

MATEMAATIKA

Ash. ens

AR

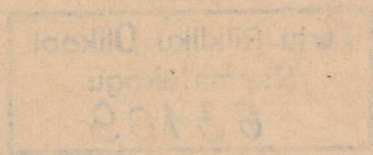
63109

A-26789

E. ETVERK, O. PRINITS

MATEMAATIKA

X JA XI KLASSILE



KIRJASTUS «EESTI RAAMAT» TALLINN 1965

Kaaneukujundus *L. Kruusmaa*

Kinnitatud Eesti NSV Haridusministeeriumi poolt

2



ARHIIVIKOGU

I. GEOMEETRILISED TEISENDUSED TASAPINNAL.

§ 1. GEOMEETRILISE TEISENDUSE MÕISTE.

Geomeetrilise teisenduse mõiste selgitamiseks lahendame järgmise ülesande.

Arvteljel t on antud rida punkte $A, B, C, D, \dots$, igaüks oma abstsissiga, näiteks

$$A(-3); B(-1); C(2); D(3); \dots$$

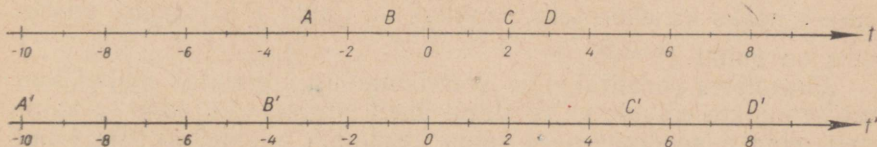
Tähistame abstsisse üldiselt tähega x . Nõutakse leida mingil teisel teljel t' uus rida punkte $A', B', C', \dots$ nii, et nende abstsissid x' oleksid määratud mingi valemiga, näiteks

$$x' = 3x - 1.$$

Ülesande lahendamiseks arvutame antud abstsisside x järgi neile vastavad abstsissid x' , kasutades antud valemit. Saame järgmise tabeli:

x	-3	-1	2	3	...
x'	-10	-4	5	8	...

Kujutades antud punktid teljel t ning neile vastavad punktid teljel t' , saame joonise 1.



Joon. 1.

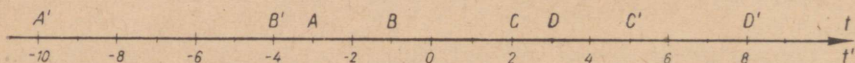
Me ütleme, et arvtelje t punktid on teisendatud telje t' punktideks; lühemalt — arvtelg t on teisendatud teljeks t' . Saadud punkte nimetatakse antud punktide **teisenditeks**. On kerge näha, et antud juhul telje t igale punktile $M(x)$ on võimalik leida teisendit $M'(x')$ ja, ümberpöörduvalt, telje t' iga punkt $M'(x')$ on telje t ühe punkti $M(x)$ teisendiks.

Et leida, missuguse punkti teisendiks on näiteks telje t' punkt abstsissiga $x' = -10$, asendame antud teisendusvalemis

$$x' = 3x - 1$$

suuruse x' arvuga -10 ja lahendame saadud võrrandi. Saame: $x = -3$. Niisiis, telje t' punkt $M'(-10)$ on telje t punkti $M(-3)$ teisendiks.

Oletame nüüd, et teljed t ja t' on võrdsete ühikutega (nagu joonisel 1). Paigutame teljed teineteise peale nii, et kõik vastavad jaotuspunktid ühtivad (joon. 2). Siis antud punktid ja nende teisendid asetsevad ühel ja samal sirgel (mida peame mõtlema kahekordsena). Sel juhul öeldakse, et arvtelje punktid $A, B, C, \dots$



Joon. 2.

on teisendatud sama telje punktideks $A', B', C' \dots$; lühemalt — arvtelg on teisendatud iseendaks (kuigi punktid pole jäänud samadeks).

Teisendamisel võib juhtuda, et punkt ja tema teisend ühtivad.

Punkti, mis ühtib oma teisendiga, nimetatakse selle teisenduse kahekordseks punktiks.

Leiame joonisel 2 kujutatud teisenduse kahekordsed punktid. Selleks asendame teisendusvalemis tähe x' tähega x (sest kahekordses punktis $x' = x$) ja lahendame saadud võrrandi

$$x = 3x - 1.$$

Sel võrrandil on üksainus lahend $x = \frac{1}{2}$. Järelikult antud teisenduse ainsaks kahekordseks punktiks on punkt $P\left(\frac{1}{2}\right)$; tema teisendiks on punkt $P' \equiv P$.

Järgmistes paragrahvides üldistame siin arendatud mõttekäiku nii, et punkte võtame mitte ainult ühelt sirgelt, vaid kogu tasapinnalt, ning teisendame need sama tasapinna punktideks. Sel juhul öeldakse, et tasapind teisendatakse iseendaks. Tei-

senduseeskirjana kasutame seejuures harilikult geomeetrist konstruktsiooni, mitte valemit.

Tasapinna teisendamisel iseendaks teisendub selle tasapinna iga kujund sama tasapinna teatud kujundiks. Kui kujundi iga kahe punkti vaheline kaugus on võrdne tema teisendi vastavate punktide vahelise kaugusega, siis kujund ja tema teisend on võrdsed. Sellise omadusega teisendust nimetatakse **liikumisteisenduseks** ehk **liikumiseks**.^{*} Esimeses järjekorras ongi meie ülesandeks vaadelda liikumisteisendusi tasapinnal ja analüüsida liikumise liike. Teisenduste käsitlusel lähtume lõikude, nurkade ja kolmnurkade võrdsuse mõistest, kasutamata liikumise mõistet, mis on meile veel tundmata, ja tuletame neist liikumise mõiste.

Ei tule arvata, et iga teisendus on liikumine. Näiteks joonisel 2 kujutatud teisendus pole liikumine, sest lõik AB ei võrdu temale vastava lõiguga $A'B'$. Liikumisteisendused moodustavad kõige lihtsama (kuid väga tähtsa) geomeetriliste teisenduste rühma. Peale liikumisteisenduste vaatleme käesolevas peatükis veel homoteetsust, s. o. teisendust, mis võimaldab antud kujundist saada temaga sarnast kujundit.

Ülesandeid.

1. Arvtelje punktid $M(x)$ on teisendatud sama telje punktideks $M'(x')$ valemi järgi $x' = 3 - 2x$. Leia:

- 1) punktide $x = -2, 0$ ja 3 teisendid;
- 2) punktid, mille teisenditeks on punktid $x' = 9, -5$ ja 0 ;
- 3) antud teisenduse kahekordne punkt;
- 4) punkti $x = 5$ teisend ja punkt, mille teisend on $x' = 5$.

2. Abstsissitelje punktid on teisendatud ordinaattelje punktideks valemi järgi $y = 0,5x^2$. Leia punktide $x = 2, -3$ ja 4 teisendid. Missuguse punkti teisendiks on punkt $y = 18$? Milliseks y -telje osaks teisendub kogu x -telg?

3. On antud ringjoon ja selle mingi puutuja. Uhendame puutuja mingi punkti M ringjoone keskpunktiga O ning loeme punktile M vastavaks ringjoone selle punkti M' , milles ringjoon ja lõik OM lõikuvad. Tee joonis ja selgita selle abil, mis kujund ringjoonel vastab

- 1) puutuja mingile lõigule AB ;
- 2) puutepunktile;
- 3) kogu puutujale.

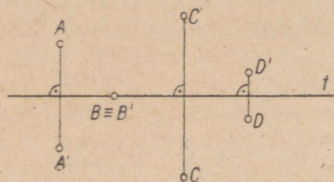
Kas see teisendus on liikumine?

§ 2. TELJELINE SÜMMEETRIA.

1. **Telje suhtes sümmeetrilised punktid.** Olgu antud mingi sirge t ja väljaspool seda punkt M (joon. 3). Leiame punkti M' nii, et sirge t jääb lõigu MM' keskristsirgeks. Selleks joonestame



Joon. 3.



Joon. 4.

sirge $MM' \perp t$ ja võtame sellel punkti M' nii, et $M'M_0 = MM_0$, kus M_0 on sirgete MM' ja t lõikepunkt. Niisuguse omadusega punkti M' nimetatakse antud punktiga M sirge t suhtes sümmeetriliseks punktiks. Lauset «Punkt M' on sirge t suhtes sümmeetriline punktiga M » kirjutame lühidalt kujul: $M' \equiv t(M)$.

On selge, et kui $M' \equiv t(M)$, siis ka $M \equiv t(M')$; seega võime kõnelda kahest teineteisega (sirge t suhtes) sümmeetrilisest punktist. Sirget t nimetatakse nende punktide sümmeetriateljeks.

Niisiis:

tasapinna kaks punkti on sellel tasapinnal asetseva sirge suhtes sümmeetrilised, kui see sirge on nende punktide ühenduslõigu keskristsirgeks.

Kui punkt asetseb sümmeetriateljel, siis loeme ta sümmeetriliseks iseendaga; igal muul juhul on punkt ja tema teine kaks erinevat punkti (joon. 4).

2. **Sümmeetriliste punktide põhiomadus.** Anname telje suhtes sümmeetriliste punktide põhiomaduse järgmise teoreemi näol:

lõigud, mis ühendavad sümmeetriatelje punkti kahe selle telje suhtes sümmeetrilise punktiga, on omavahel võrdsed ning moodustavad teljega võrdsed nurgad.

Tõepoolest, kui sümmeetriatelje t mingi punkti A ühendame punktidega M ja $M' \equiv t(M)$ (joon. 5), siis saame kaks täisnurket kolmnurka AM_0M ja AM_0M' , mis on võrdsed tunnuse knk põhjal. Kolmnurkade võrdsusest järeldubki, et

$$AM = AM' \text{ ja } \alpha = \alpha'.$$

kui mingi punkt on kahest punktist võrdsetel kaugustel, siis asetseb ta nende punktide sümmeetriateljel.

A horizontal line with two points marked with an 'X' and labeled I_1 and I_2 from left to right. Above the line, the label OM is positioned to the right of I_1 . Below the line, the label OM' is positioned to the left of I_2 .

7

3. Telje suhtes sümmeetrilised kujundid defineeritakse järgmiselt:

kujundid k ja k' on telje t suhtes sümmeetrilised, kui kummagi kujundi iga punkt on selle telje suhtes sümmeetriline teise kujundi mingi punktiga.

Lauset «Kujund k' on telje t suhtes sümmeetriline kujundiga k » kirjutame edaspidi lühidalt nii:

$$k' \equiv t(k).$$

Antud definitsioonist lähtudes tõestame järgmise teoreemi:

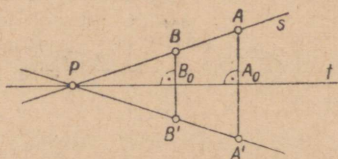
sirgega antud telje suhtes sümmeetriliseks kujundiks on sirge; mõlemad sirged lõikavad sümmeetriatelge ühes ja samas punktis või on teljega paralleelsed.

Tõestamisel eeldame esmalt, et antud sirge s lõikab telge t , näiteks punktis P (joon. 9). Võtame sirgel s mingi punkti A , leiame teisendi $A' \equiv t(A)$ ning veendume, et sirge $A'P$ ongi antud sirge s sümmeetriliseks teisendiks. Selleks näitame, et kummagi sirge iga punkt on telje t suhtes sümmeetriline teise sirge mingi punktiga. Punkti P kohta on see ilmne: $P' \equiv P$. Võtame nüüd ühel sirgetest, näiteks sirgel s , mingi punkti B ning tõmbame $BB_0 \perp t$ kuni lõikumiseni sirgega $A'P$ punktis B' . Siis

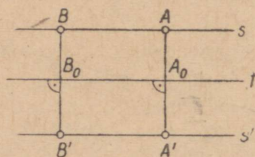
$$\angle BPB_0 = \angle B'PB_0,$$

sest neil on ühise külje PB_0 juures vastavalt võrdsed nurgad ($\angle BPB_0 = \angle B'PB_0$ sümmeetriliste punktide põhiomaduse alusel, § 2, p. 2). Kolmnurkade võrdsusest järeldub, et $BB_0 = B'B_0$. Et ühtlasi $BB' \perp t$, siis on tõestatud, et $B' \equiv t(B)$.

Niisamuti saab tõestada, et sirge $A'P$ iga punkt on sümmeetriline sirge s mingi punktiga.

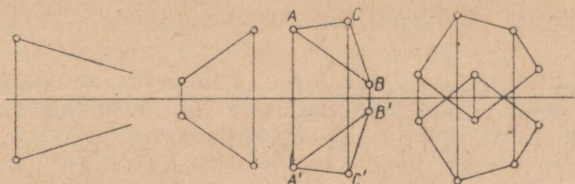


Joon. 9.



Joon. 10.

Kui sirge s on paralleelne teljega t (joon. 10), siis joonestame läbi punkti $A' \equiv t(A)$ sirge $s' \parallel s$ ning näitame, et endisel viisil leitud punkt B' on sümmeetriline punktiga B . Kolmnurkade võrdsuse asemel tuleb nüüd kasutada ristkülikute vastaskülgede võrdsust: $BB_0 = AA_0 = A'A_0 = B'B_0$.



Joon. 11.

Tõestatud teoreemist järeldame (joon. 11), et

kiirega sümmeetriline kujund on kiir, lõiguga sümmeetriline kujund on lõik, kolmnurgaga sümmeetriline kujund on kolmnurk, hulknurgaga sümmeetriline kujund on antud hulknurgaga samanimeline hulknurk.

4. Sümmeetriliste kujundite võrdsus. Näitame, et

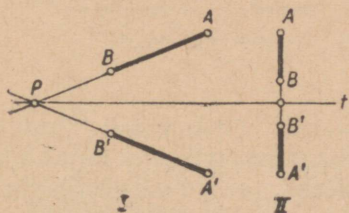
iga kaks teineteisega mingi telje suhtes sümmeetrilist kujundit on võrdsed.

Vaatleme esmalt lõikusid. Kui teineteisega sümmeetrilised lõigud on omavahel paralleelsed (joon. 10), siis nad on võrdsed kui ühe ja sama ristküliku vastasküljed.

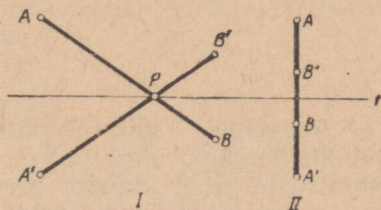
Kui sümmeetrilised lõigud pole paralleelsed ega lõika telge (nagu AB ja $A'B'$ joonistel 12, I ja 12, II), siis pikendame neid kuni teljega lõikumiseni mingis punktis P . Sümmeetriliste punktide põhiomaduse põhjal on siis $AP = A'P$ ja $BP = B'P$. Esimese võrduse pooltest teise võrduse pooli lahutades saame, et $AB = A'B'$.

Lõpuks, kui kahel sümmeetrilisel lõigul AB ja $A'B'$ leidub teljega ühine punkt P (joon. 13, I, II), siis saame endisel viisil võrdsused $AP = A'P$ ja $BP = B'P$, millede vastavate poolte liitmine näitab, et $AB = A'B'$.

Sümmeetriliste lõikude võrdsusest järeldub (tunnuse kkk põhjal) kahe sümmeetrilise kolmnurga võrdsus ja kolmnurkade võrdsusest kahe sümmeetrilise nurga võrdsus. Sümmeetriliste lõikude ja nurkade võrdsusest aga saab juba järeldada iga kahe sümmeetrilise kujundi võrdsust.



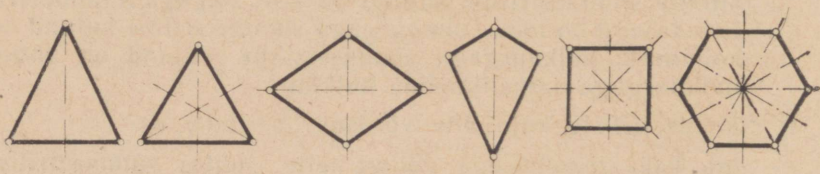
Joon. 12.



Joon. 13.

5. **Iseendaga sümmeetriline kujund.** Leidub kujundeid, mis on mingi ühe (või mitme) sirge suhtes sümmeetrilised iseendaga. Iseendaga sümmeetrilised kujundid (joon. 14) on näiteks: võrdhaarne kolmnurk (üks sümmeetriatelg), võrdkülgne kolmnurk (kolm sümmeetriatelge), romb (kaks sümmeetriatelge), romboid (üks sümmeetriatelg), ruut (neli sümmeetriatelge), korrapärane kuusnurk (kuus sümmeetriatelge). Ringjoon aga on sümmeetriline iga sirge suhtes, mis läbib tema keskpunkti; seega

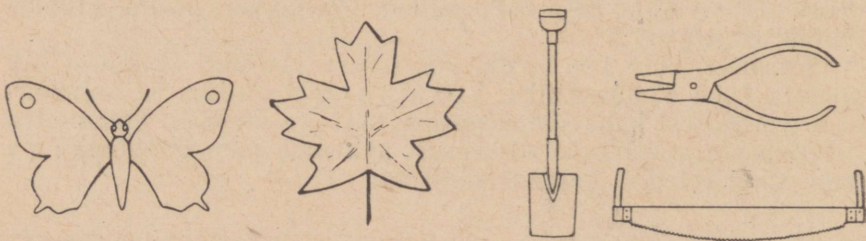
ringjoonel on lõpmata palju sümmeetriatelgi.



Joon. 14.

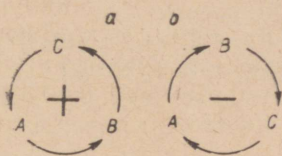
Iseendaga sümmeetrilise kujundi paljud omadused järelduvad kergesti tema sümmeetriast. Teades näiteks, et romb on sümmeetriline oma diagonaalsirge suhtes, järeldame kohe, et rombi diagonaal poolitab rombi nurga ning et rombi diagonaalid on omavahel risti ja poolitavad teineteist (põhjenda neid väiteid!).

Iseendaga sümmeetrilised on ka paljud looduslikud vormid ja inimese poolt valmistatud esemed (joon. 15).

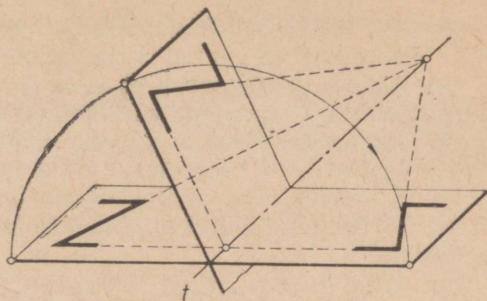


Joon. 15.

6. **Peegeldus sümmeetriateisendusena.** Üleminekut antud kujundilt temaga mingi sirge suhtes sümmeetrilisele kujundile nimetatakse antud kujundi **peegeldamiseks** (antud sirgest). Sirget nimetatakse siis **peegeldusteljeks**, peegeldamisel saadavat kujundit aga antud kujundi **peegelduseks**.



Joon. 16.



Joon. 17.

Eespool nägime (vaata § 2, p. 4), et kujund ja tema peegeldus on võrdsed, seega peegeldamine sirgest on üks liikumisteisendus. Seda liikumist iseloomustab kolmnurga (üldiselt hulknurga) tippude ringjärjestuse ehk kolmnurga orientatsiooni muutumine. Tõepoolest, näiteks joonisel 11 on kolmnurga ABC orientatsioon positiivne (nagu joonisel 16, a), kuid peegeldatud kolmnurgal $A'B'C'$ on see negatiivne (joon. 16, b).

Kujund ja tema peegeldus on teineteisest saadavad ka tasapinna pööramise teel 180° võrra ümber peegeldustelje (joon. 17); seega sümmeetriateisendus ehk peegeldamine asendab geomeetrias tasapinna pööramist samal tasapinnal asetseva sirge ümber sirgnurga võrra. See tasapinna ümberpööramine kutsubki esile orientatsiooni muutumise.

7. Samasus kahekordse peegeldusena. Olgu antud kujund k ja telg t . Leiame peegelduse $k' \equiv t(k)$. Nüüd võtame peegelduse k' lähtekujundiks ning endist telge kasutades leiame tema peegelduse k'' . Ilmselt saame teise peegeldamise tulemuseks tagasi lähtekujundi k ; seega $k'' \equiv k$:

peegelduse peegeldamisel samast teljest saame tulemuseks lähtekujundi.

Teisendust, mis annab tulemuseks lähtekujundi, nimetatakse **s a m a s u s e k s**. Nii siis oleme leidnud, et

sama telje korral kahest sümmeetriateisendusest koosnev teisendus osutub samasuseks.

Ülesandeid.

4. a) Antud on kaks lõikuvat sirget. Leia nende sümmeetriateljed.

b) Antud on kaks paralleelset sirget. Leia nende sümmeetriateljed. Kui palju neid on?

5. a) Antud on kolmnurk ja seda mittelõikav sirge. Leia selle kolmnurgaga antud sirge suhtes sümmeetriline kolmnurk.

b) Antud on kolmnurk ja seda lõikav sirge. Leia selle kolmnurgaga antud sirge suhtes sümmeetriline kolmnurk.

6. Joonesta antud ringjoone mingi kõõlu suhtes sümmeetriline ringjoon. Mis tingimusel need kaks ringjoont ühtivad?

7. Kus asetsevad sümmeetriateisenduse kahekordsed punktid?

8. a) Missugused ringjooned vastavad sümmeetriateisenduses iseendale?

b) Missugused sirged vastavad sümmeetriateisenduses iseendale?

9. Lõika kahekorra murtud paberilehest mingi sümmeetriline puulehe kujutis.

10. a) Lõika paberist välja mingi teravnurkne kolmnurk ja leia kolmnurga voltimise teel selle ümberringjoone keskpunkt.

b) Lõika paberist välja mingi võrdhaarne kolmnurk ja leia kolmnurga voltimise teel selle siseringjoone keskpunkt.

11. Neljakordselt kokkumurtud paberilehe murdenurgast lõigatakse ära täisnurkne kolmnurk. Milline kuju on äralõigatud leheosal avatult?

12. a) Leia punktidega

$$(0; 3), (-2; 5), (4; -1), (-6; -4)$$

x -telje suhtes sümmeetrilised punktid.

b) Leia punktidega

$$(8; 0), (2; 3), (-6; 5), (0; -3)$$

y -telje suhtes sümmeetrilised punktid.

13. Leia punktiga $(2; 5)$ sümmeetriline punkt 1) x -telje suhtes, 2) y -telje suhtes ja 3) sirge $y=x$ suhtes.

14. Leia järgmiste sirgetega x -telje suhtes sümmeetrilised sirged: 1) $y=2x+1$; 2) $y=1,5$; 3) $y=1,5x$; 4) $x=3$; 5) $y=-x+a$.

15. Kasutades sümmeetriat tõesta, et kõõluga ristuv diameeter poolitab kõõlu, sellele vastava kesknurga ja kaare.

16. Kasutades sümmeetriat tõesta, et kui kahel ringjoonel leidub ühine punkt väljaspool nende keskpunkte läbivat sirget, siis neil leidub veel teine ühine punkt.

17. Kasutades sümmeetriat tõesta, et võrdhaarse trapetsi haarade pikendused lõikuvad aluse keskristsirgel.

§ 3. RÕÖPLÜKE.

1. **Korduv peegeldamine.** Olgu antud kujund k ning kaks telge t_1 ja t_2 . Peegeldame kujundi k esmalt teljest t_1 ning siis

saadud peegelduse teljest t_2 . Esimene peegeldus olgu k' ja teine k'' . Siis võime lühidalt kirjutada nii:

$$k' \equiv t_1(k); k'' \equiv t_2(k').$$

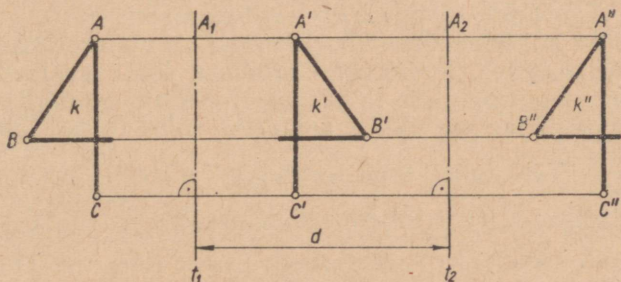
Analoogiliselt võiksime kolmanda peegelduse (kolmandast teljest t_3) sümboliliselt avaldada kujul

$$k''' \equiv t_3(k'').$$

Mõttekäigu jätkamisel võime nii jõuda kuitahes suurele peegelduste kordusarvule.

Järgnevalt hakkame uurima kujundite k ja k'' (s. t. antud kujundi ja tema kahekordse peegelduse) vastastikust asendit sõltuvalt peegeldustelgede vastastikusest asendist. Et iga peegeldus muudab kujundi orientatsiooni vastupidiseks, siis kahekordne peegeldus on alati sama orientatsiooniga mis antud kujund.

2. **Rööplüke kahe peegelduse tulemusena.** Olgu peegeldusteljed t_1 ja t_2 omavahel paralleelsed (joon. 18). Kujundite k ja k'' vastastikuse asendi uurimiseks võtame kujundi k kolm punkti A ,



Joon. 18.

B ja C ning leiame neile vastavad kujundi k'' punktid A'' , B'' ja C'' . Et sirged t_1 ja t_2 on paralleelsed, siis nende ristsirged AA' ja $A'A''$ ühtivad; järelikult punktid A , A' ja A'' asetsevad ühel sirgel. Niisamuti asetsevad ühel sirgel punktid B , B' ja B'' ning ka punktid C , C' ja C'' . Ühtlasi on $AA'' \parallel BB'' \parallel CC''$ kui ühe ja sama sirge ristsirged.

Edasi näitame, et lõigud AA'' , BB'' ja CC'' on võrdsed ja sama-suunalised. Selleks avaldame need lõigud telgede vahelise kauguse d abil (joon. 18):

$$\begin{aligned} AA'' &= AA_1 + A_1A' + A'A_2 + A_2A'' = \\ &= 2A_1A' + 2A'A_2 = 2A_1A_2 = 2d. \end{aligned}$$

Niisamuti saaksime, et $BB'' = CC'' = 2d$. Et esitatud tulemus kehtiks antud kujundi ja telgede igasuguse vastastikuse asendi

puhul, tuleks lõike $AA_1, A_1A', \dots$ vaadelda suunaga lõikudena. Meie juhul on võrdsete lõikude

$$AA'' = BB'' = CC'' = \dots$$

ühiseks suunaks suund telje t_1 poolt telje t_2 poole.

Nii on selgunud, et paralleelsete telgede korral kahe peegelduse järjestikune rakendamine annab teisenduse, milles vastavate punktide ühenduslõigud on paralleelsed, võrdsed ja samasuunalised.

Teisendust, milles vastavate punktide ühenduslõigud on paralleelsed, võrdsed ja samasuunalised, nimetatakse rööplükkeks (või lühemalt lihtsalt lükkeks).

Rööplükkel sirge teisendub temaga paralleelseks sirgeks või samaks sirgeks.

Tõepoolest, kui sirge on lükke sihiline (nagu sirge AA' joonisel 18), siis ta teisendub samaks sirgeks; kui ta pole lükke sihiline, siis ta teisendub temaga paralleelseks sirgeks (näiteks joonisel 18 $AB \parallel A''B''$, sest $ABB''A''$ on rööpkülik).

On ilmne, et rööplükkel iga kujund teisendub temaga võrdseks kujundiks. Tähendab rööplükke on ka liikumisteisendus.

Rööplükke kui teisenduse kirjeldamisel on otstarbekohane kasutada **vektori** mõistet. Vektor on suunaga lõik. Vektorit, mis on paralleelne, samasuunaline ja pikkuselt võrdub punktide nihetega rööplükkel, nimetatakse **lükke vektoriks** ning teda tähistatakse

sümboliga $\vec{v}$. Tähistades telgedevahelist vektorit (s. t. vektorit, mis läheb teljelt t_1 risti teljeni t_2) sümboliga $\vec{d}$, võime kirjutada:

$$\vec{v} = 2\vec{d},$$

kus $2\vec{d}$ tähendab vektorit, mis on vektoriga $\vec{d}$ samasuunaline, kuid temast 2 korda pikem. Niisiis võime öelda, et

paralleelsete telgede korral kahest peegeldusest koosnev teisendus osutub rööplükkeks, mille vektor võrdub peegeldustelgede vahelise vektori kahekordsega.

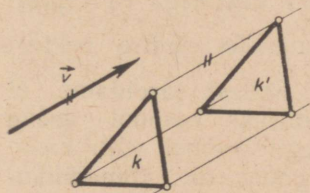
Rööplükke kui teisendus on määratud, kui tema vektor $\vec{v}$ on antud. Seepärast võib kujundi k rööplüket märkida lihtsalt sümboliga $\vec{v}(k)$, kus $\vec{v}$ tähendab lükke vektorit. Tähistades antud kujundist k rööplükkel saadava kujundi (ehk antud kujundi lükke-teisendi) tähega k' , võime lühidalt kirjutada:

$$k' \equiv \vec{v}(k),$$

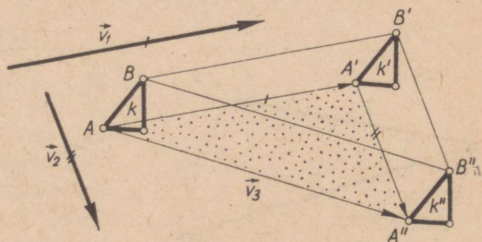
s. t. kujund k' on kujundi k rööplükke, kui lükke vektoriks on $\vec{v}$.

Eespool arendatud mõttekäik on pööratav, s. t. iga rööplüke on vaadeldav peegelduse peegeldusena, kusjuures peegeldusteljed on omavahel paralleelsed ja sihilt risti lükke vektoriga. Vastavas konstruktsioonis võtame esimese peegeldustelje risti lükke vektoriga (kuid muidu vabalt); teise telje aga joonestame esimesega paralleelselt nii, et see paikneks esimesest teljest lükke vektoriga määratud suunas ja sellest kaugusel, mis võrdub poolega lükke vektori pikkusest.

3. **Rööplükke konstruktsioon.** Olgu antud kujund k ja lükke vektor $\vec{v}$ (joon. 19). Lükkekujundi $k' \equiv \vec{v}(k)$ saame järgmiselt. Kujundit k määravatest punktidest tõmbame lükke vektori $\vec{v}$ paralleelid ning kanname neile, alates kujundi punktidest, lükke vek-



Joon. 19.



Joon. 20.

tori suunas lõigud, mis võrduvad selle vektori pikkusega. Nende lõikude lõpp-punktid määravadki otsitava lükkekujundi $k' \equiv \vec{v}(k)$.

Rakendame nüüd antud kujundile k järjestikku kaks rööplüket vektoritega vastavalt $\vec{v}_1$ ja $\vec{v}_2$. Olgu esimene tulemus $k' \equiv \vec{v}_1(k)$ ja teine $k'' \equiv \vec{v}_2(k')$. Võrdleme teise lükke tulemust k'' lähtekujundiga k (joon. 20). Selleks vaatleme kujundi k mingit lõiku AB ja sellele kujundeis k' ja k'' vastavaid lõike $A'B'$ ja $A''B''$. Et rööplükkel lõik teisendub temaga paralleelseks (erijuhul samasihiliseks) ja võrdseks lõiguks, siis

$$AB \# A'B' \text{ ja } A'B' \# A''B''.$$

Kuid siis $AB \# A''B''$, mistõttu $ABB''A''$ on rööpkülik ja järelikult $AA'' \# BB''$. Nii selgub, et kujund k'' on saadav kujundist k ainsa

rööplükkega, mille vektor $\vec{v}_3 = \vec{AA''}$. Viimase vektori loeme vekto-
rite $\vec{v}_1$ ja $\vec{v}_2$ summaks ning avaldame kujul:

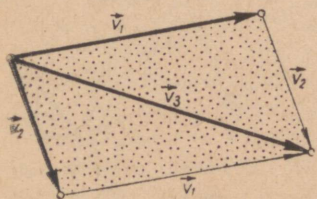
$$\vec{v}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2.$$

Joonisel 20 nähtub, et kahe vektori $\vec{v}_1$ ja $\vec{v}_2$ liitmiseks tuleb rööplükke abil teise liidetava alguspunkt teha ühtivaks esimese liidetava lõpp-punktiga (A') ning saadud murdjoone ($AA'A''$) alguspunkt lugeda vektorite summa alguspunktiks, murdjoone lõpp-punkt aga summa lõpp-punktiks. Niisiis on selgunud, et

kahest rööplükkest koosnev teisendus osutub rööplükkeks, mille vektor võrdub antud lükete vektorite summaga.

Nimetades antud lüked komponentideks ning neist saadava lükke resultandiks, tõestame lõpuks järgmise teoreemi:

resultantlücke ei sõltu komponentlükete järjekorrast.



Joon. 21.

Tõesti, liites vektoriga $\vec{v}_2$ vektori $\vec{v}_1$, saame summaks endise vektori $\vec{v}_3$ (joon. 21). Sellest järeldame, et vektorite liitmiseks eespool antud kolmnurga-reegli asemel võib kasutada ka järgmist nn. rööpküliku-reeglit: kui liidetavad vektorid on rööpküliku ühest tipust lähtuvateks külgevektoriteks, siis samast tipust lähtuv diagonaalvektor osutub nende liidetavate summaks.

Ülesandeid.

18. Antud on kaks paralleelset sirget ja nende vahel mingi kolmnurk. Joonesta kolmnurga peegeldus esmalt ühest sirgest, siis saadud peegelduse peegeldus teisest sirgest. Kas tulemus sõltub peegeldustelgede kasutamise järjekorrast?

19. Põhjenda väidet, et kolmnurk ja tema lücke on võrdsed.

20. Kas kolmnurga peegeldus ja lücke on võrdsed või mitte? Mille poolest nad siiski erinevad?

21. Liida kaks vabalt võetud vektorit.

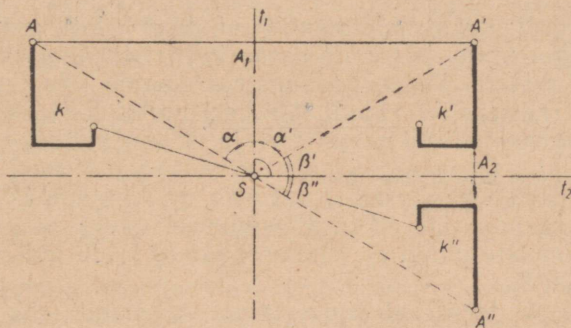
22. On antud kahe vektori summa ja üks liidetav. Konstrueeri teine liidetav.

23. Põhjenda väidet, et rööplükkel kui teisendusel ei leidu kahekordseid punkte.

24. Milleks teisendub rööplükkel lükkevektori sihiline sirge ja milleks iga muu sirge?

§ 4. TSENTRAALSÜMMEETRIA.

1. Tsentraalsümmeetria kahe peegelduse liitteisendusena. Peggeldame antud kujundi k teljest t_1 ning saadud peegelduse k' omakorda teljest t_2 , mis on risti teljega t_1 (joon. 22). Viimasel peegeldamisel saame kujundi k'' .



Joon. 22.

Tõestame, et kujundite k ja k'' vastavaid punkte ühendavad lõigud läbivad telgede lõikepunkti S ning poolituvad selles punktis.

Selleks ühendame kujundi k mingi punkti A , samuti tema teisendid A' ja A'' telgede lõikepunktiga S (joon. 22). Edasi näitame, et nurk ASA'' on sirgnurk. Tõesti:

$$\begin{aligned}\angle ASA'' &= \alpha + \alpha' + \beta' + \beta'' = 2\alpha' + 2\beta' = \\ &= 2(\alpha' + \beta') = 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ.\end{aligned}$$

Siin kasutasime tõsiasi, et nurgad, mis tekivad sümmeetriatelje punkti S ühendamisel kahe sümmeetrilise punktiga, on võrdsed ($\alpha = \alpha'$ ja $\beta' = \beta''$). Et nurk ASA'' on sirgnurk, siis punktid A , S ja A'' asetsevad ühel ja samal sirgel. Ühtlasi on punkt S lõigu AA'' keskpunktiks, sest sümmeetria tõttu $AS = A'S = A''S$. Analoo- giliselt kehtib see kujundite k ja k'' iga kahe teineteisele vastava punkti kohta. Sellega on väide tõestatud.

Tähendatud omaduse alusel öeldakse, et kujundid nagu k ja k'' (joon. 22) on punkti S suhtes **sümmeetrilised**; seejuures punkti S nimetatakse **sümmeetriakeskpunktiks**. Teljelisest sümmeetriast eristamiseks nimetatakse sümmeetriat punkti suhtes **tsentraalsüm- meetriaks** ning selles teineteisele vastavaid kujundeid **tsentraal- sümmeetrilisteks kujunditeks**. Kahest tsentraalsümmeetrilisest kujundist kumbagi võib nimetada ka teise **peegelduseks** (sümmeet- riakeskpunktist). Sümmeetriakeskpunkti võib sel puhul nimetada

ka peegelduskeskpunktiks ja kirjeldatud teisendust **tsentraalpeegelduseks**. Esitatud arutlusi kokku võttes ütleme, et

ristuvate peegeldustelgede korral kahest peegeldusest koosnev teisendus osutub tsentraalsümmeetriaks, mille keskpunktiks on telgede lõikepunkt.

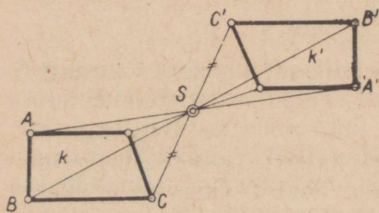
Ümberpöörduvalt: tsentraalsümmeetriat saab alati asendada kahe peegeldusega, mille teljed on omavahel risti ning läbivad sümmeetriakeskpunkti. Vastavas konstruktsioonis võetakse üks peegeldustelg (näiteks t_1) vabalt läbi keskpunkti S (joon. 22). Antud tsentraalsümmeetrilised punktid A ja A'' on sellest sirgest võrdsetel kaugustel (põhjenda seda!), mistõttu ka $A' \equiv t_1(A)$ ja A'' on sellest võrdsetel kaugustel. Kuid siis on sirge $A'A''$ paralleelne sirgega t_1 ja punktide A' ja A'' sümmeetriatelg seega risti selle sirgega. Viimaste punktide sümmeetriatelg läbib ühtlasi punkti S , sest $A'S = A''S$.

Kujundi k tsentraalsümmeetrilist teisendit ehk peegeldust punkti S märgitakse sümboliga $S(k)$; seega kirjutus $k' \equiv S(k)$ asendab lauset «Kujund k' on kujundi k peegeldus punkti S ».

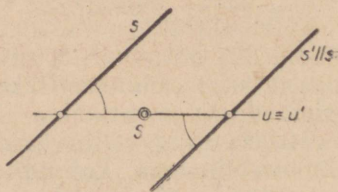
On kerge põhjendada, et kujund ja tema peegeldus mistahes punkti S on võrdsed: $k = S(k)$. See näitab, et ka peegeldus punkti S on liikumisteisendus: ta on tasapinna pööramine peegelduskeskpunkti ümber sirgnurga võrra.

2. Tsentraalpeegelduse konstruktsioon. Kujundi tsentraalpeegeldus on määratud, kui peegelduskeskpunkt on antud. Konstruktsioonis tõmbame antud kujundit määravatest punktidest $A, B, \dots$ sirged läbi peegelduskeskpunkti S (joon. 23) ning märgime igal sirgel punkti, mis on punkti S sama kaugel kui kujundi vastav punkt. Saadud punktid $A', B', \dots$ määravadki otsitava peegelduskujundi.

Kirjeldatud viisil saame igale peegelduspunkti erinevale punktile vastavaks üheainsa punkti. Peegelduskeskpunkti loeme vastavaks iseendale, mistõttu see on vaadeldava teisenduse kahekordne punkt. Sellest järeldub, et iga sirge, mis läbib peegelduskeskpunkti, on selle teisenduse kahekordne sirge (vastab iseendale).



Joon. 23.

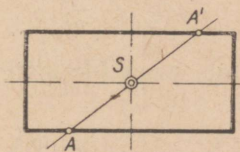


Joon. 24.

Iga sirge s , mis ei läbi peegelduskeskpunkti, teisendub temaga paralleelseks sirgeks ($s' \parallel s$, joon. 24). Tõesti, sirge u , läbides peegelduskeskpunkti (mistõttu $u' \equiv u$), lõikab sirgeid s ja s' nii, et tekib paar võrdseid põiknurki (iga nurk teisendub temaga võrdseks nurgaks, joon. 24).

3. **Iseendaga tsentraalsümmeetriline kujund.** Kujund võib olla mingi punkti suhtes sümmeetriline iseendaga. Sellise kujundi kohta öeldakse, et tal leidub sümmeetriakeskpunkt ehk et ta on tsentraalsümmeetriline. Kindlasti on tsentraalsümmeetriline iga kujund, millel leidub kaks teineteisega ristuvat sümmeetriatelge; säärase kujundi sümmeetriakeskpunktiks on telgede lõikepunkt. Näiteks ristküliku sümmeetriateljed (külgede keskristsirged) on teineteisega risti, mistõttu nende lõikepunkt S on ristküliku sümmeetriakeskpunktiks (joon. 25): iga sirge läbi selle punkti lõikab ristküliku külgi kahes punktis A ja A' , mis on sümmeetrilised punkti S suhtes.

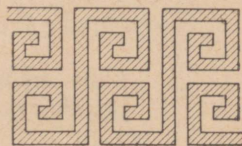
Kuid ristuvate sümmeetriatelgede olemasolu on piisav, mitte aga tarvilik tingimus sümmeetriakeskpunkti olemasoluks. Näiteks



Joon. 25.



Joon. 26.



