedentem 20 & communem illam noticiam, Quæ eiusdem dimidia, æqualia inter se sunt, manifestum fiet.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ. ΚΒ.

Τῶν ἐν τοῖς κύκλοις τετραπλεύρων, αἱ ἀπεναντίον γωνίαι, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

PROPOSITIO XXII.

Quadrilaterorum in circulis anguli, qui ex opposito, duobus rectis sunt æquales.

Describatur circulus, in eo etiam quadrilaterum qualecunq;, æqualium uel inęqualium laterum: dico, angulos quosq; oppositos duobus rectis ęquales esse. Ducantur in quadrilatero duę diametri. Et quoniam omnis trianguli tres anguli interiores, ex corollario propositionis 32 primi, duobus rectis æquales sunt. Et rursus, quoniam etiam æquales inter se sunt, ex præmissa 21, qui in eodem segmento sunt anguli, eo quod prius dicitur, semel: altero uerò, bis usurpato, bis insuper angulo pro ęquali alio sumpto: quantum ad duos oppositos in quadrilatero angulos ratione oppositionis unius, propositioni satisfactum erit. Porrò eodẽ ordine, demonstratione pro alijs duobus

oppositis in quadrilatero angulis instituta, quòd & illi duobus rectis angulis æquales sint, manifestè patebit. Quadrilaterorum igitur in circulis anguli, qui ex opposito, duobus rectis sunt æquales. quod demonstrasse oportuit.

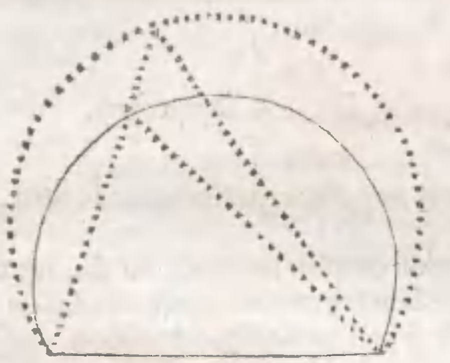
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΓ.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα, οὐ συσταθήσονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.

PROPOSITIO XXIII.

Super eadem recta linea, duæ sectiones circulorum similes & inæquales, non constituentur ad easdem partes.

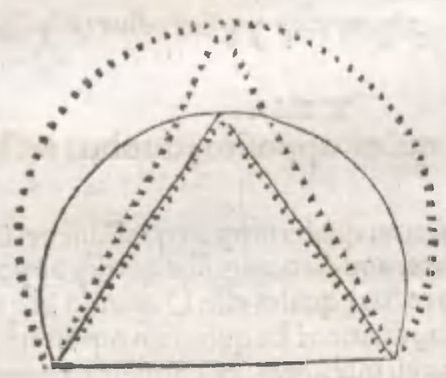
Describatur circuli sectio: dico, quòd super eius recta impossibile sit, aliam, descriptæ similem & inæqualem, ad eandem etiam partem, posse cōstitui sectionem. Quòd si uideatur hoc posse fieri, constituatur sanè super hac recta linea sectio alia, ut quæ positæ similis sit & inæqualis, ad illam eandem etiam partem, & extendatur, per primum postulatum primi, recta quædam linea, ab una rectæ extremitate per arcus utriusque sectionis transiens, atque ubi hæc sectionum arcus secuerit, inde etiam, per postulatum eiusdem primi secundum, rectæ lineę ad alteram rectæ extremitatem ducantur. Et quoniam sectiones sunt, ex hypothesi aduersarij, inæquales, atque etiam similes, cum similitudo sectionū circuli ab æqualitate angulorum,



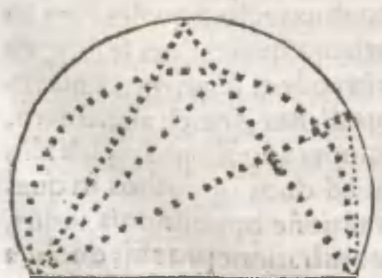
quos illæ sectiones suscipiunt, definiatur: anguli illi quos secundò ductæ cum prima in sectione comprehendunt, externus & internus oppositus unius trianguli, inter se ęquales erunt. Sed quia non sunt, ut quidem hoc propositio in primo 16 testatur, neque sectiones etiam, ut ponitur, inter se inæquales & similes erunt. Super eadem igitur recta linea, duæ sectiones circulorum similes & inæquales, non constituentur ad easdem partes. quod demonstrasse oportuit.

APPENDIX.

Potest etiam figura huius propositionis describi, ut super sectionibus constitutorum angulorum uterque sua propria latera habeat, utque latera unius ab alterius sectionis laterib. includantur. Quòd si ad hunc modū figura descripta fuerit, tum quia angulus interioris angulo sectionis exterioris, per propositionem 21 primi, maior est, descripti igitur arcus similes non erunt, id quod est contra propositionis hypothesim.



Item licet uterque angulorum sua propria latera habeat, accidit tamen aliquando, ut unum latus unius, unum alterius sectionis latus secet. Quòd si sic, tum propter demonstrationem faciliorem, ab intersectione arcus interioris, & lateris unius anguli sectionis exterioris alia ad extremitatem rectę linea recta ducenda est. Et quoniam in eodem segmento anguli, ex propositione 21 huius, inter se sunt



se sunt æquales, cum unus eorum alio quodam alterius segmenti angulo, ut externus suo interno, ex propositione 16 primi, maior sit: & alter, propter æqualitatem, eodem maior erit: non æquales igitur anguli, neque etiā similes sectiones, quod est contra hypothesim. Super eadem igitur recta linea, duæ sectiones circulorum similes & inæquales, nō constituētur, ad easdē partes. quod demōstrari oportuit.

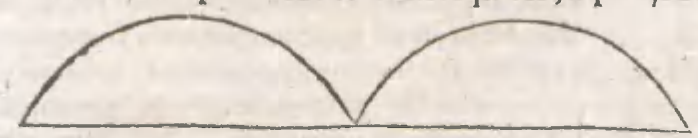
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΔ.

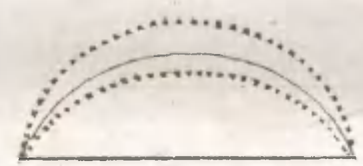
Τὰ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων, ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν.

PROPOSITIO XXIIII.

Super æqualibus rectis lineis similes circulorum sectiones, æquales inter se sunt.

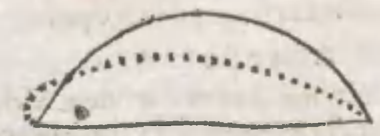
Sint duæ uel plures rectæ lineæ æquales, super ijs etiam similes circulorum sectiones cōstitutæ: dico, illas sectiones inter se æquales esse. Est huius propositionis demonstratio præcedens 23. Nam congruente uel superposita una sectione alteri, cum earum rectæ, ex hypothesi, sint inter se æquales, una extremitate unius super una sectionis alterius posita, & in alteram huius altera extremitas illius coincidet, quare sic & arcus sectionum coincidere oportet. aliàs sequeretur, Similes & inæquales circulorum sectiones super una & eadem recta describi posse, quod est contra propositionem præcedentem. Coincidunt ergo, ac propterea æquales etiam inter se, ex communi quadam noticia, quę in primo his uerbis exposita est, Quę congruunt, & reliqua.





DEMONSTRATIO ALIA.

Superponatur una sectio alteri, ita ut unius extremitas una super alterius sectionis unam extremitatem ac recta super rectam collocetur. Et quoniam ęquales sunt ipsæ rectæ: altera extremitas unius cum altera alterius sectionis extremitate coincidet: atque hinc linea lineæ congruit. Quòd si sectio sectioni cōgruat: eas inter se æquales esse, ut uult propositio, ex noticia quadam communi concluditur, Si igitur & cæ. Esto autem quòd non congruant sectiones basibus congruentibus, sed differant, atque in diuersa loca cadant. Quoniam enim circulus, ut uult propositio 10 huius, in pluribus punctis quàm duobus circulum alium non secat, cum hic in tribus punctis fiat circulorum sectio, propositioni citatæ contrarium fieri apparet, quod non conceditur. Quare congruente linea lineæ, nō potest non sectioni quoque sectio congruere. Super æqualibus igitur rectis similes circulorum sectiones constitutæ: & ipsæ sectiones inter se æquales erunt. quod demonstrasse oportuit.



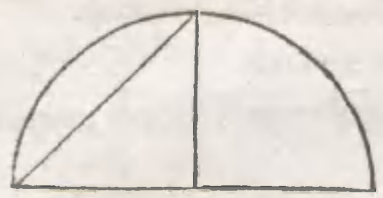
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΕ.

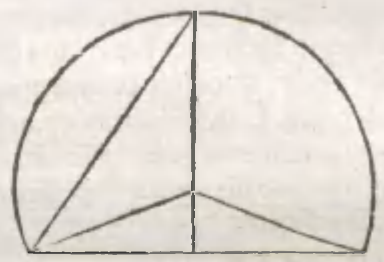
Κύκλου τμήματος δοθέντος, προσαναγράψαι τὸν κύκλον οὗπέρ ἐστι τμῆμα.

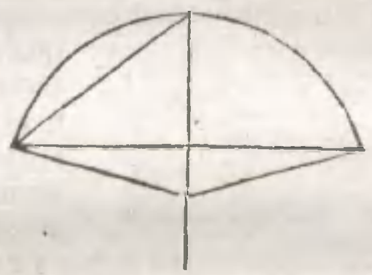
PROPOSITIO XXV.

Circuli ſectione data, deſcribere circulum cuius eſt ſectio.

Sit ſectio circuli data, atq; propoſitum, circulum eius deſcribere, hoc eſt, ſectionem hanc, ut circulus tandē ſit, perficere & complere. Diuidatur igitur recta, ſuper quam eſt conſtituta ſectio, per propoſitionem 10 primi, bifariam, atq; à puncto diuiſionis huius ad angulos rectos linea excitetur, ad arcum uſque, & ultra etiam lineam rectam, quantum nimirum neceſſarium fuerit, eam prolongando. Erit autem in ea ad rectos ducta linea, ut teſtatur corollarium propoſitionis primæ huius, centrum circuli. Ducta igitur ab huius πρὸς ὀρθὰς ductæ & arcus interſectione ad angulum ſectionis alterutrum recta quadam linea, ſi ad hanc anguli inter ſe æquales ſint, ubi hæc eadem πρὸς ὀρθὰς ducta rectam arcus ſecat, ibi centrum circuli: ipſam uerò ſectionem, Semicirculum eſſe pronuncies. Eo igitur ex hoc puncto circini officio completo, nona propoſitione huius adiuuante, propoſitioni ſatisfactum erit. Quòd ſi dicti anguli fuerint inter ſe inæquales, angulo ei qui ſub recta hac, atq; ea ſuper qua eſt conſtituta ſectio, cōprehenditur, per 23 primi, ut alteri angulo æqualis fiat, rectæ cuiuſdam lineæ ductu ſuccurrendum erit. Quo facto, ubi hæc ad rectos ductam tetigerit, centrum circuli ibi eſſe pronūciabis. id quod ſic demonſtrari poteſt. Ducatur ex hoc puncto ad alterā arcus extremitatē recta quędam linea. Et quoniam hæc, & aliæ duæ, quæ ex hoc eodem puncto ad circumferentiam concurrunt rectæ lineæ, ex propoſitionibus 6 & 4 primi æquales inter ſe ſunt: quòd tandem id punctum, de quo iam agitur, eius, cuius eſt data ſectio, circuli centrum ſit, ex propoſitione 9 huius manifeſtum erit. Eo igitur nunc ſecundum unius æqualium linearum interuallum, per 3 poſtulatum primi, inde deſcripto, cum per reliquarum etiam æqualium extremitates tranſeat, propoſito ſatisfactum erit. Circuli igitur ſectioni datæ, circulus ipſe deſcriptus atq; cōpletus eſt: quod fieri oportuit.

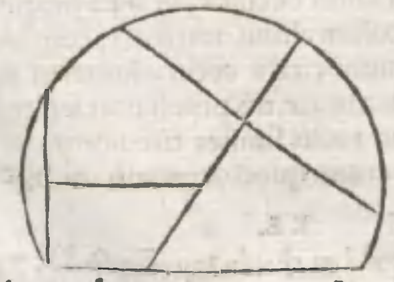


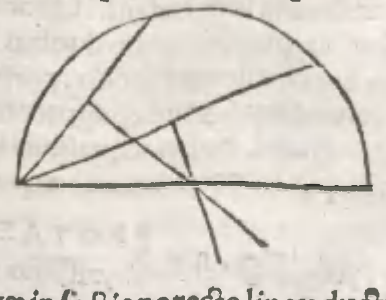




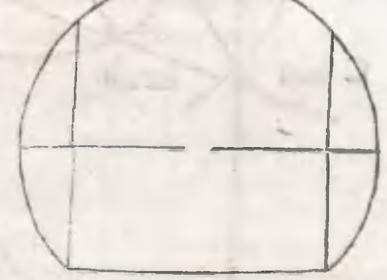
EST ET ALIA HVIVS PROPOSITIONIS DEMONSTRATIO.

In data ſectione, cuius circulus compleri debet, ducantur duæ rectæ lineæ. Vel, ut ſit operatio certior. Sumantur tria in ſectione puncta, utcunq;: hæc duabus rectis lineis copulentur, & erunt, ut ſupra, duæ in ſectione rectę lineæ ductæ. Harum nunc utraq; bifariam diuiſa, à puncto diuiſionis utriuſq; ad angulos rectos linea, per propoſitionem 11 primi excitetur, ubi tandem hæ duæ ad rectos ductę ſeſe mutuo ſecant, ibi per corollarium primæ huius, bis uſurpatum, circuli, qui ſectionē datam ſua deſcriptione comprehendit, centrum eſſe pronunciabitur.



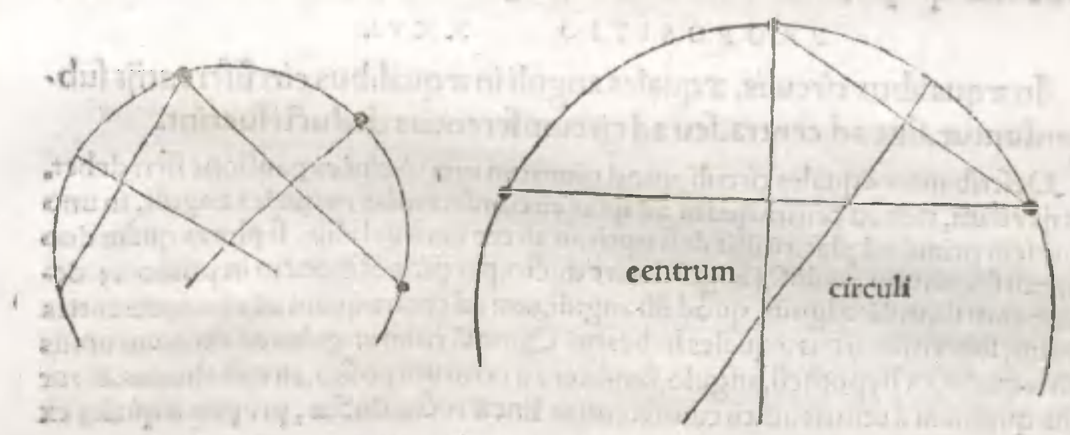


Quod ſi ad rectos ductæ ſeſe mutuo non ſecuerint, id quòd aliquando, ubi in circulo ductæ rectæ lineæ parallelę ſunt, accidere poterit, quia tum ad rectos ductę coincidunt, atq; ſimul una recta linea ſunt, ea bifariam diuidenda, per punctum deinde hoc, centrum quæſiti circuli exprimendum erit.



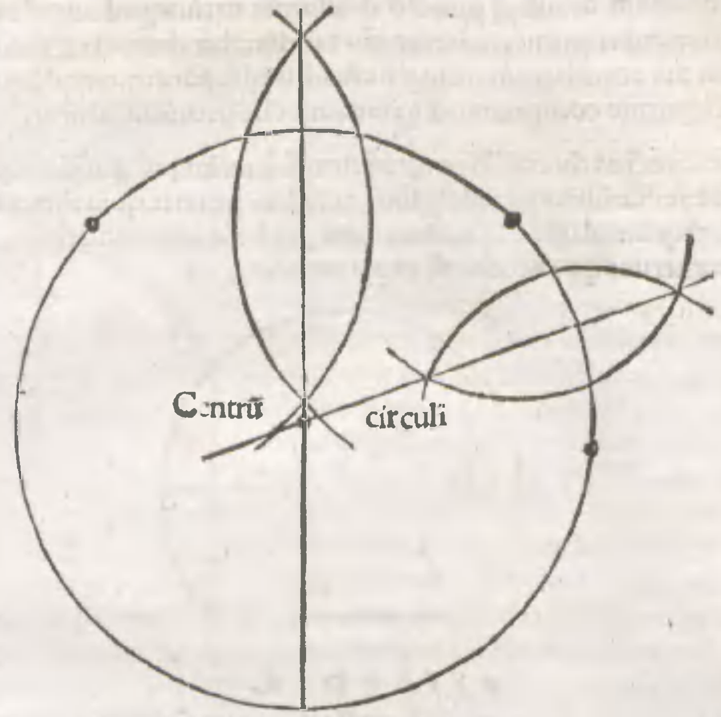
APPENDIX.

Vtuntur hac propoſitione, qui centrū trium punctorum, cum opus ſit, quærere, hoc eſt circulum, per data tria puncta tranſeuntem, deſcribere ſolent. Nam cum circulus per data puncta tranſire debeat, ſectionem quandam circuli per puncta data occultè ductam ſibi imaginantur. Quòd deinde ex tribus illis punctis (uno tamen bis repetito) tanquam ex tribus centris, officio circini, ultra medietatem ſpacij, per quod arcus deſcribi debet, ſemper extenſi, quatuor circulorum arcus deſcribant, ita ut ſemper bini & bini ſeſe mutuo ſecent, per puncta tandem inter ſectionum duas rectas uerſus unam & eandem partem ducāt, nihil certè aliud eſt, quàm dicta puncta duabus rectis coniungere, à media deinde harum, ad angulos rectos lineas excitare. Id quod cuilibet, propoſitionē 11 primi altius intuenti, perſpicuum erit. Atq; huius hoc loco Lectorem admonere uoluimus.



SEQVITVR HVIVS TRACTATIONIS PRO CENtro trium punctorum inueniendo figura geometrica alia.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ



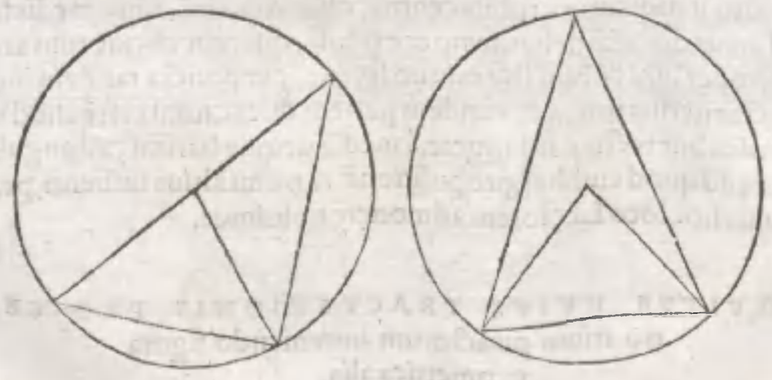
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚϚ.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις, αἱ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασι, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις, ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι.

PROPOSITIO XXVI.

In æqualibus circulis, æquales anguli in æqualibus circũferentijs subtenduntur, siue ad centra. seu ad circumferentias deducti fuerint.

Describantur ęquales circuli, quod nimirum una circini expansione fieri debet, in ijs etiam, tam ad centra quàm ad ipsas circumferentias, æquales anguli, in uno quidem primò ad placitũ illis descriptis, in altero uerò uel alijs, si plures quàm duo circuli fuerint, uno cuiusq; anguli latere ducto, per propositionem in primo 23 describendi sunt: dico igitur, quòd illi anguli, tam ad centra quàm ad circumferentias positi, subtensos arcus æquales habeant. Quoniã enim angulus ad centrum unius est æqualis, ex hypothesi, angulo, similiter ad centrum posito, circuli alterius, & rursus quoniam à centris ad circumferentias lineæ rectæ ductæ, propter æquales ex



hypothesi circulos, inter se æquales sunt, in singulis tertio latere ducto: & hæc ter-

tia latera per propositionem 4 primi, circumferentię deinde uel circulorum sectiones, propterea quòd angulos, ex hypothesi, inter se æquales suscipiant, per definitionem similium sectionum, & propositionem 24 huius, inter se æquales erunt. Subtractis igitur nunc æqualibus arcubus ab æqualibus circulis, cum & residui arcus, à quibus scilicet æquales in æqualibus circulis anguli subtenduntur, ex communi quadam noticia inter se æquales sint, propositioni satisfactum erit. Aequales igitur anguli in æqualibus circulis, ab æqualibus circumferentijs subtenduntur, siue ad centra, seu ad circumferentias deducti fuerint. quod demonstrasse oportuit.

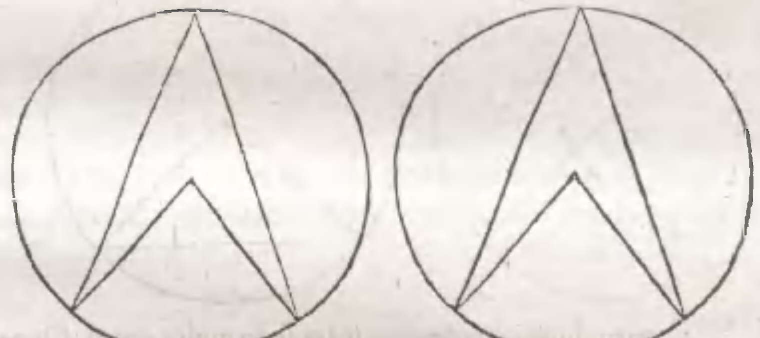
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΖ.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις, αἱ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβηκυῖαι γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις, ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι.

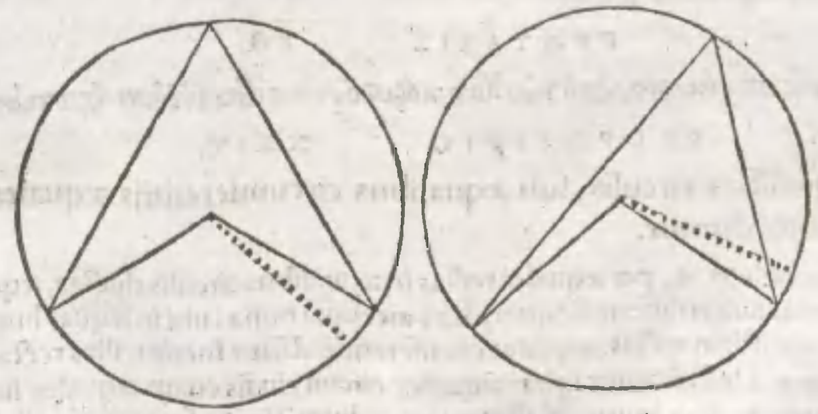
PROPOSITIO XXVII.

In æqualibus circulis, qui super æquales circumferentias deducuntur anguli, æquales inter se sunt, siue ad centra, seu ad circumferentias deducti fuerint.

Describantur æquales circuli, ponantur etiam in ijs super æquales circumferentias anguli: dico igitur, quòd illi anguli, tam ad centra quàm ad circumferentias positi, inter se æquales sint. Quoniam enim qui ad centra ponuntur anguli, sunt aut



inter se æquales, aut non. Si æquales: & qui ad circumferentias ponuntur anguli, cum hi, ex propositione 20 huius, sint ad centrum positis dimidia, inter se æquales erunt, quod est propositum. Quòd si fuerint inæquales, succurratur uni ex his, per 23 primi, siue maiori siue minori angulo, ut alteri æqualis fiat, quo facto, & illorum æqualium angulorum circumferentiæ uel arcus subtendentes, per præmissam, in-



ter se æquales erunt. Sed quia uni illorum æqualis etiam est, ex hypothesi, mutati anguli ſubtendens. per hanc igitur communem noticiam, Quæ eidem ſunt æqualia & reli. infertur tandem, partialem totali ſubtendenti circumferentiæ æqualem eſſe, quod eſt impoſſibile. Inæquales igitur non ſunt ad centrum poſiti anguli, ſed æquales. Et quia æquales: etiam ad circumferentias poſiti cum ſint horum dimidij, ut dictum eſt, inter ſe æquales erunt. Aequales igitur circumferentiæ uel arcus, in æqualibus circulis, æquales angulos ſubtendunt, ſiue ad centrum, ſiue ad circumferentias poſiti fuerint, quod demonſtraſſe oportuit.

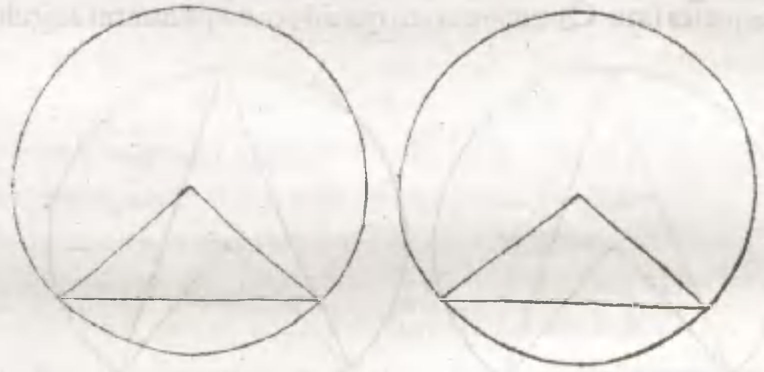
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΗ.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσας περιφερείας ἀφαιροῦσι, τὴν μὲν μείζονα τῇ μείζονι, τὴν δὲ ἐλάττονα τῇ ἐλάττονι.

PROPOSITIO XXVIII.

In æqualibus circulis, æquales rectæ lineę, æquales circumferentias auferunt, maiorem quidem maiori, minorem uerò minori.

Deſcribantur æquales circuli, in ijs etiam æquales rectæ ducantur: dico igitur, per illas rectas æquales etiam in circulis auferri circumferentias, maiorem ſcilicet maiori, & minorem circumferentiæ minori. Nam ductis ab extremitatibus rectarum ad centra rectis lineis, cũ circuli ex hypotheſi ſint inter ſe æquales, & hæ rectæ



ductæ ex definitione æqualium circulorum, inter ſe æquales erunt. Quare & anguli ad centrum poſiti per propoſitionem 8 primi, æquales, atq; inſuper arcus uel circumferentiæ, quæ hos æquales angulos ſubtendunt, per 26 huius, æquales, quod eſt unum. Porrò quia circuli ex hypotheſi ſunt æquales, ab his igitur ſi æquales circumferentiæ ablatę fuerint, & quę relinquuntur circumferentię, ex communi quadam noticia, inter ſe æquales erunt. In circulis igitur æqualibus, æquales rectę lineę æquales circumferentias auferunt, maiorem quidem maiori, minorem uerò minori. quod demonſtraſſe oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΘ.

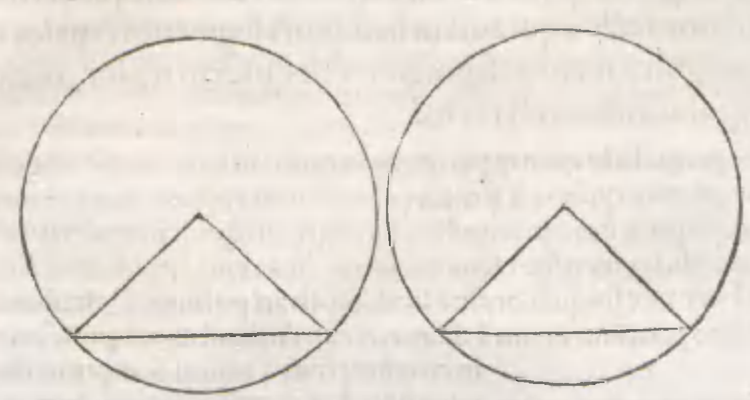
Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις, ὑπὸ τὰς ἴσας περιφερείας ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν.

PROPOSITIO XXIX.

In æqualibus circulis, ſub æqualibus circumferentijs æquales rectæ ineæ ſubtenduntur.

Vt præcedens 28, per æquales rectas in æqualibus circulis ductas, æquales circumferentias auferri aſſerit: ſic quoq; hæc uiceſima nona, ubi in æqualibus circulis per lineas quaſdam rectas, æquales circũferentię ablatæ fuerint, illas rectas æquales eſſe infert. Deſcribantur igitur æquales circuli, in ijs etiam æquales ſumantur circumferentiæ: dico igitur, & illarum æqualium circumferentiarum rectæ ſubtenſæ

tenſæ inter ſe æquales ſint. Ducantur ab extremitatibus ſubtenſarum ad centra rectæ lineæ. Et quoniam hæ rectæ ductæ, propter æqualitatem circulorum ex hy-



potheſi, ex definitione prima huius, inter ſe æquales ſunt, anguli inſuper ad centra, ſub illis æqualibus ductis comprehenſi ex 27 huius, æquales: & lineę his æqualibus angulis ſubtenſæ, quæ etiam ſub circumferentijs æqualibus ſubtenduntur, per propoſitionem 4 primi, inter ſe æquales erunt. In circulis igitur æqualibus, ſub æqualibus circumferentijs æquales rectæ lineæ ſubtenduntur. quod demonſtraſſe oportuit.

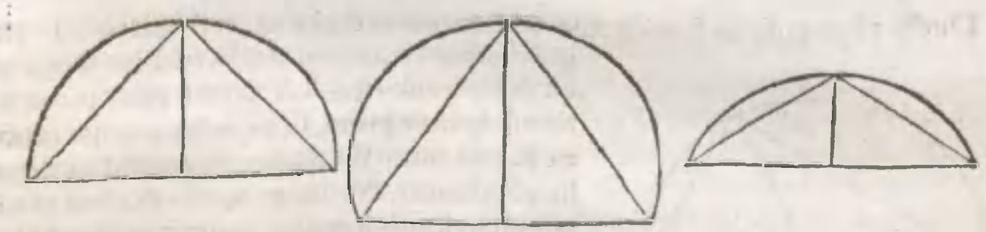
ΠΡΟΤΑΣΙΣ. Λ.

Τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν, δίχα τέμνειν.

PROPOSITIO XXX.

Datam circumferentiam, biſariam ſecare.

Sit circumferentia data, atq; propoſitum eam biſariam ſecare. Datæ igitur circũferentiæ extremitates recta quadam linea coniungantur, hac deinde recta biſariam diuiſa, à puncto diuiſionis ad rectos angulos linea uerſus circumferentiam excitetur: & erit hæc, ipſa quæ circumferentiam biſariam ſecabit, quod ſic demon-



ſtratur. Ducantur à ſectionis puncto in circumferentia ad eius extremitates duæ rectę lineę. Et quoniã hæ duæ rectę, ex propoſitione 4 primi, inter ſe ęquales ſunt, & rurſus quoniam in circulis æqualibus æquales rectæ lineæ, per propoſitionem 28 huius, circumferentias æquales auferunt, maiorem maiori, & minorem minori: cum quod de circulis æqualibus, illud ipſum etiam de uno & eodem dici poſſe & uerùm eſſe cõſtet, demonſtratio abſoluta erit. Data igitur circumferentia biſariam diuiſa eſt. quod feciſſe oportuit.

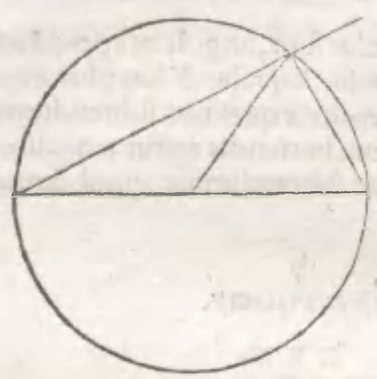
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΑ.

Ἐν κύκλῳ, ἡ μὲν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνία ὀρθή ἐστιν, ἡ δὲ ἐν τῷ μείζονι τμήματι ἐλάττων ὀρθῆς. ἡ δὲ ἐν τῷ ἐλάττονι μείζων ὀρθῆς. Καὶ ἔτι, ἡ μὲν τοῦ μείζονος τμήματος γωνία, μείζων ἐστὶν ὀρθῆς, ἡ δὲ τοῦ ἐλάττονος τμήματος γωνία, ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς.

PROPOSITIO XXXI.

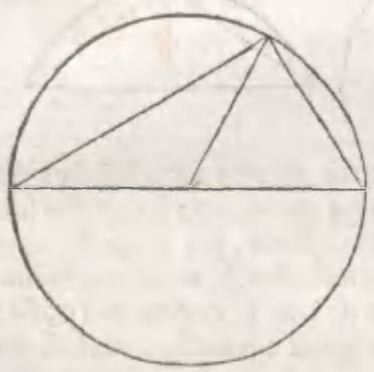
In circulo, angulus qui in ſemicirculo eſt:rectus eſt,qui uerò in maiori ſegmento:minor recto, qui autem in minori ſegmento: maior eſt recto. Et inſuper, angulus maioris ſegmēti:rectò quidem maior, minoris uerò ſegmenti angulus:minor eſt recto.

Habet hæc propoſitio quinq; partes,puta quòd in ſemicirculo angulus: rectus ſit, in maiori ſegmento quàm eſt ſemicirculus:minor recto,in minori autem:maior recto. Præterea ſegmentorum angulos, ſemicirculo quidem maioris:recto minorem, quod uerò eſt ſegmentum ſemicirculo minus: eius angulum recto maiorem eſſe oporteat.Hæc nūc ſingula ordine ſic demōſtrari poſſunt. Deſcribatur circulus cum ſua diametro, ducātur etiam à diametri extremitatibus ad punctum aliquod, in circumferentia ubiuis ſumptum,duæ rectę lineę: dico, has duas rectas angulum rectum continere. quod quidem, ſi altera ductarum ultra circumferentiam ſecundum continuationem in rectum eiecta,ex hoc ipſo angulo deinde recta quædam linea ad centrum ducta fuerit, ſic demonſtrari poterit. Quoniam enim totalis in circulo trianguli unum latus ulterius productum eſt: externus qui ſic deſcribitur angulus, duob. internis oppoſitis,ex propoſitione 32 primi ęqualis erit. Sed quia his internis,ex definitione circuli & priore parte propoſitionis quinte primi,bis uſurpatis, æqualis etiam eſt angulus, quem duę in ſemicirculo rectę lineę includunt: eidem igitur in ſemicirculo angulo dictus externus ęqualis erit. quare,ex definitione 10 primi, uterq; rectus. In ſemicirculo igitur angulus,rectus eſt.quod demonſtraſſe oportuit.



POTEST HOC IDEM ETIAM ALITER DEMONSTRARI in hunc modum.

Ducta ab angulo in ſemicirculo ad centrum recta linea, cum partialium angulorum uterque,uni totalis trianguli angulo, ex definitione circuli & priore parte propoſitionis quintæ primi, ſit æqualis, atq; hac ratione & communi illa noticia, Si ęqualibus æqualia adijciantur, &c. idem totalis duobus in triangulo reliquis æqualis: utrunque æqualium, reſpectu totalis trianguli, ex corollario propoſitionis 32 primi, duorum rectorum medietas, atq; tandem utrunque per ſe uni recto æqualis erit. id quod demonſtraſſe oportuit.



Ἄλλη ἀπόδειξις τοῦ ὀρθὴν εἶναι τὴν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνίαν.

Alia demonſtratio iſtius quod in propoſitione dicitur, Angulum in ſemicirculo rectum eſſe.

Cum ex propoſitione 32 primi, Omnis trianguli uno latere ulterius producto, externus angulus duobus internis oppoſitis ęqualis ſit, cumq; etiā ex priore parte propoſi-

tionis 5 primi,iſoſceliū triangulorū qui ad baſim ſunt anguli inter ſe æquales ſint,hac & illa bis uſurpata:qui ad centrū ſunt anguli, uterq; ad alterius trianguli angul,ū in circumferentia exiſtentem,duplus erit. Sed quia ad centrum poſiti anguli,ex propoſitione 13 primi,duobus rectis ſunt æquales:eorum medietas igitur, ut eſt in ſemicirculo angulus,duorum rectorum medietati,hoc eſt uni recto, æqualis erit. Hinc colligitur

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν τριγώνου ἡ μία γωνία δυσὶν ἴση ᾖ, ὀρθή ἐστι. Διὰ τὸ καὶ τὴν ἐκείνης ἐφεξῆς ταῖς αὐταῖς ἴσην εἶναι. Ὅταν δὲ αἱ ἐφεξῆς γωνίαι ἴσαι ὦσιν, ὀρθαί εἰσιν.

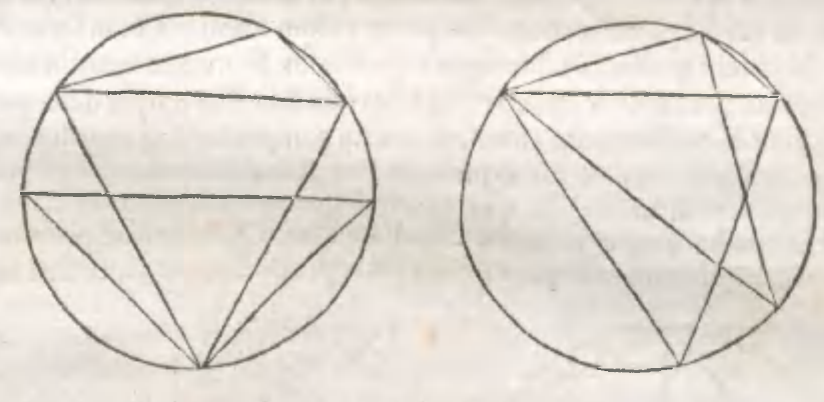
COROLLARIVM.

Ex hoc ſanè manifeſtum. Quando trianguli unus angulus duobus, reliquis ſcilicet, æqualis fuerit:illum rectum eſſe.

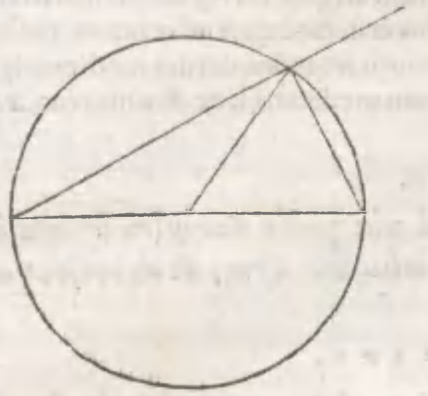
Propterea quod ille deinceps ſe habens, eiſdem duobus reliquis æqualis ſit. Quando autem deinceps ſe habentes,anguli æquales fuerint:recti erunt ambo.

Nunc quantum ad ſecundam ac tertiam propoſitionis partem.

Deſcribatur circulus,ducatur in eo etiam recta quædam linea,non per centrum tranſiens,puncto deinde in utriuſque ſegmenti circumferentia ſumpto,ad utrunq; eorum duæ ab extremitatibus ductæ rectæ ducantur lineæ:dico igitur, eum angulum qui eſt in maiori ſegmento,recto minorem:illum uerò qui eſt in ſegmento minori, recto maiorem eſſe. Ducatur in circulo diameter, quomodocunq;,ad huius



extremitates deinde ab angulo, qui quòd talis ſit qualis proponitur, demonſtrari debet,duæ rectę lineę,uel una tantum ſi ſuffecerit. Et quoniam angulus in ſemicirculo, per primam partem propoſitionis huius, rectus eſt, cum angulus qui eſt in maiori ſegmento,ſit recti anguli pars, contrà uerò, anguli illius qui eſt in minori ſegmento,ipſe angulus rectus pars:qui igitur in maiori ſegmēto fuerit angulus,ut pars,recto minor, in minori uerò,ut totum,recto angulo maior erit. Vel,probato uno,quòd aut in ſegmento maiori angulus, recto minor ſit: aut alter, recto maior, cū Omnis quadrilateri,in circulo deſcripti,anguli ex oppoſito, per propoſitionem 22 huius,duobus ſint rectis æquales: ſtatim tandem & alterum inferri poteſt. Quartò igitur iam,quòd in propoſitione dicitur,angulum maioris ſegmenti,recto maiorem: ac ultimò tandem,minoris ſegmenti, recto minorem eſſe, ſic demonſtretur. Deſcripto circulo, in eo etiam præter centrum recta quadam linea ducta:dico,&c. Ducatur in circulo diameter ſic,ut eius una extremitas uni ductæ extremitati copuletur,altera deinde ductæ cum altera extremitate diametri recta quadam alia iuncta ctæ,ubi hæc eadem recta ultra circumferentiam cōtinuata fuerit, demonstrationis figura parata erit. Et quoniam maioris segmenti angulus, ut apparet, eo angulo qui ex prima parte propositionis huius,rectus est, maior existit, angulorum porrò in hac figura deinceps se habentiū uterq;,ex corollario præmisso rectus est: qui igitur maioris segmenti est angulus, ut totum, recto maior: contrà,qui minoris,ut pars, angulo recto minor erit. In circulo igitur qui quidem, & reliqua, quod demonstrasse oportuit.



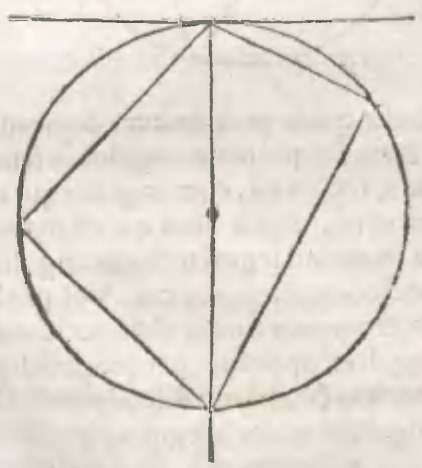
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΒ.

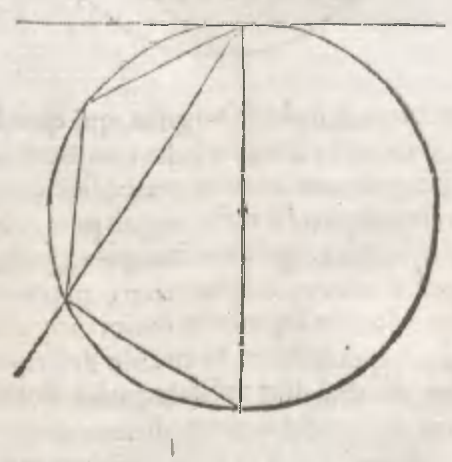
Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς ἐπὶ τὸν κύκλον διαχθῇ τις εὐθεῖα τέμνουσα τὸν κύκλον· ἃς ποιεῖ γωνίας πρὸς τῇ ἐφαπτομένῃ, ἴσαι ἔσονται ταῖς ἐν τοῖς ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήμασι γωνίαις.

PROPOSITIO XXXII.

Si circulum tetigerit recta quædam linea, à contactu uerò extendatur quædam recta linea circulum secans: anguli quos facit ad contingentem, æquales erunt ijs, qui alternatim in circuli segmentis consistunt, angulis.

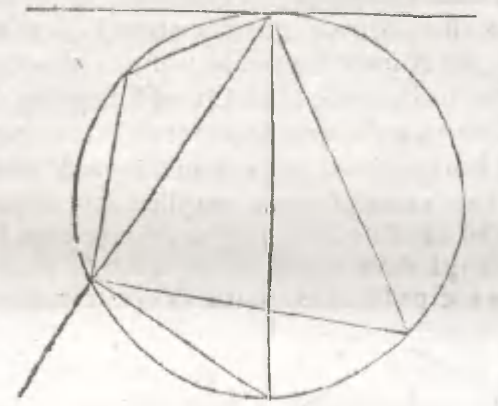
Describatur circulus, ducantur etiam duæ rectæ lineæ, quarum una circulum tangat, altera uerò à puncto contactus, per circulum transiens, eum secet: & erit circulus per secantem quidem in duo segmenta diuisus. Statuatur nunc in utroq; segmento angulus, per binas & binas rectas lineas ductas. His itaque descriptis: dico, quòd à secante & contingente circulum uterq; comprehensus angulus, ei, qui ex altera parte in segmento ponitur, æqualis sit. Potest in descriptione figuræ, uel quæ per circulum extenditur, uel illa quæ in uno segmento angulum constituit recta linea, uel neutra harum per centrum circuli transire. Quantum ad primum, Cum in segmentis angulorum uterq;, ex prima parte propositionis 31, rectus sit, cumq;





etiam ipsa secans ad tangentem, ex 18, sit perpendicularis, atque ita uterq; angulorum qui sic fiunt, rectus: illis mediantibus, per communem illam noticiam, qua omnes recti anguli æquales inter se sunt, propositioni tandem satisfactum erit. Quantum

tum ad secundum. Cum triangulum appareat, cuius in semicirculo angulus ex prima parte propositionis 31 huius, rectus est, cumq; etiam Omnis trianguli tres anguli interiores, ex corollario propositionis 32 primi, duobus rectis æquales sint: reliqui duo eiusdem trianguli anguli, uni recto æquales erunt. Sed quia unus, rectus etiam est ex 18 huius, angulus quem nimirum ex eadem parte contingens ac per centrum transiens recta linea comprehendunt: per hanc communem noticiam, Quæ uni sunt æqualia, & c. illi duo uni huic angulo æquales erunt: communi igitur illo angulo quem habent, ablato, quantum ad unum angulum iam propositio constabit. De reliquo tandem, cum tam quadrilaterorum in circulis anguli, qui ex opposito sunt, ex 22 huius, quàm etiam qui à contingente & per centrum transeunte recta linea cōprehenduntur, ex propositione 13 primi, duobus rectis æquales sint: ex communi quadam noticia, duo priores posterioribus duobus angulis æquales erunt. ab æqualibus igitur his, angulis qui iamdudum æquales inter se esse demonstrati sunt, subtractis: & de altero iam angulo, quod ille ex altera parte in segmento posito angulo æqualis sit, dubium amplius non erit. Quantum ad tertium, ubi scilicet neutra rectarum, neque circulum secans, neq; etiam illa quę in segmento angulum constituit, per centrum circuli transeat. Quòd si hoc modo figura descripta fuerit, tum à puncto contactus, per 11 primi, ipsi tangenti ad rectos angulos linea excitanda est. Erit autem hæc, cum ex propositione 19 huius, centrum circuli contineat, diameter circuli. Coniungatur porrò diametri altera extremitas cū extremitate secātis. Et quia angulus qui sic describitur, eo quòd in semicirculo existat, rectus est: reliqui duo in hoc triangulo anguli, uni recto æquales erunt.



Sed quia angulus etiam ad contactum totalis ex illa parte, ratione ad rectos angulos excitatę lineæ, est rectus: idem totalis prioribus duobus æqualis erit. Subtracto igitur ab illis æqualibus angulo quodam illis communi, cum in omni circulo qui in eodem segmento sunt anguli, inter se æquales sint, de eo qui nimirum in illa parte sub tangente & secante comprehenditur angulo, quòd ille ex altera parte in segmento angulo æqualis sit, tandem constabit. De altero nunc angulo nullum erit dubium, quin & ipse in altero segmēto angulo æqualis sit. Nam cum quadrilaterum in circulo descriptū, duos angulos oppositos duobus rectis ęquales habeat, cumq; insuper illi, qui à tangente & secante circulum comprehenduntur anguli, duobus rectis æquales sint, per cōmunem illam noticiam, Eidem æqualia & c. illis duobus in quadrilatero angulis, quos secans cum contingente facit, duo anguli æquales erunt. Quia aūt unus, ut iam ostensum, est uni ęqualis: & alter tandem, per subtractionem æqualium ab æqualibus, alteri angulo æqualis erit. Si circulum igitur tetigerit recta quædam linea, à contactu, & c. quod demonstrasse oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΓ.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας γράψαι τμῆμα κύκλου, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

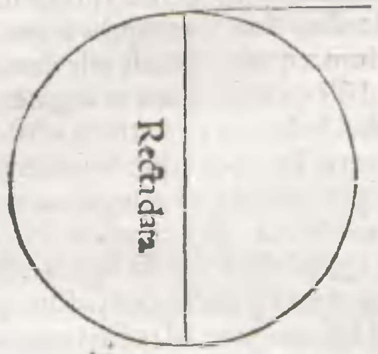
PROPOSITIO XXXIII.

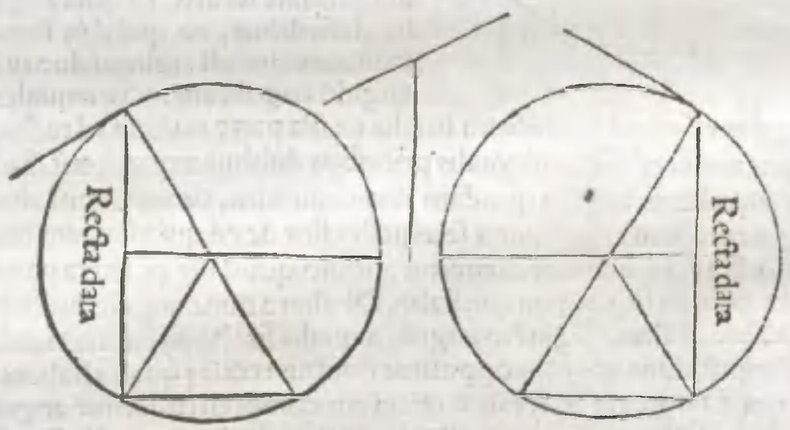
Super data recta linea describere sectionem circuli, capientem angulum æqualem dato angulo rectilineo.

Requirit

Requirit hæc propositio rectam lineam datam, angulum item rectilineum datum, proponit autē, quomodo super data recta sectio, quæ dato rectilineo angulo ęqualem angulum capiat, describatur. Angulus datus potest esse rectus, aut non rectus. Si rectus, data recta bifariam diuidenda, super ea deinde ex puncto diuisionis semicirculus describendus est, & factum erit propositum: id quod ex prima parte propositionis 31 huius demonstrari poterit. ALITER. Si rectus fuerit angulus propositus, constituatur ad alterutram rectæ datæ extremitatem, atq; ad ipsam rectam lineam, per 23 primi, angulus, dato angulo ęqualis, recta deinde bifariam diuisa, ex puncto hoc, secundum alteram eius medietatem describatur circulus. Et quoniam angulus quem applicata ad rectam datam constituit, ex structura, rectus est: rectę datæ applicata circulū illum, ex corollario propositionis 16 huius, tanget. Et quoniam etiam, ut habet propositio præcedens, angulus quem hę duę rectę comprehendunt, in segmento angulo ex aduersa parte est ęqualis, illo igitur descripto, cū ex cōmuni quadā noticia, Eidem æqualia, illa & inter se æqualia sint: de recto iam angulo constat propositū. Quòd si angulus datus nō fuerit rectus, erit is maior illo, aut minor. utrum horum fuerit, ad rectam datam & ad alteram eius extremitatem, angulus dato æqualis, per 23 primi, rectæ cuiusdam lineę ductu constituatur. Recta deinde data bifariam diuisa, tam ex hoc diuisionis puncto ipsi datæ, quàm etiam ex modò usurpata datæ extremitate ipsi ductę, ad angulos rectos linea excitetur: & erit communis

Angulus datus, rectus.





harum ad rectos ductarum sectio, centrum futuri circuli. quod in hunc modum demonstrabitur. Ducatur ab hoc centro ad alteram datę extremitatem recta quædam linea. Et quoniam hæc, ex structura & propositione 4 primi, lineę ei, quę ipsi ductę ad rectos angulos insistit, ęqualis est: circulus igitur ex cētro posito, ad unius æqualium interuallum, per 3 postulatum primi, descriptus, per terminum etiam alterius æqualis transibit. Describatur ergo is, altera etiam semidiametro, illa nimirum, quæ ab angulo, dato æquali, ducta est, in diametrum continuata, eius in circumferentia extremitas cum altera datæ extremitate iungatur. Et quoniam hæc recta, quæ cum data angulum dato æqualem comprehendit, propterea quòd ab extremitate diametri ad rectos angulos egrediatur, ex priore parte corollarij propositionis 16 huius, ipsum descriptum circulum tangit, cum angulus segmenti, quod ex altera parte super data recta descriptum est, angulo, ad contingentem, dato æquali

to æquali descripto, ex 32 huius æqualis sit: super data igitur recta sectio, angulo dato æqualem capiens angulum, descripta est. quod fieri oportuit.

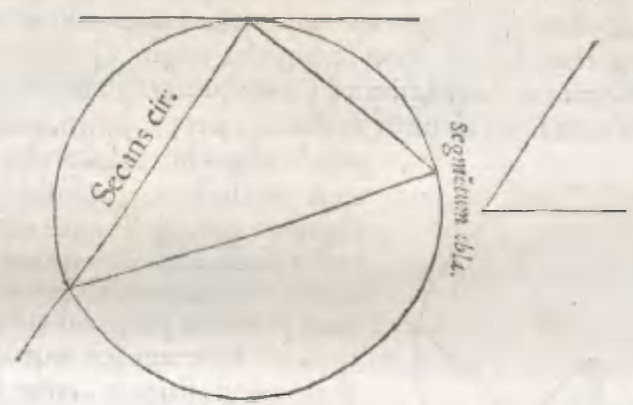
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΔ.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος κύκλου τμῆμα ἀφελεῖν, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

PROPOSITIO XXXIIII.

A' dato circulo segmentum abscindere, capiens angulum æqualem dato angulo rectilineo.

Sit circulus datus, angulus item rectilineus datus, atq; propositum, à circulo portionem, quæ capiat angulum dato æqualem, abscindere. Ducatur primò per 17. huius, recta quędam linea circulum tangens, à puncto deinde contactus, per 23



primi, alia recta circulum secans, quæ cum tangente angulum dato æqualem faciat, ducatur, & propositioni satisfactum erit, cum per hanc ipsam secantem huiusmodi sectio de circulo nunc sit abscissa. Puncto igitur in circumferentia, huic angulo opposita, ubiuis sumpto, si ab eo duæ rectæ lineæ ad extremitates circulum secantis ductæ fuerint, quem hæ rectæ angulum incluserint, dato rectilineo angulo æqualem esse, propositio huius 32, & communis illa noticia, Quæ eidem sunt æqualia & reliqua, commonstrabunt. A' dato igitur circulo segmentum, quod angulum dato rectilineo angulo æqualem capiat, abscissum est, quod fieri oportuit.

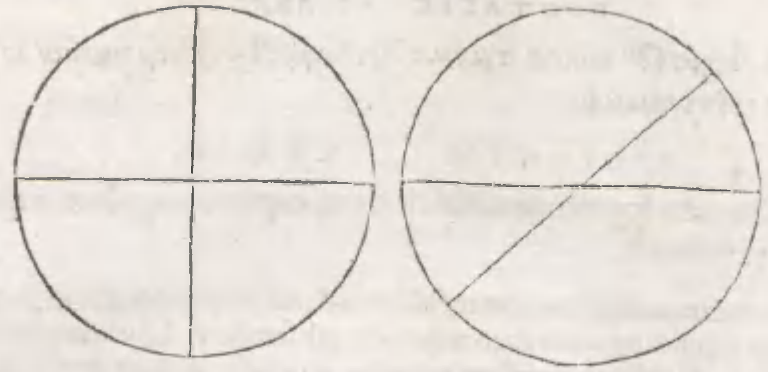
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΕ.

Ἐὰν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὸ ὑπὸ τῶν τῆς μιᾶς τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν τῆς ἑτέρας τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

PROPOSITIO XXXV.

Si in circulo duæ rectæ lineæ sese mutuo secuerint: quod sub sectionibus unius comprehenditur rectangulum, æquum est ei, quod sub segmentis alterius comprehenditur rectangulo.

Describatur circulus, in quo etiam duæ rectæ lineæ, sese mutuo secantes, ducantur: dico, rectangulum comprehensum sub partibus unius, æquale esse ei, quod sub alterius rectæ partibus continetur, rectangulo. Rectarum in circulo ductarum ſectio fit, aut in ipſo circuli centro, aut extra. Fiat igitur primò in circuli centro. Et quoniam quæ ex centro ad circumferentiam egrediuntur rectę lineę, ex de-



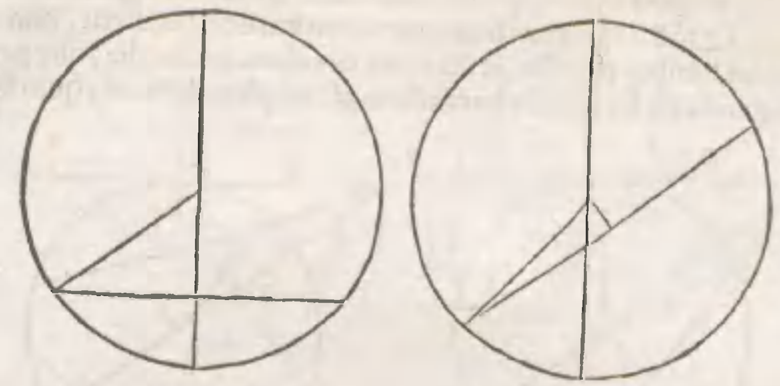
finitione circuli, inter ſe æquales ſunt, cum ſub æqualibus lineis, æqualia rectangula contineri manifeſtum ſit: & quæ ſub ſectionibus in circulo ſecantium linearum rectangula comprehenduntur, inter ſe æqualia erunt. Quòd ſi extra centrum, in circulo ductæ ſeſe mutuo ſecent, tum ad utramque ſecantem ab ipſo circuli centro, tanquam à puncto in linea minimè exiſtente, per propoſitionem 12 primi, perpendicularis linea ducenda, centrum deinde cum interſectione ſecantium communi, atq; alterutra utriuſq; ſecantis extremitate, tribus rectis lineis coniungendum erit, & demonſtratio ſic colligenda. Quoniam utraq; ſecantium per ſuam perpendicularem lineam, iam quidem bifariam ſeu æqualiter, ex ſecunda parte propoſitionis tertiæ huius, diuiſa eſt, cum prius per punctum interſectionis communis inęqualiter etiam diuiſæ ſint, rectangulorum ſub inæqualis ſectionis portionibus comprehenſorum utrunq;, unà cũ quadrato portionis interceptę, per propoſitionem quintam ſecũdi bis uſurpatam (ſunt enim duæ ſecantes) quadrato medietatis æquale erit, atq; communi deinde, quod ſcilicet à perpendiculari ſecantis utriuſq; deſcribitur, quadrato adiecto: rectangulorum utrunq; cum duobus quadratis, interceptæ ſcilicet portionis uno, & perpendicularis ſuæ altero, duobus quadratis, quę nimirum à dimidio lineæ & perpendiculari deſcribuntur, æquale erit. Quia uerò in triangulis rectangulis id quod à latere rectum angulum ſubtendente deſcribitur quadratum, reliquorum duorum laterum quadratis per penultimam propoſitionem primi, æquale eſt, hac ipſa propoſitione bis uſurpata: utrunq; rectangulum cum quadrato lineę, à centro ad interſectionem ſecantium ductæ, quadrato ſemidiametri ęquale erit. Semidiametri autem unius circuli, cum ſint inter ſe æquales, atque hinc etiam earundem quadrata æqualia: ipſa inſuper rectangula cum ſuis quadratis, uel cum quadrato eo quod commune habent, inter ſe ęqualia erunt. Illo igitur communi iam ablato: & ipſa rectangula ſola, quæ ſub ſecantium ſegmentis comprehenduntur, inter ſe æqualia erunt. Si in circulo igitur duæ rectæ lineæ ſeſe mutuo ſecuerint: quod ſub ſectionibus unius comprehenditur rectangulum, æquum eſt ei, quod ſub ſegmentis alterius comprehenditur rectangulo. quod demonſtraſſe oportuit.

APPENDIX.

Facta autem eſt mentio duarum perpendicularium, trium deinde linearum aliarũ, quę pro huius propoſitionis ſtructura ducẽdę ſunt. Quòd ſi uerò, ratione quidem

ductarum

ductarum in circulo, una uel plures duci non poſſint, reliquis tamẽ ductis, demonſtratio ut prius, non tamen tam ſæpe ſingula repetendo ſuccedet. Huius autem rei exempla ſunt, ut ſequitur.



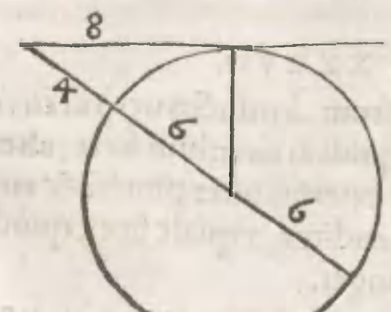
ΠΡΟΤΑΣΙΣ λϛ.

