

L. NEUMANN · P. KALANTAROV

ELEKTROTEHNIKA  
TEOREETILISED  
ALUSED



ELEKTROMAGNETILISE VÄLJA TEOORIA

L. R. NEUMANN JA P. L. KALANTAROV

ELEKTROTEHNIKA  
TEOREETILISED ALUSED  
KOLMES OSAS

*KOLMAS OSA*

KIRJASTUS «VALGUS»  
TALLINN 1969

NA

L. R. NEUMANN

A-25898

# ELEKTROMAGNETILISE VÄLJA TEOORIA

*NSVL Kõrgema Hariduse Ministeeriumi poolt lubatud kasutada õpikuna elektrotehnilistes ja energeetilistes kõrgemates õppeasutustes ja teaduskondades*

KIRJASTUS «VALGUS»  
TALLINN 1969

Originaali tiitel:

Л. Р. Нейман и П. Л. Калантаров  
ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ  
Издание пятое, переработанное  
Часть третья. Теория электромагнитного поля  
Госэнергоиздат, Москва-Ленинград, 1959

Vene keelest tõlkinud H. J ä n e s  
Kunstiliselt kujundanud H. P o l b e r g

«Elektrotehnika teoreetiliste aluste» kursus on ette nähtud kõikide energetiliste ja elektrotehniliste kõrgemate õppeasutuste ning teaduskondade üliõpilastele. Kursuse sisu vastab NSVL Kõrgema Hariduse Ministeeriumi programmile samanimelise õppeaine kohta. Kursus koosneb kolmest osast: esimene osa — «Elektrotehnika füüsikalised alused ja alalisvooluahelate teooria», mille kirjutas L. R. Neumann, välja arvatud peatükk lineaarsete alalisvooluahelate arvutamisest, mille kirjutas P. L. Kalantarov ja täiendas L. R. Neumann; teine osa — «Vahelduvvooluahelate teooria», mille kirjutas P. L. Kalantarov ja töötas ümber ning täiendas L. R. Neumann; kolmas osa — «Elektromagnetilise välja teooria», mille kirjutas L. R. Neumann.

Kolmandas osas uuritakse elektromagnetilisi välju ja nende arvutusmeetodeid, samuti väljadega seotud mahtuvuste, induktiivsuste, takistuste ja elektromagnetiliste seadmete teiste parameetrite arvutusmeetodeid.

Retsenseerinud U. A g u r



## ESIMENE PEATÜKK

# ELEKTROMAGNETILINE VÄLI JA TEDA ISELOOMUSTAVAD VÖRRANDID

### § 1. Elektriliste ja magnetiliste nähtuste vaheline seos. Elektromagnetiline väli

Kursuse esimeses osas osutati suurt tähelepanu elektriliste ja magnetiliste nähtuste vahelisele seosele. Tervikuna vaadeldes osutub igasugune elektriline või magnetiline nähtus oma olemuselt alati elektromagnetiliseks.

*Elektromagnetiline väli* on materia üheks erikujuks. Iga elektriliselt laetud osakest ümbritseb elektromagnetiline väli, mis moodustab osakesega ühtse terviku. Kuid elektromagnetiline väli võib eksisteerida ka vabas, laetud osakestest eraldatud olekus footonitena, mis liiguvad kiirusega ligi  $3 \cdot 10^8$  m/s või üldse selle kiirusega liikuva kiirgunud elektromagnetilise väljana (elektromagnetiliste lainetena).

Elektromagnetilist välja iseloomustab pidev ruumiline jaotus ja samal ajal väljendab ta diskreetset struktuuri kiirgunud elektromagnetilise välja kvantide, näiteks footonite näol.

Elektromagnetiline väli on teatava energiahulga kandjaks, mis on võimeline muunduma teisteks energialiikideks — keemiliseks, soojuslikuks, mehaanilise liikumise energiaks jne.

Elektromagnetilisel väljal on ka sellele energiale vastav teatav mass, mille saab määrata kogu energia  $W$  ja massi  $m$  vahelisest üldisest seosest  $W = mc^2$ , kusjuures  $c$  on valguse kiirus tühjuses. Kuid harilikult kasutatavates elektromagnetilistes väljades on massi tihedus küllaltki väike. Olgu magnetiline induktsioon 1 T ja elektrivälja tugevus  $10^8$  V/m. Viimast on võimalik saavutada ainult eriti kõrge vaakuumi puhul. Nendel tingimustel elektromagnetilise välja energia ruumtihedus, mis on võrdne elektri- ja magnetvälja energia-te ruumtiheduste summaga,

$$W' = \frac{W}{V} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{10^{16}}{2 \cdot 4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} + \frac{1}{2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}} =$$

$$= 4,42 \cdot 10^5 \text{ J/m}^3.$$

Vastavalt elektromagnetilise välja massi ruumtihedus omab seejuures väärtuse

$$\frac{m}{V} = \frac{W'}{c^2} = \frac{4,42 \cdot 10^5}{(3 \cdot 10^8)^2} = 4,91 \cdot 10^{-12} \text{ kg/m}^3,$$

s. t. kujutab endast väga väikest suurust.

Välja massi olemasolul on printsiipiaalne tähtsus. Nimelt, teades välja massi väärtust, on küllaltki kerge arvutada valguse rõhku keha pinnale, millele ta langeb. Valguse rõhu tegi katseliselt kindlaks ja määras selle suuruse oma hiilgavate katsetega P. N. Lebedev, kinnitades sellega elektromagnetilise välja teooria järelduisi.

Praktikas kasutatavate elektromagnetiliste väljade massitihedus on tühiselt väike, nii et selle võib kõrvale jätta. Põhilist tähelepanu tuleb osutada vaadeldavate nähtuste energeetilisele küljele. Elektromagnetilist välja iseloomustatakse üldnimetatud omaduste kõrval eriliste elektromagnetiliste omadustega, mida ei käsitleta mehaanikas, nimelt võimega avaldada laetud osakestele mehaanilist jõudu. See toime sõltub laetud osakeste kiirusest.

Niisiis kujutab elektromagnetiline väli endast ülalmärgitud omadustega iseloomustatavat aine eriliiki. Nii elektri- kui magnetväli osutuvad alati ühtse elektromagnetilise välja kaheks küljeks. Siinkohal on väga tähtis meeles pidada, et objektiivselt eksisteeriva, meie vaatlustest sõltumatu elektromagnetilise välja jagamine kaheks komponendiks — elektri- ja magnetväljaks — on suhteline, s. t. sõltub tingimustest, milledes elektromagnetilist välja teatavate seadiste abil vaadeldakse.

Niisiis meie suhtes paigal seisvate elektriliselt laetud kehade korral me avastame liikumatu laetud proovikeha abil neid kehi ümbritsevas ruumis elektrivälja, kuid ei avasta liikumatu magnetvälja abil magnetvälja. Laetud proovikehale mõjub selle ruumi igas punktis teatav mehaaniline jõud, magnetvälja aga ei püüa mingis kindlas suunas asetuda. Kui aga samal ajal teine vaatleja liigub koos magnetväljaga laetud kehade suhtes, siis ta avastab nende kehade läheduses ka magnetvälja. Tõepoolest, laetud kehade liikumine tema suhtes ja abinõu suhtes, millega ta määrab magnetvälja, kujutab endast elektrilist konvektsioonivoolu, aga igasugune elektrivool on seotud magnetväljaga.

Sedasama võib öelda ka juhtumi kohta, kui me avastame ruumi mingis osas üksnes magnetvälja. Nii näiteks märkame ainult magnetvälja ruumis, mis ümbritseb meie suhtes paigalseisvaid püsimgneteid. Liikumatu magnetvälja püüab selle ruumi igas punktis ase-

tuda teatavasse suunda, kuid liikumatule laetud proovikehale selles ruumis mingid jõud ei mõju. Kuid magnetite suhtes liikuv vaatlaja avastab samal ajal elektriliselt laetud proovikehaga ka elektrivälja. Ta seletab seda sellega, et magnetväli muutub magnetvälja suhtes liikuvate magnetite tõttu ajaliselt, ent igasugune muutuv magnetväli põhjustab sellesamas ruumis indutseeritud elektrivälja.

Kõik see kinnitab ülaltoodud põhilist seisukohta, et objektiivselt eksisteerib alati ühtne elektromagnetiline väli, mis ei sõltu vaatlustingimustest, ning selle komponentideks jagamine on seotud katsetingimustega.

Siinkohal on kasulik märkida, et ka neil juhtumel, kui me järel-dame, et ruumi mingis piirkonnas on määratav nähtuse ainult elektriline või ainult magnetiline külg, kehtib niisugune järeldus ainuüksi nähtuse makroskoopilise käsitluse kohta. Tõepoolest, kui me süveneme nende protsesside füüsikalisse olemusse, millega on seotud paigalseivate laetud kehade elektriväli ja mis toimuvad laetud keha sees nende pindade lähedal, siis avastame otsekohe ka nähtuse magnetilise külje. Vastavalt meie ettekujutusele moodustub keha üldlaeng alalises liikumises olevate laetud elementaarosakeste laengute kogumist. Järelikult eksisteerivad laetud kehas mitte ainult elektri-, vaid ka magnetväljast ümbritsetud elementaarelektrivoolud. Ainult seetõttu, et need elementaarvoolud esinevad mitmesugustes suundades, kompenseeruvad nende magnetväljad vastastikku peaaegu täielikult juba väikesel kaugusel laetud kehast. Seega osutub ka sel juhtumil terviklikult käsitletud nähtus elektromagnetiliseks.

Täpselt samuti on ka paigalseivate püsomagnetite korral nende magnetväli seotud magneti aines eksisteerivate elementaarelektrivooludega. Järelikult ka sel juhtumil osutub nähtus tervikuna elektromagnetiliseks.

Võimalus luua niisuguseid tingimusi, millede puhul ruumi mingis piirkonnas ilmneb elektromagnetilise protsessi üks külg, võimaldab eraldi uurida paljusid põhiseoseid, mis iseloomustavad elektrivälja, või vastavalt põhiseoseid, mis iseloomustavad magnetvälja. Pealegi huvitab meid paljude praktiliste ülesannete vaatlemisel ainult üks väljadest. Nii näiteks elektrimasina pöördemomendi uurimisel arvestame ainuüksi masinas olevat magnetvälja. Sellesama masina isolatsiooni elektrilise tugevuse määramisel huvitab meid ainult elektriväli. Juba kursuse esimeses osas kriipsutati mitu korda alla seose olemasolu elektriliste ja magnetiliste nähtuste vahel ning esitati selle seose füüsikaline olemus ja seda seost määravad kvantitatiivsed vahekorrad.

Kõigest kursuse esimeses osas käsitletust järeldub, et igasuguse elektrivooluga kaasneb tingimata magnetväli ja vastupidi, s. t. magnetväli on paratamatult seotud elektrivooluga. On hakatud eristama kolme liiki elektrivoolu: juhtivusvool, mille tihedus on vör-

deline elektrivälja tugevusega, nihkevool, mille tihedus on võrdeline elektrivälja tugevuse muutumiskiirusega, ning konvektsioonivool, mille tiheduse määrab liikuvate vabade elektriliselt laetud osakeste või kehade kiirus. See kiirus sõltub elektripingest mööda teekonda, mida need osakesed või kehad läbivad. Füüsikalisest seisukohast saab siiski eristada ainult kaht elektrivoolu liiki. Neid iseloomustatakse teiste tunnustega. Esimene vooluliik kujutab endast elektrilaengut omavate elementaarosakeste liikumist. Siia kuuluvad konvektsioonivool, juhtivusvool ja see osa nihkevoolust, mis on tingitud aine elektrilise polariseerumuse muutusest. Teine vooluliik, mida ei ole võimalik esitada meile tuntud laetud elementaarosakeste liikumisenähtena, on elektriline nihkevool tühjuses.

Liikuvaid laetud osakesi ümbritsevas ruumis eksisteerib nii elektri- kui ka magnetväli. Need väljad kujutavad endast ühtse elektromagnetilise välja kaht külge.

Tühjuses elektrivälja ajalises muutumisest tekkivaid elektrilisi nihkevoolu ümbritseb samuti magnetväli. Järelikult tekib igasugusel elektrivälja ajalisel muutumisel sellesamas ruumis elektriväljaga seotud magnetväli. Ka sel juhtumil määravad ühtse elektromagnetilise välja need mõlemad väljad.

Elektrivoolu ja magnetvälja tugevuse vahelist seost väljendab koguvoolu seadus

$$\oint \mathbf{H} \, d\mathbf{l} = i,$$

mis ütleb, et magnetvälja tugevuse joonintegraal mööda mistahes kinnist kontuuri on võrdne koguvooluga läbi selle kontuuriga piiratud pinna.

Seda üldistatult mõistetavat koguvoolu seadust väljendava võrrandi andis Maxwell. Selle võrrandi parempoolne osa sisaldab kõiki voolu liike, sealjuures ka nihkevoolu tühjuses. Seda nimetatakse *Maxwelli esimeseks võrrandiks*. Selle võrrandi abil määratakse kindlaks üks tähtsamaid seoseid elektromagnetiliste nähtuste elektrilise ja magnetilise külje vahel; nimelt määrab ta laetud osakeste liikumisel ja elektrivälja muutumisel tekkiva magnetvälja.

Teine seos defineerib magnetvälja ajalisel muutumisel tekkivat elektrivälja. Seose avastas Faraday, kes formuleeris selle *elektromagnetilise induktiooni seadusena*. Maxwelli teeneks on selle seaduse üldistamine mistahes keskkonnale. Vastavalt elektromagnetilise induktiooni seaduse Maxwelli formuleeringule on kontuuriga piiratud pinda läbiva magnetvoo muutumisel kontuuris tekkiv emj. võrdne selle voo miinusmärgiga võetud muutumiskiirusega. Maxwelli üldistuse olemus seisneb selles, et kontuuri, milles tekib emj., võib kujutada paigutatuna mistahes keskkonda. Nii võib see näiteks olla tervikuna tühjuses paiknev mõtteline kontuur.

Emj. tekib niisuguses kontuuris magnetvälja muutumisel indut-

seeritud elektrivälja tulemusena. Seejuures on kontuuris toimiv emj. võrdne elektrivälja tugevuse joonintegraaliga mööda seda kontuuri. Üldistatud elektromagnetilise induksiooni seaduse Maxwelli formuleering avaldub seega kujul

$$\oint \mathbf{E} \, d\mathbf{l} = \frac{d\Phi}{dt}.$$

Seda võrrandit nimetatakse *Maxwelli teiseks võrrandiks*. Elektromagnetilise induksiooni olemus seisneb selles, et igasugusel magnetvälja ajalisel muutumisel tekib samas ruumis temaga seotud elektriväli.

Toodud kaks võrrandit osutuvad elektromagnetilise välja integraalkujul esitatud põhivõrrandideks.

Elektromagnetilise välja ja ta arvutusmeetodite uurimisel on väga suur tähtsus.

Kursuse teise, vahelduvvooluahelate teooriale pühendatud osa esimestes paragrahvides juhiti tähelepanu niisuguste ahelate füüsikaliste nähtuste keerukusele. Seal näidati, et ahelate teooria loomise võimalus põhineb real teaduslikel abstraktsioonidel, s. t. terve hulga nähtuste arvestamata jätmisel, mida teatud tingimustel võib lugeda teisejärguliseks. Elektri- ja magnetahelate teooria opereerib ahelate parameetritega, näiteks induktiivsusega, mahtuvusega, elektritakistusega, magnetilise takistusega jne., võttes nende parameetrite väärtusi kui etteantuid. Ahelate parameetrite arvutamiseks on aga tingimata vaja tunda ahelaosade elektri- ja magnetvälju, mis moodustuvad nendes ahelaosades voolude ja pingete esinemisel. Elektromagnetiliste väljade uurimine ei ole tähtis ainult ahelate parameetrite arvutamiseks. Ta on vajalik ka siis, kui me soovime täielikumalt vaadelda elektromagnetiliste nähtuste pilti mingis seadmes, tegemata neid lihtsustusi, milledele on rajatud elektri- ja magnetahelate teooria. Sisuliselt on mistahes seadise elektromagnetiliste nähtuste täielikuks iseloomustamiseks vaja teada neid nähtusi määravate füüsikaliste suuruste — voolutiheduse, elektrivälja tugevuse, magnetilise induksiooni jne. — ruumilist jaotust ja ajalist muutumist. Seepärast on elektromagnetiliste nähtuste põhjalikuks uurimiseks vaja uurida neid iseloomustavaid välju.

Kaugeltki mitte alati ei saa elektromagnetiliste nähtuste analüüsimisel sisse viia ega kasutada elektri- ja magnetahelale iseloomulikke mõisteid, isegi mitte ligikaudse lahenduse saamiseks. Praktikas esineb palju niisuguseid tähtsaid juhtumeid, mille puhul need mõisted kaotavad mõtte ja elektromagnetilisi nähtusi saab analüüsida ainult elektromagnetilise välja detailse uurimisega. Üheks tähtsamaks näiteks võiks tuua elektromagnetiliste lainete kiirgumise ja leviku küsimuse.

Elektromagnetilise välja teooria selle põhijoontes lõi Maxwell ja esitas 1873. a. ilmunud töös «Traktaat elektrist ja magnetismist».

Tuleb märkida, et juba 1833. a. formuleeris vene akadeemik E. H. Lenz väited, mis määravad kindlaks elektriliste ja magnetiliste nähtuste ühtsuse ja nende nähtuste omavahelise seose. Maxwelli elektromagnetilise välja teooriat kinnitasid hiilgavalt H. Hertzi katsed, P. N. Lebedevi uurimused valguse elektromagnetilise iseloomu kohta ja raadio leiutamine A. S. Popovi poolt.

## § 2. Elektromagnetilise välja komponentide suhtelisus

Objektiivselt eksisteerivat elektromagnetilist välja võib tunnetada sõltuvalt vaatlustingimustest erinevalt. Nimelt on kaks elektromagnetilise välja põhikomponenti — elektri- ja magnetväli — teineteise suhtes liikuvates eri koordinaatsüsteemides erinevad. See on printsiipiaalses mõttes selge juba eelmises paragrahvis öeldust. Esitame mõningad seda olulist väidet iseloomustavad seosed.

Oletame, et mingis koordinaatsüsteemis iseloomustavad elektromagnetilist välja vektorid  $\mathbf{E}'$  ja  $\mathbf{B}'$  ning vastavalt vektorid  $\mathbf{D}' = \epsilon \mathbf{E}'$  ja  $\mathbf{H}' = \mathbf{B}'/\mu_0$ . Liikugu selle koordinaatsüsteemi suhtes kiirusega  $\mathbf{v}$  osake laenguga  $q$ . Sellele kehale mõjub mehaaniline jõud (vt. I osa):

$$\mathbf{f} = q\mathbf{E}' + q[\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}'].$$

Seejuures mõjub jõuga  $q\mathbf{E}'$  osakesele elektriväli ja jõuga  $q[\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}']$  magnetväli.

Kujutleme nüüd, et teine koordinaatsüsteem liigub koos laetud osakesega esimese süsteemi suhtes ühtlaselt ja sirgjooneliselt kiirusega  $\mathbf{v}$ . Selle teise koordinaatsüsteemi suhtes on laetud osake liikumatu. Seepärast määratakse kogu jõud selles koordinaatsüsteemis ainult tugevust  $\mathbf{E}''$  omava elektrivälja toime tulemusena, mis leitakse võrdusest

$$\mathbf{f} = q\mathbf{E}''.$$

Võrrutades jõu  $\mathbf{f}$  mõlemad avaldised, saame:

$$\mathbf{E}'' = \mathbf{E}' + [\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}'].$$

Näeme, et elektrivälja tugevus, mis kvantitatiivselt võrdub antud koordinaatsüsteemi suhtes liikumatule punktikujulisele laetud kehale mõjuva mehaanilise jõu ja selle keha laengu suhtega, osutub teineteise suhtes liikuvates koordinaatsüsteemides erinevaks.

Tingimata on vaja lisada, et saadud seos  $\mathbf{E}''$  ja  $\mathbf{E}'$  vahel on õige tingimusel, kui kiirus  $v$  on palju väiksem valguse kiirusest  $c$  tühjuses ning kui liikumine on ühtlane ja sirgjooneline. Detailsemal vaatlemisel selgub, et  $c$ -le lähedase kiiruse puhul on tingimata vaja arvestada veel täiendavat liiget, mis on kaduvväike, kui  $v \ll c$ .

Liikugu esimeses koordinaatsüsteemis kinnine vooluring. Elektromagnetilise induktsiooni tagajärjel vooluringis tekkivat elektromotoorjõudu saab esitada kujul

$$e = \oint \mathbf{E}'' \, dl = \oint \mathbf{E}' \, dl + \oint [\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}'] \, dl,$$

kusjuures  $\mathbf{v}$  on elemendi  $dl$  kiirus,  $v_{\text{oi}}$

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \oint [\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}'] \, dl.$$

Komponent  $\oint \mathbf{E}' \, dl = -\frac{\partial\Phi}{\partial t}$  kujutab endast vooluringis vahelduva magnetvoo poolt indutseeritavat elektromotoorjõudu, kui vooluring on esimeses koordinaatsüsteemis liikumatu. Komponent  $\oint [\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}'] \, dl$  on tingitud vooluringi liikumisest selles koordinaatsüsteemis (vt. I osa).

Samuti võib näidata, et ka magnetvälja tugevus osutub teineteise suhtes liikuvates koordinaatsüsteemides erinevaks. Seose suuruste  $\mathbf{H}''$  ja  $\mathbf{H}'$  vahel kahes ülalvaadeldud koordinaatsüsteemis võib saada järgmist lihtsat juhtumit vaadeldes. Olgu esimeses koordinaatsüsteemis elektromagnetilise välja tekitajaks selles süsteemis kiirusega  $\mathbf{v}_1$  liikuv üksildane osake, mille laeng on  $q$ . Elektrinihke

vektor  $\mathbf{D}'$   $v_1 \ll c$  korral  $\mathbf{D}' = \frac{q}{4\pi r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$ , kus  $r$  on kaugus laetud osakesest punktini, kus määratakse  $\mathbf{D}'$ ;  $\mathbf{r}$  — vastav raadiusvektor.

Selles koordinaatsüsteemis liikuva laetud osakese tekitatud magnetvälja tugevus  $\mathbf{H}'$  (vt. I osa):

$$H' = \frac{v_1 q \sin \alpha}{4\pi r^2}; \quad \mathbf{H}' = \left[ \mathbf{v}_1 \cdot \frac{q}{4\pi r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \right] = [\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{D}'].$$

Esimese koordinaatsüsteemi suhtes kiirusega  $\mathbf{v}$  liikuvates teises koordinaatsüsteemis liigub laetud osake  $q$  kiirusega  $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}$ . Järelikult tekitab ta selles süsteemis  $v_2 \ll c$  korral magnetvälja tugevusega

$$\mathbf{H}'' = \left[ \mathbf{v}_2 \cdot \frac{q}{4\pi r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \right] = [\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{D}'] = [\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{D}'] - [\mathbf{v} \cdot \mathbf{D}'].$$

Seega saame seose

$$\mathbf{H}'' = \mathbf{H}' - [\mathbf{v} \cdot \mathbf{D}'].$$

See seos on õige samade mõõndustega, mida tehti vektorite  $\mathbf{E}''$  ja  $\mathbf{E}'$  vahelise seose vaatlemisel.

Kõik öeldu kinnitab veel kord seda tähtsat väidet, et füüsikaliselt võime rääkida ainult ühtsest, vaatlustingimustest sõltumata

eksisteerivast elektromagnetilisest väljast. Elektromagnetilise välja komponentideks jagamine on aga suhteline.

Edaspidi vaatleme elektromagnetilist välja liikumatutes keskkondades ja nimelt liikumatutes juhtides. Vastavalt viime kõiki-desse võrranditesse sisse osatuletised aja järgi.

### § 3. Maxwelli võrrandid diferentsiaalkujul

Elektromagnetilise välja uurimisel on vaja määrata kõik välja iseloomustavad suurused ruumi igas punktis. Seepärast ei saa me rahulduda võrrandite integraalkujuga, vaid peame need esitama diferentsiaalkujul.

Väljendame diferentsiaalkujul Maxwelli esimese võrrandi. Selle võrrandi kohaselt võib magnetvälja tugevuse joonintegraali mööda kinnist kontuuri vaadelda selle kontuuriga piiratud pinda  $s$  läbiva elektrivoolu määrana. Kuid selle integraali suuruse järgi ei saa otsustada voolu jaotumise üle pinnal  $s$ . Selle küsimuse lahendamiseks on vaja kasutada sama võrrandit diferentsiaalkujul. Oletame, et me soovime välja selgitada, kas vool läbib väikest pinda  $\Delta s$ , millel asub punkt  $A$ , ja missugune on voolutihedus selles punktis (joon. 1). Pinda  $\Delta s$  piiravat väikest kontuuri mööda võetud magnetvälja tugevuse joonintegraal on võrdne seda pinda läbiva vooluga:  $\oint \mathbf{H} \, dl = \Delta i$ . See joonintegraal võib olla voolu  $\Delta i$  mõõduks. Suurus  $\Delta i$  sõltub pinna  $\Delta s$  mõõtmetest. Et saada täielikult määratud suurus, jagame võrduse parema ja vasaku poole  $\Delta s$ -ga ja leiame piirväärtuse, milleni jõuab suhe, kui  $\Delta s$  läheneb nullile, tõmbudes kokku punktis  $A$ . Saame:

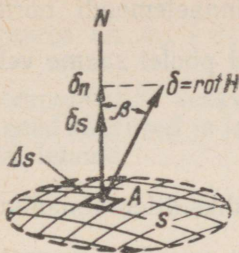
$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{H} \, dl}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta i}{\Delta s}.$$

Võrduse paremal poolel olev suurus kujutab endast voolutiheduse vektori pinna  $s$  normaali suunalist komponenti punktis  $A$ :

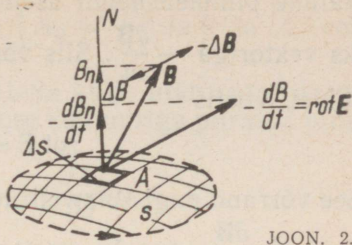
$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta i}{\Delta s} = \delta \cos \beta = \delta_n.$$

Võrduse vasakul poolel olev suurus, nagu teada matemaatikakursusest, kujutab endast vektori  $\mathbf{H}$  pööriseks ehk *rootoriks* nimeatava vektori projektsiooni pinna  $s$  normaalile punktis  $A$ . Vektori  $\mathbf{H}$  rootor tähistatakse  $\text{rot } \mathbf{H}$ . Vastavalt tähistame tema projektsiooni:

$$\text{rot}_n \mathbf{H} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{H} \, dl}{\Delta s}.$$



JOON. 1.



JOON. 2.

Järelikult

$$\text{rot}_n \mathbf{H} = \delta_n.$$

Kui pinnaelement paigutada nii, et ta positiivne normaal ühtib voolutiheduse vektori suunaga, siis suhte  $\frac{\Delta i}{\Delta s}$  piirväärtus saavutab suurima väärtuse, mis on võrdne voolutihedusega punktis  $A$ . Seejuures seome positiivse normaali suuna kontuuri mööda liikumise suunaga parema käe kruvi juhise abil. Pinnaelemendi niisuguse paiknemise korral seisab vektorkujus kirjutatud võrduse paremal poolel voolutiheduse vektor, vasakul aga vektor  $\text{rot } \mathbf{H}$ . Seega on Maxwelli esimene võrrand diferentsiaalkujul järgmine:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \delta.$$

Kirjutame nüüd Maxwelli teise võrrandi diferentsiaalkujul. Seejuures, vaadeldes välja liikumatutes keskkondades, asendame täisuletise aja järgi osatuletisega. Moodustame elektrivälja tugevuse joonintegraali väikest pinda  $\Delta s$  piiravat väikest kontuuri mööda (joon. 2). Jagame joonintegraali selle pinna suurusega ja leiame piirväärtuse, millele läheneb saadud suhe, kui pind  $\Delta s$  läheneb nullile, tõmbudes kokku välja mingis punktis  $A$ . Seejuures saame vektori  $\mathbf{E}$  rootori projektsiooni valitud pinnaelemendi normaali suunale punktis  $A$ :

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{E} \, dl}{\Delta s} = \text{rot}_n \mathbf{E}.$$

Maxwelli teise võrrandi parempoolses osas peame pinda  $\Delta s$  läbiva voo  $\Delta \Phi$  jagama pinnaga  $\Delta s$  ja leidma piirväärtuse, millele läheneb see suhe, kui  $\Delta s \rightarrow 0$ . Seejuures saame valitud pinnaelemendiga risti oleva magnetilise induktsiooni vektori  $\mathbf{B}$  komponendi punktis  $A$ :

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta s} = \frac{d\Phi}{ds} = B_n.$$

Seega saame:

$$\text{rot}_n \mathbf{E} = - \frac{\partial B_n}{\partial t}.$$

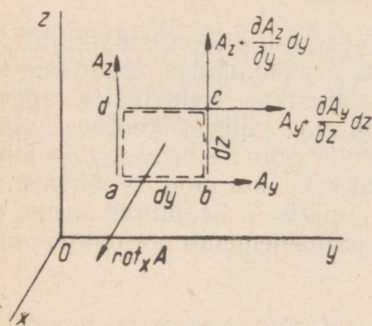
Valime pinnaelemendi asendi nii, et pinnaelemendi normaal ühtiks vektoriga  $-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ . Siis võrduse vasakul poolel saame vektori  $\mathbf{E}$  rootori. Niisiis

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

See võrrand ongi Maxwelli teiseks võrrandiks diferentsiaal kujul.

Vektori  $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$  suunaks on see suund, kuhu suundub magnetilise induktsiooni vektori juurdekasv  $\Delta \mathbf{B}$  ajavahemiku  $\Delta t$  jooksul, kui  $\Delta t \rightarrow 0$ . Kui vektor  $\mathbf{B}$  ei muutu üksnes suuruselt, vaid ka suunalt, ei ole tuletis  $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$  suunatud vektoriga  $\mathbf{B}$  sama sirget mööda.

Ülalesitatud vektorkujul üleskirjutatud Maxwelli võrrandid on invariantseid koordinaatsüsteemi suhtes. Tõepoolest,  $\text{rot } \mathbf{H}$  ja  $\text{rot } \mathbf{E}$  määratakse täielikult voolutiheduse vektoriga ja aja järgi võetud tuletisega magnetilise induktsiooni vektorist antud punktis, mis loomulikult ei sõltu koordinaatsüsteemi valikust. Selles ongi Maxwelli võrrandite niisugusel kujul üleskirjutamise väärtus. Seevastu mingi vektori  $\mathbf{A}$  rootori komponentide avaldised sellesama vektori  $\mathbf{A}$  komponentide kaudu saadakse eri koordinaatsüsteemides erinevad.



JOON. 3.

Väljendame vektori  $\text{rot } \mathbf{A}$  komponendid ristkoordinaatides. Vaatleme lõpmata väikest ristkülikulist kontuuri  $abcd$  (joon. 3) tasandi  $YOZ$  suhtes rööptasandil ja moodustame korrutiste  $A dl$  summa mööda kontuuri kõiki külgi. Saame:

$$\begin{aligned} &+ A_y dy \text{ mööda külge } ab; \\ &+ \left( A_z + \frac{\partial A_z}{\partial y} dy \right) dz \text{ mööda külge } bc; \\ &- \left( A_y + \frac{\partial A_y}{\partial z} dz \right) dy \text{ mööda külge } cd; \\ &- A_z dz \text{ mööda külge } da. \end{aligned}$$

Seejuures on  $A_y$ ,  $\left(A_z + \frac{\partial A_z}{\partial y} dy\right)$ ,  $\left(A_y + \frac{\partial A_y}{\partial z} dz\right)$  ja  $A_z$  vektori

$\mathbf{A}$  komponentide keskväärtused vastava külje ulatuses. Summeerides need suurused ja jagades tulemuse kontuuriga piiratud pinnaga  $dydz$ , leiame:

$$\text{rot}_x \mathbf{A} = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}.$$

Määrates analoogiliselt teised komponendid, saame:

$$\text{rot}_x \mathbf{A} = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}; \quad \text{rot}_y \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x};$$

$$\text{rot}_z \mathbf{A} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

Viimased kaks avaldist saadakse kergesti esimesest tähtede  $x$ ,  $y$ ,  $z$  tsüklilise ümberpaigutamisega.

Seega omandavad Maxwelli võrrandid ristkoordinaatides kuju:

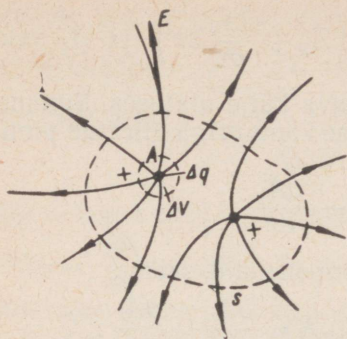
$$\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= \delta_x; & \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= \delta_y; \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= \delta_z; & \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -\frac{\partial B_x}{\partial t}; \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -\frac{\partial B_y}{\partial t}; & \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -\frac{\partial B_z}{\partial t}. \end{aligned}$$

#### § 4. Gaussi teoreem ja Maxwelli postulaat diferentsiaalkujul

Gaussi teoreem elektriväljale rakendatuna kõlab järgmiselt: elektrivälja tugevuse vektori voog läbi kinnise pinna on homogeeneses ning isotroopses keskkonnas võrdne kinnise pinna sees asuva laengu ja keskkonna absoluutse dielektrilise läbitavuse jagatisega, s. t.

$$\oint_s \mathbf{E} \, ds = \frac{q}{\epsilon_a}.$$

Seega võib elektrivälja tugevuse pindintegraali, mis on võetud üle mingi kinnise pinna  $s$  (joon. 4), vaadelda kui sellesse pinda suletud elektrilaengu mõõtu. Kuid ometi ei saa veel selle integraali suuruse järgi otsustada elektrilaengu jaotumise üle kinnise pinnaga suletud ruumis. Selle küsimuse lahendamiseks on vaja tingimata rakendada Gaussi teoreemi diferentsiaalkujul. Oletame, et me soovime selgitada, kas elektrilaeng asub väikeses ruumis  $\Delta V$ , mis sisaldab endas punkti  $A$ , ja missugune on elektrilaengu ruumtihedus selles punktis.



JOON. 4.

Vektori  $\mathbf{E}$  voog läbi ruumi  $\Delta V$  piirava pinna on võrdne sellesse pinda suletud laengu  $\Delta q$  ja suuruse  $\epsilon_a$  jagatisega:

$$\oint_s \mathbf{E} \, ds = \frac{\Delta q}{\epsilon_a}.$$

Jagame võrrandi mõlemad pooled  $\Delta V$ -ga ja leiame piirväärtuse, millele läheneb suhe, kui  $\Delta V \rightarrow 0$ . Saame:

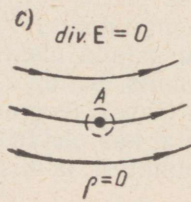
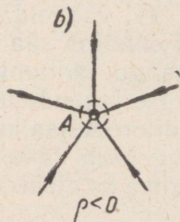
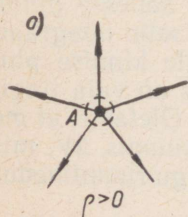
$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{E} \, ds}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\epsilon_a \Delta V}.$$

Võrrandi vasakul poolel seisvat avaldist nimetatakse vektori  $\mathbf{E}$  hajumuseks ehk *divergentsiks* ja tähistatakse lühidalt  $\text{div } \mathbf{E}$ . Parempoolses osas saame elektrilaengu ruumtiheduse  $\rho$  ruumi antud punktis jagatuna suurusega  $\epsilon_a$ . Seega avaldub Gaussi teoreem diferentsiaal kujul järgmiselt:

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon}.$$

Termin «hajumus» iseloomustab hästi välja omadusi nii nendes kohtades, kus  $\rho \neq 0$  kui ka kohtades, kus  $\rho = 0$ . Positiivset laengut saab vaadelda elektrivälja tugevuse joonte «allikana» — need jooned algavad laengu juurest. Negatiivne laeng on nagu joonte kokkuvoolu kohaks (negatiivseks allikaks) — tema juures jooned lõpevad. Seepärast, kui mingis ruumis  $\Delta V$  elektrilaengu

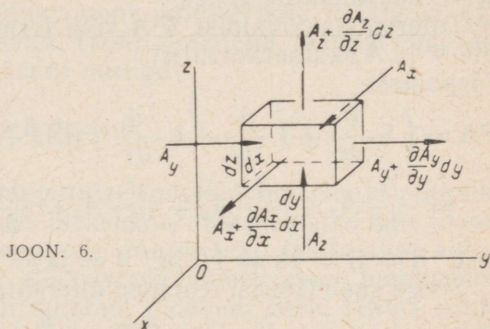
$\text{div } \mathbf{E} \neq 0$



JOON. 5.

ruumtihedus ei võrdu nulliga, *hajuvad* elektrivälja jõujooned läbi seda ruumi piirava pinna ümbritsevasse ruumi või koonduvad ümbritsevast ruumist (joon. 5, *a* ja *b*). Lühidalt saab seda väljendada sõnadega: vektori  $\mathbf{E}$  hajumus ehk divergents ei võrdu nulliga. Välja piirkonnas, kus puuduvad ruumlaengud ( $\rho = 0$ ), välja jõujooned ei alga ega lõpe; niisuguse ruumi mistahes elementi välja jõujooned ainult läbivad (joon. 5, *c*), kuid ei haju sellest ega koondu selsesse. Me ütleme, et vektori  $\mathbf{E}$  hajumus ehk divergents niisuguse piirkonna kõikides punktides on võrdne nulliga:  $\text{div } \mathbf{E} = 0$ . Piirkonnas, kus  $\text{div } \mathbf{E} \neq 0$ , nimetatakse välja *solenoidaalseks*, mis tuleneb kreeka-keelsest sõnast  $\sigma\omega\lambda\eta\rho\iota\delta\eta'\xi$  — torukujuline.

Vektori divergentsi väärtus ei sõltu koordinaatsüsteemi valikust ja järelikult on viimane võrrand invariantne koordinaatsüsteemi suhtes. Seevastu mingi vektori  $\mathbf{A}$  divergentsi avaldised selle vektori komponentide kaudu saadakse eri koordinaatsüsteemides erinevad.



Avaldame  $\text{div } \mathbf{A}$  ristkoordinaatides. Kujutleme lõpmata väikest risttahukat külgedega  $dx$ ,  $dy$  ja  $dz$ , mis on rööbiti koordinaattelgedega (joon. 6). Vektori  $\mathbf{A}$  voog läbi risttahuka pinna moodustub voogudest läbi risttahuka tahkude.

Saame vood:

läbi kaugeima tahu  $-A_x dy dz$ ;

läbi lähima tahu  $+ \left( A_x + \frac{\partial A_x}{\partial x} dx \right) dy dz$ ;

läbi vasakpoolse tahu  $-A_y dx dz$ ;

läbi parempoolse tahu  $+ \left( A_y + \frac{\partial A_y}{\partial y} dy \right) dx dz$ ;

läbi alumise tahu  $-A_z dx dy$ ;

läbi ülemise tahu  $+ \left( A_z + \frac{\partial A_z}{\partial z} dz \right) dx dy$ .

Seejuures on  $A_x$ ,  $\left( A_x + \frac{\partial A_x}{\partial x} dx \right)$  jne. vastava tahu ulatuses

tahu pinnaga risti olevate vektori  $\mathbf{A}$  komponentide keskvaartused. Summeerides vood üle kõikide pindade ja jagades summa risttahuka mahuga  $dx dy dz$ , leiame:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Vektori divergents tähistatakse mõnikord nii:  $\nabla \mathbf{A}$ , kus  $\nabla$  (loetakse «nabla») kujutab endast sümbolilist diferentsiaalset Hamiltoni vektoroperaatorit. Ristkoordinaatides väljendub see operaator kujul

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z},$$

kus  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  ja  $\mathbf{k}$  on ühikvektorid telgedel  $OX$ ,  $OY$  ja  $OZ$ . Suurusi  $\frac{\partial}{\partial x} = \nabla_x$ ,  $\frac{\partial}{\partial y} = \nabla_y$ ,  $\frac{\partial}{\partial z} = \nabla_z$  peame käsitlema kui  $\nabla$  komponente koordinaattelgedel.

Diferentsiaalavaldist  $\nabla \mathbf{A}$  võib formaalselt vaadelda kui vektorite  $\nabla$  ja  $\mathbf{A}$  skalaarkorrutist.

Tõepoolest:

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{A} &= \left( \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) (\mathbf{i} A_x + \mathbf{j} A_y + \mathbf{k} A_z) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} A_x + \frac{\partial}{\partial y} A_y + \frac{\partial}{\partial z} A_z = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \operatorname{div} \mathbf{A}, \end{aligned}$$

sest  $\mathbf{i} \mathbf{i} = \mathbf{j} \mathbf{j} = \mathbf{k} \mathbf{k} = 1$  ja  $\mathbf{i} \mathbf{j} = \mathbf{j} \mathbf{k} = \mathbf{k} \mathbf{i} = 0$ .

Seega saab Gaussi teoreemi diferentsiaal kujul kirjutada ka kujul

$$\nabla \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Ristkoordinaatides omab Gaussi teoreem kuju:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Mittehomogeense ja anisotroopse keskkonna juhtumil ei ole Gaussi teoreem rakendatav. Sel puhul tuleb kasutada analoogilist, kuid tunduvat üldisema iseloomuga võrrandit elektrinihke vektori  $\mathbf{D}$  jaoks. Nimelt on vastavalt Maxwelli postulaadile elektrinihke vektori voog mistahes keskkonnas läbi mistahes suletud pinna võrdne selle pinnaga piiratud ruumi suletud vaba elektrilaenguga:

$$\oint_s \mathbf{D} \, ds = q.$$

Diferentsiaal kujul avaldub Maxwelli postulaat järgmiselt:

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_s \mathbf{D} \, ds}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V},$$

s. t.

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho,$$

või teises kirjutusviisis

$$\nabla \mathbf{D} = \rho.$$

Ristkoordinaatides kirjutatakse see võrrand kujul

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho.$$

Märgime möödamindes, et avaldist  $\operatorname{rot} \mathbf{A}$  saab kirjutada märgi  $\nabla$  abil vektorkorrutisena  $[\nabla \cdot \mathbf{A}]$ , milles ei ole raske veenduda.

## § 5. Magnetvoo ja elektrivoolu pidevuse printsiipide avaldised diferentsiaal kujul

Fundamentaalselt tähtsust omav magnetvoo pidevuse printsiip kinnitab, et magnetilise induktsiooni joontel pole ei algust ega lõppu — nad on kõikjal pidevad. Teiste sõnadega, magnetvoog läbi mistahes suletud pinna on võrdne nulliga:

$$\oint_s \mathbf{B} \, ds = 0.$$

Looduses ei eksisteeri magnetilise induktsiooni joonte allikaiks olevaid magnetilisi masse, mis oleksid sarnased elektrinihke joonte alguseks olevatele elektrilaengutele. Magnetväli tekitatakse ainult elektrivoolude poolt, ning elektrivoole ümbritsevad magnetilise induktsiooni jooned on alati suletud, pidevad. Selle tähtsa printsiibi matemaatilise formuleeringu diferentsiaal kujuks on avaldis

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0,$$

mis on õige mistahes magnetvälja iga punkti jaoks.

Niisama fundamentaalse tähtsusega on ka elektrivoolu pidevuse printsiip, millele vastavalt voolujooned ei katke kuski, jäädes alati suletuks. Välisnormaali suunas mistahes suletud pinda läbiv koguvool (juhtivus-, konvektsiooni- ja nihkevoolu summa) on võrdne nulliga:

$$\oint_s \delta \, ds = 0.$$

Nagu esimeses osas näidati, evib see ülitähtis väide täiesti üldist iseloomu vaid siis, kui voolude kõrval, mis kujutavad laetud elementaarosakeste liikumist, võetakse vaatluse alla ka elektrilisi nihkevoolu tühjuses. Viimase võrduse diferentsiaal kujuks on avaldis

$$\operatorname{div} \delta = 0,$$

mis samuti nagu avaldis  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$  on õige ruumi kõikides punktides.

Formaalsest küljest on avaldis  $\operatorname{div} \delta = 0$  Maxwelli esimese võrrandi otseseks järelduseks. Tõepoolest,  $\operatorname{div} \delta = \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{H}$ , kuid mistahes vektori  $\mathbf{A}$  rootori divergents on identselt võrdne nulliga. Tõepoolest,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} &= \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{rot}_x \mathbf{A} + \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{rot}_y \mathbf{A} + \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{rot}_z \mathbf{A} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) = 0. \end{aligned}$$

Seepärast elektromagnetilise välja võrrandite täielikus süsteemis, kuhu ühe põhilisena kuulub Maxwelli esimene võrrand, peab magnetvoo ja elektrivoolu pidevuse printsiipe iseloomustavast kahest avaldisest sisalduma ainult esimene.

## § 6. Ostrogradski teoreem. Stokesi teoreem

Teeme kindlaks kaks olulist, väljateoorias suure tähtsusega võrdust, mis kujutavad endast Ostrogradski ja Stokesi teoreeme. Neil võrdustel on puhtgeomeetriline sisu ja nad on õiged suvalise vektori  $\mathbf{A}$  jaoks, kuid algul saame need võrdused meie käsutuses olevate võrrandite alusel elektri- ja magnetvälja tugevuse vektorite jaoks. Seejärel anname neile juba geomeetrilise tõlgenduse.

Olgu laeng  $q$  mingil viisil jaotunud pinnaga  $s$  piiratud ruumis  $V$ . Siis  $q = \int_V \rho \, dV$ . Rakendades Gaussi teoreemi integraalkujul, saame

kirjutada:  $\oint_s \mathbf{E} \, ds = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} \, dV$ . Asendades  $\frac{\rho}{\epsilon_0}$   $\operatorname{div} \mathbf{E}$ -ga vastavalt sellelesamale teoreemile diferentsiaalkujul, saame võrduse

$$\oint_s \mathbf{E} \, ds = \int_V \operatorname{div} \mathbf{E} \, dV.$$

Selle võrduse saab kirjutada mistahes vektori  $\mathbf{A}$  jaoks, mis ise on pidev ja mille esimesed tuletised on pidevad ruumis  $V$  ja pinnal  $s$ , järgmiselt:

$$\oint_s \mathbf{A} \, ds = \int_V \operatorname{div} \mathbf{A} \, dV.$$

See osutubki Ostrogradski teoreemi formuleeringuks ja omab ruumintegraali pindintegraaliks teisendamise puhtgeomeetrilist sisu. Tõepoolest, kujutleme ruumi  $V$  jagatuna ruumielementideks  $dV$ . Vastavalt sellele definitsioonile on suurus  $\operatorname{div} \mathbf{A}$  vektori  $\mathbf{A}$  voog, mis läbib ruumi  $dV$  piiravat pinda, jagatuna ruumalaga  $dV$ . Järelikult on  $\operatorname{div} \mathbf{A} \, dV$  vektori  $\mathbf{A}$  voog läbi ruumi  $dV$  piirava pinna.

Kujutleme kaht teineteisega mingit pinda ds mööda kokkupuutuvat naaberuumi  $dV$ . On ilmne, et kui voog läbi kokkupuutepinna ühe ruumi suhtes osutub sellest väljuvaks, s. t. positiivseks, siis teise suhtes on ta sisenev, s. t. negatiivne. Seepärast integraali  $\int_V \operatorname{div} \mathbf{A} dV$

moodustamisel üle kogu ruumi  $V$  annavad vood läbi kõikide elementaaruumide  $dV$  vaheliste pindade summas nulli. Jäävad ainult vood läbi äärmiste elementaaruumide  $dV$  nende pindade  $ds$ , mis osutuvad kogu ruumi  $V$  piirava pinna  $s$  elementideks. Seega on integraal  $\int_V \operatorname{div} \mathbf{A} dV$  tõepoolest võrdne vektori  $\mathbf{A}$  vooga läbi pinna  $s$ , s. t.

võrdne integraaliga  $\oint_s \mathbf{A} ds$ .

Teeme kindlaks nüüd teise tähtsa võrduse. Läbigu kontuuriga  $l$  piiratud mingit lahtist pinda  $s$  vool  $i$ . Saame, et  $i = \int_s \delta ds$ . Vastavalt Maxwelli esimesele võrrandile integraalkujul saame kirjutada:

$$\oint_l \mathbf{H} dl = \int_s \delta ds.$$

Rakendades sedasama võrrandit diferentsiaal kujul, asendame  $\delta$  rot  $\mathbf{H}$ -ga.

Saame:

$$\oint_l \mathbf{H} dl = \int_s \operatorname{rot} \mathbf{H} ds.$$

Selle võrrandi saab kirjutada mistahes vektori  $\mathbf{A}$  jaoks, mis ise ja mille esimesed tuletised on pidevad pinnal  $s$  ja kontuuril  $l$ , järgmiselt:

$$\oint_l \mathbf{A} dl = \int_s \operatorname{rot} \mathbf{A} ds.$$

See kujutab endast Stokesi teoreemi ja omab pindintegraali joonintegraaliks teisendamise puhtgeomeetrilist sisu. Tõepoolest, kujutleme pinda  $s$  jagatuna elementideks  $ds$ . Vektori rot  $\mathbf{A}$  ristkomponendi suurus on vastavalt definitsioonile elementaarpinda  $ds$  piirava kontuuri kõiki külgi mööda võetud korrutiste  $\mathbf{A} dl$  summa ja pindala  $ds$  jagatis. Järelikult kujutabki rot  $\mathbf{A} ds$  seda summat. Integraali  $\int_s \operatorname{rot} \mathbf{A} ds$  moodustamisel mööda kogu pinda  $s$  korrutised

$\mathbf{A} dl$  naaberelementaarpindade kõikide kokkupuutuvate külgede jaoks vastastikku kompenseeruvad ja jäävad ainult korrutised  $\mathbf{A} dl$  mööda kogu pinda  $s$  piirava kontuuri  $l$  kõiki elemente  $dl$ . See annabki viimase võrduse.

## § 7. Elektromagnetilise välja võrrandite täielik süsteem

Uurides tühjuses liikuvaid laetud elementaarosakesi ja neid ümbritsevat välja, eristame kaht liiki elektrivoole: konveksiooni-voolu ja elektrilist nihkevoolu tühjuses. Liikuvate laetud osakestega hõivatud ruumiosas eksisteerivad konveksioonivoolud, mille tihedus  $\delta_k = \rho v$ . Liikuvaid laetud osakesi ümbritsevas ülejäänud ruumis eksisteerivad elektrilised nihkevoolud tihedusega  $\delta_n = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ , kus  $\mathbf{D}$  — elektrinihe tühjuses.

Üldkujul võib kirjutada, et  $\delta = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \rho v$ , kusjuures ruumi ühtedes punktides on esimene, teistes punktides aga teine liidetav võrdne nulliga.

Elektrivälja vektorid  $\mathbf{D}$  ja  $\mathbf{E}$  ning vastavalt magnetvälja vektorid  $\mathbf{B}$  ja  $\mathbf{H}$  on seotud elektrilise konstandi  $\epsilon_0$  ja magnetilise konstandi  $\mu_0$  kaudu võrdustega

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} \quad \text{ja} \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}.$$

Seega omandab elektromagnetilise välja võrrandite täielik süsteem sel juhtumil kuju:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \delta; & \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; & \delta &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \rho v; \\ \mathbf{D} &= \epsilon_0 \mathbf{E}; & \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{H}; & \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho; & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0. \end{aligned}$$

Kasutades seoseid  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$  ja  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ , saab need võrrandid kirjutada ümber nii, et nad sisaldaksid ainult vektoreid  $\mathbf{E}$  ja  $\mathbf{B}$ . Neid vektoreid tuleb vaadelda elektromagnetilise välja põhivektoritena. Tõepoolest, nagu me nägime I osas, määratakse elektromagnetilises väljas liikuvale laetud osakesele mõjuv jõud just nende vektoritega. Pidades silmas, et  $\epsilon_0$  ja  $\mu_0$  on konstantsed suurused, saame:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \mu_0 \delta; & \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; & \delta &= \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \rho v; \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}; & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0. \end{aligned}$$

Nähtuste mikroskoopilisel vaatlusel osutub äsjatoodud juhtum üldiseks. Seejuures ruumi mingis osas võivad elektrilaengut omavad elementaarosakesed puududa ja elektrivoolud osutada suletuks elektriliste nihkevooludega, mis näiteks esineb väljakiirgunud elektromagnetilises laines.

Elektromagnetiliste protsesside uurimisel aines ei ole harilikult vajadust käsitleda aine keerukat mikrostruktuuri. Tõepoolest, tegelik elektromagnetiline väli aine sees muutub aine koosseisu kuuluvate laetud elementaarosakeste vahelises ruumis punktist punkti

küllalt järsku. Igas punktis välja iseloomustavad suurused osutuvad laetud elementaarosakeste suure kiirusega liikumise tõttu kiiresti muutuvateks ajafunktsioonideks. Kuid neil mittehomogeensustel on mikroskoopiline iseloom ja meil on täielik alus makroskoopiliste protsesside käsitlemisel neid mittehomogeensusi ruumis ja ajas keskmistada. Seejuures osutuvad keskmistatud suurused üldiselt koordinaatide ja aja funktsioonideks, kuid muutuvad tunduvalt aeglasemalt kui tõelised suurused nähtuse mikroskoopilisel käsitlusel.

Kui vabad laetud osakesed asuvad niivõrd hõredas keskkonnas, et nad võivad takistamatult kiirenduda elektrivälja toimel pörkumata või peaaegu pörkumata aine molekulidega, siis tekib niisugusel juhtumil keskmistatud elektrivälja toimel korrastatud konveksioonivool. Selle näiteks võib olla elektrodidevaheline vool suure hõredusega gaasis, kui elektrodidevaheline kaugus on väiksem ioonide ja elektronide vaba teekonna keskmisest pikkusest.

Kui aines liikuvad laetud elementaarosakesed oma teekonnal pörkumiste tagajärjel annavad korduvalt aine aatomitele üle kineetilist energiat, mis saadakse keskmistatud elektriväljas kiirendumisel, siis kujuneb keskmistatud konstantse välja toimel laetud osakeste konstantne keskmine kiirus. Seejuures isotroopse keskkonna keskmist voolutihedust saab väljendada elektrivälja keskmise tugevuse  $E$  ja aine elektrijuhtivust iseloomustava suuruse  $\gamma$  — aine erijuhtivuse — korrutisena. Niisugust voolu nimetame juhtivusvooluks. Näiteks võib tuua voolu metallides, pooljuhtides ja elektrolyütides.

Konveksioonivoolu ja juhtivusvoolu tihedusi  $\delta_k$  ja  $\delta_j$  saab esitada liikuvate osakeste keskmise ruumtiheduse ja nende keskmise kiiruse korrutisena. Kui seejuures võtavad liikumisest osa nii positiivsed kui ka negatiivsed laetud osakesed, saab voolutiheduse väljendada kujul  $\delta = \rho_+ v_+ + \rho_- v_-$ , kus  $\rho_+$  ja  $v_+$  on positiivselt laetud osakeste laengu ruumtihedus ja keskmine kiirus ning  $\rho_-$  ja  $v_-$  samad suurused negatiivselt laetud osakeste kohta.

Juhtivusvoolu korral on meil võimalus esitada homogeense keskkonna voolutihedus samuti kujul

$$\delta_j = \gamma E.$$

Erijuhtivus  $\gamma$  sõltub keskkonna temperatuurist ja üldjuhtumil võib sõltuda ka veel elektrivälja tugevusest.

Kõikidel ülejäänud juhtumel, kui keskkonda ei ole võimalik iseloomustada teataval kindlal viisil temperatuurist ja väljatugevusest sõltuva elektrilise erijuhtivusega, s. t. kui voolutiheduse ja elektrivälja tugevuse vahelist seost ei saa väljendada kujul  $\delta = \gamma E$ , on lepitud kokku nimetada laetud osakeste liikumise nähtust konveksioonivooluks. Niisugusel tingimusel saab ruumi antud punkti ümbruses esineda kas juhtivus- või konveksioonivool, mitte aga need mõlemad vooluliigid üheaegselt.

Igasugune aine elektrivälja toimel polariseerub. Aatomite ja molekulide koosseisu kuuluvad laetud elementaarosakesed nihkuvad: positiivsete laengutega osakesed — välja suunas, negatiivsete laengutega osakesed — vastu välja. Seda protsessi iseloomustasime kvantitatiivselt aine polariseerumusega  $\mathbf{P}$ . Aine summaarne keskmine elektrinihe  $\mathbf{D}$  on võrdne tühjuse keskmise elektrinihke  $\mathbf{D}_0$  ja aine polariseerumuse  $\mathbf{P}$  summaga:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_0 + \mathbf{P} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}.$$

Isotroopse aine puhul kehtib suuruste  $\mathbf{D}$  ja  $\mathbf{E}$  keskmiste väärtuste vahel seos

$$\mathbf{D} = \varepsilon_a \mathbf{E},$$

kus  $\varepsilon_a$  on aine absoluutne dielektriline läbitavus.

Dielektrikus oleva nihkevoolu tiheduse avaldises

$$\delta_n = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\partial (\varepsilon_a \mathbf{E})}{\partial t}$$

mõistame  $\delta_n$ ,  $\mathbf{D}$  ja  $\mathbf{E}$  all samuti vastavate suuruste keskvärtusi.

Aine viimisel välisesse magnetvälja tekivad aines kooskõlastuvad elementaarvoolud. Need elementaarvoolud tekitavad magnetväljad, mis on suunatud diamagnetiliste ainete puhul välisele väljale vastu ning para- ja ferromagnetiliste ainete korral välise välja suunas. Magnetilise induktsiooni keskmise väärtuse võib seejuures esitada summana

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{J},$$

kus  $\mathbf{H}$  on keskmine magnetvälja tugevus ja  $\mathbf{J}$  — aine magneetumus. Seos  $\mathbf{B}$  ja  $\mathbf{H}$  vahel isotroopse aine korral kirjutatakse kujul

$$\mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H},$$

kus  $\mu_a$  on aine absoluutne magnetiline läbitavus.

Käsitledes edaspidi kõikide suuruste näidatud mõttes keskmisi väärtusi, saame mistahes isotroopse aine jaoks järgmise elektromagnetilise välja võrrandite süsteemi:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \delta; \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad \delta = \gamma \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \delta_h;$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_a \mathbf{E}; \quad \mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H}; \quad \text{div } \mathbf{D} = \rho; \quad \text{div } \mathbf{B} = 0.$$

Voolutihedus on terviklikkuse mõttes väljendatud kolme komponendi summana. Seejuures on vaja silmas pidada, et esimene ja kolmas komponent ei saa oma sisu tõttu esineda ruumi ühes ja samas punktis üheaegselt. Kaks esimest komponenti võivad esineda üheaegselt pooljuhtkeskkonnas. Seevastu hästi juhtivate ainete puhul võib alati jätta teise liidetava esimesega võrreldes arvestamata. Dielektrikus võib harilikult jätta arvestamata esimese liidetava, võrreldes teisega.

Konkreetsete ülesannete lahendamisel on vaja tingimata lisada ülaltoodud elektromagnetilise välja võrrandeile piiritingimused pindadel, mis on piiriks erinevate keskkondade vahel — piiriks dielektrikute ja juhtide, kahe erineva  $\epsilon_a$ -ga dielektriku, kahe erineva  $\gamma$ -ga juhtiva keskkonna, kahe erineva  $\mu_a$ -ga keskkonna vahel. Need piiritingimused formuleeritakse vastavates peatükkides. Vahelduvväljade uurimisel peavad üldjuhtumil samuti algtingimused olema ette antud.

Elektromagnetilise välja abil energia ülekande küsimuse lahendamiseks on peale selle vaja kasutada elektromagnetilise välja energia ruumtiheduse avaldist

$$W' = W'_e + W'_m = \frac{ED}{2} + \frac{BH}{2}.$$

## § 8. Elektrostaatiline väli ja alalisvoolude väli elektromagnetilise välja kahe erijuhtumina

Teatavasti ilmneb laetud keha liikumisel tema läheduses nii elektri- kui ka magnetväli, s. t. ilmneb elektromagnetiline väli ja ainult paigalseisva laetud keha erijuhtumil avaldub selle läheduses ainuüksi elektriväli. Juba sellest lihtsast faktist järeldub, et elektrostaatilist välja iseloomustavad võrrandid peavad tulenema erijuhtumina elektromagnetilise välja üldvõrrandest. Ilmselt on see lihtsaim erijuhtum, mis on iseloomulik selle poolest, et voolutihedus on kõikjal võrdne nulliga. Selle erijuhtumi vaatlusele pühendatakse järgmised kaks peatükki.

Teiseks lihtsamaks juhtumiks osutub liikumatute ülijuhtivate vooluringide süsteem, mida mööda kulgeb alalisvool. Niisuguste vooluringide läheduses ilmneb ainult staatiline magnetväli. Elektriväli puudub niisuguses süsteemis tõepoolest täielikult, sest magnetvoog ei muutu ajaliselt ja järelikult ei indutseerita ruumis mingeid elektromotoorjõude; pealegi on juhtmete takistus ja järelikult ka pingelang juhtmetes võrdne nulliga. Liikumatu püsomagnetite magnetväljal on samasugune iseloom nagu väljal liikumatute ülijuhtivate vooluringide läheduses, sest see väli luuakse magneti südamikus energiakaota kulgevate elementaarvoolude poolt. Veidi keerukamaks ja sellega koos väga tähtsaks elektromagnetilise välja erijuhtumiks on liikumatutes juhtmetes kulgevate alalisvoolude väli, kui juhtmed omavad nullist erinevat elektritakistust. Sel juhtumil avaldub juhtmete läheduses ja juhtmete sees nii alalismagnetväli kui ka alaliselektriväli. Nende juhtumite käsitlemisele pühendatakse neljas, viies ja kuues peatükk.

Viimases kahes peatükis vaadeldakse ajaliselt muutuva elektromagnetilise välja üldjuhtumit.

## TEINE PEATÜKK

### ELEKTROSTAATILINE VÄLI

#### § 9. Elektrostaatilise välja pöörisevaba olemus. Elektripotentsiaali gradient

Käesoleva peatüki põhiülesandeks on elektrostaatilise välja, s. t. vaatleja suhtes liikumatute laetud kehade süsteemi elektrivälja vaatlemine elektrivoolude puudumisel. Kui süsteemis puuduvad magneeditud kehad, siis magnetväli puudub. Järelikult kõikjal

$$\delta = 0; \quad \mathbf{B} = 0; \quad \mathbf{H} = 0.$$

Elektriväljas vabade, ruumis jaotatud laengute olemasolu võiks põhjustada elektrivoolu tekke, seepärast eeldus, et  $\delta = 0$ , viib järeldusele, et kõikjal  $\rho = 0$ . Võivad esineda ainult laengud, mis on jaotunud laetud kehade pindadel.

Elektromagnetilise välja võrrandite süsteemist jääb järele järgmine kogum:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0; \quad \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}; \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 0.$$

Tingimus  $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$  tõendab, et *elektrostaatiline väli on olemuselt pööristeta*. Seda tingimust rahuldavat välja nimetatakse *pöörisevabaks*. Vastavalt Stokesi teoreemile saame mistahes kinnise kontuuri jaoks:

$$\oint_l \mathbf{E} \, d\mathbf{l} = \int_s \operatorname{rot} \mathbf{E} \, d\mathbf{s} = 0.$$

Seega tingimus  $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$  väljendab diferentsiaalkujul varem väljendatud tähtsat väidet: elektrostaatilises väljas on vektori  $\mathbf{E}$  joonintegraal mööda mistahes kinnist kontuuri võrdne nulliga. Sellele vastavalt ei sõltu elektrostaatilises väljas punktist  $A$  punktini  $B$  võetud vektori  $\mathbf{E}$  joonintegraal integreerimisteedkonnast, vaid on määratud antud väljas täielikult punktide  $A$  ja  $B$  asukohaga. See

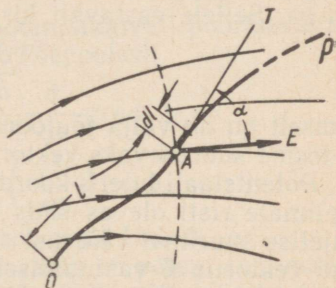
asjaolu andis meile võimaluse tarvitusele võtta elektrostaatilise välja potentsiaali mõiste. Punkti  $A$  elektrostaatilise välja potentsiaali defineerisime punktist  $A$  mingi etteantud punktini  $P$  võetud vektori  $E$  joonintegraalina, s. o.

$$U_A = \int_A^P \mathbf{E} \, dl.$$

Punkti  $P$  potentsiaal on võrdne nulliga. Vektori  $E$  joonintegraal mööda mingit teekonda punktist  $A$  punktini  $B$  on punktide  $A$  ja  $B$  elektripotentsiaalide vahe:

$$\int_A^B \mathbf{E} \, dl = U_A - U_B.$$

Määrame kindlaks seose elektrivälja tugevuse ja potentsiaali muutumise vahel ruumis. Oletame, et punkti  $A$  asendit, milles me vaatleme potentsiaali  $U$ , määratakse punkti kaugusega  $l$  algpunk-



JOON. 7.

tist  $O$  mööda mingit, punkti  $P$  minevat teekonda (joon. 7), kusjuures punkti  $P$  potentsiaal on võetud võrdseks nulliga. Potentsiaali avaldise saab seejuures kirjutada kujul:

$$U = \int_l^{l_p} \mathbf{E} \, dl = \int_l^{l_p} E \cos \alpha \, dl,$$

kusjuures  $l_p$  on kogu teekonna pikkus punktist  $O$  punktini  $P$ ,  $\alpha$  — nurk vektori  $E$  suuna ja teekonna puutuja vahel.

Võtnud osatuletise võrduse mõlemast poolest alumise raja järgi, saame:

$$\frac{\partial U}{\partial l} = -E \cos \alpha,$$

mildest järeldub, et mingis suunas ümberpaigutuse pikkusühiku kohta tulev potentsiaali juurdekasv on arvuliselt võrdne väljatugevuse vastupidise märgiga võetud komponendiga selles suunas.

Näiteks ristkoordinaatide puhul

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -E_x; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -E_y; \quad \frac{\partial U}{\partial z} = -E_z.$$

Kui ümberpaigutuse  $dl$  suund moodustab täisnurga ( $\alpha = \frac{\pi}{2}$ )

vektoriga  $\mathbf{E}$ , siis  $\cos \alpha = 0$  ja  $\frac{\partial U}{\partial l} = 0$ . Järelikult liikumisel väljatugevuse joonte suunale ristsuunas on meil  $U = \text{const}$ , s. t. jääme samapotentsiaalipinnale. Väljatugevusjooned ehk jõujooned on samapotentsiaalipindadega risti. Võrrand  $U(x, y, z) = \text{const}$  määrab samapotentsiaalipinnal asuvate punktide kogumi, s. t. osutub selle pinna võrrandiks. Samapotentsiaalipindade jälgjooni joonise tasapinnal nimetatakse samapotentsiaalijoonteks. Samapotentsiaalijooned lõikuvad väljatugevusjoontega kõikjal täisnurgi.

Ühitades ümberpaigutuse  $dl$  suuna vektori  $\mathbf{E}$  suunaga, saame:

$$\alpha = 0; \quad \cos \alpha = 1; \quad \frac{\partial U}{\partial l} = -E.$$

See iseloomulik suund ühtib samapotentsiaalipinna normaaliga. Seepärast lepime kokku tähistada sellesuunalist ümberpaigutust  $dl$   $dn$ -ga. Sellele vastavalt kirjutame:

$$\frac{\partial U}{\partial n} = -E.$$

Ilmselt on  $dn$  välja jõujoone pikkuselement, kusjuures koordinaati  $n$  loeme suurenevaks vektori  $\mathbf{E}$  suunas.

Potentsiaali tuletis koordinaadi järgi on suurim samapotentsiaalipinnale risti olevas sihis vektorile  $\mathbf{E}$  vastupidises suunas. Seda tuletise suurimat väärtust saab kujutada vektorina, mis on suunatud vektorile  $\mathbf{E}$  vastupidiselt. See vektor kannab nimetust *elektripotentsiaali gradient* ja tähistatakse sümboliga  $\text{grad } U$ .

Potentsiaali gradient on võrdne pikkusühiku kohta tuleva potentsiaali juurdekasvuga, mis on võetud suunas, milles see juurdekasv on suurim:

$$|\text{grad } U| = \left| \frac{\partial U}{\partial n} \right|.$$

Vektorid  $\mathbf{E}$  ja  $\text{grad } U$  on omavahel suuruselt võrdsed ning on suunalt vastupidised:

$$\text{grad } U = -\mathbf{E}.$$

Elektripotentsiaali gradiendi komponendid ristkoordinaatide telgedel on  $\frac{\partial U}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial U}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial U}{\partial z}$ .

Järelikult

$$\text{grad } U = \mathbf{i} \frac{\partial U}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial U}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Potentsiaali gradienti saab tähistada sümboloperaatori  $\nabla$  (märk «nabla») abil kujul  $\nabla U$ . Seejuures võib  $\nabla U$  formaalselt

käsitleda kui sümbolvektori  $\nabla$  ja skaalari  $U$  korrutist. Ristkoordinaatides saame:

$$\begin{aligned}\nabla U &= \left( \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) U = \\ &= \mathbf{i} \frac{\partial U}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial U}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial U}{\partial z} = \text{grad } U.\end{aligned}$$

Järelikult saab võrdust  $\mathbf{E} = -\text{grad } U$  kirjutada kujul  $\mathbf{E} = -\nabla U$ . Miinusemärk selles võrduses näitab, et potentsiaal väheneb väljatugevuse joonte suunas. See tuleneb potentsiaali kui elekt-rivälja tugevuse joonintegraali määrangust, mis on võetud vaadel-davast punktist  $A$  kuni etteantud punkti  $P$ , milles  $U = 0$ . Nii-sugune definitsioon on otstarbekas, sest sel puhul on positiivselt laetud keha potentsiaal samuti positiivne tingimusel, et lõpmata kaugete punktide potentsiaal võetakse võrdseks nulliga.

Kõik öeldu tõestab, et igasugune pöörisevaba väli ongi potent-siaalväli, s. o. niisugune, mida saab iseloomustada potentsiaalfunkt-siooniga  $U(x, y, z)$ .

Teisest küljest osutub igasugune potentsiaalväli pöörisevabaks. See tuleneb samasusest  $\text{rot grad } U = 0$ . Tõepoolest,

$$\begin{aligned}\text{rot}_x \text{grad } U &= \frac{\partial}{\partial y} \text{grad}_z U - \frac{\partial}{\partial z} \text{grad}_y U = \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right) = 0.\end{aligned}$$

Analoogiliselt  $\text{rot}_y \text{grad } U = 0$  ja  $\text{rot}_z \text{grad } U = 0$ .

Toonitame veel kord, et antud välja jaoks on potentsiaal määrat- tud täpsusega kuni suvalise konstandini, mis sõltub tolle punkti valikust, kus  $U$  võetakse võrdseks nulliga.

## § 10. Potentsiaali ja väljatugevuse vähenemine suurel kaugusel laetud kehade süsteemist

Sageli on oluline teada, kuidas muutub potentsiaal laetud kehade süsteemist väga suurele kaugusele eemaldumisel.

Lihtsaimad juhtumid leidsid käsitlemist esimeses osas. Nii on üksildase punktlaengu  $q$  väljatugevus ja potentsiaal homogeenses ja isotroopses keskkonnas laengust kaugusel  $r$  vastavalt

$$E = \frac{1}{\epsilon_a} \frac{q}{4\pi r^2}; \quad U = \frac{1}{\epsilon_a} \frac{q}{4\pi r},$$

kusjuures nulliga võetakse võrdseks lõpmata kaugete punktide potentsiaal:

Ruumi lõplikus osas paiknevat mistahes laetud kehade süsteemi, mille summaarne laeng erineb nullist, saab väga suurel kaugusel (võrreldes selle ruumiosa mõõtmetega) vaadelda punktlaenguna.

Seepärast niisuguse väga suure kauguse puhul on viimatitoodud valemid õiged täpsusega kuni kõrgemat järku väikeste liikmeteni. Seejuures on  $q$  süsteemi summaarne laeng. Järelikult ruumi lõplikus osas paiknevat ja nullist erinevat summaarset laengut omava mistahes laetud kehade süsteemi potentsiaal läheneb nullile nagu avaldis  $1/r$  ja väljatugevus nagu  $1/r^2$ .

Kui süsteemi moodustavate kõikide kehade laengute summa on võrdne nulliga, väheneb potentsiaal lõpmatuses veelgi kiiremini. Niisugust süsteemi saab rühmitada dipoolideks, sest igale positiivsele laengule  $dq_1$  võib valida süsteemis sellele suuruselt võrdse negatiivse  $dq_2$ . Dipooli potentsiaal suurel kaugusel  $r$  dipoolist, nagu saadi esimeses osas, väljendub valemiga

$$U = \frac{qd \cos \varphi}{4\pi\epsilon_a r^2} = \frac{p \cos \varphi}{4\pi\epsilon_a r^2},$$

kus  $p = qd$  on dipooli elektriline moment,  $\varphi$  — nurk raadiusvektori  $r$  ja dipooli telje vahel, mille positiivse suuna võtame negatiivselt laengut positiivsele (joon. 8).

Märgime, et potentsiaal ei ole võrdne nulliga mitte ainult lõpmatuses, vaid dipooli teljega risti oleva ja selle keskpunkti läbiva tasandi kõikides punktides, sest sellel tasandil  $\cos \varphi = 0$ .

Väljatugevuse komponendid  $E_r$  ja  $E_\varphi$ , s. o. komponendid mööda raadiust  $r$  ja mööda puutujat ringjoonele raadiusega  $r$  dipooli telge läbival tasandil, osutuvad järgmisteks:

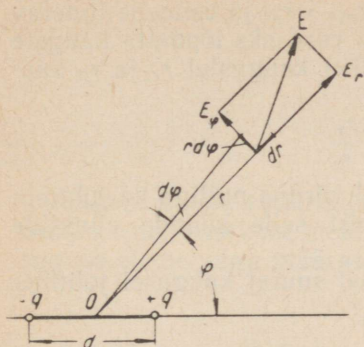
$$E_r = -\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{2p \cos \varphi}{4\pi\epsilon_a r^3}; \quad E_\varphi = -\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} = \frac{p \sin \varphi}{4\pi\epsilon_a r^3}.$$

Seega

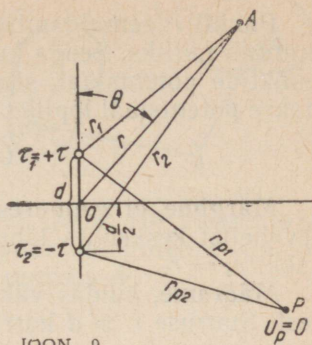
$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\varphi^2} = \frac{p}{4\pi\epsilon_a r^3} \sqrt{3 \cos^2 \varphi + 1}.$$

Niisi väheneb dipooli potentsiaal suurtel kaugustel dipoolist nagu  $1/r^2$ , väljatugevus aga nagu  $1/r^3$ . Seepärast lõplikus ruumis osas asuva ja nulliga võrdset summaarset laengut omava mistahes laetud kehade kogumi potentsiaal ei vähene lõpmatuses aeglasemalt kui  $1/r^2$ , väljatugevus aga mitte aeglasemalt kui  $1/r^3$ . Kui üksikute dipoolide (milledeks saab laengute süsteemi rühmitada) teljed on orienteeritud vastupidistes suundades ja järelikult nende dipoolide väljad nõrgendavad teineteist, on võimalik ka potentsiaali kiirem vähenemine.

Kõikides toodud ülesannetes võeti lõpmata kaugete punktide potentsiaal võrdseks nulliga. Seda ei ole võimalik teha lõpmata pikkade juhtmete välja vaatlemisel, kui juhtmete summaarne laeng erineb nullist. Kuigi reaalsed juhtmed on alati lõpliku pikkusega, lihtsustatakse väga pikkade paralleelsete sirgete juhtmete välja uurimisel sageli ülesannet, eeldades, et juhtmed on lõpmata pikad. Nagu me edaspidi näeme, lihtsustub ülesanne sellega oluliselt.



JOON. 8.



JOON. 9.

Vaatleme üksildast lõpmata pikka sirget juhet, mis on oma pikkuses ühtlaselt laetud laengu joontihedusega  $\tau$ . Niisuguse juhtme väljatugevus (nagu saadi esimeses osas)

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

Eeldades, et punkt  $P$ , milles  $U = 0$ , on juhtme teljest kaugusel  $r_p$ , saame:

$$U = \int_r^{r_p} \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r} dr = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} (\ln r_p - \ln r).$$

Kui näiteks võtta  $U = 0$   $r_p = 1$  korral, saame:

$$U = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln r.$$

Võtta aga  $r_p = \infty$  ei saa, sest integraal kaotab siis mõtte — potentsiaal muutub kõikjal mistahes lõpliku  $r$  korral lõpmatuks.

Ent kui on olemas mitu paralleeljuhet ja sealjuures nende juhtmete summaarne laeng on võrdne nulliga, s. t.  $\tau = \sum \tau_k = 0$ , mis harilikult esinebki reaalses ülesannetes, saab potentsiaali lõpmatuses võtta võrdseks nulliga isegi siis, kui juhtmeid vaadelda tinglikult lõpmata pikkadena. Vaatleme algul kaht juhet laengutega pikkusühiku kohta  $\tau_1 = \tau$  ja  $\tau_2 = -\tau$ . Joonisel 9 on märgitud juhtmete lõikumispunktid joonise tasandiga. Juhtmed on risti joonise tasandiga. Juhtmetevahelise kauguse tähistame  $d$ -ga. Potentsiaal punktis  $A$

$$\begin{aligned} U &= \frac{\tau_1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_{p1}}{r_1} + \frac{\tau_2}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_{p2}}{r_2} = \\ &= \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_{p1}}{r_{p2}} - \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_1}{r_2}, \end{aligned}$$

kus  $r_1$  ja  $r_2$  on punkti  $A$  kaugused juhtmetest;  $r_{p1}$  ja  $r_{p2}$  — punkti  $P$  kaugused juhtmetest.

Punkti  $P$  eemaldamisel lõpmatusse  $r_{p1} \rightarrow r_{p2}$  ja esimene liidetav muutub nulliks. Seega kui võtta nulliga võrdseks lõpmata kaugete punktide potentsiaal, siis kõikidel lõplikel kaugustel  $r_1$  ja  $r_2$  saadakse potentsiaal lõplik:

$$U = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{r_1}{r_2}.$$

Märgime, et seejuures on potentsiaal võrdne nulliga ka juhtmetevahelist keskkoha läbival tasandil, sest selle kõikide punktide jaoks  $r_1 = r_2$ .