Joon. 27.

on rööpkülik tsentraalsümmeetriline oma diagonaalide lõikepunkti S suhtes, sest see punkt on vastastippude ühenduslõikude ühiseks keskpunktiks, kuid rööpkülikul ei leidu ühtki sümmeetriatelge (joon. 26).

Tsentraalsümmeetria leiab laialdast rakendamist tarbeesemete kujundamisel, eriti kaunistusmotiivides (joon. 27).

4. **Kahest tsentraalpeegeldusest koosnev teisendus.** Kui peegeldame mingi kujundi esmalt punktist S ja siis saadud peegelduse veel kord samast punktist S , siis saame tulemuseks lähtekujundi. Niisiis:

sama keskpunkti korral kahest tsentraalpeegeldusest koosnev teisendus osutub samasuseks.

Edasi uurime teisendust, mis koosneb kahest tsentraalpeegeldusest, kusjuures peegelduskeskpunktid on erinevad. Selleks tõestame järgmise teoreemi:

erinevate keskpunktide korral kahest tsentraalpeegeldusest koosnev teisendus osutub rööpiükkeks, mille vektor võrdub esimesest keskpunktist teise viiva vektori kahekordsega.

Tõestus. Peegeldame antud kujundi k esmalt keskpunktist S_1 ning saadud peegelduse $k' \equiv S_1(k)$ omakorda teisest keskpunktist S_2 (joon. 28). Joonisel on vastavad teisenduskonstruktsioonid läbi viidud punktidega A ja B :

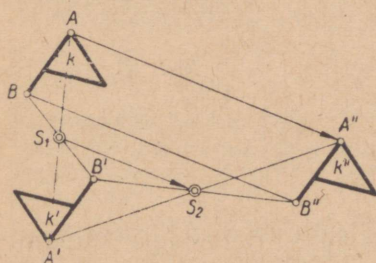
$$\begin{aligned} A' &\equiv S_1(A); & B' &\equiv S_1(B); \\ A'' &\equiv S_2(A'); & B'' &\equiv S_2(B'). \end{aligned}$$

Ühendades punkti A punktiga A'' ja punkti B punktiga B'' , saame kaks kolmnurka $AA'A''$ ja $BB'B''$, millel on üks ja sama kesklõik S_1S_2 . Tõesti, konstruktsiooni järgi $AS_1 = A'S_1$ ja $A'S_2 = A''S_2$ ning samuti $BS_1 = B'S_1$ ja $B'S_2 = B''S_2$. Kolmnurga kesklõigu omaduste tõttu kumbki lõikudest AA'' ja BB'' on paralleelne lõiguga S_1S_2 ning võrdub tema kahekordsega. Lisaks sellele on lõigud AA'' ja BB'' samasuunalised, sest kumbki neist on samasuunaline lõiguga S_1S_2 . Sellega ongi tõestatud, et vaadeldav liitteisendus osutub tõesti rööplükkeks vektoriga

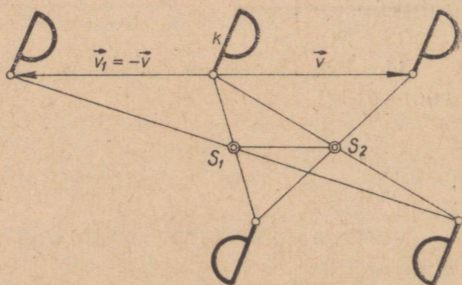
$$\vec{v} = \overrightarrow{AA''} = \overrightarrow{BB''} = \dots = 2\overrightarrow{S_1S_2}.$$

Teoreemist järeldame, et

kahe tsentraalpeegelduse tulemus sõltub peegeldamiste järjekorrast.



Joon. 28.



Joon. 29.

Tõesti, kui peegeldame enne punktist S_2 ja pärast punktist S_1 , siis tulemuse kui rööplükke vektoriks saame endise vektori vastandvektori (joon. 29):

$$\vec{v}_1 = 2\overrightarrow{S_2S_1} = -2\overrightarrow{S_1S_2} = -\vec{v}.$$

Teiseks järeldame (joon. 28), et

rööplükkest (vektoriga AA'') ja tsentraalpeegeldusest (keskpunktiga S_2) koosnev teisendus osutub tsentraalpeegelduseks (meie joonisel keskpunktiga S_1).

Ülesandeid.

25. Näita joonise abil, et kahe peegelduse puhul, millede teljed on teineteisega risti, tulemus ei sõltu peegeldamiste järjekorrast.

26. Koordinaatteljestikus on antud punktid $A(3; 2)$, $B(-4; 3)$, $C(-1; -2)$ ja $D(5; -3)$. Leia neile koordinaatide alguse suhtes sümmeetrilised punktid.

27. Koordinaatteljestikus on antud kolmnurk tippudega $A(-2; 3)$, $B(2; 1)$ ja $C(4; 5)$. Leia sellele alguspunkti suhtes sümmeetriline kolmnurk.

28. Koordinaatteljestikus on antud sirge $y=3-2x$. Joonesta sellele koordinaatide alguse suhtes sümmeetriline sirg ja anna viimase võrrand.

29. Joonesta punktiga $A(1; 2)$ punkti $S(4; 3)$ suhtes sümmeetriline punkt ja määra selle koordinaadid.

30. Missugusel korrapärasel hulknurgal leidub sümmeetriakeskpunkt ja missugusel ei leidu?

31. Veendu konstruktsiooni abil, et neljast tsentraalpeegeldusest koosnev teisendus, milles keskpunktideks on ühe rööpküliku järjestikused tipud, on samasus.

32. Joonesta võrdkülgsele kolmnurgale tema keskpunkti suhtes sümmeetriline kolmnurk. Mitu sümmeetriatelge on tekkinud tähtkuusnurgal?

33. Mis on ringjoone sümmeetriakeskpunktiks?

34. Kasutades rööpküliku tsentraalsümmeetriat, tõesta, et rööpküliku vastasnurkade poolitajad on paralleelsed.

§ 5. PÖÖRE.

1. Pööre kui kahe peegelduse tulemus. Peegeldame kujundit k järjestikku kahest teljest t_1 ja t_2 (joon. 30), millede vaheline suunaga teravnurk on α (suunaga esimese telje poolt teise poole). Saadud kujundid olgu $k' \equiv t_1(k)$ ja $k'' \equiv t_2(k')$. Viimast kujundit k'' nimetatakse kujundi k pöördeks ja üleminekut kujundilt k kujundile k'' kujundi k pööramiseks (lühemalt — pöördeks) punkti O ümber. Punkti O nimetatakse pöördekeskpunktiks. Seega

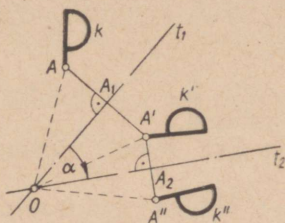
pööre on kahe peegelduse tulemus lõikuvate peegeldustelgede korral; seejuures peegeldustelgede lõikepunkt on pöördekeskpunktiks.

Vaadeldav teisendus on liikumine, sest lähtekujund ja tema teisend on võrdsed.

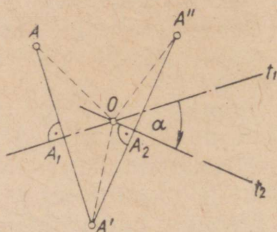
2. Pöörde põhiomadus. Pöörde põhiomadust väljendab järgmine teoreem:

kujundi punkti ja tema pöördeteisendit keskpunktiga ühendades saadakse võrdsed lõigud, millede vaheline suunaga nurk võrdub peegeldustelgede vahelise suunaga teravnurga kahekordsega.

Tõestuseks võtame kujundil k mingi punkti A (joon. 30) ja leiame tema teisendid $A' \equiv t_1(A)$ ja $A'' \equiv t_2(A')$. Siis on $OA = OA'$ kui lõigud, mis ühendavad sümmeetriatelje t_1 punkti O telje suhtes kahe sümmeetrilise punktiga. Niisamuti $OA' = OA''$. Neist kahest võrdusest järeldub, et $OA = OA''$, millega väite esimene pool on tõestatud.



Joon. 30.



Joon. 31.

Väite teise poole tõestamisel vaatleme eraldi kolme võimaliku juhtumit.

1) Punktid A_1 ja A_2 , milledes sidejooned AA' ja $A'A''$ lõikavad vastavaid sümmeetriatelgi, asetsevad telgedevahelise teravnurga haaradel (joon. 30).

2) Punktid A_1 ja A_2 asetsevad telgedevahelise nürinurga haaradel (joon. 31).

3) Üks punktidest A_1 ja A_2 langeb ühte keskpunktiga O (joon. 32).

Igal juhtumil saab suunaga nurga AOA'' avaldada suunaga nurkade summana

$$\angle AOA'' = \angle AOA' + \angle A'OA''$$

olgu kiire OA' asend milline tahes.

Juhtumel 1 ja 2

$$\angle AOA' = 2\angle A_1OA' \text{ ja } \angle A'OA'' = 2\angle A'OA_2,$$

sest $A' \equiv t_1(A)$ ja $A'' \equiv t_2(A')$. Asendamisel ja ühise teguri 2 sulgude ette toomisel saame nurga AOA'' avaldada nüüd kujul:

$$\angle AOA'' = 2(\angle A_1OA' + \angle A'OA_2) = 2\angle A_1OA_2.$$

Juhtumil 1 nurk A_1OA_2 on α , nii et väide on tõestatud.

Juhtumil 2 nurk A_1OA_2 on telgedevaheline nürinurk ja nurk AOA'' on sirgete OA ja OA'' vahel olev sirgennurgast suurem

nurk. Mõistes aga ka siin nurga AOA'' all sirgnurgast väiksemat nurka nimetatud sirgete vahel, võime kirjutada:

$$\angle AOA'' = 360^\circ - 2|\angle A_1OA_2| = 360^\circ - 2(180^\circ - \alpha) = 2\alpha.$$

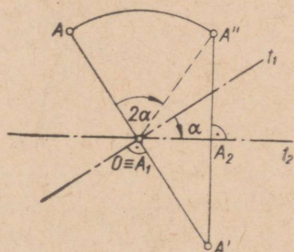
Juhtumil 3, kus punkt A_1 ühtib punktiga O (joon. 32), on nurk AOA' sirgnurk ning väide järeldub nüüd järgmiselt:

$$\angle AOA'' = 180^\circ - 2|\angle A'OA_2| = 180^\circ - 2(90^\circ - \alpha) = 2\alpha.$$

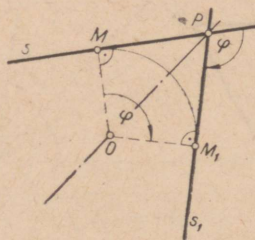
Tõestatud teoreemi võib kokkuvõtlikumalt sõnastada ka järgmiselt:

kujundi pööramisel tema tasapinna mingi punkti ümber pöörduv kujundi iga punkt ühe ja sama nurga, nn. pöördenurga $\varphi = 2\alpha$ võrra.

Kujundi k pöoret, mille määravad keskpunkt O ja pöördenurk φ , märgime lühidalt kujul $O_\varphi(k)$.



Joon. 32.



Joon. 33.

Kui pöördenurk $\varphi = 180^\circ$, siis pöore osutub peegelduseks punktist O , sest peegeldusteljed on siis teineteisega risti.

3. Järeldusi pöörde põhiomadusest.

1) Kujundi ja tema pöörde iga kahe teineteisele vastava punkti sümmeetriatelg läbib pöördekeskpunkti,

sest viimane on neist punktidest võrdsetel kaugustel (kahest punktist võrdsetel kaugustel asetsev punkt on teatavasti nende punktide sümmeetriateljel).

2) Sirgjoone ja tema pöörde kaugused pöördekeskpunktist on võrdsed,

sest see kaugus ei muutu kummalgi peegeldusel, milledest koosneb antud pöore ($OM = OM_1$, joon. 33). Teisiti:

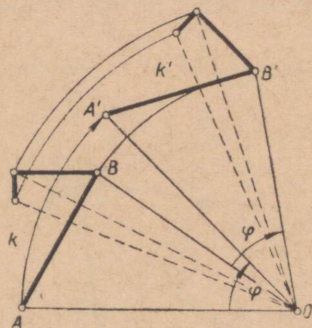
sirgjoone ja tema pöörde sümmeetriatelg läbib pöördekeskpunkti.

3) Sirgjoone ja tema pöörde vaheline nurk, mille poolitaja ei läbi pöördekeskpunkti, võrdub pöördenurgaga,

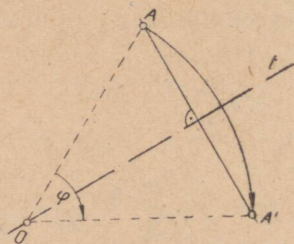
sest võrreldavaid nurki nurgaga MPM_1 liites saame sirgnurga (joon. 33).

4. **Pöörde konstruksioon.** Pöördekeskpunkti O ja pöördenurga φ andmisega on kujundi pöore kui teisendus üheselt määratud. Pöörde konstrueerimisel tõmbame kujundi punktidest kaared ümber keskpunkti ja märgime igal kaarel kujundi punktile vastava punkti, kasutades antud pöördenurka φ . Leitud punkte õigesti ühendades saamegi pööratud kujundi (joon. 34).

Iga pööret, mis on antud oma keskpunkti ja nurgaga, saab mitmeti esitada kahe peegelduse näol, kusjuures peegeldusteljed läbivad pöördekeskpunkti. Selleks võtame ühe telje (näiteks t_1) vabalt läbi keskpunkti, teise telje aga nii, et telgede vaheline



Joon. 34.



Joon. 35.

suunaga teravnurk (suunaga esimese telje poolt teise poole) võrduks poolega antud pöördenurgast (joonised 30 ja 31).

5. Põhiülesanded pöördest.

Ülesanne 1. Antud on kaks punkti A ja A' . Leida mingi pöore, mis teeks ühe punkti teisega ühtivaks.

Lahendus. Otsitav pöördekeskpunkt peab asetsema punktide A ja A' sümmeetriateljel (§ 5, p. 3, järeldus 1). Selle sümmeetriatelje t iga punkt O kõlbab pöördekeskpunktiks, kui pöördenurgaks võetakse nurk $\varphi = \angle AOA'$ (joon. 35). Ülesandel on seega lõpmata palju lahendeid.

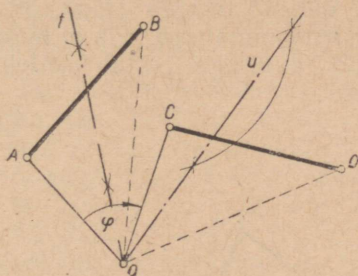
See lahendus näitab, et kahe punkti sümmeetriatelg on ühte punkti teiseks teisendava pöörde keskpunkti geomeetriliseks kohaks.

Ülesanne 2. Antud on kaks võrdset lõiku. Leida pöore, mis teeb ühe lõigu teisega ühtivaks.

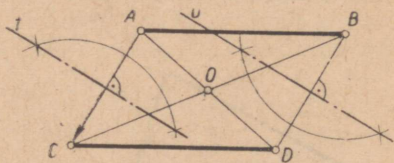
Lahendus. Olgu esimene lõik AB , teine CD (joon. 36). Leiame punktide A ja C sümmeetriatelje t ning punktide B ja D sümmeetriatelje u . Kui teljed t ja u lõikuvad, siis otsitavaks

pöördekeskpunktiks on nende telgede lõikepunkt O ning pöördenurgaks $\varphi = \angle AOC$. Selle nurgaga võrdub nurk BOD , sest kumbki neist koosneb nurgast BOC ja veel võrdsed kolmnurkade AOB ja COD ühest nurgast (põhjenda nende kolmnurkade võrdsust, kasutades tunnust *kkk*).

Teise võimaliku lahenduse puhul saaksime keskpunktiks punkti, milles punktide A ja D sümmeetriatelg lõikab punktide B ja C sümmeetriatelge. Seega on sel ülesandel üldiselt kaks lahendust. Neist ühe puhul langeb punkt A ühte punktiga C , teise puhul punktiga D .



Joon. 36.

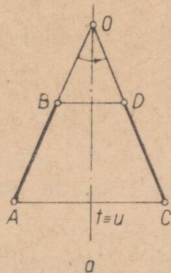


Joon. 37.

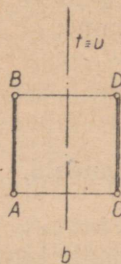
Kui punktipaare A ja C ning B ja D (või A ja D ning B ja C) sümmeetriateljed ei lõiku, siis nad on paralleelsed või ühtivad.

Saab tõestada, et kui üks paar neist sümmeetriatelgedest on paralleelsed (näiteks $t \parallel u$, joon. 37), siis vastav pööre asendub rööplükktega (mille vektor joonisel 37 on $\vec{AC} = \vec{BD}$).

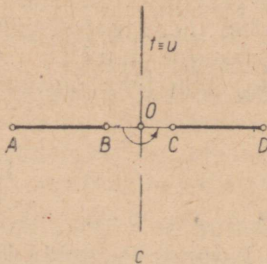
Kui üks paar neist sümmeetriatelgedest ühtivad (näiteks $t \equiv u$, joon. 38), siis lõigud AB ja CD on sümmeetrilised selle ühise sümmeetriatelje suhtes. Kui lõigud AB ja CD ei ole paralleelsed selle teljega, siis nende lõikepunkt teljega on üheks pöördekeskpunktiks (joon. 38, a ja c). Kui aga AB ja CD on paralleelsed teljega, siis pööre asendub jällegi rööplükktega, mille vektor on $\vec{AC} = \vec{BD}$ (joon. 38, b).



a



b



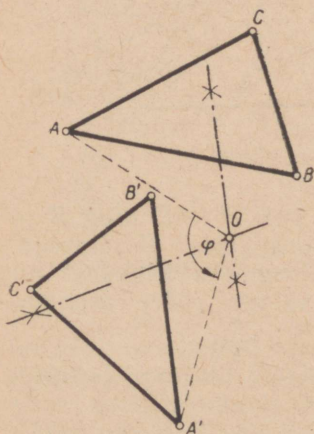
c

Joon. 38.

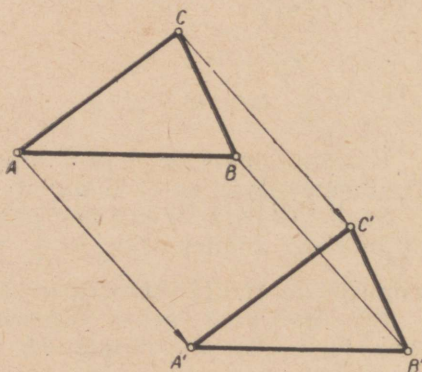
Ülesanne 3. Antud on kaks võrdset ja sama orientatsiooniga kolmnurka. Leida pööre, mis teeb ühe kolmnurga teisega ühtivaks.

Lahendus. Antud võrdsed ja sama orientatsiooniga kolmnurgad olgu ABC ja $A'B'C'$ (joon. 39). Kolmnurkade vastavad küljed AB ja $A'B'$ on võrdsed. Kui need küljed pole paralleelsed, siis leiame eelmise ülesande eeskujul pöörde, mis teeb punkti A ühtivaks punktiga A' ja punkti B ühtivaks punktiga B' . Et kolmnurgad on sama orientatsiooniga, siis punkt C satub leitud pöörde puhul sirgest $A'B'$ samale poole, kus on punkt C' , ning kolmnurkade võrdsuse tõttu üks kolmnurk ühtibki teisega (joon. 39).

Kui AB ja $A'B'$ on paralleelsed ja samasuunalised, siis ei leidu pööret, mis teeks kolmnurgad ühtivaks, küll aga leidub selleks sobiv rööplüke (joon. 40).



Joon. 39.



Joon. 40.

Kui AB ja $A'B'$ on paralleelsed ja vastandsuunalised, siis ülesanne lahendub tsentraalpeegelduse abil.

Esitatud ülesannetest järeldame, et ka kahte võrdset ja sama orientatsiooniga hulknurka saab pöörde (või erijuhtumil rööplükke) abil teha ühtivaks.

Ülesandeid.

35. Antud on võrdkülgne kolmnurk ja väljaspool seda N -tähe kujuline kujund. Peegelda kujundit järjestikku kolmnurga kahest küljest ja määra saadud pöörde keskpunkt ja pöördenurk.

36. Joonesta mingi ruut ja selle pööre ruudu keskpunkti ümber 45° võrra.

37. Mingisuguste nurkade võrra saab iga järgnevat kujundit pöörata tema keskpunkti ümber nii, et pööratud kujund ühtiks antud kujundiga: a) võrdkülgne kolmnurk, b) ruut, c) korrapärane kuusnurk, d) korrapärane viisnurk?

38. Antud on kaks lõikuvat sirget ja kummalgi üks punkt. Leia pööre, mis teeb ühe sirge ja sellel antud punkti vastavalt ühtivaks teise sirge ja sellel antud punktiga.

Näpunäide. Pöördekeskpunktiks on punkt, kus lõikuvad antud punktide sümmeetriatelg ja antud sirgete (üks) sümmeetriatelg. Ülesandel on kaks lahendust.

39. Antud on kaks võrdset ja sama orientatsiooniga kolmnurka ABC ja $A'B'C'$, mille vastavad küljed AB ja $A'B'$ on paralleelsed ja vastandsuunalised. Leia pööre, mis viib kolmnurga ABC kolmnurga $A'B'C'$ asendisse.

40. Antud on kaks võrdset ja sama orientatsiooniga kolmnurka ABC ja $A'B'C'$ nii, et nende tipud B ja C' ühtivad. Leia pööre, mis viib kolmnurga ABC kolmnurga $A'B'C'$ asendisse.

41. Leia pöörded, millega võrdhaarse kolmnurga ühe haara saab teha teisega ühtivaks (kaks lahendust).

42. Leia pöörded, millega võrdhaarse trapetsi ühe haara saab teha teisega ühtivaks (kaks lahendust).

43. Antud on kaks võrdset nurka. Leia pööre, millega neid saab teha ühtivaiks.

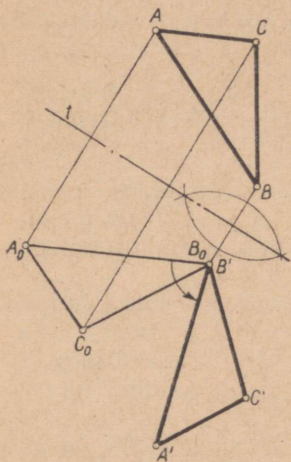
44. Antud on võrdhaarne kolmnurk. Leia pööre, mis teeb ühe alusnurga teisega ühtivaks.

§ 6. LIIKUMINE TASAPINNAL.

Eespool tutvusime lihtsamate liikumistega tasapinnal, nimelt peegeldusega sirgest, rööplükkega, peegeldusega punktist ja pöördega. Seejuures liikumiseks tasapinnal nimetasime niisugust selle tasapinna teisendamist iseendaks, mille puhul selle tasapinna mistahes kujund teisendub temaga võrdseks kujundiks. Et kõige lihtsam kujund, mille abil saab määrata teiste kujundite võrdsust, on kolmnurk, siis võime liikumiseks nimetada ka niisugust tasapinna teisendust iseendaks, mille puhul mistahes kolmnurk teisendub temaga võrdseks kolmnurgaks. Seega iga paar võrdseid kolmnurki määrab ühe liikumise tasapinnal. Ühenduses sellega tekib küsimus, kas ülalnimetatud liikumistega on ammendatud kõik liikumise liigid tasapinnal või mitte. Vastuse annab järgmine teoreem:

iga liikumist tasapinnal saab vaadelda koosnevana ülimalt kolmest peegeldusest.

Eespool nägime, et antud võrdseid ja sama orientatsiooniga kolmnurki saab viia ühtivusse kas rööplükke või pöörde abil (§ 5, p. 5, ülesanne 3). Et mõlemad nimetatud teisendused koosnevad vaid kahest peegeldusest, siis on väide tõestatud kõigi niisuguste liikumiste kohta, mis on määratud kahe sama orientatsiooniga kolmnurga abil.



Joon. 41.

Eeldame nüüd, et antud võrdsetel kolmnurkadel ABC ja $A'B'C'$ on orientatsioonid vastandlikud (joon. 41). Peegeldame üht neist, näiteks kolmnurka ABC , sirgest t , mis on ühe paari vastavate tippude, näiteks B ja B' sümmeetriateljeks. Siis kolmnurga tipu B peegelduseks on tipp B' , aga tippude A ja C peegeldused olgu vastavalt A_0 ja C_0 . Kolmnurk $A_0B'C_0$ on võrdne kolmnurgaga ABC , kuid vastandorientatsiooniga, s. t. ta on võrdne kolmnurgaga $A'B'C'$, millel on temaga ühine orientatsioon. Seetõttu võib juhtuda, et kolmnurgad $A_0B'C_0$ ja $A'B'C'$ ühtivad. Sel juhul oleks väide tõestatud, sest liikumine, mis teeks antud kolmnurgad ühtivaiks, oleks peegeldus sirgest t . Kui aga kolmnurgad $A_0B'C_0$ ja $A'B'C'$ ei ühti, siis saab neid

tipu B' , sest nad on võrdsed ja sama orientatsiooniga. Et pöore koosneb kahest peegeldusest, siis kuluks nüüd antud kolmnurkade ühteviimiseks kokku kolm peegeldust. Sellega on väide täielikult tõestatud.

Ülesandeid.

45. Antud on kaks sama orientatsiooniga võrdset kolmnurka. Leia kaks järjestikust peegeldust, mis teevad need kolmnurgad ühtivaiks.

46. Antud on kaks erineva orientatsiooniga võrdset kolmnurka, mis pole sümmeetrilised sirge suhtes. Leia kolm järjestikust peegeldust, mis teevad need kolmnurgad ühtivaiks.

47. Leia, missuguse lihtsama liikumisega saab asendada

- kahte rööplüket;
- rööplüket koos tsentraalpeegeldusega;
- kahte tsentraalpeegeldust;
- nelja peegeldust, kui peegeldustelgedeks on vaheldumisi kaks ristuvat sirget.

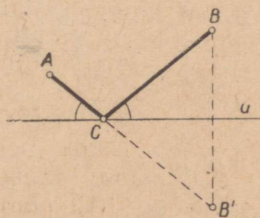
§ 7. LIIKUMISTEISENDUSTE KASUTAMINE KONSTRUKTSIOON- ÜLESANNETE LAHENDAMISEL.

Liikumisteisendusi saab kasutada paljude teoreemide tõestamisel ja konstruktsioonülesannete lahendamisel. Vaatleme mõnda näidet viimaselt alalt.

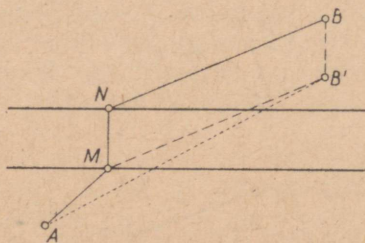
Teisenduste kasutamise meetod konstruktsioonülesannete lahendamisel seisneb selles, et vaadeldav kujund või selle mingi osa teisendatakse nii, et otsitav lahend (või lahendusviis) muutuks hõlpsamalt leitavaks. Selle meetodi sisu selgitavad lähemalt järgmised näited.

Näide 1. Ühel pool sirgest u on antud kaks punkti A ja B . Leida sirgel u punkt C nii, et lõikude summa (tee pikkus) $AC + CB$ oleks minimaalne (võimalikult väike).

Lahendus. Olgu ACB otsitav murdjoon (joon. 42). Tema pikkus ei muutu, kui lõik CB asendada sirge u suhtes sümmeetrilise lõiguga CB' . Nüüd peaks lühima pikkusega olema murdjoon ACB' . Ta on seda siis, kui punkt C asetseb sirgel AB' . Siit selgub, et otsitav punkt on sirgete u ja AB' lõikepunkt, kus $B' \equiv u(B)$.



Joon. 42.



Joon. 43.

Märkus. Jooniselt selgub, et leitud punkti C puhul on võrdsed need teravnurgad, mis AC ja CB moodustavad sirgega u , s.t. lühim tee on see, mida mööda liigub valgus punktist A punktini B , peegeldudes sirgest u .

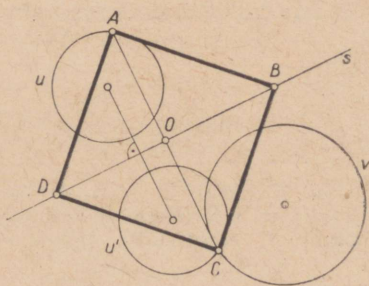
Näide 2. Ühel pool paralleelsete kallastega kanalit on küla A , teisel pool küla B . Üle kanali tuleb ehitada sild niisuguses kohas, et tee ühest külast teise oleks minimaalse pikkusega.

Lahendus. Oletame, et MN on nõutud silla asukoht, nii et murdjoon $AMNB$ on võimalik lühim tee, mis külasid ühendab (joon. 43). Anname teosale BN rööplükke, mille vektor on $\vec{NM}$, ning vaatleme uut murdjoont $AMB'B$, mille pikkus on võrdne endise murdjoone pikkusega. Et see pikkus oleks minimaalne, peaksid punktid A , M ja B' asetseda ühel sirgel. Siit selgub, et punkt M peab asetsema kohal, kus punkti A poolne kanali kallast lõikab sirget AB' .

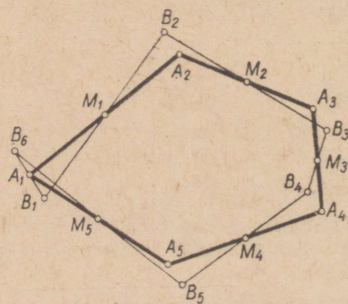
Näide 3. Konstrueerida ruut, mille kaks vastastippu asetsevad antud sirgel ja ülejäänud tippudest üks asetseb ühel ja teine teisel antud ringjoonel.

Lahendus. Olgu antud sirgjoon s ja ringjooned u ja v (joon. 44). Oletame, et ülesanne on lahendatud ja et $ABCD$ on otsitav ruut, mille tipud B ja D asetsevad antud sirgel s , tipp A ringjoonel u ja tipp C ringjoonel v . Siis punktid A ja C on sümmeetrilised sirge s suhtes, sest ruudu diagonaalid ristuvad ja poolitavad teineteist. Et punkt A asetseb ringjoonel u , siis temaga sirge s suhtes sümmeetriline punkt C asetseb ringjoonega u sirge s suhtes sümmeetrilisel ringjoonel u' . Siit selgub järgmine konstruktsioon: 1) leiame ringjoone $u' \equiv s(u)$; 2) märgime, kui see on olemas, punkti, näiteks C , milles lõikuvad ringjooned v ja u' ; 3) leiame punkti $A \equiv s(C)$; 4) joonestame ruudu, mille diagonaalliks on lõik AC , järelikult on ruudu keskpunktiks sirgete s ja AC lõikepunkt O . Selle ruudu tipud B ja D satuvad sirgele s , sest nad on punktidest A ja C võrdsetel kaugustel. Ruut $ABCD$ rahuldabki ülesande kõiki nõudeid.

Ülesande lahendite arv on võrdne ringjoonte u' ja v ühiste punktide arvuga. Kui need ringjooned ei lõiku, siis ülesandel pole lahendit; kui ringjooned puudutavad või lõikavad teineteist, siis ülesandel on vastavalt üks lahend või kaks lahendit; kui ringjooned v ja u' langevad ühte, siis on lahendeid lõpmata palju.



Joon. 44.



Joon. 45.

Näide 4. Konstrueerida viisnurk külgede antud keskpunktide järgi.

Lahendus. Olgu antud punktid M_1, M_2, M_3, M_4 ja M_5 (joon. 45). Kui otsitava viisnurga esimest tippu A_1 peegeldada punktist M_1 , siis saadakse teine tipp A_2 , seda peegeldades punktist M_2 saadakse kolmas tipp A_3 jne.; lõpuks tippu A_5 peegeldamisel punktist M_5 saadakse uuesti tipp A_1 . Nii selgub, et punkt A_1 on viiest tsentraalpeegeldusest koosneva teisenduse kahekordne

punkt, kui peegelduskeskpunktiks on punktid $M_1, \dots, M_5$. Et kahest tsentraalpeegeldusest koosnev teisendus on rööplüke, rööplükkest ja tsentraalpeegeldusest koosnev teisendus aga jälle tsentraalpeegeldus (§ 4, p. 4), siis neljast tsentraalpeegeldusest koosnev teisendus on taas rööplüke, viiest tsentraalpeegeldusest koosnev teisendus aga — tsentraalpeegeldus. Viimase teisenduse ainus kahekordne punkt on peegelduskeskpunkt. Tähendab, punkt A_1 on viiekordsel tsentraalpeegeldusel saadava tsentraalpeegelduse keskpunkt. Tema leidmiseks võtame tasapinna mistahes punkti B_1 , peegeldame seda punktist M_1 , saadud peegeldust B_2 uuesti punktist M_2 jne., kuni saame punkti B_6 . Et punktid B_1 ja B_6 on peegelduses teineteisele vastavad punktid, siis lõigu B_1B_6 keskpunkt ongi selle peegelduse keskpunkt, ühtlasi otsitav punkt A_1 . Viisnurga ülejäänud tipud leiame peegeldamise teel antud punktidest.

Ülesandeid.

48. Tasapinnal on antud kolm sirget: s , t ja u . Leia sirgel s punkt S , millega sirge t suhtes sümmeetriline punkt S' asetseb sirgel u .

49. Tasapinnal on antud sirge s ja sellest ühel pool punktid A ja B . Leia sirgel s punkt M nii, et sirged AM ja BM moodustaksid sirgega s võrdsed nurgad.

50. Tasapinnal on antud sirge s ja sellest teine teisel pool punktid A ja B . Leia sirgel s punkt M nii, et lõikude AM ja BM pikkuste vahe oleks võimalikult suur.

51. Tasapinnal on antud nurk tipuga A ja sirge t . Ehita ruut, mille kaks vastastippu asetsevad sirgel t ja ülejäänud tipud antud nurga haaradel või nende pikendustel üle tipu A .

52. Tasapinnal on antud nurk tipuga A ja selle sees punkt S . Joonesta läbi punkti S sirge nii, et tema lõik nurga haarade vahel poolituks punktis S .

53. Tasapinnal on antud sirgjoon, ringjoon ja punkt. Joonesta läbi antud punkti sirge, mille lõik antud sirgjoone ja ringjoone vahel poolituks antud punktis.

54. Joonesta tasapinnaline seitsenurk külgede antud keskpunktide järgi.

55. Joonesta läbi kahe antud ringjoone lõikepunkti sirge, mis ei läbi ringjoonte teist lõikepunkti ja millest need ringjooned lõikavad välja võrdsed kõõlud.

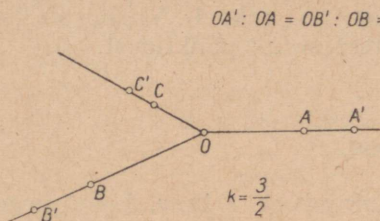
§ 8. HOMOTEETSUS TASAPINNAL.

1. **Homoteetsuse mõiste.** Homoteetsuseks tasapinnal nimetatakse järgmiste omadustega vastavust tasapinna punktide vahel:

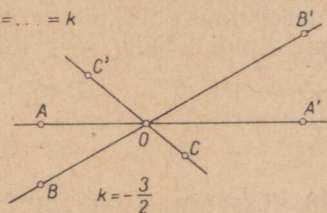
1) iga punkti ja sellele vastava punkti ühendussirge läbib üht ja sama punkti O , mida nimetatakse **homoteetsuskeskpunktiks**.

2) iga kaks teineteisele vastavat punkti asetsevad homoteetsuskeskpunktist kas ühel pool (**päripidine homoteetsus**, joon. 46) või teine teisel pool (**vastupidine homoteetsus**, joon. 47);

3) kui M ja M' on kaks teineteisele vastavat punkti, siis lõikude suhe $OM':OM=k$ on jääv tasapinna kõigi punktide puhul. See jääv suhe, mida nimetatakse **homoteetsusteguriks**, on päripidise homoteetsuse korral positiivne ja vastupidise homoteetsuse korral negatiivne, sest esimesel juhtumil on lõigud OM ja OM' samasuunalised, teisel juhtumil aga vastandsuunalised.



Joon. 46.



Joon. 47.

Homoteetsusteguri definitsioonist järeldub, et

$$OM' = k \cdot OM,$$

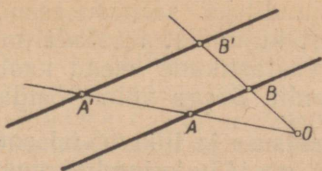
millest nähtub, et keskpunkti O ja teguri k andmisega on homoteetsus määratud, sest nende andmete korral saab igale punktile M leida temale vastavat punkti M' . Kui punkt M ühtib keskpunktiga O , siis ühtib viimasega ka teisend M' ; järelikult on keskpunkt homoteetsuse kahekordne punkt. Saab tõestada, et ta on homoteetsuse ainus kahekordne punkt.

2. Homoteetsuse tähtsamad omadused.

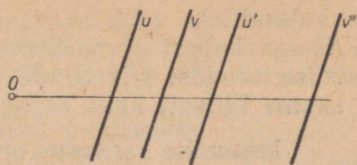
1) **Homoteetsuskeskpunkti läbiva sirge teisendiks on seesama sirge, iga muu sirge teisendiks aga tema paralleel.**

Homoteetsuskeskpunkti läbiva sirge kohta on väide ilmselt õige, sest homoteetsuse definitsiooni järgi on selle sirge punktide teisenditeks sellesama sirge punktid. Väite tõestamiseks homoteetsuskeskpunkti mitteläbiva sirge AB kohta eeldame, et homoteetsus on antud keskpunktiga O ja teguriga k (joon. 48). Leiame sirgel AB asetseva punkti, näiteks punkti A teisendi A' , ning joonestame temast läbi sirge, mis on paralleelne sirgega AB . Lõigaku sirge OB joonestatud sirget punktis B' . Siis kiirteteoreemi põhjal

$$OB' : OB = OA' : OA.$$



Joon. 48.



Joon. 49.

Et viimane suhe väljendab homoteetsustegurit, siis teeb sedasama ka esimene: $OB' : OB = k$. See näitab, et sirgel AB asetseva punkti B homoteetseks teisendiks on punkt B' sirgel $A'B'$. Ilmselt kehtib see nende sirgete kõigi punktide kohta.

2) Paralleelsetele sirgetele vastavad paralleelsed sirged,

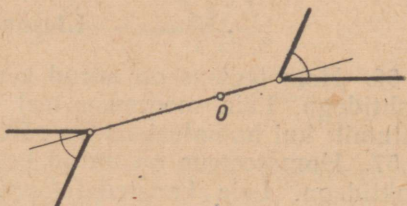
sest kui kaks sirget on paralleelsed, siis ka ühega ja teisega vastavalt paralleelsed sirged on omavahel paralleelsed (joon. 49): kui $u \parallel v$ ja $u' \parallel u$, $v' \parallel v$, siis $u' \parallel v'$.

3) Iga nurk teisendub temaga võrdseks nurgaks,

sest teisendatud nurga haarad on antud nurga haaradega vastavalt paralleelsed ja samasuunalised (joon. 50) või vastavalt paralleelsed ja vastandsuunalised (joon. 51).



Joon. 50.



Joon. 51.

4) Iga kahe teineteisele vastava lõigu suhe võrdub homoteetsusteguriga,

sest kolmnurkade OAB ja $OA'B'$ sarnasuse tõttu (põhjenda seda, joon. 52) võime kirjutada:

$$A'B' : AB = OA' : OA = k.$$

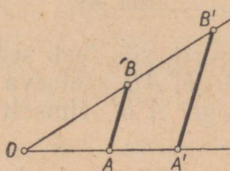
5) Iga kolmnurk (üldiselt iga kujund) teisendub temaga sarnaseks kolmnurgaks (kujundiks),

sest viimase kahe omaduse järgi nende nurgad on vastavalt võrdsed ja kõik vastavad lõigud on võrdelised (joon. 53).

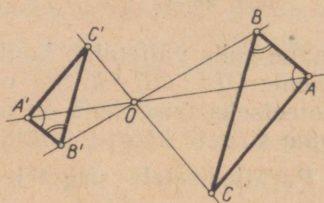
Viimase omaduse tõttu nimetatakse homoteetsust ka **sarnasusteisenduseks** ning kahte homoteetset kujundit **perspektiivsarnas-**

teks kujunditeks (ehk sarnasteks kujunditeks sarnasusasendis). Kui ühega kahest perspektiivsarnasest kujundist teostada mingi liikumisteisendus, siis nende eriline vastastikune asend kaob ja me saame lihtsalt kaks sarnast kujundit. Seega võime öelda, et

kujundite sarnasus on homoteetsuse ja liikumisteisenduse järjestikusel rakendamisel püsima jääv kujundite omadus.



Joon. 52.



Joon. 53.

Lõpuks olgu märgitud, et kui homoteetsustegur $k=1$, siis homoteetsus osutub samasuseks (sest igale punktile vastavaks on siis see punkt ise); kui aga $k=-1$, siis homoteetsus osutub peegelduseks homoteetsuskeskpunkti.

Ülesandeid.

56. Homoteetsus on antud keskpunkti ja ühe paari vastavate punktidega. Leia mõõtmise teel homoteetsustegur. Vaatle kaht juhtumit: kui homoteetsus on päripidine ja kui ta on vastupidine.

57. Homoteetsus on antud keskpunkti ja ühe paari vastavate punktidega. Leia konstruktsiooni teel mingile punktile vastav punkt.

58. Homoteetsus on antud keskpunkti ja ühe paari vastavate punktidega. Konstrueeri vabalt võetud kolmnurgale vastav kolmnurk.

59. Põhjenda väidet, et ringjoonega, mille raadius on r , homoteetseks kujundiks on ringjoon raadiusega kr , kus k on homoteetsustegur. (Kasuta omadust 4!)

