Tartu Ülikool
Matemaatika-informaatikateaduskond
Matemaatilise statistika instituut

Inger-Helen Maadik

$\{\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\delta}\}$-PARAMETRISATSIOONIGA MITMEMÕÕTMELINE ASÜMMEETRILINE NORMAALJAOTUS ERINEVATE KORRELATSIOONISTRUKTUURIDE KORRAL

Magistritöö

finants- ja kindlustusmatemaatika erialal (30 EAP)

Juhendaja: Meelis Käärik, PhD

Tartu 2015

$\{\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\delta}\}$-parametrisatsiooniga mitmemõõtmeline asümmeetriline normaaljaotus erinevate korrelatsioonistruktuuride korral

Käesolev magistritöö uurib mitmemõõtmelise asümmeetrilise normaaljaotuse $\{\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\delta}\}$-parametrisatsiooni ning selle jaotusega juhusliku suuruse korrelatsioonimaatriksi struktuure, võttes aluseks erinevad maatriksi $\boldsymbol{\Omega}$ ja vektori $\boldsymbol{\delta}$ struktuurid. Mitmemõõtmelise asümmeetrilise normaaljaotuse definitsioon on võetud Azzalini ja Dalla Valle 1996. aastal avaldatud artiklist ning $\{\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\delta}\}$-parametrisatsiooni käsitlus pärineb Kääriku, Selarti ja Kääriku 2015. aasta artiklist.
Märksõnad: *mitmemõõtmeline asümmeetriline normaaljaotus, asümmeetrilise normaaljaotuse* $\{\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\delta}\}$*-parametrisatsioon, korrelatsioonimaatriksid*

On the Correlation Structures of Multivariate Skew-normal Distribution with $\{\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\delta}\}$-parametrization

This master's thesis examines the $\{\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\delta}\}$-parametrization of multivariate skew-normal distribution and the structures of the correlation matrix of the multivariate skew-normal random variable in the case of different structures of the matrix $\boldsymbol{\Omega}$ and of the vector $\boldsymbol{\delta}$. The definition of multivariate skew-normal distribution is taken from the 1996 article written by Azzalini and Dalla Valle and the study of the $\{\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\delta}\}$-parametrization is taken from the 2015 article by Käärik, Selart and Käärik.
Keywords: *multivariate skew-normal distribution,* $\{\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\delta}\}$*-parametrization of skew-normal distribution, correlation matrices*

Sisukord

Sissejuhatus

Asümmeetriline normaaljaotus on normaaljaotuse laiendus, kus normaaljaotuse sümmeetriat deformeerib lisaparameeter. Mitmemõõtmeline asümmeetriline normaaljaotus on olnud viimastel aastatel suure tähelepanu all. Klassikalist mitmemõõtmelist asümmeetrilist normaaljaotust tutvustasid 1996. aastal Azzalini ja Dalla Valle [1]. Jaotust võib parametriseerida mitmel erineval viisil alustades algsest $\{\boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{\lambda}\}$-parametrisatsioonist lõpetades praeguseks laialt levinud $\{\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\alpha}\}$-parametrisatsiooniga. Artiklis [5] on näidatud, et $\{\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\delta}\}$-parametrisatsioon on hea valik olukorras, kus otsene seos marginaalsete parameetritega on vajalik.

Töös tegeletakse $\{\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\delta}\}$-parametrisatsiooniga ning analüüsitakse vastava asümmeetrilise normaaljaotusega juhusliku suuruse omadusi erinevates olukordades. Näidatakse, kuidas korrelatsioonimaatriksi $\boldsymbol{\Omega}$ struktuuri valik mõjutab $\boldsymbol{\delta}$ võimalikke valikuid ning kuidas näeb välja vektori $\boldsymbol{\alpha}$ kuju nendel juhtudel. Samuti uuritakse korrelatsioonimaatriksi kuju, korrelatsioonikordajate võimalikke väärtuste piirkondi ning vastavat asümmeetrilise normaaljaotusega juhusliku suurust.

Esimene peatükk tutvustab asümmeetrilist normaaljaotust ning selle põhiomadusi. Samuti räägitakse lähemalt korrelatsioonimaatriksite struktuuridest, mida töö jooksul kasutatakse. Teises peatükkis analüüsitakse korrelatsioonimaatriksite ja parameetervektorite struktuure erinevates olukordades. Kolmandas peatükis uuritakse, kuidas on seotud omavahel korrelatsioonimaatriksid, ning neljandas peatükis vaadatakse teema praktilist kasutust.

1. Asümmeetrilise normaaljaotuse definitsioon ja omadused

Definitsioon 1. Olgu $\mathbf{\Omega}$ positiivselt määratud lõplik $k \times k$ korrelatsioonimaatriks

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} 1 & \omega_{12} & \omega_{13} & \dots & \omega_{1,k} \\ \omega_{21} & 1 & \omega_{23} & \dots & \omega_{2,k} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & 1 & \dots & \omega_{3,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_{k,1} & \omega_{k,2} & \omega_{k,3} & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

kus $0 < \omega_{ij} < 1$, $i \neq j$, ja olgu $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_k)^T$ selline k-mõõtmeline vektor, et $\boldsymbol{\delta}^T \mathbf{\Omega}^{-1} \boldsymbol{\delta} < 1$. Öeldakse, et juhuslik suurus $\boldsymbol{Z} = (Z_1, \dots, Z_k)^T$ on k-mõõtmelise asümmeetrilise normaaljaotusega asümmeetria parameetriga $\boldsymbol{\delta}$, ning kirjutatakse $\boldsymbol{Z} \sim SN(\mathbf{\Omega}, \boldsymbol{\delta})$, kui juhusliku suuruse $\boldsymbol{Z}$ tihedusfunktsioon on kujul

$$f(\mathbf{z}; \mathbf{\Omega}, \boldsymbol{\delta}) = 2\phi_k(\mathbf{z}; \mathbf{\Omega})\Phi\left(\frac{\boldsymbol{\delta}^T \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbf{z}}{\sqrt{1 - \boldsymbol{\delta}^T \mathbf{\Omega}^{-1} \boldsymbol{\delta}}}\right), \ \mathbf{z} \in \mathbf{R}^k, \tag{1}$$

kus ϕ_k on k-mõõtmelise normaaljaotuse tihedusfunktsioon, mille marginaalid on standardse normaaljaotusega ja korrelatsioonimaatriksiks on $\mathbf{\Omega}$, ning Φ on ühemõõtmelise standard normaaljaotuse jaotusfunktsioon.

Edaspidiseks kasutamiseks esitame siinkohal asümmeetrilise normaaljaotusega juhusliku suuruse normaaljaotuse tinglikustamise kaudu, kasutades $\{\mathbf{\Omega}, \boldsymbol{\delta}\}$-parametrisatsiooni (vt näiteks [1], [2] või [5]).

Definitsioon 2. Olgu $\boldsymbol{X} \sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Omega})$ k-mõõtmeline juhuslik suurus, olgu $X_0 \sim N(0,1)$ ühemõõtmeline juhuslik suurus ning olgu $\boldsymbol{X}$ ja X_0 vaheline korrelatsioonivektor $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \ldots, \delta_k)^T$ selline, et

$$\boldsymbol{\delta}^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} \boldsymbol{\delta} < 1. \tag{2}$$

Siis juhuslik suurus $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{X} | X_0 > 0$ on asümmeetrilise normaaljaotusega $\boldsymbol{Z} \sim SN(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\delta})$.

Pidades silmas, et vektor $\boldsymbol{\delta}$ on teatav korrelatsioonivektor, on kasulik tuua kasutusse järgnevad maatriksid:

$$\boldsymbol{\Omega}^* = \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{\delta}^T \\ \boldsymbol{\delta} & \boldsymbol{\Omega} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\Omega}_* = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Omega} & \boldsymbol{\delta} \\ \boldsymbol{\delta}^T & 1 \end{pmatrix}.$$

Siin $\boldsymbol{\Omega}^*$ on $(X_0, \boldsymbol{X})^T$ korrelatsioonimaatriks ja $\boldsymbol{\Omega}_*$ on $(\boldsymbol{X}, X_0)^T$ korrelatsioonimaatriks. Olgu $\mathbf{R} = (r_{ij})$ asümmeetrilise normaaljaotusega juhusliku suuruse $\boldsymbol{Z} = (Z_1, \ldots, Z_k)^T$ korrelatsioonimaatriks. Maatriksi $\mathbf{R} = (r_{ij})$ kuju on antud artiklis [1]:

$$r_{ij} = corr(Z_i, Z_j) = \frac{\omega_{ij} - \frac{2}{\pi}\delta_i\delta_j}{\sqrt{1 - \frac{2}{\pi}\delta_i^2}\sqrt{1 - \frac{2}{\pi}\delta_j^2}}, \; i, j = 1, \ldots, k. \tag{3}$$

Oluline eriolukord tekib, kui kõikidel marginaalidel on sama jaotus $SN(\delta)$, mis tähendab, et kõik $\boldsymbol{\delta}$ komponendid on identsed, ehk $\boldsymbol{\delta} = (\delta, \ldots, \delta)^T$. Siis valem (3) lihtsustub kujule

$$r_{ij} = \frac{\omega_{ij} - \frac{2}{\pi}\delta^2}{1 - \frac{2}{\pi}\delta^2}, \quad i, j = 1, \ldots, k. \tag{4}$$

Selles töös on tegemist nelja erineva korrelatsioonimaatriksiga: $\boldsymbol{\Omega} = (\omega_{ij})$, $\mathbf{R} = (r_{ij})$, $\boldsymbol{\Omega}^*$ ja $\boldsymbol{\Omega}_*$. Põhiliselt uurime neid maatrikseid erinevate tingimuste korral ning analüüsime maatriksite elementide piiranguid.

Vaatleme korrelatsioonimaatriksite $\boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{\Omega}^*$ ja $\boldsymbol{\Omega}_*$ struktuure ning uurime, kuidas nende kuju mõjutab korrelatsioonimaatriksi $\mathbf{R}$ struktuuri ning parameetervektorite $\boldsymbol{\delta}$ ja $\boldsymbol{\alpha}$ struktuure erinevates olukordades. Loomulik algus oleks kasutada kindlaid ja lihtsaid korrelatsioonistruktuure, mis sõltuvad ainult ühest parameetrist. Vaatluse alla tulevad järgmised $\boldsymbol{\Omega}$ struktuurid:

(1) Liitsümmeetria (*compound symmetry*, edaspidi tähistatakse seda *CS*) või konstantne korrelatsioonistruktuur, kus kõikide mõõtmiste vahelised korrelatsioonid on võrdsed, ehk $\omega_{ij} = \omega, \quad i, j = 1, \ldots, k, i \neq j;$

(2) Esimest järku autoregressiivne (*first order autoregressive*, edaspidi tähistatakse seda *AR*) korrelatsioonistruktuur, kus sama subjekti vaatlused on kõrgemalt korreleeritud, mida lähemal nad on üksteisele, ehk $\omega_{ij} = \omega^{|j-i|}, \quad i, j = 1, \ldots, k, i \neq j.$

Toodud korrelatsioonistruktuuride valik on motiveeritud sellest, et nad on kõige tihedamini kasutatavad lähenemised ning nad vajavad ainult ühe parameetri ω hindamist, ükskõik kui suur on mõõtmiste arv.

2. $\boldsymbol{\Omega}$ erijuhtude mõju vastavale asümmeetrilisele normaaljaotusele

Olgu juhuslik suurus $\boldsymbol{Z} = (Z_1, \ldots, Z_k)^T$ k-mõõtmelise asümmeetrilise normaaljaotusega, $\boldsymbol{Z} \sim SN(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\delta})$, nagu seda täpsustati punktis (1). Järgnevalt uuritakse kahte eelnevalt mainitud $\boldsymbol{\Omega}$ struktuuri (*CS, AR*), alustades sellega, et $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{I}$, mis on lihtsaim erijuht nii *CS* kui ka *AR* struktuurist.

Vektori $\boldsymbol{\delta}$ puhul analüüsime kahte põhilist erijuhtu:

(a) olukorda, kus kõik parameetervektori $\boldsymbol{\delta}$ komponendid on võrdsed, $\boldsymbol{\delta} = (\delta, \ldots, \delta)^T$, mis tähendab, et kõikidel marginaalidel on sama jaotus ($SN(\delta)$);

(b) olukorda, kus vektori $\boldsymbol{\delta}$ kuju määrab ära $\boldsymbol{\Omega}^*$ (või $\boldsymbol{\Omega}_*$) struktuur.

Töö käigus üritame leida vastuseid järgnevatele küsimustele:

1. Kuidas arvutada parameetervektorit $\boldsymbol{\alpha}$ vastavast $\{\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\alpha}\}$-parametrisatsioonist?

2. Milline on ω_{ij} võimalike väärtuste piirkond? (ja δ_i võimalike väärtuste piirkond?)

3. Kuidas arvutada korrelatsioonikordajaid r_{ij}, mis defineeriti punktis (3)?

4. Milline on korrelatsioonikordajate r_{ij} võimalike väärtuste piirkond?

2.1 Olukord, kus $\mathbf{\Omega} = \mathbf{I}$ ja $\boldsymbol{\delta} = (\delta, \ldots, \delta)^T$

Oletame, et $\mathbf{\Omega} = \mathbf{I}$ ja $\boldsymbol{\delta} = (\delta, \ldots, \delta)^T$. Siis deformeeritaval normaaljaotusel on *i.i.d.* marginaalid, $\boldsymbol{X} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{I})$.