Määrame, kuidas väheneb potentsiaal suurel kaugusel juhtmetest. Suuruse  $r \gg d$  korral saame:

$$\frac{r_1}{r_2} \approx 1 - \frac{d \cos \theta}{r} \approx 1 - \frac{d \cos \theta}{r},$$

kus  $r$  on punkti  $A$  kaugus juhtmete telgi ühendava lõigu keskpunkti,  $\theta$  — nurk raadiuse  $r$  ja selle lõigu vahel. Järelikult  $r \gg d$  korral

$$U = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \left( 1 - \frac{d \cos \theta}{r} \right).$$

Arendades logaritmi ritta  $d \cos \theta / r$  astmete järgi ja jättes arvestamata kõrgemat järku liikmed nende väiksuse tõttu, leiame:

$$U = \frac{\tau d \cos \theta}{2\pi\epsilon_a r}.$$

Väljatugevuse komponendid avalduvad  $r \gg d$  korral järgmiselt:

$$E_r = -\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{\tau d \cos \theta}{2\pi\epsilon_a r^2}; \quad E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\tau d \sin \theta}{2\pi\epsilon_a r^2}$$

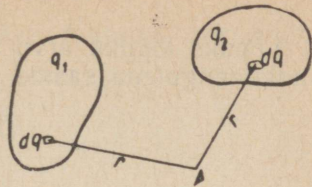
ja järelikult

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \frac{\tau d}{2\pi\epsilon_a r^2}.$$

Seega võrdset, kuid vastupidist märki omavate laengutega lõpmata pikkade juhtmete paari potentsiaal läheneb lõpmatuses nullile nagu  $1/r$  ja väljatugevus nagu  $1/r^2$ . Mistahes lõpmata pikkade paralleelsete teineteisest lõplikul kaugusel asetsevate ja summaarset nulliga võrdset laengut  $\sum \tau_k$  omavate juhtmete süsteemi saab jaotada võrdse ja vastupidise märgiga laengutega juhtmepaarideks. Järelikult niisuguse süsteemi potentsiaal ei vähene aeglasemalt kui  $1/r$ , väljatugevus aga aeglasemalt kui  $1/r^2$ .

## § 11. Potentsiaali määramine laengute etteantud jaotuse järgi

Punktilaengu potentsiaali avaldis võimaldab homogeenise keskkonna puhul anda potentsiaali arvutamise üldmeetodi elektrilaengute etteantud jaotuse korral ruumi lõplikus osas.



Jaganud kõik ruumis jaotunud laengud (joon. 10) elementaarosadeks  $dq$ , vaatleme neid elemente  $dq$  punktlaengutena. Iga niisuguse elemendiga määratav potentsiaal punktis  $A$

$$dU = \frac{1}{\epsilon_a} \frac{dq}{4\pi r}$$

Järelikult ruumis jaotunud laengute kogumiga määratava potentsiaali saab leida valemiga

$$U = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_a r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int \frac{dq}{r}$$

Kui elektrilaeng on jaotunud ruumis  $V$ , kusjuures laengu ruumtihedus ruumi mingis punktis on  $\rho$ , siis tuleb kogu maht tükeldada elementideks  $dV$ . Siis

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int_V \frac{\rho dV}{r}$$

Kui laeng on jaotunud ainult laetud kehade väga õhukestes pinnakihtides, nagu see esineb juhtivast materjalist kehade puhul, siis võib lugeda, et laeng on jaotunud kehade pinnale. Tükeldades laetud pinnad elementideks  $ds$ , saame kirjutada, et  $dq = \sigma ds$ , kus  $\sigma$  on laengu pindtihedus. Siis potentsiaal

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int_s \frac{\sigma ds}{r}$$

kusjuures integraal peab olema võetud mööda kõiki laetud pindu. See asjaolu, et laetud kehade endiga hõivatud ruumalades asub juhtiv keskkond ja järelikult keskkond kogu ruumis ei ole homogeenne, pole käesoleval juhtumil oluline, sest juhtivate kehade sees väli puudub. Me võiksime mõttes kõrvaldada kehade juhtiva aine, asendades selle dielektrikuga, mille läbitavus on  $\epsilon_a$ , ja säilitades kõik kehade pindlaengud. Seejuures jääks väli muutumatuks.

Kui laeng on jaotunud juhtmetele, millede ristlõike diameeter on väike, võrreldes kaugustega juhtmetest välja punktideni, milles määratakse potentsiaal, võib laengu lugeda koondatuks juhtmete telgedele. Kui  $\tau$  on laengu joontihedus, siis  $dq = \tau dl$  ja

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int_l \frac{\tau dl}{r}$$

kusjuures integraal võetakse mööda kõiki laetud juhtmeid.

Lõpuks lõpliku arvu  $n$  laengute korral, mida saab vaadelda punktlaengutena, saame:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{q_k}{r_k}.$$

Märgime veel kord, et käesolevas paragrahvis toodud valemeid saab kasutada potentsiaali arvutamiseks ainult siis, kui laengud on jaotunud ruumi lõplikus osas. Nimelt saab elviimast valemit kasutada, kui juhtmete pikkus on lõplik. Tõepoolest, see valem põhineb punktlaengu potentsiaali avaldisel, mis on saadud eeldusel, et lõpmata kaugete punktide potentsiaal on võrdne nulliga. Kuid, nagu ülal näidati, ei saa lõpmata pikkade juhtmete puhul potentsiaali lõpmatuses nulliga võrdseks võtta, sest siis osutuks kõikidel lõplikel kaugustel potentsiaal lõpmata suureks. Järelikult muutub ka

integraal  $\int \frac{\tau dl}{r}$  lõpmata pikkadele juhtmetele rakendamisel alati lõpmata suureks.

Märgime, et laengute ruum- ja pindjaotuse juhtumil jääb potentsiaal lõplikuks ka neis punktides, kus  $\rho$  või  $\sigma$  ei võrdu nulliga. Laengute joonjaotuse juhtumil aga laetud niitide endi potentsiaal, eeldusel et need on lõpmata peened, saadakse lõpmata suur. Seepärast tuleb niitide punktid vaatlusest välja jätta. Täpselt samuti ka punktlaengute süsteemi korral muutub potentsiaal lõpmata suureks punktides, kuhu laengud on koondatud. Need punktid tuleb samuti vaatlusest välja jätta.

Füüsikaline sisu on ainult laengu ruumjaotusel. Hoolimata sellest on tinglik ettekujutus laengute pind-, joon- või punktjaotusest väga kasulik paljude konkreetsete praktiliste ülesannete lahendamisel.

## § 12. Poissoni ja Laplace'i võrrandid

Paigutades Gaussi teoreemi diferentsiaal kujul väljendavasse võrrandisse

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_a}$$

suuruste  $E_x$ ,  $E_y$  ja  $E_z$  asemele nende avaldisel potentsiaalide kaudu

$$E_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \quad \text{ja} \quad E_z = -\frac{\partial U}{\partial z},$$

saame võrrandi

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_a}.$$

Seda diferentsiaalvõrrandit nimetatakse *Poissoni võrrandiks*. Eelmises paragrahvis toodud integraal

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int_V \frac{\rho dV}{r}$$

osutub Poissoni võrrandi lahendiks juhtumil, kui laengud on jaotunud ruumi lõplikus osas.

Kui ruumi vaadeldavas osas elektrilised ruumlaengud puuduvad, omandab Poissoni võrrand kuju

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

ja teda nimetatakse sel erijuhtumil *Laplace'i võrrandiks*. Seega elektrostaatiline väli rahuldab Laplace'i võrrandit.

Poissoni ja Laplace'i võrrandite vasakud pooled kujutavad endast potentsiaali gradiendi divergentsi ja neid saab kirjutada koordinaatsüsteemi valikust sõltumatul kujul

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} U = -\frac{\rho}{\epsilon_a}; \quad \operatorname{div} \operatorname{grad} U = 0.$$

Sageli kirjutatakse nende võrrandite vasak pool sümboloperaatori abil kujul  $\nabla^2 U$ . Tõepoolest,

$$\nabla^2 = \left( \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

ja järelikult

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

Operaatorit  $\nabla^2$  tähistatakse sageli  $\Delta$  ja nimetatakse Laplace'i operaatoriks või laplassiaaniks. Järelikult saab Poissoni ja Laplace'i võrrandeid kirjutada ka kujul

$$\nabla^2 U = -\frac{\rho}{\epsilon_a} \quad \text{ehk} \quad \Delta U = -\frac{\rho}{\epsilon_a}; \quad \nabla^2 U = 0 \quad \text{ehk} \quad \Delta U = 0.$$

### § 13. Piiritingimused juhtide pinnal

Kuna elektrostaatilise välja juhtumil elektrivoolud puuduvad, siis tuleneb seosest  $\delta = \gamma \mathbf{E}$ , et kõikjal juhi sisemuses ( $\gamma \neq 0$ ) peab olema  $\mathbf{E} = 0$ . Avaldisest  $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} U$  järeldub seejuures, et iga juhi puhul on kõikide tema punktide potentsiaal ühesugune. Juhtide pinnad on elektrilised samapotentsiaalipinnad ja väljatugevusjooned dielektrikus on nendega risti. Tähistame dielektrikus juhi pinna läheduses vektori  $\mathbf{E}$  juhi pinna suhtes normaalse ja tangentsiaalse

komponendi vastavalt  $E_n$  ja  $E_t$ . Välja piiritingimuse dielektrikus juhi pinnal saab kirjutada kujul:  $U = \text{const}$  ehk  $E_t = 0$ ,  $E = E_n = -\frac{\partial U}{\partial n}$ . Seejuures  $D = \epsilon_a E = -\epsilon_a \frac{\partial U}{\partial n} = \sigma$ , kus  $\sigma$  on elektri-laengu tihedus juhi pinnal.

## § 14. Piiritingimused kahe dielektriku eralduspinnal

Vaatleme välja kahe homogeense ja isotroopse, erinevate absoluutsete dielektriliste läbitavustega  $\epsilon_{a1}$  ja  $\epsilon_{a2}$  dielektriku piiril (joon. 11). Moodustagu esimese keskkonna väljatugevusjooned eralduspinna läheduses pinna normaaliga nurga  $\theta_1$ . Määrame teise keskkonna vastava nurga  $\theta_2$ . Moodustades väljatugevuse joonintegraali mööda kontuuri  $abcd$ , saame:

$$\oint_{abcd} \mathbf{E} \, dl = E_1 \sin \theta_1 ab - E_2 \sin \theta_2 cd = 0,$$

kui  $bc$  ja  $ad$  on lõpmata väikesed, võrreldes  $ab$  ja  $cd$ -ga. Kuna  $ab = cd$ , saame:

$$E_1 \sin \theta_1 = E_2 \sin \theta_2,$$

s. t. eralduspinnal on vektori  $\mathbf{E}$  tangentsiaalkomponendid võrdsed.

Kujutleme kinnist pinda, mis moodustub kahest tasasest pinnast  $s_1$  ja  $s_2$ , millede jälgjoonteks on joonise tasandil jooned  $ab$  ja  $cd$ , ning silindrilisest pinnast, mis lõikub joonise tasandiga mööda jooni  $bc$  ja  $ad$ . Nihkevoog läbi selle kinnise pinna võrdub nulliga, sest seespool pinda ei ole vabu elektrilaenguid. Jättes arvestamata voo läbi lõpmata väikese silinderpinna, saame:

$$\int_{s_1} \mathbf{D} \, ds + \int_{s_2} \mathbf{D} \, ds = -D_1 \cos \theta_1 s_1 + D_2 \cos \theta_2 s_2 = 0,$$

millest, võttes arvesse, et  $s_1 = s_2$ , leiame:

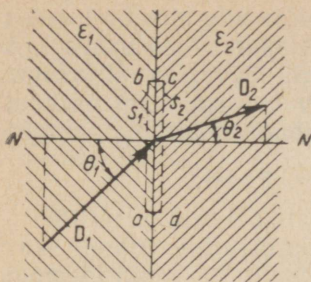
$$D_1 \cos \theta_1 = D_2 \cos \theta_2,$$

s. t. eralduspinnal on vektori  $\mathbf{D}$  normaalkomponendid võrdsed.

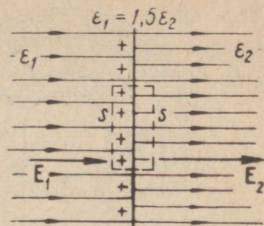
Jagades võrdused  $D_1 \cos \theta_1 = D_2 \cos \theta_2$  ja  $E_1 \sin \theta_1 = E_2 \sin \theta_2$  teineteisega ning arvestades seoseid  $D_1 = \epsilon_{a1} E_1$  ja  $D_2 = \epsilon_{a2} E_2$ , saame väljajoonte murdumistingimuse viimaste kulgemisel ühest keskkonnast teise:

$$\frac{\text{tg } \theta_1}{\text{tg } \theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}.$$

Kui väljatugevusjooned on risti eralduspinnaga (joon. 12), siis nihkevektorid on ühesugused mõlemas keskkonnas:  $\mathbf{D}_1 = \mathbf{D}_2$ , kuid



JOON. 11. JOON. 12.



väljatugevus muudab kokkupuutepinnal hüppeliselt oma suurust, sest

$$E_1 = D_1/\varepsilon_{a1} \neq E_2 = D_2/\varepsilon_{a2}.$$

Olgu  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$  ja vastavalt esimese keskkonna dielektriline vastuvõtlikkus  $\alpha_1$  suurem teise keskkonna dielektrilisest vastuvõtlikkusest  $\alpha_2$ . Siis  $E_1 < E_2$ . Joonisel 12 on kujutatud vektori  $\mathbf{E}$  väli sel juhtumil.

Kahe dielektriku eralduspinna läheduses ulatuvad esimesest keskkonnast välja dipoolide positiivsed laengud ja teisest dipoolide negatiivsed laengud. Kuna  $\alpha_1 > \alpha_2$ , on positiivseid laenguid rohkem kui negatiivseid ning õhukeses kihis eralduspinna läheduses moodustub positiivne seotud laeng. Selle kihi erakordselt väikese pakuse tõttu võib kihi laengut vaadelda kui pindlaengut tihedusega  $\sigma'$ . Rakendades Maxwelli postulaati kinnisele pinnale, mille jäljjoon on kujutatud joonisel 12 kriipsjoonega, saame, et  $D_1 = D_2$ , sest vabu laenguid kahe dielektriku eralduspinnal pole. Järelikult saame:

$$\varepsilon_0 E_1 + P_1 = \varepsilon_2 E_2 + P_2 \quad \text{ehk} \quad \varepsilon_0 (E_2 - E_1) = P_1 - P_2.$$

Teisest küljest, rakendades Gaussi teoreemi kujul  $\oint_s \mathbf{E} \, ds = \frac{q + q'}{\varepsilon_0}$  ja arvestades, et  $q = 0$ , saame:

$$\oint_s \mathbf{E} \, ds = \frac{q'}{\varepsilon_0} \quad \text{ehk} \quad -E_1 s + E_2 s = \frac{q'}{\varepsilon_0},$$

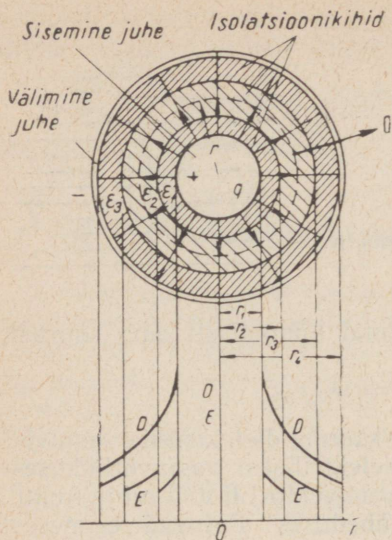
millest

$$\varepsilon_0 (E_2 - E_1) = \frac{q'}{s} = \sigma'.$$

Seega

$$\sigma' = P_1 - P_2.$$

Järelikult tekib dielektrikute erineva polariseerumisvõime tõttu nende eralduspinnal seotud pindlaeng, mis on võrdne vahega selle dielektriku polariseerumisest, millest väljajooned väljuvad, ja dielektriku polariseerumisest, millesse nad sisenevad. Üldjuhtumil, kui väljatugevusjooned moodustavad eralduspinnaga mingi nurga,



JOON. 13.

ei ole raske veenduda, et  $\sigma'$  on võrdne vektorite  $\mathbf{P}_1$  ja  $\mathbf{P}_2$  normaal-komponentide vahega.

Näitena vaatleme kontsentrilist kaablit, millel on mitu erineva dielektrilise läbitavusega isoleerkihti (joon. 13). Kujutleme silinder-pinda raadiusega  $r$  ja pikkusega  $l$ , mille telg ühtib kaabli teljega. Nihkevoog läbi selle pinna on võrdne laenguga  $q = \tau l$ , mis paikneb kaabli sisemise juhtme osal pikkusega  $l$ , s. t.  $\int_s \mathbf{D} ds = q = \tau l$ , kus  $\tau$  on laengu joontihedus.

Kuna kogu pinnal sümmeetria tõttu  $D = \text{const}$  ja vektor  $\mathbf{D}$  on risti pinnaga, siis  $\int_s \mathbf{D} ds = Ds = 2\pi r l D$ .

Seega

$$D = \frac{\tau}{2\pi r}.$$

Väljatugevus isolatsiooni  $k$ -ndas kihis

$$E_k = \frac{D}{\epsilon_{ak}} = \frac{\tau}{2\pi r \epsilon_{ak}}.$$

Iga kihi ulatuses väheneb väljatugevus  $r$  suurenemisel, üleminekul järgmisse kihti aga muutub väljatugevus hüppeliselt seoses  $\epsilon_a$  muutumisega. Seda hüpset saamegi seletada seotud laengute ilmu-misega dielektriku kahe kihi eralduspinnale.

Igas kihis on väljatugevus suurim kihi sisepinnal. See väljatuge-

vus  $E_{km} = \frac{\tau}{2\pi r_k \epsilon_{ak}}$ , kusjuures  $r_k$  on kihi siseraadius. Kaabli projektee-

rimisel on võimalik valida suurused  $r_k \epsilon_k$  kõikide kihtide jaoks nii, et  $E_{km}$  suurused vastaksid väljatugevuse lubatud väärtustele, mis omakorda vastavad kihtide elektrilisele tugevusele. Kui näiteks lubatav maksimaalne väljatugevus  $E_{km}$  on kõikides kihtides ühesugune, siis tuleb püüda täita tingimusi

$$r_1 \epsilon_1 = r_2 \epsilon_2 = \dots = r_k \epsilon_k = \dots = \text{const.}$$

Mitmekihilise isolatsiooni kasutamisega saavutatakse väljatugevuse tunduv ühtlustumine mööda raadiust. Seda illustreerib epüür joonisel 13.

## § 15. Elektrostaatika põhiülesanne

Elektrivälja arvutamise üldiseks ülesandeks on väljatugevuse määramine kõikides välja punktides kehade etteantud laengute või potentsiaalide järgi. Elektrostaatilise välja korral lahendub ülesanne täielikult potentsiaali kui koordinaatide funktsiooni leidmisega. Kui homogeenne ja isotroopse keskkonna puhul on täielikult ette antud elektrilaengute jaotus, siis võib lahenduse saada 11. paragrahvis esitatud meetodiga. Vastupidine ülesanne — laengute jaotuse leidmine potentsiaali etteantud jaotuse järgi — lahendatakse Laplace'i võrrandi ja laetud juhtivate kehade pinna läheduses kehtiva piiri-

tingimuse  $-\epsilon_a \frac{\partial U}{\partial n} = \sigma$  abil. Kuid enamasti on ülesanne tunduvalt keerukam. Harilikult vaadeldakse dielektrikust ümbritsetud laetud juhtivate kehade süsteemi, kusjuures dielektrikus puuduvad ruumlaengud. Ette on antud kas kõikide kehade potentsiaalid:  $U_1, U_2, \dots, U_k, \dots$ , või kehade kogulaengud:  $q_1, q_2, \dots, q_k, \dots$ . Laengute jaotus iga keha pinnal ei ole aga teada ja tuleb leida. Selles seisnebki ülesande põhiline raskus. Samuti on teadmata ka potentsiaali jaotus ruumis. Eriti komplitseerub ülesanne mittehomoogeense ja anisotroopse keskkonna puhul.

Niisuguse ülesande lahendamine lõpliku kujul on analüütiliselt võimalik ainult üksikuil erandjuhtumel. Mõnikord õnnestub lahendus leida kunstlike võtetega. Seoses sellega on erakordselt tähtis kindlaks määrata need hädavajalikud ja piisavad nõuded, millede rahuldamisel on väli üheselt määratud. Need nõuded on järgmised:

1. Väli dielektrikus peab rahuldama võrrandeid

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0; \quad \mathbf{D} = \epsilon_a \mathbf{E}; \quad \text{div } \mathbf{D} = 0.$$

Seejuures võrrand  $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ , nagu näidati 9. paragrahvis, on ekvivalentne võrdusega  $\mathbf{E} = -\text{grad } U$ .

Homogeenne keskkonna korral taanduvad need võrrandid üheks võrrandiks potentsiaali  $U$  kohta:

$$\text{div } (\epsilon_a \mathbf{E}) = \epsilon_a \text{div } \mathbf{E} = -\epsilon_a \text{div grad } U = -\epsilon_a \nabla^2 U = 0,$$

s. t. Laplace'i võrrandiks

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$$

2. Juhtivate kehade pinnad peavad olema samapotentsiaalipindadeks, s. t. iga niisuguse pinna jaoks peab olema täidetud tingimus  $U = \text{const}$ . Seesama potentsiaal on muidugi ka kogu keha mahus.

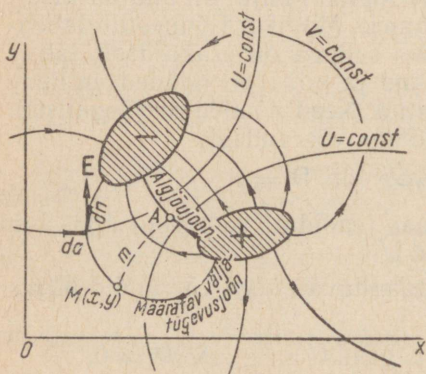
3. Kehade pindade potentsiaalid peavad olema võrdsed etteantud väärtustega  $U_k$ , kui ülesande tingimuste kohaselt on need potentsiaalid teada. Kui aga ette on antud kehade kogulaengud, siis peab iga keha jaoks olema rahuldatud tingimus

$$q_k = \int_{s_k} \sigma ds = - \int_{s_k} \epsilon_a \frac{\partial U}{\partial n} ds.$$

Võib näidata, et nende nõuete täitmine ei ole ülesande üheseks lahendamiseks mitte ainult vajalik, vaid ka küllaldane. Seda tähtsat väidet nimetatakse sageli ühesuse teoreemiks.

## § 16. Tasaparalleelne väli

Arvutusülesanne lihtsustub tunduvalt, kui kõik välja iseloomustavad suurused sõltuvad ainult kahest koordinaadist. Niisugust tingimust rahuldab mitme lõpmata pika üksteisega rööpse silindrilise juhtme väli, kui laengud on jaotunud juhtme pikkusel ühtlaselt. Dielektriku eeldame olevat homogeense. Suuname  $OZ$ -telje rööbiti juhtmete telgedega. Siis kõik väljatugevusjooned asetsevad  $XOY$ -tasandile rööpsetel tasanditel. Väljapilt on kõikidel neil tasandil ühesugune ning küllaldane on uurida välja ainult  $XOY$ -tasandil. Niisugust välja nimetame *tasaparalleelseks*. Joonisel 14 on kujutatud kahe juhtme ristlõiked ja väljapilt nende ümber. Tasaparalleelse välja potentsiaal on ainult kahe koordinaadi  $x$  ja  $y$  funktsioon. Sama-



JOON. 14.

potentsiaalipindadeks on silinderpinnad, millele moodustajad on  $OZ$ -teljega rööbiti. Samapotentsiaalijooned  $XOY$ -tasandil on määratud võrranditega kujul

$$U(x, y) = \text{const.}$$

Lepime kokku kanda joonisele samapotentsiaalijooni niisuguste vahemike tagant, et üleminekul mistahes joonelt naaberjoonele saaksime alati ühesuguse potentsiaali juurdekasvu  $\Delta U$ .

Väljatugevusjoone ehk jõujoone võrrandi võib saada järgnevate kaalutluste alusel. Vaadeldagu mingit väljatugevusjoont algjõujoonena (joon. 14). Ühendame suvalise punkti  $M(x, y)$  aljoone mingi punktiga  $A$  kõverjoonelise lõigu  $MmA$  abil. Tähistame  $\Psi_E$ -ga vektori  $\mathbf{E}$  voo läbi pinna, mille moodustaks lõik  $MmA$ , nihkudes iseendaga rööbiti  $OZ$ -telje suunas ning läbides teekonna  $l$ . Lepime kokku vaadelda voogu juhtmete pikkusühiku kohta ja toome sisse tähise

$$V = \frac{\Psi_E}{l}.$$

Suurus  $V$  sõltub samuti nagu voo  $\Psi_E$  suurus punkti  $M$  asendist, s. t. on punkti koordinaatide funktsiooniks, mille me kirjutame üles kujul  $V(x, y)$ . On selge, et ühel ja samal väljatugevusjoonel asuvate kõikide punktide  $M(x, y)$  jaoks on funktsioon  $V(x, y)$  ühesuguse väärtusega. Seepärast niisuguste punktide kogumit defineeriv võrrand

$$V(x, y) = \text{const}$$

ongi selle väljatugevusjoone võrrandiks. Funktsiooni  $V(x, y)$  nimetatakse *voofunktsiooniks*.

Funktsioon  $V(x, y)$  on mitmene, sest kui liikuda mööda mingit kinnist kontuuri ümber ükskõik millise laetud juhtme ristlõike, siis  $V$  saab juurdekasvu  $\Delta\Psi_E/l$ , sest  $\Delta\Psi_E$  on voog läbi silindrilise pinna, mis haarab sellest juhtmest osa pikkusega  $l$ . See mitmeväärtuselisus ei oma olulist tähtsust, sest väljatugevus, nagu kohe selgub, määratakse funktsiooni  $V$  tuletisena koordinaadi järgi ja funktsiooni konstantse liidetava väärtus ei mängi olulist rolli.

Lepime kokku kanda joonisele väljatugevusjooned nii, et üleminekul mistahes joonelt naaberjoonele saaksime alati ühe ja sama voofunktsiooni juurdekasvu  $\Delta V$ .

Märgime, et võrrandid  $U(x, y) = \text{const}$  ja  $V(x, y) = \text{const}$  määravad kaks kõikjal täisnurgi lõikuvat kõverate parve, s. t. moodustavad  $XOY$ -tasandil täisnurkse võrgu. Olgu  $dn$  väljatugevusjoone pikkuselement ja  $da$  samapotentsiaalijooone pikkuselement. Ilmselt on välja kõikides punktides  $dn \perp da$ . Loeme koordinaadi  $n$  kasvavaks vektori  $\mathbf{E}$  suunas. Koordinaadi  $a$  loeme kasvavaks vasakule vektorist  $\mathbf{E}$  selliselt asetuva vaateleja suhtes, kellele vektor  $\mathbf{E}$  on suunatud alt üles. Potentsiaal  $U$  suureneb vektori  $\mathbf{E}$  suunaga võrreldes vastassuunas, s. t. koordinaadi  $n$  vähenemise suunas. Lepime kokku

lugeda voofunktsiooni  $V$  kasvavaks samas suunas, milles suureneb  $a$ . Elektrivälja tugevuse saab neil tingimustel väljendada  $U$  ja  $V$  kaudu kujul

$$E = -\frac{\partial U}{\partial n} = +\frac{\partial V}{\partial a}. \quad (*)$$

Võrdus  $E = -\frac{\partial U}{\partial n}$  on meile juba tuttav. See väljendab, et vektori  $\mathbf{E}$  suurus on arvuliselt võrdne potentsiaali vähenemisega pikkusühiku kohta väljatugevusjoone suunas. Seos  $E = \frac{\partial V}{\partial a}$  järeldub aga sellest, et väljatugevus on arvuliselt võrdne väljatugevusjoontega risti oleva pinna ühikut läbiva vektori  $\mathbf{E}$  vooga. Andes juurdekasvu ainult ühele koordinaadile  $a$ , saame vastava voojuurdekasvu  $d_a\psi_E$ . Voog  $d_a\psi_E$  läbib pinda  $l da$ . Kuna see pind on risti väljatugevusjoontega, siis

$$E = \frac{d_a\psi_E}{l da} = \frac{d_a V}{da} = \frac{\partial V}{\partial a}.$$

Võrrand (\*) on väljendatud kõverjooneliste ristkoordinaatide  $n$  ja  $a$  süsteemis, kus  $n$  loetakse mööda väljatugevusjoont ja  $a$  mööda samapotentsiaalijoont. Minnes üle tavalistele ristkoordinaatidele, kirjutame:

$$\left. \begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial U}{\partial x} = +\frac{\partial V}{\partial y}, \\ E_y &= -\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (**)$$

Võrdused  $E_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$  ja  $E_y = -\frac{\partial U}{\partial y}$  esitati juba varem.

Võrdused  $E_x = \frac{\partial V}{\partial y}$  ja  $E_y = -\frac{\partial V}{\partial x}$  tulenevad järgnevatest kaalutlustest. Anname juurdekasvu ainult koordinaadile  $y$ . Pinda  $l dy$  läbib voog  $d_y\psi_E = E_x l dy$ . Siit saame:

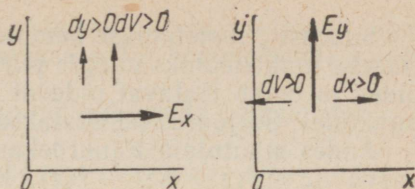
$$E_x = \frac{d_y\psi_E}{l dy} = \frac{d_y V}{dy} = \frac{\partial V}{\partial y}.$$

Plussmärk tuleb võtta seepärast, et  $V$  ja  $y$  mõlemad kasvavad  $E_x$ -st vasakule (joon. 15). Andes juurdekasvu ainult koordinaadile  $x$ , leiame vastavalt

$$d_x\psi_E = -E_y l dx \quad \text{või} \quad E_y = -\frac{d_x\psi_E}{l dx} = -\frac{\partial V}{\partial x}.$$

Siin on vaja tingimata panna miinusmärk, sest  $V$  kasvab  $E_y$ -st vasakule,  $x$  aga paremale (joon. 15).

JOON. 15.



Mõlemad funktsioonid  $U$  ja  $V$  rahuldavad Laplace'i võrrandit. Diferentseerides esimest võrrandit (\*\*\*) veel kord  $x$  ja teist veel kord  $y$  järgi, saame:

$$-\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \quad \text{ja} \quad -\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y},$$

millest

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

Diferentseerides esimest võrrandit  $y$  ja teist  $x$  järgi, leiame:

$$-\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \quad \text{ja} \quad -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x^2},$$

millest

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0.$$

Seega võrrandite kogumit (\*\*\*) rahuldavad mistahes funktsioonid  $U$  ja  $V$  rahuldavad ka 15. paragrahvis formuleeritud esimest nõuet.

Etteantud juhtmesüsteemi jaoks peavad need funktsioonid olema niisuguse kujuga, et oleks rahuldatud teine nõue — potentsiaali  $U$  konstantsus iga juhtme pinnal.

Funktsioonide  $U$  ja  $V$  avaldiste konstantide määramiseks on veel vaja kasutada kolmandat tingimust — juhtmete potentsiaalide või laengute kvantitatiivset fikseerimist.

Seosed (\*\*\*) on täiesti piisavad väljatugevuse komponentide arvutamiseks, kui mingil viisil on leitud kas funktsioon  $U(x, y)$  või funktsioon  $V(x, y)$ .

## § 17. Kompleksmuutuja funktsiooni rakendamine

Vaatleme tasandit, millel asetsevad tasaparalleelse välja jõujooned, kui kompleksmuutuja  $z = x + jy$  tasandit, milles abstsissiteljele kantakse reaalsuurused ( $x$ ), ordinaatteljele aga imaginaarsuurused ( $jy$ ). Nimetame selle tasandi  $z$ -tasandiks. Tasandi igale punktile vastab täielikult määratud kompleksarv  $z$ .

Võtame vaatluse alla kompleksuuruse  $\zeta = \xi + j\eta$ , kus  $\xi(x, y)$  ja  $\eta(x, y)$  on  $x$  ja  $y$  funktsioonid.

Suurust  $\zeta$  nimetatakse kompleksmuutuja  $z$  regulaarseks analüütiliseks funktsiooniks mingis piirkonnas, kui ta on üheväärtuseline, pidev ja omab teatavat pidevat tuletist selle piirkonna kõikides punktides. Seejuures tähistatakse  $\zeta = f(z)$ .

Andes muutujale  $z$  juurdekasvu  $\Delta z$ , saame funktsiooni juurdekasvu  $\Delta \zeta = f(z + \Delta z) - f(z)$ . Kui suhe  $\Delta \zeta / \Delta z$  läheneb teatavale piirväärtusele

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta \zeta}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{d\zeta}{dz}$$

sõltumata sellest, mis seaduse järgi läheneb  $\Delta z$  nullile, siis seda piirväärtust nimetataksegi kompleksmuutuja funktsiooni tuletiseks.

Valides juurdekasvu  $\Delta z$  üks kord reaaltelje suunas ( $\Delta z = \Delta x$ ), teine kord imaginaartelje suunas ( $\Delta z = j\Delta y$ ), saame kirjutada funktsiooni diferentseeritavuse tingimuse kujul

$$\frac{d\zeta}{dz} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x \xi + j\Delta_x \eta}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y \xi + j\Delta_y \eta}{j\Delta y},$$

kus  $\Delta_x \xi$  ja  $\Delta_x \eta$  on  $\xi$  ja  $\eta$  muutused ainult  $x$  muutumisel suuruse  $\Delta x$  võrra;  $\Delta_y \xi$  ja  $\Delta_y \eta$  on needsamad suurused ainult  $y$  muutumisel suuruse  $\Delta y$  võrra. Selle võrduse saab ümber kirjutada kujul

$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{\partial \xi}{\partial x} + j \frac{\partial \eta}{\partial x} = -j \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial y},$$

millest järeldub, et

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{\partial \xi}{\partial y}; \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

Viimaseid seoseid nimetatakse Cauchy'-Riemanni võrrandeks. Need seosed on hädavajalikud ja, nagu pole raske näidata, piisavad selleks, et kompleksmuutuja  $z$  funktsioon  $\zeta = f(z)$  omaks teatavat kindlat tuletist. Neist võrrandest saame:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 \xi}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}$$

või

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = 0 \quad \text{ja} \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = 0,$$

s. t. funktsioonid  $\xi(x, y)$  ja  $\eta(x, y)$  ning järelikult ka funktsioon  $\zeta = \xi + j\eta$  rahuldab Laplace'i võrrandit.

Kõrvutades suurusi  $\xi$  ja  $\eta$  omavahel siduvaid Cauchy'-Riemanni võrrandeid eelmise paragrahvi võrranditega (\*\*), mis annavad seose  $V$  ja  $U$  vahel, märkame nende täielikku vastavust. See tähendab, et võime vahetult võtta  $\xi = V$  ja  $\eta = U$  ning vastavalt tähistada

$$\zeta = \xi + j\eta = V + jU = f(z).$$

Funktsiooni  $\zeta = V + jU$ , mille reaalosa on voofunktsioon, imaginaarosa aga potentsiaal, nimetatakse *välja komplekspotentsiaaliks*.

Väljatugevuse vektori komponendid võib saada võrrandeist

$$E_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial \eta}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial \eta}{\partial y}.$$

Sageli huvitatakse ainult vektori  $\mathbf{E}$  moodulist, sest dielektriku sundolek on määratud just väljatugevuse suurusega. Suuruse  $E$  arvutamiseks saame seose

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2}.$$

Kuid vastavalt Cauchy'-Riemanni võrrandele  $\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial x}$ . Järelikult

$$E = \sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2} = \left| \frac{d\xi}{dz} \right|.$$

Kõigest öeldust järeldub, et välja arvutamise ülesanne on lahendatud, kui on leitud juhtmete pinnal piiritingimusi rahuldav analüütiline funktsioon  $\zeta = f(z)$ , s. t. niisugune analüütiline funktsioon, mille imaginaarosa omandab juhtme ristlõiget piiraval kontuuril konstantse väärtuse. Üldist meetodit niisuguse funktsiooni leidmiseks juhtmete mistahes kujuga ristlõigete jaoks ei osutu võimalikuks anda.

Juhtmete ristlõike kontuuri etteantud konfiguratsiooni järgi saab funktsiooni  $\zeta = f(z)$  leida ainult mõnede ristlõigete kujude korral. Kuid võib minna vastupidist teed. Kui nimelt uurida erinevaid analüütilisi funktsioone, võib leida neile vastavad väljad ja saada sel teel lahendused reaks konkreetseteks juhtumiteks. See on väga oluline, sest luuakse võimalus juhtmete ristlõike keeruka kuju korral, mille puhul ei ole võimalik saada täpset lahendust, valida sellele lähedane teoreetiliselt selgitatud juhtum. Viimasest saadud järeldusi on võimalik järeldada rakendada uuritava reaalsel juhtumil.

## § 18. Ringristlõikega üksildase juhtme väli

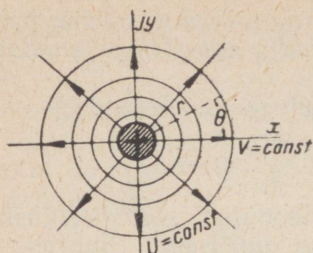
Vaatleme analüütilist funktsiooni  $\zeta = A j \ln z + C$ , kus  $A$  on reaalsuurus, kuid  $C = C_1 + j C_2$ .

Tähistades  $z = r e^{j\theta}$ , saame:

$$\zeta = \xi + j\eta = A j \ln r - A\theta + C_1 + jC_2.$$

Eeldades  $\xi = V$  ja  $\eta = U$ , leiame

$$V = -A\theta + C_1; \quad U = A \ln r + C_2.$$



JOON. 16.

Välja jõujoonte võrrand:  $V = \text{const}$  või  $\theta = \text{const}$ . Samapotentsiaalijoonte võrrand:  $U = \text{const}$  või  $r = \text{const}$ .

Järelikult funktsioon  $\xi = A j \ln z + C$  määrab välja, mille jõujooned osutuvad koordinaatide alguspunktist lähtuvaiks kiirteks (joon. 16). Samapotentsiaalijooned osutuvad ringjoonteks keskpunktiga koordinaatide alguses ja samapotentsiaalipinnad ring-silindrite pindadeks. Kui ühitame ühega neist pindadest laetud ring-ristlõikega juhtme pinna, siis juhtme pinna suhtes on põhioõue — potentsiaali konstantsus — rahuldatud. Järelikult võib väita, et vaadeldav funktsioon on juhtmevälise välja komplekspotentsiaaliks.

Konstant  $A$  määratakse selle alusel, et liikumisel mööda kindlast kontuuri ümber juhtme ristlõike nurk  $\theta$  kasvab  $2\pi$  võrra, funktsioon  $V$  aga saab juurdekasvu  $\frac{\Psi_E}{l}$ , sest  $\Psi_E$  on vektori  $\mathbf{E}$  voog läbi silindripinna, mis haarab pikkusega  $l$  juhtmeosa. Vastavalt Gaussi teoreemile peab see voog võrduma juhtmeosa laengu  $q$  ja keskkonna absoluutse dielektrilise läbitavuse  $\epsilon_a$  jagatisega. Järelikult

$$\frac{q}{\epsilon_a l} = -A \cdot 2\pi \quad \text{ja} \quad A = -\frac{q}{2\pi \epsilon_a l} = -\frac{\tau}{2\pi \epsilon_a},$$

kus juures  $\tau$  on laeng juhtme pikkusühiku kohta.

Seega

$$V = \frac{\tau}{2\pi \epsilon_a} \theta + C_1; \quad U = -\frac{\tau}{2\pi \epsilon_a} \ln r + C_2.$$

Konstandid  $C_1$  ja  $C_2$  sõltuvad välja algjõujoone valikust, millel võetakse  $V = 0$  ja samapotentsiaalijooone valikust, millel  $U = 0$ .

Vastavalt eelmise paragrahvi viimasele avaldisele on väljatugevus

$$E = \left| \frac{d\xi}{dz} \right| = \left| -\frac{\tau}{2\pi \epsilon_a} j \frac{1}{z} \right| = \frac{\tau}{2\pi \epsilon_a r}.$$

Potentsiaali juurdekasvu  $\Delta U$  üleminekul numbriga  $\nu$  märgitud samapotentsiaalijoonelt numbriga  $\nu + 1$  naaberjoonele peab vastavalt kokkuleppele olema konstantne, sõltumata  $\nu$ -st:

$$\begin{aligned}\Delta U &= U_{v+1} - U_v = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} (\ln r_{v+1} - \ln r_v) = \\ &= -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{r_{v+1}}{r_v} = \text{const},\end{aligned}$$

s. t.

$$\frac{r_{v+1}}{r_v} = B = \text{const}.$$

Järelikult ringjoonekujuliste samapotentsiaalijoonte raadiused muutuvad vastavalt geomeetrilisele progressioonile. Rea teguri võime valida suvaliselt.

Voofunktsiooni juurdekasvu  $\Delta V$  üleminekul välja  $\nu$ -ndalt jõujoonelt  $\nu + 1$ -le leppisime samuti kokku võtta ühesuguse kõikidele vahemikele välja jõujoonte vahel:

$$\Delta V = V_{v+1} - V_v = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} (\theta_{v+1} - \theta_v) = \text{const},$$

millest

$$\theta_{v+1} - \theta_v = \Delta\theta = \text{const},$$

s. t. välja jõujooned peavad asetsema võrdsete nurkade tagant. Joonisel 16 on kujutatud üksildase juhtme väli, kusjuures on võetud  $B = 1,5$  ja  $\Delta\theta = \pi/4$ .

Väli väljaspool juhett on samasugune nagu juhtumil, kui juhtme kogu laeng oleks koondunud juhtme teljele. Järelikult on saadud lahendus õige mistahes ristlõike kujuga üksildase joonjuhtme jaoks. Joonjuhtmeteks me nimetame juhtmeid, millede ristlõike mõõtmed on väga väikesed, võrreldes kaugusega juhtmetest punktideni, kus vaadeldakse välja.

Märgime, et kui juhtme telg ei läbiks koordinaatide algust, vaid punkti  $z_1 = x_1 + jy_1$ , siis iseloomustaks välja funktsioon

$$\xi = V + jU = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} j \ln(z - z_1) + C.$$

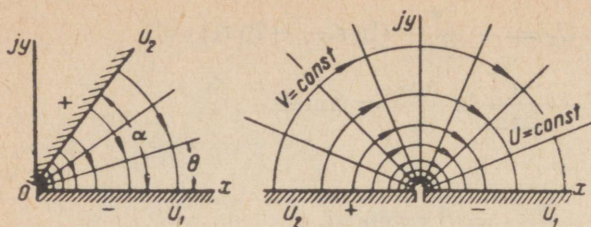
## § 19. Kahe teineteise suhtes nurga all asetseva tasapinnalise plaadi väli

Vaatleme nüüd funktsiooni  $\xi = A \ln z + C$ . Eeldades jällegi  $\xi = V$  ja  $\eta = U$ , saame:

$$\xi = V + jU = A \ln r + jA\theta + C_1 + jC_2.$$

Välja jõujoonte võrrand on  $V = A \ln r + C_1 = \text{const}$ , s. t.  $r = \text{const}$ . Samapotentsiaalijoonte võrrand on  $U = A\theta + C_2 = \text{const}$ , s. t.  $\theta = \text{const}$ .

Välja jõujooned kujutavad endast ringjooni, samapotentsiaalijooned — radiaalseid sirgeid ja samapotentsiaalipinnad —  $OZ$ -telge läbivaid tasapindu. Ühitame mistahes kahe samapotentsiaalipinnaga kahe metallplaadi pinnad, kui metallplaadid omavad suuruselt võrdset, kuid märgilt vastupidist elektrilaengut (joon. 17). Koordinaatide alguspunktis on plaadid teineteisest eraldatud väga



JOON. 17.

õhukese dielektrikukihiga. Kuna potentsiaali konstantsuse põhitingimus kummagi plaadi pinnal osutub rahuldatuks, siis järelikult vaadeldav funktsioon iseloomustabki niisuguste plaatide välja. Konstandid  $A$  ja  $C_2$  leiame tingimustest  $U = C_2 = U_1$ , kui  $\theta = 0$ , ja  $U = A\alpha + C_2 = U_2$ , kui  $\theta = \alpha$ . Järelikult  $A\alpha = U_2 - U_1$ , kus  $\alpha$  on plaatidevaheline nurk. Peale selle  $\ln r = 0$  ja  $C_1 = V_1 r = 1$  korral. Seega omandab välja iseloomustav funktsioon kuju

$$\xi = \frac{U_2 - U_1}{\alpha} \ln z + V_1 + jU_1.$$

Väljatugevus

$$E = \left| \frac{d\xi}{dz} \right| = \left| \frac{U_2 - U_1}{\alpha z} \right| = \frac{U_2 - U_1}{\alpha r},$$

s. t. muutub samuti nagu üksildase juhtme puhulgi pöördvõrdeliselt  $r$ -ga.

Pöörame tähelepanu asjaolule, et funktsioon  $\xi = A \ln z + C$  erineb eelmises paragrahvis vaadeldud funktsioonist ainult kordaja  $j$  poolest. See tekitab  $U$  ja  $V$  kohtade vahetamise funktsiooni avaldises ja vastavalt välja jõujoonte ning samapotentsiaalijoonte ümbervahetamise väljapildis (joon. 16 ja 17).

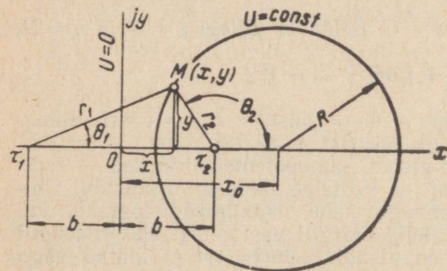
## § 20. Kahejuhtmelise liini väli

Vaatleme praktikas tähtsat kahejuhtmelise ülekandeliini juhtumit (joon. 18). Alguses loeme teineteisest kaugusel  $2b$  asuvad juhtmed joonjuhtmeteks.

Kasutades superpositsiooni printsiipi, saame komplekspotentsiaalile avaldise

$$\xi = V + jU = -\frac{\tau_1}{2\pi\epsilon_a} j \ln(z - z_1) - \frac{\tau_2}{2\pi\epsilon_a} j \ln(z - z_2) + C,$$

kus  $\tau_1$  ja  $\tau_2$  on juhtmete laengute joontihedused,  $z_1$  ja  $z_2$  —  $XOY$ -tasandi joonjuhtmete lõikepunktide komplekskoordinaadid.



JOON. 18.

Asetades koordinaatteljed nii, nagu näidatud joonisel 18 ( $z_1 = -b$ ,  $z_2 = +b$ ) ja arvestades, et kahejuhtmelise liini puhul  $\tau_1 = -\tau_2 = \tau$ , saame:

$$\zeta = V + jU = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} j \ln\left(\frac{z+b}{z-b}\right) + C.$$

Tähistades  $z+b = r_1 e^{j\theta_1}$  ja  $z-b = r_2 e^{j\theta_2}$ , kus  $r_1$  ja  $r_2$  on kaugused punktist  $z$  juhtmete telgedeni ning  $\theta_1$  ja  $\theta_2$  on vastavad nurgad  $OX$ -telje suhtes, leiame:

$$V = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} (\theta_2 - \theta_1) + C_1; \quad U = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{r_2}{r_1} + C_2.$$

Võttes  $C_2 = 0$ , saame, et  $U = 0$   $r_1 = r_2$  korral, s. t. nullpotentsiaali jooneks osutub  $C_2 = 0$  korral ordinaattelg. Mistahes samapotentsiaalijoon võrrand omab kuju

$$U = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{r_2}{r_1} = \text{const} \quad \text{või} \quad \frac{r_2}{r_1} = k = \text{const}.$$

Näitame, et samapotentsiaalijoonteks on ringjooned, mille tsentrid on  $OX$ -teljel. Kuna

$$\frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{(b-x)^2 + y^2}{(b+x)^2 + y^2} = k^2,$$

siis

$$(1-k^2)x^2 - 2(1+k^2)bx + (1-k^2)y^2 = -b^2(1-k^2).$$

Jagame viimase võrrandi  $(1-k^2)$ -ga ja liidame kummalegi poolele liikme  $\left(\frac{1+k^2}{1-k^2}\right)^2 b^2$ . Saame:

$$x^2 - 2\frac{1+k^2}{1-k^2}bx + \left(\frac{1+k^2}{1-k^2}\right)^2 b^2 + y^2 = -b^2 + \left(\frac{1+k^2}{1-k^2}\right)^2 b^2$$

või

$$\left(x - \frac{1+k^2}{1-k^2}b\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2kb}{1-k^2}\right)^2,$$

mis osutub ringjoone võrrandiks, mille keskpunkti koordinaadid

$$x_0 = \frac{1+k^2}{1-k^2}b \quad \text{ja} \quad y_0 = 0$$

ning raadius

$$R = \frac{2k}{|1-k^2|}b.$$

Et potentsiaali juurdekasv üleminekul mistahes samapotentsiaalijoonelt naaberjoonele jääks konstantseks, peab olema täidetud tingimus

$$\Delta U = U_{v+1} - U_v = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \left( \ln \frac{r_{2,v+1}}{r_{1,v+1}} - \ln \frac{r_{2,v}}{r_{1,v}} \right) =$$

$$= \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{k_{v+1}}{k_v} = \text{const},$$

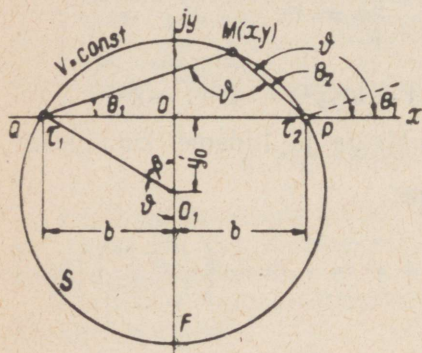
s. t. arvud  $k$  peavad samapotentsiaalijooone järjekorranumbri  $v$  kasvamisel muutuma vastavalt geometrilisele reale:

$$\frac{k_{v+1}}{k_v} = B = \text{const}.$$

Võttes voofunktsiooni avaldises  $C_1 = 0$ , saame, et  $V = 0$   $\theta_2 = \theta_1$  korral, s. t. välja algjõujooneks  $C_1 = 0$  korral osutuvad abstsissitelje lõigud, mis algavad juhtmetest ja ulatuvad lõpmatusse. Välja mistahes jõujoone võrrand omab kuju

$$V = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} (\theta_2 - \theta_1) = \text{const} \quad \text{või} \quad \theta_2 - \theta_1 = \vartheta = \text{const},$$

mis järelikult on juhtmetega lõikuva ringjoone kaare võrrandiks. See nähtub vahetult jooniselt 19. Tõepoolest, nurk  $QMP$ , mille all on nähtav lõik  $QP$  välja jõujoonel asuvatest punktidest  $M(x, y)$ , on



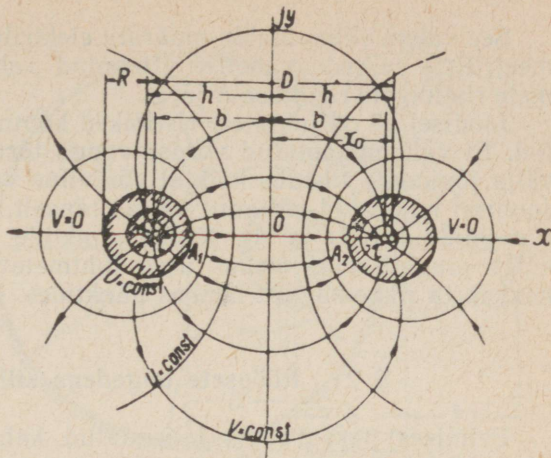
JOON. 19

võrdne nurgaga  $\vartheta$  ja jääb konstantseks. Ringjoone keskpunkti koordinaadid on  $x'_0 = 0$  ja  $y'_0 = -b \operatorname{ctg} \beta$ . Et nurgad  $QO_1F$  ja  $QMP$  on omavahel võrdsed kui ühe ja sama kaarega  $QSF$  mõõdetavad nurgad, siis

$$y'_0 = -b \operatorname{ctg} (\pi - \vartheta) = b \operatorname{ctg} \vartheta.$$

Et jagada väli võrdse vooga torudeks, tuleb võtta vahe  $\Delta V = V_{v+1} - V_v$  ühesuguseks kahe mistahes naaberjoone puhul. See pärast on vaja üleminekul välja mistahes jõujoonelt naaberjoonele muuta nurka  $\vartheta$  konstantse suuruse  $\Delta\vartheta$  võrra.

Joonisel 20 on konstrueeritud kahe liinijuhtme välja pilt, kusjuures on võetud  $B = \sqrt{3}$  ja  $\Delta\vartheta = \pi/6$ .



JOON. 20

Realse ülekanделиini juhtmed on lõpliku ristlõikega. Elektri-laengu jaotumine juhtmete pinnal sõltub seejuures juhtmete rist-lõigete kujust ja osutub ebaühtlaseks koguni ringristlõikega juht-mete korral. Viimane väide osutub arusaadavaks, kui võtta arvesse sinna- ja tagasijuhtmel asetsevate erineva märgiga laengute tõm-bumist. Laengu pindtihedus peab olema maksimaalne kahe juhtme neis punktides, mis asuvad teineteisele kõige lähemal. Kuna laengu jaotus juhtmete pinnal ei ole teada, siis muudab see ülesande üsna keerukaks. Kuid ringristlõikega juhtmete erijuhtumil saab üles-annet täpselt lahendada, kui tähele panna, et kahe liinijuhtme välja kõik samapotentsiaalipinnad on ümarsilindrite pindadeks. Alati saab liinijuhtmete telgi niiviisi asetada, et kaks samapotentsiaali-pinda ühtiksid reaalse juhtmete pindadega (joon. 20).

Väli metalljuhtmete sees puudub. Väli dielektrikus reaalse juhtmete niisugusel ekvivalentsete liinijuhtmetega asendamisel jääb aga muutusetu, sest põhiline piiritingimus — potentsiaali konstantsus juhtme pinnal — rahuldatakse. Seega kahe ringrist-lõikega juhtme välja arvutamise ülesanne taandub juhtmetega ekvi-valentsete joonjuhtmete asendi leidmisele, või nagu öeldakse, juht-mete *elektriliste telgede* leidmisele.

Tähistame tähega  $D$  vahemaa juhtmete geomeetriliste telgede vahel ning  $h = D/2$  vahemaa geomeetrilisest teljest nullpotent-siaalipinnani. Olgu  $x_0$  selle samapotentsiaali ringjoone keskpunkti koordinaat ja  $R$  raadius, mis ühtib juhtme ristlõike ümbermõõduga. Meie juhtumil  $h = |x_0|$  ja vastavalt  $x_0$  ja  $R$  avaldistele saame:

$$h = \frac{1 + k^2}{1 - k^2} b; \quad R = \frac{2k}{1 - k^2} b.$$

Ei ole raske veenduda, et  $h^2 - R^2 = b^2$  ja järelkult

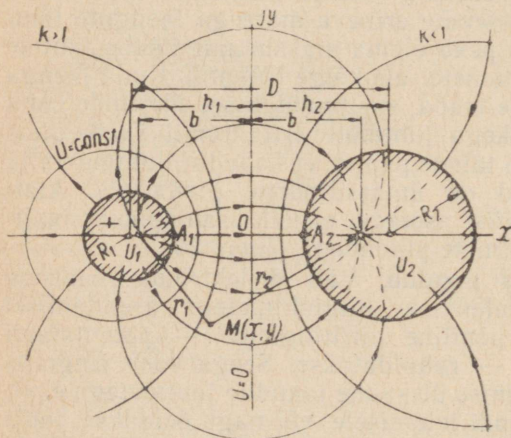
$$b = \sqrt{h^2 - R^2}.$$

See valem võimaldabki määrata elektriliste telgede asendit geomeetriliste telgede vahelise etteantud vahemaa  $D = 2h$  ja juhtmete ristlõigete raadiuse  $R$  järgi.

Joonisel 20 on juhtmete ristlõiked kontuuride läheduses viirutatud. Et väli on jaotatud võrdse vooga torudeks ( $\Delta V = \text{const}$ ), on välja jõujoonte tihedus kõikjal võrdeline väljatugevuse suurusega. Joonisel kujutatud väljapilt näitab täpselt, et väljatugevus on suurim punktides  $A_1$  ja  $A_2$ . Nende punktide läheduses on dielektrik kõige pingelisemas olekus ning juhtmetevahelise pinge tõstmisel hakkab ta riknema just nendes punktides.

## § 21. Rööpsete telgedega silindrite väli

Eelmises paragrahvis lahendatud kahe joonjuhtme ülesanne võimaldab leida kahe rööpsete telgedega ning erinevate raadiustega  $R_1$  ja  $R_2$  ringsilindri välja (joon. 21). Tõepoolest, alati saab ekvivalentsete joonjuhtmete teljed paigutada nii, et joonjuhtmete välja kaks samapotentsiaalipinda ühtiksid etteantud juhtivate silindrite



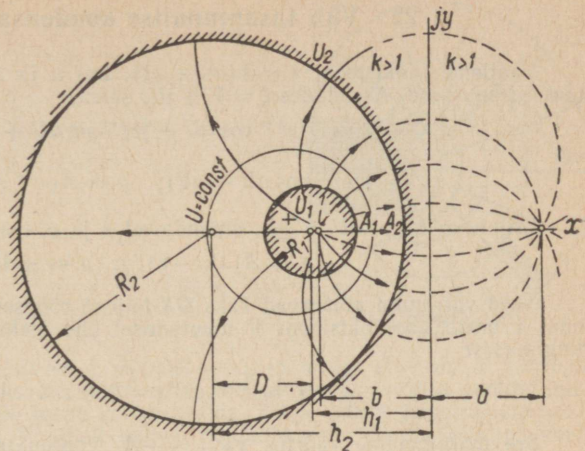
JOON. 21

pindadega. Olgu  $D$  vahemaa silindrite geomeetriliste telgede vahel,  $h_1$  ja  $h_2$  — kaugused geomeetrilistest telgedest nullpotentsiaali tasandini ning  $b$  — kaugus elektrilistest telgedest nullpotentsiaali tasandini. Vastavalt valemile  $b = \sqrt{h^2 - R^2}$ , mis on õige kummalgi juhtmele, saame:

$$b^2 = h_1^2 - R_1^2 = h_2^2 - R_2^2$$

või

$$(h_2 - h_1)(h_2 + h_1) = R_2^2 - R_1^2$$



JOON. 22

Silindrite asetsemisel vastavalt joonisele 21

$$h_2 + h_1 = D \text{ ja järelikult } h_2 - h_1 = \frac{R_2^2 - R_1^2}{D}.$$

Sel juhtumil

$$h_1 = \frac{D^2 + R_1^2 - R_2^2}{2D}; \quad h_2 = \frac{D^2 + R_2^2 - R_1^2}{2D}.$$

Ühe silindri asetsemisel teise sees (joon. 22)  $h_2 - h_1 = D$  ja järelikult  $h_2 + h_1 = \frac{R_2^2 - R_1^2}{D}$ .

Sel juhtumil

$$h_1 = -\frac{D^2 + R_1^2 - R_2^2}{2D}; \quad h_2 = \frac{D^2 + R_2^2 - R_1^2}{2D}.$$

Suuruste  $h_1$  ja  $h_2$  avaldised saab kirjutada üldkujul, mis on õige silindrite mõlema asetuse ja raadiuste  $R_1$  ja  $R_2$  mistahes vahekorra puhul:

$$h_1 = \left| \frac{D^2 + R_1^2 - R_2^2}{2D} \right|; \quad h_2 = \left| \frac{D^2 + R_2^2 - R_1^2}{2D} \right|.$$

Nende valemitega määratakse nullpotentsiaali tasandi asend ja valemite  $b = \sqrt{h_1^2 - R_1^2} = \sqrt{h_2^2 - R_2^2}$  abil elektriliste telgede, s. t. ekvivalentsete joonjuhtmete asukohad. Seega võimaldavad need valemid eelmises paragrahvis esitatud meetodi abil välja konstrueerida.

## § 22. Väli tasapinnalise kondensaatori äärel

Vaatleme funktsiooni  $z = A(e^{a\xi} + a\xi)$ , kus  $a$  ja  $A$  on reaalsed ning konstantseid suurused. Asendades  $\xi = V + jU$ , saame:

$$x + jy = A(e^{aV} \cos aU + je^{aV} \sin aU + aV + jaU)$$

või

$$x = A(e^{aV} \cos aU + aV); \quad y = A(e^{aV} \sin aU + aU).$$

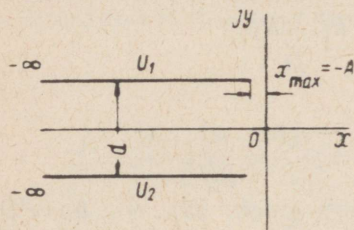
Erijuhtumil, kui  $aU = \pm\pi$ , omandavad  $x$  ja  $y$  avaldised kuju

$$x = A(aV - e^{aV}), \quad y = \pm A\pi.$$

Need võrrandid määravad kaks  $OX$ -teljega rööpset kiirt. Tõepoolest, koordinaat  $x$  omab voofunktsiooni  $V$  muutumisel ühe maksimumi, mis on määratav tingimusest

$$\frac{dx}{dV} = Aa(1 - e^{aV}) = 0, \quad \text{s. t.} \quad V = 0.$$

See maksimaalne väärtus  $x_{max} = -A$ . Voofunktsiooni äärmistele väärtustele  $V = -\infty$  ja  $V = +\infty$  vastab väärtus  $x = -\infty$ . Järelikult voofunktsiooni muutumisel  $-\infty$ -st kuni  $+\infty$ -ni koordinaat  $x$  saavutab kõik väärtused, oma-



JOON. 23

des ühe kiire jaoks väärtuse  $y_1 = +A\pi$  ning teise jaoks  $y_2 = -A\pi$ . Joonisel 23 on need kiired kujutatud. Tähistanud kauguse nende kiirte vahel  $d$ -ga, saame:

$$y_1 - y_2 = 2A\pi = d \quad \text{ja} \quad \text{järelikult} \quad A = \frac{d}{2\pi}.$$

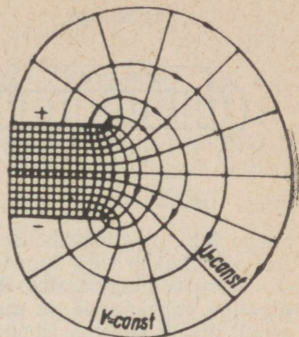
Tuleb ilmsiks meie poolt uuritava funktsiooni tähelepanuväärne omadus, ja nimelt: kaks selle funktsiooniga määratava välja samapotentsiaalijoont osutuvad rööpseteks kiirteks. Neist ühe potentsiaal on  $U_1 = \frac{\pi}{a}$  ja teise oma  $U_2 = -\frac{\pi}{a}$ .

Seega konstant  $a$  on määratud potentsiaalide vahega:  $U_1 - U_2 = \frac{2\pi}{a}$ , millest

$$a = \frac{2\pi}{U_1 - U_2}.$$

Kui kujutleda, et need kiired on kahe rööpse lõpmatu suure, kuid ühest küljest sirge äärega piiratud plaadi jälgjoonteks tasapinnal  $z$ , siis selgub, et vaadeldav funktsioon määrab tasapinnalise kondensaatori välja ühest küljest piiratud plaatide ääre juures. Asetades  $z$  avaldisse konstantide  $A$  ja  $a$  leitud väärtused, saame:

$$z = \frac{d}{2\pi} \left( e^{\frac{2\pi}{U_1 - U_2} \xi} + \frac{2\pi}{U_1 - U_2} \xi \right),$$



JOON. 24

kusjuures  $\xi = V + jU$ . Eeldades  $V = \text{const} = V_v$  ja andes ette rea  $U$  väärtusi vahemikus  $U_2 < U < U_1$ , saame hulga välja ühel jõujoonel asuvaid punkte, millele järgi me võimegi selle joone konstrueerida. Teiste joonte konstrueerimiseks muudame konstantsuurust  $V_v$  ühelt joonelt naaberjoonele üleminekuks iga kord ühesuguse suuruse  $\Delta V$  võrra.

Eeldades  $U = \text{const} = U_v$ , kusjuures  $U_2 < U_v < U_1$  ning andes ette rea  $V$  väärtusi, leiame ühele ja samale samapotentsiaalijoonele kuuluvad punktid. Samapotentsiaalijooned konstrueerime nii, et kahe mistahes naaberjoone puhul kehtiks tingimus  $\Delta U = \text{const}$ . Joonisel 24 on konstrueeritud väli tasapinnalise kondensaatori äärel.

Küllaltki oluline on selgitada, kui kaugel kondensaatori äärest võib välja praktiliselt homogeenseks lugeda. Sel eesmärgil leiame  $OX$ -teljel niisuguse punkti asendi, milles väljatugevus erineb 1% võrra homogeense välja tugevusest

$$E_0 = \frac{U_1 - U_2}{d}. \text{ Väljatugevus omab mistahes punktis väärtust } E = \left| \frac{d\xi}{dz} \right|.$$

Järelikult

$$\frac{1}{E} = \left| \frac{dz}{d\xi} \right| = Aa |e^{a\xi} + 1|.$$

$OX$ -teljel on potentsiaal võrdne nulliga, mida ei ole raske märgata  $y$ -koordinaadi avaldisest. Tõepoolest, kui võtta selles avaldises  $U = 0$ , siis saame  $y = 0$ . Seepärast punktide jaoks  $OX$ -teljel saame  $\xi = V$ . Võttes veel arvesse,

$$\text{et } Aa = \frac{d}{U_1 - U_2} = \frac{1}{E_0}, \text{ saame } OX\text{-teljel kehtiva võrrandi}$$

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{E_0} (e^{aV} + 1).$$

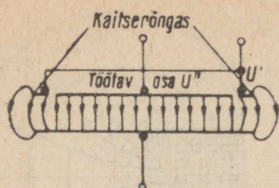
Järelikult

$$\frac{E - E_0}{E_0} = \frac{E}{E_0} - 1 = \frac{1}{e^{aV} + 1} - 1 = -\frac{e^{aV}}{e^{aV} + 1}.$$

Eeldades  $\frac{E - E_0}{E_0} = -0,01$ , saame, et  $e^{aV} = 0,0101$  ja  $aV = -4,61$ . Viies need

arvväärtused  $x$ -koordinaadi avaldisse, mis  $U = 0$  korral omab kuju  $x = A(e^{aV} + 1 + aV)$ , saame  $x = -4,6A$ . Otsitava punkti kaugus kondensaatori äärest on  $|x - x_0| = 3,6A$ , sest plaadi ääre kaugus  $OY$ -teljest on  $x_0 = -A$ . Kasutades konstandi  $A$  väärtust, saame lõplikult

$$|x - x_0| = 3,6 \frac{d}{2\pi} = 0,57d.$$



JOON. 25

Seega juba plaatidevahelise dielektriku paksusega lähedasel kaugusel kondensaatori äärest saab välja lugeda homogeenseks väga suure täpsusega.

Kõrgele pingele ettenähtud õhkdielektrikuga etalonkondensaatoreis, milles plaatide vahekaugus on suur, eraldatakse ääreefekti vältimiseks töötava osana ainult plaadi keskosa (joon. 25). Plaadi äär moodustab seejuures nn. kaitserõnga, mis on isoleeritud plaadi töötavast osast, kuid omab töötava osa potentsiaalile võimalikult lähedast tasaparalleelsele väljale. Teostatud arvutus võimaldab määrata kaitserõnga nõutava laiuse.

### § 23. Graafiline meetod väljapildi konstrueerimiseks tasaparalleelsele väljale

Paljudel praktilistel juhtumitel on laetud juhtide ristlõigete kuju ja nende vastastikune asetus niivõrd keerukad, et välja täpne analüütiline arvutus osutub võimatuks. Seoses sellega omab suurt praktilist tähtsust väljapildi konstrueerimise graafiline meetod, mis on välja töötatud tasaparalleelsele väljade ja laetud pöördekehi ümbritsevate väljade juhtumiteks.

Kõige lihtsam on konstrueerida tasaparalleelset välja. Sealjuures tuleb silmas pidada järgmisi tingimusi:

1) välja jõujooned ja samapotentsiaalijooned peavad kõikjal lõikuma täisnurgi;

2) välja jõujooned peavad olema risti juhtide ristlõikeid piiravate kontuuridega;

3) välja jõujoontest ning samapotentsiaalijoontest moodustunud võrgu silmad peavad võrgu küllaldase tiheduse puhul olema ligikaudselt üksteisega sarnased.

Kolmas tingimus vastab nõudele, et potentsiaali juurdekasv  $\Delta U$  üleminekul mistahes samapotentsiaalijoonelt naaberjoonele oleks konstantne ja et väli oleks jagatud võrdse vooga torudeks, s. t. et oleks  $\Delta V = \text{const}$ . Niisuguse nõude olemasolu korral tuleneb kolmas tingimus võrrandeist

$$E = -\frac{\partial U}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial a}.$$

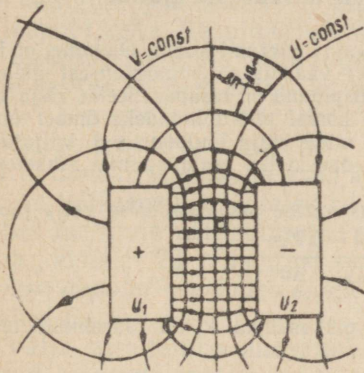
Kui tähistada võrgu silma keskmised mõõtmed  $\Delta n$  — välja jõujoone suunas ja  $\Delta a$  — samapotentsiaalijooone suunas (joon. 26), saab need võrrandid ligikaudu kirjutada kujul

$$E = -\frac{\Delta U}{\Delta n} = \frac{\Delta V}{\Delta a}.$$

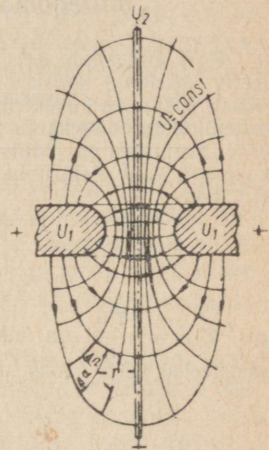
Tingimustest  $\Delta U = \text{const}$  ja  $\Delta V = \text{const}$  saame:

$$\frac{\Delta n}{\Delta a} = k_1 = \text{const},$$

millest järeldubki, et küllalt tiheda võrgu korral peavad võrgu silmad endast kujutama ligikaudselt sarnaseid nelinurki, kui silma kuju ei ole liiga moonutatud joonte kõveruse tõttu. Kuid isegi silmade tunduva moonutuse puhul, kui on raske rääkida nende sarnasusest, aitab viimane seos küllaltki õigesti väljapilti konstrueerida. Harilikult joonistatakse väljapilt silma järgi, püüdes rahuldada esimest ja teist tingimust, ning seejärel tehakse järk-järgult



JOON. 26



JOON. 27

sellised parandused, et oleks täidetud ka kolmas tingimus. Konstrueerimise kergendamiseks soovitatakse valida  $\Delta n = \Delta a$ . Joonisel 26 on näitena konstrueeritud väljapilt kahe sirge ristkülikulise ristlõikega juhtme väljale, kui juhtmed omavad ühesuurusi, kuid vastasmärgilisi laenguid.

## § 24. Graafiline meetod väljapildi konstrueerimiseks pöördkehade väljale

Ühise pöördteljega laetud pöördkehade välja saab samuti konstrueerida graafiliselt. Väli kujutatakse ühes meridiaantasapinnas. Näitena on joonisel 27 konstrueeritud väli plaadisse lõigatud ümmargust ava läbiva varda läheduses.

Eelmises paragrahvis tasaparalleelse välja juhtumi jaoks formuleeritud esimene ja teine tingimus jäävad muutusetu, võrgu silma kuju puudutav kolmas tingimus muutub aga veidi keerukamaks. Väljapildi pöörlemisel ümber laetud kehade telje moodustab välja iga jõujoon pöördpinna. Võib kokku leppida valida need pinnad nii, et kahe naaberpinna vahel kulgev voog  $\Delta \Psi_E$  oleks kõikjal ühesugune. Kui seejuures  $\Delta a$  on väljapildi võrgusilma piirides keskmine kaugus nende pindade vahel, mida loetakse meridiaantasapinnas samapotentsiaaljoone suunas, ja

$E$  — väljatugevuse keskmine väärtus lõigu  $\Delta a$  piirides, siis  $\Delta\psi_E = 2\pi r \cdot \Delta a \cdot E$ , kus  $r$  on kaugus lõigu  $\Delta a$  keskpunkti pöörlemisteljeni. Seega saame:

$$E = - \frac{\Delta U}{\Delta n} = \frac{1}{2\pi r} \frac{\Delta\psi_E}{\Delta a}.$$

Kuna  $\Delta U = \text{const}$  ja  $\Delta\psi_E = \text{const}$ , siis suhe

$$\frac{\Delta n}{\Delta a} = k_2 r,$$

kus  $k_2 = \text{const}$ .

Niisugusele suhtele ligikaudu vastabki joonisel 27 konstrueeritud väljapilt.

## § 25. Graafiline meetod väljapildi konstrueerimiseks mittehomoogeense isoleeriva keskkonna puhul

Kõik ülalesitatud käis homogeense keskkonna juhtumi kohta. Oletame, et isoleeriv keskkond koosneb mitmest erineva  $\epsilon_a$  väärtusega homogeensest dielektrikust, kusjuures dielektrikutevahelised eralduspinnad on tasaparalleelse välja korral silinderpindadeks ja pöördekahade välja korral pöördepindadeks ümber ühise telje. Seejuures on joonisel parem kujutada mitte välja jõujooni, s. t. väljatugevusjooni, vaid elektrinihke jooni, sest kahe dielektriku eralduspinnal nihketorud ei katke.

Kuna  $D = \epsilon_a E$  ja  $\Delta\psi_D = \epsilon_a \Delta\psi_E$ , siis saame tasaparalleelse välja jaoks:

$$E = - \frac{\Delta U}{\Delta n} = \frac{1}{\epsilon_a p} \frac{\Delta\psi_{1D}}{\Delta a},$$

kus  $\psi_{1D} = \frac{\psi_D}{l}$  on nihkevoog juhtmete pikkusühiku kohta. Järelikult tasaparalleelse välja jaoks saadakse tingimus

$$\frac{\Delta n}{\Delta a} = \epsilon_a p k_1,$$

kus  $k_1 = \text{const}$  ja  $\epsilon_a p$  — selle piirkonna absoluutne dielektriline läbitavus, kus konstrueeritav väljapildi võrgusilm asetseb.

Pöördekahade välja puhul

$$E = - \frac{\Delta U}{\Delta n} = \frac{1}{2\pi r \epsilon_a p} \frac{\Delta\psi_D}{\Delta a}$$

ja

$$\frac{\Delta n}{\Delta a} = r \epsilon_a p k_2,$$

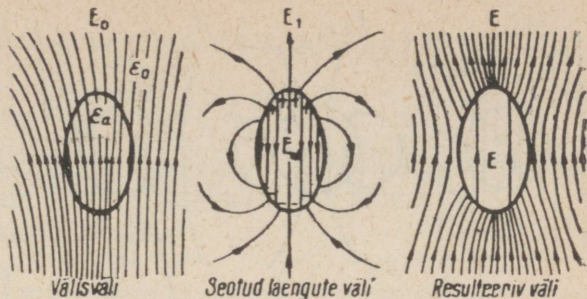
kus  $k_2 = \text{const}$ .

Peale selle on vaja tingimata arvesse võtta elektrinihke joonte murdumise tingimust kahe dielektriku eralduspinnal (§ 14).

## § 26. Dielektrikust keha välises elektrostaatilises väljas

Praktilist tähtsust omab välja arvutamise ülesanne juhtumil, kui dielektrikust keha viiakse etteantud välisesse välja. Keha polariseerub. Ainete aatomite ja molekulide koosseisu kuuluvad positiivselt laetud osakesed nihkuvad välja suunas, negatiivselt laetud

JOON. 28



osakesed aga vastassuunas. Keha pinnal tekivad erimärgilised seotud laengud, mis tekitavad oma välja nii keha sisemuses kui ka väljaspool keha. Resulteeriv väljatugevus  $E$  on välisvälja tugevuse  $E_0$  ja seotud laengute välja tugevuse  $E_1$  geomeetriline summa. Ülesande raskus seisneb selles, et aine polariseerumine ja järelikult ka seotud laengud on määratud resulteeriva väljatugevusega  $E$ , mis ise sõltub seotud laengutest.

Kui dielektrikust keha asub keskkonnas, mille dielektriline läbitavus on väiksem keha dielektrilisest läbitavusest, siis on keha sees seotud laengute väli suunatud välisväljale vastu. Seda ei ole raske näha jooniselt 28. Niisugust seotud laengute välja keha sees nimetatakse *depolariseerivaks elektriväljaks* ja selle väljatugevus tähistatakse  $E_{\infty}$ .

Välja arvutamise ülesanne seisneb järgnevas. On vaja leida seotud laengute jaotus, mille puhul seotud laengud tekitaksid niisuguse välja, mis, olles liidetud etteantud välisväljaga, annab keha pinnal piiritingimusi rahuldava resulteeriva välja; piiritingimusteks on seejuures vektori  $E$  tangentsiaal- ning vektori  $D$  normaal-komponendi võrdsus mõlemal pool pinda. Järgmises paragrahvis vaadeldakse seda liiki ülesande lihtsaimat näidet.

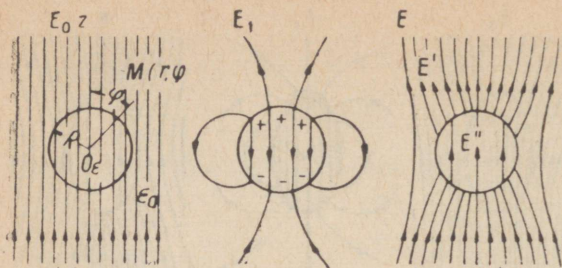
## § 27. Dielektrikust kera välises homogeenväljas

Olgu dielektrikust kera viidud välisesse tühjuses eksisteerivasse homogeenvälja väljatugevusega  $E_0$ . Eeldame, et kera polariseerub homogeenelt, s. t. polarisatsiooni tekitav resulteeriv väli on homogeenne, ja järelikult on homogeenne ka seotud laengute depolariseeriv väli.

Tähistame depolariseeriva väljatugevuse  $E_{\infty}$ . Järelikult resulteeriv väljatugevus kera sees

$$E'' = E_0 - E_{\infty}.$$

Suuname  $OZ$ -telje välisvälja suunas (joon. 29). Sümmetria tõttu  $OZ$ -telje suhtes on küllaldane vaadelda välja ühel meridiaan-tasandil.



JOON. 29

Potentsiaal  $U''$  kera sisemuses leitakse tingimusest

$$E'' = -\frac{\partial U''}{\partial z},$$

millest

$$U'' = -E''z + \text{const.}$$

Eeldades  $U'' = 0$   $z = 0$  korral ja pidades silmas, et  $z = r \cos \varphi$ , saame:

$$U'' = -(E_0 - E_\infty)r \cos \varphi.$$

Seejuures komponent  $-E_0 r \cos \varphi$  kujutab endast välisvälja potentsiaali,  $E_\infty r \cos \varphi$  aga seotud laengute välja potentsiaali kera sisemuses.