60. Põhjenda väidet, et vastupidine homoteetsus koosneb päripidisest homoteetsusest ja tsentraalpeegeldusest.

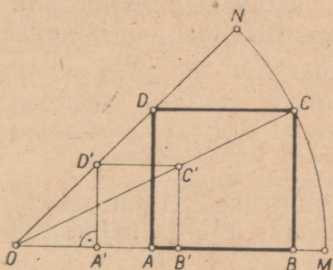
§ 9. HOMOTEETSUSE KASUTAMINE KONSTRUKTSIOONÜLESANNETE LAHENDAMISEL.

Nagu liikumisteisendusi, nii ka homoteetsust saab kasutada konstruktsioonülesannete lahendamisel. Vastav nn. sarnasusmeetod seisneb selles, et esmalt konstrueeritakse otsitava

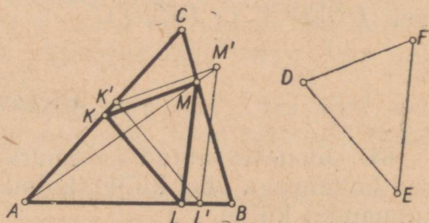
kujundiga sarnane kujund ja siis homoteetsust kasutades otsitav kujund. Vaatleme selle meetodi rakendamist mõnede näidisülesannete lahendamisel.

Näide 1. Antud sektorisse MON joonestada ruut, mille kaks tippu asetsevad sektori raadiusel OM , kolmas tipp raadiusel ON ja neljas tipp kaarel MN (joon. 54).

Lahendus. Joonestame algul mingi ruudu $A'B'C'D'$ (joon. 54), mille tipud A' ja B' asetsevad antud sektori raadiusel OM ja tipp D' sektori raadiusel ON (kuidas seda teha?). Pikendame lõiku OC' kuni lõikumiseni sektori kaarega punktis C , kui ta juba ei lõika seda kaart. Teisendame ruutu $A'B'C'D'$ homoteetselt, võttes keskpunktiks punkti O ja üheks paariks vastavateks punktideks punktid C' ja C ($k = OC : OC'$). Teisendamisel saame ruudu $ABCD$, mis täidab ülesande tingimusi. Lahend on ühene.



Joon. 54.



Joon. 55.

Näide 2. Joonestada kolmnurk, mille tipud asetsevad antud kolmnurga ABC külgedel ja küljed on vastavalt paralleelsed teise antud kolmnurga DEF külgedega.

Lahendus. Võtame küljel AC vabalt punkti K' ja joonestame esmalt otsitava kolmnurgaga KLM sarnase kolmnurga $K'L'M'$, mille tipp L' asetseb küljel AB ja mille küljed on vastavalt paralleelsed kolmnurga DEF külgedega (joon. 55). Kolmnurka $K'L'M'$ teisendame homoteetselt, võttes homoteetsuskeskpunktiks punkti A ja üheks vastavate punktide paariks punktid M' ja M , kus M on sirgete AM' ja BC lõikepunkt.

Näide 3. Konstrueerida kolmnurk, mille kaks nurka α ja β ning nurga α tipust tõmmatud mediaani ja kõrguse summa on antud.

Lahendus. Konstrueerime otsitavaga sarnase kolmnurga $AB'C'$ (joon. 56), milles $\angle A = \alpha$, $\angle B' = \beta$ ja külge AB' on vabalt võetud. Edasi leiame tipust A tõmmatud mediaani AM' ja kõrguse AH' ning kanname kõrguse mediaani pikendusele. Nii saame tipust A tõmmatud mediaani ja kõrguse summaks lõigu AD' .

II. SIRGED JA TASAPINNAD.

§ 10. TASAPIND JA SELLE KUJUTAMINE.

Geomeetria esimeses osas — **planimeetrias** ehk tasapinnageomeetrias õpitakse tundma tasapinnaliste kujundite omadusi. Geomeetria teise osa — **stereomeetria** ehk ruumigeomeetria ülesandeks on uurida ruumilisi kujundeid, s. o. kujundeid, mis ei asetse kõigi oma punktidega ühel ja samal tasapinnal. Iga kujundi uurimisel on eeskätt vaja saada kujundist õige kujutlus ning osata teda kujutada joonise abil.

Kõige lihtsamad kujundid on **punkt**, **sirgjoon** ja **tasapind**; neid nimetatakse **põhikujunditeks**. Põhikujundeid me ei defineeri. Nende abil uurime kõiki teisi kujundeid.

Punkti ja sirge omadused on tuttavad planimeetria kursusest. Tasapinda iseloomustab tema järgmine omadus, nn. **tasapinna põhiomadus**:

kui tasapinnal ja sirgjoonel on kaks ühist punkti, siis sirgjoone kõik punktid asetsevad sellel tasapinnal.

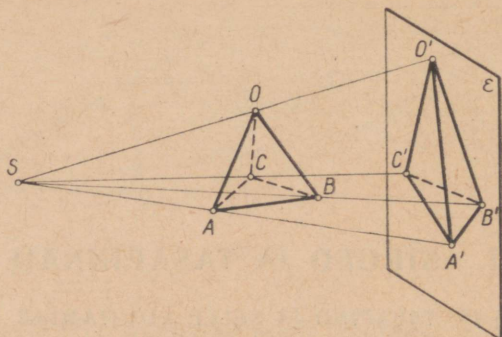
Sel juhul öeldakse, et sirge **asetseb** tasapinnal ehk tasapind **läbib** sirget.

Tasapindu tähistatakse väikeste kreeka tähtedega, näiteks α , β , ϵ jm.

Mingist ruumiobjektist tasapinnalise kujutise saamiseks toimime järgmiselt. Valgustame objekti ühest punktist väljuvate või paralleelsete valguskiirtega ja joonestame tekkiva varju piirjoone mingil tasapinnal. Niisugust varjujoonist nimetatakse objekti **projektsiooniks** ehk **kujutiseks** tasapinnal ning tasapinda, millel saadakse see joonis, **projektsioonipinnaks** ehk **ekraaniks**. Kiired, mis tekitavad kujutise, on **kujutamiskiired** ehk **projekteerivad kiired**.

Sõltuvalt kujutamiskiirte vastastikusest asendist eristatakse kahesuguseid projektsioone, nimelt **tsentraalprojektsioone** ja **paralleelprojektsioone**.

Tsentraalprojektsiooniks nimetatakse kujundi projektsiooni juhul, kui kujutamiskiired lähtuvad ühest punktist.



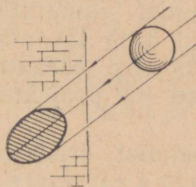
Joon. 57.

Joonis 57 kujutab kolmnurkse püramiidi $OABC$ tsentraalprojektsiooni $O'A'B'C'$ tekkimist ekraanil ε . Projekteerivad kiired $SA, SB, \dots$ väljuvad siin ühest ja samast punktist S , mida nimetatakse **silmapunktiks**.

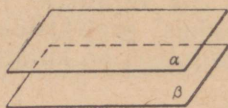
Kui silmapunkt S on lõpmata kaugel esemest ja ekraanist, siis kujutamiskiired on omavahel paralleelsed.

Projektsiooni, mis saadakse paralleelsete kujutamiskiirtega, nimetatakse paralleelprojektsiooniks.

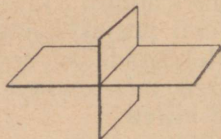
Et päikesekiired on Päikese väga suure kauguse tõttu praktiliselt paralleelsed, siis võib nende poolt mingil tasapinnal tekitatud varjusid lugeda paralleelprojektsioonideks (joon. 58). Seevastu on fotograafilised ülesvõtted tsentraalprojektsioonid. Tsentraalprojektsioonis tehtud kujutist nimetatakse sagedasti ka perspektiiviks¹. See kujutamisiis leiab rakendamist peamiselt maalikunstis ja arhitektuuris, sest ta võimaldab kujutada esemeid nii, nagu neid näeb meie silm. Kehade kujutamine paralleelprojektsioonis aga leiab rakendamist tehnikas ja teaduses, sest ta võimaldab kergesti keha mõõtmete kindlakstegemist.



Joon. 58.



Joon. 59.



Joon. 60.

¹ *perspicere* (lad.) — läbi vaatama.

Ruumis oleva tasapinna kujutamiseks eraldame temast mõttes tüki, harilikult ristkülikukujulise, ning joonestame selle tüki paralleelprojektsiooni. Selleks on üldiselt rööpkülik; seepärast kujutataksegi tasapindu harilikult rööpkülikutena. Nii kujutab joonis 59 kahte rõhttasapinda ja joonis 60 üht rõht- ja üht püsttasapinda. Tasapinna asendi selgitamiseks antakse mõnikord rööpküliku need küljed tugevamalt, mis on vaatlejale lähemal; samal põhjusel esitatakse lõigud, mis jäävad teise tasapinna varju, kas kriipsjoonega (nagu tasapinna β puhul joonisel 59) või jäetakse need lõigud üldse joonestamata (nagu joonisel 60). Viimasel juhutamisel tekitab joonis kujutluse tasapindadest, mis on läbipaistmatud.

Õige kujutluse saamiseks ruumilistest kujunditest nende jooniste järgi peame oskama näha jooniseid n. ö. «ruumilistena». Selle kergendamiseks on kasulik kõrvuti joonistega vaadelda ka vastavaid mudeleid. Mudelite ehitamisel kasutame tasaseid vineeri- või papitükke (ka joonestuskolmnurki) tasapindadena ning mitmesuguseid vardaid (ka pliiatseid) sirgetena.

Ülesandeid.

69. Kuidas saab joonlauaga kontrollida, kas laua pind on tasane?

70. Esita joonisel tasapind ühes sellele kuuluva kahe lõikuva sirgega.

71. Kujuta joonisel kaks lõikuvat püsttasapinda.

72. Mitu tasapinda läheb läbi ühe punkti, läbi ühe sirge?

73. Esita joonisel kolm tasapinda läbi ühe sirge.

§ 11. TASAPINNA MÄÄRAMINE PUNKTIDE JA SIRGETE ABIL.

1. **Tasapinna määramine kolme punkti abil.** Tasapinna määramine punktide ja sirgete abil põhineb järgmisel aksioomil (joon. 61, a):

läbi kolme punkti, mis ei asetse ühel ja samal sirgel, läheb üks ja ainult üks tasapind.

Sama tõsiasja väljendatakse veel kujul:

tasapind on määratud oma kolme punktiga, mis ei asetse ühel ja samal sirgel.

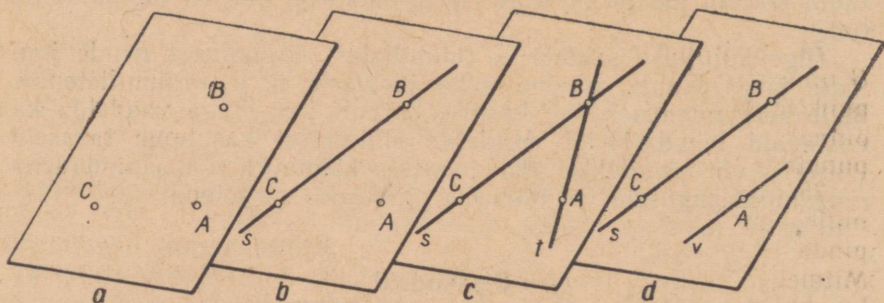
Sellest aksioomist järeldub nn. tasapindade ühtivuse teoreem:

kui kahel tasapinnal on kolm ühist punkti, mis ei asetse ühel ja samal sirgel, siis need tasapinnad ühtivad,

sest nende kolme punktiga on määratud ainult üks tasapind.

Tasapinda, mis on määratud punktidega A , B ja C , nimetame tasapinnaks ABC . Lauset «Tasapind α on määratud punktidega A , B , ja C » kirjutame lühidalt kujul

$$\alpha \equiv ABC.$$



Joon. 61.

2. Tasapinna muud määramise viisid. Kolme punktiga määramise viisi kõrval leidub veel kolm tasapinna määramise viisi. Esitame need kõik korraga järgmise teoreemi näol:

tasapind on määratud:

- 1) ühe sirge ja väljaspool sirget asetseva punktiga;
- 2) kahe lõikuva sirgega;
- 3) kahe paralleelse sirgega.

Tõestus. Kui on antud kas sirge ja väljaspool seda asetsev punkt või kaks lõikuvat sirget või kaks paralleelset sirget, siis saab neil kujunditel ikka valida kolm punkti A , B ja C , mis ei asetse ühel sirgel (joon. 61, b , c , d). Need kolm punkti määravad ühe tasapinna, millel asetsevad antud sirgete ülejäänud punktid. Kui viimaste hulgast valiksime mingi muu mitte ühel sirgel asetseva punktide kolmiku A_1 , B_1 , C_1 , siis nendega määratud tasapind ühtiks tasapinnaga ABC , sest neil tasapindadel oleks kolm ühist punkti, mis ei asetse ühel sirgel. Seega on nende andmetega määratud ikka ainult üks tasapind. Seda aga oligi vaja tõestada.

Jooniselt 61 selgub ühtlasi, kuidas kolmest punktist kui tasapinna määramisandmete baasist saab üle minna muudele määramisandmetele.

Sõltuvalt tasapinna määramise viisist saab tasapinda peale ühe kreeka tähe tähistada ja nimetada ka kas kolme punkti, kahe sirge või punkti ja sirge tähistega abil. Nii näiteks tasapind st on määratud sirgetega s ja t , tasapind Ms on määratud punktiga M ja sirgega s jne. Kui tasapind α on määratud näiteks sirgetega s ja t , siis märgime seda lühidalt nii:

$$\alpha \equiv st.$$

Ülesandeid.

74. Sirged a ja b lõikuvad punktis C , sirged a ja c punktis B ning sirged b ja c punktis A , kusjuures A , B ja C on erinevad punktid. Näita, et need kolm sirget asetsevad ühel ja samal tasapinnal, ja anna tasapinna kõik määramisviisid nimetatud kolme punkti ja kolme sirge abil.

75. On antud mittetasane nelinurk $ABCD$, s. o. nelinurk, mille kõik tipud ei asetse ühel ja samal tasapinnal. Mitu tasapinda ja millised nimelt, on määratud selle nelinurga tippudega? Mitmel ja missugustel tasapindadel nimelt asetseb selle nelinurga kumbki diagonaal?

76. On antud neli punkti, mis ei ole ühel ja samal tasapinnal. Kas võib leiduda nende hulgas kolm punkti, mis asetsevad ühel ja samal sirgel? Mitu sirget ja mitu tasapinda on määratud nende nelja punktiga?

77. Mitu sirget on määratud n punktiga ($n > 2$), kui ükski punktide kolmik pole ühel ja samal sirgel?

78. Mitu tasapinda on määratud n punktiga ($n > 3$), kui ükski punktide nelik pole ühel ja samal tasapinnal?

79. Paljude aparaatide toeks, nagu fotoaparaat, pikksilm, teodoliit jm., tarvitatakse kolme jalaga statiivi. Selgita, miks.

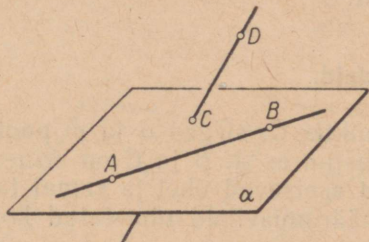
§ 12. KAHE SIRGJOONE VASTASTIKUSED ASENDID. KIIVSIRGED.

Ühe ja sama tasapinna kaks sirget teatavasti kas lõikuvad või on paralleelsed. Ümberpöörduvalt, kui mistahes kaks sirget lõikuvad või on paralleelsed, siis saab neist ikka läbi panna tasapinna.

Näitame nüüd, et kahel sirgel ruumis on veel kolmas vastastikuse asendi võimalus. Selleks võtame tasapinnal α sirge AB ja väljaspool seda punkti C (joon. 62). Kui nüüd väljaspool tasapinda α asetsevast punktist D tõmbame sirge CD , siis viimane pole sirgega AB ühel ja samal tasapinnal. Tõepoolest, kui leiduks tasapind β , mis läbiks sirgeid AB ja CD , siis punkte A , B ja C peaks läbima kaks mitteühtivat tasapinda, nimelt tasapind α , mis

ei sisalda sirget CD , ja tasapind β , mis sisaldab sirge CD . Et punkte A , B ja C läbib ainult üks tasapind, milleks on α , siis tasapinda β pole olemas.

Kahte sirget, mida ei saa läbida üks ja sama tasapind, nimetatakse **kiivsirgeteks**.



Joon. 62. ✓



Joon. 63.

Seega on ruumis kaks mitteühtivat sirget kas lõikuvad, paralleelsed või kiivsed.

Kahe kiivsirge kujutamisel joonestatakse see sirge katkestatult, mis jääb teise alla või taha (joon. 63). Paralleelseid sirgeid, mis pole joonispinnal (ekraanil), kujutame jooniselgi paralleelsetena. See on õigustatud eeldusel, et kujutamine toimub paralleelsete kiirte abil.

Ülesandeid.

80. Mitu kuubi serva lõikuvad ühe servaga? on paralleelsed ühe servaga? on kiivsed ühe servaga?

81. Mitu risttahuka serva lõikuvad, mitu on paralleelsed ja mitu on kiivsed risttahuka ühe diagonaaliga?

82. Kui palju on horisontaalseid ja kui palju vertikaalseid sirgeid, mis läbivad antud punkti?

83. Mitu horisontaalset sirget saab joonestada antud vertikaalsel tasapinnal läbi antud punkti?

84. Kuidas asetsevad teineteise suhtes mittetasase nelinurga diagonaalid?

§ 13. KAHE TASAPINNA VASTASTIKUSED ASENDID.

Kui kahel tasapinnal on ühiseid punkte, aga tasapinnad ei ühti, siis öeldakse, et nad lõikuvad. Meie kujutluse järgi kahel lõikuv tasapinnal ei saa olla ainult üksikuid ühiseid punkte, vaid

neil peab olema ühine joon. Viimast nimetatakse tasapindade lõikejooneks. Tõestame, et

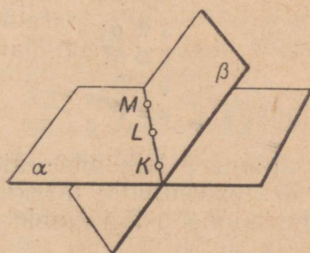
kahe tasapinna lõikejoon on sirge.

Tõestus. Kui kahe tasapinna α ja β lõikejoon ei oleks sirge (joon. 64), siis peaks ta olema kõver. Kõverjoonel on võimalik valida kolm punkti K , L ja M nii, et nad ei asetse ühel sirgel. Need kolm mitte ühel sirgel asetsevat punkti oleksid siis tasapindade α ja β ühised punktid ning järelikult peaksid need tasapinnad ühtima. Et antud tasapinnad eelduse järgi ei ühti, siis ei saa nende lõikejoonel olla kolme punkti, mis ei asetse ühel sirgel; järelikult peab lõikejoon olema sirge. Sellega on teoreem tõestatud.

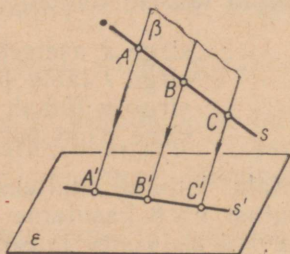
Toetudes ülalantud teoreemile saab näidata, et nii tsentraalkui ka paralleelprojektsioonis

sirgejoone kujutis on üldiselt sirge, erijuhul aga punkt.

Kujutamiskiired AA' , BB' , CC' , mis läbivad sirge s punkte A , B , C , kas väljuvad kõik ühest punktist või on paralleelsed (joon. 65). Nii ühel kui teisel juhul asetsevad nad kõik ühel ja samal tasapinnal β , s. t. sirge s kujutamiskiirte tasapinnal, mis on määratud sirgega s ja ühe kiirega, näiteks kiirega AA' . Sirge s kujutiseks ekraanil ϵ on tasapindade β ja ϵ lõikejoon s' , mis teatavasti on sirge.



Joon. 64.



Joon. 65.

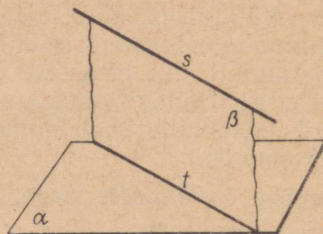
Kui sirge s ühtib ühe kujutamiskiirega, siis selle kiire ja ekraani lõikepunkt on sirge kõigi punktide kujutiseks.

Kui kahel tasapinnal pole ühtki ühist punkti, siis öeldakse, et need tasapinnad on paralleelsed. Niisiis, kaks mitteühtivat tasapinda kas lõikuvad või on paralleelsed.

§ 14. SIRGE JA TASAPIND.

1. **Sirge ja tasapinna vastastikused asendid.** Tasapinna põhiomadusest selgus, et kui sirgel on tasapinnaga kaks ühist punkti, siis sirge kõik punktid on tasapinnal. Kui sirgel ja tasapinnal

on üksainus ühine punkt, siis öeldakse, et sirge ja tasapind lõikuvad. Kui neil aga pole ühtki ühist punkti, siis öeldakse, et sirge ja tasapind on paralleelsed. Muid võimalusi ilmselt olla ei saa. Niisiis on ruumis igal sirgel iga tasapinna suhtes üks järgmisest kolmest asendist: sirge kas asetseb (ehk on) tasapinnal, lõikab tasapinda või on tasapinnaga paralleelne.



Joon. 66. ✓

Nende tõsiasjade märkimiseks kasutame sümboleid $\subset$ (asetseb), $\supset$ (läbib), $\times$ (lõikab) ja $\parallel$ (on paralleelne). Nii kirjutame allantud lauseid lühidalt järgmiselt:

sirge s asetseb tasapinnal α	$s \subset \alpha$;
sirge t läbib punkti M	$t \supset M$;
sirge u lõikab tasapinda β	$u \times \beta$;
sirge v on paralleelne tasapinnaga γ	$v \parallel \gamma$.

Kahe kujundi, näiteks sirge u ja tasapinna β lõikumise üleskirjutust $u \times \beta$ kasutame ühtlasi ka nende lõikekujundi märkimiseks. Nii kirjutame lauset «Sirge u ja tasapinna β lõikepunkt on A » kujul

$$u \times \beta \equiv A$$

ja lauset «Tasapinnad α ja β lõikuvad mööda sirget s » kujul

$$\alpha \times \beta \equiv s.$$

Eelneva põhjal kirjutus

$$(\alpha \times \beta) \supset M$$

tähendab, et tasapindade α ja β lõikesirge läbib punkti M .

2. Sirge ja tasapinna paralleelsuse tunnus. Sirge ja tasapinna vastastikuse asendi uurimisel on otstarbekohane kasutada järgmist teoreemi, mida nimetatakse ka sirge ja tasapinna paralleelsuse tunnuseks:

sirge, mis pole tasapinnal, on siis tasapinnaga paralleelne, kui ta on paralleelne sirgega, mis asetseb sel tasapinnal.

Eeldus. s ei asetse tasapinnal α ; $t \subset \alpha$; $s \parallel t$ (joon. 66).

Väide. $s \parallel \alpha$.

Tõestus. Sirged s ja t määravad tasapinna β , mis lõikub tasapinnaga α mööda sirget t . Kui sirge s lõikuks tasapinnaga α , siis nende lõikepunkt X oleks nii tasapinnal β kui ka tasapinnal α , järelikult asetseks ta nende tasapindade lõikesirgel t . Seega oleks punkt X sirgete s ja t ühine punkt. Kuid eelduse järgi neil sirgeil ühist punkti pole ning seepärast ei saa sirge s lõikuda tasapinnaga α , vaid on temaga paralleelne.

Sellest teoreemist järeldame, et

sirge, mis on paralleelne kahe tasapinna lõikejoonega ega asetse kummagi tasapinnal, on mõlema tasapinnaga paralleelne,

sest ta on paralleelne sirgega, mis asetseb nii ühel kui ka teisel tasapinnal.

Ülesandeid.

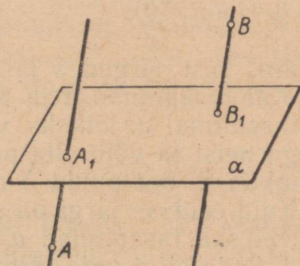
85. Kuidas võib asetseda tasapinnaga paralleelne sirge sellel tasapinnal antud sirge suhtes?

86. Mitu sirget saab panna läbi antud punkti paralleelselt antud tasapinnaga?

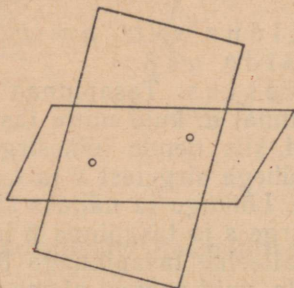
87. Näita, et risttahuka iga serv on paralleelne kahe tahuga.

88. Antud on tasapind ja sellega paralleelne sirge. Tõesta, et seda sirget läbiva tasapinna ja antud tasapinna lõikejoon on paralleelne antud sirgega.

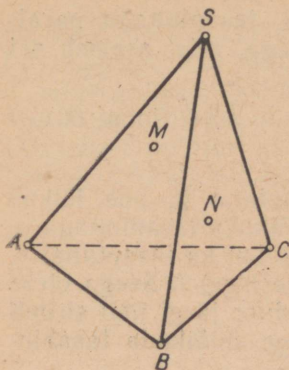
89. Tasapinnast α ühel pool on antud punkt A ja teisel pool punkt B . Läbi nende punktide on pandud kaks paralleelset sirget, mis lõikavad tasapinda α vastavalt punktides A_1 ja B_1 (joon. 67). Leia punkt, kus sirge AB lõikab tasapinda α .



Joon. 67.



Joon. 68.



Joon. 69.

90. Joonisel 68 on antud kahe tasapinnatüki kujutiste piirjooned ja nende tasapindade lõikejoone kaks punkti. Esita joonisel nende tasapindade lõikumine, s. t. joonest nende lõikejoon ja tõmba tugevamalt kummagi tasapinnatüki piirjoone need osad, mis on nähtavad (ülesandel on kaks lahendust).

91. Püramiidi $SABC$ tahul SAB on antud punkt M ja tahul SBC punkt N (joon. 69). Tee joonis ja esita sellel:

- 1) tasapindade SMN ja SAB lõikejoon;
 - 2) tasapindade SMN ja SBC lõikejoon;
 - 3) tasapindade SMN ja ABC lõikejoon;
 - 4) sirge MN ja tasapinna ABC lõikepunkt;
 - 5) tasapindade SMN ja SAC lõikejoon;
 - 6) sirge MN ja tasapinna SAC lõikepunkt.
92. Püramiidi $SABC$ serval SA on antud punkt M , serval SB punkt N ja serval SC punkt P . Tee joonis ja leia sellel:
- 1) punktid, kus sirged MN , NP ja PM lõikavad tasapinda ABC ;
 - 2) tasapindade ABC ja MNP lõikejoon.

§ 15. KAHE TASAPINNA PARALLEELSUS.

1. **Kahe tasapinna paralleelsuse definitsioon ja tunnus.** Kaks tasapinda on paralleelsed, kui neil ei ole ühtki ühist punkti. Et tasapinnad võivad olla paralleelsed, seda näitab järgmine teoreem:

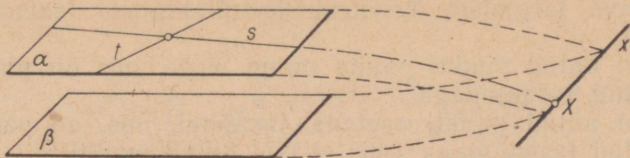
kaks tasapinda on paralleelsed, kui ühe tasapinna kahest lõikuvast sirgest kumbki on paralleelne teise tasapinnaga.

Eeldus. $s \times t$; $\alpha \equiv st$; $s \parallel \beta$; $t \parallel \beta$ (joon. 70).

Väide. $\alpha \parallel \beta$.

Tõestus. Tasapinnad α ja β ei ühti, sest sirged s ja t on tasapinnal α , kuid mitte tasapinnal β . Kui tasapinnad α ja β lõikuksid, siis nende lõikesirge x , olles tasapinnal α , lõikuks vähemalt ühega sirgetest s ja t , kuna teisega neist ta võib olla paralleelne. Lõikugu ta näiteks sirgega s punktis X . See punkt X oleks siis sirge s ja tasapinna β lõikepunkt. Kuid eelduse järgi on sirge s paralleelne tasapinnaga β . Järelikult ei saa tasapinnad α ja β lõikuda, vaid peavad olema paralleelsed. Seda oligi vaja tõestada.

Selles teoreemis eeldasime, et $s \parallel \beta$ ja $t \parallel \beta$. Eelmises paragrah-



Joon. 70. ✓

vis tõestatud teoreemi järgi on aga niisugused eeldused täidetud, kui sirged s ja t on vastavalt paralleelsed kahe lõikuva sirgega u ja v , mis on tasapinnal β , s. t. kui $s \parallel u$ ja $t \parallel v$. Kasutades neid tingimusi vasttõestatud teoreemi eelduses, võime sõnastada nn. tasapindade paralleelsuse tunnuse järgmiselt:

kaks tasapinda on paralleelsed, kui ühe tasapinna kaks lõikuvat sirget on vastavalt paralleelsed teise tasapinna kahe sirgega.

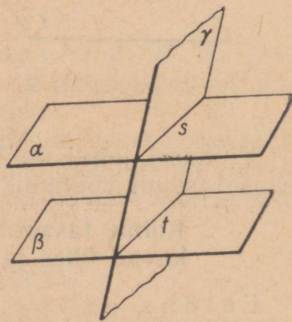
2. Paralleelsete tasapindade põhiomadus.

Paralleelsete tasapindade lõikamisel tasapinnaga tekivad paralleelsed lõikesirged.

Eeldus. $\alpha \parallel \beta$; $\alpha \times \gamma \equiv s$; $\beta \times \gamma \equiv t$ (joon. 71).

Väide. $s \parallel t$.

Tõestus. Sirged s ja t , olles ühel ja samal tasapinnal γ , kas lõikuvad või on paralleelsed. Kui sirged s ja t lõikuksid, siis nende lõikepunkt X oleks tasapinnal α , sest sirge s kõik punktid asetsevad tasapinnal α ; samuti asetseks punkt X tasapinnal β , sest sirge t kõik punktid asetsevad tasapinnal β . Seega oleks X tasapindade α ja β ühine punkt. Kuid ühist punkti neil tasapindadel olla ei saa, sest $\alpha \parallel \beta$. Järelikult s ja t ei lõiku, vaid on paralleelsed.



Joon. 71. ✓

Ülesandeid.

93. Tõesta, et risttahuka vastastahkude tasapinnad on paralleelsed.

94. Eeldades, et ruumis saame igal antud või vabalt võetud tasapinnal teostada planimeetriast tuntud konstruktsioone,

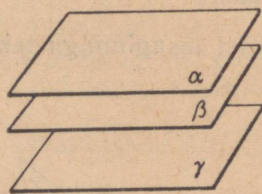
koosta kava järgmiste konstruktsioonülesannete lahendamiseks ruumis:

- 1) läbi antud punkti panna mingi sirge, mis on paralleelne antud tasapinnaga;
- 2) läbi antud punkti asetada tasapind, mis on paralleelne antud tasapinnaga (mis ei läbi antud punkti);
- 3) läbi ühe kahest antud kiivsirgest panna tasapind, mis on paralleelne teise antud sirgega.

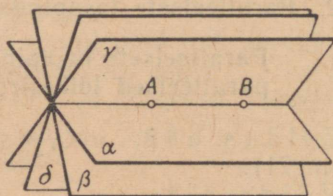
§ 16. KOLME TASAPINNA VASTASTIKUSED ASENDID.

Kolm tasapinda võivad asetseda nii, et

- 1) neil pole ühtki lõikesirget (joon. 72); sel juhul tasapinnad on paralleelsed;
- 2) neil on üks lõikesirge (joon. 73); sel juhul need tasapinnad kuuluvad ühte tasapindade kimpu;
- 3) neil on kaks lõikesirget (joon. 71); sel juhul kaks tasapinda nende hulgast on paralleelsed;
- 4) neil on kolm lõikesirget (joonised 74 ja 75).



Joon. 72. ✓



Joon. 73. ✓

Viimasel juhul on kolme tasapinna lõikesirgetel kaks vastastikuse asendi võimalust, nagu selgub järgmisest teoreemist.

Kolme tasapinna lõikesirged on kas paralleelsed või lõikuvad ühes ja samas punktis.

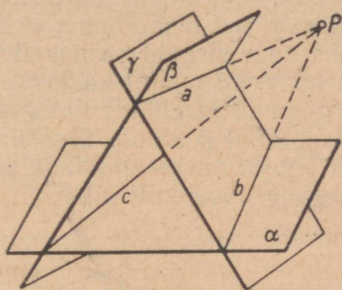
Eeldus. $\alpha \times \beta \equiv c$; $\beta \times \gamma \equiv a$; $\alpha \times \gamma \equiv b$ (joonised 74 ja 75).

Väide. 1) Kui $\alpha \times b \equiv P$, siis $c \supset P$ (joon. 74).

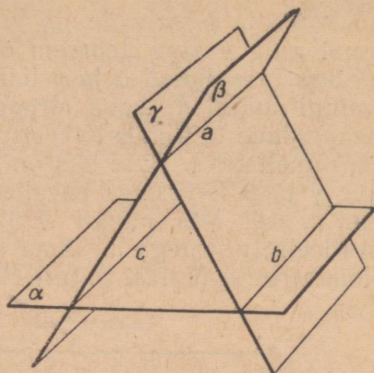
2) Kui a ja b ei lõiku, siis $a \parallel b$, $a \parallel c$ ja $b \parallel c$ (joon. 75).

Tõestus. Sirgetest a , b ja c saab koostada kolm sirgete paari, nimelt paari a ja b , paari a ja c , paari b ja c . Neist esimene paar on tasapinnal γ , teine tasapinnal β ja kolmas tasapinnal α . Järelikult pole nende sirgete hulgas kiivsirgeid.

Kui üks paar sirgeid, näiteks a ja b , lõikuvad (joon. 74), siis nende lõikepunkt P on nii tasapinnal α , kus asetseb sirge b , kui ka



Joon. 74. ✓



Joon. 75.

tasapinnal β , kus asetseb sirge a . Niisiis on punkt P tasapindade α ja β ühine punkt ja järelkult asetseb nende tasapindade lõikesirgel c . Sel juhul sirged a , b ja c lõikuvad ühes ja samas punktis P .

Kui a ja b ei lõiku, siis $a \parallel b$, sest nad ei ole kiivsirged. Kuid siis ka $a \parallel c$ ja $b \parallel c$, sest a ja c või b ja c lõikumise puhul järelduks tõestuse eelmise osa põhjal, et ka a ja b lõikuvad.

Ülesandeid.

95. Paiguta kolm papitükki kui tasapinna mudelid üksteise suhtes niisugusesse asendisse, et nende lõikesirgete hulgas on üks paar, kaks paari, kolm paari ristuvaid sirgeid.

96. On antud kiivsirged x ja y ning esimesel neist punktid A ja B , teisel C . Missugused tasapinnad on määratud nende punktide ja sirgetega? Kuidas asetsevad nende tasapindade lõikesirged üksteise suhtes?

§ 17. KOLM PARALLEELSET SIRGET.

Toetudes eelmisele teoreemile saab näidata, et ruumigeomeetrias jääb õigeks järgmine tasapinnageomeetria tuntud teoreem:

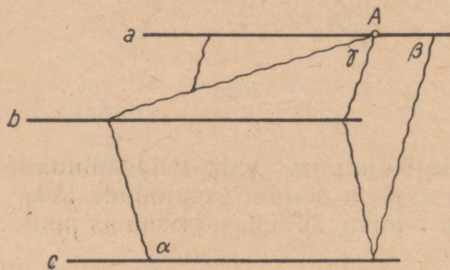
kui kumbki kahest sirgest on paralleelne mingi kolmanda sirgiga, siis nad on ka teineteisega paralleelsed.

Eeldus. $a \parallel c$; $b \parallel c$ (joon. 76).

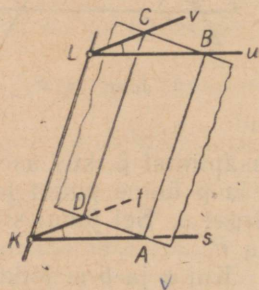
Väide. $a \parallel b$.

Tõestus. Sirged a ja c määravad tasapinna β , sirged b ja c tasapinna α . Need tasapinnad ei saa olla paralleelsed, sest neil on ühine sirge c . Seega tasapinnad α ja β kas ühtivad või lõiku-

vad. Kui α ja β ühtivad, siis on sirged a , b ja c ühel ja samal tasapinnal ning vastav teoreem on tõestatud planimeetria kursuses. Kui aga tasapinnad α ja β lõikuvad (joon. 76), siis võtame sirgel a mingi punkti A ; koos sirgega b määrab see tasapinna $\gamma \equiv Ab$. Tasapindade α , β ja γ lõikesirgetest üks paar sirgeid on paralleelsed, nimelt $b \parallel c$. Kuid siis on eelmise teoreemi põhjal ka tasapindade γ ja β lõikesirge paralleelne sirgega c , järelikult ühtiv sirgega a , sest läbi punkti A läheb tasapinnal β ainult üks sirge paralleelselt sirgega c . Sama teoreemi põhjal on tasapindade β ja γ lõikesirge a ühtlasi paralleelne sirgega b , järelikult $a \parallel b$.



Joon. 76.



Joon. 77.

Ülesandeid.

97. Tõesta, et risttahuka iga serv on paralleelne kolme servaga.

98. a) Tõesta, et risttahuka iga diagonaalipaar asub ühel tasapinnal, nn. diagonaaltasapinnal; järelda, et risttahuka diagonaalid lõikuvad kõik ühes ja samas punktis, mis poolitab diagonaale.

b) Joonesta risttahuka lõige tasapinnaga, mis on määratud diagonaalipaariga.

§ 18. VASTAVALT PARALLEELSETE HAARADEGA NURGAD.

1. Tõestame, et

vastavalt paralleelsete ja samasuunaliste haaradega nurgad on võrdsed.

Eeldus. $s \parallel u$; $t \parallel v$; $s \times t \equiv K$; $u \times v \equiv L$ (joon. 77).

Väide. $\angle st = \angle uv$.

Tõestus. Võtame kiirel s vabalt punkti A ja kiirel t vabalt punkti D . Sirgetega s ja u määratud tasapinnal su joonestame läbi

punkti A sirge AB paralleelselt sirgega KL ; samuti joonestame sirgega KL paralleelse sirge DC tasapinnal tv . Tekkinud nelinurgad $ABLK$ ja $DCLK$ on rööpkülilikud. Et rööpküliliku vastasküljed on võrdsed, siis

$$AB = KL = DC.$$

Sirged AB ja DC , mis on paralleelsed sirgega KL , on ka teineteisega paralleelsed. Seega ka nelinurk $ABCD$ on rööpkülilik, sest tal on üks paar paralleelseid ja võrdseid vastaskülgi. Rööpküliliku vastaskülgede võrdsuse tõttu

$$AK = BL, KD = LC \text{ ja } AD = BC.$$

Kolmnurkade võrdsuse tunnuse kkk järgi seega

$$\triangle AKD = \triangle BLC,$$

millest järeldub, et

$$\angle K = \angle L,$$

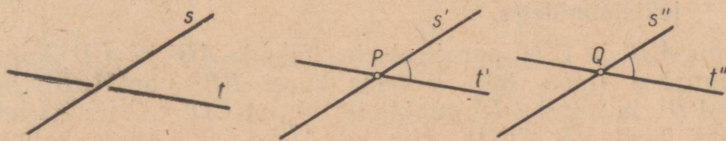
mida oligi tarvis tõestada.

2. Kahe kiivsirge vaheline nurk. Eelmine teoreem võimaldab defineerida nurka kahe kiivsirge vahel: kahe kiivsirge s ja t vaheliseks nurgaks nimetatakse nurka kahe lõikuva sirge s' ja t' vahel, kui need sirged on vastavalt paralleelsed antud kiivsirgetega s ja t (või üks neist ühtib ühega sirgetest s ja t). Niisiis (joon. 78), kui

$$s' \parallel s, t' \parallel t \text{ ja } s' \times t' = P,$$

siis

$$\angle s't' = \angle st.$$



Joon. 78.

Nii defineeritud nurga $\angle s't'$ suurus ei sõltu nurga tipu P asukohast, sest võttes nurga tipuks mingi teise punkti Q ja joonestades läbi Q kaks sirget s'' ja t'' nii, et

$$s'' \parallel s \text{ ja } t'' \parallel t,$$

saame eelnenud teoreemi põhjal tõestada, et

$$\angle s''t'' = \angle s't'.$$

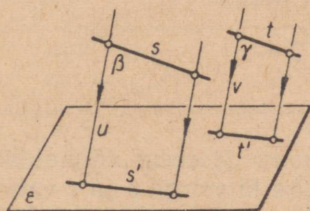
Kui kahe kiivsirge vaheline nurk osutub täisnurgaks, siis öeldakse, et kiivsirged ristuvad. Nende sirgete puhul jääb kehtima planeimeetriast tuntud teoreem:

kui sirge on risti ühega kahest paralleelsest sirgest, siis ta on risti ka teisega.

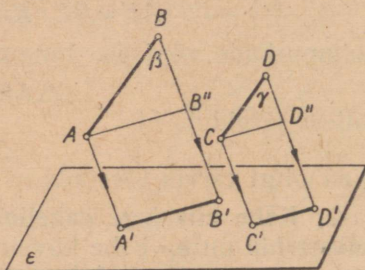
3. **Paralleelprojektsiooni omadusi.** Näitame, et ruumikujundite paralleelprojektsioonidel on järgmised omadused.