Siinkohal toome välja suhted parameetervektorite $\boldsymbol{\delta}$ ja $\boldsymbol{\alpha}$ vahel (vt näiteks [5]):

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathbf{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\delta}}{\sqrt{1 - \boldsymbol{\delta}^T\mathbf{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\delta}}} = \frac{\mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{\delta}}{\sqrt{1 - \boldsymbol{\delta}^T\mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{\delta}}} = \frac{\boldsymbol{\delta}}{\sqrt{1 - \boldsymbol{\delta}^T\boldsymbol{\delta}}} = \frac{\boldsymbol{\delta}}{\sqrt{1 - k\delta^2}}, \tag{5}$$

sest

$$\boldsymbol{\delta}^T\boldsymbol{\delta} = \begin{pmatrix} \delta & \ldots & \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta \\ \vdots \\ \delta \end{pmatrix} = \delta \cdot \delta + \ldots + \delta \cdot \delta = k\delta^2.$$

Kuna $\boldsymbol{\delta} = (\delta, \ldots, \delta)^T$, ehk kõik vektor $\boldsymbol{\delta}$ komponendid on võrdsed, siis see tähendab, et ka kõik vektor $\boldsymbol{\alpha}$ komponendid on võrdsed, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha, \ldots, \alpha)^T$, kus

$$\alpha = \frac{\delta}{\sqrt{1 - k\delta^2}}. \tag{6}$$

Seega saame valemi vektorile $\boldsymbol{\delta}$ sarnaselt võrdusele (5):

$$\boldsymbol{\delta} = \frac{\mathbf{\Omega}\boldsymbol{\alpha}}{\sqrt{1 + \boldsymbol{\alpha}^T\mathbf{\Omega}\boldsymbol{\alpha}}} = \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\sqrt{1 + \boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}}} = \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\sqrt{1 + k\alpha^2}}.$$

Parameeter δ võimalike väärtuste piirkonna saame leida valemist (6):
kuna peab kehtima $1 - k\delta^2 > 0$, siis teisendades saame, et

$$|\delta| < \sqrt{\frac{1}{k}}.$$

Seega lubatud piirkond parameetrile δ on

$$\delta \in \left(-\frac{1}{\sqrt{k}}\,;\, \frac{1}{\sqrt{k}} \right). \tag{7}$$

Kui nüüd rakendada saadud tulemust (7) valemile (6), saame, et parameetril α ei ole kitsendusi, ehk

$$\alpha \in (-\infty, \infty).$$

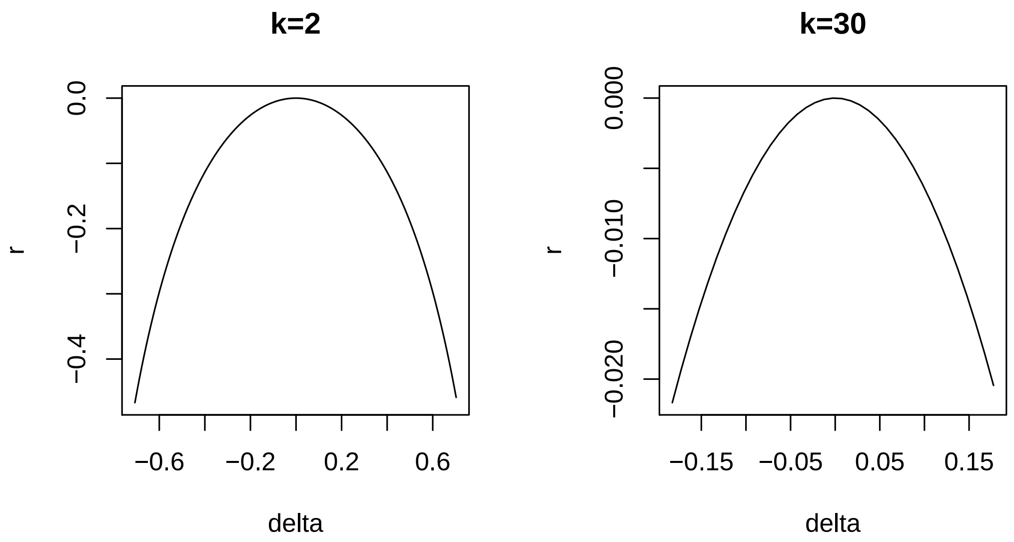
Kuna $\mathbf{\Omega} = \mathbf{I}$ tähendab, et $\omega_{ij} = 0,\ i \neq j$, siis võrdusest (4) tuleneb, et

$$r_{ij} = \frac{\omega_{ij} - \frac{2}{\pi}\delta^2}{1 - \frac{2}{\pi}\delta^2} = \frac{-\frac{2\delta^2}{\pi}}{\frac{\pi - 2\delta^2}{\pi}} = -\frac{2\delta^2}{\pi - 2\delta^2}. \tag{8}$$

Seega on juhusliku suuruse $\boldsymbol{Z}$ korrelatsioonimaatriksil $\mathbf{R} = (r_{ij})$ CS struktuur. Kuna kõik parameetrid δ on võrdsed, on ka kõik r_{ij} võrdsed, $r_{ij} = r$, $\forall i, j = 1, \ldots, k$. Valemi (7) kohaselt on korrelatsioonikordajate r võimalike väärtuste piirkond järgmine:

$$r \in \left(-\frac{2}{k\pi - 2}\ ; 0\right].$$

Antud juhul, kuna δ võimalike väärtuste piirkond on (7), on funktsioon (8) parabool, mis avaned alla ning mille maksimumpunkt on kohal $\delta = 0$ (vt joonist 1).



Joonis 1: Korrelatsioonikordajate $r_{ij} = r$ graafik valemi (8) põhjal

Piiril, kui $\delta \downarrow -\frac{1}{\sqrt{k}}$ või $\delta \uparrow \frac{1}{\sqrt{k}}$, siis saame, et

$$r = -\frac{2\delta^2}{\pi - 2\delta^2} \to -\frac{2\left(\pm\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2}{\pi - 2\left(\pm\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2} = -\frac{\frac{2}{k}}{\frac{k\pi-2}{k}} = -\frac{2}{k\pi - 2},$$

ning kui $\delta = 0$, siis

$$r = -\frac{2\delta^2}{\pi - 2\delta^2} = -\frac{2 \cdot 0^2}{\pi - 2 \cdot 0^2} = 0.$$

Seega on korrelatsioonikordajate võimalikud väärtused poollõigus

$$r \in \left(-\frac{2}{k\pi - 2}\ ; 0\right].$$

Sõnastame saadud tulemused järgnevaks lauseks.

Lause 2.1. *Olgu juhuslik suurus $\boldsymbol{Z}$ k-mõõtmelise asümmeetrilise normaaljaotusega, $\boldsymbol{Z} \sim SN(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\delta})$, kus korrelatsioonimaatriks $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{I}$ ja vektor $\boldsymbol{\delta}$ on kujul $\boldsymbol{\delta} = (\delta, \ldots, \delta)^T$, ehk juhuslikul suurusel $\boldsymbol{Z}$ on identsed marginaalid ning vastava deformeeritava normaaljaotuse marginaalid on sõltumatud. Siis*

(a) parameetervektori $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha, \ldots, \alpha)^T$ komponendid avalduvad

$$\alpha = \frac{\delta}{\sqrt{1 - k\delta^2}}\ ;$$

(b) parameetri δ võimalike väärtuste piirkond on

$$\delta \in \left(-\frac{1}{\sqrt{k}}\ ; \frac{1}{\sqrt{k}}\right)\ ;$$

(c) juhusliku suuruse $\boldsymbol{Z}$ korrelatsioonimaatriks $\mathbf{R} = (r_{ij})$ on CS struktuuriga, st $r_{ij} = r$, $\forall i, j = 1, \ldots, k$, kus

$$r = -\frac{2\delta^2}{\pi - 2\delta^2}\ ;$$

(d) korrelatsioonikordajate r võimalike väärtuste piirkond on

$$r \in \left(-\frac{2}{k\pi - 2} \, ; 0 \right] .$$

Märkus 1. *Kui vektori $\boldsymbol{\delta}$ komponendid on võrdsed, $\boldsymbol{\delta} = (\delta, \ldots, \delta)^T$, siis on ka vektori $\boldsymbol{\lambda}$ komponendid võrdsed, $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda, \ldots, \lambda)^T$ ja kehtivad järgnevad seosed (vt näiteks [1]):*

$$\delta = \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}; \qquad \lambda = \frac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}.$$

Nüüd teades, et $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{I}$ ja δ võimalike väärtuste piirkond on (7), saab leuda ka parameetri λ võimalike väärtuste piirkonna:

$$\lambda \in \left(-\frac{1}{\sqrt{k-1}} \, ; \frac{1}{\sqrt{k-1}} \right) .$$

2.2 Olukord, kus maatriksil $\mathbf{\Omega}$ on $\boldsymbol{CS}$ struktuur ja $\boldsymbol{\delta} = (\delta, \ldots, \delta)^T$

Olgu korrelatsioonimaatriksil $\mathbf{\Omega} = (\omega_{ij})$ liitsümmeetriline (CS) korrelatsioonistruktuur, ehk $\omega_{ij} = \omega$ iga $i, j = 1, \ldots, k, i \neq j$. Uurime seda olukorda, kui on jällegi tegemist identsete marginaalidega, mis tähendab, et vektoril $\boldsymbol{\delta}$ on kuju $\boldsymbol{\delta} = (\delta, \ldots, \delta)^T$. Seos (4) lihtsustub nüüd kujule

$$r_{ij} = \frac{\omega - \frac{2}{\pi}\delta^2}{1 - \frac{2}{\pi}\delta^2} = \frac{\pi\omega - 2\delta^2}{\pi - 2\delta^2} =: r, \quad i, j = 1, \ldots, k;\ i \neq j.$$

See tähendab, et korrelatsioonimaatriksil $\mathbf{R}$ on ka CS struktuur, ehk $r_{ij} = r$ iga $i, j = 1, \ldots, k, i \neq j$, ja parameeter r avaldub

$$r = \frac{\pi\omega - 2\delta^2}{\pi - 2\delta^2}. \tag{9}$$

Valemist (9) järeldub, et kui δ on fikseeritud, siis r on parameetri ω lineaarne funktsioon. Vektori $\boldsymbol{\alpha}$ arvutamiseks alustame uuesti võrdusest (5):

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathbf{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\delta}}{\sqrt{1 - \boldsymbol{\delta}^T\mathbf{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\delta}}}. \tag{10}$$

Tähistame alguses pöördmaatriksi $\mathbf{\Omega}^{-1}$ elemendid $\omega_{ij}^{(-1)}$, ehk $\mathbf{\Omega}^{-1} = (\omega_{ij}^{(-1)})$. Maatriksil $\mathbf{\Omega}^{-1}$ on järgnev struktuur (vt [6]):

$$\omega_{ii}^{(-1)} = \frac{1 + (k-2)\omega}{(1-\omega)(1 + (k-1)\omega)}, \quad \omega_{ij}^{(-1)} = -\frac{\omega}{(1-\omega)(1 + (k-1)\omega)}. \tag{11}$$

Kontrollime, kas $\mathbf{\Omega}^{-1}$ elemendid on valemis (11) antud kujul. Teame, et pöördmaatriksi definitsiooni tõttu peab kehtima

$$\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{\Omega}^{-1} = \mathbf{I}.$$

Kirjutame need maatriksid välja:

$$\begin{pmatrix} 1 & \omega & \dots & \omega & \omega \\ \omega & 1 & \dots & \omega & \omega \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \omega & \omega & \dots & 1 & \omega \\ \omega & \omega & \dots & \omega & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_{11}^{(-1)} & \omega_{12}^{(-1)} & \dots & \omega_{1,k-1}^{(-1)} & \omega_{1,k}^{(-1)} \\ \omega_{21}^{(-1)} & \omega_{22}^{(-1)} & \dots & \omega_{2,k-1}^{(-1)} & \omega_{2,k}^{(-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \omega_{k-1,1}^{(-1)} & \omega_{k-1,2}^{(-1)} & \dots & \omega_{k-1,k-1}^{(-1)} & \omega_{k-1,k}^{(-1)} \\ \omega_{k,1}^{(-1)} & \omega_{k,2}^{(-1)} & \dots & \omega_{k,k-1}^{(-1)} & \omega_{k,k}^{(-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tänu maatriksi $\mathbf{\Omega}$ CS struktuurile on pöördmaatriksit võimalik leida võrrandisüsteemi abil. Meil on vaja lahendada järgnev võrrandisüsteem:

$$\begin{cases} \omega_{ii}^{(-1)} + (k-1)\omega \cdot \omega_{ij}^{(-1)} = 1 \\ \omega \cdot \omega_{ii}^{(-1)} + \omega_{ij}^{(-1)} + (k-2)\omega \cdot \omega_{ij}^{(-1)} = 0 \end{cases} \qquad i, j = 1, \dots, k.$$

Lahendus asendusvõttega:

$$\begin{aligned} \omega_{ii}^{(-1)} &= 1 - (k-1)\omega \cdot \omega_{ij}^{(-1)}, \\ 0 &= \omega(1 - (k-1)\omega \cdot \omega_{ij}^{(-1)}) + (1 + (k-2)\omega)\omega_{ij}^{(-1)}. \end{aligned}$$

Teisendades saame, et

$$\begin{aligned} \omega &= ((k-1)\omega^2 - 1 - (k-2)\omega)\omega_{ij}^{(-1)}, \\ \omega &= (k\omega^2 - k\omega - (\omega-1)^2)\omega_{ij}^{(-1)}, \\ \omega &= (-k\omega(1-\omega) - (1-\omega)^2)\omega_{ij}^{(-1)}. \end{aligned}$$

Seega saame parameetritele $\omega_{ij}^{(-1)}$ ja $\omega_{ii}^{(-1)}$ järgmised kujud:

$$\begin{aligned} \omega_{ij}^{(-1)} &= \frac{\omega}{(1-\omega)(-k\omega - 1 + \omega)} = -\frac{\omega}{(1-\omega)(1+(k-1)\omega)}, \\ \omega_{ii}^{(-1)} &= 1 + \frac{(k-1)\omega^2}{(1-\omega)(1+(k-1)\omega)} = \frac{1 + (k-1)\omega - \omega - (k-1)\omega^2 + (k-1)\omega^2}{(1-\omega)(1+(k-1)\omega)} \\ &= \frac{1+(k-2)\omega}{(1-\omega)(1+(k-1)\omega)}. \end{aligned}$$

Tõepoolest, maatriks $\mathbf{\Omega}^{-1}$ on struktuuriga (11):

$$\omega_{ii}^{(-1)} = \frac{1+(k-2)\omega}{(1-\omega)(1+(k-1)\omega)}, \quad \omega_{ij}^{(-1)} = -\frac{\omega}{(1-\omega)(1+(k-1)\omega)}.$$

Nüüd, kui teame, milline on pöördmaatriks $\mathbf{\Omega}^{-1}$, tuletame valemi (10) lugeja ja nimetaja. Lugeja $\mathbf{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\delta}$ on k-mõõtmeline vektor, mille kõik komponendid on võrdsed:

$$\begin{aligned}
\omega_{ii}^{(-1)}\delta + (k-1)\omega_{ij}^{(-1)}\delta &= \delta\left(\frac{1+(k-2)\omega}{(1-\omega)(1+(k-1)\omega)} - \frac{(k-1)\omega}{(1-\omega)(1+(k-1)\omega)}\right) \\
&= \delta\left(\frac{1+k\omega-2\omega-k\omega+\omega}{(1-\omega)(1+(k-1)\omega)}\right) = \delta\left(\frac{1-\omega}{(1-\omega)(1+(k-1)\omega)}\right) \\
&= \frac{\delta}{1+(k-1)\omega}\ .
\end{aligned}$$

Nimetaja jaoks me saame, et

$$\boldsymbol{\delta}^T\mathbf{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\delta}^T \cdot \frac{\delta}{1+(k-1)\omega} = (\delta+\ldots+\delta)\frac{\delta}{1+(k-1)\omega} = \frac{k\delta^2}{1+(k-1)\omega} \tag{12}$$

ning seega

$$1-\boldsymbol{\delta}^T\mathbf{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\delta} = \frac{1+(k-1)\omega-k\delta^2}{1+(k-1)\omega}\ .$$

Kokkuvõtteks on ka vektor $\boldsymbol{\alpha}$ identsete komponentidega, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha,\ldots,\alpha)^T$, ning valemist (10) saame saadud tulemuste põhjal leida α:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{\delta}{1+(k-1)\omega} : \sqrt{\frac{1+(k-1)\omega-k\delta^2}{1+(k-1)\omega}} \\
&= \frac{\delta}{\sqrt{1+(k-1)\omega}\sqrt{1+(k-1)\omega-k\delta^2}}.
\end{aligned} \tag{13}$$