Välises ruumis tekitab homogeenelt polariseeritud kera niisamasuguse välja nagu kera tsentris asetsev elektridipool. Polariseerumata dielektrilist kera võib tõepoolest endale ette kujutada kui kaht ühtlaselt jaotunud ruumlaengutega erimärgiliselt laetud kera, mis on teineteisele ülestatud. Need laengud moodustuvad dielektriku molekulide koosseisu kuuluvate positiivsete või vastavalt negatiivsete elementaarosakeste kogumist. Homogeense polarisatsiooni korral polariseeruvad kõik molekulid ühtlaselt. Olgu  $d$  elementaardipoolide telgede pikkus, s. t. keskmine kaugus, milleni molekulides nihkuvad teineteisest vastasmärgiga laengud. Kogu polariseerunud kera on ekvivalentne kahe ühtlaselt, kuid erinimeliselt laetud, teineteisest kaugusele  $d$  nihkunud keraga. Kuid kumbki kera tekitab välises ruumis samasuguse välja, mida ta tekitaks siis, kui kogu laeng oleks koondunud tsentrisse. Järelikult on kaks teineteise suhtes nihkunud kera ekvivalentsed dipooliga.

Kuna kera raadius  $R$  on palju suurem dipooli pikkusest  $d$ , siis kera polarisatsiooniga tekitatud välja potentsiaal väljaspool kera määratakse 10. paragrahvis toodud valemiga

$$\frac{p \cos \varphi}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

kus  $p$  on polariseerunud keraga ekvivalentse dipooli elektriline moment.

Ülestades selle potentsiaali välise homogeenvälja potentsiaaliga, saame potentsiaaliks väljaspool kera

$$U' = -E_0 r \cos \varphi + \frac{\rho \cos \varphi}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Tähistame resulteeriva väljatugevuse ja elektrinihke väljaspool kera  $E'$  ja  $D'$ -ga. Rakendame piiritingimusi kera pinnal.

Tingimuse  $r = R$  korral saame:

$$E'_t = E''_t \quad \text{või} \quad \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial U'}{\partial \varphi} \right)_{r=R} = \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial U''}{\partial \varphi} \right)_{r=R},$$

s. t.

$$-E_0 \sin \varphi + \frac{\rho \sin \varphi}{4\pi\epsilon_0 R^3} = -(E_0 - E_\infty) \sin \varphi.$$

Järelikult

$$E_\infty = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0 R^3}.$$

Peale selle,  $r = R$  korral

$$D'_n = D''_n \quad \text{või} \quad \epsilon_0 \left( -\frac{\partial U'}{\partial r} \right)_{r=R} = \epsilon_a \left( -\frac{\partial U''}{\partial r} \right)_{r=R},$$

s. t.

$$\epsilon_0 E_0 \cos \varphi + \frac{\rho \cos \varphi}{2\pi R^3} = \epsilon_a (E_0 - E_\infty) \cos \varphi.$$

Järelikult

$$\epsilon_0 E_0 + \frac{\rho}{2\pi R^3} = \epsilon_a E_0 - \epsilon_a E_\infty.$$

Kasutades avaldist  $E_\infty = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0 R^3}$ , saame:

$$\epsilon_0 E_0 + 2\epsilon_0 E_\infty = \epsilon_a E_0 - \epsilon_a E_\infty$$

ja

$$E_\infty = \frac{\epsilon_a - \epsilon_0}{\epsilon_a + 2\epsilon_0} E_0.$$

Seega ekvivalentse dipooli moment

$$\rho = 4\pi\epsilon_0 R^3 E_\infty = 4\pi R^3 \epsilon_0 \frac{\epsilon_a - \epsilon_0}{\epsilon_a + 2\epsilon_0} E_0.$$

Meil õnnestus väljendada  $\rho$  ja  $E_\infty$  etteantud välisvälja tugevuse  $E_0$  kaudu. Seejuures on piiritingimused kera pinnal rahuldatud pinna kõikide punktide jaoks, s. t. mistahes  $\varphi$  väärtuse jaoks  $r = R$  korral. Järelikult on meie eeldus, et kera polariseerub homogeenselt väljas homogeenselt, õige.

Raske ei ole leida ka seotud laengute jaotust kera pinnal. Nende

laengute pindtihedus  $\sigma$  on ju võrdne polariseerumusvektori normaal-komponendiga

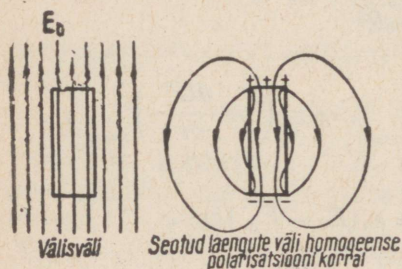
$$\sigma = P_n = P \cos \varphi,$$

kus

$$P = \frac{p}{\frac{4\pi}{3}R^3} = 3\varepsilon_0 \frac{\varepsilon_a - \varepsilon_0}{\varepsilon_a + 2\varepsilon_0} E_0 = 3\varepsilon_0 E_0 \cdot r$$

Me leidsime seotud laengute jaotuse tingimusest, et kera on polariseerunud homogeenelt. Võib väita ka vastupidist —  $\cos \varphi$ -ga võrdelise tihedusega seotud laengute jaotus kera pinnal põhjustab homogeenne depolariseeriva välja kera sisemuses.

Võib tõestada, et samasugune tähelepanuväärne omadus — välises homogeenes väljas homogeenelt polariseeruda — on ka ellipsoidil. Kera on ellipsoidi erijuhtumiks.



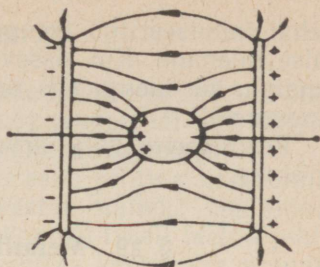
JOON. 30

Kuid ei ole raske taibata, et suvalise kujuga keha polariseerub homogeenes väljas mittehomogeenelt. Vaatleme näiteks lõpliku pikkusega silindrit, mis on paigutatud homogeenvälja sellisel, et silindri moodustajad ühtsiksid välja suunaga (joon. 30). Kui eeldada, et silinder polariseerub homogeenelt, ilmuvad seotud laengud ainult silindri otstele. On ilmne, et seotud laengute väli silindri sees ei saa seejuures olla homogeenne; järelikult osutub mittehomogeen-seks ka resulteeruv väli, mis on aga vastuolus homogeenne polari-seerumise eeldusega.

## § 28. Juhtiv keha välises homogeenväljas. Elektrostaatiline varjestamine

Suure praktilise tähtsusega on samuti ülesanded, milledes vaadeldakse antud välisesse elektrivälja viidud laetud või laadimata juhtivaid kehi. Juhtiva keha sees väli hääbub. Ruumis väljaspool keha väline väli muutub. Keha pinnale tekitatakse (indutseeritakse) elektrilaengud. Seda nähtust nimetatakse *elektrostaatilise indukt-siooni nähtuseks*. Joonisel 31 on näitena esitatud resulteeriv väli laetud plaatide välja viidud juhtiva keha läheduses.

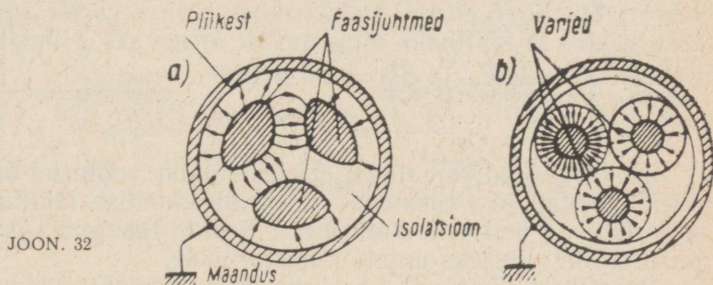
JOON. 31



Kui välisvälja sisseviidud keha oli laadimata, siis on keha indutseeritud laengute summa võrdne nulliga. Need laengud jaotuvad nii, et nende väli juhtiva keha sees täpselt kompenseeriks kõikide väliste laengute välja. Midagi ei muutu, kui juhtiv keha teha õõnsaks — kogu õõnsuses samuti väli puudub. Seda asjaolu kasutatakse laialdaselt elektrimõõteriistade ja mõõtelülituste elementide *elektrostaatiliselt ekraanamiseks ehk varjestamiseks* välistest elektriväljadest. Sel eesmärgil paigutatakse need seadised kinnistesse *ekraanideks* ehk *varjeteks* nimetatavatesse metallümbristesse. Nagu näitab katse, on küllaldane valmistada ekraanid peenest metallvõrgust.

Kui soovitakse anda varjele endale nulliga võrdne potentsiaal, siis ühendatakse ta maaga — maandatakse. See on näiteks kasulik siis, kui varjestatud mõõteriista küljest väljuvad juhtmed välislülituse külge, mis on maa potentsiaalile lähedase potentsiaaliga.

Maandatud varje on võimeline samal määral kaitsma ka välist ruumi varje sees paiknevate laengute välja eest.



JOON. 32

Samasugune varjestav toime on ka kaablite pliist kaitsekestal (joon. 32, a). Kaabli üksikute soonte vaheline väli ei välju pliikestast ja sellega välistatakse kaabli elektrostaatiline mõju läheduses asuvate sideliinide juhtmetele. Mõnikord varjestatakse kaablis iga soon eraldi (joon. 32, b), millega saavutatakse palju ühtlasem välja- jaotus kaabli iga soone ümber.

Resulteerivat välja, mis moodustub väljaspool välisesse välja viidud juhtivat keha (vt. näiteks joon. 31), peame käsitlema kui

kehal indutseeritud laengute välja ja etteantud välisvälja ülestu-  
miste tulemust. Kui sisseviidud kehal on peale selle nullist erinev  
summaarne laeng, siis on tingimata vaja ülestada veel ka selle  
laengu väli.

Resulteeriva välja arvutamise näide on toodud järgmises para-  
grahvis.

## § 29. Metallkera välises homogeenväljas

27. paragrahvis vaadeldud ülesanne võimaldab leida välisesse  
homogeenvälja viidud metallkera ümbritseva välja. Kera sees peab  
väli puuduma ja potentsiaal kera mahu ulatuses peab olema kon-  
stantne. Järelikult kera pinnale indutseeritavad laengud peavad kera  
sees tekitama välist välja täielikult kompenseeriva homogeenvälja.  
Nagu 27. paragrahvis toodud käsitlusest tuleneb, moodustub nii-  
sugune väli laengute toimel, millede pindtihedus on võrdeline  
 $\cos \varphi$ -ga. Välisesse ruumi tekitavad need laengud samasuguse välja  
nagu kera tsentrisse paigutatud ekvivalentne dipool. Seega taandub  
meid huvitav ülesanne 27. paragrahvis vaadeldud dielektrikust kera  
ülesandele, kui selles võtta  $E'' = E_0 - E_\infty = 0$ , s. t.  $E_\infty = E_0$ . Vas-  
tavalt valemile

$$E_\infty = \frac{\varepsilon_a - \varepsilon_0}{\varepsilon_a + 2\varepsilon_0} E_0$$

saavutatakse see võrdus piirväärtuse  $\varepsilon = \infty$  korral. Seepärast vek-  
tori  $\mathbf{E}$  väljad on ühesugused metallkera ja dielektrikust kera puhul,  
mille  $\varepsilon_a = \infty$ . Väljaspool kera on mõlemal juhtumil ühesugused ka  
vektori  $\mathbf{D}$  väljad. Kuid dielektrikust kera sees ka  $\varepsilon_a = \infty$  korral  
jääb vektor  $\mathbf{D}$  lõplikuks ning nullist erinevaks. Nimelt, arvestades  
võrdusi  $P = 3\varepsilon_0 E_\infty$  ja  $E_\infty = E_0$ , saame:

$$D = \varepsilon_0 E + P = P = 3\varepsilon_0 E_0.$$

See on seotud asjaoluga, et elektrinihke vektorud on dielektriku  
piiril pidevad ja, tihenedes suure dielektrilise läbitavusega keha  
sees, läbivad nad selle katkemata. Seotud laengud kahe dielektriku  
piiril ei ole alguseks uutele nihketorudele.

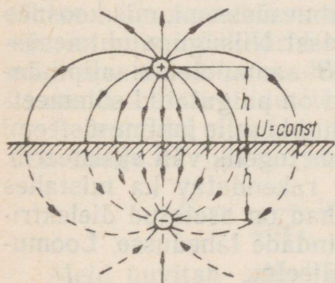
Metallkeha juhtumil aga keha sees ei hääbu üksnes vektori  $\mathbf{E}$ ,  
vaid ka vektori  $\mathbf{D}$  väli. Keha pinnale indutseeritud laengud osutuvad  
nüüd vabadeks laenguteks, mis moodustusid keha lõpliku juhtivuse  
tõttu. Väljaspool keha eksisteerivad elektrinihketorud lõpevad neil  
laenguil ning ei tungi keha sisesse. Siit on näha, et juhi käsitlus  
dielektrikuna, mille  $\varepsilon_a = \infty$ , on tegelikult formaalne.

### 30. Peegelkujutismetod

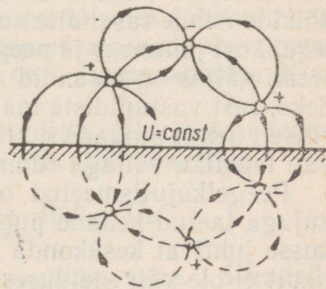
Juhtivat keskkonda piiravate tasapindade läheduses asuvate laetud juhtide välja arvutus taandub peegelkujutismetodi abil mitme juhtme välja arvutamiseks juhtiva keskkonna puudumisel.

Vaatleme sirge juhtme välja, kui juhe asub juhtiva keskkonna tasandist kaugusel  $h$  (joon. 33). See vastab näiteks maapinna kohale kõrgusele  $h$  riputatud juhtmele. Kõik positiivselt laetud juhtmelt algavad välja jõujooned lõpevad juhtiva keskkonna pinnal, kuhu ilmub indutseeritud negatiivne laeng. Väli määratakse nii juhtme kui ka kogu juhtiva keskkonna pinnal jaotunud laenguga. Indutseeritud laengu jaotus ei ole ülesande tingimustest teada ning tuleb samuti määrata.

Esimesel pilgul näib välja arvutamine niisuguse süsteemi puhul küllaltki keerukana. Kuid see ülesanne lahendub üsna lihtsalt *peegelkujutismetodiga*. Kõrvaldame mõttes juhtiva keskkonna ja asendame ta juhtmega, mis on reaalse juhtme peegelkujutiseks eralduspinna suhtes ja mis omab reaalse juhtmega võrreldes sama suurt, kuid vastupidise märgiga laengut (joon. 33). Tegelik juhe ja selle peegelkujutis moodustavad kahejuhtmelise liini, mille väli on kujutatud joonisel 20. Jooniselt 20 nähtub, et tegeliku juhtme ja selle peegelkujutise vahel keskel asuv tasand on samapotentsiaalpinnaks. Tegelikus olukorras juhtiva keskkonna pind parajasti ühtibki selle tasandiga ja osutub samuti samapotentsiaalipinnaks.



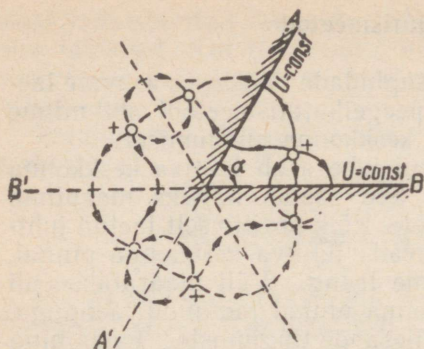
JOON. 33



JOON. 34

Siit järeldub, et kui asendada juhtiva keskkond juhtme peegelkujutisega koos laengu märgi muutmisega, siis ruumis, mis asub juhtiva keskkonna kohal, jääb väli samasuguseks nagu tegelikes tingimustes. Selles seisnebki peegelkujutismetod.

See meetod on rakendatav ka juhtmete mistahes arvu puhul, kui juhtmed on paigutatud üksteise suhtes ja juhtivat keskkonda piirava tasandi suhtes rööpselt (joon. 34). Igale juhtmele tuleb võtta peegelkujutis juhtiva keskkonna pinna suhtes koos laengu märgi muutmisega. Seejärel võib juhtiva keskkonna mõttes kõrvaldada ja vaadelda tegelike juhtmete ning nende peegelkujutiste



JOON. 35

kogumi välja. Niisuguses väljas juhtiva keskkonna pinna kohale paigutatud tasand osutub samapotentsiaalipinnaks, sest vastasmärkidega laengud on paigutatud sümmeetriliselt selle tasandi suhtes. Järelikult sel teel leitud väli ongi tegelikuks väljaks ruumis juhtiva keskkonna pinna kohal.

Peegelkujutismeetodit saab rakendada ka siis, kui juhtivat keskkonda ümbritseb kaks tasandit, mis lõikuvad nurga  $\alpha = \pi/n$  all ning  $n$  on täisarv. Nurka  $\alpha$  arvestatakse seejuures mööda dielektrikut, milles välja vaadeldakse. Jagades kogu ruumi nurga  $\alpha$  all lõikuvate tasanditega ühesugusteks osadeks (joon. 35), mis on muide võimalik ainult siis, kui  $n$  on täisarv, ja peegeldades juhet järjekorras kõikide nende tasandite suhtes, saame juhtmesüsteemi, mis koosneb tegelikust juhtmest ja peegelkujutiste seeriast. Niisuguse juhtmesüsteemi väljas on tasandid  $A - A'$  ja  $B - B'$  samapotentsiaalipindadeks, sest vastupidiste märkidega laengud on paigutatud sümmeetriliselt nende pindade suhtes. Seepärast ühtibki selle juhtmesüsteemi väli tegeliku väljaga ruumi tolles osas, kus tegelik väli eksisteerib.

Peegelkujutismeetod on täiel määral rakendatav ka mistahes kujuga laetud kehade puhul, kui need kehad on asetatud dielektrikusse juhtivat keskkonda piiravate tasapindade lähedusse. Loomulikult ei ole väli seejuures enam tasaparalleelne.

## ELEKTRIMAHTUVUSE ARVUTUS

## § 31. Ringsilindritevaheline mahtuvus. Kahejuhtmelise liini mahtuvus

Kahe üksildase juhtiva keha vaheline mahtuvus võrdub ühe keha laengu  $q_1 = q$  ja nende kehade potentsiaalide vahe  $U_1 - U_2$  jagatisega, kusjuures eeldatakse, et kehade laengud on absoluutväärtuselt võrdsed ja märgilt vastupidised, s. t.  $q_2 = -q_1 = -q$ . Kahe keha vahelise mahtuvuse arvutus taandub nende kehade potentsiaalide vahe arvutuseks eelnimetatud tingimustel. Leiame tähtsa näitena mahtuvuse avaldise kahe paralleelse juhtiva ringsilindri puhul. Silindrid eeldame olevat lõpmata pikad. Mahtuvuse määrame silindrite osadele, mille pikkus on  $l$ . Paragrahvides 20 ja 21 uuriti selliste silindrite välja.

Potentsiaal mingis punktis, mis on silindrite elektrilistest telgedest kaugusel  $r_1$  ja  $r_2$  (joon. 18 ja 21), määratakse valemiga

$$U = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{r_2}{r_1} + C_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln k + C_2.$$

Meid huvitab silindrite endi potentsiaalide vahe. Silindrite potentsiaalide määramiseks valime nende pindadel punktid, näiteks teineteisele lähimad punktid  $A_1$  ja  $A_2$  (joon. 20 ja 21). Olgu  $k_1$  suhte  $r_2/r_1$  väärtus punktile  $A_1$  ja vastavalt  $k_2$  selle suhte väärtus punktile  $A_2$ . Saame:

$$U_1 - U_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{k_1}{k_2}.$$

Kuna  $q = \tau l$ , siis

$$C = \frac{q}{U_1 - U_2} = \frac{2\pi\epsilon_a l}{\ln \frac{k_1}{k_2}}.$$

Suhet  $r_2/r_1$  välja mistahes punktile saab väljendada seda punkti läbiva samapotentsiaaliringjoone raadiuse  $R$  (joon. 18) ja selle ringjoone keskpunktist püsipotentsiaalitasandini (joonisel 18 nullpotentsiaalitasandini) tuleva kauguse  $h = |x_0|$  kaudu. Kasutades 20. paragrahvis tuletatud valemeid  $h = \frac{1+k^2}{|1-k^2|} b$  ja

$$R = \frac{2k}{|1-k^2|} b, \text{ saame:}$$

$$\frac{h}{R} = \frac{1+k^2}{2k},$$

millest

$$k^2 - 2 \frac{h}{R} k + 1 = 0 \quad \text{ja} \quad k = \frac{h}{R} \pm \sqrt{\frac{h^2}{R^2} - 1}.$$

Plussmärk tuleb võtta siis, kui  $k > 1$ , mis vastab juhtumile  $r_2 > r_1$ , s. t. vastab samapotentsiaaliringjoone asendile  $U = \text{const}$  tasandist vasakul (joon. 21). Miinusmärk tuleb võtta  $k < 1$  puhul, mis vastab samapotentsiaaliringjoone asendile  $U = \text{const}$  tasandist paremal.

Vaatleme erijuhtumeid.

1. *Ringsilindri mahtuvus tasandi suhtes* (joon. 36).

Püsipotentsiaalitasandile  $k_2 = r_2/r_1 = 1$ , sest see tasand asub keset elektriliste telgede vahemaad (joon. 18). Järelikult

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln \left[ \frac{h}{R} + \sqrt{\left(\frac{h}{R}\right)^2 - 1} \right]}.$$

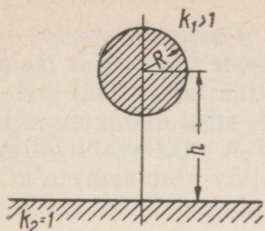
Siin on  $h$  kaugus silindri teljest tasandini ja  $R$  — silindri raadius. Saadud valemit võib kasutada paralleelselt maapinnaga kõrgusele  $h$  riputatud juhtme mahtuvuse arvutamiseks maa suhtes. Kuna tavaliselt  $h \gg R$ , siis ligikaudselt:

$$C \approx \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln \frac{2h}{R}}.$$

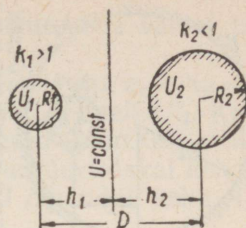
2. *Rööpsete telgedega teineteist mittehõlmavate ringsilindrite vaheline mahtuvus* (joon. 37).

Saame  $k_1 > 1$  ja  $k_2 < 1$  ning järelikult ruutjuuremärgi ees tuleb võtta  $k_1$  valemis plussmärk ja  $k_2$  valemis miinusmärk. Seega

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln \left[ \left( \frac{h_1}{R_1} + \sqrt{\left(\frac{h_1}{R_1}\right)^2 - 1} \right) : \left( \frac{h_2}{R_2} - \sqrt{\left(\frac{h_2}{R_2}\right)^2 - 1} \right) \right]}.$$



JOON. 36



JOON. 37

Arvestades, et mistahes arvule  $x$  kehtib samasus

$$\frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}} = x + \sqrt{x^2 - 1},$$

võime silindritevahelise mahtuvuse valemi ümber kirjutada kujul:

$$C = \frac{2\pi\epsilon_a l}{\ln \left[ \left( \frac{h_1}{R_1} + \sqrt{\left( \frac{h_1}{R_1} \right)^2 - 1} \right) \left( \frac{h_2}{R_2} + \sqrt{\left( \frac{h_2}{R_2} \right)^2 - 1} \right) \right]}.$$

Suurused  $h_1$  ja  $h_2$  määratakse silindrite geomeetriliste telgede vahekauguse  $D$  ning nende raadiuste  $R_1$  ja  $R_2$  kaudu 21. paragrahvis tuletatud valemite abil:

$$h_1 = \left| \frac{D^2 + R_1^2 - R_2^2}{2D} \right|; \quad h_2 = \left| \frac{D^2 + R_2^2 - R_1^2}{2D} \right|.$$

Võrdsete raadiustega kahele silindrile saame, et  $R_1 = R_2 = R$  ja  $h_1 = h_2 = D/2$ . Mahtuvuse valem omandab seejuures kuju

$$C = \frac{\pi\epsilon_a l}{\ln \left( \frac{D}{2R} + \sqrt{\frac{D^2}{4R^2} - 1} \right)}.$$

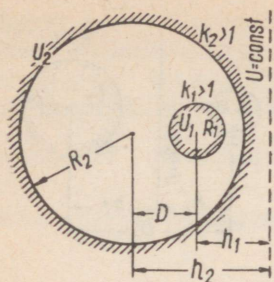
3. Peenikeste juhtmete vaheline mahtuvus. Kahejuhtmelise liini mahtuvus.

Kui  $R_1 \ll D$  ja  $R_2 \ll D$ , siis saame vastavalt  $h_1$  ja  $h_2$  valemitele:

$$h_1 \approx \frac{D}{2}, \quad h_2 \approx \frac{D}{2}, \quad \frac{h_1}{R_1} \approx \frac{D}{2R_1} \gg 1 \quad \text{ja} \quad \frac{h_2}{R_2} \approx \frac{D}{2R_2} \gg 1.$$

Seepärast saab mahtuvuse valemi esitada ligikaudsel kujul:

$$C \approx \frac{2\pi\epsilon_a l}{\ln \left( \frac{D}{R_1} \cdot \frac{D}{R_2} \right)} = \frac{\pi\epsilon_a l}{\ln \frac{D}{\sqrt{R_1 R_2}}}.$$



JOON. 38

Kui juhtmete raadiused on võrdsed,  $R_1 = R_2 = R$ , nagu see tavaliselt esineb kahejuhtmelise liini korral, saame:

$$C \approx \frac{\pi \epsilon_a l}{\ln \frac{D}{R}}.$$

4. Rööpsete mitteühtivate telgedega teineteist hõlmavate ring-silindrite vaheline mahtuvus (joon. 38).

Sel juhtumil saame, et  $k_1 > 1$  ja  $k_2 > 1$ , ning järelikult

$$C = \frac{2\pi \epsilon_a l}{\ln \left[ \left( \frac{h_1}{R_1} + \sqrt{\left( \frac{h_1}{R_1} \right)^2 - 1} \right) : \left( \frac{h_2}{R_2} + \sqrt{\left( \frac{h_2}{R_2} \right)^2 - 1} \right) \right]}.$$

Suurused  $h_1$  ja  $h_2$  määratakse seejuures samade valemitega kui 2. punktis.

5. Ühtivate telgedega ümarsilindrite vaheline mahtuvus.

Viimane valem läheb piiril üle ühtivate telgedega, s. o. koaksi-aalsete silindrite vahelise mahtuvuse valemiks (vt. I osa), kui  $h_1/R_1 \rightarrow \infty$  ja  $h_2/R_2 \rightarrow \infty$ .

Tõepoolest, ühtivate telgedega silindritele  $D = 0$  ning vastavalt  $h_1$  ja  $h_2$  avaldistele saame  $h_1 = \infty$  ja  $h_2 = \infty$ , kusjuures  $h_1/h_2 = 1$ . Seda silmas pidades saame viimasest valemist

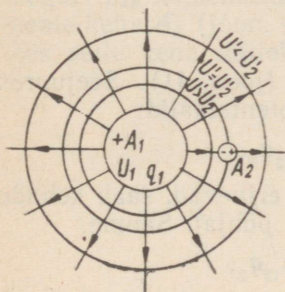
$$C = \frac{2\pi \epsilon_a l}{\ln \frac{R_2}{R_1}}.$$

### § 32. Kehade süsteemi potentsiaalitegurid, elektrostaatilise induktsiooni tegurid ja osamahtuvused

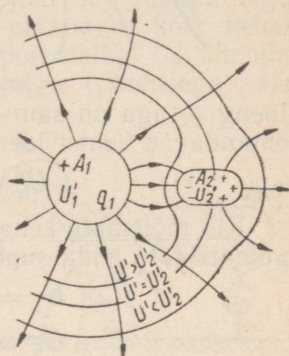
Mitme laetud keha süsteemis on iga keha potentsiaal tingitud mitte ainult antud keha laengust, vaid ka kõikide ülejäänud kehade laengutest. Kui seejuures  $\epsilon_a$  ei sõltu väljatugevusest, on potentsiaal laengute lineaarne funktsioon. Seda väidet kasutati (vt. I osa) lae-

tud kehade energia avaldise tuletamisel. Vaatleme seda väidet ja temast tulenevaid seoseid üksikasjalisemalt.

Kui laadimata juhtiv keha  $A_2$  viia ühe teise laenguga  $q_1$  keha  $A_1$  välja, omandab keha  $A_2$  mingi nullist erineva potentsiaali  $U'_2$ . Kui juurdeviidava keha  $A_2$  mõõtmed on tühiselt väikesed (joon. 39), võib jätta arvestamata välja moonutuse, mis tekib juurdeviidaval kehal indutseeritud laengute ilmumisest. Sel juhtumil omandab keha  $A_2$



JOON. 39



JOON. 40

potentsiaali, mis oli tema asukohas enne tema sinna toomist. Juurdeviidava keha suurte mõõtmete korral (joon. 40) väli moonutub ja potentsiaal  $U'_2$  kujuneb nii keha  $A_1$  laengu  $q_1$  kui ka kehal  $A_2$  indutseeritud laengute mõjul. Järelikult sõltub  $U'_2$  mõlema keha pindade kujust ja kehade vastastikusest asendist. Kui keskkonna dielektriline läbitavus ei sõltu väljatugevusest, muutub potentsiaal  $U'_2$  võrdeliselt laenguga  $q_1$ , sest sel juhtumil laengu  $q_1$  muutumisel laengute jaotus kehade pindadel ja vastavalt välja kuju ei muutu. Seega võib kirjutada:

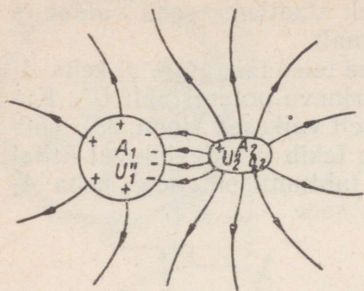
$$U'_2 = \alpha_{21}q_1.$$

Seose keha  $A_1$  potentsiaali  $U'_1$  ja tema laengu  $q_1$  vahel saab väljendada analoogilisel kujul:

$$U'_1 = \alpha_{11}q_1.$$

Tuleb rõhutada, et tegur  $\alpha_{11}$  ei võrdu suurusega  $1/C_1$ , kus  $C_1$  on keha  $A_1$  mahtuvus, mis on määratud eeldusel, et kõik teised kehad on viidud temast lõpmatult kaugemale. Selline võrdsus kehtib ligikaudselt ainult siis, kui juurdeviidav keha  $A_2$  on väga väike (joon. 39). Üldjuhtumil (joon. 40) on potentsiaal  $U'_1$  tingitud nii keha  $A_1$  pinnal jaotatud laengust  $q_1$  kui ka kehal  $A_2$  indutseeritud laengust. Niisiis sõltub tegur  $\alpha_{11}$ , nagu ka tegur  $\alpha_{21}$ , mõlemate kehade kujust ja nende vastastikusest asendist.

Oletame nüüd, et keha  $A_1$  kogulaeng võrdub nulliga, keha  $A_2$



JOON. 41

laeng  $q_2$  aga on samal ajal nullist erinev (joon. 41). Seejuures omandavad kehad laenguga  $q_2$  võrdelised potentsiaalid:

$$U''_1 = \alpha_{12}q_2 \quad \text{ja} \quad U''_2 = \alpha_{22}q_2.$$

Kui mõlemate kehade laengud on nullist erinevad, saab kehade potentsiaale leida superpositsiooni printsiibi põhjal. Saame:

$$U_1 = U'_1 + U''_1 = \alpha_{11}q_1 + \alpha_{12}q_2;$$

$$U_2 = U'_2 + U''_2 = \alpha_{21}q_1 + \alpha_{22}q_2.$$

Üldjuhtumil, kui on  $n$  laetud keha  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , saame võrrandite süsteemi:

$$U_1 = \alpha_{11}q_1 + \alpha_{12}q_2 + \dots + \alpha_{1k}q_k + \dots + \alpha_{1n}q_n;$$

$$U_2 = \alpha_{21}q_1 + \alpha_{22}q_2 + \dots + \alpha_{2k}q_k + \dots + \alpha_{2n}q_n;$$

$$\dots$$

$$U_k = \alpha_{k1}q_1 + \alpha_{k2}q_2 + \dots + \alpha_{kk}q_k + \dots + \alpha_{kn}q_n;$$

$$\dots$$

$$U_n = \alpha_{n1}q_1 + \alpha_{n2}q_2 + \dots + \alpha_{nk}q_k + \dots + \alpha_{nn}q_n.$$

Tegureid  $\alpha$  nimetatakse *potentsiaaliteguriteks*. Nad sõltuvad kehade pindade kujust ja mõõtmetest, kehade vastastikusest asendist ja keskkonna dielektrilisest läbitavusest. Ühesuguste indeksitega tegureid  $\alpha_{kk}$  nimetatakse *omapotentsiaaliteguriteks*, erinevate indeksitega tegureid  $\alpha_{nk}$  aga *vastastikusteks potentsiaaliteguriteks*. Neid võrrandeid kasutatakse kehade potentsiaalide arvutamiseks kehade etteantud laengute järgi.

Sageli tekib pöördülesanne: on teada kehade potentsiaalid, tuleb leida nende laengud. Lahendades ülaltoodud võrrandid laengute suhtes, saame:

$$q_1 = \beta_{11}U_1 + \beta_{12}U_2 + \dots + \beta_{1k}U_k + \dots + \beta_{1n}U_n;$$

$$q_2 = \beta_{21}U_1 + \beta_{22}U_2 + \dots + \beta_{2k}U_k + \dots + \beta_{2n}U_n;$$

$$\dots$$

$$q_k = \beta_{k1}U_1 + \beta_{k2}U_2 + \dots + \beta_{kk}U_k + \dots + \beta_{kn}U_n;$$

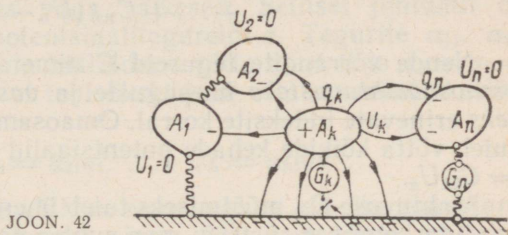
$$\dots$$

$$q_n = \beta_{n1}U_1 + \beta_{n2}U_2 + \dots + \beta_{nk}U_k + \dots + \beta_{nn}U_n.$$

Tegureid  $\beta$  nimetatakse *elektrostaatilise induksiooni teguriteks* — oma elektrostaatilise induksiooni teguriteks ühesuguste indekseite puhul ja *vastastikusteks* elektrostaatilise induksiooni teguriteks erinevate indekseite korral. Neil on mahtuvuse dimensioon.

Oma elektrostaatilise induksiooni teguri  $\beta_{kk}$  saab leida, kui võtta kõikide kehade potentsiaalid peale keha  $A_k$  potentsiaali võrdseteks nulliga. Seejuures saame:  $q_k = \beta_{kk} U_k$ .

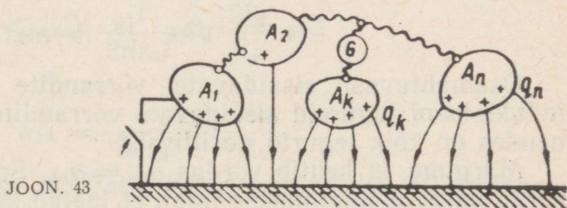
Praktikas võetakse maapinna potentsiaal võrdseks nulliga. Järelikult selleks, et keha omandaks nulliga võrdse potentsiaali, tuleb ta n.ö. «maandada», s. t. ühendada juhi abil maapinnaga. Teguri  $\beta_{kk}$  katseliseks määramiseks tuleb maandada kõik kehad peale keha  $A_k$  (joon. 42) ja anda viimasele potentsiaal  $U_k$ , ühendades selle keha näiteks elektripatarei klemmiga (poolusega), kui



teine klemm (poolus) on maandatud. Mõõtnud voltmeetriga keha ja maa vahelise pinget  $U_k$ , lülitame voltmeetri ja patarei keha küljest lahti ning tühjendame keha  $A_k$  ballistilise galvanomeetri  $G_k$  kaudu maasse. Galvanomeetri hälbe järgi leiame keha laengu  $q_k$  ning järelikult saame arvutada ka otsitava teguri  $\beta_{kk}$ . Kõik ühendus- ja maandusjuhtmed peavad sellel katsel olema väga peenikesed, et nende olemasolu moonutaks välja võimalikult vähe. Ühesuguste indekseitega tegurid on kõik positiivsed:  $\beta_{kk} > 0$ , sest kirjeldatud katsel on keha  $A_k$  potentsiaal ja laeng samamärgilised.

Kui samal katsel mõõta teise galvanomeetri  $G_n$  abil laengu  $q_n$ , mis oli keha  $A_n$  pinnal elektriväljaga seotud ja vabanes keha  $A_k$  tühjendamisel, saame seosest  $q_n = \beta_{nk} U_k$  määrata ka vastastikuse elektrostaatilise induksiooni teguri  $\beta_{nk}$ .

Ilmselt on tegur  $\beta_{nk}$ , nagu kõik vastastikused elektrostaatilise induksiooni tegurid, negatiivne. See selgub vahetult jooniselt 42:



kui  $U_k > 0$ , algavad väljajooned kehal  $A_k$  ja lõpevad kehal  $A_n$  ning järelikult  $q_n < 0$ . Niisiis üldiselt  $k \neq p$  korral  $\beta_{kp} < 0$ .

Sageli kasutatakse võrrandeid mõnevõrra teisel kujul. Nimelt avaldatakse iga keha laeng mitte kehade potentsiaalide, vaid antud keha ja teiste kehade (sealhulgas ka maa) potentsiaalide vahede kaudu. Saame:

$$q_1 = C_{11}(U_1 - 0) + C_{12}(U_1 - U_2) + \dots + C_{1k}(U_1 - U_k) + \dots + C_{1n}(U_1 - U_n);$$

$$q_k = C_{k1}(U_k - U_1) + C_{k2}(U_k - U_2) + \dots + C_{kk}(U_k - 0) + \dots + C_{kn}(U_k - U_n);$$

$$q_n = C_{n1}(U_n - U_1) + C_{n2}(U_n - U_2) + \dots + C_{nk}(U_n - U_k) + \dots + C_{nn}(U_n - 0).$$

Nende võrrandite tegureid  $C$  nimetatakse *osamahtuvusteks* — *omaosamahtuvusteks* ühesuguste ja *vastastikusteks osamahtuvusteks* erinevate indeksite korral. Omaosamahtuvuse  $C_{kk}$  määramiseks tuleb võtta kõikide kehade potentsiaalid võrdseiks  $U_k$ -ga. Siis  $q_k = C_{kk}U_k$ .

Mahtuvuse  $C_{kk}$  mõõtmiseks tuleb ühendada omavahel kõik kehad, laadida kogu see süsteem maa suhtes potentsiaalini  $U_k$  ja seejärel, olles emj. allika lahti lülitanud, tühjendada süsteem maasse (joon. 43). Galvanomeeter peab olema seejuures ühendatud nii, et mõõdetaks ainult keha  $A_k$  laengut  $q_k$ .

On selge, et  $C_{kk} > 0$ , sest süsteemi positiivse potentsiaali korral on ka süsteemi laeng positiivne.

Samal tingimusel  $U_1 = U_2 = \dots = U_k = \dots = U_n$  saame elektrostaatilise induktsiooni tegureid sisaldavatest võrranditest:

$$q_k = (\beta_{k1} + \beta_{k2} + \dots + \beta_{kk} + \dots + \beta_{kn})U_k.$$

Järelikult

$$C_{kk} = \beta_{k1} + \beta_{k2} + \dots + \beta_{kk} + \dots + \beta_{kn}.$$

Vastastikune osamahtuvus  $C_{nk}$  määratakse samast katsest, kust tegur  $\beta_{nk}$ . Tõepoolest,  $U_1 = U_2 = \dots = U_{k-1} = U_{k+1} = \dots = U_n = 0$  ja  $U_k \neq 0$  korral saame osamahtuvusi sisaldavatest võrranditest, et  $q_n = -C_{nk}U_k$ . Järelikult  $C_{nk} = -\beta_{nk}$ . Niisiis üldiselt  $k \neq p$  korral

$$C_{kp} = -\beta_{kp} \quad \text{ja} \quad C_{kp} > 0.$$

Osamahtuvusi sisaldavate võrrandite eelis elektrostaatilise induktsiooni tegureid sisaldavate võrrandite ees seisneb selles, et nendes on kõik tegurid positiivsed.

Märgime, et kehtib võrdus  $\alpha_{kp} = \alpha_{pk}$ . Selle võrduse õigsust on kerge näidata tingimuse põhjal, et laetud kehade süsteemi energia

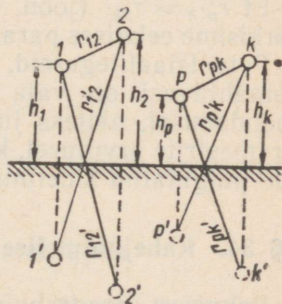
ei sõltu süsteemi laengute kujunemise järjekorrast analoogiliselt sellele, kuidas tõestati võrdus  $M_{kp} = M_{pk}$  (vt. I osa). Determinantide abil on kerge näidata, et ka  $\beta_{kp} = \beta_{pk}$ . Tingimusest  $C_{kp} = -\beta_{kp}$  järeldeb, et  $C_{kp} = C_{pk}$ . See seos väljendab vastastikkuse printsiipi laetud kehade süsteemi kohta.

### § 33. Väga pikkade rööpjuhtmete süsteemi potentsiaalitegurid

Vaatleme praktikas väga tähtsat näidet — üksteisega rööpselt maapinna kohale tõmmatud juhtmete süsteemi (joon. 44). Juhtmed eeldame olevat nii pikad, et välja saab lugeda tasaparalleelseks. Juhtmete läbimõõdud on tavaliselt nende telgede vahekauguse ja riputuskõrgusega võrreldes väga väikesed. Sellisel juhtumil on kõige lihtsam määrata potentsiaalitegureid  $\alpha$ . Tegurite  $\alpha_{11}$ ,  $\alpha_{21}$ ,  $\alpha_{31}, \dots, \alpha_{n1}$  määramiseks on küllaldane võtta  $q_1 \neq 0$  ja  $q_2 = q_3 = \dots = q_n = 0$ . Seejuures ei tohi ükski juhe olla maandatud. Võrandid omandavad kuju:

$$U_1 = \alpha_{11}q_1, \quad U_2 = \alpha_{21}q_1, \quad \dots, \quad U_k = \alpha_{k1}q_1, \quad \dots$$

Laetud esimese juhtme väli on samasugune kui ühe maapinna kohale tõmmatud juhtme korral (joon. 33), sest teiste juhtmete olemasolust tingitud väljamoanutuse võib nende ristlõigete väiksuse



JOON. 44

tõttu jätta arvestamata. Sellisel tingimusel on tegur  $\alpha_{11}$  juhtme maa suhtes oleva mahtuvuse pöördväärtuseks. Selle mahtuvuse avaldis saadi 31. paragrahvis ülejäänud juhtmete puudumise eeldusel. Järelikult

$$\alpha_{11} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{2h_1}{R_1}$$

ja üldiselt

$$\alpha_{kk} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{2h_k}{R_k}.$$

Tegurit  $\alpha_{21}$  on kerge määrata, kui panna tähele, et laadimata juhtmed omandavad laetud juhtme väljas oma ristlõigete väiksuse

tõttu samad potentsiaalid, mis on juhtmete asukohtades nende puudumiselgi. Kasutades 20. paragrahvis tuletatud võrrandit

$$U = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{r_2}{r_1} + C_2,$$

leiame esimese juhtme laengust ja esimese juhtme maapinna suhtes võetud peegelkujutise laengust põhjustatud potentsiaali teise juhtme teljel. Konstant  $C_2$  võrdub antud juhtumil nulliga, sest maapinnal asuvate punktide suhtes on kaugused  $r_1$  ja  $r_2$  juhtmeni ning tema peegelkujutiseni omavahel võrdsed ja peale selle on nende punktide suhtes  $U = 0$ .

Märkides, et teise juhtme teljel asuva punkti suhtes tuleb võtta  $r_1 = r_{12}$  ja  $r_2 = r_{1'2}$  (joon. 44), saame:

$$U_2 = \frac{q_1}{2\pi\epsilon_a l} \ln \frac{r_{1'2}}{r_{12}}.$$

Järelikult

$$\alpha_{21} = \frac{1}{2\pi\epsilon_a l} \ln \frac{r_{1'2}}{r_{12}}.$$

Üldiselt

$$\alpha_{kp} = \frac{1}{2\pi\epsilon_a l} \ln \frac{r_{p'k}}{r_{pk}}.$$

Et  $r_{p'k} = r_{pk'}$  (joon. 44), siis  $\alpha_{kp} = \alpha_{pk}$ , mida üldjuhtumi kohta märkisime eelmises paragrahvis.

Potentsiaalitegureid, elektrostaatilise induktsiooni tegureid ja osamahtuvusi on vaja arvutada paljude praktiliste ülesannete lahendamisel, näiteks juhtmete keeruka paigutusega ülekandeliini parameetrite arvutusel, kõrgepingeliini mõju selgitamisel tema kõrvale paigutatud sideliinidele jne.

### § 34. Kahejuhtmeline liini mahtuvus maa mõju arvestamisel

Eelmises paragrahvis saadud avaldised maapinna kohale tõmmatud rööpjuhtmete süsteemi potentsiaaliteguritele võimaldavad leida kahejuhtmeline liini mahtuvuse avaldise maa mõju arvestamisel.

Kahe juhtme korral

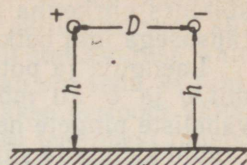
$$U_1 = \alpha_{11}q_1 + \alpha_{12}q_2; \quad U_2 = \alpha_{21}q_1 + \alpha_{22}q_2.$$

Olgu juhtmete laengud absoluutväärtuselt võrdsed ja märgilt vastupidised:  $q_2 = -q_1$ . Asendades laengu  $q_2$  laenguga  $-q_1$ , saame:

$$U_1 = (\alpha_{11} - \alpha_{12})q_1; \quad U_2 = (\alpha_{21} - \alpha_{22})q_1.$$

Järelikult otsitav mahtuvus

$$C = \frac{q_1}{U_1 - U_2} = \frac{1}{\alpha_{11} + \alpha_{22} - 2\alpha_{12}}.$$



Leiame seda valemite kasutades maapinnast ühesugusele kõrgusele  $h$  ja teineteisest kaugusele  $D$  riputatud juhtmetega kahejuhtmelise liini mahtuvuse (joon. 45). Juhtmete raadiused on ühesugused ja võrduvad  $R$ -ga. Vastavalt eelmises paragrahvis saadud valemitele leiame:

$$a_{11} = a_{22} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{2h}{R};$$

$$a_{12} = a_{21} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{\sqrt{(2h)^2 + D^2}}{D}.$$

Järelikult

$$C = \frac{1}{2(a_{11} - a_{12})} = \frac{\pi\epsilon_0 l}{\ln \left( \frac{2h}{R} \cdot \frac{D}{\sqrt{4h^2 + D^2}} \right)}.$$

Kui riputuskõrgus  $h$  on palju suurem juhtmete vahekaugusest  $D$ , siis  $\sqrt{4h^2 + D^2} \approx 2h$  ja

$$C \approx \frac{\pi\epsilon_0 l}{\ln \frac{D}{R}},$$

s. t. saame valemi, mis tuletati varem (§ 31) maa mõju arvestamata.

### § 35. Kolmefaasilise liini mahtuvus

Kõik ülal saadud seosed on rangelt võttes õiged ainult elektrostaatiliselt välja korral. Ent suure täpsusega võib neid kasutada ka ülekandeliinide parameetrite arvutamiseks tehnilisel sagedusel. Kriteeriumiks, mille põhjal vahelduvat elektrivälja liini juhtmete lähedal üksikutel hetkedel võiks ligikaudselt vaadelda elektrostaatiliselt väljana, saab võtta vahekorra elektromagnetilise laine pikkuse ja selle piirkonna joonmõõtmete vahel, milles välja vaadeldakse. Elektromagnetilise laine pikkuse  $\lambda$  ja levimiskiiruse  $v$  küsimust vaadeldakse 75. ja 76. paragrahvis. Kehtib seos  $\lambda = v/f$ , kus  $f$  on võnkesagedus. Õhus  $v = 3 \cdot 10^8$  km/s ja sagedusel 50 Hz saame  $\lambda = 6000$  km. Lainepikkuse ulatusel muutub väljatugevuse võnkumise faas  $2\pi$  võrra. Lainepikkusest  $\lambda$  tunduvalt väiksemate joonmõõtmetega piirkonnas saab väljatugevuse võnkumise faasi lugeda

kõikides piirkonna punktides ühesuguseks ja vaadelda välja suure täpsusega igal hetkel elektrostaatilisena.

Laenguid ja potentsiaale siduvates võrrandites tuleb sel juhtumil  $q$  ja  $U$  all mõista juhtmete laengute ning juhtmete ja maa vaheliste pingete hetkväärtusi. Siinusrežiimi korral saab need võrrandid kirjutada sümbolkujul laengute ja pingete kompleksefektiiiväärtustele  $\dot{q}$  ja  $\dot{U}$ . Kolmejuhtmeline liini korral omandavad võrrandid kuju:

$$\begin{aligned}\dot{q}_1 &= \beta_{11}\dot{U}_1 + \beta_{12}\dot{U}_2 + \beta_{13}\dot{U}_3; \\ \dot{q}_2 &= \beta_{21}\dot{U}_1 + \beta_{22}\dot{U}_2 + \beta_{23}\dot{U}_3; \\ \dot{q}_3 &= \beta_{31}\dot{U}_1 + \beta_{32}\dot{U}_2 + \beta_{33}\dot{U}_3.\end{aligned}$$

Oletame, et pinged  $\dot{U}_1$ ,  $\dot{U}_2$  ja  $\dot{U}_3$  moodustavad sümmeetrilise süsteemi, s. t.  $\dot{U}_2 = a^2\dot{U}_1$  ja  $\dot{U}_3 = a\dot{U}_1$ , kus  $a$  on komplekskordaja (vt. II osa). Saame:

$$a = e^{j\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$a^2 = e^{j\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$a^3 = 1, \quad \frac{1}{a} = a^2, \quad \frac{1}{a^2} = a.$$

Nüüd saab võrrandid kirjutada kujul:

$$\dot{q}_1 = (\beta_{11} + a^2\beta_{12} + a\beta_{13})\dot{U}_1;$$

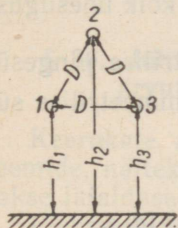
$$\dot{q}_2 = (\beta_{22} + a^2\beta_{23} + a\beta_{21})\dot{U}_2;$$

$$\dot{q}_3 = (\beta_{33} + a^2\beta_{31} + a\beta_{32})\dot{U}_3.$$

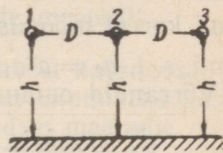
Sulgudes olevad suurused on reaalsed tingimusel, et liini juhtmed on paigutatud üksteise suhtes sümmeetriliselt, s. t. kui  $\beta_{12} = \beta_{23} = \beta_{31}$ , sest  $(a + a^2) = -1$  on reaalarv. Seejuures kujutavad sulgudes olevad suurused juhtmete mahtuvusi maa suhtes ehk liini mahtuvust ühe faasi kohta tähtühenduse puhul.

Juhtmete mittesümmeetrilisel paigutusel, s. t. kui  $\beta_{12} \neq \beta_{23} \neq \beta_{31}$ , osutuvad sulgudes olevad suurused kompleksseteks. Nende reaalosad kujutavad juhtmete mahtuvusi maa suhtes, sest nad määravad pingega faasis muutuva laenguosa ja järelikult määravad nad pinge suhtes faasilt nurga  $\pi/2$  võrra nihutatud reaktiivse voolukomponendi. Sulgudes asuvate suuruste imaginaarosad määravad pingetega faasis või vastandfaasis olevad aktiivsed voolukomponendid juhtmetes. Märgime, et kõigi kolme faasi imaginaarosade summa võrdub nulliga, sest summeerimisel saame kõikide tegurite

$\beta_{12}$ ,  $\beta_{23}$  ja  $\beta_{31}$  ette reaalsed kordajad  $(a + a^2) = -1$ . See tähendab, et kui nad ühtedes faasides määravad positiivse aktiivvõimsuse, siis teistes faasides määravad nad absoluutväärtuselt samasuguse, kuid negatiivse aktiivvõimsuse. Füüsikaliselt tähendab see seda, et juhtmete mittersümmeetrilise paigutuse korral kantakse perioodi vältel mingi hulk energiat elektrostaatilise induktsiooni teel ühest faasist teise. See omapärane nähtus avaldub sümmeetriliste pingete puhul voolude mittersümmeetrias. Loomulikult ei ole voolude mittersümmeetria tingitud ainult suuruselt ja märgilt erinevate aktiivkomponentide olemasolust, vaid ka juhtmete erinevatest mahtuvustest tingitud reaktiivkomponentide erinevusest.



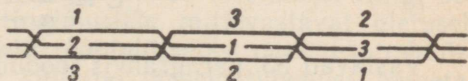
JOON. 46



JOON. 47

Täieliku sümmeetria juhtmete paigutuses võib saavutada ainult kaablis, milles maandatud mantel haarab kõiki kolme juhet sümmeetriliselt (joon. 32). Õhuliinis toob maa olemasolu sisse mittersümmeetria isegi juhtmete paigutusel võrdkülgse kolmnurga tipudesse (joon. 46). Seda enam osutub mittersümmeetriliseks liin, mille juhtmete paigutus vastab joonisele 47.

JOON. 48



Tavaliselt muudetakse võrdsete vahemaade tagant juhtmete paigutust mastidel nii, et järk-järgult kujuneb juhtmete perioodiline ümberasetus — transpositsioon (joon. 48). Transpositsiooni põhi-eesmärgiks on vähendada kõrgepingelise tugevooluliini juhtmete elektrostaatilist ja elektromagnetilist mõju naabruses asuvatele sideliinidele. Transpositsiooni korral saadakse kogu liini kõikide faaside parameetrite keskväärtused ühesugused ja liini tervikuna võib vaadelda sümmeetrilisena. Keskmiselt kogu liini kohta täisperioodi vältel energia ülekandumist ühest faasist teise elektrostaatilise induktsiooni teel ei toimu.

Praktika jaoks küllaldase täpsusega lahenduse võib saada, kui tuua alljärgnevasse võrrandite süsteemi kogu liini potentsiaali-egurite keskväärtused  $a$ :

$$\dot{U}_1 = a_{11}\dot{q}_1 + a_{12}\dot{q}_2 + a_{13}\dot{q}_3;$$

$$\dot{U}_2 = \alpha_{21}\dot{q}_1 + \alpha_{22}\dot{q}_2 + \alpha_{23}\dot{q}_3;$$

$$\dot{U}_3 = \alpha_{31}\dot{q}_1 + \alpha_{32}\dot{q}_2 + \alpha_{33}\dot{q}_3.$$

Tähistame

$$\alpha_m = \frac{\alpha_{12} + \alpha_{23} + \alpha_{31}}{3};$$

$$\alpha_0 = \frac{\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}}{3},$$

kus  $\alpha_{12}$ ,  $\alpha_{23}$ ,  $\alpha_{31}$ ,  $\alpha_{11}$ ,  $\alpha_{22}$ ,  $\alpha_{33}$  on potentsiaalitegurite tõelised väärtused ühe liiniosa kohta. Edaspidi loeme, et liini kohta tervikuna kõik erinevate indeksitega tegurid  $\alpha$  võrduvad  $\alpha_m$ -ga ja kõik ühesuguste indeksitega tegurid  $\alpha$  võrduvad  $\alpha_0$ -ga.

On loomulik, et sümmeetrilises liinis sümmeetrilise pingesüsteemi korral moodustavad ka laengud  $\dot{q}_1$ ,  $\dot{q}_2$ ,  $\dot{q}_3$  sümmeetrilise süsteemi, s. t.  $\dot{q}_2 = a^2\dot{q}_1$ ,  $\dot{q}_3 = a\dot{q}_1$ .

Võrrandid omandavad sel puhul kuju:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \alpha_0\dot{q}_1 + \alpha_m\dot{q}_2 + \alpha_m\dot{q}_3 = [\alpha_0 + (a + a^2)\alpha_m]\dot{q}_1 = \\ &= (\alpha_0 - \alpha_m)\dot{q}_1; \end{aligned}$$

$$\dot{U}_2 = \alpha_m\dot{q}_1 + \alpha_0\dot{q}_2 + \alpha_m\dot{q}_3 = (\alpha_0 - \alpha_m)\dot{q}_2;$$

$$\dot{U}_3 = \alpha_m\dot{q}_1 + \alpha_m\dot{q}_2 + \alpha_0\dot{q}_3 = (\alpha_0 - \alpha_m)\dot{q}_3.$$

Järelikult otsitav juhtme mahtuvus maa suhtes

$$C = \frac{1}{\alpha_0 - \alpha_m}.$$

Vastavalt 33. paragrahvis toodud valemitele saame:

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi\epsilon_a l} \cdot \frac{1}{3} \left( \ln \frac{2h_1}{R_1} + \ln \frac{2h_2}{R_2} + \ln \frac{2h_3}{R_3} \right);$$

$$\alpha_m = \frac{1}{2\pi\epsilon_a l} \cdot \frac{1}{3} \left( \ln \frac{r_{12'}}{r_{12}} + \ln \frac{r_{23'}}{r_{23}} + \ln \frac{r_{31'}}{r_{31}} \right).$$

Seega

$$C = \frac{2\pi\epsilon_a l}{\ln \left( 2 \frac{\sqrt[3]{h_1 h_2 h_3}}{\sqrt[3]{R_1 R_2 R_3}} \cdot \frac{\sqrt[3]{r_{12}' r_{23}' r_{31}'}}{\sqrt[3]{r_{12} r_{23} r_{31}}} \right)}.$$

Juhtmete paigutusel vastavalt joonise 47 skeemile saame:

$$r_{12} = r_{23} = D, \quad r_{31} = 2D; \quad h_1 = h_2 = h_3 = h;$$

$$r_{12'} = r_{23'} = \sqrt{4h^2 + D^2}; \quad r_{31'} = \sqrt{4h^2 + 4D^2}.$$

$$C = \frac{2\pi\epsilon_a l}{\ln\left(\frac{2hD}{R\sqrt[3]{(4h^2+D^2)\sqrt{h^2+D^2}}}\right)}$$

Jättes maa mõju arvestamata, s. t. lugedes  $D \ll h$ , saame:

$$C = \frac{2\pi\epsilon_a l}{\ln\frac{\sqrt[3]{2D}}{R}}$$

### § 36. Juhtmesüsteemi potentsiaalitegurite ja mahtuvuste arvutamine keskmiste potentsiaalide meetodil

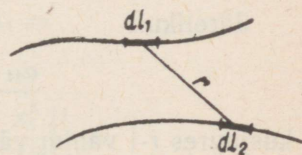
Keerukate, mitmest lõpliku pikkusega juhtmest koosnevate süsteemide, näiteks radioantennide mahtuvuse arvutamiseks kasutatakse laialdaselt Howe' poolt esitatud ligikaudset meetodit.

Elektrostaatilises väljas on juhtiva keha potentsiaal kõikides juhi punktides ühesugune, laeng aga jaotub juhi pinnal ebaühtlaselt. Howe soovitas mahtuvuse arvutamisel lähtuda vastupidisest, sisuliselt tegelikkusele mittevastavast oletusest. Nimelt eeldatakse, et laeng jaotub juhtide pinnal ühtlaselt ja joonjuhtmete korral juhtmete pikkusel ühtlaselt. Arvutatakse potentsiaalijaotus juhtide pinnal või juhtmete pikkusel ja mahtuvuse valemisse viiakse selliselt arvutatud potentsiaalide keskmine väärtus. Vastavalt öeldule nimetame seda meetodit *keskmiste potentsiaalide meetodiks*. Kuigi see meetod rajaneb reaalsele tingimustele mittevastaval oletusel, annab ta real juhtumitel, näiteks rööpjuhtmetest moodustatud süsteemi mahtuvuse arvutamisel, küllaltki täpseid tulemusi. Nimetatud asjaolu on seletatav sellega, et laengu jaotumise ebaühtlus avaldub märgatavalt ainult selliste juhtmete otstel. Arvutus aga lihtsustub tunduvalt, sest laengu etteantud jaotuse korral arvutatakse potentsiaal valemitega

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int_s \frac{\sigma ds}{r} \quad \text{ja} \quad U = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int_l \frac{\tau dl}{r}$$

Olgu meil kaks juhtmelõiku pikkustega  $l_1$  ja  $l_2$  (joon. 49). Tuleb arvutada potentsiaalitegur  $\alpha_{12}$ . Oletame, et  $q_1 = 0$  ja  $q_2 \neq 0$ . Siis

$$U_1 = \alpha_{12}q_2.$$



JOON. 49

Kasutades ligikaudset meetodit eeldame, et  $q_2$  on jaotunud piki teist juhet ühtlaselt joontihedusega  $\tau_2 = q_2/l_2$ . Potentsiaal laengust  $q_2$  esimese juhtme mingis punktis

$$U'_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int_{l_2} \frac{\tau_2 dl_2}{r} = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_a l_2} \int \frac{dl_2}{r},$$

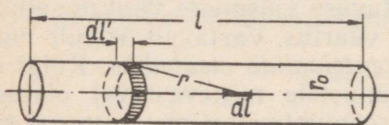
kusjuures integreerimine toimub piki kogu teist juhet. Esimese juhtme potentsiaali keskväärtaus saadakse integreerimisel piki esimest juhet:

$$U_1 = \frac{1}{l_1} \int_{l_1} U'_1 dl_1 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_a l_1 l_2} \int \int \frac{dl_1 dl_2}{r}.$$

Seega avaldub otsitav potentsiaalitegur valemiga

$$a_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_a l_1 l_2} \int \int \frac{dl_1 dl_2}{r}.$$

Uhesuguste indeksitega potentsiaaliteguri, näiteks  $a_{11}$  avaldise ringristlõikega sirge juhtmelõigu kohta saab leida järgmiste arutluste teel. Eeldame tehtud oletuse kohaselt, et juhtme pinnal asuv laeng on juhtme pikkusel jaotunud ühtlaselt. Leiame selle laengu poolt juhtme telje erinevates punktides tekitatud potentsiaali  $U'$  ja arvutame selle keskmise väärtuse  $U$  piki telge. Olgu  $r$  juhtme telje suunas pikkust  $dl'$  omava juhtmepinna rõngakujulise elemendi



JOON. 50

kaugus juhtme telje elemendini  $dl$  (joon. 50). Seejuures on  $l$  juhtme pikkus ja  $r_0$  tema ristlõike raadius. Juhtme kogulaengust  $q$  põhjustatud potentsiaal  $U'$  telje mingis punktis

$$U' = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \cdot \frac{q}{l} \int \frac{dl'}{r}.$$

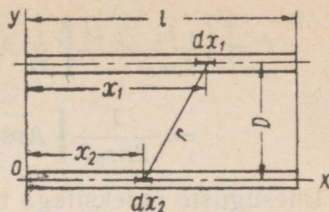
Potentsiaali keskväärtaus piki kogu telge

$$U = \frac{1}{l} \int_l U' dl = \frac{q}{4\pi\epsilon_a l^2} \int_l \int_l \frac{dl' dl}{r}.$$

Järelikult

$$a_{11} = \frac{1}{4\pi\epsilon_a l^2} \int_l \int_l \frac{dl' dl}{r},$$

kusjuures  $r$ -i vähim väärtus on  $r_0$ .



Kasutades keskmiste potentsiaalide meetodit määrame näiteks potentsiaaliteguri  $\alpha_{12}$  rööpsete, ühiselt ristsirgelt algavate ja teineteiselt kaugusele  $D$  paigutatud ühesuguse pikkusega  $l_1 = l_2 = l$  juhtmelõikudele. Koordinaatteljed paigutame vastavalt joonisele 51. Saame:

$$\alpha_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_a l^2} \int_0^l \int_0^l \frac{dx_1 dx_2}{\sqrt{D^2 + (x_2 - x_1)^2}}.$$

Ent

$$\begin{aligned} \int_0^l \frac{dx_2}{\sqrt{D^2 + (x_2 - x_1)^2}} &= \int_{-x_1}^{l-x_1} \frac{d(x_2 - x_1)}{\sqrt{D^2 + (x_2 - x_1)^2}} = \\ &= \text{Arsh} \frac{l-x_1}{D} + \text{Arsh} \frac{x_1}{D}. \end{aligned}$$

Järelikult

$$\alpha_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_a l^2} \int_0^l \left( \text{Arsh} \frac{l-x_1}{D} + \text{Arsh} \frac{x_1}{D} \right) dx_1.$$

Kerge on veenduda, et

$$\int_0^l \text{Arsh} \frac{l-x_1}{D} dx_1 = \int_0^l \text{Arsh} \frac{x_1}{D} dx_1.$$

Märkides, et

$$\begin{aligned} \int \text{Arsh} y dy &= y \text{Arsh} y - \int y d(\text{Arsh} y) = \\ &= y \text{Arsh} y - \int \frac{y dy}{\sqrt{1+y^2}} = y \text{Arsh} y - \sqrt{1+y^2} + \text{const}, \end{aligned}$$

leiame:

$$\begin{aligned} \alpha_{12} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_a l^2} 2 \int_0^l \text{Arsh} \frac{x_1}{D} dx_1 = \\ &= \frac{D}{2\pi\epsilon_a l^2} \left[ \frac{x_1}{D} \text{Arsh} \frac{x_1}{D} - \sqrt{1 + \frac{x_1^2}{D^2}} \right]_0^l = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi\epsilon_a l} \cdot \frac{D}{l} \left[ \frac{l}{D} \operatorname{Arsh} \frac{l}{D} - \sqrt{1 + \frac{l^2}{D^2} + 1} \right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi\epsilon_a l} \left[ \operatorname{Arsh} \frac{l}{D} - \sqrt{\frac{D^2}{l^2} + 1} + \frac{D}{l} \right].$$

Uhesuguste indeksitega tegurite  $\alpha_{11}$  ja  $\alpha_{22}$  arvutamisel raadiust  $r_0$  omava ringristlõikega sirge juhtme kohta annab integreerimistulemus valemi, mis saadakse äsjaleitud valemist  $D$  asendamisel  $r_0$ -ga. Järelikult

$$\alpha_{11} = \frac{1}{2\pi\epsilon_a l} \left[ \operatorname{Arsh} \frac{l}{r_0} - \sqrt{\frac{r_0^2}{l^2} + 1} + \frac{r_0}{l} \right].$$

Kuna selle valemi tuletamisel teise juhtme olemasolu ei arvestatud, saadakse üksildase lõpliku pikkusega silindri mahtuvuseks

$$C = \frac{1}{\alpha_{11}} = \frac{2\pi\epsilon_a l}{\operatorname{Arsh} \frac{l}{r_0} - \sqrt{\frac{r_0^2}{l^2} + 1} + \frac{r_0}{l}}.$$

Märgime, et kehtib seos

$$\operatorname{Arsh} \frac{l}{r_0} = \ln \left( \frac{l}{r_0} + \sqrt{\frac{l^2}{r_0^2} + 1} \right).$$

Kui  $l \gg r_0$ , saame:

$$\operatorname{Arsh} \frac{l}{r_0} - \sqrt{\frac{r_0^2}{l^2} + 1} + \frac{r_0}{l} \approx \ln \frac{2l}{r_0} - 1 =$$

$$= \ln \frac{l}{r_0} + \ln 2 - 1 = \ln \frac{l}{r_0} - 0,307.$$

Järelikult

$$C \approx \frac{2\pi\epsilon_a l}{\ln \frac{l}{r_0} - 0,307} \approx \frac{2\pi\epsilon_a l}{\ln \frac{l}{r_0}}.$$

Mahtuvus silindrite vahel leitakse võrrandite süsteemist

$$U_1 = \alpha_{11}q_1 + \alpha_{12}q_2; \quad U_2 = \alpha_{21}q_1 + \alpha_{22}q_2.$$

Võttes  $q_2 = -q_1$  ning arvestades, et  $\alpha_{21} = \alpha_{12}$  ja  $\alpha_{22} = \alpha_{11}$ , saame:

$$U_1 = (\alpha_{11} - \alpha_{12})q_1; \quad U_2 = -(\alpha_{11} - \alpha_{12})q_1,$$

$$C = \frac{q_1}{U_1 - U_2} = \frac{1}{2(\alpha_{11} - \alpha_{12})},$$

kus  $\alpha_{12}$  ja  $\alpha_{11}$  leitakse äsjasaadud valemite põhjal.

Kui  $l \gg r_0$  ja  $l \gg D$ , saame:

$$\alpha_{11} - \alpha_{12} \approx \frac{1}{2\pi\epsilon_a l} \left[ \left( \ln \frac{2l}{r_0} - 1 \right) - \left( \ln \frac{2l}{D} - 1 \right) \right] = \\ = \frac{1}{2\pi\epsilon_a l} \ln \frac{D}{r_0}$$

ja järelikult

$$C \approx \frac{\pi\epsilon_a l}{\ln \frac{D}{r_0}},$$

mis ühtib kahejuhtmelise liini mahtuvuse varentuletatud valemiga (vt. § 31).

### § 37. Mahtuvuse arvutamine väljapildi järgi

Kahe pika silindrilise keha vahelise või kahe ühise teljega pöördkeha vahelise mahtuvuse saab arvutada väljapildi järgi, mis on joonestatud näiteks paragrahvides 23...25 esitatud ligikaudse graafilise meetodi alusel.

Ühe toru ristlõiget läbiva nihkevektori voo  $\Delta\Psi_D$  suhe potentsiaali juurdekasvusse  $\Delta U$  naabersamapotentsiaalijoonte vahel on vastavalt 25. paragrahvis toodud võrranditele:

tasaparalleelse välja korral

$$\left| \frac{\Delta\Psi_D}{\Delta U} \right| = \epsilon_{ap} l \frac{\Delta a}{\Delta n} = \frac{1}{k_1} l$$

ja pöördkehade välja korral

$$\left| \frac{\Delta\Psi_D}{\Delta U} \right| = 2\pi r \epsilon_{ap} \frac{\Delta a}{\Delta n} = 2\pi \frac{1}{k_2}.$$

Keha laeng võrdub vastavalt Maxwelli postulaadile kogu nihkevooga läbi kõikide kehal algavate torude. Kui nende torude arv on  $m_1$ , siis  $q = m_1 \Delta\Psi_D$ . Kahe keha potentsiaalide vahe  $U_1 - U_2 = m_2 \Delta U$ , kus  $m_2$  on naabersamapotentsiaalijoonte vaheliste intervallide arv. Seega

$$C = \frac{q}{U_1 - U_2} = \left| \frac{\Delta\Psi_D}{\Delta U} \right| \frac{m_1}{m_2} = k_3 \frac{m_1}{m_2},$$

kusjuures tasaparalleelse välja korral  $k_3 = \frac{1}{k_1}$  ja pöördkehade välja

korral  $k_3 = \frac{2\pi}{k_2}$ . Arv  $k_3$  antakse välja graafilisele konstrueerimisele asumisel ette. Sellega määratakse väljasilmade kuju, s. t. suhe  $\Delta a / \Delta n$ . Arvud  $m_1$  ja  $m_2$  leitakse konstrueeritud väljapildist.

## NELJAS PEATÜKK

### ALALISVOOLUDE ELEKTRIVÄLI

#### § 38. Alalisvoolude elektromagnetilise välja võrrandid

Käesolevas peatükis vaatleme liikumatutes juhtides ja juhtivate keskkondades kulgevate alalisvoolude välja. Alalisvool saab eksisteerida ainult suletud juhtivas ahelas. Kui ahela elektritakistus on nullist erinev, tekitab voolu läbimine tema pingelangu. Järelikult nii alalisvooluga juhte ümbritsevas dielektrikus kui ka juhtides endis on olemas mitte ainult magnetväli, vaid ka elektriväli. Neid alalisvälju nimetatakse *statsionaarseiks*.

Maxwelli esimene võrrand  $\text{rot } \mathbf{H} = \delta$  näitab sel juhtumil, et  $\mathbf{H}$  ja järelikult ka  $\mathbf{B}$  nagu  $\delta$ -gi ei sõltu ajast. Seepärast järeldub Maxwelli teisest võrrandist  $\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ , et väljaspool emj. allikaid  $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ .

Seega omandavad elektromagnetilise välja võrrandid alalisvoolude korral liikumatus juhtivas keskkonnas väljaspool emj. allikaid asuva ruumi kohta kuju:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \delta; \quad \text{rot } \mathbf{E} = 0; \quad \delta = \gamma \mathbf{E};$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_a \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}; \quad \text{div } \mathbf{D} = \rho, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0.$$

Tingimus  $\text{rot } \mathbf{E} = 0$  näitab, et väljaspool emj. allikaid on alalisvoolude elektriväli nagu elektrostaatiline väligi *pöörisevaba*. Selline väli on *potentsiaalväli*, s. t. tema iseloomustamiseks võib sisse tuua koordinaatide funktsiooni  $U(x, y, z)$ , mida nimetatakse elektripotentsiaaliks, kusjuures  $\mathbf{E} = -\text{grad } U$ .

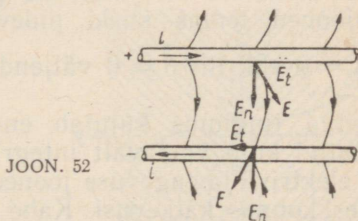
### § 39. Elektriväli alalisvooludega juhtmeid ümbritsevas dielektrikus

Vaatleme algul elektrivälja alalisvooludega juhtmeid ümbritsevas dielektrikus. Kuna voolude puudumisel dielektrikus tuleb võtta  $\rho = 0$ , siis iseloomustatakse dielektriku välja võrranditega

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0, \text{ s. t. } \mathbf{E} = -\text{grad } U; \mathbf{D} = \epsilon_a \mathbf{E}; \text{div } \mathbf{D} = 0.$$

Homogeense keskkonna korral, kui  $\epsilon_a = \text{const}$ , annavad need võrrandid  $\text{div } \mathbf{E} = 0$  ehk  $\text{div grad } U = 0$ , s. t. potentsiaal rahuldab Laplace'i võrrandit.

Seega dielektrikus eneses ei erine selline väli millegi poolest elektrostaatilisest väljast. Ent piiritingimused juhtide pinnal ei vasta enam nendele, mis esinevad elektrostaatikas. Elektrostaatilise ülesande korral on iga juhi pind samapotentsiaalipinnaks. Elektrivoolu läbimiseks juhist tekib juhis potentsiaalilang ja järelikult ei ole juhi pind enam ühe ja sama potentsiaaliga. Elektrivälja tugevuse jooned dielektrikus ei lähene juhi pinnale täisnurga all, sest juhi pinnal tekib voolujoonte suunas väljatugevuse tangentsiaalkomponent. Joonisel 52 on näidatud elektrivälja tugevuse joonte iseloom ülekanaliini juhtmete lähedal. Põhimõttelisest seisukohast teeb märgitud asjaolu välja arvutuse märksa keerukamaks, kuid praktikas võib selle asjaolu sageli jätta arvestamata, sest tavaliselt on pingelang piki juhtmeid juhtmetevahelise kaugusega võrreldaval pikkusel juhtmete potentsiaalide vahega võrreldes tühiselt väike.



JOON. 52

Võrdleme näiteks omavahel vektori  $\mathbf{E}$  tangentsiaal- ja normaalkomponenti  $E_t$  ja  $E_n$  dielektrikus ülekanaliini juhtmete pinna lähedal (joon. 52). Tangentsiaalkomponent kujutab juhtme pikkusühikule taandatud pingelangu ning selle saab määrata avaldisega  $E_t = \delta/\gamma$ . Kui võtta vaskjuhtmetele  $\gamma = 58 \text{ m}/\Omega \text{ mm}^2$  ja  $\delta = 5 \text{ A}/\text{mm}^2$ , saame, et  $E_t = 0,086 \text{ V}/\text{m}$ . Normaalkomponent sõltub juhtmetevahelisest pingest  $u$  ja juhtmete vahekaugusest  $D$ . Et juhtmetevaheline väli on mittehomoogeenne ja tugevaim väli on koondunud juhtmete lähedale, siis  $E_n > u/D$ . Isegi niisketes ruumides ülesseatud madalpingeliini korral, mille juhtmed on teineteisest kaugele paigutatud, on  $E_n$  väärtus palju suurem  $E_t$  väärtusest. Olgu näiteks  $u = 100 \text{ V}$  ja  $D = 10 \text{ cm}$ . Siis  $E_n > 1000 \text{ V}/\text{m}$

ja järelikult  $E_n/E_t > 10^4$ . Kõrgepingeliini korral on  $E_n$  väärtus lähedane õhu kriitilisele potentsiaaligradiendile, s. t. suurusjärgus  $E_n \approx 30 \text{ kV/cm} = 3 \cdot 10^6 \text{ V/m}$ . Järelikult sellistel liinidel  $E_n/E_t \approx \approx 3,5 \cdot 10^7$ .

Saadud arvud näitavad, et tangentsiaalkomponent  $E_t$  on normaalkomponendiga  $E_n$  võrreldes tühiselt väike. Juhtmetelähedase välja vaatlemisel võib tangentsiaalkomponendi ilma mingi märgatava vea sissetoomise kartuseta jätta arvestamata. Sel juhtumil osutuvad piiritingimused juhtmete pinnal samasteks piiritingimustega elektrostaatikas. Seepärast saab elektrivälja vaatlemisel alalisvooludega juhtmeid ümbritsevas dielektrikus kasutada vastavate elektrostaatiliste ülesannete vaatlemisel saadud lahendusi.

#### § 40. Elektriväli ja voolutiheduse vektori väli juhtivas keskkonnas

Juhtides, mida läbib elektrivool, eksisteerib samuti elektriväli. Selle välja tugevus on juhtivuse poolest isotroopses keskkonnas seotud voolutihedusega avaldise  $\delta = \gamma E$  kaudu, mis väljendab Ohmi seadust diferentsiaalkujul.

Isotroopses keskkonnas ühtib elektrivoolu joonte suund kõikjal elektrivälja tugevuse joonte suunaga. Kui keskkond on lisaks veel homogeenne ( $\gamma = \text{const}$ ), on ka voolujoonte tihedus kõikjal võrdeline elektrivälja tugevuse joonte tihedusega, s. t. voolujoonte ja väljatugevuse joonte pildid on teineteisega sarnased.

Kui keskkond on juhtivuse poolest mittehomoogeenne, jäävad voolujooned temas siiski pidevaiks. See järeldub tingimusega  $\oint \delta ds = 0$  ehk  $\text{div } \delta = 0$  väljenduvast voolu pidevuse printsiibist.