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, καὶ ἀπ' αὐτοῦ πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ ἐφάπτηται· ἔσται τὸ ὑπὸ ὅλης τῆς τεμνούσης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης, μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας, περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης τετραγώνῳ.

PROPOSITIO XXXVI.

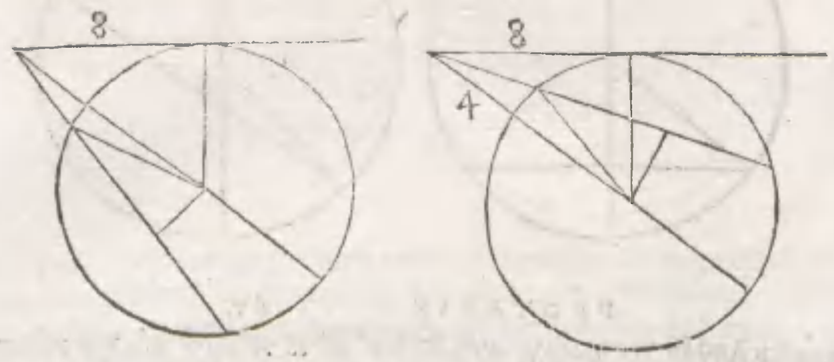
Si extra circulum ſumatur aliquod punctum, ab eoq; in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum una quidem circulũ ſecet, altera uerò tangat: erit quod ſub tota ſecante, & exterius, inter punctum & conuexam circumferentiam, ſumpta comprehenditur, ei quod à tangente deſcribitur quadrato, æquale.

Deſcribatur circulus, ducantur etiam à puncto, extra circulum ſumpto, duæ rectæ lineę, una quidem circulum ſecans, altera uerò, per propoſitionem 17 huius, eum tangens: dico, rectangulum ſub tota ſecante & eius externa portione comprehenſum, æquale eſſe quadrato contingentis, quod in hunc modum demonſtrabitur. Aut enim circulum ſecans per centrum tranſierit, aut non. Si tranſierit, ducatur à contactu ad centrum recta quædam linea. Et quoniam linea, ut eſt diameter circuli uel ſecantis rectæ interna portio, bifariam diuiſa eſt, ciq; alia quædam recta linea, externa nimirum eiuſdem ſecãtis portio, in rectum adiecta eſt: comprehenſum ſub tota ſecante & externa portione rectangulum cum quadrato medietatis diuiſæ, quadrato eius, quæ ex dimidia atq; adiecta conſtituitur, lineę, per propoſitionem 6 ſecundi, æquale eſt. Et quoniã etiam quæ ex dimidia & adiecta conſtituitur linea, ei in triangulo angulo, qui ex 18 huius rectus eſt, ſubteditur, atq; hinc ab ea deſcriptum quadratum, eis quę à reliquis duobus trianguli lateribus deſcribũtur quadratis, ex propoſitione penultima primi æquale: æqualium iam mutatione facta, loco unius ſcilicet lateris quadrati, duorum, contingentis ſcilicet, & eius quæ à contactu ad centrũ ducta eſt, quadratis ſumptis: & rectangulũ cum dicto quadrato, eis quę à reli-



quis

quis duobus lateribus describuntur, æquale erit: æqualibus igitur quadratis, quæ nimirum à lineis, ex definitione circuli, æqualibus descripta sunt, ab his æqualibus subtractis, relinquitur tandem, sub tota secante & externa portione comprehensum rectangulum, ei quod à contingente describitur quadrato æquale esse, quod erat obtinendum. Quòd si circulum secans per centrum non transierit, tum ab eodem extra circulum sumpto puncto, recta linea circulum secans alia, quę per centrum transeat, ducenda est. Et quia de hac nullum est amplius dubium, quin sub tota illa



& parte sua exteriori comprehensum rectangulum, lineæ contingentis quadrato æquale sit, duabus à centro rectis lineis ductis, una quidem quæ priori secanti perpendicularis sit, altera uerò ad eiusdem prioris secantis cum circulo intersectionem tendens: & de illa, quæ per centrum non transierit secante linea, cum per suam ad rectos ductam lineam, ex secunda parte propositionis 3 huius, bifariam diuisa sit, ex propositionibus sexta secundi & penultima primi, interim tamen communi quodam, ad rectos scilicet ductæ quadrato, addito, æqualibus item ab æqualibus subtractis, nemo dubitabit. Si extra circulum igitur sumatur aliquod punctum, ab eoq; in circulum cadant duę rectæ lineæ, quarum una quidem circulum secet, & reli. quod demonstrasse oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΖ.

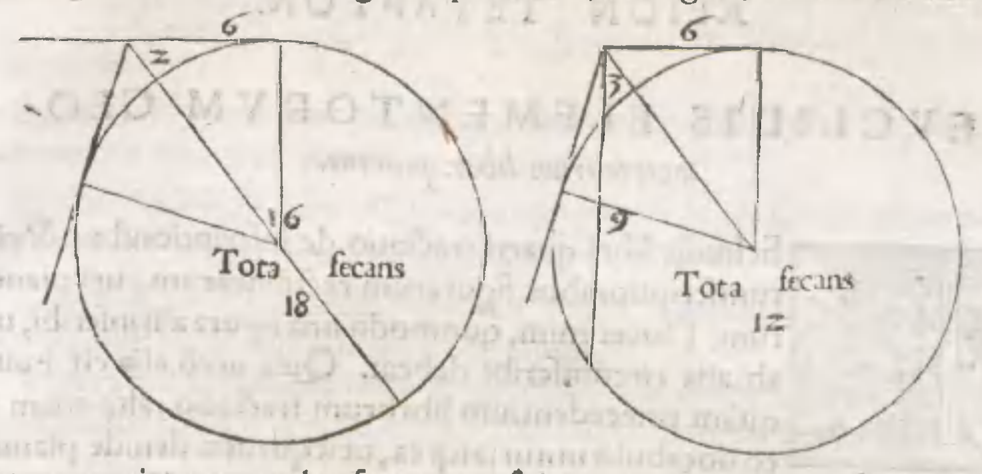
Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ προσπίπτῃ, ᾖ δὲ τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης τεμνούσης, καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης, μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς προσπιπτούσης· ἡ προσπίπτουσα, ἐφάψεται τοῦ κύκλου.

PROPOSITIO XXXVII.

Si extra circulum sumatur aliquod punctum, à puncto uerò in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum una quidem circulum secet, altera uerò incidat, quod item sub tota secante, & exterius inter punctũ & conuexam circumferentiam sumpta, comprehenditur, æquale sit ei, quod à cadente describitur: cadens ipsa circulum tanget.

Describatur circulus, ducantur etiam à puncto extra circulum sumpto, in ipsum circulum, duæ rectę lineę, una quidem circulum secans, altera uerò quæ in ipsum tantùm cadat. Esto autem quòd rectangulum, sub tota secante & eius externa portione comprehensum, ęquale sit quadrato in circulum cadentis lineæ: dico igitur, ipsam cadentem rectam circulum tangere. Ducatur à puncto extra circulum sumpto, per 17 huius, linea circulum cotingens, à centro deinde circuli ad tria puncta, quæ

quæ sunt punctum contactus, id quod extra circulum sumptum est, & tertium deinde, ea cadentis extremitas qua cum in circulum cadit, tres rectæ lineæ ducantur. Et quoniam circulum tangentis quadratum, rectangulo, sub tota secāte & eius



externa portione comprehenso, ex propositione pręcedenti ęquale est, cum eidem rectangulo, ex proposito, æquale etiam sit quadratum lineę in circulum cadentis: cadens in circulum linea, & eum tangens, cum æqualia quadrata ab eis describantur, lineę inter se æquales erunt. Præterea, quoniam etiam in circulo ex centro usq; ad ipsam circumferentiam continuatę rectæ lineę, inter se sunt æquales, cum iam duo appareant triangula, quorum duo latera unius duobus lateribus alterius ęqualia sint, bases etiam eorum, cum sit una & eadem linea illis communis, ęquales: & angulus inter æqualia latera in uno, angulo, inter æqualia latera in altero triangulo, per propositionem 8 primi, ęqualis erit. Sed quia unus eorum, ex 18 huius, est rectus: & alter sic, propter æqualitatem, rectus erit. In circulum igitur cadens, hypothesibus illis mediantibus, eum etiam tangere, ex priore parte corollarij propositionis 16 huius concluditur. Si extra circulum igitur punctum aliquod sumatur, à puncto etiam in circulum cadant duæ rectę lineę, quarum una quidem circulum secet, altera uerò eum tangat, quod item sub tota secante, & exterius inter punctum & conuexum circumferentiæ sumpta portione comprehenditur, æquale sit ei, quod à tangente describitur, quadrato: cadens recta linea circulum tanget, quod demonstrasse oportuit.

FINIS LIBRI TERTII.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙ ΧΕΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

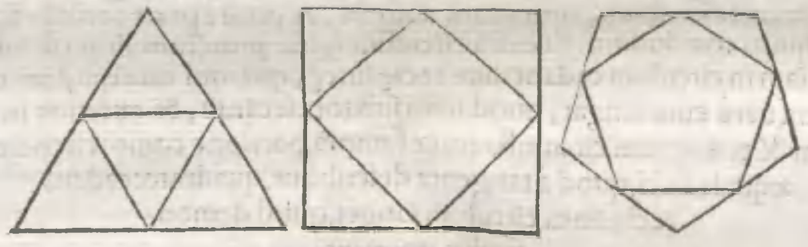
EVCLIDIS ELEMENTORVM GEOmetricorum liber quartus.

Est huius libri quarti tractatio de inſcriptionibus & circumſcriptionibus figurarum rectilinearum, uel planorum. Docet enim, quomodo una figura alij inſcribi, uel ab alia circumſcribi debeat. Quia uerò alia eſt huius quàm præcedentium librorum tractatio, alijs etiam in eo uocabulis utitur: atque ea, ut ſequentia deinde planius intelligi poſſint, ſingula ordinè definit.

ΟΡΟΙ.

Σχῆμα εὐθύγραμμον εἰς σχῆμα εὐθύγραμμον ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη τῶν τοῦ ἐγγραφομένου σχήματος γωνιῶν ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ εἰς ὃ ἐγγράφεται ἅπτηται.

Σχῆμα δὲ ὁμοίως περὶ σχῆμα περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου ἑκάστης γωνίας, τοῦ περὶ ὃ περιγράφεται ἅπτηται.



DEFINITIONES.

1 Figura rectilinea in figura rectilinea deſcribi dicitur, quando unuſquiſque inſcriptæ figuræ angulus, unumquodque, latus eius in qua deſcribitur, tangit.

2 Figura autem ſimiliter circa figuram deſcribi dicitur, quando unumquodque latus circumſcriptæ, unumquemque angulum eius circa quam deſcribitur, tangit.

Ex his duabus definitionibus colligitur, Inter illas tantum figuras, poſſe unam alteri

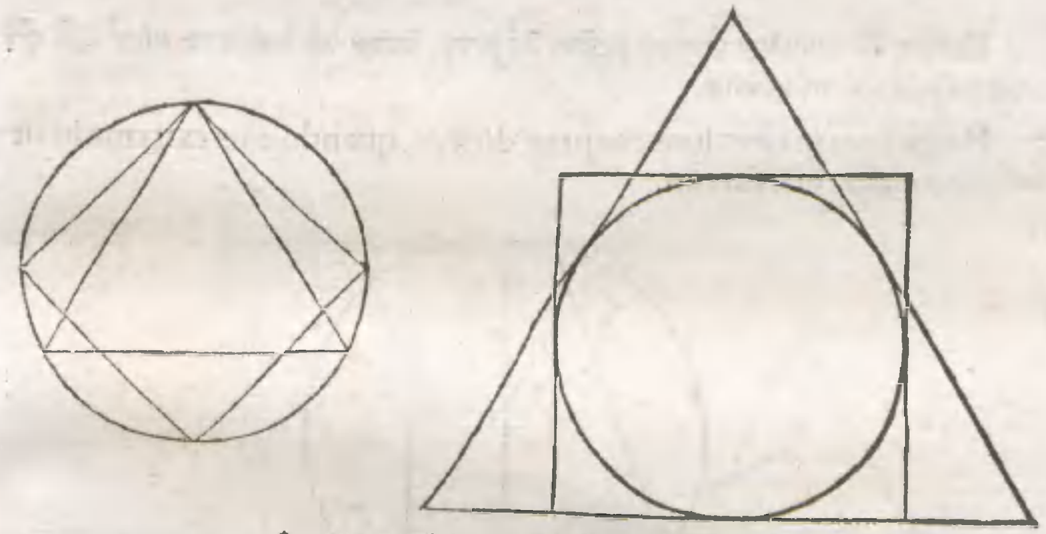
alteri inſcribi uel circumſcribi, quæ lineas numero æquales habent. Nunquã enim triangulum quadrato, pentagono uel hexagono, inſcribitur aut circũſcribitur, cum illius pauciores ſint anguli, quàm horum latera. Et econtrario. Sed triangulum triangulo, quadratum quadrato, & quælibet ſuę ſpeciei figuræ, & inſcribi & circumſcribi poteſt.

Σχῆμα εὐθύγραμμον εἰς κύκλον ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη γωνία τοῦ ἐγγραφομένου ἅπτηται τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.

Σχῆμα δὲ εὐθύγραμμον περὶ κύκλον περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας τοῦ περιγραφομένου ἐφάπτηται.

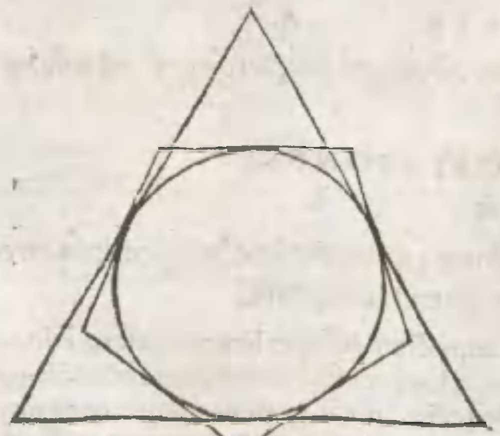
3 Figura rectilinea in circulo deſcribi dicitur, quando unuſquiſque angulus inſcriptæ circuli circumferentiam tangit.

4 Figura uerò rectilinea circa circulum deſcribi dicitur, quando unumquodque latus circumſcriptæ, circuli circumferentiam tangit.



Requirit utraque definitio circulum, cui deinde figura rectilinea per priorẽ quidem inſcribitur, per poſteriorem uerò ei circumſcribitur.

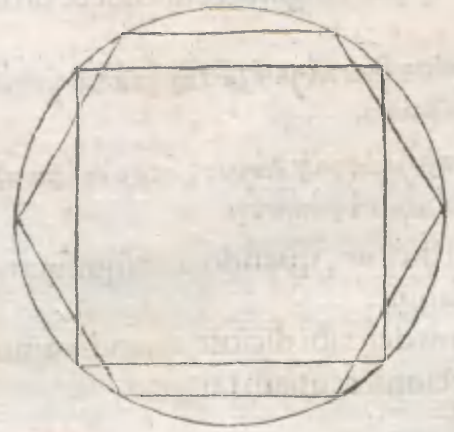
Κύκλος ὁμοίως εἰς σχῆμα ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια, ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ εἰς ὃ ἐγγράφεται ἅπτηται.



5 Circulus ſimiliter in figura deſcribi dicitur, quando circuli circumferentia, unumquodque latus eius in qua deſcribitur, tangit.

Κύκλος

Κύκλος δὲ περὶ σχῆμα περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια ἑκάστης γωνίας τοῦ περὶ ὃ περιγράφεται ἅπτηται.

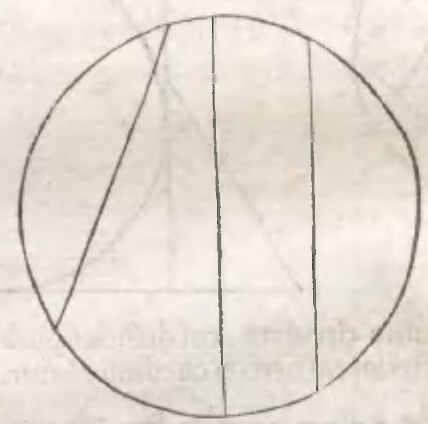


6 Circulus uerò circa figuram describi dicitur, quãdo circuli circumferentia unumquemque eius circa quam describitur, angulum tangit.

Requirunt hæ duæ definitiones figuram rectilineam, cui deinde circulus per quintam inscribitur, per sextam uerò circulus circumscribitur.

Εὐθεῖα εἰς κύκλον ἐναρμόζεσθαι λέγεται, ὅταν τὰ πέρατα αὐτῆς ἐπὶ τῆς περιφερείας ᾖ τοῦ κύκλου.

7 Recta linea in circulum coaptari dicitur, quando eius extrema in circuli circumferentia fuerint.



ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.

ΠΡΩΤΗ. Α.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, μὴ μείζονι οὔσῃ τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου, ἴσην εὐθεῖαν ἐναρμόσαι.

PROPOSITIONES.

PRIMA I.

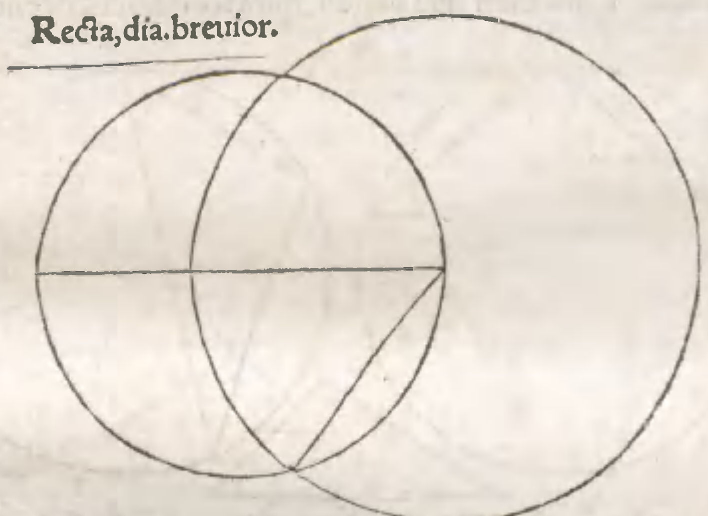
In dato circulo datæ rectæ lineæ, quæ minime longior ipsa circuli diametro existat, æqualem rectam lineam coaptare.

Requirit hæc propositio circulum, rectam insuper lineam datam. Monet autem expresse, ne hæc recta circuli diametro longior sit. Nam si data fuerit diametro longior, cum hęc inter ductas in circulo rectas lineas, ex præcedentis tertij propositione 15, sit omniũ longissima: nunquam in circulo data illa coaptari posset, sed ipsum potius

potius suis extremitatibus excederet & secaret. Quare necesse est, ut sit diametro breuior, aut ei ęqualis. Sit ergo primò ei æqualis: erit diameter ipsa linea, id quod ex sua ipsius definitione satis manifestum est. Quòd si uerò recta data fuerit diametro breuior, cũ iam duæ inæquales sint rectæ lineę, à longiore, per 3 primi, portio breuiori æqualis abscindatur, secundum quam deinde ex altera sua, quam habet in circumferentia, extremitate circulo descripto, centroque huius cum communi circulorum intersectione recta linea iuncto: per hanc eandem rectam tandem propositioni satisfactum erit, quod & ipsum ex definitione circuli, communi deinde illa noticia, Quæ eidem sunt æqualia &c. facile demonstrari poterit. In dato igitur circulo, datæ rectę lineę, quæ minime longior ipsa circuli diametro existat, ęqualis recta linea coaptata est, quod fecisse oportuit.

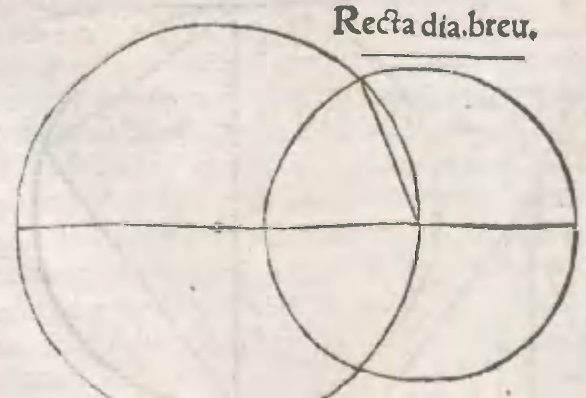
Recta, diametro æqualis.

Recta, dia. breuior.



ALIA ALTERIVS HVIVS PARTIS DEMONSTRAtio, in qua scilicet, recta, cui æqualis in circulo coaptanda est, breuior diametro esse debet.

Recta dia. breu.



Huic rectæ datæ ad alterutram ipsius diametri extremitatem, per propositionem 2 primi, æqualis ponatur: secũdum quam positam, ex sumpta diametri extremitate, circulo descripto, recta deinde alia ex hoc centro ad punctum intersectionis huius & primò descripti circuli ducta, cum hæc tandem illa sit quæ petebatur recta

recta linea, res confecta erit, id quod ex ſtructura & definitione, ut modò factum eſt, demonſtrari poteſt.

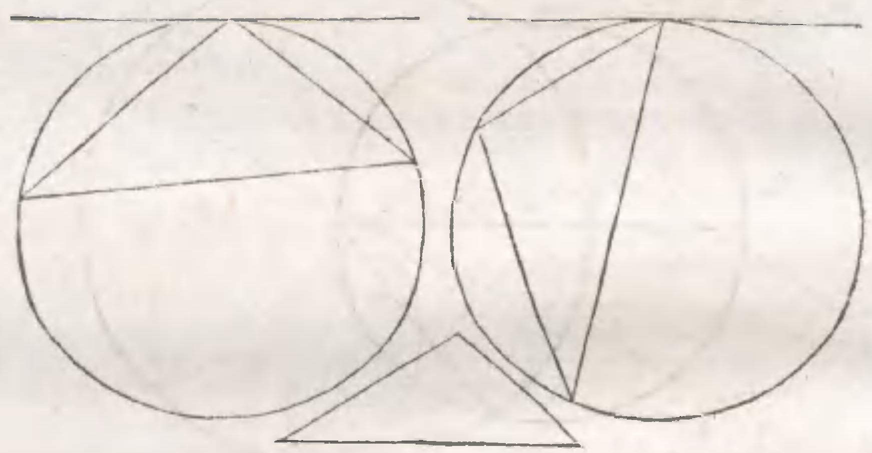
ΠΡΟΤΑΣΙΣ B.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον, τῷ δοθέντι τριγώνῳ, ἰσογώνιον τρίγωνον ἐγγράψαι.

PROPOSITIO II.

In dato circulo, dato triangulo, æquiangulum triangulum deſcribere.

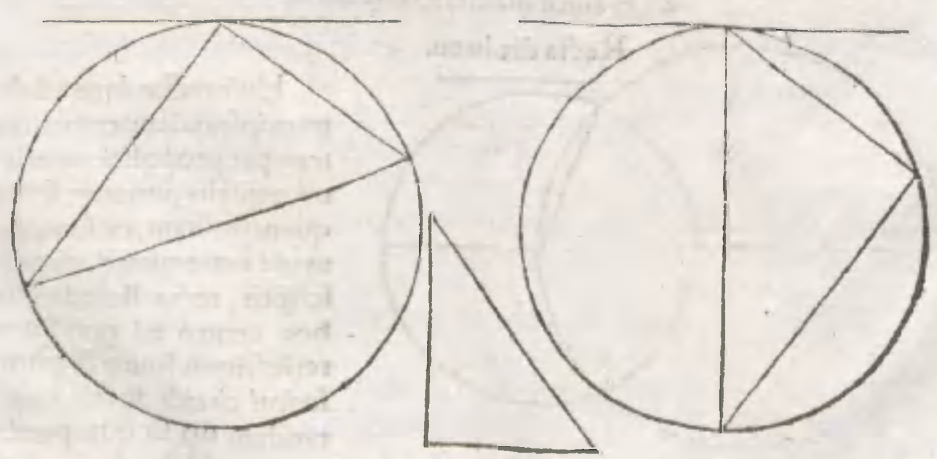
Eſto circulus datus, triangulum etiam datum, atq; propoſitum, in circulo triangulum dato æquiangulum deſcribere. Circulo igitur & triãgulo datis, ducatur per propoſitionem 17 tertij, linea circulum contingens atq; à puncto contactus duę rectę, per circulum tranſeuntes, quarum anguli, quos cum contingente ex utraq; parte faciunt (uel quarum anguli, quos hæ ductæ, una quidem cum cõtingente, altera uerò cum priore ducta faciunt) duobus in triangulo angulis uterq; utriq;, æquales ſint, per propoſitionem 23 primi demittantur, his tandem rectis, ſuis quas habent in circumferentia, extremitatibus, tertia quadam recta linea copulatis: propoſitioni ſatisfactum erit. Cum enim duo anguli, qui à ſecantibus & contingente linea



continentur, duobus quidem in triangulo angulis, ex ſtructura, duobus uerò in alternis ſectionibus, ex propoſitione 32 tertij, ſint æquales: duo in triangulo, duobus in ſectionibus circuli angulis, ex communi quadam noticia, æquales erunt: quare & tertius angulo tertio æqualis.

VEL QVANTVM AD ALTERAM CONSTRVCTIONEM

Cum duo anguli, quorum unus quidẽ à contingente & una ductarũ, alter uerò ab ipſis ductis continetur, duobus in triangulo dato angulis, ex ſtructura, duobus



item in triangulo, circulo nunc inſcripto, unus quidẽ, ut apparet, alter uerò, ex propoſitione 32 tertij, æquales ſunt. Cumq; etiam ex corollario propoſitionis 32 primi, omnis trianguli tres interni anguli duobus ſint rectis æquales: & tertius ſic angulo tertio, in his duobus triangulis, æqualis erit. Alias enim, ubi inæquales eſſent, tres anguli in uno duobus rectis non æquiualerent, quod non conceditur: æqualis igitur tertius angulo tertio. In circulo igitur deſcriptum triangulũ, cum dato æquiangulum erit. Quare in dato triangulo, & reli. quod fieri oportuit.

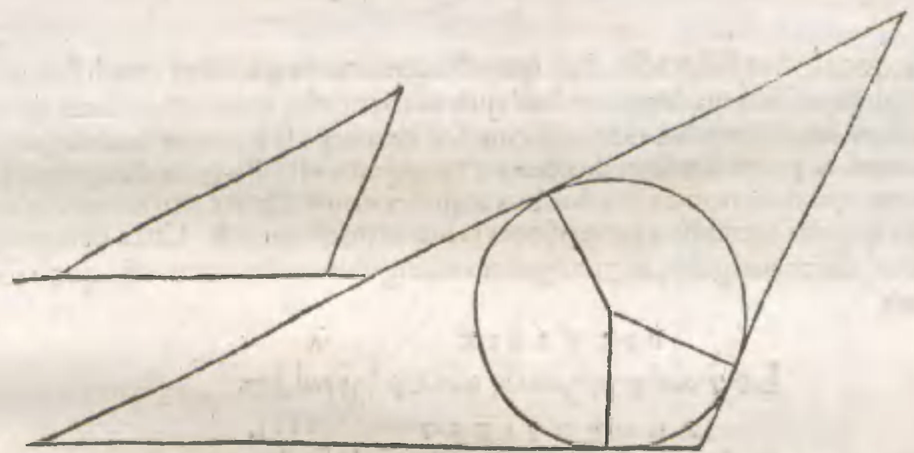
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον, τῷ δοθέντι τριγώνῳ, ἰσογώνιον τρίγωνον περιγράψαι.

PROPOSITIO III.

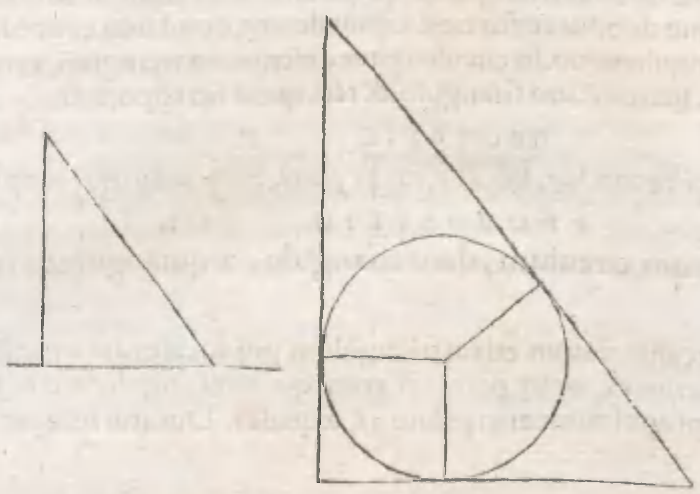
Circa datum circulum, dato triangulo, æquiangulum triangulum deſcribere.

Sit datus circulus, datum etiam triangulum, producatur autem ipſius trianguli unum latus ulterius ex utraq; parte: & erunt qui fiunt anguli externi, ſuis internis oppoſitis, per propoſitionem in primo 32, æquales. Ducatur inſuper à centro cir-



culi, quod quidem per primam tertij, ſi ignotum id fuerit, acquiritur, recta linea uſq; ad circumferentiam utcunq;, atq; ad huius alteram extremitatem, quod centrum circuli eſt, tanquam ad punctum datum, per 23 primi bis uſurpatam, duo anguli, ex utraq; parte unus, duobus externis trianguli angulis ęquales, uterq; utriq;, conſtituantur. Vltimò, per puncta contactus, trium à centro exeuntium linearum cum circulo, tres rectæ circulum contingentes, ex utraq; parte eouſq; prolongatæ, donec una cum altera concurrat, ducãtur: & propoſitioni ſatisfactum erit, cum hæ tandem rectæ triangulum, quale petebat propoſitio, conſtituant. Sed ne quis fortè dubitare poſſet, de contingentium continuatarum inter ſe concurſu: igitur priuſquam propoſitionis demonſtrationem aggrediamur, quòd harum cõtingentium ſingulæ duæ lineę cõcurrant, paucis demonſtrabimus. Imaginetur ab uno puncto contactus ad alterum recta quædam linea. Et quoniã hæc imaginaria recta in alias duas, contingentes ſcilicet continuatas rectas, incidens, internos & in eadem parte poſitos angulos, duobus rectis minores facit: has cõtingẽtes ea in parte, qua duos angulos incidens duobus rectis minores efficit, ex communi quadam noticia, in primo expoſita, concurrere neceſſe erit, quod erat demonſtrandum. Nunc ad triangulum propoſitionis, circa datum circulum deſcriptum, quòd nimirum illud dato triangulo æquiangulum ſit, hoc ſic colligetur. Quoniam enim anguli, à contingentibus & ab earum contactuum punctis ad centrum deductis rectis lineis comprehenſi, ſinguli, per propoſitionem libri præcedentis decimam octauam, recti ſunt.

Et rursus, quoniam omnis quadrilateri quatuor anguli, quatuor rectis angulis sunt æquales, propterea quòd per ductam ab uno ipsius angulo in oppositum, rectam lineam, in duo triangula diuidatur: duobus in quolibet quadrilatero rectis



angulis, quos habet, subtractis, duo qui relinquuntur in quolibet quadrilatero anguli, duobus rectis æquales erunt. Sed quia in triangulo, cuius unum latus ulterius productum fuerit, angulus externus cum suo deinceps se habente interno, per propositionem 13 primi, similiter duobus rectis æqualis est: illi igitur duo priores, ex communi quadam noticia, his duobus æquales erunt. Quare iam subtractis æqualibus ab angulis ęqualibus, propositum tandem inferri potest. Circa datum igitur circulum, dato triangulo, æquiangulum triangulum descriptum est. quod fecisse oportuit.

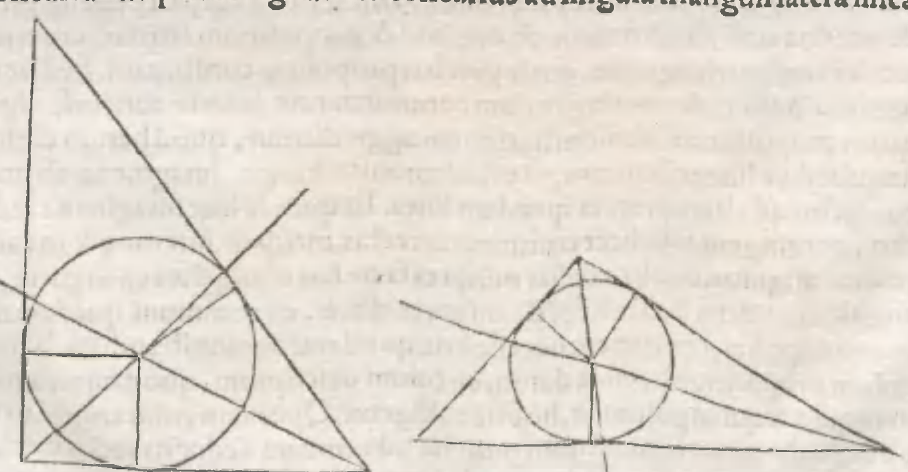
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ.

Εἰς τὸ δοθὲν τρίγωνον, κύκλον ἐγγράψαι.

PROPOSITIO IIII.

In dato triangulo, circulum describere.

Sit datum triangulum, atq; propositum, circulū in eo describere. Duo igitur in triangulo anguli, quomodocunq; sumpti, ex prop. 9 primi, per duas rectas lineas bifariā secentur. Et quoniam hæ duæ rectæ, ex propositione 17 primi, & cōmuni illa noticia, Si in duas rectas recta linea incidens, internos, & in eadem, &c. in triangulo concurrunt: à puncto igitur illo concursus ad singula trianguli latera lineæ



perpēdiculares, per 12 primi ducantur. Et quoniam hæ, ex propositione 26 primi,

bis

bis usurpata, & illa cōmuni noticia, Quæ eidem æqualia, &c. inter se æquales sunt, ubi ex hoc puncto concursus, tanquam ex centro posito, secundum unius harum æqualium linearum interuallum, circulus describatur, propositioni tandem satisfactum erit: id quod prior pars corollarij propositionis decimę sextæ tertij, & definitio huius libri quinta sic demonstrant. Quoniam enim, ut quidem demonstratum est, ductæ ad latera perpendiculares inter se ęquales sunt, ex uno insuper puncto eductę: ex eodem igitur puncto circulus, secundum unius ęqualium interuallum descriptus, per omnium aliarum extremitates transire necesse erit: unde sic etiam singulæ descripti circuli semidiametri existent, & tanget singula trianguli latera circulus descriptus ex priore parte corollarij propositionis 16 tertij: quare eidem etiam triangulo, ex definitione, circulus inscriptus est. In dato igitur triangulo, circulus descriptus est. quod fecisse oportuit.

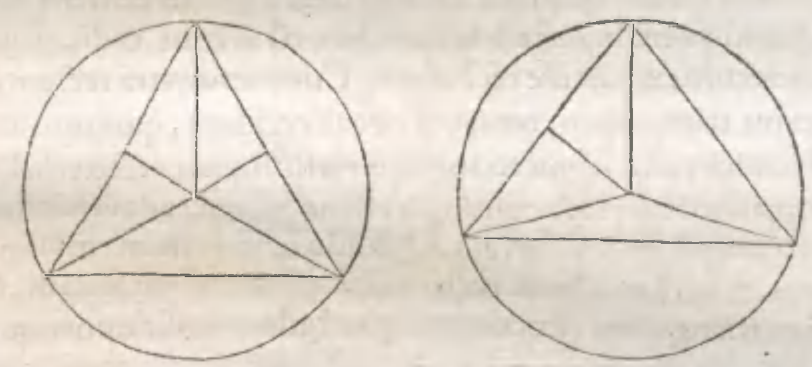
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε.

Περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον, κύκλον περιγράψαι.

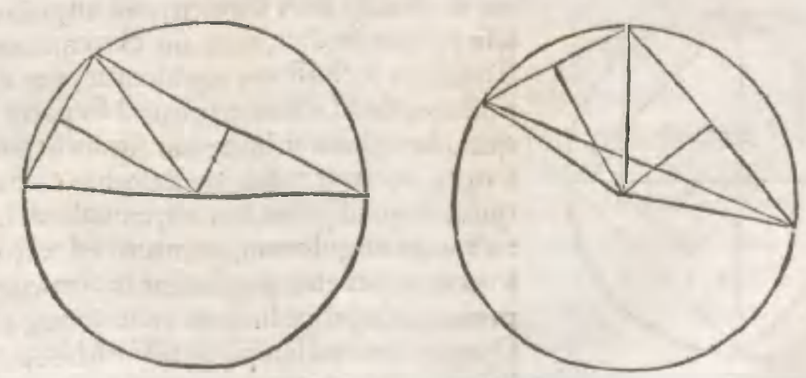
PROPOSITIO V.

Circa datum triangulum, circulum describere.

Quemadmodum præcedentis propositionis operatio duorū angulorum ęquales requirebat diuisiones, ita in hac, ut trianguli dati, duo latera, quomodocunque sumpta, sicuti docet propositio in primo 10 bifariam diuidantur, necesse erit. Hoc autem facto, à punctis mediarum diuisionum ad angulos rectos lineæ, uersus eam partem, ubi maximè uidetur esse centrum describendi circuli, educantur. Et quo-



niam hæ continuatæ, ex propositione 17 primi, & communi illa noticia, Si in duas rectas recta linea incidens, internos, & in eadem parte angulos, &cę. concurrunt, ubi ex hoc puncto, tanquam ex centro posito, secundum interuallum spacij, inter hoc punctum & angulorum quemuis intercepti, circulus describatur, res confecta erit. Nam is erit circulus, propositi trianguli circumscriptioni cōueniens, quod



certè tribus rectis lineis ex hoc puncto, quod centrum esse ponitur, ad tres an-

gulos

gulos ductis, cum hæ ex propositione 4 primi, bis usurpata, & communi illa notitia, Eidem æqualia, &c. æquales inter se esse demonstrentur, per 9. propositionem tertij facile conceditur. Circa datum igitur triangulũ circulus descriptus est, quod fieri oportuit.

APPENDIX.

Est autem hic modus generalis, ad omnia triangula, quomodocunq; sane illa, secundum latera uel angulos considerata, nominabuntur. Quare quòd nõnulli ad pleniorem huius propositionis declarationem, pro triangulorum, quantum ad angulos, uaria distinctione, uarios canones tradiderunt, cum is unus omnis generis triangulis satisfaciat, illorum traditiones hoc loco consulto prætermisimus.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Καὶ φανερόν, ὅτι ὅτε μὲν ἐντὸς τοῦ τριγώνου πίπτει τὸ κέντρον τοῦ κύκλου· ἡ ὑπὸ β α γ γωνία, ἐν μείζονι τμήματι τοῦ ἡμικυκλίου τυγχάνουσα, ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς. Ὅτε δὲ ἐπὶ τῆς β γ· ἐν ἡμικυκλίῳ τυγχάνουσα, ὀρθὴ ἔσται. Ὅταν δὲ ἐκτὸς τῆς β γ εὐθείας τὸ κέντρον πίπτῃ· ἡ ὑπὸ β α γ ἐν ἐλάττονι τμήματι ἡμικυκλίου τυγχάνουσα, μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. Ὥστε καί, ὅταν ἐλάττων ὀρθῆς τυγχάνῃ ἡ διδομένη γωνία· ἐντὸς τοῦ τριγώνου συμπεσοῦνται, αἱ δ ζ, ε ζ. Ὅταν δὲ ὀρθή· ἐπὶ τῆς β γ. Ὅταν δὲ μείζων ὀρθῆς· ἐκτὸς τῆς β γ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

COROLLARIVM.

Et manifestum est, quòd quando intra triangulum cadit centrum circuli: angulus in maiori quàm est semicirculus segmẽto existens, recto minor sit. Quando uerò in rectam lineam, hoc est in latus, cadit, cũ sic angulus in semicirculo existat: ille rectus erit. Cum uerò extra rectam lineam, hoc est extra triangulum, centrum circuli ceciderit, quia tum in maiori quàm est semicirculus segmẽto angulus existit: maior recto erit. Et econtrario, cum minorem recto contingat esse angulum: ad rectos ductæ intra ipsum triangulum concurrent. Quando uerò rectum: in aliquod trianguli latus. Si uerò maiorem recto: extra ipsam rectam lineam, hoc est, extra ipsum triangulum concurrent. quod admonuisse oportuit.

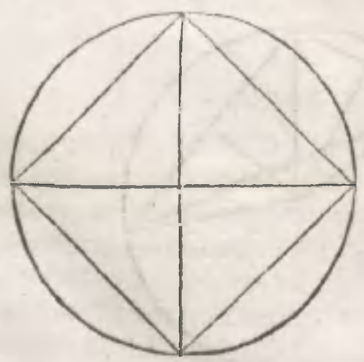
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ς.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον, τετράγωνον ἐγγράψαι.

PROPOSITIO VI.

In circulo dato, quadratum describere.

Sit circulus datus, atque propositum, quadratum in eo describere. Ducantur igitur in circulo duæ diametri, ad angulos rectos sese mutuo secãtes, quarum extremitates tandẽ si quatuor rectis lineis copulentur, per eas propositioni satisfactum erit, quod sic patet. Primò, quòd hęc quatuor linearum figura sit circulo inscripta, declarat ipsius rei definitio. Secundo, quòd sit quadratum, hoc est, æqualium laterũ & rectorum angulorum, quantum ad rectos angulos, cũ omnes eius anguli sint in semicirculo: ex prima parte propositionis 31 tertij hoc cõstabit. Quantũ uero ad latera, potissimũ hoc ex propositione 4 primi, quoties opus fuerit ea usurpata,



& communi illa notitia, Quæ uni sunt æqualia, &c. colligetur. Rectangulũ igitur & æquilaterum: quare & quadratũ ex definitione, & describitur in circulo. In circulo igitur dato quadratum descriptum est, quod fecisse oportuit.

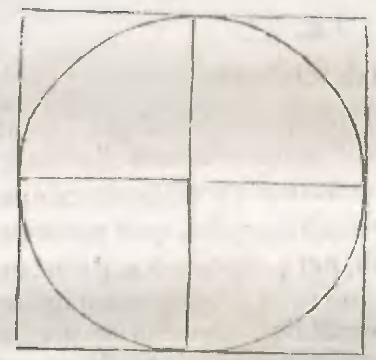
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον, τετράγωνον περιγράψαι.

PROPOSITIO VII.

Circa datum circulum, quadratum describere.

Sit circulus datus, atque propositum, quadratum circa ipsum describere. Quemadmodum præcedens, ductis in circulo duabus diametris, harum extremitates ut quatuor rectis coniungerentur lineis requisiuit, ita hæc, postquã circulus datus, in eo etiam duę ad rectos angulos diametri ductæ fuerint, ut per harum extremitates singulas, ex 17 propositione libri præcedentis, quatuor lineæ circulũ contingentes ducãtur, necesse erit. Et quoniam hæ si in utramq; partẽ continuatæ fuerint, semper duæ & duę, ex propositione 18 tertij, & cõmuni quadam notitia, concurrunt, continuentur itaq; omnes, in utramq; etiã partem, donec una cũ altera concurrat, & propositioni satisfactum erit, cũ uidelicet sub illis ipsis lineis huiusmodi quadratum cõtineatur, quod sic patet. Primò quòd circũscriptio debita facta sit, ex definitione habetur. Quod insuper sit quadratũ, id sic colligetur. Quoniam enim contingentiũ quęlibet duæ oppositæ, suæ diametro, ex secunda parte propositionis 28 primi, ipsæ deinde inter se ex propositione 30 eiusdem, æquedistantes sunt: quod sub his contingentibus, quæq; etiam sub contingentium unaquaq; & diametro sua parallela cõprehẽduntur, rectilinea, singula, ex definitione, parallelogramma erũt. Hęc autem quoniam ex propositione 34 primi, latera opposita æqualia habent: contingentes oppositæ primò, ex communi illa notitia, Quæ uni æqualia &c. omnes deinde inter se, propter diametrorum æqualitatẽ, æquales erunt. Aequilaterum igitur est circa circulum descriptum parallelogramum. Quòd uerò sit etiam rectorum angulorum, cum qui ad centrum ponuntur anguli, singuli, ex structura, recti sint, cumq; etiam, Omnis parallelogrammi latera & anguli oppositi, ut sæpe dictum, æquales sint, patet etiam illud. Factũ est ergo quod fieri oportuit, descriptum nimirum circa datum circulum quadratum, quod erat propositum.



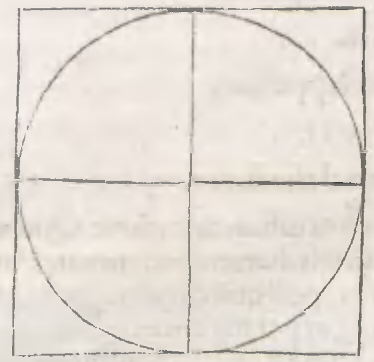
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η.

Εἰς τὸ δοθὲν τετράγωνον, κύκλον ἐγγράψαι.

PROPOSITIO VIII.

In dato quadrato, circulum describere.

Sit datum quadratum, atq; propositum, circulũ in eo describere. Duo igitur circa unum in quadrato angulum latera, per propositionẽ 10 primi, bifariam diuidantur, à punctis deinde illis medijs, perpendiculares, ad latera usq; opposita peruenientes, lineæ educantur: & erit punctum illud, quod est communis harum duarum perpendicularium sectio, centrum futuri circuli. Nam cum hæ ductæ ex suis punctis perpendiculariter egrediantur: utraq;, ex posteriore parte propositionis 28 primi, suis collateralibus quadrati lateribus æquedistans erit. Omnes igitur figuræ rectilineę, quotcunq; in hac dispositione colligi possunt, parallelogramma, horum deinde latera opposita, ex propositione 34 primi, æqualia inter se erũt. Sed cum linearum æqualium, æquales sint etiam medietates, ut ratione colligitur: infertur tandem ex hac communi noticia, Eidem æqualia, &c. & illas quatuor in medio lineas inter se æquales esse. Punctum igitur, communis nimirum perpendicularium sectio, ut dictum est, ex propositione 9 tertij: centrum est circuli. Quare eo secundum unius harum æqualium quantitatem descripto, cum is propter linearum æqualitatem, per aliarum etiam extremitates transeat, hæ uerò extremitates singulæ in lateribus quadrati existãt, cum per propositionem 16 tertij intra circulum non cadant, per corollariũ deinde eiusdem ipsum circulum tangant: ex definitione tandem, qua dicitur, Circulus similiter in figura describi, &c. circulum in dato quadrato descriptum esse concluditur. quod fieri oportuit.



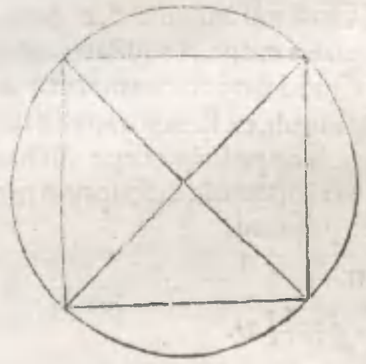
ΠΡΟΤΑΣΙΣ. θ.

Περὶ τὸ δοθὲν τετράγωνον, κύκλον περιγράψαι.

PROPOSITIO IX.

Circa datum quadratum, circulum describere.

Sit datum quadratum, atq; propositum, circulum circa ipsum describere. Ducantur in quadrato duæ diametri, quæ sese mutuò secent: & erit communis illarum sectio, locus, unde circulus, ad circumscribendum quadratum propositum conueniens, describi debet. Quoniam enim sumptis duobus triangulis, quæ nimirum sunt quadrati medietates, cum anguli partiales singuli, per propositio. 8. primi, inter se æquales sint, atq; sic uterq; semper medietas anguli recti, cumq; etiam ipsi recti inter se æquales: & horum rectorum medietates singulæ, partiales nimirum anguli omnes, inter se æquales erũt. Quare per propositionem 6 primi quater sumptam, & horum partialium angulorum latera, quatuor nimirum partiales diametrorum lineę, inter se ęqualia erunt. Punctum igitur illud, centrũ est circuli. Potest etiã loco octauę, propositio quinta usurpari, hoc modo. Cũ quadratũ per diametros in triangula quatuor resolutũ sit, hæc uerò triangula omnia, æqualia crura habeant, latera nimirum quadrati propositi: infertur per proposit. 5 primi, & ipsos ad basim angulos inter se æquales esse. quilibet igitur illorum, per propositionem 32 eiusdem primi, medietas est recti. Tertius enim angulus, ratione quadrati, per se unus rectus est. Quia autem omnes recti anguli, ex communi quadam noticia, inter se ęquales sunt: sequitur, quòd etiam inter se æquales sint omnes partiales (de quibus facta est mentio) anguli. Igitur & diametrorum partes, per propositionem 6 primi, inter se æquales. unde tandem, id commune punctum, per 9 tertij, centrum circuli erit: quo nunc secundum quantitatem unius æqualium linearum descripto, cum is per reliquarum etiam æqualium extremitates transeat, propositioni tandem satisfactum erit, circa datum nimirum quadratum circulus descriptus. quod fecisse oportuit.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι.

Ἰσοσκελὲς τρίγωνον συστήσασθαι, ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν διπλασίονα τῆς λοιπῆς.

PROPOSITIO X.

Duum ęqualium laterum triangulum constituere, habens utrunq; eorum, qui ad basim sunt, angulorum, duplum reliqui.

Sententia est propositionis, triangulũ isosceles, cuius uterq; angulorũ qui ab æqualibus lateribus subtenduntur, ad tertium reliquum duplus sit, describere. Ducatur igitur linea recta, longa uel breuis, ad placitum. hac recta deinde, ut quidem habet propositio secundi undecima, in duas portiones diuisa, ex pũcto hoc, quod est communis terminus diuisæ & portionis longioris, secundum interuallum rectæ datæ circulus describatur. Hoc facto, longiori portioni, quæ nimirum est diametro circuli breuior, æqualis recta in circulo, per propositionem primam huius, coaptetur. Quòd si tandem extremitas huius, longiori portioni æqualis, altera cum centro & diuisionis puncto duabus rectis lineis copuletur: propositioni satisfactum erit. Nam id demũ triangulum, cuius duo latera à centro usq; ad circumferentiam continuata sunt, erit quod quærebatur, cuius quidem demonstratio ut sequitur. Circa triangulũ partiale, cuius unus angulus ad cẽtrum ponitur, per propositionẽ 5 huius, circulus describatur. Et quoniã tam quadrato longioris portionis ex structura, uel propositione 11 secundi, quàm etiam quadrato rectę in circulo coaptatę, huic longiori portioni ęquali, rectangulum sub prioris circuli semidiametro & breuiori eius portione compræhẽsum, ęquale est: longiori æqualis posita recta linea, per propositionem 37 tertij, minorem circulum contingens erit. Et rursus quoniã hæc recta circulum minorem contingit, à puncto item contactus alia quædã, eundem circulum secãs, ducta est, illa nimirum quæ in diametro ad punctũ diuisionis terminatur: angulus igitur, quẽ hæ duæ rectæ cõtinent, partialis, angulo alterni segmẽti, qui ad centrum ponitur, ex propositione 32 tertij ęqualis erit. unde totalis postea, si partialis alter ex æquo his æqualibus adijciatur, duobus æqualis. Sed quia duobus his, ut trianguli huius partialis internis, angulus ille, qui in alio partiali ad diuisionis punctum ponitur, externus, ex propositione 32 primi, est æqualis: & eidẽ externo ille totalis, ex communi quadam notitia, æqualis erit. Et quia etiam totalis, illi qui sub diametro atq; circulum minorem tangente recta linea continetur, ex definitione circuli & priori parte propositionis quintæ primi, æqualis est: & qui sub istis lineis continetur angulus, dicto externo æqualis erit. Tres igitur anguli inter se æquales, unum etiam triangulum partiale, cum duo ex æqualibus angulis in eo sint positi, ex propositione 6 primi, Isosceles, hoc est duûm æqualium laterum erit. Sed quia uni eorum, coaptatæ scilicet in circulo lineæ, æqualis est, ex structura, longior diuisæ semidiametri portio, & alteri lateri hæc eadem longior portio æqualis erit: quare Isosceles, triangulum etiam partiale alterum. Hoc autem quia, ex propositione 5 primi, duos ad basim angulos inter se æquales habet, & quia etiam illis æqualibus, angulus huius Isoscelis externus æqualis est, unde sic ad utrunq;, ac per consequens, ad eum qui ad centrum ponitur duplus: & illorum qui huic externo æquales sunt, uterq;

 ad eundem

ad eundem ad centrum poſitum angulum, duplus erit, et ſunt etiam in hoc ipſo, in quo ille ſcilicet, totali triangulo. Triangulum igitur Iſoſceles, cuius uterq; eorum qui baſim ſunt angulorum, ad reliquum tertium duplus ſit, conſtitutum eſt, quod quidem feciſſe oportuit.

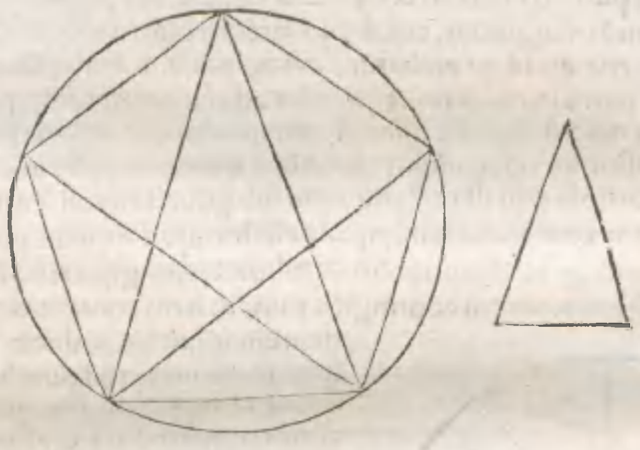
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον, πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

PROPOSITIO XI.

In dato circulo, pentagonũ & æquilaterũ & æquiangulũ deſcribere.

Sit datus circulus, atque propoſitum, pentagonum in eo æquilaterum & ęquiangulum deſcribere. Circulo igitur dato, primò Iſoſceles triangulum, cuius uterq; æqualium angulorum ad tertium duplus ſit, per propoſitionem præcedentem 10 formari, huic deinde æquiangulum triãgulum in dato circulo, per propoſitionem 2 huius deſcribi, debet. Poſtea utroq; eorum, qui ad tertiũ dupli ſunt, angulorum, recta quadam linea, per prop. 9 primi, biſariam diuiſo, quinq; iam anguli inter ſe



æquales erunt. Quòd ſi tandem rectæ hæ, per quas ad tertium dupli anguli biſariam diuiſi ſunt, ad circunferentiam uſq; continuatæ fuerint, cum hi quinq; in una ſint circũferentia anguli, atq; ęquales etiam inter ſe: & eorũ arcus à quibus ſubtenduntur, per prop. 26 tertij: horũ deinde arcuum rectæ lineę, per 29 eiuſdem, æquales erunt, quare pentagonũ æquilaterũ. Quod uerò ſit etiam æquiangulum, id ſic patet. Quoniã enim ſinguli huius pentagoni arcus, ut quidē demonſtratũ eſt, inter ſe ſunt ęquales, ſumptis duob. quibus uidelicet nullus eſt cõmunis terminus, ſi utrique eorũ duo hi, quos interceptos habent, arcus additi fuerint: & collecti ſic arcus, ex communi quadam notitia, inter ſe æquales erunt, Quare etiam æquales, ex propoſitione 27 tertij, qui ab his æqualibus arcubus ſubtenduntur, anguli. Conſtat igitur ſic æqualitas de angulis duobus. Quia autem ſicut de duobus, ita etiam de omnibus, hoc nimirum proceſſu toties, quot fuerint anguli, minus uno, uſurpato, conſtare manifeſtum eſt: pentagonum igitur hoc æquiangulum eſſe concluditur, & quia etiam æquilaterum. In dato igitur circulo æquilaterum & æquiangulum pentagonum deſcriptum eſt. quod feciſſe oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ.

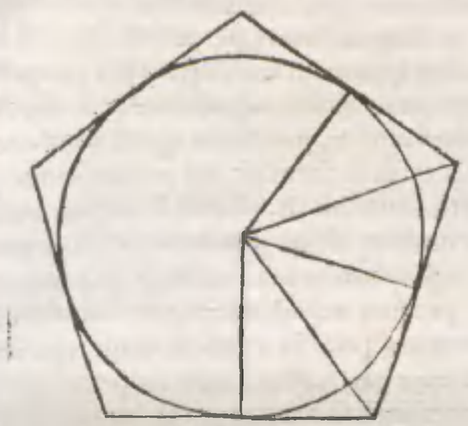
Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον, πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιγράψαι.

PROPOSITIO XII.

Circa datum circulum, pentagonum æquilaterum & æquiangulum deſcribere.

Sit

Sit datus circulus, atq; propoſitum, pentagonum circa eum æquilaterum & æquiangulum deſcribere. Diuidatur igitur circuli dati circunferentia, per præcedentem, in quinque partes æquales, à punctis deinde diuiſionum ſigulis per propoſitionem 17 tertij lineæ, ipſum circulum contingentes ducantur, hæ tandem, ſi in utranq; partem, donec altera alteri occurrat, continuatæ fuerint: propoſitioni ſatiſfactum erit. Nam illæ ipſæ circulum contingentes rectæ lineæ pentagonum, quale propoſitio hæc requirit, compræhendunt, quod ſic demonſtrari poteſt. Primò à tribus quibuslibet, proximis tamen inter ſe, contactuum punctis demittantur ad circuli centrum tres rectæ lineæ. Et quoniam hæ ſingulæ ex propoſitione 18 tertij, ad ſuas contingentes perpendiculares ſunt: omnes igitur illi qui ſic fiunt anguli, recti erunt: quod eſt oſeruandũ.

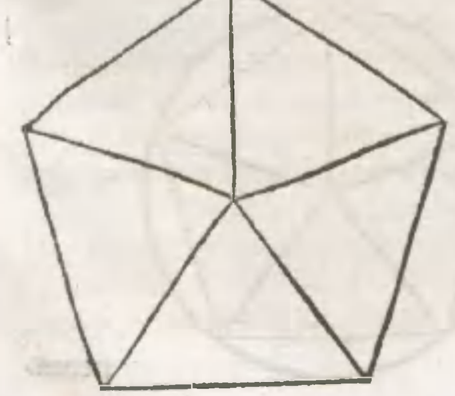


Ducantur porrò à duobus pentagoni angulis ijs, qui ab his tribus lineis continentur, aliæ duæ ad centrum rectæ lineæ. Deſcribuntur autem ſic quatuor triangula, quorum quæq; duo extrema, per penultimam primi, laterum æqualium: per propoſitionē deinde 8 & 4 eiuſdem, æqualium angulorum eſſe demõſtrantur. Et quia ſic eſt: tam illi igitur, qui ad cētrum ſub perpendicularib. cõtinentur anguli, ad ſuos partiales, quàm etiã ipſius pentagoni anguli ad ſuos, dupli erunt. Et rurſus quoniam ad cētrum anguli ſuper æquales, circunferentias deducuntur, cum ijdem anguli, ex propoſitione 27 tertij, inter ſe æquales ſint: & illorum dimidij omnes, quemadmodum & ipſi toti inter ſe æquales erunt. Et quia iam ſunt duo triangula, quorũ nimirum latus quod habent commune, perpendicularis linea eſt, quę cũ duos angulos duobus angulis æquales habeant, utrunq; utriq;, unum item latus uni lateri æquale: & reliqua latera reliquis lateribus, atque etiam reliquum angulũ reliquo angulo, per propoſitionem 26 primi æqualia habebunt. Circulum igitur contingentium linearum unaquæq; per ſuam perpendicularem biſariam diuiſa eſt, quare & ipſæ ad utranq; partem, tanquam ad ſuas medietates, duplæ. Partes uero cum ſint inter ſe æquales, ut iamdudum demonſtratum eſt: & ipſas totas contingentes rectas lineas inter ſe æquales eſſe conueniet. Pentagonum igitur æquilaterum. Quod uerò ſit etiam æquiangulum, cum ipſius pentagoni anguli æqualium ſint angulorum dupli: patet & illud. Circa datum igitur circulum, æquilaterum & æquiangulum pentagonum deſcriptum eſt, quod feciſſe oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ.

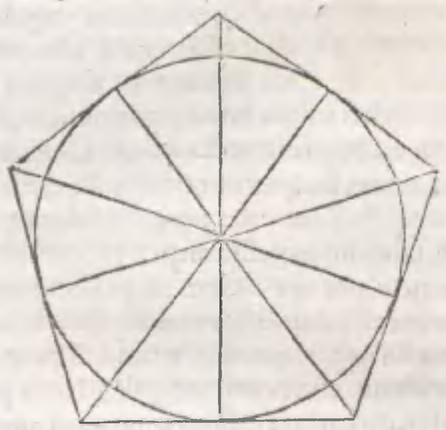
Εἰς τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλον ἐγγράψαι.