Vaatame, mida tähendab tingimus (2), $\boldsymbol{\delta}^T\mathbf{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\delta} < 1$, korrelatsioonimaatriksite $\mathbf{\Omega}$ ja $\mathbf{R}$ jaoks. Arvestades $\mathbf{\Omega}$ positiivset määratust, piirangut (2) ja valemit (12) saame järgneva tingimuse, mida δ ja ω rahuldama peavad:

$$0 < \frac{k\delta^2}{1+(k-1)\omega} < 1\ . \tag{14}$$

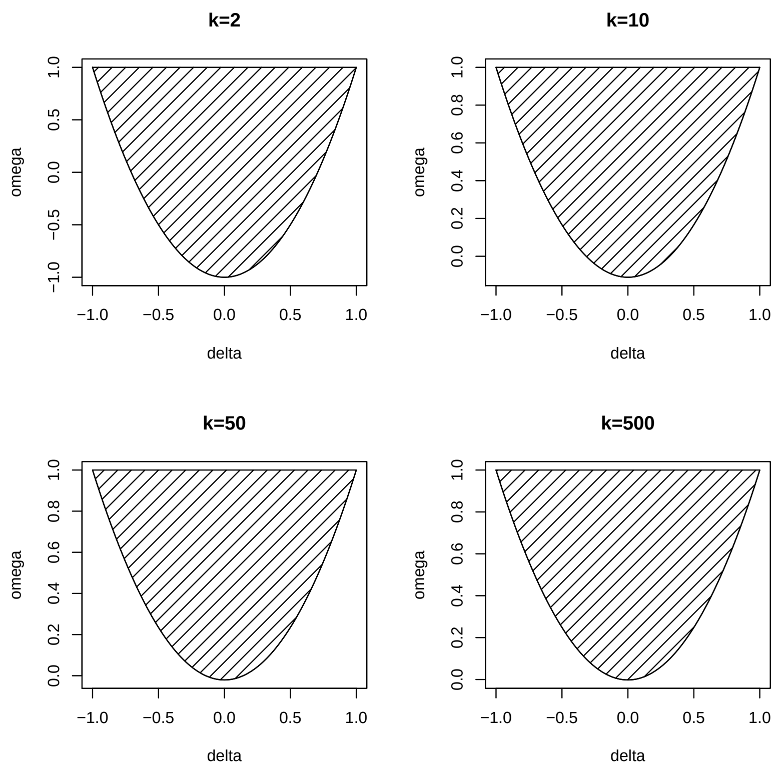
Selleks, et leida ω võimalike väärtuste piirkonda, fikseerime δ ning alustame valemist (14). Kuna lugeja on alati mittenegatiivne, siis peab nimetaja olema positiivne: $1+(k-1)\omega > 0$. Kuna valemis (14) toodud murd peab olema ühest väiksem, saame, et

$$\begin{aligned} 1 + (k-1)\omega &> k\delta^2, \\ \omega &> \frac{k\delta^2 - 1}{k-1}. \end{aligned} \tag{15}$$

Seega, kui maatriksil $\mathbf{\Omega}$ on CS struktuur ja $\boldsymbol{\delta} = (\delta, \ldots, \delta)^T$, on ω võimalike väärtuste piirkond järgmine:

$$\omega \in \left(\frac{k\delta^2 - 1}{k-1}; 1 \right). \tag{16}$$

Kuna ω võimalike väärtuste piirkond jäi sõltuma ühest parameetrist δ, siis oleks ka hea leida parameetrile δ mingi piirang. Kui $k \geq 2$, siis funktsiooni $\frac{k\delta^2-1}{k-1}$ puhul on tegemist parabooliga, mis avaneb üles ning mille haripunkt on punktis $\delta = 0$ (vt joonist 2).



Joonis 2: Parameetri ω lubatud piirkond valemi (15) põhjal

Kuna meil on vaja, et $\frac{k\delta^2-1}{k-1} < 1$, siis saame lihtsalt leida piirangud δ-le:

$$\frac{k\delta^2-1}{k-1} < 1,$$
$$k\delta^2 - 1 < k - 1.$$

Teisendades edasi saame, et

$$|\delta| < \sqrt{1}.$$

Seega peab $\delta \in (-1; 1)$. Tuletame meelde, et δ on korrelatsioonikordaja, mis tähendab, et δ peab kindlasti kuuluma vahemikku $(-1; 1)$.

Märkus 2. *On lihtne näha, et kui $\delta = 0$, ehk kui meil on tegemist normaaljaotusega, siis ω võimalike väärtuste piirkond on $\omega \in \left(-\frac{1}{k-1}; 1\right)$, mis on piirkond, kus $\mathbf{\Omega}$ kindlalt positiivne.*

Nüüd oleme leidnud korrelatsioonimaatriksi $\mathbf{\Omega}$ komponentide ω sobivate väärtustega piirkonna (16). Selle vahemiku abil on võimalik leida vastava korrelatsioonikordajate r piirangud. Tuletame meelde, et korrelatsioonimaatriks $\mathbf{R}$ on CS struktuuriga ja korrelatsioonikordaja r avaldub kujul (9) ning me vaatleme piire $\omega \downarrow \frac{k\delta^2-1}{k-1}$ ja $\omega \uparrow 1$.
Kui $\omega \downarrow \frac{k\delta^2-1}{k-1}$, siis valem (9) annab tulemuse

$$r = \frac{\pi\omega - 2\delta^2}{\pi - 2\delta^2} \to \frac{\pi\frac{k\delta^2-1}{k-1} - 2\delta^2}{\pi - 2\delta^2} = \frac{\pi k\delta^2 - \pi - 2\delta^2 k + 2\delta^2}{(k-1)(\pi - 2\delta^2)} = \frac{\delta^2(\pi k - 2k + 2) - \pi}{(k-1)(\pi - 2\delta^2)},$$

ning kui $\omega \uparrow 1$, siis

$$r = \frac{\pi\omega - 2\delta^2}{\pi - 2\delta^2} \to \frac{\pi - 2\delta^2}{\pi - 2\delta^2} = 1.$$

Kokkuvõtteks on kordajate r võimalikud väärtused

$$r \in \left(\frac{\delta^2(\pi k - 2k + 2) - \pi}{(k-1)(\pi - 2\delta^2)}; 1\right)$$

Saadud tulemuste põhjal on võimalik sõnastada järgnev lause.

Lause 2.2. *Olgu juhuslik suurus $\boldsymbol{Z}$ k-mõõtmelise asümmeetrilise normaaljaotusega, $\boldsymbol{Z} \sim SN(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\delta})$, olgu korrelatsioonimaatriks $\boldsymbol{\Omega}$ CS struktuuriga ja olgu $\boldsymbol{\delta} = (\delta, \ldots, \delta)^T$. Siis*

(a) parameetervektori $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha, \ldots, \alpha)^T$ komponendid avalduvad

$$\alpha = \frac{\delta}{\sqrt{1 + (k-1)\omega}\sqrt{1 + (k-1)\omega - k\delta^2}} \ ;$$

(b) parameetri ω võimalike väärtuste piirkond (teades, et $\delta \in (-1; 1)$) on

$$\omega \in \left(\frac{k\delta^2 - 1}{k-1}; 1 \right) \ ;$$

(c) juhusliku suuruse $\boldsymbol{Z}$ korrelatsioonimaatriksil $\mathbf{R} = (r_{ij})$ on CS struktuur, st $r_{ij} = r$, $\forall i, j = 1, \ldots, k$, kus

$$r = \frac{\pi\omega - 2\delta^2}{\pi - 2\delta^2} \ ;$$

(d) korrelatsioonikordajate r võimalike väärtuste piirkond on

$$r \in \left(\frac{\delta^2(\pi k - 2k + 2) - \pi}{(k-1)(\pi - 2\delta^2)}; 1 \right).$$

Märkus 3. *Kui nüüd vaadata sobivate δ-de piirkonda, $\delta \in (-1; 1)$, siis $\delta \to \pm 1$ korral, kui $\omega \downarrow \frac{k\delta^2 - 1}{k-1}$*

$$r = \frac{\pi\omega - 2\delta^2}{\pi - 2\delta^2} \to \frac{\pi\omega - 2}{\pi - 2} \to \frac{\pi\frac{k\delta^2-1}{k-1} - 2}{\pi - 2} \to \frac{\pi - 2}{\pi - 2} = 1$$

ning kui $\omega \uparrow 1$, siis

$$r = \frac{\pi\omega - 2\delta^2}{\pi - 2\delta^2} \to \frac{\pi - 2}{\pi - 2} = 1.$$

Kui võtame, et $\delta = 0$ siis $\omega \downarrow \frac{k\delta^2 - 1}{k-1}$ korral

$$r = \frac{\pi\omega - 2\delta^2}{\pi - 2\delta^2} \to \frac{\pi\frac{k\delta^2-1}{k-1}}{\pi} = -\frac{1}{k-1}$$

ning $\omega \uparrow 1$ korral

$$r = \frac{\pi\omega - 2\delta^2}{\pi - 2\delta^2} \to \frac{\pi}{\pi} = 1.$$

2.3 Olukord, kus maatriksitel $\boldsymbol{\Omega}$ ja $\boldsymbol{\Omega}^*$ (ja $\boldsymbol{\Omega}_*$) on *CS* struktuur

Olgu korrelatsioonimaatriksil $\boldsymbol{\Omega}$ *CS* struktuur nagu eelmises alapeatükis. On ilmne, et korrelatsioonimaatriksitel $\boldsymbol{\Omega}^*$ ja $\boldsymbol{\Omega}_*$ on ka *CS* struktuur, kui $\boldsymbol{\delta} = (\omega, \ldots, \omega)^T$. Seega tekib meil erijuht eelmisest olukorrast.

Uurime, kuidas see lihtsustus mõjutab meid huvitavaid parameetreid. Esiteks, kuna $\boldsymbol{\delta} = (\omega, \ldots, \omega)^T$, siis võrdus (13) taandub kujule

$$\alpha = \frac{\omega}{\sqrt{1+(k-1)\omega}\sqrt{1+(k-1)\omega - k\omega^2}}.$$

Samamoodi, kuna $\delta = \omega$, võtab tingimus (14) kuju

$$0 < \frac{k\omega^2}{1+(k-1)\omega} < 1. \tag{17}$$

Võrratuse (17) lugeja on alati positiivne, kuna $k \geq 1$. See tähendab, et murd on positiivne, kui nimetaja on positiivne, mis on täidetud, kui $\omega > -\frac{1}{k-1}$. Tingimus, et murd on väiksem kui üks, on samaväärne võrratusega

$$\frac{k\omega^2}{1+(k-1)\omega} < 1,$$
$$k\omega^2 - 1 - k\omega + \omega < 0.$$

Tegurdades edasi saame, et

$$k\omega(\omega-1) + \omega - 1 < 0,$$
$$(\omega-1)(k\omega+1) < 0,$$
$$k(\omega-1)(\omega+\frac{1}{k}) < 0,$$

millest tuleb, et $\omega > -\frac{1}{k}$, sest $k \geq 1$ ning $\omega - 1 \leq 0$.

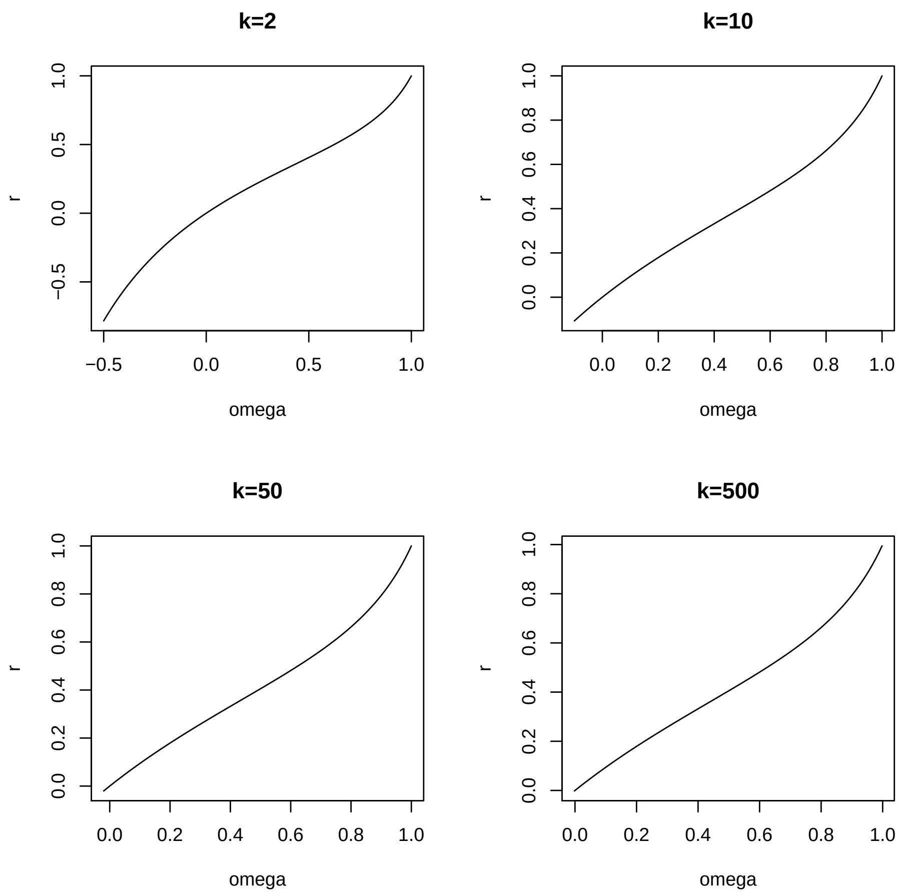
Seega, kui $\boldsymbol{\Omega}$ on *CS* struktuuriga ja $\boldsymbol{\delta} = (\omega, \ldots, \omega)^T$, siis ω võimalike väärtuste piirkond on

$$\omega \in \left(-\frac{1}{k}; 1\right). \tag{18}$$

Eeldus $\delta = \omega$ lihtsustab valemit (9) järgnevalt:

$$r = \frac{\pi\omega - 2\omega^2}{\pi - 2\omega^2} = \frac{\omega(\pi - 2\omega)}{\pi - 2\omega^2}. \tag{19}$$

Selleks, et leida korrelatsioonikordajate r võimalike väärtuste piirkond, uurime funktsiooni (19) piirkonnas $\omega \in \left(-\frac{1}{k}; 1\right)$ (vt joonist 3).



Joonis 3: Korrelatsioonikordaja $r = r_{ij}$ graafik valemi (19) põhjal, kui $\omega \in \left(-\frac{1}{k}; 1\right)$

Piiril, kui $\omega \downarrow -\frac{1}{k}$, siis

$$r = \frac{\omega(\pi - 2\omega)}{\pi - 2\omega^2} \to -\frac{\frac{\pi k + 2}{k^2}}{\frac{\pi k^2 - 2}{k^2}} = -\frac{\pi k + 2}{\pi k^2 - 2}$$

ja, kui $\omega \uparrow 1$, siis

$$r = \frac{\omega(\pi - 2\omega)}{\pi - 2\omega^2} \to \frac{\pi - 2}{\pi - 2} = 1.$$

Järelikult korrelatsioonikordajate r võimalike väärtuste piirkond on

$$r \in \left(-\frac{\pi k + 2}{\pi k^2 - 2}; 1 \right).$$

Seega saame formuleerida järgneva lause.