Märgitud tingimus kujutab endast Kirchhoffi esimese seaduse üldistatud kuju vastavalt integraalses ja diferentsiaalses vormis. Kuid elektrivälja tugevuse jooned omavad sellises mittehomoogeenses keskkonnas katkevusi. Kahe erineva erijuhtivusega keskkonna eralduspinnal muutub elektrivälja tugevuse vektori normaalkomponent hüppeliselt.

Juhtide pinnad, mis on piirpindadeks juhtiva keskkonna ja dielektriku vahel, moodustuvad ilmselt voolujoonte kogumist, sest nende pindadega risti olev voolutiheduse vektori komponent võrdub nulliga.

Käesolevas peatükis uurime voolu ruumilist jaotust massiivsetes juhtivates keskkondades. Voolutiheduse vektori väli on sellistes keskkondades üldiselt mittehomoogeenne ning mingit juhtivas keskkonnas võetud pinda  $s$  läbiva voolu  $i$  arvutamiseks tuleb teostada integreerimine  $i = \int_s \delta ds$ .

Juhtivas keskkonnas väljaspool emj. allikaid on kõikjal täidetud

tingimus  $\oint \mathbf{E} \, d\mathbf{l} = 0$  ehk  $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ , mis väljendab Kirchhoffi teist seadust emj. allikateta piirkonnas vastavalt integraalsel ja diferentsiaalsel kujul. Väli osutub potentsiaalseks. Võrrandiga  $U(x, y, z) = \text{const}$  määratud samapotentsiaalipinnad lõikuvad elektrivälja tugevuse joontega täisnurgi ja isotroopses keskkonnas lõikuvad nad järelkult täisnurgi ka voolujoontega.

Seega iseloomustab elektrivälja ja voolutiheduse vektori välja juhtivas keskkonnas väljaspool emj. allikaid võrrandite süsteem

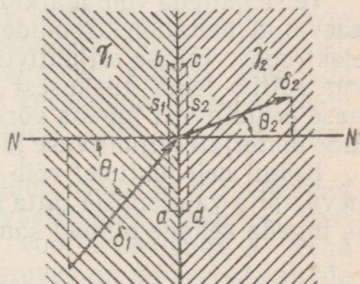
$$\text{rot } \mathbf{E} = 0; \quad \delta = \gamma \mathbf{E}; \quad \text{div } \delta = 0.$$

Need võrrandid järelduvad 38. paragrahvis toodud võrrandite süsteemist, kusjuures võrrand  $\text{div } \delta = 0$ , nagu näidati 5. paragrahvis, on võrrandi  $\text{rot } \mathbf{H} = \delta$  järelduseks, sest  $\text{div rot } \mathbf{H} = 0$ .

Voolu ruumilise jaotuse küsimus on eriti tähtis paljude praktiliste ülesannete käsitlemisel, näiteks pinnasevoolude, massiivsete juhtide voolude, isolatsiooni juhtivusvoolude jne. uurimisel.

#### § 41. Piiritingimused kahe juhtiva keskkonna eralduspinnal

Kui voolu läbiminekul kahe erineva erijuhtivusega  $\gamma_1$  ja  $\gamma_2$  keskkonna eralduspinnast voolujooned ei ole eralduspinnaga risti, siis voolujoonte suund muutub. Määrame kindlaks seose langemisnurga  $\theta_1$  ja murdumisnurga  $\theta_2$  vahel (joon. 53). Koostades vektori  $\mathbf{E}$



JOON. 53

joonintegraali mööda kontuuri  $abcd$ , mille küljed  $ab$  ja  $cd$  asuvad erinevates keskkondades lõpmatult lähedal eralduspinnale, saame:

$$\oint_{abcd} \mathbf{E} \, d\mathbf{l} = E_1 \sin \theta_1 ab - E_2 \sin \theta_2 cd = 0,$$

ja et  $ab = cd$ , siis

$$E_1 \sin \theta_1 = E_2 \sin \theta_2.$$

Rakendades voolu pidevuse printsiipi väljendavat seost kinnisele pinnale, mis on moodustatud kahest erinevates keskkondades eral-

duspinnale lõpmatult lähedal asuvast pinnast  $s_1$  ja  $s_2$  (joonisel on näidatud nende jäljed) ning lõpmatult väikesest, eralduspinda lõikavast silindrilisest külgpinnast, leiame:

$$\oint_s \delta ds = -\delta_1 \cos \theta_1 s_1 + \delta_2 \cos \theta_2 s_2 = 0.$$

Silmas pidades, et  $s_1 = s_2$ , saame:

$$\delta_1 \cos \theta_1 = \delta_2 \cos \theta_2.$$

Arvestades seost  $E\gamma = \delta$ , leiame:

$$\frac{\operatorname{tg} \theta_1}{\operatorname{tg} \theta_2} = \frac{E_2}{E_1} \cdot \frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}.$$

Voolujoonte murdumise seadus on kujult täiesti analoogiline kahe dielektriku piiril elektrinihke joonte murdumise seadusega.

Paljudel praktilistel juhtumitel on tegemist voolu üleminekuga metallkehade ümbritsevasse keskkonda, mille erijuhtivus on palju kordi väiksem nende kehade materjali erijuhtivusest. Sellised tingimused esinevad näiteks lekkevoolude korral läbi erinevatel potentsiaalidel olevate juhtmete vahelise isolatsiooni. Lekkevool tekib isolatsiooni mittetäiuslikkuse tõttu. Isolatsiooni erijuhtivus on palju kordi väiksem juhtmete materjali erijuhtivusest. Näiteks kaablipaberil on  $\gamma \approx 10^{-13}$  S/m, samal ajal aga vasel  $\gamma = 58 \cdot 10^6$  S/m, s. t. vase erijuhtivuse ja isolatsiooni erijuhtivuse suhe on ligikaudu  $6 \cdot 10^{20}$ .

Teise näitena võib märkida voolu üleminekut pinnasesse maasse-kaevatud metallektroodide kaudu. Tavaliselt kasutatakse teras-elektroode. Teras eeri juhtivus on  $\gamma \approx 5 \cdot 10^6$  S/m. Pinnase erijuhtivus sõltub tema niiskusest ning koostisest. Keskmiselt võib pinnase erijuhtivust lugeda võrdseks  $\gamma \approx 10^{-2}$  S/m. Seega on elektroodide materjali erijuhtivuse ja pinnase erijuhtivuse suhe  $5 \cdot 10^8$ .

Kõigil neil juhtudel võib väikese erijuhtivusega keskkonnas esineva välja vaatlemisel jätta pingelangu metallkehades arvestamata ja lugeda kehade pinnad samapotentsiaalipindadeks.

## § 42. Juhtiva keskkonna elektrivälja analoogia elektrostaatilisest väljaga

Seoste vahel, mis iseloomustavad alalisvoolude statsionaarset elektrivälja juhtivas keskkonnas ja elektrostaatilisest välja dielektrikus, võib leida formaalset analoogiat.

Voolude elektriväljale juhtivas keskkonnas kehtivad seosed:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0; \quad \int_A^B \mathbf{E} \, d\mathbf{l} = U_A - U_B; \quad \delta = \gamma \mathbf{E};$$

$$\operatorname{div} \delta = 0; \quad \int_s \delta \, ds = i.$$

Need seosed ühtivad formaalselt seostega, mis käivad elektrostaatiliselt välja kohta dielektrikus:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0; \quad \int_A^B \mathbf{E} \, dl = U_A - U_B; \quad \mathbf{D} = \varepsilon_a \mathbf{E}; \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= 0; \quad \int_s \mathbf{D} \, ds = Q, \end{aligned}$$

kui viimastes vahetada elektrinihke vektor  $\mathbf{D}$  voolutiheduse vektoriga  $\delta$ , elektrilaeng  $Q$  vooluga  $i$  ja absoluutne dielektriline läbitavus  $\varepsilon_a$  erijuhtivusega  $\gamma$ .

Siit on selge, et kui tingimused vektori  $\delta = \gamma \mathbf{E}$  kohta antud erijuhtivusega  $\gamma$  juhtiva keskkonna piiril ühtivad tingimustega vektori  $\mathbf{D} = \varepsilon_a \mathbf{E}$  kohta absoluutse dielektrilise läbitavusega  $\varepsilon_a$  dielektriku samasuguse kujuga piiril, siis peavad elektriväljad juhtivas keskkonnas ja dielektrikus olema teineteisega sarnased.

Elektrostaatiliselt ülesande puhul on dielektriku piiriks juhtiva keha pind. See pind on samapotentsiaalipind ja vektor  $\mathbf{D}$  on temaga risti. Eelmises paragrahvis vaadeldud näidetes on halvasti juhtiva keskkonna (pinnase või mittetäiusliku isolatsiooni) piiriks juhtide pind. Suure täpsusega võib lugeda selle pinna samapotentsiaalipinnaks ja voolutiheduse vektori  $\delta$  lugeda halvasti juhtivas keskkonnas suunatuks piki selle pinna normaali. Õeldu põhjal võib kinnitada, et nende ülesannete puhul peab voolude elektrivälja pilt (pinnases või isolatsioonis) ühtima vastavate elektrostaatiliselt ülesannete väljapildiga.

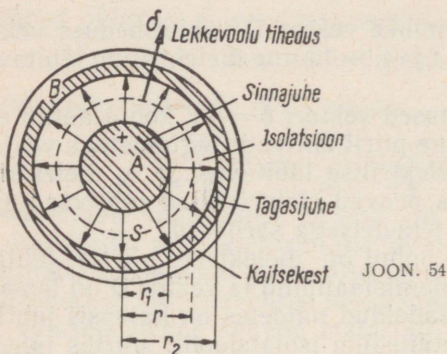
Sellel rajaneb nn. *elektrostaatiliselt analoogia meetod*, mis võimaldab real juhtumitel kasutada juhtiva keskkonna voolude arvutamiseks elektrostaatika vastavate ülesannete valmis lahendusi. Elektrostaatiliselt analoogia meetod võimaldab samuti asendada elektrostaatiliselt välja uurimise juhtivas keskkonnas esineva voolu välja eksperimentaalse uurimisega, millest tuleb juttu 99. paragrahvis.

Näiteks vooluga keskkondade elektrijuhtivuse  $G = i/U$  valemid võib saada kehade mahtuvuse  $C = q/U$  vastavatest valemistest, sest analoogilistes ülesannetes asendatakse vool  $i$  laenguga  $q$ . Keha elektrimahtuvus või kehadevaheline mahtuvus on määratud kehade geomeetriliste parameetritega ja kehasid ümbritsevate keskkondade absoluutsete dielektriliste läbitavustega. Seepärast on  $G$  valemis saamiseks küllaldane asendada vastavas  $C$  valemis dielektrikute absoluutsed dielektrilised läbitavused  $\varepsilon_a$  juhtivate keskkondade erijuhtivustega  $\gamma$ . Kui juhtiv keskkond või vastavalt dielektrik on homogeenne, läheb erijuhtivus  $\gamma$  juhtivuse  $G$  valemisse kordajana ja vastavalt absoluutne dielektriline läbitavus  $\varepsilon_a$  mahtuvuse  $C$  valemisse samuti kordajana. Sellisel juhtumil analoogilistele ülesannetele saame:

$$\frac{G}{C} = \frac{\gamma}{\varepsilon}.$$

### § 43. Kaabli lekkevool ja isolatsioonitakistus

Määrame kaablis isolatsiooni mittetäiuslikkuse tõttu tekkiva lekkevoolu  $i$ . Kaabli ristlõige on kujutatud joonisel 54. Väljatugevuse jooned ja isolatsiooni lekkevoolu jooned võib lugeda raadiuse-suunalisteks.



Moodustame isolatsiooni sisse raadiusega  $r$  ja kaabli telje suunas pikkusega  $l$  silindrilise pinna. Saame, et  $i = 2\pi r l \delta$ , ja järelikult

$$E = \frac{\delta}{\gamma} = \frac{i}{2\pi r l \gamma}.$$

Juhtmetevahelise pinge  $u_{AB}$  leiame, võttes elektrivälja tugevuse joonintegraali mööda raadiust:

$$u_{AB} = \int_A^B \mathbf{E} \, dl = \int_{r_1}^{r_2} E \, dr = \frac{i}{2\pi l \gamma} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Siit leiamegi kaabli isolatsiooni takistuse  $R$  ja juhtivuse  $G$ :

$$R = \frac{u_{AB}}{i} = \frac{1}{2\pi l \gamma} \ln \frac{r_2}{r_1}; \quad G = \frac{1}{R} = \frac{2\pi l \gamma}{\ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

Juhtivuse  $G$  valemi oleks võinud elektrostaatilise analoogia meetodit kasutades välja kirjutada otsekohe. Selleks on küllaldane asendada 31. paragrahvis tuletatud kaabli mahtuvuse valemis

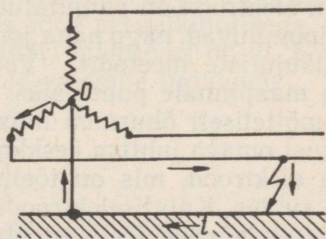
$$C = \frac{2\pi l \epsilon_a}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

$\epsilon_a$  erijuhtivusega  $\gamma$ .

## § 44. Maandustakistus

Elektriahela mingi punkti ühendamiseks maaga kaevatakse pinnasesse metalljuhid, mille külge ühendataksegi ahela vastav punkt. Selliste pinnasesse kaevatud juhtide süsteemi nimetatakse *maanduriks*. Nii näiteks maandatakse tavaliselt ülekandeliini toitva kolmefaasilise trafo kõrgepingemähiste tähtühenduse korral trafo nullpunkt vahetult või läbi takisti (joon. 55). Sellega saavutatakse, et liinijuhtmete pinged maa suhtes ei saa normaalrežiimis olla suuremad faasipingetest. Ühe faasijuhtme isolatsiooni vigastuse korral tekib lühisvool vigastuse kohast pinnase ja maanduri kaudu trafo nullpunkti. Pinnast läbides kohtab elektrivool teatud takistust, mida nimetatakse *maandustakistuseks*. Sisuliselt on see pinnase takistus, mida vool kohtab maandurist laialivalgumisel. Piki maapinda tekitatakse pingelang, mis võib ulatuda maanduskohtade läheduses juba inimese sammu pikkusel inimesele ohtlike väärtusteni. Seepärast on väga oluline osata arvutada voolu valgumistakistust pinnasesse maandurite mitmesuguste konstruktsioonide korral.

JOON. 55



Ahela üksikuid punkte maandatakse nii vahelduv- kui ka alalisvooluahelates. Toodud näite puhul kulgeb maas vahelduvvool. Vahelduvvoolu jaotus juhtivas keskkonnas peab põhimõtteliselt erinema alalisvoolu jaotusest, sest vahelduvvoolu korral tekivad juhtiva keskkonna sees kujutletavates kontuurides indutseeritud elektromotoorjõud, mis voolu jaotusele mõju avaldavad. Ent maa suure eritakistuse tõttu on elektroodide läheduses indutseeritud elektromotoorjõud vähemalt tööstussagedusel aktiivse pingelanguga võrreldes tühised, nii et voolude arvutuse võib läbi viia nagu alalisvoolu korral.

Maandusjuhtivuse  $G = i/U$  valemid saab välja kirjutada elektrostaatilise analoogia meetodi põhjal vastavalt paigutatud kehade mahtuvuse  $C = q/U$  valemite järgi.

Elektrostaatika ülesannetes võetakse tavaliselt lõpmata kaugete punktide potentsiaal võrdseks nulliga. Meid huvitavates pinnasevoolusid käsitlevates ülesannetes võetakse samuti lõpmatult kaugete punktide või elektroodist praktiliselt küllalt kaugete punktide potentsiaal võrdseks nulliga. Seejuures on suurus  $U$  avaldises  $G =$

$= i/U$  elektroodi potentsiaal, samuti nagu avaldises  $C = q/U$  on suurus  $U$  laetud keha potentsiaal.

Tuleb veel märkida, et pinnases ei lähe voolujooned lõpmatusse, vaid koonduvad teise elektroodi või, nagu joonisel 55 kujutatud näites, liini isolatsiooni vigastuskohta. Kuid see asjaolu avaldab voolu jaotusele antud elektroodi läheduses ning selle vastavale maandustakistusele vähe mõju, sest voolu põhiline valgumistakistus tekib elektroodi läheduses, kus voolutihedus omab suurimaid väärtusi.

Vaatleme mõningaid näiteid. Et raadiusega  $r$  üksildase kera mahtuvus

$$C = 4\pi\epsilon_0 r,$$

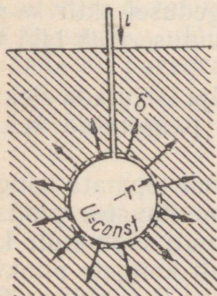
peab maandusjuhtivus kerakujulise elektroodi korral, mis on nii sügavale maasse kaevatud, et maapinna mõju võib jätta arvestamata (joon. 56), avalduma valemiga

$$G = \frac{1}{R} = 4\pi\gamma r,$$

kusjuures  $R$  on maandustakistus.

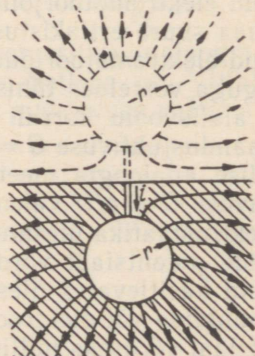
Kui elektrood on paigutatud maapinna lähedusse, siis voolujooned moonutuvad, nagu näha joonisel 57. Sel juhtumil võib kasutada peegelkujutiste meetodit. Voolujooned peavad maapinna juures olema maapinnale puutujaiks. See tingimus jääb rahuldatuks, kui täita mõtteliselt õhuruum maapinna kohal pinnasega võrdset erijuhtivust omava juhtiva keskkonnaga ning paigutada sellesse keskkonda elektrood, mis on tõelise elektroodi peegelkujutiseks maapinna suhtes. Kujutiselektroodist lähtuv vool peab olema suuruselt ja märgilt võrdne tõelise elektroodist maasse valguva vooluga. Tõelise elektroodi maandusjuhtivus võrdub ilmselt poolega elektroodist ja tema peegelkujutisest moodustatud süsteemi juhtivusest. Nii näiteks on maapinna lähedale vastavalt joonisele 58 paigutatud poolkerakujulise elektroodi korral juhtivus

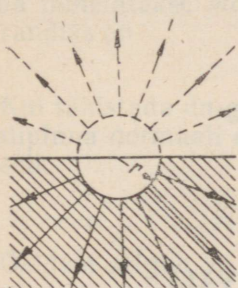
$$G = \frac{1}{R} = 2\pi\gamma r.$$



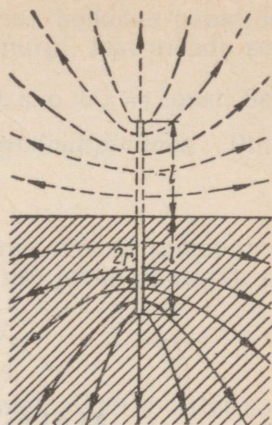
JOON. 56

JOON. 57





JOON. 58



JOON. 59

Sageli kasutatakse maanduritena vertikaalselt maasse rammitud torusid (joon. 59).

Olgu  $l$  toru pikkus ja  $r$  — raadius. Oletame, et toru üks ots asub täpselt maapinnal. Toru pikkus koos toru peegelkujutisega on  $2l$ .

Pikkusega  $2l$  ja raadiusega  $r$  silindri mahtuvus on  $2l \gg r$  korral vastavalt 36. paragrahvis tuletatud valemile ligikaudu

$$C \approx \frac{2\pi\epsilon_a 2l}{\ln \frac{2l}{r}}.$$

Järelikult on elektroodist ja tema peegelkujutisest koosneva süsteemi juhtivus

$$G \approx \frac{4\pi\gamma l}{\ln \frac{2l}{r}}.$$

Seega avaldub vertikaalse torukujulise elektroodi maandusjuhtivus valemiga

$$G = \frac{2\pi\gamma l}{\ln \frac{2l}{r}}.$$

Maandustakistuse vähendamiseks valmistatakse maandusseadis tihti maasse rammitud ja omavahel metall-lattidega ühendatud torude ridadena. Sellise keeruka maanduri korral saab maandusjuhtivust arvutada samuti kui omavahel ühendatud sirgete juhtmelõikude süsteemi mahtuvust. Selleks võib edukalt kasutada 36. paragrahvis esitatud keskmiste potentsiaalide meetodit.

ALALISVOOLUDE MAGNETVÄLI

§ 45. Voolude magnetvälja pööriline olemus. Vooluvälise piirkonna magnetvälja skalaarpotentsiaal

Alalisvoolude magnetvälja võrrandid, nagu järeldub 38. paragrahvis toodud võrrandite süsteemist, omavad kuju:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \delta; \quad \mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

Esimene võrrand tõendab seda, et voolude magnetväli on *pööriline*. Järelikult selle piirkonna jaoks, kus  $\delta \neq 0$ , ei ole võimalik näidata sellist skalaarset koordinaatide funktsiooni  $U_m(x, y, z)$ , mille gradient oleks võrdeline vektoriga  $\mathbf{H}$ , sest samasuse rot grad  $U_m = 0$  tõttu oleks seejuures kõikjal  $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$ .

Teiste sõnadega, pööriväli ei ole potentsiaalne väli.

Siiski ruumi selles osas, kus voolutihedus võrdub nulliga, kehtib  $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$  ja järelikult ruumi selle osa kohta saab  $\mathbf{H}$  esitada kujul

$$\mathbf{H} = -\operatorname{grad} U_m.$$

Suurust  $U_m$  nimetatakse *magnetvälja skalaarpotentsiaaliks*. Indeksit  $m$  kasutame selleks, et eristada magnetilist potentsiaali elektrilisest. Seega

$$H_x = -\frac{\partial U_m}{\partial x}; \quad H_y = -\frac{\partial U_m}{\partial y}; \quad H_z = -\frac{\partial U_m}{\partial z}.$$

Üldiselt vektori  $\mathbf{H}$  komponent suvalises suunas võrdub magnetilise potentsiaali vähenemisega pikkusühiku kohta selles suunas:

$$H_l = H \cos \alpha = -\frac{\partial U_m}{\partial l},$$

kus  $\alpha$  on nurk vektori  $\mathbf{H}$  suuna ja selle suuna vahel, milles komponent  $H_l$  määratakse.

Potentsiaal on ühesugune niisuguse pinna kõikides punktides, millega väljatugevuse jooned lõikuvad täisnurgi, sest mööda seda pinda liikumisel kehtib  $\cos \alpha = 0$  ja  $\frac{\partial U_m}{\partial l} = 0$ , s. o.  $U_m = \text{const}$ . Seda pinda nimetatakse *magnetiliseks samapotentsiaalipinnaks*. Pinna võrrandiks on

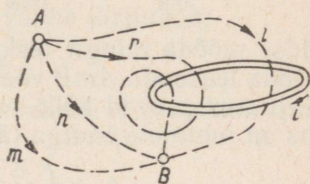
$$U_m(x, y, z) = \text{const}.$$

Kui tähistada  $dn$ -ga nihet vektori  $\mathbf{H}$  suunas mööda samapotentsiaalipinna normaali ehk mööda väljatugevuse joone puutujat, siis ilmselt

$$|\text{grad } U_m| = H = -\frac{\partial U_m}{\partial n}.$$

Õeldust selgub, et magnetilise skalaarpotentsiaali mõistet saab kasutada ainult selle ruumiosa kohta, kus  $\delta = 0$ . Kuid ka selles ruumiosas on  $U_m$  mitmeväertuseline funktsioon. Et seda näidata, vaatleme magnetvälja vooluringi läheduses (joon. 60). Mööda nii-

JOON. 60



sugust meelevaldset kinnist kontuuri võetud magnetvälja tugevuse joonintegraal, mis ei haara vooluringi, võrdub nulliga:  $\oint \mathbf{H} \, dl = 0$ .

Näiteks võrdub nulliga integraal mööda joonisel 60 näidatud teekonda  $AnBmA$ . Järelikult  $\int_{AnB} \mathbf{H} \, dl = \int_{AmB} \mathbf{H} \, dl$ , s. o. kahe etteantud

punkti  $A$  ja  $B$  vaheline joonintegraal on määratud ainult nende punktide asukohaga ja ei sõltu integreerimisteede valikust nende punktide vahel tingimusel, et kahe erineva integreerimisteedega moodustatud kinnised kontuurid ei haara vooluringe. Sel tingimusel saab integraali

$$\int_A^B \mathbf{H} \, dl = \int_{AmB} \mathbf{H} \, dl = U_{mA} - U_{mB}$$

käsitleda välja punktide  $A$  ja  $B$  magnetpotentsiaalide  $U_{mA}$  ja  $U_{mB}$  vahena. Kui tinglikult võtta mingi etteantud punkti  $P$  magnetpotentsiaal võrdseks nulliga ( $U_{mP} = 0$ ), siis punktide  $A$  ja  $P$  magnetpotentsiaalide vahe võrdub punkti  $A$  magnetpotentsiaaliga:

$$\int_A^P \mathbf{H} \, dl = U_{mA}.$$

Ent kui valida selline kinnine integreerimisteedkond, mis haarab vooluga  $i$  vooluringi, näiteks teekond  $AlBmA$  joonisel 60, siis magnetvälja tugevuse joonintegraal mööda sellist teekonda enam ei võrdu nulliga:

$$\oint_{AlBmA} \mathbf{H} \, dl = \int_{AlB} \mathbf{H} \, dl - \int_{AmB} \mathbf{H} \, dl = i \neq 0,$$

millest

$$\int_{AlB} \mathbf{H} \, dl = \int_{AmB} \mathbf{H} \, dl + i = U_{mA} - U_{mB} + i,$$

Teekond  $ArBmA$  haarab vooluga  $i$  vooluringi kaks korda. Selle teekonna jaoks  $\oint_{ArBmA} \mathbf{H} \, dl = 2i$  ja järelikult

$$\int_{ArB} \mathbf{H} \, dl = \int_{AmB} \mathbf{H} \, dl + 2i = U_{mA} - U_{mB} + 2i.$$

Üldse mööda mingit teekonda  $AxB$  võetud integraal võib erineda mööda teekonda  $AmB$  võetud integraalst  $ki$  võrra, kus  $k$  on täisarv. Seejuures peavad kõik teekonnad kulgema väljaspool ruumiosa, mis on juhtmete endiga täidetud. Seega

$$\int_{AxB} \mathbf{H} \, dl = U_{mA} - U_{mB} + ki.$$

Ühitades punkti  $B$  punktiga  $P$ , mille magnetpotentsiaal on võetud võrdseks nulliga, saame:

$$\int_{AxB} \mathbf{H} \, dl = U_{mA} + ki.$$

Seega osutub skalaarne magnetiline potentsiaal *mitmeväärtuseliseks suuruseks*.

## § 46. Voolude magnetvälja vektorpotentsiaal

Magnetilise induksiooni vektorit võib esitada mingi abivektori  $\mathbf{A}$  rootorina:

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}.$$

Seejuures osutub vektor  $\mathbf{A}$  elektrivoolude etteantud ruumilise jaotuse puhul koordinaatide funktsiooniks.

Vektorit  $\mathbf{A}$  nimetatakse *magnetvälja vektorpotentsiaaliks*. Defiinerime vektorpotentsiaali nii, et magnetvälja võrrandid

$$\text{rot } \mathbf{H} = \delta; \quad \mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H}; \quad \text{div } \mathbf{B} = 0$$

oleksid rahuldatud kogu ruumis — nii seal, kus voolud puuduvad, kui ka seal, kus  $\delta \neq 0$ .

Tingimus  $\text{div } \mathbf{B} = 0$ , mis väljendab magnetvoo pidevuse printsiipi, on samaselt rahuldatud, kui  $\mathbf{B}$  esitada  $\mathbf{A}$  kaudu kujul  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ , sest alati  $\text{div rot } \mathbf{A} = 0$  (vt. § 5).

Leiame vektorpotentsiaali avaldise, mis määraks vektorpotentsiaali etteantud voolude jaotuse järgi nii, et oleks rahuldatud ülejäänud kaks võrrandi

$$\text{rot } \mathbf{H} = \delta \quad \text{ja} \quad \mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H}.$$

Piirdume homogeense keskkonna juhtumiga. Korrutame esimese võrrandi paremat ja vasakut poolt keskkonna absoluutse magnetilise läbitavusega  $\mu_a$ . Saame:

$$\mu_a \text{rot } \mathbf{H} = \text{rot } \mu_a \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{B} = \mu_a \delta;$$

kuna  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ , siis

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \mu_a \delta.$$

Niisiis projektsiooni kohta  $OX$ -teljele võime kirjutada:

$$\text{rot}_x(\text{rot } \mathbf{A}) = \mu \delta_x.$$

Arendame selle võrrandi vasaku poole vektori  $\mathbf{A}$  projektsioonide osatuletiste kaudu:

$$\begin{aligned} \text{rot}_x(\text{rot } \mathbf{A}) &= \frac{\partial}{\partial y} \text{rot}_z \mathbf{A} - \frac{\partial}{\partial z} \text{rot}_y \mathbf{A} = \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial A_y}{\partial y} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial A_z}{\partial z}. \end{aligned}$$

Liidame sellele avaldisele suuruse  $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial A_x}{\partial x}$  ja lahutame sellega võrdse suuruse  $\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}$ .

Saame:

$$\begin{aligned} \text{rot}_x(\text{rot } \mathbf{A}) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) - \\ &- \left( \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \text{div } \mathbf{A} - \nabla^2 A_x. \end{aligned}$$

Allutame vektori  $\mathbf{A}$  tingimusele  $\text{div } \mathbf{A} = 0$ , s. o. loeme, et vektori  $\mathbf{A}$  väli ei oma allikaid. Tõepoolest, tingimisel  $\text{div } \mathbf{A} \neq 0$  võib alati eeldada, et  $\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \mathbf{A}''$ , kusjuures  $\text{div } \mathbf{A}' = 0$  ja  $\text{div } \mathbf{A}'' \neq 0$ . Komponendi  $\mathbf{A}''$  väli kui allikate poolt tekitatu osutub potentsiaalväljaks, järelikult  $\text{rot } \mathbf{A}'' = 0$ . Seetõttu  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = \text{rot } \mathbf{A}'$ , s. o.

komponendi  $\mathbf{A}''$  olemasolu ei muuda suurust  $\mathbf{B}$  ja võib lugeda, et  $\mathbf{A}'' = 0$ . Lõplikult saame:

$$\operatorname{rot}_x (\operatorname{rot} \mathbf{A}) = -\nabla^2 A_x.$$

Võrrand  $\operatorname{rot}_x (\operatorname{rot} \mathbf{A}) = \mu_a \delta_x$  esitatakse kujul

$$\nabla^2 A_x = \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} = -\mu \delta_x.$$

See on Poissoni võrrand, mis langeb täielikult kokku Poissoni võrrandiga elektripotentsiaali kohta (vt. § 12), kui asendada  $A_x$   $U$ -ga ja  $\mu_a \delta_x$   $\rho/\epsilon_a$ -ga. Seetõttu võib selle võrrandi lahendi kirjutada analoogiliselt elektripotentsiaali kohta käiva Poissoni võrrandi lahendiga. Elektripotentsiaali puhul saime:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int_V \frac{\rho dV}{r}.$$

Kirjutades  $U$  asemele  $A_x$  ja  $\rho/\epsilon_a$  asemele  $\mu_a \delta_x$ , saame:

$$A_x = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{\delta_x dV}{r}.$$

Integreerida on küllaldane kogu mahu ulatuses, kus  $\delta_x \neq 0$ . Suurus  $r$  on kaugus ruumielemendi  $dV$  tsentrist, milles voolutiitude vektori projektsioon on  $\delta_x$ , punktini, milles  $A_x$  määratakse.

Analoogiliselt on lihtne kirjutada vektorpotentsiaali teiste komponentide avaldisi:

$$A_x = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{\delta_x dV}{r}; \quad A_y = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{\delta_y dV}{r};$$

$$A_z = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{\delta_z dV}{r}.$$

Seega vektorpotentsiaal

$$\mathbf{A} = iA_x + jA_y + kA_z = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{(i\delta_x + j\delta_y + k\delta_z) dV}{r},$$

mida saame lühidalt kirjutada kujul

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{\delta dV}{r},$$

mõistes siinjuures integreerimist geomeetrilise summeerimisena.

Saadud avaldised vektorpotentsiaali komponentide määramiseks etteantud voolujaotuse järgi ruumis kehtivad kõikjal, näiteks ka seal, kus  $\delta \neq 0$ . Nad kehtivad eeldusel, et voolud esinevad piiratud ruumiosas, mis füüsikaliselt ka alati paika peab. Seejuures vektorpotentsiaali suurus väheneb eemaldumisel vooludega hõivatud

piirkonnast lõpmatuse mitte aeglasemalt kui  $1/r$ . Seda on kerge näha viimasest avaldisest. Kuna vektori  $\mathbf{B}$  komponendid avalduvad vektori  $\mathbf{A}$  komponentide ruumiliste tuletiste kaudu, siis magnetilise induktsiooni suurus  $B$  ja järelikult ka väljatugevuse  $H$  suurus vähenevad lõpmatuses mitte aeglasemalt kui  $1/r^2$ .

$\mathbf{A}$  avaldist saab lihtsustada, kui voolud esinevad joonjuhtidest koosnevates vooluringides, s. o. vooluringides, mille ristlõigete mõõtmed on väga väikesed, võrreldes vooluringide pikkustega ja võrreldes kaugustega juhtmetest punktideni, kus  $\mathbf{A}$  määratakse. Esitame juhi ruumielemendi kujul  $dV = dl ds$ , kus  $ds$  on ristlõike  $s$  pinnaelement ja  $dl$  — pikkusega  $l$  juhi pikkuselement.

Valime  $dl$  suunad kõikjal nii, et nad ühtiksid voolutiheduse vektori  $\delta$  suundadega, s. o. jaotame juhi voolutorude lõikudeks. Seejuures  $\delta(ds dl) = (\delta ds) dl$ .

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_a}{4\pi} \oint_l \int_s \delta \frac{(ds dl)}{r} = \frac{\mu_a}{4\pi} \oint_l \int_s (\delta ds) \frac{dl}{r}.$$

Kuid ülalmärgitud tingimuste täitmisel saab lugeda, et kaugused  $r$  punktini, kus määratakse  $\mathbf{A}$ , on ühesugused kõikide antud ristlõike  $s$  elementide  $ds$  jaoks. Täpselt samuti saab lugeda ühesugusteks kõik lõigud  $dl$  kahe ristlõike vahel. Järelikult saab kirjutada:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_a}{4\pi} \oint_l \frac{dl}{r} \int_s \delta ds = \frac{\mu_a}{4\pi} \oint_l \frac{i dl}{r},$$

kus  $i = \int_s \delta ds$  on juhi vool.

## § 47. Magnetvoo avaldis vektorpotentsiaali kaudu

Leiame seose mingit pinda  $s$  läbiva magnetvoo  $\Phi$  ja magnetvälja magnetilise potentsiaali  $A$  vahel. Teame, et

$$\Phi = \int_s \mathbf{B} ds = \int_s \text{rot } \mathbf{A} ds.$$

Kooskõlas Stokesi teoreemiga  $\int_s \text{rot } \mathbf{A} ds = \oint_l \mathbf{A} dl$ .

Järelikult

$$\Phi = \oint_l \mathbf{A} dl.$$

Seega magnetvoog läbi pinna  $s$  on võrdne vektorpotentsiaali joonintegraaliga mööda kinnist kontuuri, mis seda pinda piirab.

Magnetvoo arvutamiseks magnetilise induktsiooni vektori kaudu integraali  $\int_s \mathbf{B} ds$  abil on vaja vektor  $\mathbf{B}$  määrata kõikides pinna  $s$  punktides. Magnetvoo arvutamisel vektorpotentsiaali  $\mathbf{A}$  kaudu on küllaldane teada viimase väärtusi ainult kontuuril, mis piirab vaa-

deldavat pinda. Integreerimine üle pinna asendub integreerimisega mööda kontuuri, mis paljudel juhtumitel osutub küllaltki kasulikuks.

Vektorpotentsiaaliga opereerimine lihtsustab mitmete magnetvälja teooria küsimuste käsitlust, samuti nagu skalaarpotentsiaali kasutamine lihtsustab paljude elektrostaatika küsimuste käsitlust.

#### § 48. Alalisvoolude magnetvälja arvutamise üldine ülesanne

Alalisvoolude magnetvälja arvutamise üldiseks ülesandeks on magnetilise induksiooni vektori või magnetvälja tugevuse vektori leidmine ruumi kõikidele punktidele ruumis etteantud voolujaotuse järgi. Vektorpotentsiaali  $\mathbf{A}$  leidmisega koordinaatide funktsioonina lahendub see ülesanne täielikult. Seejuures leitakse magnetiline induksioon seosest  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ . Lõplikul kujul õnnestub ülesannet lahendada ainult piiratud arvul juhtumitel.

Kui meid huvitab magnetväli väljaspool vooluga juhtmeid, s. o. ainult ruumi selles osas, kus voolutihedus on null, on meil võimalik kasutada ka teist meetodit. Selles ruumiosas saab magnetvälja iseloomustada magnetilise skalaarpotentsiaaliga  $U_m$ . Sel puhul määratakse väljatugevuse vektor seosest  $\mathbf{H} = -\text{grad } U_m$ .

Viimane meetod on analoogiline elektrostaatilise välja arvutamisel kasutatava meetodiga ja selles seisnebki ta suur väärtus. Seda meetodit kasutades on võimalik lahendada rida magnetväljadega seotud ülesandeid nende kõrvutamise teel juba lahendatud vastavate elektrostaatika ülesannetega. Meiegi kasutame seda meetodit tasaparalleelse magnetvälja uurimisel väljaspool voolujuhte asuvas piirkonnas.

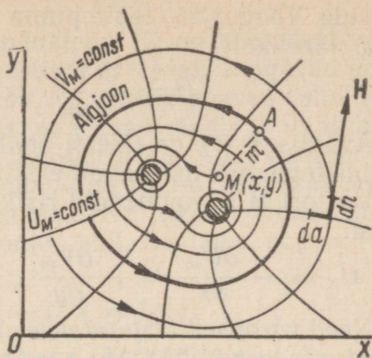
#### § 49. Tasaparalleelne väli

Vaatleme lõpmatult pikkade rööpsete silindriliste voolujuhtide süsteemi magnetvälja homogeense keskkonna puhul. Telje  $OZ$  suunane rööbiti juhtide telgedega. Siis asetsevad väljatugevusjooned täielikult  $XOY$ -tasandile rööpsetel tasanditel ja väljapilt on kõikidel nendel tasanditel ühesugune, s. o. sellise voolusüsteemi väli on tasaparalleelne. Sama magnetilise potentsiaali  $U_m$  pinnad on silindrilised pinnad, mille moodustajad on rööbiti  $OZ$ -teljega. Samapotentsiaalijooned  $XOY$ -tasandil on määratud võrrandiga

$$U_m(x, y) = \text{const.}$$

Vahekaugused samapotentsiaalijoonte vahel valime nii, et üleminekul ühelt joonelt teisele oleks täidetud tingimus  $\Delta U_m = \text{const.}$

Väljatugevusjoone võrrandi võib saada analoogiliste kaalutluste alusel, mida kasutati elektrivälja jõujoone võrrandi saamisel. Loeme



JOON. 61

tinglikult positiivseks need voolud, mis on suunatud vaotleja poole. Valime ühe väljatugevusjoone algiooneks. Joonisel 61 on see joon näidatud jämedamana.

Ühendame suvalise punkti  $M(x, y)$  mingi algioone punktiga  $A$  kõverjoonelise lõigu  $MmA$  abil. Olgu  $\Psi_H$  vektori  $\mathbf{H}$  voog läbi pinna, mille kujutaks lõik  $MmA$ , paigutades ümber iseendaga paralleelselt ning läbides  $OZ$ -telje suunas teekonna  $l$ . Vaatleme tinglikult voogu juhtmete pikkusühiku kohta. Tähistame  $V_m = \Psi_H/l$ . Voofunktsiooni nimetatav suurus  $V_m$  sõltub punkti  $M$  asendist ja on järelikult selle punkti koordinaatide funktsioon. Kõikide punktide jaoks, mis asetsevad ühel ja sellel samal väljatugevusjoonel, omab funktsioon  $V_m(x, y)$  ühesugust väärtust. Järelikult võrrand

$$V_m(x, y) = \text{const},$$

mis määrab selliste punktide kogumi, ongi väljatugevusjoone võrrandiks.

Lepime kokku paigutada joonisel väljatugevusjooned selliselt, et üleminekul mistahes joonelt naaberjoonele saaksime alati ühe ja sama voofunktsiooni juurdekasvu  $\Delta V_m$ .

Tähistades  $dn$ -ga väljatugevusjoone pikkuselemendi ja  $da$ -ga samapotentsiaalijoone pikkuselemendi, saame kõikjal  $dn \perp da$ . Koordinaadi  $n$  loeme suurenevaks vektori  $\mathbf{H}$  suunas. Koordinaadi  $a$  loeme suurenevaks vektorist  $\mathbf{H}$  vasakule sellise vaotleja jaoks, kes asetseb selliselt, et vektor  $\mathbf{H}$  näib temale suunatuna alt üles (joon. 61). Voofunktsiooni loeme suurenevaks samas suunas, milles suureneb  $a$ .

Magnetvälja tugevus avaldub  $U_m$  ja  $V_m$  kaudu järgmisel kujul:

$$H = -\frac{\partial U_m}{\partial n} = +\frac{\partial V_m}{\partial a}. \quad (*)$$

Esimene võrdus toodi juba varem. Teine avaldis järeldub sellest, et väljatugevus on arvuliselt võrdne vektori  $\mathbf{H}$  vooga pinnaühiku kohta läbi pinna, mis on risti väljatugevusjoontega. Olgu  $da$  vektori  $\mathbf{H}$  voo juurdekasv, mis vastab ainuüksi koordinaadi  $a$  juurde-

kasvule. Voog  $d_a \Psi_H$  läbib pinna  $l$  da, mis on risti väljatugevusjoon-  
tega. Järelikult

$$H = \frac{d_a \Psi_H}{l da} = \frac{d_a V_m}{da} = \frac{\partial V_m}{\partial a}.$$

Avaldised (\*) on täiesti analoogilised 16. paragrahvi vastavate  
avaldistega, mis määravad elektrivälja tugevuse.

Vektori  $\mathbf{H}$  komponendid ristkoordinaatides avalduvad järgmisel  
kujul:

$$H_x = -\frac{\partial U_m}{\partial x} = +\frac{\partial V_m}{\partial y}; \quad H_y = -\frac{\partial U_m}{\partial y} = -\frac{\partial V_m}{\partial x}. \quad (**)$$

Need võrdused kirjutatakse samade kaalutluste alusel nagu vas-  
tavad võrdused (\*\*) 16. paragrahvis. Nendest saame teistkordse  
diferentseerimise teel

$$\frac{\partial^2 U_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_m}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 V_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_m}{\partial y^2} = 0,$$

s. o. mõlemad funktsioonid  $U_m$  ja  $V_m$  rahuldavad Laplace'i võrran-  
dit. Siiski on vaja alla kriipsutada, et see kehtib ainult ruumiosas,  
mis ei ole hõivatud elektrivoolust. Ainult selles piirkonnas on võima-  
lik väljatugevust avaldada skalaarpotentsiaali  $U_m$  gradiendi kujul.  
Selline märkus ei kehti voofunktsiooni kaudu väljendatud välja-  
tugevuse avaldistele

$$H = \frac{\partial V_m}{\partial a}; \quad H_x = \frac{\partial V_m}{\partial y}; \quad H_y = -\frac{\partial V_m}{\partial x},$$

mis oma olemuselt peavad olema *kehtivad samuti ka voolujuhtide*  
*sees.*

Lõpuks märgime, et voofunktsioon  $V_m$ , mis on kasutusele võe-  
tud tasaparalleelse välja iseloomustamiseks, on väga lihtsalt seotud  
vektorpotentsiaaliga. Vaadeldaval juhtumil on vektorpotentsiaal  
kõikjal suunatud rööpselt  $OZ$ -teljega, s. o.  $A_x = A_y = 0$ ,  $A_z \neq 0$ ,  
sest voolutiheduse vektor on igal pool selle teljega rööbiti. Seetõttu

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\partial A_z}{\partial y}; \quad B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = -\frac{\partial A_z}{\partial x};$$

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = 0.$$

Korrutades võrdused (\*\*)  $\mu_a$ -ga ja kõrvutades neid viimaste võr-  
dustega, saame:

$$A_z = \mu_a V_m + C,$$

kusjuures konstandi  $C$  kui väheolulise võib ära jätta.

## § 50. Kompleksmuutuja funktsioonide rakendamine

Magnetpotentsiaal  $U_m$  ja voofunktsioon  $V_m$  on vooludest vabas piirkonnas omavahel seotud sõltuvustega (\*\*), mis langevad kokku Cauchy-Riemanni võrranditega. Neid võrrandeid peavad rahuldama funktsioonid  $\xi(x, y)$  ja  $\eta(x, y)$ , mis määravad reaali- ja imaginaarosa kompleksmuutuja  $z = x + jy$  analüütilisele funktsioonile  $\zeta = \xi + j\eta = f(z)$ . Seetõttu võime vooluvälise ruumi tasaparalleelseid magnetvälju nagu tasaparalleelseid elektriväljugi kirjeldada kompleksmuutuja analüütiliste funktsioonide abil. Eeldame, et  $\xi = V_m$  ja  $\eta = U_m$ , s. o. võtame

$$\zeta = \xi + j\eta = V_m + jU_m = f(z).$$

Vektori  $H$  komponendid võib saada võrranditest:

$$H_x = -\frac{\partial U_m}{\partial x} = -\frac{\partial \eta}{\partial x}; \quad H_y = -\frac{\partial U_m}{\partial y} = -\frac{\partial \eta}{\partial y}.$$

$$\text{Vektori } \mathbf{H} \text{ moodul } H = \sqrt{H_x^2 + H_y^2} = \left| \frac{d\zeta}{dz} \right|.$$

## § 51. Joonjuhtmete väli. Tasaparalleelse elektri- ja magnetvälja vastavuse printsiip

Vaatleme funktsiooni  $\zeta = K \ln z + C$ , kus  $K$  on reaalsuurus ja  $C = C_1 + jC_2$ . Väljendades muutuja  $z$  polaarkoordinaatides  $z = r e^{j\theta}$ , saame:

$$\zeta = V_m + jU_m = K \ln r + jK\theta + C_1 + jC_2.$$

Väljatugevusjoone võrrandi saab kirjutada kujul

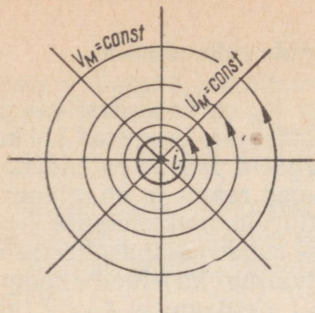
$$V_m = K \ln r + C_1 = \text{const}, \quad \text{s. o. } r = \text{const}.$$

Samapotentsiaalijoone võrrand omab kuju

$$U_m = K\theta + C_2 = \text{const}, \quad \text{s. o. } \theta = \text{const}.$$

Väljatugevusjooned on ringjooned, mille ühine tsenter asub koordinaatide alguses. Samapotentsiaalijoonteks on radiaalkiired. Sellise iseloomuga on vooluga joonjuhtme väli, kui juhe asetseb XOY-tasapinnaga risti ja läbib koordinaatide alguspunkti. Konstant  $K$  määratakse tingimusest, et tehes ringkäigu positiivses suunas ümber voolu  $i$ , muutub nurk  $\theta$   $2\pi$  võrra ja magnetiline potentsiaal saab juurdekasvu  $\Delta U_m = -i$ . Järelikult  $i = -K \cdot 2\pi$  ja  $K = -\frac{i}{2\pi}$ . Lõplikult saame  $V_m$  ja  $U_m$  jaoks avaldised:

$$V_m = -\frac{i}{2\pi} \ln r + C_1; \quad U_m = -\frac{i}{2\pi} \theta + C_2.$$



JOON. 62

Et vahekaugus kahe samapotentsiaalijoonel vahel vastaks potentsiaali teatavale juurdekasvule  $\Delta U_m$ , peavad need jooned asetsema üksteise suhtes võrdsete nurkade  $\Delta\theta$  tagant.

Selleks et väljatugevusjooned jagaksid välja võrdsete voogudega torudeks, on vajalik kahe järjekorranumbritega  $\nu$  ja  $(\nu + 1)$  naaberjoone jaoks täita tingimus

$$\Delta V_m = -\frac{i}{2\pi} (\ln r_{\nu+1} - \ln r_\nu) = -\frac{i}{2\pi} \ln \frac{r_{\nu+1}}{r_\nu} = \text{const},$$

$$\text{s. o. } \frac{r_{\nu+1}}{r_\nu} = N = \text{const}.$$

Järelikult peavad väljatugevusjoonte raadiused suurenema geometrilises progressioonis, mille teguri võib valida suvaliselt.

Joonisel 62 on kujutatud üksildase juhtme väli, kusjuures  $N = 1,5$  ja  $\Delta\theta = \pi/4$ .

Kui voolujuhtmete arv on  $n$ , saab kasutada superpositsiooni printsiipi ja leida komplekspotentsiaali avaldisest

$$\zeta = V_m + jU_m = -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n i_k \ln(z - z_k) + C,$$

kus  $z_k$  määrab punkti, mida läbib juhe vooluga  $i_k$ .

Võrreldes vooluga joonjuhtmete magnetvälja potentsiaali ja voo-funktsiooni avaldise vastavate avaldistega laetud joonjuhtmete elektrivälja potentsiaali ja voo-funktsiooni jaoks (vt. § 18) ja kõrvutades magnetvälja pilti (joon. 62) elektrivälja pildiga (joon. 16), märkame nende avaldise ja väljapiltide vastavust ainult selle erinevusega, et  $U$  ja  $V$  on kohad vahetanud. Siit tuleneb tähtis järeldus: *joonjuhtmete voolude magnetvälja pilt langeb kokku joonjuhtmete laengute elektrivälja pildiga, kui voolud ja laengud on ruumis ühte viisi jaotunud. Erinevus nende piltide vahel seisneb ainult selles, et elektrivälja tugevuse joonte kohal asetsevad magnetilise samapotentsiaalijooned ja elektrilise samapotentsiaalijoonete kohal asetsevad magnetvälja tugevuse jooned.*

Seetõttu on küllaldane konstrueerida ainult ühe välja, kas elektri-või magnetvälja pilt. Teine väljapiltidest saadakse äsja esitatud väite alusel, mida võib nimetada tasaparalleelse elektrivälja ja tasa-paralleelse magnetvälja vastavuse printsiibiks.

## § 52. Sirge voolujuhe välises homogeenväljas

Funktsioon  $\xi = Dz + C$  kirjeldab homogeenst magnetvälja. Sel puhul

$$\xi = V_m + jU_m = D_x + jD_y + C_1 + jC_2.$$

Väljatugevusjooned on  $OY$ -teljega rööpsed sirged. Nad avalduvad võrrandiga  $V_m = D_x + C_1 = \text{const}$  või  $x = \text{const}$ .

Väljatugevuse vektor on suunatud rööbiti  $OY$ -teljega. Väljatugevus

$$H_y = -\frac{\partial V_m}{\partial x} = -D = -H_0.$$

Superpositsiooni printsiibi alusel võime väita, et funktsioon

$$\xi = -\frac{i}{2\pi} \ln z + H_0 z + C$$

kirjeldab vooluga  $i$  sirge juhtme välja välises homogeenväljas, mille väljatugevus  $H_y = -H_0$ . Kuna

$$\ln z = \ln z + j\theta = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + j \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x},$$

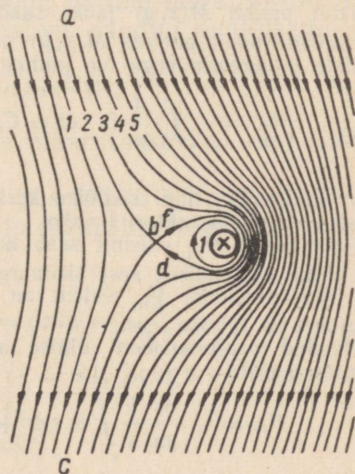
saab väljatugevusjoone võrrandi esitada kujul

$$V_m = -\frac{i}{4\pi} \ln(x^2 + y^2) + H_0 x + C_1 = \text{const}$$

ja samapotentsiaalijoone võrrandi kujul

$$U_m = -\frac{i}{2\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x} + H_0 y + C_2 = \text{const}.$$

Selline väli on negatiivse voolu puhul kujutatud joonisel 63. Punktis  $b$  võrdub väljatugevus nulliga. Väljatugevusjoont, mis läbib

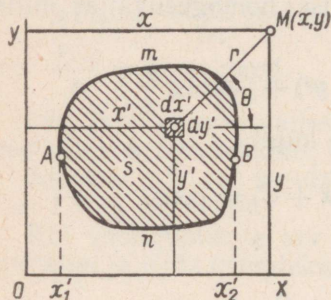


JOON. 63

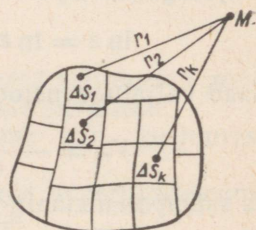
seada punkti ja on märgitud numbriga 2, saab vaadelda ühtse liitjoonena  $abfdbc$ . Sel puhul on ta sarnane joontega 3, 4 ja 5, mis asetsevad vooluga juhtmest paremal. Teda saab vaadelda ka kahe joonena: joon  $abc$  ja kinnine joon  $bfdb$ . Sel puhul on ta sarnane kahe joonega, mis mõlemad on tähistatud numbriga 1. Üks nendest moodub juhtmest vasakult, teine ümbritseb juhet.

### § 53. Mistahes kujuga ja lõpliku ristlõikega juhtmete väli

Keeruka ristlõikega massiivsete juhtmete lähedase magnetvälja uurimisel ei saa neid juhtmeid enam vaadelda joonjuhtmetena. Jaotame juhtme lõpmalt peenikesteks rööpniiitideks. Tähistame niidi ristlõike keskpunkti koordinaadid  $XOY$ -tasandil  $x'$  ja  $y'$  (joon. 64). Niidi ristlõike pindala on  $ds = dx'dy'$ . Iga selline niit on joonjuhtmeks vooluga  $di = \delta ds$ , kus  $\delta$  on voolutihedus. Niisuguse niidi suhtes on õiged ülalpool saadud voofunktsiooni ja



JOON. 64



JOON. 65

potentsiaali avaldised. Kogu juhtme voolu  $i$  poolt põhjustatav punkti  $M(x, y)$  voofunktsioon ja potentsiaal saadakse üksikute niitide voolude poolt selles punktis põhjustatavate voofunktsioonide ja potentsiaalide summeerimisega. Järelikult punkti  $M(x, y)$  jaoks saadakse suuruste  $V_m$  ja  $U_m$  avaldised niitide voolude poolt punktis  $M(x, y)$  põhjustatava voofunktsiooni ja potentsiaali avaldiste integreerimisega üle juhtme ristlõike  $s$ . Seega võib kirjutada:

$$V_m = - \int_s \frac{\delta}{2\pi} \ln r ds + C_1; \quad U_m = - \int_s \frac{\delta}{2\pi} \theta ds + C_2,$$

kus  $r$  on kaugus niidi ristlõike keskpunktist punktini  $M(x, y)$  ja  $\theta$  — nurk  $OX$ -telje ja raadiusvektori  $r$  vahel.

Potentsiaali  $U_m$  valemit saab kasutada ainult väljaspool voolujuhti asetseva välja vaatlemisel, sest skalaarpotentsiaali mõiste omab ainult sel puhul sisu. Voofunktsiooni  $V_m$  valem on aga sobiv rakendamiseks nii väljaspool voolujuhet kui juhtme sees.

Saadud voofunktsiooni üldise avaldise  $\delta = \text{const}$  korral saab kirjutada järgmisel kujul:

$$V_m = - \frac{\delta s}{2\pi s} \int_s \ln r ds + C_1 = - \frac{i}{2\pi s} \int_s \ln r ds + C_1,$$

kus  $s$  on juhtme ristlõige. Selles avaldises esinevat suurust

$$\frac{1}{s} \int_s \ln r \, ds$$

tähistatakse järgmiselt:

$$\frac{1}{s} \int_s \ln r \, ds = \ln g.$$

Siin on  $r$  kaugus punktist  $M$  kuni pinnaelemendini  $ds$ . Suurust  $g$  nimetatakse *keskmiseks geomeetriliseks kauguseks* punktist  $M$  kuni pinnani  $s$ . Selgitame seda terminit. Jaotame pinna  $s$  võrdseteks osadeks  $\Delta s$  (joon. 65) nii, et  $s = n\Delta s$ . Geomeetiline keskmine punkti  $M$  kaugustest  $n$  kõikide pinnaosade

$\Delta s$  keskpunktideni väljendub avaldisega  $g = \sqrt[n]{r_1 r_2 \dots r_n}$  või

$$\ln g = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} \ln r_k = \frac{1}{s} \sum_{k=1}^{k=n} \ln r_k \Delta s.$$

Suurendades pindade arvu, saame piiril, kui  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\ln g = \frac{1}{s} \int_s \ln r \, ds.$$

Seega

$$V_m = -\frac{i}{2\pi} \ln g + C_1.$$

On selge, et punkti keskmine geomeetiline kaugus tasapinnast sõltub ainult seda pinda ümbritseva kontuuri kujust ja punkti asendist selle pinna suhtes.

## § 54. Ringristlõikega juhtmete väli

Väljaspool ringristlõikega juhet on väli samasugune kui olukorras, mil kogu vool  $i$  voolaks mööda juhtme telge. Seetõttu väljaspool juhet, kooskõlas 51. paragrahvis saadud avaldisega,

$$V_m = -\frac{i}{2\pi} \ln r_0 + C_1,$$

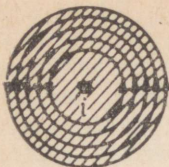
kus  $r_0$  on kaugus punktist  $M$ , milles määratakse  $V_m$ , kuni ristlõike keskpunktini.

Leiame voofunktsiooni avaldise, mis kehtib juhtme sees. Väljatugevus kaugusel  $r_0$  juhtme teljest on määratav koguvoolu seaduse ja sümmeetriatingimuste alusel:

$$\oint \mathbf{H} \, dl = H 2\pi r_0 = \delta \pi r_0^2 = i \frac{r_0^2}{R^2},$$

kus  $R$  on juhtme ristlõike raadius ( $r_0 < R$ ). Seega väljatugevus

$$H = i \frac{r_0}{2\pi R^2}.$$



JOON. 66

Vektori  $H$  voosuurus läbi pinnakese, mille pikkus juhtme telje suunas on üks ühik ja laius  $dr_0$ , on võrdne  $Hdr_0$ . Järelikult

$$dV_m = -H dr_0 = -\frac{ir_0}{2\pi R^2} dr_0.$$

Miinusmärk on vaja panna seetõttu, et  $V_m$  ja  $r_0$  suurenevad  $i > 0$  puhul vastupidistes suundades.

Integreerides leiame:

$$V_m = -i \frac{r_0^2}{4\pi R^2} + C'_1.$$

Jaotades välja võrdse vooga  $\Delta V_m$  torudeks, saame:

$$\Delta V_m = -\frac{i}{4\pi R^2} (r_{0,v+1}^2 - r_{0,v}^2) = \text{const}$$

või

$$r_{0,v+1}^2 = r_{0,v}^2 + K.$$

Kuna sisemise vootoru sisemine raadius võrdub nulliga, siis kehtib magnetilise induktsiooni joonte raadiuste vahel seos

$$r_{0,1}^2 = K, \quad r_{0,2}^2 = r_{0,1}^2 + K = 2K, \quad \dots, \quad r_{0,v}^2 = K.$$

Joonisel 66 on kujutatud väli juhtme sisemuses, kusjuures voog on jaotatud viieks võrdse vooga toruks.

## § 55. Kahejuhtmelise liini väli

Mistahes mõõtmetega ringristlõiget omavate sirgete juhtmete alalisvoolude magnetväli on väljaspool juhtmeid samasugune nagu siis, kui need voolud esineksid joonjuhtmetes, mis ühtiksid tegelike juhtmete telgedega. Tõepoolest, naaberjuhtmete alalismagnetväli ei indutseeri antud juhtme sees elektromotoorjõude. Seetõttu jääb voolujaotus iga juhtme sees samasuguseks nagu üksildases juhtmes. Kuna ringristlõikega üksildase juhtme voolu magnetväli on väljaspool juhett samasugune, nagu sel puhul, kui kogu vool oleks koondatud juhtme teljele, võib mistahes arvu ringristlõikega juhtmete korral väljaspool juhtmeid esineva välja uurimisel asendada tegelikud juhtmed joonjuhtmetega, mis ühtivad tegelike juhtmete geomeetriliste telgedega. Tingimata on vaja alla kriipsu-

tada, et see asendus on õige ainult väljaspool juhtmeid oleva ruumi kohta, ainult alalisvoolu korral ja ainult siis, kui juhtmete materjali magnetiline läbitavus on võrdne ümbritseva keskkonna magnetilise läbitavusega, nagu näiteks vask- või alumiiniumjuhtmete korral õhus.

Selline asendus ei ole muide õige mitme ringristlõikega massiivjuhtme elektrivälja puhul, sest naaberjuhtmete lähedus põhjustab laengu ümberjaotumise antud juhtme pinnal.

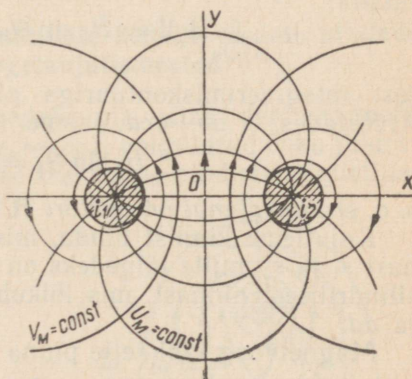
Kahejuhtmelist liini moodustavate joonjuhtmete voolude magnetvälja pildi konstrueerimiseks kasutame varem arvatud kahe laetud joonjuhtme elektrivälja pilti (joon. 20). Kooskõlas vastavuse printsiibiga (vt. § 51) asendame elektrivälja tugevuse jooned magnetiliste samapotentsiaalijoontega ja elektrilised samapotentsiaaljooned magnetvälja tugevuse joontega. Voofunktsiooni ja potentsiaali avaldised omavad kuju:

$$V_m = -\frac{1}{2\pi} (i_1 \ln r_1 + i_2 \ln r_2) + C_1 = \frac{i}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} + C_1;$$

$$U_m = -\frac{1}{2\pi} (i_1 \theta_1 + i_2 \theta_2) + C_2 = \frac{i}{2\pi} (\theta_2 - \theta_1) + C_2,$$

sest  $i_1 = -i_2 = i$ .

Väljatugevusjooned on ringjooned keskpunktidega sirgel, mis lõikub juhtmete telgedega. Nende ringjoonte keskpunktide koordinaadid ja raadiused määratakse avaldistest, mis saadi elektrivälja arvutamisel 20. paragrahvis. Magnetilisteks samapotentsiaalijoonteks on ringjoonte kaared, mis läbivad mõlemate juhtmete telgesid. Joonisel 67 on kujutatud kahejuhtmelise liini magnetvälja pilt.



JOON. 67

Tegelikuses on juhtmete ristlõiked lõplike mõõtmetega. Seejuures on magnetväli väljaspool juhtmeid samasugune nagu siis, kui voolud oleksid koondatud juhtmete geomeetrilistele telgedele. Selles suhtes erineb magnetväli elektriväljast. Elektrivälja ringristlõikega juhtmete ümbruses on selline nagu juhtumil, kui laengud

oleksid koondatud juhtmete elektrilistele telgedele. Juhtmete elektrilised teljed aga ei lange juhtmete geomeetriliste telgedega kokku. Juhtmete sees kujutavad magnetvälja tugevuse jooned endast keerukaid kõveraid. Nii väljendab voofunktsiooni sirge juhtme sees avaldis

$$V_m = -\frac{ir_1^2}{4\pi R^2} + \frac{i}{2\pi} \ln r_2 + C_1$$

ning jooned  $V_m = \text{const}$  on keeruka kujuga.

### § 56. Piiritingimused kahe erineva magnetilise läbitavusega keskkonna eralduspinnal

Kui magnetilise induktsiooni jooned lõikuvad kahe erineva magnetilise läbitavusega magnetahela osa eralduspinnaga, moodustades selle pinna normaali suhtes mingi nurga, siis muudavad magnetilise induktsiooni jooned eralduspinnal oma suunda.

Leiame üldised tingimused, millele alluvad magnetilise induktsiooni ja magnetvälja tugevuse vektorite komponendid kahe keskkonna eralduspinnal, kui keskkondade absoluutsed magnetilised läbitavused  $\mu_{a1}$  ja  $\mu_{a2}$  on erinevad. Eeldame, et mõlemad keskkonnad on homogeensed ja isotroopsed. Olgu  $\theta_1$  ja  $\theta_2$  nurgad magnetilise induktsiooni joone ja eralduspinna normaali vahel vastavalt esimeses ja teises keskkonnas (joon. 68). Koostame vektori  $\mathbf{H}$  joonintegraali mööda kontuuri  $abcd$ , mille küljed  $ab$  ja  $cd$  on erinevates keskkondades lõpmata lähedal eralduspinnale. Võime kirjutada:

$$\int_{abcd} \mathbf{H} \, d\mathbf{l} = H_1 \sin \theta_1 ab - H_2 \sin \theta_2 cd = 0,$$

sest integreerimiskontuuriga piiratud pinda elektrivool ei läbi. Arvestades, et  $ab = cd$ , saame:

$$H_1 \sin \theta_1 = H_2 \sin \theta_2,$$

s. o. *eralduspinnal on vektori  $\mathbf{H}$  tangentsiaalkomponendid võrdsed.*

Kujutleme kinnist pinda, mis on moodustatud kahest tasapinnast  $s_1$  ja  $s_2$ , mille jälgedeks on joonisel joonlõigud  $ab$  ja  $cd$ , ning silindrilisest pinnast, mis lõikub joonise pinnaga mööda jooni  $bc$  ja  $ad$ .

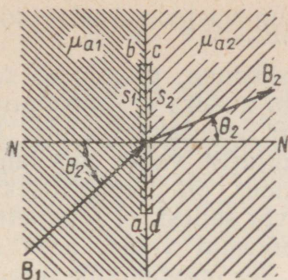
Magnetvoog läbi selle pinna võrdub nulliga. Järelikult

$$\int_{s_1} \mathbf{B} \, ds + \int_{s_2} \mathbf{B} \, ds = -B_1 \cos \theta_1 s_1 + B_2 \cos \theta_2 s_2 = 0.$$

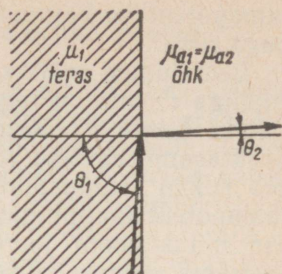
Võttes arvesse, et  $s_1 = s_2$ , saame:

$$B_1 \cos \theta_1 = B_2 \cos \theta_2,$$

s. o. *eralduspinnal on vektori  $\mathbf{B}$  normaalkomponendid võrdsed.*



JOON. 68 ■ JOON. 69



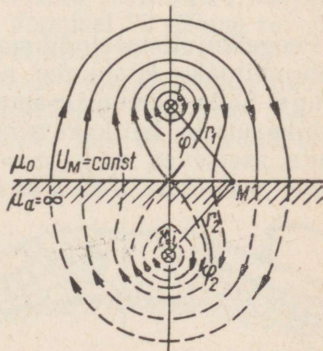
Eralduspinnal vektorite  $\mathbf{H}$  ja  $\mathbf{B}$  kohta kehtivatest tingimustest saame:

$$\frac{B_1 \cos \theta_1}{H_1 \sin \theta_1} = \frac{B_2 \cos \theta_2}{H_2 \sin \theta_2} \quad \text{või} \quad \frac{\operatorname{tg} \theta_1}{\operatorname{tg} \theta_2} = \frac{\mu_{a1}}{\mu_{a2}}.$$

Suur praktiline tähtsus on magnetvälja iseloomul õhus elektrimasinate, trafode, elektromagnetite ja teiste elektrotehniliste seadiste terasosade pindade läheduses. Ferromagnetilise keskkonna ja õhu magnetiline läbitavus erinevad teineteisest tugevalt. Õhul praktiliselt  $\mu_{a2} = \mu_0$ . Olgu ferromagnetilisel keskkonnal  $\mu_{a1} = 1000 \mu_0$ . Sel juhtumil  $\operatorname{tg} \theta_1 = 1000 \operatorname{tg} \theta_2$ . Kui magnetilise induksiooni jooned ferromagnetilise keskkonna sees (joon. 69) moodustavad normaaliga nurga  $\theta_1 = 89^\circ$ , siis vastav nurk õhus  $\theta_2 \approx 3^\circ 20'$ . Seetõttu kõikidel juhtumitel, kui magnetväli tekitatakse õhus asetsevate juhtide voolude poolt, võib praktiliselt võtta  $\theta_2 = 0$ , s. o. võib lugeda, et õhus on magnetilise induksiooni jooned risti ferromagnetilistest materjalidest kehade pindadega.

## § 57. Voolude väli ferromagnetiliste kehade tasaste pindade läheduses. Peegelkujutismetod

Olgu lõpmatu tasapinna lähedale, mis piirab ferromagnetilist keskkonda (mille jaoks võtame  $\mu_a = \infty$ ), paigutatud õhku juhe vooluga  $i$  (joon. 70). Ferromagnetilise keskkonna pind on magnetiliseks



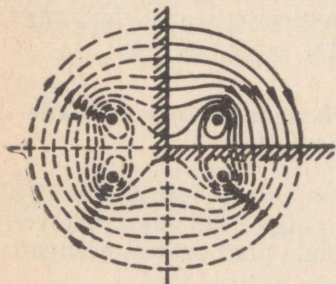
JOON. 70

samapotentsiaalipinnaks, sest õhus on väljatugevusjooned selle pinnaga risti.

Eemaldame mõttes ferromagnetilise keskkonna, asendades ta vooluga  $i'$ , mis on tegeliku voolu  $i$  peegelkujutiseks eralduspinna suhtes. Voolu  $i'$  võtame samasuunaliseks ja võrdseks vooluga  $i$ . Kesktaasand tegeliku voolu ja voolu peegelkujutise vahel, mis langeb kokku eralduspinnaga tegelikus ülesandes, on magnetiliseks samapotentsiaalipinnaks. See järeldub kas või sellest, et magnetilise induktsiooni jooned, mis haaravad mõlemat voolu, peavad asetsema sümmeetriliselt selle pinna suhtes. See on võimalik ainult siis, kui magnetilise induktsiooni jooned on nimetatud pinnaga risti.

Niisiis pärast ferromagnetilise keskkonna asendamist vooluga  $i'$  tingimused piirpinnal ei muutunud. Ka tegeliku välja piirkonnas esinev vool  $i$  jäi muutumatuks. Seetõttu tuleme järgmisele olulisele järeldusele: *sirgjooneliselt kulgeva voolu väli, kui vool läbib õhku paralleelselt ferromagnetilisest materjalist massiivkeha tasase pinnaga, on õhus samasugune nagu see väli, mis tekitatakse kahe voolu poolt — tegeliku voolu  $i$  ja tegelikule voolule keha pinna suhtes võetud peegelkujutise  $i' = i$  poolt sel eeldusel, et ferromagnetiline keskkond on eemaldatud.*

Sellel väitel põhinevat arvutusmeetodit nimetatakse *peegelkujutismetodiks*. Analoogilise meetodiga tutvusime elektrostaatilise välja arvutuse peatükis. Ent elektrilaengud peavad peegelduma juhtiva keskkonna pinnalt laengu märki muutes, vool aga peegeldub ferromagnetilise keskkonna pinnalt suunda muutmata.



JOON. 71

Peegelkujutismetodit saab ilmselt laiendada ka mistahes arvule voolujuhtidele, kusjuures nende ristlõiked võivad olla mistahes kujuga. Seda meetodit, samuti nagu elektrostaatilise välja puhulgi, saab kasutada, kui kaks pinda, mis piiravad ferromagnetilist keskkonda, asetsevad nurga  $\alpha = \pi/n$  all, kus  $n$  on täisarv ning nurka  $\alpha$  mõõdetakse õhus. Väli  $\alpha = \pi/2$  korral on näidatud joonisel 71.

## § 58. Väljapildi konstrueerimise graafiline meetod

Keerukate ülesannete puhul osutub välja analüütiline arvutamine võimatuks ja tuleb kasutada väljapildi ligikaudseid graafilise konstrueerimise meetodeid. Selline meetod on väga kasulik elektrimasinate ja -aparaatide teraspooluste väljapildi konstrueerimisel. Seejuures tuleb meile appi see asjaolu, et magnetilise induktsiooni jooned on pooluste lähedal õhus risti pooluste pindadega. Järelikult saab pooluste pinnad lugeda magnetilisteks samapotentsiaalipindadeks. Selline tingimus on õige sel puhul, kui väli tekitatakse voolude poolt, mis kulgevad õhus asetsevates juhtmetes ja mähistes, nagu see tavaliselt ongi.

Selgitame alguses väljapildi konstrueerimise meetodit selle piirkonna jaoks, kus ei ole uuritavat välja tekitavate vooludega juhte, s. o. pooluste nende osade lähedal asuva ruumipiirkonna jaoks, mis ulatuvad pooluste südamikete paigutatud vooluga mähistest välja poole. Kui peale selle võib antud ruumipiirkonna välja lugeda ligikaudu tasaparalleelseks, siis ilmselt tuleb juhinduda analoogilistest juhistest, mis püstitati 23. paragrahvis elektrivälja konstrueerimiseks. Nendeks on:

1) väljatugevusjooned ja magnetilised samapotentsiaalijooned peavad kõikjal lõikuma täisnurgi;

2) ferromagnetiliste keskkondade pinnad tuleb lugeda magnetilisteks samapotentsiaalipindadeks ja õhus tuleb väljatugevusjooned tõmmata nende pindadega risti;

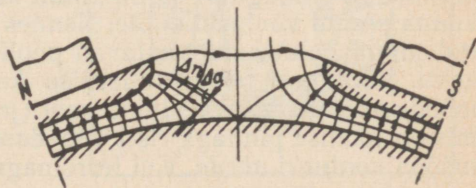
3) väljatugevusjoonte ja samapotentsiaalijoonte poolt moodustatava võrgu silmad peavad võrgu küllaldase tiheduse korral olema ligikaudu üksteisega sarnased.

Tähistame võrgu silma keskmised mõõtmed väljatugevusjoone suunas  $\Delta n$ -ga ja magnetilise samapotentsiaalijoone suunas  $\Delta a$ -ga. Siis saab viimase juhise avaldada kujul

$$\frac{\Delta n}{\Delta a} = k = \text{const.}$$

Rea järgnevate lähenduste teel õnnestub joonestada väljapilt, mis vastab kõigile nimetatud nõuetele. Joonisel 72 näeme sel viisil konstrueeritud elektrimasina pooluste väljapilti.

Kui väljapilt on joonestatud, siis saab selle abil leida pooluse ja ankru vahelise õhuvahemiku magnetilise takistuse  $R_m$  või magnetilise juhtivuse  $G_m = 1/R_m = \Phi/F$ , kus  $\Phi$  on vaadeldava



JOON. 72

vahemiku magnetvoog ja  $F$  — vaadeldava vahemiku pikkuse kohta tulev magnetomotoorjõud. Kui  $m_1$  on magnetilise induktsiooni torude arv, siis

$$\Phi = m_1 \Delta \Phi = m_1 l \mu_0 H \Delta a,$$

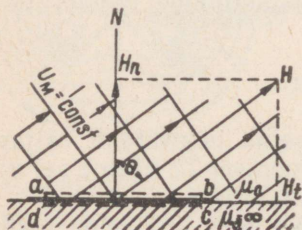
kus  $\Delta \Phi$  on ühe toru voog ja  $l$  — pikkus  $OZ$ -telje suunas (risti joonise pinnaga). Kui  $m_2$  on vahemike arv naabersamapotentsiaali-joonte vahel, siis  $F = m_2 \Delta U_m = m_2 H \Delta n$ , milles  $\Delta U_m$  on potentsiaali muutus ühe vahemiku ulatuses.

Seega

$$G_m = \mu_0 l \frac{\Delta a}{\Delta n} \cdot \frac{m_1}{m_2} = l \lambda.$$

Suurus  $\lambda$  kujutab endast magnetilist juhtivust pikkusühiku kohta  $OZ$ -telje suunas. Ta sõltub ainult vaadeldava magnetahela osa konfiguratsioonist.

Toodud väljapildi konstrueerimise juhised on õiged ainult piirkonna puhul, mis ei ole elektrivoolust hõivatud. Piirkonnale, kus asetsevad vooluga juhtmed või poolid, ei ole need juhised rakendatavad, sest siin kaotab skalaarse magnetilise potentsiaali mõiste oma sisu. Et konstrueerida ligikaudset väljapilti nendele kohtadele, kus poolusesüdamikü läheduses asetsevad voolust läbitavad poolid, toimitakse järgneval viisil. Pooli ristlõige surutakse südamiku pinna suunas kuni nullmõõtmeni kokku. Teiste sõnadega, eeldatakse, et vool kulgeb südamiku pinnale liiubavas lõpmatult õhukeses kihis. Sellise eelduse puhul poolust ümbritsevas ruumis voolusid ei ole ja skalaarse magnetilise potentsiaali mõiste on kasutatav. Seejuures peab väli kõikjal rahuldama esimest ja kolmandat tingimust.



JOON. 73

Teine tingimus — väljatugevuse jooned olgu risti ferromagnetilise keskkonna pinnaga — säilib ainult seal, kus ferromagnetilise keskkonna pinnal voolusid ei ole. Nendes kohtades, kus esinevad jaotatud pinnavoolud, mis vastavad poolide vooludele, see tingimus ei kehti. Vaatleme ferromagnetilise keskkonna tasast pinda, mida mööda voolab õhukeses kihina vool (joon. 73). Voolaku vool suunas, mis on joonise pinnaga risti. Moodustame vektori  $\mathbf{H}$  joonintegraali mööda kontuuri  $abcd$ . Kui ferromagnetilise keskkonna jaoks võtta

$\mu_a = \infty$ , siis ferromagnetilise keskkonna sees  $H = 0$ . Olgu  $ad$  ja  $bc$  võrreldes  $ab$ -ga väga väikesed. Siis

$$\oint_{abcd} \mathbf{H} \, dl = H_t ab,$$

kus  $H_t$  on vektori  $\mathbf{H}$  tangentsiaalkomponent ferromagnetilise keskkonna pinna lähedal õhus. See integraal on võrdne vooluga  $i$ , mis läbib kontuuri  $abcd$ . Seetõttu

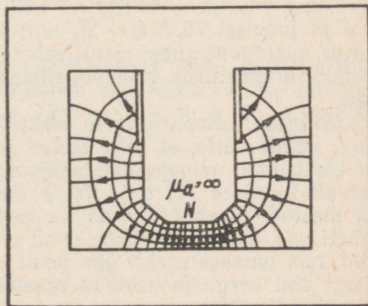
$$H_t = \frac{i}{ab},$$

s. o. väljatugevuse tangentsiaalkomponent õhus erineb nullist ja on võrdne voolu joontihedusega, nn. voolukattega. Järelikult ei ole väljatugevusjooned selliste pindade lähedal pindadega risti. Väljajoone suund jääb määramatuks, sest vektori  $\mathbf{H}$  normaalkomponent on teadmata.