PROPOSITIO XIII.



In dato pentagono, quod eſt æquilaterum & æquiangulum, circulum deſcribere.

Sit datum pentagonum, æquilaterum exiſtens & æquiangulum, atq; propoſitum, circulum in eo deſcribere. Pẽtagoni igitur dati duo quilibet proximi anguli, duabus rectis, per propoſitionem 9 primi, biſariam diuidantur: & erit punctum concurſus harum rectarum in penin pentagono: centrum circuli qui petitur, cuius hæc sit demonstratio. Ducantur à tribus indiuisis pentagoni angulis, ad punctum illud concursus, tres rectæ lineæ. Et quoniam duo ipsius pentagoni anguli, suis rectis ductis bifariam diuisi sunt: quæq; duo circa illos diuisos posita triangula, inter se æqualia esse, per 4 primi, demonstrantur. Quia uerò ad unum angulum in utroq; triangulo, angulus suus totalis duplus est: propter æqualitatem, totalium quidem ex hypothesi, ac partialium deinde, ut modo ostensum est, inter se: & in utroq; triangulo angulus totalis ad suū partialem: singuli item totales, hac operationem, ad singulos suos partiales angulos. Dupli erunt. Quare unumquemq; sic bifariam diuisum esse, manifestum erit.



Porrò pro ulteriori demonstratione, demittantur à puncto concursus ad singula pentagoni latera perpendiculares. Hæ autem quoniam facili opera per propositionem 26 primi, æquales inter se esse demonstrantur: punctum igitur illud concursus, ut dictum est, ex propositione 9 tertij, centrum circuli erit. Eo igitur nunc secundum unius, harum æqualium perpendicularium interuallū, descripto, cum is, propter æqualitatem, per singularum extrema puncta transeat unumquodq; insuper pentagoni latus, ex priore parte corollarij prop. 16 tertij, circulū tangat (alias enim si scilicet unum ex his secaretur, circulum contingens in ipsum cadere contra allegatam propositionem conuinceretur) propositioni ut oportuit satisfactum erit, In pentagono nimirum ęquilatero & æquiangulo circulus descriptus est. quod fieri oportuit.

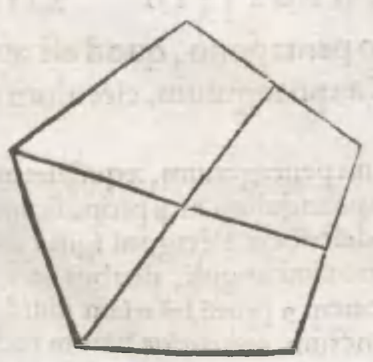
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ.

Περὶ τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλον περιγράψαι.

PROPOSITIO XIIII.

Circa datum pentagonum, quod est æquilaterum & æquiangulum, circulum describere.

Sit datum pentagonum quale requiritur, atq; propositum, circulū circa ipsum describere. Diuidantur, ut in præcedenti factum est, duo inter se proximi in pentagono anguli, per propositionem 9 primi, duabus rectis bifariam: & erit punctum concursus harum rectarum, centrum futuri circuli qui hoc datum pentagonum circumscribet, id quod ex propositione 4, toties quoties opus fuerit eam repetendo, atq; ex nona deinde tertij, hoc modo demonstrabitur. Ducantur à tribus indiuisis pentagoni angulis, ad punctum illud concursus tres rectæ lineæ. Et quoniam in



penta-

pentagono duo anguli, ex structura, bifariam diuisi sunt, cum pentagonum sit ex hypothesi æquiangulum, ubi bis aut ter duo triangula, quorum unum quidem unam, alterū uerò alteram bifariam diuisi anguli medietatem sibi uendicat, sumpta fuerint, & reliqui tres pentagoni anguli ex propositione 4 primi, bifariam diuisi erunt. Quare, ut ipsi totales, ex hypothesi, ita nunc ex demonstratione, per allegatam quartam sumpta, partiales anguli omnes, ductæ insuper à centro hoc ad angulos pentagoni rectæ lineæ, inter se æquales erunt. Quoniam autem hæ rectæ plures quàm duæ sunt, circuli igitur per harum æqualium extremitates, ut quæ sunt in pentagoni angulis, transeuntis centrum, per propositionem 9 tertij, hoc punctum erit. Eo igitur inde descripto, propositioni tandem satisfactum erit, circa pentagonum uidelicet, æquilaterum & æquiangulum, circulus descriptus. quod fecisse oportuit.

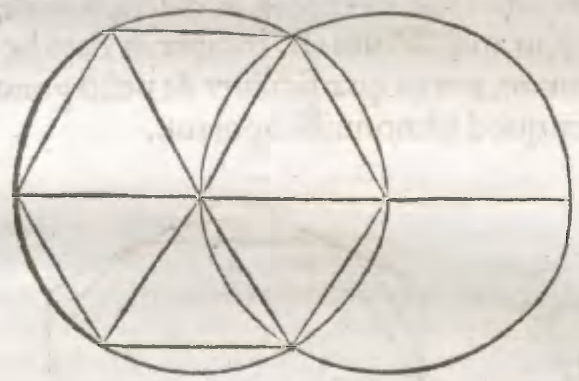
ΠΡΟΤΑΣΙΣ. ΙΕ.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον, ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

PROPOSITIO XV.

Indato circulo, hexagonum æquilaterum & ęquiangulum describere.

Sit datus circulus, atq; propositum, hexagonum in eo æquilaterum & æquiangulum describere. Circulo igitur dato, diametro etiam in eo ducta, alterutra eius extremitate loco centri sumpta, alius ad prioris dati quantitatem circulus describatur, atq; ubi hi duo circuli sese mutuo secāt, ab illis sectionum punctis per centrum circuli prioris, usq; ad eius circumferentiam, aliæ duæ rectæ extendantur. Erunt autem sic in circulo dato puncta sex, quæ tandem sex etiam rectis lineis continuata suis quodque punctis proximis, confectum erit negocium. Quoniam enim cum à centris circulorum, tanquam à medijs punctis, ad circumferentias ductæ rectæ lineæ, ex definitione, inter se sunt æquales: utrunq; eorum, quæ in portione circulorum communi descripta sunt, triangulorum, ex hac circuli definitione bis usurpata, illa deinde communi noticia, Eidem æqualia, &c. æquilaterum, atq; mox deinde etiam, per priorē partem propositionis quintę primi, æquiangulum erit.



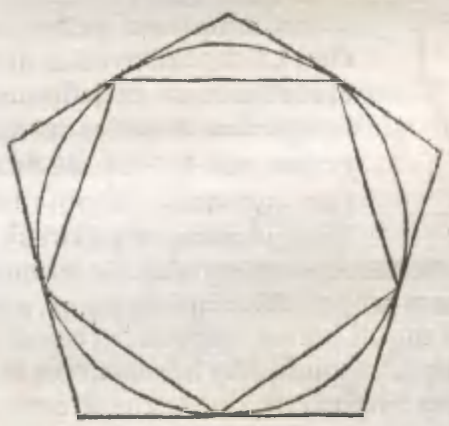
Quoniam autem interni tres anguli omnis trianguli, ex corollario propositionis 32 primi, duobus rectis sunt æquales: unusquisq; horum duorum triangulorum angulus unum duorum rectorum tertium erit, duo igitur ad centrum prioris uel dati circuli positi anguli, duobus duorum rectorum tertijs sunt ęquales. Quia uerò illi duo cum eo quem ex utraq; parte habent ἐφεξῆς, per propositionem 13 primi, duobus rectis angulis sunt æquales: & hunc ἐφεξῆς angulum, cum tres tertiæ unum integrum faciant, unum duorū rectorum tertium esse necesse est, hi tres igitur anguli inter se æquales erunt. Sed quia his ęquales etiam sunt, ex propositione 15 primi, anguli quos singuli ad uerticem habent: sex igitur ad centrum deducti anguli inter se æquales erunt. quare & illorum arcus à quibus subtenduntur ex propositione 26 tertij, & arcum deinde rectæ lineæ, ex 29 eiusdem, æquales erunt. Hexagonum igitur æquilaterum. Quòd uerò sit etiam æquiangulum, id sic patet. Quoniam enim singulæ huius hexagoni laterum circumferentiæ uel arcus, ut quidem demonstratum est, inter se sunt æquales, sumptis duobus quibus uidelicet nul lus est communis terminus, si utriq; eorum tres illi qui ab his duobus intercipiun- tur, additi fuerint: & collecti sic arcus, ex communi quadam noticia, inter se æqua- les erunt: quare etiam æquales, ex propositione 27 tertij, qui ab his æqualibus arcu bus subtenduntur anguli. Constat igitur sic æqualitas de duobus. Quia autem si- cut de duobus, ita etiam de omnibus, hoc nimirum processu toties quot fuerint an- guli minus uno, usurpato, constare manifestum est: hexagonum igitur hoc æquian gulum esse concluditur, & quia etiam æquilaterum. In dato igitur circulo, æquilate rum & æquiangulum hexagonum descriptum est. quod fecisse oportuit.

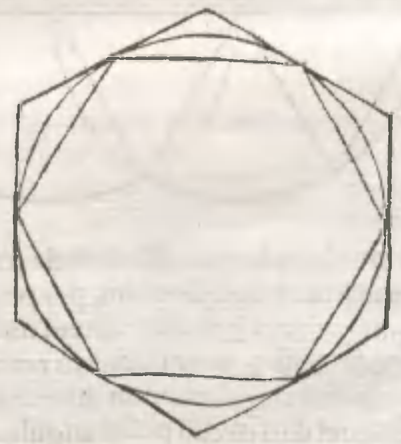
ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, Ὅτι ἡ τοῦ ἑξαγώνου πλευρὰ, ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου. Καὶ ἐὰν διὰ τῶν α β γ δ ε ζ σημείων ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου ἀγάγωμεν· περιγραφήσεται περὶ τὸν κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, ἀκολούθως τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου εἰρημένοις. Καὶ ἔτι διὰ τῶν ὁμοίων τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου εἰρημένοις, εἰς τὸ δοθὲν ἑξάγωνον κύκλον ἐγγράψομεν. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

COROLLARIVM.

Ex hoc quidem manifestum est. Quòd uidelicet hexagoni latus, æqua le sit ei, quæ ex centro circuli producitur, rectæ lineæ. Et si per sex angula- ria hexagoni puncta contingentes circulum deduxerimus, quod tum cir ca circulum, æquiangulum & æquilaterum hexagonum descriptum sit, perinde atq; pentagonum quoq;, ut antè dictum est. Insuper in dato he- xagono, uel circa datum hexagonum, per ea quæ similiter de pentagono dicta sunt, circulum describemus. quod admonuisse oportuit.





ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙϚ.

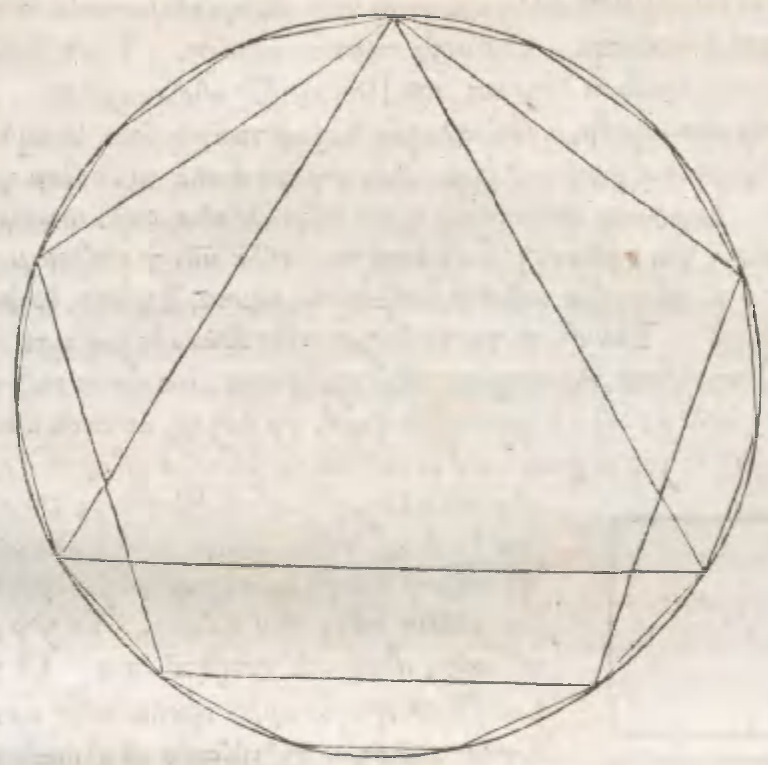
Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον, πεντεκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

PROPOSITIO XVI.

In dato circulo, quindecagonum æquilaterum & æquiangulum de- scribere.

Sit datus circulus, atq; propositum, quindecagonum in eo, æquilaterū & æqui- angulum describere. Circulo igitur dato, primùm in eo triangulum æquilaterum, deinde æquilaterum pentagonum, illud quidem ex propositione 2, hoc uerò ex 11 huius

huius describatur. Curetur tamen, ut unus trianguli & unus pentagoni angulus, unum in circumferentia punctum commune sortiantur. Et quoniam, quindecago num æquilaterum & æquiangulum in circulo dato describere propositum est, cum circumferẽtia ideo in quindecim partes æquales diuidenda sit, infertur, ut qualium tota circumferentia fuerit æqualium partium quindecim: talium tertiam eius par- tem, quæ à trianguli latere subtenditur, quinq;: quintam uerò, quam pentagoni la-



tus subtendit, tres esse debere. Excessus igitur arcus illius super hunc taliū duarum, qualium tota circumferentia est quindecim, partium erit. Quare eo, per propositio nem 30 tertij, bifariam diuiso, quantum dati circuli quindecagoni latus fuerit, al- terutra ipsius excessus medietas indicabit. Quo habito, si id quindecies circulo or- dine, per primam propositionem huius, coaptatum fuerit, propositioni tandem sa- tisfactum erit, In circulo nimirum, quindecagonum ęquilaterum & æquiangulum descriptum. quod fecisse oportuit. Demonstratio neglecta est, cum ex structura hæc clara sit.

APPENDIX.

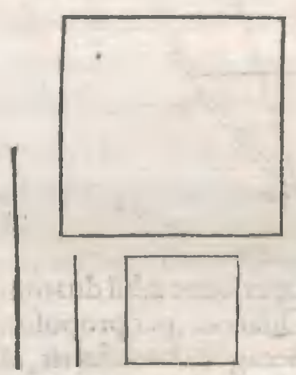
Porrò circulo dato, quomodo circa ipsum quindecagonum æquilaterum & æ- quiangulum: Insuper, quomodo circa quindecagonum datum, circulus describen- dus sit, licet illa ab Euclide non tradantur, nemini tamen difficile erit, si modò eo- rum quæ in hoc libro ad 12 & 13 propositiones de pentagono dicta sunt, meminerit. Atq; hactenus de inscriptionibus & circumscri- ptionibus figurarum inter se, cuius quidem tra- ctatio in hoc quarto libro erat proposita.

FINIS LIBRI QVARTI.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

ΣΧΟΛΙΟΝ ΕΙΣ ΤΟ Ε, ΑΔΗΛΟΥ.

Σκοπὸς τοῦ ε βιβλίου περὶ ἀναλογιῶν διαλαβεῖν. Κοινὸν γὰρ τοῦτο τὸ βιβλίον γεωμετρίας τε καὶ ἀριθμητικῆς, καὶ μουσικῆς, καὶ πάσης ἁπλῶς μαθηματικῆς ἐπιστήμης. Τὰ γὰρ ἐν αὐτῷ ἀποδεικνύμενα οὐ μόνον γεωμετρικοῖς ἁρμόζει θεωρήμασιν, ἀλλὰ καὶ πᾶσι τοῖς ὑπὸ μαθηματικὴν τεταγμένοις ὡς προείρηται ἐπιστήμαις. Ὁ μὲν οὖν σκοπὸς, οὗτος. Τὸ δὲ βιβλίον, Εὐδόξου τινὸς εὕρεσιν εἶναι λέγουσι, τοῦ Πλάτωνος διδασκάλου. Ἐπεὶ οὖν σκοπὸς περὶ ἀναλογιῶν, ἡ δὲ ἀναλογία λόγων τινῶν σχέσις· ἀναγκαῖον γνῶναι πρότερον τίνες οἱ τοιοῦτοι λόγοι. Δεῖ γὰρ τὰ ἁπλᾶ πρότερον γνῶναι τῶν συνθέτων. Ἐὰν τοίνυν τινὰ συγκρίνηται πρὸς ἄλληλα, φέρε εἰπεῖν δύο μεγέθη, αὐτὰ μὲν Ὅροι καλοῦνται· ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ ἑτέρου ἐπὶ τὸ ἕτερον μετάστασις, Διάστημα· ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου πρὸς τὸ ἕτερον σύγκρισις, Σχέσις, ἣν ἐκάλεσαν οἱ παλαιοὶ λόγον. Τὴν δὲ τούτου τοῦ λόγου πρὸς ἄλλον λόγον, καθ' ὁμοιότητα σύγκρισιν, ἤτοι σχέσιν, Ἀναλογίαν προσηγόρευσαν, ἵνα μὴ ὡς τόδε τὸ μέγεθος συγκρίνηται, ἀλλ' ὡς ὅδε ὁ λόγος πρὸς τόνδε τὸν λόγον. αὕτη δὲ ἡ σύγκρισις. Λόγου λέγεται λόγος· οἷον ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι, ὧν ἡ ἑτέρα πρὸς τὴν λοιπὴν διπλασίονα λόγον ἔχει· τὸ ἀπὸ τῆς τὸν διπλασίονα λόγον ἐχούσης τετράγωνον, τετραπλασίονα λόγον ἕξει πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς λοιπῆς τετράγωνον, ἤπερ ἡ μείζων εὐθεῖα πρὸς τὴν εὐθεῖαν. Τὰ γὰρ μήκει διπλάσια, δυνάμει τετραπλάσια. Ὁ τοίνυν λόγος τῶν τετραγώνων, τετραπλάσιος ὢν διπλασίου ὄντος τοῦ λόγου τῶν εὐθειῶν διπλάσιός ἐστι· Καλεῖται δὲ οὗτος, ὁ λόγου λόγος. Ἀλλ' εἴη ἂν οὗτος ὑπὸ τὸ ποσόν. διττὸς γὰρ ὁ λόγος, ὁ μὲν ἐν ἀξίᾳ, ὁ δὲ ἐν ποσῷ. καὶ τοῦ μὲν ἐν ἀξίᾳ οὐδὲν ἐστὶν εἶδος πρὸς τὴν παροῦσαν χρείαν, τοῦ δὲ κατὰ τὸ ποσὸν εἴδη ἐστὶν ε. Ὁ μὲν γάρ ἐστι Πολλαπλάσιος· ὡς τοῦ γ ὁ ς. ὁ δὲ Ἐπιμόριος· ὡς τοῦ γ ὁ δ. ὁ δὲ Ἐπιμερής· ὡς τοῦ γ ὁ ε. Καὶ οὗτοι μὲν Ἁπλοῖ, τούτων δὲ ἔτι ἁπλούστερος, ὁ πολλαπλάσιος. Ἕτεροι δὲ ἐκ τῆς τούτων συνθέσεως γίνονται β, ὅτε Πολλαπλασιεπιμόριος· ὡς τοῦ γ ὁ ζ. καὶ ὁ Πολλαπλασιεπιμερής· ὡς τοῦ γ ὁ η.



Ὑπολόγοι δέ εἰσιν οἱ ἐλάσσονες τῶν μειζόνων, Ὑποπολλαπλάσιοι, ὑπεπιμόριοι, ὑπεπιμερεῖς, καὶ ἑξῆς ὁμοίως. Ἰστέον δὲ, ὡς τὸ βιβλίον διχῆ διῄρηται, καὶ περιέχει τὰ μὲν πρῶτα τὴν τῶν ἁπλουστέρων διδασκαλίαν, τουτέστι, τὴν τῶν πολλαπλασίων, τὰ δὲ δεύτερα καθολικώτερα περὶ πάντων τῶν λόγων. Δεῖ γὰρ ἐπὶ παντὸς, ὡς εἴρηται, πράγματος τὴν τῶν ἁπλῶν ἡγεῖσθαι διδασκαλίαν. Τῶν δὲ τῆς τοῦ βιβλίου διαιρέσεως τρόπων, καὶ ἡ τῶν ὅρων γεγένηται διαίρεσις. οἱ μὲν γὰρ πρότεροι περὶ ἐπιμερῶν, καὶ πολλαπλάσιοι· οἱ δὲ ἑξῆς καθολικώτεροι περὶ πάντων τῶν λόγων.

BREVIS INTERPRETATIO HVIVS QVINTI LIBRI, INCERTI AVTORIS.

Scopus huius quinti libri eſt is, ut tractetur de proportionib. Pertinet enim liber iſte & ad geometriã, ac arithmeticam & muſicã, omnesq́ alias quæ ſimpliciter mathematicæ diſciplinæ uocãtur. Etenim quę in ipſo tra duntur, non geometricis ſolum contemplationibus cõueniũt, illisq́ propria exiſtũt, ſed & omnib. quę ſub mathematica ipſa cõprehenduntur, & ut prius dixi, diſciplinis. Sit igitur hic libri ſcopus. Cæterùm librũ ipſum cuiuſdã Eudoxi inuentũ eſſe aſſerunt, diſcipuli Platonis. Cũ igitur ſit ſcopus de proportionib. proportio aũt ſit rationũ quarundã habitudo: quę ſint illæ rationes, prius cognoſcendum erit neceſſariò. Oportet enim ſimpliciũ cognitionẽ præcedere, q̃ de cõpoſitis dicatur aliquid. Itaq́ ſi quædam inter ſe cõparentur (ſumamus aũt duas magnitudines) illæ quidem Termini appellabũtur, tranſmutatio aũt ſiue trãſitus ab uno in alterũ, Interuallum dicitur. Cõparatio uerò alterius ad alterũ, Habitudo uocatur, quam ueteres Rationẽ nominauerũt. Collationem uerò huiuſcemodi rationis ad aliã rationẽ, quæ fit ſimilitudine quadã, aut eiuſcemodi habitudinem, appellarũt Proportionẽ, nõ perinde quaſi magnitudo illa cõparet, ſed ut illa ratio ad illã rationẽ: quæ deinde collatio, Rationis ratio dicitur. ut ſi duæ fuerint rectæ lineę, quarũ una alterius reſpectu duplam habeat rationem: quadratum quod ab ea linea eſt deſcriptum, quæ duplam rationem habet, quadruplã quoq́ rationẽ habebit, reſpectu uidelicet eius quadrati, quod ab altera eſt deſcriptũ, ſiquidẽ collatio habeat longioris lineæ ad breuiorẽ rectã. Quæ enim lõgitudine dupla ſunt: ea potẽtia qua drupla exiſtũt. Ratio igitur quadratorũ quadrupla exiſtens, duplæ rationis exiſtentiũ rectarũ dupla eſt. Talis aũt uocat Rationis ratio. Sed fuerit illa in quãtitate. duplex enim eſt ratio, una in dignitate, altera uerò quantitatis. ac dignioris quidẽ nulla ſpecies uidetur eſſe ad pręſentẽ uſum accommodata: huius uerò rationis, quæ ſecundũ quantitatẽ dicitur, ſpecies ſunt quinq́. Alia enim ratio Multiplex appellatur: cuiuſmodi eſt 6 ad 3: alia Superparticularis, ut 4 ad 3: alia uerò Superpartiens, ut 5 ad 3. atq́ hæ quidẽ ſunt Simplices, quarũ tamen omnium rationũ magis ſimplex eſt Multiplex. Reliquæ uerò duę ſpecies ex harũ naſcũtur cõpoſitione, Multiplex ſuperparticularis ſcilicet, ut 7 ad 3: & Multiplex ſuperpartiens, ut 8 ad 3.

Sub rationes aũt uocãtur, cum minores maiorib. cõferuntur: Submultiplices, Subſuperparticulares, Subſuperpartiẽtes, & ſic deinceps. Sciendum aũt, diuidi hunc librũ in duas partes, et initiò quidẽ ſimpliciũ cõtinet doctrinã, hoc eſt, eam quę de multiplicib. tractat, deinde uniuerſaliora de omnib. rationib. tradũtur. Oportet enim, ut iã oſtẽſum eſt, in omni re ſimpliciũ doctrinã pręcedere. Si quis aũt cõſideret modũ diuiſionis, terminorum etiã diuiſio facta erit. Nã priores quidẽ, ſcilicet termini, Multiplices: qui autem deinceps ſequuntur uniuerſaliores, de omnibus rationibus.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ.

EVCLIDIS ELEMENTORVM GEOmetricorum liber quintus.

Est hic quintus liber Euclidis περὶ τοῦ λόγου καὶ τῆς ἀναλογίας, hoc est, de ratione & proportione. Quæ igitur ad hanc tractationem requiruntur uocabula, primò, ut in præcedentibus etiam factum est, ordine definit.

ΟΡΟΙ.

Μέρος ἐστὶ μέγεθος μεγέθους, τὸ ἔλασσον τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸ μεῖζον.

DEFINITIONES.

1 Pars est quantitas quantitatis, minor maioris, quando minor metitur maiorem.

μέγεθος) Licet hac uoce continua tantum quantitas, sub qua nimirum lineæ, superficies & corpora comprehensa sunt, intelligatur, unde sic quidem magnitudinis significationem habet: tamen quia omnia, quæ in hoc libro, tam per definitiones quàm etiam propositiones, ab authore nobis præscribūtur, per numeros æque ut per lineas ostendi possunt: non magnitudinis, sed quantitatis uoce, sub qua, tanquam uocabulo generali, numeri etiam cōprehenduntur, in uersione usi sumus, id quod Lector æquo animo ferat, præsertim cū in hoc autori nihil detrahatur, cumque etiam singula numeris declarauerimus.

Καταμετρεῖν) autem est metiri, atque hoc loco diuidere aliquid integrè, & quasi ad libellam, ut dicitur, sic quòd nō maneat, ultima subtractione facta, aliquid minore minus, sed nihil omnino, ad mensurandum amplius relinquatur.

Πολλαπλάσιον δὲ τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος, ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ ἐλάττονος.

2 Multiplex est, quantitas quantitatis, maior minoris, quando maior mensuratur à minore.

Harum definitionum de parte & multiplici exempla sunt.

Respectu. — contra uero — Respectu.

est pars, est multiplex.

Exempla per numeros exposita.

3 respectu scilicet {6, 9, 12, 15, 21} est pars, Contra uero {6, 9, 12, 15, 21} respectu 3, multiplex

Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν, ἡ κατὰ πηλικότητα πρὸς ἄλληλα ποιὰ σχέσις.

3 Ratio, est duarum quantitatum eiusdem generis, aliquatenus inter se quædam habitudo.

Duæ requiruntur, ut ex definitione colligitur, ad rationem cōstituendam, quantitates, atque ea deinde inter illas habitudo, quanta nimirū una respectu alterius fuerit. hoc inquam, uel illa consideratio, siue respectus, ratio dicitur. Exempla sunt,

ad

ad

uel ad

Exempla per numeros exposita.

25 ad {25, 5, 24, 17, 3, 7} uel contra {25, 5, 24, 17, 3, 7} ad 25, est ratio,

hoc est, quidam respectus, ut ratione primi exempli in utroque ordine, numeri sese mutuo æqualiter respiciunt. Ratione secundi, in priori quidem, est prior quantitas numerus posterioris quincuplus, in posteriori uerò subquincuplus, & sic ordine deinceps. Illa autem consideratio quantitatum inter se, unius ad alteram, dicitur ratio. Et sicut lineæ ac numeri, ita quoque superficies, corpora, ac quæque res aliæ inter se conferri possunt.

Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν.

4 Rationem habere inter se quantitates dicuntur, quæ possunt multiplicatæ inuicem excedere.

Exempla sunt.

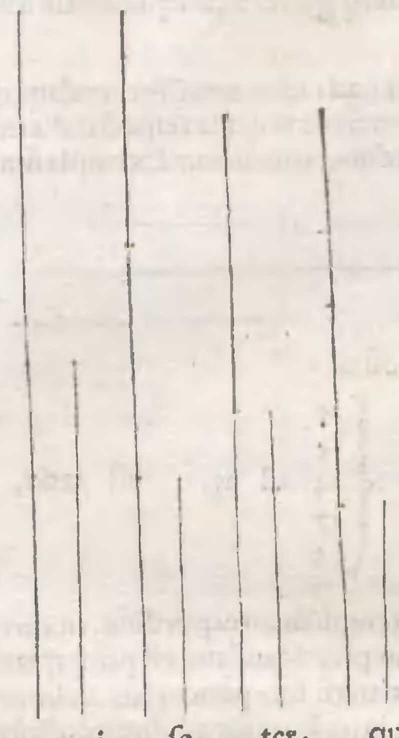
27	18	12	12	18	27
9	6	4	4	6	9
36	36	36	27	30	22
9	9	9	9	5	11

Sic per lineas exempla præscribi possunt.

Ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι, πρῶτον πρὸς δεύτερον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου ἰσάκις πολλαπλασίων καθ᾽ ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν ἑκάτερον ἑκατέρου, ἢ ἅμα ἐλλείπῃ, ἢ ἅμα ἴσα ᾖ, ἢ ἅμα ὑπερέχῃ, ληφθέντα κατάλληλα.

5 In eadem ratione quantitates dicuntur esse, prima ad secundam, & tertia ad quartam, quando primæ & tertiæ æquè multiplicia à secundæ & quartæ æquè multiplicibus, iuxta quamuis multiplicationem utrun-

que ab utroq;,uel unà deficiunt,uel unà æqualia ſunt, uel unà excedunt, ſumpta inter ſe.



Dicit definitio. Quarum rationum antecedentes uno aliquo numero, uno item, ſiue illo priori uel quouis numero alio, & conſequentes quantitates multiplicatæ fuerint, multiplex inſuper primæ ſimili modo à multiplici ſecundæ defecerit, ei æquale fuerit, uel idem exceſſerit. ſicut multiplex tertiæ deficit, æquale eſt, uel excendit multiplex quantitatis quartæ: in eadem ratione dicuntur eſſe hæ quantitates. Oſtendit autem hoc in quatuor quantitatibus autor, & dicit, In eadem ratione quantitates, &c.

pri- ma | ſe- cun. | ter- tia | quarta quantitas.

Exempla in numeris ſunt.

Multi.	24	18	12	9	exceſſus
	24	24	12	12	æqualitas
	16	18	8	9	defectus.
Quantita.	8 prima	6 ſecun.	4 tertia	3 quar.	

Τὰ δὲ τὸν αὐτὸν ἔχοντα μεγέθη λόγον, ἀνάλογον καλείσθω.

6 Eandem autem habentes rationem quantitates, proportionales uocentur.

Huius definitionis exempla ſunt, quæ ex definitionibus præcedentibus, quarta & quinta, colliguntur.

Ὅταν δὲ τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων, τὸ μὲν τοῦ πρώτου πολλαπλάσιον ὑπερέχῃ τοῦ τοῦ δευτέρου πολλαπλασίου, τὸ δὲ τοῦ τρίτου πολλαπλάσιον μὴ ὑπερέχῃ τοῦ τοῦ τετάρτου πολλαπλασίου· τότε τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον μείζονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ τὸ τρίτον πρὸς τὸ τέταρτον.

7 Quando uerò æquè multiplicium, multiplex primæ exceſſerit multiplex ſecundę, ipſum uerò multiplex tertiæ non exceſſerit multiplex quartæ: tunc prima ad ſecundam maiorem quàm tertia ad quantitatem quartam rationem habere dicitur.

Cohæret

uel contrà

Cohæret hæc definitio cum præcedentibus duabus, quinta & ſexta. Quando uerò dicit, æquè multiplicium, tum primæ & tertiæ, ſecundæ item & quartæ quantitatum, intelligendum eſt.

Exempla in numeris ſunt.

16	8	18	18	24	20	27	45
8	4	9	9	8	4	9	9

Aliud exemplum.

16	20	18	45
8	4	9	9

Sunt hic tria exempla, quorum primum & ſecundum patent. In tertio autem, licet multiplex primæ in nullo multiplex ſecundæ excedat, cum tamen id minus à multiplici ſecundæ, quàm tertiæ multiplex à multiplice quantitatis quartæ deficiat: erit adhuc primæ ad ſecundā maior, quàm tertiæ ad quartam quantitatē ratio.

Alia exempla.

22		12		14		18			21		18		15		24
11	ad	2	&	7	ad	3		Item	7	ad	3	&	5	ad	4

APPENDIX.

Cum quis uelit inter duas rationes iudicare, utra maior ſit, commodiſſimè per hanc definitionem id expedire poterit.

Ἀναλογία δέ ἐστιν ἡ τῶν λόγων ὁμοιότης.

8 Proportio uerò eſt, rationum ſimilitudo.

ADMONITIO.

Similes ſiue eædem, & diſſimiles ſunt rationes, quantitates uerò æquales & inæquales inter ſe, quod hic annotare libuit.

Ἀναλογία δὲ ἐν τρισὶν ὅροις ἐλαχίστη ἐστίν.

9 Proportio autem in tribus terminis minima eſt.

Hoc eſt, ad conſtituendam proportionem requiruntur ad minus tres quantitates. Cum enim proportio ſit rationum ſimilitudo, & non rationis: ſingulæ uerò rationes duabus quantitatibus, antecedente ſcilicet & conſequente, conſtent: ſequitur proportionem, duabus rationibus præſcriptam, quatuor terminos requirere. Sed quia non rarò ſolet contingere, ut unius rationis unus terminus bis repetatur, ſemel quidem ut ſit conſequens prioris, poſtea uerò ut ſit poſterioris rationis antecedens, conſtat, tres terminos, ut proportio conſtituatur, aliquando ſufficere, pauciores uerò nunquam.

 Exempla

Exempla sunt.

9 6 4 16 12 9 16 20 25

Alia.

9 ad 4 ut 27 ad 12 32 ad 24 ut 12 ad 9

Similiter alia.

27 18 ut 12 8 64 80 ut 100 125

Adhuc aliud.

12 ad 15 ut 8 ad 10, atque ut 4 ad 5

Cæterùm, maximam proportionem quot termini constituant, hoc non definit Autor, cum ea semper quoad quis uoluerit, ut habet propositio in octauo secunda, per unum terminum augeri possit.

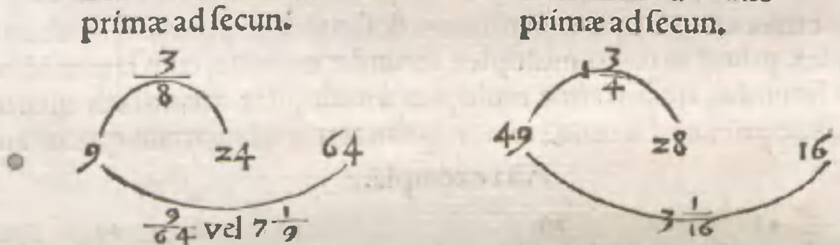
Ὅταν δὲ τρία μεγέθη ἀνάλογον ᾖ· τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον διπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον.

10 Quando uerò tres quantitates proportionales fuerint: prima ad tertiam duplicatam rationem habere dicitur, quàm ad secundam.

Ἀνάλογον ᾖ, hoc est, continuè unam & eandem rationem habuerint.

Exempla sunt.

Denominatio uel ratio primæ ad secun. Denominatio uel ratio primæ ad secun.



Denominatio uel ratio primæ ad tertiam. Denominatio primæ ad tertiam, &c.

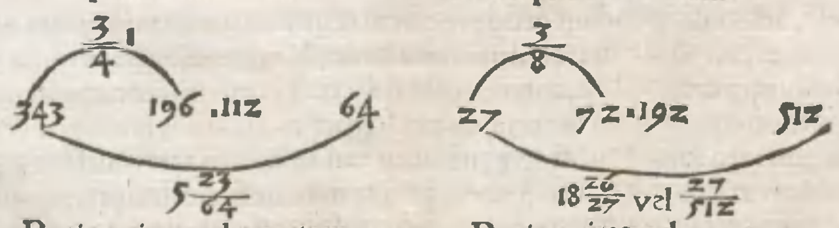
Est autem respectu prioris duplicata, hoc est bis sumpta.

Exempla huius definitionis alia, sunt numeri uel quantitates, quas examinat definitio præcedens quarta.

Ὅταν δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ· τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τέταρτον τριπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον. Καὶ ἀεὶ ἑξῆς ἑνὶ πλεῖον, ἕως ἂν ἡ ἀναλογία ὑπάρχῃ.

11 Quando autem quatuor quantitates proportionales fuerint: prima ad quartam triplicatam rationem habere dicitur, quàm ad secundam. Et semper ordinatim una plus, prout quidem proportio extensa fuerit.

Ratio primæ ad secun. Ratio primæ ad secun.



Ratio primæ ad quartam. Ratio primæ ad quartam.

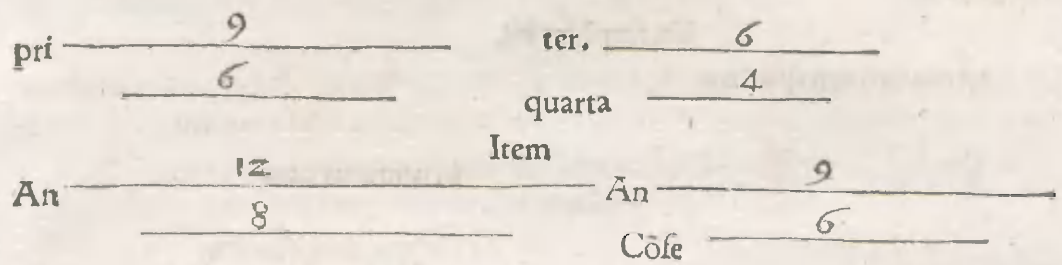
Est autem respectu primæ collationis triplicata, hoc est, ter sumpta.

Ὁμόλογα

Ὁμόλογα μεγέθη λέγεται εἶναι, τὰ μὲν ἡγούμενα τοῖς ἡγουμένοις, τὰ δὲ ἑπόμενα τοῖς ἑπομένοις.

12 Similis rationis quantitates dicuntur esse, antecedentes quidem antecedentibus, & consequentes consequentibus.

Est hæc definitio modus quidam & canon, per quem, sicuti ex præcedenti quinta, quæ quantitates proportionales sint, cognoscitur, atque huius sensus talis. Quatuor aut pluribus quantibus, pari numero propositis, quarum semper duæ & duæ inter se conferuntur, si quidem antecedentes illam inter se, quam ipsæ consequentes, eodem ordine sumptæ, rationem habuerint: similis rationis hæ quantitates esse dicuntur.



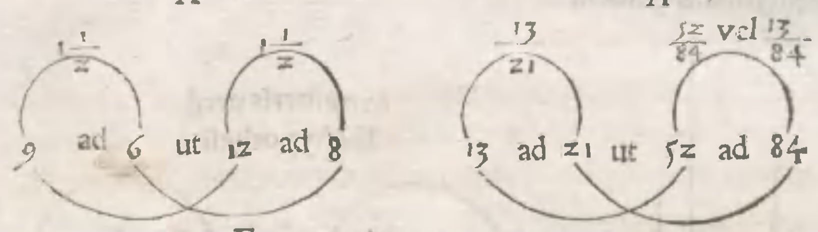
Quia prima & tertia, hoc est antecedentes, illam quam consequentes, quæ sunt secunda & quarta quantitates, inter se habent rationes: similis igitur rationis prima, secunda, tertia & quarta quantitates erunt. Sic de pluribus idem intelligitur.

Ἐναλλὰξ λόγος ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὸ ἡγούμενον, καὶ τοῦ ἑπομένου πρὸς τὸ ἑπόμενον

13 Permutata ratio, est acceptio antecedentis ad antecedentem, & consequentis ad consequentem.

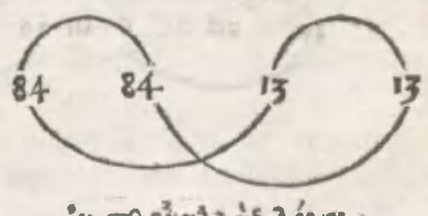
Similis rationis quantitatibus positis: erit, ex permutata ratione, antecedens ad antecedentem, hoc est prima ad tertiam, sicut consequens ad consequentem, secunda nimirum ad quantitatem quartam.

Ex hypoth. Ex hypot.



Ergo ex permutata ratione,

Aliud exemplum in ratione æqualitatis.



ἐκ τοῦ ἐναλλὰξ λόγου.

APPENDIX.

APPENDIX.

Eſt huius, & proximè ſequentium quatuor definitionum, generalis hypotheſis, ut uidelicet quantitates ſimilis rationis habeant.

Ἀνάπαλιν λόγος, ἐστὶ λῆψις τοῦ ἑπομένου ὡς ἡγουμένου, πρὸς τὸ ἡγούμενον ὡς ἑπόμενον.

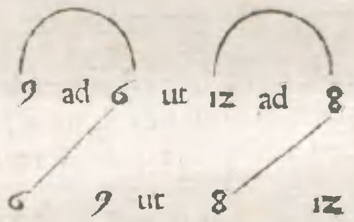
14 Conuerſa ratio, eſt acceptio conſequentis tanquam antecedentis, ad antecedentem tanquam ad conſequentem.

Vt ſi fuerit proportionalium quantitatum prima ad ſecundam, ex hypotheſi, ut tertia ad quartam: erit contrà ex conuerſa ratione, ſecunda ad primam, nimirum conſequens ad antecedentem, ſicut quarta ad tertiam, ſimiliter conſequens ad antecedentem.

Exemplum eſt,

geometricum quidem

in numeris uerò

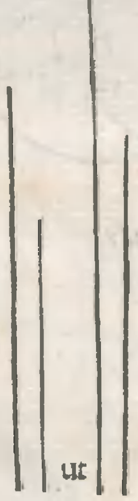


Σύνθεσις λόγου, ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου μετὰ τοῦ ἑπομένου, ὡς ἑνός, πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον.

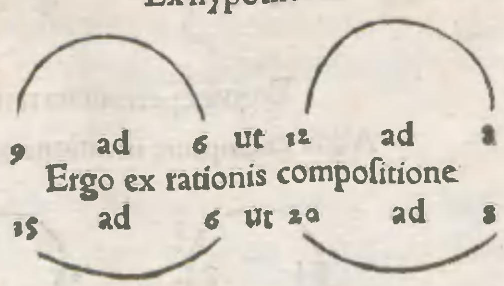
15 Compoſitio rationis, eſt acceptio antecedentis cum conſequente, ſicut unius, ad eandem conſequentem.

Exemplum eſt,

geometricum quidem



in numeris uerò,
Ex hypotheſi



Διαίρεσις δὲ λόγου, ἐστὶ λῆψις τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἑπομένου, πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον.

16 Diuiſio rationis, eſt acceptio exceſſus, quo excedit antecedens ipſam conſequentem, ad eandem conſequentem quantitatem.

Exemplum eſt.

Quia	9	ad	6	ut	12	ad	8 ex hypo.
quare	3	ad	6	ut	4	ad	8 ex diuiſa ra.

Ἀναστροφὴ λόγου, ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὴν ὑπεροχήν, ᾗ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἑπομένου.

17 Conuerſio rationis, eſt acceptio antecedentis ad exceſſum, quo excedit antecedens ipſam conſequentem quantitatem.

Exemplum eſt.

Cum ex hypotheſi fuerint 9 ad 6 ut 12 ad 8: erunt ex conuerſionis ratione 9 ad 3 ut 12 ad 4

SEQVITVR EXEMPLVM GENERALE, QVINQVE præmiſſas proportionis proprietates declarans.

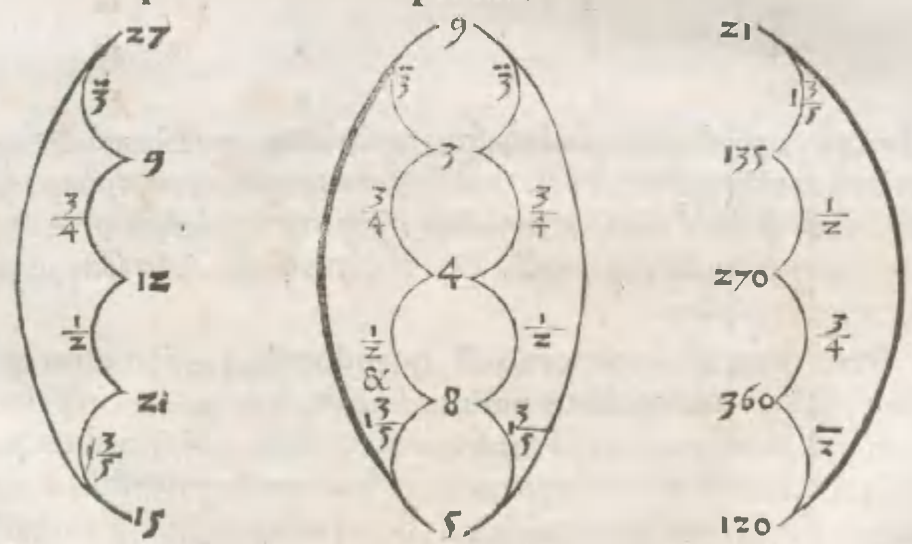
Quia 15 ſunt ad 8 ut 45 ad 24 ex hypotheſi,

igitur	15	erunt ad	45	ut	8	ad	24,	ex permutata ratione
	8		15		24		45,	ex conuerſa ratione
	23		8		69		24,	ex rationis compoſitione
	7		8		21		24,	ex rationis diuiſione
	15		7		45		21,	ex rationis conuerſione.

Δι᾽ ἴσου λόγος ἐστί, πλειόνων ὄντων μεγεθῶν, καὶ ἄλλων αὐτοῖς ἴσων τὸ πλῆθος σὺν δύο λαμβανομένων, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὅταν ᾖ, ὡς ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσι, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔσχατον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσι, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔσχατον. Ἢ ἄλλως· Λῆψις τῶν ἄκρων, καθ᾽ ὑπεξαίρεσιν τῶν μέσων.

Ordo

prior posterior



uel ordo prior ordo poſterior.

18 Æqua ratio eſt, pluribus exiſtentib. quantitatibus, & alijs eis æqualibus multitudine, cũ duabus ſumptis, & in eadem ratione, quando fuerit, ſicut in prioribus quantitatibus, prima ad ultimam: ſic in poſterioribus quantitatibus, prima ad ultimam. Vel aliter. Æqua ratio, eſt acceptio extremarum, per ſubtractionem mediarum.

Τεταγμένη ἀναλογία ἐστίν, ὅταν ᾖ, ὡς ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον, οὕτως ἡγούμενον πρὸς τὸ ἑπόμενον, ᾖ δὲ καὶ ὡς ἑπόμενον πρὸς ἄλλό τι, οὕτως ἑπόμενον πρὸς ἄλλό τι.

19 Ordinata proportio eſt, quando fuerit, ſicut antecedens ad conſequentem ſic antecedens ad conſequentem, ſicutq; conſequens ad aliud quiddam ſic conſequens ad aliud.

Vult definitio. Ordinatis tribus quantitatibus, & alijs deinde totidem, quando fuerit prima priorum ad ſuam ſecundam, ſicut prima poſteriorum ad ſecundam, illarum deinde ſecundam ad tertiam, ut ſecunda harũ ad tertiam, atq; ſic ordine deinceps, ſi plures quàm tres, ex utraq; parte, quantitates fuerint: infertur ut in præcedenti, quòd ſcilicet tandem extremorum utrinq; ſit æqua ratio.

Exemplum eſt,

$4\frac{1}{2}$	Antecedens		9	18		Antecedens	$4\frac{1}{2}$
		$1\frac{4}{5}$			$1\frac{4}{5}$		
	Conſequens		5	10		Conſequens	
		$2\frac{1}{2}$			$2\frac{1}{2}$		
	Aliud		2	4		Aliud	

Poteſt hæc definitio, atq; etiam proximè ſequens ſe extendere, & intelligi de pluribus quantitatibus, quemadmodum ipſa præcedens, ut patet.

Ordo prior	poſte.	Ordo prior	poſte.
27	9	16	64
9	3	8	32
12	4	5	20
24	8	9	36
15	5	3	12

Τεταραγμένη δὲ ἀναλογία ἐστίν, ὅταν τριῶν ὄντων μεγεθῶν, καὶ ἄλλων ἴσων αὐτοῖς τὸ πλῆθος, γίνηται, ὡς μὲν ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν, ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον· ὡς δὲ ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν, ἑπόμενον πρὸς ἄλλό τι, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἄλλό τι πρὸς ἡγούμενον.

20 Perturbata uerò proportio eſt, quando tribus exiſtentibus quantitatibus, & alijs eis æqualibus multitudine, ſit, ſicut quidem in prioribus quantitatibus antecedens ad conſequentem, ſic in poſterioribus quantitatibus antecedens ad conſequentem: ſicut autem in prioribus quantitatibus, conſequens ad aliud quiddam, ſic in poſterioribus quantitatibus, id aliud ad antecedentem.

Exemplum eſt,

Tripla	Antecedens	9	6	Quid aliud	Tripla
	Conſequens	6	3	Antecedens	
	Quid aliud	3	2	Conſequẽs	

Alia duo exempla

Anteced.	9	9	Quid aliud	Antec.	7	8	Quid aliud
Conſeq.	3	24	Antecedens	Conſeq.	4	14	Antecedens
Quid aliud	8	8	Conſequens	Quid al.	7	8	Conſequens

Exemplum pro quinq; quantitatibus in utroq; ordine.

Ordo

	prior		posterior		
Tripla	9		60		Tripla
		$2\frac{1}{4}$		$\frac{2}{3}$	
	4		90		
		$\frac{4}{5}$		$2\frac{1}{2}$	
	5		36		
		$2\frac{1}{2}$		$\frac{4}{5}$	
	2		45		
		$\frac{2}{3}$		$2\frac{1}{4}$	
	3		20		

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.

ΠΡΩΤΗ. Α.

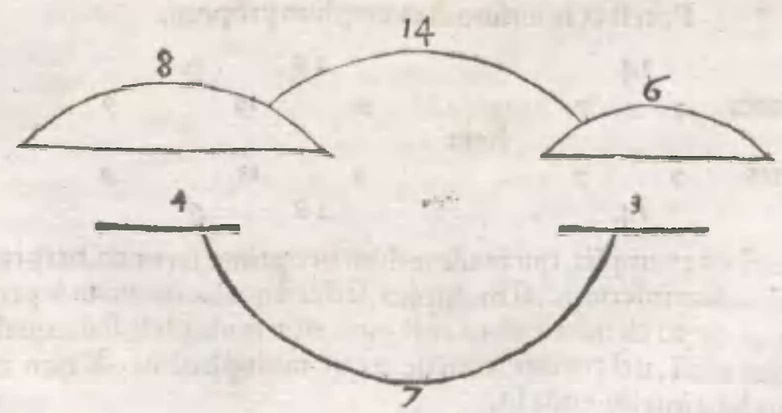
Ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη, ὁποσωνοῦν μεγεθῶν ἴσων τὸ πλῆθος, ἕκαστον ἑκάστου ἰσάκις πολλαπλάσιον· ὁσαπλάσιόν ἐστιν ἓν τῶν μεγεθῶν ἑνός, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ πάντα τῶν πάντων.

PROPOSITIONES.

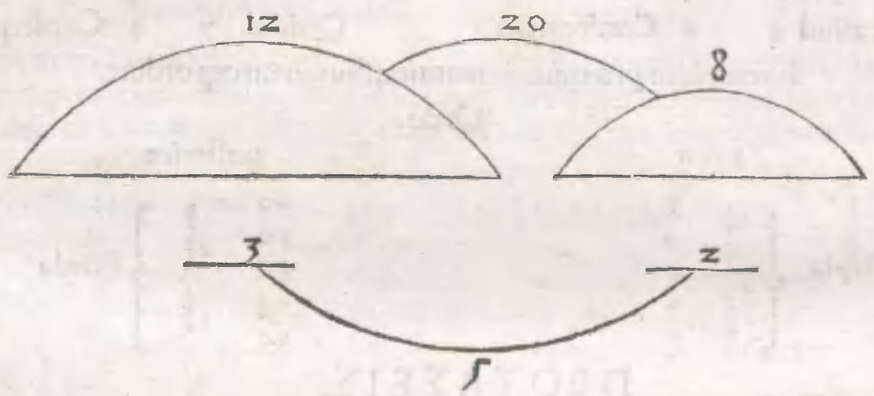
PRIMA. I.

Si fuerint quotcunq; quantitates, quotcunq; quantitatum æqualium numero, ſingulæ ſingularum æquè multiplices: quàm multiplex eſt una quantitas unius, tam multiplices erunt omnes omnium.

Sint quotcunq; quantitates, ſiue duæ, tres, quatuor aut plures, aliarum totidem æque multiplices, quæq; recto ordine ſuæ, dico, quàm multiplex eſt una multiplicium reſpectu ſuæ inferioris, tam multiplices eſſe multiplices omnes, ſimul ſumptas, omnium inferiorum ſimul ſumptarum. Eſt huius propoſitionis demonſtratio



potiſſimum illa communis noticia, Si æqualibus ęqualia addantur, &c. Cum enim inferiores æqualiter, ex hypotheſi, in ſuis multiplicibus contineantur: ſequitur, ut quot portiones una inferiorum in ſua multiplici æquales habuerit, totidem etiam & reliquarum quæq; habeat. Diuiſis ergo multiplicibus, unaquaq; ſcilicet in ſuas portiones, quot in una earum portiones ſunt ſuæ inferiori uel parti æquales, tot & in unaquaq; alia erunt: atq; inſuper quemadmodũ primæ portiones multiplicium ſuis inferiorib. ſunt ęquales, ita ordine quæq; aliæ. Aequalibus igitur æqualibus additis, erunt multiplicium portiones eiuſdem ordinis, primi ſcilicet ſecundi uel tertij & reliqui, ſi tot fuerint, ſimul ſumptæ, ipſis inferiorib. ſimul ſumptis æquales. Quare ſi primis ſecundæ multiplicium portiones additæ fuerint, aggregata ad partes



duplicia erunt. Quod ſi tertiæ his adiectæ fuerint: triplicia. Quia autem, ut ex hypotheſi habetur, in una multiplici non plures portiones ſunt ſuæ inferiori æquales, quàm in alia: quoties igitur multiplex una ſuã inferiorem uel ſubmultiplicem continet, toties & multiplicium aggregatum, id quod ex inferioribus, hoc eſt multiplicibus, colligitur, cõtinere neceſſe eſt, Si fuerint igitur quotcunq; quantitates, quotcunq; quantitatum, &c. quod demonſtraſſe oportuit.

Sequitur exemplum pro quatuor.

99

Multipli.	24	18	21	36	ſuperiores
	8 8 8.	6 6 6.	7 7 7.	12 12 12	
Submulti.	8	6	7	12	inferiores

33

Poteſt & huiuſmodi exemplum proponi.

	14				28	42	
Superiores	7	7	Item	9	19		9
Inferiores	7	7		9	18		9
	14				28	42	

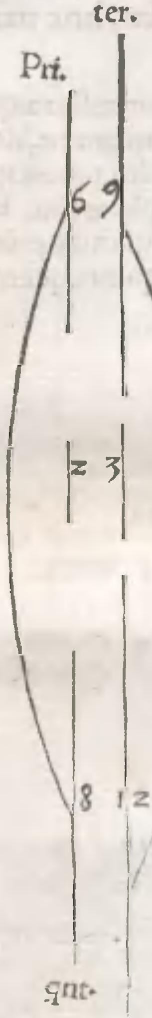
In his duobus exemplis, quemadmodum nec prima, ſecunda, neq; etiam tertia ex ſuperioribus ſuæ inferioris eſt multiplex, ſed ei æqualis: ita etiam ſuperiorum aggregatum, eius quod ex inferioribus colligitur, non multiplex, ſed æquale eſt. Sed ad propoſitum nihil, uel parum, cum de æquè multiplicibus, & non æqualibus quantitatibus hæc intelligenda ſit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ B.

Ἐὰν πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον, καὶ τρίτον τετάρτου, ᾖ δὲ καὶ πέμπτον δευτέρου ἰσάκις πολλαπλάσιον, καὶ ἕκτον τετάρτου· καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον, δευτέρου ἰσάκις ἔσαι πολλαπλάσιον, καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τετάρτου.

PROPOSITIO II.

Si prima ſecundæ æquè fuerit multiplex, & tertia quartæ, fuerit autem & quinta ſecundæ ęquè multiplex, & ſexta quartæ: & compoſita, prima ſcilicet & quinta, ſecundæ æquè erit multiplex, & tertia & ſexta quartæ.



Sint ſex quantitates, & eſto quòd prima ſecundæ, ut tertia quartæ, ſit multiplex: atq; etiam quinta eidem ſecundæ, ut ſexta quartæ: dico ergo, & compoſitam ex prima & quinta ipſi ſecundæ, ut eſt compoſita ex tertia & ſexta ipſi quartæ, multiplicem eſſe. Quoniã enim prima ſecundæ & tertia quartæ, ex hypotheſi æquè multiplex eſt: quot igitur portiones ſibi æquales habet ſecunda in prima, tot haber & quarta in ipſa tertia: atq; eadẽ ratione, quot in quinta ſecunda, tot etiã in ſexta portiones ſibi ęquales habet ipſa quarta. Quare quoties ſecunda in ipſa prima & quinta reperitur, toties etiã quarta in quantitatib. tertia & ſexta. Quàm multiplex igitur eſt cõpoſita ex prima & quinta ſecundæ, tam multiplex eſt & cõpoſita ex tertia et ſexta ipſius quartę. Aequè igitur multiplices ſunt, compoſita ex prima & quinta ſecundæ, & compoſita deinde ex tertia & ſexta ipſius quartæ. Quare ſi prima ſecundę æquè fuerit, &c. quod demonſtraſſe oportuit.

ALIA HVIVS REI DEMONSTRATIO.

Sint quantitates, quot & quales propoſitio requirit, &cæ. Quoniam enim ſecunda in prima & quinta, ex hypotheſi, to

quinquies		quinquies	
Ter	bis	ter	bis
12	8	9	6
4		3	

ſexta ties continetur, quoties quarta in quantitatibus tertia & ſexta, ſi iam ad ęquales, priorum multiplicium portiones denominantes numeros, poſteriorum multiplicium portiones denominantes æquales numeri addantur: ipſi toti, denominantes multiplicium portiones numeri, ex communi illa noticia, Si æqualibus æqualia addantur, &c. inter ſe æquales erunt. atq; unus quidem, qui quoties ſecunda in compoſita ex prima & quinta, alter uerò quoties quarta in tertia & ſexta ſimul ſumpta continetur, oſtendit. Quare ſic compoſita ex prima & quinta, multiplex eſt ſecundæ: ita & quæ ex tertia & ſexta conſtituitur quantitas, ad ipſam quartã multiplex erit. Si prima igitur ſecundæ æquè fuerit multiplex, & tertia quartæ, fuerit autem & quinta ſecundæ æquè multiplex, & ſexta quartæ: & compoſita, prima ſcilicet & quinta, ſecundæ æquè erit multiplex, & tertia & ſexta quartæ. quod demonſtraſſe oportuit.

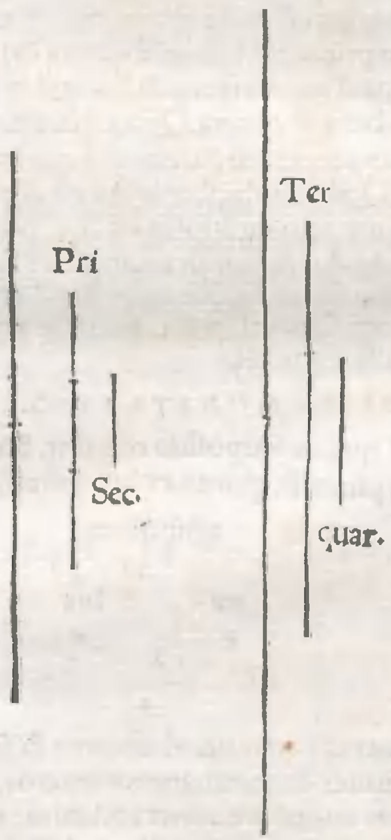
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ.

Ἐὰν πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον, καὶ τρίτον τετάρτου, ληφθῇ δὲ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ πρώτου καὶ τρίτου· καὶ δι' ἴσου τῶν ληφθέντων ἑκάτερον ἑκατέρου ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, τὸ μὲν τοῦ δευτέρου, τὸ δὲ τοῦ τετάρτου.