Lause 2.3. *Olgu juhuslik suurus $\boldsymbol{Z}$ k-mõõtmelise asümmeetrilise normaaljaotusega, $\boldsymbol{Z} \sim SN(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\delta})$, olgu korrelatsioonimaatriks $\boldsymbol{\Omega}$ CS struktuuriga ja olgu $\boldsymbol{\delta} = (\omega, \ldots, \omega)^T$. Siis*

(a) parameetervektori $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha, \ldots, \alpha)^T$ komponendid avalduvad

$$\alpha = \frac{\omega}{\sqrt{1 + (k-1)\omega}\sqrt{1 + (k-1)\omega - k\omega^2}} \; ;$$

(b) parameetri ω võimalike väärtuste piirkond on

$$\omega \in \left(-\frac{1}{k}; 1 \right) \; ;$$

(c) juhusliku suuruse $\boldsymbol{Z}$ korrelatsioonimaatriksil $\mathbf{R} = (r_{ij})$ on CS struktuur, st $r_{ij} = r$, $\forall i, j = 1, \ldots, k$, kus

$$r = \frac{\omega(\pi - 2\omega)}{\pi - 2\omega^2} \; ;$$

(d) korrelatsioonikordajate r võimalike väärtuste piirkond on

$$r \in \left(-\frac{\pi k + 2}{\pi k^2 - 2}; 1 \right).$$

2.4 Olukord, kus maatriksil $\mathbf{\Omega}$ on $\boldsymbol{AR}$ struktuur ja $\boldsymbol{\delta} = (\delta, \ldots, \delta)^T$

Olgu korrelatsioonimaatriksil $\mathbf{\Omega}$ esimest järku autoregressiivne struktuur (AR), ehk

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} 1 & \omega & \omega^2 & \ldots & \omega^{k-2} & \omega^{k-1} \\ \omega & 1 & \omega & \ldots & \omega^{k-3} & \omega^{k-2} \\ \omega^2 & \omega & 1 & \ldots & \omega^{k-4} & \omega^{k-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \omega^{k-2} & \omega^{k-3} & \omega^{k-4} & \ldots & 1 & \omega \\ \omega^{k-1} & \omega^{k-2} & \omega^{k-3} & \ldots & \omega & 1 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Sellise korrelatsioonimaatriksi pöördmaatriks $\mathbf{\Omega}^{-1}$ on kolme diagonaaliga maatriks teadatuntud omadustega. Maatriksi $\mathbf{\Omega}^{-1}$ kuju on järgnev (vt näiteks [3], [7]):

$$\begin{aligned} \mathbf{\Omega}^{-1} &= \frac{1}{\omega^2 - 1} \begin{pmatrix} -1 & \omega & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \omega & -(1+\omega^2) & \omega & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \omega & -(1+\omega^2) & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -(1+\omega^2) & \omega \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \omega & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{1 - \omega^2} \begin{pmatrix} 1 & -\omega & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -\omega & (1+\omega^2) & -\omega & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -\omega & (1+\omega^2) & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & (1+\omega^2) & -\omega \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -\omega & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{21}$$

Kontrollime, kas maatriksite (20) ja (21) korrutis annab ühikmaatriksi.

$$\mathbf{\Omega}\mathbf{\Omega}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{k-1} \\ \omega & 1 & \omega & \dots & \omega^{k-2} \\ \omega^2 & \omega & 1 & \dots & \omega^{k-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega^{k-1} & \omega^{k-2} & \omega^{k-3} & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{1-\omega^2} \begin{pmatrix} 1 & -\omega & 0 & \dots & 0 \\ -\omega & (1+\omega^2) & -\omega & \dots & 0 \\ 0 & -\omega & (1+\omega^2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1-\omega^2}{1-\omega^2} & \frac{-\omega+\omega(1+\omega^2)-\omega^3}{1-\omega^2} & \frac{-\omega^2+\omega^2(1+\omega^2)-\omega^4}{1-\omega^2} & \dots & \frac{-\omega^{k-1}+\omega^{k-1}}{1-\omega^2} \\ \frac{\omega-\omega}{1-\omega^2} & \frac{-\omega^2+1+\omega^2-\omega^2}{1-\omega^2} & \frac{-\omega+\omega(1-\omega^2)-\omega^3}{1-\omega^2} & \dots & \frac{-\omega^{k-2}+\omega^{k-2}}{1-\omega^2} \\ \frac{\omega^2-\omega^2}{1-\omega^2} & \frac{-\omega^3+\omega(1+\omega^2)-\omega}{1-\omega^2} & \frac{-\omega^2+1+\omega^2-\omega^2}{1-\omega^2} & \dots & \frac{-\omega^{k-3}+\omega^{k-3}}{1-\omega^2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\omega^{k-1}-\omega^{k-1}}{1-\omega^2} & \frac{-\omega^k+\omega^{k-2}(1+\omega^2)-\omega^{k-2}}{1-\omega^2} & \frac{-\omega^{k-1}+\omega^{k-3}(1+\omega^2)-\omega^{k-3}}{1-\omega^2} & \dots & \frac{-\omega^2+1}{1-\omega^2} \end{pmatrix} = \mathbf{I}$$

Seega AR struktuuriga korrelatsioonimaatriksi $\mathbf{\Omega}$ pöördmaatriks on

$$\mathbf{\Omega}^{-1} = \frac{1}{1-\omega^2} \begin{pmatrix} 1 & -\omega & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\omega & (1+\omega^2) & -\omega & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\omega & (1+\omega^2) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (1+\omega^2) & -\omega \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\omega & 1 \end{pmatrix}.$$

Enne kui saame parameetri $\boldsymbol{\alpha}$ kuju välja kirjutada on vaja uurida, kuidas praegused eeldused ($\mathbf{\Omega}$ on AR struktuuriga ning $\boldsymbol{\delta} = (\delta, \dots, \delta)^T$) mõjutavad $\boldsymbol{\alpha}$ avaldist (valem (5)).

Nagu ka eelnevalt uurime murru (5) lugejat ja nimetajat eraldi. Lugejale tuleb kuju

$$\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\delta} = \frac{\delta}{1-\omega^2}\begin{pmatrix} 1-\omega \\ 1-2\omega+\omega^2 \\ \vdots \\ 1-2\omega+\omega^2 \\ 1-\omega \end{pmatrix} = \frac{\delta}{1-\omega^2}\begin{pmatrix} 1-\omega \\ (1-\omega)^2 \\ \vdots \\ (1-\omega)^2 \\ 1-\omega \end{pmatrix} = \frac{\delta(1-\omega)}{(1-\omega)(1+\omega)}\begin{pmatrix} 1 \\ 1-\omega \\ \vdots \\ 1-\omega \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\delta}{1+\omega}\begin{pmatrix} 1 \\ 1-\omega \\ \vdots \\ 1-\omega \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Nimetajaks saame

$$1-\boldsymbol{\delta}^T\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\delta} = 1-\boldsymbol{\delta}^T\frac{\delta}{1+\omega}\begin{pmatrix} 1 \\ 1-\omega \\ \vdots \\ 1-\omega \\ 1 \end{pmatrix} = 1-\frac{\delta}{1+\omega}\delta\left(1+(k-2)(1-\omega)+1\right)$$

$$= 1-\frac{(k-2)(1-\omega)+2}{1+\omega}\delta^2 = \frac{1+\omega-(k(1-\omega)+2\omega)\delta^2}{1+\omega}. \tag{23}$$

Nüüd saame tulemuste (22) ja (23) abil kirja panna $\boldsymbol{\alpha}$ valemi:

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{\delta}{1+\omega}\begin{pmatrix} 1 \\ 1-\omega \\ \vdots \\ 1-\omega \\ 1 \end{pmatrix}\sqrt{\frac{1+\omega}{1+\omega-(k(1-\omega)+2\omega)\delta^2}}. \tag{24}$$

Lisaks tuleneb valemist (24), et

$$\alpha_1 = \alpha_k = \frac{\delta}{1+\omega}\sqrt{\frac{1+\omega}{1+\omega-(k(1-\omega)+2\omega)\delta^2}} = \frac{\delta}{\sqrt{1+\omega}\sqrt{1+\omega-(k(1-\omega)+2\omega)\delta^2}}$$

ning $\alpha_2 = \ldots = \alpha_{k-1} = \alpha_k(1-\omega) = \alpha_1(1-\omega)$.
Tulemus (23) täpsustab algtingimust (2) järgnevalt:

$$0 < \frac{(k-2)(1-\omega)+2}{1+\omega}\delta^2 < 1. \tag{25}$$

Kuna murd on ilmselgelt positiivne, kui $\omega > -1$, siis põhieesmärgiks jääb kindlustada, et murd oleks väiksem ühest.
Kuna $1+\omega > 0$, sest $\omega > -1$, siis tingimusest (25) saame, et

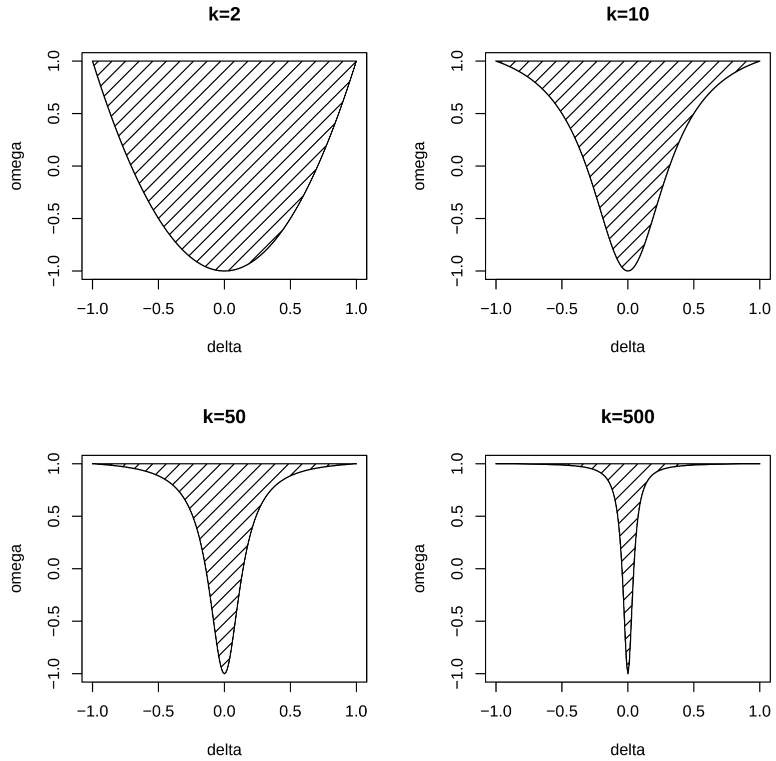
$$k\delta^2 - k\omega\delta^2 + 2\omega\delta^2 < 1+\omega,$$

ning teisendades edasi, saame tulemuseks

$$\begin{aligned} \omega(k\delta^2 - 2\delta^2 + 1) &> k\delta^2 - 1, \\ \omega &> \frac{k\delta^2 - 1}{(k-2)\delta^2 + 1}. \end{aligned} \tag{26}$$

Selleks, et leida parameetri ω võimalikud väärtused, on vaja uurida funktsiooni $\frac{k\delta^2-1}{(k-2)\delta^2+1}$ (vt joonist 4). Tegemist on parabooliga, mille miinimumpunkt on punktis $\delta = 0$, aga paneme tähele, et kui $\delta = 0$, siis $\omega = -1$, ent me teame, et peab kehtima $|\omega| < 1$. Seega on vaja nõuda, et $\delta \neq 0$. Kuna δ on korrelatsioonikordaja, siis $|\delta| < 1$, järelikult antud olukorras $\delta \in (-1, 0) \cup (0, 1)$. Sellisel juhul tuleb ω võimalike väärtuste piirkonnaks

$$\omega \in \left(\frac{k\delta^2 - 1}{(k-2)\delta^2 + 1}; 1\right).$$



Joonis 4: Parameetri ω lubatud väärtused valemi (26) põhjal

Märkus 4. *Praktilises perspektiivis oleme tihtipeale AR struktuuri puhul rohkem huvitatud olukorrast, kus* $\omega > 0$*. Tavaliselt tekib AR struktuur kordusmõõtmiste ülesannete puhul, kus mõõtmistulemused on seotud eelmise mõõtmisega. Olukorda, kus üks mõõtmistulemus on positiivne ning sellest järgmine negatiivne, on väga raske interpreteerida ning esineb väga harva. Seega* $\omega > 0$ *on loomulik valik.*

Keskendume nüüd korrelatsioonikordajate r_{ij} määramisele. Valem (3) koos eeldustega, et $\omega_{ij} = \omega^{|i-j|}$ ja $\boldsymbol{\delta} = (\delta, \ldots, \delta)^T$, annab, et

$$r_{ij} = \frac{\pi\omega^{|i-j|} - 2\delta^2}{\pi - 2\delta^2}. \tag{27}$$

Paneme tähele, et kui valemis (27) $\delta \to 0$, siis kordajate r_{ij} piirangud taanduvad ω piiranguteks. Korrelatsioonikordajate r_{ij} võimalike väärtuste piirkond ei sõltu ainult parameetri ω piiridest, vaid ka vahe $|i - j|$ paarsusest.

Kui $|i - j|$ on paaritu, siis saame korrelatsioonikordajate piirid leida lähendades parameetrit ω oma piirideni. Kui $\omega \downarrow \frac{k\delta^2-1}{(k-2)\delta^2+1}$, siis

$$\begin{aligned} r_{ij} = \frac{\pi\omega^{|i-j|} - 2\delta^2}{\pi - 2\delta^2} &\to \frac{\pi\left(\frac{k\delta^2-1}{(k-2)\delta^2+1}\right)^{|i-j|} - 2\delta^2}{\pi - 2\delta^2} \\ &= \frac{\pi(k\delta^2-1)^{|i-j|}}{(\pi-2\delta^2)((k-2)\delta^2+1)^{|i-j|}} - \frac{2\delta^2}{\pi-2\delta^2}. \end{aligned} \tag{28}$$

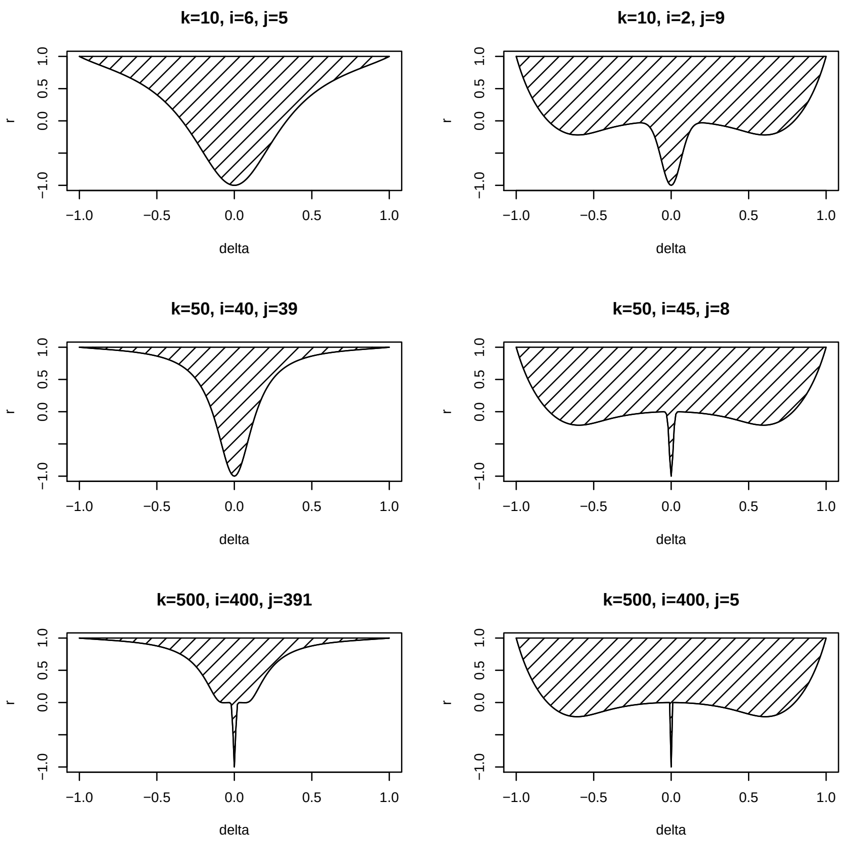
Kui $\omega \uparrow 1$, siis

$$r_{ij} = \frac{\pi\omega^{|i-j|} - 2\delta^2}{\pi - 2\delta^2} \to \frac{\pi - 2\delta^2}{\pi - 2\delta^2} = 1.$$

Seega, kui $|i-j|$ on paaritu, saame korrelatsioonikordajate r_{ij} võimalikuks väärtuste piirkonnaks

$$r_{ij} \in \left(\frac{\pi(k\delta^2-1)^{|i-j|}}{(\pi-2\delta^2)((k-2)\delta^2+1)^{|i-j|}} - \frac{2\delta^2}{\pi-2\delta^2}; 1 \right).$$

Korrelatsioonikordajad r_{ij} leitavad iga $\delta \in (-1, 1)$ korral (vt joonist 5).