1) **Sirged, mis on paralleelide projektsioonideks, on paralleelsed.**

Paralleelsete sirgete s ja t kujutamiskiirte tasapinnad β ja γ on paralleelsed, sest sirge s ja teda lõikav mingi kujutamiskiir u tasapinnal β on vastavalt paralleelsed sirgema t ja teda lõikava mingi kujutamiskiirega v tasapinnal γ (joon. 79). Paralleelsete



Joon. 79.



Joon. 80.

tasapindade β ja γ lõikamisel tasapinnaga ε tekivad paralleelsed lõikesirged s' ja t' , mis ongi sirgete s ja t kujutiseks.

2) **Paralleelsed sirglõigud on võrdelised oma paralleelprojektsioonidega.**

Olgu $A'B'$ ja $C'D'$ paralleelsete lõikude AB ja CD kujutised tasapinnal ε (joon. 80). Võtame kiirel BB' punkti B'' nii, et $AB'' \parallel A'B'$, ja kiirel DD' punkti D'' nii, et $CD'' \parallel C'D'$. Et eelmise teoreemi järgi $A'B' \parallel C'D'$, siis ka $AB'' \parallel CD''$; seega kolmnurga ABB'' kõik küljed on vastavalt paralleelsed kolmnurga CDD'' külgedega. Kuid siis nende kolmnurkade nurgad on vastavalt võrdsed ning kolmnurgad ise sarnased; seetõttu

$$AB : AB'' = CD : CD''.$$

Et nelinurgad $AB''B'A'$ ja $CD''D'C'$ on rööpkülilikud, siis

$$AB'' = A'B' \text{ ja } CD'' = C'D'.$$

Neid võrdusi eespool leitud võrdes arvestades saamegi, et

$$AB : A'B' = CD : C'D'.$$

Erijuhtumil, kui $AB \parallel \varepsilon$, nelinurk $ABB'A'$ osutub rööpkülilikuks ning siis $A'B' = AB$ ja $A'B' \parallel AB$. Sellega oleme tõestanud, et

3) **ekraaniga paralleelne lõik on võrdne ja paralleelne oma paralleelprojektsiooniga.**

Ülesandeid.

99. a) Too risttahuka servade juurest näiteid lõikuvatest rist-sirgetest ja kiivsetest ristsirgetest.

b) Põhjenda väidet, et ristküliku paralleelprojektsioon on üldiselt rööpkülik.

c) Põhjenda väidet, et korrapärase kuusnurga paralleelprojektsioonil on vastasküljed võrdsed ja paralleelsed ning vastastippe ühendavad diagonaalid poolituvad nende lõikepunktis.

d) Nimeta mõni korrapärase kuusnurga omadus, mis jääb paralleelprojektsioonis püsima, ja mõni omadus, mis ei jää püsima.

§ 19. KAHETAHULINE NURK.

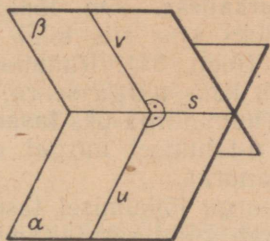
Kahe tasapinna lõikumisel tekib neli k a h e t a h u l i s t nurka. Kui kõrvaldada teisele poole tasapindade lõikesirget jäävad pooltasapinnad, siis saame ü h e kahetahulise nurga. Tasapindade lõikesirget nimetatakse selle kahetahulise nurga **servaks** ja kahetahulist nurka moodustavaid pooltasapindu — selle nurga **tahkudeks**.

Kahetahuline nurk on kujund, mille moodustavad kaks ühest ja samast sirgest väljuvat pooltasapinda.

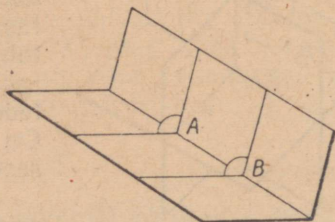
Kahetahulise nurga suurust mõõdetakse tema **joonnurga** abil. Selleks on nurk kahe kiire vahel, mis mõlemad on tõmmatud kahetahulise nurga serva ühest ja samast punktist risti kahetahulise nurga servaga ning milledest üks on ühel tahul, teine teisel tahul. Niisiis, joonestades kahetahulise nurga serva s mingist punktist tahul α kiire u nii, et $u \perp s$, ja tahul β kiire v nii, et $v \perp s$, saamegi kahetahulise nurga joonnurga uv (joon. 81).

Kahetahulise nurga joonnurga suurus ei sõltu nurga tipu asukohast kahetahulise nurga serval.

Selle tõestamiseks võrdleme kahetahulise nurga joonnurki, mille tippudeks on mingid kaks punkti A ja B (joon. 82). Et joon-



Joon. 81.



Joon. 82.

nurkade haarad on risti kahetahulise nurga servaga, siis nurgad A ja B on vastavalt paralleelsete ja samasuunaliste haaradega nurgad. Seega $\angle A = \angle B$.

Nii on siis ükskõik, missuguse punkti kahetahulise nurga serval võtame joonnurga tipuks.

Vastavalt oma joonnurga suurusele on kahetahuline nurk kas täis-, terav- või nürinurk. Kahetahulised nurgad on võrdsed, kui nende joonnurgad on võrdsed.

Kui kahetahulise nurga joonnurk on täisnurk, siis öeldakse, et tasapinnad ristuvad; lühidalt (joon. 81):

kui $\angle uv = 90^\circ$, siis $\alpha \perp \beta$.

Kui kaks lõikuvat tasapinda ei ristu, siis nende lõikumisel tekkinud kahetahulistest nurkadest kaks nurka on teravnurgad ja kaks nürinurgad. Siis loetakse kahe tasapinna vaheliseks nurgaks harilikult nende lõikumisel tekkinud teravnurka. Sama nurka nimetatakse ka ühe tasapinna kaldenurgaks teise tasapinna suhtes.

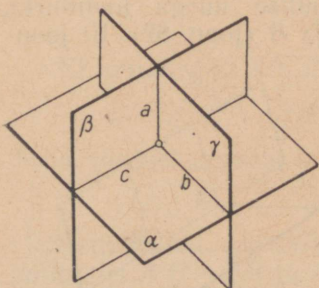
Ülesandeid.

100. Tõesta, et tasapind, mis on risti ühega kahest paralleelsest tasapinnast, on risti ka teisega.

101. Selgita, missuguseid nurki võiks nimetada kahetahulisteks kõrvunurkadeks, missuguseid kahetahulisteks tippnurkadeks.

§ 20. RUUMINURK.

1. Ruuminurga mõiste. Kui kolme tasapinna lõikesirged läbivad ühist punkti, siis tekib selle punkti juures kaheksa kolmetahulist nurka (joon. 84).

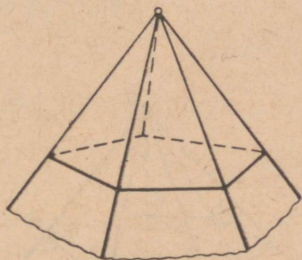


Joon. 83.

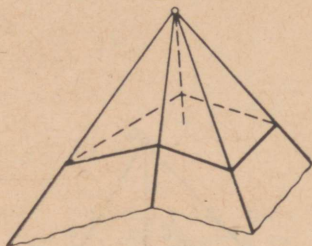
Ühes punktis võib lõikuda ka enam kui kolm tasapinda — üldiselt n tasapinda. Kujundeid, mis tekivad tasapindade lõikumisel ühes punktis, nimetatakse **ruuminurkadeks**. On lõikuvaid tasapindu näiteks viis, siis tekib viietahuline nurk (joon. 84). Ruuminurga igal tahul asub kaks nurga serva, millega vahel on ruuminurga üks **tasnurk**. On selge, et n -tahulisel nurgal on n serva ja n tasanurka.

Kui ruuminurga lõikumisel tasapinnaga, mis lõikab kõiki servi, saadakse kumer hulknurk, nagu joonisel 84, siis

nimetatakse ruuminurka kumeraks. Kumera ruuminurga ühegi tahu tasapind ei lõika seda nurka; mittekumera ruuminurga mõne tahu tasapind aga lõikab seda nurka (joon. 85).



Joon. 84.



Joon. 85.

2. Teoreem kolmetahulise nurga tasanurkadest.

Kolmetahulise nurga iga tasanurk on väiksem kui kahe ülejäänud tasanurga summa.

Olgu kolmetahulise nurga $Oabc$ tasanurkadest nurk ab kõige suurem (joon. 86); tõestame, et

$$\angle ab < \angle ac + \angle cb.$$

Kui see väide on õige kõige suurema tasanurga kohta, siis on ta kindlasti õige ka teiste tasanurkade kohta.

Tõestuseks joonestame tipust O tahul ab kiire d nii, et $\angle ad = \angle ac$, ja võtame kiirtel c ja d vastavalt punktid C ja D nii, et $OC = OD$. Lõikame nüüd kolmetahulist nurka tasapinnaga, mis läheb läbi punktide D ja C ning lõikab servi a ja b . Lõige on kolmnurk ABC . Selles

$$AD + DB < AC + CB.$$

Et kolmnurkadel AOD ja AOC peale ühise külje AO on veel üks paar võrdseid külgi, nimelt $OD = OC$, ning ühed nurgad võrdsed, nimelt $\angle AOD = \angle AOC$, siis on need kolmnurgad võrdsed; seega ka nende kolmandad küljed on võrdsed:

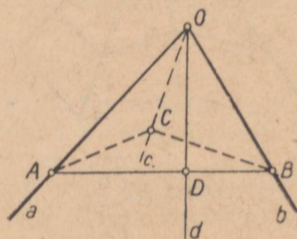
$$AD = AC.$$

Lahutades ülalsaadud võrratuse pooltest võrdsed liikmed AD ja AC , leiame, et

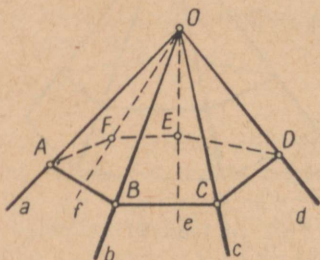
$$DB < CB.$$

Edasi vaatleme kolmnurki DOB ja COB . Neil on peale ühise külje BO veel üks paar võrdseid külgi, aga kolmandad küljed DB ja CB ei ole võrdsed. Teatavasti kahe võrdse küljepaariga kolmnurgas suurema külje vastas on suurem nurk, seega

$$\angle db < \angle cb.$$



Joon. 86.



Joon. 87.

Liites selle võrratuse vasaku poolega nurga ad ja parema poolega niisama suure nurga ac , saame

$$\angle ad + \angle db < \angle ac + \angle cb$$

ehk

$$\angle ab < \angle ac + \angle cb,$$

mida oligi tarvis tõestada.

Järeldus. Kolmetahulise nurga iga tasanurk on suurem kui kahe ülejäänud tasanurga vahe,

sest kui $\angle ab < \angle ac + \angle cb$, siis $\angle ab - \angle ac < \angle cb$.

3. Teoreem ruuminurga tasanurkade summast.

Kumera ruuminurga tasanurkade summa on väiksem kui täispööre.

Olgu $Oabcdef$ mingi kumer ruuminurk. Tõestame, et

$$\angle ab + \angle bc + \angle cd + \dots + \angle fa < 360^\circ.$$

Tõestuseks lõikame ruuminurka mingi tasapinnaga. Lõige on kumer hulknurk $ABCDEF$ (joon. 87). Selle iga tipu juures leidub kolmetahuline nurk, mis asub püramiidi $OABCDEF$ sees. Et

kolmetahulise nurga iga tasanurk on väiksem kui kahe ülejäänud tasanurga summa, siis tipu A juures

$$\angle FAB < \angle FAO + \angle OAB,$$

tipu B juures

$$\angle ABC < \angle ABO + \angle OBC \text{ jne.},$$

lõpuks tipu F juures

$$\angle EFA < \angle EFO + \angle OFA.$$

Nende võrratuste vasakute poolte summa on hulknurga $ABCDEF$ sisenurkade summa, seega $(n-2) \cdot 180^\circ$, kus n on hulknurga tippude arv. Võrratuste paremate poolte summa on kolmnurkade OAB , OBC , ..., OFA sisenurkade summa ilma tipu O juures olevate nurkade summata. Tähistame viimase summa tähega x ; siis võrratuste poolte liitmisel saame, et

$$(n-2) \cdot 180^\circ < n \cdot 180^\circ - x$$

ehk

$$x + n \cdot 180^\circ - 360^\circ < n \cdot 180^\circ$$

ehk

$$x < 360^\circ.$$

Et x on antud ruuminurga tasanurkade summa, siis on teoreem tõestatud.

Kaks ruuminurka on võrdsed, kui neid saab teineteise sisse mahutada nii, et kõik ühe ruuminurga servad ühtivad teise vastavate servadega. Võrdsete ruuminurkade kõik tasanurgad ja kõik kahetahulised nurgad on vastavalt võrdsed ja ühteviisi asetatud.

Ülesandeid.

102. Kolmetahulise nurga üks tasanurk on 75° ja teine 126° . Missugustes piirides on kolmanda tasanurga suurus?

103. Kolmetahulise nurga $Oabc$ serval a on antud punkt P , serval b punkt Q ja tahul ac punkt R . Esita joonisel kolmetahulise nurga lõige tasapinnaga PQR .

104. Kolmetahulise nurga $Oabc$ serval a on antud punkt P , tahul ab punkt Q ja tahul ac punkt R . Esita joonisel kolmetahulise nurga lõige tasapinnaga PQR .

105. Kolmetahuline nurk $Oabc$ on lõigatud kahe tasapinnaga, milledest üks lõikab servi a , b ja c vastavalt punktides A , B ja C , teine vastavalt punktides K , L ja M . Esita joonisel tasapindade ABC ja KLM lõikejoon.

106. Mitu kahetahulist ja mitu kolmetahulist nurka on kuubil? Kui suur on kuubi kolmetahulise nurga tasanurcade summa?

107. Kolmetahulise nurga kaks tasanurka on 45° ja nende kahe tahu vaheline nurk on täisnurk. Kui suur on kolmas tasanurk?

Näpunäide. Joonesta antud kahetahulise nurga joonnurk ja uuri tekkinud kolmnurki.

108. Kolmetahulise nurga kaks tasanurka on mõlemad 30° ja nende kahe tahu vaheline nurk on täisnurk. Kui suur on kolmas tasanurk?

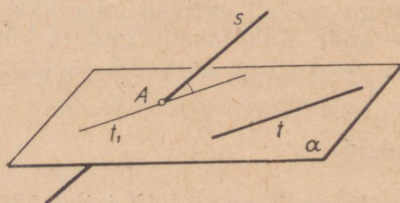
109. Kolmetahulise nurga kõik tasanurgad on 60° . Arvuta kahetahuliste nurcade suurused.

§ 21. TASAPINNA NORMAAL.

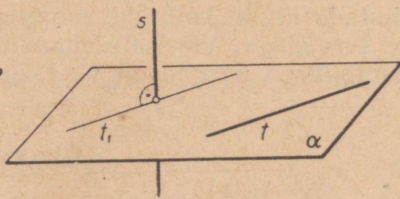
Lõigaku sirge s tasapinda α punktis A (joon. 88). Võtame tasapinnal α mingi sirge t ja leiame sirgete s ja t vahelise nurga $\angle st$. Kui sirge t ei läbi punkti A , siis sirged s ja t on kiivsirged ja nendevahelise nurga leidmiseks võtame läbi punkti A sirge $t_1 \parallel t$ (§ 18, 2).

Kui $\angle st$ on täisnurk ja jääb täisnurgaks ka sirge t mistahes asendi puhul tasapinnal α , siis ütleme, et tasapind α ja sirge s on teineteisega risti (joon. 89). Tasapinnaga ristuvat sirget nimetatakse ka tasapinna normaaliks. Niisiis,

sirget nimetatakse tasapinna normaaliks, kui ta on risti kõigi selle tasapinna sirgetega.



Joon. 88.



Joon. 89.

Sirget, mis tasapinda lõikab, kuid ei ole sellega risti, nimetatakse selle tasapinna suhtes **kaldsirgeks**.

Tasapinna normaali olemasolu selgub järgmisest teoreemist, mida nimetatakse ka sirge ja tasapinna ristseisu tunnuseks.

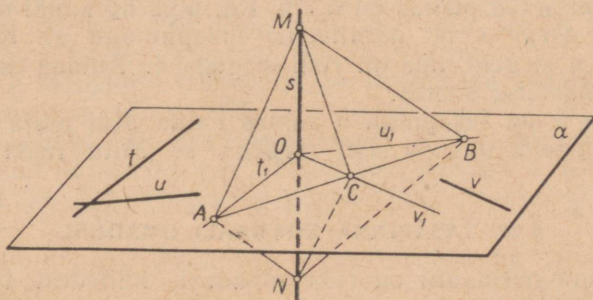
Kui tasapinda lõikav sirge on risti selle tasapinna kahe lõikuva sirgega, siis see sirge on tasapinna normaal.

Eeldus. $s \perp t$; $s \perp u$; $t \times u$; $tu \equiv a$ (joon. 90).

Väide. $s \perp a$.

Tõestus. Sirge s ristumiseks tasapinnaga a on antud definitsiooni järgi tarvis, et sirge s ristuks iga sirgega, mis asetseb tasapinnal a . Ilmselt sirge s ristub iga sirgega, mis on paralleelne sirgega t või u . Tõestamiseks võtame seepärast tasapinnal a mistahes kolmanda sirge v , mis lõikab sirgeid t ja u , ja näitame, et $s \perp v$. Kui sirge v ei läbi punkti $O \equiv s \times a$, siis võtame läbi punkti O sirge $v_1 \parallel v$ ja näitame, et $s \perp v_1$. Sellest järeldub siis, et $s \perp v$. Kui sirged t ja u ei läbi punkti O , siis võtame läbi punkti O sirged t_1 ja u_1 nii, et $t_1 \parallel t$ ja $u_1 \parallel u$. Eeldusest järeldub, et siis $s \perp t_1$ ja $s \perp u_1$. Edasi täiendame joonist veel järgmiselt:

1) märgime sirgel s punktid M ja N nii, et $OM = ON$;



Joon. 90.

2) võtame sirgetel t_1 ja u_1 punktid A ja B nii, et sirge AB lõikab sirget v_1 ; tähistame lõikepunkti tähega C ;

3) ühendame punktid A , B ja C punktidega M ja N .

Nii saadud kolmnurkadest on

$$\triangle OAM = \triangle OAN \text{ ja } \triangle OBM = \triangle OBN,$$

millest järeldub, et

$$AM = AN \text{ ja } BM = BN.$$

Kuid siis

$$\triangle ABM = \triangle ABN,$$

sest ühe kolmnurga küljed on vastavalt võrdsed teise kolmnurga külgedega. Sellest näeme, et $\angle CBM = \angle CBN$. Võrreldes nüüd kolmnurki CBM ja CBN , selgub, et ka need on võrdsed, millest omakorda järeldub, et $CM = CN$. Kuid siis kolmnurk MNC on võrdhaarne ja tema aluse MN mediaan CO on risti alusega; nii-siis, $s \perp v_1$ ja seega $s \perp v$.

Et sirge s on eelduse järgi risti tasapinna α kahe lõikuva sirgega t ja u ning tõestuse järgi risti ka mistahes kolmanda sirgega v , mis asetseb tasapinnal α , siis on ta risti selle tasapinna iga sirgega; järelikult s on tasapinna α normaal.

Ülesandeid.

110. Põhjenda väidet, et kahetahulise nurga serv on risti tema joonnurga tasapinnaga.

111. Teades, et risttahuka iga tahk on ristkülik, põhjenda väidet, et risttahuka iga serv on risti kahe tahuga.

112. Põhjenda väidet, et risttahuka lõige tasapinnaga, mis läbib tema kaht diagonaali, on ristkülik.

113. a) Risttahuka servade pikkused on 10 cm, 12 cm ja 16 cm. Arvuta risttahuka diagonaali pikkus.

b) Kuubi serva pikkus on a cm. Kui pikk on kuubi diagonaal?

114. a) Sirge s on paralleelne tasapinnaga α . Kas leidub tasapinnal α sirgeid, mis on risti sirgega s ? Kuidas need sirged asetsevad üksteise suhtes?

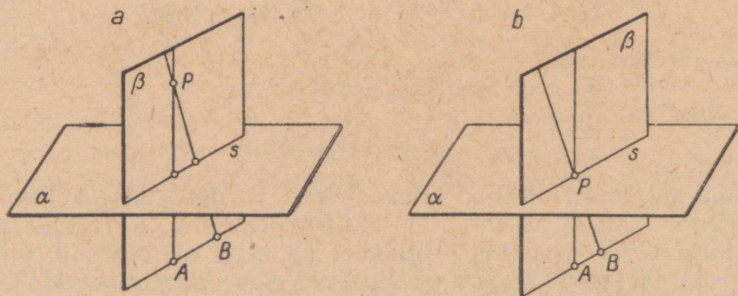
b) Sirge s on tasapinna α suhtes kaldu. Kui palju on tasapinnal α sirgeid, mis on risti sirgega s ? Mitu neist lõikuvad sirgega s ?

§ 22. TASAPINNA NORMAALI OMADUSI.

Tasapinna normaalil on rida omadusi, milledest tähtsamaid väljendavad järgmised teoreemid.

1. Iga punkti läbib ainult üks sirge, mis on risti antud tasapinnaga.

Tõepoolest, kui punkti P läbiks mitu sirget, mis on risti tasapinnaga α , näiteks sirged PA ja PB (joon. 91), siis nende kahe sirgega määratud tasapinnal β läheks läbi punkti P kaks sirget



Joon. 91.

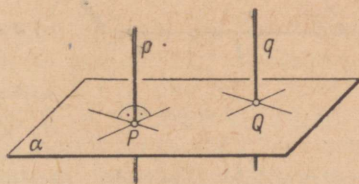
(PA ja PB), mis on mõlemad risti sirgega $s \equiv \alpha \times \beta$. Et see pole aga võimalik (nagu teame planimeetria kursusest), siis järelikult läbib punkti P ainult üks sirge, mis on risti tasapinnaga α .

Et tõestamisel polnud oluline, kas punkt P on tasapinnal α või väljaspool seda (joon. 91, b), siis on väide õige igal punkti kohta.

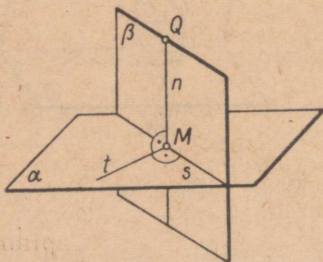
2. Kui kahest paralleelist üks on risti mingi tasapinnaga, siis ka teine on risti selle tasapinnaga.

Tõestuseks vaatleme tasapinna α mistahes normaali p ja selle paralleeli q . Lõigaku need tasapinda α vastavalt punktides P ja Q (joon. 92). Joonestame tasapinnal α kaks sirget läbi punkti P ning kaks nendega vastavalt paralleelset sirget läbi punkti Q . Siis sirge p on risti läbi punkti P joonestatud sirgetega, sest p on tasapinna α normaal. Et vastavalt paralleelsete haaradega nurgad on võrdsed, siis sirge q on risti läbi punkti Q joonestatud kahe sirgega tasapinnal α , järelikult $q \perp \alpha$.

3. Kõik tasapinna normaalid on üksteisega paralleelsed, sest kui p ja q on tasapinna α kaks normaalit ning Q on teise normaali üks punkt, siis esimese teoreemi järgi saab läbi punkti Q minna ainult üks sirge, mis on risti tasapinnaga α , teise teoreemi järgi aga on selleks sirge p paralleel läbi punkti Q , seega $p \parallel q$ (joon. 92).



Joon. 92.



Joon. 93.

4. Tasapinna normaali läbiv tasapind on risti esimese tasapinnaga.

Tõestuseks vaatleme tasapinna α normaali n läbiva tasapinna β ja tasapinna α vahelise nurga joonnurka (joon. 93), mille tipuks on punkt $M \equiv n \times \alpha$ lõikesirgel $s \equiv \alpha \times \beta$. Selle joonnurga üheks haaraks on normaal n , sest normaali definitsiooni järgi on $n \perp s$. Kuid samal põhjusel on n risti ka joonnurga teise haaraga t ; seega

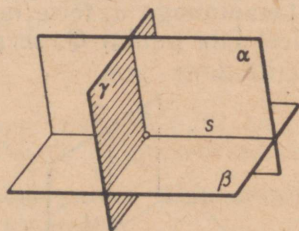
$$\angle nt = 90^\circ, \text{ s. t. } \beta \perp \alpha.$$

5. Viimasest teoreemist järeldub, et
tasapind, mis on risti kahe tasapinna lõikesirgega, on risti ka nende tasapindadega.

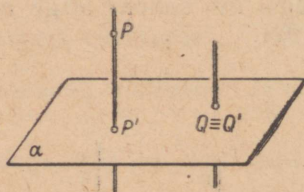
Tõepoolest, kui tasapind γ on risti tasapindade α ja β lõikesirgega s (joon. 94), s. t. sirge s on tasapinna γ normaal, siis seda normaali läbivad tasapinnad α ja β on viimase teoreemi järgi risti tasapinnaga γ .

6. Kui ühel kahest ristuvast tasapinnast on võetud punkt ja sellest on tõmmatud teise tasapinna normaal, siis see normaal asetseb esimesel tasapinnal.

Tõestuseks eeldame, et tasapinnad α ja β ristuvad (joon. 93) ning ühel neist, näiteks tasapinnal β , on võetud punkt Q . Viimasest tõmbame tasapinnal β sirge n risti tasapindade α ja β lõikesirgega s . Punktist $M \equiv n \times s$ tõmbame tasapinnal α sirge t risti sirgega s . Siis $n \perp t$, sest $\angle nt$ on ristuvate tasapindade α ja β vahelise nurga joonnurk. Et ühtlasi $n \perp s$, siis n on tasapinna α normaal, sest ta on risti tasapinna α kahe lõikuva sirgega s ja t . Et punktist Q saab tasapinnale α tõmmata ainult ühe normaali ning selleks osutus meie poolt tasapinnal β tõmmatud sirge n , siis ongi tõestatud, et normaal n asetseb tasapinnal β .



Joon. 94.



Joon. 95.

7. Viimati tõestatud teoreem võimaldab tõestada teoreemi 5 pöördteoreemi:

tasapind, mis on risti kahe lõikuva tasapinnaga, on risti ka nende tasapindade lõikesirgega.

Tõepoolest, kui $\gamma \perp \alpha$ ja $\gamma \perp \beta$ ning $\alpha \times \beta \equiv s$ (joon. 94), siis selle lõikesirge mingit punkti läbiv tasapinna γ normaal peab teoreemi 6 järgi asetsema nii tasapinnal α kui ka tasapinnal β , seega ühtima nende tasapindade lõikesirgega s .

Ülesandeid.

115. Kaks võrdset võrdkülgset kolmnurka küljepikkusega a asetsevad nii, et neil on üks külg ühine ning kolmnurkade tasapinnad ristuvad. Avalda mitteühiste tippude vaheline kaugus.

116. Põhjenda väidet, et kahetahulise nurga joonnurga tasapind on risti kahetahulise nurga tahkudega.

117. Tõesta, et antud punktist paralleelsetele tasapindadele tõmmatud normaaliid ühtivad.

§ 23. PUNKTI JA SIRGE RISTPROJEKTSIOON.

1. **Punkti ristprojektsioon.** Punkti P ristprojektsiooniks tasapinnal α nimetatakse punktist P tasapinnale α tõmmatud normaali ja tasapinna α lõikepunkti (punkti P' joonisel 95).

Punkt, mis ise on tasapinnal (ekraanil, projektsioonipinnal), ühtib oma ristprojektsiooniga sellel tasapinnal (punkt Q joonisel 95).

Punkti ja tema ristprojektsiooni vahelist kaugust nimetatakse punkti kauguseks tasapinnast. Niisiis, punkti kaugust tasapinnast tuleb mõõta mööda tasapinna normaali.

2. Sirgjoone ristprojektsioon.

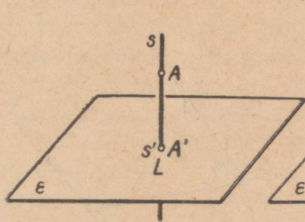
Sirgjoone ristprojektsiooniks tasapinnal nimetatakse sirgjoone punktide ristprojektsioonide kogumit sellel tasapinnal.

Kui sirge s on risti ekraaniga ϵ (joon. 96), siis selle sirge mistahes punkti A läbiv ekraani normaal ühtib sirgega s ning seetõttu sirge kõigi punktide ristprojektsioonid ühtivad sirge ja ekraani lõikepunktiga L ; järelikult

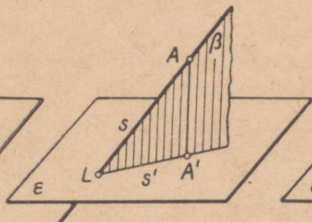
ekraaniga ristuva sirge ristprojektsiooniks on punkt.

Kui sirge s pole risti ekraaniga ϵ (joon. 97 ja 98), siis tema punkte projekteerivad ekraani normaaliid asetsevad ühel ja samal tasapinnal β , mis on risti ekraaniga ϵ . See nn. projekteeriv tasapind β on määratud sirgega s ja tema mingit punkti projekteeriva normaaliga, näiteks normaaliga AA' . Sirge s kõigi punktide ristprojektsioonid ekraanil ϵ asetsevad tasapindade β ja ϵ lõikesirgel s' ; järelikult

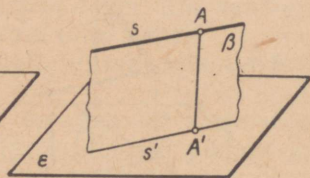
ekraaniga mitteristuva sirge ristprojektsioon on sirge.



Joon. 96.



Joon. 97.



Joon. 98.

Ekraaniga mitteristuv sirge s ja tema ristprojektsioon s' on ühel ja samal tasapinnal β ning järelikult nad kas lõikuvad või on paralleelsed. Esimesel juhul on sirge ekraani suhtes kaldu (joon. 97), teisel juhul paralleelne (joon. 98).

Ekraaniga paralleelne sirge on paralleelne oma ristprojektsiooniga,

sest nende lõikumise korral antud sirge lõikuks ekraaniga (joon. 98).

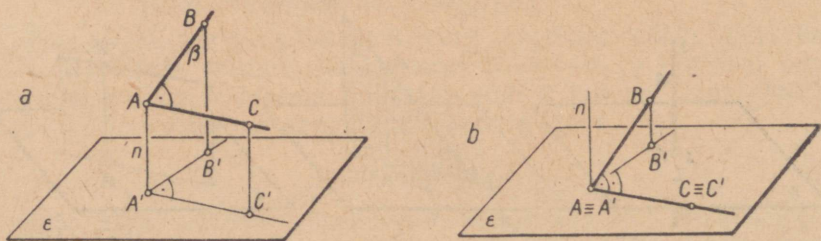
3. Teoreem täisnurga ristprojektsioonist.

Täisnurga ristprojektsiooniks võib sõltuvalt haarade asendist ekraani suhtes tulla kas kiir, sirge, teravnurk, nürinurk või täisnurk. Praktika seisukohalt on tähtis silmas pidada just viimast juhtumit.

Tõestame järgmise teoreemi:

kui täisnurga üks haar asetseb ekraanil või on sellega paralleelne ja teine haar pole ekraaniga risti, siis täisnurga ristprojektsioon on jälle täisnurk.

Tõestus. Olgu $\angle BAC$ täisnurk, mille haar AC on paralleelne ekraaniga ϵ ja haar AB pole risti selle ekraaniga (joon. 99, a). Tähistame punktide A , B ja C ristprojektsioone tasapinnal ϵ vastavalt A' , B' ja C' . Siis sirged AC ja $A'C'$ on paralleelsed kui ekraaniga paralleelne sirge ja tema ristprojektsioon. Sellest järeldub, et kiirsirged $A'C'$ ja AB on teineteisega risti, sest nendevaheline nurk võrdub täisnurgaga BAC (§ 18, 2). Ühtlasi sirge $A'C'$ on risti tasapinna ϵ normaaliga $n \equiv A'A$, mis lõikab sirget AB . Kuid siis on $A'C'$ risti tasapinnaga $\beta \equiv BAA'$ (§ 21), seega risti ka sirgega $A'B' \subset \beta$. Sellest nähtubki, et antud täisnurga ristprojektsioon $\angle B'A'C'$ on täisnurk.



Joon. 99.

Kui täisnurga BAC haar AC asetseb ekraanil ε (joon. 99, b), siis tõestus lihtsustub, sest nüüd $AC \equiv A'C'$ ja endiste kiivsirgete AB ja $A'C'$ vaheline nurk asendub antud nurgaga BAC .

Samal viisil saab tõestada, et

kui nurga ristprojektsioon on täisnurk ja tema üks haar asetseb ekraanil või on sellega paralleelne, siis see nurk on täisnurk.

4. Lõigu ristprojektsioon.

Kaldsirge ja tema ristprojektsiooni vahelist teravnurka nimetatakse sirge ja ekraani vaheliseks nurgaks ehk sirge kaldenurgaks (ekraani suhtes).

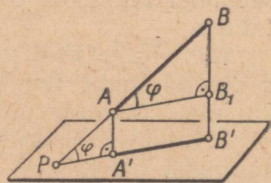
Tähistame sirge s kaldenurga, s. o. nurga APA' joonisel 100 tähega φ . Kolmnurgast APA' saame siis, et

$$A'P = AP \cdot \cos \varphi$$

ehk

lõigu ristprojektsiooni pikkus võrdub lõigu pikkuse ja tema kaldenurga koosinuse korrutisega,

See seos kehtib ka siis, kui lõigu mõlemad otspunktid on väljaspool projektsioonipinda, nagu lõigul AB joonisel 100. See selgub, kui läbi lõigu ühe otspunkti A tõmbame lõigu projektsioonile paralleeli AB_1 . Seega üldiselt lõigu AB ristprojektsioon $A'B' = AB \cdot \cos \varphi$.



Joon. 100.

Kui $\varphi = 0$, siis $A'B' = AB$, s. t.

ekraaniga paralleelne lõik on võrdne oma ristprojektsiooniga.

Ülesandeid.

118. Joonesta kuubi diagonaali ja tahu vaheline nurk loomulikus suuruses. Kui suur on see nurk?

119. Risttahuka mõõtmed on 7 cm, 4 cm ja 5 cm. Kui suur on nurk risttahuka diagonaali ja kõige väiksema tahu vahel?

120. Kui suur on nurk kuubi diagonaali ja selle otspunktist lähtuva serva vahel?

121. Punktist väljaspool tasapinda on tasapinnani tõmmatud kaldlõik, mille pikkus on 35 cm; lõigu ristprojektsiooni pikkus on 12 cm. Kui suur on lõigu kaldenurk tasapinna suhtes?

122. Kaldlõigu pikkus on 13,4 m; lõigu kaldenurk tasapinna suhtes on $63^\circ 36'$. Arvuta lõigu ristprojektsiooni pikkus.

123. Punktist, mille kaugus tasapinnast on 12 cm, on tõmmatud tasapinnani 20 cm pikkune kaldlõik. Leia kaldlõigu ristprojektsiooni pikkus ja kaldenurga suurus.

124. Lõigu otspunktid on tasapinnast 3 dm ja 6,3 dm kaugusel. Leia lõigu ristprojektsiooni pikkus, kui lõigu pikkus on 6,5 dm.

125. Lõiku pikkusega 20 cm lõikab tasapind nii, et lõigu otspunktid on tasapinnast 4 cm ja 6 cm kaugusel. Kui suur on lõigu ja tasapinna vaheline nurk?

126. Ruudu külje pikkus on 20 cm. Ruudu keskpunktist O on püstitatud 15 cm pikkune lõik OP risti ruudu tasapinnaga. Punkt P on ühendatud ruudu külje keskpunktiga C . Arvuta lõigu PC kaldenurk ruudu tasapinna suhtes.

127. Täisnurkses kolmnurgas kaateti a lähisnurk $\beta = 36^\circ 48'$. Kaatet a on tasapinnal α ja kaatet b moodustab tasapinnaga α nurga $52^\circ 44'$. Arvuta hüpotenuusi kaldenurk tasapinna α suhtes.

128. Punktist A nähakse torni olevat põhja suunas; ta tipp paistab kõrgusnurgas 17° . Liikudes 70 m võrra ida poole — punkti B , nähakse torni nihkununa 40° võrra põhjast lääne poole. Arvuta torni kõrgus.

129. Määra kahetahulise nurga suurus, kui punkt, mis asetseb ühel tahul, on nurga servast 2 korda kaugemal kui teisest tahust.

130. Kahetahulise nurga ühel tahul on võetud punkt, mis on a cm kaugusel teisest tahust. Leia selle punkti kaugus servast, kui nurk tahkude vahel on 45° .

131. Kahetahulise nurga ühel tahul on võetud punkt 25 cm kaugusel nurga servast. Kui kaugel on see punkt teisest tahust, kui kahetahulise nurga suurus on 50° ?

132. Tõesta, et punktist väljaspool tasapinda selle tasapinnani tõmmatud võrdsetel kaldlõikudel on võrdsed ristprojektsioonid ja võrdsed kaldenurgad.

133. Kaks võrdset võrdhaarset kolmnurka, mille alus on a ja tipunurk on 40° , asetsevad nii, et nende alused ühtivad ja aluste vastastippude vaheline kaugus on samuti a . Kui suur on kolmnurkade tasapindade vaheline nurk?

134. Võrdkülgsel kolmnurga üks külg asetseb tasapinnal ja teine moodustab tasapinnaga nurga $\frac{\pi}{4}$. Kui suure nurga moodustab kolmnurk selle tasapinnaga?

Kordamisküsimusi.

135. Mida nimetatakse peegelduseks sirgest? Mida võib öelda kolmnurga ja tema peegelduse orientatsiooni kohta?

136. Mida nimetatakse rööplükkeks? Kuidas rööplüke avaldub peegelduste kaudu?

137. Mida nimetatakse peegelduseks punktist? Kuidas peegeldus punktist avaldub teljelise sümmeetria kaudu?

138. Missugust teisendust nimetatakse pöördeks punkti ümber? Missuguste andmetega on pööre määratud?

139. Missugust teisendust nimetatakse homoteetsuseks? Missugune seos on homoteetsuse ja sarnasuse vahel?

140. Nimeta homoteetsuse tähtsamaid omadusi.

141. Kuidas teisendub täisnurkne kolmnurk, kui teda peegeldada esmalt ühest kaatetist ja siis saadud peegeldust peegeldada teisest kaatetist?

142. Kuidas teisendub täisnurkne kolmnurk, kui teda peegeldada esmalt ühe teravnurga poolitajast ja siis saadud peegeldust peegeldada teise teravnurga poolitajast?

143. Kuidas teisendub võrdkülgne kolmnurk, kui teda peegeldada esmalt kolmnurga ühest küljest ja siis saadud peegeldust peegeldada teisest küljest?

144. Joonesta vabalt võetud isekülgse kolmnurga peegeldus esmalt ühe nurga poolitajast, siis saadud peegelduse peegeldus teise nurga poolitajast ja lõpuks viimase peegeldus kolmanda nurga poolitajast.

145. Missuguse kujundi moodustab täisnurkne kolmnurk koos

a) tema peegeldusega ühe kaateti suhtes;

b) tema peegeldusega hüpotenuusi keskpunkti suhtes?

146. Kas ruudu paralleelprojektsioonil leidub sümmeetriakeskpunkt? sümmeetriatelg?

147. Mitu sümmeetriatelge on korrapärasel viisnurgal? selle viisnurga paralleelprojektsioonil?

148. Missugustel korrapärasel hulknurkadel leidub sümmeetriakeskpunkt ja missugustel ei leidu?

149. Mida nimetatakse punkti kauguseks sirgest, mida punkti kauguseks tasapinnast?

150. Mida nimetatakse punkti ristprojektsiooniks sirgel, mida ristprojektsiooniks tasapinnal?

III. FUNKTSIOONIDE UURIMINE.

§ 24. FUNKTSIOONI ÜLDTÄHIS.

Oleme tuttavad mitmete funktsioonidega, näiteks $y=ax+b$, $y=ax^2+bx+c$, $y=\sin x$, $y=\tan x$. Kuidas nimetatakse neid funktsioone?

Seame nüüd ülesandeks leida üldised tunnused, mis võimaldavad mistahes funktsiooni puhul leida näiteks need argumendi väärtused, mille korral funktsiooni väärtus on maksimaalne või minimaalne, need argumendi väärtuste piirkonnad, kus funktsioon on kas kasvav või kahanev jne. Vastavate tunnuste tuletamiseks ja tulemuste fikseerimiseks vajame üldist funktsiooni sümbolit, s. o. niisugust sümbolit, mis tähistab funktsiooni, kuid jätab lahtiseks, missuguse konkreetse funktsiooniga on tegemist.

Konkreetses funktsiooni defineerimisel tugineme vastavale matemaatilisele avaldisele; näiteks binoom $ax+b$ defineerib lineaarse funktsiooni, $\sin x$ siinusfunktsiooni jne. Kui aga on tegemist mingi funktsiooniga, mille konkreetne kuju meid parajasti ei huvita, siis funktsiooni avaldise asemel kasutame sümboleid

$$f(x), g(x), F(x) \text{ jne.},$$

kus sulgudes olev täht näitab, mis on argumendiks, sulgude ees olev täht aga märgib tõsiasja, et tegemist on just selle argumendi funktsiooniga.

Olgu mingi funktsiooni üldtähisteks näiteks $f(x)$. Sama sümbolit kasutatakse siis ka selle funktsiooni konkreetsete väärtuste üleskirjutamisel; näiteks kirjutused

$$f(2); f(-4) \text{ ja } f(a)$$

tähendavad funktsiooni $f(x)$ väärtusi, mis vastavad argumendi x väärtustele 2, -4 ja a .