PROPOSITIO III.

Si prima ſecundæ æquè fuerit multiplex, & tertia quartæ, ſumantur tur autem æquè multiplices primæ & tertiæ: & æqualiter ſumptarum utraꝗ utriuſque æquè multiplex erit, illud quidem ſecundæ, hoc uerò ipſius quartæ.

Sint quatuor quantitates, & eſto quòd prima ſecũdæ & tertia quartæ ſint æquè multiplices. Sint etiam duæ quantitates aliæ, quæ & ipſæ, una quidem primæ, altera uerò tertiæ, ſint æquè multiplices: dico igitur, quòd etiam multiplex primæ ipſi ſecundæ, tertiæ deinde multiplex ipſi quantitati quartæ æquè multiplices ſint. Eſt huius propoſitionis demonſtratio ſecunda præmiſſa, ſi toties ea, quoties prima in quinta continetur, minus uno, repetatur. Hoc autem apparet, ſi quinta quanti-



Exemplum in numeris.

	63	84	
prima	9	12	tertia
ſecunda	3	4	quarta quantitas

Aliud

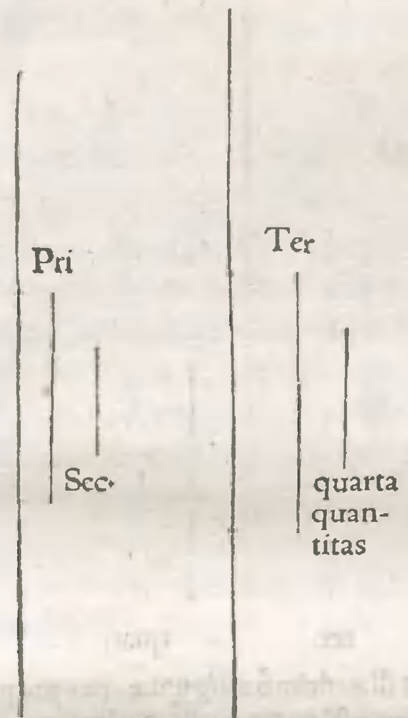
	24			30	
8	8	8	10	10	10
prima	8		tertia	10	
ſecun.	4		quar.	5	

tas & ſexta in portiones, primæ & tertiæ quantitatibus æquales, diſtribuantur, loco primæ deinde & tertiæ quantitatum, æquales ex quinta & ſexta portiones ſumantur, quod indicaſſe oportuit.

ALIA ET PLANIOR HVIVS PROPOSITIOnis demonſtratio.

Sint quatuor quantitates, &c. Quoniam enim primæ & tertiæ æquè ſunt, ex hypotheſi, aſſignatæ multiplices: quot igitur portiones ſibi æquales in ſua habet ipſa prima, tot & tertiam in ſua habere neceſſe erit. quare utraꝗ multiplici in portiones ſuæ inferiori æquales diſtributa: erit utiꝗ æqualis multitudo portionum unius, ſicut

cut & multiplicis alterius. Quia uerò æquè multiplex eſt prima quãtitas ſecundæ, & tertia quartæ, loco primæ & tertiæ quantitatum, portionibus, quas in ipſarum multiplicibus æquales habent, ſingulis ordine ſumptis: & ipſæ portiones quantitatum ſecundæ & quartæ æquè multiplices erunt. Ordinatis ergo iam ſex quantitatibus, quarũ prima quidem & quinta ſint priores duæ, quas habet prima in ſua multiplici æquales, portiones, ſecunda deinde ſit ipſa ſecunda, ac quarta ipſa quarta. Tertia uerò & ſexta quantitates ſint duæ portiones in multiplici quantitatis tertię, & ipſæ priores. Et quoniam hæ ſex quantitates huiuſmodi ſunt, quales propoſitio præcedens ſecunda requirit, erit per hanc, ex prima & quinta compoſita ita multiplex ſecundæ, ut ex tertia & ſexta compoſita multiplex eſt ipſius quartæ. Igitur, ſi in multiplicibus non plures quàm duæ, primæ & tertię quãtitatibus ęquales portiones fuerint: iam ſtatim conſtat ipſa propoſitio. Quòd ſi plures fuerint, maneant ſecunda & quarta quantitates, prima uerò & tertia eſto priorum duarum in multiplicibus portionum aggregata, quinta deinde & ſexta ſint tertiæ in multiplicibus portiones. Et quoniam etiam iam quales propoſitio præcedens ſecunda requirit, ſex quantitates apparent: idem etiam quod prius per eam inferri poteſt. Conſtat itaꝗ propoſitio, ubi quidem tres fuerint in multiplicibus portiones, ſuis inferioribus æquales. Non aliter procedendum erit, ubi portiones quatuor, quinꝗ aut plures etiam fuerint, id quod pro pleniore huius propoſitionis declaratione dicere libuit.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον· καὶ τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ τε πρώτου καὶ τρίτου πρὸς τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου, καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμόν, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, ληφθέντα κατάλληλα.

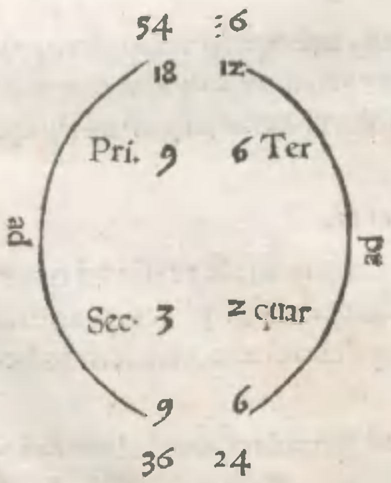
PROPOSITIO IIII.

Si prima ad ſecundam, eandem habuerit rationem, & tertia ad quartam: & primæ & tertiæ æquè multiplices, ad æquè multiplices quantitatum ſecundæ & quartæ, iuxta quamuis multiplicationem, eandem habebunt rationem, ad ſe ſumptæ.

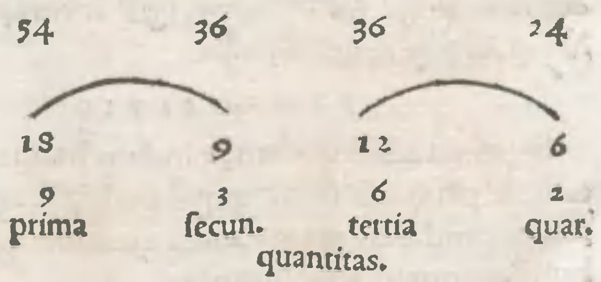
Sint quatuor quantitates, & eſto quòd prima ad ſecundam eam habeat rationem, quam tertia ad quartam. Sint etiam æquè multiplices primæ & tertiæ, æquè inſuper multiplices, iuxta quamuis multiplicationem, quantitatum ſecundæ & quartæ: dico igitur, & ipſas primæ & tertiæ æquè multiplices, ad æquè multiplices

ces quantitatum secundæ & quartæ, eandem habere rationem, id quod sic colligitur. Quoniam ex hypothesi, primæ & tertiæ æquè sunt multiplices assignatæ, qui-

bus si aliæ æquè assignentur multiplices: erunt illæ ultimò assignatæ, per propositionem præmissam tertiam, etiam ipsarum primæ & tertiæ æquè multiplices. Per eandem insuper, cum secunda & quarta suas æquè multiplices, ex hypothesi, habeant, si ipsis aliæ æquè multiplices assignentur: & illæ aliæ, secundæ & quartæ quantitatum æquè multiplices erunt. Quoniam autem quantitates, prima, secunda, tertia & quarta, ex hypothesi, sunt proportionales: multiplices igitur, de quibus



Possunt numeri etiam sic ordinari.



iam sermo fit, ex conuersione definitionis quintæ huius, in defectu, æqualitate, & excessu æqualiter sese habebunt, atque deinde, cum hæ eædem multiplices, aliarum etiam

etiam, primarum scilicet quantitatum, multiplices sint: & illæ aliæ tandem ex quinta definitione ipsa, ordine, quo solent, proportionales erunt. Si prima igitur ad secundam & tertia ad quãtitatem quartam eandem rationem habuerint: & primæ &c. quod demonstrasse oportuit.

ΛΗΜΜΑ.

Ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη, ὅτι εἰ ὑπερέχει τὸ κ τοῦ μ, ὑπερέχει καὶ τὸ λ τοῦ ν, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον. Δῆλον ὅτι, καὶ εἰ ὑπερέχει τὸ μ τοῦ κ, ὑπερέχει καὶ τὸ ν τοῦ λ, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον. Καὶ διὰ τοῦτο ἔσται καὶ ὡς τὸ η πρὸς τὸ ε, οὕτως τὸ θ πρὸς τὸ ζ.

LEMMA, VEL ASSVMPTVM.

Quoniam igitur demonstratum est, Si multiplex primæ quantitatis multiplicis excedat multiplicem multiplicis tertiæ: & multiplex multiplicis secundæ excedet multiplicem multiplicis quantitatis quartæ. Quòd si æqualis: æqualis. Si uerò minor fuerit: minor etiam erit. Manifestum autem est, Si multiplicis tertiæ quantitatis multiplex, excedat multiplicem multiplicis quantitatis primæ: quod tum & multiplex quartæ quantitatis multiplicis, multiplicem multiplicis quantitatis secundæ excedet, & si sit æqualis: æqualis, si uerò minor: minor etiam sit. Atque ideo etiam multiplex secundę ad multiplicem primę, sicut multiplex quartæ ad multiplicem quantitatis tertiæ sese habebit.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἀνάπαλιν ἀνάλογον ἔσται.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifestum est, quòd si quatuor quantitates in proportione sint, & permutatim etiam illas proportionales esse.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε.

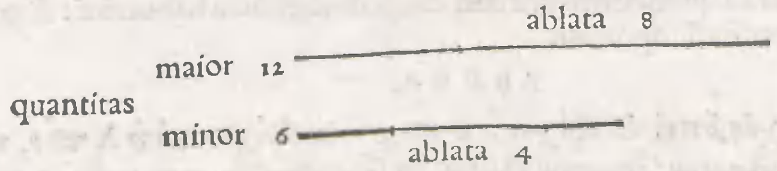
Ἐὰν μέγεθος μεγέθους ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον, ὅπερ ἀφαιρεθὲν ἀφαιρεθέντος, καὶ τὸ λοιπὸν τοῦ λοιποῦ ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ ὅλον τοῦ ὅλου.

PROPOSITIO V.

Si quantitas quantitatis multiplex fuerit, quemadmodum ablatum ablati: & reliquum reliqui, ut totum totius multiplex erit.

Sint duæ quantitates, quarum una sit alterius multiplex: auferatur autem ab utraque harum portio aliqua, quarum similiter una alterius, sicut tota totius, sit multiplex: dico, & reliquarum quantitatum, ut tota totius, unam alterius multiplicem esse. Sicut ablatum maioris multiplex est, ex hypothesi, ablati quantitatis minoris, ita multiplex esto, ex structura, maioris residuum quãtitatis alterius quartę: & erit ex propositione prima huius, maior quantitas aggregati, quod ex quarta quantitate & maioris ablato nascitur, sicut ablatum de maiore minoris quantitatis ablati, multiplex. Sed quia ita etiam, ex hypothesi, multiplex est maior quantitas ipsius minoris: æquè igitur est multiplex maior quantitas utriusque ipsorum, aggregati scilicet iam commemorati, & minoris quantitatis: quare ęqualia inter se, aggregatum

& minor quantitas. Dempto igitur eo quod eſt eis commune, ablato ſcilicet minoris, ex utraq; parte: & reliqua, quarta ſcilicet quantitas, atq; reſiduum minoris, ex



communi quadam noticia, inter ſe æqualia erunt. Quare quemadmodum, ex ſtructura, æquè eſt multiplex ablatum maioris ipſius minoris quantitatis ablati, & reſiduum maioris ipſius quartæ quantitatis: ita nunc propter æqualitatem, loco ſcilicet quartæ quantitatis reſiduo minoris ſumpto, & reſidua, quemadmodum ablata, inter ſe multiplicia erunt. Sed quia ut ablatum ablati, ſic ex hypotheſi, & maior quantitas ipſius minoris: quare & ablatum ablati, ut ipſæ quantitates, unum alterius multiplex erit. Si quantitas igitur quãtitatis multiplex fuerit, quemadmodum ablatum ablati: & reliquum reliqui, ut totum totius multiplex erit. quod demonſtraſſe oportuit.

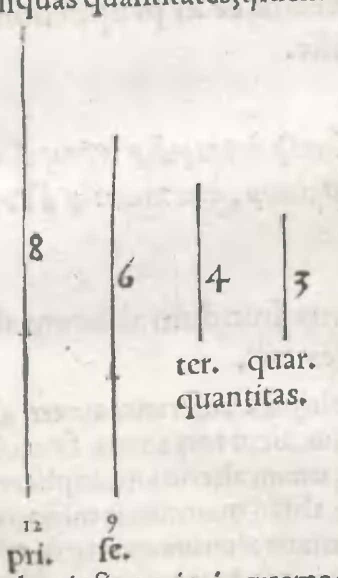
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ϛ.

Ἐὰν δύο μεγέθη δύο μεγεθῶν ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσια, καὶ ἀφαιρεθέντα τινὰ τῶν αὐτῶν ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσια· καὶ τὰ λοιπὰ τοῖς αὐτοῖς, ἤτοι ἴσα ἐστί, ἢ ἰσάκις αὐτῶν πολλαπλάσια.

PROPOSITIO VI.

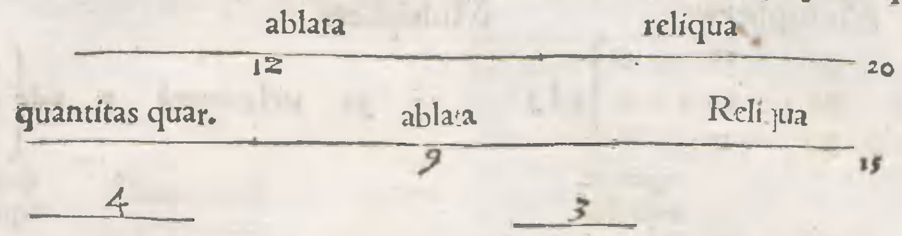
Si duæ quantitates duarum quantitatum æquè fuerint multiplices: & ablatæ quædam earundem æquè fuerint multiplices: reliquæ eiſdem aut æquales ſunt, aut æquè ipſarum multiplices.

Sint duarum quantitatum æquè multiplices, ſint etiam portiones quædam, de multiplicibus ablatæ, ad eaſdem duas æquè multiplices: dico, multiplicium reliquas quantitates, iiſdem duabus aut equales, utranq; utriq;, aut uerò earũ eque multiplices eſſe. Minores non poſſunt eſſe reliquæ ipſis quantitatibus poſitis, propterea quòd multiplices eis æqualiter aſſignatæ ſint. Eſto igitur primò quòd prioris multiplicis reliqua ſuæ quantitati æqualis ſit: dico ſane, & poſterioris multiplicis reliquam ſuæ quantitati æqualem eſſe, id quod hoc modo demonſtrabitur. Sumatur ipſi poſteriori æqualis quantitas alia. Et quoniam portiones ablatæ, ex hypotheſi, ipſarum quantitatum, primæ ſcilicet & ſecundæ, ſunt æquè multiplices, cum quantitati priori, ſuæ multiplicis reliqua, ex hypotheſi, poſteriori uerò alia quędam quantitas, ex ſtructura, æqualis ſit, ſi reliqua multiplicis ſuæ prioris ablatæ, ſumpta deinde quantitas poſterioris multiplicis ablatæ acceſſerint: & hæ compoſitæ earundem quantitatũ æquè multiplices erunt.



Sed quia etiam una compoſitarum, quæ eſt prior multiplex, ipſius prioris, quemadmodum poſterior poſterioris, eſt multiplex, cum duę quantitates uni ſint æquè multiplices: illas ex communi quadam noticia inter ſe æquales eſſe, concluditur. Communi igitur portione, quæ eſt ablata multiplicis poſterioris quantitas, ab illis ſeiuncta, & quæ relinquuntur, ex communi quadam noticia: atq; deinde, cum una reliqua poſteriorẽ quantitatem ęqualem habeat, & illa eadem

eadem poſterior quantitas & reliqua ipſius, & id ex communi quadam noticia, inter ſe æquales erũt. Sicut igitur prioris multiplicis reliqua quãtitas ipſi priori quan



titati, ex hypotheſi, æqualis eſt: ita & poſterioris reliquam ipſi poſteriori quantitati æqualem eſſe neceſſariò ſequitur. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, Similiter oſtẽdemus, ſi prioris multiplicis reliqua ſuæ quantitatis multiplex ſit, quòd & poſterior ad ſuam tam multiplex eſſe debeat. Si duę igitur quantitates duarum quantitatum æquè fuerint multiplices, & ablatæ quædam earũdem æquè fuerint multiplices: reliquæ eiſdem aut æquales ſunt, aut æquè ipſarum multiplices. quod demonſtraſſe oportuit.

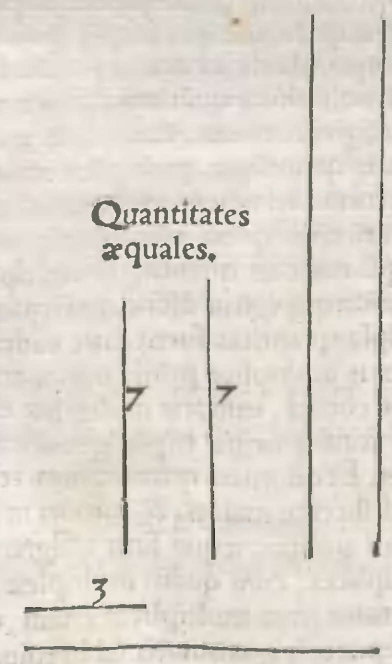
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ.

Τὰ ἴσα πρὸς τὸ αὐτό, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· Καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὰ ἴσα.

PROPOSITIO VII.

Æqualia ad idem, eandem habent rationem. Et idem, ad æqualia.

Sint duæ quantitates æquales, ad aliam tertiã, quantamcunq;, relatæ: dico, neutram æqualium diuerſam ab alia cum tertia illa conſtituere rationem. Colligit hæc propoſitio ſuam demonſtrationem ex definitione 5 huius, in hunc modũ. Sumantur æqualium quantitatum æquè multiplices, & erunt hæ, ex communi quadam noticia, inter ſe æquales. Sumatur & ipſius quantitatis tertię aliqua utcunq; multiplex, & ordinentur quantitates, ut ſcilicet æqualium una, prima: alia, tertia: alia deinde, ubi plures eſſent, quinta: ac cæteræ deinceps prout naturalis imparium numerorum ordo requirit, uocentur. Illa tertia uerò, ut quæ æqualium omnium eſt communis conſequens, à paribus numeris, ſecundæ, quartæ & ſextæ, &cæ. nomen habeat. Et quoniam, quantum ad priorem partem, primæ & tertiæ, ac cæterarum, quarum impar eſt appellatio, quantitatum, æquè aſſignatæ multiplices, ſecundæ & quartæ, ac reliquarum deinde, ut quæ à pari numero nominantur, quantitatum æquè multiplices ęqualiter excedunt, uel eis omnino æquales, uel minores iiſ ſunt: infertur, ex definitione 5 huius, ipſas quantitates, primam nimirum ad ſecundã, & tertiam ad quartam, ac reliquas deinde omnes, quamlibet ad ſuam, in eadem eſſe ratione: quare ſic patet pars prior. Poſterior uerò. Manentibus iiſdem quantitatibus, alio tamen ordine diſpoſitis, ita nimirum, ut quæ in priori ſecundæ & quartæ quantitatis nomen habuit, iam primæ & tertiæ appellationem ſortiatur. Prima uerò quæ prius, ſecunda nunc: & ſecunda deinde, quarta iam uocetur. Sicq; per eandem definitionem quintam: & poſterior huius propoſitionis pars obtinebitur, primam ſcilicet, hoc eſt illam, quæ iam eſt communis æqualium omnium antecedens, ad ſecun-



dam,

dam, unam ex æqualibus, eſſe, ut eadem prima ad æquales omnes. Aequales igitur ad eandem, eandem habent rationem, &c. quod demonſtrari oportuit.

Multiplices				Multiplices				
30	12	6						6
30	12	6	ad 5	15	30	uel contrà	5 ad	6
30	12	6						6
		quanti. æquales.						quanti. æquales.

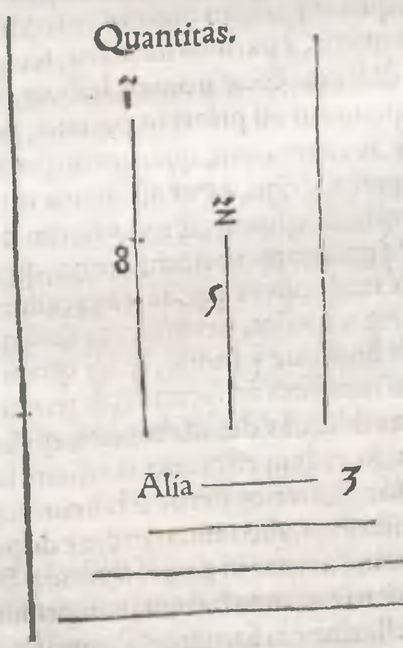
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η.

Τῶν ἀνίσων μεγεθῶν, τὸ μεῖζον πρὸς τὸ αὐτὸ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἔλαττον. Καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ ἔλαττον, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὸ μεῖζον.

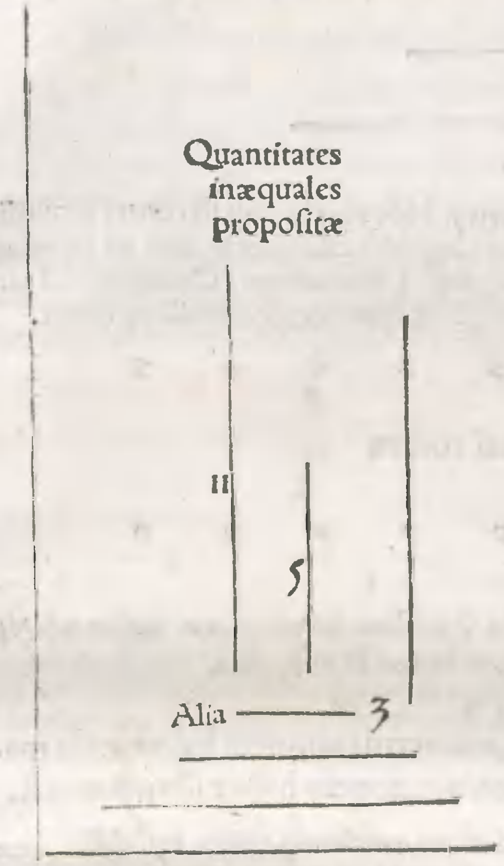
PROPOSITIO VIII.

Inæqualium quantitatum, maior ad eandem, maiorem rationem habet, quàm minor. Et eadem ad minorem, maiorem habet rationem, quàm ad maiorem.

Sint quantitates quotcunque, in præſentia autem, pro faciliori exemplo, duæ ſufficiant, & eſto quòd ex æquo ad unam & eandem quantitatem conferantur: dico igitur, quòd maior inæqualiū: maiorem, minor uerò ad eandem: minorem, & contra, hæc eadem ad minorem inæqualium, maiorem, quàm ad maiorem, habeat rationem. Sumatur ex inæqualium maiori portio, quæ ſit minori æqualis: & erit altera quæ relinquitur portio, breuiori ſignatę aut æqualis, aut inæqualis. Si inæqualis, utra breuior fuerit, illius multiplex, quæ communi omnium conſequente maior ſit, accipiatur, quàm multiplex deinde hæc eadem ſumpta quantitas ſuæ inferioris fuerit, tam multiplex eſto etiam quantitas alia portionis in maiori maioris, alia inſuper ipſius minoris quantitatis. His multiplicib. tali ordine ſumptis, ipſius tandem omnium conſequentis dupla, tripla, atque deinde quadrupla quantitas accipienda eſt, ac deinceps iuſta ſerie ad multiplices quātitates alias tamdiu progrediendum, donec ipſa, quæ minoris quantitatis multiplice maior ſit, occurrat. Sit autem, pro operatione faciliori, conſequentis quadrupla, primò ipſa minoris quantitatis multiplice maior: quę igitur dictæ conſequentis tripla quantitas fuerit, hæc eadem minoris multiplice primò minor erit: quare contrà, minoris multiplex eadem conſequentis tripla quantitate maior. Et quoniam quantitatum, reliquæ ſcilicet in maiori, & minori in ea æquali poſitæ, æquè ſunt aſſignatæ multiplices, cum quàm multiplex ſit una unius, tam multiplices etiam, ex propoſitione prima huius, omnes omnium ſint: maioris quantitatis & breuioris in ea portionis æquè multiplices erunt. Sed cum ut breuioris portionis ita etiam, ex ſtructura minoris quantitatis multiplex ſumpta ſit: minoris & maioris quantitatum



tum æquè multiplices erunt, quod eſt obſeruandū. Rurſus quoniam quantitatum, poſitæ ſcilicet in maiori minori æqualis, & ipſius minoris, æquè ſunt, ex ſtructura aſſignatæ multiplices: ſequitur, ut quemadmodū quantitates, ita & ipſarum æquè multiplices inter ſe æquales ſint: atque inſuper, ſicut una, multiplex ſcilicet minoris, quàm conſequentis tripla quantitas, ex ſtructura, maior eſt, ita & altera, multiplex ſcilicet poſitæ in maiori quantitati minori æqualis, propter æqualitatem, eadem conſequentis tripla maior erit. Maior autem eſt, ſimiliter ex ſtructura, breuioris in maiori quantitate portionis multiplex ipſa conſequente: tota igitur totius maioris quātitatis multiplex, ſimul utriſque, conſequente ſcilicet & tripla eius, maior erit: quare etiam & eadem totius maioris multiplex, propter æqualitatem, conſequentis quadrupla maior erit: unde ſic ipſum etiam excedit. Sed quoniam multiplex minoris conſequentis quadruplam non excedit, ut patet ex ſtructura: maior igitur maiorem ad communem omnium conſequentē, quàm ipſa minor quātitas ad eandē, ex definitione 7 huius, ratione habebit. Atque hæc eſt prior huius propoſitionis pars. Porrò mox deinde, cō ſequentibus loco antecedentiū, & antecedentibus loco conſequentiū ſumptis, per eandem allegatam 7 definitionem, conſequentis ad minorem, rationem maiorem, quàm ad maiorem quantitatem habebit. Eſto uerò nunc altera, quæ relinquitur, portio, breuiori ſignatæ æqualis, quia quantitates uel portiones in maiori æquales ſunt, tum utriuſuis portionis multiplex, quæ communi omnium conſequente maior ſit, quantitas ſumenda eſt. nam ſtructura deinde & demonſtratione ipſa, ut in priori, inſtituta, res ſucceſſum habebit. Si igitur inæqualium quantitatum ad unam & eandem collatio facta fuerit: maior maioris, quàm minoris quantitatis ad eam ratio erit. Contra uerò, eiuſdē ad minorem maior, quàm ad maiorem quantitatem ratio. quod demonſtraſſe oportuit.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ.

Τὰ πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. Καὶ πρὸς ἃ τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, κἀκεῖνα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

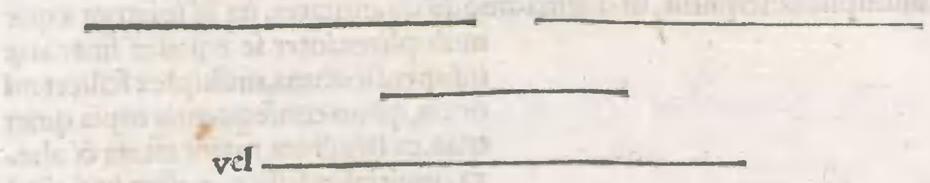
PROPOSITIO IX.

Quæ ad idem eandem habent rationem: æqualia inter ſe ſunt. Et ad quæ idem eandem rationem habet: & illa æqualia inter ſe ſunt.

Habeant quotcunque quantitates ad unā eandemque eandem rationem. Aut contrà, eſto quòd unius eiuſdemque ad quotcunque ſit una & eadem ratio: dico, utrum poſitum fuerit, illas quantitates inter ſe æquales eſſe. Hoc autem demonſtratione ad incommodum ducente, ex propoſitione octaua præcedenti, ſic patet. Niſi enim

eſſent

essent æquales quantitates illæ: sequeretur, per partem præcedentis priorem, illas ad unam & eandem: hæc deinde eadem, per partem eiusdem propositionis poste-



riorem, ad illas, diuersas constituere rationes. Hoc autem cum sit contra propositionis nostræ hypothesim, illas quantitates æquales esse inter se, tam ad priorem quam etiam ad posteriorē partem, ex hac prop. 8 obtinebitur. Quæ igitur ad eandem, eandem habent rationem quantitates, &c̄e. quod demonstrasse oportuit.

7 7 7 Item 9 9 9 9 9
ad ad
uel con. 5 uel contra 13
ad ad
7 7 7 9 9 9 9 9

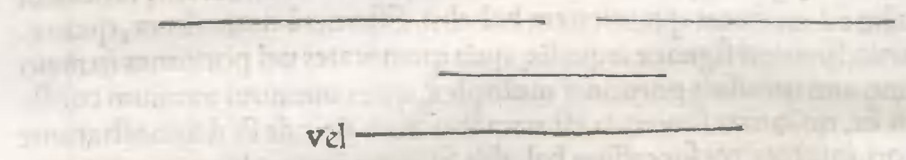
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι.

Τῶν πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἐχόντων, τὸ τὸν μείζονα λόγον ἔχον· ἐκεῖνο μεῖζόν ἐστι. Πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει· ἐκεῖνο ἔλαττόν ἐστι.

PROPOSITIO X.

Ad eandem rationem habentium, maiorem rationem habens: illa maior est. Ad quam autem eadem maiorem rationem habet: illa minor est.

Conferantur quotcunq; quantitates ad unam eandemq;: dico, quòd illa, quæ ex his maiorem ad communem earum consequentem habuerit rationem, maior sit: dico etiam, ad quam ipsa consequens quantitas maiorem rationem habuerit,



eam contrà minorem esse. Nam si maiorem habens rationem, ad aliam non reputetur esse maior, erit illa alij aut æqualis, aut alia minor. Si æqualis, cum æqualium ad idem, ex priore parte propositionis septimæ huius, eadem sit ratio, harū uerò quantitatum, ex hypothesi, ratio diuersa, cōtra nostram illam hypothesim agetur, quod non permittitur. Esto autem nunc, quòd maiorem rationem habens ad aliam, minor sit, &c. Et quoniam, per priorem partem propositionis 8 huius, Inæqualium quantitatum maior ad eandem, maiorem rationem habet, quàm minor, erit id contra propositionis hypothesim. Constat itaq; propositionis prior pars. Posterior eodem modo, ex posterioribus allegatarum propositionum partibus, retinebitur. Ad eandem igitur, &c. quod demonstrasse oportuit.

Exemplum in numeris.

Antecedentes 7 6 4 9
Consequens 5 uel 9
una & eadem quantitas.

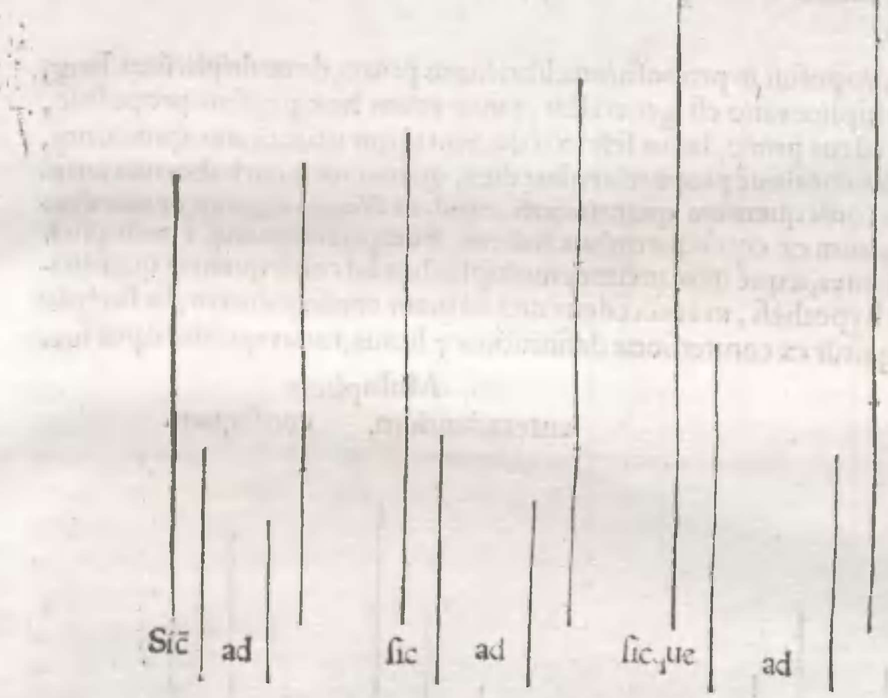
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ.

Οἱ τῷ αὐτῷ λόγοι οἱ αὐτοὶ· καὶ ἀλλήλοις εἰσὶν οἱ αὐτοί.

PROPOSITIO XI.

Quæ eidem sunt eædem rationes: & inter se sunt eædem.

Quæ in primo libro, inter communes notitias, autor de quantitatibus in genere his uerbis, Quæ uni sunt æqualia, &c. proposuit, in eodem etiam libro idem, per propositionem 30, in lineis æquedistantibus, uerum esse demonstrauit, id quoq; iam in ipsis rationibus similiter sese habere, proponit, & hoc quidem per definitionis quintæ huius conuersionem atq; ipsam quintam, hac structura. Sint rationes, exempli gratia, duæ qualescunq;, alij tertiæ cuidam similes & eædem: dico, eas inter se similes easdemq; esse. Sumantur antecedentium quantitatū æquè multiplices, similiter & cōsequentium. Et quoniam utraq; duarum rationum, quæ sunt ter-



tiæ similes, antecedens quantitas, est ad suam consequentē, ex hypothesi, ut antecedens tertiæ rationis ad suam cōsequentem, & rursus, quoniam tam antecedentium quàm etiam consequentium, ex structura, æquè sunt assignatæ multiplices: sequitur per conuersionem definitionis quintæ huius, bis repetitam (sunt enim duæ rationi uni similes positæ) multiplices antecedentium, hoc est primæ & tertiæ quantitatum, in addendo, minuendo, uel æqualitate, respectu suarum consequentium æqualiter sese habere. Quemadmodum igitur se habet multiplex antecedentis in tertia ratione, ad multiplicem suæ consequentis: ita etiam sese habebunt multiplices antecedentium reliquarum duarum rationum, ad su rum consequentium multiplices. Cum res igitur ita sese habeat: per hanc ipsam qu ntam defin tionem huius concluditur propositum, illas scilicet duas ra tiones inter se similes esse & easdem. Quæ igitur eidem sunt eædem rationes, & inter se sunt eædem. quod demonstrasse oportuit.

Exemplum in numeris.

	6		12	18	24
Sint rationi	3 ad 2	eædem, rationes	6 ad 4	9 ad 6 &	12 ad 8
	4		8	12	16
	6		12	18	24
	8		16	24	32

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ.

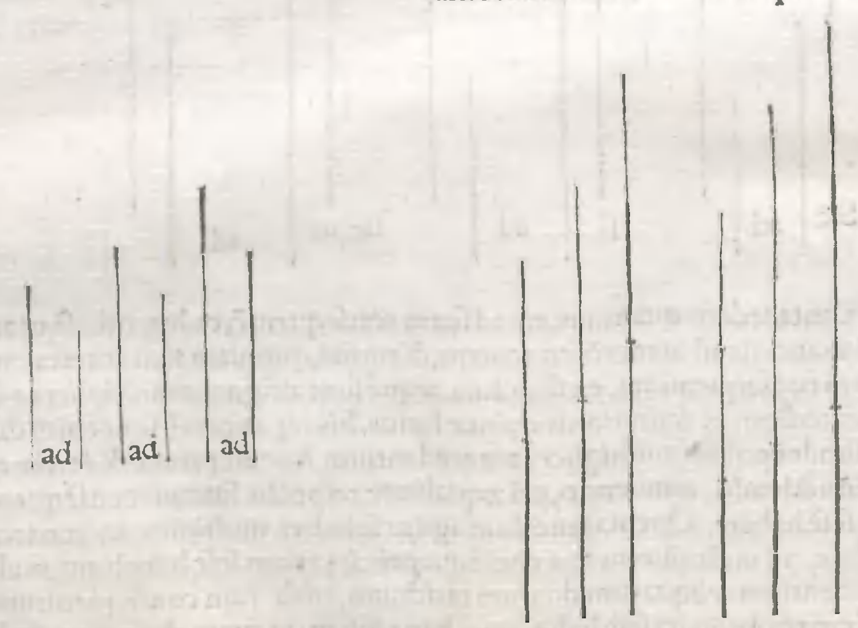
Ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ἀνάλογον· ἔσται ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα.

PROPOSITIO XII.

Si fuerint quotcunque quantitates proportionales: erit, ſicut una antecedentium ad unam conſequentium, ſic omnes antecedentes ad omnes conſequentes.

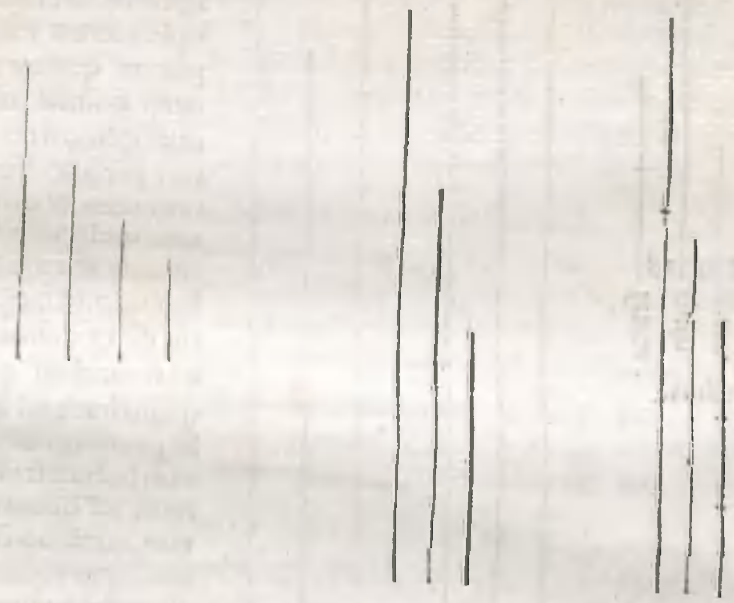
Simile autor propoſuit in propoſitione libri huius prima, de multiplicibus. Itaque quanto ipſa multiplice ratio eſt generalior, tanto etiam hæc præſens propoſitio, quàm ipſa præcedens prima, latius ſeſe extẽdit. Sint igitur quantitates quotcunque, continuè uel non continuè proportionales: dico, quam rationem habet una antecedens ad ſuam conſequentem quantitatem, eandem & aggregatum antecedentium ad aggregatum ex conſequentibus habere. Sumptis enim æquè multiplicibus ad antecedentes, æquè item utcunque multiplicibus ad conſequentes quantitates, cum ſit, ex hypotheſi, ut antecedens una ad ſuam conſequentem, ſic ſingulæ ad ſingulas: ſequitur ex conuerſione definitionis 5 huius, toties quoties opus fuerit eam repetendo, ut ſicut unius antecedentis multiplex à ſuæ conſequentis multiplice deſecerit, uel ei æqualis ſit: ſiue uerò eandem excesserit, ſic & ſingulæ antecedentium ad conſequentium ſingulas multiplices ſeſe habere. Igitur ſi primæ quantitatis

Multiplices
antecedentium. conſequen.



titatis multiplex à ſuæ conſequentis multiplice deſecerit, aut ei æqualis ſit, uel eandem excesserit: ſequitur, ut antecedentium multiplices ſingulæ, eodem modo ſuarum conſequentium multiplices reſpiciant. Quare, ſicut una ſuæ inferioris eſt multiplex, ita omnes omnium. Per primam igitur propoſitionem huius, bis repetitam, quàm multiplex eſt una unius, tam multiplex etiam aggregatum antecedentium, ad cõſequentium aggregatum erit. Ordinentur ergo iam quantitates, ſic, ut unius rationis antecedens ſit prima: ſua deinde conſequens, ſecunda: aggregatum uerò antecedentium, tertia, & conſequentium poſtea aggregatum, quantitas quarta. Et quia quantitatum, primæ & tertiæ, æquè ſunt aſſignatæ multiplices, ſecundæ inſuper & quartæ ſimiliter: infertur, ex definitione quinta, tandem id quod maximè uolebat propoſitio. Si fuerint igitur quotcunque quantitates proportionales: erit ſicut una antecedentium ad unam conſequentium, ſic omnes antecedentes ad omnes conſequentes. quod demonſtraſſe oportuit.

Exemplum rationis ſeſquialteræ, continuæ, in quantitatibus quatuor



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ.

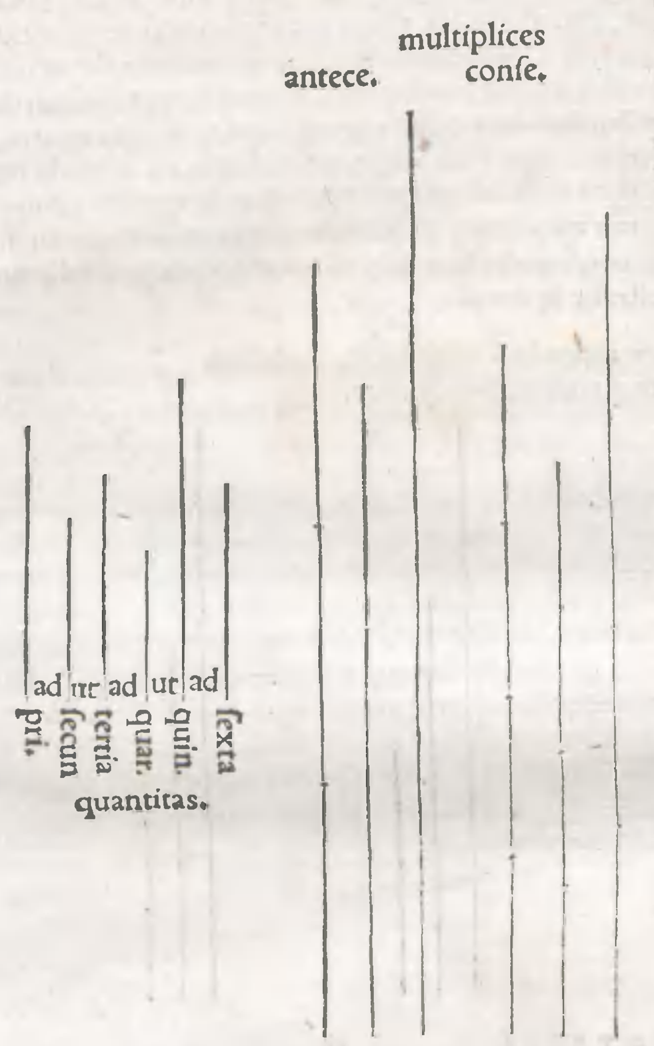
Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τρίτον δὲ πρὸς τέταρτον μείζονα λόγον ἔχῃ ἢ πέμπτον πρὸς ἕκτον· καὶ πρῶτον πρὸς δεύτερον μείζονα λόγον ἕξει ἢ πέμπτον πρὸς ἕκτον.

PROPOSITIO XIII.

Si prima ad ſecundam eam habuerit rationem quam tertia ad quantitatem quartam, tertia uerò ad quartam maiorem rationẽ habuerit quàm quinta ad ſextam: & prima ad ſecundam maiorem rationẽ habebit quàm quinta ad ſextam.

Sint ſex quantitates, & eſto quòd primæ ad ſecundam & tertiæ ad quartam ſit una & eadem ratio, quam uerò tertia ad quartã habet rationem, ea ſit ratione quintæ ad ſextam maior: dico igitur, quod & primæ ad ſecundam maior quàm quintæ ad ſextam ſit ratio. Quoniam enim tertię ad quartam maior eſt ratio, ex hypotheſi, quàm quintæ ad ſextam, ſumantur ipſarum tertiæ & quintæ æquè multiplices, quartæ deinde & ſextæ ſimiliter, ſic tamen, quòd multiplex tertiæ excedat multiplicem

cem quartæ, non autem excedat multiplex quintæ ipsius sextæ quantitatis multiplicem. Sumantur etiã ipsarum primę & secundę secundum multiplicitatem tertię & quartæ æquę multiplices. Et quoniam prima quantitas est ad secundam, sicut tertia ad quartam, primæ uerò & tertiæ, ut antedẽtibus, secundæ insuper & quartæ, ut consequentib. æquę sunt ex structura, assignatæ multiplices: primæ igitur & tertiæ multiplices, ad multiplices secundæ & quartæ quantitatum, ex conuersione definitionis 5 huius, in minuendo, æqualitate, & addendo æqualiter sese habebunt. Cũ igitur, & id ex structura, multiplex tertiæ excedat multiplicem quartæ, multiplex uerò quintæ non excedit multiplicem sextæ quantitatis: propter similitudinem rationum, & primæ quantitatis multiplex, ad secundæ quantitatis multiplicem cõferendo, id faciet: maior igitur est ex definitiõe 7 huius, ad secundam, quàm quintæ quantitatis ad sextam ratio. Si prima igitur ad secũdam eam habuerit rationẽ quam tertia ad quantitatem quartam, tertia uerò ad quartam maiorem rationem habuerit quàm quinta ad sextam: & prima ad secundam maiorem rationem habebit quàm quinta ad sextam. quod demonstrasse oportuit.



Exemplum in numeris sic ponitur.

18		16		9		8		12		12	
					maior				minor ratio		
6	ad	4	ut	3	ad	2		4	ad	3	
pri.		secun.		ter.		quar.		quin.		sex.	numerus

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ.

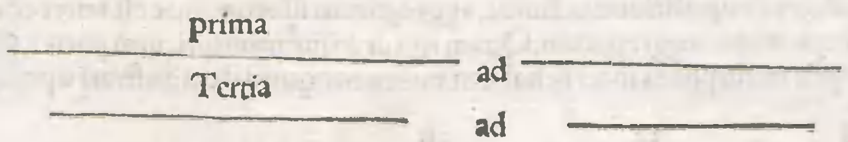
Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τὸ δὲ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ· καὶ τὸ δεύτερον τοῦ τετάρτου μεῖζον ἔσαι, κἂν ἴσον· ἴσον, κἂν ἔλασσον· ἔλασσον.

PROPOSITIO XIIII.

Si prima ad secundam eam habuerit rationem, quam tertia ad quartam, prima uerò ipsa tertia maior fuerit: & secunda quarta maior erit, quòd si æqualis: æqualis, si uerò minor: minor.

Sint

Sint quatuor quantitates, prima ad secundam ut tertia ad quartam: dico, quemadmodum prima maior est quàm tertia, uel ei æqualis, siue minor ea, ita & secunda erit respectu quantitatis quartę. Cum enim, ex hypothesi, prima maior sit quàm tertia: sequitur ex priore parte propositionis octauæ huius, quòd prima maiorem quàm tertia ad secundam quantitatem, habeat rationem. Quoniam autem, quem-



admodum prima est ad secundam, ita est & tertia, ex hypothesi, ad quartam: propter illam rationum similitudinem, & tertiæ ad quartam maior quàm eiusdem tertiæ ad secundam ratio erit. Ad quam autem una & eadem quantitas maiorem habet rationem, illa, ut posterior pars propositionis 10 huius testatur, minor esse censetur: minor igitur est quarta ipsa secunda, quare contrà secunda quàm quarta maior, quod demonstrasse oportuit. Ὁμοίως δὴ δείξομεν. Similiter etiam ostendemus, quòd secunda quartæ æqualis, uel ea minor sit, prout quidem prima respectu tertię posita fuerit. Si prima igitur ad secundam eam habuerit rationem quam tertia ad quartam, prima uerò ipsa tertia maior fuerit: & secunda quarta maior erit, quòd si æqualis, æqualis, si uerò minor: minor. quod demonstrasse oportuit.

Exemplum in numeris sic se habet.

	15	ad	9	ut	5	ad	3	
Vel	27		18		12		8	

Quantitas		ratio			ratio		quan.
prima 27	ad secun. 18	maior	mutatis nunc terminis uel	12 ad 8	ma.	quare	minor
tertia 12		minor	quantitat.	12 ad 18	mi.		maior.

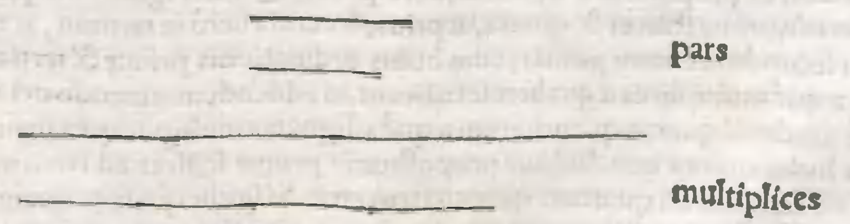
ΠΡΟΤΑΣΙΣ. ΙΕ.

Τὰ μόρια τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ληφθέντα κατάλληλα.

PROPOSITIO XV.

Partes eodem modo multiplicium, eandem habent rationem, ad se sumptæ.

Sint duæ uel plures quantitates, quarum unaquæque sit alterius cuiusdam quantitatis, tanquam suæ multiplicis, pars: esto tamen, ut quota pars est una unius, tota sint etiam singulæ singularum: dico ergo, quòd quam ipsæ partes, illam eandem & multiplices inter se rationem habeant. Distribuantur multiplicium unaquæque in portiones suæ inferiori uel parti æquales. Et quoniam æquę sunt parti-



 bus,

bus, ex hypothesi, aſsignatæ multiplices: erunt in una tot portiones ſuæ parti æquales, quot & in altera. Rurſus quoniam portiones cuiuſque multiplicis inter ſe ſunt æquales: erit ſingularum portionum ad portiones ſingulas, una & eadem ratio, & illa quidem, quæ eſt partis ad partem. Quare, ſicut eſt una unius multiplicis portio, uel æqualibus pro ęqualibus ſumptis, ſicut eſt una pars ad portionem alterius, uel partem, ſic, ex propoſitione 12 huius, aggregatum illorum, hoc eſt antecedentium, ad conſequentium aggregatum. Quam igitur æquè multiplicium partes, illam eandem & ipſæ multiplices inter ſe habent rationem. quod demonſtrari oportuit.

28 12 28

7 7 7 7 3 3 3 3 7 7 7 7 quare ſicut 7 ad 3, ſic 24 ad 12

7 3 3 3 3 3

12

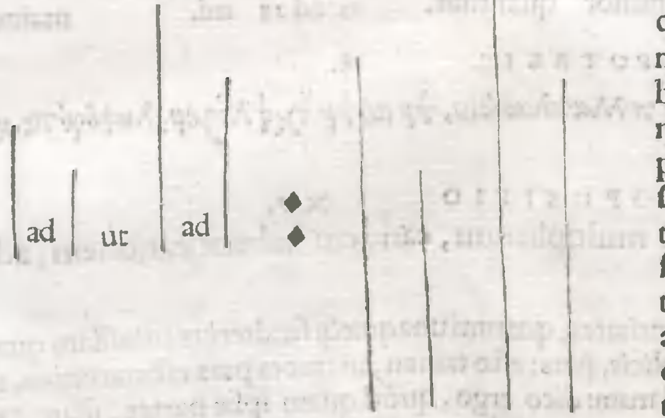
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ιϛ.

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ· καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσται.

PROPOSITIO XVI.

Si quatuor quantitates proportionales fuerint: & permutatim hæ proportionales erunt.

Sint quatuor quantitates in ratione una: dico, quòd & permutatim, uel permutata ratione, hoc eſt, prima ad tertiam & ſecunda ad quartam, in una ratione ſint. Sumantur primæ & ſecundæ quantitatum æquè multiplices, atq; inſuper tertiæ & quartę: & erunt hæ, ex præmiſſa, bis uſurpata, in ea qua ſunt ipſæ partes ratione: atque deinde, ex propoſitione 11 huius ſimili ratione bis pro ſimili ſumpta, in una etiam & eadem ratione, prima ſcilicet multiplex ad ſecundam, & tertia ad multiplicem quartam. Sed cum fuerint quatuor quantitates proportionales, prima ad ſecundam ut tertia ad quartam, prima uerò ipſa tertia maior, uel ei æqualis, uel minor ea ſit, & ſecunda quartam, ex propoſitione 14 huius, ſic reſpiciet.



Quatuor igitur iam quantitatibus ordinatis, prima ſcilicet & quarta, ut prius, ſecunda uerò in tertium, ac tertia deinde in ſecundum locum poſitis, cum huius ordinationis primæ & tertiæ quantitatum æquè multiplices æqualiter ſe habeant, in addendo, minuendo uel æqualitate, ad ſecundæ & quartæ quantitatum æquè aſsignatas multiplices, ex definitione tandem huius quinta concluditur propoſitum: primæ ſcilicet ad tertiam eam eſſe, quę eſt ſecundæ ad quartam quantitatem ratio. Si igitur quatuor quantitates proportionales fuerint: & permutatim hæ proportionales erunt. quod demonſtraſſe oportuit.

Exemplum

Exemplum in numeris.

21 9 56 24 21 9

7 ad 3 ut 28 ad 12 pri. 7 ter. 3

ſe. 28 quar. 12

56 24

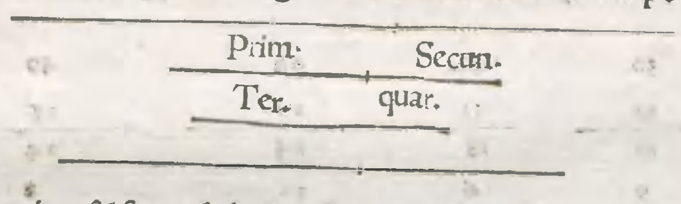
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ.

Ἐὰν συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ· καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται.

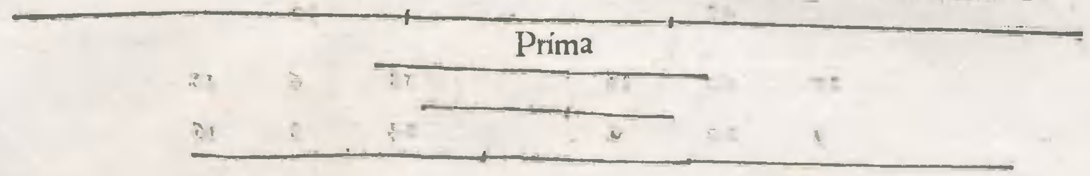
PROPOSITIO XVII.

Si compoſitæ quantitates proportionales fuerint: & diuiſæ hæ proportionales erunt.

Sint quatuor quantitates, atq; eſto, quòd hæ, compoſitæ, hoc eſt prima cum ſecunda ad ſecundam, & tertia cum quarta ad quartam, in una & eadem ratione ſint: dico igitur, & diuiſim, uel diuiſionis ratione, quod idem eſt, illas quantitates in una & eadem ratione eſſe. Colligitur huius rei demonſtratio potiſsimum ex pro



poſitionibus prima & ſecunda huius. Sumptis enim quatuor quantitatum, primæ ſcilicet, ſecundæ, tertiæ & quartæ æquè multiplicibus: erit, ratione primæ & ſecundæ quantitatum, ut quàm multiplex eſt una unius, tam multiplices etiam ſint, per propoſitionem primam huius, omnes omnium, atq; deinde hoc idem, per eandem etiam propoſitionem, ratione quantitatum tertiæ & quartæ locum habet, ac tandem, cum ex hypotheſi, æquè ſint quatuor quantitatum aſsignatæ multiplices, commutatione facta primæ & ſecundæ, ut unius, tertiæ item & quartæ, & harum ut unius quantitatis æquè multiplices erunt, quòd eſt notandum. Sumantur rurſus ſecundæ & quartæ, utcunque aliæ æquè multiplices, cum prius etiam ipſarum ſecundæ & quartæ quantitatum æquè multiplices aſsignatæ ſint, modò



ſumptæ ipſis prioribus multiplicibus iunctæ, earundem ſecundæ & quartæ quantitatum, ex propoſitione 2 huius, æquè multiplices erunt. Quoniam autem quantitates, prima cum ſecunda, ſecunda, tertia cum quarta, & ipſa quarta, ex hypotheſi proportionales ſunt, primæ uerò & tertiæ, atq; ſecundæ & quartæ quantitatum æquè multiplices aſsignatæ: primæ & tertiæ quantitatum multiplices, ipſas ſecundæ & quartæ quantitatum multiplices, ex conuerſione definitionis quintæ huius in minuendo, æqualitate uel addendo æqualiter reſpiciunt. Quare ſi multiplex primæ, hoc eſt ex prima & ſecunda compoſitæ, à multiplice ſecundæ quantitatis defecerit, ei æqualis fuerit, uel hanc eandem exceſſerit: & multiplex tertiæ, quæ ſcilicet ex tertia & quarta compoſita eſt, ad multiplicem quartæ conferendo, ſic ſe habebit, ac portionibus deinde illis, quas ex utraq; parte communes habent, ablatis atq; neglectis, cum de reſiduis multiplicibus, ex communi quadam noticia, quòd hæ

 etiam

etiam ad ſuas inferiores ſic ſeſe habeant, nullum dubium ſit: ex definitione tandem 5 huius, id quod maxime uolebamus concluditur, primę ſcilicet ad ſecundam eſſe, ut eſt tertiæ ad quartam quantitatem ratio. Si compoſitæ igitur quantitates proportionales fuerint: & diuiſę hę proportionales erūt, quod demonſtraſſe oportuit.

Exemplum in numeris.

30 40
18 12 24 16
9 6 12 8
15 20

30 30
18 40 12 12 6 18
9 20 6 16 8 24
15 40

30	30	40	40
12	12	16	16
18	18	24	24
9	6	12	8

Idem exemplum, alijs multiplicibus expoſitum.

45 60
27 18 36 24
9 6 12 8
12 16
15 20

45 30
27 60 18 18 6 12
9 20 6 24 8 16
15 40

45	30	60	40
18	18	24	24
27	12	36	16
9	6	12	8

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΗ.

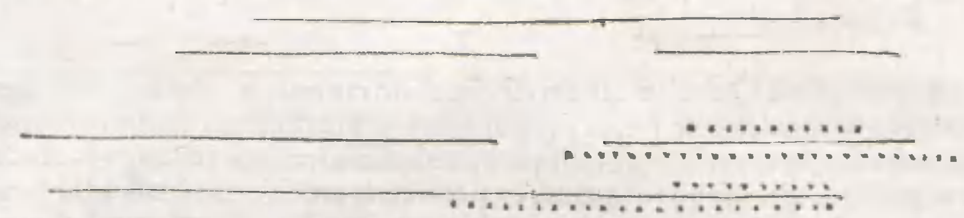
Ἐὰν διῃρημένα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ· καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσται.

PROPOSITIO XVIII.

Si diuiſæ quantitates proportionales fuerint: & compoſitæ hæ proportionales erunt.

