MÉLANGES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES
TIRÉS DU
BULLETIN DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES
DE ST.-PÉTERSBOURG.
TOME IV.

$\frac{7}{19}$ Januar 1869.

Über das Bildungsgesetz der Zähler und Nenner bei Verwandlung der Kettenbrüche in gewöhnliche Brüche, von Ferd. Minding.

Wird der Kettenbruch

$$Q = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cdots + \cfrac{1}{i}}}$$

in einen gewöhnlichen Bruch verwandelt, so erhält man nach der üblichen Bezeichnung

$$Q = \frac{(abcd\ldots.i)}{(bcd\ldots.i)},$$

wo Zähler und Nenner nach einer bekannten Regel zu berechnen sind, welche jedoch das allgemeine Bildungsgesetz dieser Ausdrücke nicht anschaulich macht. Hierüber lehrt Euler in seinem *Specimen algorithmi singularis* § 8 (novi comment. acad. Petrop. t. IX) Folgendes:

Possunt autem ii (valores) quoque hoc modo repraesentari:

. . . .

$$(abcd) = abcd\left(1 + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{cd} + \frac{1}{abcd}\right)$$

$$(abcde) =$$

$$abcde\left(1 + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{cd} + \frac{1}{de} + \frac{1}{abcd} + \frac{1}{abde} + \frac{1}{bcde}\right).$$

In his autem denominatoribus occurrunt primo facta ex binis indicibus contiguis, tum vero producta ex binis illorum factorum, qui nullum indicem communem involvunt, tum sequentur producta ex ternis, quaternis etc. combinationibus, quae nullum implicant indicem communem; unde ratio compositionis jam fit perspicua.

Hiermit ist das fragliche Gesetz sofort auf die einfachste Weise gefunden und weitere Untersuchungen darüber scheinen nicht nöthig zu sein.

Bei Anwendung der bekannten Formeln auf ein dioptrisches Linsensystem hat sich mir jedoch dasselbe Gesetz in einer anderen Gestalt dargeboten, welche auch nach der obigen Euler'schen Darstellung noch einer kurzen Mittheilung werth scheint. Werden nämlich durch

$$-\frac{1}{u^0} \quad -\frac{1}{u'} \quad -\frac{1}{u''} \; . \; . \; . \; . \; -\frac{1}{u^{(n)}}$$

die Brennweiten von $n + 1$ auf einer gemeinschaftlichen Axe gereihten Glaslinsen, durch

$$t' \qquad t'' \qquad t''' \, . \, . \, . \; t^{(n)}$$

die Entfernungen vom zweiten Hauptpunkte jeder Linse bis zum ersten Hauptpunkte der folgenden bezeichnet, und setzt man

$$(u^0 \, t' \, u' \, t'' \, u'' \, . \, . \, . \, . \, t^{(n)} \, u^{(n)}) = k,$$

so ist nach § 14 der dioptrischen Untersuchungen von Gauss $-\frac{1}{k}$ die Brennweite des Linsensystems.

Diesen dioptrischen Bedeutungen gemäss nenne ich in dem vorstehenden Ausdrucke von k, t' t'' t''' . . . der Reihe nach die Abstände zwischen den Argumenten u^0 und u', u' und u'' u. s. w., daher auch $t' + t''$ den Abstand zwischen u^0 und u'', überhaupt

$$t^{(\mu+1)} + t^{(\mu+2)} + \, . \, . \, . \, . \, + t^{(\mu+\nu)}$$

den Abstand zwischen $u^{(\mu)}$ und $u^{(\mu+\nu)}$. Für die Darstellung von k gilt dann folgende Regel:

Man verbinde die $n + 1$ Elemente u zu Producten von je 1, 2, 3 . . . $n + 1$ Factoren, auf jede mögliche Weise, ohne Wiederholungen, ordne die Factoren jedes Productes nach der Reihe der steigenden Zeiger, bilde für jedes dieser Producte (U) aus den t die Abstände zwischen je zwei in U unmittelbar auf einander folgenden u und aus allen diesen Abständen das Product T, aus U und T das Product TU; so ist die Summe der auf diese Weise aus allen Combinationen der u entstandenen Producte TU der gesuchte Werth von k.