Kui $f(x)$ tähistaks funktsiooni $\frac{x^2+1}{x-1}$, s. t.

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x-1},$$

siis

$$f(2) = \frac{2^2+1}{2-1} = 5; f(-4) = \frac{(-4)^2+1}{-4-1} = -3\frac{2}{5}; f(a) = \frac{a^2+1}{a-1}.$$

Ülesandeid.

151. Antud on funktsioon

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 1.$$

Leia $f(0)$; $f(3)$; $f(-2)$; $f(2,3)$; $f(-\frac{1}{2})$.

152. Antud on funktsioon

$$F(u) = u^3 - 1.$$

Leia $F(1)$; $F(a)$; $F(a+1)$; $F(a-1)$; $2F(2a)$.

153. Antud on funktsioon

$$g(t) = 2t^2 + \frac{2}{t^2} + \frac{5}{t} + 5t.$$

Näita, et $g(t) = g\left(\frac{1}{t}\right)$.

154. Antud on funktsioonid

$$f(x) = \frac{x-2}{x+1} \text{ ja } \varphi(x) = \frac{x+2}{x-1}.$$

Leia $f(-x)$; $f(1)$; $\varphi(-3)$; $\varphi(a)$; $f(4) + \varphi(1)$.

§ 25. PAARISFUNKTSIOON JA PAARITU FUNKTSIOON.

Olgu mingi funktsiooni graafik sümmeetriline y -telje suhtes (joon. 101). y -telje suhtes on sümmeetrilised ka näiteks ruutfunktsiooni $y=x^2$ ja koosinusfunktsiooni $y=\cos x$ graafikud (joon. 102 ja 103). Sellisest sümmeetrilisusest järeldub, et nende funktsioonide väärtused argumenti väärtustel x ja $-x$ on võrdsed.

Funktsiooni, mille väärtused kohtadel x ja $-x$ on võrdsed, nimetatakse paarisfunktsiooniks.

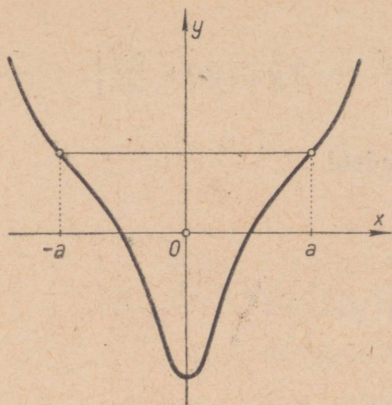
Kasutades funktsiooni üldtähist, võime paarisfunktsiooni definitsiooni üles kirjutada võrdusena

$$f(x) = f(-x)$$

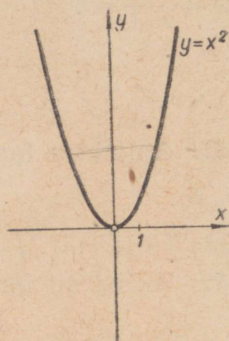
 ✓

Teame, et

$$x^2 = (-x)^2 \text{ ja } \cos x = \cos(-x).$$



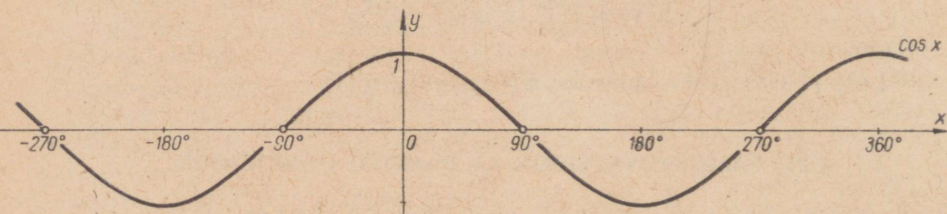
Joon. 101.



Joon. 102.

Seega on x^2 ja $\cos x$ paarisfunktsioonid.

Joonisel 104 näeme mingi funktsiooni graafikut, mis on sümmeetriline koordinaatide alguse O suhtes. Koordinaatide alguse suhtes on sümmeetrilised näiteks ka kuupfunktsiooni $y = x^3$ ja siinusfunktsiooni $y = \sin x$ graafikud (joon. 105 ja 132).



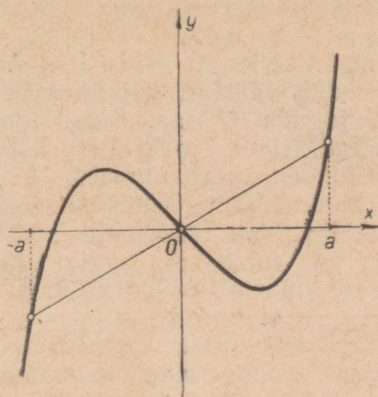
Joon. 103.

Sellisest sümmeetrilisusest järeldub, et nende funktsioonide väärtused kohtadel x ja $-x$ erinevad ainult märgi poolest.

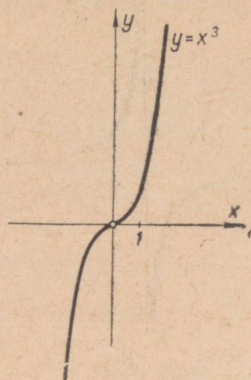
Funktsiooni, mille väärtused kohtadel x ja $-x$ erinevad ainult märgi poolest, nimetatakse paarituteks funktsioonideks.

Kasutades funktsiooni üldtähist, võime paaritu funktsiooni definitsiooni üles kirjutada järgmiselt:

$$f(x) = -f(-x)$$



Joon. 104.



Joon. 105.

Teame, et $x^3 = -(-x)^3$ ja $\sin x = -\sin(-x)$. Seega on x^3 ja $\sin x$ paaritud funktsioonid.

Olgu tähendatud, et paljud konkreetsetest funktsioonidest pole ei paaris- ega paaritud funktsioonid.

Ülesandeid.

155. Missugused järgmistest funktsioonidest on paarisfunktsioonid, missugused paaritud funktsioonid?

- | | |
|----------------------|------------------------------------|
| 1) $y = x^4$ | 6) $y = x^4 - 2x^2 + 5$ |
| 2) $y = x^{-3}$ | 7) $y = \tan x$ |
| 3) $y = x^2 + x$ | 8) $y = \sin x + \cos x$ |
| 4) $y = x^3 + x$ | 9) $y = x$ |
| 5) $y = \frac{1}{x}$ | 10) $y = \frac{3x^2 + 2}{x^2 + 1}$ |

156. Selgita, kas funktsioonid

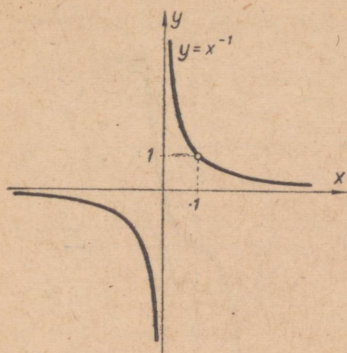
$$F_1(x) = f(x) + f(-x) \text{ ja } F_2(x) = f(x) - f(-x)$$

on paaris- või paaritud funktsioonid, kui

- 1) $f(x)$ on paarisfunktsioon;
- 2) $f(x)$ on paaritu funktsioon.

§ 26. FUNKTSIOONI MÄÄRAMISPIIRKOND.

Argumendi väärtuste hulka, kus argumendi igale väärtusele vastab kindel funktsiooni väärtus, nimetatakse funktsiooni määramispiirkonnaks.



Joon. 106.

a) Funktsiooni $y=x^{-1}$ määramispiirkond.

Astmefunktsioonil $y=x^{-1}$ (joon. 106) puudub väärtus, kui $x=0$, sest nulliga jagada ei saa. Seega pole antud funktsioon määratud kohal $x=0$. Küll on aga võimalik leida sellele funktsioonile väärtusi argumendi kõigi teiste väärtuste korral. Ütleme, et funktsioon $y=x^{-1}$ on määratud, kui $x>0$ ja kui $x<0$; lühidalt, kui $x\neq 0$.

Funktsiooni $y=x^{-1}$ määramispiirkonna moodustavad argumendi x need väärtused, mis rahuldavad tingimusi $x<0$ või $x>0$.

Geomeetriliselt kujutame määramispiirkonda arvteljel. Joonisel 107 on kujutatud funktsiooni $y=x^{-1}$ määramispiirkond.

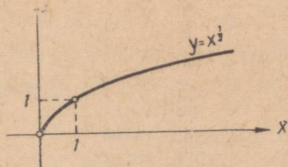


Joon. 107.

b) Funktsiooni $y=x^{\frac{1}{2}}$ määramispiirkond.

Astmefunktsioon $y=x^{\frac{1}{2}}$ (joon. 108) pole määratud argumendi x negatiivsete väärtuste korral, sest ei leidu arve, mille ruut oleks negatiivne. Küll on aga võimalik leida sellele funktsioonile väärtusi, kui x on positiivne või 0. Seega,

funktsiooni $y=x^{\frac{1}{2}}$ määramispiirkonna moodustavad argumendi x need väärtused, mis rahuldavad tingimust $x\geq 0$ (joon. 109).



Joon. 108.



Joon. 109.

c) Lineaarse funktsiooni ja ruutfunktsiooni määramispiirkond.

On funktsioone, mille väärtused on määratud argumendi kõigi väärtuste korral. Nii on näiteks üsköik, mis väärtuse me anname argumendile x , ikka saab leida vastavat väärtust line-

aarsele funktsioonile $y=ax+b$ ja samuti ruutfunktsioonile $y=ax^2+bx+c$. Seega,

lineaarse ja ruutfunktsiooni määramispiirkonnaks on kogu reaalarvude hulk.

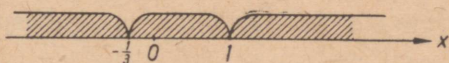
d) Funktsiooni $\frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}$ määramispiirkond.

Murruna avalduva funktsiooni määramispiirkonda ei kuulu niisugused argumendi väärtused, mille korral nimetaja saab võrdseks nulliga.

Leiame funktsiooni $y=\frac{5x^2-2x+6}{3x^2-2x-1}$ määramispiirkonna.

Nimetaja nullkohtade leidmiseks lahendame võrrandi

$$3x^2-2x-1=0.$$



Joon. 110.

Lahenditeks on $x_1=1$ ja $x_2=-\frac{1}{3}$. Seega,

antud funktsioon on määratud: 1) kui $x < -\frac{1}{3}$;

2) kui $-\frac{1}{3} < x < 1$;

3) kui $x > 1$ (joon. 110).

e) Funktsiooni $\sqrt{ax^2+bx+c}$ määramispiirkond.

Et ruutjuurt saab leida ainult mittenegatiivsetest arvudest, siis antud funktsiooni määramispiirkonnaks on see x väärtuste hulk, mis rahuldab tingimust

$$ax^2+bx+c \geq 0.$$

Leiame funktsiooni $y=\sqrt{2x^2+3x-5}$ määramispiirkonna.

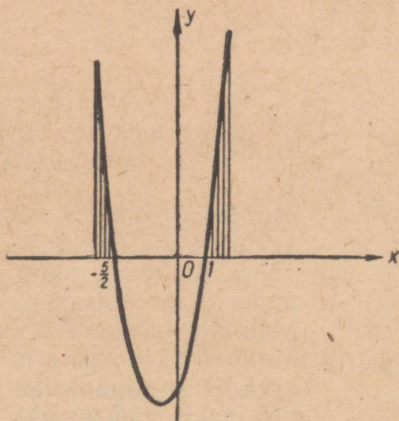
Ülesande lahendamiseks tuleb leida ruutfunktsiooni $2x^2+3x-5$ positiivsuspiirkond koos nullkohtadega. Lahendades ruutvõrrandi

$$2x^2+3x-5=0,$$

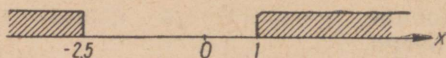
saame lahendeiks $x_1=-\frac{5}{2}$ ja

$x_2=1$. Et ruutliikme kordaja on positiivne, siis saame positiivsuspiirkonnaks kaks piirkonda

$x < -\frac{5}{2}$ ja $x > 1$ (joon. 111).



Joon. 111.



Joon. 112.

Et ka nullkohad kuuluvad määramispiirkonda, siis koosneb antud funktsiooni määramispiirkond järgmisest kahest piirkonnast:

$$x \leq -\frac{5}{2} \text{ ja } x \geq 1 \text{ (joon. 112).}$$

Ülesandeid.

157. Leia järgmiste funktsioonide määramispiirkonnad.

1) $y = \frac{1}{2-x}$

4) $y = \frac{3}{x^2-1}$

7) $y = \frac{x^2+3}{x^2-5x+6}$

2) $y = \frac{3x}{x+4}$

5) $y = \frac{5x}{x^2+4x}$

8) $y = \frac{4x^2-20}{x^2+2x-35}$

3) $y = \frac{2x-1}{3x+2}$

6) $y = \frac{2x-3}{x^2-2x+1}$

9) $y = \frac{2x^2-3x-2}{2x^2-3x+1}$

158. Leia järgmiste funktsioonide määramispiirkonnad.

1) $y = \sqrt{x}$

5) $y = (-2x+1)^{\frac{1}{2}}$

9) $y = \sqrt{-x^2-2x+8}$

2) $y = \sqrt{x+2}$

6) $y = (x^2-9)^{\frac{1}{2}}$

10) $y = \sqrt{2x^2-4x-1}$

3) $y = \sqrt{3x}$

7) $y = (2x^2-3x)^{\frac{1}{2}}$

11) $y = \sqrt{-3x^2-5}$

4) $y = \sqrt{4x+2}$

8) $y = (x^2-4x+3)^{\frac{1}{2}}$

12) $y = \sqrt{\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}}$

§ 27. TÖKESTAMATULT KASVAVAD JA TÖKESTAMATULT KAHANEVAD SUURUSED.

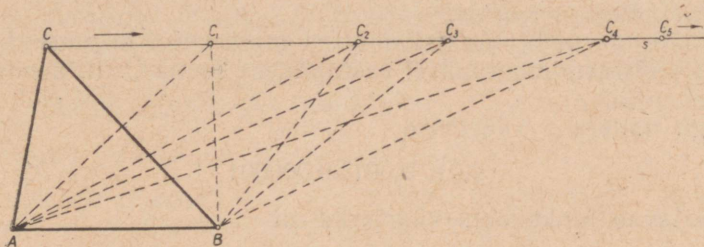
Muutuvat suurus, mille väärtustele vastavad punktid arvteljel nullpunktist järjest kaugenevad (kas positiivses või negatiivses suunas), nii et see kaugus saab suuremaks igast kuitahes suurest arvust, nimetatakse tõkestamatult kasvavaks suuruseks.

Muutuvat suurus, mille väärtustele vastavad punktid arvteljel nullpunktile järjest lähenevad, nii et see kaugus saab väiksemaks igast kuitahes väikesest arvust, nimetatakse tõkestamatult kahanevaks suuruseks.

a) Kolmnurga elementide tõkestamatu kasvamine ja kahanemine.

Tõmbame läbi kolmnurga ABC tipu C küljega AB paralleelse sirge s . Sellel fikseerime rea punktist C järjest kaugenevaid punkte C_1, C_2, C_3 jne.

Jälgime kolmnurga ABC külgede AC ja BC muutumist, kui tipp C hakkab liikuma mööda sirget s joonisel 113 noolega näidatud suunas.



Joon. 113.

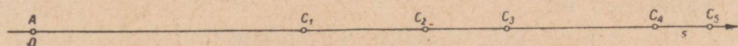
Kanname külje AC pikkused $AC_1, AC_2, AC_3, \dots$ arvteljele, nii et punkt A langeks nullpunkti (joon. 114).

Kuhu langeksid sellel arvteljel punktid C_6, C_7 jne.?

Missugust suurust esitab siin külje AC pikkus?

Missugust suurust esitab siin külje BC pikkus?

Mööda jooniselt malli abil nurgad tippude C_1, C_2 ja C_3 juures. Kujuta nende nurkade suurused arvteljel, nii et lõigule OC_1 vas-



Joon. 114.

taks nurga C_1 suurus radiaanides, lõigule OC_2 vastaks nurga C_2 suurus radiaanides jne.

Kuhu langeksid siin punktid C_4, C_5 jne.?

Missugust suurust esitab siin nurk C ?

b) Funktsiooni $y=x^{-1}$ muutumine argumenti tõkestamatul kasvamisel ja tõkestamatul kahanemisel.

1) Jälgime funktsiooni $y=x^{-1}$ muutumist argumenti positiivsete väärtuste muutumisel, kasutades graafikut joonisel 106. Paneme tähele, et argumenti kasvamisel funktsiooni väärtused aina vähenevad. Tõepoolest, murd $\frac{1}{x}$ saab seda väiksemaks, mida suurem on x . Seejuures ei saa selle murru väärtus, kuigi ta vähe-

neb, kunagi võrdseks nulliga, ükskõik kui suure väärtuse me x -ile ka ei annaks. Olgu näiteks x väärtused

100, 1000, 1000000,

siis funktsiooni väärtused on vastavalt

0,01; 0,001; 0,000001.

Seega

argumendi tõkestamatul kasvamisel funktsioon x^{-1} on tõkestamatult kahanev suurus.

2) Jälgime nüüd funktsiooni x^{-1} muutumist argumendi positiivsete väärtuste muutumisel vastupidises suunas, s. t. nende lähemisel nullile.

Olgu näiteks x väärtused

0,01; 0,001; 0,000001,

siis vastavad funktsiooni väärtused on

100, 1000, 1000000.

Seega

argumendi tõkestamatul kahanemisel funktsioon x^{-1} on tõkestamatult kasvav suurus.

3) Järgnevalt vaatleme funktsiooni x^{-1} muutumist argumendi negatiivsete väärtuste muutudes.

Kui argumendi x negatiivne väärtus oma absoluutväärtuse poolest suureneb, siis funktsiooni x^{-1} absoluutväärtus väheneb, saades seejuures kuitahes väikeseks. Näiteks, kui x väärtused on

—10, —1000, —1000000,

siis $\frac{1}{x}$ väärtused on

—0,1; —0,001; —0,000001.

Seega võime öelda, et

argumendi absoluutväärtuse tõkestamatul kasvamisel funktsiooni x^{-1} absoluutväärtus on tõkestamatult kahanev suurus.

4) Kui argumendi x väärtus negatiivselt poolelt tõkestamatult läheneb nullile, siis funktsiooni x^{-1} absoluutväärtus järjest kasvab.

Näiteks, kui x väärtused on

—0,1; —0,001; —0,000001,

siis $\frac{1}{x}$ väärtused on

—10, —1000, —1000000.

Seega

argumendi absoluutväärtuse tõkestamatul kahanemisel funktsiooni x^{-1} absoluutväärtus on tõkestamatult kasvav suurus.

Niisiis, kui x väärtustele vastavad punktid nullpunktist kaugenevad, siis osutub funktsioon x^{-1} tõkestamatult kahanevaks suuseks; kui aga x väärtustele vastavad punktid nullpunktile lähe-

nevad, siis osutub funktsioon x^{-1} tõkestamatult kasvavaks suurusks.

Kasutades absoluutväärtuse mõistet, võib tõkestamatult kasvavat ja tõkestamatult kahanevat suurust defineerida ka järgmiselt.

Muutuvat suurust, mille absoluutväärtus saab ja siis ka jääb suuremaks igast kuitahes suurest etteantud positiivsest arvust, nimetatakse tõkestamatult kasvavaks suurusks.

Muutuvat suurust, mille absoluutväärtus saab ja siis ka jääb väiksemaks igast kuitahes väikesest etteantud positiivsest arvust, nimetatakse tõkestamatult kahanevaks ehk nullile lähenevaks suurusks.

c) «Lähenemine lõpmatusele».

Kasutades sümbolit ∞ , mis näitab tõkestamatut kasvamist ning mida loetakse harilikult sõnaga «lõpmata», võime eespool käsitletud neli juhtu üles kirjutada järgmiselt:

- 1) kui $x \rightarrow +\infty$, siis $x^{-1} \rightarrow 0$;
- 2) kui $x \rightarrow -\infty$, siis $x^{-1} \rightarrow 0$;
- 3) kui $x \rightarrow 0$ (vasakult), siis $x^{-1} \rightarrow -\infty$;
- 4) kui $x \rightarrow 0$ (paremalt), siis $x^{-1} \rightarrow +\infty$.

Loetakse neid kirjutusi harilikult (lihtsustatult) nii:

- 1) kui x läheneb pluss lõpmatusele, siis x^{-1} läheneb nullile;
- 2) kui x läheneb miinus lõpmatusele, siis x^{-1} läheneb nullile;
- 3) kui x läheneb (vasakult) nullile, siis x^{-1} läheneb miinus lõpmatusele;
- 4) kui x läheneb (paremalt) nullile, siis x^{-1} läheneb pluss lõpmatusele.

Neid väljendeid kasutatakse eespool sümbolites üleskirjutatud muutumisprotsesside lugemiseks nende lühiduse tõttu. Otsene tähendus neil aga puudub, sest lõpmatusele lähenemine on võimatu.

Täpsemalt aga väljendatakse nende sümboolsete kirjutuste taga peituvaid mõtteid järgmiselt:

- 1) kui x positiivsena kasvab tõkestamatult, siis x^{-1} samuti positiivsena kahaneb tõkestamatult (ehk läheneb tõkestamatult nullile);
- 2) kui x negatiivsena kasvab tõkestamatult, siis x^{-1} samuti negatiivsena kahaneb tõkestamatult (ehk läheneb tõkestamatult nullile);
- 3) kui x negatiivsena kahaneb tõkestamatult, siis x^{-1} samuti negatiivsena kasvab tõkestamatult;
- 4) kui x positiivsena kahaneb tõkestamatult, siis x^{-1} samuti positiivsena kasvab tõkestamatult.

Ülesandeid.

159. Uuri funktsioonide $y=x^{-2}$, $y=x^{-3}$ tõkestamatut kasvamist ja kahanemist.

160. Leia funktsioonide $y=x^{-2}$, $y=x^{-3}$ ja $y=x$ määramispiirkonnad.

§ 28. LÕPLIKULE VÄÄRTUSELE LÄHENEVAD SUURUSED.

Muutuvat suurust, mille väärtustele vastavad punktid arvteljel järjest lähenevad ühele kindlale punktile, nii et kaugus selle kindla punktini on nullile lähenev suurus, nimetatakse lõplikule väärtusele lähenevaks suuruseks.

Et tõkestamatult kahaneva suuruse väärtustele vastavad punktid lähenevad arvteljel nullpunktile, siis on ka tõkestamatult kahanev suurus lõplikule väärtusele lähenevaks suuruseks.

Mõõda jooniselt 113 nurgad ABC_1 , ABC_2 , ABC_3 ja kujuta nende nurkade suurused arvteljel nii, et lõikudele OC_1 , OC_2 , OC_3 vastaksid neile vastavate nurkade suurused radiaanides. Fikseeri samal arvteljel arv π tähega P !

Kuhu langeksid sellel arvteljel nurkadele ABC_4 , ABC_5 jne. vastavad punktid C_4 , C_5 jne.?

Missugust suurust esitab tipu B juures olev nurk?

Kujuta arvteljel kaugused PC_1 , PC_2 , PC_3 , nii et tipp P langeks nullpunkti. Kuhu langeksid siin punktid C_4 , C_5 jne.?

Missugust suurust esitab sirgnurga ja tipu B juures oleva nurga vahe?

Niisiis, kui $CC_1 \rightarrow \infty$, siis $\angle B \rightarrow \pi$ ehk, teisiti, $\angle B - \pi \rightarrow 0$.

Kasutades viimast tähelepanekut võib lõplikule väärtusele lähenevat suurust defineerida ka järgmiselt:

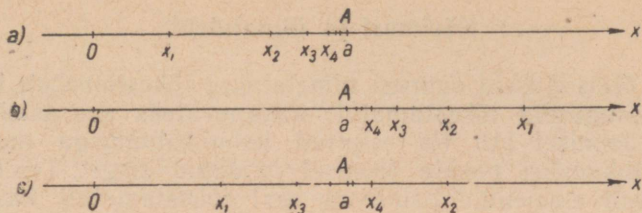
Muutuvat suurust nimetatakse lõplikule väärtusele lähenevaks suuruseks, kui selle muutuva suuruse väärtuste ja lõpliku väärtuse vahe on tõkestamatult kahanev suurus.

Sellele lõplikule väärtusele on antud ka oma erinimetus — muutuva suuruse piirväärtus. Et lõplik väärtus pole midagi muud kui arv, siis

arvu, millele lähenevad lõplikule väärtusele läheneva suuruse väärtused, nimetatakse tema piirväärtuseks.

Nii on nurga B piirväärtuseks sirgnurk, nurga A ja nurga C piirväärtuseks aga 0.

Joonisel 115 on näidatud 3 võimalikku juhtu muutuva suuruse x väärtustele x_1 , x_2 , x_3 , ... vastavate punktide paigutuse kohta lõplikule väärtusele vastava punkti A suhtes.



Joon. 115.

Joonesta vihkusse lõikudena muutuva suuruse väärtustele vastavate punktide kaugused punktist A .

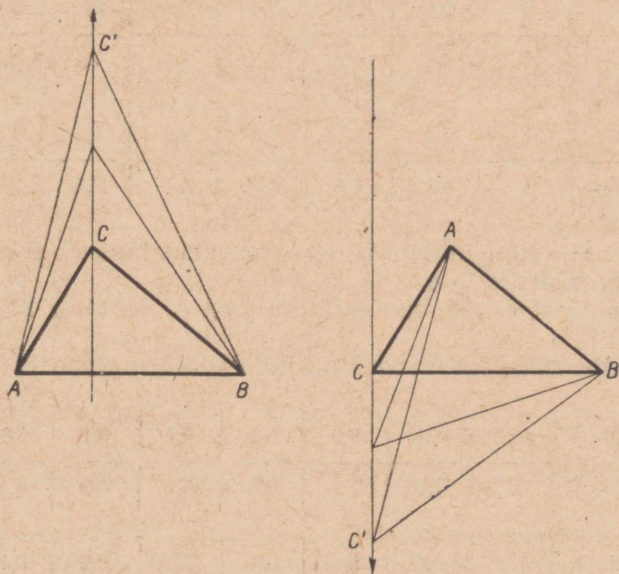
Näeme, et lõplikule väärtusele lähenevate suuruste korral selle suuruse väärtustele vastavate punktide ja lõplikule väärtusele vastava punkti vaheline kaugus läheneb nullile. Muutuva suuruse väärtusele vastavad punktid võivad lõplikule väärtusele vastavast punktist asetseda kas paremal (juht a) või vasakul (juht b) või kord paremal, kord vasakul (juht c).

Seega, juhul a) on $x_i - a < 0$,

juhul b) on $x_i - a > 0$,

juhul c) on kord $x_i - a > 0$, kord $x_i - a < 0$.

Vaadeldav kaugus avaldub vastavate koordinaatide vahe absoluutväärtusena. See kaugus aga läheneb kõigil kolmel juhul nullile.



Joon. 116.

Küsimusi ja ülesandeid.

161. Missuguseid suurusi nimetatakse tõkestamatult kasvavateks, missuguseid tõkestamatult kahanevateks suurusteks?

162. Joonisel 116 on esitatud kahe kolmnurga muutumine tipu C nihkumisel mööda joonisel näidatud sirget. Tee kindlaks, missugused elemendid osutuvad seal tõkestamatult kasvavaiks, missugused tõkestamatult kahanevaiks ja missugused neist omavad nullist erinevat piirväärtust.

§ 29. FUNKTSIOONI PIIRVÄÄRTUS.

1) Piirväärtuse mõistet rakendatakse funktsioonide uurimisel.

Olgu näiteks teada, et argument $x \rightarrow 2$ ja meid huvitab, missugusele väärtusele läheneb sel juhul funktsioon $2x-1$.

Selleks kirjutame välja rea 2-le lähenevaid argumenti väärtusi ja leiame neile vastavad funktsiooni väärtused.

Koostame tabeli iga § 28 vaadeldud juhu kohta eraldi.

a)	x	1	1,2	1,5	1,7	1,8	1,9	1,95	1,98
	$2x-1$	1	1,4	2	2,4	2,6	2,8	2,9	2,96
b)	x	3	2,8	2,6	2,4	2,3	2,2	2,1	2,05
	$2x-1$	5	4,6	4,2	3,8	3,6	3,4	3,2	3,1
c)	x	1	2,9	2,7	1,4	2,5	1,6	1,8	1,95
	$2x-1$	1	4,8	4,4	1,8	4	2,2	2,6	2,9

Näeme, et kõigil juhtumel, kui argument läheneb 2-le, läheneb funktsiooni väärtus 3-le.

Mille poolest erineb siin esitatud juht c) joonisel 115 esitatud juhust c)?

Koostame nüüd iga vaadeldud juhu kohta uue tabeli.

a)	$ x-2 $	1	0,8	0,5	0,3	0,2	0,1	0,05	0,02
	$ (2x-1)-3 $	2	1,6	1	0,6	0,4	0,2	0,1	0,04
b)	$ x-2 $	1	0,8	0,6	0,4	0,3	0,2	0,1	0,05
	$ (2x-1)-3 $	2	1,6	1,2	0,8	0,6	0,4	0,2	0,1

c)	$ x-2 $	1	0,9	0,7	0,6	0,5	0,4	0,2	0,05
	$ (2x-1)-3 $	2	1,8	1,4	1,2	1	0,8	0,4	0,1

Nendest tabelitest näeme, et sõltumata sellest, kuidas argumendi väärtused lähenevad kahele, ikka on täidetud tingimus

$$|(2x-1)-3| \rightarrow 0, \text{ kui } |x-2| \rightarrow 0.$$

See tähelepanek võimaldab funktsiooni piirväärtust defineerida järgmiselt:

Arvu b nimetatakse funktsiooni $f(x)$ piirväärtuseks argumendi x lähenemisel arvule a , kui koos $|x-a|$ lähenemisega nullile läheneb ka $|f(x) - b|$ nullile.

Ülesandeid.

163. Koosta tabel, mis iseloomustaks järgmiste funktsioonide muutumist argumendi etteantud muutumise korral:

- | | |
|---|---|
| a) $-x+3$, kui $x \rightarrow 1$; | d) $\log x$, kui $x \rightarrow 10$; |
| b) $\frac{5x+2}{3x}$ kui $x \rightarrow -1$; | e) $\sqrt{x}$, kui $x \rightarrow 9$; |
| c) x^2+2x-1 , kui $x \rightarrow 2$; | f) 2^x , kui $x \rightarrow 3$. |

*

2) Edaspidisel ülesannete lahendamisel me ei koosta enam tabeleid, vaid kalkuleerime järgmiselt.

N ä i d e 1. Leida funktsiooni $\frac{5x^2-1}{x+1}$ piirväärtus, kui $x \rightarrow 0$.

L a h e n d u s. Arutleme nii. Kui $x \rightarrow 0$, siis ka $x^2 \rightarrow 0$ ja samuti $5x^2 \rightarrow 0$. Kui aga $5x^2 \rightarrow 0$, siis $5x^2-1 \rightarrow -1$. Kui $x \rightarrow 0$, siis $x+1 \rightarrow 1$ ja seega $\frac{5x^2-1}{x+1} \rightarrow \frac{-1}{1} = -1$. See tähendab, et $\frac{5x^2-1}{x+1} - (-1) \rightarrow 0$ ja seega -1 on antud funktsiooni piirväärtuseks, kui $x \rightarrow 0$.

Esitatud arutlusest ilmneb, et piirväärtuse leidmisel kasutatakse lauseid:

- 1) *summa piirväärtus võrdub liidetavate piirväärtuste summaga;*
- 2) *korrutise piirväärtus võrdub tegurite piirväärtuste korrutisega;*
- 3) *jagatise piirväärtus võrdub jagatava piirväärtuse ja jagaja piirväärtuse jagatise, kui jagaja piirväärtus ei ole 0.*

Nende lausete tõestusi me ei esita.

Toodud näites argument lähenes nullile. Laused kehtivad, kui

argument läheneb mistahes lõplikule väärtusele ja ka siis, kui argument kasvab tõkestamatult.

Need laused aga ei kehti, kui vastavat piirväärtust pole olemas. Näiteks ei kehti 3. lause, kui tuleb lahendada ülesanne:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x^3-1},$$

sest nii lugejal kui ka nimetajal puudub lõplik piirväärtus. Raken-
dades sellele ülesandele 3. lauset saaksime tulemuseks $\frac{\infty}{\infty}$, mil-
lel puudub arvu tähendus.

Näide 2. Leida funktsiooni $\frac{1}{1+x^2}$ piirväärtus, kui argument läheneb nullile.

Kui $x \rightarrow 0$, siis ka $x^2 \rightarrow 0$ ja $1+x^2 \rightarrow 1$ ning seega

$$\frac{1}{1+x^2} \rightarrow 1.$$

Ülesandeid.

164. Leia järgmiste funktsioonide piirväärtused, kui $x \rightarrow 0$.

a) $-4x+3$

b) $\frac{4}{x+6}$

c) $\frac{x^2+x+1}{3-2x}$

$7 + \frac{1}{3}x$

$\frac{3-x}{2}$

$\frac{-x^2-x+5}{3+2x-x^2}$

x^2+2x-3

$\frac{4+2x}{3x-5}$

$\frac{(3x-2)^2}{6-3x}$

$(2x-1)^2$

$\frac{\frac{1}{3}x-6}{3-\frac{1}{6}x}$

$\left(\frac{0,14x-2,8}{0,7+8,6x}\right)^2$

3) Funktsiooni piirväärtuse ülesmärkimiseks kasutatakse süm-
bolit $\lim$, mis tuleneb ladinakeelsest sõnast *limes* (piir). Nii kirju-
tame:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x^2} = 1,$$

Üldiselt,

kui funktsiooni $f(x)$ piirväärtuseks argumenti lähenemisel a -le
on b , siis kirjutame seda üles järgmiselt:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$$

Ülesandeid.

165. Leia piirväärtused.

a) $\lim_{x \rightarrow 4} (2x-3)$

e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{3-x}$

i) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x} \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} (4-x^2)$

f) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-1}{x}$

j) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \left(\frac{x^2}{3-x} + \frac{2x}{x^2+1} \right)$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^4-x^2+1)$

g) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{x-1}$

k) $\lim_{x \rightarrow \frac{4}{3}} \left[\frac{(4-x)^2}{3x} - \frac{3x^2}{4-x} \right]$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} (3x^2-2x^2-1)$

h) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+2x-1}{x^2-2x+1}$

l) $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2-4x^3+1)^3$

166. Leia järgmised piirväärtused.

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+5}{x^2+3}$

b) $\lim_{x \rightarrow \sqrt[3]{3}} \frac{x^2-3}{x^4+x^2-1}$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4x+1}{2x+1}$

d) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1+\sin 2x}{1-\cos 4x}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \tan x}{\cos x}$

f) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\sin x}$

*

4) Vaatleme nüüd näiteid piirväärtuse arvutamise kohta juhtumil, kui eespool toodud laused piirväärtuse arvutamiseks ei kehti.

1° $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{1-x}$.

Kui $x \rightarrow 1$, siis $1-x \rightarrow 0$; seega murru nimetaja läheneb nullile ja lugeja ühele. Et praegusel juhul murru nimetaja osutub tõkestamatult kahanevaks suuruseks, samal ajal kui lugeja jääb lõplikuks, siis on murd tõkestamatult kasvav suurus. Seega puudub temal lõplik piirväärtus. Seda tõsiasja märgime üles järgmiselt.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{1-x} = \infty$$

(loeme: argumendi lähenemisel 1-le kasvab funktsioon $\frac{x}{1-x}$ tõkestamatult või: funktsiooni $\frac{x}{1-x}$ piirväärtuseks on lõpmatus).

2° $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x^2}$.

Et siin murru nimetaja on tõkestamatult kasvav suurus (kui

$x \rightarrow \infty$, siis ka $1+x^2 \rightarrow \infty$) ja murru lugeja on lõplik arv, siis on murd tõkestamatult kahanev suurus:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x^2} = 0.$$

$$3^\circ \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2-9}{x+3}.$$

Siin on nii murru lugeja kui ka nimetaja piirväärtus 0. Et $x \neq -3$, siis tuleb avaldist nii teisendada, et saaksime teguri $x+3$, mis läheneb nullile nii lugejas kui ka nimetajas, taandada.

Seega lahendame selle ülesande järgmiselt:

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2-9}{x+3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(x-3)}{x+3} = \lim_{x \rightarrow -3} (x-3) = -6.$$

$$4^\circ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x^3+1}.$$

Selles ülesandes pole lugejal ega nimetajal piirväärtust — nad mõlemad on tõkestamatult kasvavad suurused. Et x omab lõplikke väärtusi, mis järjest suurenevad, siis tuleb siin lugeja ja nimetaja nii tegureiks lahutada, et saaksime x kõrgeima astendajaga astmega taandada. Antud ülesande lahendame järgmiselt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x^3+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} \right)}{x^3 \left(1 + \frac{1}{x^3} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{1}{x^3}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Ülesandeid.

167. Leia piirväärtused.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{5x}$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{5x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{3x}$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{3x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x^3}$

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x^3}$

168. Leia järgmiste funktsioonide piirväärtused, kui $x \rightarrow \infty$.

a) $3+x$

b) x^2+5

c) $\frac{1}{x}$

$5x$

$16-x$

$3+\frac{1}{x}$

x^2

x^3-1

$x+\frac{3}{x}$

169. Leia piirväärtused.

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-2}{x-1}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+8}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{12+4x}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2-x-12}{x^2-2x-15}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-x}{x-1}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+3x-4}{x^2+4x-5}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^3+5x^2}{x^2+5x}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x^2-2x-3}$$

170. Leia piirväärtused.

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{x^3-x^2-x+1}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$$

171. Leia piirväärtused.

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-1}{x^2+1}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^4-5x}{x^2-3x+1}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-1}{x^2+1}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x-3x^3}{1+x^2+3x^3}$$

172. Leia järgmiste funktsioonide piirväärtused, kui $x \rightarrow 0$ ja kui $x \rightarrow \infty$.

$$a) \frac{2x-5}{x+3}$$

$$b) \frac{3x^2+5x-2}{4x^2-3x+1}$$

173. Leia piirväärtused.

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1+\tan x}{1-\tan x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{\sin x}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\tan x + \sin x}$$

§ 30. FUNKTSIOONI-PIIRVÄÄRTUSE RAKENDUSI.

RINGJOONE PIKKUS.

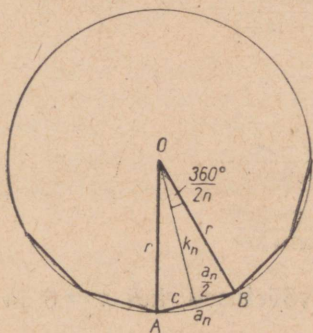
a) Ringjoone pikkuse mõiste.

Ringjoon on kõverjoon, pikkusühik aga sirglõigu pikkus (näiteks 1 mm, 1 cm, 1 dm jne.), seetõttu ei ole võimalik ringjoone pikkust otseselt mõõta ja on vaja defineerida, mida mõista ringjoone pikkuse all.

Kui ringi sisse joonestada korrapärane hulknurk, siis tema übermõõt, mida saab pikkusühiku abil mõõta, on lühem ringjoone pikkusest, sest hulknurga küljed on lühemad neile vastavatest ringjoone kaartest. Kui hulknurga tippude arvu kahekordistada, saame uue hulknurga, mille übermõõt on pikem eelmise hulknurga übermõödust ja lühem ringjoone pikkusest. Miks? Seda kahekordistamise protsessi jätkates saame hulknurgad, millele übermõõdud ikka enam ja enam lähenevad ringjoone pikkusele. Tee vastav joonis!

Seda tähelepanekut aluseks võttes defineeritaksegi ringjoone pikkus järgmiselt.

Ringjoone pikkuseks nimetatakse ringi sisse joonestatud korrapäraste hulknurkade übermõõtude piirväärtust, kui hulknurga tippude arv tõkestamatult kasvab.



Joon. 117.

Olgu ringi sisse joonestatud korrapärane n -nurk (joon. 117). Ühendades hulknurga tipud ringi keskpunktiga, tekivad võrdhaarsed kolmnurgad alusega a_n ja haaraga r . Selle kolmnurga tipunurk on $\frac{360^\circ}{n}$. Tõmbame hulknurga apoteemi, mis on ka vaadeldava võrdhaarse kolmnurga kõrguseks. See apoteem jaotab antud kolmnurga OAB kaheks võrdseks täisnurkseks kolmnurgaks OAC ja OBC . Nendes kolmnurkades on üks nurk $\frac{360^\circ}{2n}$ ja selle nurga vastaskaatet $\frac{a_n}{2}$. Täisnurksest kolmnurgast OBC võime kirjutada:

$$\frac{\frac{a_n}{2}}{r} = \sin \frac{360^\circ}{2n}$$

ehk

$$\frac{a_n}{2r} = \sin \frac{360^\circ}{2n}.$$

Korrutades nüüd võrduse mõlemad pooled arvuga $2rn$, saame

$$n \cdot a_n = 2r \cdot n \cdot \sin \frac{360^\circ}{2n}.$$

Et $n \cdot a_n$ esitab ringi sisse joonestatud korrapärase hulknurga übermõõtu, siis on ringjoone pikkuseks

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n \cdot a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2r \cdot n \cdot \sin \frac{360^\circ}{2n} \right).$$

b) Arv π .