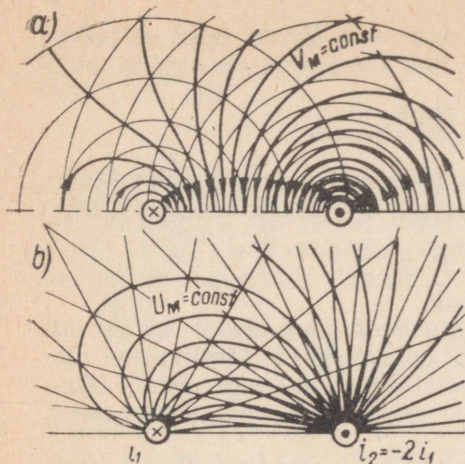
Välja konstrueerimisel toimitakse järgmiselt. Algul joonestatakse ülaltoodud juhiseid rakendades väli pooluste nende osade juures, kus voole ei ole. Pooluste pinnad nendes kohtades loetakse samapotentsiaalipindadeks. Selle välja ülejäänud samapotentsiaalijooned tõmmatakse kohtades, kus voolavad pinnavoolud, potentsiaalile vastavatesse punktidesse pooluse piirjoonel. Nende punktide asend sõltub voolujaotusest pindkihis. Kahe naaberjoone potentsiaalide vahe võrdub vooluga kahe punkti vahel, milledesse on vaja need jooned tõmmata. Samapotentsiaalijooned, samuti kui väljatugevuse joonedki, on kohtades, kus esinevad voolud, kaldu pooluse piirjoone suhtes (joon. 73). Seejärel konstrueeritakse kogu väli, püüdes selle poole, et kõikjal oleks rahuldatud esimene ja kolmas tingimus. Kui see õnnestub, on väli õigesti konstrueeritud. Joonisel 74 on näitena toodud sel viisil konstrueeritud vooluga ümbritsetud pooluse väli.

Kui väli tekitatakse mitme voolu poolt ja seejuures on kerge iga voolu välja eraldi konstrueerida, siis resulteeriva välja konstrueerimiseks võib kasutada Maxwelli poolt esitatud väljade superponeerimise meetodit.

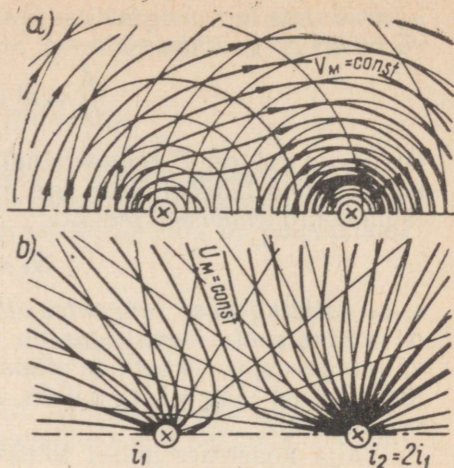
Olgu homogeenses keskkonnas kaks paralleelset ringristlõikega juhet vooludega  $i_1$  ja  $i_2$ . Kummagi voolu väljapilti eraldi konstrueerida on üsna lihtne (vt. § 51).



JOON. 74



JOON. 75



JOON. 76

Konstrueerime samal joonisel voolude  $i_1$  ja  $i_2$  väljatugevusjoonte pildid joonte sellise tihedusega, et kehtiks võrdus  $|\Delta V_{m1}| = |\Delta V_{m2}|$ . Selle tingimuse täitmisel võimaldab kahe välja superponeerimisel saadav võrk kergesti konstrueerida väljatugevusjoonte pilti mõlema voolu  $i_1$  ja  $i_2$  resulteerivale väljale. Tõepoolest, resulteeriva väljatugevusjoone võrrand omab kuju  $V_{m1} + V_{m2} = \text{const}$  ja järelikult kehtib mistahes kahe sellel joonel asuva punkti kohta:  $\Delta V_{m1} + \Delta V_{m2} = 0$ , s. o.  $\Delta V_{m1} = -\Delta V_{m2}$ .

Kui kummagi välja konstrueerimisel on täidetud tingimus  $|\Delta V_{m1}| = |\Delta V_{m2}|$ , siis kummagi välja väljatugevusjoonte lõikepunktide rida kuulub ühele ja samale resulteeriva välja väljatugevusjoonele. Selleks et ühest sellisest punktist üle minna teise, on üleminekul ühes väljas naaberjoonele vaja üle minna ka teises väljas naaberjoonele. Kui seejuures voolud  $i_1$  ja  $i_2$  on ühesuunalised, siis eemaldumisel ühest voolust tuleb läheneda teisele; kui aga voolud  $i_1$  ja  $i_2$  on erineva suunaga, tuleb üheaegselt eemalduda mõlemast voolust või üheaegselt läheneda neile mõlemale. Praktiliselt tähendab see, et resulteeriva välja väljatugevusjoon läbib eri väljade superponeerimisel saadava võrgustiku silma selle võrgusilma kõverjoonelist diagonaali mööda. Seejuures tuleb kummastki diagonaalist valida üks või teine vastavalt voolude märkidele. Joonisel 75, a on joonestatud väljatugevusjoonte pilt, kui  $i_2 = -2i_1$  ning joonisel 76, a, kui  $i_2 = 2i_1$ . Analoogilist võtet saab kasutada resulteeriva välja magnetiliste samapotentsiaalijoonte pildi joonestamiseks. Samapotentsiaalijooni kirjeldavad võrrandid  $U_{m1} + U_{m2} = \text{const}$ . Joonisel 75, b on näidatud selline konstrueerimine  $i_2 = -2i_1$  korral ja joonisel 76, b  $i_2 = 2i_1$  korral.

Kui superponeerime resulteeriva välja väljatugevusjoonte pildid vastavate juhtumite magnetiliste samapotentsiaalijoonte piltidele, saame alati ortogonaalse võrgu.

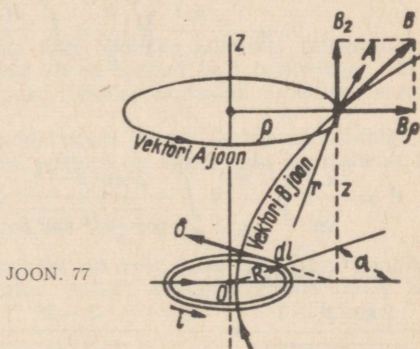
Kasutades tasaparalleelse elektrivälja ja magnetvälja vastavuse printsiipi (§ 51), võime väita, et kahe laetud joonjuhtme jaoks annavad joonised 75, a ja 76, a elektriliste samapotentsiaalijoonte pildid, kui  $\tau_2 = -2\tau_1$  ja  $\tau_2 = 2\tau_1$  ning vastavalt joonised 75, b ja 76, b annavad elektrivälja tugevuse joonte pildid. Seda meetodit saab kasutada ka keerukamatel juhtumitel. Kui näiteks elektromagneti väli tekitatakse kahe pooli voolude poolt ja on konstrueeritud mõlemad väljad, mis luuakse eraldi ühe pooli voolu ja teise pooli voolu poolt, on toodud meetodi abil kerge joonestada resulteerivat välja nii juhtumile  $i_2/i_1 > 0$  kui ka juhtumile  $i_2/i_1 < 0$ .

## § 59. Ruumiline ülesanne. Ringjoonelise vooluringi välj

Kõikides suundades lõplikke mõõtmeid omavate vooluringide voolude magnetväljade arvutamine on väga keerukas ülesanne. Seejuures on kõik välja iseloomustavad suurused kolme koordinaadi funktsioonid. Homogeense keskkonna puhul seisneb lahendamise üldmeetod etteantud voolujaotuse järgi vektorpotentsiaali leidmises 46. paragrahvis esitatud valemite abil. Magnetilise induksiooni vektor leitakse seosest  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ .

Ruumilise ülesande lihtsaim juhtum on ringjooneliste vooluringide voolude väli, kui need vooluringid asetsevad rööptasanditel tsentritega ühisel teljel. Küllaldane on vaadelda sellise välja pilti ühel tasandil, mis läbib tsentrite telge, sest kogu väli saadakse leitud väljapildi pööramisega ümber telje. Siia kuulub tähtsa juhtumina ringjooneliste keerdudega poolide voolu magnetväli.

Määrame vooluga  $i$  rõnga välja (joon. 77). Loomulik on vaadelda välja silindrilistes koordinaatides  $z, \rho, \alpha$ . Koordinaatide alguse paigutame ringjoonelise rõnga keskpunkti.  $OZ$ -telje suuname rõnga tasandiga risti.



JOON. 77

Olgu juhi ristlõike  $s$  mõõtmed rõnga raadiusega  $R$  võrreldes väga väikesed. Vaadeldes välja niisugusel kaugusel rõngast, mis on märgatavalt suurem juhi ristlõike mõõtmetest, saame vektorpotentsiaali arvutada valemiga (vt. § 46)

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint \frac{d\mathbf{l}}{r}$$

Integreeritakse mööda kogu vooluringi. Sümmeetria tõttu  $OZ$ -telje suhtes peavad vektorpotentsiaali jooned olema ringjooned, mis asetsevad voolujoontega rööpsetel tasanditel keskpunktidega  $OZ$ -teljel. Järelikult omab  $\mathbf{A}$  ainult ühte komponenti  $A_\alpha$ . Seega

$$A = A_\alpha = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint \frac{\cos \alpha \, dl}{r}$$

Kuna

$$r = \sqrt{z^2 + R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos \alpha}; \quad dl = R \, d\alpha,$$

siis

$$A = \frac{\mu a i}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \alpha \, d\alpha}{\sqrt{z^2 + R^2 + \varrho^2 - 2R\varrho \cos \alpha}}.$$

Teisendame selle integraali elliptilisteks integraalideks, millede kohta on olemas tabelid. Asendame

$$\alpha = \pi - 2\beta; \quad d\alpha = -2d\beta; \quad \frac{4R\varrho}{z^2 + (R + \varrho)^2} = k^2.$$

Arv  $k$  on vahemikus  $0 \leq k \leq 1$ . Väärtus  $k=1$  saadakse, kui  $z=0$  ja  $\varrho=R$ , s. o. lõpmata peenikeseks eeldatava voolujuhi teljel. Juhi teljel muutub  $A$  lõpmata suureks, kuid nagu märgiti, võib  $A$  arvutamise lihtsustatud valemit kasutada ainult küllaldase kauguse puhul juhust. Saame:

$$\cos \alpha = -\cos 2\beta = 2 \sin^2 \beta - 1;$$

$$r = \sqrt{z^2 + R^2 + \varrho^2 - 4R\varrho \sin^2 \beta + 2R\varrho} = \frac{2\sqrt{R\varrho}}{k} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}.$$

Järelikult

$$A = -\frac{\mu a i}{8\pi} \sqrt{\frac{R}{\varrho}} k \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{2(2 \sin^2 \beta - 1) d\beta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}}$$

ehk

$$A = \frac{\mu a i}{2\pi} \sqrt{\frac{R}{\varrho}} k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin^2 \beta - 1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}} d\beta = \frac{\mu a i}{2\pi} \sqrt{\frac{R}{\varrho}} f(k).$$

Kasutades samasust

$$\frac{2 \sin^2 \beta - 1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}} = \frac{1}{k^2} \left( \frac{2 - k^2}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}} - 2\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta} \right),$$

võime kirjutada:

$$f(k) = \left( \frac{2}{k} - k \right) K - \frac{2}{k} E,$$

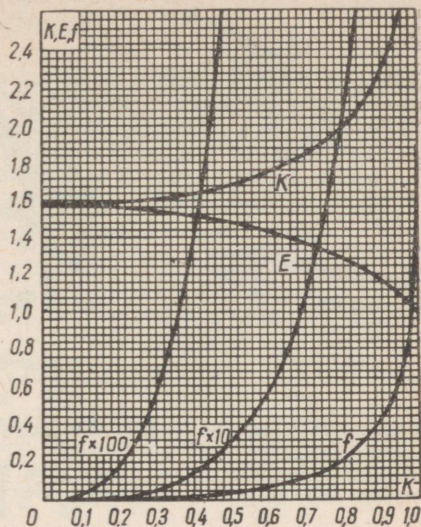
kus

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}}$$

ja

$$E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta} \, d\beta$$

JOON. 78



kujutavad endast esimest ja teist liiki täielikke elliptilisi integraale. Nad on mooduli  $k$  funktsioonideks. Joonisel 78 on toodud neid funktsioone väljendavad kõverad ning kõverad, mis annavad vektorpotentsiaali avaldises esineva  $f(k)$  suuruse.

Uuritava välja magnetilise induktsiooni jooned asetsevad  $OZ$ -telge läbivatel tasanditel. Magnetilise induktsiooni vektoril on ainult kaks komponenti  $B_z$  ja  $B_\rho$ , mis leitakse avaldistega

$$B_z = \text{rot}_z \mathbf{A}; \quad B_\rho = \text{rot}_\rho \mathbf{A}.$$

Nende komponentide arvutamiseks on vaja kasutada vektori  $\text{rot } \mathbf{A}$  komponentide avaldisi, mis on väljendatud vektori  $\mathbf{A}$  komponentide kaudu silindrilistes koordinaatides.

## § 60. Skalaarpotentsiaali avaldis ruuminurga kaudu, mille all vooluring paistab

Näitame, et magnetiline skalaarpotentsiaal  $U_m$  kinnise voolu välja mingis punktis  $M$  on võrdeline ruuminurgaga  $\omega$ , mille all paistab sellest punktist vooluringiga piiratud pind (joon. 79). Ümberpaiknemisel punktist  $M$  punkti  $M'$  kaugusele  $dl'$  omandaks potentsiaal juurdekasvu

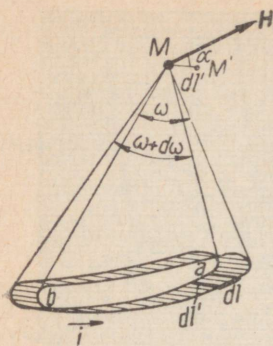
$$dU_m = -H \cos \alpha dl' = -\mathbf{H} dl'.$$

Täpselt sama suure juurdekasvu omandaks potentsiaal punktis  $M$ , kui kogu vooluring paigutada ümber iseendaga paralleelselt kaugusele  $-dl'$ , s. o. vastupidises suunas.

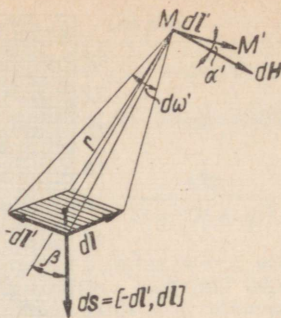
Eraldame vooluringi pikkuselemendi  $dl$  ja vaatleme potentsiaali juurdekasvu  $dU'_m$  punktis  $M$ , mida põhjustas selle elemendi ümberpaiknemine mööda teekonda  $-dl'$  (joon. 80).

Saame:

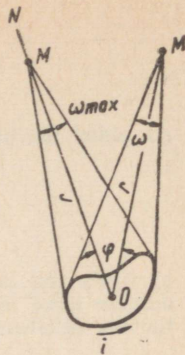
$$dU'_m = -d\mathbf{H} dl',$$



JOON. 79



JOON. 80



JOON. 81

kus  $d\mathbf{H}$  on väljatugevus punktis  $M$  elemendi  $dl$  voolust  $i$ . Kooskõlas Biot'-Savart'i-Laplace'i seadusega

$$d\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi} \frac{i}{r^2} \left[ dl \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \right].$$

Järelikult

$$dU'_m = -\frac{1}{4\pi} \frac{i}{r^2} dl' \left[ dl \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \right] = \frac{1}{4\pi r^2} [-dl' \cdot dl] \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Kuid  $[-dl' \cdot dl] = ds$  on elemendi  $dl$  ümberpaiknemisel teekonna  $-dl'$  ulatusel moodustatava pinnaga risti olev vektor, mis on suuruselt võrdne selle pinnaga. Järelikult  $ds \frac{\mathbf{r}}{r} = \cos \beta ds$  on selle pinna projektsioon kera pinnale, mille raadius on  $r$  ja keskpunkt punktis  $M$ , ning

$$\frac{1}{r^2} \left( ds \frac{\mathbf{r}}{r} \right) = d\omega'$$

on ruuminurk, mille all pind punktist  $M$  paistab. Niisiis

$$dU'_m = \frac{1}{4\pi} d\omega'.$$

Et saada potentsiaali muutust  $dU'_m$ , mida põhjustas kogu suletud vooluringi vool punktis  $M$  (joon. 79), on vaja summeerida  $dU'_m$  suurused kõikides suletud vooluringi elementides  $dl$ . Seejuures, summeerides võrrandi paremal poolel suurused  $d\omega'$ , saame ruuminurga  $d\omega$ , mille all paistab punktist pind, mis moodustub kogu vooluringi ümberpaiknemisel teekonna  $-dl'$  ulatuses. Ilmselt on  $d\omega$  selle ruuminurga  $\omega$  juurdekasv, mille all paistab punktist  $M$  vooluringiga piiratud pind. Seega

$$dU_m = \frac{i}{4\pi} d\omega \quad \text{ja} \quad U_m = \frac{1}{4\pi} \omega + C.$$

Kui eeldada, et vooluringist lõpmata kaugetes punktides, mille jaoks  $\omega = 0$ , on  $U_m = 0$ , siis saame, et  $C = 0$  ja

$$U_m = \frac{i}{4\pi} \omega.$$

Ruuminurk  $\omega$  on positiivne, kui vooluringi vool, vaadatuna punktist  $M$ , kulgeb vastupäeva (joon. 79).

## § 61. Mistahes kujuga vooluringi magnetväli suurel kaugusel vooluringist

Tähistame kauguse vooluringi sees asetsevast mingist punktist  $O$  punktini  $M$ , milles tahetakse leida potentsiaali  $U_m$ , tähega  $r$  (joon. 81). Olgu  $r$  palju suurem vooluringi joonmõõtmetest. Olgu  $ON$  niisugune suund punktist  $O$  punktini  $M$ , mille puhul etteantud  $r$  juures saavutab ruuminurk  $\omega$  suurima väärtuse  $\omega_{max}$ . Iga teise suuna puhul, mis moodustab selle suunaga nurga  $\varphi$ , saame sama  $r$ -i puhul  $\omega = \omega_{max} \cos \varphi$ . Kuid  $\omega_{max} = s/r^2$ , kus  $s$  on niisugune osa raadiust  $r$  omava kera pinnast, mis lõigatakse kera pinnast välja ruuminurgaga  $\omega_{max}$  tsentraalkoonuse poolt.

Seega vastavalt avaldisele  $U_m = \frac{i}{4\pi} \omega$  saame:

$$U_m = \frac{is}{4\pi} \frac{\cos \varphi}{r^2}.$$

Tasapinnalise vooluringi korral, kui  $r$  on palju suurem vooluringi mõõtmetest, on  $s$  vooluringiga piiratud tasapind ja  $ON$  selle pinna normaali suund.

Kuna korrutis  $is = p$  on suletud vooluringi voolu  $i$  magnetiline moment, saab  $U_m$  valemi esitada järgmisel kujul:

$$U_m = \frac{p \cos \varphi}{4\pi r^2}.$$

Suure kauguse puhul vooluringist avalduvad väljatugevuse komponendid järgmiselt:

$$H_r = -\frac{\partial U_m}{\partial r} = \frac{2p \cos \varphi}{4\pi r^3}; \quad H_\varphi = -\frac{1}{r} \frac{\partial U_m}{\partial \varphi} = \frac{p \sin \varphi}{4\pi r^3}.$$

Esitatus järeldub järgmine tähtis väide. Suurtel kaugustel vooluringist väheneb magnetvälja tugevus võrdeliselt vahekauguse kolmanda astmega ning välja iseloom on täiesti sõltumatu vooluringi kujust. Väljatugevus on täielikult määratud magnetilise momendiga.

Väga huvitav on märkida, et magnetvälja iseloom suurel kaugusel vooluringist on samasugune nagu dipooli elektrivälja iseloom suurel kaugusel dipoolist. See selgub, kui kõrvutada antud paragrahvis saadud valemiteid 10. paragrahvis esitatud elektrilise dipooli välja valemitega.

## § 62. Keha välises magnetväljas. Analooogia elektrostaatilise ülesandega

Magnetvälja arvutamise ülesanne, mille puhul välises magnetväljas asetseb ainst keha absoluutse magnetilise läbitavusega  $\mu_a$ , on analoogiline 26. ja 27. paragrahvis vaadeldud ülesandega, mille puhul välises elektriväljas asetseb dielektrikust keha absoluutse dielektrilise läbitavusega  $\epsilon_a$ .

Tõepoolest, nii välja võrrandid kui ka piiritingimused on mõlemal juhtumil analoogilised.

Magnetvälja puhul kehtib kogu meid huvitavas ruumis rot  $\mathbf{H} =$

$\Rightarrow 0$ , sest selles piirkonnas puuduvad makroskoopilised voolud. Järelikult on magnetvälja võrrandid järgmise kujuga:

$$\text{rot } \mathbf{H} = 0; \quad \mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{J}; \quad \text{div } \mathbf{B} = 0.$$

Vastava elektrostaatilise ülesande puhul ruumi vaadeldavas piirkonnas  $\text{div } \mathbf{D} = 0$ , sest selles piirkonnas ei ole vabu laenguid. Seetõttu on elektrivälja võrrandid järgmise kujuga:

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0; \quad \mathbf{D} = \varepsilon_a \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}; \quad \text{div } \mathbf{D} = 0.$$

Märgime, et võrrandid  $\text{rot } \mathbf{H} = 0$  ja  $\text{rot } \mathbf{E} = 0$  on ekvivalentsed võrranditega

$$\mathbf{H} = -\text{grad } U_m \quad \text{ja} \quad \mathbf{E} = -\text{grad } U.$$

Piiritingimusteks keha pinnal, mis on viidud välisesse magnetvälja, on magnetilise induksiooni vektori normaalkomponentide ja väljatugevuse vektori tangentsiaalkomponentide võrdsus mõlemas keskkonnas:

$$B_{n1} = B_{n2} \quad \text{ja} \quad H_{t1} = H_{t2}.$$

Välisesse elektrivälja viidud dielektrikust keha puhul on piiritingimused kujult analoogilised:

$$D_{n1} = D_{n2} \quad \text{ja} \quad E_{t1} = E_{t2}.$$

Järelikult välises magnetväljas asetsevate kehade magnetvälja uurimisel võime kasutada elektrostaatikas lahendatud analoogilisi ülesandeid, asendades  $\mathbf{E}$   $\mathbf{H}$ -ga,  $\mathbf{D}$   $\mathbf{B}$ -ga,  $\mathbf{P}$   $\mu_0 \mathbf{J}$ -ga ja  $\varepsilon_a$   $\mu_a$ -ga. Kuna aine polariseerumus  $P = \frac{p}{dV}$  ja magneetumus  $J = \frac{dp}{dV}$ , siis analoogilistes ülesannetes vastab elektriline moment  $\mu_0$ -ga korrutatud magnetilisele momendile.

### § 63. Kera ja pöördellipsoid välises homogeenväljas.

27. paragrahvis vaadeldi välises elektriväljas asuva dielektrikust kera elektrivälja. Leiti, et kera polariseerub homogeenelt.

Täpselt samuti polariseerub magnetilises mõttes ainest kera absoluutse magnetilise läbitavusega  $\mu_a$ , mis on paigutatud välisesse homogeenesse magnetvälja homogeenelt. Olgu kera paigutatud tühjusesse ja  $\mu_a > 0$ . Siis väljatugevuse  $\mathbf{H}_\infty$  vektor, mida tekitab kera magneetumine, on kera sees suunatud vastupidiselt välisvälja tugevuse  $\mathbf{H}_0$  vektorile. Sel juhtumil nimetatakse vektori  $\mathbf{H}_\infty$  välja *lahtimagneetivaks* ehk *demagneetivaks väljaks*. Kasutades valemeid, mis saadi 27. paragrahvis, ja tehes neis vastavad asendused,

saame valemid meid huvitava juhtumi jaoks. Demagneetiva välja tugevus määratakse valemiga

$$H_{\circ} = \frac{\mu_a - \mu_0}{\mu_a + 2\mu_0} H_0.$$

Kera magneetumisest tingitud väli on väljaspool kera samasugune nagu kera tsentris asetseva väga väikese suletud vooluringi voolu väli, mille magnetiline moment  $p$  on võrdne kera ruumala kõikide elementaarvoolude magnetiliste momentide summaga.

Kasutades 27. paragrahvis saadud valemeid, võime kirjutada:

$$\mu_0 p = 4\pi\mu_0 R^3 H_{\circ} = 4\pi R^3 \mu_0 \frac{\mu_a - \mu_0}{\mu_a + 2\mu_0} H_0,$$

kus  $R$  on kera raadius.

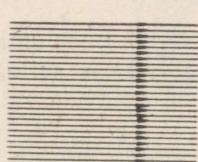
Kera aine magneetumus  $J$  võrdub kera ruumalaühikule taandatud magnetilise momendiga. Järelikult

$$\mu_0 J = \frac{\mu_0 p}{\frac{4\pi}{3} R^3} = 3\mu_0 \frac{\mu_a - \mu_0}{\mu_a + 2\mu_0} H_0 = 3\mu_0 H_{\circ}.$$

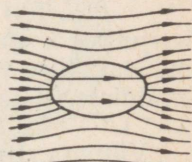
Resulteeriv väljatugevus ja resulteeriv magnetiline induksioon kera sees

$$H = H_0 - H_{\circ} = \frac{3\mu_0}{\mu_a + 2\mu_0} H_0; \quad B = \frac{3\mu_a}{\mu_a + 2\mu_0} \mu_0 H_0 = \frac{3\mu_a}{\mu_a + 2\mu_0} B_0.$$

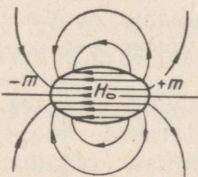
Mida suurem on  $\mu_a$ , seda tugevam on demagneetiv väli ja seda



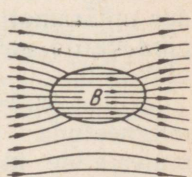
Väline homogeenväli



Resulteeriv H-vektori väli



Indutseeritud magnetiliste masside väli



Magnetilise induktiooni vektori väli

JOON. 82

nõrgem on  $H$ -i väli, kuid seda tugevam on  $B$  väli. Piiril, kui  $\mu_a \rightarrow \infty$ , saame:

$$\begin{aligned} H_\infty &= H_0; & H &= 0 \\ B &= 3B_0. \end{aligned}$$

Selline suurepärase omadus — magneetuda homogeenelt välises homogeenväljas — on ellipsoidil, mille erijuhtumiks on kera. Joonisel 82 on kujutatud ellipsoidi väline homogeenväli, vektori  $\mathbf{H}$  väli, mille põhjustab ellipsoidi magneetumine ja mis on seotud tingliku ettekujutusega indutseeritud magnetilistest massidest, vektori  $\mathbf{H}$  resulteeriv väli ning vektori  $\mathbf{B}$  resulteeriv väli.

## § 64. Demagneetimestegurid

Ellipsoidide puhul on nii  $H_\infty$  kui ka  $J$  võrdelised välisvälja tugevusega  $H_0$ . Järelikult saab kirjutada:

$$H_\infty = NJ.$$

Võrdetegurit  $N$  nimetatakse *demagneetimis-* ehk *lahtimagneetimesteguriks*. Sellest sõltub antud magneetumise puhul demagneetiva väljatugevuse suurus. Demagneetimestegur sõltub ainult magneeditava keha kujust. Kera korral saame:

$$N = \frac{H_\infty}{J} = \frac{1}{3}.$$

Pöördellipsoidi jaoks annab arvutus valemi

$$N = \frac{\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \ln(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}) - 1}{\lambda^2 - 1} = \frac{1 - \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \arccos \lambda}{1 - \lambda^2},$$

kusjuures  $\lambda$  on ellipsoidi pöörlemistelje (mille eeldame suunatuks mööda välise välja joont) ja sellega risti oleva telje suhe. Esimest avaldist  $N$ -i jaoks on sobiv kasutada siis, kui  $\lambda > 1$  ja teist, kui  $\lambda < 1$ .

Väljaga risti asetatud lõpmatu plaadi jaoks, mida võib vaadelda kui kokkusurutud ellipsoidi, saame, et  $N = 1$ , võttes  $\lambda = 0$ . See on  $N$ -i kõige suurem võimalik väärtus. Kera jaoks, võttes  $\lambda = 1$  ja avades määramatuse, saame, et  $N = 1/3$ . Piki välja asetatud lõpmata pika varda puhul, võttes  $\lambda = \infty$  ja avades määramatuse, saame, et  $N = 0$ .

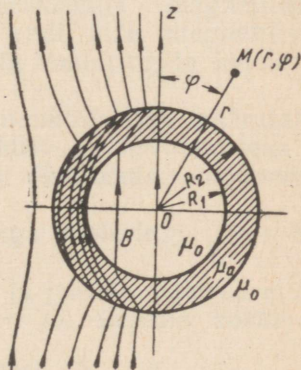
Ellipsoidide omadust välises homogeenväljas homogeenelt magneetuda kasutatakse magnetomeetrias. Ferromagnetiliste materjalide magnetiliste omaduste uurimiseks võib valmistada nendest materjalidest pöördellipsoidi või sellele lähedase kujuga katsekehad. Nimelt ferromagnetiliste materjalide katsetamisel on

eriti tähtis magneetumise homogeensus, sest nende materjalide magnetiline läbitavus  $\mu_a$  sõltub välja tugevusest. Ainult homogeense magneetumuse puhul on  $\mu_a$  suurus katsekeha kogu mahu ulatuses ühesugune.

Kasutada demagneetimistegurit, mis sõltuks ainult keha kujust, on rangelt võttes võimalik ainult ellipsoidide ja nende erijuhtumite — kera, plaadi ja lõpmatult pika elliptilise ristlõikega või ringristlõikega silindri puhul. Siiski kasutatakse ka selliste magnetväljade ligikaudsel praktilisel arvutamisel, mis tekivad teistsuguse kujuga kehade, näiteks lühikeste silindrite viimisel homogeensesse välisesse magnetvälja, nende kehade demagneetimistegureid. Selline arvutus on aga ainult orienteeriv, sest ellipsoididest erineva kujuga kehad magneetuvad välises homogeenses magnetväljas mittehomoogenselt.

### § 65. Magnetiline varjestamine

Elektrimõõteriistade kaitsmiseks kõrvaliste magnetväljade toime vastu paigutatakse nende mõõtesüsteemid ferromagnetilisest materjalist massiivsetesse kinnistesse või peaaegu kinnistesse ümbristesse. Selliseid ümbriseid nimetatakse *magnetilisteks ekraanideks* ehk *varjeteks*. Võrreldes välise väljaga on väli varje sees nõrgem.



JOON. 83

Juhtumil, kui homogeensesse välisesse magnetvälja induktiooniga  $B_0$  on paigutatud raadiuseid  $R_1$  ja  $R_2$  omav õõnsa kera kujuline ekraan (joon. 83), mille seinte absoluutne magnetiline läbitavus on  $\mu_a$ , saab magnetilist induktiooni  $B$  ekraani sees arvutada valemiga

$$B = B_0 \frac{1}{1 + \frac{2}{9} \left(1 - \frac{R_1^3}{R_2^3}\right) \left(\frac{\mu_0}{\mu_a} + \frac{\mu_a}{\mu_0} - 2\right)}$$

Kui näiteks  $R_1 = 0,9R_2$  ja  $\mu_a = 500\mu_0$ , siis  $B = 0,031B_0$ , s. o. väljatugevus ekraani sees moodustab 3% välisvälja tugevusest. Kuna ferromagnetilise aine puhul  $\mu_a \gg \mu_0$ , siis on ekraniseeriv ehk varjestav mõju tingitud sellest, et välisvälja magnetilise induktiooni jooned püüavad kulgeda mööda väikseima magnetilise takistusega teekonda, s. o. varje seintes, varje õõnsusesse peaaegu tungimata.

Sageli kasutatakse mitmeastmelisi ekraane mitme õõnsa ferromagnetilise keha näol, mis on paigutatud üksteise sisse.

INDUKTIIVSUSTE ARVUTUS

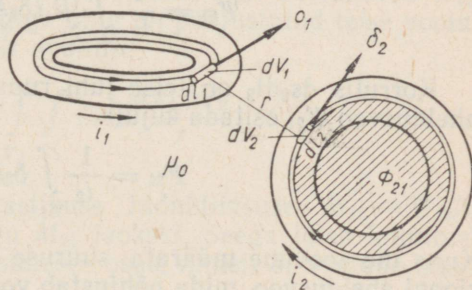
§ 66. Omainduktiivsuse ja vastastikuse induktiivsuse üldavaldised

Käesolevas peatükis käsitleme staatilisi induktiivsusi. Seepärast leiame neid induktiivsusi määravad magnetvood alalisvoolu puhul. Staatilised induktiivsused sõltuvad vooluringide kuju, mõõtmeid ja vastastikust asendit määravatest geomeetrilistest parameetritest, vooluringe ümbritseva keskkonna magnetilisest läbitavusest ning samuti voolujuhtide endi aine magnetilisest läbitavusest. Kui  $\mu_a = \text{const}$ , siis ei sõltu vooluringide induktiivsused vooluringide vooludest.

Juhime erilist tähelepanu sellele, et induktiivsused määratakse aheldusvoo kaudu, s. o. vooluringi induktiivsuse arvutamiseks on vaja määrata magnetilise induktsiooni ühikjoonte aheldumiste koguarv vooluringiga.

Leiame kahe mistahes etteantud kujuga vooluringi (joon. 84) vastastikuse induktiivsuse üldavaldise.

Eeldame, et vooluringid asuvad õhus ja juhtide materjal ei ole ferromagnetiline. Seejuures kõikjal  $\mu_a = \mu_0$ . Lepime kokku, et



JOON. 84

varustame vastastikuse induktsiooni aheldusvoo tähise kahe indeksiga: esimene indeks näitab, millise vooluringiga magnetvoo aheldumist vaadeldakse, ja teine — missugusest voolust on magnetvoog põhjustatud. Määrame aheldusvoo  $\Psi_{21}$ , s. o. teise vooluringiga ahelduva voo, mida tekitab esimese vooluringi vool  $i_1$ .

Kujutleme, et teise vooluringi kogu juht on jaotatud voolu  $i_2$  elementaartorudeks (joon. 84). Voog, mis aheldub ühe sellise elementaartoruga, on võrdne vektorpotentsiaali joonintegraaliga mööda selle toru telge:

$$\Phi_{21} = \oint_{l_2} \mathbf{A}_2 d\mathbf{l}_2.$$

Joonisel 84 on pind, mida läbib voog  $\Psi_{21}$ , viirutatud.

See voog aheldub vooluga  $i_2$ , mis kulgeb vaadeldavas voolutorus ja moodustab teise vooluringi kogu voolust  $i_2$  suhtelise osa

$\frac{di_2}{i_2}$ . Järelikult annab see voog aheldusvoo  $\Psi_{21}$  suurusesse osa

$$d\Psi_{21} = \frac{di_2}{i_2} \oint_{l_2} \mathbf{A}_2 d\mathbf{l}_2.$$

Kuna  $di_2$  omab konstantset väärtust piki kogu voolutoru, siis võib  $di_2$  viia integraalimärgi taha. Tähistades  $ds_2$ -ga voolutoru ristlõike ja  $\delta_2$ -ga voolutiheduse selles ristlõikes, saame kirjutada, et  $di_2 = \delta_2 ds_2$ . Viimane võrdus omandab kuju:

$$d\Psi_{21} = \frac{1}{i_2} \oint_{l_2} (\delta_2 ds_2) (\mathbf{A}_2 d\mathbf{l}_2).$$

Kuna vektoritel  $\delta_2$  ja  $d\mathbf{l}_2$  on üks ja sama suund, siis  $(\delta_2 ds_2) (\mathbf{A}_2 d\mathbf{l}_2) = (d\mathbf{l}_2 ds_2) (\mathbf{A}_2 \delta_2)$  ja järelikult

$$d\Psi_{21} = \frac{1}{i_2} \oint_{l_2} (\delta_2 \mathbf{A}_2) (ds_2 d\mathbf{l}_2).$$

Integreerides üle teise juhi kogu ristlõike  $s_2$  saame:

$$\Psi_{21} = \frac{1}{i_2} \int_{s_2} \oint_{l_2} (\delta_2 \mathbf{A}_2) (ds_2 d\mathbf{l}_2).$$

Korrutis  $ds_2 d\mathbf{l}_2$  on teise juhi ruumielement  $dV_2$ . Seetõttu saab aheldusvoo  $\Psi_{21}$  esitada kujul:

$$\Psi_{21} = \frac{1}{i_2} \int_{V_2} \delta_2 \mathbf{A}_2 dV_2.$$

Kuna me soovime määrata suuruse  $\Psi_{21}$  kui vastastikuse induktsiooni aheldusvoo, mida põhjustab vool  $i_1$ , siis on vaja vastavalt ka

vektorpotentsiaal  $A_2$  avaldada voolu  $i_1$  kaudu. Kooskõlas 46. paragrahvis esitatuga saame:

$$A_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_1} \delta_1 \frac{dV_1}{r},$$

kus  $V_1$  on esimese vooluringi poolt hõivatud ruumala,  $r$  — kaugus ruumielemendist  $dV_1$  kuni punktini, milles määratakse vektorpotentsiaal, ja  $\delta_1$  — voolutiheduse vektor ruumielemendi  $dV_1$  punktides. Asendades vektorpotentsiaali viimases  $\Psi_{21}$  avaldises äsjaleitud tulemusega, saame:

$$\Psi_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi i_2} \int_{V_1} \int_{V_2} \delta_1 \delta_2 \frac{dV_1 dV_2}{r}.$$

Siit leiame vastastikuse induktiivsuse üldavaldise:

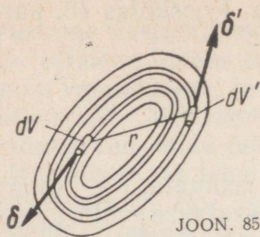
$$M_{12} = \frac{\Psi_{21}}{i_1} = \frac{\mu_0}{4\pi i_1 i_2} \int_{V_1} \int_{V_2} \delta_1 \delta_2 \frac{dV_1 dV_2}{r}.$$

Integreerida tuleb üks kord üle esimese juhi kogu ruumala ja teine kord üle teise juhi kogu ruumala, kusjuures  $r$  on kaugus ruumielementide  $dV_1$  ja  $dV_2$  vahel. Saadud valem on õige ainult magnetilises suhtes homogeense keskkonna korral, sest selle valemi tuletamisel kasutatud vektorpotentsiaali avaldis on õige ainult sellel juhtumil. Ka juhtide endi materjali magnetiline läbitavus peab olema sama mis ümbritseval keskkonnal. Nagu varem märkiti, ei sõltu  $\mu_a = \text{const}$  puhul vastastikune induktiivsus vooluringide vooludest. Voolude  $i_1$  ja  $i_2$  olemasolu viimases avaldises ei räägi sellele väitele vastu. Tõepoolest, viies voolud integraalimärkide taha, saame integreeritavas avaldises suhted  $\frac{\delta_1}{i_1}$  ja  $\frac{\delta_2}{i_2}$ , mis iseloomustavad voolude jaotumist juhtides. Kuid alalisvoolu puhul sõltub voolude jaotumine ainult juhi kujust ja ei muutu voolu muutumisel. Seetõttu määrabki juhi kuju juhi iga punkti voolutiheduse ja kogu voolu suhte täielikult.

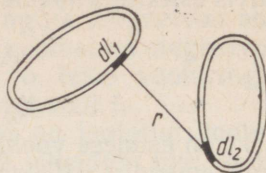
Kui me määraksime vastastikuse induksiooni aheldusvoo  $\Psi_{12}$ , mis aheldub esimese vooluringiga ning on põhjustatud teise vooluringi voolust, saaksime ilmselt avaldise

$$\Psi_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi i_1} \int_{V_1} \int_{V_2} \delta_1 \delta_2 \frac{dV_1 dV_2}{r}.$$

Järelikult saaksime vastastikuse induktiivsuse  $M_{12} = \Psi_{12}/i_2$  jaoks sellesama avaldise nagu  $M_{21}$  jaokski. Seega leiab kinnitust tähtis järeldus, mille saime esimeses osas, nimelt et voolude mag-



JOON. 85



JOON. 86

netvälja energia ei sõltu voolude tekitamise järjekorrast. Selle kohaselt  $\mu_a = \text{const}$  puhul kehtib võrdus

$$M_{kp} = M_{pk}.$$

Vooluringi omainduktiivsuse  $L$  üldavaldise saame, kui kasutame kahe vooluringi vastastikuse induktiivsuse  $M_{21}$  kohta leitud üldavaldist. Kujutleme kaht täielikult ühesugust vooluringi, mis on teineteisele lähenenud kuni täieliku ühinemiseni nii, et üks nendest hõivab teise ruumi. Pärast sellist ühinemist jääb tegelikult juba üksainus vooluring. Vastastikuse induktiivsuse  $M_{21}$  avaldisest ei ole raske saada sellise vooluringi  $L$  avaldist, kui võtta  $i_1 = i_2 = i$  ja  $V_1 = V_2 = V$ . Saame:

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi i^2} \int_V \int_V \delta \delta' \frac{dV dV'}{r},$$

kusjuures  $\delta$  on voolutihedus ruumielemendis  $dV$ ,  $\delta'$  — voolutihedus ruumielemendis  $dV'$  ja  $r$  — ruumielementide  $dV$  ja  $dV'$  vahekaugus. Integreeritakse kaks korda üle juhi terve ruumala (joon. 85).

Vastastikuse induktiivsuse  $M_{21}$  avaldis lihtsustub märgatavalt joonjuhtmetest vooluringide puhul, s. o. vooluringide puhul, mille juhtide ristlõigete mõõtmed on väga väikesed, võrreldes vooluringide pikkusega ja võrreldes vooluringide vahekaugusega (joon. 86). Sellisel juhtumil ei ole vajadust jaotada juhte voolutorudeks. Teise vooluringi elemendi  $dl_2$  tsentris võime vektorpotentsiaali arvutada valemiga (vt. § 46):

$$A_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_1} \frac{i_1 dl_1}{r}.$$

Aheldusvoo  $\Psi_{21}$  saab seejuures võtta võrdseks vooga  $\Phi_{21}$  läbi pinna, mis on piiratud teise vooluringi juhi teljega, s. o.

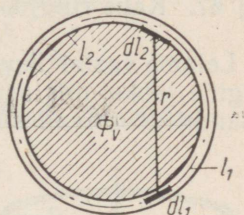
$$\Psi_{21} = \Phi_{21} = \oint_{l_2'} A_2 dl_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{i_1 dl_1 dl_2}{r}.$$

Jaganud  $\Psi_{21}$   $i_1$ -ga, saame:

$$M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{dl_1 dl_2}{r}.$$

Osutub võimalikuks lihtsustada ka  $L$  avaldist vooluringi kohta, mis on moodustatud peenest juhist. Kuid lihtsustatud valemile ei saa seejuures anda täpselt seda kuju, mis on  $M_{21}$  avaldisel, s. o. ei saa asendada  $L$  valemis kahekordset integreerimist üle juhi ruumala kahekordse integreerimisega mööda juhi telge, sest selline integraal muutuks lõpmatuseks.

Ringristlõikega peenest juhist vooluringi  $L$  valemit saab lihtsustada järgmisel teel. Jaotame aheldusvoo  $\Psi$  kaheks osaks  $\Psi = \Psi_v + \Psi_s$ , kusjuures  $\Psi_v$  on määratud magnetilise induktsiooni joontega, mis haaravad kogu juhi ja asuvad järjekult täielikult juhi suhtes välises keskkonnas, ning  $\Psi_s$  on määratud magnetilise induktsiooni joontega, mis kulgevad juhi keha sees. Jooned, mis määra-



JOON. 87

vad  $\Psi_v$  suuruse, läbivad joonisel 87 viirutatud pinda, mis on pii-  
ratud juhi sisepinnal asuva kontuuriga  $l_2$ . Kui juht moodustab ühe  
keeru, siis aheldub iga selline joon juhiga ühe korra ja järjekult

$$\Psi_v = \Phi_v = \oint_{l_2} \mathbf{A}_2 \, dl_2,$$

kus  $\mathbf{A}_2$  on vektorpotentsiaali väärtus kontuuril  $l_2$ .  $\mathbf{A}_2$  suuruse saab  
arvutada ligikaudselt valemiga

$$\mathbf{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_1} \frac{i \, dl_1}{r},$$

kui eeldada, et kogu vool  $i$  kulgeb mööda juhi telge. Seejuures  
integreeritakse mööda juhi kogu telge  $l_1$ . Integraalil on siin lõplik  
väärtus, sest kontuuri  $l_2$  kõik punktid, milledes määratakse  $\mathbf{A}_2$ , asu-  
vad lõplikul kaugusel  $r$  kontuuri  $l_1$  punktidest.

Seega

$$\Psi_v = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{dl_1 \, dl_2}{r}.$$

$\Psi_s$  suuruse saab võtta ligikaudu võrdseks lõpmata pika sirge  
ringristlõikega juhtme pikkusega  $l_1$  osa kohta tuleva sisemise ahel-  
dusvooga, sest juhtme telje kõverusraadius on ristlõike mõõtmetega  
võrreldes suur. Esimeses osas saadud avaldise põhjal

$$\Psi_s = \frac{\mu_0}{8\pi} i l_1,$$

kus  $\mu_a$  on juhtme materjali absoluutne läbitavus. Induktiivsuse  $L$  saab esitada kujul:

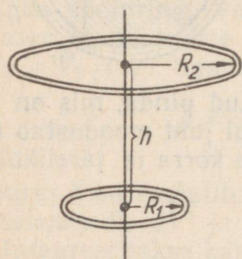
$$L = \frac{\Psi_v}{i} + \frac{\Psi_s}{i} = L_v + L_s,$$

kusjuures induktiivsust  $L_v$  nimetatakse *välisinduktiivsuseks* ja induktiivsust  $L_s$  *siseinduktiivsuseks*. Seega saame ringristlõikega peenest juhust vooluringi induktiivsuse jaoks järgmise lihtsustatud avaldise

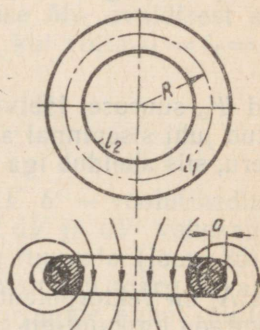
$$L = L_v + L_s = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{dl_1 dl_2}{r} + \frac{\mu_a l_1}{8\pi}.$$

## § 67. Kahe ringjoonelise vooluringi vastastikune induktiivsus

Leiame vastastikuse induktiivsuse avaldise ringjooneliste vooluringide jaoks, mis asuvad rööptasanditel nii, et nende tsentrid on tasandite normaali sihilisel sirgel (joon. 88).



JOON. 88



JOON. 89

Otsitava valemi saame pärast kahekordset integreerimist piki mõlemate juhtide telgi vastavalt avaldisele

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{dl_1 dl_2}{r}.$$

Üks integreerimine on juba sooritatud 59. paragrahvis ringjoonelise vooluringi välja vektorpotentsiaali otsimisel. Nimelt avaldub esimese ringjoonelise vooluringi voolust  $i_1$  põhjustatud vektorpotentsiaal  $A_2$  teise juhi teljel järgmiselt:

$$A_2 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi} \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} f(k).$$

Seejuures kooskõlas 59. paragrahvis tarvitusele võetud tähisega saame:

$$k^2 = \frac{4R_1 R_2}{h^2 + (R_1 + R_2)^2}.$$

Siin on  $R_1$  ja  $R_2$  ringjooneliste vooluringide raadiused ning  $h$  — kaugus vooluringide tsentrite vahel. Eeldatakse, et  $\mu_a = \mu_0$  (juhid asuvad õhus).

Funktsioon  $f(k)$  on kujutatud kõverana joonisel 78. See funktsioon on esitatav esimest ja teist liiki täielike elliptiliste integraalide kaudu vastavalt avaldistele, mis on toodud 59. paragrahvis. Vektor  $\mathbf{A}_2$  on puutujaks teise vooluringi juhi teljele ja omab sümmeetria tõttu ühesugust suurust mööda kogu teise vooluringi telge. Järelikult esimese ringjoonelise vooluringi voolust  $i_1$  põhjustatud ja teise ringjoonelise vooluringiga ahelduv vastastikuse induktiooni aheldusvoog

$$\begin{aligned}\Psi_{21} &= \oint_{l_2} \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{l}_2 = \oint_{l_2} A_2 \, dl_2 = A_2 \oint_{l_2} dl_2 = \\ &= A_2 2\pi R_2 = \mu_0 i_1 \sqrt{R_1 R_2} f(k).\end{aligned}$$

Seega avaldub otsitav vastastikune induktiivsus valemiga

$$M = \frac{\Psi_{21}}{i_1} = \mu_0 \sqrt{R_1 R_2} f(k).$$

### § 68. Ringjoonelise vooluringi induktiivsus

Leiame peenest ringristlõikega juhist moodustatud ringjoonelise rõnga (joon. 89) induktiivsuse valem. Vooga  $\Phi_v$ , mille jooned haaravad juhi kogu ristlõike, määratav välisinduktiivsus  $L_v$  on võrdne vastastikuse induktiivsusega kahe lõpmatult peenest juhist ringjoonelise vooluringi vahel, milledest üks, pikkusega  $l_1$ , ühtib juhi teljega ja teine —  $l_2$  — on sisemiseks, s. o. vähimaks ringjooneks juhi pinnal. Järelikult eeldades, et viimases avaldises  $R_1 = R$  ja  $R_2 = R - a$ , saame kirjutada:

$$L_v = \mu_0 \sqrt{R(R-a)} f(k) \approx \mu_0 R f(k),$$

kus  $a$  on juhi ristlõike raadius ja  $R$  — rõnga raadius, kusjuures  $a \ll R$ . Kuna kontuurid  $l_1$  ja  $l_2$  asuvad samal tasandil, siis tuleb  $k^2$  avaldises võtta  $h = 0$ . Saame:

$$k^2 = \frac{4(R-a)R}{(R-a+R)^2} = 1 - \frac{a^2}{4R^2 - 4Ra + a^2} \approx 1 - \left(\frac{a}{2R}\right)^2.$$

Järelikult

$$k \approx \sqrt{1 - \frac{a^2}{4R^2}} \approx 1 - \frac{a^2}{8R^2}.$$

Funktsiooni  $f(k)$  suuruse, mis läheb  $L_v$  avaldise, saab võtta kõveralt joonisel 78. Kuid vaadeldava juhtumi  $a \ll R$  jaoks võib

saada ka ligikaudse  $f(k)$  avaldise. Kuna  $k \approx 1$ , siis saame ligikaudselt:

$$f(k) = \left( \frac{2}{k} - k \right) K - \frac{2}{k} E \approx K - 2E.$$

Võib näidata, et  $k \approx 1$  korral on elliptilistel integraalidel  $K(k)$  ja  $E(k)$  järgmised ligikaudsed väärtused:

$$K \approx \ln \frac{4}{\sqrt{1-k^2}} \approx \ln \frac{8R}{a} \quad \text{ja} \quad E \approx 1.$$

Järelikult

$$L_v = \mu_0 R f(k) \approx \mu_0 R \left( \ln \frac{8R}{a} - 2 \right).$$

Kuna  $l_1 = 2\pi R$ , siis avaldub siseinduktiivsus valemiga

$$L_s = \frac{\mu_a l_1}{8\pi} = \frac{\mu_a R}{4}.$$

Järelikult

$$L = \mu_0 R \left( \ln \frac{8R}{a} - 2 \right) + \frac{\mu_a}{4} R.$$

Kui juhe on mitteferromagnetilisest materjalist, siis  $\mu_a \approx \mu_0$  ja

$$L = \mu_0 R \left( \ln \frac{8R}{a} - 1,75 \right).$$

Siseinduktiivsuse avaldis on saadud eeldusel, et vool on jaotunud ühtlaselt üle juhi ristlõike, mis peab paika alalisvoolu puhul. Kõrge sagedusega vahelduvvoolu puhul pinnaefekti teraval esinemisel on sisemine voog  $\mu_a = \mu_0$  juures väike ja täpsem on arvutada induktiivsust valemiga

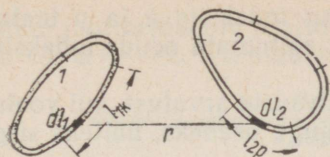
$$L = \mu_0 R \left( \ln \frac{8R}{a} - 2 \right),$$

jättes arvestamata suuruse  $L_s$ .

## § 69. Induktiivsuste arvutus vooluringi osade kaupa

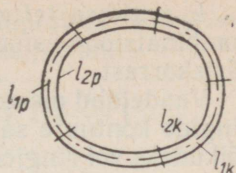
Paragrahvis 66 saadud peentest juhtidest vooluringide induktiivsuste avaldiste alusel saab induktiivsuste arvutamiseks rakendada nn. osainduktiivsusemeetodit, mis põhineb juhtide osade vahelise vastastikuse induktiivsuse ja juhtide osade induktiivsuste tinglikudel mõistetel.

Vaatleme kaht vooluringi. Jaotame esimese vooluringi  $m$  osaks ja teise vooluringi  $n$  osaks (joon. 90). Esimese vooluringi  $k$ -nda osa pikkuse tähistame  $l_{1k}$ -ga ja teise vooluringi  $p$ -nda osa pikkuse  $l_{2p}$ -ga. Jaotades  $M_{21}$  avaldises integraalid mööda kinnisi kontuure



JOON. 90

JOON. 91



$l_1$  ja  $l_2$  selliste integraalide summadeks, mis on võetud mööda kontuuride osasid, saame:

$$M_{21} = \sum_{k=1}^{k=m} \sum_{p=1}^{p=n} \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{l_{1k}} \int_{l_{2p}} \frac{dl_1 dl_2}{r}$$

Kahekordse summamärgi järel seisvat avaldist võime vaadelda kui esimese vooluringi  $k$ -nda osa ja teise vooluringi  $p$ -nda osa vahelist vastastikust induktiivsust. Seega

$$M_{21} = \sum_{k=1}^{k=m} \sum_{p=1}^{p=n} M_{1k,2p}$$

Analoogiliselt saab talitada vooluringi induktiivsuse arvutamisel. Jaotame kogu vooluringi  $m$  osaks (joon. 91). Seejuures olgu  $l_{1k}$   $k$ -nda osa telglõik (joonlõik võetuna mööda juhi telge) ja  $l_{2p}$  —  $p$ -nda osa lõik mööda juhi pinnal asetsevat sisemist kontuuri. Kuigi peene juhi puhul  $l_{1k} = l_{2k}$ , on siiski vaja eristada neid kahte lõiku, sest  $L$  valemis integreeritakse üks kord piki juhi telge, teine kord mööda viidatud sisemist kontuuri.  $L$  valem omandab kuju:

$$L = \sum_{k=1}^{k=m} \sum_{p=1}^{p=m} \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{l_{1k}} \int_{l_{2p}} \frac{dl_1 dl_2}{r} + L_s$$

Kahekordse summamärgi järel olevat avaldist võib tinglikult käsitleda  $k = p$  puhul kui vooluringi  $k$ -nda osa välisinduktiivsust  $L_{vk}$  ja  $k \neq p$  puhul kui vooluringi  $k$ -nda ja  $p$ -nda osa vahelist vastastikust induktiivsust  $M_{kp}$ .  $M_{kp}$  arvutamisel võib integreerimise mööda sisemise kontuuri lõiku  $l_{2p}$  asendada integreerimisega mööda sellesama  $p$ -nda osa telglõiku  $l_{1p}$ . Siis saame:

$$M_{1k,2p} \approx M_{1k,1p} = M_{kp} \quad \text{ja} \quad M_{1p,2k} \approx M_{1p,1k} = M_{pk}$$

Võttes arvesse, et  $M_{kp} = M_{pk}$ , saame:

$$L = \sum_{k=1}^{k=m} L_{vk} + 2 \sum_{k=1}^{k=m} \sum_{p=1}^{p=m} M_{kp} + L_s,$$

kus

$$L_{vk} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{l_{1k}} \int_{l_{2k}} \frac{dl_1 dl_2}{r}; \quad M_{kp} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{l_{1k}} \int_{l_{1p}} \frac{dl_1 dl'_1}{r},$$

kusjuures  $dl_1$  on element  $k$ -nda osa teljel ja  $dl'_1$  — element  $p$ -nda osa teljel.

$L$  avaldise teises liikmes  $p \neq k$  ning indeksite  $k$  ja  $p$  teatav kombinatsioon esineb ainult ühel korral, sõltumata nende indeksite järjekorrast.

Vaadeldud meetod kergendab induktiivsuste arvutust, kui vooluringide kontuure saab jaotada lihtsa kujuga osadeks, näiteks sirglõikudeks või ringjoone kaarteks.

## § 70. Sirgetest osadest koosnevate vooluringide induktiivsused

Juhtmete osade vastastikuse induktiivsuse  $M_{1k,2p}$  ja induktiivsuse  $L_{vk}$  valemid on sarnased juhtmelõikude potentsiaalitegurite valemitega, mis saadi 36. paragrahvis keskmiste potentsiaalide meetodil. Erinevus seisneb integraalimärkide ees olevates kordajates ja selles, et induktiivsuste valemitesse läheb vektorite  $dl_1$  ja  $dl_2$  skalaarkorrutis, s. o. suurus  $dl_1 dl_2 = \cos \theta dl_1 dl_2$ , kus  $\theta$  on nurk elementaarlõikude  $dl_1$  ja  $dl_2$  suundade vahel, kuid potentsiaalitegurite valemitesse läheb lõikude pikkuste korrutis  $dl_1 dl_2$ .

Kui lõigud  $l_1$  ja  $l_2$  on sirglõigud, on suurus  $\cos \theta$  kõigil elementidel  $dl_1$  ja  $dl_2$  ühesugune ja selle võib tuua integraalimärgi ette. Seejuures omandab nende lõikude vahelise vastastikuse induktiivsuse valem kuju

$$M_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cos \theta \int_{l_1} \int_{l_2} \frac{dl_1 dl_2}{r}.$$

Sirglõigu omainduktiivsuse  $L_v$  valemis on vaja võtta  $\cos \theta = 1$  ja järelikult

$$L_v = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_l \int_l \frac{dl_1 dl_2}{r}.$$

Need valemid erinevad potentsiaalitegurite  $\alpha_{12}$  ja  $\alpha_{11}$  valemitest ainult kordajate poolest. Nimelt saame:

$$\frac{M_{12}}{\alpha_{12}} = \mu_0 \varepsilon_0 l_1 l_2 \cos \theta; \quad \frac{L_v}{\alpha_{11}} = \mu_0 \varepsilon_0 l^2.$$

Sellel asjaolul, millele juhtis ühes oma tööst tähelepanu L. A. Tseitlin, on oluline tähtsus, sest see annab võimaluse kirjan-duses olevaid induktiivsuste valemid kasutada potentsiaalitegurite arvutamiseks ja vastupidi.

36. paragrahvis on tuletatud teguri  $\alpha_{12}$  valemid kahe paralleelse ühesuguse pikkusega  $l$  sirge juhtmelõigu jaoks, mis asetsevad nii, et juhtmelõikude algused on ühel nende juhtmelõikudega ristioleval sirgel. Kaugus juhtmete telgede vahel on  $D$ .

Kui meie poolt positiivseks loetavad ringkäigusuunad mõlemate juhtmelõikude puhul ühtivad, siis  $\theta = 0$  ja  $\cos \theta = 1$ . Kui mõle-

mate juhtmelõikude positiivsed suunad on vastupidised, siis  $\theta = \pi$  ja  $\cos \theta = -1$ . Kasutades suhte  $M_{12}/\alpha_{12}$  avaldäsi, saame:

$$M = \pm \mu_0 \varepsilon_0 l^2 \frac{1}{2\pi \varepsilon_0 l} \left( \operatorname{Arsh} \frac{l}{D} - \sqrt{\frac{D^2}{l^2} + 1} + \frac{D}{l} \right).$$

Arvestades võrdust

$$\operatorname{Arsh} \frac{l}{D} = \ln \left( \frac{l}{D} + \sqrt{\frac{l^2}{D^2} + 1} \right),$$

võime kirjutada:

$$M = \pm \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \ln \frac{l + \sqrt{l^2 + D^2}}{D} - \frac{\sqrt{l^2 + D^2} - D}{l} \right).$$

Erijuhtumil  $l \gg D$  puhul saame:

$$M = \pm \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \ln \frac{2l}{D} - 1 \right).$$

Viimasest valemist tuleneb vahetult välisinduktiivsuse avaldis sirge juhtmelõigu kohta, mille pikkus on  $l$  ja mille ringristlõige on raadiusega  $r_0$ , kusjuures  $r_0 \ll l$ . Selles valemis on vaja asendada  $D$   $r_0$ -ga ja võtta plussmärk. Saame:

$$L_v = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \ln \frac{2l}{r_0} - 1 \right).$$

Juhime erilist tähelepanu sellele, et tegurid  $\alpha_{12}$  arvutati 36. paragrahvis ligikaudsel keskmiste potentsiaalide meetodil, mis põhines eeldusel, et laeng jaotub ühtlaselt juhtme pikkusele, s. t. et laengu joontihedus  $\tau$  on ühesugune juhtme kogu pikkuse ulatuses. Kuid  $M$  ja  $L$  valemid on selles suhtes täiesti täpsed, sest alalisvoolul on üks ja sama väärtus juhtme kogu pikkuse ulatuses.

## § 71. Ristkülikulise raami induktiivsus

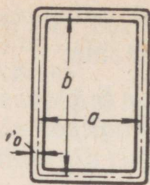
Kasutame osainduktiivsusemeetodit ringristlõikega juhtmest ristkülikulise raami (joon. 92) induktiivsuse arvutamiseks. Raami küljed tähistame tähtedega  $a$  ja  $b$  ning ristlõike raadiuse  $r_0$ . Olgu  $a \gg r_0$  ja  $b \gg r_0$ .

Omavahel risti asetsevate raami külgede vahel on vastastikune induktiivsus võrdne nulliga, sest sel puhul  $\cos \theta = 0$ . Järelikult on küllaldane arvestada vastastikuseid induktiivsusi ainult raami rööpsete vastaskülgede paaride vahel. Vastaskülgede korral  $\cos \theta = -1$ , sest liikumisel mööda raami telgjoont läbime vastaskülgi vastupidistes suundades.

Raami külgede puhul, millede pikkus  $l = a$  ja telgede vahekaugus  $D = b$ , saame:

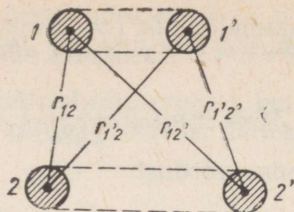
$$M_a = - \frac{\mu_0 a}{2\pi} \left( \ln \frac{a+d}{b} - \frac{d-b}{a} \right) = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \left( \ln \frac{b}{a+d} + \frac{d-b}{a} \right),$$

kus  $d = \sqrt{a^2 + b^2}$  on raami diagonaal.



JOON. 92

JOON. 93



Vastavalt külgede puhul, millede pikkus on  $b$  ja telgede vahekaugus  $a$ , võime kirjutada:

$$M_b = \frac{\mu_0 b}{2\pi} \left( \ln \frac{a}{b+d} + \frac{d-a}{b} \right).$$

Pikkusega  $a$  ja  $b$  külgede välisinduktiivsused

$$L_{va} = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \left( \ln \frac{2a}{r_0} - 1 \right), \quad L_{vb} = \frac{\mu_0 b}{2\pi} \left( \ln \frac{2b}{r_0} - 1 \right).$$

Kogu raami siseinduktiivsuse leidmisel arvestame, et telgjoone pikkus võrdub  $2(a+b)$ . Järelikult

$$L_s = \frac{\mu_a}{4\pi} (a+b),$$

kus  $\mu_a$  on juhtme materjali absoluutne magnetiline läbitavus.

Seega saame lõplikult:

$$L = 2L_{va} + 2L_{vb} + 2M_a + 2M_b + L_s = \frac{\mu_0}{\pi} \left[ a \ln \frac{2ab}{r_0(a+d)} + b \ln \frac{2ab}{r_0(b+d)} - 2(a+b-d) \right] + \frac{\mu_a}{\pi} \left( \frac{a+b}{4} \right).$$

## § 72. Kahe kahejuhtmelise liini vaheline vastastikune induktiivsus

Leiame ringristlõikega juhtmetest moodustatud kahe kahejuhtmelise liini vahelise vastastikuse induktiivsuse avaldise. Joonisel 93 on numbriga 1 märgitud esimese liini sinnajuhtme ristlõige ja numbriga 1' — sama liini tagasijuhtme ristlõige. Vastavalt on numbritega 2 ja 2' tähistatud teise liini sinna- ja tagasijuhtmete ristlõiked. Olgu liini pikkus  $l$  palju suurem kõikidest juhtmete vahekaugustest. Siis võib  $M$  suuruse arvutamisel loobuda juhtmelõikudest, mis ühendavad juhtmeid liini alguses ja lõpus (joonisel 93 kujutatud kriipsjoonega). Kasutades vooluringi osade arvutamise meetodit, leiame:

$$M = M_{12} + M_{12'} + M_{1'2'} + M_{1'2} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \ln \frac{2l}{r_{12}} - 1 \right) - \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \ln \frac{2l}{r_{12'}} - 1 \right) +$$

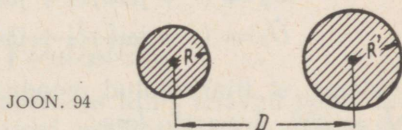
$$+ \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \ln \frac{2l}{r_{1'2'}} - 1 \right) - \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \ln \frac{2l}{r_{12}} - 1 \right) = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{r_{12} r_{1'2'}}{r_{12} r_{1'2'}}.$$

Logaritnimärgi järel seisavad lugejas vahekaugused ühe liini sinnajuhtmest teise liini tagasijuhtmeni ja nimetajas mõlema liini sinnajuhtmete ja mõlema liini tagasijuhtmete vahekaugused.  $M$  võib osutada positiivseks või negatiivseks sõltuvalt sellest, kas logaritnimärgi järel seisev suurus osutub suuremaks või väiksemaks ühest. Joonisel 93 näidatud juhtmete asetuse puhul on  $M > 0$ . See tähendab, et mõlema liini positiivse voolu puhul on endainduktsiooni ja vastastikuse induktsiooni vood samasuunalised.

Kui me vahetaksime sinna- ja tagasijuhtme kohad ühel liinidest, s. o. muudaksime ühe liini voolu tingliku positiivse suuna, saaksime sellesama juhtmete asetuse puhul, et  $M < 0$ . See tähendab, et mõlema liini positiivse voolu juures on vood vastassuunalised.

### § 73. Kahejuhtmelise liini induktiivsus

Määrame osainduktiivsusmeetodi abil kahest rööpselt ringristlõikega juhtmest moodustatud liini (joon. 94) induktiivsuse. Juhtmete telgede vahekaugus on  $D$  ja ristlõigete raadiused  $R$  ja  $R'$ . Liini pikkus olgu  $l$ . Võime kirjutada:



$$L = L_{v1} + L_{v1'} + 2M_{11'} + L_s,$$

kus

$$L_{v1} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \ln \frac{2l}{R} - 1 \right); \quad L_{v1'} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \ln \frac{2l}{R'} - 1 \right);$$

$$M_{11'} = -\frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \ln \frac{2l}{D} - 1 \right); \quad L_s = \frac{\mu_a 2l}{8\pi} = \frac{\mu_a l}{4\pi},$$

kusjuures  $\mu_a$  on juhtmete materjali absoluutne magnetiline läbitavus. Saame:

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{D^2}{RR'} + \frac{\mu_a l}{4\pi} = \frac{l}{\pi} \left( \mu_0 \ln \frac{D}{\sqrt{RR'}} + \frac{\mu_a}{4} \right).$$

Kahejuhtmelisel liinil on harilikult  $R' = R$ . Siis

$$L = \frac{l}{\pi} \left( \mu_0 \ln \frac{D}{R} + \frac{\mu_a}{4} \right).$$

Kui  $\mu_a > \mu_0$ , näiteks terasjuhtmete korral, siis on see valem ligikaudne, sest ferromagnetiline keskkond moonutab välja juhtmete läheduses. Kuid selle moonutuse võib jätta tähele panemata, kui juhtmete ristlõigete raadiused on juhtmete vahekaugusega võrreldes väiksed. Kui  $\mu_a = \mu_0$ , siis annab see valem  $l \gg D$  puhul staatilise induktiivsuse täpse väärtuse  $D$  ja  $R$  mistahes vahekorradena jaoks.

## § 74. Kolmefaasilise liini induktiivsus

Kolmefaasilise liini igas juhtmes indutseeritakse mitte ainult endainduktsiooni emj., mis on tingitud vahelduvvoolust samas juhtmes, vaid ka vastastikuse induktsiooni emj., mis on tingitud liini teiste juhtmete vooludest. Vaatleme kolmejuhtmelist liini, s. o. liini, milles puudub neutraaljuhe. Harilikult on kõigi kolme juhtme aktiivtakistused  $r$  ja induktiivsused  $L$  ühesugused. Kuid juhtmetevahelised vastastikused induktiivsused  $M_{12}$ ,  $M_{23}$  ja  $M_{31}$  on juhtmete mittesümmeetrilise asetuse puhul üksteisest erinevad. Kui liini voolud muutuvad siinusseaduse järgi, siis saab kasutada sümbolimeetodit ja kirjutada juhtmete pingelangude kohta avaldised:

$$\dot{U}_1 = (r + j\omega L)\dot{I}_1 + j\omega M_{12}\dot{I}_2 + j\omega M_{13}\dot{I}_3;$$

$$\dot{U}_2 = (r + j\omega L)\dot{I}_2 + j\omega M_{23}\dot{I}_3 + j\omega M_{21}\dot{I}_1;$$

$$\dot{U}_3 = (r + j\omega L)\dot{I}_3 + j\omega M_{31}\dot{I}_1 + j\omega M_{32}\dot{I}_2.$$

Eeldame, et liini voolud moodustavad sümmeetrilise süsteemi, s. o.  $\dot{I}_2 = a^2\dot{I}_1$ ,  $\dot{I}_3 = a\dot{I}_1$ , kus

$$a = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ja} \quad a^2 = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Võttes arvesse, et  $a^3 = 1$ , võime võrrandid ümber kirjutada kujul:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= [r + j\omega(L + a^2M_{12} + aM_{13})]\dot{I}_1; \\ \dot{U}_2 &= [r + j\omega(L + a^2M_{23} + aM_{21})]\dot{I}_2; \\ \dot{U}_3 &= [r + j\omega(L + a^2M_{31} + aM_{32})]\dot{I}_3. \end{aligned} \right\} (*)$$

Ümarsulgudes seisvad avaldised on kõik reaalsed ainult juhtmete sümmeetrilise asetuse puhul, kui

$$M_{12} = M_{23} = M_{31} = M.$$

Tõepoolest, pannes tähele, et  $a^2 + a = -1$ , saame:

$$\dot{U}_1 = [r + j\omega(L - M)]\dot{I}_1;$$

$$\dot{U}_2 = [r + j\omega(L - M)]\dot{I}_2;$$

$$\dot{U}_3 = [r + j\omega(L - M)]\dot{I}_3.$$

Viimastes võrrandites esinevat vahet  $L - M = L'$  võib käsitleda ühe juhtme ekvivalentse induktiivsusena. Kui üksildase juhtme pikkus on  $l$  ja ristlõike raadius  $R$ , avaldub ta induktiivsus valemiga

$$L = L_v + L_s = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \ln \frac{2l}{R} - 1 \right) + \frac{\mu_a l}{8\pi},$$

kus  $\mu_a$  on juhtme materjali absoluutne magnetiline läbitavus.

Rööpjuhtmete vastastikune induktiivsus, kui juhtmete pikkus on  $l$  ja telgede vahekaugus  $D$ , avaldub  $l \gg D$  puhul valemiga

$$M = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \ln \frac{2l}{D} - 1 \right).$$

Seejuures peab valemi ees olema plussmärk, sest voolude positiivsed suunad võtame kõigis juhtmetes piki liini samale poole. Seega

$$L' = L - M = \frac{l}{2\pi} \left( \mu_0 \ln \frac{D}{R} + \frac{\mu_a}{4} \right).$$

Juhtmete mittesümmeetrilise asetuse korral ei ole juhtmete telgede vahekaugused üksteisega võrdsed:  $D_{12} \neq D_{23} \neq D_{31}$ .

Kui aga juhtmed võrdsete vahemaade tagant piki liini ümber asetada (transponeerida), siis säilitab  $L$  avaldis oma kuju, kui  $M$  all mõista liini kolme osa vastastikuste induktiivsuste keskväärtust:

$$M = \frac{1}{3} (M_{12} + M_{23} + M_{31}) = \frac{l}{2\pi} \mu_0 \left( \ln \frac{2l}{D'} - 1 \right),$$

kus

$$D' = \sqrt[3]{D_{12} D_{23} D_{31}}.$$

Mittesümmeetrilises kolmefaasilises liinis leiavad voolu läbimisel aset omapärased energetilised protsessid. Kui  $M_{12} \neq M_{23} \neq M_{31}$ , on võrrandites (\*) ümarsulgudes seisvad avaldised kompleksed. Nende avaldiste imaginaarosad annavad peale korrutamise  $j\omega$  reaalsuurused, mis on siult aktiivtakistused.

Liites kõigi kolme faasi kohta avaldised, mis seisavad võrrandite (\*) ümarsulgudes, saame igale vastastikusele induktiivsusele reaalkordaja  $a^2 + a = -1$ . Järelikult on kõigi kolme faasi lisaaktiivtakistuste summa võrdne nulliga, s. t. kui need lisaaktiivtakistused on mõnedes faasides positiivsed, siis on nad teistes faasides negatiivsed. Teiste sõnadega, kui ühtedest faasidest antakse energiat välja, siis teistesse faasidesse siseneb energia samas koguses, s. o. toimub energia ülekandmine ühest faasist teise elektromagnetilise induktsiooni teel.

Peatüki lõpuks märgime, et induktiivsuste arvutamise meetodite väljatöötamisele on pühendatud mitmeid nõukogude autorite G. N. Petrovi, L. A. Tseitlini, V. A. Foki ja teiste töid.

## ELEKTROMAGNETILINE VAHEDUVVÄLI DIELEKTRIKUS

§ 75. Tasapinnaline elektromagnetiline laine dielektrikus.  
Elektromagnetilise laine levimiskiirus

Eelmistes peatükkides uuriti elektromagnetilise välja erijuhtumeid, nimelt elektrivälju, mis ümbritsevad liikumatute laetud kehade süsteeme, ning elektri- ja magnetvälju, mis ümbritsevad liikumatuid alalisvooluringide süsteeme.

Ajas muutuvate laengute, ajas muutuvate voolude, laetud või magneeditud liikuvate kehade või liikuvate vooluringide üldisel juhtumil eksisteerib neid ümbritsevas ruumis elektromagnetiline vahelduvväli. Piirdume elektromagnetilise vahelduvvälja vaatlemisega liikumatutes homogeensetes ja isotroopsetes keskkondades. Selle välja uurimisel tuleb lähtuda elektromagnetilise välja täielikust võrrandsüsteemist:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \delta; \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad \delta = \gamma \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \delta_k;$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_a \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H}; \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

Ristkoordinaadistikus kirjutatakse esimesed kaks võrrandit kuue võrrandina, vastavalt kolme projektsioonina koordinaattelgedele. Kasutades lisaks vektorite  $\delta$ ,  $\mathbf{D}$ , ja  $\mathbf{B}$  avaldise, saame need kuus võrrandit alljärgneval kujul:

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \gamma E_x + \varepsilon_a \frac{\partial E_x}{\partial t} + \delta_{kx}; \quad (a)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \gamma E_y + \varepsilon_a \frac{\partial E_y}{\partial t} + \delta_{ky}; \quad (b)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \gamma E_z + \varepsilon_a \frac{\partial E_z}{\partial t} + \delta_{kz}; \quad (c)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu_a \frac{\partial H_x}{\partial t}; \quad (d)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\mu_a \frac{\partial H_y}{\partial t}; \quad (e)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\mu_a \frac{\partial H_z}{\partial t}. \quad (f)$$

Eeldame, et dielektriku juhtivus võrdub nulliga ( $\gamma = 0$ ) ja et dielektrikus puuduvad vabad laengud ( $\rho = 0$ ). Sellises keskkonnas saavad esineda ainult elektrilised nihkevoolud.

Selleks et paremini selgitada elektromagnetilise välja põhilisi seoseid, vaatleme algul lihtsaimat, homogeenses ja isotroopses keskkonnas leviva tasapinnalise elektromagnetilise laine juhtumit. Elektromagnetilist lainet nimetame tasapinnaliseks, kui kõik elektromagnetilise protsessi intensiivsust iseloomustavad suurused sõltuvad ainult ühest ristkoordinaadist, näiteks koordinaadist  $z$ . Ligi-kaudu selline iseloom on elektromagnetilisel lainel, mis kiiratakse antennist, kui seda lainet vaadelda väikeses ruumpiirkonnas suurel kaugusel kiirgavast tsentrist.

Seega eeldame, et vektorid  $\mathbf{E}$  ja  $\mathbf{H}$  ei sõltu koordinaatidest  $x$  ja  $y$ , s. o.

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y} = 0.$$

Järelikult on  $\mathbf{E}$  ja  $\mathbf{H}$  ainult  $z$  ja  $t$  funktsioonid.

Võttes arvesse veel tingimusi  $\gamma = 0$  ja  $\rho = 0$ , saame välja võrrandid kujul:

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = \varepsilon_a \frac{\partial E_x}{\partial t}; \quad (a) \qquad \frac{\partial E_y}{\partial z} = \mu_a \frac{\partial H_x}{\partial t}; \quad (d)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = \varepsilon_a \frac{\partial E_y}{\partial t}; \quad (b) \qquad \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu_a \frac{\partial H_y}{\partial t}; \quad (e)$$

$$0 = \varepsilon_a \frac{\partial E_z}{\partial t}; \quad (c) \qquad 0 = \mu_a \frac{\partial H_z}{\partial t}. \quad (f)$$

Eeldame, et välja kutsuvad esile allikad, mis ei sisalda alisvoole ega alislislaenguid, nagu see ongi laine kiirgamisel antennist. Antenni voolul ega pingel ei ole aliskomponente. Sel juhtumil ei saa vektoritel  $\mathbf{E}$  ja  $\mathbf{H}$  olla ajast sõltumatuid komponente ja võrrandid (c) ja (f) annavad:

$$E_z = \text{const} = 0; \quad H_z = \text{const} = 0.$$

Valime  $OX$ - ja  $OY$ -telgede suuna nii, et vektor  $\mathbf{E}$  suunduks mööda  $OX$ -telge. Siis saame:  $E_y = 0$ .