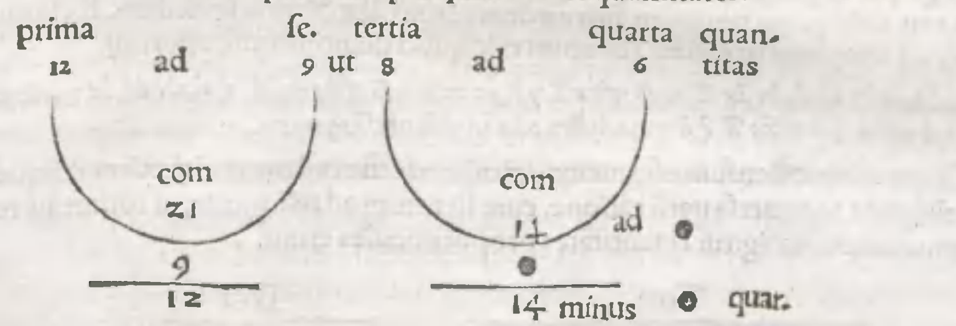
Sint

Sint quatuor quantitates diſiunctæ proportionales, prima ad ſecundam, & tertia ad quartam: dico igitur, & compoſitionis ratione eas proportionales eſſe. Nam ſi non, ſumatur loco quartæ quantitas alia, ad quam nimirum ſe habeat tertia cum quarta, ſicut prima cum ſecunda ad ſecundam. Et quoniam hæc ſumpta, quantitati quartæ minime æqualis eſſe poteſt (nam ſi æqualis eſſet, retineretur illa: atq; ſtatim pateret propoſitū) erit aut minor illa, aut maior. Vtrum nunc horum ponitur, con-



trarium ſemper infertur, ſumptam ſcilicet, maiorem eſſe ipſa quarta, ubi poſita fuerit minor, uel contra, eandem ſumptam, ipſa quarta maiorem poſitam, hac eadem minorem eſſe, hoc modo. Quoniam enim compoſita ex prima & ſecūda ad ſecundam, in ea eſt ratione, ex ſtructura, in qua eſt altera ex tertia & quarta compoſita quantitas, ad ipſam ſumptam, cum ſit σύνθεσις λόγου, ipſæ eædem, ſi ſeparatæ à ſeſe fuerint, per præmiſſam 17 proportionales erunt, prima ſcilicet ad ſecundam, ut tertia cum defectu uel exceſſu quantitatis ſumptæ reſpectu quartæ, ad quantitatem ſumptam. Sed quia ſic etiam eſt ex hypotheſi, tertia ad quantitatem quartam, cum quæ eidem ſunt eædem rationes, per 11 huius, inter ſe etiam eædem ſint: per primam tandem partem propoſitionis 14 huius quantitatem ſumptam ipſa quarta maiorem eſſe infertur, cum tamen ſit minor ea poſita. Vel, per tertiam partem eiuſdem 14, minor, cum ſit poſita maior. Quorum ſanè utrunq; cum nullo modo eſſe poſſit, quod nimirum una & eadem quantitas iam ſit alia quadam minor, atq; mox deinde etiam maior, uel contrà, concluditur uerum eſſe propoſitum. Si diuiſæ igitur quantitates proportionales fuerint: & compoſitæ hæ proportionales erunt, quod demonſtraſſe oportuit.

Sint pro exemplo quatuor hæ quantitates.



pri. ſe. ter. quarta quantitas
8 ad 6 ut 14 minus ad

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΘ.

Ἐὰν ᾖ ὡς ὅλον πρὸς ὅλον, οὕτως ἀφαιρεθὲν πρὸς ἀφαιρεθέν· καὶ τὸ λοιπὸν πρὸς τὸ λοιπὸν ἔσται, ὡς ὅλον πρὸς ὅλον.

PROPOSITIO XIX.

Si fuerit ſicut totum ad totum, ſic ablatum ad ablatum: & reliquum ad reliquum, ut totum ad totum erit.

Sint

Sint duæ quantitates, portio etiam aliqua ab utraq; quantitate ablata sic, ut ablatæ portiones eam inter se quam ipsæ totæ habeant rationem: dico, quòd & reliquę eandem cum totis rationem habeant. Cum enim, ex hypothesi, tota sit ad quantitatem totam, ut portio ablata ad ablatam: ex permutata ratione, tota ad ablatam, ut

To.

Ablata

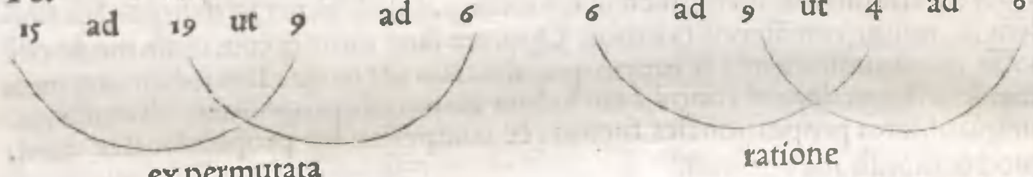
Reliqua

tota ad ablatam erit. Quoniam autem est cõpositio rationis, quantitates uerò compositæ proportionales, cum hæ, ex propositione 17 præcedenti, diuisæ etiam proportionales sint, hoc considerato: reliqua ad ablatam in ratione reliquę ad ablatam erit: atq; reliqua deinde ad reliquam, ex permutata ratione, ut ablata ad ablatam erit. Quia uerò ut ablata ad quantitatem ablatam, ita etiam est, ex hypothesi, tota quantitas ad totam: reliqua igitur quantitas ad reliquam, ex propositione 11 huius ut tota ad totam erit. Si fuerit igitur sicut totum ad totum sic ablatum ad ablatum: & reliquum ad reliquum, ut totum ad totum erit. quod demonstrasse oportuit.

Exemplum huius in numeris.

Totum 15		totum 10	est ex hypothesi	
ut ablatum 9	ad	abla. 6,	Igitur	
& reliqua 6		reli. 4	ut	
		totum ad totum erit.		

To. 15 ad to. 19 ut Ab. 9 ad ab. 6 Re. 6 ad ab. 9 ut Re. 4 ad ab. 6



ex permutata ratione

Ergo per 11 propositionem huius, cum duę rationes, totorum scilicet & reliquo rum, uni, ablatorum nimirum, sint eædem: erunt illæ & inter se eædem. Reliquum igitur ad reliquum ut totum ad totum erit. quod demonstrasse oportuit.

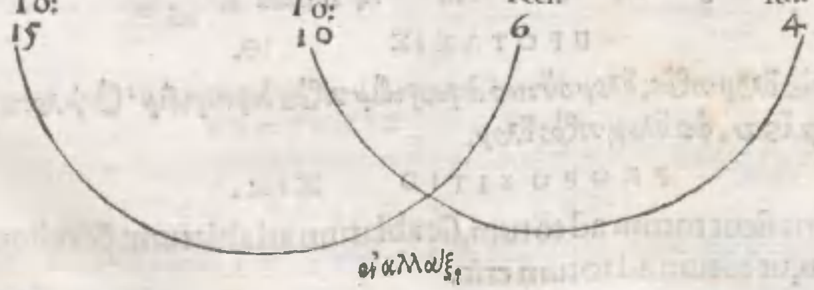
Καὶ ἐπεὶ δὴ ἐδείχθη, ὡς τὸ α β πρὸς τὸ γ δ, οὕτως τὸ ε β πρὸς τὸ ζ δ. καὶ ἐναλλάξ, ὡς τὸ α β πρὸς τὸ β ε, οὕτως τὸ γ δ πρὸς τὸ ζ δ· συγκείμενα ἄρα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστιν.

Et quoniam ostensum est, quemadmodum totum ad totum, ita etiam reliquum ad reliquum: conuersa uerò ratione, cum sit totum ad reliquum, ut totum ad reliquum: compositæ igitur quantitates proportionales erunt.

Tota — Tota

reliqua — reli.

To: 15 To: 10 Rel. 6 Rel. 4



ἐναλλάξ

Totum

Ἐδείχθη δέ, ὡς τὸ α β πρὸς τὸ α ε, οὕτως τὸ γ δ πρὸς τὸ γ ζ. εἰ γὰρ ὡς ἡγούμενον τὸ α β πρὸς τὴν ὑπεροχὴν αὐτοῦ ᾗ ὑπερέχει τοῦ ἑπομένου τοῦ ε β· καί ἐστιν ἀναστρέψαντι.

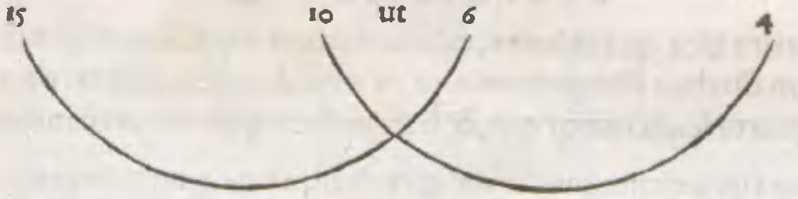
Demonstratum est autem, nimirum ex propositionis huius hypothesi & permutata ratione, sicuti totum ad ablatum, sic totum ad ablatum, cum sit ut antecedens ad id quo ipsum excedit suum consequens, ad reliquum scilicet: & rationis conuersione quantitates proportionales erunt.

Tota — Tota

ablata reliqua ablata reli.

Ex propositionis hypothesi

To. 15 To. 10 ut Abla. 6 Abla. 4



suum consequens 6 — ἐναλλάξ 4

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ· καὶ ἀναστρέψαντι ἀνάλογον ἔσται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifestum est, Si compositæ quantitates proportionales fuerint: & conuersione rationis eas proportionales esse. quod demonstrasse oportuit.

Γεγόνασι δὲ οἱ λόγοι, καὶ ἐπὶ τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων, καὶ ἐπὶ τῶν ἀναλογιῶν. Ἐπειδὴ ὅπερ ἐὰν πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τετάρτου· ἔσται, καὶ ὡς τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον, οὕτως τὸ τρίτον πρὸς τὸ τέταρτον. οὐκ ἔτι δέ, καὶ ἀντιστρέφει. Ἐὰν γὰρ ᾖ ὡς τὸ πρῶτον πρὸς δεύτερον, οὕτως τρίτον πρὸς τέταρτον, οὐ πάντως ἔσται, ἐὰν τὸ μὲν πρῶτον τοῦ δευτέρου ἰσάκις πολλαπλάσιον, τὸ δὲ τρίτον τοῦ τετάρτου, καθάπερ ἐπὶ τῶν ἡμιολίων ἢ ἐπιτρίτων λόγων ἢ τῶν τοιούτων, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Locum quoq; habent rationes in æqualiter multiplicibus. Quando enim ut primum secundi, sic tertiũ quarti fuerit multiplex: erit etiam, ut primum ad secũdum, sic tertium ad quartum, non autem conuertendo. Si enim fuerit sicut primum ad secundum, sic tertium ad quartum: non omnino erit, neq; primum secundi: neque uerò tertium quarti æquè multiplex, quemadmodum hoc in sesquialteris, sesquitertijs, atque huius generis superparticularibus alijs manifestum est. quod demonstrasse oportuit.

Exemplum prioris partis, ubi quantitates sunt multiplices, atq; sic etiam proportionales.

Vt	9	3	6	2
item	36	9	12	3
uel	16	4	8	2, &c.

Exemplum

Exemplum partis posterioris, ubi, licet quantitates sint proportionales, tamen non contrà omnino æquè multiplices.

Vt	6	4	3	2
	4	3	12	9
	5	3	15	9

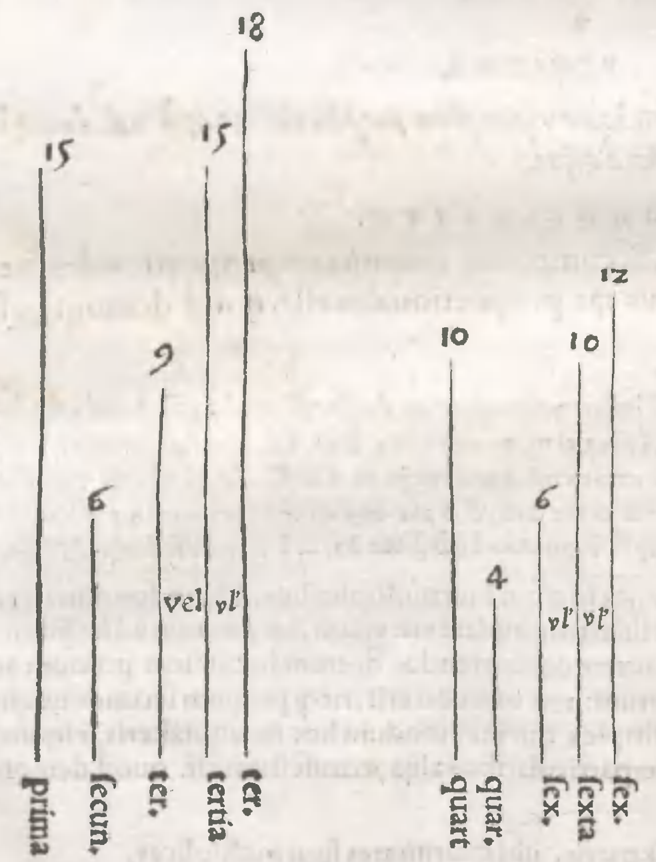
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Κ.

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, δι' ἴσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ· καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου μεῖζον ἔσται. κἂν ἴσον ἴσον· κἂν ἔλασσον ἔλασσον.

PROPOSITIO XX.

Si fuerint tres quantitates, & aliæ eiſdem æquales multitudine, in eadem cum duabus ſumptis ratione, ex æquali autē prima tertia maior fuerit: & quarta ſexta maior erit, & ſi æqualis: æqualis ſi uerò minor: minor.

Sint tres quantitates, totidem inſuper aliæ, quæ eas quas priores, eo etiam ordine, inter ſe habeant rationes: dico, ſi prima priorum maior fuerit ipſa ſua tertia, uel ei æqualis, ſiue ea minor: & primam poſteriorū ipſa ſua tertia maiorem, ei æqualem, uel minorem ea eſſe. Quoniam enim prioris ordinis prima, ex hypotheſi, maior ponitur, quàm ipſa tertia: erit illius ad mediā, ex priore parte propoſitionis octauæ, maior quàm huius ad eandem mediam ratio. Sed quia rationes in utroque ordine ſunt inter ſe ſimiles & eædem, prior ſcilicet priori, poſterior uerò ratio poſteriori: & poſterioris ordinis prima ad mediam, maiorem quàm ipſa tertia rationem habebit: quare etiā, per priorem partem decimæ, prima poſterioris, hoc eſt quarta, eadem ſua tertia, hoc eſt ſexta quātitate maior erit. Eodem modo, ſi prima quàm tertia minor fuerit, per eaſdē propoſitionum partes propoſitum inferri poterit. Quod ſi prima & tertia prioris ordinis quantitates æquales inter ſe fuerint, cū, per priorem partem ſeptimæ, una & eadem ſit harum ad mediam quantitatem ratio, propter rationum ſimilitudinem, quæ in utroq; ordine eſſe præſupponitur: & in poſteriori ordine prima ipſa tertiæ ex priori parte proportioni non æqualis erit, quod demonſtraſſe oportuit.



APPENDIX.

APPENDIX.

Eadem ratio & in hac, & proxime ſequenti propoſitione concludi poteſt, ſi quatuor aut plures etiam in uno ordine, totidem quoq; ſimilium rationum in altero quantitates poſitæ fuerint, ſi prima prioris maior ſit ſua ultima, ei æqualis uel minor ea: quòd & tum prima poſterioris ordinis, reſpectu ſuæ ultimæ, ſimiliter ſeſe habeat.

Exemplum in numeris, ubi prima eſt

	maior ulti.		ultimæ æqualis		minor ultima	
Prima	9	6	9	6	9	12
	6	4	6	4	6	8
	15	10	15	10	15	20
ultima	3	2	9	6	12	16
quant.	prior	poſter.	prior	poſt.	prior	poſterior ordo

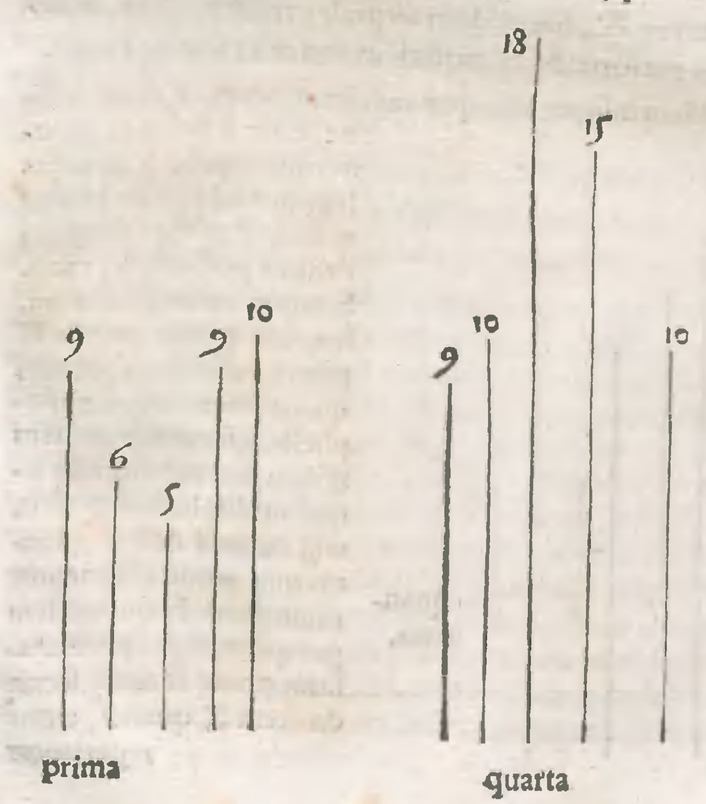
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΑ.

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾖ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, δι' ἴσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ· καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου μεῖζον ἔσται κἂν ἴσον· ἴσον, κἂν ἔλασσον· ἔλασσον.

PROPOSITIO XXI.

Si fuerint tres quantitates, & aliæ eiſdem æquales multitudine, in eadem cum duabus ſumptis ratione fuerit autem perturbata earum proportio, ex æquali autem prima ipſa tertia maior fuerit: & quarta ſexta maior erit, & ſi æqualis: æqualis, ſi uerò minor: minor.

Sint tres quantitates, totidem inſuper aliæ, quæ eas quas priores inter ſe habeāt rationes, ſit tamen perturbata earum proportio: dico, ſi prima priorū maior fuerit ipſa ſua tertia, uel ei æqualis, ſiue ea minor: & primam poſteriorum ipſa ſua tertia maiorem, ei ęqualem, uel minorem ea eſſe. Quoniam enim prioris ordinis prima, ex hypotheſi, maior ponitur quàm ipſa tertia: maiorem etiam ad ſecundā prima quàm ipſa tertia, ex priore parte propoſitionis 8 huius, habebit rationē. Quoniam autem quæ primæ ad ſecundā in priori, ea etiam eſt, ex hypotheſi, ratio ſecundę ad tertiā in ordine poſteriori: ſecūdæ igitur



 ad

ad tertiam in ordine poſteriori: ſecūdæ igitur ad tertiam ordinis poſterioris, maior quàm tertiæ ad ſecūdam in ordine priori ratio erit, unde ſic maior etiā quàm in eodem poſteriori ſecundę ad primam, eo quod eiuſdē ſecundę ad primā, ex noſtra hypotheſi & conuerſa ratione, ſit ut in priori tertiæ ad ſecundam ratio. Quare ex poſteriore parte propoſitionis decimę huius, concluditur propoſitū, primam ſcilicet in ordine poſteriori ipſa ſua tertia, hoc eſt, quartam ſexta quantitate maiorem eſſe. Simili modo, æqualitatem: & quod etiam quantitas quarta quàm ſexta minor ſit, ſi prima tertiæ æqualis uel minor ea ponatur, inferemus. Si fuerint igitur tres quantitates, & alię eiſdem æquales multitudine, in eadem cum duabus ſumptis ratione. fuerit autem perturbata earum proportio, ex æquali autem prima ipſa tertia maior fuerit: & quarta ſexta maior erit, & ſi æqualis: æqualis, ſi uerò minor: minor. quod demonſtraſſe oportuit.

Exemplum in numeris, ubi prima.

	tertia maior		tertię æqualis		minor tertia	
prima	9	24	9	16	6	16
	8	18	8	18	8	18
tertia	6	16	9	16	9	24

Aliud exemplum.

	9		16	24	12
	8			18	
9	6	12		16	

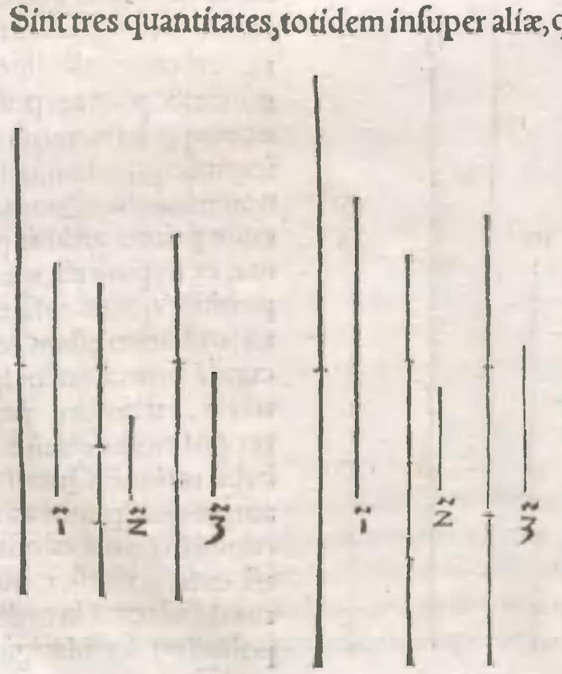
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΒ.

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται.

PROPOSITIO XXII.

Si fuerint tres quantitates, & aliæ eiſdem æquales multitudine, in eadem cum duabus ſumptis ratione: & ex æquali in eadem ratione erunt.

Sint tres quantitates, totidem inſuper aliæ, quæ eas quas priores, eo etiam ordine, inter ſe habeant rationes: dico, quòd & ex æquali primæ ad tertiam prioris ea ſit, quę primę ad tertiam ordinis poſterioris, ratio. Sumptis enim primarum, hoc eſt, primæ prioris & primæ poſterioris ordinis, quantitatum æquè multiplicibus, ſecundarum item ijſdem, ſeu utcunq; alijs æquè multiplicibus poſitis, etiā tertiarū deinde quantitatum æquè aſſignentur multiplices. Et quoniā ſemper quatuor proportionalium, primę & tertię, ſecundæ item & quartæ, æquè reperiantur



reperiantur eſſe aſſignatę multiplices: erunt igitur ex propoſitione 4 huius, toties eam, quot in utroq; ordine quantitates reperiuntur, minus tamen uno, repetendo, & ipſæ multiplices, eodem ordine ſumptæ, inter ſe proportionales. Quoniam autem tres ſunt quantitates, prioris ſcilicet ordinis multiplices, aliæ deinde ipſis ęquales numero, multiplices ſcilicet quantitatum ordinis poſterioris, cum duabus ſumptis, & in eadem ratione, cum ſicut prima prioris ſua ultima uel maior, ei æqualis, uel minor ea fuerit, ſic & primā poſterioris ſuam ultimā ex propoſitione 20 huius reſpicere oporteat: per 5 definitionem huius tandem concluditur propoſitum, primam ſcilicet prioris ordinis ad ſuam ultimam ſeſe habere, ut ſe habeat prima poſterioris ad ſuam ultimam. Si fuerint igitur tres quantitates, & aliæ eiſdē æquales multitudine, in eadem cū duabus ſumptis ratione: & ex æquali in eadem ratione erunt. quod demonſtraſſe oportuit.

APPENDIX.

Hæc propoſitio cum proximè ſequenti, quemadmodum præmiſſæ duæ, non de tribus tantum, uerumetiam de pluribus quantitatibus intelligi poteſt, ſi modò in uno tot, quot & in altero ordine, quantitates conſtituantur.

Exemplum in numeris ſit.

	27	9		27	81	
	26	13		39	78	
	35	7		21	105	
	32	8		24	96	
27	32			81		96
9	8		ut	27		24

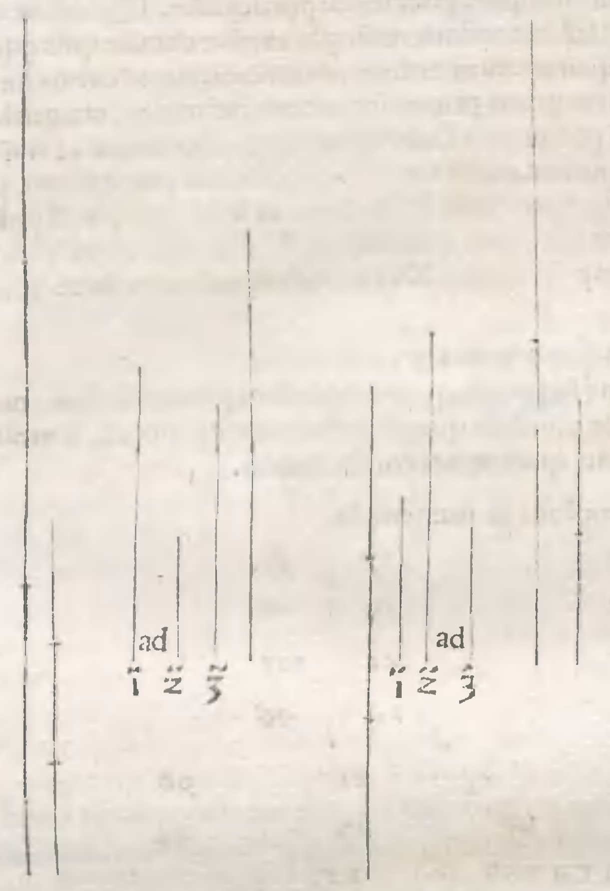
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΓ.

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾖ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία· καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται.

PROPOSITIO XXIII.

Si fuerint tres quantitates, & aliæ eiſdem æquales multitudine, in eadem cum duabus ſumptis ratione, fuerit autem perturbata earum proportio: & ex æquali in eadem ratione erunt.

Sint tres quantitates, atque totidem etiam aliæ, quæ eas quas priores, perturbato tamen ordine, inter ſe habent rationes: dico, quòd & ex æquali primæ ad tertiam prioris, ea ſit, quæ primæ ad tertiam ordinis poſterioris, ratio. Sumptis enim primæ & ſecundæ in priori, & primæ in poſteriori ordine quantitatis æquè multiplicibus, etiam reliquarum trium, tertiæ ſcilicet in priori, & ſecundę ac tertiæ in poſteriori ordine æquè multiplices aſſignentur. Et quoniam, quæ ipſarum partium ſeu ſubmultiplicium, illa eadem eſt, ex 15 huius, etiam multiplicium ratio, & quoniam etiam, quæ eidem ſunt eædem rationes, ipſæ inter ſe ſunt eædem, utraq; propoſitione bis uſurpata, ſemel quidem ratione multiplicium primæ & ſecundæ prioris, ac deinde etiam ratione multiplicium ſecundæ quantitatis & tertiæ ordinis poſterioris: quam priores inter ſe habent rationem, illam eandem & poſteriores multiplices habebunt. Simili modo, cum ſecunda prioris ad ſuam tertiam, ex hypotheſi, ſit, ut prima ad ſecundam in ordine poſteriori ac deinde, ex permutata ratione hæ nominatæ quantitates proportionales ſint: & ſecunda prioris ad primam poſterioris ut tertia illius, ad ſecundam huius, & multiplices quantitatum, ſecundę ſcilicet prioris & primæ poſterioris ordinis, per eaſdem decimam quintam & undecimam propoſitiones huius eã, quam multiplices tertiæ prioris, & ſecundę quantitatis ordinis poſterioris, habebunt rationem: atq; ex permutata deinde ratione, multiplices ſecundę & tertię prioris, ut multiplices primæ & ſecundæ quãtitatum ordinis poſterioris erunt. Oſtenſum autem eſt prius, quòd & multiplices quantitatum prioris ordinis, primæ & ſecundæ, in eadem ſint ratione, in qua ſunt multiplices ſecundę & tertiæ quantitatum ordinis poſterioris. Quoniam aũt tres ſunt quantitates, atq; totidem etiã aliæ, in eadem cum duabus ſumptis ratione, eſtq; earum perturbata ratio: quemadmodũ igitur prima maior tertia, uel ei æqualis ſiue minor ea fuerit, ita ex propoſitione 21 huius, & quarta reſpectu ipſius ſextæ erit. Quare per definitionem 5, huius concluditur tandem, ut quam in priori ordine prima ad tertiam habet rationem, illam eandem in poſteriori ordine prima ad tertiam habeat. Si fuerint igitur tres quãtitates, & aliæ eiſdem æquales multitudine, in eadem cum duabus ſumptis ratione, fuerit autem perturbata earum proportio: & ex æquali in eadem ratione erunt. quod demonſtraſſe oportuit.



Exemplum in numeris ſit.

Ordo

prior			posterior	
15	5		5	15
6	2		10	20
8	4		4	8

15 6 ut 20 8 6 15 ut 8 20

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΔ.

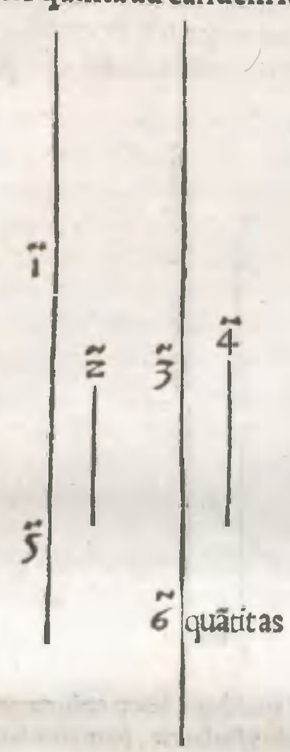
Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ἔχῃ δὲ καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν λόγον, καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον· καὶ συντεθὲν, πρῶτον καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, καὶ τρίτον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον.

PROPOSITIO

PROPOSITIO XXIIII.

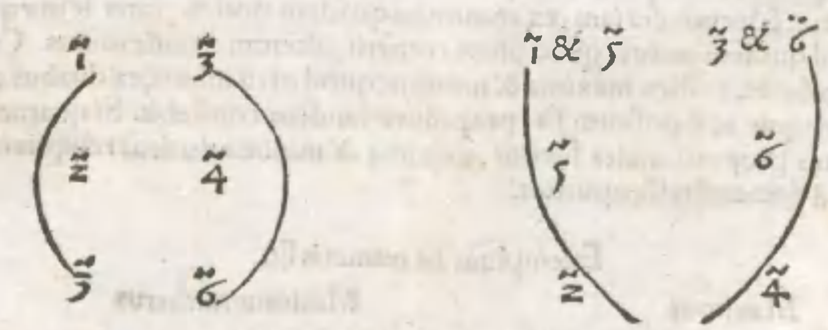
Si prima ad ſecundam eam habuerit rationem quam tertia ad quartam habuerit autem & quinta ad ſecundam eam rationem quam ſexta ad quartam: & compoſita, prima & quinta, ad ſecundam eam habebit rationem, quam tertia & ſexta ad quartam.

Sint ſex quantitates, & eſto quòd prima ad ſecundam ſit ut tertia ad quartã, ſimiliter quinta ad eandem ſecundam, ut ſexta ad quartam: dico ergo, & compoſitam ex prima & quinta, ad ſecundam, eam quæ eſt compoſitæ ex tertia & ſexta ad quartam, rationem habere. Quoniam enim prima ad ſecundam, ex hypotheſi, eſt, ut tertia ad quartam, & rurſus, quoniam quinta ad ſecũdam, ſimiliter ex hypotheſi, eſt ut ſexta ad quartam, ex conuerſa ratione uerò, ſecunda ad quintam ut quarta ad quantitatem ſextam: & prima ad quintam, iuxta ordinatam proportionem, ex æquali, per propoſitionem 22 huius, ut tertia ad ſextam erit. Eſt autem diuiſio rationis, unde ex rationis compoſitione, ut teſtatur propoſitio 18 huius, hæ quantitates proportionales erunt: prima igitur & quinta ad quintam, ſicut tertia & ſexta ad quantitatem ſextã. Quoniam aũt quinta ad ſecundam, ex hypotheſi, eſt ut ſexta ad quartã: quare rurſus per candẽ ordinatam rationem, cũ duo iam quantitatum ordines appareant, cuiuſmodi ſcilicet hæc proportio requirit, infertur tandem propoſitũ, primam ſcilicet & quintam coniunctim ad ſecundam ſe habere, ut ſe habent tertia & ſexta, & ipſæ coniunctæ ad quantitatem quartam. Si prima igitur ad ſecundam eam habuerit rationem quam tertia ad quartam, habuerit autem & quinta ad ſecundam, &c. quod demonſtraſſe oportuit.



Exemplum huius in numeris ſic.

prima		ſecunda		tertia		quarta
7	ad	9	ut	21	ad	27
quinta 6				ſexta 18		
13				39		



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΕ.

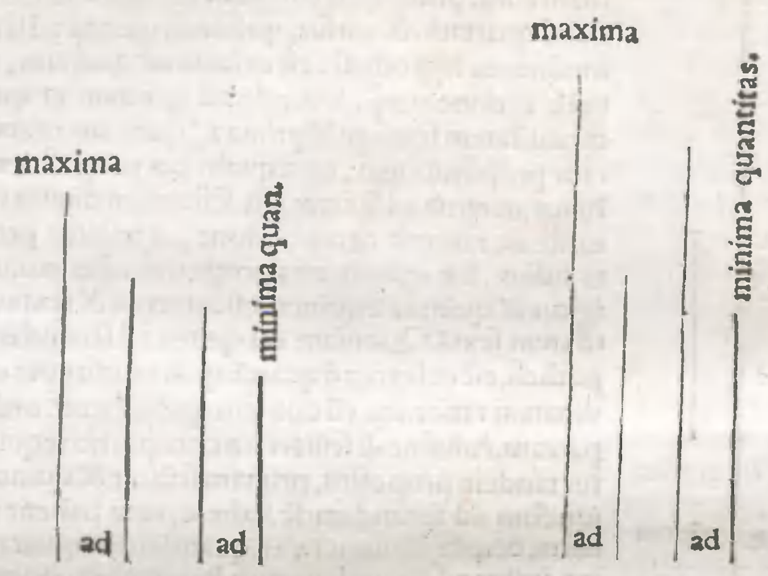
Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ· τὸ μέγιστον καὶ τὸ ἐλάχιστον, δύο τῶν λοιπῶν μείζονά ἐστι.

PROPOSITIO

PROPOSITIO XXV.

Si quatuor quantitates proportionales fuerint, maxima & minima duabus reliquis maiores ſunt.

Sint quatuor eiuſdem generis quantitates proportionales, qualitercunq;, modò non ſint in ratione æqualitatis, ut dicitur. nam hic nulla apparet quantitas maxima uel minima, quod nunc eſt contra propoſitionis hypotheſim: dico, maximam cum minima reliquis duabus quãtitatibus maiorem eſſe. Ponantur in maioribus quantitatibus portiones, ex propoſitione 3 primi, ſuis minoribus æquales. Et quoniam quantitates maiores, aut ex hypotheſi ſtatim, aut permutata ratione etiam uſurpa-



ta, primò illam, quam ipſæ minores, ſecundò deinde, ubi quidem loco minorum, portiones, quas ipſæ minores in maioribus ſignatæ æquales habent, ſumptæ fuerint, quam ipſæ portiones inter ſe habent rationem, cum iam totum ſit ad totum, ſicut ablatum ad ablatum: & reliquum ad reliquum, ex propoſitione 19 huius, ut totum ad totum erit. Quia autem ex maioribus una, neceſſariò altera maior eſſe debet: & reliqua illius ex prima parte propoſitionis 14 ſola, uel eadem ipſa parte, præmiſſa tamen permutata ratione, huius reliqua maior erit. Et quia etiam utraq; minor ſuæ ablatæ eſt æqualis, ſi æqualibus æqualia addãtur: & quæ proueniunt quantitates, utraq; uidelicet minor cum alterius ablata, inter ſe æquales erunt. Quòd ſi iiſdem æqualibus inæqualia, reliqua ſcilicet, addita fuerint, utrunque ſuo, ac debito ordine: & producta iam, ex communi quadam noticia, inter ſe inæqualia erunt. Illud quidem maius, quod plus acceperit, alterum deinde minus. Cum igitur id quod maius eſt, ex maxima & minima, quod uerò minus, ex duabus quantitatibus reliquis compoſitum ſit, propoſitio tandem conſtabit. Si quatuor igitur quantitates proportionales fuerint, maxima & minima duabus reliquis maiores ſunt. quod demonſtraſſe oportuit.

Exemplum in numeris ſit.

Maximus ... Minimus numerus

27 ... 21 ut 9 ... 7

9 ... 7 portiones minoribus æquales, & ablatæ ex totis.

18 ... 14 Reliqui numeri.

Reliqua

Reliqua ... Tota

18 ... 14 ut 27 ... 21

Minor 9 ... Minor 7

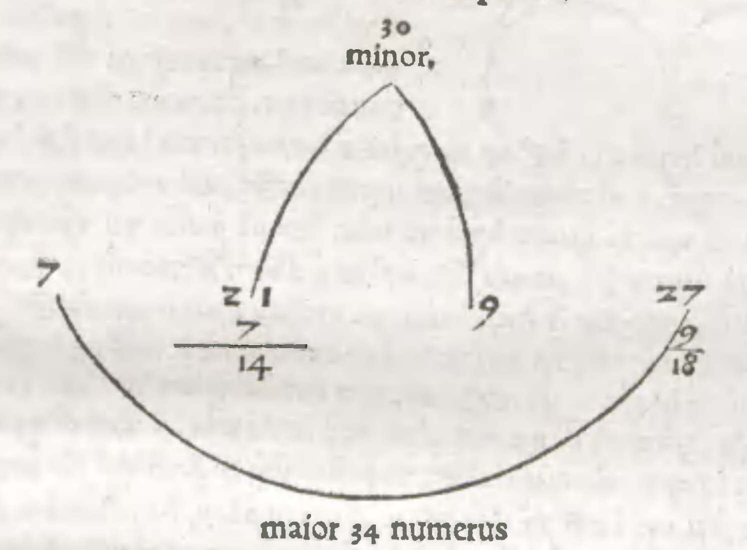
ablata alte. 7 ... ablata alterius 9

16 ... 16

14 ... 18

30 minus, quia minus accepit ... 34 productum maius: quia maius acce.

Sequitur hoc idem exemplum, numeris tamen aliter poſitis.



27 ... 21, ut 18 ... 14

Minores ... Ablatæ por.

7 ... 7

9 ... 9

16 ... 16

14 ... 18

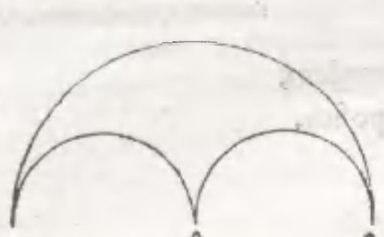
30 ... 34 &c.

FINIS LIBRI QVINTI.

LI ΣΧΟΛΙΟΝ

ΣΧΟΛΙΟΝ ΕΙΣ ΤΟ ϛ, ΑΔΗΛΟΥ.

Λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν πηλικότητες τινῶν λόγων πολλαπλασιαζόμεναι ποιῶσι λόγον. Ἐκεῖνος ὁ λόγος συγκεῖσθαι ἐκ τῶν λόγων ἐκείνων λέγεται, ὧν αἱ πηλικότητες ποιοῦσιν αὐτόν. Πηλικότητας δὲ λέγει, ἀφ' ὧν ὀνομάζονται· ὡς ἀπὸ τοῦ δύο ὁ διπλάσιος. Ἔστω λόγος τοῦ η πρὸς τὸν δ διπλασίων, καὶ αὐτοῦ δ πρὸς τὸν β διπλασίων, καὶ αὐτὸς ὁ τετραπλάσιος ὢν λόγος τοῦ η πρὸς τὸν β συγκεῖσθαι λέγεται ἐκ τῶν δύο λόγων, τοῦ τε η πρὸς τὸν δ, καὶ τοῦ δ πρὸς τὸν β, ὅτι αἱ πηλικότητες αὐτῶν ποιοῦσιν αὐτὸν οὕτως.

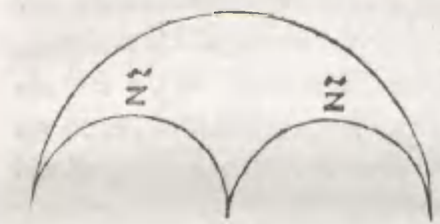


Ἐπεί, ὡς εἴρηται, πηλικότητες οἱ ἀριθμοὶ λέγονται, ἀφ' ὧν αἱ σχέσεις ὀνομάζονται· οἷον ἀπὸ τοῦ δύο καὶ τρία καὶ τέσσαρα, ὁ διπλάσιος, καὶ τριπλάσιος, καὶ τετραπλάσιος λόγος. ὀνομάζεται δὲ καὶ τὸ ἥμισυ ἀπὸ τοῦ ἑνός. ἔστι δὲ ὁ δύο τοῦ τέσσαρα ἥμισυς. λαμβάνω τὸ ἥμισυ τῆς μονάδος, ἀφ' ἧς ὁ δύο τῶν τεσσάρων ἥμισυς λέγεται, ὅπερ λεπτῶν πρῶτον λ λαμβάνω, καὶ ἕτερον ἥμισυ μονάδος, ἀφ' ἧς πάλιν ὁ δ ἥμισυς λέγεται τοῦ η, καὶ πολλαπλασιάζω τὰ λ πρῶτα λεπτὰ ἐπὶ τὰ λ πρῶτα, καὶ αὐτὰ λεπτά, καὶ γίνονται δεύτερα λεπτά, ἐννακόσια. ταῦτα ἀναβιβάζω ἤτοι μοιράζω, γίνονται δέκα καὶ πέντε πρῶτα λεπτά, ἅτινα δεκαπέντε πρῶτα λεπτὰ τέταρτόν εἰσι μονάδος. τετράκις γὰρ ιε ξ. Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὁ μέσος τοῦ β, καὶ η, ὁ μ. καὶ ἐπεὶ τὰ δύο τοῦ μ, εἰκοστόν ἐστιν, λαμβάνω τὸ εἰκοστὸν τῆς μονάδος ὂν λεπτῶν τριῶν. Ἐπεὶ πάλιν ὁ μ, πενταπλάσιος ἐστὶ τοῦ η μόριος τοῦ μ ὁ η λέγεται, πολλαπλασιάζω τὰ τρία τὸ εἰκοστὸν τοῦ ξ; παρὰ τὰ ε, ἀφ' οὗ πέμπτον μόριος ὁ η τοῦ μ λέγεται, καὶ γίνονται ιε λεπτά, ἅπερ ἐστὶ τέταρτον μονάδος. καὶ οὕτως πάλιν ὁ β τοῦ η, τέταρτός ἐστι. Ἔστω πάλιν μεταξὺ τῶν δ καὶ ιβ, ὁ η. ἐπεὶ ὁ δ ἥμισυς ἐστὶ τοῦ η, ὁ δὲ η ὑφημιόλιος τοῦ ιβ. λαμβάνω τὰ λεπτὰ λ τὸ ἥμισυ τῆς μονάδος, καὶ ποιῶ τὰ μ λεπτὰ τὸ ὑφημιόλιον τῆς μονάδος, καὶ ποιῶ τὰ λ παρὰ τὰ μ, καὶ γίνονται χίλια διακόσια, δεύτερα λεπτά, ἀναβιβάζω ταῦτα, γίνονται πρῶτα λεπτὰ κ. τὰ κ τρίτον εἰσὶ μονάδος, καὶ ὁ δ ὢν τρίτον ἐστὶ τοῦ ιβ. Ἔστω μεταξὺ τοῦ β καὶ τοῦ ιβ ὁ δ. καὶ ἐπεὶ ὁ δύο τοῦ δ ἥμισυ ἐστίν, ὁ δὲ δ τοῦ ιβ ὑποτριπλάσιος, λαμβάνω τὰ λ λεπτά, τὸ τῆς μονάδος ἥμισυ· καὶ τὰ κ, τὸ τρίτον αὐτῆς. ἀπὸ γὰρ τοῦ τρία ὁ τριπλάσιος παρωνόμασται. καὶ ποιῶ τὰ λ ἐπὶ τὰ κ, γίνονται ἑξακόσια δεύτερα λεπτά. ταῦτα ἀναβιβάζω, καὶ γίνονται δέκα πρῶτα, τὰ δέκα, ἕκτον μονάδος, καὶ ὁ β ἕκτον τοῦ ιβ. Πάλιν ἔστω μεταξὺ τοῦ δ καὶ ε, ὁ κ. καὶ ἐπεὶ ὁ δ ὑποπενταπλάσιος ἐστὶ τοῦ κ, ὁ δὲ κ τετραπλάσιος τοῦ ε, λαμβάνω τὸ τῆς μονάδος πέμπτον, τὰ ιβ, καὶ τοῦ δ, ἐφ' οὗ ὁ ε τετραπλάσιον λέγεται τοῦ κ, καὶ ποιῶ τὸ τέταρτον παρὰ τὸ δωδέκατον, γίνονται μη ὑποεπιτέταρτος τῆς μονάδος. καὶ ὁ δ τοῦ ε, ὑποεπιτέταρτός ἐστιν. Ἔστω πάλιν μεταξὺ τοῦ β, καὶ δ ὁ γ. καὶ ἐπεὶ ὁ δ τοῦ γ ἐπίτριτός ἐστιν, ἐπεὶ ἔχει αὐτὸν καὶ τὸ τρίτον αὐτοῦ ὅ ἐστι μονάς. λαμβάνω τὴν μονάδα,

ἥ τις

INTERPRETATIO, INCERTI AVTORIS.

Ratio ex rationibus cōponi dicitur, quādo rationum quantitates, hoc eſt denominationes, multiplicatæ, rationē cōſtituunt. Ratio ex rationib. cōpoſita dicit̃, quā uidelicet rationum denominationes cōponunt. Quantitates uerò, hoc eſt denominationes rationū, dicunt̃, à quib. rationes denominātur, ut à duob. dicitur dupla. Sit ratio octonarij ad quaternarium dupla, atq; etiā ipſius quaternarij ad binariū dupla & ipſa: quadrupla igitur ratio, octonarij ad binarium, cōponi dicit̃ ex duab. rationib. octonarij ſcilicet ad quaternariū, & quaternarij ad binariū. ambarū etenim rationū denominationib. cōpoſita hęc denominatio cōſtituit̃. Quoniā ergo, ut dictū modò eſt, quātitates, ſeu denominatiōes rationū numeri dicuntur, à quib. habitudines nominātur, deſcribūtur ac referunt̃ inter ſe, ueluti à binario ternario ac quaternario: dupla, tripla ac quadrupla ratio. Nominat̃ uerò & dimidiū ab uno, ſunt aūt duo ipſius quaternarij dimidiū.

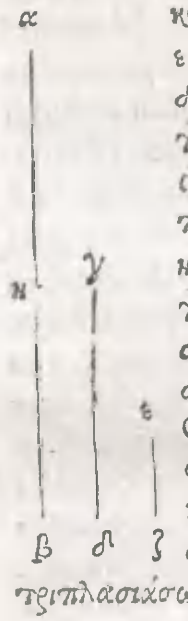


Capio igitur dimidiū unius (integri ſcilicet, ut numeri 60 cū is cōmodiſſimè diſtribui in minutias poſſit) à q̃ duo ipſius quaternarij dimidium dicit̃, quarū acceptarū partiū, 30 accipio: & alterū dimidiū illius unius, à q̃ iterū quaternarius octonarij medietas dicitur. & multiplico 30 prima minu. ad, hoc eſt cū 30 min. & fiūt ſecūda min. 900, hęc in 60 ſcilicet traduco ſeu diuido, fiūt 15, prima min. q̃ ſanè 15 prima mi. quarta pars ſunt unius, ſeu integri. quater .n. 15, ſexaginta ſcilicet cōtinent. Proinde eſto binarij & octonarij medius 40. Et q̃niā 2 ipſius 40 uigincuplū ſunt, accipio uigincuplum, unius ſeu integri, nēpe tria minu. At uerò rurſus 40 quincuplū ſunt octonarij: pars ipſius 40 octonari9 dicit̃, multiplico 3 uigincuplā partē ipſius 60, cū 5 denominante octonariū in 40, & fiunt 15 min. quarta pars integri, 60, ſ. q̃ denominatio q̃q; eſt inter 2 et 8, poſitos nūm. Eſto rurſus inter ipſos 4 & 12 octon. q̃niā 4. dimidiū ſunt octonarij, 8 uerò ipſius duodenarij ſubſeſquialter: accipio mi. 30, dimidiū integri, & facio 40 min. ſubſeſquialterū integri, & facio 30 ad 40, & fiunt 1200 ſecun. mi. quib. diuiſis, fiunt prima mi, 20 & uiginti tertiū ſunt integri: et quatuor igit̃ tertium ſunt duodenarij. Eſto inter binariū & 12 quaternarius, & q̃niam binarius quaternarij dimidiū eſt, quaternar. uerò duodenarij ſubtriplus, accipio 30 min. unitatis ſeu integri dimidiū: 20 deinde, tertiū ipſius. à ternario enim tripla denominat̃, & facio 30 cū 20, fiunt 60 ſecun. min. quib. in integrū diuiſis, fiunt 10 prima, q̃ 10 ſexta pars ſunt integri: & 2 ſexta pars eſt duodenarij. Rurſus, ſit inter 4 & 5 num. 20. & q̃niā quaternar. ſubq̃ncuplus eſt ipſius 20, numerus uerò 20 ad 5 quadruplus, accipio integri 5 partē, nimirū 12, & quaterna. à q̃ quinarius quadruplus dicit̃ ipſius 20, & facio quadruplū, ad 12, fiunt 48, ſubſeſq̃quartū integri: & 4 ipſorū 5 ſubſeſq̃quartū eſt. Eſto rurſus inter 2 & 4 ternarius. Et quoniam 4 ad ternarium eſt ſeſquitertius, cū ipſum & tertium ipſius, quæ eſt unitas, habeat, accipio integrū,

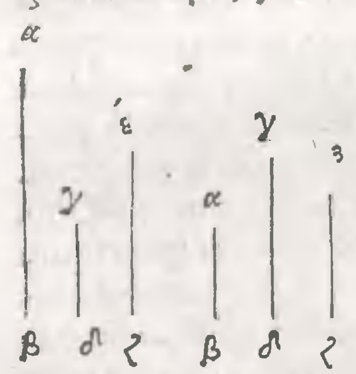
 quod

ἥτις ἐστὶ λεπτὰ ξ. ἀφ᾽ ἧς, μονάδος τρίτον ὄντος τοῦ τρία, ὁ δ᾽ ἐπίτριτος αὐτοῦ λέγεται. λαμβάνω καὶ τὸν λ, τὸν τῆς μονάδος ἥμισυ, διὰ τὸ τρία ἡμιόλιον εἶναι τοῦ β. ὀνομάζεται δὲ τὸ ἡμιόλιον ἀπὸ τοῦ ἡμίσεως. καὶ ποιῶ τὸν λ παρὰ τὴν μονάδα, ἤτοι ξ λεπτά, καὶ γίνονται χίλια ὀκτακόσια, δεύτερα λεπτά. ταῦτα ἀναβιβάζω, καὶ γίνεται λ πρῶτα λεπτά, ταῦτα ἥμισυ μονάδος. καὶ ὁ β τοῦ δ ἥμισύς ἐστιν.

Λόγος ἐκ δύο λόγων ἢ καὶ πλειόνων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες, πολυπλασιασθεῖσαι, ποιῶσι τινὰ πηλικότητα λόγου. ἐχέτω γὰρ τὸ α β, πρὸς τὸ γ δ λόγον δεδομένον, οἷον διπλάσιον ἢ τριπλάσιον, ἤ τινα ἄλλον. καὶ τὸ γ δ πρὸς τὸ ε ζ καὶ αὐτὸν δεδομένον. λέγω ὅτι ὁ τοῦ α β, πρὸς τὸ ε ζ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ α β πρὸς τὸ γ δ, καὶ τοῦ γ δ πρὸς τὸ ε ζ. ἤτοι ὅτι ἐὰν ἡ τοῦ α β, πρὸς τὸ γ δ λόγου πηλικότης πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὴν τοῦ γ δ πρὸς τὸ ε ζ λόγου πηλικότητα, ποιεῖ τὴν τοῦ α β πρὸς ε ζ. Ἔστω γὰρ πρότερον τὸ μὲν α β τοῦ γ δ μεῖζον,



καὶ τὸ γ δ τοῦ ε ζ. ἔστω τὸ μὲν α β τοῦ γ δ διπλάσιον, τὸ δὲ γ δ τοῦ ε ζ τριπλάσιον. Ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν γ δ τοῦ ε ζ τριπλάσιόν ἐστι, τοῦ δὲ γ δ διπλάσιον τὸ α β, τὸ ἄρα α β τοῦ ε ζ, ἐστὶ ἑξαπλάσιον. ἐπεὶ δὴ ἐὰν τὸ τριπλάσιον τινὸς διπλασιάσωμεν, γίνεται αὐτοῦ ἑξαπλάσιον. τοῦτο γάρ ἐστι κυρίως σύνθεσις. ἢ οὕτως, ἐπεὶ τὸ α β τοῦ γ δ ἐστὶ διπλάσιον, διῃρήσθω τὸ α β εἰς τὰ τῷ γ δ ἴσα, καὶ ἔστω ταῦτα, τὰ α η η β. καὶ ἐπεὶ τὸ γ δ τοῦ ε ζ ἐστὶ τριπλάσιον, ἴσον δὲ τὸ α η τῷ γ δ, καὶ τὸ α η ἄρα, τοῦ ε ζ ἐστὶ τριπλάσιον. ὅλον ἄρα τὸ α β τοῦ ε ζ ἐστὶ ἑξαπλάσιον. ὁ ἄρα τοῦ α β πρὸς τὸ ε ζ λόγος, συνῆπται διὰ τοῦ γ δ μέσου ὅρου, συγκείμενος ἐκ τε τοῦ α β πρὸς γ δ, καὶ τοῦ γ δ πρὸς ε ζ λόγου. Ὁμοίως δὲ κἂν ἔλαττον ᾖ τὸ γ δ ἑκατέρων, τῶν α β ε ζ, συναχθήσεται. Ἔστω γὰρ πάλιν τὸ μὲν α β, τοῦ γ δ τριπλάσιον, τὸ δὲ γ δ ἥμισυ τοῦ ε ζ. Καὶ ἐπεὶ τὸ γ δ ἥμισυ ἐστὶ τοῦ ε ζ, τοῦ δὲ γ δ τριπλάσιον τὸ α β, τὸ α β ἄρα ἡμιόλιόν ἐστι τοῦ ε ζ. ἐὰν γὰρ τὸ ἥμισυ τινὸς τριπλασιάσωμεν, ἕξει αὐτὸ ἅπαξ καὶ ἡμισάκις. Καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν α β τοῦ γ δ ἐστὶ

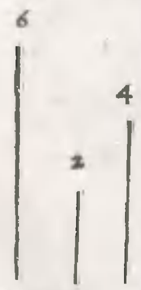


τριπλάσιον, τὸ δὲ γ δ τοῦ ε ζ ἐστὶ ἥμισυ, οἵων ἐστὶ τὸ α β ἴσων ἓξ, γ δ τριῶν, τοιούτων ἐστὶ τὸ ε ζ δύο, ὥστε ἡμιόλιόν ἐστι τὸ α β τοῦ ε ζ. ὁ ἄρα τοῦ α β πρὸς τὸ ε ζ λόγος, συνῆπται διὰ τοῦ γ δ μέσου ὅρου, συγκείμενος ἐκ τε τοῦ α β πρὸς γ δ, καὶ τοῦ γ δ πρὸς ε ζ λόγου. Ἀλλὰ δὴ πάλιν ἔστω τὸ γ δ ἑκατέρου τῶν α β ε ζ μεῖζον. καὶ ἔστω τὸ μὲν α β τοῦ γ δ ἥμισυ μέρος, τὸ δὲ γ δ τοῦ ε ζ ἐπίτριτον. Ἐπεὶ οὖν, οἵων ἐστὶ τὸ α β δύο, τοιούτων ἐστὶ τὸ γ δ τεσσάρων. οἵων δὲ τὸ γ δ τεσσάρων, τοιούτων τὸ ε ζ καὶ γ δ πέντε. καὶ οἵων ἄρα τὸ α β δύο, τοιούτων ε ζ τριῶν. συνῆπται ἄρα πάλιν ὁ τοῦ α β πρὸς ε ζ λόγος, διὰ τοῦ γ δ μέσου ὅρου, ὁ τῶν δύο πρὸς τὰ τρία. Ὁμοίως δὴ καὶ ἐπὶ πλειόνων, καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν πτώσεων. καὶ δῆλον ὅτι ἐὰν ἀπὸ τοῦ συγκειμένου λόγου εἷς ὁ τυχὼν τῶν συντιθέντων ἀφαιρεθῇ, ἑνὸς τῶν ἁπλῶν ἀφανισθέντος, οἱ λοιποὶ τῶν συντιθέντων καταλειφθήσονται.

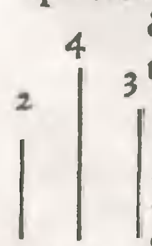
quod eſt 60 min. à q̃ integro tertiũ exiſtente ternarij, quaternarius ſeſq̃tertium ipſius dicit̃. accipio & 30, integri dimidiũ, per quæ 3 ad 2 ſeſquialterꝝ erit. nominat̃ uerò ſeſquialterꝝ à dimidio, & facio 30 ad integrum, utpote 60 min. & ſiunt 1800, ſecunda min. his diuiſis, & fiunt 30 prima min. hæc dimidium ſunt integri: quare & binarius ipſius quaternarij dimidiũ eſt.

Ratio ex duab. ſiue ex plurib. rationib. cõponi dicitur, quando rationũ quãtitates, hoc eſt denominationes, multiplicatę, aliquã rationis quãtitatẽ cõſtituunt. Habeat igit̃ primũ ad ſecundũ, rationẽ datã, ueluti duplã, aut triplã, ſiue aliquã aliã, habeat & ſecundũ ad tertiũ, rationẽ, & ipſam datã: dico ꝙ primi ad tertiũ ratio, ex primi ad ſecundũ, & ſecũdi ad tertiũ rationibus, cõpoſita ſit. Aut, quando primi ad ſecundũ rationis quantitas cum ſecundi ad tertium rationis quãtitate multiplicata fuerit, quantitatẽ primi ad tertiũ cõſtituit. Sit igit̃, et primò quidẽ, primũ maius ſecundo, ſecundũ

itẽ maius tertio, eſto etiã, q̃d primũ quidẽ ad ſecundum duplã, ſecundũ v̾ò ad ipſum tertiũ triplã rationẽ habeat. Quoniã eñ ſecundũ triplũ eſt ipſius tertij, ipſius uerò ſecundi duplũ ipſum primũ: primũ igit̃ ipſi9 tertij ſexcuplũ erit. qm̃. n. ſi triplũ alicui9 duplicauerimus, ipſius ſexcuplũ ꝓducitur: hoc enim eſt ꝓpriẽ cõpoſitio. Aut ſic, qm̃ primũ ſecundi duplũ eſt, ſubdiuidat̃ primũ in partes ipſi ſecundo æquales: uocẽtur aũt hæ prior & poſterior. Et qm̃ ſecundũ ipſius tertij triplũ eſt, æqualis uerò eſt prior primi pars ipſi ſecundo: & hęc eadẽ pars, ut ipſum ſecundũ, tertij tripla erit. primũ igit̃ ipſius ſecundi eſt ſexcuplũ. q̃ igitur primi ad tertiũ ratio (cõiuncta ꝑ ſecundũ, mediũ terminũ) ex primi ad ſecundũ & ſecundi ad tertiũ ratione, cõpoſita eſt. Similiter v̾ò & ſi minus fuerit ſecundũ utriſq; ipſorꝝ, primo ſcilicet & tertio, cõtrahẽtur illa. Eſto eñ iterꝝ primũ quidẽ ſecundi triplum,



ſecundũ v̾ò tertij dimidiũ. Et qm̃ ſecundũ eſt tertij dimidiũ, ſecundi v̾ò triplũ eſt ipſum primũ: primũ igit̃ ipſius ſecũdi ſeſq̃alterꝝ erit. qm̃. n. ſi dimidiũ alicuius triplicauerimus, habet ipſum ſemel & dimidiũ. Et qm̃ primũ ſecũdi triplũ, ſecundũ v̾ò ipſius tertij dimidiũ eſt: qualiũ primũ eſt trium ſecundo æqualiũ, talium eſt & tertiũ duorꝝ, qua ꝑpter ſeſquialterꝝ eſt primũ ipſius tertij. primi igit̃ ad tertiũ ratio (ut q̃ per ſecundũ, mediũ eius terminum cõiuncta eſt) ex primi ad ſecundum et ſecundi ad tertium ratione cõpoſita eſt. Sed rurſus, ſit ſecundũ utriſq; illorꝝ, primo & tertio, maius, & ſit quidẽ primũ ſecũdi dimidia pars, ſecundũ v̾ò tertij ſeſq̃tertiũ.



Quoniã igit̃ quantũ eſt primi dimidiũ, tãta eſt ſecũdi quarta: quãta v̾ò eſt ſecundi q̃rta pars, tãta eſt primi cũ tertio una quinta: dimidia igit̃ primi, tertia deinde tertij, inter ſe æqualia erunt. Primi igitur ad tertium, nimirꝝ 2 ad 3, ratio, ꝑ ſecundum, mediũ eius terminum, cõiuncta eſt. Similiter etiã & in plurib. in reliq̃s etiã caſib. Et manifeſtum eſt, ꝙ ſi à cõpoſita ratiõe una qualiſcunq; cõpoſitarꝝ auferat̃, una ſimpliciũ ſublata, reliq̃ ratiões cõpoſitarꝝ cõprehẽdant̃.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΝ ΕΚΤΟΝ.