Joonis 5: Parameetri r_{ij} võimalikud väärtused valemi (28) põhjal, kui $|i-j|$ on paaritu

Kui $|i-j|$ on paaris, siis valemi (27) miinimumi saame, kui $\omega = 0$. Paneme tähele, et kui $\omega = 0$, siis ω võimalike väärtuste piirkonna järgi

$$\frac{k\delta^2 - 1}{(k-2)\delta^2 + 1} < 0,$$

ehk

$$|\delta| < \sqrt{\frac{1}{k}}.$$

Seega kirjeldab korrelatsioonikordajate r_{ij} miinimumi funktsioon

$$r_{ij} = \begin{cases} -\frac{2\delta^2}{\pi - 2\delta^2}, \text{ kui } |\delta| < \frac{1}{\sqrt{k}}, \\ \frac{\pi(k\delta^2-1)^{|i-j|}}{(\pi-2\delta^2)((k-2)\delta^2+1)^{|i-j|}} - \frac{2\delta^2}{\pi-2\delta^2}, \text{ kui } \delta \in \left(-1; -\frac{1}{\sqrt{k}}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{k}}; 1\right). \end{cases} \tag{29}$$

Maksimumi saavutame ikkagi, kui $\omega \uparrow 1$. Siis

$$r_{ij} = \frac{\pi\omega^{|i-j|} - 2\delta^2}{\pi - 2\delta^2} \to \frac{\pi - 2\delta^2}{\pi - 2\delta^2} = 1.$$

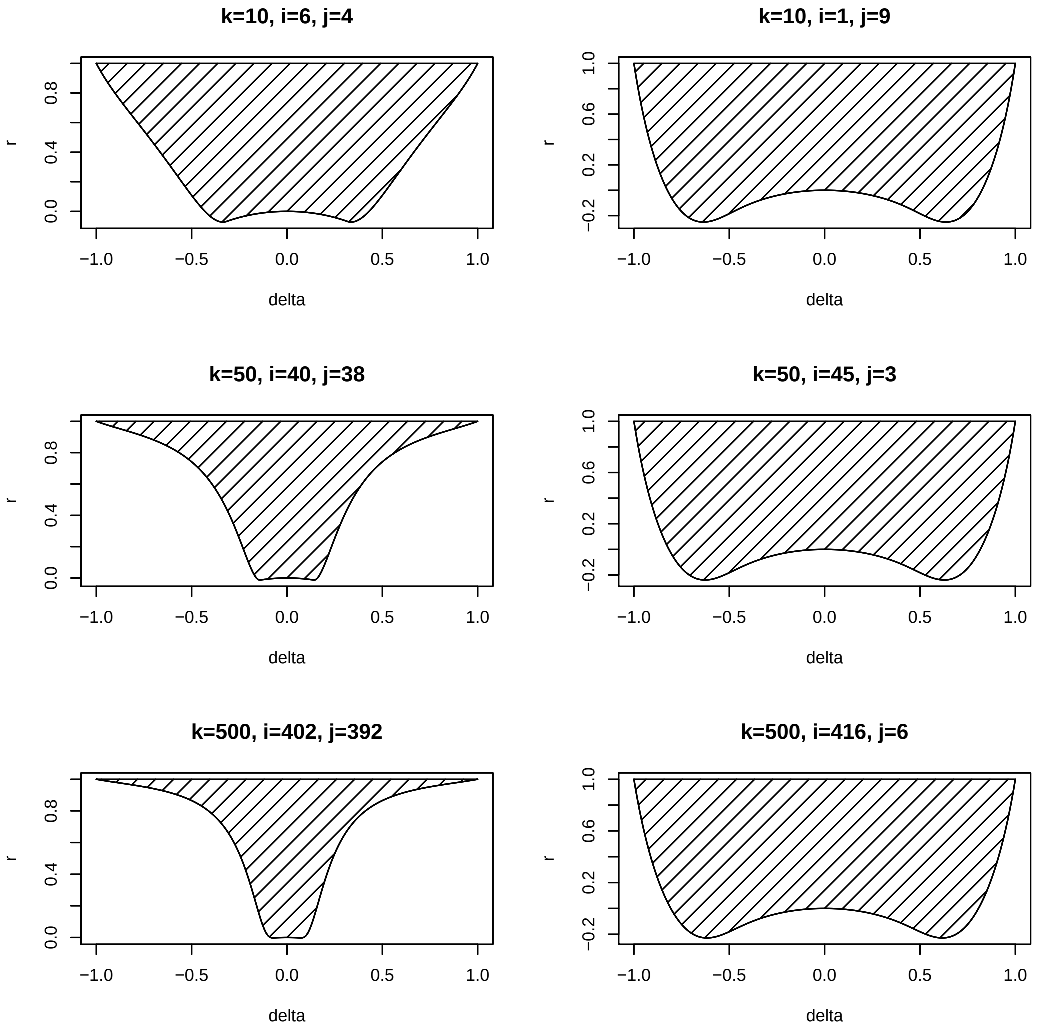
Seega, kui $|i-j|$ on paaris, saame korrelatsioonikordajate võimalikuks väärtuste piirkonnaks, kui $|\delta| < \frac{1}{\sqrt{k}}$,

$$r_{ij} \in \left(-\frac{2}{k\pi - 2}; 1\right)$$

ning, kui $\delta \in \left(-1; -\frac{1}{\sqrt{k}}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{k}}; 1\right)$, siis

$$r_{ij} \in \left(\frac{\pi(k\delta^2-1)^{|i-j|}}{(\pi-2\delta^2)((k-2)\delta^2+1)^{|i-j|}} - \frac{2\delta^2}{\pi-2\delta^2}; 1\right).$$

Korrelatsioonikordajad r_{ij} on leitavad iga $\delta \in (-1, 1)$ korral (vt joonist 6).



Joonis 6: Korrelatsioonikordaja r_{ij} võimalikud väärtused valemi (29) põhjal, kui $|i-j|$ on paaris

Saadud tulemuste põhjal saame formuleerida järgneva lause.

Lause 2.4. *Olgu juhuslik suurus* $\boldsymbol{Z}$ *k-mõõtmelise asümmeetrilise normaaljaotusega,* $\boldsymbol{Z} \sim SN(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\delta})$*, olgu korrelatsioonimaatriks* $\boldsymbol{\Omega}$ *AR struktuuriga ja olgu* $\boldsymbol{\delta} = (\delta, \ldots, \delta)^T$*. Siis*

(a) *parameetervektor* $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_k)^T$ *on kujul*

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \frac{\delta}{\sqrt{1+\omega}\sqrt{1+\omega-(k(1-\omega)+2\omega)\delta^2}} \\ \frac{\delta(1-\omega)}{\sqrt{1+\omega}\sqrt{1+\omega-(k(1-\omega)+2\omega)\delta^2}} \\ \vdots \\ \frac{\delta(1-\omega)}{\sqrt{1+\omega}\sqrt{1+\omega-(k(1-\omega)+2\omega)\delta^2}} \\ \frac{\delta}{\sqrt{1+\omega}\sqrt{1+\omega-(k(1-\omega)+2\omega)\delta^2}} \end{pmatrix};$$

(b) *parameetri* ω *võimalike väärtuste piirkond on*

$$\omega \in \left(\frac{k\delta^2 - 1}{(k-2)\delta^2 + 1}; 1 \right),$$

kus $\delta \in (-1, 0) \cup (0, 1)$*;*

(c) *juhusliku suuruse* $\boldsymbol{Z}$ *korrelatsioonimaatriksi* $\mathbf{R} = (r_{ij})$ *elemendid* r_{ij} *avalduvad*

$$r_{ij} = \frac{\pi\omega^{|i-j|} - 2\delta^2}{\pi - 2\delta^2};$$

(d) *korrelatsioonikordajate* r_{ij} *võimalike väärtuste piirkond:*

- *kui* $|i-j|$ *on paaritu, siis*

$$r_{ij} \in \left(\frac{\pi(k\delta^2 - 1)^{|i-j|}}{(\pi - 2\delta^2)((k-2)\delta^2 + 1)^{|i-j|}} - \frac{2\delta^2}{\pi - 2\delta^2}; 1 \right);$$

- *kui* $|i-j|$ *on paaris, siis*

$$r_{ij} \in \left(-\frac{2}{k\pi - 2}; 1 \right), \ |\delta| < \frac{1}{\sqrt{k}}$$
$$r_{ij} \in \left(\frac{\pi(k\delta^2 - 1)^{|i-j|}}{(\pi - 2\delta^2)((k-2)\delta^2 + 1)^{|i-j|}} - \frac{2\delta^2}{\pi - 2\delta^2}; 1 \right), \ \delta \in \left(-1; -\frac{1}{\sqrt{k}} \right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{k}}; 1 \right).$$

2.5 Olukord, kus maatriksitel $\boldsymbol{\Omega}$ ja $\boldsymbol{\Omega}_*$ on $\boldsymbol{AR}$ struktuur

Oletame, et korrelatsioonimaatriksitel $\boldsymbol{\Omega}$ ja $\boldsymbol{\Omega}_*$ on AR struktuur (vt valem (20)). Paneme tähele, et maatriksil $\boldsymbol{\Omega}_*$ on AR struktuur siis, kui vektoril $\boldsymbol{\delta}$ on järgnev kuju: $\boldsymbol{\delta} = (\omega^k, \ldots, \omega)^T$.

Uurime, milline tuleb vastava parameetervektor $\boldsymbol{\alpha}$ kuju. Jällegi alustame $\boldsymbol{\alpha}$ avaldisest (5) ning arvutame selle murru lugeja ja nimetaja eraldi.

Kuna $\boldsymbol{\Omega}$ on AR struktuuriga, siis on pöördmaatriks sama, mis eelmises alapeatükis, ehk me saame kasutada valemit (21). Vektori $\boldsymbol{\alpha}$ lugejaks tuleb

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\delta} &= \frac{1}{1-\omega^2}\begin{pmatrix} 1 & -\omega & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -\omega & (1+\omega^2) & -\omega & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -\omega & (1+\omega^2) & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & (1+\omega^2) & -\omega \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -\omega & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega^k \\ \omega^{k-1} \\ \omega^{k-2} \\ \vdots \\ \omega^2 \\ \omega \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{1-\omega^2}\begin{pmatrix} \omega^k - \omega\cdot\omega^{k-1} \\ -\omega\cdot\omega^k + \omega^{k-1}(1+\omega^2) - \omega\cdot\omega^{k-2} \\ -\omega\cdot\omega^{k-1} + \omega^{k-2}(1+\omega^2) - \omega\cdot\omega^{k-3} \\ \vdots \\ -\omega\cdot\omega^3 + \omega^2(1+\omega^2) - \omega\cdot\omega \\ -\omega\cdot\omega^2 + \omega \end{pmatrix} = \frac{1}{1-\omega^2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \omega(1-\omega^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

ning nimetaja taandub kujule

$$1 - \boldsymbol{\delta}^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} \boldsymbol{\delta} = 1 - \begin{pmatrix} \omega^k & \omega^{k-1} & \omega^{k-2} & \dots & \omega^2 & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} = 1 - \omega^2. \tag{30}$$

Nüüd võttes arvesse saadud lugeja ning nimetaja valemit, saame vektori $\boldsymbol{\alpha}$ kujuks:

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\omega^2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{\omega}{\sqrt{1-\omega^2}} \end{pmatrix},$$

ehk $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)^T$, kus

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \dots = \alpha_{k-1} = 0, \\ \alpha_k &= \frac{\omega}{\sqrt{1-\omega^2}}. \end{aligned}$$

Märkus 5. *Artiklis [5] on näidatud, et* $\boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\alpha} = (\tan \boldsymbol{\gamma})^2$*, kus* $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_0, \dots, \gamma_k)^T$ *ning* γ_i *on lõiketasandi (me lõikame* k*-mõõtmelist ruumi mingi omaduse järgi, näiteks* $X_0 > 0$*) ja* X_i *telje vaheline nurk,* $i = 1, \dots, k$*. Järelikult, kui vektori* $\boldsymbol{\alpha}$ *kõik elemendid peale ühe on võrdsed nulliga, siis on ainult üks lõikenurk nullist erinev, mis tähendab, et lõiketasand on kaldus ainult ühe telje suhtes.*