Vaatame, kuidas muutub avaldis $n \cdot \sin \frac{360^\circ}{2n}$, kui n kasvab. Selleks koostame alljärgneva tabeli.

n	$\frac{360^\circ}{2n}$	$\sin \frac{360^\circ}{2n}$	$n \cdot \sin \frac{360^\circ}{2n}$
3	60°	0,8660	2,5980
6	30°	0,5	3,0
12	15°	0,2588	3,1056
24	$7^\circ 30'$	0,1305	3,1320
48	$3^\circ 45'$	0,0654	3,1392

Selle tabeli jätkamiseks ei piisa enam neljakohalisest siinuste tabelist. Kui aga kasutada järjest suurema arvu kohtadega tabeleid, siis võib tähele panna, et peale 3,1, mis jäi juba antud tabelis püsima $n \cdot \sin \frac{360^\circ}{2n}$ väärtusena, jäävad edaspidi n suurenemisel püsima

3,14; 3,141; 3,415; 3,14159; jne.

Avaldise $n \cdot \sin \frac{360^\circ}{2n}$ piirväärtust tähistatakse kreeka keele tähega π (loe: pii).

π lähisväärtusena on kõige enam kasutusel arv 3,14.

c) Ringjoone pikkus.

Et $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \cdot \sin \frac{360^\circ}{2n} \right) = \pi$ ja ringjoone pikkus on

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2r \cdot n \cdot \sin \frac{360^\circ}{2n} \right)$, siis tähistades ringjoone pikkuse tähega c , võime kirjutada

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} (n \cdot a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[2r \cdot \left(n \cdot \sin \frac{2n}{360^\circ} \right) \right] = 2r \cdot \pi$$

ehk, jättes vahepealsed kirjutused ära,

$$c = 2\pi r$$

Et $2r = d$, siis ka

$$c = \pi d.$$

Avaldades sellest vördusest π , saame

$$\pi = \frac{c}{d},$$

mis ütleb, et iga ringjoone pikkuse ja läbimõõdu suhe on konstantne ja võrdub π -ga.

d) Ringi pindala.

Ringi pindala S all mõistame ringi sisse joonestatud korrapäraste hulknurkade pindalade S_n piirväärtust, kui hulknurga tipude arv tõkestamatult kasvab, s. t.

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

Teades, et korrapärase hulknurga pindala avaldub tema ümbermõõdu ja apoteemi poole korrutisega, võime kirjutada (joon. 117):

$$S_n = (n \cdot a_n) \cdot \frac{k_n}{2}$$

ja

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[(n \cdot a_n) \cdot \frac{k_n}{2} \right].$$

Et $\lim_{n \rightarrow \infty} (n \cdot a_n) = 2\pi r$ ja $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = r$, siis

$$S = 2\pi r \cdot \frac{r}{2} = \pi r^2$$

ehk, jättes ära vahepealse avaldise,

$$S = \pi r^2$$

Ülesandeid.

174. Ringi raadius on r .

a) Kui suur on 1° kesknurgale vastava kaare pikkus?

b) Kui suur on 1° kesknurgale vastava sektori pindala?

175. Ringi raadius on 10 cm.

a) Kui suur on 15° kesknurgale vastava kaare pikkus?

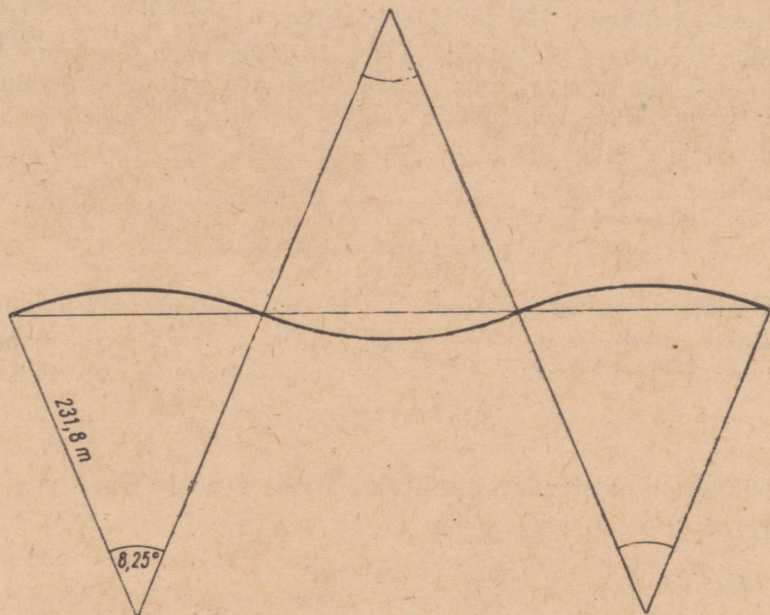
b) Kui suur on 100° kesknurgale vastava sektori pindala?

176. Sõnasta ringjoone kaare pikkuse leidmise eeskiri.

177. Sõnasta ringi sektori pindala leidmise eeskiri.

178. Mis on ringi segment? Sõnasta ringi segmendi pindala leidmise eeskiri.

179. Ringi raadius on 15 cm. Leia 25° kesknurgale vastava segmendi pindala.



Joon. 118.

180. 1 meeter on ligikaudu $\frac{1}{40\,000\,000}$ Maa ümbermõõdust, kui Maad vaadelda kerana. Kui pikk on Maa raadius?

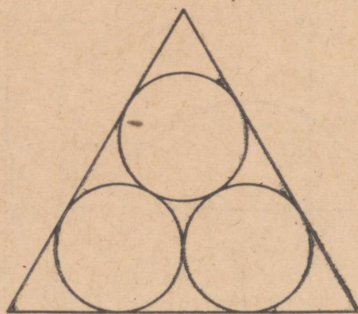
181. Kui pikk on meridiaani kraad, kui Maa raadius on 6370 km?

182. Meridiaani minuti pikkust nimetatakse meremiiliks. Leia meremiili pikkus meetrites, kasutades eelmise ülesande andmeid.

183. Mitu pööret teeb vaguniratas minutis, kui tema diameeter on 0,85 m ja rong sõidab kiirusega 80 km tunnis?

184. Poiss käib ümber ringikujulise tiigi 7 minutiga. Kui suur on tiigi pindala, kui poiss käib 10 minutiga 900 m?

185. Sportlane ei jookse 100 meetrit mitte oma raja keskjoont



Joon. 119.

mööda, vaid joonisel 118 näidatud kolme võrdse ringjoone kaart mööda, kusjuures vastavate ringide raadiused on 231,8 m ja kaarte vastav kesknurk $8,25^\circ$. Kui pika maa jooksis sportlane tegelikult? Kui palju kaotas sportlane aega, kui sirgjoont mööda joostes oleks ta läbinud 100 m 11 sekundiga?

186. Võrdkülgssesse kolmnurka, mille külge on a , on joonestatud kolm võrdset ringi, mis puudutavad üksteist ja kolmnurga külge (joon. 119). Leia nende ringide vahele jääva kõverjoonse kolmnurga pindala.

§ 31. FUNKTSIOONI PIDEVUS.

Mitmetes seni lahendatud funktsiooni piirväärtuse leidmise ülesannetes osutus funktsiooni piirväärtus võrdseks funktsiooni enda väärtusega vastaval kohal, s. t. et

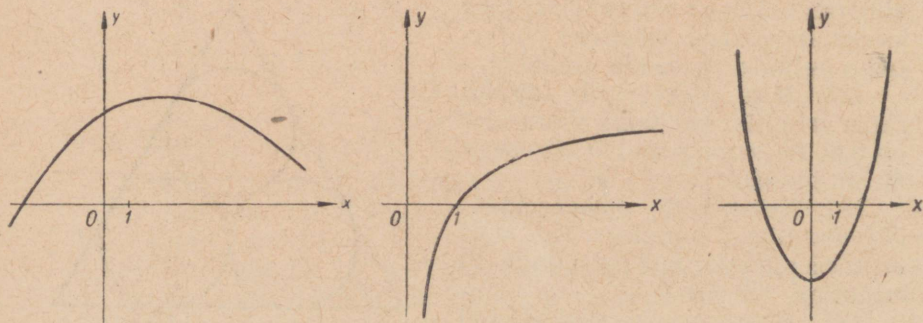
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Selliseid funktsioone nimetatakse kohal a pidevaks.

Seega

funktsioon $f(x)$ on kohal a pidev, kui

- 1) tal on kohal a väärtus olemas, s. t. eksisteerib $f(a)$,
- 2) tal on olemas lõplik piirväärtus, kui $x \rightarrow a$, s. t. eksisteerib $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$,
- 3) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

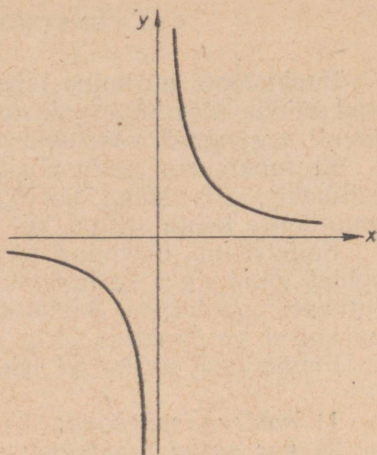


Joon. 120.

Kui need tingimused kehtivad argumendi kõigi väärtuste kohta vahemikus c -st kuni d -ni, siis öeldakse, et *funktsioon on pidev vahemikus $c < x < d$* .

Kui need tingimused kehtivad aga kõigi määramispiirkonda kuuluvate väärtuste korral, siis öeldakse, et *funktsioon on pidev*.

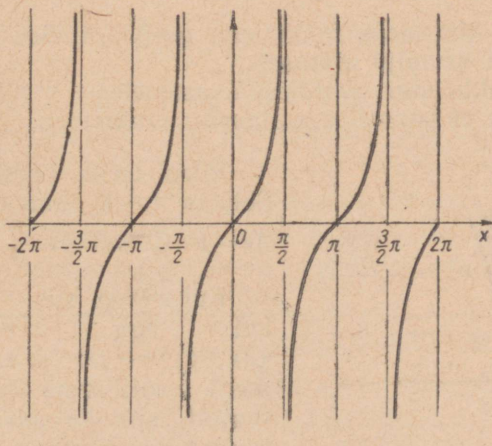
Funktsiooni graafikul kajastub pidevus joone katkematuses (joon. 120). Seni tundma õpitud funktsioonidest on lineaarne, ruut- ja kuupfunktsioon, samuti siinus- ja koosinusfunktsioon pidevad, s. t. et näiteks lineaarne funktsioon $y = ax + b$ on pidev vahemikus $-\infty < x < \infty$, logaritm-funktsioon $y = \log x$ on aga pidev vahemikus $0 < x < \infty$.



Joon. 121.

Funktsioon $y = \frac{a}{x}$ on kohal $x=0$ katkev, sest 0-ga jagada ei saa, ja seega puudub funktsioonil väärtus kohal $x=0$ (joon. 121).

Samuti puudub väärtus tangensfunktsioonil, kui $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, kus k on täisarv (joon. 122).



Joon. 122.

§ 32. FUNKTSIOONI UURIMISE SCHEEM.

Funktsiooni uurimine tähendab saada antud funktsiooni esitusest täielik ülevaade funktsiooni väärtuste muutumise kohta vastavalt argumenti väärtuste muutumisele.

Et funktsiooni esitusviisidest on kõige täielikum analüütiline esitusviis, siis kõige täielikuma ülevaate funktsiooni väärtuste muutumise kohta saame, kui uurime tema analüütilist esitust.

Funktsiooni uurimine tema analüütilisele esitusele tuginedes eeldab muuhulgas ka funktsiooni tuletise mõiste tundmist. Sellega tutvume aga hiljem. Seetõttu kasutame järgnevas funktsioonide uurimisel ka punktide järgi joonestatud graafikut.

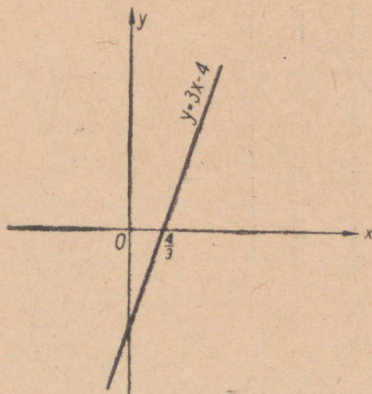
Funktsiooni uurimisel tehakse kindlaks:

- 1) määramispiirkond;
- 2) kas antud funktsioon on paaris- või paaritu funktsioon või ei kumbki;
- 3) ekstreemumpunktid;
- 4) kasvamis- ja kahanemispiirkonnad;
- 5) nullkohad;
- 6) positiivsus- ja negatiivsuspiirkonnad;
- 7) funktsiooni muutumine argumenti tõkestamatul kasvamisel (mõnikord ka argumenti tõkestamatul kahanemisel).

§ 33. LINEAARSE FUNKTSIOONI UURIMINE.

Olgu antud lineaarne funktsioon $y=3x-4$. See funktsioon on määratud kogu arvtelje ulatuses.

Pannes funktsiooni avaldisse x asemele $-x$ näeme, et antud funktsioon pole ei paaris- ega paaritu funktsioon.



Joon. 123.

Edasi teeme kindlaks nullkoha. Selleks tuleb lahendada võrrand $3x-4=0$. Siit $x=\frac{4}{3}$.

Kui $x \rightarrow \infty$, siis $(3x-4) \rightarrow \infty$; kui aga $x \rightarrow -\infty$, siis $(3x-4) \rightarrow -\infty$, s. t. et kui argument positiivsena kasvab tõkestamatult, siis ka antud funktsioon kasvab positiivsena tõkestamatult, ning kui argument negatiivsena kasvab tõkestamatult, siis ka antud funktsioon kasvab negatiivsena tõkestamatult.

Funktsiooni graafikult (joon. 123) näeme, et

$$3x-4>0, \text{ kui } x>\frac{4}{3} \text{ ja } 3x-4<0, \text{ kui } x<\frac{4}{3}.$$

Samuti näeme, et antud funktsioon on kogu ulatuses kasvav. Uurime nüüd lineaarset funktsiooni tema üldises kujus.

1. Lineaarne funktsioon $ax+b$ on määratud argumendi iga väärtuse korral, s. t. piirkonnas $-\infty < x < \infty$.

2. Lineaarne funktsioon pole üldiselt ei paaris- ega paaritu funktsioon, ainult erijuhul, kui $b=0$, esitab ta paaritut funktsiooni.

3. Lineaarsel funktsioonil ei ole maksimum- ega miinimum-punkti.

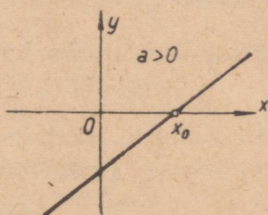
4. a) Lineaarne funktsioon on kasvav, kui $a>0$ (joon. 124).

b) Lineaarne funktsioon on kahanev, kui $a<0$ (joon. 125).

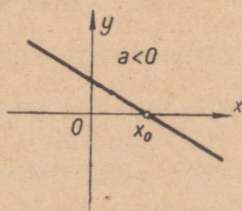
5. Lineaarse funktsiooni nullkohaks on $x_0 = -\frac{b}{a}$.

6. a) Kui $a>0$, siis on lineaarse funktsiooni positiivsuspätkonnaks $x>x_0$ ja negatiivsuspätkonnaks $x<x_0$.

b) Kui $a<0$, siis on lineaarse funktsiooni positiivsuspätkonnaks



Joon. 124.



Joon. 125.

konnaks $x<x_0$ ja negatiivsuspätkonnaks $x>x_0$.

7. a) Kui $a>0$ ja $x\rightarrow\infty$, siis $(ax+b)\rightarrow\infty$;

kui $a>0$ ja $x\rightarrow-\infty$, siis $(ax+b)\rightarrow-\infty$.

b) Kui $a<0$ ja $x\rightarrow\infty$, siis $(ax+b)\rightarrow-\infty$;

kui $a<0$ ja $x\rightarrow-\infty$, siis $(ax+b)\rightarrow\infty$.

Märgime funktsiooni $y=3x-4$ uurimise tulemused tabelisse

	Funktsioonid		
	$3x-4$	$\frac{2}{3}x + \frac{4}{5}$	$-2x + \frac{2}{3}$
1. Määramispätkond	$-\infty < x < \infty$		
2. Kas paaris- või paaritu funktsioon	ei kumbki puudub		
3. a) Maksimumpätkond			
b) Miinimumpätkond			

	Funktsioonid		
	$3x-4$	$\frac{2}{3}x + \frac{4}{5}$	$-2x + \frac{2}{3}$
4. a) Kasvamispiirkond b) Kahanemispiirkond	$-\infty < x < \infty$ puudub		
5. Nullkoht	$x = \frac{4}{3}$		
6. a) Positiivsuspiirkond b) Negatiivsuspiirkond	$x > \frac{4}{3}$ $x < \frac{4}{3}$		
7. a) Kui $x \rightarrow \infty$, siis b) Kui $x \rightarrow -\infty$, siis	$(3x-4) \rightarrow \infty$ $(3x-4) \rightarrow -\infty$		

Täida tabel ka funktsioonide $\frac{2}{3}x + \frac{4}{5}$ ja $-2x + \frac{2}{3}$ osas!

Küsimusi ja ülesandeid.

187. Missugust funktsiooni nimetatakse lineaarseks funktsiooniks.

188. Mis on sirge tõus?

189. Millal nimetatakse funktsiooni kasvavaks (kahanevaks)?

190. Mis on funktsiooni positiivsuspiirkond (negatiivsuspiirkond)?

191. Kasutades tabeleid, tee kindlaks, kui suure nurga moodustavad x -teljega järgmised sirged:

a) $y = 2,13x - 5$;

c) $y = 1,6x + 3$;

b) $y = -0,421x + 1$;

d) $y = -5,2x - 4$.

192. Leia eelmises ülesandes antud sirgete (a) ja (b) vaheline ning (c) ja (d) vaheline nurk.

193. Uuri järgmisi funktsioone.

a) $3x + 2$

c) $\frac{3}{4}(x + 2)$

e) $12x - 64$

b) $\frac{2x-6}{3}$

d) $-3,22x - 15,6$

f) $2,14 - \frac{3}{5}x$

Skitseeri uurimistulemuste põhjal vastavad graafikud!

§ 34. RUUTFUNKTSIOONI UURIMINE.

Uurime näiteks funktsiooni $3x^2 - 4x - 4$.

1. Et antud funktsioon on ruutfunktsioon, siis on tema määramispiirkonnaks $-\infty < x < \infty$.

2. Asendades antud funktsiooni avaldises x ($-x$)-ga, saame $3x^2+4x-4$. Kui antud funktsiooni tähistada $f(x)$ -ga, siis ei kehti siin võrdused: $f(x)=f(-x)$, $f(x)=-f(-x)$. Seega antud funktsioon pole ei paaris- ega paaritu funktsioon.

3. Haripunkti koordinaadid leiame täisruuduks teisendamise võtte abil järgmiselt:

$$\begin{aligned} 3x^2-4x-4 &= 3\left(x^2-\frac{4}{3}x\right)-4=3\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}\right)-4-\frac{4}{3}= \\ &= 3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-5\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Selle ruutfunktsiooni graafiku haripunktiks on seega punkt

$$\left(\frac{2}{3}; -5\frac{1}{3}\right).$$

4. Et siin $a>0$, siis on kahanemispiirkonnaks $x<\frac{2}{3}$ ja kasvamispiirkonnaks $x>\frac{2}{3}$.

5. Nullkohtade leidmiseks lahendame ruutvõrrandi

$$3x^2-4x-4=0,$$

mille lahendid on:

$$x_1=-\frac{2}{3}; x_2=2.$$

6. Teades kasvamis- ja kahanemispiirkondi ning nullkohti, saab kohe välja kirjutada positiivsus- ja negatiivsusiirkonnad. Vaadeldaval juhul

$$3x^2-4x-4<0, \text{ kui } -\frac{2}{3}<x<2;$$

$$3x^2-4x-4>0, \text{ kui } x<-\frac{2}{3} \text{ ja kui } x>2.$$

7. Et $a=3>0$, siis x tõkestamatul kasvamisel kas positiivses või negatiivses suunas osutub funktsioon ikka tõkestamatult kasvavaks positiivses suunas.

Uurimise tulemused paigutame tabelisse

	Funktsioonid		
	$3x^2-4x-4$	$2x^2-3x$	$-x^2+4$
1. Määramispiirkond	$-\infty < x < \infty$		
2. Kas paaris- või paaritu funktsioon	ei kumbki puudub		
3. a) Maksimumpunkt	$\left(\frac{2}{3}; -5\frac{1}{3}\right)$		
b) Miinimumpunkt			

	Funktsioonid		
	$3x^2 - 4x - 4$	$2x^2 - 3x$	$-x^2 + 4$
4. a) Kasvamispiirkond	$x > \frac{2}{3}$		
b) Kahanemiskiirkond	$x < \frac{2}{3}$		
5. Nullkohad	$x = -\frac{2}{3}; x = 2$		
6. a) Positiivsuspiirkonnad	$x < -\frac{2}{3}; x > 2$		
b) Negatiivsuspiirkond	$-\frac{2}{3} < x < 2$		
7. a) Kui $x \rightarrow \infty$, siis	$\left. \begin{array}{l} \text{b) Kui } x \rightarrow -\infty, \text{ siis} \\ \end{array} \right\} (3x^2 - 4x - 4) \rightarrow \infty$		
b) Kui $x \rightarrow -\infty$, siis			

Täida tabel ka funktsioonide $2x^2 - 3x$ ja $-x^2 + 4$ osas!

Uurime ruutfunktsiooni tema üldises kujus.

1. Ruutfunktsioon $ax^2 + bx + c$ on määratud argumendi iga väärtuse korral, s. t. piirkonnas $-\infty < x < \infty$.

2. Ruutfunktsioon pole üldiselt ei paaris- ega paaritu funktsioon. Erijuhul, kui $b = c = 0$ esitab ta paarisfunktsiooni.

3. Ruutfunktsiooni ekstreemumkohaks on $x_e = -\frac{b}{2a}$.

4. a) Kui $a > 0$, siis ruutfunktsioon on kasvav piirkonnas $x > x_e$ ja kahanev piirkonnas $x < x_e$ (joon. 126).

b) Kui $a < 0$, siis ruutfunktsioon on kasvav piirkonnas $x < x_e$ ja kahanev piirkonnas $x > x_e$ (joon. 127).

5. Ruutfunktsiooni nullkohtadeks on ruutvõrrandi $ax^2 + bx + c = 0$ lahendid x_1 ja x_2 , kusjuures

a) tal on kaks erinevat nullkohta ($x_1 \neq x_2$), kui $b^2 - 4ac > 0$;

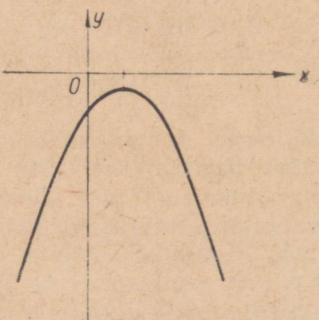
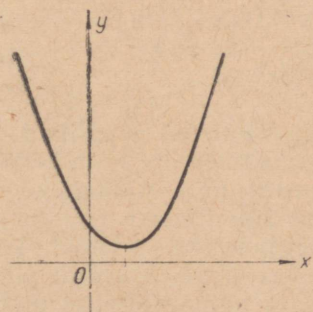
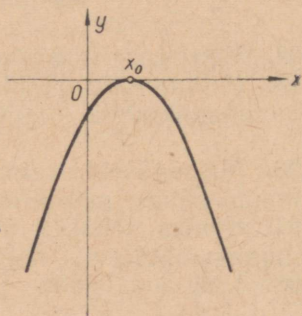
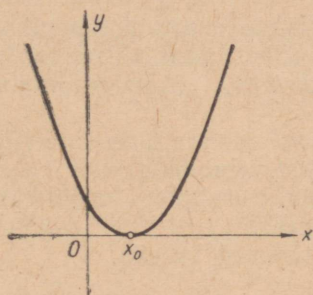
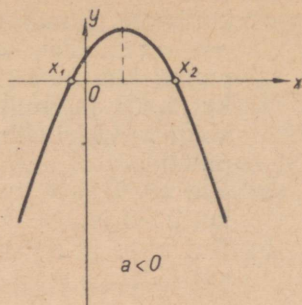
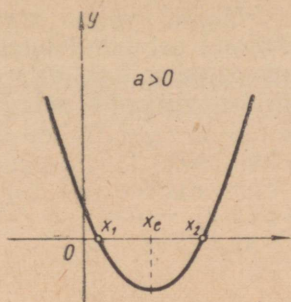
b) tal on kaks ühtelangevat nullkohta ($x_1 = x_2$), kui $b^2 - 4ac = 0$;

c) tal pole nullkohti, kui $b^2 - 4ac < 0$.

6. Ruutfunktsiooni positiivsus- ja negatiivsuspiirkonnad on nullkohtadega määratud järgmiselt:

a) kui $a > 0$ ja nullkohtadeks on x_1 ja x_2 , kusjuures $x_1 < x_2$, siis $ax^2 + bx + c > 0$ piirkondades $x < x_1$ ja $x > x_2$ ning $ax^2 + bx + c < 0$ piirkonnas $x_1 < x < x_2$;

b) kui $a < 0$ ja nullkohad on ühtelangevad, s. t. $x_1 = x_2 = x_0$,



Joon. 126.

Joon. 127.

- siis $ax^2+bx+c>0$ kõikjal, välja arvatud punkt, kus $x=x_0$; negatiivsuspiirkond sel juhul puudub;
- c) kui $a>0$ ja nullkohad puuduvad, siis $ax^2+bx+c>0$ kõigi x väärtuste korral; negatiivsuspiirkond sel juhul puudub;
- d) kui $a<0$ ja nullkohtadeks on x_1 ja x_2 , kusjuures $x_1<x_2$, siis $ax^2+bx+c>0$ piirkonnas $x_1<x<x_2$ ja $ax^2+bx+c<0$ piirkondades $x<x_1$ ja $x>x_2$;

- e) kui $a < 0$ ja nullkohtadeks on x_1 ja x_2 , kusjuures $x_1 = x_2 = x_0$, siis $ax^2 + bx + c < 0$ kõikjal, välja arvatud punkt, kus $x = x_0$; positiivsuspriirkond sel juhul puudub;
- f) kui $a < 0$ ja nullkohad puuduvad, siis $ax^2 + bx + c < 0$ kõigi x väärtuste korral; positiivsuspriirkond sel juhul puudub.
7. a) Kui $a > 0$ ja $x \rightarrow \infty$, siis $(ax^2 + bx + c) \rightarrow \infty$;
kui $a > 0$ ja $x \rightarrow -\infty$, siis $(ax^2 + bx + c) \rightarrow \infty$.
- b) Kui $a < 0$ ja $x \rightarrow \infty$, siis $(ax^2 + bx + c) \rightarrow -\infty$;
kui $a < 0$ ja $x \rightarrow -\infty$, siis $(ax^2 + bx + c) \rightarrow -\infty$.

Küsimusi ja ülesandeid.

194. Missugust funktsiooni nimetatakse ruutfunktsiooniks?

195. Missuguseid funktsiooni graafiku punkte nimetatakse maksimumpunktideks, miinimumpunktideks, ekstreemumpunktideks?

196. Missuguseid argumendi väärtusi nimetatakse funktsiooni maksimumkohaks, miinimumkohaks, ekstreemumkohaks?

197. Kuidas tehakse kindlaks, kas parabooli haripunkt on maksimumpunktiks või miinimumpunktiks?

198. Uuri funktsioone ja esita tulemused tabelis.

- | | |
|----------------------|--------------------------|
| a) $2x^2 - 5x + 3$ | e) $x(2x + 3) + 1$ |
| b) $-3x^2 + 3$ | f) $(x - 3)(x - 1) - 15$ |
| c) $x^2 - 24x + 144$ | g) $2x^2 - 13x + 15$ |
| d) $0,2x^2 + 2,6x$ | h) $-3x^2 - 8$ |

Skitseeri uurimistulemuste põhjal ka vastavad graafikud.

199. Ristkülikukujulise muruplatsi mõõtmed on 20 m ja 36 m. Selle ümber rajatakse ühelaiune lillepeenar, mille pindala on 12% muruplatsi pindalast. Kui lai on rajatav lillepeenar?

200. Koolipeoks müüdi kahesuguse hinnaga pileteid, kokku 400 piletit. Õpilaspilet oli 20 kopikat odavam täiskasvanu piletist. Õpilaspiletite müügist laekus 60 rubla ja muude piletite müügist 40 rubla. Kui kallid olid piletid?

201. Kui kuubi üht mõõdet vähendati 2 cm võrra, teist 3 cm võrra, kolmandat aga suurendati 4 cm võrra, siis vähenes ruumala 216 cm³ võrra. Leida kuubi serva pikkus.

202. Kolhoosikeskusest raudteejaama on maanteed mööda 24 km, metsavaheteed mööda aga 15 km. Rong väljub kell 14.38. Autobuss ja hobusõiduk asuvad rongileminejatega teele vastavalt kell 13.50 ja 13.20; autobuss sõidab mööda maanteed, hobusõiduk mööda metsavaheteed. Autobuss sõidab tunnis 28 km rohkem kui hobusõiduk ja jõuab jaama 9 minutit varem kui hobusõiduk. Kas kõik jõudsid rongile?

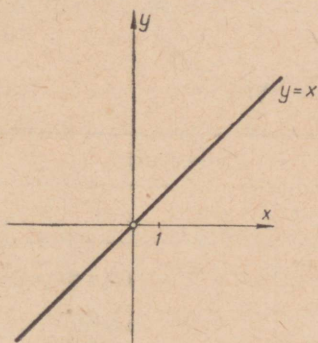
203. Raudteejaama veetorni paak täitub peapumba kaudu 3,5 tunni võrra lühema ajaga kui tagavarapumba kaudu. Mõlema pumba töötades täitub paak 6 tunni jooksul. Leia aeg, mis on tarvilik paagi täitmiseks peapumba kaudu.

204. Missuguste ruutfunktsioonide nullkohtade leidmisele taandusid ülesanded 199—203? Kas ühe ja sama ülesande lahendamise võib taanduda erinevate funktsioonide nullkohtade leidmisele? Too näiteid.

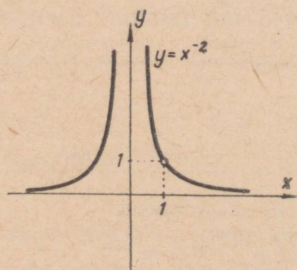
§ 35. ASTMEFUNKTSIOONI UURIMINE.

Tunneme astmefunktsiooni $y = x^n$ astendaja n järgmistel väärtustel: a) $n = 1; 2; 3$; b) $n = -1; -2; -3$; c) $n = \frac{1}{2}; \frac{1}{3}$.

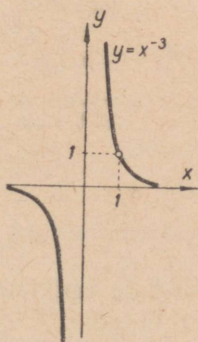
Joonistel 128, 102, 105, 106, 129, 130, 108 ja 131 on esitatud nende funktsioonide graafikud.



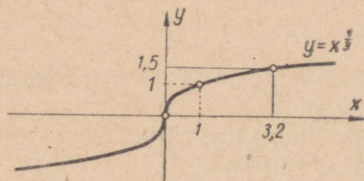
Joon. 128.



Joon. 129.



Joon. 130.



Joon. 131.

Uurime funktsiooni $y=x^{-3}$ (joon. 130).

1. See funktsioon ei ole määratud, kui $x=0$. Tema määramispiirkonnaks on seega: $-\infty < x < 0$ ja $0 < x < \infty$.

2. Asendades x ($-x$)-ga, saame $(-x)^{-3} = -x^{-3}$. Seega vaadeldav funktsioon on paaritu funktsioon. Graafik on tsentraalsümmeetriline, kusjuures sümmeetria keskpunktiks on koordinaatide alguspunkt.

3. Sellel funktsioonil ei ole maksimum- ega miinimumpunkti.

4. Vaadeldav funktsioon kahaneb nii vahemikus $-\infty < x < 0$ kui ka vahemikus $0 < x < \infty$.

5. Funktsiooni graafik ei lõika x -telge, sest ei leidu niisugust väärtust, mille puhul kehtiks võrdus $\frac{1}{x^3} = 0$.

6. Vahemikus $-\infty < x < 0$ on funktsiooni väärtused negatiivsed, sest negatiivse arvu kuup on negatiivne, ja vahemikus $0 < x < \infty$ positiivsed, sest positiivse arvu kuup on positiivne.

7. Kui $x \rightarrow \infty$, siis $x^{-3} \rightarrow 0$, ja kui $x \rightarrow -\infty$, siis samuti $x \rightarrow 0$. Kui aga $x \rightarrow 0$ (vasakult), siis $x^{-3} \rightarrow -\infty$, ja kui $x \rightarrow 0$ (paremalt), siis $x^{-3} \rightarrow \infty$.

Võtame uurimistulemused kokku tabelisse.

	Funktsioonid		
	x^{-1}	x^{-2}	x^{-3}
1. Määramispiirkond			$-\infty < x < 0$ ja $0 < x < \infty$
2. Kas paaris- või paaritu funktsioon			paaritu
3. a) Maksimumpunkt			puudub
b) Miinimumpunkt			puudub
4. a) Kasvamispiirkond			puudub
b) Kahanemispiirkond			$-\infty < x < 0$ ja $0 < x < \infty$
5. Nullkohad			puudub
6. a) Positiivsuspiirkond			$0 < x < \infty$
b) Negatiivsuspiirkond			$-\infty < x < 0$
7. Kui $x \rightarrow \infty$, siis			} $x^{-3} \rightarrow 0$
Kui $x \rightarrow -\infty$, siis			
Kui $x \rightarrow 0$ (v), siis			
Kui $x \rightarrow 0$ (p), siis			
			$x^{-3} \rightarrow -\infty$
			$x^{-3} \rightarrow \infty$

Ülesandeid.

205. Joonesta vihikusse ja täida eelnev tabel ka funktsioonide x^{-1} ja x^{-2} osas.

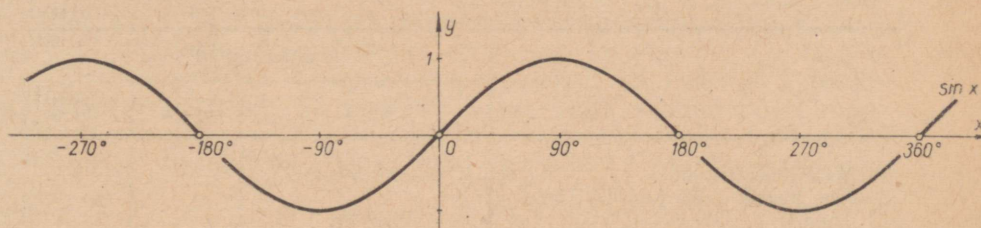
206. Uuri funktsioone $y=x^n$, kus $n=1, 2$ ja 3 , ning koosta vastav tabel.

207. Uuri funktsioone $y=x^n$, kus $n=\frac{1}{2}$ ja $\frac{1}{3}$, ning koosta vastav tabel.

§ 36. TRIGONOMEETRILISTE FUNKTSIOONIDE UURIMINE.

Oleme tuttavad trigonomeetriliste funktsioonidega: $\sin x$, $\cos x$ ja $\tan x$.

Uurime funktsiooni $y=\sin x$, tuginedes tema graafikule (joon. 132).



Joon. 132.

- $\sin x$ on määratud argumendi iga väärtuse korral.
- $\sin x$ on paaritu funktsioon (§ 25).
- $\sin x$ maksimumpunktideks on $x = -\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}$ jne.
Üldiselt, $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, kus n on mistahes täisarv.
 - $\sin x$ miinimumpunktideks on $x = -\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}$ jne.
Üldiselt, $x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$, kus n on mistahes täisarv.
- Vastavalt maksimum- ja miinimumpunktide asukohtadele on $\sin x$ kasvav vahemikkudes: $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2})$ jne. Üldiselt, $(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi)$, kus n on mistahes täisarv (joon. 132).
 - Kahanemispiirkondadeks on vahemikud: $(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$, $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ jne. Üldiselt, $(\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \frac{3\pi}{2} + 2n\pi)$, kus n on mistahes täisarv.
- Nullkohtadeks on $x = -\pi, 0, \pi, 2\pi$ jne. Üldiselt, $x = n\pi$, kus n on mistahes täisarv.

6. a) $\sin x$ on positiivne vahemikkudes: $(-2\pi, -\pi)$, $(0, \pi)$, $(2\pi, 3\pi)$ jne. Üldiselt, $(2n\pi, (2n+1)\pi)$, kus n on mis tahes täisarv.
- b) $\sin x$ on negatiivne vahemikkudes $(-\pi, 0)$, $(\pi, 2\pi)$, $(3\pi, 4\pi)$ jne. Üldiselt, $((2n-1)\pi, 2n\pi)$, kus n on mistahes täisarv.

7. Kui x kasvab tõkestamatult kas positiivses või negatiivses suunas, siis $\sin x$ ei lähene mingile kindlale väärtusele ega kasva ka tõkestamatult, vaid tema väärtused võnguvad -1 ja 1 vahel.

Kanname uurimistulemused tabelisse.

	Funktsioonid		
	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
1. Määramispiirkond	$-\infty < x < \infty$		
2. Kas paaris- või paaritu funktsioon	paaritu		
3. a) Maksimumpunktid	$\frac{\pi}{2} + 2n\pi$		
Miinimumpunktid	$-\frac{\pi}{2} + 2n\pi$		
4. a) Kasvamispiirkonnad	$\left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$		
b) Kahanemispiirkonnad	$\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \frac{3}{2}\pi + 2n\pi\right)$		
5. Nullkohad	$n\pi$		
6. a) Positiivsuspiirkonnad	$(2n\pi, (2n+1)\pi)$		
b) Negatiivsuspiirkonnad	$((2n-1)\pi, 2n\pi)$		
7. Kui $x \rightarrow \infty$, siis	} võngub		
Kui $x \rightarrow -\infty$, siis			

Ülesandeid.

208. Uuri funktsioone $\cos x$ ja $\tan x$ ning esita tulemused tabelis.

209. Uuri funktsioone $\sin 2x$ ja $\cos \frac{x}{2}$ ning esita tulemused tabelis.

§ 37. PÖÖRDFUNKTSIOONI MÕISTE.
PÖÖRDFUNKTSIOONI GRAAFIK.

Olgu antud lineaarne funktsioon $y=2x+4$. Avaldades sellest võrdusest argumendi x , saame

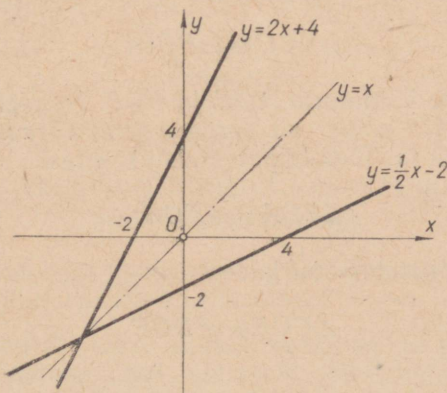
$$x = \frac{1}{2}y - 2.$$

Kui loeme selles võrduses y argumendiks, siis võrduse vasak pool on funktsioon, mille tähiseks on x . Nii moodustatud uut funktsiooni nimetataksegi antud funktsiooni $y=2x+4$ **pöördfunktsiooniks**.

Üldiselt, kui on antud mingi funktsioon $y=f(x)$, siis avaldades siit x ja lugedes y argumendiks, saame antud funktsiooni pöördfunktsiooni, mille tähiseks on x , s. t. $x=g(y)$.

Et meil seni on x olnud ikka argumendi tähiseks ja y funktsiooni tähiseks, siis on otstarbekohane võtta saadud pöördfunktsiooni esitises samuti x argumendi tähiseks ja y funktsiooni tähiseks. Seega on funktsiooni $y=2x+4$ pöördfunktsiooniks $y=\frac{1}{2}x-2$.

Uurime nüüd pöördfunktsiooni graafikut, võrreldes teda antud funktsiooni graafikuga. Selleks esitame antud funktsiooni $y=2x+4$ ja tema pöördfunktsiooni $y=\frac{1}{2}x-2$ graafikud ühes ja samas teljestikus (joon. 133). Tõmbame ka I ja III veerandi poolitaja, s. t. joonestame samas teljestikus veel funktsiooni $y=x$ graafiku. Näeme, et funktsiooni ja tema pöördfunktsiooni graafikud on sirge $y=x$ suhtes sümmeetrilised; tõepoolest, murdes joonise mööda sirget $y=x$ kokku, langevad funktsiooni ja tema pöördfunktsiooni graafikud ühte.



Joon. 133.

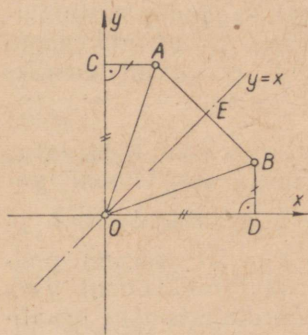
Võrdust $y=2x+4$ rahuldab arvupaar $(1; 6)$. Sama arvupaar rahuldab ka võrdust $x=\frac{1}{2}y-2$. Kui viimases võrduses vahetame tähised x ja y , s. t. esitame selle võrduse kujus $y=\frac{1}{2}x-2$, siis seda võrdust rahuldab arvupaar $(6; 1)$.

Rahuldagu võrdust $y=f(x)$ arvupaar $(a; b)$. Teisendame selle võrduse kujule $x=g(y)$ ja vahetame siis selles tähised x ja y . Saame võrduse $y=g(x)$, mida rahuldab arvupaar $(b; a)$.

Seega leidub igale punktile $(a; b)$ antud funktsiooni graafikul temale vastav punkt $(b; a)$ pöördfunktsiooni graafikul.

Tõestame nüüd, et

iga funktsiooni graafik ja tema pöördfunktsiooni graafik on sümmeetrilised sirge $y=x$ suhtes.



Joon. 134.