EVCLIDIS ELEMENTORVM GEOmetricorum liber ſextus.

ΟΡΟΙ.

Ομόια σχήματα εὐθύγραμμά ἐστιν, ὅσα τάς τε γωνίας ἴσας ἔχει κατὰ μίαν, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς, ἀνάλογον.

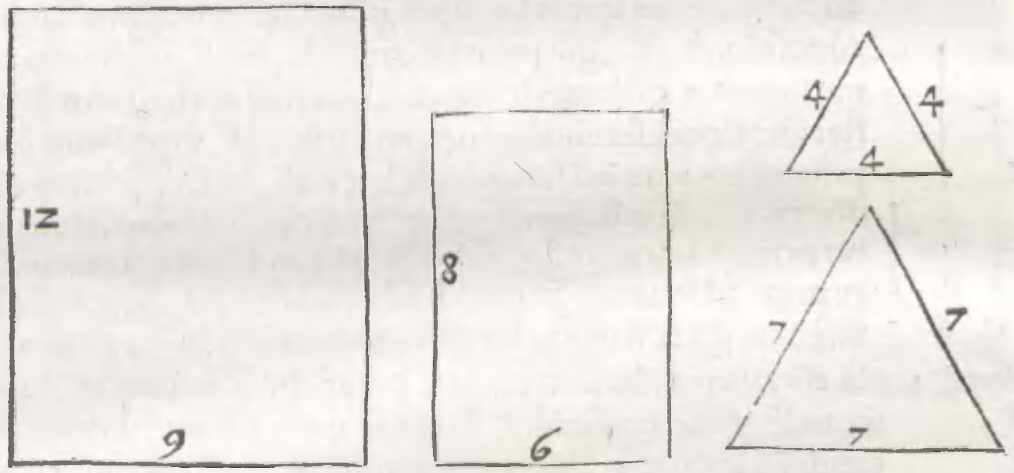
Αντιπεπονθότα δὲ σχήματά ἐστιν, ὅταν ἑκατέρῳ τῶν σχημάτων ἡγούμενοί τε καὶ ἑπόμενοι λόγοι ὦσιν.

DEFINITIONES.

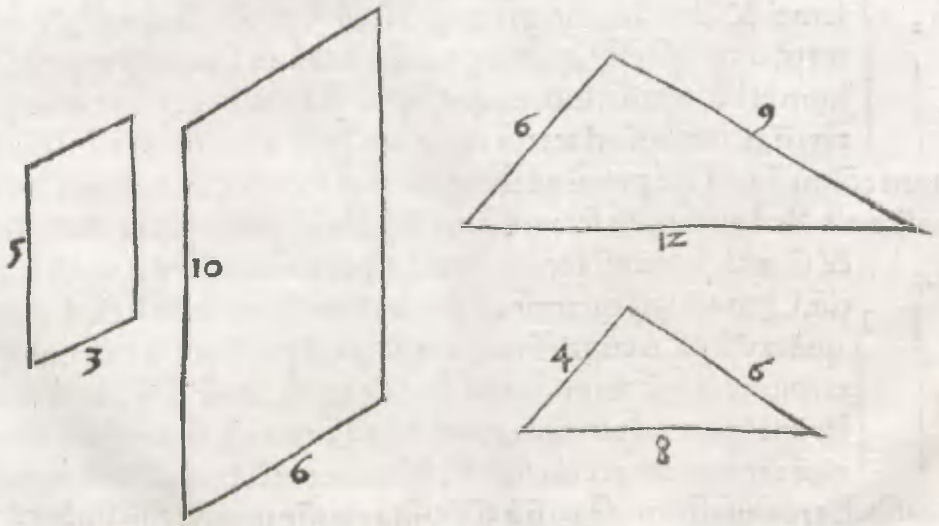
1 Similes figuræ rectilineæ ſunt, quæ & angulos æquales habent ad unum, & quæ circa angulos æquales latera, proportionalia.

2 Reciprocæ autem figuræ ſunt, quando in utraq; figura antecedentes & conſequentes termini rationales fuerint.

Exempla definitionis primæ.



Exempla definitionis ſecundæ.



Ακρον

Ακρον καὶ μέσον λόγον εὐθεῖα τετμῆσθαι λέγεται, ὅταν ᾖ ὡς ἡ ὅλη πρὸς τὸ μεῖζον τμῆμα, οὕτως τὸ μεῖζον πρὸς τὸ ἔλαττον.

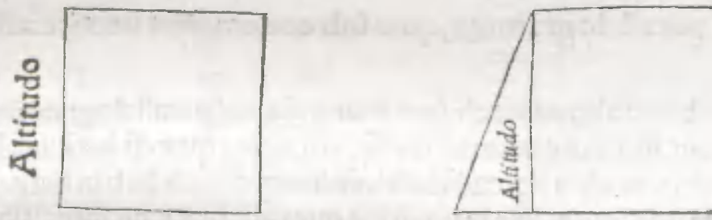
3 Secundum extremam & mediam rationem recta linea diuidi dicitur, quando fuerit, ſicut tota ad maius ſegmentum, ſic maius ad ſegmentum minus.

Tota				Tota	
12				8	
√180 — 6 / maius ſegmentum	18 — √180 / minus			√80 — 4 / maius	12 √80 / minus
12 ad	√180 — 6	ut	√180 — 6 ad	18 — √180	
Similiter 8	√80 — 4		√80 — 4	12	√80

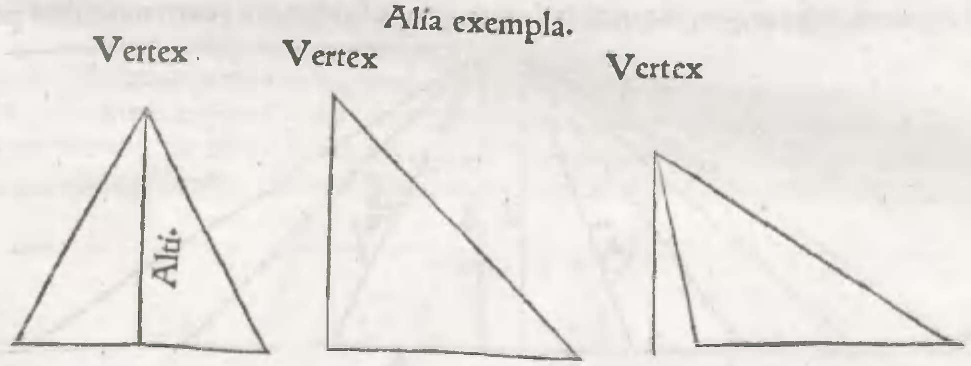
Υψος ἐστὶ παντὸς σχήματος, ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀγομένη.

4 Altitudo uniuſcuiuſque figuræ eſt, à uertice ad baſim ducta perpendicularis.

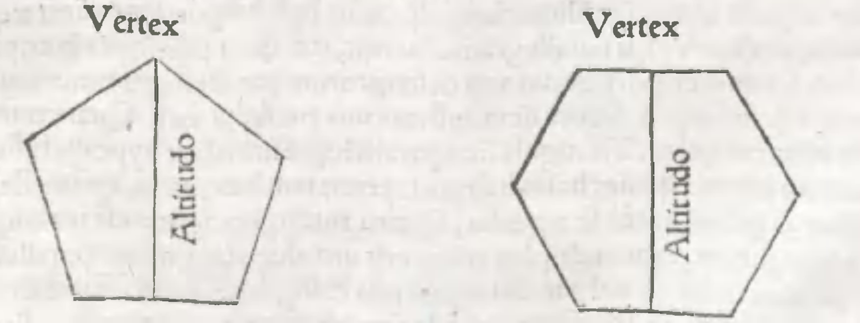
Sunt autem huius definitionis exempla hæc.



Alia exempla.



Similiter alia.



Λόγος

Λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖσαι, ποιῶσί τινα λόγον.

5 Ratio ex rationibus componi dicitur, quando rationum quantitates multiplicatæ inter se, aliquam effecerint rationem.

Vt rationē duplam, cuius quantitas est 2, componunt & constituunt rationum sesquialteræ & sesquitertiæ, quantitates, $1\frac{1}{2}$ & $1\frac{1}{3}$, multiplicatæ inter se, ut sequitur.

Componentes		Composita ratio	
$\frac{3}{1\frac{1}{2}}$	$\frac{4}{1\frac{1}{3}}$	$\frac{12}{6}$ uel	$\frac{2}{1}$
Sesquialtera	Sesquitertia	Dupla	

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.

ΠΡΩΤΗ. Α.

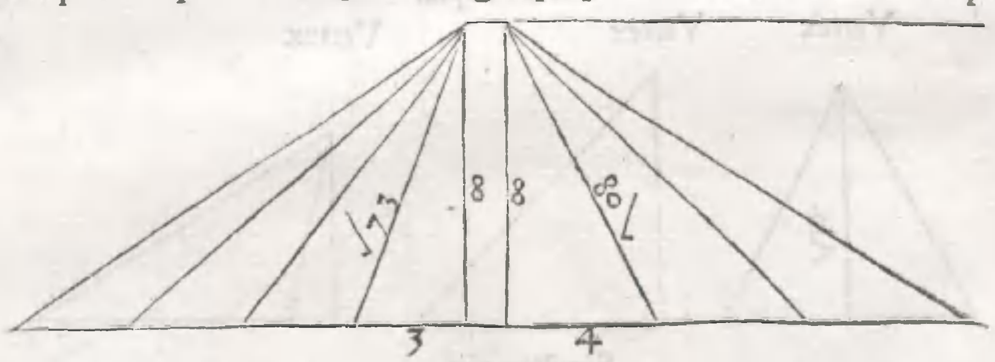
Τὰ τρίγωνα καὶ τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα, πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις.

PROPOSITIONES.

PRIMA. I.

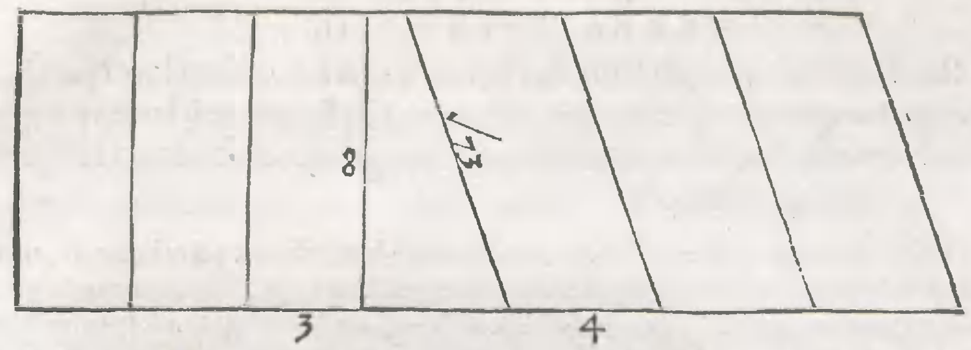
Triangula & parallelogramma, quæ sub eodem sunt uertice: ad se sunt ut bases.

Describantur sub una altitudine aliquot triangula, uel parallelogramma: dico, utra descripta fuerint, illorum eam inter se esse rationem, quæ est basium. Prolongentur in utranque partem ultra figuram bases, unicuique deinde basi in sua continuata portione, aliquot portiones (siue uni basi tot quot alij, siue pauciores) sibi sumantur æquales, atque tandem, si quidē triangula proposita fuerint, extremitatibus por-



tionum singulis cū uertice illius trianguli, cuius basi hæ portiones sunt æquales, rectis lineis iunctis: Vel, si parallegrāma fuerint, tot, quot portiones sunt, parallelogrammis, secundum portionum atque descriptorum parallelogrammorum laterum quantitatem descriptis, figura demonstrationis perfecta erit. Quare nunc ad demonstrationem ipsam. Triangula siue parallelogrāma cū, ex hypothesi, sint æquealta, utrinque etiam æquales bases habeant: erunt tam hæc, ex 36, quàm illa, ex propositione 38 primi, inter se æqualia, Quàm multiplex igitur est utriusque basis basiū aggregatum, tam multiplex etiam erit utriusque trianguli uel parallelogrammi, id quod ex triāgulis uel parallelogrammis colligitur. Quod si forte iam basium aggregatum in una, ex structura, æquale fuerit basium aggregato in collatione altera:

tera & ipsa tota triangula, ex 38, seu parallelogramma, ex propositione 36 primi, ex utraque parte inter se æqualia erunt. Quòd si uerò unum alterum excesserit, uel ab

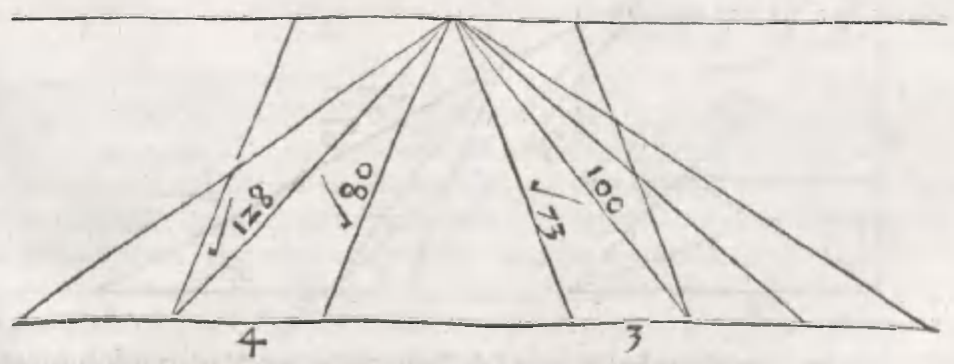


eo defecerit: & triangula seu parallelogrāma tum eodē modo sese habebunt. Quatuor igitur nunc quantitatib. toties quidē prout multa uel pauca triangula seu parallelogramma proposita fuerint, ordinatis, quarum prima & secūda sint bases triangulorum seu parallelogrammorum positorum, tertia uerò quantitas & quarta basibus his superposita triangula seu parallelogramma, cum iam primæ & tertiæ, secundæ item & quartæ æquè sint assignatæ multiplices: infertur tandem, per definitionem 5 quinti, id quod uolebat propositio: Triangula scilicet & parallelogramma, si sub uno & codē uertice fuerint, in suarum basium ratione esse. quod demonstrari oportuit.

8	9	32	36	12	9	72	96
4	3	16	12	4	3	24	32
Triangulorum bases		Ipsa triangula		Parallelogrammorum bases		Ipsa parallelogramma.	

APPENDIX.

Potest hæc res de triangulis tantū demonstrari, ut scilicet sit (cū de uno dicatur) in demonstrando facilior progressus. Quo facto, cum parallelogrammum & triangulum, ubi eandē basim habuerint, atque etiā inter lineas æquedistantes fuerint, per propositionem 41 primi, illud ad hoc duplum sit, cumque etiam partes eodem modo multiplicium, per propositionem 15 quinti, eandem habeant rationem: & alterum, de parallelogrammis, tandem sic se habere infertur, quod admonuisse oportuit.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β.

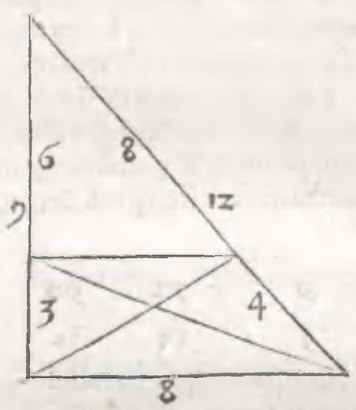
Ἐὰν τριγώνου παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν ἀχθῇ τις εὐθεῖα παράλληλος, ἀνάλογον τεμεῖ τὰς τοῦ τριγώνου πλευράς. Καὶ ἐὰν αἱ τοῦ τριγώνου πλευραὶ ἀνάλογον τμηθῶσιν,

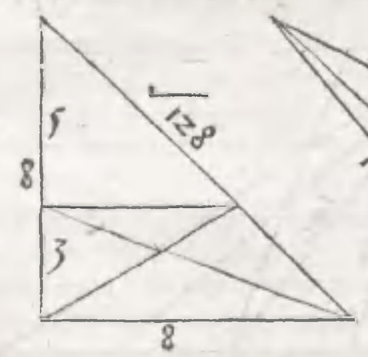
τμηθῶσιν· ἡ ἐπὶ τὰς τομὰς ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα παρὰ τὴν λοιπὴν ἔσαι τοῦ τριγώνου πλευρὰν παράλληλος.

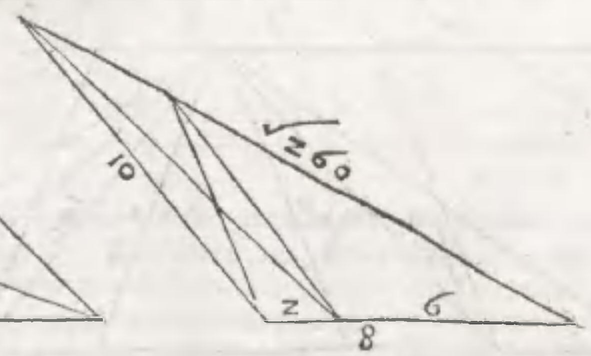
PROPOSITIO II.

Si ad unum trianguli latus ducta fuerit recta quædam linea parallela: proportionaliter hæc secat trianguli latera. Et si trianguli latera proportionaliter secta fuerint: quę ad sectiones iungitur recta linea, ad reliquum tertium latus parallela erit.

Describatur triangulum, ducatur in eo etiam, ab uno latere ad reliquorũ utrumlibet, recta quædam linea, reliquo tertio trianguli lateri parallela: dico, quantum ad partem priorem, latera illa per ductam parallelam ἀναλογικῶς, hoc est proportionaliter, secta esse, sic scilicet, quemadmodum se habet superior unius secti lateris pars ad suam inferiorem, uel contrà, inferior ad superiorem, ita in altero superior uel inferior pars ad reliquam se habeat. Porrò si recta in triangulo ducta linea, duo eius latera proportionaliter secet: hæc ducta, quantum ad partem posteriorem, lateri tertio parallela erit. Quantum igitur ad partem priorem. Cum triangulum per ductam parallelam, ut apparet, in quadrilaterum & triangulũ diuisum sit, ductis in quadrilatero duabus diametris: erunt quæ sic fiunt triangula, propterea quòd unam & eandẽ lineam, ductam scilicet perpendicularẽ, pro basi habeant, in eisdem item parallelis sint, ex propositione 37 primi, inter se æqualia: eorum igitur, ad reliquum ultra quadrilaterum triangulum, per priorem partem propositionis 7 quinti, una & eadem ratio. Cumq; etiam horum duorum æqualium triangulorum utrunq;, cum tertio reliquo æqualtum sit, atq; sic, ex præmissa prima bis usurpata, eam, quã bases, inter se habeant rationẽ. cum quæ eidẽ sint eædem rationes, ex propositione 11 quinti, hæ inter se etiã eædem sint, hæc propositione bis usurpata, prior pars tandẽ manifestabitur. Sequitur posterior. Maneat eadem figuræ dispositio. Et quoniam latera, per ductam in triangulo lineam, ἀναλογικῶς ex hypothesi secta sunt, & quoniam etiam triangula, ad has portiones uel laterum







partes constituta, eam quam bases, inter se habent rationem: & triangulorum inter tertium latus & ductam in triangulo lineam comprehẽsorum, ad tertium reliquũ, per propositionem 11 quinti, una & eadem ratio erit: unde sic etiam, per priorem partem nonæ eiusdem quinti, eadem triangula inter se æqualia: atq; tandem, per propositionem 39 primi, inter lineas æquedistantes. Ducta ergo in triangulo hæc recta

recta linea, tertio lateri æquedistans erit. In triangulo igitur si ad unum eius, &cæ. quod demonstrasse oportuit.

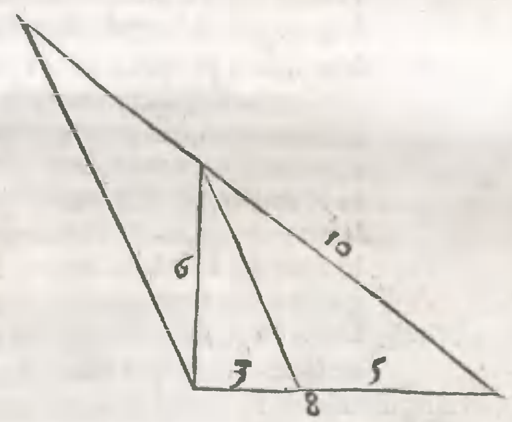
ΠΡΟΤΑΣΙΣ. Γ.

Ἐὰν τριγώνου γωνία δίχα τμηθῇ, ἡ δὲ τέμνουσα τὴν γωνίαν εὐθεῖα τέμνῃ καὶ τὴν βάσιν· τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς. Καὶ ἐὰν τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς· ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν τομὴν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα, δίχα τέμνει τὴν τοῦ τριγώνου γωνίαν.

PROPOSITIO III.

Si trianguli angulus bifariam secetur, secans autem angulum recta linea secet & ipsam basim: basis segmenta eandem habebunt rationem reliquis ipsius trianguli lateribus. Et si basis segmenta eandem habuerint rationem reliquis ipsius triãguli lateribus: à uertice ad sectionem ducta recta linea, bifariam secat ipsius trianguli angulum.

Describatur triangulum qualitercunq;, ducatur etiam ab uno eius angulo ad latus suum subtendens recta linea, quæ, per propositionem 9 primi, ipsum angulum bifariam, latus uerò eius utcunq; secet: dico, quantum ad partem priorem, secti lateris segmenta eam, quam duo reliqua latera, inter se habere rationem. Excitetur ex alterutra secti lateris extremitate linea per propositionẽ 31 primi, rectæ latus unum secanti, parallela, hæc deinde, latus insuper illud: quod ab altera secti lateris extremitate egreditur, usq; dum concurrant, prolongentur. Et quoniam in has duas parallelas recta quædam linea, unum scilicet trianguli latus incidit: erit angulus, medietas scilicet una diuisi, per primam partem propositionis 29 primi, suo coalterno angulo æqualis, atq; mox deinde & altera, per illam communem noticiã, Quæ uni sunt æqualia, &c. eidẽ coalterno æqualis erit. Sed quia hæc altera diuisi medietas, ut angulus externus, per secundam partem eiusdem 29, suo interno, qui scilicet sub παραλλήλως ducta, ac producti lateris portione exteriori continetur, est æqualis: & illi duo anguli, ad παραλλήλως ductã positi, per eandem



communem noticiam, inter se æquales erũt: triangulum igitur, per propositionem 6 primi, isosceles. Quòd si quis propositionis 2 huius sententiæ recordabitur, æquali pro æquali linea sumpta: quod prius sumptum erat, tandem inferri poterit. Posterius nunc, quod scilicet, si ab aliquo trianguli angulo recta linea ad suam subtẽsam demissa fuerit, sic ut huius subtensæ uel basis segmenta eam quam reliqua latera, inter se habeant rationem, angulus ille bifariam diuisus sit, hoc sic patet. Maneat eadem figuræ dispositio. Et quoniam duo reliqua latera, ex hypothesi, illud deinde quod ulterius protractum est latus, & exterior portio, per propositionem 2 huius, eam, quam ipse diuisi lateris partes, inter se habent rationem, quia duę rationes uni sunt eædem: illæ ex 11 quinti, & inter se eædem erunt. Hæ duæ igitur lineæ, portio scilicet exterior, & alterum trianguli latus, per secundam partem propositionis nonæ quinti, inter se æquales erunt. sicq; triangulum isosceles, cuius anguli ad basim, lineam scilicet παραλλήλως ductam, per priorem partem quintæ primi, inter se sunt

 æquales.

æquales. Quia uerò unus, ex prima parte propositionis 29 primi, uni: alter uerò, ex secunda parte eiusdem, alteri diuisi anguli parti est æqualis: ut ipsi isoscelis ad basim anguli, ex priore parte quintæ primi: sic propter æqualitatem iam, & diuisi anguli partes inter se æquales erunt, quare bisariam diuisus. Si igitur trianguli angulus bisariam secetur, &c. quod demonstrasse oportuit.

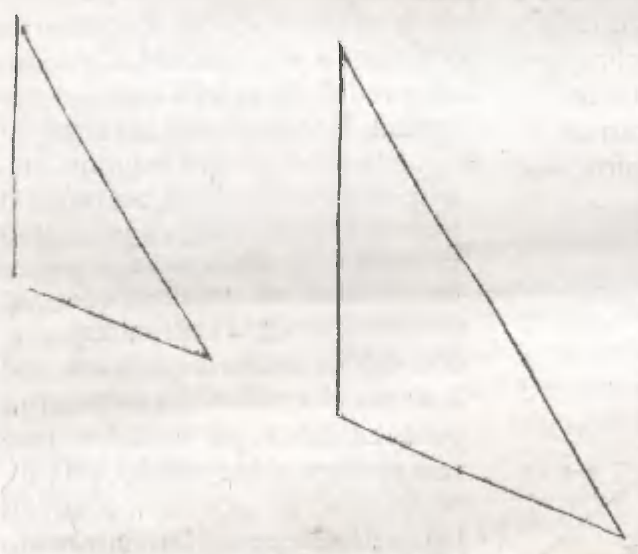
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ.

Τῶν ἰσογωνίων τριγώνων· ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· καὶ ὁμόλογοι. αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραί.

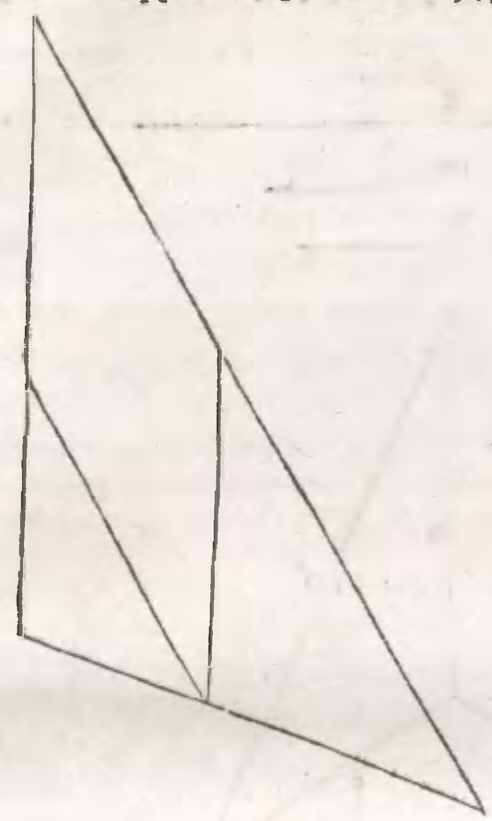
PROPOSITIO IIII.

Æquiangulorum triangulorum: proportionalia sunt latera, quæ circum æquales angulos: & similis rationis latera, quæ subter æquales illos angulos subtenduntur.

Fiant duo triangula, qualia propositio hæc quarta requirit, hoc modo. describatur primò unum qualitercunque, ducta deinde recta linea ad eius unam extremitatem per propositionem 23 primi, unus angulus uni, ad alteram deinde, uersus illam & eandem partem, alius alij trianguli angulo æqualis constituatur, ac continuatis duabus illis rectis donec concurrant, triangulum hoc, ei quod prius descriptum est, æquiangulum erit. Dico ergo nunc, cum sint triangula æquiangula, quòd & illorum quæ sunt circa æquales angulos, latera, proportionalia sint: eiusdemque & similis rationis latera, quæ sub æquali bus angulis subtenduntur. Solent huius propositionis conclusionem alij aliter interpretari. Sunt enim, qui prioris rationis terminos, antecedentem puta & consequentem, in uno, posterioris uerò, in altero triangulo accipiunt, in hæc uerba. In qua ratione sunt quælibet duo latera circa unum angulum in uno: in eadem sunt etiam duo, circa angulum sumpto æqualem, latera, in triangulo altero. Præterea sunt, qui antecedentes in uno, in altero uerò triangulo consequentes rationum terminos accipiunt, hoc modo. In qua ratione sunt quælibet duo latera, duos in duobus triangulis æquales inter se angulos subtendentia: in eadem sunt etiam singula reliqua ad sua singula. Cuius sane conclusionis duplex interpretatio, cum in scholis recepta sit, utriusque etiam demonstrationem adducendam duximus. Prioris igitur talis esto. Coniungentur triangula sic, ut unum unius & alterum latus trianguli alterius sit linea una: utque anguli etiam, ad hæc latera exteriores, ipsis medijs, uterque suo remotiori, sint æquales. Et quoniam in duas rectas, quæ sunt extrema horum triangulorum latera, ex duobus lateribus composita recta linea incidit, cum qui sic describuntur anguli, ex structura & propositione 17 primi (æquali tamen pro æquali angulo sumpto) duobus rectis angulis minores sint: in eadem parte hæc duo latera, uel has duas rectas continuatas concurrere, ex quadam communi noticia, necesse est. Continuentur ergo ut concurrant. Et quoniam id quod sic describitur, ex prima parte propositionis



positionis 28 primi, bis usurpata, parallelogrammum esse constat, parallelogrammi insuper latera opposita, ex propositione 34 primi, inter se æqualia sunt: per propositionem 2 huius & permutatam rationem utroque bis usurpato, æquali subinde pro æquali linea sumpta, ex æqua ratione, quantum ad priorem conclusionis interpretationem, propositioni satisfactum erit. Vel, per propositionem secundam huius, bis usurpatam, cum duæ rationes uni eædem sint, atque illæ sic, ex propositione 11 quinti, inter se eædem: & posterior conclusionis interpretatio manifesta erit. Aequiangulorum igitur triangulorum, proportionalia sunt latera, quæ circum æquales angulos: & similis rationis latera, quæ subter æquales illos angulos subtenduntur. quod demonstrasse oportuit.



APPENDIX.

Et licet utraque conclusionis interpretatio, ut diximus, in scholis recepta sit, tamen cum non conueniat ex unius propositionis hypothesibus duplicem conclusionis colligere interpretationem, quòd ex nostra sententia, prior posteriori interpretationi præferenda sit, lectorem scire uolumus. Habet tamen & posterior suam defensionem, cum sit, ut conijcere licet, ex propositione 14 huius petita.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχῃ· ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα· καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ' ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

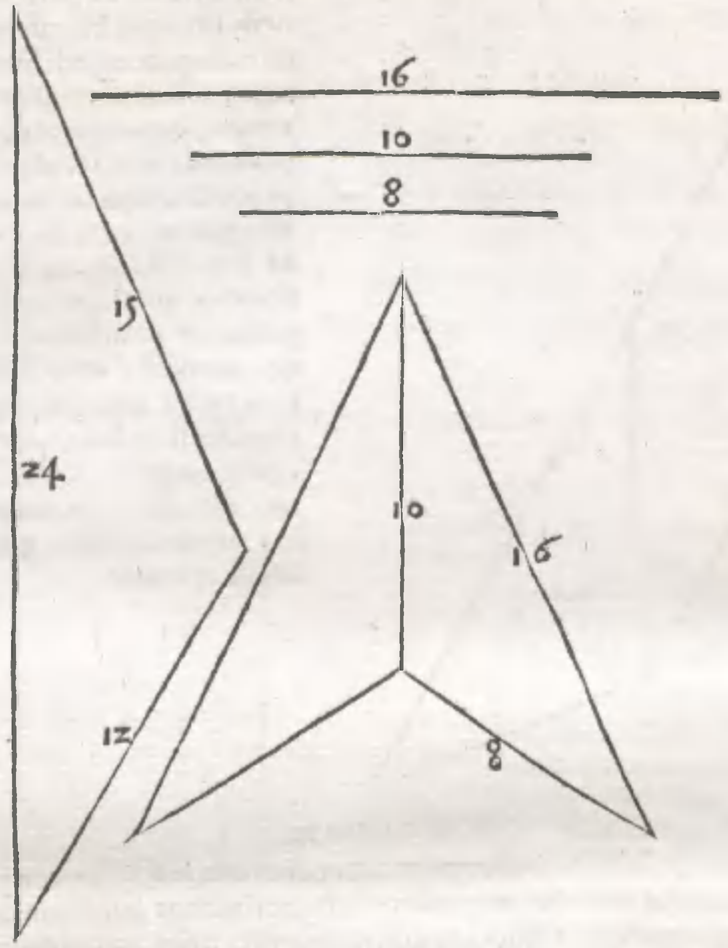
PROPOSITIO V.

Si duo triangula latera proportionalia habuerint: æquiangula erunt triangula: & æquales habebunt angulos, sub quibus similis rationis latera subtenduntur.

Describatur primò triangulum qualitercunque, ex tribus deinde rectis lineis alijs quæ eas inter se quas descripti trianguli latera, rationes habent, aliud triangulum, per propositionem 22 primi, constituatur. Erunt autem descripta duo triangula, qualia propositio hæc quinta requirit: quare dico, quòd ea etiam æquiangula sint, angulos item qui sub similis rationis lateribus subtenduntur, æquales habeant. Constituantur ad unum utriusuis trianguli latus, atque ad eiusdem lateris extremitates, ex illa parte quæ est extra triangulum, per propositionem 23 primi, duo anguli, ad utranque nimirum extremitatem unus, duobus in altero triangulo angulis æquales. Et quoniam per continuationem linearum, illo triangulo clauso, tertius angulus

 huius,

huius, tertio alterius triãguli angulo, ex corollario propositionis 32 primi, est æqualis: hæc duo triangula primò æquiangula, atq; inde, ex propositione 4 huius, late-



rum etiam proportionalium erunt. Duo igitur simul composita triangula, per propositionem 11 quinti, & nonam eiusdem, utroq; bis sumpto, æquilatera, per octauam deinde & 4 primi, uel octauam solũ, ter repetitam, etiam æquiangula erunt. Quare per communem illam notitiam, Quæ uni sunt æqualia, &c. quantum satis fuerit ea repetita, infertur tandem conclusio, triangula scilicet talia proposita, inter se etiam æquiangula esse: atq; insuper, quod anguli in utroq;, sub quibus similis rationis latera subtenduntur, æquales sint. Si duo igitur triangula latera proportionalia habuerint: æquiangula erunt triangula: & æquales habebũt angulos, sub quibus similis rationis latera subtenduntur. quod demonstrasse oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ς.

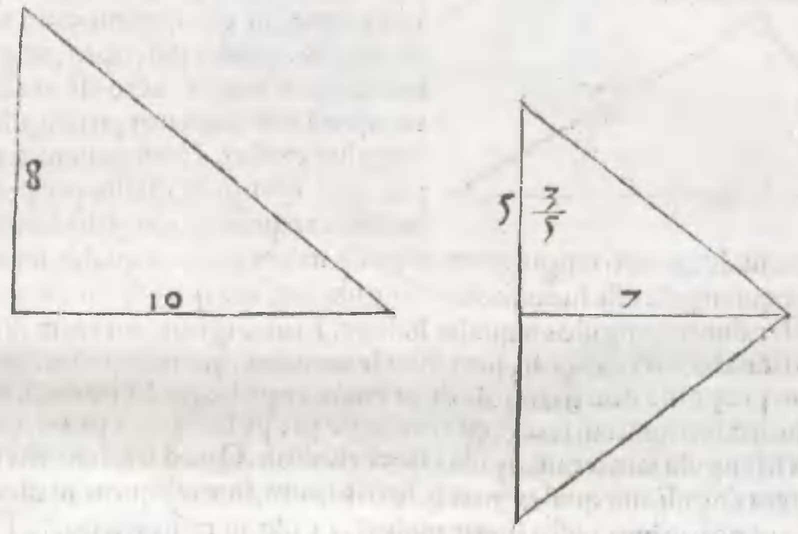
Ἐὰν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον· ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα· καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ᾽ ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

PROPOSITIO VI.

Si duo triangula unum angulum uni angulo æqualẽ, circa item æquales angulos latera proportionalia habuerint: æquiangula erunt triangula: & æquales habebunt angulos, sub quibus similis rationalis latera subtenduntur.

Describatur

Describatur primò triangulum, ducatur etiam recta quædam linea, ad cuius extremitatem deinde alteram, per propositionem 23 primi, angulo, qui sit uni ex triangulo æqualis, constituto, fiat ut hæ rectæ eam, quam in triangulo, circa sumptum angulum latera, inter se habeant rationem, & coniunctis extremitatibus tertia quadam linea, quod sic describitur triangulum, & prius descriptum, huiusmodi qualia hæc propositio requirit, triangula erunt: dico ergo nunc, quòd & æquiangula sint hæc eadem triangula: angulos item, qui sub similis rationis lateribus subtenduntur, æquales habeant. Constituantur ad unum utriusuis trianguli latus, atq; ad eiusdem lateris extremitates, ex illa parte quæ est extra triangulum, per 23 primi, duo anguli, duobus in triangulo altero angulis æquales, Et quoniam per continuatio-



nem linearum illo triangulo clauso, tertius angulus huius, tertio alterius trianguli angulo, ex corollario propositionis 32 primi, est æqualis: hæc duo triangula primò æquiangula, atq; deinde ex propositione 4 huius, laterum etiam proportionalium erunt. Sed quia rationũ quantitatibus inter se collatis, inde, atq; etiã ex propositionis hypothesi, duæ rationes eidem eædem sunt, cum hæ duæ, ex propositione undecima quinti, etiam inter se eædem sint, unam deinde uel antecedentem uel consequentem (pro ut quidem instituta collatio fuerit) quantitatem habeant: duo illa simul composita triangula, per propositionem 9 quinti, quartam deinde primi, & æquilatera & ęquiangula erunt. Quia uerò unum ex his uni ex datis, per structuram est æquiangulum, & alteri datorum idem æquiangulum erit: quare sic & ipsa inter se, per communem quandam noticiam: proportionalium igitur laterum, ex propositione 4. Si igitur, &c. quod demonstrasse oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ.

Ἐὰν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἄλλας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, τῶν δὲ λοιπῶν ἑκατέραν ἅμα, ἤτοι ἐλάσσονα, ἢ μὴ ἐλάσσονα ὀρθῆς· ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας περὶ ἃς ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί.

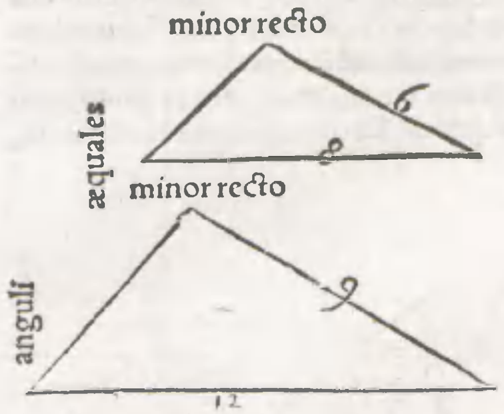
PROPOSITIO VII.

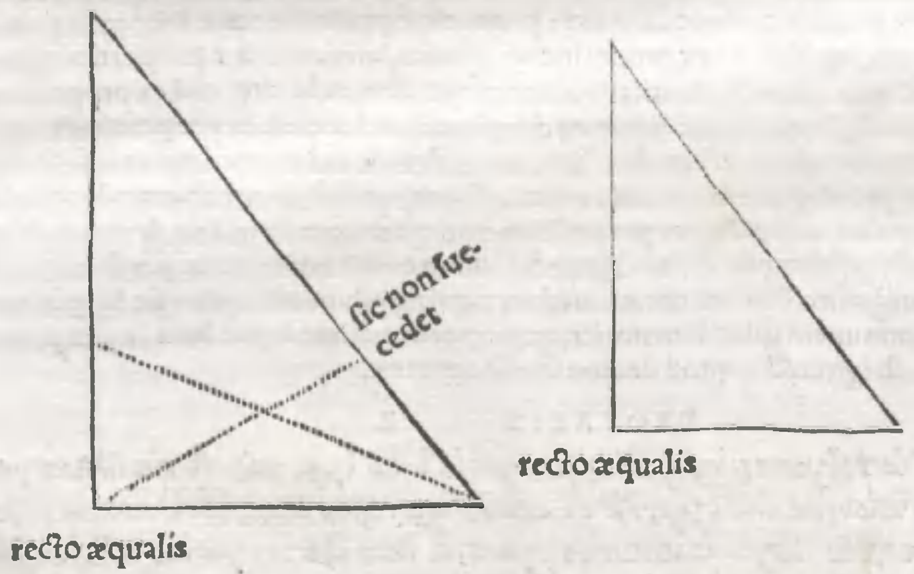
Si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem, circa autẽ alios angulos latera proportionalia habuerint, reliquorum uerò utrunque simul aut minorem, aut non minorem recto: æquiangula erunt triangula,

&

& æquales habebunt angulos, circa quos proportionalia sunt latera.

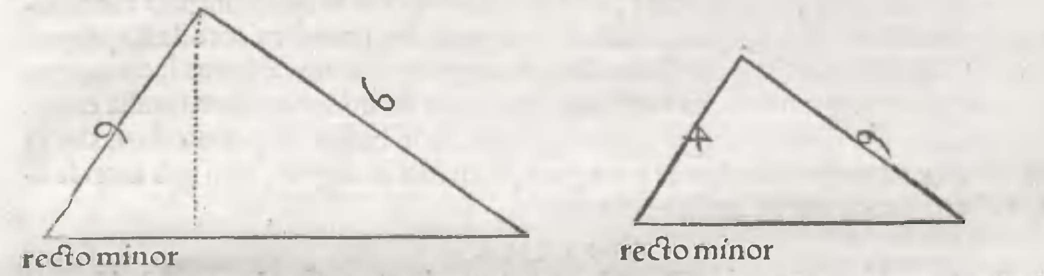
Describatur triangulum, ducatur etiam recta quædam linea, ad cuius alteram extremitatem angulus, uni ex triangulo æqualis, per 23 primi constituatur. Ex duobus deinde trianguli lateribus, quæ sunt circa alium, quàm cui æqualem posuimus angulum, proportionales partes desumptæ, una in alterutra linea, ab angulo iam formato incipiendo, signetur: altera uerò pars, ex hoc puncto, angulo formato subtendatur: quæ ubi alterā lineam attigerit, quanta ipsa, ut tertium trianguli latus, esse debeat, apparebit. Danda autem est opera in hac alterius proportionalis partis applicatione, ut quemadmodum tertius in triangulo, primò descripto, angulus minor uel non minor recto est, ita & in altero, quod iam formatur, triangulo, tertius angulus existat. Erunt autem iam descripta duo triangula, qualia propositio hæc septima requirit: dico igitur, siue uterq; ex reliquis horum duorum triangulorum angulis, minor recto, æqualis, seu maior recto, fuerit: æquiangula esse huiusmodi triangula, atq; eos qui sub similis rationis lateribus subtenduntur, angulos æquales habere. Primò igitur, aut enim illi duo, inter proportionalia latera anguli, sunt inter se æquales, aut inæquales. Si æquales fuerint, cum proposita duo triangula duos etiam angulos, ex hypothesi, inter se æquales habeant, tertius item tertio, ex corollario propositionis 32 primi, ęqualis sit: huiusmodi triangula iam æquiangula esse cōcluditur. Quod si ijdem inter proportionalia latera anguli, inæquales inter se fuerint, tum, siue reliquorum uterq; simul, aut minor, aut non minor recto fuerit, maiori angulo, ut minori æqualis fiat, per re-





ctam quandam lineam, quemadmodum docet propositio in primo 23, succurrendum est. Et quoniam duo triangula sunt, partiale unum, & alterum positum, quorum duo anguli unius, duobus alterius trianguli angulis æquales sunt, unus quidem uni, ex hypothesi, alter uerò alteri, ex structura per propositionem 23 primi, cum & tertius nunc tertio angulo, ex corollario propositionis 32 primi, æqualis sit: triangula hæc, partiale scilicet & alterum positum, æquiangula, hinc etiam ex proposi-

propositione 4 huius, laterum proportionalium erunt. Quoniam autem rationum quantitatibus inter se collatis, inde, atq; etiam ex propositionis hypothesi, duæ rationes eidem eædem sunt, cum hæ duæ ex prop. 11 quinti, etiā inter se eædem sint, unam insuper quantitatem communem habeant: quæ reliquæ duæ harū similium rationum quantitates sunt, alterius nimirum partialis trianguli duo latera, ex propositione nona quinti inter se æquales erunt. Triangulum igitur isosceles, habens angulos, qui ad basim sunt, ex priore parte propositionis quintæ primi, inter se æquales, id quod in genere obseruandum est. Quòd si iam ex proposito receptum sit, utrunq; reliquorum non minorem recto esse, cum sic propter æqualitatem, & alter huius isoscelis angulus, non minor, hoc est rectus uel maior recto existat: duo in triangulo anguli, non minores duobus rectis existentes, collocentur. Id autem, cum obstante propositione in primo 17, per quam omnis trianguli duo quilibet anguli, duobus rectis minores sunt, nullo modo esse possit: neq; etiam inæquales, sed æquales inter se inter proportionalia latera anguli erunt. Quare, &c. Sed esto iam ex proposito utrunq; reliquorum minorem recto esse: cum sic alter, huius iso-



scelis, ad basim positus angulus, recto minor sit, ac per consequens huius isoscelis angulus exterior, per prop. 13 primi, recto maior: & ille qui in triangulo altero, ex corollario allegato, eidem exteriori est æqualis, similiter recto angulo maior erit, cum tamen sit positus recto minor, quod nunc est impossibile, unum & eundem angulum, iam minorem, atq; deinceps angulo recto maiorem esse. Illos igitur sub proportionalibus lateribus comprehensos angulos, non inæquales, sed æquales inter se esse oportet: quare reliquus angulus reliquo, ex corollario, ęqualis erit. Aequiangula igitur triangula huiusmodi proposita. Si duo igitur triangula unum angulum uni angulo æqualem, circa autem alios, &c. quod demonstrasse oportuit.

APPENDIX.

Præcepimus autem in structura, maiori angulo, ut minori æqualis fieret, succurrendum esse, & rectè quidem. Quòd si contra aliquis, minorem ad æqualitatem maioris, per eandem propositionem 23 primi, augere uellet, tam facili opera propositionis demonstrationem inde colligere posset.

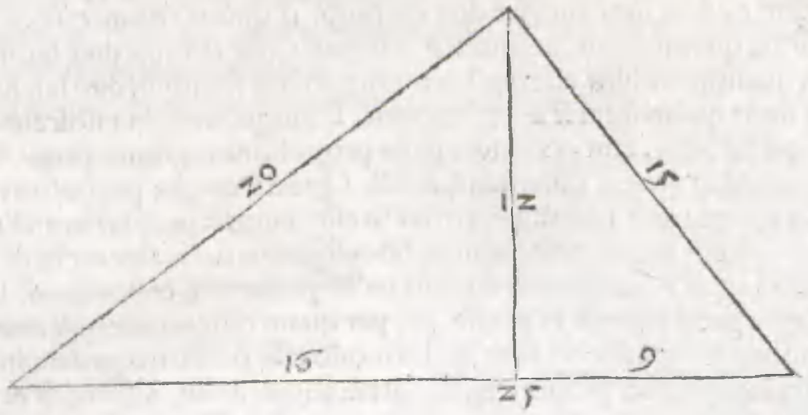
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η.

Ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ· τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα, ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις.

PROPOSITIO VIII.

Si in rectangulo triangulo ab angulo recto in basim perpendicularis ducta fuerit: quæ ad perpendicularem triangula, cùm toti triangulo, tum ipsa inter se similia sunt.

Describatur triangulum rectangulum, demittatur etiam ab eius angulo recto, per propositionem 12 primi, ad suam subtensam linea perpendicularis: dico quòd partialia illa triangula, totali, atq; etiam sibiipsis, similia sint. Cum enim, ex quadam communi noticia, omnes recti anguli inter se æquales sint, partialium insuper



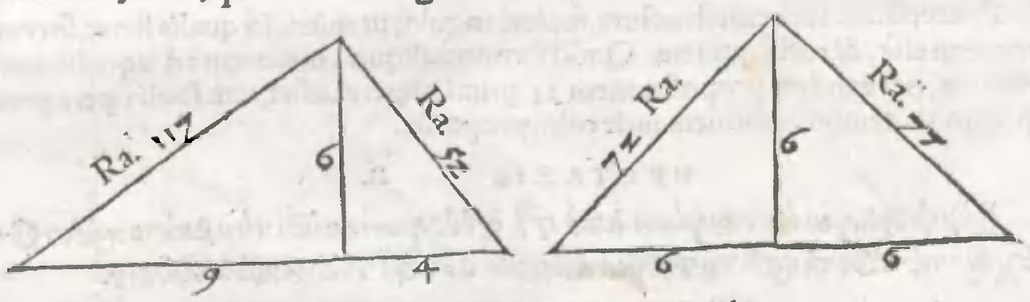
triangulorum utrunq;, ut apparet, unum angulum cum totali triangulo communem habeat: hæc tria triangula, totale & duo partialia, primò ex corollario propositionis 32 primi, æquiangula: statim deinde, ex propositione 4 huius, laterum proportionalium: atq; tandem, ex similium figurarum definitione, etiam similia erunt. Si in rectangulo igitur triangulo, ab angulo recto in basim perpendicularis ducta fuerit: quæ ad perpendicularem triangula, cùm toti triangulo, tum ipsa inter se similia sunt, quod demonstrasse oportuit.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν· ὅτι, ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ· ἡ ἀχθεῖσα τῶν τῆς βάσεως τμημάτων μέση ἀνάλογόν ἐστι. Καὶ ἔτι τῆς βάσεως καὶ ἑνὸς ὁποτερουοῦν τῶν τμημάτων, ἡ πρὸς τῷ τμήματι πλευρὰ, μέση ἀνάλογόν ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifestum est, si in rectangulo triangulo ab angulo recto in basim perpendicularis ducta fuerit; hanc ductam inter basis segmenta mediam proportionalē esse. Et insuper, inter ipsam basim, & utrunq; segmentum, latus, quod ad idē segmentum ponitur, mediū proportionale.



Numeri uel quantitates proportionales.

9	6	4	6	6	6
13	√117	9	12	√72	6
13	√52	4	12	√72	6

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ.

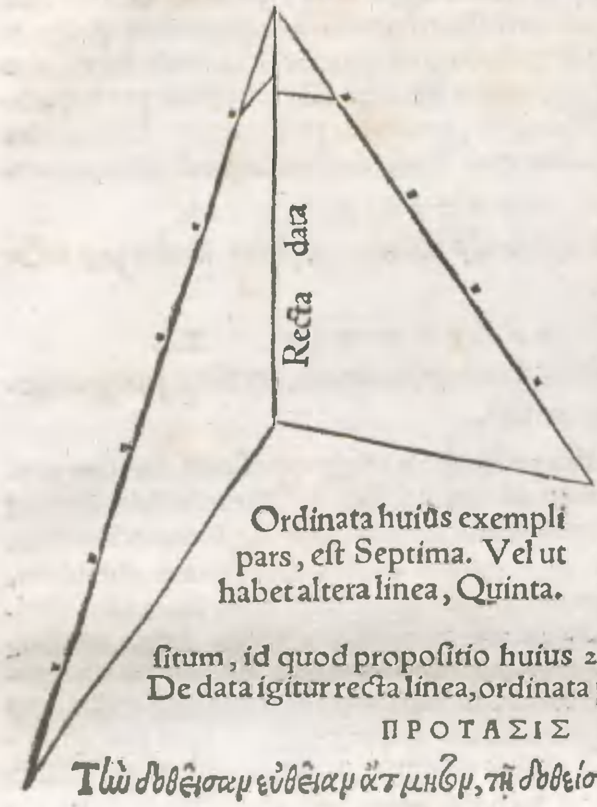
Τῆς δοθείσης εὐθείας, τὸ προσταχθὲν μέρος ἀφελεῖν.

PROPOSITIO

PROPOSITIO IX.

De data recta linea, ordinatam partem abscindere.

Sit data recta linea, atq; propositum, ordinatam ab ea partem, utpote septimam, tertiam, tredecimā, uel aliam quamcunq;, abscindere. Alia igitur recta, satis longa, lineæ rectæ datæ angulariter applicetur, in qua officio circini, utcunq; extensi, ab angulo descendēdo, septem uel tredecim, hoc est tot, quot quidem ordinatæ partis, quæ abscindi debet, denominatio requisiuerit, æquales partes signentur, finis deinde septimæ (si quidē illa pars ordinata fuerit) cum altera datæ extremitate, linea quadam recta, ut triangulum fiat, iungatur. Quòd si iam à fine primæ partis, huic ultimò ductæ rectæ, tanquam uni trianguli lateri, per propositionem 31 primi, parallela ducta, eaq; ad datam rectam usque continuata fuerit, factum iam erit propositum, id quod propositio huius 2 & composita ratio demonstrabūt. De data igitur recta linea, ordinata pars abscissa est. quod fieri oportuit.



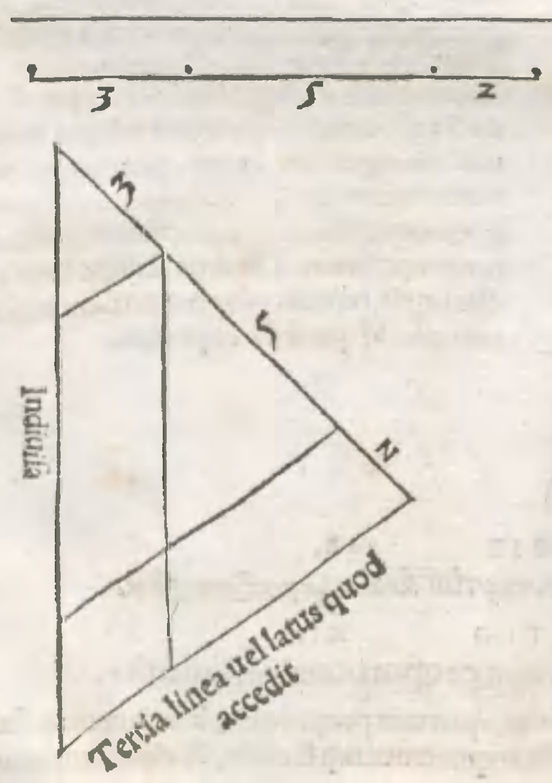
Ordinata huius exempli pars, est Septima. Vel ut habet altera linea, Quinta.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ I.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄτμητον, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τετμημένῃ ὁμοίως τεμεῖν.

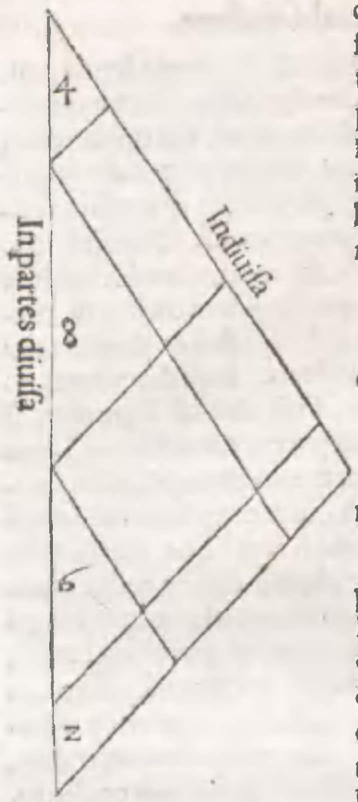
PROPOSITIO X.

Datam rectam lineam non sectam, datę rectæ lineæ sectę similiter secare.



Sint duæ rectæ lineæ datæ, una quidem indiuisa, altera uerò in partes, quot & qualitercunq; diuisa, atq; propositum, indiuisam in partes secūdum rationes partium diuisæ diuidere. Applicentur lineæ angulariter, accedat etiam tertia linea, qua liberæ datarum extremitates, ut triangulum fiat, iungantur, à punctis tandem diuisionū singulis, tertiæ lineæ parallelæ ductæ, atq; ad indiuisam lineam usq; continuatæ: propositioni satisfactū erit, atq; demonstratio talis. Ducantur à punctis diuisionum singulis, illo tantùm, quod est tertiæ lineæ proximum, dempto, indiuisæ lineę parallelæ, atq;

atque hæ ad tertiam usque lineam, ut parallelogramma fiant, continuentur. Et quoniam parallelogrammorum locorum latera opposita, per propositionem 34 primi, inter se æqualia sunt: triangula etiam hic appareant, quorum duo latera, per lineam tertio lateri parallelam, diuisa sunt: per propositionem 2 huius, toties, quoties secta diuisa fuerit, uno minus, eam repetendo, æqualibus subinde pro æqualibus lineis sumptis, constabit propositum. Linea enim indiuisa ad rationē diuisę diuisa est. quod fieri oportuit.



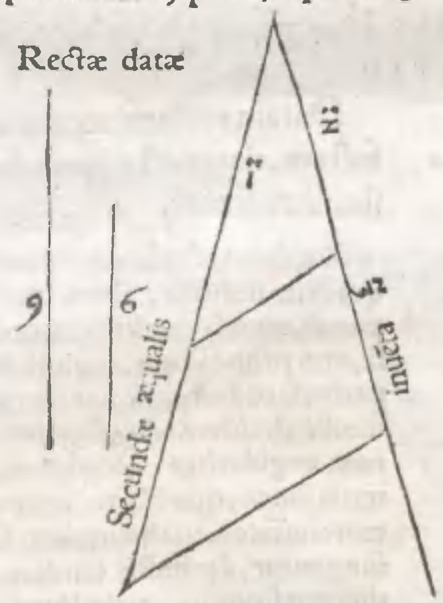
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, τρίτην ἀνάλογον προσευρεῖν.

PROPOSITIO XI.

Duabus datis rectis lineis, tertiam proportionalem inuenire.

Sint duæ rectæ datæ, atque propositum, tertiam proportionalem, ad quam scilicet se habeat secūda, sicut ad hanc secundam linea prima, inuenire. Connectantur rectæ datæ, ut angulum qualemcunque comprehendant, & claudatur triangulum recta quadam linea alia. Productis deinde uel continuatis rectis datis, ex parte tertij lateris, quæ est linea modò ducta, ultra triangulum, uni earum, in continuata parte lineæ alterius, per propositionem 3 primi, æqualis signetur, ab huius fine postea, ubi per propositionem 31 primi, tertio trianguli lateri parallela ducta fuerit, cū hæc eadem in altera pro longata per suam interfectionē tertiæ proportionalis quantitatem ostendat, propositioni satisfactum erit. Quoniam enim ad unum totalis trianguli latus recta parallela ducta est, cum hæc parallela reliqua nominati trianguli duo latera, per propositionem 2 huius, proportionaliter secet: æquali pro æquali linea sumpta, statim concluditur propositum: Duabus scilicet datis rectis lineis, tertiam proportionalem inuentam esse. id quod fieri oportuit.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ.

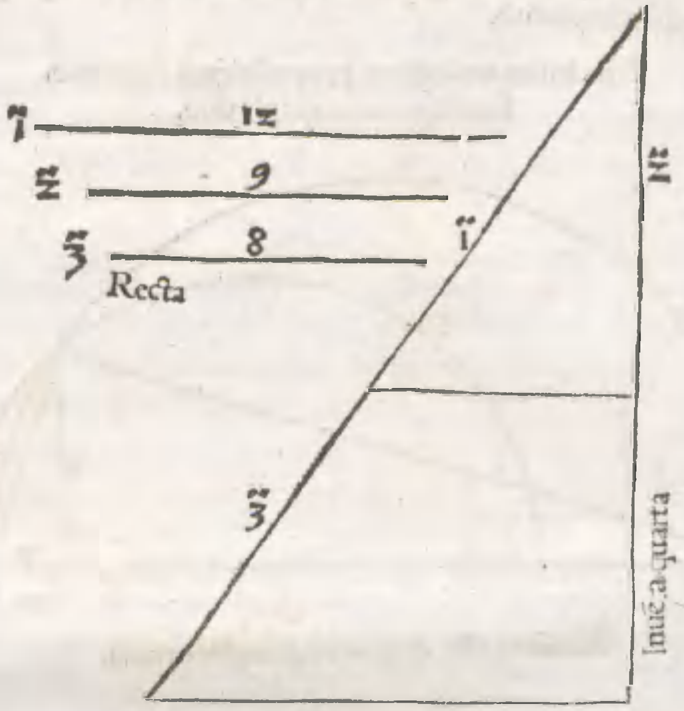
Τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν, τετάρτην ἀνάλογον προσευρεῖν.

PROPOSITIO XII.

Tribus datis rectis lineis, quartam proportionalem inuenire.

Sint tres rectæ datæ, atque propositum, quartam proportionalem inuenire. Iungantur prima recta & tertia, ut angulum qualemcunque faciant, & claudatur triangulum.

gulum. Secunda deinde, uel alia, secundæ æqualis, primæ ad amussim iuncta, tertia uerò ultra triangulum continuata, à fine huius secundæ, ad continuatam usque, tertio trianguli lateri, per propositionem 31 primi, parallela ducatur: & erit portio, rectæ tertiæ & huic sectioni interiacens, linea illa quæ quæritur. Hoc autem patet ex 2 propositione huius, æquali pro æquali linea sumpta. Tribus igitur datis rectis lineis, quarta proportionalis inuenta est. quod fecisse oportuit.