Beispiel.

$$\begin{aligned} k = (u^0 t' u' t'' u'' t''' u''') &= u^0 + u' + u'' + u''' + t' u^0 u' \\ &+ (t' + t'') u^0 u'' + (t' + t'' + t''') u^0 u''' + t'' u' u'' \\ &+ (t'' + t''') u' u''' + t''' u'' u''' + t' t'' u^0 u' u'' \\ &+ t' (t'' + t''') u^0 u' u''' + (t' + t'') t''' u^0 u'' u''' \\ &+ t'' t''' u' u'' u''' + t' t'' t''' u^0 u' u'' u'''. \end{aligned}$$

Man kann diese Regel auch so ausdrücken:

Nachdem die sämmtlichen Producte aus den u gebildet und ihre Factoren überall nach steigenden Zeigern geordnet sind, setze man in jedem Producte zwischen je zwei auf einander folgende u ihren Abstand, d. h. die Summe der in dem Schema $(u^0 t' u' \ldots . t^{(n)} u^{(n)})$ dazwischen befindlichen t, als Factor hinzu. So würde in obigem Falle beispielsweise anstatt $t'(t''+t''')u^0u'u'''$ zu schreiben sein:

$$u^0 t' u' (t''+t''') u'''.$$

Im Vorstehenden ist eine ungerade Anzahl von Elementen vorausgesetzt worden. Ist die Anzahl der Elemente gerade, so braucht man aus dem Werthe von k nur die mit dem Factor u^0 behafteten Glieder zu entnehmen, deren Summe nach Weglassung von u^0 den Werth von $l = (t' u' t'' u'' \ldots . t^{(n)} u^{(n)}) = \frac{dk}{du^0}$ darstellt. Man erhält z. B.

$$\begin{aligned}(t'u't''u''t'''u''') = 1 &+ t'u' + (t'+t'')u'' + (t'+t''+t''')u''' \\ &+ t't''u'u'' + t'(t''+t''')u'u''' + (t'+t'')t'''u''u''' \\ &+ t't''t'''u'u''u'''.\end{aligned}$$

Auch hier besteht wieder dasselbe Bildungsgesetz, wenn nur zu $u'u''u'''$ ein erstes Element u^0 hinzugedacht wird, welches in alle vorkommende Combinationen der u eingeführt werden muss, schliesslich aber wieder wegfällt.

Ist in obigem k eines der t gleich Null, so treten die beiden daneben stehenden u in eine Stelle zusammen, da ihr Abstand gleich Null ist, und ihre Summe bildet ein neues Element. Dabei vermindert sich die Anzahl der Elemente um 2. Es sei z. B. $t''=0$, so wird $(u^0 t' u' 0 u'' t''' u''') = (u^0 t' (u'+u'') t''' u''')$.

Die Richtigkeit der Regel wird leicht durch einige Beispiele bestätigt; ein vollständiger Beweis kann so geführt werden:

Soll $k_{n+1} = (u^0 t' u' t'' u'' \ldots . t^{(n)} u^{(n)} t^{(n+1)} u^{(n+1)})$ nach obiger Regel gebildet werden, so unterscheide man die Glieder, welche den Factor $t^{(n+1)}$ enthalten, von allen übrigen. Die letzteren ergeben sich sofort aus der Annahme $t^{(n+1)} = 0$ und ihre Summe ist mithin $(u^0 t' u' t'' u'' \ldots t^{(n)} (u^{(n)} + u^{(n+1)})) = k_n + \frac{dk_n}{du^{(n)}} u^{(n+1)}$. Die in $t^{(n+1)}$ multiplicirten Glieder müssen alle auch den Factor $u^{(n+1)}$ enthalten, da der Regel zufolge $t^{(n+1)}$ nie ohne $u^{(n+1)}$ auftreten kann; alle diese in $t^{(n+1)} u^{(n+1)}$ multiplicirten Glieder entstehen aber durch Verbindung dieses Factors mit allen aus den Elementen $u^0 t' u' t'' u'' \ldots . t^{(n)} u^{(n)}$ hervorgehenden Gliedern, deren Summe k_n ist; die fraglichen Glieder geben also die Summe $k_n t^{(n+1)} u^{(n+1)}$ und man erhält:

$$k_{n+1} = k_n + \frac{dk_n}{du^{(n)}} u^{(n+1)} + k_n t^{(n+1)} u^{(n+1)}.$$

Derselbe Werth folgt aber auch nach der gewöhnlichen Rechnungsweise; denn es ist

$$k_{n+1} = (u^0 t' u' t'' u'' \ldots . t^{(n+1)}) u^{(n+1)} + k_n,$$

$$(u^0 t' u' \ldots t^{(n+1)}) = k_n t^{(n+1)} + \frac{dk_n}{du^{(n)}};$$

folglich

$$k_{n+1} = k_n + \left(k_n t^{(n+1)} + \frac{dk_n}{du^{(n)}}\right) u^{(n+1)},$$

wie vorhin.