Olgu funktsiooni $y=f(x)$ graafikul mingi punkt $A(a; b)$, siis tema pöördfunktsiooni $y=g(x)$ graafikul on punkt $B(b; a)$.

Näitame, et punktid A ja B on sümmeetrilised sirge $y=x$ suhtes. Selleks peab $AE=EB$ ja $AB \perp OE$ (joon. 134). Mõlemad tingimused järelduvad kolmnurkade AOE ja BOE võrdsusest. Nende kolmnurkade võrdsus järeldeb aga kolmnurkade ACO ja BDO võrdsusest. Seega kulgeb tõestus järgmiselt.

Vaatleme kolmnurki ACO ja BDO . Need on täisnurksed kolmnurgad vastavalt võrdsete kaatetitega: $AC=BD=a$

ja $OC=OD=b$. Seega

$$\triangle ACO = \triangle BDO.$$

Edasi vaatleme kolmnurki AOE ja BOE . Nendel on ühine külg OE ning küljed AO ja BO on võrdsed (kui võrdsete täisnurksete kolmnurkade ACO ja BDO hüpotenuusid); edasi

$$\angle EOA = \angle EOB,$$

sest lahutades võrdsetest nurkadest

$$\angle COE = \angle DOE$$

võrdsed nurgad

$$\angle COA = \angle BOD,$$

saame võrdsed nurgad

$$\angle EOA = \angle EOB.$$

Seega tunnuse knk järgi

$$\triangle AOE = \triangle BOE.$$

Siit järeldub kohe, et $AE = EB$ ja $\angle AEO = \angle BEO$. Et need võrdsed nurgad kokku moodustavad sirgnurga, siis on nad mõlemad täisnurgad. Seega $AB \perp OE$ ning järelikult punktid A ja B on tõesti sümmeetrilised sirge OE suhtes.

§ 38. RUUTFUNKTSIOONI PÖÖRDFUNKTSIOON.

Vaatleme ruutfunktsiooni tema kõige lihtsamal kujul $y = x^2$. Kui siit avaldada x , saame kaks võrdust

$$x = \sqrt{y} \text{ ja } x = -\sqrt{y};$$

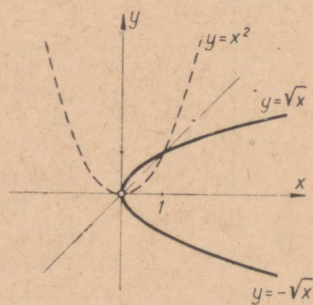
vahetades neis tähised, saame võrdsed kujul

$$y = \sqrt{x} \text{ ja } y = -\sqrt{x},$$

millest kumbki osutub ruutfunktsiooni pöördfunktsiooniks.

Antud ruutfunktsiooni graafikuks on teatavasti parabool, mille haripunkt on koordinaatide alguspunktis ning mille sümmeetriateljeks on y -telg (joon. 135). Peegeldades seda graafikut sirge $y = x$ suhtes, saame parabooli, mille sümmeetriateljeks on x -telg.

Selle parabooli ülemine osa on graafikuks funktsioonile $y = \sqrt{x}$ ja alumine osa on graafikuks funktsioonile $y = -\sqrt{x}$.



Joon. 135.

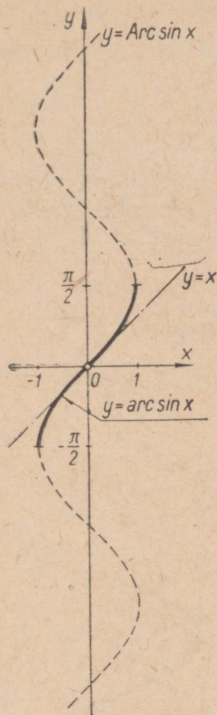
Ülesanne.

210. Uuri funktsiooni $y = -\sqrt{x}$.

§ 39. TRIGONOMEETRILISTE FUNKTSIOONIDE PÖÖRDFUNKTSIOONID.

a). Siinusfunktsiooni pöördfunktsioon (ehk arkussiinusfunktsioon).

Nurga leidmisel $\sin \alpha$ antud väärtuse järgi tutvusime ka arkussiinuse mõistega: kui $\sin \alpha = m$, siis väikseima absoluutväärtusega nurka α , mis seda võrdust rahuldab, tähistasime sümboliga $\arcsin m$.



Joon. 136.

Matemaatikas on kasutusel veel sümbol $\text{Arcsin } m$, mis erineb eelmisest oma suure algustähe poolest ja millega tähistatakse kõigi nende nurkade hulka, mis antud võrdust $\sin \alpha = m$ rahuldab.

Olgu nüüd antud funktsioon $y = \sin x$. Kui vaatleme siin suurust x otsitavana, siis sellel võrrandil on lõpmata palju lahendeid, mille koguhulga võime üles kirjutada sümboliga $\text{Arcsin } y$.

Seega

$$x = \text{Arcsin } y.$$

Vahetades tähised, saame siinusfunktsiooni pöördfunktsioonina funktsiooni

$$y = \text{Arcsin } x.$$

Joonestame selle funktsiooni graafiku sümmeetrilisena siinusfunktsiooni graafikuga sirge $y = x$ suhtes (joon. 136). Jooniselt näeme, et igale x väärtusele vahemikus $(-1; 1)$ vastab lõpmata palju funktsiooni väärtusi.

Kui ruutfunktsiooni pöördfunktsioon esitus kahe funktsioonina (§ 38), siis siinusfunktsiooni pöördfunktsioon esitub lõpmata paljude funktsioonidena. Et siinusfunktsiooni pöördfunktsioone on lõpmata palju, siis tähistatakse neid ühise sümboliga $\text{Arcsin } x$. Võtame neist ainult ühe lähemale vaatlusele. Selleks võetakse tavaliselt see funktsioon, mille graafik on joonisel 136 kujutatud pideva joonena. Tema tähistamiseks kasutatakse sümbolit,

$$y = \arcsin x.$$

b) Funktsiooni $y = \arcsin x$ uurimine.

- 1) Jooniselt 136 näeme, et funktsioonide $y = \text{Arcsin } x$ graafikud asuvad ribas -1 kuni 1 . Seega on ka $y = \arcsin x$ määratud, kui $-1 \leq x \leq 1$.
- 2) Et $\arcsin(-x) = -\arcsin x$, siis on ta paaritu funktsioon.
- 3) Sellel funktsioonil on miinimumpunktiks $(-1; -\frac{\pi}{2})$ ja maksimumpunktiks $(1; \frac{\pi}{2})$.
- 4) Funktsioon $y = \arcsin x$ on kasvav kogu ulatuses.
- 5) $\arcsin x = 0$, kui $x = 0$.
- 6) $\arcsin x > 0$, kui $0 < x \leq 1$;
 $\arcsin x < 0$, kui $-1 \leq x < 0$.

7) Et argumendi väärtused on piiratud -1 ja 1 -ga, siis pole mõtet uurida funktsiooni, kui $x \rightarrow \infty$ või $x \rightarrow -\infty$.
Joonesta vastav tabel ja esita uurimistulemused tabelis!

c) Koosinusfunktsiooni pöördfunktsioon (ehk arkuskoosinusfunktsioon).

Analoogiliselt arkussinusfunktsiooni tuletamisega võime koosinusfunktsioonist $y = \cos x$ lähtudes saada pöördfunktsioonina arkuskoosinusfunktsiooni

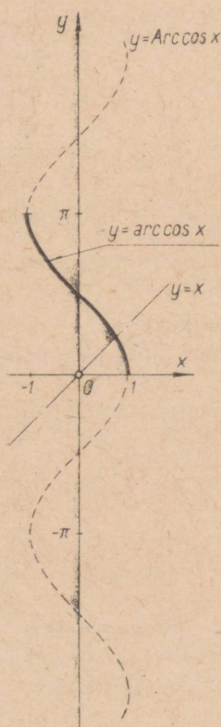
$$y = \operatorname{Arccos} x,$$

mille graafik (joon. 137) osutub koosinusfunktsiooni graafiku peegelduseks sirgest $y = x$. Sellest graafikust kasutatakse harilikult ainult seda osa, mis joonisel on esitatud pidevjoonega ja mis on funktsiooni

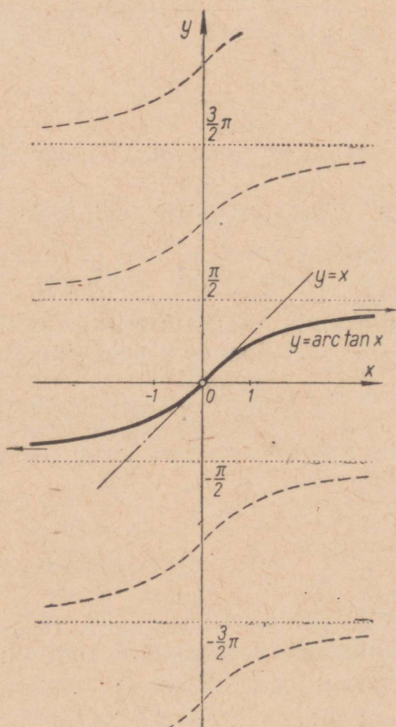
$$y = \arccos x$$

graafikuks.

Graafikule tuginedes uuri selle funktsiooni käitumist ja kannatulemused tabelisse!



Joon. 137.



Joon. 138.

c) Tangensfunktsiooni pöördfunktsioon (ehk arkustangensfunktsioon).

Eestpoolt tuttavate mõttekäikudega saame tangensfunktsioonist $y = \tan x$ lähtudes tuletada pöördfunktsioonina arkustangensfunktsiooni

$$y = \operatorname{Arctan} x,$$

mille graafik (joon. 138) on tangensfunktsiooni graafiku peegelduseks sirgest $y = x$. Vaatleme jällegi ainult graafiku seda osa, mis joonisel on esitatud pidevjoonega. See on funktsiooni

$$y = \arctan x$$

graafik.

Uuri seda funktsiooni ja esita tulemused tabelis!

Ülesandeid.

211. Leia järgmiste funktsioonide pöördfunktsioonid.

a) $y = \frac{3}{4}x - 5$

d) $y = 3x^2$

g) $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - 2$

b) $y = -\frac{2}{3}x + \frac{13}{5}$

e) $y = -4x^2 + 6$

h) $y = \frac{3-x}{4+x}$

c) $y = 35,2x + 17,6$

f) $y = 2x^2 - 3x$

i) $y = \frac{5}{x^2+1}$

212. Uuri järgmiste antud funktsioonide pöördfunktsioone.

a) $y = x^3$

b) $y = -2x^2$

c) $y = \sqrt[3]{x^2}$

Selleks: 1) joonesta antud funktsiooni graafik;

2) joonesta peegeldusteisenduse abil pöördfunktsiooni graafik;

3) uuri pöördfunktsiooni tema graafikule tuginedes.

IV. EKSPONENTFUNKTSIOON JA LOGARITMFUNKTSIOON.

§ 40. EKSPONENTFUNKTSIOONI MÕISTE.

Ülesanne. Paberipoognast valmistatakse väikesi kaardikesi. Selleks murtakse poogen pooleks, saadud pooled omakorda pooleks jne. Kokku poolitati 8 korda. Mitu kaardikest saadakse? Mitu kaardikest saadakse pärast x -kordset poolitamist?

1.	poolitamise tulemusena saadakse	2^1	kaarti;
2.	„ „ „ „	2^2	„
3.	„ „ „ „	2^3	„
...	...	...	...
8.	„ „ „ „	2^8	„
x .	„ „ „ „	2^x	„

Seega pärast 8-kordset poolitamist saadakse $2^8=256$ kaarti ja pärast x -kordset poolitamist 2^x kaarti.

Kui paberipoognaid on näiteks 5, siis saadakse pärast 8-kordset poolitamist $5 \cdot 2^8$ ja pärast x -kordset poolitamist $5 \cdot 2^x$ kaarti. Kui antud paberipoognaid on 10, saadakse kaarte vastavalt $10 \cdot 2^8$ ja $10 \cdot 2^x$.

Kui paberipoogen ja tema osad tükeldatakse iga kord kolmeks, siis pärast x -kordset kolmeks jaotamist saadakse 3^x kaarti. Kui tükeldusarv oleks 5, siis saadakse 5^x kaarti jne.

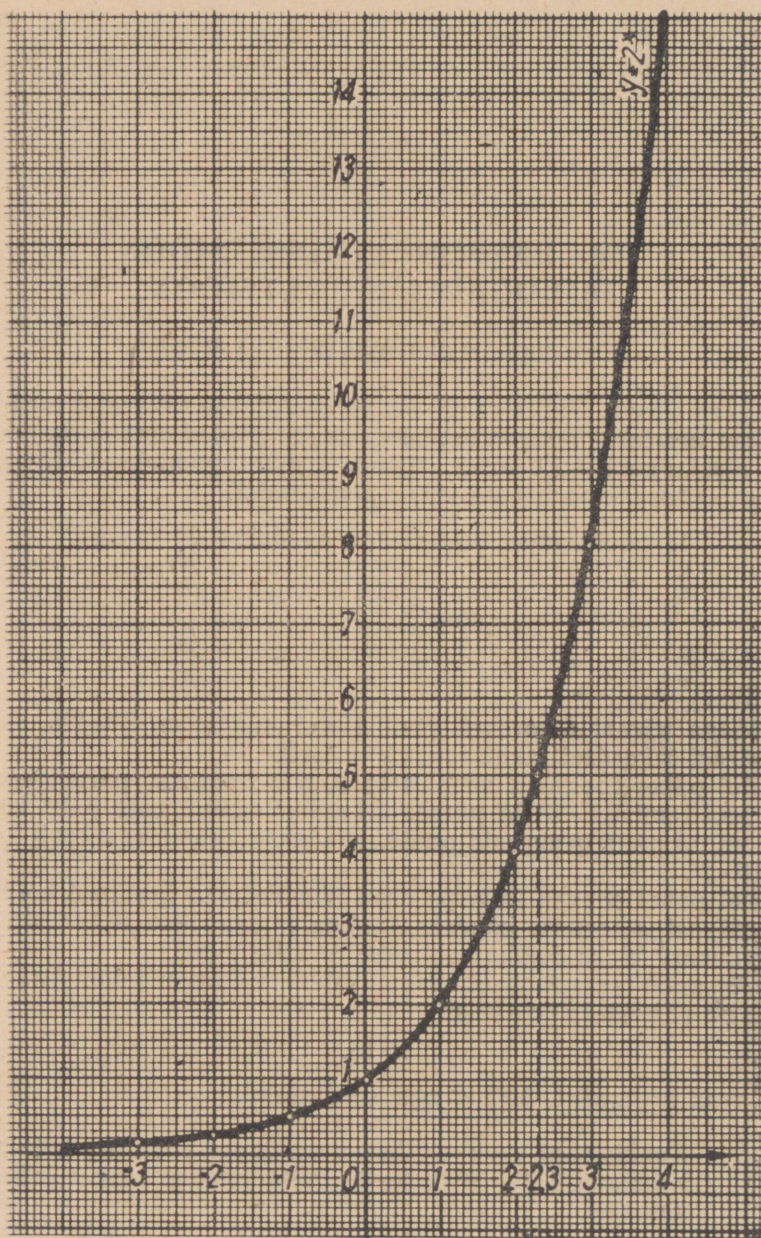
Ülesande lahendamisel saadud tulemused on erijuhud nn. eksponentfunktsioonist

$$k \cdot a^x,$$

kus x on argument, k ja a aga konstandid.

Funktsiooni $y=k \cdot a^x$, kus x on argument ning k ja a on konstandid ($a \neq 0$ ja $k \neq 0$), nimetatakse eksponentfunktsiooniks.

Konstandi a suhtes kehtestatakse sageli tingimused $a > 0$ ja $a \neq 1$.



Tingimuse $a > 0$ põhjustab asjaolu, et negatiivse a korral argumendi x teatud väärtuste puhul funktsioonil väärtus puudub; näiteks, kui $a = -4$ ja $x = \frac{1}{2}$, siis saame funktsiooni väärtuse arvutamisel avaldise

$$(-4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-4},$$

millel ei ole reaalist väärtust.

Juhul, kui $a = 1$, taandub eksponentfunktsioon lihtsalt konstandiks k , sest $1^x = 1$ iga x korral.

Eksponentfunktsiooni uurimisel piirdumegi funktsioonidega, kus nimetatud tingimused on täidetud.

§ 41. EKSPONENTFUNKTSIOONI UURIMINE.

Vaatleme eksponentfunktsiooni juhul, kui $k = 1$ ja $a = 2$. Vas-tava eksponentfunktsiooni $y = 2^x$ graafiku joonestamiseks (joon. 139) koostame tabeli:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
2^x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

Saadud graafikule tuginedes uurime funktsiooni $y = 2^x$ ja esi-tame tulemused tabelis.

	Funktsioonid	
	2^x	3^x
1. Määramispiirkond	$-\infty < x < \infty$	
2. Paaris- või paaritu funktsioon	ei kumbki	
3. a) Maksimumpunktid	} puuduvad	
b) Miinimumpunktid		
4. a) Kasvamispiirkond	$-\infty < x < \infty$	
b) Kahanemispiirkond	puudub	
5. Nullkohad	puuduvad	
6. a) Positiivsuspierikond	$-\infty < x < \infty$	
b) Negatiivsuspierikond	puudub	
7. Kui $x \rightarrow \infty$, siis	$2^x \rightarrow \infty$	
Kui $x \rightarrow -\infty$, siis	$2^x \rightarrow 0$	

Koostame nüüd funktsioonide $y = 3^x$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ja $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ väärtuste tabelid

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
3^x	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

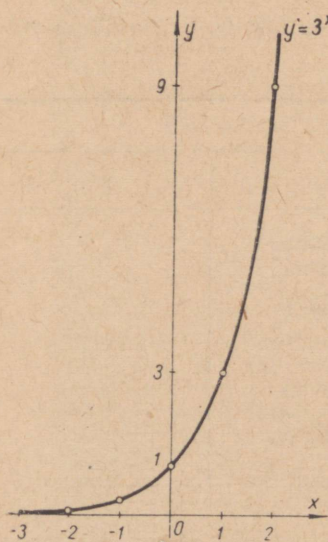
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\left(\frac{1}{3}\right)^x$	27	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$

ning esitame ka vastavad graafikud (joon. 140, 141, 142).

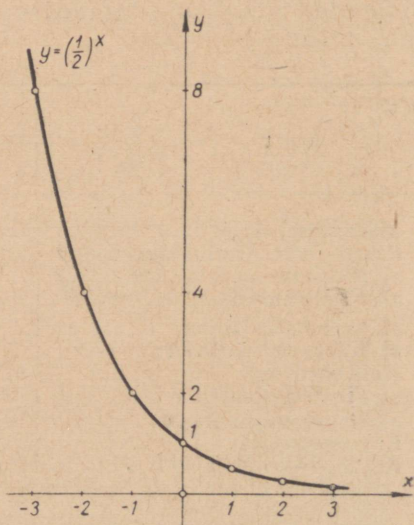
Nende funktsioonide uurimistulemused paiguta tabelisse!

Uurimistulemused lubavad teha mõningaid üldisi järeldusi eksponentfunktsiooni $y = a^x$ kohta.

1) Eksponentfunktsioon on määratud argumendi iga väärtuse korral.



Joon. 140.



Joon. 141.

- 2) Eksponentfunktsioon pole ei paaris- ega paaritu funktsioon.
 3) Eksponentfunktsioonil ei ole maksimum- ega miinimumpunkte.
 4) Eksponentfunktsioonil ei ole nullkohti.

5) Eksponentfunktsioon on positiivne.

6) Kui $x=0$, siis $a^x=1$.

7) Kui $a>1$, siis eksponentfunktsioon on kasvav.

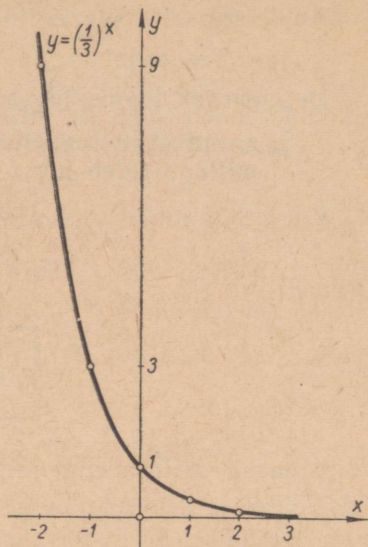
8) Kui $a>1$ ja $x \rightarrow -\infty$, siis eksponentfunktsiooni väärtused kahanevad tõkestamatult.

9) Kui $a>1$ ja $x \rightarrow +\infty$, siis eksponentfunktsiooni väärtused kasvavad tõkestamatult.

10) Kui $0<a<1$, siis eksponentfunktsioon on kahanev.

11) Kui $0<a<1$ ja $x \rightarrow -\infty$, siis eksponentfunktsiooni väärtused kasvavad tõkestamatult.

12) Kui $0<a<1$ ja $x \rightarrow +\infty$, siis eksponentfunktsiooni väärtused kahanevad tõkestamatult.



Joon. 142.

§ 42. LOGARITMFUNKTSIOON.

a) Logaritmi mõiste. Tunneme juba kümnendlogaritme järgmise definitsiooni alusel:

antud arvu kümnendlogaritmiks nimetatakse astendajat, millega arvu 10 astendades saame antud arvu.

Nii on

$$\log 100=2, \text{ sest } 10^2=100;$$

$$\log 0,0001=-4, \text{ sest } 10^{-4}=0,0001 \text{ jne.}$$

Analoogiliselt defineeritakse logaritme ka arvust 10 erineval alusel. Näiteks defineerime logaritme alusel 2 või nn. kahendlogaritme järgmiselt:

antud arvu kahendlogaritmiks nimetatakse astendajat, millega arvu 2 astendades saame antud arvu.

Et eristada erineva alusega logaritme, selleks märgitakse alus logaritmisümboli juurde indeksina. Nii näiteks

$$\log_2 8=3, \text{ sest } 2^3=8;$$

$$\log_2 \frac{1}{16}=-4, \text{ sest } 2^{-4}=\frac{1}{16}.$$

Analoogiliselt võib defineerida logaritme näiteks alusel 3, 5, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ jne. Tee seda!

Defineerime lõpuks logaritmid alusel a :

antud arvu logaritmi alusel a nimetatakse astendajat, millega tuleb alust a astendada, et saada antud arvu.

Kui b on antud arv ja a logaritmi alus, siis

$$\log_a b = c, \text{ kui } a^c = b,$$

millest

$$\boxed{a^{\log_a b} = b}$$

Viimast definitsiooni nimetatakse logaritmi üldiseks definitsiooniks.

Ülesandeid.

213. Leia:

- a) $\log_7 49$; b) $\log_2 \frac{1}{32}$; c) $\log_6 216$; d) $\log_3 81$;
e) $\log_5 625$; f) $\log_{25} 625$; g) $\log_9 729$; h) $\log_4 64$.

214. Leia x , kui

- a) $\log_2 x = 5$; b) $\log_{\frac{1}{2}} 4 = x$; c) $\log_x 2 = 2$;
d) $\log_{\frac{1}{3}} x = -3$; e) $\log_2 \frac{1}{8} = x$; f) $\log_x 0,125 = -2$;
g) $\log_2 x = 4$; h) $\log_{0,1} 10 = x$; i) $\log_x 8 = \frac{3}{4}$.

215. Leia:

- a) $2^{\log_2 8}$; b) $3^{\log_3 9}$; c) $36^{\log_6 2}$; d) $25^{\log_5 3}$;
e) $81^{\log_9 7}$.

*

b) Logaritmifunktsiooni mõiste. Leiame eksponentfunktsiooni $y = 10^x$ pöördfunktsiooni. Selleks vaatleme antud võrdust võrrandina, milles tundmatuks on x ; tundmatu x avaldamisel saame:

$$x = \log y.$$

Kui lugeda siin x funktsiooniks ja y argumendiks, siis esitab see võrdus antud eksponentfunktsiooni pöördfunktsiooni. Vahetades

tähised, saame sellest logaritmfunksiooni (alusel 10, mis jäetakse märkimata):

$$y = \log x.$$

Analoogiliselt võime tuletada teiste eksponentfunksioonide pöördfunksioonid. Olgu antud näiteks eksponentfunksioonid

$$2^x, 3^x, \left(\frac{1}{2}\right)^x \text{ ja } \left(\frac{1}{3}\right)^x.$$

Vastavad pöördfunksioonid on

$$y = \log_2 x, \quad y = \log_3 x, \quad y = \log_{\frac{1}{2}} x \quad \text{ja} \quad y = \log_{\frac{1}{3}} x.$$

Olgu nüüd antud eksponentfunksioon kujus $y = a^x$. Tema pöördfunksiooniks on siis

$$y = \log_a x.$$

Funktsiooni $y = \log_a x$, kus $a \neq 0$ nimetatakse logaritmfunksiooniks.

Et uurisime ainult neid eksponentfunksioone, kus $a > 0$ ja $a \neq 1$, siis piirdume ka logaritmfunksioonide uurimisel nendega, kus samad tingimused on täidetud.

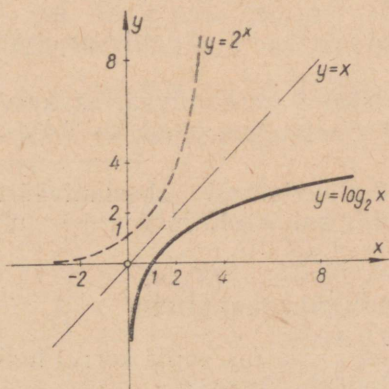
c) Logaritmfunksiooni graafik. Lähtudes eksponentfunksioonide

$$2^x, 3^x, \left(\frac{1}{2}\right)^x \text{ ja } \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

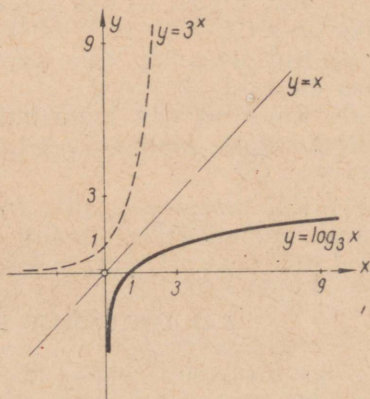
graafikuist (joon. 139—142), on hõlbus saada nende pöördfunktsioonide ehk vastavate logaritmfunksioonide

$$y = \log_2 x, \quad y = \log_3 x, \quad y = \log_{\frac{1}{2}} x \quad \text{ja} \quad y = \log_{\frac{1}{3}} x$$

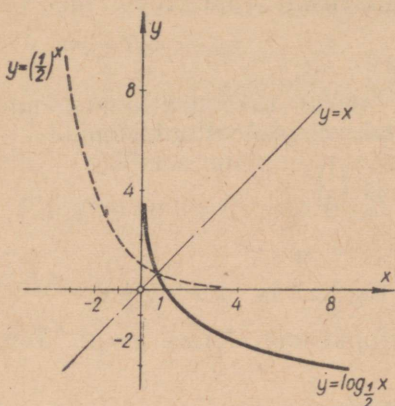
graafikud (joon. 143—146), kasutades peegeldamist sirgest $y = x$. Uuri neid funktsioone ja esita tulemused tabelis!



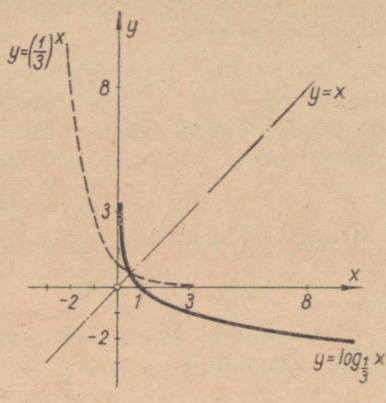
Joon. 143.



Joon. 144.



Joon. 145.



Joon. 146.

Logaritmfunksiooni omadused võtame lõpuks kokku järgmiselt.

1) Logaritmfunksioon on määratud argumendi kõigi positiivsete väärtuste korral.

2) Logaritmfunksioonil ei ole maksimum- ega miinimum-punkte.

3) $\log_a x = 0$, kui $x = 1$.

4) Kui $a > 1$, siis logaritmfunksioon on kasvav.

5) Kui $a > 1$, siis logaritmfunksiooni positiivsuspiirkonnaks on $x > 1$.

6) Kui $a > 1$, siis logaritmfunksiooni negatiivsuspiirkonnaks on $x < 1$.

7) Kui $0 < a < 1$, siis logaritmfunksioon on kahanev.

8) Kui $0 < a < 1$, siis logaritmfunksiooni positiivsuspiirkonnaks on $x < 1$.

9) Kui $0 < a < 1$, siis logaritmfunksiooni negatiivsuspiirkonnaks on $x > 1$.

10) Kui $x \rightarrow 0$, siis logaritmfunksiooni absoluutväärtus kasvab tõkestamatult: juhul, kui $a > 1$, $f(x) \rightarrow -\infty$ ning juhul, kui $0 < a < 1$, $f(x) \rightarrow +\infty$.

11) Kui $x \rightarrow +\infty$, siis logaritmfunksiooni absoluutväärtus kasvab samuti tõkestamatult: juhul, kui $a > 1$, $f(x) \rightarrow +\infty$ ning juhul, kui $0 < a < 1$, $f(x) \rightarrow -\infty$.

§ 43. LIHTSAMAID EKSPONENTVÖRRANDEID.

Olgu ülesandeks leida argumendi x väärtus, mille korral funktsioon ka^x on b , s. t. leida x , mis rahuldab võrrandit

$$ka^x = b.$$

Seda võrrandit nimetatakse **eksponentvõrrandiks**.

Kui vastava eksponentfunktsiooni graafik on olemas, siis saab antud ülesande vastuse leida selle graafiku abil. Joonisel 139 on esitatud funktsiooni $y=2^x$ graafik. Sealt leiame näiteks, et võrrandi

$$2^x=5$$

lahendiks on $x=2,3$.

Kui funktsiooni graafik puudub, siis kasutame selle võrrandi lahendamiseks nn. logaritmimise võtet.

Selleks logaritmime antud võrrandi mõlemad pooli, saame

$$x \log 2 = \log 5$$

ja siit

$$x = \frac{\log 5}{\log 2} = 2,32.$$

Mõnikord on taoliste ülesannete puhul võimalik kasutada logaritmimise võtte asemel nn. aluste võrdsustamise võtet.

Näiteks olgu lahendada võrrand

$$2^x=8.$$

Et $8=2^3$, siis

$$2^x=2^3.$$

Kui astmed on võrdsed ja astme alused on võrdsed, siis peavad ka astendajad olema võrdsed.

Järelikult

$$x=3.$$

Ülesandeid.

216. Kasutades joonisel 139 esitatud graafikut leia lahend võrranditele:

$$a) 2^x=3, \quad b) 2^x=1,5, \quad c) 2^x=6.$$

217. Lahenda järgmised võrrandid, kasutades aluste võrdsustamise võtet:

$$\begin{array}{lll} a) 2^x=64 & d) 2^x=\frac{1}{4} & g) 2^{2x}=128 \\ b) 3^x=81 & e) 3^x=\frac{1}{27} & h) 3^{3x}=243 \\ c) 5^x=625 & f) 5^x=\frac{1}{125} & i) 5^{5x}=3125 \end{array}$$

218. Lahenda järgmised võrrandid, kasutades logaritmimise võtet:

- a) $2^x=7$ d) $\left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{6}{7}$ g) $13,4^x=219$
 b) $7^x=2$ e) $\left(\frac{12}{13}\right)^x=5$ h) $3,62^x=42,7$
 c) $3^x=5$ f) $2,4^x=6,7$ i) $0,872^x=0,761$

219. Lahenda järgmised võrrandid.

- a) $3^x=9$ d) $\left(\frac{1}{4}\right)^x=16$
 b) $2^x=16$ e) $3,42^x=1,38$
 c) $4^x=64$ f) $67^x=22$

*

Üldiselt,

eksponentvõrrandiks nimetatakse **niisugust võrrandit,**
kus tundmatu esineb astendajas.

Seega on eksponentvõrrandiks näiteks ka

$$3^{2x}-3^x=702.$$

Sellise võrrandi lahendamiseks kasutatakse **a s e n d u s v ö t e t**.
 Asendame $3^x=z$, siis $3^{2x}=z^2$ ja lahendame võrrandi

$$z^2-z=702.$$

Selle ruutvõrrandi lahendeiks on $z_1=-26$ ja $z_2=27$. Tundmatu x leidmiseks tuleb lahendada võrrandid:

$$3^x=-26, 3^x=27.$$

Et $3^x>0$ x iga väärtuse korral, siis esimesel võrrandil puudub lahend. Teisest võrrandist saame, et

$$x=3,$$

mis rahuldab ka antud võrrandit.

Ülesandeid.

220. Lahenda võrrandid:

- a) $7^{2x}-6 \cdot 7^x+5=0$ c) $2^{2x+1}+2^{x+2}=16$
 b) $3^{2x}-5 \cdot 3^x+6=0$ d) $3^{2x+5}-3^{x+2}=2$

§ 44. LIHTSAMAID LOGARITMVÕRRANDEID.

Logaritmvõrrandiks nimetatakse **niisugust võrrandit,**
kus tundmatu esineb logaritmitavas.

Nii on näiteks logaritmivõrrandid:

$$\log x = 2;$$

$$\log(x+6) - \frac{1}{2} \log(2x-3) = 2 - \log 25.$$

Võrrandit $\log x = a$ saame lahendada, kui kasutame logaritm-funktsiooni graafikut või antilogaritmide tabelit.

Analüütilisel lahendamisel kasutatakse sama alustega logaritmide võrdsustamise võtet ja asendusvõtet.

Näide 1. Lahendada võrrand

$$\log(x+6) - \frac{1}{2} \log(2x-3) = 2 - \log 25.$$

Teades, et logaritmide vahe on jagatise logaritm ja et $2 = \log 100$, võime antud võrrandi esitada kujus

$$\log \frac{x+6}{\sqrt{2x-3}} = \log \frac{100}{25}.$$

Kui sama alusega logaritmid on võrdsed, siis on ka logaritmitavad võrdsed. Järelikult

$$\frac{x+6}{\sqrt{2x-3}} = 4.$$

Selle juurvõrrandi lahendeiks on $x_1 = 6$ ja $x_2 = 14$, mis mõlemad rahuldavad antud võrrandit.

Näide 2. Lahendada võrrand

$$\frac{1}{12} \log^2 x = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \log x.$$

Asendame $\log x = z$, saame võrrandi

$$\frac{1}{12} z^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} z.$$

See võrrand on teisendatav kujule

$$z^2 + 3z - 4 = 0,$$

mille lahendeiks on $z_1 = -4$ ja $z_2 = 1$.

Seega

$$\begin{aligned} \log x_1 &= -4, \\ x_1 &= 10^{-4} \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} \log x_2 &= 1, \\ x_2 &= 10. \end{aligned}$$

Mõlemad lahendid rahuldavad antud võrrandit.

Ülesandeid.

221. Lahenda võrrandid:

a) $\log x = 2 - \log 5$

c) $\log\left(\frac{1}{2} + x\right) = \log \frac{1}{2} - \log x$

b) $\frac{\log x}{1 - \log 2} = 2$

d) $\frac{1}{5 - \log x} + \frac{2}{1 + \log x} = 1$

222. Lahenda võrrandid:

a) $x^{\log x + 2} = 1000$

c) $100^{\log(x+2)} = 10\,000$

b) $x^{2 - \frac{\log x}{2}} = 100$

d) $(0,1) - (x^2 - 5x + 8) = 100$

GEOMEETRILINE PROGRESSIOON.

§ 45. GEOMEETRILISE PROGRESSIOONI MÕISTE.

Eksponentfunktsiooni $y = ka^x$ väärtuste jada, mis on saadud argumendi väärtustel 1, 2, 3, 4, ..., nimetatakse geomeetriliseks progressiooniks.

Näiteks saame eksponentfunktsioonist 5^x geomeetrilise progressiooni:

$$5, 25, 125, 625, \dots$$

Analoogiliselt saame funktsioonidest $\left(\frac{1}{4}\right)^x$ ja $0,3 \cdot 2^x$ progressioonid:

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \frac{1}{256}, \dots$$

$$0,6; 1,2; 2,4; 4,8; \dots$$

Geomeetrilise progressiooni arve nimetatakse vastavalt tema esimeseks, teiseks, kolmandaks jne. **liikmeks**.

Toodud näidete juures võime tähele panna, et igas geomeetrilises progressioonis saadakse järgnev liige eelmisest tema korrutamisel ühe ja sama konstandiga.

Nii on esimeses näites

$$5 \cdot 5 = 25, 5 \cdot 25 = 125, 5 \cdot 125 = 625,$$

teises näites

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}, \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{64}, \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{64} = \frac{1}{256},$$

ja kolmandas näites

$$2 \cdot 0,6 = 1,2, 2 \cdot 1,2 = 2,4, 2 \cdot 2,4 = 4,8.$$

Seda igale geomeetrilisele progressioonile omast konstanti nimetatakse vastava progressiooni **teguriks**. Nii on esimeses näites teguriks 5, teises $\frac{1}{4}$ ja kolmandas 2.

Paneme tähele, et tegur on võrdne vastavas eksponentfunktsiooni avaldises oleva astme alusega.

See omadus on üldine kõigile geomeetrilistele progressioonidele.

Olgu eksponentfunktsioon antud üldises kujus

$$ka^x,$$

siis saadakse sellest geomeetriline progressioon

$$ka, ka^2, ka^3, \dots, ka^n, ka^{n+1}, \dots,$$

kus teguriks on a .

Et geomeetrilise progressiooni tegurit tähistatakse sageli tähega q , siis

$$q=a.$$

Edaspidi kirjutamegi eksponentfunktsiooni sageli kohe kujus kq^x .

§ 46. GEOMEETRILISE PROGRESSIOONI ÜLDLIKME VALEM.

Olgu antud geomeetriline progressioon

$$-1, 2, -4, 8, -16, \dots$$

Leiame eksponentfunktsiooni, mille väärtuste jadaks see geomeetriline progressioon osutub.

Eksponentfunktsiooni üldine kuju on kq^x . Seega tuleb määrata konstandid k ja q . Progressiooni tegur $q=-2$. Kordaja k määramiseks esitame otsitava eksponentfunktsiooni tabeli kujul:

x	1	2	3	4	5	...
kq^x	-1	2	-4	8	-16	...

Selle tabeli mistahes veeruga määratud arvupaar peab rahuldama võrdust

$$y=k(-2)^x.$$

Kasutades näiteks esimese veeruga määratud arvupaari, saame võrrandi

$$-1=k(-2)^1,$$

millest

$$k=\frac{1}{2}.$$

Seega on otsitavaks eksponentfunktsiooniks

$$y = \frac{1}{2} \cdot (-2)^x.$$

Kontrolli, kas tabeli muud väärtuspaarid rahuldavad seda võrdust!

Lahendame oma ülesande ka üldkujul.

Olgu antud geomeetriline progressioon

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n.$$

Otsitava eksponentfunktsiooni tabelikujuline esitus on järgmine:

x	1	2	3	...	n
kq^x	a_1	a_2	a_3	...	a_n

Kordaja k määramiseks rakendame endisel viisil võrdust

$$y = kq^x,$$

mida peab rahuldama tabeli mistahes veerus leiduv väärtuspaar. Näiteks esimest väärtuspaari $(1; a_1)$ kasutades saame võrrandi

$$a_1 = kq,$$

millest

$$k = \frac{a_1}{q},$$

s. t. et k leidmiseks tuleb progressiooni 1. liige jagada teguriga.

Seega otsitav eksponentfunktsioon on

$$y = \frac{a_1}{q} \cdot q^x$$

ehk

$$y = a_1 q^{x-1}.$$

Et kõik tabelis antud väärtuspaarid rahuldavad seda võrdust, siis rahuldab seda ka paar $(n; a_n)$, s. t. kehtib seos

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

Seda võrdust nimetatakse geomeetrilise progressiooni **üldliikme valemiks**. Andes siin n -ile mingi naturaalarvulise väärtuse, võime leida progressiooni selle liikme, mille järjekorranumbriks on antud naturaalarv.

Nii on geomeetrilise progressiooni

$$2, 6, 18, 54, \dots$$

üldliikme valemiks

$$a_n = 2 \cdot 3^{n-1}.$$

Kui tahame leida selle progressiooni kümnendat liiget, siis võtame viimases valemis $n=10$ ja saame

$$a_{10} = 2 \cdot 3^9 = 2 \cdot 19\,683 = 39\,366.$$

Ülesandeid.

223. Leia eksponentfunktsioonidele

$$3^x; \left(\frac{2}{3}\right)^x; \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x; 2,3 \cdot (1,2)^x$$

vastavate geomeetriliste progressioonide neli esimest liiget.

224. Leia alljärgnevale progressioonidele vastavad eksponentfunktsioonid.

- | | |
|--|---|
| a) 1, 3, 9, 27, ... | d) $\frac{5}{6}, 1\frac{2}{3}, 3\frac{1}{3}, 6\frac{2}{3}, \dots$ |
| b) 64, 32, 16, 8, ... | e) -1, 2, -4, 8, ... |
| c) 10, 2, $\frac{2}{5}, \frac{2}{25}, \dots$ | f) 0,7; 0,07; 0,007; 0,0007; ... |

225. Leia eelmises ülesandes toodud progressioonide üldliikme valemid.

226. Tee kindlaks, missugused järgmistest arvude jadadest on aritmeetilised ja missugused geomeetrilised progressioonid.

- | | |
|---|---------------------------------------|
| a) 1, 2, 3, 4, 5, ... | e) 6; 0; -6, -12, ... |
| b) 2, 4, 8, 16, ... | f) -32, -16, 16, 32, ... |
| c) -5, -1, 3, 7, ... | g) 14, -7, 3,5, $-\frac{7}{4}, \dots$ |
| d) $\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{12}, \dots$ | h) 456, 233, 10, -213, ... |

227. Leia geomeetrilise progressiooni nõutud elemendid.

- a) 5. liige, kui $a_1=3$ ja $q=2$;
- b) 4. liige, kui $a_3=35$ ja $q=5$;
- c) 6. liige, kui $a_9=\frac{2}{3}$ ja $q=\frac{1}{2}$;
- d) 1. liige, kui $a_8=256$ ja $q=4$;
- e) 13. liige, kui $a_7=0,2187$ ja $q=1\frac{2}{3}$;
- f) 6. liige ja tegur, kui $a_5=4$ ja $a_4=169$;
- g) 9. liige ja tegur, kui $a_8=64$ ja $a_{10}=9$.