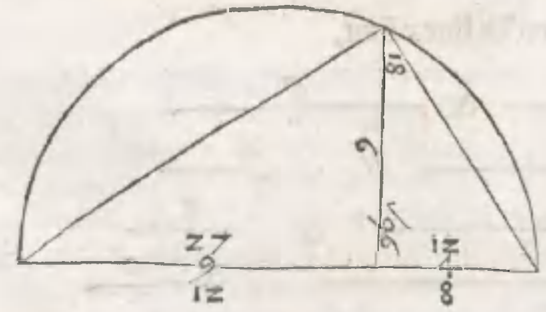
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, μέσην ἀνάλογον προσευρεῖν.

PROPOSITIO XIII.

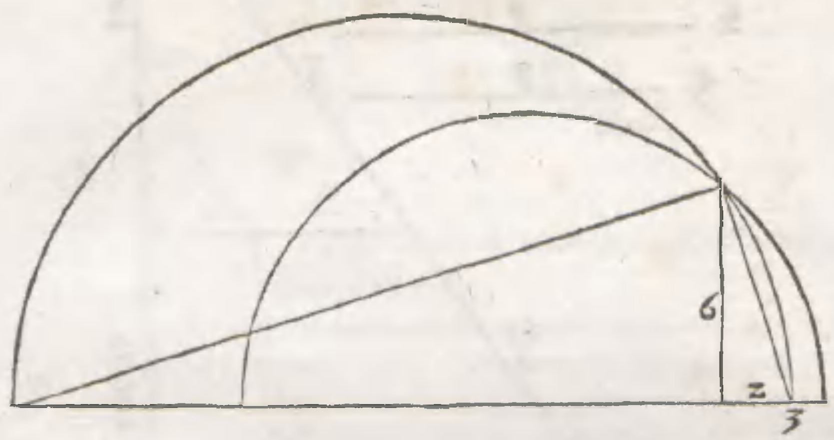
Duabus datis rectis lineis, mediam proportionalem inuenire.

Sint duæ rectæ datæ, atque propositum, mediam ipsarum proportionalem, ad quam scilicet se habeat una ex datis, sicut hæc ipsa media ad alteram, inuenire. Coniungatur ad amussim duæ rectæ datæ: ex his deinde cōposita bifariā diuisa, ex puncto diuisionis super ipsam totam, ad interuallum alterutrius medietatis, semicirculus describatur. Quòd si tandem à puncto coniunctionis datarum, tanquam à puncto in hac recta dato, ad angulos rectos linea ad circumferentiam usque ducta fuerit: quòd hæc ducta, media datarum proportionalis sit, sic demonstrabitur. Iungantur extremitates rectæ, ex duabus compositæ, cum interfectione ad rectos ductæ & semicircūferentiæ, duabus rectis lineis. Et quoniā angulus in semicirculo, ex prima parte propositionis 31 tertij, rectus est, cum ab eo ad basim perpendicularis

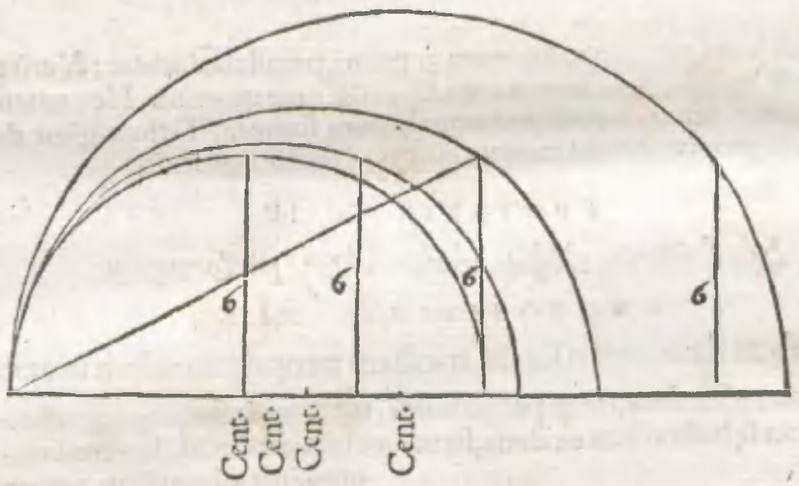


pendicularis recta demissa sit: ex priore parte corollarij propositionis 8 huius, res tandem demonstrata erit, lineam scilicet illam, quam diximus, mediam inter datas proportionalem esse. Duabus igitur datis rectis lineis, media proportionalis inuenta est, quod fieri oportuit.

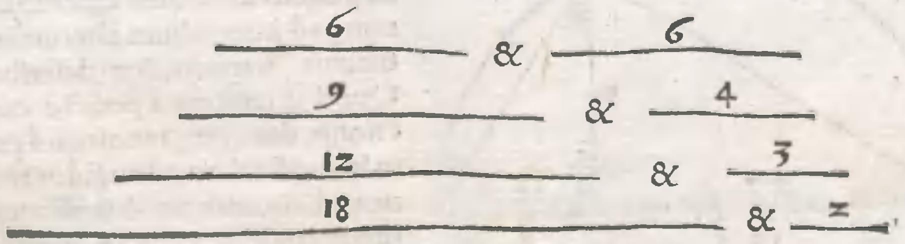
Alia huius tredecimæ propositionis figuratio.
Sunt autem exempla duo.



Similiter alia, quatuor exemplis ornata.



Datæ autem rectæ lineæ sunt,



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ.

Τῶν ἴσων τε, καὶ μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν παραλληλογράμμων· ἀν-
τιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. Καὶ ὧν παραλληλογράμμων,
μίαν

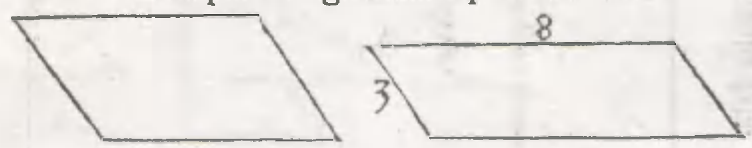
μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν, ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα.

PROPOSITIO XIIII.

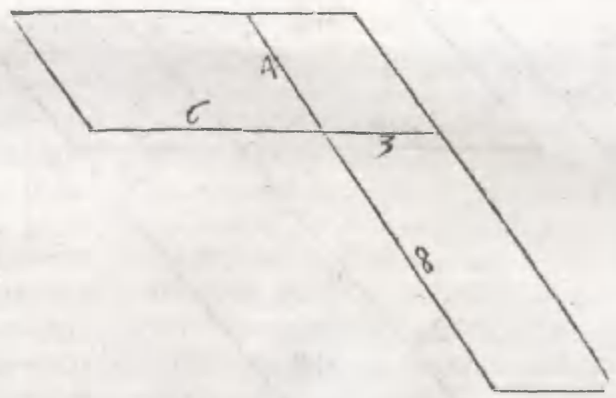
Æqualium, & unum uni æqualem habentium angulum, parallelogrammorum: reciproca sunt latera, quæ sunt circa æquales angulos. Et quorum parallelogrammorum unum angulum uni æqualem habentium, reciproca sunt latera, quæ sunt circa æquales angulos: æqualia sunt & illa.

Sint duo parallelogramma æqualia: & esto, quòd unus angulus unius, sit uni alterius parallelogrammi angulo ęqualis: dico, horum parallelogrammorum latera, circa æquales angulos, reciproca esse. Reciproca autem dico ea parallelogramma,

Duo parallelogramma æqualia data. &c.

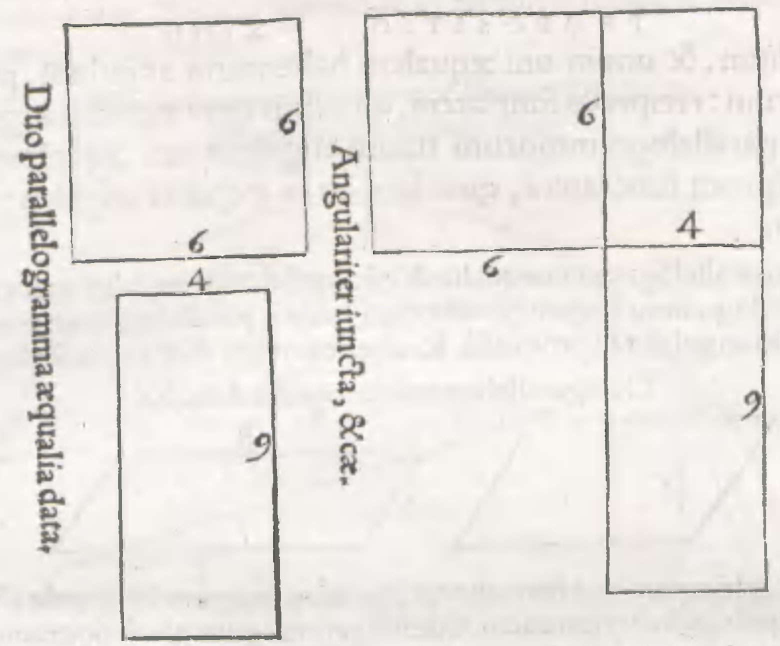


quorum unius longitudo ad latitudinem alterius eam, quam longitudo alterius ad latitudinem prioris, habet rationem. Coniungantur igitur parallelogramma, ut angulum faciant, utque anguli illorum æquales, sint circa unum punctum, longitudo insuper unius & latitudo parallelogrammi alterius adamussim unam lineam constituant. Quibus sic coniunctis, & reliqua duo circa æquales angulos latera, una linea erunt, sequeretur enim aliàs, si alterutrum horum cōtinueretur, siue per propositionem 15 primi, & communem illam noticiam, Eidem æqualia, &c. seu per propositionem 13 eiusdem primi bis usurpatam, & communem illam noticiam, Si ab



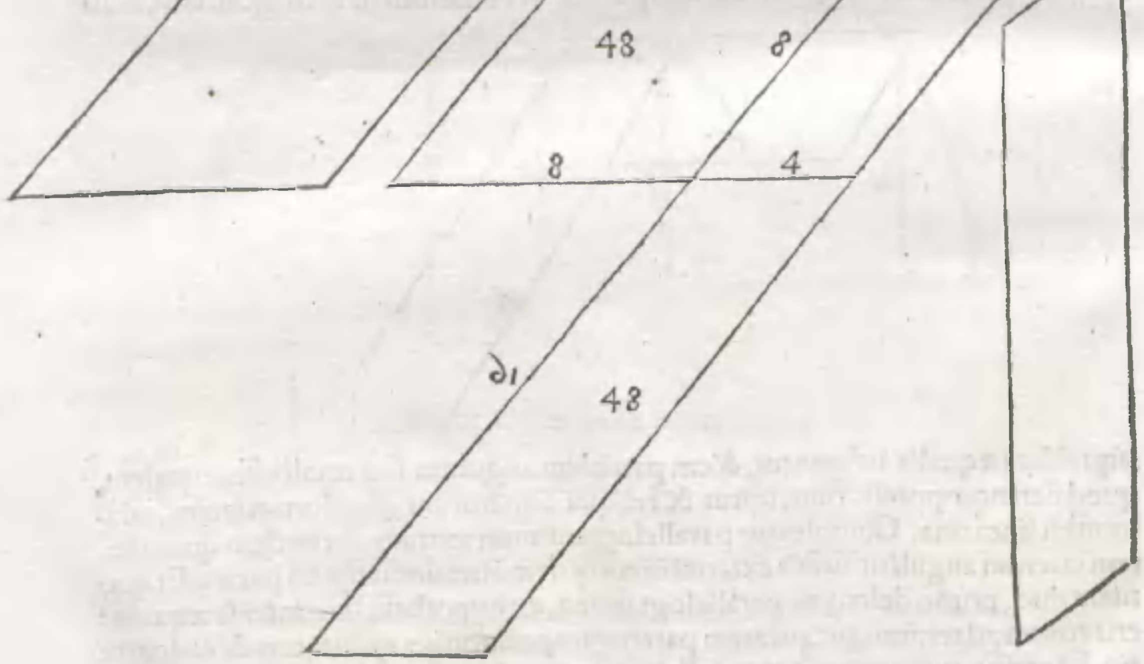
æqualibus æqualia auferantur, &cæ. partialem angulum suo totali esse æqualem, quod fieri non potest. Sunt igitur & reliqua duo horum angulorum latera, adamussim linea una. Compleatur parallelogrammum tertium, secundum quantitatem laterum anguli utriusuis exterioris: eritque demōstrationis figura parata. Et quoniam duo, primò descripta, parallelogramma, ex hypothesi, sunt inter se æqualia: erit eorum ad tertium, per priorem partem propositionis 7 quinti, una & eadem ratio. Et rursus, quoniam etiam parallelogrammorum, quæ sub eodem uertice sunt posita, in eadem qua ipsæ bases, per primam huius, sunt ratione, hac prima propositione, deinde 11 quinti, utraque bis usurpata, prior pars manifestabitur. Quòd nunc etiam, quantum ad partem posteriorem, parallelogramma, quæ unum angulum uni æqualē, latera etiā circa illos equales angulos reciproca habeāt: inter se æqualia sint,

sint, cum, ex eadem prima huius, bis usurpata, & 11 propositione quinti, parallelogramma posita cum tertio unam & eandem rationem habeant: per priorem par-



tem propositionis 9 quinti, id tandem retinebitur. Aequalium igitur & unum uni æqualem habentium angulum, &c, quod demonstrasse oportuit.

Tertia huius propositionis geometrica figuratio.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ.

Τῶν ἴσων, καὶ μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν τριγώνων· ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραί, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. Καὶ ὧν μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραί, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα.

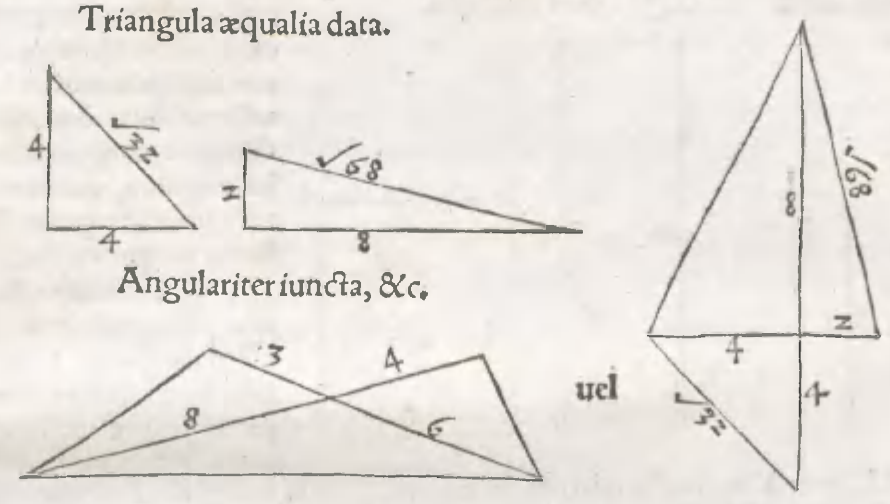
PROPOSITIO

PROPOSITIO XV.

Æqualium, & unum uni æqualem habentium angulum, triangulorum: reciproca sunt latera, quæ sunt circa æquales angulos. Et quorum triangulorum unum angulum uni æqualem habentium reciproca sunt latera, quæ sunt circa æquales angulos: æqualia sunt & illa.

Sint duo triangula æqualia, & esto quod unus angulus unius sit uni alterius trianguli angulo æqualis: dico, horum triangulorum latera, circa æquales angulos, reciproca esse. Coniungantur triangula, ut angulum faciant, utque anguli illorum æquales, quemadmodum in præmissa, sint circa unum punctum, antecedens insuper in uno & suum consequens in triangulo altero, ad amussim unam lineam

Triangula æqualia data.



faciant: adamussim igitur sic, superiori ratione, & reliqua duo latera erunt. Describatur triangulum tertium, per lineam quandam rectam, ab uno angulo unius ad alterum, in eadem parte alterius trianguli angulum, ductam, eritque demonstrationis figura parata. Et quoniam duo, primò descripta, triangula, ex hypothesi, sunt inter se æqualia: erit eorum ad tertium, per priorem partem propositionis septimæ quinti, una & eadem ratio. Et rursus, quoniam etiam triangulorum quæ sub eodem uertice sunt posita, in eadem qua ipsæ bases, per propositionem primam huius, sunt ratione: per eandem igitur primam & propositionem 11 quinti, utranque bis usurpatam, prior pars manifestabitur. Quòd nunc etiam, quantum ad partem posteriorem, ex unius illorum anguli æqualitate, & reciprocis circa illos æquales angulos lateribus, æqualitas inferatur, non aliter atque posterior præcedentis propositionis pars, de parallelogrammis id retinebitur. Aequalium igitur & unum uni æqualem habentium angulum, triangulorum: reciproca sunt latera, quæ sunt circa æquales angulos. Et quorum triangulorum unum angulum uni æqualem habentium reciproca sunt latera, quæ sunt circa æquales angulos: æqualia sunt & illa. quod demonstrasse oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ις.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι· τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ, τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Καὶ ἐὰν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

PROPOSITIO XVI.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: quod sub extremis

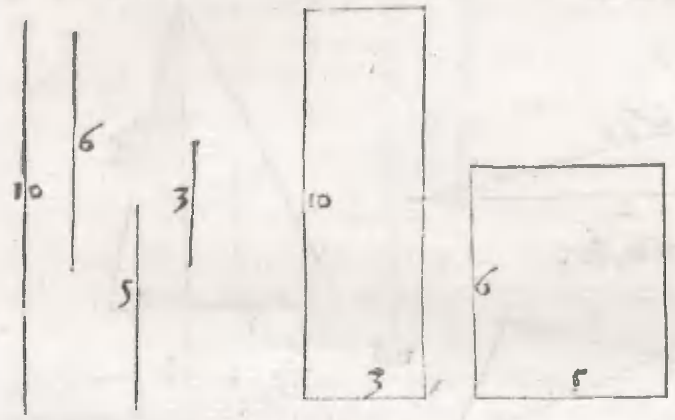
 compre-

comprehenditur rectangulum, æquale est ei, quod sub medijs comprehenditur rectangulo. Et si sub extremis comprehensum rectangulum, æquale fuerit ei quod sub medijs comprehenditur rectangulo: quatuor rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint quatuor rectæ lineę proportionales, prima scilicet ad secundam ut tertia ad quartam: dico rectangulum sub prima & quarta comprehensum, ei quod sub secunda & tertia comprehenditur rectangulo æquale esse. Describātur ex quatuor rectis proportionalibus duo rectangula, utrunq; ex suis lineis. Et quoniam primæ ad secundam, lateris scilicet unius ad latus rectanguli alterius, ex hypothesi, est ut tertiæ lineæ ad quartam, lateris nimirum huius ad latus illius: hæc duo rectangula, cum circa æquales angulos (omnes enim recti inter se ęquales sunt) latera reciproca habeant, ex propositione 14 huius, inter se æqualia erunt: quę est pars prior. Posterior iam, lineis scilicet quatuor rectis propositis, si rectangula sub prima & quarta, sub secūda item & tertia, cōprehensa, ex hypothesi inter se æqualia sint: illas tum lineas proportionales esse, sic patet. Cum rectangula, ex hypothesi, inter se æqualia sint, cumq; etiam omnes anguli recti inter se æquales: ipsa rectangula primò æquiangula erunt, atque deinde circa æquales angulos, ex priore parte propositionis 14 huius, latera reciproca habebunt, quæ est pars posterior. Si quatuor igitur rectæ lineæ proportionales fuerint: quod sub extremis comprehenditur rectangulum, æquale est ei, quod sub medijs comprehenditur rectangulo. Et si sub extremis comprehensum rectangulum, æquale fuerit ei quod sub medijs comprehenditur rectāgulo: quatuor rectæ lineæ proportionales erūt. quod demonstrasse oportuit.

Rectæ quatuor proportionales

Rectangula ex suis lineis descripta



ALIA HVIVS PROPOSITIONIS DEMONSTRATIO.

Quatuor rectis lineis expositis, dico, si hæ rectæ, ex hypothesi, proportionales fuerint, prima scilicet ad secundam ut tertia ad quartam: & quæ sub prima & quarta, sub secunda item & tertia linea comprehenduntur rectangula, inter se æqualia esse. Quòd si harum rectarum rectangula, quæ sub prima & quarta, subq; secunda & tertia comprehenduntur, ex hypothesi, inter se æqualia sint: & ipsas rectas proportionales esse oportere. Quantum igitur ad partem priorem, excitentur à duabus, primæ & secundæ, rectarum extremitatibus, utræ hæ fuerint, per propositionem 11 primi, duæ ad angulos rectos lineę: de priori deinde excitata, à cōmuni puncto incipiendo, recta quartæ æqualis, ab altera uerò, tertiæ datæ æqualis recta, per propositionē. 3 primi, abscindatur, cōpleanturq; parallelogrāma. Et quoniam prima ad secundam, ex hypothesi, est ut tertia ad lineam quartam, cum lineis tertiæ & quartæ æquales aliæ in parallelogrammis positæ sint, æqualibus illis pro tertia & quarta sumptis: descriptorum parallelogrammorum circa æquales angulos latera reciprocè proportionalia erunt: unum igitur parallelogrammum, ex priori parte propositionis 14 huius, alteri æquale. Quare cum unū sub prima & alia quadam recta

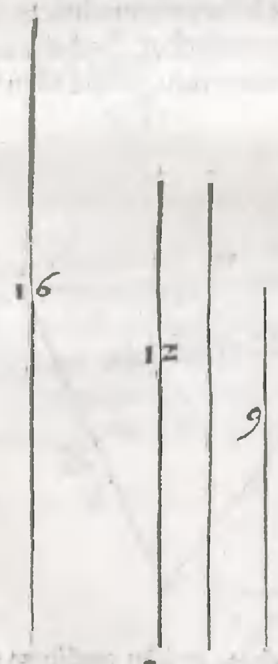
recta, quartæ æquali: alterum uerò sub secunda & alia, tertię æquali, recta linea contineatur, æquali pro æquali linea habita atque usurpata: prior pars nunc manifesta erit. Esto autem iam, quantum ad partem posteriorem, quòd sub prima & quarta comprehensum rectangulum, ei quod sub secunda & tertia cōprehenditur rectangulo, æquale sit: dico, quòd quatuor rectæ propositæ illo ordine proportionales sint. Eisdem namq; constructis, quoniam quod sub prima & quarta comprehenditur rectangulum, ex hypothesi, sub secunda & tertia comprehenso, æquale est: hæc descripta rectangula, cum unum quidem sub prima & alia quadam recta, quartæ æquali, alterum uerò sub secundæ æquali & tertia linea contineatur, æqualitas insuper linearum nullam uarietatem inducat, inter se æqualia erunt, atq; æquiangula etiam, propterea quòd omnes recti anguli inter se sunt æquales. Aequalia uerò & æquiangula parallelogramma, cum ex priore parte propositionis 14 huius, latera circa æquales angulos reciprocè proportionalia habeant: iam statim propter æqualitatem linearum, superiori ratione, & posterior huius propositionis pars manifesta erit. Si igitur quatuor rectæ lineæ, &c. quod demonstrasse oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ.

Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι· τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ. Καὶ ἐὰν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ᾖ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ· αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

PROPOSITIO XVII.

Si tres rectæ lineæ proportionales fuerint: quod sub extremis comprehenditur rectangulum, æquale est ei quod à media quadrato. Et si sub extremis comprehensum rectangulum æquale fuerit ei, quod à media quadrato: tres rectæ lineæ proportionales erunt.



prima se. tertia

Sint tres rectæ lineæ proportionales, prima scilicet ad secundam, ut hæc ipsa secunda ad tertiam: dico, rectangulum sub prima & tertia comprehensum, ei quod à media describitur quadrato, æquale esse. Quoniam enim ad secundam linea prima, hæc deinde eadem secunda ad tertiam lineam confertur, pro secunda collatione, puncto inter secundam lineam & tertiam ad placitum sumpto, ad id per propositionem 2 primi, linea recta secundæ æqualis ponatur, & erit ex priore parte propositionis 7 quinti, secundæ, & suæ æqualis ad lineam tertiam una & eadem ratio. Quatuor igitur cum sint lineæ proportionales, duarum item æqualium eadem sit quæ est unius, bis sumptæ, lineæ consideratio prior propositionis pars, ex pręcedentis propositionis parte priore concludi poterit, atq; deinde etiam, ex posteriore ipsa posterior. Si igitur tres rectæ lineæ proportionales fuerint: quod sub extremis, &c. quod demonstrasse oportuit.

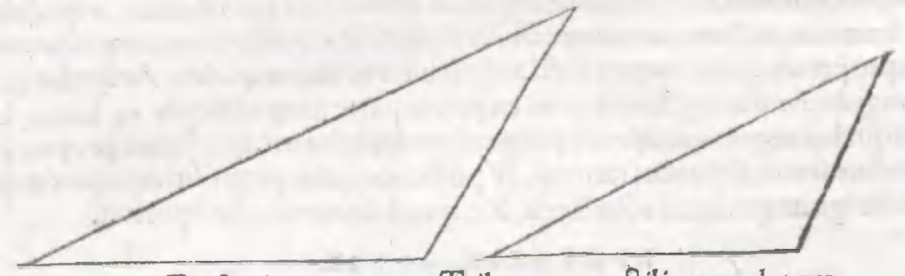
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΗ.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ, ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον ἀναγράψαι.

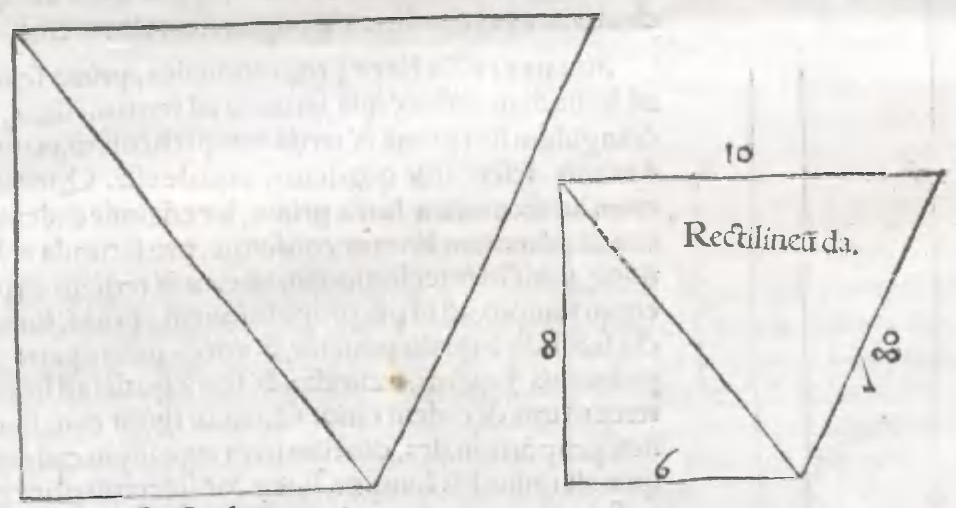
PROPOSITIO XVIII.

A' data recta linea, dato rectilineo, simile similiterque positum rectilineum describere.

Sit recta linea data, rectilineum item datum, atque propositum, à recta data ipsi dato rectilineo simile, similiterque propositum rectilineum describere. Rectilineum illud datum aut erit Trilaterum, quadrilaterum, aut multilaterū. Si trilaterum, hoc est triangulum, fuerit rectilineum datum, ad unam extremitatem datæ, per propo-



sitionem 23 primi, unus angulus uni, ad alteram deinde, uersus illam & eandem partem, per eandem etiam propositionem, alius alij trianguli angulo æqualis constituatur, & continuatis lineis, donec altera alteri occurrat, cum tertius sic tertio trianguli angulo æqualis sit: hæc duo triangula iam æquiangula, deinde etiam per propositionem 4 huius, laterum proportionalium erunt. Quare ex definitione rectilinearum similium, à data recta dato rectilineo trilatero, simile trilaterum descriptum est. Quòd si iam unum, minus scilicet, alteri quod maius est, trilatero, uel triangulo applicetur sic, ut unum angulum ambo cōmunem habeant: tum hæc etiam similiter posita erunt. Quare factum est, quod propositio requirebat. Sed esto iam quòd rectilineum datum sit quadrilaterum, uel multilaterum, tunc primò id in sua



triangula soluendum, & cum uno eorum ac recta linea data, ut iam auditum est, pergendum erit, & uidendum deinde, quam in hoc triangulo angulus, qui est uni integro in rectilineo angulo æqualis, subtensam habeat, ut scilicet, ea cognita, ad ipsius extremitates alterius in rectilineo trianguli, quod scilicet primò absoluto cohæret, duo anguli æquales collocentur, atque continuatis lineis donec concurrant, cum tertius sic tertio huius alterius trianguli angulo æqualis sit: triangula hæc, ex structura æquiangula erunt, deinde etiam, ex 4 huius, laterum proportionalium,

atque tandem ex definitione, inter se etiam similia. Non aliter cum tertio, ac reliquis rectilinei triangulis singulis agendum erit. Et quoniam rectilineum, quale propositum erat, eo modo tandem describitur, propositioni igitur satisfactū erit, quod sic demonstrari potest. Quoniam enim rectilinei, super recta data descripti, tot triangula sunt, quot ipsius rectilinei dati: ex structura igitur & communi illa noticia, Si æqualibus æqualia addantur, &c. hæc duo rectilinea iam æquiangula erunt. Et quia ex propositione 4 huius, propter proportionalitatē laterum ipsorum triangulorum, euidenter apparet, illa etiam proportionalium laterum esse: per definitionem tandem similium superficierum concluditur propositum.

APPENDIX.

Est hoc loco notandum, postquam primum iam triangulum absolutum, ac cum alijs deinde operari cœptum fuerit, ut partiales anguli singulorum, debito ordine suis partialibus æqualibus, & non temerè quilibet cuilibet, coniungantur. Nam hoc animaduerso, non erit laboriosum, neque etiam molestum, qualicunque rectilineo, regulari uel irregulari, multorum item uel paucorum laterum, dato, simile similiterque positum à data recta linea rectilineum describere.

APPENDIX II.

Quoniam propositio mentionem facit rectilinei, & rursus quoniam sub rectilineo, ut quidem ex definitione patet, omnes rectarum linearum figuræ, siue trilateræ hæ, quadrilateræ uel multilateræ fuerint, comprehendantur: in genere de omnibus rectarum linearum figuris hanc propositionem intelligendā colligimus. Hinc etiam factum, quòd per triangula, tanquam rectarum linearum figuram primam, hanc propositionem primò declarauimus.

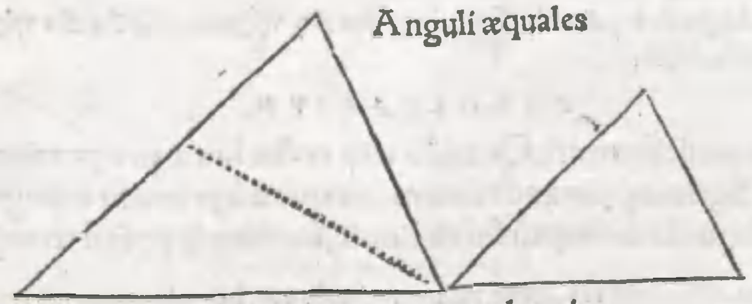
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΘ.

Τὰ ὅμοια τρίγωνα· πρὸς ἄλληλα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ, τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

PROPOSITIO XIX.

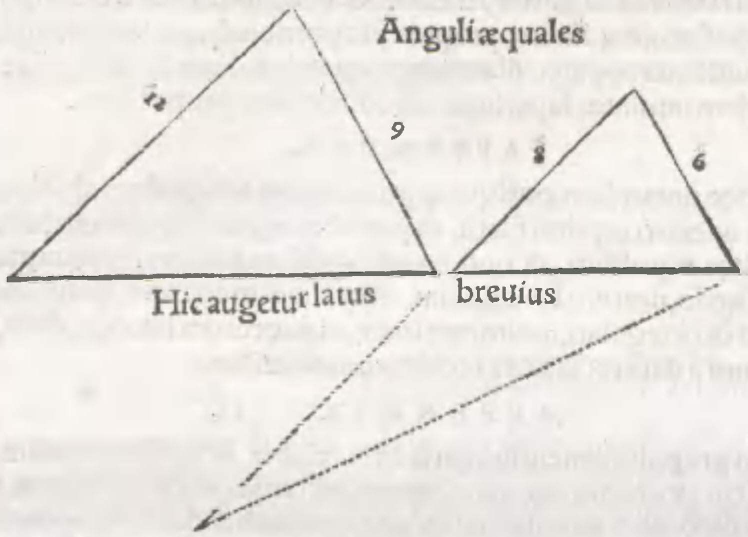
Similia triangula: inter se in dupla ratione sunt, similis rationis laterū.

Describantur duo triangula, unum quidem qualitercunque, alterum uerò per propositionem præcedentem, huic simile: dico igitur, triangula hæc duplicatam inter se habere rationem, quam habet latus unius ad similis rationis latus trianguli alterius. Lateribus illis, quorum rationem duplicatam inter se ipsa triangula habere debeant, tanquam duabus rectis datis, per propositionem 11 huius, tertia continuè proportionalis quærenda est, & id quidem uel longiori latere abbreuiato, uel



breuiori aucto. atque ex hoc puncto deinde, seu inuentæ proportionalis termino, ad angulum quem abbreuiatum uel auctum latus subtendit, linea recta ducenda.

Fiunt autem sic duo triangula, quorum alterum, cuius scilicet tertia proportionalis est unum latus, alteri integro adhuc, ex posteriore parte propositionis 15 huius, est æquale: id quod nulli nõ, hypothesiũ propositionis ac rationis permutatę, quodq́ rationes uni eædẽ, per propositionem 11 quinti, etiã inter se eædem sint, memori,



occurrere poterit. Rursus, quoniam tres sunt lineę proportionales, duo scilicet propositorum duorum triangulorum latera, & tertia ad ea proportionalis inuẽta, cum sic prima ad tertiam, ex quadam definitione in quinto exposita, sit in ratione eiusdem primæ ad lineam secundam duplicata, triangula deinde (quorum bases sunt prima & tertia lineæ) per propositionem primam huius, in suarum sint basium ratione, similium rationum quantitatibus alijs pro alijs sumptis: & hæc ipsa triangula primæ lineæ ad secundam rationem duplicatam habebunt. Quia uerò prima & tertia lineæ sunt expositorum similium triangulorum similis rationis latera, triangula porrò ipsa, unum quidem uni ex datis, alterum uerò alteri datorum æqualis: hoc considerato, propositum iam concludi potest. Similium igitur triangulorum ratio, &c. quod demonstrasse oportuit.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι κἂμ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογομ ὦσιμ· ἔσιμ ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης τρίγωνομ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, ὅμοιομ, καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενομ.

Ἐπείπερ ἐδείχθη, ὡς ἡ γ β πρὸς τὴν β η, οὕτως τὸ α β γ τρίγωνον, πρὸς τὸ α β η τρίγωνον, τουτέστι τὸ δ ε ζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifestum est, Quando tres rectæ lineæ proportionales fuerint, quòd sit, sicut prima ad tertiam, sic quod à prima fit triangulum, ad id quod à secunda descriptũ fuerit simile, similiterq́ positũ triangulum.

Quoniam ostensum est, sicut prima recta linea, hoc est unum unius trianguli latus, ad tertiam proportionalem inuentam: sic & harum primę & tertiæ linearum triangula, hoc est (æquali nimirum pro æquali triangulo sumpto) triangulum primæ ad triangulum lineæ secundæ, quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

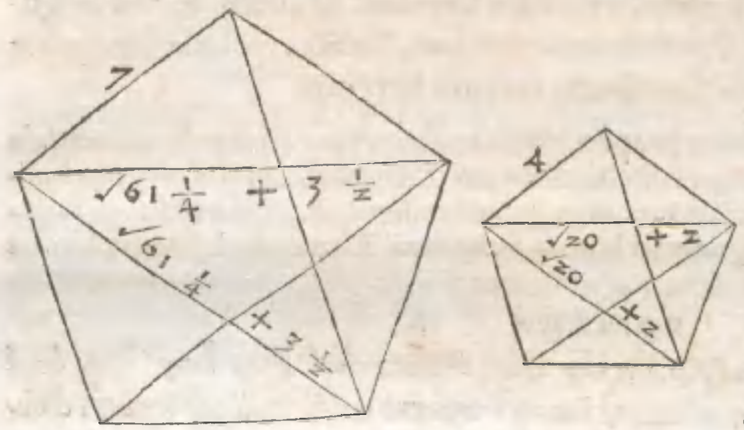
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Κ.

Τὰ ὅμοια πολύγωνα εἰς τὰ ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖται, καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος, καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις. Καὶ τὰ πολύγωνα διπλασίονα λόγομ ἔχει, ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογομ πλευράν.

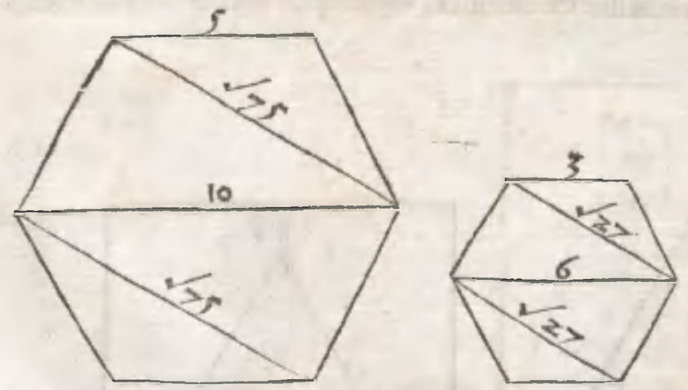
PROPOSITIO XX.

Similia polygona: in similia triangula diuiduntur, & æquali numero, & simili ratione totis. Et polygona duplicatam rationem habent, quam similis rationis ad similis rationis latus.

Describantur duo polygona, unum quidem qualitercunq́, alterum uerò per propositionem 18, huic simile: dico igitur, quòd hæc polygona in similia, & numero æqualia triangula subdiuidantur, & quòd etiam triangula cum polygonis candem rationem habeant. Polygonorum insuper ratio ea sit, quæ est lateris unius ad similis rationis latus polygoni alterius duplicata. Diuidantur polygona per lineas rectas in sua triangula. Et quoniam polygona, ex hypothethi, sunt similia, similes porrò figuræ rectilineę, ut ex definitione patet, æquales angulos ad unum, & quæ circa æquales angulos sunt latera, proportionalia habent, iam statim aliquot: subtractis uerò subinde æqualib. ab angulis æqualibus, partialibus nimirum ab ipsis totis, singula unius singulis triangulis polygonij alterius



per propositionem 6 huius, æquiangula erunt: quare per propositionem 4 huius, & similium figurarum definitionem, etiam similia. Polygona igitur descripta in similia, & æquali numero, triangula subdiuisa sunt, quod est primum. Quantum ad secundũ, quòd scilicet triangula illam, quam polygona, inter se habeant rationem. Quoniam enim polygonorum triãgula, ut demonstratum est, inter se similia sunt: erit illorum, per propositionem præcedentem, ratio, quę est lateris unius ad simi lis rationis latus trianguli alterius duplicata. Hoc nunc toties, quot in utrouis polygono triangula reperiũtur, usurpato, cum quæ eidem eædem sunt rationes, ipsæ, per propositionem 11 quinti, & inter se eædem sint: per propositionem 12 tandem eiusdem, id quod in hac propositione, de simili ratione triangulorum cum totis polygonis, secundò proponitur, concludi potest. Quantum igitur ad tertium, Quoniam triangula, ut demonstratum est, cum sint similia, in dupla ratione sunt similis rationis laterum: cum, quam triangula, illam eandem & ipsa polygona inter se habeant rationem; & polygona similis rationis laterum duplicatam rationem habebunt.



habebunt. Similia igitur polygona, in ſimilia triangula diuiduntur, &cæ. quod demonſtraſſe oportuit.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

Ὡσαύτως δὴ, καὶ ἐπὶ τῶν ὁμοίων τετραπλεύρων δειχθήσεται, ὅτι ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἐπὶ τῶν τριγώνων. Ὥστε καθόλου, τὰ ὅμοια εὐθύγραμμα σχήματα πρὸς ἄλληλα ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Καὶ ἐὰν τῶν α β, ζ η τρίτην ἀνάλογον λάβωμεν, τὴν ξ. ἡ β α πρὸς τὴν ξ, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ α β πρὸς τὴν ζ η. ἔχει δὲ καὶ τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον (ὅμοιον) καὶ τὸ τετράπλευρον πρὸς τὸ τετράπλευρον, διπλασίονα λόγον, ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον, τουτέστιν ἡ α β πρὸς τὴν ζ η. ἐδείχθη δὲ τοῦτο καὶ ἐπὶ τῶν τριγώνων.

COROLLARIVM.

Similiter etiam in ſimilibus quadrilateris demonſtrari poterit, quòd hæc in dupla ratione ſint ſimilis rationis laterum. Id autem & in triangulis demonſtratum eſt. Proinde in uniuerſum, Similes rectæ lineæ figuræ inter ſe in dupla ratione ſunt ſimilis rationis laterum.

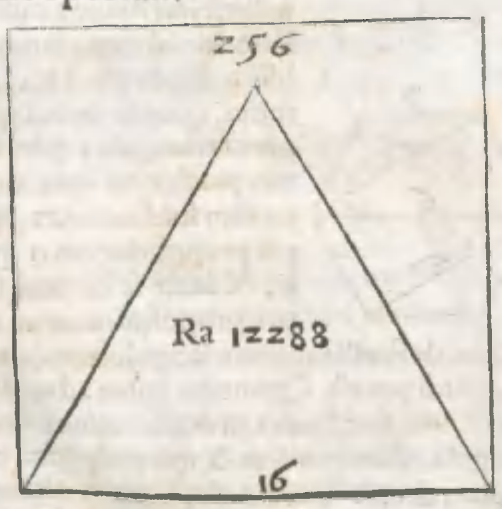
Nam ſi duarum linearum proportionalis tertia capiatur: ipſa prima ad tertiam duplam, quàm ad ſecundam, habebit rationem. Habent autem & Polygona ſimilia, quadrilatera item duplam rationem, quam ſimilis rationis latus ad ſimilis rationis latus hoc eſt, quam prima ad lineam ſecundam. Demonſtratum uerò hoc eſt & in triangulis, hinc.

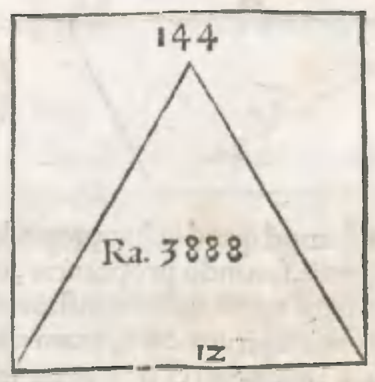
ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

Ὥστε καὶ καθόλου φανερὸν, ὅτι ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν· ἔσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

COROLLARIVM II.

Proinde etiam in uniuerſum manifeſtum eſt, Quòd ſi tres rectæ lineæ proportionales fuerint: erit, ſicut prima ad tertiam, ſic quæ à prima ſpecie ad eam quæ à ſecunda ſimilis & ſimiliter deſcripta eſt. quod demonſtraſſe oportuit.





ΠΡΟΤΑΣΙΣ

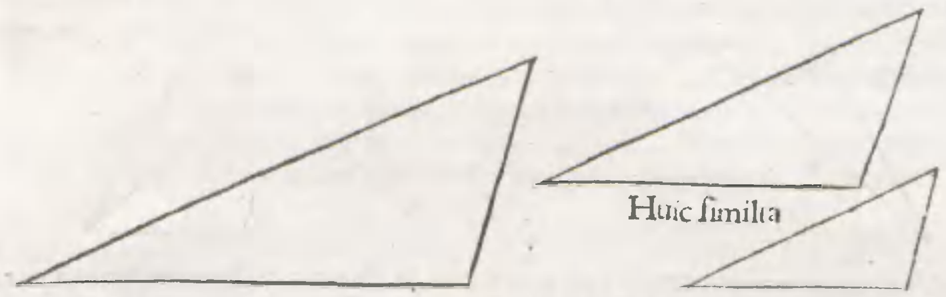
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΑ.

Τὰ τῷ αὐτῷ εὐθυγράμμῳ ὅμοια, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὅμοια.

PROPOSITIO XXI.

Quæ eidem rectilineo ſimilia, & inter ſe ſunt ſimilia.

Deſcribatur primò rectilineum unum qualitercunque ad placitum, per propoſitionem deinde 18 huius, duo uel plura alia deſcripto ſimilia: dico, illa & inter ſe ſimilia eſſe. Quoniam enim ſingula, per propoſitionem 18 deſcripta, rectilinea, ei quod



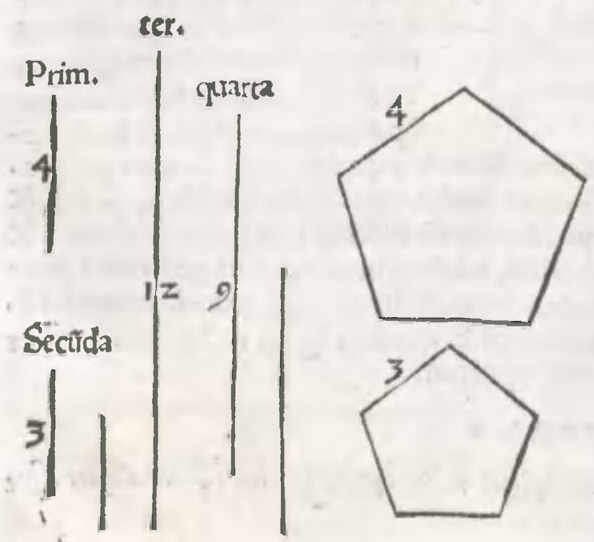
primò deſcriptum eſt, ſimilia ſunt: cum ſic ſingula etiam cum eodē primo, ex conuerſione definitionis ſimilium figurarum, æquiangula ſint, ac circa æquales angulos latera proportionalia habeant: porrò eidem æqualia, illa ex communi quadam noticia, & inter ſe æqualia: quæ inſuper eidem eædem ſunt, rationes, illæ ex propoſitione 11 quinti, inter ſe eædem ſint: per definitionem tandem, & illa ſecundò deſcripta rectilinea, inter ſe ſimilia erunt. Quæ igitur eidem rectilineo, &cæ. quod demonſtraſſe oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΒ.

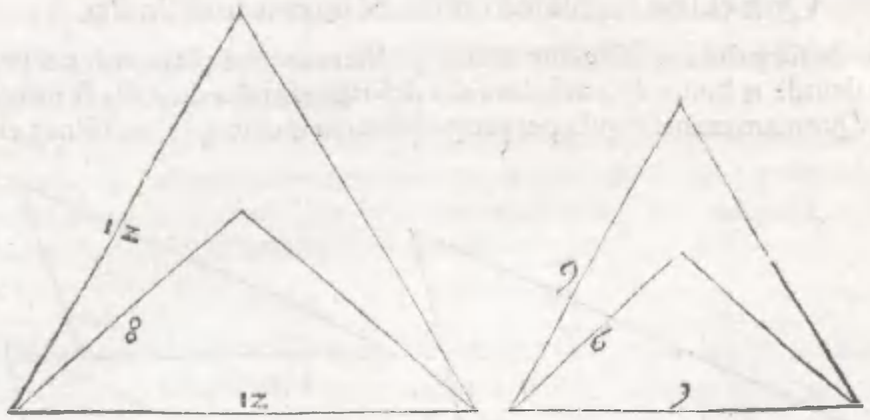
Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν· καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα, ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα, ἀνάλογον ἔσται. Κἂν τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα, ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα, ἀνάλογον ᾖ· καὶ αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

PROPOSITIO XXII.

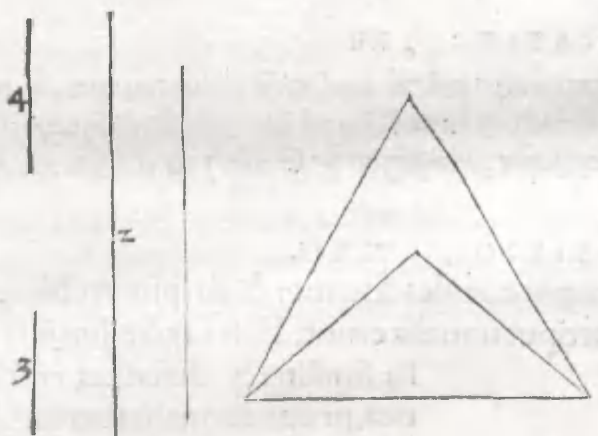
Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: & ab ipſis rectilinea, ſimilia ſimiliterque deſcripta, proportionalia erunt. Et ſi à rectis lineis ſimilia ſimiliterque deſcripta rectilinea, proportionalia fuerint: & ipſæ rectæ lineæ proportionales erunt.



Sint quatuor rectæ lineæ, atque eſto quòd hæ ex hypotheſi proportionales ſint: dico ergo rectilinea, ab ipſis ſimilia, ſimiliterque deſcripta, proportionalia eſſe. Deſcribantur à prima & ſecunda rectis lineis per 18 præcedentem, ſimilia ſimiliterque poſita rectilinea, hoc idē fiat cum rectis lineis tertia & quarta per eandem, primę deinde et ſecundæ, tanquam duabus rectis datis, per propositionem 11 huius, tertia proportionalis inueniatur, atq; hoc idem contingat lineis tertia & quarta. Et quoniam prima ad secundam est, ex hypothesi, ut tertia ad lineam quartam, secunda uerò ad aliam quandam, ex structura, sicut quar



ta ad aliam: ex æqua ratione, & extrema unius in alterius ordinis extremorum ratione erunt: per corollarium igitur secundum propositionis 20 huius, patebit prior pars. Sed esto iam, quòd à rectis quatuor datis rectilinea descripta, similia similiterq; posita sint: quòd tum ipsæ rectæ proportionales sint, sic retinetur. Inueniatur per 12 huius, primæ, secundæ & tertiæ, tanquam tribus rectis lineis datis, quarta proportionalis: ab hac deinde quarta, per propositionem 18 huius, rectilineum, tertio rectilineo simile similiterq; positum, describatur. Et quoniam prima, secunda, tertia, & iam inuẽta, quatuor sunt, ex structura, lineæ proportionales, à prima uerò & secunda, à tertia item & ipsa inuenta, similia similiterq; posita rectilinea descripta sunt, cum ipsa rectilinea eo ordine, ex priore parte propositionis huius, proportionalia sint: rectilineum primæ ad rectilineum lineæ secundę, sicut tertiæ ad inuentę rectilineũ erit. Sed quia sic etiã est, ex hypothesi, rectilineũ tertiæ, ad rectilineũ lineę quartę: rectilinea igit̃ quartæ & iam inuentæ linearum, per proposi. 11 quinti, & posteriorem partem propositionis nonæ eiusdem, inter se æqualia erunt. Et quia per propositionem 21 præcedentem, inter se etiam similia, cum similia similiterq; posita, & inter se æqualia, rectilinea, ab inæqualibus lineis describi non possint: inuenta & quarta posita, lineæ inter se æquales erunt, tertiæ igitur ad eas, ex posteriori parte propositionis nonæ quinti, una & eadem ratio, & illa quidem quæ est primæ ad lineam secundam. Atq; hæc est pars posterior. Si quatuor igitur rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. quod demonstrasse oportuit.



ΛΗΜΜΑ.

Ὅτι δὲ ἐὰν εὐθύγραμμα ἴσα καὶ ὅμοια ᾖ, αἱ ὁμόλογοι αὐτῶν πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί, δείξομεν οὕτως.

ASSVMPTVM.

ASSVMPTVM.

Quòd uerò, si rectilinea æqualia fuerint, & similia, similis rationis latera ipsorum æqualia inter se sunt, sic demonstrabimus.

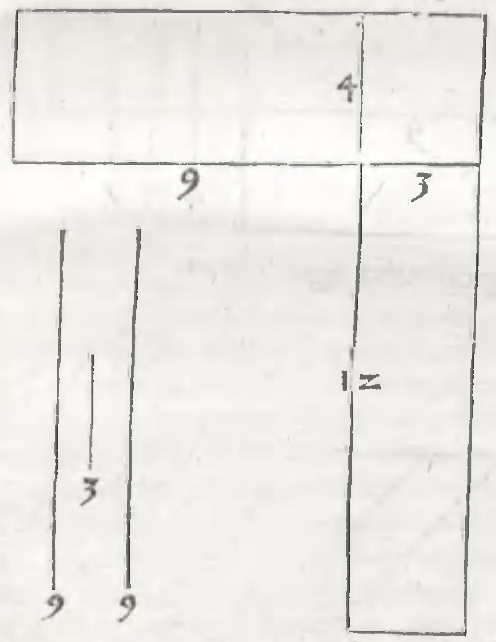
Sint æqualia & similia rectilinea, ea nimirum, quæ à quarta & inuenta linea descripta sunt, cum hæc, ex definitione similium figurarum, latera habeãt circa æquales angulos proportionalia: dico, illorum similis rationis latera inter se æqualia esse, id quod ab impossibili sic demonstrari potest. Esto quòd inæquales inter se sint, quarta & inuenta (propter illas enim id assumptum est) æqualium ac similium rectilineorum lineæ. Et quoniam æqualia ac similia sunt hæc rectilinea, cum quæ circa æquales angulos habent latera, ex definitione proportionalia sint, sicut quidem prima maior tertia uel minor fuerit, ita ex propositione 14 quinti, secũda linea respectu quartæ erit, duæ igitur rectæ cum sint duabus rectis alijs longiores, utraq; utraq;: & rectilineũ sub prioribus comprehẽsum altero rectilineo maius erit, cum tamen ipsa, ex hypothesi, sint posita inter se æqualia. Non sunt igitur inæquales inter se, sed æquales, quarta & inuenta lineæ. quod demonstrasse oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΓ.

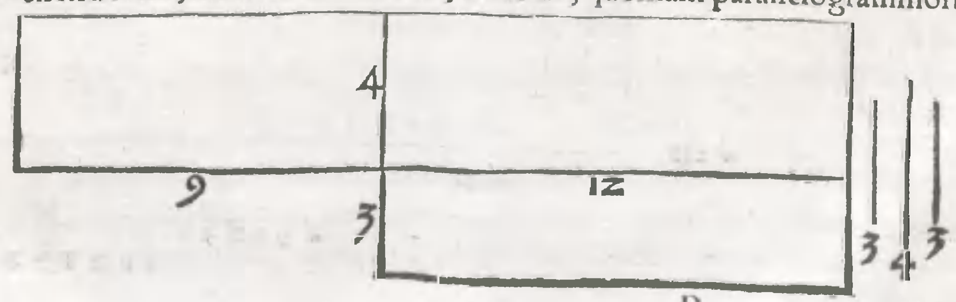
Τὰ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα, πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

PROPOSITIO XXIII.

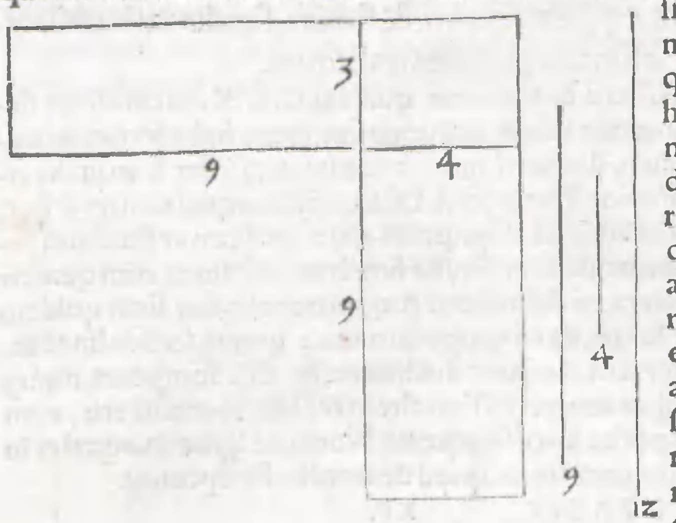
Æquiangula parallelogramma, inter se rationem habent eam, quæ ex lateribus componitur.



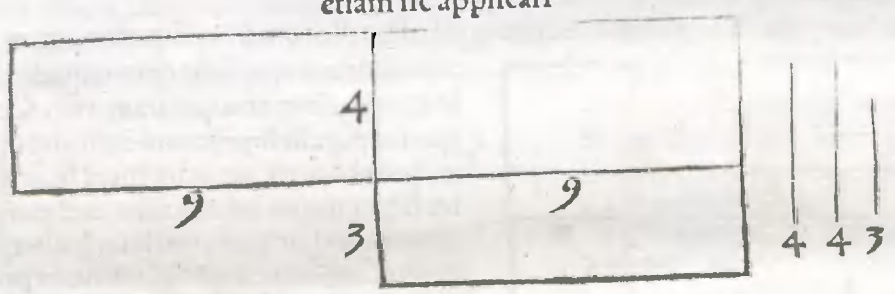
Sint duo parallelogramma æquiangula: dico illorum inter se rationem, ex laterum suorum, quę sunt circa æquales angulos, rationibus compositam esse. Coniungantur parallelogramma cum angulis suis, quos habent æquales inter se, angulariter sic, ut unum latus unius, uel parallelogrammi uel anguli, uni lateri, alterius sit in directum una linea: & erunt, ex propositione 14 primi, & reliqua duo circa illos angulos latera in directum iuncta. describatur etiam secundum alterutrius anguli externi, & laterum ipsius quãtitatem, parallelogrammũ tertiũ, quas uerò rationes habent circa ęquales angulos latera, in ijsdem rationibus continuo ponantur. iam tres rectæ lineæ aliæ, prima quidẽ ad placitum ducta, secunda uerò & tertia ex propositione 12 huius, primæ adiungantur. Et quoniam quas habent latera parallelogrammorum inter se rationes, illas habẽt iam ex structura, hæ tres rectæ ductæ, & rursus, quoniam parallelogrammorum,



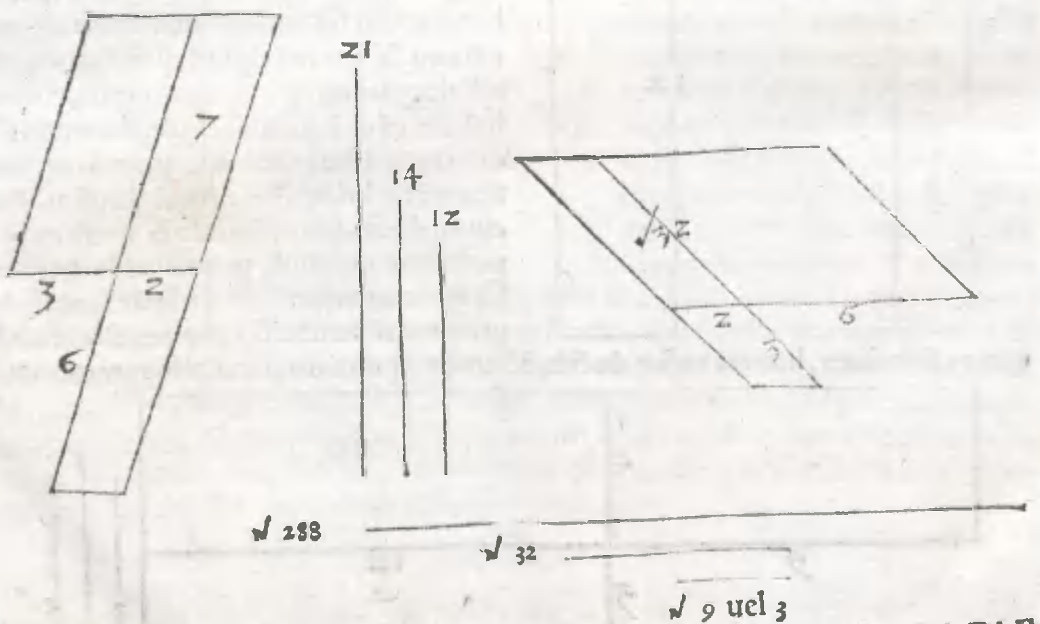
quorum unus & idem uertex fuerit, ex prima propoſitione huius, in ſuarum baſium ſunt ratione, hac ipſa prima, propoſitione deinde 11 quinti, utraq; bis uſurpata, & hæc tria parallelogramma, primum ſcilicet, tertium & ſecundum, in ductarum trium linearum ratione erunt, unde ex æqua ratione ſicut prima ducta ad tertiam, ſic & primum parallelogrammum ad ſecūdum erit. Sed quoniā primæ lineæ ad tertiam ratio, ex primæ ad ſecundam, & ſecundæ ad lineam tertiam, hoc eſt ex datorum parallelogrammorum laterum, rationibus, compoſita eſt: & parallelogrammum igitur prius ad poſterius, rationem ex laterum rationibus compoſitam habebit. Aequiangula igitur parallelogramma, &c. quod demonſtraſſe oportuit.