Seejuures annavad võrrandid (b) ja (d):

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = 0 \quad \text{ja} \quad \frac{\partial H_x}{\partial t} = 0, \quad \text{s. o.} \quad H_x = \text{const} = 0.$$

Järelikult on vektor  $\mathbf{H}$  suunatud mööda  $OY$ -telge. Me saame esimese olulise järelduse: *homogeenses ja isotroopses dielektrikus vabalt levivas elektromagnetilises laines on vektorid  $\mathbf{E}$  ja  $\mathbf{H}$  vastastikku perpendikulaarsed:*

$$\mathbf{E} \perp \mathbf{H}.$$

Seega jääb kaks võrrandit (a) ja (e):

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = \varepsilon_a \frac{\partial E_x}{\partial t}; \quad (a') \qquad \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu_a \frac{\partial H_y}{\partial t}. \quad (e')$$

Diferentseerides teist võrrandit  $z$  järgi ja esimest  $t$  järgi, saame:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = -\mu_a \frac{\partial^2 H_y}{\partial t \partial z}; \quad -\frac{\partial^2 H_y}{\partial z \partial t} = \varepsilon_a \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2},$$

milledest

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}, \quad (*)$$

kusjuures  $v = \frac{1}{\sqrt{\mu_a \varepsilon_a}}$ .

Võrrandid (a'), (e') ja (\*) on kujult täiesti analoogilised võrranditega

$$-\frac{\partial i_1}{\partial x} = C \frac{\partial u_1}{\partial t}; \quad -\frac{\partial u_1}{\partial x} = L \frac{\partial i_1}{\partial t}; \quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2},$$

kus  $v = 1/\sqrt{LC}$ . Need võrrandid saadi teises osas mittemoontava homogeense liini siirde nähtuste vaatlemisel. Viimaste võrrandite lahend saadi kujul:

$$u_1 = \varphi(x - vt) + \psi(x + vt);$$

$$i_1 = \sqrt{\frac{C}{L}} [\varphi(x - vt) - \psi(x + vt)].$$

Kasutades seda lahendit saame kirjutada  $E_x$  ja  $H_y$  avaldised, asendades viimastes avaldistes  $u_1$   $E_x$ -ga,  $i_1$   $H_y$ -ga,  $x$   $z$ -ga,  $C$   $\varepsilon_a$ -ga ja  $L$   $\mu_a$ -ga. Viies läbi selle asenduse ja tähistades argumentide  $(z - vt)$  ja  $(z + vt)$  funktsioonid  $F_1(z - vt)$  ja  $F_2(z + vt)$ , saame otsitava avaldise kujul

$$E_x = F_1(z - vt) + F_2(z + vt);$$

$$H_y = \sqrt{\frac{\varepsilon_a}{\mu_a}} [F_1(z - vt) - F_2(z + vt)].$$

Kuna vastavalt tingimusele ei oma ei  $E_x$  ega  $H_y$  ajast sõltumatuid komponente, siis ei ole ka funktsioonidel  $F_1$  ja  $F_2$  ajast sõltumatuid komponente.

Selgitame erilahendite

$$E_{x1} = F_1(z - vt) \text{ ja } H_{y1} = \sqrt{\frac{\epsilon_a}{\mu_a}} F_1(z - vt)$$

mõtte.

Mistahes punktis, mis liigub kiirusega  $\frac{dz}{dt} = v$   $OZ$ -telje positiivses suunas, jäävad  $E_{x1}$  ja  $H_{y1}$  väärtused konstantseteks. Tõepoolest, sellise punkti asendi määrab koordinaat  $z = vt + z_0$  ja järelikult omavad suurused  $E_{x1}$  ja  $H_{y1}$  selles liikuvas punktis väärtusi:

$$E_{x1} = F_1(vt + z_0 - vt) = F_1(z_0) = \text{const};$$

$$H_{y1} = \sqrt{\frac{\epsilon_a}{\mu_a}} F_1(z_0) = \text{const}.$$

Siit järeldub, et suuruste  $E_{x1}$  või  $H_{y1}$  iga teatav väärtus kulgeb  $OZ$ -telje positiivses suunas kiirusega  $v$ . Seetõttu võime kinnitada, et need erilahendid määravad elektromagnetilise laine, mis kulgeb kiirusega  $v$   $OZ$ -telje positiivses suunas (*pärilaine*). Kuna suurustega  $E$  ja  $H$  on seotud elektromagnetilise välja energia teatav tiheus, siis kannab liikuv elektromagnetiline laine endaga teatavat hulka elektromagnetilist energiat.

Analoogiliste kaalutluste abil tuleme järeldusele, et erilahendid  $E_{x2} = F_2(z + vt)$  ja  $H_{y2} = -\sqrt{\frac{\epsilon_a}{\mu_a}} F_2(z + vt)$  määravad elektromagnetilise laine, mis liigub kiirusega  $v$   $OZ$ -telje negatiivses suunas (*vastulaine*).

Seega saime, et *elektromagnetiline laine levib ruumis kiirusega*

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_a \epsilon_a}}.$$

See kiirus sõltub ainult keskkonna magnetilistest ja elektrilistest omadustest. Tühjuses on see kiirus

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 2,998 \cdot 10^8 \text{ m/s} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}.$$

Nii päri- kui ka vastulainel on magnetvälja ja elektrivälja tugevuste absoluutväärtused seotud valemiga

$$H = \sqrt{\frac{\epsilon_a}{\mu_a}} E,$$

millest saame:

$$\frac{\mu_a H^2}{2} = \frac{\varepsilon_a E^2}{2}.$$

Järelikult, kui esineb kas ainult päri- või ainult vastulaine, on magnetvälja ja elektrivälja energiad omavahel võrdsed.

Juhime tähelepanu analoogiale, mida saab näidata ühelt poolt väljatugevustega  $E_x$  ja  $H_y$  iseloomustatava tasapinnalise elektromagnetilise laine dielektrikus levimise vaadeldud nähtuse vahel ning teiselt poolt homogeense kadudeta liini pinge  $u$  ja voolu  $i$  lainete levimisnähtuste vahel. Juba märgiti, et  $E_x$  avaldis on täielikult analoogiline  $u$  avaldisega ja vastavalt  $H_y$  avaldis on analoogiline  $i$  avaldisega. See asjaolu ei ole juhuslik. Tõepoolest, elektrivälja tugevust  $E$  võib käsitleda pingelanguna elektrivälja tugevuse joone pikkusühiku kohta ja vastavalt magnetvälja tugevust  $H$  vooluna magnetvälja tugevuse joone pikkusühiku kohta. Seejuures on suhtel  $E_{x1}/H_{y1} = \sqrt{\mu_a/\varepsilon_a} = z$  elektritakistuse dimensioon ja seda suhet võib vaadelda keskkonna *lainetakistusena* analoogiliselt homogeense liini lainetakistusega  $z = \sqrt{L/C}$ . Laine levimisel tühjuses saame lainetakistuseks

$$z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{1/4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}} = 120\pi = 377\Omega.$$

Elektromagnetilise laine dielektrikus levimise kiiruse avaldis  $v = \frac{1}{\sqrt{\mu_a \varepsilon_a}}$  on analoogiline liinis laine levimise kiiruse avaldisega  $v = 1/\sqrt{LC}$ .

Elektromagnetiliste konstantide  $\varepsilon_0$  ja  $\mu_0$  asemel võinuks sisse tuua kaks teistsugust füüsikalist konstanti, mis küll väljenduksid nende konstantide kaudu, kuid iseloomustaksid paremini välja laineomadusi. Nendeks oleksid

$$z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \quad \text{ja} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}.$$

Et selgitada päri- ja vastulaine üheaegselt esinemise võimalust, vaatleme laine üleminekut keskkonnast, mille absoluutne dielektriline läbitavus on  $\varepsilon_{a1}$  ja absoluutne magnetiline läbitavus  $\mu_{a1}$ , keskkonda läbitavustega  $\varepsilon_{a2}$  ja  $\mu_{a2}$ . Eeldame, et keskkonnad on eraldatud tasandiga ja et laine levib eralduspinna normaali sihis. Esimesest keskkonnast eralduspinnale *langev* laine (pärlaine  $E_{\varphi 1}$ ,  $H_{\varphi 1}$ ) osaliselt läbib eralduspinna, moodustades teises keskkonnas *murdunud* laine (pärlaine  $E_{\varphi 2}$ ,  $H_{\varphi 2}$ ), ja osaliselt peegeldub eralduspinnalt, moodustades esimeses keskkonnas *peegeldunud* laine (vastulaine  $E_{\psi 1}$ ,  $H_{\psi 1}$ ). Nende lainete väljatugevuste vahelised seo-

sed eralduspinna kohta saab välja kirjutada, kui kasutada ülal-  
määritud analoogia põhjal langevate, murdunud ja peegeldunud  
voolu- ning pingelainete puhul kehtivaid pingete- ja vooludevahelisi  
seoseid.

Eralduspinna kohta saame:

$$E_{\varphi 2} = \frac{2z_2}{z_2 + z_1} E_{\varphi 1}; \quad E_{\psi 1} = \frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1} E_{\varphi 1};$$

$$H_{\varphi 2} = \frac{2z_1}{z_1 + z_2} H_{\varphi 1}; \quad H_{\psi 1} = \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} H_{\varphi 1},$$

kus  $z_1 = \sqrt{\frac{\mu_{a1}}{\varepsilon_{a1}}}$  ja  $z_2 = \sqrt{\frac{\mu_{a2}}{\varepsilon_{a2}}}$  on vastavalt esimese ja teise  
keskkonna lainetakistused.

Kui  $z_2 = z_1$ , siis peegeldunud lained puuduvad.

Kui  $z_2 > z_1$ , siis on  $E_{\varphi 1}$  ja  $E_{\psi 1}$  samamärgilised, kuid  $H_{\varphi 1}$  ja  $H_{\psi 1}$   
erimärgilised. Laine osalise peegeldumise tulemusel kasvab esi-  
meses keskkonnas elektrivälja tugevus  $E_1 = E_{\varphi 1} + E_{\psi 1}$ , kuid mag-  
netvälja tugevus  $H_1 = H_{\varphi 1} + H_{\psi 1}$  kahaneb. Kui  $z_2 < z_1$ , siis on pilt  
vastupidine.

Kõiki ülejäänud järeldusi, mis saadi homogeenstes kadudeta  
liinides lainete levimise uurimisel, võib üle kanda tasapinnalise  
elektromagnetilise laine dielektrikus levimise uuritavale juhtumile.

Üldjuhtumil, kui langeva laine levimissuund moodustab eraldus-  
pinna normaaliga mingi nurga, on vaja kasutada peegeldunud ja  
murdunud lainete leidmiseks kõiki piiritingimusi vektorite  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$   
ja  $\mathbf{B}$  kohta.

## § 76. Poyntingi vektor

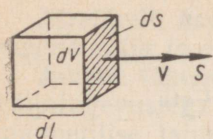
Määrame energiavoo võimsuse pinnauhiku kohta, kui pind on  
laine levimissuunaga risti. Eeldame, et esineb ainult ühes suunas  
liikuv laine. Siis on elektromagnetilise välja energia ruumtihedus-  
võrdne

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} &= \frac{\varepsilon_a E}{2} \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} H + \frac{\mu_a H}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_a}{\mu_a}} E = \\ &= \sqrt{\varepsilon_a \mu_a} EH = \frac{1}{v} EH. \end{aligned}$$

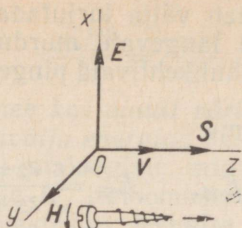
Järelikult sisaldub ruumalas  $dv = dl ds$  (joon. 95) energia

$$\frac{1}{v} EH dl ds.$$

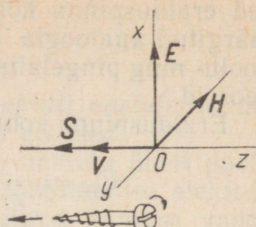
Teesa  $dl$  katab laine ajavahemiku  $dt$  jooksul. See ajavahemik  
on seotud pikkusega  $dl$  järgmiselt:  $dl = v dt$ .



JOON. 95



JOON. 96



JOON. 97

Energiavoo võimsus kiirusvektori  $\mathbf{v}$  suhtes risti oleva pinna pindalaühiku kohta on arvuliselt võrdne energiahulgaga, mis läbib ajaühikus kiirusvektori  $\mathbf{v}$  suhtes risti oleva pinna ühikusuurst pindala. Energiavoo võimsus

$$S = \frac{\frac{EH}{v} dl ds}{ds dt}$$

Võttes arvesse, et  $\frac{dl}{dt} = v$ , leiame:

$$S = EH.$$

Seda suurust saab käsitleda vektorina  $\mathbf{S}$ , mis on suunatud laine liikumise suunas, s. o. kiirusvektori  $\mathbf{v}$  suunas.

Energiavoo ja pinnaühiku kohta tuleva energivoo võimsuse mõisteid rakendas 1874. a. N. A. Umov oma töös elastsetes keskondades energia ülekandmise juhtumil. Üksteist aastat hiljem kasutas Poynting neid mõisteid elektromagnetilise energia ülekandmise juhtumil ja sai vektori  $\mathbf{S}$  avaldise vektorite  $\mathbf{E}$  ja  $\mathbf{H}$  kaudu. Seepärast sai vektor  $\mathbf{S}$  *Poyntingi vektori* nimetuse.

Leiame seose Poyntingi vektori suuna ja vektorite  $\mathbf{E}$  ja  $\mathbf{H}$  suundade vahel. Pärilaine puhul, nagu see järgneb eelmises paragrahvis saadud avaldistest, on  $E_{x1}$  ja  $H_{y1}$  alati samamärgilised, s. o. sel hetkel, kui vektor  $\mathbf{E}$  on suunatud  $OX$ -telje positiivses suunas, on vektor  $\mathbf{H}$  suunatud  $OY$ -telje positiivses suunas. Kiirusvektor  $\mathbf{v}$  on aga pärilaine puhul suunatud  $OZ$ -telje positiivses suunas. Vektorite  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  ja  $\mathbf{S}$  vastastikune asetus on pärilaine jaoks näidatud joonisel 96.

Vastulaine puhul on  $E_{x2}$  ja  $H_{y2}$  alati erinevate märkidega ja vektor  $\mathbf{v}$  on suunatud  $OZ$ -telje negatiivses suunas. Vektorite  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  ja  $\mathbf{S}$  vastastikune asetus vastulaine puhul on kujutatud joonisel 97.

Me näeme, et *Poyntingi vektori suund ühtib sellise parema käe kruvi telje kulgliikumisega, mille pea pöörleb vektoreid  $\mathbf{E}$  ja  $\mathbf{H}$  sisaldavas tasandis vektori  $\mathbf{E}$  poolt vektori  $\mathbf{H}$  suunas lähemat teed pidi.*

Järelikult võib vektori  $\mathbf{S}$  esitada vektorite  $\mathbf{E}$  ja  $\mathbf{H}$  vektorkorrutisena:

$$\mathbf{S} = [\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}].$$

See vektor määrab *elektromagnetilise energia voo võimsuse pinnaühiku kohta, kui pinna normaaliks on laine levimissuund*. Poyntingi vektori jaoks saime avaldise eeldusel, et keskkond on homogeenne ja isotroopne ning esineb ainult pärilaine või ainult vastulaine. Järgmises paragrahvis näidatakse, et see avaldis on õige ka üldjuhtumil.

Peatume praktika jaoks tähtsal juhtumil, mille puhul  $E_x$  ja  $H_y$  muutuvad ajas siinusseaduse järgi. Eeldame, et esineb ainult üks pärilaine. Saame:

$$E_{x1} = F_1(z - vt) = E_{xm} \sin(\omega t + \psi);$$

$$H_{y1} = \sqrt{\frac{\epsilon_a}{\mu_a}} F_1(z - vt) = \sqrt{\frac{\epsilon_a}{\mu_a}} E_{xm} \sin(\omega t + \psi),$$

kusjuures  $\omega$  on võnkumise nurksagedus.

Viimased võrrandid rahuldavad tingimusel, et kehtib võrdus  $\omega t + \psi = k(z - vt)$ , kus  $k$  on konstantne suurus. Kuna see võrdus peab olema rahuldatud mistahes hetke  $t$  kohta, siis, võttes  $t = 0$ ,

saame, et  $\psi = kz$ . Järelikult  $\omega t = -kvt$  ja  $k = -\frac{\omega}{v}$ . Seega saab

algfaasi  $\psi$  esitada kujul  $\psi = -\frac{\omega}{v}z$ . Seega saame:

$$E_{x1} = E_{xm} \sin\left(\omega t - \frac{\omega}{v}z\right); \quad H_{y1} = \sqrt{\frac{\epsilon_a}{\mu_a}} E_{xm} \sin\left(\omega t - \frac{\omega}{v}z\right).$$

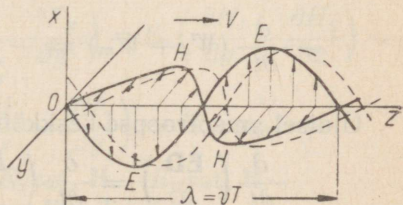
Joonisel 98 on kujutatud vektorid  $\mathbf{E}$  ja  $\mathbf{H}$ .  $OZ$ -telje erinevates punktides hetkel  $t = 0$ . Suurused  $E$  ja  $H$  jaotuvad ruumis siinusseaduse järgi ja kogu see jaotus liigub kiirusega  $v$   $OZ$ -telje positiivses suunas. Punkt, milles  $E_x = 0$ , määratakse tõepoolest tingimusega

$\omega t - \frac{\omega}{v}z = 0$  ehk  $z = vt$ . See punkt liigub seega kiirusega  $v$   $OZ$ -telje positiivses suunas. Joonisel 98 on kriipsjoonega kujutatud väljajaotus mingil hetkel  $t_1 > 0$ .

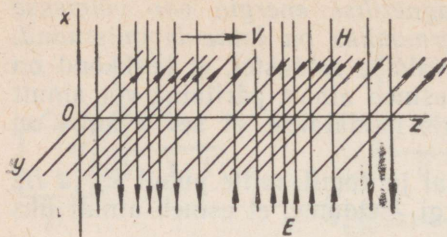
Kaugust, millele elektromagnetiline laine levib võnkumise ühe perioodi jooksul, nimetatakse *lainepikkuseks*. Tähistades lainepikkuse tähega  $\lambda$ , saame:

$$\lambda = vT = \frac{v}{f},$$

kus  $f$  on võnkesagedus.



JOON. 98



JOON. 99

Võnkumise faaside vahe kahes punktis, mis on laine levimise suunas teineteisest kaugusel  $\lambda$ , on  $\frac{\omega}{v}\lambda = \omega t = 2\pi$ . Järelikult *laine-pikkus on vahemaa kahe sellise lähima punkti vahel, milledes väljatugevusel on maksimaalne positiivne väärtus.*

Et näitlikult ette kujutada tasapinnalise laine kogu välja, on vaja kujutleda kahte ristiasetsevat väljajoonte parve. Need on elektrivälja ja magnetvälja tugevuse joonte parved, mis täidavad kogu ruumi, milles laine levib (joon. 99). Igal XOY-tasandiga rööpsel tasandil on väljatugevusjooned ühtlaselt jaotunud, kuid OZ-telje suunas muutub joonte tihedus siinuseaduse järgi. Kogu see jaotus liigub kiirusega  $v$  OZ-telje positiivses suunas.

## § 77. Elektromagnetilise energia voog

Poyntingi vektor, mis määrab ajaühikus laine levimissuunale risti asetseva pinna pindalaühikust läbikantava elektromagnetilise energia voo suuruse ja suuna, on võrdne

$$\mathbf{S} = [\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}].$$

Näitame selle väite õigsust mistahes iseloomuga välja kohta, mis võib üldjuhtumil olla mistahes mittehomoogeenses ja anisotroopses keskkonnas. Oma käsitlust piirame ainult ühe eeldusega, nimelt et keskkonna elektrilised ( $\epsilon_a$  ja  $\gamma$ ) ja magnetilised ( $\mu_a$ ) omadused ei sõltu elektri- ja magnetvälja tugevusest ning ei ole aja funktsioonid.

Vaatleme ruumi mingit suvaliselt valitud osa  $V$ , mis on piiratud kindlase pinnaga  $s$ .

Eeldame, et elektri- ja magnetvälja energia ( $W_e + W_m$ ), mis sisaldub ruumiosas  $V$ , muutub ajas. Energia vähenemise kiirus on

$$-\frac{\partial}{\partial t} (W_e + W_m) = -\int_V \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mathbf{E}\mathbf{D}}{2} + \frac{\mathbf{H}\mathbf{B}}{2} \right) dV.$$

Üldisel anisotroopse-keskkonna juhtumil saame:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mathbf{E}\mathbf{D}}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{E_x D_x + E_y D_y + E_z D_z}{2} \right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\epsilon_{ax}E_x^2 + \epsilon_{ay}E_y^2 + \epsilon_{az}E_z^2}{2} \right) =$$

$$= E_x \frac{\partial D_x}{\partial t} + E_y \frac{\partial D_y}{\partial t} + E_z \frac{\partial D_z}{\partial t} = \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

ja täpselt samuti

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mathbf{H}\mathbf{B}}{2} \right) = \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Seega

$$-\frac{\partial}{\partial t} (W_e + W_m) = \int_v \left( -\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dV.$$

Avaldades nihkevoolu tiheduse resulteeriva voolutiheduse ja juhtivus- ning konvektsioonvoolu tiheduse vahena, leiame Maxwelli esimest võrrandit kasutades:

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \delta - \gamma \mathbf{E} - \delta_h = \text{rot } \mathbf{H} - \gamma \mathbf{E} - \delta_h.$$

Peale selle annab Maxwelli teine võrrand:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\text{rot } \mathbf{E}.$$

Seega

$$-\frac{\partial}{\partial t} (W_e + W_m) = \int_v (-\mathbf{E} \text{rot } \mathbf{H} + \gamma \mathbf{E}^2 + \delta_h \mathbf{E} + \mathbf{H} \text{rot } \mathbf{E}) dV.$$

Märgime, et kehtib samasus

$$\mathbf{H} \text{rot } \mathbf{E} - \mathbf{E} \text{rot } \mathbf{H} = \text{div}[\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}].$$

Tõepoolest, vektorkorrutis  $[\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}]$  avaldub kujul

$$[\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}] = \mathbf{i}(E_y H_z - E_z H_y) + \mathbf{j}(E_z H_x - E_x H_z) + \mathbf{k}(E_x H_y - E_y H_x).$$

Järelikult

$$\text{div}[\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}] = \frac{\partial}{\partial x} (E_y H_z - E_z H_y) + \frac{\partial}{\partial y} (E_z H_x - E_x H_z) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z} (E_x H_y - E_y H_x) = H_x \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) +$$

$$+ H_y \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + H_z \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) - E_x \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) -$$

$$- E_y \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) - E_z \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) = H_x \text{rot}_x \mathbf{E} +$$

$$+ H_y \text{rot}_y \mathbf{E} + H_z \text{rot}_z \mathbf{E} - E_x \text{rot}_x \mathbf{H} - E_y \text{rot}_y \mathbf{H} -$$

$$- E_z \text{rot}_z \mathbf{H} = \mathbf{H} \text{rot } \mathbf{E} - \mathbf{E} \text{rot } \mathbf{H}.$$

Vastavalt sellele samasusele ja Ostrogradski teoreemi alusel võime kirjutada:

$$\int_V (\mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H}) dV = \int_V \operatorname{div} [\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}] dV = \oint_s [\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}] ds.$$

Seega saame:

$$-\frac{\partial}{\partial t} (W_e + W_m) = \int_V \gamma \mathbf{E}^2 dV + \int_V \delta_k \mathbf{E} dV + \oint_s [\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}] ds. \quad (*)$$

Saadud võrrandi parema poole esimene integraal kujutab endast energiat, mis ajaühiku jooksul neeldub ruumis  $V$  keskkonna juhtivuse lõpliku väärtuse tõttu, s. o. energiat, mis muutub soojuseks ruumi  $V$  nendes osades, kus keskkond omab erijuhtivust  $\gamma$  ja kus järelikult on olemas juhtivusvoolud. Teine integraal kujutab endast tööd, mis kulub ajaühikus vabade laetud osakeste liikumise kiirendamiseks ruumis  $V$ , s. o. nende osakeste kineetilise energia suurendamiseks ruumi  $V$  nendes osades, kus on olemas vabade laetud osakeste konvektsioonivoolud. Kui need osakesed põrkuvad aine molekulidega, muundub osa osakestele antud kineetilisest energiast samuti soojuseks.

Kolmanda integraali olemasolu näitab, et mitte kogu ruumi  $V$  elektri- ja magnetvälja energiakadum ei muutu selles ruumis soojuseks ja vabade laetud osakeste kineetiliseks energiaks. Selle kolmanda integraali suurus kujutab endast võimsust ning võrdub arvuliselt selle energiaga, mis ajaühikus antakse välja ruumist  $V$  läbi pinna  $s$ .

Seega avaldub läbi pinna  $s$  suunduva elektromagnetilise energia voo võimsus kujul

$$p = \oint_s [\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}] ds = \oint_s \mathbf{S} ds.$$

Siit järeldub, et elektromagnetilise energia voo erivõimsus, mis on arvuliselt võrdne energiahulgaga, mis antakse ajaühikus läbi laine levimise suunaga risti asetseva pinna ühikusuuruse pindala, saab esitada vektoriga

$$\mathbf{S} = [\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}].$$

Võrrand (\*) on saadud eeldusel, et ruumi piirkonnas  $V$  ei tehta mehaanilist tööd ei laetud juhtivate kehade, voolu juhtivate vooluringide ega ka keskkonna elektrilises ja magnetilises mõttes mittehomogeensete üksikute osade ruumis ümberpaigutamise näol. See eeldus seisnes selles, et suurused  $\gamma$ ,  $\mu_a$  ja  $\varepsilon_a$  võeti konstantseteks ruumi igas punktis. Järelikult eeldati, et mittehomogeense keskkonna kõik osad ja eriti juhid on liikumatud. Peale selle ei ole piirkonnas  $V$  eeldatud mingisuguste emj. allikate olemasolu. Võr-

rand (\*) kujutab endast energia jäävuse seaduse väljendust, rakendatuna sellisele juhtumile.

Üldisemal juhtumil võivad piirkonna  $V$  sees esineda elektromagnetilise energia allikad, milledes toimub mingit liiki energia (soojusenergia, keemilise energia jne.) või mehaanilise töö muundamine elektromagnetiliseks energiaks. Tähistades nende allikate võimsuse  $p_e$ -ga, saame kirjutada energia jäävuse seaduse alusel järgmise võrduse:

$$p_e = \frac{\partial}{\partial t} (W_e + W_m) + \int_V \gamma E^2 dV + \int_V \delta_k E dV + \oint_s [\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}] ds. \quad (**)$$

Korrutanud selle võrrandi  $dt$ -ga, saame, et töö, mille teevad kõik allikad aja  $dt$  jooksul, läheb ruumi  $V$  elektri- ja magnetvälja energia varu muutmiseks, ruumis  $V$  soojuse eraldamiseks ning samas ruumis olevate vabade laetud osakeste kineetilise energia suurendamiseks ja et peale selle vastab osa allikate tööst energiale, mis antakse läbi pinna  $s$  ruumipiirkonna piiridest väljapoole.

**§ 78. Elektromagnetiliste lainete kiirgamine antennist.  
H. Hertzi katsed. P. N. Lebedevi tööd. Raadio leiutamine  
A. S. Popovi poolt**

Põhimõtteliselt kiirgab iga vahelduvvooluahel elektromagnetilisi laineid. See põhimõtteline tees järeldub elektromagnetilise välja võrrandite süsteemi lahendusest, mille võib saada mistahes kujuga vooluringide kohta. Järgnevates paragrahvides tuuakse lahend vahelduvlaengutega elektridipooli juhtumile. Siin peatume ainult mõningatel üldistel kaalutlustel, mis on seotud elektromagnetiliste lainete kiirgamisega.

Eeldame, et mingi vooluringi vool suureneb nullist kuni lõpliku väärtuseni ja seejärel väheneb uuesti nullini. Kui suurendada vooluringi voolu lõpmata aeglaselt, siis omandab endainduktsiooni aheldusvoog  $\Psi$  voolu  $i$  iga väärtuse juures selle suuruse, mis tal on statsionaarse ja väga kaua esineva alalisvoolu sama väärtuse juures. Energia, mille kulutab väline emj. allikas voolu suurenemisel,

$$A = \int i \frac{d\Psi}{dt} dt = \int i d\Psi,$$

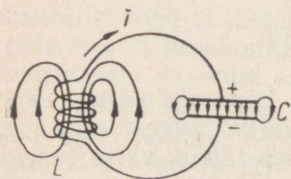
muundub seejuures magnetvälja energiaks. Lõpmata aeglasel vooluringi voolu vähenemisel antakse magnetväljas salvestunud kogu energia emj. allikasse tagasi. Seejuures leiab täielik välja energia tagastamine emj. allikale aset ainult voolu lõpmata aeglase muu-

tumise korral. Voolu tekitamise ja vähendamise lõpliku kiiruse juures aga kantakse osa energiast ära kiiratud elektromagnetilise lainega.

Kiirgamise fakt ise on seotud sellega, et elektromagnetilise välja levimiskiirus  $v$  omab lõplikku väärtust. Hakaku hetkel  $t = 0$  vooluringi vool suureneva. Kuni hetkeni  $t = 0$  puudus vooluringis vool. Hetkeks  $t_1$ , mil vooluringi vool saavutab maksimaalse väärtuse, jõuab elektromagnetiline väli levida vooluringist ainult lõplikule kaugusele, mis võrdub  $vt_1$ . Kui selle järel vooluringi vool väheneb, antakse välja energia osaliselt allikasse tagasi. Kuid elektromagnetilise välja piir jätkab levimist endises suunas sellesama kiirusega  $v$ . Hetkeks  $t_2$ , mil vooluringi vool saab uuesti võrdseks nulliga, levib väli vooluringist kaugusele  $vt_2$ . Seetõttu ei tagastugi välja energia emj. allikasse täielikult. Osa energiat osutub seotuks elektromagnetilise lainega, mis levib vabalt ruumis.

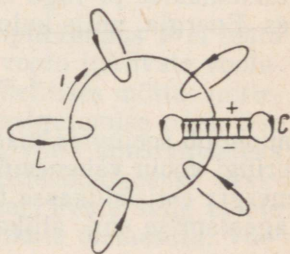
Õeldust on selge, et laine poolt mingi ajavahemiku jooksul kiiratud energia hulk sõltub vooluringi voolu muutumiskiirusest. Alalisvoolu ja alalislaengute puhul ei esine kiirgamist. Põhimõtteliselt kiirgab iga vooluring, milles voolab vahelduvvool, elektromagnetilisi laineid. Kuid tööstussagedusel  $f = 50$  Hz on süsteemide puhul, milledega meil on tegemist tehnilistes seadmetes, laine poolt kiiratud energia hulk praktiliselt tühine ja arvutustes ei võta me seda energiat arvesse. Kiirgamine on tähtsusetu ka helisageduspiirkonnas. Seetõttu kasutatakse raadiotehnikas üldiselt  $10^5$  hertsist kõrgemaid sagedusi.

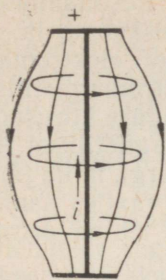
Vooluringi kiirgusvõime sõltub tugevasti tema geomeetrisest konfiguratsioonist. Selle võime suurendamiseks on vaja luua niisugused tingimused, et magnet- ja elektriväli, mis on seotud vooluringi vahelduvvooluga ja -pingega, oleksid jaotunud vooluringi ümbritseva ruumi ühte ja samasse piirkonda. Näiteks vooluring (joon. 100), mis koosneb tihedalt mähitud keerdudega endainduktsioonpoolist ja väikese plaatide vahekaugusega kondensaatorist, omab üsna nõrka kiirgusvõimet, sest põhiline magnetväli ja põhiline elektriväli on koondunud ruumi erinevatesse piirkondadesse. Kiirgus on tühine ka joonisel 101 kujutatud vooluringi puhul. Magnetväli on jaotunud piki niisugust vooluringi, kuid põhiline elektriväli jääb koondatuks kondensaatori plaatidevahelisse väikesesse ruumi. Kui aga nihutada plaadid teineteisest võimalikult suuremale



JOON. 100

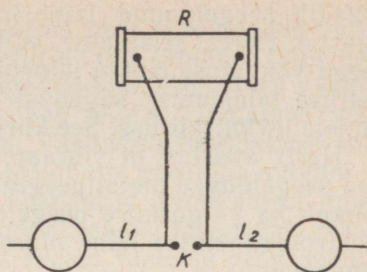
JOON. 101





JOON. 102

JOON. 103



kaugusele, tõmmates sirgeks plaate ühendava juhtme nii, nagu näidatud joonisel 102, siis osutuvad elektri- ja magnetväli jaotunuks ruumi ühes ja samas piirkonnas. Sellisel süsteemil on suur kiirgusvõime.

Esimesed tähelepanuväärsed katsed, mis eksperimentaalselt kinnitasid Maxwelli teooriat, korraldas Hertz. Põhiline võnkering, nn. vibraator, mida Hertz kasutas, oli sisuliselt sarnane joonisel 102 kujutatud vooluringiga. Kondensaatori elektroodid, mis olid tehtud kas plaadikujulistena või kerakujulistena, võisid liikuda piki vardaid  $l_1$  ja  $l_2$  (joon. 103), millega saavutati süsteemi mahtuvuse muutumine. Kondensaatori laadimiseks moodustati kondensaatori elektroode ühendavas juhtmes kahe väikese kera vahel sädevahemik  $K$ . Kondensaatori elektroodid ühendas Hertz induksioonpooli  $R$  sekundaarklemmidega. Voolu iga katkestamine pooli primaarmähises kutsus esile sekundaarmähises emj. impulsi. Kondensaator laadus pingeni, mille juures kerade vahel tekkis säde. Laetud kondensaator osutus lühistatuks sädeme kaudu ja vibraatorisüsteemis tekkis kõrge sagedusega võnkumine. Võnkesagedus sõltus vibraatori mahtuvusest ja induktiivsusest. Niisugune võnkumine sumbus väga kiiresti, sest võnkumise energia kulus kiirguseks ja soojuse eraldamiseks vooluringis.

Vibraatorist kiiratud elektromagnetiliste lainete avastamiseks kasutas Hertz nn. resonaatorit, mis koosnes sädevahemikuga varustatud võnkeringist. Resonaatori häälestamisel resonantsi vibraatori elektromagnetiliste võnkumiste sagedusega tekkisid resonaatori vooluringis küllaltki tugevad võnkumised, mis kutsusid esile sädeme tekkimise resonaatori sädevahemikus. Selle sädeme pikkuse järgi oli võimalik otsustada elektromagnetilise välja intensiivsuse üle resonaatori asukohas. Hertzil õnnestus avastada elektromagnetilist kiirgust 12 m kaugusel vibraatorist, mille suurus oli ligikaudu 1 m.

Hertzi katsed näitasid, et elektromagnetilised lained levivad kooskõlas seadustega, mis tulenevad Maxwelli teooriast. Need katsed kinnitasid samuti Maxwelli hüpoteesi valguse elektromagnetilisest loomusest. Suunanud vibraatori kiirguse suurele metallplaadile risti plaadi pinnaga, vaatles Hertz seisulaineid, mis moodustusid

plaadilt peegeldunud laine liitumisel pärlainega. Resonaatoriga avastas Hertz seisulaine võnkumiste sõlm- ja paiskohad ja sai seega võimaluse mõõta lainepikkust. Teades vibraatori elektromagnetilise võnkumise sagedust sai ta arvutada elektromagnetiliste lainete levimiskiiruse. See kiirus osutus võrdseks valguse kiirusega.

Hertz avastas, et vibraatorist kiiratud elektromagnetilised lained peegelduvad metallpeeglitelt samade seaduste järgi, mille järgi toimub ka valguskiire peegeldumine peeglitelt. Ta vaatles samuti elektromagnetilise laine murdumist suure asfaldist tehtud prisma läbimisel.

Hiilgavaid katseid elektromagnetiliste lainete levimise ja murdumise kohta erinevate keskkondade puhul ning valguse elektromagnetilise loomuse tõestamiseks korraldas silmapaistev füüsik-eksperimentaator P. N. Lebedev. P. N. Lebedev valmistas tema enda poolt loodud laboratooriumis esmakordselt väga väikeste mõõtmetega vibraatori, mis kiirgas väga lühikesi laineid lainepikkusega alla 1 cm. Ta valmistas samuti termomuunduriga resonaatori, mis võimaldas vastu võtta niivõrd lühikesi laineid. Hertz, kes opereeris lainetega, millede pikkus oli meetri suurusjärgus, oli sunnitud valmistama suurte mõõtmetega prismsid ja peegleid. P. N. Lebedevil oli oma seadmes võimalik kasutada lainete murdmiseks ja peegeldamiseks üsna väikeste mõõtmetega seadiseid. See mitte ainult ei teinud kogu katseseadet väiksemaks, vaid avas ka uusi uurimisvõimalusi. Nimelt osutus võimalikuks uurida elektromagnetiliste lainete levimist läbi kristalliliste kehade. Selle tähelepanuväärse eksperimentaalse uurimuse tulemused avaldas P. N. Lebedev 1895. a. töös nimetusega «Elektrijõu kiirte kaksikmurdumisest». Maailmakuulsuse tõid P. N. Lebedevile tema hiilgavad katsed, milledes ta esmakordselt tõestas katseliselt valguse rõhu. Esimestes, 1900. a. edukalt sooritatud katsetes avastas ja mõõtis P. N. Lebedev valguse rõhu tahketele kehadele. Järgnevate, veelgi keerukamate katsetega, mis sooritati 1910-ndaks aastaks, tõestas P. N. Lebedev eksperimentaalselt valguse rõhu olemasolu gaasidele. P. N. Lebedevi eksperimentaalsete tööde tulemused olid kooskõlas Maxwelli elektromagnetilise välja teooriaga.

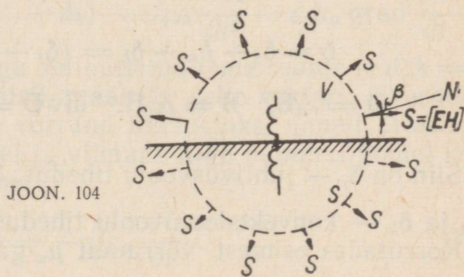
Esimese raadiotelegraafi loomine ja raadiosides praktiline kasutamine on väljapaistva vene füüsiku ja elektrotehniku A. S. Popovi teeneks. Ta lõi esimese raadiotelegraafisignaalide vastuvõtja. Selles vastuvõtjas kasutas A. S. Popov elektromagnetiliste lainete registreerimiseks nn. koheererit, mis kujutab endast metallipuruga täidetud klaastoru. Sellise toru elektritakistus on küllalt suur, kuid väheneb järsult, kui elektromagnetilised lained klaastoru läbivad. Kui selline toru on lülitatud emj. allika ahelasse, saab voolu järsu suurenemise põhjal otsustada elektromagnetiliste lainete ilmumise üle. Kuid peale elektromagnetiliste lainete toime lõppemist ei taastu toru takistus uuesti, vaid selleks on vaja toru raputada.

A. S. Popov kasutas oma vastuvõtjas toru automaatselt raputusseadist, mis tegutses elektromagnetilise laine läbimise tulemusel toru ahelas tekkiva voolu mõjul ja tagas automaatselt toru valmisoleku uue signaali registreerimiseks. See leiutis võimaldas kohe registreerida morsetähestiku signaale. Vastuvõtu tundlikkuse suurendamiseks pani A. S. Popov esmakordselt ette kasutada antenni — ühe otsaga vastuvõtuseadise külge ühendatud vertikaalset juhet. A. S. Popov kasutas alguses oma vastuvõtuseadist lähenevate pikselahenduste registreerimiseks, millega seoses nimetas seda seadist piksemärkijaks. Seejärel kasutas ta oma seadist raadiosideks mereväs.

Raadio leiutamise ametlikuks kuupäevaks on hakatud lugema 7. maid 1895. a., mil A. S. Popov esines Vene Füüsika ja Keemia Ühingu füüsika osakonna koosolekul avaliku ettekandega teemal «Elektromagnetiliste võnkumiste mõju metallipulbritesse». Selle ettekande käigus demonstreeris A. S. Popov oma vastuvõtuseadise tegevust.

Saate- ja vastuvõturaadiojaamade kaasaegsed antennid valmistatakse samal põhimõttel, mis oli aluseks esimesele A. S. Popovi antenni konstruktsioonile. Antenni konstrueerimisel on eesmärgiks avatud võnkeringi loomine. Maapinna kohale paigutatud antennid koosnevad harilikult vertikaalsetest juhtmetest, mis on ühendatud rohkem või vähem ulatusliku horisontaalse juhtmevõrguga. Raadiosaatjas ühendatakse antenni alumine ots kõrgsageduslike elektromagnetiliste võnkumiste generaatori pooli ühe klemmi külge. Pooli teine klemm ühendatakse maaga spetsiaalse maandussüsteemi kaudu. Generaatori poolis ergutatav kõrgsageduslik emj. tekitab võimsad vooluvõnkumised antennis, mis häälestatakse harilikult resonantsi generaatori võnkesagedusega.

Antenni kiirgusvõimsuse saab arvutada järgmisel viisil. Kui antenn asub hästi juhtiva maapinna kohal, siis võib kujutleda, et maa on asendatud antenni peegelkujutisega (joon. 104). Ümbritsevad antenni ja selle peegelkujutise kinnise pinnaga  $s$ , rakendame selle pinnaga piiratud ruumi  $V$  kohta eelmise paragrahvi võrrandit (\*\*). Kui mõelda suuruse  $p_e$  all ainult seda võimsust, mis on võrdne kiirusega, millega energia läheb antennist ümbritsevasse



välja, s. o. kui loobuda energiakadude vaatlemisest generaatoris endas ja antenni juhtmetes ning eeldada, et kogu antenni ümbritsevas keskkonnas  $\gamma = 0$  ning  $\rho = 0$  ja  $\delta_k = 0$ , siis saame:

$$p_e - \frac{\partial}{\partial t} (W_e + W_m) = \oint [\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}] ds = \oint \mathbf{S} ds = \oint S_n ds,$$

milles  $S_n$  on Poyntingi vektori normaalkomponent pinnale  $s$ .

Ruumi  $V$  väljade energiavaru ( $W_e + W_m$ ) muutumine on võnkumise terve perioodi kohta võrdne nulliga. Seetõttu on antennist ja tema peegeldajutisest kiiratud laine keskmine võimsus

$$P_e = \frac{1}{T} \int_0^T p_e dt = \int_s \left( \frac{1}{T} \int_0^T S_n dt \right) ds = \int_s S_{nh} ds,$$

kusjuures  $S_{nh}$  on Poyntingi vektori normaalkomponendi keskmine aritmeetiline väärtus võnkeperioodi kohta. Seega on kiirgusvõimsuse arvutamiseks vaja määrata pinna  $s$  igale punktile iga hetke kohta Poyntingi vektor  $\mathbf{S} = [\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}]$ . Järelikult on vaja leida suurused  $\mathbf{E}$  ja  $\mathbf{H}$  elektromagnetilise välja võrrandite süsteemi lahendamise teel.

## § 79. Elektromagnetilise välja elektrodünaamiline vektorpotentsiaal ja elektrodünaamiline skalaarpotentsiaal

Nii nagu staatiliste ja statsionaarsete väljade vaatlemisel on ka üldisel elektromagnetilise vahelduvvälja juhtumil võimalik avaldada vektorid  $\mathbf{E}$  ja  $\mathbf{B}$  abisuuruste — välja vektorpotentsiaali  $\mathbf{A}$  ja skalaarpotentsiaali  $U$  kaudu. Nende abisuuruste sissetoomine on kasulik sellepärast, et neid on homogeense ja isotroopse keskkonna puhul võimalik lihtsalt arvutada vabade laengute ning juhtivus- ja konvektsioonivoolude antud jaotumise põhjal ruumis ja muutumise järgi ajas. Loomulikult on  $\mathbf{A}$  ja  $U$  seejuures mitte ainult koordinaatide, vaid ka aja funktsioonid.

Lähtume elektromagnetilise välja võrrandite kogumist:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \delta, \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

$$\delta = \delta_j + \delta_n + \delta_k = (\delta_j + \delta_n) + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_a \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H}, \quad \text{div } \mathbf{D} = \rho, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0.$$

Siin on  $\delta_j$  — juhtivusvoolu tihedus,  $\delta_n = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$  — nihkevoolu tihedus ja  $\delta_k$  — konvektsioonivoolu tihedus.

Korrutades esimest võrrandit  $\mu_a$ -ga ja kasutades kolmandat,

neljandat ja viiendat võrrandit, saame  $\mu_a = \text{const}$  ja  $\varepsilon_a = \text{const}$  puhul taandada selle kogumi neljaks võrrandiks:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{B} &= \mu(\delta_j + \delta_k) + \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}; & \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \\ \text{div } \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon}; & \text{div } \mathbf{B} &= 0. \end{aligned}$$

Viimane võrrand võimaldab esitada vektori  $\mathbf{B}$  elektromagnetilise välja *vektorpotentsiaali*  $\mathbf{A}$  kaudu kujul

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad (*)$$

sest alati  $\text{div rot } \mathbf{A} = 0$ . Teisest võrrandist saame:

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{A} = \text{rot} \left( -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right),$$

mis rahuldatakse, kui võtta

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } U, \quad (**)$$

kuna  $\text{rot grad } U = 0$ . Suurus  $U$  on elektromagnetilise välja *skalaarpotentsiaal*.

Asetanud avaldised (\*) ja (\*\*) elektromagnetilise välja esimesse võrrandisse, saame:

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \mu_a(\delta_j + \delta_k) - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \varepsilon_a \mu_a \text{grad } \frac{\partial U}{\partial t}.$$

Nagu näidati 46. paragrahvis, kehtib samasus

$$\text{rot}_x (\text{rot } \mathbf{A}) = \frac{\partial}{\partial x} \text{div } \mathbf{A} - \nabla^2 A_x = \text{grad}_x (\text{div } \mathbf{A}) - \nabla^2 A_x.$$

Kui koostada samasugused avaldised projektsioonide  $A_y$  ja  $A_z$  kohta, korrutades neid avaldise teljesuunaliste ühikvektoritega ja liites tulemused, saame:

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}.$$

Järelikult

$$\text{grad div } \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_a(\delta_j + \delta_k) - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \varepsilon_a \mu_a \text{grad } \frac{\partial U}{\partial t}.$$

Vektori  $\mathbf{A}$  jaoks on esialgu defineeritud tema rootor ( $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B}$ ). Me saame veel mistahes viisil määrata selle vektori divergentsi. Teeme seda nii, et viimane võrrand lihtsustuks, nimelt et esimene liige võrrandi vasakul poolel ja viimane liige paremal poolel koonduksid. Sel eesmärgil võtame

$$\text{div } \mathbf{A} = -\varepsilon_a \mu_a \frac{\partial U}{\partial t}. \quad (***)$$

Olles võrrandi paremalt ja vasakult poolelt näidatud liikmed koondanud, saame vektori  $\mathbf{A}$  kohta d'Alembert'i võrrandi:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_a (\delta_j + \delta_k).$$

See võrrand jaguneb kolmeks vastavaks võrrandiks projektsioonide  $A_x$ ,  $A_y$  ja  $A_z$  kohta, kusjuures parematesse pooltesse tulevad vastavalt voolutiheduse vektorite projektsioonid.

Asetades  $\mathbf{E}$  avaldise (\*\*\*) elektromagnetilise välja ülejäänud kolmandasse võrrandisse, saame:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{A} - \operatorname{div} \operatorname{grad} U = \frac{\rho}{\varepsilon_a}.$$

Asendades  $\operatorname{div} \mathbf{A}$  tema avaldisega  $U$  kaudu vastavalt võrdusele (\*\*\*) ja pannes tähele, et  $\operatorname{div} \operatorname{grad} U = \nabla^2 U$ , leiame:

$$\nabla^2 U - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}.$$

Seega rahuldab ka skalaarpotentsiaal d'Alembert'i võrrandit.

Märgime, et alalisväljade puhul, kui  $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 0$  ja  $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$ , lähevad d'Alembert'i võrrandid üle meile juba tuntud Poissoni võrranditeks  $U$  ja  $\mathbf{A}$  kohta.

Uurides niisuguse ruumipiirkonna välja, kus ei ole ei vabu laenguid ( $\rho = 0$ ) ega juhtivus- ning konvektsioonivoole ( $\delta_j = 0$ ;  $\delta_k = 0$ ), saame võrrandid

$$\nabla^2 U = \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}; \quad \nabla^2 \mathbf{A} = \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2},$$

mis kannavad lainevõrrandite nimetust.

Leiame mõningaid üldisi kaalutlusi kasutades  $U$ ,  $A_x$ ,  $A_y$  ja  $A_z$  avaldised, mis määravad need suurused laengute ja voolude antud jaotuse ning ajas muutumise järgi ja on ülaltoodud d'Alembert'i võrrandite eriiintegraalideks.

Eeldame, et ruumi mingis väikeses mahuelemendis sisaldub ajas muutuv laeng  $q$ . Loomulikult on see füüsikaliselt realiseeritav ainult antud mahuelementi sellega külgnevatest mahuelementidest vabade laetud osakeste juurdevoolu (või äravoolu) teel. Kuid esialgu vaatleme välja, mille on tekitanud ainult antud mahuelemendis asuv laeng. Olgu mahuelement nii väike, et laengut  $q$  võib käsitleda punktlaenguna.

Väljaspool laengut  $q$  rahuldab potentsiaal  $U$  lainevõrrandit

$$\nabla^2 U = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2},$$

kusjuures  $v = \frac{1}{\sqrt{\mu_a \varepsilon_a}}$ . Leiame käsitletava juhtumi jaoks selle

võrrandi lahendi. Eeldades, et laengu asub koordinaatide alguses, ja tähistades  $r$ -iga kauguse laengust kuni punktini, milles määratakse  $U$ , saame:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2; \quad 2r \frac{\partial r}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$$

ja analoogiliselt

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}.$$

Laengu  $q$  väli omab sfäärilist sümmeetriat ja järelikult on  $U$  ainult  $r$  ja  $t$  funktsioon. Seejuures on vektor grad  $U$  suunatud piki raadiust ja selle vektori suurus on võrdne grad  $U = \frac{\partial U}{\partial r}$ . Sellisel tingimusel

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial r} \frac{x}{r}; \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial U}{\partial r} \right) \frac{x}{r} + \frac{\partial}{\partial x} (x) \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right) x \frac{\partial U}{\partial r} = \\ &= \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \frac{x^2}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{x}{r} x \frac{\partial U}{\partial r}. \end{aligned}$$

Koostades samasugused avaldised  $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$  ja  $\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$  kohta ja liites need, saame:

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rU)}{\partial r^2}.$$

Lainevõrrand omandab kuju

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rU)}{\partial r^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad \text{või} \quad \frac{\partial^2 (rU)}{\partial r^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 (rU)}{\partial t^2}.$$

Viimane võrrand  $rU$  kohta on täiesti analoogiline võrrandiga (\*)  $E_x$  kohta, mille saime tasapinnalise laine uurimisel 75. paragrahvis. Järelikult võime analoogia põhjal kirjutada selle võrrandi lahendi kujul:

$$rU = F_1(r - vt) + F_2(r + vt).$$

Tundes huvi ainult pärilaine vastu, mis levib laengust eemale, piirdume erilahendi  $F_1(r - vt)$  uurimisega, kusjuures kirjutame selle kujul

$$rU = F_1[-v(t - r/v)] = f(t - r/v).$$

Seejuures  $v = 1/\sqrt{\mu_a \epsilon_a}$  on laine levimiskiirus. Seega

$$U = \frac{f(t - r/v)}{r}.$$

Kuna ajas muutumatu laengu  $q$  erijuhtumil peab see valem omandama kuju  $U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$ , siis järelikult  $f\left(t - \frac{r}{v}\right) = \frac{q\left(t - \frac{r}{v}\right)}{4\pi\epsilon_0 r}$ . Siin  $q\left(t - \frac{r}{v}\right)$  on laengu  $q$  suurus hetkel

$(t - r/v)$ , mis eelneb  $U$  määramise hetkele  $t$ . Seejuures on  $r/v$  aja- vahemik, mille jooksul kiirusega  $v$  liikuv laine läbib teekonna  $r$ .

Kui laengud on jaotunud ruumi mingis mahus  $V$  ruumtihedusega  $\rho(x, y, z, t)$ , mis on koordinaatide ja aja funktsioon, siis, kasutades äsjasaadud lahendit elementaarlaengu  $dq = \rho dV$  kohta, mis sisaldub ruumielemendis  $dV$ , ja summeerides mingi ruumipunkti kohta kõigist elementaarlaengutest põhjustatud potentsiaali, saame:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(t - r/v) dV}{r},$$

kus  $r$  on kaugus ruumielemendist  $dV$  kuni punktini, mille potentsiaali määratakse.

Viimane avaldis on  $U$  kohta kirjutatud d'Alembert'i võrrandi erilahend.

Analoogilisel teel saame d'Alembert'i võrrandite erilahendid vektori  $\mathbf{A}$  projektsioonide kohta:

$$A_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\delta_x(t - r/v) dV}{r}; \quad A_y = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\delta_y(t - r/v) dV}{r};$$

$$A_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\delta_z(t - r/v) dV}{r}.$$

Siin on  $\delta_x(t - r/v)$ ,  $\delta_y(t - r/v)$  ja  $\delta_z(t - r/v)$  juhtivus- või konvektioonivoolu tiheduse vektori projektsioonide väärtused ruumielemendis  $dV$  hetkel  $(t - r/v)$ , mis eelneb  $A_x$ ,  $A_y$  ja  $A_z$  määramise hetkele  $t$ .

Alalisvoolude puhul lähevad saadud avaldised üle varemleitud avaldisteks (vt. § 46).

Saadud tulemusel on sügav põhimõtteline tähendus: see väljendab olulist asjaolu, et elektromagnetilised häiringud levivad häiringutsentrist lõpliku kiirusega  $v$  ja mida kaugemale häiringutsentrist, seda suurem on häiringu toime hilinemus. Vastavalt nimetatakse viimaste valemitega väljenduvaid *skalaarpotentsiaali*  $U$  ja *vektorpotentsiaali*  $\mathbf{A}$  *elektrodünaamilisteks hilinevateks potentsiaalideks*.

Lõpuks juhime tähelepanu sellele, et elektrivälja tugevus (\*\*) sisaldab peale liikme ( $-\text{grad } U$ ) veel liiget  $\left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)$ . Võttes elektrivälja tugevuse joonintegraali mööda mingit meelevaldset suletud kontuuri, saame:

$$\oint \mathbf{E} \, d\mathbf{l} = \oint \left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } U\right) \, d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \oint \mathbf{A} \, d\mathbf{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t},$$

sest  $\oint \text{grad } U \, d\mathbf{l} = 0$  ja integraal  $\oint \mathbf{A} \, d\mathbf{l}$  võrdub magnetvooga  $\Phi$  läbi integreerimiskontuuriga piiratud pinna.

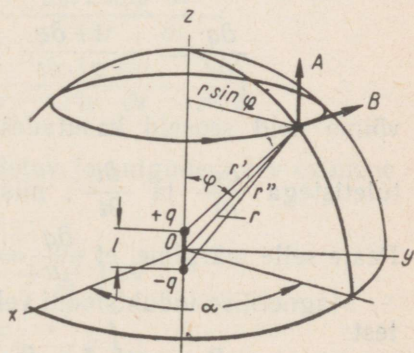
Seega on elektrivälja tugevuse komponent  $\left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)$  sisuliselt vahelduva magnetvoo poolt indutseeritud emj. selle komponendi suunalise pikkusühiku kohta.

Elektrostaatilise välja ja liikumatute alalisvooludega juhtmete statsionaarse elektrivälja puhul puuduvad indutseeritud elektromotoorjõud ja elektrivälja tugevus määratakse ainult liikmega ( $-\text{grad } U$ ), kusjuures  $U$  ei sõltu ajast.

## § 80. Vahelduvlaengutega elektridipool

Vaatleme elektrilist võnkesüsteemi, mis on moodustatud kahest väikesest metallkerast ja neid ühendavast juhust pikkusega  $l$ . Eeldame, et sellise vibraatori kogu mahtuvuseks on keradevaheline mahtuvus ja et keraid ühendaval juhil on ainult induktiivsus. Võnkumise puhul sellises süsteemis on igal hetkel juhi voolul  $i$  piki kogu juhti üks ja sama väärtus. Sellist vibraatorit võib kaugusel  $r \gg l$  käsitleda dipoolina elektrilise vahelduvmomendiga  $ql$ . Paigutame dipooli koordinaatide algusesse ja suuname dipooli telje piki  $OZ$ -telge (joon. 105).

JOON. 105



Hilinev vektorpotentsiaal  $A$  vibraatorist kaugusel  $r$  asuvas punktis

$$A = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_l \frac{i(t-r/v) dl}{r} = \frac{\mu_a}{4\pi} \frac{i(t-r/v)l}{r}.$$

Viimane avaldis saadi selliselt, et integraalimärgi ette oli võimalik tuua suurus  $1/r$ , sest  $r \gg l$ , ja ka suurus  $i(t-r/v)$ , sest vastavalt ülalmärgitule on vool piki juhti ühesuguse väärtusega.

Sama punkti hilinev skalaarpotentsiaal

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \left[ \frac{q(t-r'/v)}{r'} - \frac{q(t-r''/v)}{r''} \right].$$

Kui  $r \gg l$ , saame:

$$r' \approx r - \frac{l}{2} \cos \varphi; \quad r'' \approx r + \frac{l}{2} \cos \varphi.$$

Arendades sulgudes olevad liikmed ritta väikese suuruse  $\frac{l}{2} \cos \varphi$  astmete järgi ja piirdudes arenduse kahe esimese liikmega, saame:

$$\frac{q(t-r'/v)}{r'} = \frac{q(t-r/v)}{r} - \frac{l}{2} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{q(t-r/v)}{r} \right);$$

$$\frac{q(t-r''/v)}{r''} = \frac{q(t-r/v)}{r} + \frac{l}{2} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{q(t-r/v)}{r} \right).$$

Järelikult

$$U = -\frac{l \cos \varphi}{4\pi\epsilon_a} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{q(t-r/v)}{r} \right).$$

Lepime kokku jätta edaspidi argumendi tähis  $(t-r/v)$  ära ja kirjutada seetõttu lühidalt:

$$q(t-r/v) = q, \quad i(t-r/v) = i.$$

Pannes tähele, et

$$\frac{\partial q}{\partial r} = -\frac{1}{v} \frac{\partial q}{\partial t} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial i}{\partial r} = -\frac{1}{v} \frac{\partial i}{\partial t},$$

võime neid seoseid kasutades asendada tuletised  $\frac{\partial q}{\partial r}$  ja  $\frac{\partial i}{\partial r}$  tuletistega  $\frac{\partial q}{\partial t}$  ja  $\frac{\partial i}{\partial t}$ , mis on korrutatud teguriga  $(-1/v)$ .

Peale selle märgime, et  $\frac{\partial q}{\partial t} = i$  ja  $\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = \frac{\partial i}{\partial t}$ .

Magnetilise induktsiooni vektori komponendid määratakse seostest:

$$B_x = \text{rot}_x A; \quad B_y = \text{rot}_y A; \quad B_z = \text{rot}_z A.$$

Võttes arvesse, et  $A_x = A_y = 0$  ja  $A_z = \frac{\mu_a i l}{4\pi r}$ , leiame:

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{\partial A_z}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\mu_a l}{4\pi} \left( -\frac{i}{r^2} - \frac{1}{rv} \frac{\partial i}{\partial t} \right) \frac{y}{r};$$

$$B_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x} = -\frac{\partial A_z}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{\mu_a l}{4\pi} \left( -\frac{i}{r^2} - \frac{1}{rv} \frac{\partial i}{\partial t} \right) \frac{x}{r};$$

$$B_z = 0.$$

Kuna  $B_x/B_y = -y/x$ , siis on vektor  $\mathbf{B}$  puutujaks ringjoonele, mis asub  $OZ$ -teljega perpendikulaarsel tasandil ja mille tsenter on sellel teljel (joon. 105). Need ringjooned on magnetjoonteks. Järelikult on sfääriliste koordinaatide  $r, \varphi, \alpha$  süsteemis vektoril  $\mathbf{B}$  ainuke komponent  $B_\alpha$ , mis on suuruselt võrdne  $|B_\alpha| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2}$ . Kuna  $\sqrt{x^2 + y^2} = r \sin \varphi$  ja  $B_\alpha$  märk peab ühtima  $B_y$  märgiga  $y = 0$  ja  $x > 0$  puhul (joon. 105), siis

$$B_\alpha = \frac{\mu_a l}{4\pi} \left( \frac{i}{r^2} + \frac{1}{rv} \frac{\partial i}{\partial t} \right) \sin \varphi = \frac{\mu_a \sin \varphi}{4\pi r v} \left( \frac{\partial i}{\partial t} + \frac{v}{r} i \right). \quad (*)$$

Määrame sfäärilistes koordinaatides komponendid  $E_\alpha, E_r$  ja  $E_\varphi$ , kasutades avaldist

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } U.$$

Seejuures märgime, et  $A_\alpha = 0$ ,  $A_r = A_z \cos \varphi$  ja  $A_\varphi = -A_z \sin \varphi$  ning et  $U$  saab esitada kujul:

$$U = -\frac{l \cos \varphi}{4\pi \epsilon_a} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{q}{r} \right) = -\frac{l \cos \varphi}{4\pi \epsilon_a} \left( -\frac{1}{rv} \frac{\partial q}{\partial t} - \frac{q}{r^2} \right) =$$

$$= \frac{l \cos \varphi}{4\pi \epsilon_a} \left( \frac{i}{rv} + \frac{q}{r^2} \right).$$

Kuna  $A_\alpha = 0$  ja  $U$  ei sõltu  $\alpha$ -st, siis  $E_\alpha = 0$ . Edasi saame:

$$E_r = -\frac{\partial A_r}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{\mu_a l \cos \varphi}{4\pi r} \frac{\partial i}{\partial t} -$$

$$-\frac{l \cos \varphi}{4\pi \epsilon_a} \left( -\frac{1}{rv^2} \frac{\partial i}{\partial t} - \frac{i}{r^2 v} - \frac{1}{r^2 v} \frac{\partial q}{\partial t} - \frac{2q}{r^3} \right).$$

Kuna  $\frac{1}{\epsilon_a v^2} = \mu_a$ , siis esimene liidetav ja sulgudes olev esimene liige koonduvad ning saame:

$$E_r = \frac{l \cos \varphi}{4\pi \epsilon_a} \left( \frac{2i}{r^2 v} + \frac{2q}{r^3} \right) =$$

$$= \frac{2\mu_a l \cos \varphi}{4\pi r} \left( \frac{v}{r} i + \frac{v^2}{r^2} q \right).$$

$$E_{\varphi} = -\frac{\partial A_{\varphi}}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} = \frac{\mu_a l \sin \varphi}{4\pi r} \frac{\partial i}{\partial t} + \\ + \frac{l \sin \varphi}{4\pi \epsilon_a} \left( \frac{1}{r^2 v} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{q}{r^3} \right)$$

või

$$E_{\varphi} = \frac{\mu_a l \sin \varphi}{4\pi r} \left( \frac{\partial i}{\partial t} + \frac{v}{r} i + \frac{v^2}{r^2} q \right). \quad (***)$$

Kuna  $E_{\alpha} = 0$ , siis  $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$ .

Järgnevalt vaatleme praktikas tähtsat juhtumit, mille puhul dipooli vool on siinusvool  $I_m \sin \omega t$ . Arvestades, et elektromagnetilise välja levimise kiirus on lõplik, tuleb elektrivälja tugevuse ja magnetilise induktsiooni avaldistesse panna suurus  $i = I_m \sin \omega(t - r/v)$ . Võttes arvesse, et  $\omega r/v = 2\pi r/Tv = 2\pi r/\lambda$ , kus  $T$  on võnkeperiood ja  $\lambda = vT$  lainepikkus, saame:

$$\frac{\partial i}{\partial t} = \omega I_m \cos \omega(t - r/v), \\ \frac{v}{r} i = \left( \frac{\lambda}{2\pi r} \right) \omega I_m \sin \omega(t - r/v), \\ \frac{v^2}{r^2} q = - \left( \frac{\lambda}{2\pi r} \right)^2 \omega I_m \cos \omega(t - r/v).$$

Järelikult erineb  $B_{\alpha}$ ,  $E_r$  ja  $E_{\varphi}$  avaldistes iga järgneva liikme amplituud eelneva amplituudist  $\lambda/2\pi r$  korda.

### § 81. Elektromagnetiline väli lainepikkusega võrreldes väikesel kaugusel dipoolist

Olgu  $r \ll \lambda$ . Siis võib  $B_{\alpha}$ ,  $E_r$  ja  $E_{\varphi}$  valemitesse jätta ainult viimased liikmed. Saame:

$$B_{\alpha} = \frac{\mu_a l i \sin \varphi}{4\pi r^2}; \quad E_r = \frac{2lq \cos \varphi}{4\pi \epsilon_a r^3}; \quad E_{\varphi} = \frac{lq \sin \varphi}{4\pi \epsilon_a r^3}.$$

Seejuures ühtib  $B_{\alpha}$  ligikaudne valem Biot'-Savart'i-Laplace'i valemiga, mis on õige alalisvoolu puhul. Ligikaudsed  $E_r$  ja  $E_{\varphi}$  valemid ühtivad valemitega, mis tuletati varem staatilise dipooli kohta (vt. § 10).

Vektorite  $\mathbf{B}$  ja  $\mathbf{E}$  komponentide üldavaldiste siinvaadeldud liikmed määravad ainult reaktiivvõimsuse, sest magnetvälja ja elektrivälja hetkväärtused on teineteise suhtes  $\pi/2$  võrra faasis nihutatud, sest selle nurga võrra on faasis nihutatud  $i$  ja  $q$ . Märgime, et komponendid, milledest siin loobusime, kuid mis esinevad ka vaadeldavas piirkonnas ( $r \ll \lambda$ ), määravad aktiivvõimsuse. Seda näidatakse järgmises paragrahvis.

## § 82. Elektromagnetiline väli lainepikkusest tunduvalt suuremal kaugusel dipoolist

Kui  $r \gg \lambda$ , võib  $B_\alpha$  ja  $E_\varphi$  avaldistes loobuda kõigist liikmetest peale esimeste. Suurusest  $E_r$  võib täielikult loobuda, sest ta mõlemad liikmed on komponendi  $E_\varphi$  esimese liikmega võrreldes väga väikesed. Saame:

$$\begin{aligned} B_\alpha &= \frac{\mu_a l \sin \varphi}{4\pi r v} \omega I_m \cos \left( \omega t - \frac{\omega r}{v} \right) = \\ &= \frac{\mu_a l I_m}{2r\lambda} \sin \varphi \cos \left( \omega t - \frac{2\pi r}{\lambda} \right); \\ E_\varphi &= \frac{\mu_a l \sin \varphi}{4\pi r} \omega I_m \cos \left( \omega t - \frac{\omega r}{v} \right) = \\ &= v B_\alpha = \frac{1}{\sqrt{\mu_a \epsilon_a}} B_\alpha = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} H_\alpha. \end{aligned}$$

Sellise iseloomuga lainet nimetatakse *sfääriliseks*.

Me jõuame tähelepanuväärse seoseni, mille saime varem tasapinnalise laine uurimisel:

$$\frac{\epsilon_a E^2}{2} = \frac{\mu_a H^2}{2}.$$

Seega on ka sfäärilises elektromagnetilises laines elektrivälja energia võrdne magnetvälja energiaga.

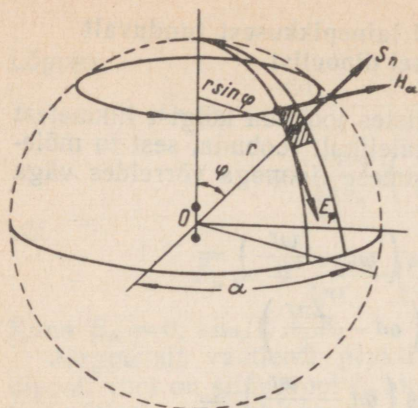
Märgime eriti, et  $E$  ja  $H$  on ühesuguse võnkefaasiga ja järelikult määravad aktiivvõimsuse. Poyntingi vektor, nagu näha jooniselt 106, on mistahes hetkel ja mistahes punktis suunatud mööda raadiust dipoolist eemale. Järelikult antakse energiat dipoolist välja raadiuste suunas. See energia juba enam ei pöördu tagasi allikasse ja on väljakiiratud elektromagnetilise välja energia.

## § 83. Dipooli ja antenni kiirgusvõimsus ja -takistus

Ümbritseme dipooli kerapinnaga, mille keskpunkt on dipooli asukohas (joon. 106), ja arvutame seda pinda läbiva elektromagnetilise energia voo võimsuse. Kerapinnaga risti olev Poyntingi vektori komponent  $S_n = E_\varphi H_\alpha$ . Poyntingi vektori normaalkomponendi perioodi kohta võetud aritmeetilisele keskmisele

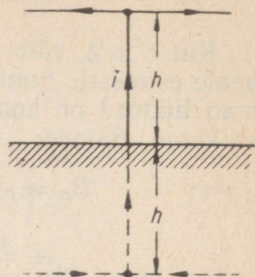
$$S_{nk} = \frac{1}{T} \int_0^T E_\varphi H_\alpha dt$$

võib saada nullist erineva väärtuse ainult nendest korrutise  $E_\varphi H_\alpha = E_\varphi B_\alpha / \mu$  liidetavatest, mis on  $B_\alpha$  ja  $E_\varphi$  samafaasiliste liikmete kor-



JOON. 106

JOON. 107



rutiseks avaldistes (\*) ja (\*\*\*) 80. paragrahvis. Siia kuuluvad  $B_\alpha$  ja  $E_\varphi$  esimeste liikmete korrutis,  $B_\alpha$  esimese liikme ja  $E_\varphi$  kolmanda liikme korrutis ja  $B_\alpha$  ning  $E_\varphi$  teiste liikmete korrutis. Kerge on veenduda, et kaks viimatinimetatud korrutist kokku ei anna nullist erinevat keskmist võimsust.

Seega jääb ainult  $B_\alpha$  ja  $E_\varphi$  esimeste liikmete korrutis, mida vaadeldi eelmises paragrahvis. Saame:

$$S_{nk} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{I_m^2 l^2}{4r^2 \lambda^2} \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \sin^2 \varphi \cos^2 \left( \omega t - \frac{2\pi r}{\lambda} \right) dt.$$

Võttes arvesse, et  $\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 \left( \omega t - \frac{2\pi r}{\lambda} \right) dt = \frac{1}{2}$ , saame:

$$S_{nk} = \frac{I_m l^2}{8r^2 \lambda^2} \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \sin^2 \varphi = \frac{I^2 l^2}{4r^2 \lambda^2} \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \sin^2 \varphi,$$

kus  $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$  on voolu efektiivväärtus.

Kerapinna element (joon. 106)  $ds = r d\varphi r \sin \varphi d\alpha$ . Kerapinda läbiva kogu elektromagnetilise energia voo keskmine võimsus

$$\begin{aligned} P &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left( \frac{I^2 l^2}{4r^2 \lambda^2} \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \sin^2 \varphi \right) r^2 \sin \varphi d\varphi d\alpha = \\ &= \frac{\pi I^2 l^2}{2\lambda^2} \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \int_0^\pi \sin^3 \varphi d\varphi. \end{aligned}$$

Kuid

$$\int_0^\pi \sin^3 \varphi d\varphi = \int_1^{-1} -\sin^2 \varphi d \cos \varphi = \int_1^{-1} (\cos^2 \varphi - 1) d \cos \varphi = \frac{4}{3}.$$

$$P = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \frac{l^2}{\lambda^2} I^2.$$

Seega osutus kerapinnast läbikantava elektromagnetilise energia voo keskmine võimsus nullist erinevaks. See võimsus on arvuliselt võrdne dipoolist *väljakiiratud* elektromagnetilise välja energiaga ajaühiku kohta.

Kordaja  $I^2$  ees kujutab endast vönkeringi aktiivtakistust, mis iseloomustab vönkeringi kiirgusvõimet. Seda aktiivtakistust nimetatakse *kiirgustakistuseks*. Elektridipooli kiirgustakistus  $R'$  avaldub valemiga

$$R' = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \frac{l^2}{\lambda^2}.$$

Reaalne antenn kujutab endast dipoolist keerukamat kiirgavat süsteemi. Antenn koosneb harilikult maapinna kohal asetsevatest juhtmetest. Antenni osad omavad mahtuvust maa suhtes ja üksteise suhtes. Seetõttu ei ole voolu hetkväärtus piki antenni ühesugune, sest vool hargneb juhtmetest dielektrikusse nihkevooluna. Kuid alati saab juhet jaotada elementaarosadeks pikkusega  $dl$ , millede piirides võib voolu lugeda ühesuguseks igal kindlal hetkel. Need elementaarosad vahelduvvooluga  $i$  ei kujuta endast midagi muud kui elementaardipooli. Kogu antenni elektromagnetiline väli määratakse kõigi elementaardipoolide väljade superponeerimise, s. t. mööda antenni juhtmeid integreerimise teel.

Kõige lihtsamalt saab dipooli jaoks saadud tulemusi rakendada niisuguse antenni korral, mis asetseb väga hästi juhtiva maapinna kohal ja koosneb vertikaalsest juhtmest, mille ülemine ots on ühendatud horisontaaljuhtmete ulatusliku süsteemiga (joon. 107). Nendel tingimustel võib maa asendada antenni peegelkujutisega, samuti võib vertikaalse juhtme mahtuvuse jätta arvesse võtmata. Märkime veel, et horisontaaljuhtmed ja nende peegelkujutised kiirgavad praktiliselt vähe energiat, sest tegelikkudes horisontaaljuhtmetes ja nende peegelkujutistes on voolud vastassuunalised (joon. 107). Need horisontaalosalad moodustatakse süsteemi mahtuvuse suurendamiseks, mis toob kaasa voolu suurenemise vertikaaljuhtmes ja järelkult kiirgusvõimsuse suurenemise. Seega taandub vaadeldav antenn elektridipooliks pikkusega  $l = 2h$ , kusjuures  $h$  on tegeliku antenni kõrgus. Elektromagnetilist välja iseloomustatakse kaugusel  $r \gg h$  nendesamade seostega kui dipooli puhulgi.

Sellise antenni kiirgustakistus koos peegelkujutisega leitakse viimasest valemist, kui sellesse panna  $l = 2h$ . Tegelikult kiirgab ainult antenn ise.

Seetõttu määratakse antenni kiirgustakistus valemiga

$$R = \frac{R'}{2} = \frac{1}{2} \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \frac{(2h)^2}{\lambda^2} = \frac{4\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \frac{h^2}{\lambda^2}.$$

Antenn asub harilikult õhus ning seetõttu  $\mu_a = \mu_0$  ja  $\epsilon_a = \epsilon_0$ . Asendades  $\epsilon_0$  ja  $\mu_0$  arvvaartustega saame, et  $R = (4\pi)^2 \cdot 10 \frac{h^2}{\lambda^2} = 1580 \frac{h^2}{\lambda^2} \Omega$ .

#### § 84. Elektromagnetilise energia ülekanne piki liinijuhtmeid

Energiaülekanne piki liinijuhtmeid toimub elektromagnetilise väljaga, mis levib piki liinijuhtmeid dielektrikus. Liinijuhtmed on elektromagnetilise välja suunajateks.

Ümbritseme osa liinist koos tarbijaga kinnise pinnaga  $s$  (joon. 108). Mööda normaali  $N_1$  suunatud vektor  $ds_1 = -ds$ . Asendades viimases võrduses pinnaelemendi  $ds$  pinnaelemendiga  $ds_1$ , saame:

$$-\frac{\partial}{\partial t} (W_e + W_m) = \int_V \gamma E^2 dV + \oint_s [E \cdot H] ds.$$

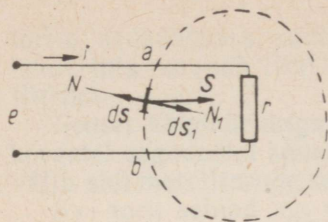
Kui  $V$  on pinnaga  $s$  ümbritsetud piirkonna ruumala, siis peab vektor  $ds$  olema suunatud mööda selle ruumi piirkonna välisnormaali  $N$ . Kui soovime aga lugeda positiivseks energiat, mis antakse läbi pinna  $s$  piirkonda  $V$ , siis on vaja muuta positiivse normaali suund vastupidiseks, s. o. võtta positiivseks sisenormaal  $N_1$  (joon. 108). Mööda normaali  $N_1$  suunatud vektor  $ds_1$  on võrdne  $ds_1 = -ds$ . Asendades viimases võrduses pinnaelemendi  $ds$  pinnaelemendiga  $ds_1$ , saame:

$$\oint_s [E \cdot H] ds_1 = -\frac{\partial}{\partial t} (W_e + W_m) + \int_V \gamma E^2 dV.$$

Näeme, et elektri- ja magnetvälja energia juurdekasv ruumi piirkonnas  $V$  ja energia neeldumine tarbijas ning selles ruumi piirkonnas asetsevates liinijuhtmetes kaetakse piirkonda  $V$  läbi piirpinna  $s$  ülekantava elektromagnetilise energia arvel.

Erijuhtumil, kui ahela vool on konstantne, ei muutu väljade energia ajas. Järelikult on esimene liige viimase võrrandi paremal pool võrdne nulliga ja me saame:

$$\oint_s [E \cdot H] ds_1 = \int_V \gamma E^2 dV.$$



JOON. 109



JOON. 108

Ahelas soojusena neelduv energia on seega võrdne energiaga, mis antakse läbi pinna  $s$  piirkonda  $V$ .

Seega energia, mis eraldub juhis soojusena, antakse juhtmesse läbi juhtme pinna juhete ümbritsevast dielektrikust.

Lihtsaimal juhtumil, nimelt sirge ümarjuhtme lõigu  $l$  puhul, mille raadius on  $R$  (joon. 109), saab seda teesi tõestada väljatugevuste otse arvutamisega juhtme pinna jaoks. Arvutame elektromagnetilise energia voo läbi juhtmelõigu pinna  $s$ . Saame:

$$H = \frac{i}{2\pi R} \quad \text{ja} \quad E_t = \frac{ir}{l},$$

kusjuures  $E_t$  on elektrivälja tugevuse komponent juhtme pinna puutuja sihis ja  $r$  on juhtmelõigu takistus. Järelikult Poyntingi vektori normaalkomponent

$$S_n = E_t H_t = \frac{i^2 r}{2\pi R l}.$$

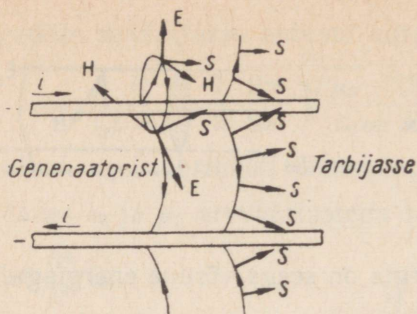
Suurus  $2\pi R l = s$  on juhtmelõigu silindripind. Võimsus, mis antakse juhtmesse ümbritsevast keskkonnast läbi juhtme pinna, osutub võrdseks

$$S_n s = i^2 r.$$

Joonisel 110 on näidatud magnet- ja elektrivälja tugevuse joonte suunad ülekandeliini juhtmete ümbruses. Elektrivälja tugevuse jooned on veidi kõverad, sest juhtmete endi aktiivtakistuse tõttu on  $\mathbf{E}$  vektoril juhtme pinna lähedal selle pinna puutuja sihiline komponent juhtme voolu suunas. Määrates Poyntingi vektori suuna välja erinevates punktides, saame joonisel kujutatud pildi. Näeme, et elektromagnetilise energia voog on suunatud dielektrikus generaatorist tarbija poole ja osaliselt suunatud juhtme sisse juhtmete aktiivtakistuse olemasolu tõttu.