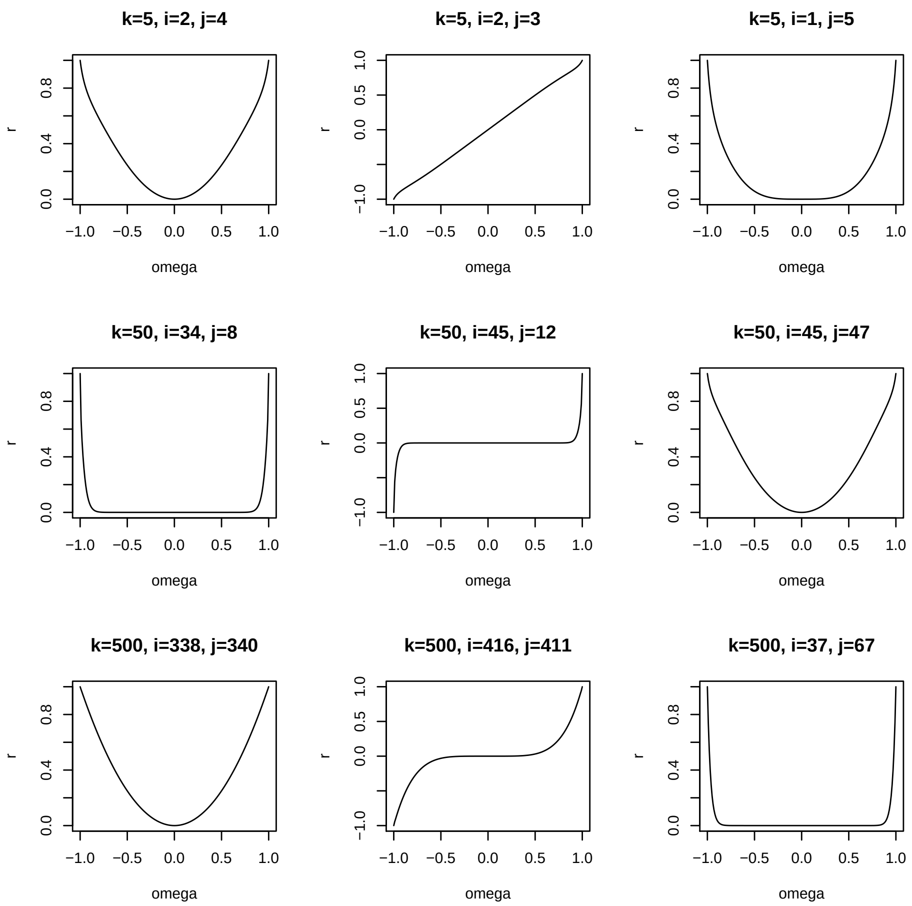
Leiame vektori $\boldsymbol{\alpha}$ nimetaja kujust (vt valem (30)) ω võimalike väärtuste piirkonna. Kuna nimetaja peab rahuldama tingimust $1 > \boldsymbol{\delta}^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} \boldsymbol{\delta} > 0$, ehk $1 > \omega^2 > 0$, siis ω peab rahuldama tingimust $|\omega| < 1$. Seega parameetri ω võimalike väärtuste piirkond on

$$\omega \in (-1; 1).$$

Korrelatsioonikordajate puhul üldvalem (3) võtab kuju

$$r_{ij} = \frac{\omega^{|i-j|} - \frac{2}{\pi}\omega^{k+1-i}\omega^{k+1-j}}{\sqrt{1 - \frac{2}{\pi}\omega^{2(k+1-i)}}\sqrt{1 - \frac{2}{\pi}\omega^{2(k+1-j)}}} = \frac{\omega^{|i-j|} - \frac{2}{\pi}\omega^{2k+2-i-j}}{\sqrt{1 - \frac{2}{\pi}\omega^{2(k+1-i)}}\sqrt{1 - \frac{2}{\pi}\omega^{2(k+1-j)}}}. \tag{31}$$

Leiame piirangud korrelatsioonikordajatele r_{ij}. Kuna avaldis (31) sõltub rea ja veeru indeksitest (i ja j), siis uurime jooniselt 7 mõningaid juhte, kui dimensioon k ning indeksid i ja j on fikseeritud.



Joonis 7: Korrelatsioonikordaja r_{ij} graafik valemi (31) põhjal, kui $\omega \in (-1; 1)$

Märkus 6. *Paneme tähele, et kui $\omega \geq 0$, siis ka*

$$r_{ij} = \frac{\omega^{|i-j|} - \frac{2}{\pi}\omega^{2k+2-i-j}}{\sqrt{1 - \frac{2}{\pi}\omega^{2(k+1-i)}}\sqrt{1 - \frac{2}{\pi}\omega^{2(k+1-j)}}} \geq 0,$$

sest $\omega^{|i-j|} > \frac{2}{\pi}\omega^{2k+2-i-j}$ kehtib iga ω, i ja j korral.

Kui $\omega \uparrow 1$, siis

$$r_{ij} = \frac{\omega^{|i-j|} - \frac{2}{\pi}\omega^{2k+2-i-j}}{\sqrt{1 - \frac{2}{\pi}\omega^{2(k+1-i)}}\sqrt{1 - \frac{2}{\pi}\omega^{2(k+1-j)}}} \to \frac{1 - \frac{2}{\pi}}{\sqrt{1 - \frac{2}{\pi}}\sqrt{1 - \frac{2}{\pi}}} = 1.$$

Kui $\omega = 0$, siis

$$r_{ij} = \frac{\omega^{|i-j|} - \frac{2}{\pi}\omega^{2k+2-i-j}}{\sqrt{1 - \frac{2}{\pi}\omega^{2(k+1-i)}}\sqrt{1 - \frac{2}{\pi}\omega^{2(k+1-j)}}} = \frac{0}{\sqrt{1}\sqrt{1}} = 0.$$

Kui $\omega \downarrow -1$, siis kordajate r_{ij} väärtused sõltuvad indeksitest i ja j (on oluline, kas nad on paaris- või paaritud arvud):

- kui mõlemad indeksid on paaris, siis

$$r_{ij} = \frac{\omega^{|i-j|} - \frac{2}{\pi}\omega^{2k+2-i-j}}{\sqrt{1 - \frac{2}{\pi}\omega^{2(k+1-i)}}\sqrt{1 - \frac{2}{\pi}\omega^{2(k+1-j)}}} \to \frac{1 - \frac{2}{\pi}}{\sqrt{1 - \frac{2}{\pi}}\sqrt{1 - \frac{2}{\pi}}} = 1;$$

- kui üks indeksitest on paaris ja teine paaritu, siis

$$r_{ij} = \frac{\omega^{|i-j|} - \frac{2}{\pi}\omega^{2k+2-i-j}}{\sqrt{1 - \frac{2}{\pi}\omega^{2(k+1-i)}}\sqrt{1 - \frac{2}{\pi}\omega^{2(k+1-j)}}} \to \frac{-1 + \frac{2}{\pi}}{\sqrt{1 - \frac{2}{\pi}}\sqrt{1 - \frac{2}{\pi}}} = \frac{2 - \pi}{\pi - 2} = -1;$$

- kui mõlemad on paaritud, siis

$$r_{ij} = \frac{\omega^{|i-j|} - \frac{2}{\pi}\omega^{2k+2-i-j}}{\sqrt{1 - \frac{2}{\pi}\omega^{2(k+1-i)}}\sqrt{1 - \frac{2}{\pi}\omega^{2(k+1-j)}}} \to \frac{1 - \frac{2}{\pi}}{\sqrt{1 - \frac{2}{\pi}}\sqrt{1 - \frac{2}{\pi}}} = 1.$$

Seega, kui $|i - j|$ on paaritu, saame korrelatsioonikordajate r_{ij} võimalike väärtuste piirkonnaks

$$r_{ij} \in (-1; 1)$$

ning, kui $|i-j|$ on paaris, saame korrelatsioonikordajate r_{ij} võimalike väärtuste piirkonnaks

$$r_{ij} \in (0; 1).$$

Saadud tulemuste põhjal võib kirja panna järgneva lause.

Lause 2.5. *Olgu juhuslik suurus $\boldsymbol{Z}$ k-mõõtmelise asümmeetrilise normaaljaotusega, $\boldsymbol{Z} \sim SN(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\delta})$, olgu korrelatsioonimaatriksid $\boldsymbol{\Omega}$ ja $\boldsymbol{\Omega}_*$ AR struktuuriga ning selle tõttu on vektoril $\boldsymbol{\delta}$ kuju $\boldsymbol{\delta} = (\omega^k, \ldots, \omega)^T$. Siis*

(a) parameetervektor $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_k)^T$ on

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{\omega}{\sqrt{1-\omega^2}} \end{pmatrix};$$

(b) parameetri ω võimalike väärtuste piirkond on

$$\omega \in (-1; 1);$$

(c) juhusliku suuruse $\boldsymbol{Z}$ korrelatsioonimaatriksi $\mathbf{R} = (r_{ij})$ elemendid r_{ij} avalduvad

$$r_{ij} = \frac{\omega^{|i-j|} - \frac{2}{\pi}\omega^{2k+2-i-j}}{\sqrt{1 - \frac{2}{\pi}\omega^{2(k+1-i)}}\sqrt{1 - \frac{2}{\pi}\omega^{2(k+1-j)}}};$$

(d) korrelatsioonikordajate r_{ij} võimalike väärtuste piirkond:

- *kui $|i-j|$ on paaritu, siis*

$$r_{ij} \in (-1;1);$$

- *kui $|i-j|$ on paaris, siis*

$$r_{ij} \in (0;1).$$

Kuigi antud juhul korrelatsioonimaatriks $\mathbf{R}$ ei ole AR struktuuriga, on tarvilik märkida, et mingisugune struktuur ikkagi tekib.

Lause 2.6. *Olgu juhuslik suurus $\boldsymbol{Z}$ k-mõõtmelise asümmeetrilise normaaljaotusega, $\boldsymbol{Z} \sim SN(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\delta})$, olgu korrelatsioonimaatriksid $\boldsymbol{\Omega}$ ja $\boldsymbol{\Omega}_*$ AR struktuuriga ning selle tõttu on vektoril $\boldsymbol{\delta}$ kuju $\boldsymbol{\delta} = (\omega^k, \ldots, \omega)^T$. Siis korrelatsioonimaatriksi $\mathbf{R} = (r_{ij})$ elementide vahel on järgmine seos:*

$$r_{ij} = I_{i<j} \prod_{m=i}^{j-1} r_{m,m+1} + I_{j<i} \prod_{m=j}^{i-1} r_{m,m+1}, \; i \neq j,$$

kus $I_{i<j}$ ja $I_{j<i}$ on indikaatorfunktsioonid.

Tõestus. Tõepoolest, kui $i<j$, siis

$$\begin{aligned}
\prod_{m=i}^{j-1} r_{m,m+1} &= \prod_{m=i}^{j-1} \left(\frac{\omega - \frac{2}{\pi}\omega^{2k+1-2m}}{\sqrt{1-\frac{2}{\pi}\omega^{2(k+1-m)}}\sqrt{1-\frac{2}{\pi}\omega^{2(k-m)}}} \right) \\
&= \frac{(\omega - \frac{2}{\pi}\omega^{2k+1-2i})(\omega - \frac{2}{\pi}\omega^{2k-2i-1})\ldots(\omega - \frac{2}{\pi}\omega^{2k-2j+3})}{\sqrt{1-\frac{2}{\pi}\omega^{2(k+1-i)}}\left(\sqrt{1-\frac{2}{\pi}\omega^{2(k-i)}}\right)^2\left(\sqrt{1-\frac{2}{\pi}\omega^{2(k-i-1)}}\right)^2\ldots\sqrt{1-\frac{2}{\pi}\omega^{2(k-j+1)}}} \\
&= \frac{\omega(1-\frac{2}{\pi}\omega^{2(k-i)})\omega(1-\frac{2}{\pi}\omega^{2(k-i-1)})\ldots(\omega - \frac{2}{\pi}\omega^{2k-2j-1})}{\sqrt{1-\frac{2}{\pi}\omega^{2(k+1-i)}}(1-\frac{2}{\pi}\omega^{2(k-i)})(1-\frac{2}{\pi}\omega^{2(k-i-1)})\ldots\sqrt{1-\frac{2}{\pi}\omega^{2(k-j+1)}}} \\
&= \frac{\omega^{j-i-1}(\omega - \frac{2}{\pi}\omega^{2k-2j+3})}{\sqrt{1-\frac{2}{\pi}\omega^{2(k+1-i)}}\sqrt{1-\frac{2}{\pi}\omega^{2(k-j+1)}}} = \frac{\omega^{j-i} - \frac{2}{\pi}\omega^{2k+2-i-j}}{\sqrt{1-\frac{2}{\pi}\omega^{2(k+1-i)}}\sqrt{1-\frac{2}{\pi}\omega^{2(k+1-j)}}} = r_{ij}
\end{aligned}$$

ning, kui $i>j$, siis

$$\prod_{m=j}^{i-1} r_{m,m+1} = \frac{\omega^{i-j} - \frac{2}{\pi}\omega^{2k+2-i-j}}{\sqrt{1-\frac{2}{\pi}\omega^{2(k+1-i)}}\sqrt{1-\frac{2}{\pi}\omega^{2(k+1-j)}}} = r_{ij}.$$

Seega

$$r_{ij} = I_{i<j}\prod_{m=i}^{j-1} r_{m,m+1} + I_{j<i}\prod_{m=j}^{i-1} r_{m,m+1} = \frac{\omega^{|i-j|} - \frac{2}{\pi}\omega^{2k+2-i-j}}{\sqrt{1-\frac{2}{\pi}\omega^{2(k+1-i)}}\sqrt{1-\frac{2}{\pi}\omega^{2(k+1-j)}}}.$$

$\square$

2.6 Olukord, kus maatriksitel $\mathbf{\Omega}$ ja $\mathbf{\Omega}^*$ on $\boldsymbol{AR}$ struktuur

Oletame nüüd, et korrelatsioonimaatriksitel $\mathbf{\Omega}$ ja $\mathbf{\Omega}^*$ on AR struktuur. See aga tähendab, et vektoril $\boldsymbol{\delta}$ on järgnev kuju: $\boldsymbol{\delta} = (\omega, \ldots, \omega^k)^T$.

Nagu ka eelnevalt, parameetervektori $\boldsymbol{\alpha}$ valemi leidmiseks, arvutame eraldi valemi (5) lugeja ja nimetaja välja. Jällegi, kuna $\mathbf{\Omega}$ on AR struktuuriga, saame pöördmaatriksi avaldamiseks kasutada kuju (21).

Vektori $\boldsymbol{\alpha}$ lugejaks saame

$$\mathbf{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\delta} = \frac{1}{1-\omega^2}\begin{pmatrix} 1 & -\omega & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -\omega & (1+\omega^2) & -\omega & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -\omega & (1+\omega^2) & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & (1+\omega^2) & -\omega \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -\omega & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega \\ \omega^2 \\ \omega^3 \\ \vdots \\ \omega^{k-1} \\ \omega^k \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{1-\omega^2}\begin{pmatrix} \omega - \omega^2 \\ -\omega^2 + \omega^2(1+\omega^2) - \omega^4 \\ -\omega^3 + \omega^3(1+\omega^2) - \omega^5 \\ \vdots \\ -\omega^{k-1} + \omega^{k-1}(1+\omega^2) - \omega^{k+1} \\ -\omega^k + \omega^k \end{pmatrix} = \frac{1}{1-\omega^2}\begin{pmatrix} \omega(1-\omega^2) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Siit tuleneb, et vektori $\boldsymbol{\alpha}$ nimetaja taandub kujule

$$1 - \boldsymbol{\delta}^T\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\delta} = 1 - \begin{pmatrix} \omega & \omega^2 & \omega^3 & \dots & \omega^{k-1} & \omega^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 - \omega^2.$$

Nüüd siis võttes arvesse saadud lugeja ning nimetaja valemit, saame kirjutada välja vektori $\boldsymbol{\alpha}$ kuju:

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\omega^2}} = \begin{pmatrix} \frac{\omega}{\sqrt{1-\omega^2}} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ehk $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)^T$, kus

$$\alpha_1 = \frac{\omega}{\sqrt{1-\omega^2}},$$
$$\alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0.$$