Poſſunt huius ſecundæ figurationis parallelogramma etiam ſic applicari.



Aliæ duæ huius propoſitionis geometricæ figurationes.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ

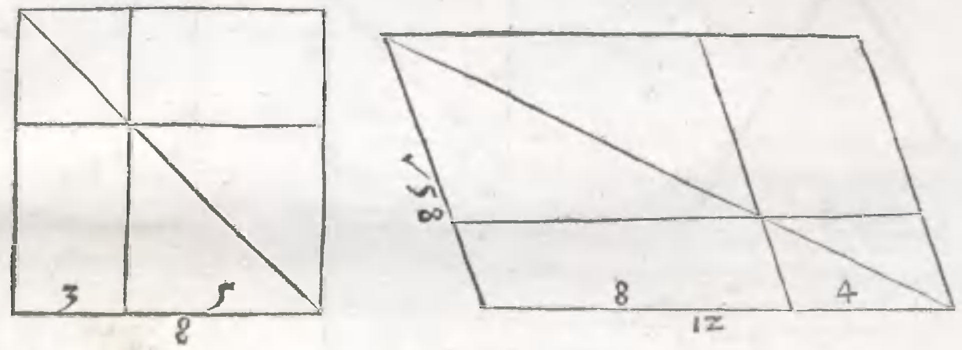
ΠΡΟΤΑΣΙΣ. ΚΔ.

Παντὸς παραλληλογράμμου, τὰ περὶ τὴν διάμετρον παραλληλόγραμμα, ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ, καὶ ἀλλήλοις.

PROPOSITIO XXIIII.

Omnis parallelogrammi, quę circa diametrum parallelogramma, tam toti quàm ipſa inter ſe ſimilia ſunt.

Deſcribatur parallelogrammum, cum ſua diametro, lineæ deinde rectæ duæ, ſeſe mutuo in diametro ſecantes, quarum una quidem duobus, altera uerò reliquis duobus parallelogrammi lateribus parallela ſit, ducantur, & figura parata erit: dico ergo iam, quòd partialia, per quæ ſcilicet totius parallelogrammi diameter tranſit, parallelogramma, & toti, & ſibijpſis inter ſe, ſimilia ſint. Quoniam enim in utroq; triangulo, duabus ſcilicet totius parallelogrammi medietatibus, ducta eſt linea, tertio in triangulo lateri parallela, cum ſic reliqua duo latera in utroq; triangulo, ex propoſitione ſecunda huius, per ductam parallelam proportionaliter ſecta ſint, hac propoſitione bis uſurpata (ſunt enim duo triangula:) & parallelogrammi latera per has duas, ſeſe mutuo in diametro ſecantes rectas lineas, ex propoſitione 11



quinti, proportionaliter ſecta erunt. Quia autem diuiſæ quantitates proportionales, hæ compoſitæ etiā, ex propoſitione 18 quinti, proportionales ſunt: partialium igitur parallelogrammorum utrunq;, ex permutata ratione cum ipſo totali parallelogrammo laterum proportionalium erunt. Præterea, quoniam lineæ, in diametro parallelogrammi ſeſe mutuo ſecantes, oppoſitis ſuis lineis, ex ſtructura parallelæ ſunt: triangula partialia ſingula ſuis totalibus, ex ſecunda parte propoſitionis 29 primi, toties eam, quoties opus fuerit, repetendo, æquiangula, atq; ſtatim etiā totale parallelogrammum utriq; partiali parallelogrammo æquiangulum erit: proportionalium deinde laterum, ex 4 huius, eorum quæ circa ęquales angulos. Et quia proportionalium laterum: ſimile igitur utrunq; ipſi toti per definitionem, quod eſt notandum. Sed quoniam, quę eidem rectilineo ſimilia, illa & inter ſe ſimilia eſſe, propoſitio 21 huius teſtatur, & hæc ipſa partialia parallelogramma, eadem ratione, inter ſe ſimilia erunt, quod & ipſum notandum. Conſtat autem ſic tota propoſitio. Omnis igitur parallelogrammi, quæ circa diametrum parallelogramma, tam toti quàm ipſa inter ſe ſimilia ſunt, quod demonſtraſſe oportuit.

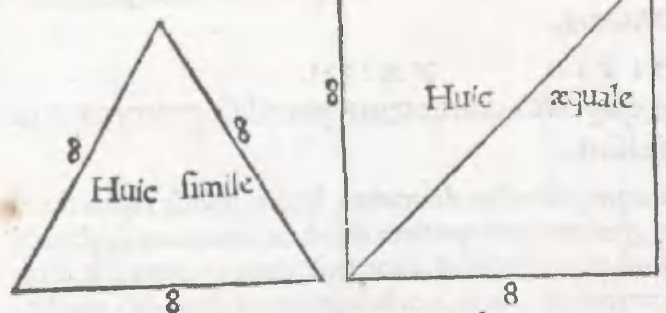
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΕ.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ, ὅμοιον, καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι ἴσον, τὸ αὐτὸ συστήσασθαι.

PROPOSITIO XXV.

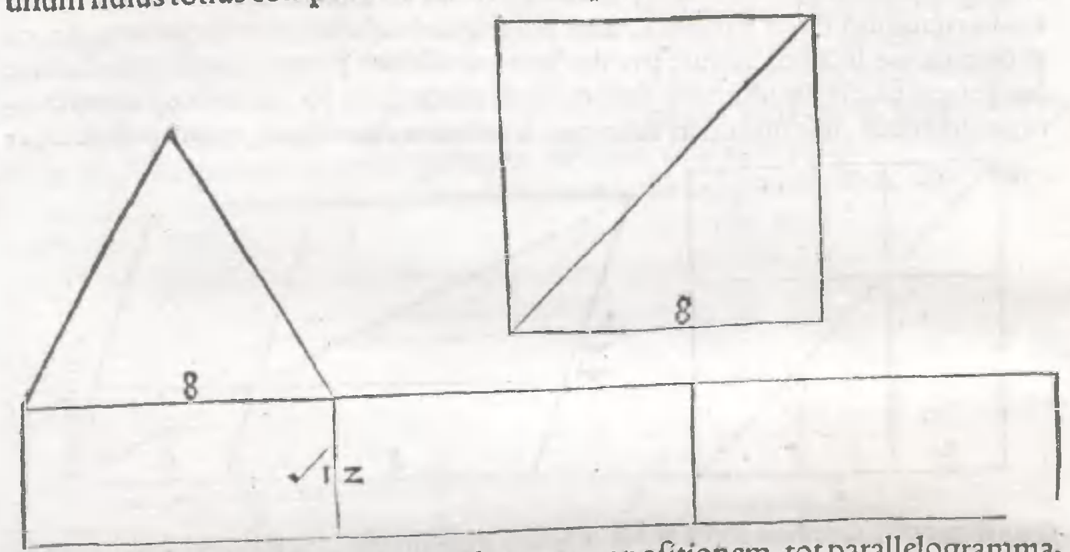
Dato rectilinco, ſimile, & alij dato æquale, idem conſtituere.

Duobus rectilineis datis, propoſitum eſt, tertium, quod uni quidem ex datis ſimile, alteri uerò rectilineo æquale ſit, deſcribere. Rectilineorum utroq; in ſua trian gula soluto, ad unum latus illius rectilinei, cui debet fieri tertium simile, tanquamq[ue]



ad rectam lineam datam, per propositionem 44 primi, in dato alterius rectilinei uno angulo, tot parallelogramma, in quot triangula idem prius rectilineum solutum est, unicuiq[ue] scilicet triangulo unum æquale, ordine prætendantur, et erit totum compositũ toti priori rectil.neo æquale. Eodem modo ad unum huius totius compositi rectilinei latus, quod scilicet lateri, in rectilineo sum-

Vel contra, inueniatur, &c.



pto, minime est oppositum, per eandem 44 propositionem, tot parallelogramma, in quot triangula alterum rectilineum diuisum est, unicuiq[ue] scilicet unũ æquale, in priori rectilineo angulo, prætẽdantur. Erit aũt sic illud huius totius parallelogrãmi latus, atq[ue] prioris parallelogrãmi descripti, quod scilicet in rectilineo sumptũ est, ex prop. 14 primi adamussim una linea. Media igitur proportionali, inter dicta latera, per prop. 13 huius, inuenta, ab ea tandem rectilineũ, quod sit priori rectilineo simile, similiterq[ue] positum, per propositionem 18 huius describatur: & propositioni satisfactum erit, quod sic demonstratur. Quoniam tres sunt lineæ proportionales, duorum nimirum parallelogrammorum, quæ duobus rectilineis, utrunq[ue] utriq[ue], æqualia sunt, duo latera, & media inter ea linea proportionalis inuenta, cum ab harum prima, atq[ue] etiam secunda, similia, similiterq[ue] posita rectilinea descripta sint: prima ad lineam tertiam erit, ex corollario propositionis uicesimæ secundo, ut quod à prima, ad id quod à secunda similiter descriptum est rectilineũ. Et rursus, quoniam parallelogramma, quæ sub eodem uertice sunt posita, ex prima huius, in suarum basium sunt ratione: quam rationem igitur habet rectilineum primum, ad id quod ex propositione 18 iam descriptum

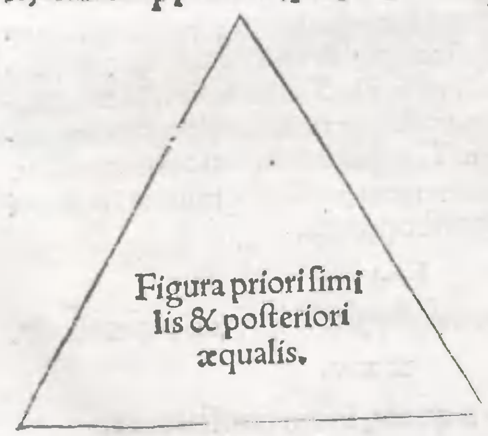
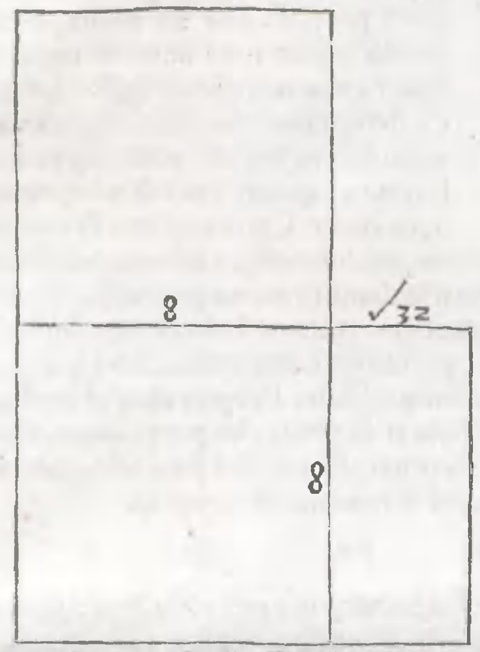


Figura priori simi lis & posteriori æqualis.

√ 21845⅓

scriptum est, illam eandem habet etiam, ex propositione undecima quinti (duæ enim rationes uni sunt eædem) parallelogrammum, priori rectilineo æquale, ad id quod posteriori rectilineo æquale est, parallelogrammum, atq[ue] ex permutata ratione deinde, per propositionem 16 quinti, rectilineum ad parallelogrammum ut rectilineum ad parallelogrammum. Sed quia rectilineum in priori collatione, est suo parallelogrammo, ex structura æquale: & in posteriori sic, propter rationum similitudinem, rectilineum suo parallelogrammo æquale erit. quare & rectilineo alteri, huic parallelogrammo æquali, idem rectilineum ęquale erit. Est autem & priori simile. Duobus igitur rectilineis descriptis, tertiũ iam, uni quidem simile, alteri uerò ęquale, idem rectilineum descriptum est. quod fecisse oportuit.



√ 768

Figura posteriori similis & priori æqualis.

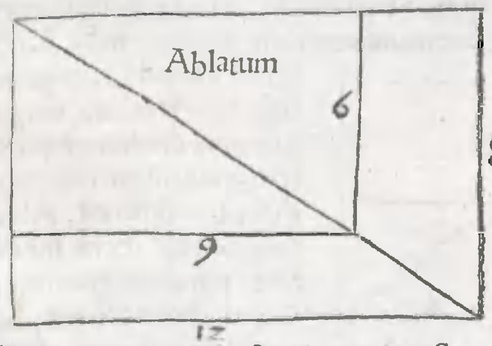
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Κϛ.

Ἐὰν ἀπὸ παραλληλογράμμου παραλληλόγραμμον ἀφαιρεθῇ, ὅμοιόν τε τῷ ὅλῳ καὶ ὁμοίως κείμενον, κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ· περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρόν ἐστι τῷ ὅλῳ.

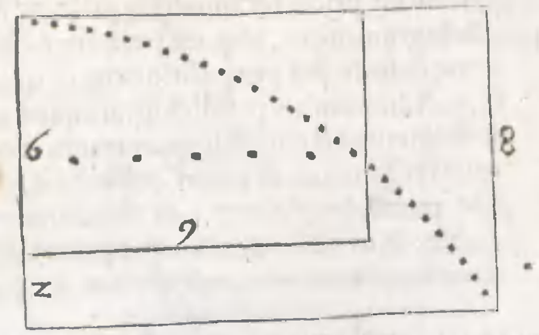
PROPOSITIO XXVI.

Si à parallelogrammo parallelogrammum auferatur, & simile toti & similiter positum, communem angulum habens ei: circa eandem diametrum est toti.

Describatur parallelogrammum, ab eo deinde aliud, sibi simile similiterq[ue] positum, communem etiam cum totali angulum habens, parallelogrammum auferatur: dico, ablatum circa totalis parallelogrammi diametrum consistere. Sumit hæc propositio suam demonstrationem ab absurdo illo, Partem suo toti, uel contrà, Totũ suæ parti æqualem esse, hoc modo. Ducatur ablati parallelogrammi diameter, ab angulo, quem cum totali communem habent incipiendo. Quod si hæc, ulterius continuata, diameter etiam parallelogrammi totalis fuerit: uerum est quod dicit propositio. Si uerò non, ducatur ab eodem communi angulo, si possibile sit, linea recta alia, quæ sit totalis parallelogrammi diameter: puncto deinde intersectionis, huius diametri & lateris parallelogrammi ablati. linea, quæ per ablatum parallelogrammum transeat, & insuper duobus



bus totalis parallelogrammi lateribus, parallela sit, per propositionem 31 primi, excitetur. Et quoniam parallelogrammorum utrunque, ablatum quidem, ex hypothesi, quod uerò iam formatum est ex propositione 24 huius, totali parallelogrammo simile est: utriusque igitur circa æquales angulos latera, ex definitionis similium figurarum conuersione bis usurpata, atque propositione 11 quinti inter se proportionalia erunt. Quia autē una & eadem



linea, illa scilicet quæ utrisque est latus commune, ad duo reliqua horum parallelogrammorum latera, uel contrà (prout quidem in demōstratione processum fuerit) hæc duo ad commune illud latus, unam & eandem rationem habent: hæc duo reliqua latera, ex priore uel posteriore parte propositionis nonæ quinti, inter se æqualia erūt, longius breuiori, uel contrà, quod est impossibile. Propter illud absurdum igitur hæc duo parallelogramma, ablatum scilicet & totale, his propositionis hypothesibus, circa eandem diametrum consistere necesse erit. Si à parallelogrammo igitur parallelogrammum auferatur, &c. quod demonstrasse oportuit.

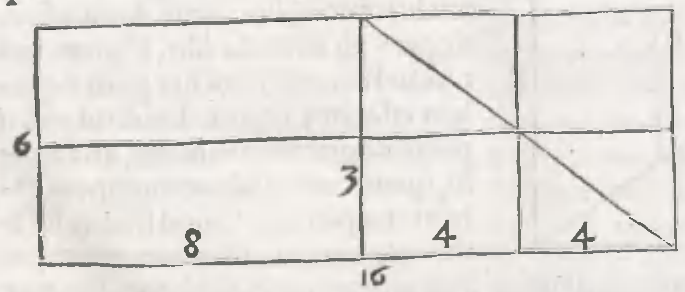
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΖ.

Πάντων τῶν παρὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν παραβαλλομένων παραλληλογράμμων, καὶ ἐλλειπόντων εἴδεσι παραλληλογράμμοις, ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις, τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφομένῳ· μέγιστόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβαλλόμενον παραλληλόγραμμον, ὅμοιον ἐν τῷ ἐλλείμματι.

PROPOSITIO XXVII.

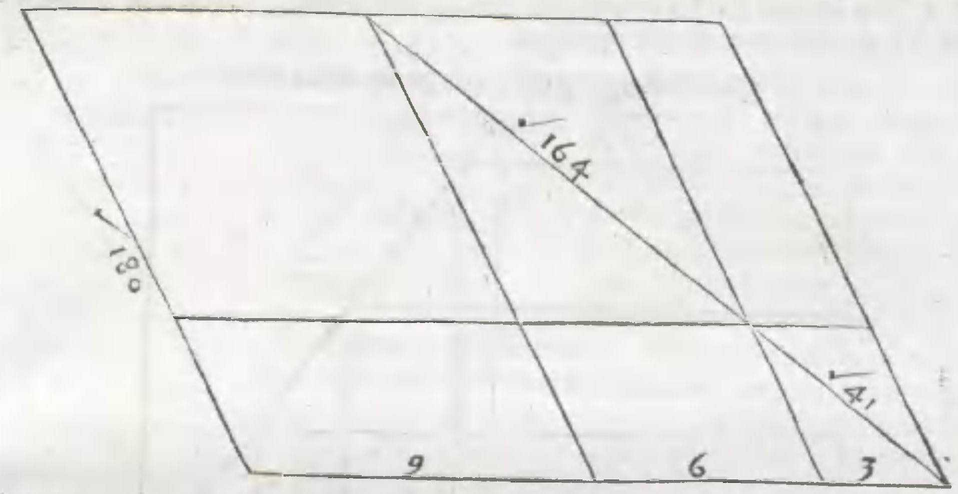
Omnium, circa eandem rectam lineam proiectorum parallelogrammorum, eorum quæ specie deficiunt parallelogrammis, similibus, similiterque positis ei, quod à dimidia linea describitur: si deficientia conferantur, erit quod ad dimidium proiectum est, & simile sumpto existit, omnium maximum.

Sensus propositionis est. Si eidem rectæ lineæ applicentur aliquot parallelogramma, unum quidem ad ipsius rectæ medietatem, alia deinde ad ipsam rectam utcunque, quæ tamen singula, ad completionem rectæ, deficiant in parallelogrammis, specie similibus & similiter positis, ei quod ab altera medietate descriptum est: quòd tum medietati applicatū parallelogrammum omnium maximum sit. Recta igitur linea data, ea primū bifariam secanda, atque ab una eius medietate, parallelogrammum utcunque describendum est. Ab altera deinde rectæ medietate parallelogrammum unum, duo uerò uel plura parallelogramma alia, à



uariis, ad placitum sumptis, diuisæ lineæ partibus, quæ sint medietate ipsius rectæ uel longiores uel breuiores describantur. esto tamē quòd singulæ in parallelogrammis ei, quod primò ab una medietate diuisæ descriptum est, similibus, deficiant Dico igitur,

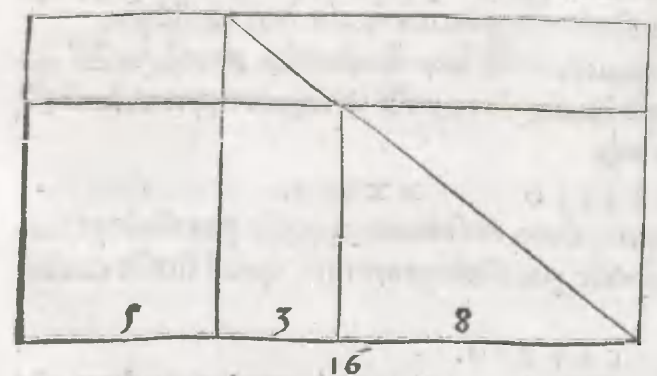
co igitur, quod tum, si deficientia conferantur, id quod à media descriptum est parallelogrammum, omnium maximum sit. Cum enim illa, in quibus ad rectam posita parallelogramma deficiunt, similia inter se, alterum item alterius sit ablatum, unum deinde angulum communem habeant: circa eandem diametrū hæc, ex præcedenti propositione 26, consistunt. qua igitur ducta, figura item descripta, ut scilicet παραπληρώματα appareant, demonstratio sic succedet. Quoniam supplementa omnis parallelogrammi inter se æqualia sunt, æqualia insuper uel aliquod commune æqualibus additum, æqualia proueniunt. Et rursus, quoniam quæ sub eodem uertice sunt parallelogramma, si æquales bases habuerint, æqualia inter se sunt, eo



ordine procedendo, cum duo uni æqualia sint, æqualium uno pro altero sumpto, unum supplementum tandem cum altero simili, partiali ei, quod ad medietatem rectæ ponitur, parallelogrammo, æquale erit. Illis igitur æqualibus altero supplemento adiecto: ipse gnomon, qui scilicet, propter æqualitatem parallelogrammorum, pars est eius, quod à medietate altera descriptum est, parallelogrammi, alteri parallelogrammo æquale erit: totum igitur eo maius. Omnium igitur circa eandem diametrum, &c. quod demonstrasse oportuit.

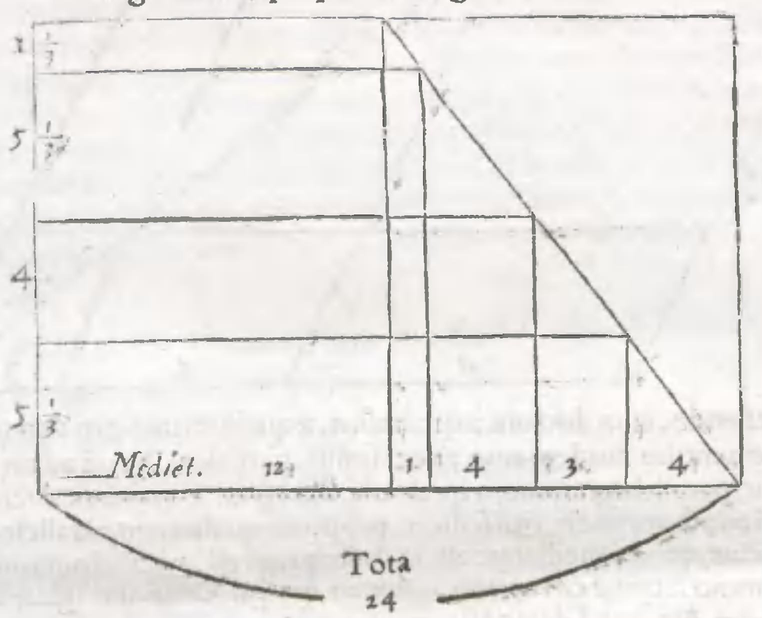
ALITER.

Sit rursus à rectæ lineæ medietate descriptum parallelogrammum, in medietate altera deficiens, ab ipsa recta uerò parallelogrammum aliud, quod deficiat in parallelogrammo simili ei, in quo à medietate descriptum defecerat. esto autem quòd illud alterum sit priori descripto parallelogrammo altius: dico ergo adhuc, id quod à medietate rectæ descriptum est parallelogrammum, maius esse, &c. Quoniam enim illa, in quibus ad rectam lineam posita parallelogramma deficiunt, ut in superiori figuratione sese habent, ducta diametro, alia etiam recta linea propter supplementa accedente, demonstratio sic succedet. Parallelogramma, quorum unum est parallelogrāmi spacii supplementum, habēs pro latere, lineam medietati rectæ æqualem, alterum uerò quod huic continuatum est, cum æquales bases habeant, æquè etiam alta sint: erunt illa, ex 36 primi, inter se æqualia. Et quia



etiam parallelogrammorum supplementa omnis parallelogrammi spacij, inter se æqualia sunt, cum duo uni æqualia, illa & inter se æqualia esse, ex quadam communi noticia receptum sit, ab horum ęqualium uno parallelogrammum, per quod diameter transit, ablatum: id quod relinquitur, alteri æqualiũ inæquale erit. Quòd si tandem his inæqualibus id, quod alterum eorum ad complendum parallelogrammum, à medietate diuisæ descriptum, desiderat, ex æquo adiectum fuerit, cum quæ sic proueniant, ex communi quadã noticia inter se inæqualia sint, maius autem eorum, id quod à medietate descriptum est, parallelogrammum, minus uerò alterum à recta data, &c. descriptum, concluditur propositum. Omnium igitur circa eandem rectam lineam proiectorum parallelogrammorum, eorum quæ specie deficiunt, &c. quod demonstrasse oportuit.

Figura huius propositionis geometrica alia.



Habet hæc figura quatuor rectilinea, unum quidem ad medietatem ductæ proiectum, tria deinde alia, ut oportuit, ad aliquam datæ partem. Et quia singula ad totius datæ rectæ completionẽ in aliquo rectilineo deficiunt toti simili: dico igitur, quod ad medietatẽ comparatum est rectilineum, unoquoq; ex reliquis maius esse. Id quod præter geometricam rationem uel in numeris patet, atque ob id etiam hæc figura posita est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΗ.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ, ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ, ὁμοίῳ ὄντι τῷ δοθέντι.

Δεῖ δὴ τὸ διδόμενον εὐθύγραμμον, ᾧ δεῖ ἴσον παραβαλεῖν, μὴ μεῖζον εἶναι τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβαλλομένου ὁμοίων ὄντων τῶν ἐλλειμμάτων, τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας, καὶ ᾧ δεῖ ὅμοιον ἐλλείπειν.

PROPOSITIO XXVIII.

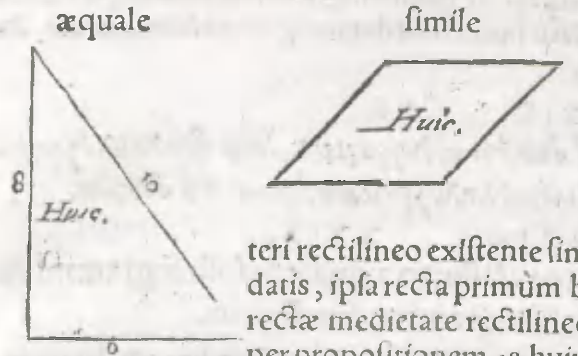
Ad datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum comparare deficiens specie parallelogrammo, quod simile existat rectilineo dato.

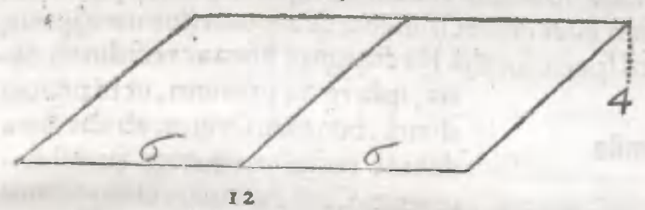
CAVTIO.

Oportet autem datum rectilineum, cui æquale comparandum est, non maius esse eo, quod ad dimidiam comparatur similibus uidelicet existentibus, deficientibus specie, inter se, eo nimirum, quod ad dimidiam comparatur, ei quod simile specie deficit, existente simili.

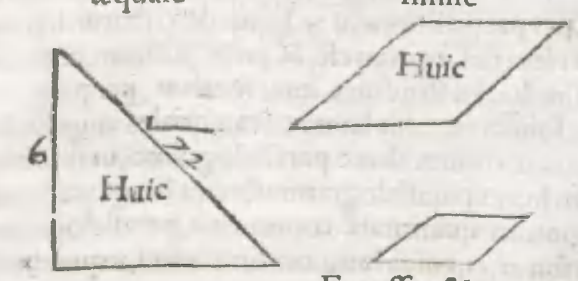
Quoniam enim, ut habet propositio præcedens 27, si quæ parallelogramma ad rectam quandam lineam comparata fuerint, quæ singula ad completionem rectæ lineæ deficiunt specie parallelogrammis, similibus similiterq; positis ei, quod à dimidia describitur, cum quod ad medietatem rectæ comparatur, ex propositione præcedenti 27 omnium maximum sit: hinc ergo factum est, quod huic 28 propositioni hæc cautio tanquam obseruatu digna adiecta sit. Nunc igitur quantum ad propositionem. Requirit hæc propositio primò rectam lineam, deinde uerò duo rectilinea: proponit autem, quomodo ad datam rectam comparãdum sit parallelogrammum, uni rectilineo æquale, quod minime maius existat ad medietatem rectæ comparato, similibus existentibus sumptis, sic ut ad completionem rectæ, specie parallelogrammo deficiat, alteri rectilineo existente simili. Recta igitur linea ac rectilineis datis, ipsa recta primùm bifariam secetur, ab alterutra deinde rectæ medietate rectilineo, quod alteri ex dato simile existat, per propositionem 18 huius descripto, à quo id deficiet ad completionem rectæ, etiam cõpleatur: & erit ille defectus alteri rectilineo, δῆλ. τ̃ δεισμόν, aut æquale, aut eo maius. Si æquale, factum erit propositum: parallelogrammum nimirum ad rectam datam, uni rectilineo dato æquale, deficiens specie parallelogrammo, quod alteri dato rectilineo simile est, comparatum. Quòd si defectus ille altero rectilineo maior fuerit: & quod à rectæ medietate, per propositionem 18 descriptum est rectilineum, propter æqualitatem, eodem altero rectilineo maius erit. In quo igitur excedit, tali excessui parallelogrammum, quod etiam ut ipsum totum alteri dato simile sit, per propositionem 25 huius describatur, & erit illud cũ rectilineo dato uno, iam toti parallelogrammo æquale: toti etiam per se, ex propositione 21 huius, simile: laterum igitur, quæ habet circa æquales angulos, proportionalium. Et quoniã huic toti, quod scilicet dato uni rectilineo simile, ad medietatem etiam rectæ positum est, alteri rectilineo cum iam descripto parallelogrammo æquale est: erit contrà, hoc totum parallelogrammũ iam descripto solo maius: quare & illius, quàm huius, latera longiora. In longioribus igitur breuioribus æqualibus signatis, compleatur parallelogrammum: eritq; illud ei, quod per propositionem 25 descriptum est, parallelogrammo æquale: ipsi insuper toti ex propositione 21 huius, simile: circa eandem

Rectilinea data

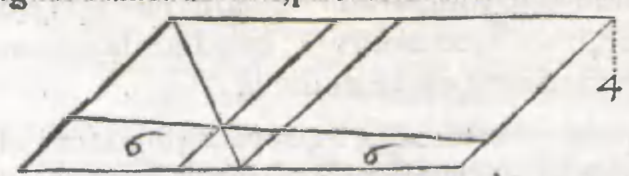




Rectilinea data



igitur diametrum hæc, partiale nimirum & totale parallelogrammum ex 26 huius consistunt. Ducatur ergo diameter, & describatur figura. Et quoniam totum hoc parallelogrammum rectilineo uni, & excessui æquali descripto parallelogrammo, est æquale, assignatum uero in eo parallelogrammum, excessui equale, cum ex communi quadam noticia, si ab æqualibus æqualia subtrahantur: & ea quę relinquuntur æqualia sint: subtractione igitur facta, gnomon, qui ex una parte relinquitur, rectilineo cuidam, ex altera parte relicto, æqualis erit. Sed quia ipsi gnomoni, ut ex primo libro facile colligitur, æquale est ad rectam comparatum parallelogrammum: quare ex communi quadam noticia, eidem relicto rectilineo hoc parallelogrammum æquale erit, deficitq; specie parallelogrammo, ad complendum totum, eo quod est alteri rectilineo dato simile. Ad datam igitur rectam lineam, dato rectilineo, &c. quod fieri oportuit.



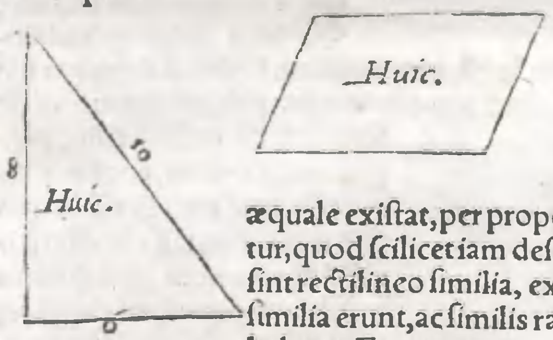
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΘ.

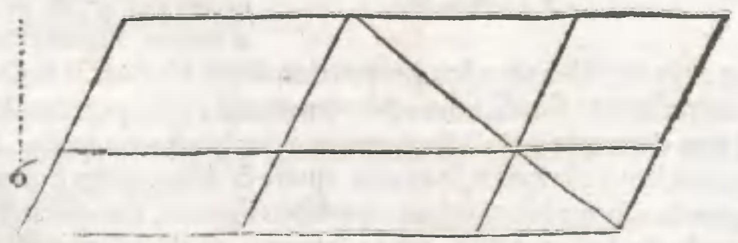
Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν, τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ, ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ὑπερβάλλον εἴδει παραλληλογράμμῳ, ὁμοίῳ τῷ δοθέντι.

PROPOSITIO XXIX.

Ad datam rectam lineam dato rectilineo æquale parallelogrammum comparare, excedens specie parallelogrammo, simili dato.

Et hæc propositio, ut præcedens 28 duo rectilinea, & rectam lineam datam requirit. Proponit autem, quomodo ad datam rectam comparandum sit parallelogrammum, quod quidem ipsum esset uni rectilineo æquale: excessus uero ipsius, qui est ultra rectam lineam, alteri specie similis. Recta igitur linea ac rectilineis datis, ipsa recta primum, ut in præcedente, bifariam secetur: ab alterutra deinde rectæ medietate parallelogrammo, uni ex dato rectilineo simili, per propositionem 18 huius, descripto, aliud deinde, quod & ipsum sumpto rectilineo simile sit, iam uero descripto cum rectilineo dato altero æquale existat, per propositionem 25 huius describatur: hęc igitur, quod scilicet iam descriptum est, & prius positum, cum uni sint rectilineo similia, ex structura, inter se etiam, per prop. 21, similia erunt, ac similis rationis latera circa æquales angulos habebunt. Et quoniam unum altero parallelogrãmo, ut totum sua parte, maius est: & latera illius quàm huius parallelogrammi latera longiora erunt. Breuioribus igitur ad suarum longiorum quantitate continuatis, parallelogrãmo etiã deinde copleto: quod sic describitur, ei, cuius longiora sunt latera, æquale, atq;





etiam simile erit: quare & alteri descripto, cuius nimirum latera continuata sunt,

ex 21 huius simile: circa eandem igitur hæc duo parallelogramma diametrum, ex propositione 26, consistunt. Ducatur igitur diameter, & describatur figura. Et quoniam totum hoc parallelogrammi spacium, suo gnomoni & alteri parallelogrammo ad medietatem rectæ comparato, ut suis partibus, est æquale, æquale etiam ex communi quadam noticia, huic alteri parallelogrammo & uni rectilineo, ablato de illis communi: & reliquus gnomon, ex una parte, rectilineo æqualis erit. Cum igitur supplementa omnis parallelogrãmi spacij, ex propo. 43 primi. cumq; etiam parallelogramma, super æqualibus basibus in eisdem item parallelis constituta, ex 36 eiusdem, inter se æqualia sint: huius memor, æquali pro æquali, hoc est, loco gnomonis ipso rectilineo, sumpto, res tandem concludetur. Ad datã igitur rectam lineam dato rectilineo, &c. quod fecisse oportuit.

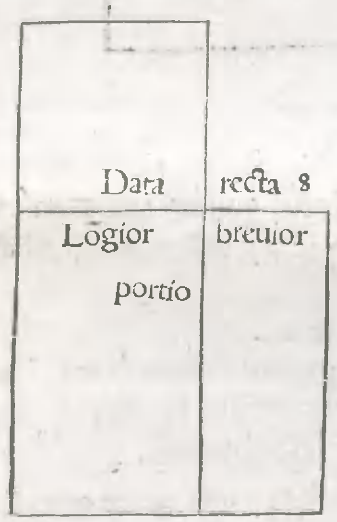
ΠΡΟΤΑΣΙΣ. Λ.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμεῖν.

PROPOSITIO XXX.

Datam rectam lineam terminatam, per extremam ac mediam rationem secare.

Proponit hæc propositio idem quod in secundo propositio decima, sub alijs tamen uerbis. Sit igitur recta linea terminata data, atq; propositum, eam per extremam & mediam rationem secare. Describatur igitur, per propositionem 46 primi, à recta data quadratum, ad lineam deinde, rectæ datæ πρὸς ὀρθὰς insistentem, alterutram, parallelogrammum, quod ipsi quidem quadrato æquale: ultra uero quadratum de eo proiectum, eidem quadrato etiam simile sit, per propositionem 29 comparetur. Et quia per huius parallelogrammi alterum latus, quod scilicet per quadratum transit, recta data, ut iussum, diuisa est: propositioni igitur satisfactum erit: demonstratio deinde hoc modo colligenda. Quoniam enim à recta data descriptũ, quadratum est ex structura: quadratum igitur est & id, propter similitudinem, quod ultra quadratum de parallelogrammo porrigitur. Et rursus, quoniam parallelogrammum, ad latus rectæ datæ conterminale, per propositionem 29 applicatum, æquale est, ex structura, rectæ datæ quadrato: igitur eo quod hæc duo æqualia commune habent, de ijs ablato, & quę relinquuntur, per communem quandam noticiam, inter se ęqualia erunt. Sed quia sunt etiam æquiangula: latera igitur eorum circa æquales angulos, ex priore parte propositionis 14 huius, reciproce proportionalia erunt. Quare, cum quadratorum latera ex definitione, inter se æqualia sint, parallelogramma insuper latera opposita, ex propositione 34 primi, æqualia inter se habeant: ex definitione lineæ, extrema & media ratione diuisæ, iam infertur propositum, quod scilicet recta data, extrema & media ratione diuisa sit, quod fieri oportuit.



Portio lon. √80 — 4
breuior 12 — √80

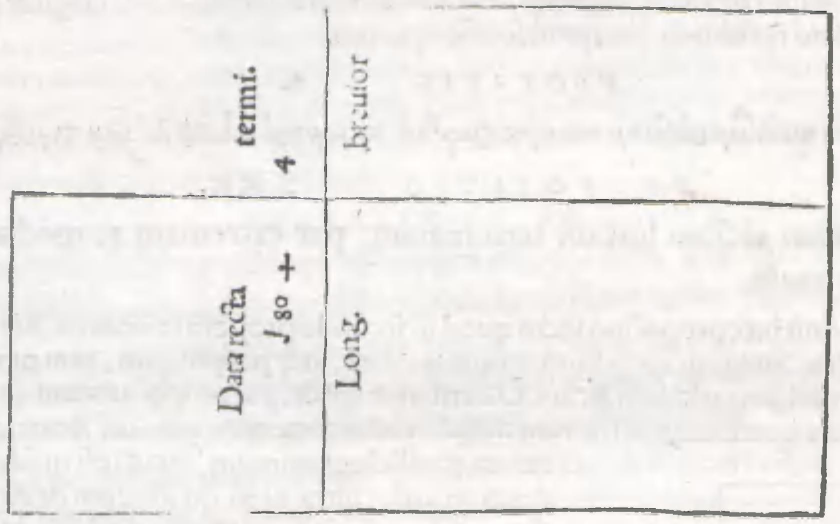
Exemplum in numeris.

Sit totus numerus

10 18 24 39 52 &c.

Portio maior		minor
$\surd 125$ — 5		15 — $\surd 125$
$\surd 205$ — 9		27 — $\surd 205$
$\surd 718$ — 12		36 — $\surd 718$
$\surd 1901\frac{1}{4}$ — $19\frac{1}{2}$		$58\frac{1}{2}$ — $\surd 1901\frac{1}{4}$
$\surd 3380$ — 26		78 — $\surd 3389$

Exemplum geometricum aliud.



Portio longior 8
breuior $\surd 8$ — 4

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΑ.

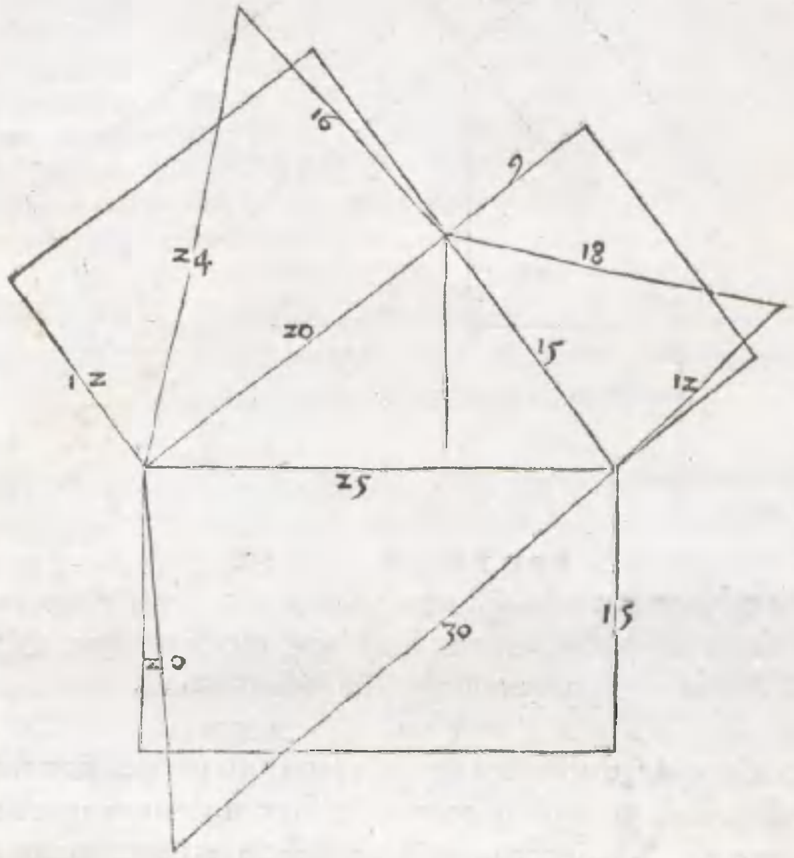
Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς εἶδος, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν εἴδεσι, τοῖς ὁμοίοις καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις.

PROPOSITIO XXXI.

In rectangulis triangulis: quæ, ab rectum angulum ſubtendente, latere ſpecies deſcripta fuerit, ea æqualis eſt eis, quæ ſimiles ſimiliterq́ poſitæ à lateribus rectum angulum continentibus deſcribuntur.

Eſt hæc propoſitio aliquanto generalior, & latius ſe extendit quàm quæ eſt in primo quadrageſima ſeptima, cum hæc de quadratis tantùm, illa uerò de omnis generis rectarum linearum figuris, modò ſimilis delineationis fuerint, intelligatur. Sit igitur triangulum rectangulum, ab illius etiam unoquoque latere rectilineum deſcriptum, primum quidem à latere uno, ut lubet, à reliquis deinde reliqua, quemadmodum docet propoſitio 18: dico ergo, rectilineum lateris quod ſubtendit angulum rectum, reliquis duorum laterum rectilineis æquales eſſe. Ducatur ab angulo trianguli recto, per propoſitionem 12 primi, ad baſim perpendicularis. Et quoniam partialia deſcripta triangula, per propoſitionem 8 huius, & toti, & ipſa inter ſe ſimilia ſunt: æquiangula igitur hæc, & latera circa æquales angulos proportionalia habebunt. ſcilicet, ſicut ſe habet ſubtendens rectū totalis trianguli, ad utrunq́ circa rectum angulum latus, ſic & in utroq́ partiali triangulo, recto angulo ſubtenſa, ad utrunq́ alterum. Sed quoniam tribus rectis lineis proportionalibus exiſtentibus, cum, per corollarium ſecundum propoſitionis 20 huius, prima ſit ad tertiam, ut

ut quæ à prima ad illam quę à ſecunda, ſimilis ſimiliterq́ poſita ſpecies deſcribitur, ratio, eodem corollario bis uſurpato, conuerſa inſuper ratione & illa bis ſumpta, cum ſex quantitates appareant, quarum prima quidem ad ſecundam eſt ut tertia

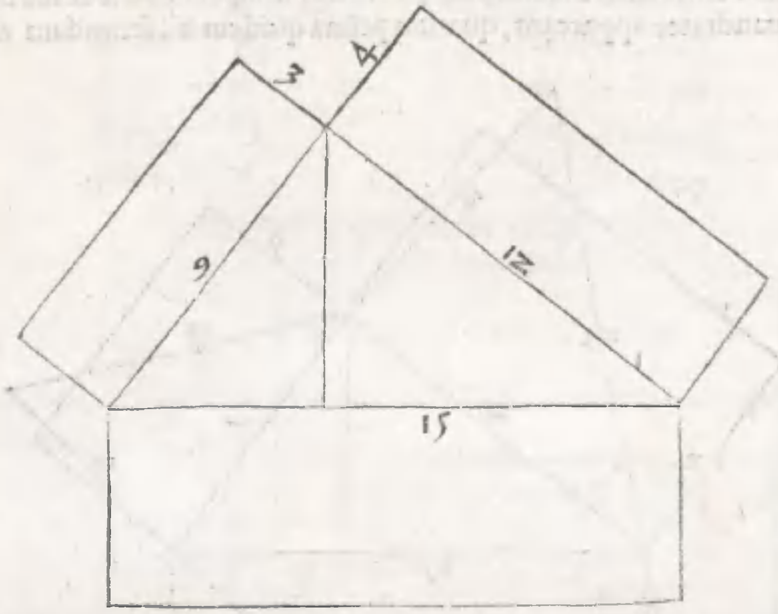


ad quartam, quinta uerò ad eandem ſecundam ut ſexta ad quartam, atq́ ita, per propoſitionem 24 quinti, prima cum quinta ad ſecundam, ſicut tertia cū ſexta ad quantitatem quartam: ſicut prima cum quinta ſecundæ, ita & tertia cum ſexta quartæ quantitati æqualis ſit, hinc propoſitioni ſatisfactū erit. In triangulis igitur rectangulis, quæ ab rectum angulum ſubtendente latere ſpecies deſcripta fuerit, ea æqualis eſt eis, quæ ſimiles ſimiliterq́ poſitæ à lateribus rectum angulum continentibus deſcribuntur. quod demonſtraſſe oportuit.

ALITER.

Figuræ, à rectanguli trianguli lateribus deſcriptæ, ſunt, ex hypotheſi, inter ſe ſimiles: & quoniam ſimiles figuræ, ex corollario propoſitionis 20 huius ſecundo, in duplicata ratione ſunt ſimilis rationis laterum, habet uerò & quadratum ad quadratum ſuorum laterum duplicatam rationem: & rectilinei igitur ad rectilineum, ex propoſitione 11 quinti, ut quadrati ad quadratum ratio erit. Hæc ſic omnia bis uſurpata, cum etiam iam ſex quantitates, quales propoſitio 24 quinti requirit, appareant, per eandem & propoſitionem quadrageſimam ſeptimam primi, de triangulis rectangulis expoſitam, infertur tandem propoſitum.

Alia huius propositionis figuratio.



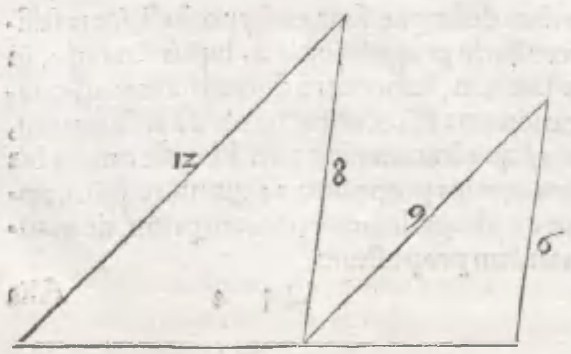
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΒ.

Ἐὰν δύο τρίγωνα συντεθῇ, κατὰ μίαν γωνίαν, τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἀνάλογον ἔχοντα, ὥστε τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς καὶ παραλλήλους εἶναι· αἱ λοιπαὶ τῶν τριγώνων πλευραὶ ἐπ' εὐθείας ἔσονται.

PROPOSITIO XXXII.

Si duo triangula, duo latera duobus lateribus proportionalia habentia, secundum unum angulum composita fuerint, sic ut proportionalia illorum latera parallela sint: tum reliqua illorum triangulorum latera in rectam lineam erunt.

Sint duo triangula qualia hæc propositio requirit, quorum unius duo latera illam, quam duo alterius trianguli latera rationem constituant. Hęc autem applicentur secundum unum eorum angulum sic, ut latera rationis in uno, duobus lateribus rationis in triangulo altero sint parallela: dico, quod tertium unius, & tertium latus trianguli alterius, adamussim unam lineam constituant. Quoniam enim latera rationis in uno, lateribus rationis in triangulo altero, ex hypothesi, sunt lineæ parallelæ, cum in eas etiam cadat recta quædam linea alia, unum scilicet ex parallelis latus: αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι, ex prima parte propositionis 29 primi, inter se æquales erunt. Eadem igitur parte bis usurpata: & anguli qui in utroque triangulo inter proportionalia latera continentur, ex communi quadam noticia, inter se æquales erunt: atque deinde triangula ipsa, ex priore parte propositionis 6 huius æquiangula, tandem duo anguli ad tertium unius, duobus angulis ad tertium latus trianguli alterius, æquales erunt. Duobus igitur æqualibus his, utri hi fuerint, angulis, anguli coalterni, qui & ipsi, ut iam demon-



demonstratum est, inter se æquales sunt, additi: & duo duobus, duo inquam anguli in uno triangulo, duobus extra illud equales erunt. Addito insuper his æqualibus angulo quodam communi, tertio scilicet huius trianguli angulo: tres in triangulo anguli tribus aliis æquales erunt. Sed cum omnis trianguli tres anguli interiores, ex corollario propositionis 32 primi, duobus rectis equales sint: & alii tres duobus rectis angulis æquales erunt. Quoniam autem ad aliquam rectam lineam quæ est, unum ex parallelis latus, atque ad eius punctum, quod est commmunis triangulorum copula, duæ rectæ lineæ, tertia nimirum duorum triangulorum latera, non ad easdem partes ductæ, deinceps se habentes angulos duobus rectis æquales faciunt: in directum igitur, ex propositione 14 primi, hæc duo tertia latera una linea erunt. Si duo igitur triangula, duo latera duobus lateribus proportionalia habentia, &c. quod demonstrasse oportuit.

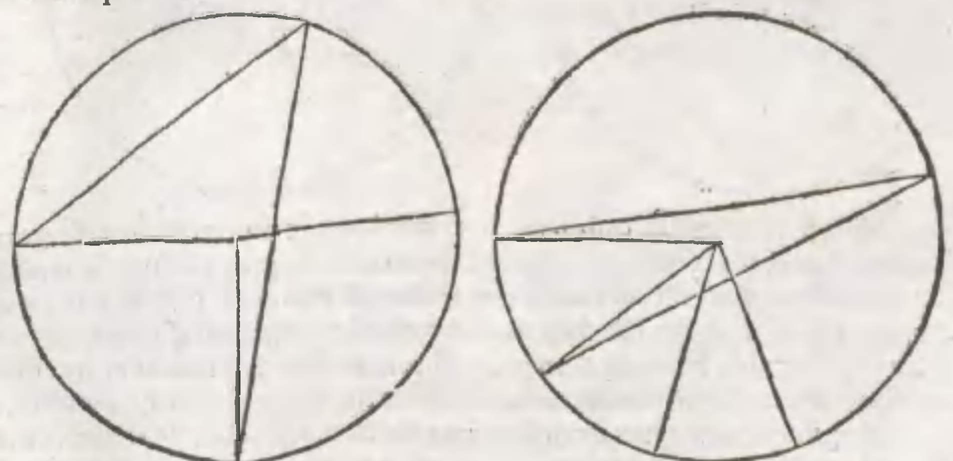
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΓ.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις, αἱ γωνίαι τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσι ταῖς περιφερείαις ἐφ' ὧν βεβήκασιν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις, ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι. Ἔτι δὲ καὶ οἱ τομεῖς, ἅτε πρὸς τοῖς κέντροις συνιστάμενοι.

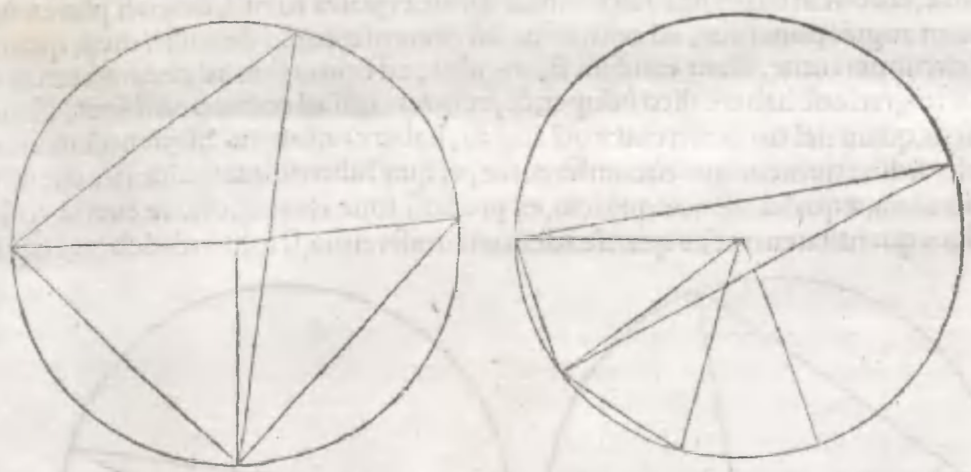
PROPOSITIO XXXIII.

In æqualibus circulis, angulis eandem habent rationem ipsis circumferentiis super quibus constituuntur, illi siue ad centrum siue ad circumferentias constituti sint: Insuper uero & sectores, ad centra constituti.

Habet hæc propositio partes duas, requirit circulos æquales, & dicit: Si in æqualibus circulis anguli positi fuerint, illos eandem quam ipsæ circumferentiæ à quibus deducuntur rationem habere, siue ad centra illi, seu ad circumferentias positi fuerint. Insuper quod etiam sectores ad centra, illam, quam uel anguli uel circumferentiæ, rationem habeant. Describantur igitur æquales circuli, duo uel plures, in iis etiam anguli ponantur, ad centra siue ad circumferentias deducti: dico, quam ipsæ circumferentiæ, illam eandem & angulos, ad centra siue ad circumferentias deductos, ratione habere: idem insuper, & sectores, qui ad centra positi sunt, illam eandem, quam uel circumferentiæ uel anguli, habere rationem. Signentur in uno circulo ordine quotcunque circumferentiæ, ei quæ subtendit angulum in circulo constitutum, æquales: & hoc quidem, ex propositione 28 tertii, officio circini, eo secundum quantitatem rectæ quam eadem circumferentia, si subtendi debeat, requirit, extenso, atque extremitatibus harum singulis, rectis lineis cum centro iunctis, hoc idem, secundum illam uel aliam multitudinem, fiat etiam in circulis aliis. Et quoniam æquales sunt, ex structura, circumferentiæ inter se, æquales autem circumferentiæ,



cumferentiæ, ex propositione 27 tertij, in æqualibus circulis, æquales angulos subtendunt: & ipsi anguli sic inter se æquales erunt. Sicut igitur in unoquoq; circulo, circumferentiarum aggregatum ad unam, illam scilicet, quæ in eodem circulo angulum subtendit, est multiplex: sic & angulorum aggregatum ad illū eundem angulū multiplex erit. Quare si circumferentiarum aggregatum in uno, ęquale fuerit aggregato circumferētiarum in alio circulo, uel maius uel minus eo: & angulorum aggregata eodem modo sese habebunt. Sunt autem iam quatuor quantitates, duo scilicet anguli ad centra positi, horum deinde angulorum circumferentiæ subtensę, quarum cum primæ & tertiæ assignatæ multiplices æqualiter se habeant, in addendo, minuendo & æqualitate, respectu multiplicium, quæ ipsis secundæ & quartæ assignatæ sunt: erunt illæ quantitates, ex definitione 5 quinti, in eadem ratione, prima scilicet ad secundam, ut tertia ad quartam, circumferentiarum nempe, ut angulorum ad centra positorum, ratio. Quoniam autem ad centra deductorum angulorum ratio, ea est ex 20 tertij, & propositione 15 quinti, quæ est angulorum qui ad circumferentias deducti sunt, cum duæ rationes eidem eædem, ipsæ ex 11 quinti inter se eædem sint: prior propositionis pars iam manifesta erit. Posterior nunc, quòd & sectorum ad centra, ut circumferentiarum sit ratio, sic demonstrari potest. Maneat prior dispositio, linearum deinde ipsorum sectorum extremitates, quas habent, uterq; in sua circumferentia, lineis rectis coniungantur. Hoc idem fiat ex altera parte cum sectoribus proximis, & signentur in quatuor istis circumferentijs uel arcubus, quatuor puncta utcunq;, atq; ab ijs ad eorum arcuum fines rectæ lineę ducantur. Et quoniam quæ ex centro circuli ad circumferentiam usq; egrediuntur rectæ lineæ, ex definitione circuli, inter se sunt æquales, cum sic in utroq; circulo duo triangula appareant, quorum duo latera unius, duobus lateribus in triangulo altero sunt æqualia, angulus etiam inter illa, angulo, ut iam ostensum est, æqualis: & tertium latus tertio lateri: totum deinde triangulum toti triangulo, ex propositione 4 primi, æquale erit.



Et quia tertia horum triangulorum latera inter se æqualia sunt, æquales uerò rectilineæ in æqualibus circulis, ex propositione 28 tertij, æquales circumferentias auferunt, maiorem maiori, & minorem minori, si in utroq; circulo, utriusq; etiam rectæ lineæ arcus à toto circulo subtrahatur: quæ relinquuntur circumferentiæ, per hanc eandem propositionem, inter se æquales erunt: quare & anguli, qui super illas circumferentias deducuntur, ex propositione 27 tertij, inter se æquales. Sectiones igitur, ex definitione, similes: atque deinde etiam, cum super æqualibus rectis constitutæ sint, ex 24 tertij, inter se æquales. Est autem & triangulum triangulo æquale: totus igitur sector toti sectori æqualis, atq; ideo & sectores in utroq; circulo tandem omnes, inter se æquales erunt. Quotuplex igitur est in utroq; circulo circumferentiarum aggregatum ad unam, illam scilicet, quæ in eodem

dem circulo sectorem subtendit, tam multiplex est etiam sectorum aggregatum ad illum eundem sectorem. Ergo sicut se habet prima ex illis quatuor, ad tertiam, in addendo, minuendo, uel æqualitate: ita & secūda erit, respectu quantitatis quarte. Sunt autem iam quatuor quantitates, duo scilicet sectores ad centra positi, horum deinde sectorum circumferentiæ subtensæ, quibus cum primæ & tertiæ, secundæ item & quartæ æquè sint assignatæ multiplices, erunt illæ quantitates, ut suprà, in eadem ratione: prima scilicet ad secundam, ut tertia ad quartam: hoc est, Sectorum ut circumferentiarum, uel propter similitudinem, ut angulorum ratio. In circulis igitur æqualibus, eadem ratio angulorum est, quę circumferentiarum super quibus constituuntur, siue ad centra siue ad circumferentias constituti sint. Itidemq; sectores, qui ad centra consistunt. quod demonstrasse oportuit.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Καὶ δῆλον, ὅτι καὶ ὡς ὁ τομεὺς πρὸς τὸν τομέα, οὕτω καὶ ἡ γωνία πρὸς τὴν γωνίαν.

COROLLARIVM.

Et manifestum est, quòd sicut sector ad sectorem: ita & angulus ad angulum.

FINIS LIBRI SEXTI.

IOANNES SCHEVBELIVS

candido Lectori S.

Habes ita, candide Lector, sex libros geometriæ Euclidis priores, ex traditione nostra, unà cum regulis Algebræ. Quod si fortè in aliquibus locis hallucinati sumus (id quod in hoc hactenus inusitato ac lubrico demonstrationis genere facile accidere potuit) quia ramen passim multa inuenientur, quibus oblectare sese studiosus harum rerum poterit, lapsus in hac re nostri apud te facile, ut spero, ueniam merebuntur. Quòd si candorem & iudicium non iniquum his adhibitum animaduertero, posteriores etiam nouem libros pari studio illustrare conabor, tecumq; communicare fideliter.

BASILEAE, PER IOANNEM Heruagium, Anno salutis humanæ M. D. L. Mense Septembri.

60

R XII
1920:5117