On vaja märkida, et elektrivälja tugevuse joonte kõverdumine on joonisel 110 tugevasti liialdatud. Tegelikult ülekandeliini väljas on see kõverdumine tühine, sest vektori  $\mathbf{E}$  tangentsiaalkomponent on juhtme pinna lähedal normaalkomponendiga võrreldes väga väike (vt. § 39).

Homogeensete liinide uurimisel (vt. II osa) näidati, et elektrivoolu lainete ja pingelainete liikumiskiirus piki liini  $v = 1/\sqrt{LC}$ ,



JOON. 110

kus  $L$  ja  $C$  on liini induktiivsus ja mahtuvus pikkusühiku kohta. Kuna energiat kannab üle elektromagnetiline väli liini juhtmeid ümbritsevas dielektrikus, siis peab kiirus  $v$  võrduma elektromagnetilise laine liikumiskiirusega dielektrikus. Järelikult peab kehtima võrdus

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_a \epsilon_a}},$$

kus  $\epsilon_a$  ja  $\mu_a$  on dielektriku absoluutne dielektriline ja magnetiline läbitavus. Selles avaldises on  $L$  välisinduktiivsus, mis määratakse magnetvooga dielektrikus. Näiteks koaksiaalkaabli jaoks (vt. I osa)

$$L = \frac{\mu_a}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad \text{ja} \quad C = \frac{2\pi\epsilon_a}{\ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

Järelikult

$$LC = \mu_a \epsilon_a.$$

### § 85. Elektromagnetilise energia ülekanne mööda metalltorude siseõõnt

Eelmises paragrahvis nägime, et ülekandeliini juhtmed on neid ümbritsevas dielektrikus liikuva elektromagnetilise välja suunajateks. Kuid sellist suunavat osa võivad liini juhtmed täita ainult tingimusel, et elektromagnetilise laine pikkus dielektrikus ületab paljukordselt juhtmetevahelise kauguse, s. o. ainult tingimusel, et pinge ja voolu sagedus ei ole liialt suur. Vastasel juhtumil kiirgavad liini juhtmed efektiivselt elektromagnetilist välja ümbritsevasse ruumi, s. o. toimivad sarnaselt antennile.

Seega üsna kõrgetel sagedustel, mis vastavad kaasaegses raadiotehnikas kasutatavatele nn. ultralühilainetele lainepikkusega mõned sentimeetrid, muutub energiaülekanne mööda hariliku kujuga liine juba raskeks. Raskused kasvavad seejuures veelgi sellepärast, et nii suurte sagedustel tekivad juhtmete isolatsioonis tunduvad energiakaod. Juhtmete kinnitamisel isolatoritele kujuneb isolaa-

torite asukohtades suurendatud dielektrilise läbitavusega keskkond, mis muudab liini omamoodi kõrgeid sagedusi ärälõikavaks filtriiks.

Seoses kõige öelduga ülekandeliini omaduste kohta pakub väga kõrgetel sagedustel suurt huvi energia ülekanne elektromagnetilise välja abil metalltorude sees.

Kui toru seinad on valmistatud küllalt suure erijuhtivusega materjalist, siis nad ei lase läbi elektromagnetilisi laineid. Piirjuhtumil, kui toru seinad on ülijuhtivast materjalist, ei põhjusta toru seintes tekkivad elektrivoolud pingelangu ja järelikult peab elektrivälja tugevuse tangentsiaalkomponent seinte sisepinnal olema igal pool võrdne nulliga. Seega ei ole Poyntingi vektoril toru seina normaali suunalist komponenti. Elektromagnetiline väli ei tungi seintesse ja võib üle kanda energiat ainult toru telje sihis.

Elektromagnetiliste lainete piki toru levimise tingimuste detailisel analüüsil, mida teeme järgmises paragrahvis, selgub üks huvitav ja tähtis iseärasus, nimelt et piki torusid saavad levida ainult lühilained, millede lainepikkus vabas ruumis on samas suurusjärgus või väiksem toru õõne ristmõõtmetest. Seetõttu on need torud leidnud rakendust raadiotehnilistes ultralühilaineseadmetes elektromagnetilise energia ülekandmiseks elektromagnetiliste võnkumiste generaatorist kiirgavale seadisele ja said nimeks *lainejuhtmed*. Harilikult pole lainejuhtmete pikkus suur ja järelikult on seinte materjali lõplikust erijuhtivusest tingitud energiakaod seintes tühised. Seetõttu eeldame elektromagnetiliste lainete lainejuhtmetes levimise uurimisel, et seinte materjali erijuhtivus on lõpmata suur. Me ei kaldu seejuures tegelikest tingimustest oluliselt kõrvale.

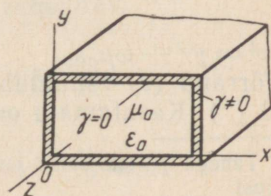
## § 86. Lainejuhtmed

Elektromagnetiliste lainete metalltorudes levimise iseärasuste selgitamiseks vaatleme lihtsaimat ja seejuures suure praktilise tähtsusega juhtumit, ristkülikulise ristlõikega lainejuhet. *OZ*-telje suunale piki toru. *OX*- ja *OY*-teljed asetame nii, nagu näidatud joonisel 111.

Asetsegu elektrivälja tugevuse jooned *OZ*-teljega perpendikulaarsetel tasanditel, s. o.  $E_z = 0$ .

Eeldades, et kõik suurused muutuvad ajas siinuseaduse järgi, kasutame sümbolimeetodit. Peale selle eeldame, et lainejuhe on

JOON. 111



OZ-telje sihis lõpmata pikk. Analoogiliselt mööda pikki homogeensid liine kulgevate voolu- ja pingelaine liikumise juhtumiga (vt. II osa) eeldame, et väljatugevuste muutus piki OZ-telge avaldub  $e^{-\gamma'z}$  kujulise funktsiooniga, mis vastab ühe kulglaine, s. o. pärlaine olemasolule.

Nendel tingimustel on elektri- ja magnetvälja tugevuste komponentide hetkväärtuste kompleksavaldistel kuju:

$$\dot{E}_x = \dot{E}_{mx} e^{j\omega t} e^{-\gamma'z}; \quad \dot{E}_y = \dot{E}_{my} e^{j\omega t} e^{-\gamma'z}; \quad \dot{E}_z = 0;$$

$$\dot{H}_x = \dot{H}_{mx} e^{j\omega t} e^{-\gamma'z}; \quad \dot{H}_y = \dot{H}_{my} e^{j\omega t} e^{-\gamma'z};$$

$$\dot{H}_z = \dot{H}_{mz} e^{j\omega t} e^{-\gamma'z},$$

kus kompleksamplituudid  $\dot{E}_{mx}$ ,  $\dot{E}_{my}$ ,  $\dot{H}_{mx}$ ,  $\dot{H}_{my}$  ja  $\dot{H}_{mz}$  on  $x$ -i ja  $y$ -i funktsioonid.

Asetades need avaldised võrranditesse (a), (b), (c), (d), (e), (f) (§ 75) ja võttes arvesse, et dielektriku puhul  $\gamma = 0$  ja  $\rho = 0$  ning et tingimuse kohaselt  $\dot{E}_z = 0$ , saame pärast taandamist ühise teguriga  $e^{j\omega t} e^{-\gamma'z}$ :

$$\frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial y} + \gamma' \dot{H}_{my} = j\omega \epsilon_a \dot{E}_{mx}; \quad (a)$$

$$-\gamma' \dot{H}_{mx} - \frac{\partial \dot{H}_{mx}}{\partial x} = j\omega \epsilon_a \dot{E}_{my}; \quad (b)$$

$$\frac{\partial \dot{H}_{my}}{\partial x} - \frac{\partial \dot{H}_{mx}}{\partial y} = 0; \quad (c)$$

$$\gamma' \dot{E}_{my} = -j\omega \mu_a \dot{H}_{mx}; \quad (d)$$

$$-\gamma' \dot{E}_{mx} = -j\omega \mu_a \dot{H}_{my}; \quad (e)$$

$$\frac{\partial \dot{E}_{my}}{\partial x} - \frac{\partial \dot{E}_{mx}}{\partial y} = -j\omega \mu_a \dot{H}_{mz}. \quad (f)$$

Avaldades  $E_{my}$  avaldisest (d) ja asetades tulemuse avaldisse (b) ning  $E_{mx}$  avaldisest (e) ja asetades tulemuse avaldisse (a), saame:

$$\dot{H}_{mx} = -\frac{\gamma'}{k^2} \frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial x}; \quad \dot{H}_{my} = -\frac{\gamma'}{k^2} \frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial y}, \quad (*)$$

kus  $k^2 = \gamma'^2 + \omega \mu_a \epsilon_a$ .

Võrrand (c) rahuldub automaatselt, kui sellesse asetada avaldised (\*). Kasutamata on veel võrrand (f). Asendades selles vör-

\* Tähega  $\gamma'$  tähistame levimistegurit erinevalt  $\gamma$ -st, mis tähistab aine erijuhtivust.

randis  $\dot{E}_{mx}$  ja  $\dot{E}_{my}$  võrranditest (e) ja (d) ja asetades seejärel  $\dot{H}_{mx}$  ja  $\dot{H}_{my}$  asemele nende avaldised (\*), saame  $\dot{H}_{mz}$  jaoks võrrandi

$$\frac{\partial^2 \dot{H}_{mz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_{mz}}{\partial y^2} + k^2 \dot{H}_{mz} = 0. \quad (**)$$

Otsime  $\dot{H}_{mz}$ -i kujul  $H_{mz} = XY$ , kus  $X$  on ainult  $x$ -i ja  $Y$  ainult  $y$ -i funktsioon. Viimane võrrand omandab kuju

$$Y \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + X \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + k^2 XY = 0.$$

Jagades saadud võrrandi  $XY$ -iga saame:

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + k^2 = 0 \quad \text{või} \quad \frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + k^2 = -\frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}.$$

Viimase võrrandi vasak pool on ainult  $x$ -i funktsioon, parem pool ainult  $y$ -i funktsioon. Järelikult rahuldatakse võrrand mis tahes  $x$ -i ja  $y$ -i puhul ainult siis, kui nii tema vasak- kui ka parempoolne osa on võrdsed mingi konstantse suurusega  $\eta^2$ . Seejuures jaguneb võrrand kaheks:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \xi^2 X = 0; \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \eta^2 Y = 0,$$

kus  $\xi^2 = k^2 - \eta^2$ .

Integreerides need võrrandid, saame:

$$X = A \cos(\xi x + \varphi); \quad Y = B \cos(\eta y + \psi),$$

$$\dot{H}_{mz} = \dot{H}_0 \cos(\xi x + \varphi) \cos(\eta y + \psi),$$

kus  $\dot{H}_0 = AB$ .

Konstandid  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\varphi$  ja  $\psi$  määratakse piiritingimustest lainetuhtme seintel. Ülijuhtivate seinte puhul on pingelang seintes võrdne nulliga ja järelikult on seintes igal pool  $E_m = 0$ .

Seetõttu on lainejuhtme sisepinna lähedase dielektriku välja piiritingimuseks sellele pinnale tangentsiaalse vektori  $\mathbf{E}$  komponendi võrdumine nulliga. Kasutades seda tingimust, saame (joon. 112):

$$\dot{E}_{my} = 0, \quad \text{kui } x = 0 \quad \text{või } x = a,$$

$$\dot{E}_{mx} = 0, \quad \text{kui } y = 0 \quad \text{või } y = b.$$

Võrranditest (d), (e) ja (\*) saame seejuures:

$$\frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial x} = 0, \quad \text{kui } x = 0 \quad \text{või } x = a,$$

$$\frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial y} = 0, \quad \text{kui } y = 0 \quad \text{või } y = b.$$

See annab:  $\varphi = 0$ ,  $\xi = \frac{m\pi}{a}$ ,  $\psi = 0$ ,  $\eta = \frac{n\pi}{b}$ , kus  $m$  ja  $n$  on täisarvud. Lõplikult saame:

$$\dot{H}_{mz} = \dot{H}_0 \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}.$$

Asetades selle avaldise võrranditesse (\*) ja kasutades võrrandeid (d) ja (e), leiame elektri- ja magnetvälja tugevuste komponentide hetkväärtuste kompleksavaldised:

$$\dot{H}_x = \frac{\gamma' m \pi}{a k^2} \dot{H}_0 \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{j\omega t - \gamma' z};$$

$$\dot{H}_y = \frac{\gamma' n \pi}{b k^2} \dot{H}_0 \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{j\omega t - \gamma' z};$$

$$\dot{H}_z = \dot{H}_0 \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{j\omega t - \gamma' z};$$

$$\dot{E}_x = \frac{j\omega\mu_a n \pi}{b k^2} \dot{H}_0 \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{j\omega t - \gamma' z};$$

$$\dot{E}_y = -\frac{j\omega\mu_a m \pi}{a k^2} \dot{H}_0 \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{j\omega t - \gamma' z};$$

$$\dot{E}_z = 0.$$

Peale selle annab võrrand (\*\*) pärast sellesse  $\dot{H}_{mz}$ -i ja tema teist järku tuletiste avaldiste asetamist:

$$\left[ -\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + k^2 \right] \dot{H}_{mz} = 0,$$

millest

$$\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 = k^2.$$

Leitud lahend näitab, et lainejuhtmes võib esineda rida laineid, kusjuures iga laine vastab täisarvude  $m$  ja  $n$  paarile. Üheaegne  $m$ -ile ja  $n$ -ile nullväärtuse andmine muudab  $E$  kõik komponendid nulliks. Järelikult saadakse lihtsaim juhtum, kui üks nendest arvudest võrdub nulliga, teine aga ühega. Olgu näiteks  $m=1$  ja  $n=0$ . Vastavalt viimasele seosele on seejuures  $k = \pi/a$  ja väljatugevuste komponendid omandavad kuju:

$$\dot{H}_x = \frac{\gamma' a}{\pi} \dot{H}_0 \sin \frac{\pi x}{a} e^{j\omega t - \gamma' z}; \quad \dot{H}_y = 0;$$

$$\dot{H}_z = \dot{H}_0 \cos \frac{\pi x}{a} e^{j\omega t - \gamma' z}; \quad \dot{E}_x = 0;$$

$$\dot{E}_y = -j \frac{\omega\mu_a a}{\pi} \dot{H}_0 \sin \frac{\pi x}{a} e^{j\omega t - \gamma' z}; \quad \dot{E}_z = 0.$$

Konstandil  $\gamma'$  on sama tähendus nagu *levimisteguril* homogeensete liinide teoorias (vt. II osa). Üldjuhtumil saab ta esitada kujul:  $\gamma' = \beta + ja$ , milles  $\beta$  iseloomustab laine sumbumist piki OZ-telge ja teda võib nimetada *sumbumisteguriks*;  $a$  iseloomustab faasi muutumist piki OZ-telge ja teda võib nimetada *faasiteguriks*.

Seostest  $k^2 = \gamma'^2 + \omega^2 \mu_a \epsilon_a$  ja

$$\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 = k^2$$

saame ristkülikulise ülijuhtivate seintega lainejuhtme kohta:

$$\gamma'^2 = k^2 - \omega^2 \mu_a \epsilon_a = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2 \mu_a \epsilon_a. \quad (***)$$

Kui

$$\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 > \omega^2 \mu_a \epsilon_a,$$

saame, et  $\gamma'^2 > 0$  ja  $\gamma'$  on reaalne, s. o.  $\gamma' = \beta$  ja  $a = 0$ . Sel juhul saame *sumbuva laine*.

Kui

$$\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 < \omega^2 \mu_a \epsilon_a,$$

saame, et  $\gamma'^2 < 0$  ja  $\gamma'$  on imaginaarne, s. o.  $\gamma' = ja$  ja  $\beta = 0$ . Sel juhul saame *laine*, mis levib piki lainejuhet *sumbumiseta*.

Me tulime huvitavale järeldusele, et antud mõõtmetega  $a$  ja  $b$  lainejuhtme jaoks on olemas *kriitiline sagedus*, mis määratakse tingimusest  $\gamma' = 0$  avaldisega:

$$\omega_0 = \frac{\pi}{\sqrt{\mu_a \epsilon_a}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}.$$

Sagedustel alla  $\omega_0$  on lainete sumbumiseta levimine piki lainejuhet *võimatu*. Sagedustel üle  $\omega_0$  levivad lained sumbumiseta.

Tähistades, nagu varemgi,  $\lambda$ -ga elektromagnetilise laine pikkuse laine levimisel vabas ruumis (väljaspool lainejuhtme seinu), saame (vt. § 76):

$$\lambda = vT = \frac{1}{\sqrt{\mu_a \epsilon_a}} \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu_a \epsilon_a}} \frac{1}{\omega}.$$

Järelikult vastab vabas ruumis kriitilisele sagedusele  $\omega_0$  *kriitiline lainepikkus*  $\lambda_0$ :

$$\lambda_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu_a \epsilon_a} \omega_0} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}.$$

Suurused  $\omega_0$  ja  $\lambda_0$  sõltuvad arvudest  $m$  ja  $n$ , mis määravad laine iseloomu. Kui  $a > b$ , siis saadakse kõige madalam kriitiline sagedus  $m = 1$  ja  $n = 0$  juures. See osutub võrdseks

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_a \epsilon_a}} \frac{\pi}{a}$$

ja järelikult omab suurim kriitiline lainepikkus väärtust  $\lambda_0 = 2a$ . Kui  $a = 10$  cm, siis  $\lambda_0 = 20$  cm ja

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{v}{\lambda_0} = \frac{3 \cdot 10^{10}}{20} = 1,5 \cdot 10^9 \text{ Hz.}$$

Sellest näitest on näha, et lainejuhe on võimeline läbi laskma ainult väga kõrge sagedusega elektromagnetilisi laineid.

Kuna  $\omega > \omega_0$  juures on  $\gamma' = j\alpha$  ja  $e^{j\omega t - \gamma' z} = e^{j(\omega t - \alpha z)}$ , siis  $H_x, H_y, H_z; E_x$  ja  $E_y$  tõeliste hetkväärtuste avaldiste saamiseks on vaja nende kompleksavaldistes kordaja  $e^{j\omega t - \gamma' z}$  asendada teguriga  $\sin(\omega t - \alpha z)$ . Suurus  $\omega/\alpha = v'$  on laine faasikiirus.

Lainepikkus  $\lambda$  lainejuhtmes saadakse seosest  $\alpha\lambda = 2\pi$ . Asendades seoses (\*\*\*)  $\gamma'^2$  suurusega  $(-\alpha^2)$  ja  $\omega^2 \mu_a \epsilon_a$  suurusega  $(2\pi/\lambda)^2$ , leiame:

$$\alpha^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2.$$

Siis saame:

$$\frac{2}{\Lambda} = \sqrt{\left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{m}{a}\right)^2 - \left(\frac{n}{b}\right)^2}, \quad \text{või} \quad \frac{1}{\Lambda} = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_0^2}}.$$

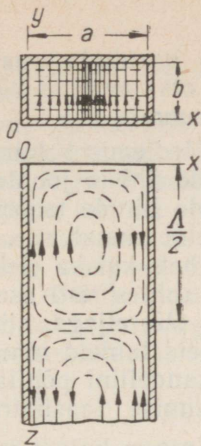
Siit on näha, et lainepikkus  $\Lambda$  lainejuhtmes on suurem kui lainepikkus  $\lambda$  vabas ruumis selsamal sagedusel. See erinevus on seda suurem, mida enam  $\lambda$  läheneb kriitilisele lainepikkusele  $\lambda_0$  ja  $\lambda = \lambda_0$  juures saame  $\Lambda = \infty$ .

Faasikiiruse võib esitada kujul

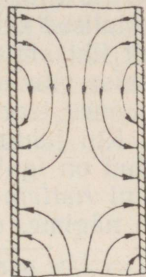
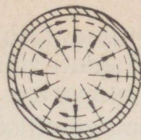
$$v' = \frac{\omega}{\alpha} = \frac{\omega}{2\pi} \Lambda = \frac{1}{\sqrt{\mu_a \epsilon_a}} \frac{\Lambda}{\lambda} = v \frac{\Lambda}{\lambda}.$$

Järelikult on elektromagnetiliste lainete faasikiirus  $v'$  lainejuhtmes suurem elektromagnetiliste lainete liikumiskiirusest vabas ruumis. See muidugi ei tähenda, et elektromagnetiline väli liiguks kiirusega, mis on suurem kui  $v$ , kuna  $v'$  on ju kiirus, millega faasi-jaotus liigub püsirežiimis piki  $OZ$ -telge.

Ülalüritud juhtumil omab ainult magnetvälja tugevus piki lainejuhtme  $OZ$ -telge nullist erinevat komponenti. Sellist tüüpi lained said vastavalt «magnetiliste lainete» nimetuse. Nende tähiseks on võetud täht  $H$ . Kuna elektrivälja tugevuse jooned asuvad üleni lainejuhtme ristlõigetes, siis nimetatakse seda tüüpi laineid ka «elektrilisteks ristlaineteks» ja tähistatakse tähtedega  $TE$ . Ristkülikuliste lainejuhtmete jaoks tuuakse sisse tähis  $H_{mn}$  (või vas-



JOON. 112



JOON. 113

tavalt  $TE_{mn}$ ), kusjuures indeksid vastavad ülaltähendatud arvudele  $m$  ja  $n$ . Joonisel 112 on kujutatud riskülikulise lainejuhtme rist- ja pikilõikes väljapilt lainele  $H_{10}$  (või  $TE_{10}$ ). Pidevate joontega on kujutatud elektrivälja tugevuse jooned ja kriipsjoontega magnetvälja tugevuse jooned. Arvude  $m$  ja  $n$  suuremate väärtuste juures tekib keerukam väljapilt.

Võivad esineda samuti nn. «elektrilised lained», mida tähistatakse tähega  $E$  koos vastavate indeksitega. Seda tüüpi lainetele on iseloomulik, et nendes omab piki lainejuhtme telge nullist erinevat komponenti ainult elektrivälja tugevus. Neid laineid nimetatakse samuti «magnetilisteks ristlaineteks» ja tähistatakse tähtedega  $TM$ .

Joonisel 113 on kujutatud magnetvälja tugevuse jooned (kriipsjooned) ja elektrivälja tugevuse jooned (pidevad jooned) «elektrilise laine» lihtsaima juhtumi kohta silindrilises lainejuhtmes. See juhtum on huvitav selle poolest, et siin omab välja kuju palju ühist välja kujuga elektromagnetiliste lainete levimisel piki koaksiaalkaablit. Erinevalt koaksiaalkaablist puudub lainejuhtmes sisemine metalljuhe ja selle juhtivusvoolude osa täidab lainejuhtmes nihkevool.

Üht või teist tüüpi lainete tekkimine homogeenses lainejuhtmes sõltub lõppseadiste omadustest, näiteks laineid genereerivast seadisest lainejuhtme alguses.

Soovitud tüüpi lainete ergutamiseks võib viia lainejuhtmesse metallist varda, paigutades ta telje sellesse kohta, kus peab tekkima soovitava laine kõige tugevam elektriväli, ja suunates varda telje selle välja väljatugevusjoonte sihis. Kui rakendada varda ja lainejuhtme vahele kõrgsageduslik pinge kas või koaksiaalkaabli kaudu, saab lainejuhtmes ergutada võnkumisi. Samuti võib viia lainejuhtmesse väikese traatsilmuse. Silmus tuleb asetada magnetvälja tugevuse oodatava maksimumi kohta nii, et silmuse tasapind oleks risti nõutava välja magnetjoonte suunaga.

Lainejuhtme tarbijapoolses otsas saab kasutada analoogilisi seadiseid. Samuti võime jätta tarbijapoolse otsa avatuks või varustada selle ruuporiga lainete kiirgamiseks ruumi.

Elektromagnetiliste lainete iseloomu võrdlemisel lainejuhtme ja homogeense liini puhul avalduvad nende ühiste joonte kõrval ka nende olulised erinevused. Homogeensete liinide teoorias vaadeldi ainult lihtsaimat lainetüüpi, mida iseloomustab see, et juhtmete takistuse puudumisel asuvad nii magnet- kui ka elektrivälja tugevuse jooned tervikuna juhtmete suuna suhtes risti asetsevatel tasanditel. Kui juhtmete suund on rööpne  $OZ$ -teljega, siis nende lainete puhul on igal pool  $H_z = E_z = 0$ . Neid laineid nimetatakse ülekandeliini *ristlaineteks* ehk samuti ülekandeliini põhilaineteks. Nagu me nägime, on nende lainete levimise faasikiirus  $v = 1/\sqrt{LC} = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$  sõltumata voolu ja pinge kujust või sagedusest võrdne elektromagnetilise laine levimiskiirusega vabas ruumis (s. o. juhtmete puudumisel). Vastavalt võrdubki perioodilisel protsessil lainepikkus  $\lambda = vT$  elektromagnetilise laine pikkusega vabas ruumis.

Sellist tüüpi lained ei saa lainejuhtmetes esineda. Tõepoolest, kui lainejuhtmes igal pool  $E_z = 0$ , s. o. kui elektrivälja tugevuse jooned asuvad ainult ristsanditel, siis on ka nihkevoolu jooned nendel tasanditel. Nihkevoolu jooned võivad olla iseendasse suletud või lõppeda lainejuhtme seintel, jätkudes seintes juhtivusvooluna. On selge, et selliseid nihkevoolujooni peavad haarama magnetvälja tugevuse iseendasse suletud jooned ning järelikult peab vektoril  $\mathbf{H}$  olema nullist erinev komponent piki  $OZ$ -telge ( $H_z \neq 0$ ).

Kui lainejuhtmes igal pool  $H_z = 0$ , s. o. magnetvälja tugevuse jooned asuvad tervikuna ristsanditel, siis peab tingimata esinema pikisuunaline nihkevool, mida need jooned haaravad. Järelikult  $E_z \neq 0$ . Seega lained, mis on ülekandeliinides põhilaineteks, ei saa esineda lainejuhtmes. Lainejuhtmes saavad levida ainult sellised lained, milledes kas  $\mathbf{H}$  vektor või  $\mathbf{E}$  vektor omavad piki-komponente. Seejuures on väga oluline, et nende lainete levimine piki lainejuhet on võimalik ainult siis, kui sagedus  $f$  on kõrgem kriitilisest sagedusest  $f_0$ . Kriitilisel lainepikkusel  $\lambda_0 = v/f_0$  on lainejuhtme ristlõike lineaarmõõtmetega võrdne suurusjärg.

Huvitav on märkida, et ka ülekandeliinis võivad tekkida seda tüüpi lained, kui lainepikkus  $\lambda$  saab võrreldavaks liini juhtmete vahekaugusega. Seejuures kujutab liin endast antenni. Elektromagnetiline väli kiirgub liinist üsna intensiivselt ümbritsevasse ruumi, millele kaasneb lainete kiire sumbumine piki liini: Koaksiaalkaabli-kujulise ülekandeliini korral need lained ei kiirgu, sest piirkond, milles lained levivad, on kaabli välise torukujulise juhtmega ümbritsevast ruumist varjestatud. Siiski kasutatakse kaablit harilikult madalamatel sagedustel, sest ta juhib ülalnimet-

tatud ristlaineid. Seevastu ülekritilistel sagedustel võib kasutada lainejuhet.

Lainete jaoks, mis levivad piki lainejuhet, võib samuti sisse viia lainetakistuse mõiste. Energiaülekanne piki lainejuhet on määratud  $\mathbf{E}$  ja  $\mathbf{H}$  vektorite vastastikku perpendikulaarsete komponentidega, mis on risti lainejuhtme teljega. Ülalvaadeldud ristkülikulise lainejuhtme näite puhul olid nendeks komponendid  $E_x$  ja  $H_y$  ning komponendid  $E_y$  ja  $H_x$ . Poyntingi vektor osutub positiivseks ( $OZ$ -telje positiivses suunas) samamargiliste  $E_x$  ja  $H_y$  korrutamisel ja erimargiliste  $E_y$  ja  $H_x$  korrutamisel. Seetõttu tuleb lainetakistus määrata seostest

$$z = \frac{\dot{E}_x}{\dot{H}_y} \quad \text{või} \quad z = -\frac{\dot{E}_y}{\dot{H}_x}.$$

Ülaltoodud võrranditest saame  $H$ -tüüpi ( $TE$ -tüüpi) laine kohta:

$$z = \frac{j\omega\mu_a}{\gamma'} = \frac{\omega\mu_a}{\alpha} = v\mu_a \frac{\Lambda}{\lambda} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \frac{\Lambda}{\lambda}.$$

Kuid  $\sqrt{\mu_a/\varepsilon_a} = z'$  on lainetakistus juhtumil, mille puhul lainejuhet täitev keskkond ei ole piiratud lainejuhtme seintega. Peale selle

$$\frac{\lambda}{\Lambda} = \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{f_0}{f}\right)^2}.$$

Järelikult

$$z = \frac{z'}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_0}{f}\right)^2}}.$$

Seega ei ole lainetakistus  $z$  määratud nagu  $z'$  ainult keskkonna parameetritega, vaid sõltub sagedusest  $f$  ja laine iseloomust, s. o. arvudest  $m$  ja  $n$ , milledest sõltub kriitiline sagedus  $f_0$ . Lainetakistus sõltub samuti laine tüübist.  $E$ -tüüpi ( $TM$ -tüüpi) laine jaoks saame avaldise:

$$z = z' \sqrt{1 - \left(\frac{f_0}{f}\right)^2}.$$

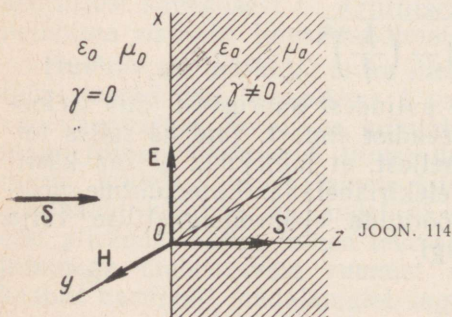
Niivõrd keerukas  $z$  sõltuvus paljudest suurustest, mis iseloomustavad mitte ainult ülekandeseadist ennast, vaid ka selles toimuvaid protsesse, on tingitud sellest, et lainejuhet ei saa käsitleda teatavate parameetritega elektriabelana. Lainejuhtme protsesside uurimiseks on vaja pöörduda elektromagnetilise välja võrrandite poole, nagu seda tehtigi.

ELEKTROMAGNETILINE VAHELDUVVÄLI JUHTIVAS  
KESKKONNAS§ 87. Tasapinnaline elektromagnetiline laine juhtivas  
keskkonnas

Vaatleme olukorda, kui dielektrikus leviv tasapinnaline elektromagnetiline laine satub juhtivat keskkonda ühest küljest piiravale tasandile normaali suunas (joon. 114). Oletame, et juhtiv keskkond laiub kõikides ülejäänud suundades lõpmatuseni. Langev laine osalt peegeldub juhtiva keskkonna pinnalt, osalt tungib sellesse keskkonda ja neeldub selles. Vaatleme lainet, mis läbis eralduspinna ja levib juhtivas keskkonnas. Suuname  $OZ$ -telje juhtiva keskkonna sügavusse risti eralduspinnaga.  $XOY$ -tasand ühtigu selle pinnaga.

Juhtiva keskkonna puhul võib praktiliselt alati jätta nihkevoolud arvestamata, sest nad on juhtivusvooludega võrreldes tühised. Sel puhul omandavad Maxwelli võrrandid kuju:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \delta = \gamma \mathbf{E}; \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}.$$



Oletame, et väljatugevuste suurused ei oma ajas muutumatuid komponente, s. o. alaliskomponente.

Suunates  $OX$ -telje mööda vektorit  $\mathbf{E}$  ja arvestades, et tasapinnalise laine puhul  $\mathbf{E}$  ja  $\mathbf{H}$  ei sõltu  $x$ -st ja  $y$ -st, saame võrrandist (d) (vt. § 75):

$$0 = -\mu_a \frac{\partial H_x}{\partial t}, \quad \text{s. o. } H_x = \text{const} = 0.$$

Võrranditest (a) ja (e) leiame:

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = \gamma E_x; \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu_a \frac{\partial H_y}{\partial t}.$$

Oletame, et elektrivälja ja magnetvälja tugevused muutuvad ajas järgmise seaduse järgi:

$$E_x = E_m \sin(\omega t + \psi_E); \quad H_y = H_m \sin(\omega t + \psi_H).$$

Avaldades väljatugevuste hetkväärtused sümbolkujul, saame:

$$\dot{E}_x = E_m e^{j(\omega t + \psi_E)} = E_m e^{j\psi_E} e^{j\omega t} = \dot{E}_m e^{j\omega t};$$

$$\dot{H}_y = H_m e^{j(\omega t + \psi_H)} = H_m e^{j\psi_H} e^{j\omega t} = \dot{H}_m e^{j\omega t}.$$

Amplituudid  $E_m$  ja  $H_m$  ning algfaasid  $\psi_E$  ja  $\psi_H$  ning järelikult ka kompleksamplituudid  $\dot{E}_m$  ja  $\dot{H}_m$  on ainult  $z$  koordinaadi funktsioonid. Asetades suuruste  $E_x$  ja  $H_y$  sümbolkujul kirjutatud avaldised suurusi  $E_x$  ja  $H_y$  siduvatesse võrranditesse, saame pärast ühise teguriga  $e^{j\omega t}$  taandamist need võrrandid kujul:

$$-\frac{d\dot{H}_m}{dz} = \gamma \dot{E}_m; \quad \frac{d\dot{E}_m}{dz} = -j\omega\mu_a \dot{H}_m. \quad (*)$$

Diferentseerides esimest võrrandit  $z$  järgi ja kasutades teist võrrandit, leiame:

$$\frac{d^2\dot{H}_m}{dz^2} = j\omega\mu_a\gamma \dot{H}_m.$$

Selle lineaarse konstantse kordajaga võrrandi lahend on

$$\dot{H}_m = A_1 e^{-az} + A_2 e^{+az},$$

kus

$$a = \sqrt{j\omega\mu_a\gamma}.$$

Kuna

$$\sqrt{j} = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + j),$$

mida on kerge kontrollida selle võrduse ruutu tõstmisega, siis, kasutades tähistust

$$\sqrt{\frac{\omega\mu_a\gamma}{2}} = k,$$

saame:

$$\alpha = \sqrt{j\omega\mu_a\gamma} = (1+j) \sqrt{\frac{\omega\mu_a\gamma}{2}} = (1+j)k.$$

$\dot{H}_m$  avaldise teine liige suureneb  $A_2 \neq 0$  puhul  $z$  kasvamisel lõpmatuseni, sest  $\alpha$  reaalosa on positiivne. Väljatugevus ei saa kasvada lõpmatuseni ja järelikult peame võtma  $A_2 = 0$ . Seega

$$\dot{H}_m = A_1 e^{-\alpha z}.$$

Konstant  $A_1$  saadakse tingimusest, et  $z = 0$  puhul, seega keskkonna pinnal, on suurusel  $\dot{H}_m$  etteantud väärtus  $\dot{H}_{me} = H_{me} e^{j\psi_{He}}$ . Märgime kõik keskkonna pinna kohta käivad suurused indeksiga  $e$ .

Järelikult  $A_1 = \dot{H}_{me}$  ja lahendil on kuju

$$\dot{H}_m = \dot{H}_{me} e^{-kz} e^{-jkz}$$

või

$$H_y = H_{me} e^{-kz} \sin(\omega t + \psi_{He} - kz).$$

Elektrivälja tugevuse avaldise leiame esimesest võrrandist (\*). Saame:

$$\dot{E}_m = \frac{1}{\gamma} (1+j) k \dot{H}_{me} e^{-kz} e^{-jkz}$$

või

$$E_x = \sqrt{\frac{\omega\mu_a}{\gamma}} H_{me} e^{-kz} \sin\left(\omega t + \psi_{He} - kz + \frac{\pi}{4}\right),$$

sest

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (1+j) = e^{j\frac{\pi}{4}} \text{ ja } \frac{1}{\gamma} (1+j)k = \sqrt{\frac{\omega\mu_a}{\gamma}} e^{j\frac{\pi}{4}}.$$

Voolutihedus muutub sama seaduse järgi kui elektrivälja tugevusi, sest  $\delta = \gamma E$ .

Juhtiva keskkonna puhul osutub lainetakistus kompleksseks ja võrdseks

$$Z = \frac{\dot{E}_m}{\dot{H}_m} = \frac{(1+j)k}{\gamma} = (1+j) \sqrt{\frac{\omega\mu_a}{2\gamma}}.$$

Selle avaldise abil saab leida seosed dielektrikust juhtiva keskkonna pinnale langeva ( $\dot{E}_{\varphi 1}$ ,  $\dot{H}_{\varphi 1}$ ), keskkonna pinnalt peegelduva ( $\dot{E}_{\psi 1}$ ,  $\dot{H}_{\psi 1}$ ) ja keskkonda murdunud ( $\dot{E}_{\varphi 2}$ ,  $\dot{H}_{\varphi 2}$ ), s. o. juhtivasse keskkonda jõudnud lainete väljatugevuste vahel. Selleks otstarbeks saab kasutada valemeid, mis toodi kursuse teises osas perioo-

diliste lainete levimise uurimisel homogeense liini puhul, mille lõpp on suletud takistusega  $Z$ . Eralduspinnal

$$\dot{E}_{\varphi 2} = \frac{2Z}{Z + z_1} \dot{E}_{\varphi 1}; \quad \dot{E}_{\psi 1} = \frac{Z - z_1}{Z + z_1} \dot{E}_{\varphi 1};$$

$$\dot{H}_{\varphi 2} = \frac{2z_1}{z_1 + Z} \dot{H}_{\varphi 1}; \quad \dot{H}_{\psi 1} = \frac{z_1 - Z}{z_1 + Z} \dot{H}_{\varphi 1},$$

kus  $z_1 = \sqrt{\mu_{a1}/\epsilon_{a1}}$  on dielektriku lainetakistus langevale või peegeldunud lainele, kusjuures  $\mu_{a1}$  ja  $\epsilon_{a1}$  on dielektriku absoluutne magnetiline ja dielektriline läbitavus.

Piirjuhtumil, kui juhtiva keskkonna erijuhtivus on lõpmata suur, saame  $Z = 0$ ,

$$\dot{E}_{\psi 1} = -\dot{E}_{\varphi 1} \quad \text{ja} \quad \dot{H}_{\psi 1} = \dot{H}_{\varphi 1}.$$

Järelikult eralduspinnal

$$\dot{E}_1 = \dot{E}_{\varphi 1} + \dot{E}_{\psi 1} = 0 \quad \text{ja} \quad \dot{H}_1 = 2\dot{H}_{\varphi 1},$$

s. o. ülijuhtiva keskkonna pinnalt peegeldub laine täielikult. Seejuures langeva ja peegeldunud lainete interferentsi tulemusena tekivad dielektrikus seisulained. See juhtum on analoogiline homogeense ülekandeliini lühiserežiimile.

## § 88. Lainepikkus ja laine sumbumine

Elektri- ja magnetvälja tugevuste jaoks saadud avaldised näitavad eelkõige seda, et tasapinnalise laine korral vähenevad väljatugevuste amplituudid olenevalt laine sissetungimisest juhtiva keskkonna sügavusse eksponentsiaalselt. Lisaks muutub võnkumise algfaas võrdeliselt  $z$ -ga, kusjuures vastavalt laine sissetungimisele keskkonna sügavusse võnkumised hilinevad faasilt üha enam keskkonna pinnal oleva võnkumise suhtes. Keskkonna kõigis punktides, seejuures ka keskkonna pinnal, on elektrivälja tugevus faasilt magnetvälja tugevusest ees nurga  $\pi/4$  võrra.

*Lainepikkus*  $\lambda$ , s. o. vahemaa, mille ulatuses faas muutub  $2\pi$  võrra, määratakse tingimusest

$$\sqrt{\frac{\omega\mu_a\gamma}{2}} \lambda = 2\pi.$$

Sellest tingimusest leiame:

$$\lambda = 2\pi \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_a\gamma}} = 2\sqrt{\pi} \frac{1}{\sqrt{\mu_a\gamma}},$$

sest  $\omega = 2\pi f$ , kus  $f$  on võnkesagedus. Keskkonna pinnast kaugusel  $z = \lambda$  esinevate väljatugevuste amplituudväärtuste ja keskkonna pinnal esinevate väljatugevuste amplituudväärtuste suhe on võrdne  $e^{-k\lambda} = e^{-2\pi} = 0,00185$ , s. o. praktiliselt sellel kaugusel sumbub laine täielikult.

Alljärgnevas tabelis on toodud lainepikkuste väärtused võnkesagedusel  $f = 50$  Hz ja võnkesagedusel  $f = 500\,000$  Hz vase puhul, ferromagnetilise aine puhul (kui lugeda  $\mu_a = \text{const}$ ), merevees ja kuivas pinnases. Näeme, et tööstussagedusel  $f = 50$  Hz tungib elektromagnetiline laine vaske mõne sentimeetri sügavusele, ferromagnetilisse ainesse aga ainult mõne millimeetri ulatuses. Raadiosagedustel mõõdetakse sissetungimise sügavust vases kümendikmillimeetritega, ferromagnetilises aines aga sajandikmillimeetritega. Kõrgsagedustel on laine sissetungimise sügavus merevees ja isegi kuivas pinnases tühine.

| $f$        | Vask<br>$\gamma = 5,8 \cdot 10^7$ S/m<br>$\mu_a = \mu_0$ | Ferromagnetiline aine<br>$\gamma \approx 10^7$ S/m<br>$\mu_a \approx 1000 \mu_0$ | Merevesi<br>$\gamma \approx 1$ S/m<br>$\mu_a = \mu_0$ | Kuiv pinnas<br>$\gamma \approx 10^{-2}$ S/m<br>$\mu_a = \mu_0$ |
|------------|--|--|---|--|
| 50 Hz      | 5,9 cm   | 0,45 cm  | 450 m   | 4500 m   |
| 500 000 Hz | 0,059 cm   | $0,45 \cdot 10^{-2}$ cm  | 4,5 m   | 45 m   |

Poyntingi vektori väärtus on

$$S = E_x H_y = \sqrt{\frac{\omega \mu_a}{\gamma}} H_{me}^2 e^{-2kz} \sin(\omega t + \psi_{He} - kz) \times \sin\left(\omega t + \psi_{He} - kz + \frac{\pi}{4}\right).$$

Poyntingi vektori keskvärtus  $S_k$  võnkeperioodi ulatuses on

$$S_k = \frac{1}{T} \int_0^T S dt = \sqrt{\frac{\omega \mu_a}{\gamma}} \frac{H_{me}^2}{2} e^{-2\sqrt{\frac{\omega \mu_a \gamma}{2}} z} \cos \frac{\pi}{4}.$$

Seega kaugusele  $z = \lambda/2$  pinnast tungib ainult  $e^{-2\pi} \cdot 100\% = 0,185\%$  juhtivas keskkonnas neelduvast energiast. Seepärast võib praktiliselt lugeda, et laine sumbub juba kaugusel, mis on 2...3 korda väiksem tabelis toodust.

## § 89. Pinnanähtus

Vahelduv elektrivool jaotub juhtmete ristlõike ulatuses ebaühtlaselt, kusjuures voolutihedus on suurim juhtme pinnal ja väheneb pinnast eemaldumisel juhtme sügavusse. Seda nähtust nimetatakse *pinnanähtuseks*.

Vahelduv magnetvoog tekitab lõpliku juhtivusega keha sees *pöörivoolusid*, mis nõrgendavad magnetvoogu juhtiva keha sees. Seda nähtust nimetatakse mõnikord pöörivoolude lahtimagnetivaks toimeks. Oma olemuselt on ka sellel puhul tegemist pinnanähtusega.

Pinnanähtust saab seletada, vaadeldes elektromagnetilise välja sissetungimist juhtmesse juhett ümbritsevast ruumist. Paragrahvis 84 näidati, et energiakadu juhtme soojendamiseks vooluga tuleb vaadelda ümbritsevast ruumist läbi juhtme pinna juhtmesse antava elektromagnetilise energia neeldumisenähtuse juhtmes. Eelmises paragrahvis veendusime, et elektromagnetiline vahelduvlaine sumbub vastavalt tungimisele juhtivasse keskkonda. Seepärast ongi täiesti loomulik, et voolutiheduse ning elektri- ja magnetvälja tugevuste amplituudidel on vahelduvvoolu ja vahelduvvoo puhul suurim väärtus juhtivast materjalist kehade pinnal.

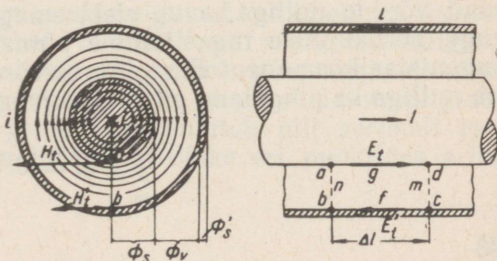
## § 90. Juhtmete aktiivtakistus ja siseinduktiivtakistus

Vooluringi üldist induktiivsust  $L$  saab lihtsal viisil jagada sise- ja välisinduktiivsuseks ainult siis, kui magnetilise induktsiooni jooned asuvad kas täielikult vooluringi juhtmete sees, moodustades sisemagnetvoo  $\Phi_s$ , või täielikult väljaspool juhtmeid, moodustades välise magnetvoo  $\Phi_v$ . Seejuures ühtivad juhtmete ristlõigete piirjooned magnetilise induktsiooni joontega. Need tingimused on täpselt täidetud ainult sirge koaksiaalkaabli (joon. 115) puhul, kusjuures pärijuhtmeks on ringristlõikega juhe ja tagasijuhtmeks temaga koaksiaalne torujuhe, mille ristlõige on piiratud kahe kontsentrilise ringjoonega.

Võttes elektrivälja tugevuse joonintegraali mööda kontuuri  $agdmcfbna$ , saame:

$$\oint \mathbf{E} \, d\mathbf{l} = \int_{agd} \mathbf{E} \, d\mathbf{l} + \int_{dmc} \mathbf{E} \, d\mathbf{l} + \int_{cfb} \mathbf{E} \, d\mathbf{l} + \int_{bna} \mathbf{E} \, d\mathbf{l} = - \frac{d\Phi_v}{dt}.$$

JOON. 115



$$\int_{anb} \mathbf{E} \, dl - \int_{dmc} \mathbf{E} \, dl = u_{anb} - u_{dmc},$$

mis, võrdudes pingete vahega vooluringi juhtmete vahel mööda teekondi  $anb$  ja  $dmc$ , kujutab endast pingelangu liiniosal pikkusega  $\Delta l$ . Liiniosa  $\Delta l$  võtame nii väikese, et sellel pikkusel saab voolu  $i$  lugeda ühesuguseks, s. o. et võib jätta arvestamata nihkevoolud juhtmete vahel. Sel juhtumil saab vaadeldavat pingelangu esitada kujul:

$$u_{anb} - u_{dmc} = ir + L \frac{di}{dt},$$

kus  $r$  ja  $L$  on vaadeldava juhtme paari  $\Delta l$  pikkuse osa takistus ja induktiivsus.

Kasutades suuruse  $\oint \mathbf{E} \, dl$  ülalkirjutatud avaldist, saame:

$$\begin{aligned} \int_{agd} \mathbf{E} \, dl + \int_{cfb} \mathbf{E} \, dl &= \int_{anb} \mathbf{E} \, dl - \int_{dmc} \mathbf{E} \, dl - \frac{d\Phi_v}{dt} = \\ &= ir + L \frac{di}{dt} - \frac{d\Phi_v}{dt}. \end{aligned}$$

Pärast asendusi

$$\frac{d\Phi_v}{dt} = L_v \frac{di}{dt} \quad \text{ja} \quad L = L_v + L_s$$

saame lõpuks:

$$\int_{agd} \mathbf{E} \, dl + \int_{cfb} \mathbf{E} \, dl = ir + L_s \frac{di}{dt}.$$

Seda avaldist võib vaadelda seosena, mis määrab suurused  $r$  ja  $L_s$ .

Vaatluse lihtsustamiseks oletame esialgu, et torukujuline tagasijuhe on ülijuhtivast materjalist, s. o. materjalil on lõpmata suur erijuhtivus. Seega torujuhtme aktiivtakistus võrdub nulliga. Nulliga võrdub ka torujuhtme siseinduktiivsus, sest vastavalt 88. paragrahvis öeldule on elektromagnetilise laine pikkus metallis  $\gamma = \infty$  puhul võrdne nulliga, s. o. elektromagnetiline väli juhtmesse ei tungi. Torukujulise tagasijuhtme pinnal on elektrivälja tugevuse tangentsiaalkomponent  $E_t$  seejuures võrdne nulliga. Vastavalt võrdub nulliga ka pingelang piki tagasijuhet, s. o.

$$\int_{cfb} \mathbf{E} \, dl = 0.$$

Suurus  $E_t$  on seesmise juhtme pinnal piki juhtmelõiku  $\Delta l$  konstantne, sest vool  $i$  ei muutu piki seda lõiku. Järelikult:

$$\int_{agd} \mathbf{E} dl = E_t \Delta l.$$

Siinusvoolu puhul, mille nurksagedus on  $\omega$ , võime kirjutada:

$$\dot{E}_{tm} \Delta l = r \dot{I}_m + j\omega L_s \dot{I}_m = (r + jx_s) \dot{I}_m.$$

Kuna vastavalt koguvoolu seadusele  $\dot{I}_m = \dot{H}_{tm} u$ , kus pärijuhtme ristlõike ümbermõõt  $u = 2\pi r$  ning  $\dot{H}_{tm}$  on magnetvälja tugevus juhtme pinnal, siis

$$Z_s = r + jx_s = \frac{\Delta l}{u} \frac{\dot{E}_{tm}}{\dot{H}_{tm}}.$$

Seega pärijuhtme  $Z_s$  arvutamiseks on antud juhtumil küllaldane leida juhtme pinnal elektri- ja magnetvälja tugevuste juhtme pinna suhtes puutujasuunaliste komponentide kompleksamplituudid.

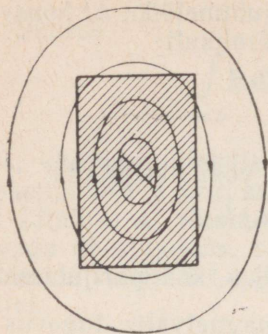
Kui torukujulise tagasijuhtme materjali erijuhtivus, samuti nagu pärijuhtme materjali omagi, oleks lõpliku väärtusega, siis oleks pingelang piki teekonda  $cfb$  samuti nullist erinev. Sel puhul

$$\int_{cfb} \mathbf{E} dl = \dot{E}'_t \Delta l = r' i + L'_s \frac{di}{dt},$$

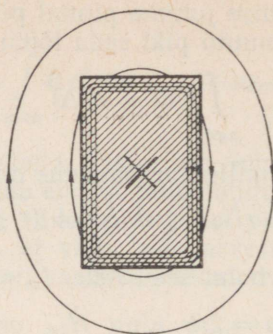
kus  $r'$  ja  $L'_s$  on tagasijuhtme aktiiv- ja siseinduktiivtakistus ning  $\dot{E}'_t$  — vektori  $\mathbf{E}$  puutujasuunaline komponent tagasijuhtme sisepinnal. Seejuures tagasijuhtme vool  $i = H'_t u'$ , kus  $H'_t$  on vektori  $\mathbf{H}$  tangentsiaalkomponent tagasijuhtme sisepinnal ning  $u'$  on tagasijuhtme ristlõiget piirava siseringjoone pikkus. Siinusprotsessi puhul saame:

$$r' + j\omega L'_s = \frac{\Delta l E'_t}{u' H'_t}.$$

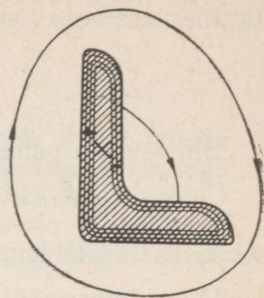
Kui juhtme ristlõige on keeruka kujuga, näiteks joonisel 116 kujutatud juhtumil, ei ole võimalik nii selgelt jagada magnetvoogu sisemiseks ja väliseks. Joonisel 116 on kujutatud väljapilt alalisvoolu puhul mitteferromagnetilisest materjalist ristkülikulise ristlõikega juhtmele. Nagu nähtub sellelt pildilt, on peale magnetilise induktsiooni niisuguste joonte, mis sulguvad kas täielikult seespool või täielikult väljaspool juhet, veel selliseid jooni, mis kulgevad osaliselt juhtme sees, osaliselt väljaspool juhet. Vahelduvvoolu puhul läheb väljapilt veelgi keerukamaks, sest vahelduvvool jaotub ristlõikes ebaühtlaselt ja peale selle muutub pilt perioodi jooksul, sest voolutihedusel on juhtme ristlõike eri punktides erinev faas.



JOON. 116



JOON. 117



Selle tõttu ei saagi üldjuhtumil anda nii lihtsat ja seejuures täpset aktiiv- ja siseinduktiivtakistuse arvutamise viisi nagu koaksiaalkaabli puhul.

Siiski võib profiilristlõikega (joon. 117) ferromagnetilisest materjalist juhtmete puhul pinnanähtuse teraval avaldumisel kasutada ülaltooduga analoogilist, suurt täpsust andvat lihtsat arvutusmeetodit (vt. § 92), sest aine suure magnetilise läbitavuse tõttu enamik magnetilise induksiooni jooni sulguvad juhtme sees ja on kujult väga lähedased juhtme ristlõike piirjoonele. Ainult magnetvoo tühiselt väikeses osas kulgevad magnetilise induksiooni jooned osaliselt juhtmes ja osaliselt õhus väljaspool juhet.

Niisugusel ligikaudsel arvutusmeetodil on suur väärtus veel seoses sellega, et selliste juhtmete siseinduktiivtakistus  $x_s$  moodustab tavaliselt suurema osa, sageli aga isegi põhilise osa kogu induktiivtakistusest.

Keeruka ristlõikekujuga juhtme aktiivtakistuse  $r$  täpne suurus on ilmselt määratav alati seosest  $r = P/I^2$ , kusjuures juhtmes neelduvat võimsust  $P$  saab arvutada üle juhtme välispindala võetava integraalina Poyntingi vektori juhtme välispinnaga ristioleva komponendi keskväertusest perioodi kohta. Siiski osutub keeruka ristlõikekujuga juhtmete puhul selline üldine arvutusmeetod enamasti vähe väärtuslikuks, sest välja täpne jaotus ei ole kõikidel hetkedel kogu juhtme pinna ulatuses teada. Seepärast on ka võimalikud ligikaudsed arvutusmeetodid suure väärtusega.

## § 91. Juhtme takistus teravalt avalduva pinnanähtuse puhul

Vaatleme sirget ümarjuhet (joon. 118) ja oletame, et tagasijuhe on temast eemaldatud nii kaugele, et tagasijuhtme mõju vaadeldava juhtme voolu jaotumisele võib jätta arvestamata. Olgu elektromagnetilise laine pikkus  $\lambda$  juhtme materjalis tunduvalt väiksem rist-

lõike raadiusest  $R$ , s. o.  $\lambda \ll R$ . Joonisel on  $\lambda$  suurus näidatud täiendavalt viirutatud kihi paksusena. Kuna juhtmes  $\lambda$  ulatusel sumbub laine praktiliselt täielikult, võib jätta juhtme pinna kõveruse arvestamata, lugeda juhtmesse tunginud laine tasapinnaliseks ja kasutada 87. paragrahvis tasapinnalise laine uurimisel saadud sõltuvusi. Juhtme pinnal ( $z = 0$  puhul) saame:

$$\dot{H}_{tm} = \dot{H}_{me}, \quad \dot{E}_{tm} = (1 + j) \sqrt{\frac{\omega\mu_a}{2\gamma}} \dot{H}_{me}.$$

Järelikult vastavalt eelmise paragrahvi valemile

$$Z_s = r + jx_s = (1 + j) \frac{l}{u} \sqrt{\frac{\omega\mu_a}{2\gamma}},$$

millest

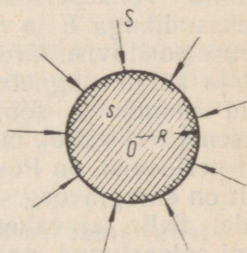
$$r = x_s = \frac{l}{u} \sqrt{\frac{\omega\mu_a}{2\gamma}}.$$

Juhtme vahelduvvoolu-aktiivtakistuse ja alalisvoolutakistuse suhe

$$\frac{r}{r_0} = \left( \frac{l}{u} \sqrt{\frac{\omega\mu_a}{2\gamma}} \right) : \left( \frac{l}{\gamma s} \right) = \frac{s}{u} \sqrt{\frac{\omega\mu_a \gamma}{2}},$$

kus  $s$  on juhtme ristlõige.

Nagu eespool öeldud, tuleb pinnanähtust vaadelda kui juhett ümbritsevast dielektrikust läbi juhtme pinna sissetungiva elektromagnetilise laine juhtmes sumbumise tulemust. Huvitav on tuletda  $r$  ja  $x_s$  avaldised sellest füüsikalisest kujutlusest lähtudes.



JOON. 118

Läbi juhtme pinna juhtmesse antava ja juhtmes soojuse näol eralduva elektromagnetilise energia voo keskmine võimsus  $P = S_k u l$ , kus  $S_k$  on juhtme pinnal esineva Poyntingi vektori keskväärtns perioodi vältel,  $u = 2\pi R$  — juhtme ristlõike ümbermõõt ja  $u l$  — juhtme pindala, mida läbib elektromagnetiline laine. Võttes  $S_k$  avaldises (88. paragrahvi lõpus)  $z = 0$ , saame:

$$S_k = \sqrt{\frac{\omega\mu_a}{2\gamma}} \frac{H_{me}^2}{2}$$

ja järelikult

$$P = \sqrt{\frac{\omega\mu_a}{2\gamma}} ul \frac{H_{me}^2}{2}.$$

Juhtme pinnal on magnetvälja tugevuse amplituud seotud juhtme voolu efektiivväärtusega  $I$  koguvoolu seaduse kaudu:

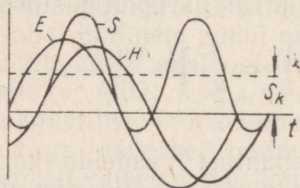
$$H_{me}u = \sqrt{2}I. \text{ Järelikult}$$

$$P = \frac{l}{u} \sqrt{\frac{\omega\mu_a}{2\gamma}} I^2 = rI^2.$$

Seega saame:

$$r = \frac{l}{u} \sqrt{\frac{\omega\mu_a}{2\gamma}}.$$

Nagu näidati 87. paragrahvis, hilineb magnetvälja tugevus elektrivälja tugevusest faasi poolest  $\pi/4$  võrra, mis vastab ühele kaheksandikule võnkeperioodist. Joonisel 119 on kujutatud juhtme



JOON. 119

pinnal esinevate  $E$ ,  $H$  ja  $S$  suuruste muutumise kõverad aja funktsioonina. Võnkeperioodi suurema osa vältel, mis võrdub kolme kaheksandikuga  $E$  ja  $H$  muutumisperioodist, on Poyntingi vektori väärtus positiivne. Järelikult tuleb energia juhtmesse välisest ruumist ja kulub magnetvälja energia muutmiseks juhtme poolt hõivatud ruumis ja soojuse eraldamiseks juhtmes. Võnkeperioodi väiksema osa vältel, mis võrdub ühe kaheksandikuga  $E$  ja  $H$  muutumisperioodist, on Poyntingi vektor negatiivse väärtusega ja järelikult on energiavoog suunatud juhtmest juhete ümbritsevasse keskkonda. Selle ajavahemiku jooksul pöördub juhtmest hõivatud ruumi salvestunud magnetvälja energia osalt tagasi juhete ümbritsevasse ruumi ja osalt muundub soojuseks. Neid energiavõnkumisi koos energia osalise tagasipöördumisega juhete ümbritsevasse ruumi võib käsitleda kui juhtme sisereaktiivtakistuse  $x_s$  olemasolu tulemust. Teatavasti kehtib ahela reaktiivtakistuse  $x$  ja aktiivtakistuse  $r$  ning selle ahela pinget ja voolu faaside vahe  $\varphi$  vahel seos  $x/r = \operatorname{tg} \varphi$ .

Vaadeldaval juhtumil on magnetvälja tugevus juhtme pinnal faasis juhtme vooluga. Elektrivälja tugevus juhtme pinnal kujutab endast pinget juhtme pikkusühiku kohta, mida saab käsitleda juhtme aktiivtakistust  $r$  ja siseinduktiivtakistust  $x_s$  ületava pingena.

Kuna elektri- ja magnetvälja tugevuste faaside vahe  $\varphi$  võrdub  $\pi/4$ , siis saame:

$$\frac{x_s}{r} = \operatorname{tg} \varphi = 1.$$

Järelikult

$$x_s = r = \frac{l}{u} \sqrt{\frac{\omega \mu_a}{2\gamma}}.$$

Seega saame elektromagnetilise välja kaudu läbi juhtme pinna toimuva energiaülekanne protsessi uurimisel samad  $r$  ja  $x_s$  avaldised, mis saadi eespool teisel teel.

Juhtmes eralduva ja juhtme pinnaühiku kohta võetud keskmise võimsuse avaldis

$$S_k = \sqrt{\frac{\omega \mu_a}{2\gamma}} \frac{H_{me}^2}{2},$$

mille saime käesolevas paragrahvis, võimaldab väga lihtsalt arvutada juhtmes esinevat kadu teravalt avalduva pinnanähtuse puhul, kui on teada magnetvälja tugevuse tangentsiaalkomponendi amplituudi  $H_{tm} = H_{me}$  jaotus juhtme pinnal. Ülaltoodud ümarjuhtme lihtsaima näite puhul on  $H_{tm} = H_{me}$  kõikides pinna punktides ühesugune ja võimsus arvutatakse  $S_k$  lihtsa korrutamise teel juhtme välispindalaga. Keerukamatel juhtumitel tuleb võimsus arvutada integreerimise teel üle juhtme pindala  $s$ :

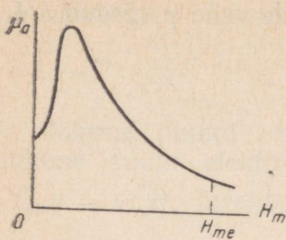
$$P = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega \mu_a}{2\gamma}} \int_s H_{tm}^2 ds.$$

Harilikult esineb teravalt avalduv pinnanähtus kõrgsageduste puhul, näiteks elektromagnetiliste lainete levimisel lainejuhtmetes. Teades  $H_{tm}$  jaotumist lainejuhtme sisepinnal, on viimase valemi abil kerge arvutada lainejuhtme seintes kadumaminevat võimsust.

## § 92. Pinnanähtus ferromagnetilisest materjalist massiivjuhtmetes

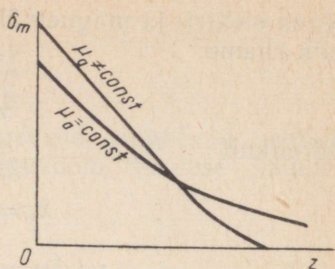
Kõik eelmiste paragrahvide seosed on saanud eeldusel, et keskkonna magnetiline läbitavus on konstantne. Ferromagnetilisest materjalist juhtmete puhul ei ole see tingimus täidetud. Ferromagnetiliste ainete magnetiline läbitavus on väga sõltuv magnetvälja tugevusest. Seepärast muutub keskkonna iga punkti  $\mu_a$  suurus väljatugevuse muutmisperioodi vältel. Olgu  $\mu_a$  absoluutse magnetilise läbitavuse mingisugune keskvärtus perioodi kohta. See keskvärtus on väljatugevuse amplituudi  $H_m$  funktsioon, sest hüstereesisilmus muutub  $H_m$  muutumisel.

Suurus  $H_m$  väheneb eemaldumisel juhtme pinnast juhtme sisse. Seepärast, kui väljatugevuse amplituud  $H_m$  on juhtme pinnal küllaldaselt suur

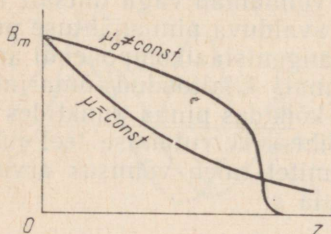


JOON. 120

JOON. 121



(joon. 120), siis kaugenemisel juhtme pinnast juhtme sisse  $\mu_a$  algul kasvab, seejärel aga pärast maksimumi saavutamist jällegi väheneb. Läbitavuse  $\mu_a$  kasvamine põhjustab pinnanähtuse avaldumise veelgi teravamalt, võrreldes olukorraga, kui  $\mu_{ae}$  väärtus on kogu juhtme ulatuses samasugune nagu juhtme pinnal. Muutuva  $\mu_a$  mõju sellist iseloomu on võimalik ette näha ülaltoodud valemite alusel, mis on saadud tingimusel  $\mu_a = \text{const}$ . Neist valemitest nähtub, et mida suurem on  $\mu_a$ , seda kiiremini laine sumbub.



JOON. 122

Joonisel 121 on toodud kõverad, mis kujutavad voolutiheduse amplituudi  $\delta_{mz}$  sõltuvust koordinaadist  $z$  tasapinnalise laine jaoks juhtumitel  $\mu_a = \mu_{ae} = \text{const}$  ja  $\mu_a \neq \text{const}$ . Seejuures on  $z$  kaugus ferromagnetilise keskkonna pinnast keskkonna sisse. Joonisel 121 kujutatud kõverad on joonestatud mõlemal juhul ühesuguse voolu väärtuse jaoks. Joonisel 122 on toodud magnetilise induktsiooni amplituudi muutumise kõverad. Küllastusnähtuse tõttu väheneb  $\mu_a \neq \text{const}$  puhul suurus  $B_m$  algul aeglaselt, teataval sügavusel aga langeb järsku praktiliselt nullini. Läbitavuse  $\mu_a$  mittekonstantsus ja sellega seotud laine kiire sumbumine suurendab juhtme aktiivtakistust. Seda soodustavad samuti hüstereesikaod. Võib näidata, et ferromagnetilisest materjalist juhtmete aktiivtakistust ja siseinduktiivtakistust saab teravalt avalduva pinnanähtuse puhul suure täpsusega arvutada valemitega, mis oma struktuurilt on analoogilised valemitega  $\mu_a = \text{const}$  puhul. Nendeks valemiteks on

$$r = 1,4 \frac{l}{u} \sqrt{\frac{\omega \mu_{ae}}{2\gamma}} = \frac{l}{u} \sqrt{\frac{\omega \mu_{ae}}{\gamma}} \quad \text{ja} \quad x_s = 0,6 r,$$

kus  $\mu_{ae}$  on absoluutne magnetiline läbitavus juhtme pinnal, mis on määratav põhimagneetimiskõveralt magnetvälja tugevuse efektiivväärtuse  $H_{ef}$  puhul juhtme pinnal. Suurus  $H_{ef}$  leitakse seosest  $H_{ef} = I/u$ , mis tuleneb koguvoolu seadusest. Seejuures on  $I$  juhtme voolu efektiivväärtus ja  $u$  — juhtme ristlõike ümbermõõt. Need valemid on väga täpsed, kui  $H_{me}$  on suurem sellest  $H_m$

väärtusest, mille puhul  $\mu_a$  on maksimaalne. Väiksemate  $H_{me}$  väärtuste puhul võib neid valemid kasutada ligikaudseteks arvutusteks.

§8. paragrahvis toodud tabelist on näha, et ferromagnetilises keskkonnas sumbub elektromagnetiline laine isegi oletusel  $\mu_a = \text{const}$  praktiliselt täiesti mõne millimeetri sügavusel juba 50 Hz sageduse puhul. Läbitavuse  $\mu_a$  mittekonstantsus soodustab veelgi kiiremat laine sumbumist. Seepärast osutuvad viimased tasapinnalise laine võrrandist saadud valemid õigeteks praktiliselt alati, kui mingite seadmete voolujuhtivate osadena kasutatakse rööpaid või teisi mistahes profiiliga massiivseid terasjuhte.

### § 93. Magnetilisest ja dielektrilisest komplekslääbitavusest

Ferromagnetilistes keskkondades toimuvate perioodiliste elektromagnetiliste protsesside uurimisel saab keskkonna übermagneetimisega seotud energiakadusid arvesse võtta *absoluutse magnetilise komplekslääbitavuse* sissetoomisega elektromagnetilise välja võrranditesse:

$$\dot{\mu}_a = \frac{\dot{B}_m}{\dot{H}_m} = \mu_a e^{-j\psi} = \mu_a \cos \psi - j \mu_a \sin \psi,$$

mis võrdub magnetilise induktsiooni ja magnetvälja tugevuse kompleksamplituudide suhtega.

Magnetilise komplekslääbitavuse mõiste võttis esmakordselt tarvitusele 1913. a. V. K. Arkadjev ja see osutus paljude uurimuste ja arvutuste puhul väga kasulikuks. Nii on eelmises paragrahvis toodud valemite saamisel kasutatud magnetilise komplekslääbitavuse mõistet, kusjuures on täiendavalt arvesse võetud ferromagnetilistele ainetele iseloomulikku  $\mu_a$  sõltuvust  $H_m$ -st.

Magnetilise komplekslääbitavuse sissetoomine võimaldab arvestada hüsteresikadusid, tarbe korral aga ka ferromagnetilises keskkonnas magnetilise viskoossuse tagajärjel tekkivaid kadusid. Magnetilise komplekslääbitavuse rakendamine hüsteresikadude arvestamise eesmärgil vastab hüsteresisilmuse asendamisele temaga pindalalt võrdse ekvivalentse ellipsiga. See võimaldab kasutada sümbolimeetodit ferromagnetilises keskkonnas toimuvate perioodiliste protsesside uurimisel.

Magnetilise komplekslääbitavuse argument  $\psi$  kujutab endast magnetilise induktsiooni ekvivalentse sinusoidi faasis hilinemise nurka magnetvälja tugevuse ekvivalentse sinusoidi suhtes. Moodul  $\mu_a$  võrdub nende ekvivalentsete sinusoidide amplituudide suhtega  $B_m/H_m$ .

Magnetilise komplekslääbitavuse rakendamine võimaldab perioodiliste protsesside puhul kirjutada Maxwelli teise võrrandi ferromagnetilise keskkonna jaoks, kus esinevad übermagneetimiskaod, samasugusel kujul kui keskkonna jaoks, milles need kaod puudu-

vad. Näiteks tasapinnalise laine puhul omandab Maxwelli teine võrrand ferromagnetilise keskkonna jaoks kuju

$$\frac{d\dot{E}_{mx}}{dz} = j\omega\dot{\mu}_a\dot{H}_{my}.$$

Samal ajal keskkonna jaoks, kus puuduvad ümbermagneetimiskaod, on see võrrand kujuga

$$\frac{d\dot{E}_{mx}}{dz} = -j\omega\mu_a\dot{H}_{my}.$$

Elektromagnetiliste protsesside uurimisel kadudega dielektrikus, kus esinevad energiakaod tingituna polarisatsiooni muutumisest, on elektrivälja tugevuse ajaliselt siinuselise muutumise korral väga kasulik rakendada *absoluutset dielektrilist komplekssläbitavust*

$$\dot{\varepsilon}_a = \frac{\dot{D}_m}{\dot{E}_m} = \varepsilon_a e^{-j\psi} = \varepsilon_a \cos \psi - j \varepsilon_a \sin \psi.$$

Seejuures on  $\psi$  nurk, mille võrra siinuseliselt muutuv elektri- nihe  $D$  hilineb faasilt siinuseliselt muutuvast elektrivälja tugevu- sest  $E$ . See nurk kujutab endast dielektriku nn. *kaonurka*.

Sel juhtumil omandab Maxwelli esimene võrrand tasapinnalise elektromagnetilise laine jaoks kuju

$$-\frac{d\dot{H}_{my}}{dz} = j\omega\dot{\varepsilon}_a\dot{E}_{mx}.$$

Dielektrilise komplekssläbitavuse kasutuselevõtmisega saab arvestada ka keskkonna juhtivusvooludest põhjustatud kadusid, mis on väga oluline elektromagnetilise välja vaatlemisel kadudega dielektrikus, millel on nullist erinev erijuhtivus  $\gamma$ , ja kui nihkevoolu ning juhtivusvoolu tihedused on teineteisega võrreldavad. Seejuu- res omandab Maxwelli esimene võrrand kuju

$$-\frac{d\dot{H}_{my}}{dz} = \gamma\dot{E}_{mx} + j\omega\dot{\varepsilon}_a\dot{E}_{mx} = j\omega \left( \dot{\varepsilon}_a - j\frac{\gamma}{\omega} \right) \dot{E}_{mx}.$$

Tähistades

$$\dot{\varepsilon}_a - j\frac{\gamma}{\omega} = \varepsilon_a \cos \psi - j \left( \varepsilon_a \sin \psi + \frac{\gamma}{\omega} \right) = \dot{\varepsilon}'_a = \varepsilon'_a e^{-j\psi'},$$

võime selle võrrandi kirjutada kujul

$$-\frac{d\dot{H}_{my}}{dz} = j\omega\dot{\varepsilon}'_a\dot{E}_m.$$

Selle võrrandi kuju on täiesti analoogiline võrrandi

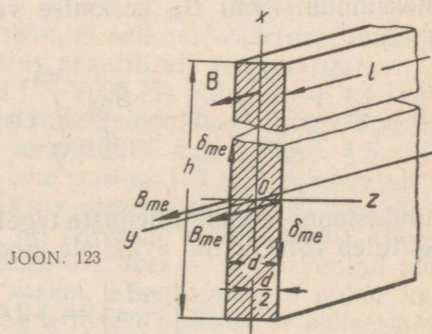
$$-\frac{d\dot{H}_{my}}{dz} = j\omega\varepsilon_a\dot{E}_m$$

kujuga, mis kehtib kaovaba dielektriku jaoks.

Seega võimaldab magnetilise komplekslääbitavuse ja dielektrilise komplekslääbitavuse mõistete kasutamine perioodiliste protsesside puhul kirjutada elektromagnetilise välja põhivõrrandid lihtsas ja sümmeetrilises kujus ka üldjuhtumil, kui keskkonnas esinevad mistahes liiki energiakaod.

#### § 94. Vahelduvmagnetvoo mitteühtlane jaotumine tasapinnalises lehes

Läbige tasapinnalist juhtivat lehte siinuseliselt muutuv magnetvoo  $\Phi$ , mille magnetilise induksiooni jooned on suunatud piki lehte risti lõikega, mis joonisel 123 on viirutatud. Selle juhtumi uurimine pakub suurt huvi, sest trafode ja elektromagnetite südamikud ning samuti elektrimasinate magnetahelate osad, mida läbib vahelduv magnetvoo, on harilikult koostatud elektrotehnilisest lehtterasest. Vahelduv magnetvoo indutseerib magnetilise induksiooni joontega ristiolevaltel tasanditel olevates kontuurides elektromotoorjõud. Indutseeritud emj. mõjul tekivad mööda neid kontuure pöörisvoolud. Nagu magnetvoo, nii jaotuvad ka pöörisvoolud lehe ristlõikes mitteühtlaselt. Harilikult on lehe pikkus  $l$  ja kõrgus  $h$  (joon. 123) tunduvalt suuremad lehe paksusest  $d$ . Seejuures võib



JOON. 123

jätta arvestamata voolujoonte kõverdumise lehe servades ja lugeda voolujooned sirgjoonteks, mis on suunatud lehe pinnaga rööpselt ja magnetilise induksiooni joontega risti. Paigutame koordinaatteljed nii, nagu on näidatud joonisel 123, s. o. nii, et vektor  $\mathbf{E}$  oleks nagu varemgi paralleelne  $OX$ -teljega ja vektor  $\mathbf{H}$  paralleelne  $OY$ -teljega. Koordinaatide alguspunkti paigutame lehe ristlõike keskele. Kui  $h \gg d$  ja  $l \gg d$ , siis võib elektromagnetilist lainet lugeda tasapinnaliseks. Lihtsustuseks oletame, et  $\mu_a = \text{const}$ . Seejuures jäävad 87. paragrahvis saadud võrrandid jõusse. Järelikult

$$\dot{H}_m = A_1 e^{-az} + A_2 e^{+az}; \quad \dot{E}_m = -\frac{1}{\gamma} \frac{d\dot{H}_m}{dz},$$

$$\alpha = \sqrt{j\omega\mu_a\gamma} = (1+j) \sqrt{\frac{\omega\mu_a\gamma}{2}} = (1+j)k.$$

Siiski osutuvad piiritingimused nüüd erinevaks, võrreldes 87. paragrahvis uuritud juhtumiga. Elektromagnetilised lained tungivad lehte mõlemast küljest ja lehe mõlemal pinnal peavad vektorid  $\mathbf{B}$  ning vastavalt ka vektorid  $\mathbf{H}$  olema ühesugused nii suuruselt kui ka suunalalt. See nõue on täidetud tingimusel, kui  $A_1 = -A_2 = A$ . Järelikult

$$\dot{H}_m = A(e^{-\alpha z} + e^{\alpha z}) = 2A \operatorname{ch} \alpha z;$$

$$\dot{B}_m = 2A\mu_a \operatorname{ch} \alpha z = \dot{B}_{m0} \operatorname{ch} \alpha z;$$

$$\dot{\delta}_m = \gamma \dot{E}_m = -2A\alpha \operatorname{sh} \alpha z = -\frac{\dot{B}_{m0}\alpha}{\mu_a} \operatorname{sh} \alpha z,$$

kus  $\dot{B}_{m0} = 2A\mu_a$  kujutab endast  $\dot{B}_m$  väärtust lehe keskel ( $z = 0$  puhul). Harilikult huvitab meid induksiooni keskväärts  $B_k$  lehe ristlõike ulatuses. Selle keskväärtsuse kompleksamplituud saadakse kompleksinduksiooni  $\dot{B}_m$  keskmise väärtusena lehe paksuse ulatuses:

$$\dot{B}_{mk} = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} \dot{B}_m dz = \frac{\dot{B}_{m0}}{d} \int_{-d/2}^{d/2} \operatorname{ch} \alpha z dz = \dot{B}_{m0} \frac{\operatorname{sh} \frac{\alpha d}{2}}{\frac{\alpha d}{2}}.$$

Induksiooni ja voolutiheduste tegelike amplituudide eneste leidmiseks tuleb võtta leitud avaldiste moodulid. Saame:

$$\left| \frac{\alpha d}{2} \right| = \sqrt{2} k \frac{d}{2},$$

$$|\operatorname{sh} \alpha z|^2 = \operatorname{sh}(kz + jkz) \operatorname{sh}(kz - jkz) = \frac{\operatorname{ch} 2kz - \cos 2kz}{2};$$

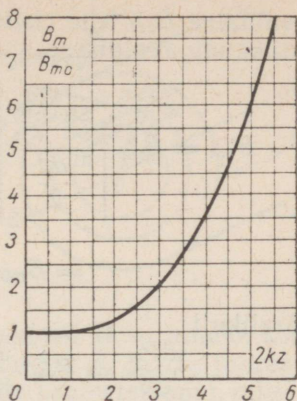
$$|\operatorname{ch} \alpha z|^2 = \operatorname{ch}(kz + jkz) \operatorname{ch}(kz - jkz) = \frac{\operatorname{ch} 2kz + \cos 2kz}{2}.$$

Järelikult

$$B_m = B_{m0} \sqrt{\frac{\operatorname{ch} 2kz + \cos 2kz}{2}};$$

$$\delta_m = |\alpha| \frac{B_{m0}}{\mu_a} \sqrt{\frac{\operatorname{ch} 2kz - \cos 2kz}{2}}.$$

JOON. 124



Joonisel 124 on toodud kõver  $B_m/B_{m0}$  funktsioonina suurusest  $2kz$ . Lehe pinnal  $z = d/2$  ja  $2kz = kd$ . Elektrotehnilise lehtterase puhul  $\mu_a \approx 1000\mu_0$ ,  $\gamma \approx 10^7$  S/m ja kui  $f = 50$  Hz ning  $d = 0,5$  mm, on parameeter

$$kd = \sqrt{\frac{\omega\mu_a\gamma}{2}}d = 0,7.$$

Joonise 124 kõveralt on näha, et selle  $kd$  väärtuse juures ei ole magnetvoo jaotumise ebaühtlus praktiliselt veel märgatav.