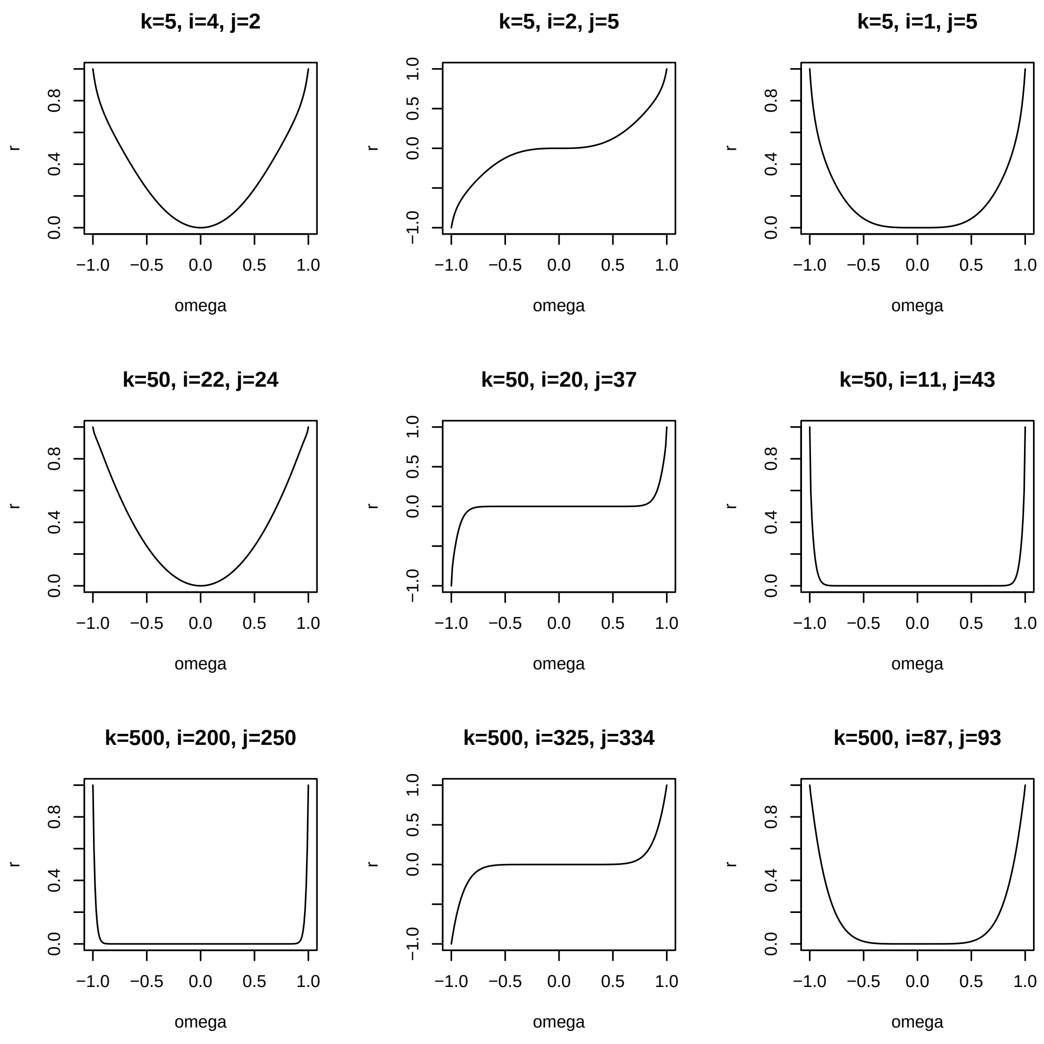
Vektori $\boldsymbol{\alpha}$ nimetajast saab analoogselt eelmisele peatükile leida ω võimalike väärtuste piirkonna. Kuna nimetaja peab rahuldama tingimust $1 > \boldsymbol{\delta}^T\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\delta} > 0$, ehk $1 > \omega^2 > 0$, siis parameeter ω peab rahuldama tingimust $|\omega| < 1$. Järelikult saame parameetri ω võimalike väärtuste piirkonnaks

$$\omega \in (-1; 1).$$

Sellises olukorras taandub korrelatsioonikordajate r_{ij} valem (3) järgnevale kujule

$$r_{ij} = \frac{\omega^{|i-j|} - \frac{2}{\pi}\omega^{i+j}}{\sqrt{1-\frac{2}{\pi}\omega^{2i}}\sqrt{1-\frac{2}{\pi}\omega^{2j}}}. \tag{32}$$

Leiame piirangud korrelatsioonikordajatele r_{ij}. Analoogselt eelmisele alapeatükile sõltub r_{ij} avaldis (32) ka rea ja veeru indeksitest (i ja j), seega uurime jooniselt 8 mõningaid juhte, kui dimensioon k ning indeksid i ja j on fikseeritud.



Joonis 8: Korrelatsioonikordaja r_{ij} graafik valemi (32) põhjal, kui $\omega \in (-1; 1)$

Kui $\omega \uparrow 1$, siis

$$r_{ij} = \frac{\omega^{|i-j|} - \frac{2}{\pi}\omega^{i+j}}{\sqrt{1-\frac{2}{\pi}\omega^{2i}}\sqrt{1-\frac{2}{\pi}\omega^{2j}}} = \frac{1-\frac{2}{\pi}}{\sqrt{1-\frac{2}{\pi}}\sqrt{1-\frac{2}{\pi}}} = 1.$$

Kui $\omega \to 0$, siis

$$r_{ij} = \frac{\omega^{|i-j|} - \frac{2}{\pi}\omega^{i+j}}{\sqrt{1-\frac{2}{\pi}\omega^{2i}}\sqrt{1-\frac{2}{\pi}\omega^{2j}}} = \frac{0}{\sqrt{1}\sqrt{1}} = 0.$$

Kui $\omega \downarrow -1$, siis kordaja r_{ij} väärtused sõltuvad indeksitest i ja j (on oluline kas nad on paaris- või paaritud arvud):

- kui mõlemad indeksid on paaris, siis

$$r_{ij} = \frac{\omega^{|i-j|} - \frac{2}{\pi}\omega^{i+j}}{\sqrt{1-\frac{2}{\pi}\omega^{2i}}\sqrt{1-\frac{2}{\pi}\omega^{2j}}} = \frac{1-\frac{2}{\pi}}{\sqrt{1-\frac{2}{\pi}}\sqrt{1-\frac{2}{\pi}}} = 1;$$

- kui üks indeksitest on paaris ja teine paaritu, siis

$$r_{ij} = \frac{\omega^{|i-j|} - \frac{2}{\pi}\omega^{i+j}}{\sqrt{1-\frac{2}{\pi}\omega^{2i}}\sqrt{1-\frac{2}{\pi}\omega^{2j}}} = \frac{-1+\frac{2}{\pi}}{\sqrt{1-\frac{2}{\pi}}\sqrt{1-\frac{2}{\pi}}} = \frac{2-\pi}{\pi-2} = -1;$$

- kui mõlemad on paaritud, siis

$$r_{ij} = \frac{\omega^{|i-j|} - \frac{2}{\pi}\omega^{i+j}}{\sqrt{1-\frac{2}{\pi}\omega^{2i}}\sqrt{1-\frac{2}{\pi}\omega^{2j}}} = \frac{1-\frac{2}{\pi}}{\sqrt{1-\frac{2}{\pi}}\sqrt{1-\frac{2}{\pi}}} = 1.$$

Seega, kui $|i-j|$ on paaritu, saame korrelatsioonikordajate r_{ij} võimalike väärtuste piirkonnaks

$$r_{ij} \in (-1;1)$$

ning, kui $|i-j|$ on paaris, saame korrelatsioonikordajate r_{ij} võimalike väärtuste piirkonnaks

$$r_{ij} \in (0;1).$$

Saadud tulemuste põhjal võib kirja panna järgneva lause.

Lause 2.7. *Olgu juhuslik suurus* $\boldsymbol{Z}$ *k-mõõtmelise asümmeetrilise normaaljaotusega,* $\boldsymbol{Z} \sim SN(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\delta})$*, olgu korrelatsioonimaatriksid* $\boldsymbol{\Omega}$ *ja* $\boldsymbol{\Omega}^*$ *AR struktuuriga ning selle tõttu vektor* $\boldsymbol{\delta}$ *on kujul* $\boldsymbol{\delta} = (\omega, \ldots, \omega^k)^T$*. Siis*

(a) parameetervektor $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_k)^T$ *on*

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \frac{\omega}{\sqrt{1-\omega^2}} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

(b) parameetri ω *võimalike väärtuste piirkond on*

$$\omega \in (-1; 1);$$

(c) juhusliku suuruse $\boldsymbol{Z}$ *korrelatsioonimaatriksi* $\mathbf{R} = (r_{ij})$ *elemendid* r_{ij} *avalduvad*

$$r_{ij} = \frac{\omega^{|i-j|} - \frac{2}{\pi}\omega^{i+j}}{\sqrt{1 - \frac{2}{\pi}\omega^{2i}}\sqrt{1 - \frac{2}{\pi}\omega^{2j}}};$$

(d) korrelatsioonikordajate r_{ij} *võimalike väärtuste piirkond:*

- *kui* $|i-j|$ *on paaritu, siis*

$$r_{ij} \in (-1; 1);$$

- *kui* $|i-j|$ *on paaris, siis*

$$r_{ij} \in (0; 1).$$

Lause 2.6 kehtib ka antud olukorras.

Lause 2.8. *Olgu juhuslik suurus* $\boldsymbol{Z}$ k*-mõõtmelise asümmeetrilise normaaljaotusega,* $\boldsymbol{Z} \sim SN(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\delta})$*, olgu korrelatsioonimaatriksid* $\boldsymbol{\Omega}$ *ja* $\boldsymbol{\Omega}^*$ *AR struktuuriga ning selle tõttu on vektoril* $\boldsymbol{\delta}$ *kuju* $\boldsymbol{\delta} = (\omega, \ldots, \omega^k)^T$*. Siis korrelatsioonimaatriksi* $\mathbf{R} = (r_{ij})$ *elementide vahel on järgmine seos:*

$$r_{ij} = I_{i<j} \prod_{m=i}^{j-1} r_{m,m+1} + I_{j<i} \prod_{m=j}^{i-1} r_{m,m+1}, \; i \neq j,$$

kus $I_{i<j}$ *ja* $I_{j<i}$ *on indikaatorfunktsioonid.*

Tõestus. Tõepoolest, kui $i < j$, siis

$$\begin{aligned}
\prod_{m=i}^{j-1} r_{m,m+1} &= \prod_{m=i}^{j-1} \left(\frac{\omega - \frac{2}{\pi}\omega^{2m+1}}{\sqrt{1 - \frac{2}{\pi}\omega^{2m}}\sqrt{1 - \frac{2}{\pi}\omega^{2m+2}}} \right) \\
&= \frac{(\omega - \frac{2}{\pi}\omega^{2i+1})(\omega - \frac{2}{\pi}\omega^{2i+3}) \ldots (\omega - \frac{2}{\pi}\omega^{2j-1})}{\sqrt{1 - \frac{2}{\pi}\omega^{2i}} \left(\sqrt{1 - \frac{2}{\pi}\omega^{2i+2}}\right)^2 \left(\sqrt{1 - \frac{2}{\pi}\omega^{2i+4}}\right)^2 \ldots \sqrt{1 - \frac{2}{\pi}\omega^{2j}}} \\
&= \frac{(\omega - \frac{2}{\pi}\omega^{2i+1})\omega(1 - \frac{2}{\pi}\omega^{2i+2}) \ldots \omega(1 - \frac{2}{\pi}\omega^{2j-2})}{\sqrt{1 - \frac{2}{\pi}\omega^{2i}}(1 - \frac{2}{\pi}\omega^{2i+2})(1 - \frac{2}{\pi}\omega^{2i+4}) \ldots \sqrt{1 - \frac{2}{\pi}\omega^{2j}}} \\
&= \frac{\omega^{j-i-1}(\omega - \frac{2}{\pi}\omega^{2i+1})}{\sqrt{1 - \frac{2}{\pi}\omega^{2i}}\sqrt{1 - \frac{2}{\pi}\omega^{2j}}} = \frac{\omega^{j-i} - \frac{2}{\pi}\omega^{i+j}}{\sqrt{1 - \frac{2}{\pi}\omega^{2i}}\sqrt{1 - \frac{2}{\pi}\omega^{2j}}} = r_{ij}
\end{aligned}$$

ning, kui $i > j$, siis

$$\prod_{m=j}^{i-1} r_{m,m+1} = \frac{\omega^{i-j} - \frac{2}{\pi}\omega^{i+j}}{\sqrt{1 - \frac{2}{\pi}\omega^{2i}}\sqrt{1 - \frac{2}{\pi}\omega^{2j}}} = r_{ij}.$$

Seega

$$r_{ij} = I_{i<j} \prod_{m=i}^{j-1} r_{m,m+1} + I_{j<i} \prod_{m=j}^{i-1} r_{m,m+1} = \frac{\omega^{|i-j|} - \frac{2}{\pi}\omega^{i+j}}{\sqrt{1 - \frac{2}{\pi}\omega^{2i}}\sqrt{1 - \frac{2}{\pi}\omega^{2j}}}.$$

□

3. $\mathbf{\Omega}$ struktuur, kui on teada maatriksi R struktuur

Siiani oleme näidanud, kuidas korrelatsioonimaatriksi $\mathbf{\Omega}$ struktuur määrab ära ka korrelatsioonimaatriksi $\mathbf{R}$ struktuuri. Näiteks kui maatriksil $\mathbf{\Omega}$ on CS struktuur ja vektoril $\boldsymbol{\delta}$ on kõik elemendid võrdsed, $\boldsymbol{\delta} = (\delta, \ldots, \delta)^T$, siis on ka maatriksil $\mathbf{R}$ CS struktuur.
Siin peatükkis uuritakse, kas saab kindlalt määrata korrelatsioonimaatriksi $\mathbf{\Omega}$ struktuuri, kui meil on teada korrelatsioonimaatriksi $\mathbf{R}$ struktuur.

3.1 Korrelatsioonimaatriksi $\mathbf{\Omega}$ struktuur kui maatriksil R on CS struktuur

Oleme tõestanud, et kui maatriksil $\mathbf{\Omega}$ on CS struktuur ja $\boldsymbol{\delta} = (\delta, \ldots, \delta)^T$, siis ka maatriksil $\mathbf{R}$ on CS struktuur. Tuleb aga välja, et korrelatsioonimaatriksi $\mathbf{R}$ CS struktuur ei ole piisav, et kindlustada maatriksi $\mathbf{\Omega}$ CS struktuur ega ka parameetervektori $\boldsymbol{\delta}$ elementide võrdsus. Seda on lihtne näidata järgneva kontranäitega.