Der wichtige Satz, dass die umgekehrte Anordnung der Elemente den Werth von k nicht ändert, folgt hier eben so unmittelbar aus dem Bildungsgesetze, wie bei Euler.

In der Euler'schen Form entwickelt, stellt sich $(abcd \ldots i)$, wenn die Anzahl der Elemente n ist, als eine Summe von

$$\frac{(1+\sqrt{5})^{n+1}-(1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}.\sqrt{5}}$$

einfachen Gliedern oder Producten aus den Elementen dar; diese werden nach der vorstehenden Regel, je nachdem n gerade oder ungerade ist, in $2^{\frac{n}{2}}$ oder $2^{\frac{n+1}{2}}-1$ Gruppen von einfacher und ansprechender Bedeutung zusammengefasst. So vereinigen sich in obigem Beispiele bei 7 Elementen 21 Glieder in 15 Gruppen, bei 6 Elementen 13 Glieder in 8 Gruppen.

Wenn der Kettenbruch in folgender Form vorliegt:

$$Q=a+\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\cfrac{b_3}{a_3+\ldots}}}$$

so wären die Theilzähler b erst auf Einheiten zu bringen, um dann obige Regel anzuwenden. Nimmt man einerseits alle b mit ungeraden, andererseits alle b mit geraden Zeigern bis zu einer gewissen Grenze zusammen und setzt demnach:

$$b_1 b_3 b_5 \ldots b_{2n-1}=B_{2n-1},\quad b_2 b_4 b_6 \ldots b_{2n}=B_{2n},$$

so ist

$$Q=a+\cfrac{1}{\frac{a_1}{B_1}+\cfrac{1}{\frac{B_1a_2}{B_2}+\cfrac{1}{\frac{B_2a_3}{B_3}+\cfrac{1}{\frac{B_3a_4}{B_4}+\ldots}}}}$$

Ohne von dieser Umstellung Gebrauch zu machen, hat Hr. Stern im 10ten Bande des Crell'schen Journals (S. 5 und 6) das allgemeine Bildungsgesetz der Zähler und Nenner entwickelt. Diese Darstellung gewinnt noch an Einfachheit, wenn man sich dabei ganz

an Euler's Verfahren anschliesst. So z. B. giebt der Kettenbruch

$$a+\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\cfrac{b_3}{a_3+\cfrac{b_4}{a_4}}}}$$

den Zähler:

$$a b_2 b_4+a_2 b_1 b_4+a_4 b_1 b_3+a a_1 a_2 b_4+a a_1 a_4 b_3$$
$$+a a_3 a_4 b_2+a_2 a_3 a_4 b_1+a a_1 a_2 a_3 a_4,$$

welcher sich auch schreiben lässt wie folgt:

$$(a a_1 a_2 a_3 a_4)\left\{1+\frac{b_1}{aa_1}+\frac{b_2}{a_1a_2}+\frac{b_3}{a_2a_3}+\frac{b_4}{a_3a_4}\right.$$
$$\left.+\frac{b_1b_3}{aa_1a_2a_3}+\frac{b_1b_4}{aa_1a_3a_4}+\frac{b_2b_4}{a_1a_2a_3a_4}\right\}.$$

Hiernach ist jeder im Nenner vorkommenden Ambe $a_m a_{m+1}$ der Zähler b_{m+1} beizufügen und mit den so gebildeten Ausdrücken $\frac{b_{m+1}}{a_m a_{m+1}}$ ganz nach Euler's Vorschrift zu verfahren.

Dorpat im December 1868.

Gedruckt auf Verfügung der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften.
Im April 1869. K. Wesselowski, beständiger Secretair.

Buchdruckerei der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften.
(Wass.-Ostr., 9. Lin., № 12.)