Kuid sama lehepaksuse ja  $f = 2000$  Hz puhul  $kd = 4,4$  ja vastavalt osutub lehe pinnal oleva induktsiooni amplituudi  $B_{me}$  ja lehe keskel esineva induktsiooni amplituudi  $B_{m0}$  suhteks 4,5. Siit on näha, et helisagedustele on lehe paksus 0,5 mm lubamatult suur. Helisagedustel peab lehe paksus olema 0,05...0,10 mm. Raadioagedustel jaotub juba isegi nii õhukeste lehtede puhul voog äärmiselt ebaühtlaselt lehe paksuse ulatuses — pöörivoolud nõrgendavad tugevasti välja lehe keskel. Kõrgsageduste puhul kasutatakse väga peenikest ferromagnetilisest pulbrist ja isoleermaterjalist pressitud südamikke.

Määrame lehes esineva pöörivoolukao  $P_p$ , arvestades magnetvoo ebaühtlast jaotumist. Juhtivas keskkonnas kulutatav aktiivvõimsus mahuühiku kohta võrdub voolutiheduse efektiivväärtuse ruudu ja keskkonna erijuhtivuse jagatisega. Järelikult

$$\frac{dP_p}{dV} = \frac{1}{\gamma} \left( \frac{\delta_m}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{|\alpha|^2 B_{m0}^2}{4\mu_a^2 \gamma} \quad (\text{ch } 2kz - \cos 2kz).$$

Kuna  $|\alpha| = \sqrt{\omega\mu_a\gamma}$ , siis

$$\frac{dP_p}{dV} = \frac{\omega}{4\mu_a} B_{m0}^2 (\text{ch } 2kz - \cos 2kz).$$

Avaldame  $B_{m0}$  lehe ristlõike kohta keskmise induktsiooni amplituudi kaudu avaldisest

$$B_{mk} = B_{m0} \left| \frac{\operatorname{sh} \frac{ad}{2}}{\frac{ad}{2}} \right| = B_{m0} \frac{\sqrt{\frac{\operatorname{ch} kd - \cos kd}{2}}}{\sqrt{2} \frac{kd}{2}} =$$

$$= B_{m0} \frac{\sqrt{\operatorname{ch} kd - \cos kd}}{kd}.$$

Järelikult

$$\frac{dP_p}{dV} = B_{mk}^2 \frac{\omega}{4\mu_a} k^2 d^2 \frac{\operatorname{ch} 2kz - \cos 2kz}{\operatorname{ch} kd - \cos kd}.$$

Kaod  $P_p$  kogu lehe ruumalas saame, kui korrutame erikaod  $\frac{dP_p}{dV}$  lehe pikkusega  $l$ , kõrgusega  $h$  ja lehe paksuse elemendiga  $dz$  ning integreerime seejärel üle lehe paksuse. Saame:

$$P_p = lh \int_{-d/2}^{d/2} \frac{dP_p}{dV} dz = B_{mk}^2 lh \frac{\omega}{4\mu_a} k d^2 \frac{\operatorname{sh} kd - \sin kd}{\operatorname{ch} kd - \cos kd}.$$

Seega avaldub kogu lehe pöörivoolukadu mahuühiku kohta kujul

$$P'_p = \frac{P_p}{l \cdot hd} = B_{mk}^2 \frac{\omega}{4\mu_a} k d \frac{\operatorname{sh} kd - \sin kd}{\operatorname{ch} kd - \cos kd}.$$

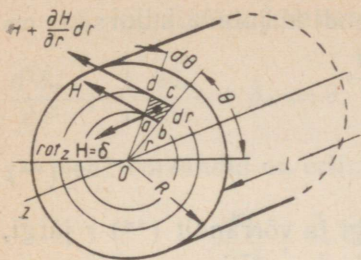
Kerge on veenduda, et  $kd < 1$  puhul muutub see valem avaldiseks

$$P'_p = \frac{4}{3} k_f^2 f^2 \gamma d^2 B_{mk}^2,$$

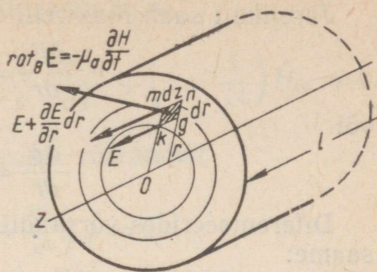
mis saadi teises osas pinnanähtuste mitteamestamisel. Viimases valemis  $k_f = \pi/2 \sqrt{2}$  on sinusoidi kujutegur.

## § 95. Voolu ebaühtlane jaotumine ümarjuhtmes

Vaatleme pinnanähtust, kui vahelduvvool läbib ümarjuhet. Oletame, et tagasijuhe asub niivõrd kaugel, et tema voolust tekitatud vahelduva magnetvoo mõju uuritava juhtme voolu jaotumisele võib arvestamata jätta. Loomulik on valida silindrilised koordinaadid  $z$ ,  $r$  ja  $\theta$ , ühitades  $OZ$ -telje juhtme teljega (joon. 125). Elektrivoolu jooned on suunatud rööbiti  $OZ$ -teljega. Telgsümmeetria tõttu on magnetilise induktsiooni jooned ringjooned, mis asuvad juhtme teljega risti olevatel tasanditel ühise tsentriga juhtme teljel. Seega



JOON. 125 JOON. 126



on vektoril  $\delta$  ainuke komponent  $\delta_z$  ja vektoril  $\mathbf{H}$  — ainuke komponent  $H_\theta$ . Seepärast jätame edaspidi indeksid  $\delta_z$  ja  $H_\theta$  juures ära. Siiski peame meeles, et  $\delta$  ja  $H$  on vektorite projektioonid, mitte aga nende moodulid ja järelikult võivad nad omada nii positiivseid kui ka negatiivseid väärtusi. Telgsümmeetria tõttu sõltuvad  $\delta$  ja  $H$  ainult raadiusest  $r$ .

Et leida seost  $\delta$  ja  $H$  vahel, kasutame võrrandeid

$$\text{rot } \mathbf{H} = \delta; \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}; \quad \mathbf{E} = \frac{1}{\gamma} \delta.$$

Magnetomotoorjõud piki kontuuri  $abcd$ , mis piirab joonisel 125 viirutatult näidatud elementaarpinda, võrdub

$$-Hr d\theta + \left( H + \frac{\partial H}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta = \frac{\partial H}{\partial r} r dr d\theta + H dr d\theta,$$

kusjuures paremal poolel on ära jäetud kolmanda väiksusjärguga liige.

Kontuuriga  $abcd$  piiratud pinna suurus võrdub  $ds = r d\theta dr$ . Järelikult, antud juhtumil, mispuhul vektor  $\mathbf{H}$  omab ainult üht komponenti  $H_\theta = H$ , saame:

$$\text{rot}_z \mathbf{H} = \frac{\partial H}{\partial r} + \frac{H}{r},$$

ja Maxwelli esimene võrrand omandab kuju

$$\frac{\partial H}{\partial r} + \frac{H}{r} = \delta. \quad (*)$$

Elektromotoorjõud piki kontuuri  $gkmng$ , mis piirab joonisel 126 viirutatult näidatud elementaarpinda, omab väärtust

$$E dz - \left( E + \frac{\partial E}{\partial r} dr \right) dz = -\frac{\partial E}{\partial r} dr dz.$$

Jagades selle avaldise pinna suurusega  $ds = dr \cdot dz$ , saame antud juhtumil, mispuhul vektoril  $\mathbf{E}$  on ainult üks komponent  $E_z = E$ :

$$\text{rot}_\theta \mathbf{E} = -\frac{\partial E}{\partial r}.$$

Järelikult saab Maxwelli teise võrrandi kirjutada kujul

$$\frac{\partial E}{\partial r} = -\mu_a \frac{\partial H}{\partial t}$$

või

$$\frac{\partial \delta}{\partial r} = \mu_a \gamma \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (**)$$

Diferentseerides võrrandit (\*)  $t$  järgi ja võrrandit (\*\*)  $r$  järgi, saame:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial^2 H}{\partial r \partial t} = \frac{\partial \delta}{\partial t}; \quad \frac{\partial^2 \delta}{\partial r^2} = \mu_a \gamma \frac{\partial^2 H}{\partial r \partial t}.$$

Nendest seostest, võttes arvesse võrrandit (\*\*), saame voolutiheduse jaoks:

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \delta}{\partial r} = \mu_a \gamma \frac{\partial \delta}{\partial t}.$$

Diferentseerides võrrandit (\*)  $r$  järgi ja kasutades võrrandit (\*\*), saame magnetvälja tugevuse võrrandi:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} - \frac{H}{r^2} = \mu_a \gamma \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Kui vool ning järelikult ka  $\delta$  ja  $H$  on aja siinusfunktsioonideks, siis, viies voolutiheduse ja magnetvälja tugevuse hetkväärtuste kompleksavaldised

$$\dot{\delta} = \dot{\delta}_m e^{j\omega t} \quad \text{ja} \quad \dot{H} = \dot{H}_m e^{j\omega t}$$

võrranditesse (\*) ja (\*\*) ning jagades ühise kordajaga  $e^{j\omega t}$ , saame need võrrandid kujul:

$$\frac{d\dot{H}_m}{dr} + \frac{H_m}{r} = \dot{\delta}_m; \quad (*)$$

$$\frac{d\dot{\delta}_m}{dr} = j\omega\mu_a\gamma\dot{H}_m. \quad (**)$$

Suuruste  $\delta$  ja  $H$  osatuletistega võrrandite asemele saame vastavalt nende suuruste kompleksamplituudide jaoks harilikud lineaarsed diferentsiaalvõrrandid:

$$\frac{d^2\dot{\delta}_m}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\dot{\delta}_m}{dr} = j\omega\mu_a\gamma\dot{\delta}_m;$$

$$\frac{d^2\dot{H}_m}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\dot{H}_m}{dr} - \frac{\dot{H}_m}{r^2} = j\omega\mu_a\gamma\dot{H}_m.$$

Tuues sisse uue muutuja

$$x = r \sqrt{-j\omega\mu_a\gamma},$$

omandavad viimased kaks võrrandit lihtsama kujul:

$$\frac{d^2 \dot{\delta}_m}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\dot{\delta}_m}{dx} + \dot{\delta}_m = 0; \quad \frac{d^2 \dot{H}_m}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\dot{H}_m}{dx} + \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \dot{H}_m = 0.$$

Need võrrandid on erijuhtumid Besseli võrrandist

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0.$$

Funktsioone, mis rahuldavad Besseli võrrandit, nimetatakse Besseli funktsioonideks. Võrrandi üldintegraali saab kirjutada kujul

$$y = AJ_n(x) + BN_n(x),$$

kus  $A$  ja  $B$  on mingid konstandid,  $J_n(x)$  — esimest liiki  $n$  järku Besseli funktsioon ning  $N_n(x)$  — teist liiki  $n$  järku Besseli funktsioon.

Voolutiheduse võrrand saadakse üldisest Besseli võrrandist, kui sellesse asetada  $n=0$ . Magnetvälja tugevuse võrrand saadakse, kui võtta  $n=1$ . Järelikult saab nende võrrandite üldintegraalid esitada kujul:

$$\dot{\delta}_m = A_0 J_0(x) + B_0 N_0(x); \quad \dot{H}_m = A_1 J_1(x) + B_1 N_1(x),$$

kus  $J_0(x)$  ja  $N_0(x)$  on esimest ja teist liiki null järku Besseli funktsioonid ning  $J_1(x)$  ja  $N_1(x)$  — esimest ja teist liiki esimest järku Besseli funktsioonid.

Tähistame juhtme ristlõike raadiuse tähega  $R$ . Konstandid  $A_0$  ja  $B_0$  ning vastavalt  $A_1$  ja  $B_1$  on määratavad piiritingimustest  $r=0$  ja  $r=R$  puhul, s. o.  $x=0$  ja  $x=R\sqrt{-j\omega\mu_0\gamma}$  puhul.

Besseli funktsioonide üksikasjalikumal vaatlemisel selgub, et  $J_0(0)=1$  ja  $J_1(0)=0$ , samal ajal kui  $N_0(0)=\infty$  ja  $N_1(0)=\infty$ . Kuna ei  $\delta_m$  ega  $H_m$  ei saa olla lõpmata suured juhtme teljel, siis  $B_0=0$  ja  $B_1=0$ .

Seega voolutihedus

$$\dot{\delta}_m = A_0 J_0(x).$$

Funktsiooni  $J_0(x)$  saab esitada rea kujul:

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{(2 \cdot 4)^2} - \frac{x^6}{(2 \cdot 4 \cdot 6)^2} + \dots,$$

mida on kerge kontrollida rea asetamisega  $\dot{\delta}_m$  kohta kehtivasse võrrandisse.

Konstant  $A_0$  võrdub voolutiheduse kompleksamplituudiga  $\dot{\delta}_m$  juhtme teljel. Järelikult

$$\begin{aligned}\dot{\delta}_m &= \dot{\delta}_{m0} \left( 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{(2 \cdot 4)^2} - \frac{x^6}{(2 \cdot 4 \cdot 6)^2} + \dots \right) = \\ &= \dot{\delta}_{m0} J_0(x) = \dot{\delta}_{m0} b_0 e^{j\beta_0}.\end{aligned}\quad (***)$$

$J_0(x)$  on kompleksarv, sest  $x$  on kompleksarv. Suurusega  $b_0$  on tähistatud kompleksarvu  $J_0(x)$  moodulit, suurusega  $\beta_0$  aga argumenti.

Magnetvälja tugevuse võib saada võrrandist (\*\*):

$$\dot{H}_m = \frac{1}{j\omega\mu_a\gamma} \frac{d\dot{\delta}_m}{dr} = \frac{\sqrt{-j\omega\mu_a\gamma}}{j\omega\mu_a\gamma} \frac{d\dot{\delta}_m}{dx} = - \frac{1}{\sqrt{-j\omega\mu_a\gamma}} \frac{d\dot{\delta}_m}{dx}$$

või

$$\dot{H}_m = \frac{\dot{\delta}_{m0}}{\sqrt{-j\omega\mu_a\gamma}} \left( - \frac{dJ_0(x)}{dx} \right).$$

Diferentseerides  $J_0(x)$  rea, saame:

$$\begin{aligned}\dot{H}_m &= \frac{\dot{\delta}_{m0}}{\sqrt{-j\omega\mu_a\gamma}} \left( \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^2 \cdot 4} + \frac{x^5}{(2 \cdot 4)^2 \cdot 6} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{x^7}{(2 \cdot 4 \cdot 6)^2 \cdot 8} + \dots \right) = \frac{\dot{\delta}_{m0}}{\sqrt{-j\omega\mu_a\gamma}} J_1(x) = \\ &= \frac{\dot{\delta}_{m0}}{\sqrt{-j\omega\mu_a\gamma}} b_1 e^{j\beta_1}.\end{aligned}\quad (**)$$

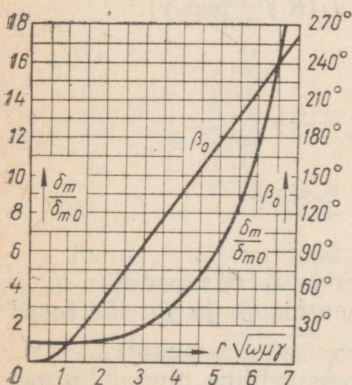
Saadud uus rida ei kujuta enesest midagi muud kui esimest liiki esimest järku Besseli funktsiooni  $J_1(x)$ . Suurusega  $b_1$  on tähistatud kompleksarvu  $J_1(x)$  moodulit, suurusega  $\beta_1$  aga argumenti.

| $r \sqrt{\omega\mu_a\gamma}$ | $b_0$   | $\beta_0^\circ$ | $b_1$   | $\beta_1^\circ$ |
|------------------------------|---------|-----------------|---------|-----------------|
| 0                            | 1       | 0               | 0       | -45             |
| 1                            | 1,015   | 14,22           | 0,501   | -37,84          |
| 2                            | 1,229   | 52,28           | 1,041   | -16,73          |
| 3                            | 1,950   | 96,52           | 1,800   | +15,71          |
| 4                            | 3,439   | 138,19          | 3,173   | 53,90           |
| 5                            | 6,231   | 178,93          | 5,812   | 93,55           |
| 6                            | 11,501  | 219,62          | 10,850  | 133,45          |
| 7                            | 21,548  | 260,29          | 20,500  | 173,51          |
| 8                            | 40,817  | 300,92          | 39,070  | 213,69          |
| 9                            | 77,957  | 341,52          | 74,971  | 253,95          |
| 10                           | 149,831 | 382,10          | 144,586 | 294,27          |

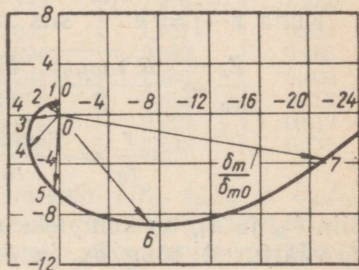
Tabelis on toodud komplekssuuruste  $J_0(r\sqrt{-j\omega\mu_a\gamma})$  ja  $J_1(r\sqrt{-j\omega\mu_a\gamma})$  moodulite  $b_0$  ja  $b_1$  ning argumentide  $\beta_0$  ja  $\beta_1$  väärtused suuruse  $r\sqrt{\omega\mu_a\gamma}$  mõningate väärtuste puhul.

Kuna  $b_0$  kasvab monotoonselt  $r\sqrt{\omega\mu_a\gamma}$  suurenemisel, siis on voolutiheduse amplituud juhtme teljel vähima väärtusega. Juhtme pinnal ja juhtme teljel esinevate voolutiheduse amplituudide suhe on seda suurem, mida suurem on nurksagedus, erijuhtivus, magnetiline läbitavus ja juhtme raadius  $R$ . Mis puutub nurgasse  $\beta_0$ , siis kasvab see samuti monotoonselt suuruse  $r\sqrt{\omega\mu_a\gamma}$  suurenemisel. Kui  $r\sqrt{\omega\mu_a\gamma}$  on suur, võib voolutihedus teataval kaugusel teljest osutada vastandfaasis olevaks voolutihedusega teljel, kauguse  $r$  edasisel suurenemisel aga võib voolutihedus uuesti faasis ühtida teljel esineva voolutihedusega, ja nii edasi. Suuruste

$\delta_m/\delta_{m0} = b_0$  ja  $\beta_0$  sõltuvused suurusest  $r\sqrt{\omega\mu_a\gamma}$  on antud joonisel 127. Joonisel 128 on näidatud ajadiagrammil vektorid, mis iseloomustavad voolutiheduse jaotumist suuruse ja faasi järgi piki juhtme raadiust, kusjuures iga vektori lõpus on märgitud suuruse  $r\sqrt{\omega\mu_a\gamma}$  vastav väärtus.



JOON. 127  
JOON. 128



Jooniste 127 ja 128 vaatlemine viib meid nendelesamadele üldistele füüsikalistele põhimõtetele, mis püstitati eespool ja mis iseloomustavad pinnanähtust eranditult kõikidel juhtumitel. Elektromagnetiline laine tungib juhtme sisse läbi juhtme pinna juhett ümbritsevast dielektrikust. Vastavalt laine sissetungimisele juhtme sügavusse laine järk-järgult sumbub ning elektrivälja tugevuse ja voolutiheduse amplituudid vähenevad. Mida sügavamale seejuures võnkumine juhtmesse tungib, seda rohkem hilineb ta faasilt juhtme pinnal esinevast võnkumisest.

## § 96. Ümarjuhtmete aktiivtakistus ja siseinduktiivtakistus

Vastavalt ümarjuhtme jaoks 90. paragrahvis püstitatud seosele

$$Z_s = r + jx_s = \frac{l\dot{E}_{me}}{u\dot{H}_{me}},$$

kus  $\dot{E}_{me}$  ja  $\dot{H}_{me}$  on  $\dot{E}_m$  ja  $\dot{H}_m$  väärtused juhtme pinnal, s. o.  $r = R$  puhul;  $l$  — juhtme pikkus ja  $u$  — juhtme ristlõike ümbermõõt.

Kasutades avaldisi (\*\*\*) ja (\*\*) eelmisest paragrahvist ja seost  $\dot{\delta}_m = \gamma\dot{E}_m$ , saame:

$$r + jx_s = \frac{1}{\gamma 2\pi R} \sqrt{-j\omega\mu_a\gamma} \frac{J_0(R\sqrt{-j\omega\mu_a\gamma})}{J_1(R\sqrt{-j\omega\mu_a\gamma})}.$$

Juhtme takistus alalisvoolule

$$r_0 = \frac{l}{\gamma\pi R^2}.$$

Järelikult

$$\frac{Z_s}{r_0} = \frac{r}{r_0} + j \frac{x_s}{r_0} = \frac{R\sqrt{-j\omega\mu_a\gamma}}{2} \frac{J_0(R\sqrt{-j\omega\mu_a\gamma})}{J_1(R\sqrt{-j\omega\mu_a\gamma})}.$$

Kuna  $\sqrt{-j} = e^{-j\frac{\pi}{4}}$ , siis saame:

$$\frac{Z_s}{r_0} = \frac{R\sqrt{\omega\mu_a\gamma}}{2} \frac{b_{0e}}{b_{1e}} e^{j(\beta_{0e} - \beta_{1e} - \frac{\pi}{4})} = \frac{z_s}{r_0} e^{j\varphi},$$

$$\frac{r}{r_0} = \frac{z_s \cos \varphi}{r_0}, \quad \frac{x_s}{r_0} = \frac{z_s \sin \varphi}{r_0}.$$

Siin  $b_{0e}$  ja  $b_{1e}$  on komplekssuuruste  $J_0(x)$  ja  $J_1(x)$  moodulite  $b_0$  ja  $b_1$  väärtused ning  $\beta_{0e}$  ja  $\beta_{1e}$  — argumentide  $\beta_0$  ja  $\beta_1$  väärtused  $r = R$  puhul, s. o. juhtme pinnal ( $x = R\sqrt{-j\omega\mu_a\gamma}$  puhul).

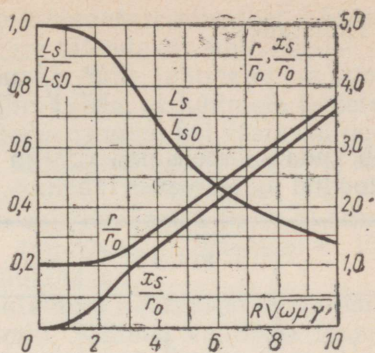
Nurk, mille võrra magnetvälja tugevus juhtme pinnal hilineb faasilt elektrivälja tugevuse suhtes,

$$\varphi = \beta_{0e} - \beta_{1e} - \frac{\pi}{4}.$$

Vahelduvvoolu puhul esineva siseinduktiivsuse  $L_s$  suhe alalisvoolu puhul esinevasse siseinduktiivsusesse  $L_{s,0}$  on kergesti leitav, kui võtta arvesse, et  $L_s = x_s/\omega$  ja  $L_{s,0} = \mu_a l/8\pi$ . Selle suhte jaoks saame:

$$\frac{L_s}{L_{s,0}} = \frac{x_s}{r_0} \frac{r_0}{\omega L_{s,0}} = \frac{x_s}{r_0} \frac{l}{\gamma\pi R^2} \frac{8\pi}{\omega\mu_a l} = \frac{x_s}{r_0} \frac{8}{(R\sqrt{\omega\mu_a\gamma})^2}.$$

JOON. 129



Tabelis on antud suhted  $\frac{z_s}{r_0}$ ,  $\frac{r}{r_0}$ ,  $\frac{x_s}{r_0}$ ,  $\frac{L_s}{L_{s,0}}$  ja nurk  $\varphi$  sõltuvalt suurusest  $R\sqrt{\omega\mu a\gamma}$ .

| $R\sqrt{\omega\mu a\gamma}$ | $\frac{z_s}{r_0}$ | $\varphi^\circ$ | $\frac{r}{r_0}$ | $\frac{x_s}{r_0}$ | $\frac{L_s}{L_{s,0}}$ |
|-----------------------------|-------------------|-----------------|-----------------|-------------------|-----------------------|
| 0                           | 1                 | 0               | 1               | 0                 | 1                     |
| 1                           | 1,013             | 7,06            | 1,0001          | 0,1247            | 0,9976                |
| 2                           | 1,180             | 24,01           | 1,080           | 0,481             | 0,961                 |
| 3                           | 1,625             | 35,81           | 1,318           | 0,951             | 0,846                 |
| 4                           | 2,168             | 39,29           | 1,678           | 1,373             | 0,686                 |
| 5                           | 2,680             | 40,39           | 2,043           | 1,737             | 0,556                 |
| 6                           | 3,180             | 41,17           | 2,394           | 2,093             | 0,465                 |
| 7                           | 3,679             | 41,78           | 2,744           | 2,450             | 0,400                 |
| 8                           | 4,179             | 42,23           | 3,096           | 2,814             | 0,352                 |
| 9                           | 4,679             | 42,57           | 3,446           | 3,165             | 0,313                 |
| 10                          | 5,179             | 42,83           | 3,796           | 3,522             | 0,275                 |

Joonisel 129 on toodud kõverad suhetele  $r/r_0$ ,  $x_s/r_0$  ja  $L_s/L_{s,0}$ , mis iseloomustavad juhtme aktiivtakistuse ja siseinduktiivtakistuse kasvamist ning juhtme siseinduktiivsuse vähenemist parameetri  $R\sqrt{\omega\mu a\gamma}$  suurenemisel. Sel puhul läheneb suhe  $b_{0e}/b_{1e}$  ühele ja vahe  $\beta_{0e} - \beta_{1e}$  väärtusele  $\pi/2$ . Järelikult nurk  $\varphi$  läheneb väärtusele  $\pi/4$ .

Seepärast vaadeldava parameetri suurte väärtuste puhul saame:

$$\frac{z_s}{r_0} \approx \frac{R\sqrt{\omega\mu a\gamma}}{2} e^{j\frac{\pi}{4}}; \quad \frac{r}{r_0} \approx \frac{x_s}{r_0} \approx \frac{R}{2} \sqrt{\frac{\omega\mu a\gamma}{2}},$$

mis ühtib 91. paragrahvis saadud resultaadiga teravalt avalduva pinnanähtuse vaatlemisel, kui arvestada, et ümarjuhtme korral on vaja asendada

$$\frac{s}{u} = \frac{\pi R^2}{2\pi R} = \frac{R}{2}.$$

$$\frac{R}{2} \sqrt{\frac{\omega \mu_a \gamma}{2}} = \kappa,$$

saab anda suhetele  $r/r_0$ ,  $x_s/r_0$  ja  $L_s/L_{s,0}$  lihtsustatud avaldised, mis on toodud juuresolevas tabelis.

|                       | $\kappa < 1$             | $\kappa > 1$                                | $\kappa > 30$  |
|-----------------------|--------------------------|---|--|
| $\frac{r}{r_0}$       | $1 + \frac{\kappa^4}{3}$ | $\kappa + \frac{1}{4} + \frac{3}{64\kappa}$ | $\kappa + 0,265 \approx \kappa$                                    |
|                       |                          | $\kappa \ll 1$                              | $\kappa \gg 1$   |
| $\frac{x_s}{r_0}$     |                          | $\kappa^2 - \frac{\kappa^6}{6}$             | $\kappa - \frac{3}{64\kappa} \approx \kappa$                       |
| $\frac{L_s}{L_{s,0}}$ |                          | $1 - \frac{\kappa^4}{6}$                    | $\frac{1}{\kappa} - \frac{3}{64\kappa^5} \approx \frac{1}{\kappa}$ |

Kui  $\kappa > 30$ , võime juhtme aktiivtakistuse arvutamisel juhtme tinglikult asendada samasuguse välisraadiusega ekvivalentse torujuhtmega, mille vool jaotub üle ristlõike ühtlaselt. Ekvivalentse torujuhtme seinapaksuse  $b$ , mida nimetatakse vahel ka voolu *sissetungimise ekvivalentseks sügavuseks*, leiame seosest

$$\frac{l}{2\pi R b \gamma} = r = r_0 \kappa = \frac{l}{\pi R^2 \gamma} \kappa.$$

Järelikult

$$b = \frac{R}{2\kappa} = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_a \gamma}} = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu_a \gamma}}.$$

## § 97. Lähinähtus. Pindkarastus induksioonimeetodil

Kui üksteise vahetus läheduses asuvad mitu vahelduvvooludega juhti ning igaüks neist ei asu mitte ainult oma vahelduvmagnetväljas, vaid ka teiste juhtide magnetväljas, erineb vahelduvvoolu jaotus igas juhhis veidi sellest, mis esineks siis, kui vaadeldav juhe

oleks üksildane. See nähtus kannab *lähinähtuse* nimetust. Lähinähtus põhjustab juhtmete aktiivtakistuse täiendavat suurenemist.

Kahejuhtmelise ülekandeliini korral, mille juhtmetes on voolud vastassuunalised, põhjustab lähinähtus seda, et juhtmete teineteise poole pööratud külgedel on voolutihedus suurem kui vastaskülgedel. Seda saab seletada voolu püüdega valida niisugune teekond, mille puhul näivtakistus osutub väiksemaks. Voolujaotuse täiendav ebaühtlus suurendab küll juhtme aktiivtakistust, kuid induktiivtakistus väheneb, sest päri- ja tagasivoolu lähenemise tõttu väheneb vooluringi ekvivalentne induktiivsus.

Pinnanähtust ja lähinähtust kasutatakse laialdaselt terasesemete pindkarastamisel induktsioonimeetodil. Näitena vaatleme tasapinnalist vooluringi, milles on kõrgsagedusvool. Kui tuua vooluring teraskeha tasase pinna lähedale, siis tekivad selles kehas keha pinna läheduses indutseeritud voolud. Vastavalt elektromagnetilise inertsiooni põhimõttele on need voolud vastassuunalised voolule vaadeldavas vooluringis, mida sel puhul nimetatakse induktoriks. Seejuures avaldub nähtus selles, et kehas olev vool püüab jäljendada induktori juhtmeid. Andes induktori juhtmetele teatava kindla kuju, saab vastaval viisil suunata kehas esinevaid voolusid ja tekitada keha pindkihi kuumenemise järgneva karastamise eesmärgil ainult nõutavates kohtades. Kui keha pind ei ole tasane, siis tuleb ka induktorile anda vastav kuju. Pindkarastusmeetodi on NSV Liidus välja töötanud V. P. Vologdin jt.

## § 98. Elektromagnetiline varjestamine

Et kaitsta elektriahelate elemente, näiteks induktiivpoole, elektronlampe, elektrimootoriistu jne. elektromagnetiliste vahelduvväljade mõju eest, kasutatakse metallekraane ehk -varjeid. Kui kaits-tav, s. o. varjestatav ahelaelement ümbritseda katkematu metallkestaga, siis kesta küllaldase paksuse puhul väline elektromagnetiline väli kesta sisse praktiliselt ei tungi, nagu see selgus eespool, kus me käsitlesime elektromagnetilise laine juhtivasse keskkonda sissetungimise protsessi. Niisugused kestad kannavad *elektromagnetiliste ekraanide* ehk varjete nime. Niisugune varje ei lase praktiliselt läbi ka tema sees oleva elektriahela elemendi poolt tekitatavat vahelduvat elektromagnetilist välja, s. o. varje kaitseb ka kõiki väljaspool asuvaid seadmeid varje sees oleva välja mõju eest.

Füüsikaliselt saab varjestavat mõju seletada niisuguste voolude tekkimisega varje seintes, mille poolt moodustatud väli kompenseerib neid endid esile kutsunud välise välja. Neid voolusid võib käsitada pöörivooludena.

Efektiivse varjestuse saamiseks tuleb varje seinte paksus võtta ligikaudu võrdseks varje aines esineva laine pikkusega  $\lambda$ . 88. paragrahvis me tõepoolest veendusime, et juhtivas keskkonnas laine-

pikkusega võrduval kaugusel sumbub elektromagnetiline laine praktiliselt täielikult. Nagu näha 88. paragrahvis toodud tabelist, on sagedusel  $f = 500\,000$  Hz lainepikkus vases ligikaudu 0,6 mm. Seepärast raadiosagedustel ei olegi tingimata vaja valmistada varjeid ferromagnetilisest materjalist, mis on ebasoovitavad oma magnetilise läbitavuse sõltuvuse tõttu väljatugevusest ja hüstereesinähtuse pärast. Harilikult kasutatakse hästi juhtivast materjalist, näiteks vasest või alumiiniumist varjeid. Tehnilisel sagedusel  $f = 50$  Hz osutub vaskvarje efektiivseks ainult suure seinapaksuse puhul, sest lainepikkus vases on sel sagedusel 6 cm piires. Nii madalate sageduste puhul tuleb kasutada ferromagnetilisest materjalist varjet, milles elektromagnetiline laine sumbub tunduvalt kiiremini kui vases, muidugi siis, kui ferromagnetilises varjes esinevad kaod ei takista tema kasutamist. Ferromagnetilisel varjel, nagu näidati 65. paragrahvis, on varjestav toime ka alalisvälja puhul. Vahelduvvälja puhul kasvab ferromagnetilise varje varjestav toime tunduvalt varje seintes tekkivate voolude täiendava varjestava efekti tagajärjel.

### § 99. Elektri- ja magnetväljade eksperimentaalne uurimine ja modelleerimine

Kõrvuti elektri- ja magnetväljade ning elektromagnetiliste väljade arvutamiseega on suur praktiline väärtus nende vahetul eksperimentaalsel uurimisel reaalsetes seadmetes ja samuti nende eksperimentaalsel uurimisel modelleerimismeetodil.

Elektrivälja eksperimentaalseks jälgimiseks (näiteks kõrgepingeisolaatori juures õhus) saab kasutada asjaolu, et piklik keha, mis on valmistatud metallist või siis dielektrikust, mille  $\epsilon_a > \epsilon_0$ , püüab välises elektriväljas asetuda piki väljatugevusjoont. Kinnitame õhukesest ja kitsast alumiiniumribast või õlekõrrest pisikese osuti keskkohalt juuksekarva külge, mis on tõmmatud väikese klaashargi otste vahele. Hargi kinnitame pika isoleerkepi otsa, mida kasutame osuti viimiseks uuritavasse välja. Osuti peab juuksekarval vabalt pöörlema. Osuti viimisel uuritavasse välja asetub ta piki väljatugevusjooni.

Asetame isolaatori ja osuti valgusallika ning valge paberilehe vahele ja seame valgustuse nii, et paberilehel tekiks isolaatori ja osuti terav vari. Nii saame joonestada paberilehele isolaatori ja osuti varjud. Seades osutit mitmesugustesse asenditesse isolaatori väljas, tõmbame piki osuti varju iga kord paberile kriipsukese. Suure hulga kriipsukeste puhul paberil saab selgesti märgata uuritava välja jõujoonte suunda. Need jooned tuleb tõmmata nii, et kriipsukesed oleksid neile puutujateks. Väljatugevusjoonte pildi järgi on kerge tõmmata nendega ristiolevaid samapotentsiaalijooni. Kui valida väljatugevusjoonte ja samapotentsiaalijoonete vahelised

kaugused nii, et oleksid täidetud 24. paragrahvis formuleeritud nõuded väljapildi võrgusilmade kuju kohta, siis võimaldab väljapilt hinnata ka väljatugevuse suurust eri punktides.

Väljatugevuse suurust võib mõõta ka vahetult, kasutades väikest elektroodita neonlampi. Paigutades lambi mingisse väljapunkti väljatugevusjoone suunas, suurendame isolaatori pinget, kuni lamp süttib. Lamp süttib alati kindlal väljatugevusel, mida saab eelnevalt määrata lambi asetamisega suurenevasse tuntud välja. Tehes katseid uuritava välja mitmes punktis, määratakse isolaatori pinged, mille puhul lamp süttib neis punktides. Mõõtetulemused võimaldavad proportsionaalse ümberarvutamisega määrata väljatugevuse välja mitmes punktis isolaatori ühe pinge puhul.

Alalismagnetvälja või madala sagedusega muutuva, kuid oma kuju mittemuutva magnetvälja uurimiseks saab kasutada analoogilist meetodit. Välja mitmesugustesse punktidesse tuleb asetada vabalt pöörlev ferromagnetilisest materjalist nõel ja jälgida asendeid, mida nõel võtab nendes välja punktides. Magnetvälja uurimiseks saab kasutada ka elektromagnetilise induksiooni nähtust. Asetades välja mitmesugustesse punktidesse väikese keeru või pooli ja mõõtes ballistilise galvanomeetri abil ära elektrilaengu, mis kandub läbi pooli juhtme ristlõike voo vähenemisel nullini, või mõõtes poolis perioodiliselt muutuva voo puhul indutseeritava emj. efektiivväärtuse või amplituudi, saab arvutada pooli keerdudega ahelduva voo väärtuse. Otsinud poolile niisuguse asendi välja antud punkti ümber, mille puhul voog on suurima väärtusega, saame vektori  $\mathbf{B}$  suuna, mis on risti pooli tasandiga. Seejuures leiame voo suuruse järgi magnetilise induksiooni väärtuse pooli keskel. Pool peab olema nii väikeste mõõtmetega, et pooli piirides oleks väli praktiliselt homogeenne.

Alalisvoolu elektrivälja uurimine juhtivas keskkonnas on väga lihtsalt teostatav. Tahke keskkonna puhul saab uurida välja ainult keskkonna pinnal. Kui aga keskkond on vedel või kobe, siis on võimalik uurida välja ka keskkonna sees. Selleks viiakse keskkonda sond, s. o. peenike metallvarras, mis on kogu pikkuses isoleeritud, välja arvatud ots.

Sond omandab keskkonna selle punkti potentsiaali, milles asub tema isoleerimata ots. Sondi ja keskkonna mingi teise kindla punkti potentsiaalide vahet saab mõõta voltmeetriga või potentsiaalide väikeste vahede puhul suure tundlikkusega galvanomeetriga. Voltmeetri või galvanomeetri takistus peab olema küllalt suur, et mõõteriista läbiv vool, mis väljub sondi otsast keskkonda, ei tekitaks märgatavat potentsiaali muutust sondi otsa paiknemiskohas. Kõige täpsemad tulemusi võib saavutada, kui mõõta potentsiaalide vahet kompensatsioonimeetodil. Asetades sondi otsa uuritava välja erinevatesse punktidesse, saab leida nende punktide potentsiaalid. See võimaldab konstrueerida juhtiva keskkonna samapotentsiaalipinnad või keskkonna pinna või keskkonna mingi lõike samapotent-

siaaljooned. Elektrivälja tugevuse jooned, juhtivuse suhtes homogeenses keskkonnas ka voolujooned, tõmmatakse risti samapotentsiaalipindadega. Keskkonna välispinnal on voolujooned puutujaks sellelesamale pinnale ja järelikult on nad risti selle pinna samapotentsiaalijoontega.

Teades kahe lähedaloleva samapotentsiaalipinna potentsiaalide vahet ja välja antud kohas nende pindade vahelist kaugust, saab hõlpsasti määrata selle koha elektrivälja tugevuse väärtuse. Väljatugevust saab mõõta ka vahetult, kui kasutada kaksiksondi, mis koosneb kahest ülalkirjeldatud üksiksondist, mille isoleerimata otsad asuvad kindlal väikesel kaugusel teineteisest. Mõõtes sondide potentsiaalide vahet ja jagades selle sondi otste vahekaugusega, saame sondi otsi ühendava sirge suunalise elektrivälja tugevuse komponendi väärtuse.

Mistahes tehniliste seadmete, nagu isolaatorite, mõõteriistade, masinate või aparatuuride elektri- ja magnetväljade eksperimentaalne uurimine on nende seadmete õigeks projekteerimiseks väga oluline. Voolu laialivalgumise eksperimentaalne uurimine juhtivas keskkonnas on tähtis maandusseadmete õigeks projekteerimiseks, samuti pinnases esinevate alalisvoolude, nn. uitvoolude määramisel, mis hargnevad linna elektertranspordi rööbasteedelt pinnasesse ja põhjustavad pinnasesse asetatud metalltorude ja kaablikestade korrosiooni.

Alaliselektriväli dielektrikus ruumlaengute puudumisel, alalismagnetväli vooluvälises ruumis ja alaliselektriväli juhtivas keskkonnas väljaspool emj. allikaid kirjelduvad analoogiliste võrranditega, mille kuju on vastavalt:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 (\mathbf{E} = -\operatorname{grad} U); \quad \mathbf{D} = \epsilon_a \mathbf{E}, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 0; \quad (a)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0 (\mathbf{H} = -\operatorname{grad} U_m); \quad \mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0; \quad (b)$$

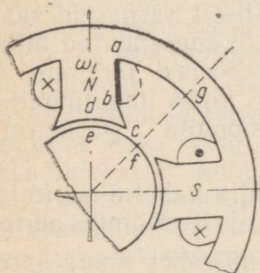
$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 (\mathbf{E} = -\operatorname{grad} U); \quad \delta = \gamma \mathbf{E}, \quad \operatorname{div} \delta = 0. \quad (c)$$

Seega, kui ruumipiirkondadel, kus need väljad esinevad, on ühesugune geomeetiline kuju, kui on ühesugused piiritingimused ruumipiirkondade piiridel ja kui  $\epsilon_a$ ,  $\mu_a$  ning  $\gamma$  väärtuste suhtelised jaotused ruumiosade sees on sarnased, siis on ka nende väljade pildid üksteisega sarnased.

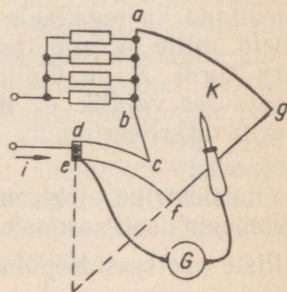
Seda asjaolu saab kasutada välja modelleerimiseks. Ülaltoodust järeldub, et kõige kergemini ja suurima täpsusega õnnestub eksperimentaalselt uurida juhtiva keskkonna elektrivälja. Seepärast ongi loomulik asendada dielektriku alaliselektriväljade uurimine ja väljaspool voolusid esineva alalismagnetväljade uurimine juhtiva keskkonna elektrivälja uurimisega vastavates mudelites. Seejuures on tähtis, et modelleerimisel oleks silmas peetud ruumiosade geomeetiline sarnasus, kus väli esineb, ja et oleksid täidetud nõutavad piiritingimused. Kui keskkond on homogeenne, langeb  $\gamma$  väärtuste õige jaotamise nõue ära.

Tasaparalleelsete väljade uurimisel kasutatakse metallist või juhtivast paberist lehte, mis on välja lõigatud uuritava välja ruumi-osa kujutava teatava kujundi järgi. Lehe servade mõnedest osadest juhitakse vool sisse või välja, jaotades teda teataval viisil piki neid serva osi. Lehe servade ülejäänud osad on ilmselt voolujoonteks. Kui modelleeritakse näiteks tasaparalleelset magnetvälja masinate või aparaatide mingite osade juures, siis lehe need servad, millest juhitakse vool sisse, vastavad välja nendele piiridele, mida mööda on jaotunud magnetvälja tekitav mmj. Need servad aga, millest voolu lehte ei juhita ja mis on voolujoonteks, vastavad servadele, mida mööda mmj. jaotunud ei ole ja mis on järelikult magnetilise samapotentiaali joonteks. Joonisel 130 on kujutatud piirkonda *abcdefga* elektrimasinas, kus magnetväli esineb pooluse ja ankru vahel õhus ja poolustevahelises ruumis. Joonisel 131 on kujutatud erikujuga leht, millel saab uurida voolu välja, mis on analoogiline elektrimasina magnetväljale. Et välja jätta masina vooludest hõivatud piirkond, eeldatakse tinglikult, et mähis poolusesüdamikul on surutud kokku joonele *ab*. Piki seda joont ongi mmj. teatud viisil jaotunud. Samuti tuleb jaotada ka vool, mis tuleb lehte mööda joont *ab*. Jooned *bcd* ja *efga* on masinas magnetilise samapotentiaali jooned. Lehe piirjoone osad *bcd* ja *efga* on voolujoonteks. Seepärast vastavadki kõikidele masina magnetvälja magnetilistele samapotentiaali joontele lehe voolujooned ja kõikidele masina magnetvälja magnetilistele joontele lehe elektrilised samapotentiaali jooned. Elektrilisi samapotentiaali jooni saab kergesti eksperimentaalselt leida teravikkontakti *K* ja galvanomeetri *G* abil.

Ruumiliste väljade uurimiseks saab kasutada vähejuhtiva vedelikuga vanni, kuhu on asetatud teatava kujuga metallkehad (elektroodid) ja samuti isoleerainest kehad. Metallkehade puhul on voolujooned risti kehade pindadega, isoleerainest kehadest voolujooned mööduvad. Valides vajalikul viisil kehade ja vanni enese kuju, saab niisuguses vannis modelleerida magnet- või elektrivälja dielektrikus mingisuguse meid huvitava magneeditud või laetud kehade süsteemi ligilad. Elektroodide juures tekkiva polarisatsiooni emj. vältimiseks kasutatakse madalsagedusvoolu, mis jaotub vannis praktiliselt samuti nagu alalisvool nende elektromotoorjõudude puudumisel.

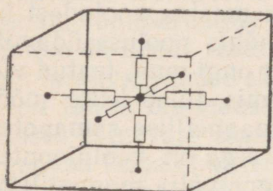


JOON. 130 JOON. 131



Elektrolüütilises vannis on võimalik modelleerida mitte ainult ajas muutumatuid või väikese sagedusega muutuvaid magnet- ja elektrivälju, vaid ka kiirusvektori välju gaasilises või vedelas keskkonnas turbulentse voolamise puudumisel. Seda saab teha siis, kui need väljad on kirjeldatavad võrranditega, mis on kujult analoogilised juhtiva keskkonna alalisvoolu elektrivälja võrranditega (homogeense keskkonna juhtumil — Laplace'i võrrandiga).

Elektrilise mudeli pidevat keskkonda saab asendada teatud ligikaudsuse lubamisel suure arvu takistuselementidega, s. o. elektrilise võre või võrguga. Joonisel 132 on kujutatud kuuest takistist koosnev element, mis asendab pidevast keskkonnast väljalõigatud risttahukat. Laplace'i võrrandi ligikaudseks lahendamiseks elektriliste võrkude rakendamise ettepaneku tegi S. A. Geršgorin 1929. aastal.



JOON. 132

Seda meetodit saab laiendada ka kiirelt muutuvate väljade uurimiseks, mis enam ei kirjeldu Laplace'i võrrandiga. Elektromagnetilised vahelduvväljad erinevad alaliselektriväljast ja alalismagnetväljadest selle poolest, et neis tekivad elektrinihkevoolud ja muutuva magnetvoo poolt indutseeritavad elektromotoorjõud. Elektrilises mudelis saab seda arvesse võtta peale aktiivtakistite ka kondensaatorite ja induktiivpoolide sisseviimisega igasse mudelielementi. Sel põhimõttel töötas L. I. Gutenmahher välja nn. elektrointegraatorid. Viies nendesse elementidesse peale ülalmainitud detailide veel võimendid või lisajuhtivused, mis määravad energia ärajuhtimise elemendist või genereerimise elemendis, on võimalik lahendada elektrointegraatorite abil väga mitmesuguseid ülesandeid.

Märgime lõpuks, et elektromagnetilise vahelduvvälja vahetuks uurimiseks juhtivas keskkonnas, s. o. pinnanähtuse uurimisel, võib kasutada ka tegelikele seadmetele geomeetriliselt sarnaseid seadmeid, mille joonmõõtmeid  $l$  on vähendatud või suurendatud mingi arv kordi. Nagu ülaltoodud pinnanähtuse teooriast järeldub, on seejuures vajalik, et mudelis ja originaalis jääks muutumatuks sarnasuskriteeriumiks nimetatav dimensioonita parameeter  $l \sqrt{\omega \mu_a \rho}$ .

Dielektriku elektromagnetilise vahelduvvälja vahetul uurimisel geomeetriliselt sarnastes mudelites on sarnasuskriteeriumiks perioodiliste protsesside puhul suurus  $l \omega \sqrt{\mu_a \epsilon_a}$  ja mistahes muude prot-

sesside puhul suurus  $\frac{l}{t} \sqrt{\mu_a \varepsilon_a}$ , kus  $t$  on aja alghetkest loetav ajavahemik. Tõepoolest, suuruste  $\frac{l}{t}$  suhe mudeli  $\left(\frac{l_1}{t_1}\right)$  ja originaali  $\left(\frac{l_2}{t_2}\right)$  puhul (s. o.  $\frac{l_1}{t_1} \frac{t_2}{l_2}$ ) peab võrduma mudeli elektromagnetiliste lainete levimiskiiruse  $v_1 = \frac{1}{\sqrt{\mu_{a1} \varepsilon_{a1}}}$  ja originaali elektromagnetiliste lainete levimiskiiruse  $v_2 = \frac{1}{\sqrt{\mu_{a2} \varepsilon_{a2}}}$  suhtega, millest  $\frac{l_1}{t_1} \sqrt{\mu_{a1} \varepsilon_{a1}} = \frac{l_2}{t_2} \sqrt{\mu_{a2} \varepsilon_{a2}} = \text{const.}$

Modelleerimise teooria ja praktika valdkonnas kuuluvad prioriteet ja suured teened nõukogude teadlastele: akadeemik N. N. Pavlovskile, A. N. Krõlovile, M. V. Kirpitševile, samuti S. A. Geršgorinile, L. I. Gutenmahherile, N. V. Korolkovile, D. J. Panovile ja teistele.

## § 100. Elektri- ja magnetahelate parameetritest

Elektri- ja magnetahelate elektromagnetiliste nähtuste uurimisel on üheks peamiseks ülesandeks neid ahelaid või nende üksikuid elemente iseloomustavate parameetrite kindlaksmääramine. Elektri-ahelate teooria tugineb ahela üksikosade parameetrite sissetoomisel, milledest põhilisteks on induktiivsused, mahtuvused ja takistused.

Peale näidatud põhiparameetrite võetakse vaatluse alla veel palju teisigi, mis on teatavas seoses nende parameetritega või millel on iseseisev tähendus. Nii on kombeks iseloomustada magnetahelaid nende magnetilise takistusega, mis võrdub ahela mmj. ja magnetvoo suhtega. Magnetvoo siinuselisel muutumisel võib sisse tuua üldisema parameetri — magnetilise komplekstakistuse, mis iseloomustab veel ka magnetahela energiakadusid hüsteresile ja pöörisvooludele. Elektri-ahelate uurimisel siinusvahelduvoolude puhul tuuakse sisse ahelaosade aktiiv- ja reaktiivtakistuste ning aktiiv- ja reaktiivjuhtivuste mõisted, mis lihtsaimate ahelate puhul on funktsionaalses sõltuvuses ahela eri elementide induktiivsustest, mahtuvustest ja takistustest. Voolude siinuselise muutumise puhul tuuakse sisse veelgi üldisemad parameetrid — elektriline komplekstakistus ja kompleksjuhtivus. Paljusid ahelaelemente iseloomustatakse nende spetsiifiliste eriparameetritega. Nii näiteks määratakse kolme elektroodiga elektronlambi põhiomadusi mitte ainult tema sisetakistusega, vaid ka võimendusteguriga.

Kõigest ülalvaadeldust järeldub, et ainult staatiliste või statsionaarsete režiimide korral saab kõikidele nendele parameetritele anda täiesti kindla väärtuse ja et vahelduvprotsesside puhul läheb nende kasutamine oluliselt keerukamaks. Nii näiteks magnetvälja jaotumine mingi vooluringi lähedal sõltub teatud kindla voolu puhul mitte ainult vooluringi kujust, vaid ka voolu jaotumisest vooluringi moodustava juhtme sees. Ainult alalisvoolu puhul on voolujaotus juhi antud elektriliste omaduste puhul juhi geomeetrilise kujuga üheselt määratud. Vastavalt ainult alalisvoolu puhul on niisugune tähtsaim elektri ahela parameeter nagu ahela induktiivsus keskkonna antud magnetiliste omaduste puhul täielikult määratud ahela kontuuri geomeetriliste mõõtmete ja kujuga. Voolu muutumisel ajas muutub voolujaotus vooluringi moodustavate juhtide ristlõikes ja vastavalt muutub ka vooluringiga ahelduva magnetvoo jaotumine ruumis, järelikult muutub ka vooluringi induktiivsus. Nagu me võisime veenduda vastavas peatükis, koondub elektrivool perioodiliste protsesside puhul peamiselt juhi pindkihti, mis nõrgendab magnetvälja juhtme sees ja vähendab ahela induktiivsust. Siinusvoolu puhul on induktiivsus voolu nurksageduse funktsioon. Mittesiinuselise perioodilise voolu puhul on induktiivsus ilmselt ka voolukõvera kuju funktsioon. Voolu mitteperioodilise muutumise puhul on induktiivsus põhimõtteliselt keerukas aja funktsioon kas või ainuüksi näidatud põhjuse — voolu mitteühtlase jaotumise tõttu juhis.

Juhi aktiivtakistus sõltub voolu muutumiskiirusest veelgi suuremal määral. Rangelt võttes kehtib see väide ka kondensaatori mahtuvuse kohta, sest vahelduvvoolu mitteühtlane jaotumine kondensaatori plaatide laiuse ulatusel peab esile kutsuma elektrinihkevoo ümberjaotamise dielektrikus, mistõttu kondensaatori mahtuvus veidi muutub.

Selle kriteeriumiks, kas vaadeldud nähtusi tuleb arvesse võtta või mitte, on elektromagnetilise laine juhi pinnalt tema ristlõike keskmiste osadeni läbimiseks vajaliku ajavahemiku suhe ajavahe- mikk, mille jooksul juhi vool jõuab muutuda oma maksimaalväärtusega võrreldes märgatava väärtuse võrra. Perioodiliste protsesside puhul taandub see kriteerium juhisese elektromagnetilise laine pikkuse ja juhi ristlõike lineaarmõõtmete suhtele. Kui laine- pikkus juhis on juhi ristlõike lineaarmõõtmetega samas suurus- järgus või väiksem, siis muutub pinnanähtus märgatavaks. Me nägime, et elektromagnetilise laine pikkus juhtivas keskkonnas on isegi võrdlemisi madalatel sagedustel äärmiselt väike.

Me alustasime ahela vahelduvvooluparameetrite küsimuse vaatlemist juhtide sees toimuvate selliste protsesside mõju analüüsiga, mis mõjutavad ahelate parameetrite väärtust, sest neid protsesse tuleb arvestada juba võrdlemisi aeglase voolu muutumiste puhul. Ahela parameetrite küsimus läheb veelgi keerukamaks, kui ahela voolud ja pinged muutuvad nii kiiresti, et aja jooksul, mis kulub

nende märgatavaks muutumiseks, elektromagnetilised lained ei jõua levida dielektrikus piki kogu ahelat. Kuna elektromagnetiliste lainete levimiskiirus dielektrikus on suur, näiteks õhus on ta ligikaudu  $3 \cdot 10^8$  m/s, siis lainete levimiskiiruse lõplikku väärtust tuleb arvesse võtta mitte väga ulatuslike ahelate puhul ainult voolu ja pinge äärmiselt kiirel muutumisel. Neil juhtumitel, kui võib jätta arvestamata lainete levimiskiiruse lõplikkuse dielektrikus, nimetatakse elektriahelat *koondparameetritega ahelaks*. Perioodiliste protsesside puhul on kriteeriumiks, kas ahelat on lubatav vaadelda koondparameetritega ahelana või mitte, ahela ja tema elementide joonmõõtmete väiksus, võrreldes elektromagnetilise laine pikkusega dielektrikus. Sagedusel  $f = 50$  Hz on elektromagnetilise laine pikkus õhus  $\lambda = 3 \cdot 10^8 / 50 = 6 \cdot 10^6$  m = 6000 km. Seepärast vaadeldaksegi sellel sagedusel harilikke elektromagnetilisi seadmeid ja elektriahelaid, välja arvatud pikad ülekandeliinid, koondparameetritega ahelatena. Nende ahelate perioodilisi protsesse nimetatakse sageli kvaasistatsionaarseteks protsessideks.

Kui ahelat võib vaadelda koondparameetritega ahelana, kuid tuleb arvestada pinnanähtusega, siis tuuakse sisse *ahela ekvivalentsete parameetrite* mõiste. Need ekvivalentsete parameetrid sõltuvad juba mitte ainult ahelaelementide geomeetrisest kujust ning materjalide elektrilistest ja magnetilistest omadustest, vaid ka ahelas toimuvate protsesside kiirusest. Ekvivalentsete parameetrite mõistet harilikult laiendatakse veelgi, lülitades ekvivalentsetesse parameetritesse mitmesuguste tegurite mõju. Näiteks ekvivalentse induktiivsuse määramisel võetakse arvesse pöörisvoolude mõju, mis tekivad ahela juhtide läheduses asuvates massiivsetes juhtivates kehades, ja keskkonna magneetumise mõju. Viimane asjaolu teeb ferromagnetiliste materjalide puhul induktiivsuse sõltuvaks veel ahela voolust, s. o. muudab seosed mittelineaarseteks. Nagu me nägime, tekivad mittelineaarset seosed ka siis, kui teised parameetrid, näiteks takistused või mahtuvused, sõltuvad pingetest ja vooludest. Ahela ekvivalentsete parameetrite sissetoomine võimaldab sageli arvutada kvaasistatsionaarseid protsesse küllaldase täpsusega meetoditega, mis on analoogilised statsionaarsete protsesside arvutamiseks kasutatavatega. Selle eredaks näiteks on konstantsete koondparameetritega liitelektriahelate arvutusmeetodite kõrvutamise vahelduvvoolu puhul (sümbolimeetod) ja alalisvoolu puhul.

Kui elektriahela ulatus on niivõrd suur, et vajalik ajavahemik elektromagnetilise laine kulgemiseks piki ahelat muutub võrreldavaks ajavahemikuga, mille jooksul ahela eri osade voolud ja pinged jõuavad märgatavalt muutuda, siis niisugust ahelat ei saa koondparameetritega iseloomustada. Lihtsaimal juhtumil, kui ahelal on suur ulatus ainult ühes suunas, tuuakse sisse ahela pikkuse ulatuses *jaotatud* parameetrite mõiste. Selliste ahelate näiteks on homogeenised liinid. Teiseks näiteks võivad olla trafode või elektrimasi-

nate mähised, kui mööda neid mähiseid levivad mikrosekunditega mõõdetava kestusega voolu- ja pingelained. Sel puhul tuleb neid mähiseid vaadelda kui *jaotatud parameetritega ahelaid*. Selliste ahelate iseloomustamiseks võetakse kasutusele ahela pikkusühiku kohta määratavad parameetrid.

Siiski muutub ka see meetod kõlbmatuks, kui elektromagnetilise laine pikkus dielektrikus on võrreldav seadme mõõtmetega kõigis suundades. Selliste tingimustega puutume kokku ultralühilainete tehnikas, mille puhul lainepikkusi mõõdetakse sentimeetritega. Nii kiirete protsesside puhul on juba võimatu iseloomustada seadet teatavate kindlate parameetritega: induktiivsuse, mahtuvuse ja takistusega. Samuti on võimatu rääkida ka parameetritest, mis oleksid jaotunud piki mingit ühte suunda. Elektrilised võnkesüsteemid omandavad nii lühikeste lainete puhul omapärase kuju — nendeks on õõnsad metallkehad, mille õõnte sees dielektrikus ergutatakse kehade seintelt mitmekordselt peegelduvaid elektromagnetilisi laineid. Niisuguste süsteemide puhul on võimalik resonantsi häälestamine, kusjuures resonantsisagedused määratakse kehade mõõtmete ja kujuga. Omapärase kujuga on nii lühikeste lainete puhul ka elektromagnetilise energia ülekandeks kasutatavad seadmed, mis on saanud lainejuhtmete nimetuse. Need on metalltorud, mille sees levivad elektromagnetilised lained. Niisuguste seadmete suhtes on raske kasutada elektriahela mõistet tema harilikus mõttes. Niisuguste süsteemide elektromagnetiliste protsesside arvutamisel on vaja lahendada elektromagnetilise välja võrrandid, võttes arvesse vastavaid piiritingimusi.

## TÄHESTIKULINE SISUNÄITAJA

- Alalisvoolude elektriväli 86  
 Alalisvoolude magnetväli 96  
 Alalisvoolude väli 86, 96  
 Arkadjev, V. K., magnetiline kompleks-  
 läbitavus 197
- D'Alembert'i võrrand 162  
 Demagnetimistegurid 126  
 Dielektriku kaonurk 198  
 Dielektrikust kera välises elektriväljas  
 59  
 Dielektriline kompleksläbitavus 198  
 Dipool 30, 165
- Elektri- ja magnetvälja vastavuse print-  
 siip 106  
 Elektrilise modelleerimise meetod 212  
 Elektripotentsiaal 27  
 Elektrivoolu pidevuse printsiip 19  
 Elektrodünaamilised potentsiaalid 164  
 Elektromagnetiline vahelduvväli di-  
 elektrikus 144  
 Elektromagnetiline vahelduvväli juhti-  
 vas keskkonnas 184  
 Elektromagnetiline väli 5  
 Elektromagnetilise energia voog 152  
 Elektromagnetilise laine levimiskiirus  
 147  
 Elektromagnetilise välja võrrandid 22  
 Elektromagnetilised ekraanid 211  
 Elektromagnetiliste lainete kiirgamine  
 antennist 155  
 Elektrostaatiline induksioon 62  
 Elektrostaatiline väli 26  
 Elektrostaatilise analoogia meetod 91  
 Elektrostaatilise induksiooni tegurid 73  
 Elektrostaatilised ekraanid 63  
 Energiaülekanne piki liinjuhtmeid 172
- Ferromagnetilisest materjalist kera vä-  
 lises magnetväljas 124
- Gaussi teoreem diferentsiaalalal 16, 18
- Hajumus 16  
 Hamiltoni operaator 18
- Herz, H., elektromagnetiliste lainete  
 tekitamise ja levimise katsed 157  
 Herzi katsed 157  
 Hilinevad elektrodünaamilised potent-  
 siaalid 164
- Induktiivsuste arvutus vooluringi osade  
 kaupa 136
- Joonjuhtmete magnetväli 105  
 Juhtme aktiivtakistus 189
- Kahe teineteise suhtes nurga all aset-  
 seva tasapinna väli 47  
 Kahejuhtmelise liini magnetväli 110  
 Kahejuhtmelise liini omainduktiivsus  
 141  
 Kahejuhtmelise ülekanделиini mahtuvus  
 69  
 Keskmiste potentsiaalide meetod 81  
 Kiirgustakistus 171  
 Kiirgusvõimsus 171  
 Kolmefaasilise liini induktiivsus 142  
 Kolmefaasilise liini mahtuvus 77
- Lainejuhe 175  
 Lainejuhtme kriitiline sagedus 179  
 Lainejuhtme laine faasikiirus 180  
 Laineikkus 151  
 Lainetakistus 148  
 Lainevõrrand 162  
 Laplace'i operaator 35  
 Laplace'i võrrand 35  
 Lebedev, P. N., valguse elektromag-  
 netilise loomuse uurimine 6, 158  
 Lenz, E. H., elektriliste ja magnetiliste  
 nähtuste ühtsus 10  
 Lähinähtus 210
- Maandustakistus 93  
 Magnetiline kompleksläbitavus 197  
 Magnetiline varjestamine 127  
 Magnetvoo pidevuse printsiip 19  
 Magnetväli 96

- Magnetväli ferromagnetiliste kehade läheduses 113  
Magnetvälja skalaarpotentsiaal 161  
Magnetvälja vektorpotentsiaal 161  
Mahtvus ringsilindrite vahel 67  
Maxwell, elektromagnetilise välja võrrandid 8, 10  
Maxwelli postulaat diferentsiaalkujul 18  
Maxwelli võrrandid 12  
Metallkera välises elektriväljas 64
- Osamahtvus 74  
Ostrogradski teoreem 20
- Pegelkujutismetod 65, 113  
Pinnanähtus 189  
Poissoni võrrand 34  
Potentsiaalitegurid 72  
Potentsiaalväli 29, 86  
Poyntingi vektor 150  
Pöörisevaba väli 26  
Pöörisväli 96
- Ringjoonelise voolujohtme magnetväli 119  
Ringjoonelise vooluringi omainduktiivsus 135  
Ringristlõikega juhtme magnetväli 109  
Ristkülikulise raami omainduktiivsus 139
- Sfääriline laine 169  
Stokesi teoreem 21
- Tasaparalleelne väli 40  
Tasapinnaline elektromagnetiline laine dielektrikus 145  
Tasapinnaline elektromagnetiline laine juhtivas keskkonnas 184
- Vastastikune induktiivsus 129  
Voofunktsioon 41  
Välja graafilise konstrueerimise meetod 56, 115  
Välja komplekspotentsiaal 45
- Ülekandeliini elektriväli 48, 87

## SISUKORD

### *Esimene peatükk*

#### **Elektromagnetiline väli ja teda iseloomustavad võrrandid**

|      |   |    |
|------|---|----|
| § 1. | Elektriliste ja magnetiliste nähtuste vaheline seos. Elektromagnetiline väli . . . . .            | 5  |
| § 2. | Elektromagnetilise välja komponentide suhtelisus . . . . .  | 10 |
| § 3. | Maxwelli võrrandid diferentsiaalkujul . . . . .   | 12 |
| § 4. | Gaussi teoreem ja Maxwelli postulaat diferentsiaalkujul . . . . .                                 | 15 |
| § 5. | Magnetvoo ja elektrivoolu pidevuse printsiipide avaldised diferentsiaalkujul . . . . .            | 19 |
| § 6. | Ostrogradski teoreem. Stokesi teoreem . . . . .   | 20 |
| § 7. | Elektromagnetilise välja võrrandite täielik süsteem . . . . .                                     | 22 |
| § 8. | Elektrostaatiline väli ja alalisvoolude väli elektromagnetilise välja kahe erijuhtumina . . . . . | 25 |

### *Teine peatükk*

#### **Elektrostaatiline väli**

|       |   |    |
|-------|---|----|
| § 9.  | Elektrostaatilise välja pöörisevaba olemus. Elektripotentsiaali gradient . . . . .                  | 26 |
| § 10. | Potentsiaali ja väljatugevuse vähenemine suurel kaugusel laetud kehade süsteemist . . . . .         | 29 |
| § 11. | Potentsiaali määramine laengute etteantud jaotuse järgi . . . . .                                   | 32 |
| § 12. | Poissoni ja Laplace'i võrrandid . . . . .   | 34 |
| § 13. | Piiritingimused juhtide pinnal . . . . .  | 35 |
| § 14. | Piiritingimused kahe dielektriku eralduspinnal . . . . .  | 36 |
| § 15. | Elektrostaatika põhiülesanne . . . . .  | 39 |
| § 16. | Tasaparalleelne väli . . . . .  | 40 |
| § 17. | Kompleksmuutuva funktsiooni rakendamine . . . . .   | 43 |
| § 18. | Ringristlõikega üksildase juhtme väli . . . . .   | 45 |
| § 19. | Kahe teineteise suhtes nurga all asetseva tasapinnalise plaadi väli . . . . .                       | 47 |
| § 20. | Kahejuhtmelise liini väli . . . . .   | 48 |
| § 21. | Rööpsete telgedega silindrite väli . . . . .  | 52 |
| § 22. | Väli tasapinnalise kondensaatori äärel . . . . .  | 54 |
| § 23. | Graafiline meetod väljapildi konstrueerimiseks tasaparalleelsele väljale . . . . .                  | 56 |
| § 24. | Graafiline meetod väljapildi konstrueerimiseks pöördkehade väljale . . . . .                        | 57 |
| § 25. | Graafiline meetod väljapildi konstrueerimiseks mittehomogeense isoleeriva keskkonna puhul . . . . . | 58 |

|       |  |    |
|-------|--|----|
| § 26. | Dielektrikust keha välises elektrostaatilises väljas . . . . .               | 58 |
| § 27. | Dielektrikust kera välises homogeenväljas . . . . .                          | 59 |
| § 28. | Juhtiv keha välises homogeenväljas. Elektrostaatiline varjestamine . . . . . | 62 |
| § 29. | Metallkera välises homogeenväljas . . . . .                                  | 64 |
| § 30. | Peegelkujutismeetod . . . . .  | 65 |

### Kolmas peatükk

#### Elektrimahtuvuse arvutus

|       |  |    |
|-------|--|----|
| § 31. | Ringsilindritevaheline mahtuvus. Kahejuhtmelise liini mahtuvus . . . . .                                 | 67 |
| § 32. | Kehade süsteemi potentsiaalitegurid, elektrostaatilise induktsiooni tegurid ja osamahtuvused . . . . .   | 70 |
| § 33. | Väga pikkade rööpjuhtmete süsteemi potentsiaalitegurid . . . . .   | 75 |
| § 34. | Kahejuhtmelise liini mahtuvus maa mõju arvestamisel . . . . .  | 76 |
| § 35. | Kolmefaasilise liini mahtuvus . . . . .  | 77 |
| § 36. | Juhtmesüsteemi potentsiaalitegurite ja mahtuvuste arvutamine keskmiste potentsiaalide meetodil . . . . . | 81 |
| § 37. | Mahtuvuse arvutamine väljapildi järgi . . . . .  | 85 |

### Neljas peatükk

#### Alalisvoolude elektriväli

|       |  |    |
|-------|--|----|
| § 38. | Alalisvoolude elektromagnetilise välja võrrandid . . . . .                   | 86 |
| § 39. | Elektriväli alalisvooludega juhtmeid ümbritsevas dielektrikus . . . . .      | 87 |
| § 40. | Elektriväli ja voolutiheduse vektori väli juhtivas keskkonnas . . . . .      | 88 |
| § 41. | Piiritingimused kahe juhtiva keskkonna eralduspinnal . . . . .               | 89 |
| § 42. | Juhtiva keskkonna elektrivälja analoogia elektrostaatilise väljaga . . . . . | 90 |
| § 43. | Kaabli lekkevool ja isolatsioonitakistus . . . . .                           | 92 |
| § 44. | Maandustakistus . . . . .  | 93 |

### Viies peatükk

#### Alalisvoolude magnetväli

|       |  |     |
|-------|--|-----|
| § 45. | Voolude magnetvälja pööriseline olemus. Vooluvälise piirkonna magnetvälja skalaarpotentsiaal . . . . . | 96  |
| § 46. | Voolude magnetvälja vektorpotentsiaal . . . . .  | 98  |
| § 47. | Magnetvoo avaldis vektorpotentsiaali kaudu . . . . .   | 101 |
| § 48. | Alalisvoolude magnetvälja arvutamise üldine ülesanne . . . . .   | 102 |
| § 49. | Tasaparalleelne väli . . . . .   | 102 |
| § 50. | Kompleksmuutuva funktsioonide rakendamine . . . . .  | 105 |
| § 51. | Joonjuhtmete väli. Tasaparalleelse elektri- ja magnetvälja vastavuse printsiip . . . . .               | 105 |
| § 52. | Sirge voolujuhe välises homogeenväljas . . . . .   | 107 |
| § 53. | Mistahes kujuga ja lõpliku ristlõikega juhtmete väli . . . . .   | 108 |
| § 54. | Ringristlõikega juhtmete väli . . . . .  | 109 |
| § 55. | Kahejuhtmelise liini väli . . . . .  | 110 |
| § 56. | Piiritingimused kahe erineva magnetilise läbitavusega keskkonna eralduspinnal . . . . .                | 112 |
| § 57. | Voolude väli ferromagnetiliste kehade tasaste pindade läheduses. Peegelkujutismeetod . . . . .         | 113 |
| § 58. | Väljapildi konstrueerimise graafiline meetod . . . . .   | 115 |

|       |   |     |
|-------|---|-----|
| § 59. | Ruumiline ülesanne. Ringjoonelise vooluringi väli . . . . .                         | 119 |
| § 60. | Skalaarpotentsiaali avaldis ruuminurga kaudu, mille all vooluring paistab . . . . . | 121 |
| § 61. | Mistahes kujuga vooluringi magnetväli suurel kaugusel vooluringist . . . . .        | 123 |
| § 62. | Keha välises magnetväljas. Analoogia elektrostaatilise ülesandega . . . . .         | 123 |
| § 63. | Kera ja pöördellipsoid välises homogeenväljas . . . . .                             | 124 |
| § 64. | Demagnetimistegurid . . . . .   | 126 |
| § 65. | Magnetiline varjestamine . . . . .  | 127 |

### *Kuues peatükk*

#### **Induktiivsuste arvutus**

|       |  |     |
|-------|--|-----|
| § 66. | Omaiduktiivsuse ja vastastikuse induktiivsuse üldavaldised . . . . .   | 129 |
| § 67. | Kahe ringjoonelise vooluringi vastastikune induktiivsus . . . . .      | 134 |
| § 68. | Ringjoonelise vooluringi induktiivsus . . . . .                        | 135 |
| § 69. | Induktiivsuste arvutus vooluringi osade kaupa . . . . .                | 136 |
| § 70. | Sirgetest osadest koosnevate vooluringide induktiivsused . . . . .     | 138 |
| § 71. | Ristkülikulise raami induktiivsus . . . . .                            | 139 |
| § 72. | Kahe kahejuhtmelise liini vaheline vastastikune induktiivsus . . . . . | 140 |
| § 73. | Kahejuhtmelise liini induktiivsus . . . . .                            | 141 |
| § 74. | Kolmefaasilise liini induktiivsus . . . . .                            | 142 |

### *Seitsmes peatükk*

#### **Elektromagnetiline vahelduvväli dielektrikus**

|       |   |     |
|-------|---|-----|
| § 75. | Tasapinnaline elektromagnetiline laine dielektrikus. Elektromagnetilise laine levimiskiirus . . . . .                                   | 144 |
| § 76. | Poyntingi vektor . . . . .  | 149 |
| § 77. | Elektromagnetilise energia voog . . . . .   | 152 |
| § 78. | Elektromagnetiliste lainete kiirgamine antennist. H. Hertzi katsed. P. N. Lebedevi tööd. Raadio leiutamine A. S. Popovi poolt . . . . . | 155 |
| § 79. | Elektromagnetilise välja elektrodünaamiline vektorpotentsiaal ja elektrodünaamiline skalaarpotentsiaal . . . . .                        | 160 |
| § 80. | Vahelduvlaengutega elektridipool . . . . .  | 165 |
| § 81. | Elektromagnetiline väli lainepikkusega võrreldes väikesel kaugusel dipoolist . . . . .  | 168 |
| § 82. | Elektromagnetiline väli lainepikkusest tunduvalt suuremal kaugusel dipoolist . . . . .  | 169 |
| § 83. | Dipooli ja antenni kiirgusvõimsus ja -takistus . . . . .  | 169 |
| § 84. | Elektromagnetilise energia ülekande piki liinijuhtmeid . . . . .  | 172 |
| § 85. | Elektromagnetilise energia ülekande mööda metalltorude siseõõnt . . . . .   | 174 |
| § 86. | Lainejuhtmed . . . . .  | 175 |

### *Kaheksas peatükk*

#### **Elektromagnetiline vahelduvväli juhtivas keskkonnas**

|       |  |     |
|-------|--|-----|
| § 87. | Tasapinnaline elektromagnetiline laine juhtivas keskkonnas . . . . . | 184 |
| § 88. | Lainepikkus ja laine sumbumine . . . . .                             | 187 |
| § 89. | Pinnanähtus . . . . .  | 189 |
| § 90. | Juhtmete aktiivtakistus ja siseinduktiivtakistus . . . . .           | 189 |

|        |   |     |
|--------|---|-----|
| § 91.  | Juhtme takistus teravalt avalduva pinnaefekti puhul . . . . .                   | 192 |
| § 92.  | Pinnanähtus ferromagnetilisest materjalist massiivjuhtmetes . . . . .           | 195 |
| § 93.  | Magnetilisest ja dielektrilisest kompleksläbitavusest . . . . .                 | 197 |
| § 94.  | Vahelduvmagnetvoo mitteühtlane jaotumine tasapinnalises lehes . . . . .         | 199 |
| § 95.  | Voolu ebahütlane jaotumine ümarjuhtmes . . . . .                                | 202 |
| § 96.  | Ümarjuhtmete aktiivtakistus ja siseinduktiivtakistus . . . . .                  | 208 |
| § 97.  | Lähinähtus. Pindkarastus induktsoonimeetodil . . . . .                          | 210 |
| § 98.  | Elektromagnetiline varjestamine . . . . .                                       | 211 |
| § 99.  | Elektri- ja magnetväljade eksperimentaalne uurimine ja modelleerimine . . . . . | 212 |
| § 100. | Elektri- ja magnetahelate parameetritest . . . . .                              | 217 |
|        | Tähestikuline sisunäitaja . . . . .   | 221 |

Леонид Робертович Нейман, Павел Лазаревич Калантаров.  
ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ. Часть третья. На  
эстонском языке. Издательство «Валгус». Таллин, Пярнуское шоссе, 10.

Toimetaja L. Abo. Kunstiline toimetaja R. Tungla. Tehniline toimetaja  
T. Linkvist. Korrektorid M. Maide ja A. Lember.

Laduda antud 19. IX 1968. Trükkida antud 19. III 1969. Kohila Paberivab-  
riku trükipaber nr. 2, 60×90/16. Trükipoognaid 14,25. Arvestuspoognaid  
13,15. Trükiarv 3000. Tellimise nr. 5363. H. Heidemanni nim. trükikoda,  
Tartu, Ülikooli t. 17/19. II. Hind 67 kop.

67 kop.

A-25898

4733673

TÜ RAAMATUKOGU



1 0300 00473367 3