Näide 3.1. *Olgu meil parameetervektor $\boldsymbol{\delta}$ selline, et kõik tema komponendid ei ole võrdsed:*

$$\boldsymbol{\delta} = \left(0, \frac{1}{2}, 0\right)^T.$$

Olgu meil korrelatsioonimaatriks $\mathbf{\Omega}$ *sellise struktuuriga, mis ei ole CS struktuur:*

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} 1 & 1-\frac{1}{2\pi} & \sqrt{1-\frac{1}{2\pi}} \\ 1-\frac{1}{2\pi} & 1 & 1-\frac{1}{2\pi} \\ \sqrt{1-\frac{1}{2\pi}} & 1-\frac{1}{2\pi} & 1 \end{pmatrix}.$$

Kasutame korrelatsioonimaatriksi $\mathbf{R}$ *elementide* r_{ij} *leidmiseks valemit* (3)*. Tuleb välja, et sellises olukorras on maatriksil* $\mathbf{R}$ *CS struktuur:*

$$r_{11} = \frac{1-\frac{2}{\pi}\cdot 0\cdot 0}{\sqrt{1-\frac{2}{\pi}\cdot 0^2}\sqrt{1-\frac{2}{\pi}\cdot 0^2}} = \frac{1}{\sqrt{1}\sqrt{1}} = 1 = r_{33},$$

$$r_{22} = \frac{1-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\frac{2}{\pi}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2}\sqrt{1-\frac{2}{\pi}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{1-\frac{1}{2\pi}}{\sqrt{1-\frac{1}{2\pi}}\sqrt{1-\frac{1}{2\pi}}} = 1,$$

$$r_{12} = \frac{1-\frac{1}{2\pi}-\frac{2}{\pi}\cdot 0\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\frac{2}{\pi}\cdot 0^2}\sqrt{1-\frac{2}{\pi}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{1-\frac{1}{2\pi}}{\sqrt{1}\sqrt{1-\frac{1}{2\pi}}} = \sqrt{1-\frac{1}{2\pi}} = r_{21} = r_{23} = r_{32},$$

$$r_{13} = \frac{\sqrt{1-\frac{1}{2\pi}}-\frac{2}{\pi}\cdot 0\cdot 0}{\sqrt{1-\frac{2}{\pi}\cdot 0^2}\sqrt{1-\frac{2}{\pi}\cdot 0^2}} = \frac{\sqrt{1-\frac{1}{2\pi}}}{\sqrt{1}\sqrt{1}} = \sqrt{1-\frac{1}{2\pi}} = r_{31}.$$

Seega on korrelatsioonimaatriksil $\mathbf{R}$ *CS struktuur:*

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{1-\frac{1}{2\pi}} & \sqrt{1-\frac{1}{2\pi}} \\ \sqrt{1-\frac{1}{2\pi}} & 1 & \sqrt{1-\frac{1}{2\pi}} \\ \sqrt{1-\frac{1}{2\pi}} & \sqrt{1-\frac{1}{2\pi}} & 1 \end{pmatrix}.$$

Oleme kontranäitega tõestanud, et korrelatsioonimaatriksi $\mathbf{R}$ *CS* struktuur ei ole piisav, et kindlustada parameetervektori $\boldsymbol{\delta}$ komponentide võrdsust ega korrelatsioonimaatriksi $\mathbf{\Omega}$ *CS* struktuuri.

3.2 Korrelatsioonimaatriksi $\mathbf{\Omega}$ struktuur kui maatriksil R on $\boldsymbol{AR}$ struktuur

Huvitav oleks teada saada, kas maatriksi $\mathbf{R}$ AR struktuurist järeldub maatriksi $\mathbf{\Omega}$ AR struktuur või parameetervektori $\boldsymbol{\delta}$ komponentide identsus, kuigi vastupidine järeldus ei kehti. Analoogselt eelmisele alapeatükile on võimalik näidata, et korrelatsioonimaatriksi $\mathbf{R}$ AR struktuur ei ole piisav tingimus, et maatriksil $\mathbf{\Omega}$ oleks AR struktuur ja et parameetervektoril $\boldsymbol{\delta}$ oleksid võrdsed elemendid. Seda saab tõestda järgneva kontranäitega.

Näide 3.2. *Analoogselt eelmisele alapeatükile olgu meil parameetervektor* $\boldsymbol{\delta}$ *selline, et kõik tema komponendid ei ole võrdsed:*

$$\boldsymbol{\delta} = \left(0, \frac{1}{2}, 0\right)^T$$

ning olgu meil korrelatsioonimaatriks $\mathbf{\Omega}$ *sellise struktuuriga, mis ei ole AR struktuur (antud juhul on maatriksil* $\mathbf{\Omega}$ *CS struktuur):*

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} 1 & 1-\frac{1}{2\pi} & 1-\frac{1}{2\pi} \\ 1-\frac{1}{2\pi} & 1 & 1-\frac{1}{2\pi} \\ 1-\frac{1}{2\pi} & 1-\frac{1}{2\pi} & 1 \end{pmatrix}.$$

Kasutame korrelatsioonimaatriksi $\mathbf{R}$ *komponentide* r_{ij} *leidmiseks valemit* (3). *Näeme, et antud juhul tuleb maatriks* $\mathbf{R}$ *selline, et tal on AR struktuur:*

$$r_{11} = \frac{1-\frac{2}{\pi}\cdot 0\cdot 0}{\sqrt{1-\frac{2}{\pi}\cdot 0^2}\sqrt{1-\frac{2}{\pi}\cdot 0^2}} = \frac{1}{\sqrt{1}\sqrt{1}} = 1 = r_{33},$$

$$r_{22} = \frac{1-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\frac{2}{\pi}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2}\sqrt{1-\frac{2}{\pi}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{1-\frac{1}{2\pi}}{\sqrt{1-\frac{1}{2\pi}}\sqrt{1-\frac{1}{2\pi}}} = 1,$$

$$r_{12} = \frac{1-\frac{1}{2\pi}-\frac{2}{\pi}\cdot 0\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\frac{2}{\pi}\cdot 0^2}\sqrt{1-\frac{2}{\pi}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{1-\frac{1}{2\pi}}{\sqrt{1}\sqrt{1-\frac{1}{2\pi}}} = \sqrt{1-\frac{1}{2\pi}} = r_{21} = r_{23} = r_{32},$$

$$r_{13} = \frac{1-\frac{1}{2\pi}-\frac{2}{\pi}\cdot 0\cdot 0}{\sqrt{1-\frac{2}{\pi}\cdot 0^2}\sqrt{1-\frac{2}{\pi}\cdot 0^2}} = \frac{1-\frac{1}{2\pi}}{\sqrt{1}\sqrt{1}} = 1-\frac{1}{2\pi} = r_{31}.$$

Seega on korrelatsioonimaatriksil $\mathbf{R}$ *AR struktuur:*

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{1-\frac{1}{2\pi}} & 1-\frac{1}{2\pi} \\ \sqrt{1-\frac{1}{2\pi}} & 1 & \sqrt{1-\frac{1}{2\pi}} \\ 1-\frac{1}{2\pi} & \sqrt{1-\frac{1}{2\pi}} & 1 \end{pmatrix}.$$

Oleme kontranäitega tõestanud, et korrelatsioonimaatriksi $\mathbf{R}$ AR struktuur ei ole piisav, et kindlustada parameetervektori $\boldsymbol{\delta}$ komponentide võrdsust ega korrelatsioonimaatriksi $\mathbf{\Omega}$ AR struktuuri.

4. Rakendus

Mitmemõõtmeline asümmeetriline normaaljaotus tuleb kasuks andmete analüüsimisel, kus andmete saamiseks on tehtud mitu mõõtmist mitmel erineval ajamomendil. Eesmärgiks on selgitada, kuidas tekib mitmemõõtmeline asümmeetriline normaaljaotus reaalses elus, ning uurida, kui täpselt on võimalik leida korrelatsioonimaatriksi $\mathbf{R}$ struktuuri valemite abil, võrreldes seda simuleeritud andmestiku korrelatsioonimaatriksiga.
Selle peatüki näite idee pärineb artiklist [4], milles uuriti järgnevat:

Näide 4.1. *Andmestik pärineb sportlaste koormustestist PWC170 (Physical Working Capacity), kus koormust tõstetakse kuni pulsini 170 lööki minutis, et määrata sportlaste aeroobset seisundit. Eesti suusakoondise 15 suusatajat tegid veloergomeetril koormustesti, kus iga* 3 *minuti järel tõsteti koormust (kokku* 6 *korda). Keskmine pulss mõõdeti enne katse algust ning igal järgneval koormusel. Seega on meil korduvad mõõtmised seitsmel ajamomendil* X_0 *ja* $X_1, \ldots, X_6$*. Meid huvitavad nende sportlaste näitajad, kelle puhkeoleku pulss on keskmisest madalam, nende näitajate jaotus ning seosed mõõtmiste vahel.*

Selles näites on tegemist andmestikuga, mille korrelatsioonimaatriks on AR struktuuriga, sest pulsitase sõltub rohkem eelmisena mõõdetud pulsitasemest, kui varasemalt mõõdetud pulsitasemest. Probleem on selles, et artiklis [4] kasutatud andmestik on kahjuks liiga väike, et mingeid täpseid tulemusi saada. Selle tõttu simuleerime ise piisavalt suure valimi, et saaksime võrrelda simuleeritud korrelatsioonimaatriksit teooria abil arvutatud korrelatsioonimaatriksiga.
Simuleerime standardnormaaljaotusega andmestiku, mille korrelatsioonimaatriks $\mathbf{\Omega}^*$ on AR struktuuriga ja mõõtmetelt 5×5, ehk $k + 1 = 5$, ning olgu $\omega_{ij} = \omega^{|i-j|} = 0.5^{|i-j|}$. Siis jagame andmestiku pooleks selle põhjal, kas esimene mõõtmistulemus on positiivne

või negatiivne, mida võib tõlgendada kui väärtust üle või alla keskmise, kui väärtused on eelnevalt standardiseeritud. Seega tekib meil kaks valimit: üks, kus $X_0 > 0$, ja teine, kus $X_0 < 0$. Need valimid on realisatsioonid 4-mõõtmelisest asümmeetrilisest normaaljaotusest.

Kõigepealt leiame teooria põhjal korrelatsioonimaatriksi $\mathbf{R}$, kui $\omega = 0.5$ ning $k = 4$. Korrelatsioonimaatriksi arvutamiseks kasutame valemit (32).

Antud juhul on meil

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.25 & 0.125 \\ 0.5 & 1 & 0.5 & 0.25 \\ 0.25 & 0.5 & 1 & 0.5 \\ 0.125 & 0.25 & 0.5 & 1 \end{pmatrix} \tag{33}$$

ja

$$\boldsymbol{\delta} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.125 & 0.0625 \end{pmatrix}^T. \tag{34}$$

Kasutades valemit (32), saame korrelatsioonimaatriksiks $\mathbf{R}$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0.46789 & 0.23039 & 0.11476 \\ 0.46789 & 1 & 0.49241 & 0.24528 \\ 0.23039 & 0.49241 & 1 & 0.49813 \\ 0.11476 & 0.24528 & 0.49813 & 1 \end{pmatrix} \tag{35}$$

Kui nüüd võrrelda seda simuleeritud andmestiku korrelatsioonimaatriksitega $\mathbf{R}_{pos}$ ja $\mathbf{R}_{neg}$:

$$\mathbf{R}_{pos} = \begin{pmatrix} 1 & 0.4626477 & 0.2223863 & 0.1059517 \\ 0.4626477 & 1 & 0.4939672 & 0.2470462 \\ 0.2223863 & 0.4939672 & 1 & 0.4998049 \\ 0.1059517 & 0.2470462 & 0.4998049 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R}_{neg} = \begin{pmatrix} 1 & 0.4685243 & 0.2304533 & 0.1078887 \\ 0.4685243 & 1 & 0.4939065 & 0.2441820 \\ 0.2304533 & 0.4939065 & 1 & 0.4938108 \\ 0.1078887 & 0.2441820 & 0.4938108 & 1 \end{pmatrix},$$

kus $\mathbf{R}_{pos}$ kirjeldab selle valimi korrelatsioone, kus $X_0 > 0$, ning $\mathbf{R}_{neg}$ selle valimi korrelatsioone, kus $X_0 < 0$, siis näeme, et simulatsioonide tulemused on teoreetiliste tulemustega kooskõlas.

Praktikas tihtipeale tekib probleem, et meil on sageli võimalik näha ainult lõigatud andmestikku (st andmed on juba kogutud teatava kitsendusega). Seega on meil andmete põhjal võimalik leida hinnang korrelatsioonimaatriksile $\mathbf{R}$ (näiteks (35)).

Kõige tavalisem viga on eeldada, et meie andmed on normaaljaotusest $N(\mathbf{0}, \mathbf{R})$, kus $\mathbf{R}$ on hinnatud andmetelt, aga tegelik jaotus on hoopis $SN(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\delta})$. Antud näite korral on korrelatsioonimaatriks $\mathbf{R}$ antud valemiga (35) ning $\boldsymbol{\Omega}$ ja $\boldsymbol{\delta}$ avaldised on vastavalt (33) ja (34). Samuti on lihtne teha viga saadud seoste tõlgendamisega: oluline on eristada, et valemiga (33) antud $\boldsymbol{\Omega}$ on juhuslike suuruste $X_1, \ldots, X_4$ vaheline korrelatsioonimaatriks, aga valemiga (35) antud $\mathbf{R}$ on suuruste $X_1, \ldots, X_4$ tinglik korrelatsioonimaatriks tingimusel $X_0 < 0$ või $X_0 > 0$.

Summary

Multivariate skew-normal distribution is an important subject and not a rare occurrence in everyday statistics. In order to better understand the multivariate skew-normal distribution it is necessary to approach it with simple and specific situations. In this master's thesis the behaviour of the correlation matrices of multivariate skew-normal random variables with $\{\mathbf{\Omega}, \boldsymbol{\delta}\}$-parametrization was examined in seven different specific situations. It is important to note that the matrix $\mathbf{\Omega}$ and the vector $\boldsymbol{\delta}$ cannot be chosen separately, thus this thesis studied what is the effect of this restriction in case of different structures of $\mathbf{\Omega}$, starting from the more simple structures: when $\mathbf{\Omega} = \mathbf{I}$, when $\mathbf{\Omega}$ has CS structure (i.e. $\omega_{ij} = \omega,\ \forall i, j = 1, \ldots, k$) and when $\mathbf{\Omega}$ has AR structure (i.e. $\omega_{ij} = \omega^{|i-j|},\ \forall i, j = 1, \ldots, k$). In everyday statistics it is a common mistake to assume that the collected data is of multivariate normal distribution, when infact it is of multivariate skew-normal distribution. This can happen when the data has been collected with certain restrictions in mind. To fully understand the behaviour and the connections between the correlation matrices of generated multivariate normal random variables and resulting skew-normal random variables a lot of work still has to be done. In order to construct a set of rules that the correlation matrices follow, we need to understand how they behave in simpler occasions and this master's thesis provides the formulas for calculating the correlation matrix of a multivariate skew-normal random variable with $\{\mathbf{\Omega}, \boldsymbol{\delta}\}$-parametrization for certain specific situations.

Kirjandus

[1] Azzalini, A., Dalla Valle, A. (1996). The multivariate skew-normal distribution. *Biometrika*, 83 (4): 715–726.

[2] Dunajeva, O., Kollo, T., Traat, I. (2003). Bias correction for the shape parameter of the skew normal distribution. *Tatra Mt. Math. Publ.*, 26: 281–289.

[3] Kendall, M., Stuart, A. (1976). Design and analysis, and time-series. *The advanced theory of statistics*, **3**, 646, Moscow: Nauka (Russian).

[4] Käärik, E. (2006). Imputation algorithm using copulas. *Advances in Methodology and Statistics*, Ed. A. Ferligoj. Vol **3** (1), 109–120.

[5] Käärik, M., Selart, A., Käärik, E. (2015). On parametrization of multivariate skew-normal distribution, *Communications in Statistics - Theory and Methods.*

[6] Rao, C. R. (1965). Linear statistical inference and its applications. New York: Wiley.

[7] Raveh, A. (1985). On the use of the inverse of the correlation matrix in multivariate data analysis. *The American Statistician*, **39**, 1, 39–42.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Inger-Helen Maadik (sünnikuupäev: 03.02.1991)

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose "$\{\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\delta}\}$-parametrisatsiooniga mitmemõõtmeline asümmeetriline normaaljaotus erinevate korrelatsioonistruktuuride korral",
mille juhendaja on Meelis Käärik,

1.1. reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse täht- aja lõppemiseni;
1.2. üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.

2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus, 13.05.2015