228. Leia geomeetrilise progressiooni esimene liige a_1 , kui

- a) $a_8=640$ ja $q=2$;
- b) $a_6=500$ ja $q=1,2$;
- c) $a_6=3125$ ja $q=2,5$.

229. Leia geomeetrilise progressiooni tegur q , kui
- $a_1 = \frac{1}{9}$ ja $a_{10} = 2187$;
 - $a_1 = 6,25$ ja $a_7 = 0,0256$;
 - $a_1 = \frac{1}{64}$ ja $a_{13} = 64$.
230. Leia geomeetrilise progressiooni liikmete arv n , kui
- $a_1 = 6$, $a_n = 96$ ja $q = 4$;
 - $a_1 = 0,3$, $a_n = 0,108$ ja $q = 0,6$;
 - $a_1 = 74,67$, $a_n = 2,333$ ja $q = 0,5$.
231. Arvuta logaritmid abil
- a_1 , kui $q = 0,75$ ja $a_5 = 1,9$;
 - a_1 , kui $q = 1,083$ ja $a_{41} = 239,6$;
 - a_{20} , kui $a_1 = 2$ ja $q = 1,229$;
 - a_{25} , kui $a_1 = 1$ ja $q = 1,334$.

§ 47. GEOMEETRILISE PROGRESSIOONI SUMMA VALEM.

Olgu antud geomeetriline progressioon

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n;$$

nõutakse leida summat

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n.$$

Kui liikmeid on vähe, siis on seda summat lihtne leida otsese liitmise teel. Näiteks

$$5 + 25 + 125 + 625 = 780.$$

Kui liikmeid on palju, siis otsene liitmine oleks tülikas ja aeganõudev. Seepärast on otstarbekohane siin samuti nagu aritmeetilise progressiooni puhulgi tuletada valem, mis hõlbustab otsitava summa arvutamist.

Kasutades üldliikme valemit, esitame summa S_n kõik liidetavad progressiooni esimese liikme ja teguri kaudu:

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1}.$$

Korrutades selle võrduse mõlemad pooled q -ga, saame võrduse

$$S_nq = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \dots + a_1q^n.$$

Lahutades teise võrduse pooltest esimese võrduse vastavad pooled, saame

$$\begin{aligned} S_nq - S_n &= (a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \dots + a_1q^n) - \\ &\quad - (a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1}). \end{aligned}$$

Avades sulud, saame pärast koondamist

$$S_nq - S_n = a_1q^n - a_1$$

ehk

millest

$$S_n(q-1) = a_1(q^n - 1),$$

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

Saadud valem ongi geomeetrilise progressiooni **summa valem**.
Leiame selle abil näiteks progressiooni

$$2, 6, 18, 54, \dots$$

ühiksa esimese liikme summa.

Siin on $a_1=2$, $q=3$ ja $n=9$. Seega

$$S_9 = \frac{(3^9 - 1) \cdot 2}{3 - 1} = 3^9 - 1 = 19\,683 - 1 = 19\,682.$$

Missuguses kujus on otstarbekohane esitada geomeetrilise progressiooni summa valemit juhul, kui $0 < q < 1$? Miks?

Geomeetrilise progressiooni summa valemile võib anda ka teistsuguse kuju. Selleks avame kõigepealt lugejas sulud:

$$S_n = \frac{a_1 q^n - a_1}{q - 1};$$

rakendades saadud murru lugeja esimeses liikmes progressiooni üldliikme valemit $a_n = a_1 q^{n-1}$, saame selle liikme kirjutada kujul $a_n q$ ning summa valemi kujul:

$$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q - 1}$$

Viimast summa valemi kuju kasutame juhul, kui on teada progressiooni viimane liige a_n .

Ülesandeid.

232. Leia geomeetrilise progressiooni summa valemi abil järgmised summad.

a) $34 + 68 + 136 + 272 + 544 + 1088$

b) $7 + 3\frac{1}{2} + 1\frac{3}{4} + \frac{7}{8} + \frac{7}{16} + \frac{7}{32}$

c) $2 - 10 + 50 - 250 + 1250 - 6250$

d) $15 - 12 + 9,6 - 7,68 + 6,144$

233. Joonesta alljärgnev geomeetrilise progressiooni elementide tabel vihikusse ning täida lüngad.

a_1	q	n	a_n	S_n
2	3	15		
4	5		1 562 500	
1		9		6 725 601
	6	11	241 864 704	
	-2		262 144	174 763
1		20	-524 288	
32	$\frac{1}{2}$			5 187
	$2\frac{1}{2}$			$3\,280\frac{4}{9}$
	3	10		
	2	13	64	
2 187	$\frac{2}{3}$	12		
	$\frac{1}{2}$	13	$132\,860\frac{1}{4}$	
-0,0256	-2,5			-11,1534
6,25		7	0,0256	
	0,5		6,25	51 193,75

234. Alljärgnevate summade liidetavad moodustavad geomeetrilise progressiooni. Leia igal antud juhul: 1) progressiooni tegur, 2) puuduvad liidetavad, 3) liidetavate arv ja 4) summa.

a) $a^{10} + a^9b + a^8b^2 + \dots + b^{10}$

b) $a^7 - a^6b + a^5b^2 - a^4b^3 + \dots - b^7$

c) $a + \sqrt[5]{a^4b} + \sqrt[5]{a^3b^2} + \dots + b$

d) $a + \sqrt[7]{a^6b} + \sqrt[7]{a^5b^2} + \dots + b$

e) $\sqrt[8]{a^7} + \sqrt[8]{a^6b} + \sqrt[8]{a^5b^2} + \dots + \sqrt[8]{b^7}$

235. Aednik tellis endale haruldase taime 20 seemet. Ta külvas esimesel ja igal järgmisel kevadel kõik seemned ja sai igal sügisel igalt taimelt 7 seemet. Oletades, et ükski seeme ei lähe kaduma, leia, mitmendal aastal saab aednik 5 kg seemneid, kui 40 seemet kaalub 1 g.

236. Päevalill annab aastas keskmiselt 2 000 seemet. Oletame, et kasvutingimused on päevalillele ühesugused üle kogu maa-
kera, et iga taim vajab jõudsaks arenemiseks 1 m² pinda, et ükski seeme ei lähe kaduma, vaid idaneb ja annab uue taime, ning et taim annab aastas ühe lõikuse. Mitu aastat kuluks, et ühest päeva-

lille-seemnest arenenud taimed kataksid planeet Maa kogu maismaa osa? Maakera raadius on 6 400 km ja mered moodustavad 72% maakera pinnast.

237. Geomeetrilises progressioonis on 20 liiget. Paarisarvulise indeksiga kohtadel olevate liikmete summa on a ja paaritu arvulise indeksiga kohtadel olevate liikmete summa on b . Leia esimene liige ja progressiooni tegur.

238. Geomeetrilises progressioonis on 40 liiget. Esimese kahekümne liikme summa on a ja viimase kahekümne liikme summa on b . Leia esimene liige ja progressiooni tegur.

239. Keegi räägib uudise kahele tuttavale. Need räägivad selle edasi kumbki omakorda kahele tuttavale jne. Oletame, et edasirääkimine toimub veerand tunni jooksul ja ainult neile, kes seda uudist veel ei tea. Mis kella ajaks on see uudis 7-miljonilise elanikkonnaga linnas kõigile teada, kui esimene rääkimine toimub kell 7 hommikul?

240. Kolhoos suurendab igal aastal oma põllupinda $\frac{1}{15}$ osa võrra eelmise aasta pinnast. Mitmendal aastal ületab põllupinna kogukasv 50% lähtepinnast?

241. Positiivsete liikmetega geomeetrilise progressiooni kolme esimese liikme summa on 221. Selle progressiooni kolmanda ja esimese liikme vahe on 136. Leia selle progressiooni kuue esimese liikme summa.

242. Tõesta, et geomeetrilises progressioonis on iga liige (välja arvatud esimene) temale eelneva ja järgneva liikme geomeetriline keskmine.

243. Tõesta, et kui kolm arvu x , y ja z moodustavad geomeetrilise progressiooni, siis

$$(x+y+z)(x-y+z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

244. Tõesta, et iga geomeetrilise progressiooni algusest ja lõpust võrdsetel kaugustel seisvate liikmete korrutis on jääv ning võrdub äärmiste liikmete korrutisega.

245. Kasutades eelmises ülesandes leitud omadust, tuleta geomeetrilise progressiooni n liikme korrutise valem.

246. Leia progressiooni 1, 4, 16, ... kuue esimese liikme korrutis.

247. India prints Schiram oli malemängust nii vaimustatud, et lubas mängu leiutajale Sissa Ibn Dahirile autasuna iga summa, mille see peaks küsima. Mängu leiutaja palus endale autasu nisuterades ja nimelt: 1 tera malelaua esimesele ruudule, 2 tera teisesele, 4 tera kolmandale, 8 tera neljandale jne. Mitu tera palus endale Sissa Ibn Dahir?

Terade hulgast kujutluse saamiseks olgu antud järgmised andmed: 1 kott (70 kg) sisaldab ligikaudu $1,6 \cdot 10^6$ tera; ühe kaubavaguni kandejõud on 16 tonni.

§ 48. TÕKESTAMATULT KAHANEVA GEOMEETRILISE PROGRESSIONI MÕISTE.

Eksponentfunktsiooni a^x uurimiskäigust teame, et kui $0 < a < 1$, siis argumendi tõkestamatul kasvamisel eksponentfunktsioon osutub tõkestamatult kahanevaks suuruseks. Sellest järeldub, et kui geomeetrilise progressiooni tegur on lihtmurd, s. t. $|q| < 1$, siis liikmete arvu tõkestamatul kasvamisel geomeetrilise progressiooni liikmed kahanevad tõkestamatult. Näiteks progressiooni

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots$$

puhul tegur $q = \frac{1}{2}$ ning seetõttu, kui $n \rightarrow \infty$, siis $a_n \rightarrow 0$.

Sama võib öelda progressiooni

$$3; -1; \frac{1}{3}; -\frac{1}{9}; \frac{1}{27}; -\frac{1}{81}; \dots$$

kohta, milles tegur on negatiivne, kuid absoluutväärtuselt väiksem kui 1 (antud juhul $q = -\frac{1}{3}$).

Progressiooni nimetatakse lõp m a t u k s, kui tema liikmete arv n on tõkestamatult kasvav suurus, s. t. kui $n \rightarrow \infty$. Geomeetrilist progressiooni nimetatakse k a h a n e v a k s, kui tema teguri q absoluutväärtus $|q| < 1$.

Paragrahvi algul toodud arutluse põhjal võime nüüd öelda, et lõpmatu ja kahaneva geomeetrilise progressiooni üldliige on tõkestamatult kahanev suurus. Sümboleis:

$$\text{kui } n \rightarrow \infty \text{ ja } |q| < 1, \text{ siis } a_n \rightarrow 0.$$

Seepärast võib lõpmatut ja kahanevat geomeetrilist progressiooni nimetada ka tõkestamatult kahanevaks geomeetriliseks progressiooniks. Seega,

lõpmatu geomeetriline progressioon osutub tõkestamatult kahanevaks, kui teguri absoluutväärtus on väiksem kui 1.

§ 49. TÕKESTAMATULT KAHANEVA GEOMEETRILISE PROGRESSIONI SUMMA.

Olgu vaja leida lõpmatu geomeetrilise progressiooni

$$2; 1; 0,5; 0,25; 0,125; \dots$$

kõigi liikmete summa. Eespool tuletatud summa valemeid ei saa nüüd kasutada, sest need kõlbavad ainult siis, kui liikmete arv

n on lõplik. Seepärast võtamegi liikmete arvu esialgu lõpliku ning uurime summa muutumist liikmete arvu järsul suurenemisel. Näiteks kümne, saja ja tuhande esimese liikme summa arvutamisel saaksime valemi põhjal:

$$S_{10} = \frac{2(1-0,5^{10})}{1-0,5} = 4(1-0,5^{10});$$

$$S_{100} = 4(1-0,5^{100});$$

$$S_{1000} = 4(1-0,5^{1000}).$$

Märkame, et liikmete arvu kasvamisel antud progressiooni summa järjest vähem erineb väärtusest 4, sest kui $n \rightarrow \infty$, siis $0,5^n \rightarrow 0$. Nii jõuame otsusele, et antud lõpmatu progressiooni kõigi liikmete summa peaks olema nimelt 4.

Seetõttu on loomulik, et

tõkestamatult kahaneva geomeetrilise progressiooni summaks S loetakse selle progressiooni n esimese liikme summa S_n piirväärtust, kui n tõkestamatult kasvab, s. t.

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

Et

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, \text{ kus } |q| < 1,$$

siis

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1}{1-q}.$$

Põhjenda saadud tulemust!

Seega

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

mis ongi tõkestamatult kahaneva geomeetrilise progressiooni summa valemiks. Valemi rakendamise näitena arvutame järgmise lõpmatu progressiooni summa:

$$3 - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + \dots$$

Siin $a_1 = 3$ ja $q = -\frac{1}{3}$, seega

$$S = \frac{3}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}.$$

Ülesandeid.

248. Leia iga järgmise lõpmatult kahaneva geomeetrilise progressiooni summa.

$$a) 1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots \quad c) \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{9}{32} + \dots$$

$$b) 16 + 4 + 1 + \frac{1}{4} + \dots \quad d) 3 \cdot 2 + 2 + \frac{2}{3} + \dots$$

249. Joonesta tabelid vihikusse ja täida tühjad kohad, kui a_1 on tõkestamatult kahaneva geomeetrilise progressiooni esimene liige, q — tegur ja S — summa.

a_1	q	S
7	$\frac{1}{2}$	
	$-\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$
5		$7\frac{1}{2}$
14	$-\frac{2}{5}$	
	0,2	15

a_1	q	S
117		90
	0,96	250
0,88		0,5
0,94	0,53	
	-0,1	1,2

250. Leia tõkestamatult kahaneva geomeetrilise progressiooni esimene liige ja tegur, kui summaks on:

$$a) \frac{1}{2-y}; \quad b) \frac{1}{5+2y}; \quad c) \frac{3}{4+y}.$$

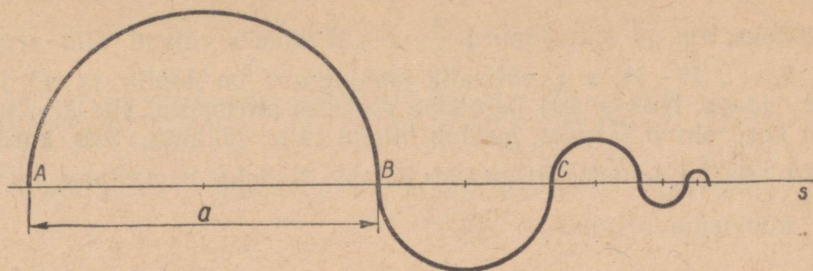
Missugust väärtust ei tohi $|y|$ ületada?

Näide. Olgu $S = \frac{1}{8+3y}$. Et $S = \frac{a_1}{1-q}$, siis tuleb antud murd teisendada niisugusele kujule, kus nimetajas oleks esimeseks liikmeks 1. Selle kuju saame murru lugeja ja nimetaja jagamisel 8-ga:

$$S = \frac{\frac{1}{8}}{1 + \frac{3}{8}y}.$$

Siit võime kirjutada, et $a_1 = \frac{1}{8}$ ja $q = -\frac{3}{8}y$. Et rahuldada tingimust $|q| < 1$, peab olema $|y| < \frac{8}{3}$.

251. 45°-se nurga haaral on võetud punkt, mis on nurga tipust kaugusel a . Sellest punktist on ehitatud ristlõik teisele haarale, selle ristlõigu aluspunktist on ehitatud ristlõik esimesele haarale jne. lõpmata. Leia nende ristlõikude pikkuste summa.



Joon. 147.

252. Sirgel s kujutatud lõiku $AB=a$ (joon. 147) pikendatakse tema poole võrra ja saadakse punkt C . Lõiku BC pikendatakse omakorda tema poole võrra jne. Kõigile nii saadud lõikudele kui diameetritele joonestatakse poolringjooned vaheldumisi üks ühele, teine teisele poole sirget s . Leia tekkiva kõverjoone kogupikkus p ning kõigi poolringide pindalade summa S .

§ 50. HARILIKU MURRU TEISENDAMINE KÜMNENDMURRUKS.

Hariliku murru teisendamisel kümnendmurruks jagatakse murru lugeja murru nimetajaga. See jagamine annab tulemuseks kas täpse arvu, nagu näiteks

$$\frac{5}{4} = 1,25,$$

või saame tulemuseks lõputu perioodilise kümnendmurru, nagu näiteks

$$\frac{4}{3} = 1,3333\dots,$$

mida lühemalt kirjutatakse nii:

$$\frac{4}{3} = 1,(3).$$

Et kümnendmurd on võrdne hariliku murruga, mille nimetajaks on kümne aste, siis lõpliku kümnendmurruna avalduvad need harilikud murrud, mille nimetajas ei ole teisi tegureid peale 2 ja 5. Põhjenda seda!

Kui murru lugeja ei jagu täpselt nimetajaga, siis tekib jääk. Jäägile kirjutatakse juurde 0, saadud arv jagatakse uuesti nimetajaga, tekib uus jääk jne. Kui nimetaja teguriks on arv, mis ei ole 2 ega 5, siis jätkub jagamise protsess lõputult. Jagatiseks saame lõputu kümnendmurru. Jääk on alati väiksem kui nimetaja.

Näiteks, kui on antud murd $\frac{a}{b}$, siis jääkideks võivad olla arvud $1, 2, \dots, (b-1)$, s. t. võimalik jääkide arv on lõplik ja võrdub $(b-1)$ -ga. Niisiis, kui jagamise protsess on lõputu, siis arv, mis on kord olnud jäägiks, kordub hiljem jälle jäägina. Siis korduvad aga ka temale järgnevad jäägid. Näiteks teisendame $\frac{37}{7}$ ja $\frac{19}{14}$ kümnendmurruks.

$$\begin{array}{r|l} 37 & 7 \\ \hline 20 & 5,285714 \dots \\ \hline 60 & \\ \hline 40 & \\ \hline 50 & \\ \hline 10 & \\ \hline 30 & \\ \hline 20 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 19 & 14 \\ \hline 50 & 1,3571428 \dots \\ \hline 80 & \\ \hline 100 & \\ \hline 20 & \\ \hline 60 & \\ \hline 40 & \\ \hline 120 & \\ \hline 80 & \end{array}$$

Siin saime esimese ülesande jääkideks arvud 2, 6, 4, 5, 1, 3 ja siis tuli jäägiks jälle 2, millele järgnevad uuesti 6, 4, 5, 1, 3 ning jällegi 2. Nii kordub see lõputult.

Jääkidele 2, 6, 4, 5, 1, 3 vastavad jagatistes numbrid 2, 8, 5, 7, 1, 4, mis samuti hakkavad korduma. Need numbrid, mis jagatistes hakkavad korduma, moodustavad jagatise perioodi. Et jagatiseks on lõputu kümnendmurd, siis ei saa seda täielikult üles kirjutada. Seetõttu on kokku lepitud kirjutada jagatises ainult üks periood ja eraldada see sulgudega.

Nii kirjutame

$$\frac{37}{7} = 5, (285714) \text{ ja } \frac{19}{14} = 1,3 (571428).$$

Kui periood algab kohe pärast koma, siis nimetatakse seda arvu **lõputuks puhtperioodiliseks kümnendmurruks**. Kui aga periood ei alga kohe pärast koma, siis nimetatakse seda arvu **lõputuks segaperioodiliseks kümnendmurruks**. Seega esimene toodud näidetest on lõputu puhtperioodiline ja teine lõputu segaperioodiline kümnendmurd.

Ülesandeid.

253. Missugused järgmistest murdudest on esitatavad lõpliku kümnendmurruna:

$$\frac{2}{5}, \frac{6}{25}, \frac{4}{35}, \frac{12}{17}, \frac{11}{8}, \frac{14}{15}, \frac{121}{16}, \frac{1024}{625}?$$

254. Esita järgmised murrud kümnendmurdudena:

$$\frac{9}{5}, \frac{29}{64}, \frac{132}{25}, \frac{17}{6}, \frac{35}{32}, \frac{16}{11}, \frac{87}{63}.$$

§ 51. LÖPUTU PERIOODILISE KÜMNENDMURRU ESITAMINE HARILIKU MURRUNA.

Olgu antud lõputu perioodiline kümnendmurd

$$4,5(62).$$

Vaatleme seda arvu summana

$$4,5+0,0(62).$$

Esitame teise liidetava harilike murdude abil:

$$0,0(62) = \frac{62}{1000} + \frac{62}{100\,000} + \frac{62}{10\,000\,000} + \dots$$

Tulemuseks on tõkestamatult kahaneva geomeetrilise progressiooni summa, kus $a_1 = \frac{62}{1000}$ ja $q = \frac{1}{100}$. Kasutades vastavat summa valemit, leiame, et

$$0,0(62) = \frac{\frac{62}{1000}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{62 \cdot 100}{1000 \cdot 99} = \frac{62}{990}.$$

Seega

$$4,5(62) = 4,5 + \frac{62}{990} = \frac{45}{10} + \frac{62}{990} = \frac{4455 + 62}{990} = \frac{4517}{990}.$$

Olesandeid.

255. Esita hariliku murruna järgmised lõputud puhtperioodilised kümnendmurrud: 0,(9); 0,(23); 0,(061); 2,(71); 63,(418).

256. Tuginedes eelmise ülesande lahendustele, sõnasta eeskiri lõputu puhtperioodilise kümnendmurru teisendamiseks harilikuks murruks.

257. Esita hariliku murruna järgmised lõputud segaperioodilised kümnendmurrud: 0,2(8); 0,3(54); 0,13(9); 2,65(15).

258. Tuginedes eelmise ülesande lahendustele, sõnasta eeskiri lõputu segaperioodilise kümnendmurru teisendamiseks harilikuks murruks.

259. Näita, et

$$0,11\dots + 0,222\dots + 0,333\dots + \dots + 0,999\dots = 5.$$

§ 52. LIHTINTRESS.

Hoiukassasse hoiule antud rahasummale, nn. **hoiusele**, arvestatakse iga aasta lõpul juurde teatud kindel osa hoiusest. Näiteks, kui aasta algul anti hoiule 50 rubla ja juurde arvestatakse 2% hoiusest, s. o. 1 rubla, siis on järgmise aasta algul hoiul 51 rubla.

Juurdearvestatud summat nimetatakse **intressiks** ja arvu, mis näitab, mitmendik osa hoiusest kuulub juurdearvestamisele, nimetatakse **intressimääraks**.

Seega on toodud näites intressiks 1 rubla ja intressimääraks 0,02.

Ülesanne 1. Aasta algul on hoiul 60 rubla ning intressimäär on 3%. Kui suur on hoius järgmise aasta algul?

Lahendus. Aasta jooksul kasvab hoius 3% võrra 60-st rublast, s. o. 1,8 rubla; seega järgmise aasta alguseks on hoiul 61,8 rubla.

Ülesanne 2. Aasta algul viiakse hoiule k rubla; intressimäär on $p\%$. Leida hoiuse väärtus teise, kolmanda, ..., $n+1$ aasta alguseks, kui intressi arvestatakse ainult esialgu hoiule viidud summalt.

Lahendus.

Esialgne hoiusumma:	k ;
teise aasta algul:	$k + \frac{kp}{100}$;
kolmanda aasta algul:	$k + \frac{kn}{100} + \frac{kp}{100} = k + 2 \cdot \frac{kp}{100}$;
neljanda aasta algul:	$k + 3 \cdot \frac{kp}{100}$;
.....	
$n+1$ aasta algul:	$k + n \cdot \frac{kp}{100}$.

Näeme, et sel viisil intressi arvestades moodustavad hoiuse väärtused aritmeetilise progressiooni, mille vaheks on aastaintress $\frac{kp}{100}$. Sel viisil n aasta jooksul saadavat koguintressi $\frac{nkp}{100}$ nimetatakse **lihtintressiks**.

Ülesanne 3. Aasta algul viiakse hoiule k rubla; intressimäär on $p\%$. Leida hoiuse väärtus $n+1$ aasta algul, kui igal aastavahetusel liidetakse intress hoiuse senisele väärtusele juurde, s. t. kui intressi arvestatakse ka intressilt.

Lahendus.

Esialgne hoiusumma:	k ;
teise aasta algul:	$k + \frac{kp}{100} = k \left(1 + \frac{p}{100}\right)$;

$$\begin{aligned} \text{kolmanda aasta algul: } k\left(1 + \frac{p}{100}\right) + k\left(1 + \frac{p}{100}\right) \frac{p}{100} = \\ = k\left(1 + \frac{p}{100}\right)\left(1 + \frac{p}{100}\right) = k\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2; \end{aligned}$$

$$\text{neljanda aasta algul: } k\left(1 + \frac{p}{100}\right)^3;$$

$$\text{\dots\dots\dots} \\ n+1 \text{ aasta algul: } k\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$$

Kirjeldataud viisil arvestatavat intressi nimetatakse **liitintressiks**. Kirjutades sel viisil arvutatud hoiuse väärtused aastate järgi ritta, saame geomeetrilise progressiooni

$$k; k\left(1 + \frac{p}{100}\right); k\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2, \dots, k\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$$

Selle progressiooni tegurit $q = 1 + \frac{p}{100}$ nimetatakse **intressiteguriks**. Niisiis,

liitintressi korral kasvab hoiule viidud rahasumma k n aasta jooksul intressiteguri n -nda astme kordseks.

Sümboleis:

$$L = k\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

kus L on hoiuse lõppväärtus.

Kui hoiusummat tahetakse aasta keskel suurendada või tahetakse osa summat välja võtta, siis on tarvis arvutada intressi ka kuude ja päevade eest. Rahanduslikes küsimustes loetakse aasta päevade arvuks 360. Seega, kui ühe aasta intress on $\frac{kp}{100}$ rubla, siis ühe kuu intress on $\frac{kp}{12 \cdot 100}$ rubla ja ühe päeva intress on $\frac{kp}{360 \cdot 100}$ rubla.

Hoiukassades makstakse hoiustelt, milliseid võib välja võtta ükskõik millal, nn. nõudmiseni-hoiustelt, 2% intressi ja tähtjalistelt hoiustelt, s. o. hoiustelt, mis on antud hoiule kuni kindla tähtajani, 3% intressi.

Kui hoiustusaeg on üle ühe aasta, siis arvestatakse intressi ikka liiteviisil, s. t. igal aastavahetusel liidetakse aastaintress hoiusummale juurde.

§ 53. SUURUSTE LIITPROTSENDILINE MUUTUMINE.

Liitintressiga analoogilise mõttekäigu juurde jõuame mitmete muude ülesannete lahendamisel. Need ülesanded kuuluvad suuruste liitprotsendilise muutumise valdkonda. Toome mõned näited.

Näide 1. Kolhoosi aastast piimatoodangut k liitrit otsustati suurendada igal aastal $p\%$ võrra. Kui suur on kolhoosi piimatoodang m aasta pärast?

Esimese aasta jooksul suureneb piimatoodang $\frac{kp}{100}$ liitri võrra seega:

esimese aasta jooksul toodetakse piima $k \left(1 + \frac{p}{100}\right)$ liitrit;

teise aasta jooksul toodetakse piima $k \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$ liitrit.

.....

m -nda aasta jooksul toodetakse piima $k \left(1 + \frac{p}{100}\right)^m$ liitrit.

Näide 2. Õhurõhu kohta kehtib seadus: 100-meetrilisele tõusule vastab õhurõhu vähenemine $1,2\%$ võrra. Arvutada õhurõhk 400 m kõrgusel, kui merepinnal valitseb normaalrõhk (760 mm).

Kui õhurõhk merepinnal tähistada a_1 , 100 m kõrgusel a_2 jne., siis rõhud 100-meetriliste kõrgusvahede tagant moodustavad geometrilise progressiooni:

$$760; 760 \left(1 - \frac{1,2}{100}\right); 760 \left(1 - \frac{1,2}{100}\right)^2, \dots$$

Selle progressiooni tegur

$$q = 1 - 0,012 = 0,988.$$

Vastuseks on progressiooni viies liige $760 \cdot 0,988^4 \approx 724$ (mm). Seega on õhurõhk 400 m kõrgusel 724 mm.

Näide 3. Rahvaarvu aastane juurdekasv olgu 1% . Kui suur peab olema põllumajandussaaduste toodangu aastase juurdekasvu protsent, et 15 aasta pärast tuleks ühe elaniku kohta põllumajandussaadusi 2 korda rohkem kui praegu?

Eelkõige tuleb leida, mitmekordseks kasvab elanikkond 15 aasta jooksul.

Loeme praeguse elanike arvu ühikuks, siis $a_1 = 1$. Aastase juurdekasvu tegur $q = 1 + \frac{1}{100} = 1,01$. Otsitav on progressiooni kuuteistkümmes liige.

$$a_{16} = a_1 \cdot q^{15} = 1 \cdot 1,01^{15} \approx 1,16.$$

Seega kasvab elanikkond 15 aasta jooksul 1,16 kordseks. Põllumajandussaaduste toodang peab sama aja jooksul kasvama 2 korda suuremaks, s. o. 2,32 kordseks.

Kui praegune põllumajandussaaduste toodang lugeda ühikuks, siis $a_1=1$ ja $a_{16}=2,32$.

$$2,32=1 \cdot q^{15}$$

$$q \approx 1,06 = 1 + \frac{6}{100}.$$

Püstitatud nõue on seega täidetud siis, kui põllumajandussaaduste toodangu aastane juurdekasv on 6%.

Ülesandeid.

260. Õpilane pani 31. augustil oma suvisest teenistusest 25 rbl. hoiukassasse hoiule «nõudmiseni». Kui suur oli õpilase hoius järgmise aasta 31. augustiks?

261. Tööline kogus raha mööbli ja televiisori ostmiseks. Selleks pani ta iga aasta algul hoiukassasse hoiule «nõudmiseni» oma ühe kuu palga 95 rubla. Hoiukassa arvestab liitintressi määraga 2%. Kui suur oli töölise hoiusumma teise aasta algul, kolmanda aasta algul? Kui suure summa võis tööline välja võtta viienda aasta algul?

262. Õpetaja viis hoiukassasse hoiule «nõudmiseni» iga kuu 12% oma palgast. Kui suur oli õpetaja hoiusumma 1 kuu pärast, 2 kuu pärast, 12 kuu pärast (kõik enne järjekordset sissemaksu), kui õpetaja kuupalk on 85 rubla?

263. 3. septembril 1963. a. toimunud raha- ja asjade loterii järjekordsel loosimisel võitis 8. klassi õpilane 65-rublase külmutuskapi. Ta võttis eseme väärtuse välja rahas ja andis hoiukassasse tähtajaliselt hoiule kuni kooli lõpetamiseni, s. o. 3. juulini 1967. a. Hoiukassa maksab liitintressi määraga 3%. Kui suur on tähtpäeval väljavõetav summa?

264. Isa pani temale makstud preemiast 24% tähtajaliselt (liitintressimääraga 3%) hoiule oma pojale, kes hakkas parajasti õppima 1. klassis. Kui suure summa saab poeg pärast kooli lõpetamist (11 aastat hiljem), kui isale makstud preemia oli 50 rubla?

265. Tööstuse sisseseade maksis uuna 15 000 rubla. Tema väärtuse iga-aastaselt hindamisel kustutatakse sisseseade vananemise ja kulumise tõttu 8% eelmise aasta väärtusest. Kui suur on sisseseade väärtus 10 aasta pärast?

266. Ameerika Ühendriikide president ja teadlane Benjamin Franklin pärandas oma testamendiga 1790. aastal Bostoni linnale 1000 naela tingimusel, et see kapital liitintressi kandes kasvaks

tähtajaliselt 100 aastat. Saadud summast, 130 000 naelast, kuulus 100 000 naela linnale, jääk tuli aga jätta uuesti sajaks aastaks tähtajaliselt hoiule. Missugust intressimäära arvestas Franklin?

267. Puu kõrguse iga-aastane juurdekasv on 80% eelmise aasta juurdekasvust. Mitme sentimeetri võrra kasvab puu teisel aastal, viiendal aastal, kui ta esimesel aastal kasvas 25 cm võrra?

268. Tööstuse toodangut kavatsetakse suurendada igal aastal 15% võrra võrreldes eelneva aastaga. Mitme protsendi võrra suureneb tööstuse aastatoodang seitseaastaku jooksul?

269. Radioaktiivse aine aatomeist laguneb ööpäeva vältel 2,8%. Mitme ööpäeva vältel laguneb pool selle aine aatomeist?

270. Toas, mille temperatuur on 20°, on keha, mille temperatuur on 100°. Olgu keha soojusisolatsiooni tingimused sellised, et keha temperatuur langeb igas minutis 2% võrra keha temperatuuri ja toa temperatuuri vahest. Leia keha temperatuur poole tunni pärast.

271. Kuumutamisel laguneb vesinikülihapiend (H_2O_2) veeks ja hapnikuks. 10 minutit pärast reaktsiooni algust oli vesinikülihapiendi kontsentratsioon $8\frac{g}{l}$ ja 10 minutit hiljem $4,8\frac{g}{l}$. Arvuta vesinikülihapiendi esialgne kontsentratsioon eeldusel, et kontsentratsioon väheneb iga minuti jooksul sama protsendi võrra minuti algul olnud kontsentratsioonist.

272. Kinnises anum as on vedela väavli kohal esialgu 1 g vesinikku. Reaktsiooni tõttu väheneb vesiniku hulk 12 tunni jooksul 0,832 grammini. Arvuta, kui palju vesinikku on anum as 24 tunni pärast, arvestades, et vesiniku hulk väheneb iga tunni jooksul sama % võrra tunni algul olnud hulga st.

Kordamisküsimusi.

273. Mis on funktsioon?

274. Mis on funktsiooni määramispiirkond?

275. Missugust funktsiooni nimetatakse paarisfunktsiooniks?

276. Mis on funktsiooni negatiivsuspiirkond?

277. Mis on funktsiooni $y=3x$ positiivsuspiirkonnaks?

278. Kas lineaarne funktsioon $y=2-x$ on kasvav või kahanev?

279. Millal on ruutfunktsiooni graafikul maksimumpunkt?

280. Kuidas avaldub funktsiooni $y=-345-x$ pöördfunktsioon?

281. Missugune joon on funktsiooni ja tema pöördfunktsiooni graafikute sümmeetriateljeks?

282. Missuguses vahemikus asetsevad funktsiooni $y=\arctan x$ väärtused?

283. Mida nimetatakse arvu a logaritmi alusel b ?

284. Missugust funktsiooni nimetatakse eksponentfunktsiooniks?

285. Mis on aritmeetiline progressioon?

286. Mis on geomeetriline progressioon?

287. Kuidas avaldub aritmeetilise progressiooni n liikme summa valem?

288. Kuidas avaldub geomeetrilise progressiooni üldliikme valem?

289. Missugust geomeetrilist progressiooni nimetatakse tõkestamatult kahanevaks?

290. Kuidas defineeritakse tõkestamatult kahaneva geomeetrilise progressiooni summa?

291. Mis on lõputu segaperioodiline kümnendmurd?

292. Mis on liitintress?

293. Kuidas teostatakse tehteid harilike murdudega?

294. Missugust võrrandit nimetatakse eksponentvõrrandiks?

295. Missugust võrrandit nimetatakse logaritmivõrrandiks?

V. FUNKTSIOONI TULETIS JA SELLE RAKENDUSI.

§ 54. KEHA LIIKUMISE HETKELINE KIIRUS.

Liikugu keha seaduse järgi $s = t^2 - 2t$, kus t on mõõdetud sekundites ja s sentimeetrites. Kui tahame teada, kui pika tee on see keha läbinud näiteks ajamomentideks $t = 3$ sek., 5 sek., 10 sek., siis leiame neile t väärtustele vastavad s väärtused, saame vastavalt 3 cm, 15 cm, 80 cm.

Leiame selle keha liikumise keskmise kiiruse $\bar{v}$ ajamomentide $t_1 = 3$ ja $t_2 = 5$ vahel. Et

$$\bar{v} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1},$$

siis otsitav keskmine kiirus

$$\bar{v} = \frac{15 - 3}{5 - 3} = 6 \left(\frac{\text{cm}}{\text{s}} \right).$$

Seame nüüd endale eesmärgiks leida vaadeldava keha liikumise kiiruse ajamomendil $t_1 = 3$. Et seda leida, avaldame keskmise kiiruse ajavahemikuks t_1 -st kuni $t_2 = 4$, $t_2 = 3,5$, $t_2 = 3,2$, $t_2^{\text{IV}} = 3,1$, $t_2^{\text{V}} = 3,06$. Esitame tulemused tabelis:

t_2	5	4	3,5	3,2	3,1	3,06
$t_2 - t_1$	2	1	0,5	0,2	0,1	0,06
s_2	15	8	5,25	3,84	3,41	3,2436
$s_2 - s_1$	12	5	2,25	0,84	0,41	0,2436
$\bar{v}$	6	5	4,5	4,2	4,1	4,06

Paneme tähele, et mida lühem on t_1 -st möödunud ajavahemik (tabelis $t_2 - t_1$), seda enam läheneb keskmine kiirus $\overline{v}$ 4-le $\left(\frac{\text{cm}}{\text{s}}\right)$.

Keha liikumise hetkeliseks kiiruseks ajamomendil t_1 nimetatakse tema keskmise kiiruse piirväärtust, kui $t_2 \rightarrow t_1$.

Liikugu keha seaduse järgi $s=s(t)$. Tähistame hetkelist kiirust ajamomendil t_1 tähega v . Siis

$$v = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}, \text{ kus } s_2 = s(t_2) \text{ ja } s_1 = s(t_1)$$

ehk

$$v = \lim_{(t_2 - t_1) \rightarrow 0} \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}.$$

Kasutades muudu tähist Δ , võime kirjutada, et

$$s_2 - s_1 = \Delta s \text{ ja } t_2 - t_1 = \Delta t$$

ja

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Seega võime keha liikumise hetkelist kiirust defineerida ka järgmiselt:

keha liikumise hetkeliseks kiiruseks nimetatakse tee pikkuse muudu ja aja muudu suhte piirväärtust, kui aja muut läheneb nullile.

M ä r k u s. Defineerimisel muutude kaudu jäetakse rõhutamata «antud ajamomendil», sest muutut arvutatakse ikka teatud kohast alates.

Ülesandeid.

296. On antud punkti sirgjoonelise liikumise võrrand

$$s = 5t + 6.$$

Leia liikumise keskmine kiirus:

- a) esimese kuue sekundi jooksul;
- b) ajavahemikus kolmanda sekundi lõpust kuni kuuenda sekundi lõpuni.

297. Punkt M kaugeneb liikumatust punktist A nii, et kaugus AM kasvab võrdeliselt aja ruuduga. 2 minutit pärast liikumise algust oli kaugus AM 12 meetrit. Leia liikumise keskmine kiirus:

- a) esimese viie minuti jooksul;
- b) ajavahemikus $t_1 = 4$ min. kuni $t_2 = 7$ min.

298. On antud sirgjoonelise liikumise võrrand

$$s = t^3 + \frac{3}{t}.$$

Leia liikumise keskmine kiirus ajavahemikus $t_1=4$ kuni $t_2=4+\Delta t$. Kui suur on keskmine kiirus, kui $\Delta t=2; 1; 0,1; 0,03$?

299. Vabalt langev keha liigub seaduse järgi

$$s = \frac{gt^2}{2}, \quad \text{kus } g = 980 \frac{\text{cm}}{\text{sek}^2}.$$

Leia liikumise keskmine kiirus ajavahemikus $t_1=5$ sek. kuni $t_2=(5+\Delta t)$ sek. Kui suur on keskmine kiirus, kui $\Delta t=1$ sek.; $0,1$ sek.; $0,05$ sek.; $0,001$ sek.? Leia langeva keha kiirus:

5. sekundi lõpul;
10. sekundi lõpul.

Leia langeva keha kiiruse valem mis tahes ajamomendi t jaoks.

300. Leia seniitkahurist otse üles lastud kuuli kiirus 3 sekundit pärast lasku, kui kuuli algkiirus on $200 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

N ä p u n ä i d e. Ülesande lahendamiseks leia kuuli keskmine kiirus ajavahemiku Δt jooksul, võttes $\Delta t=1; 0,1; 0,01$ ja $0,001$ ning $g \approx 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Tee pikkuse leiame valemist $s = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$.

301. Kui kõva keha pöörleb ümber telje, siis pöördenurk φ on aja t funktsioon: $\varphi = f(t)$. Avalda:

- pöörlemise keskmine nurkkiirus ajavahemiku Δt jooksul;
- pöörlemise hetkeline nurkkiirus ajamomendil t .

302. Soojushulk Q , mis on vajalik anda kehale, et kuumutada teda mingilt algtemperatuurilt Θ_0 temperatuurini Θ , on temperatuuri Θ funktsioon: $Q = g(\Theta)$. Avalda:

- keha keskmine soojusmahtuvus keha kuumutamisel temperatuurilt Θ kuni temperatuurini $\Theta + \Delta\Theta$;
- keha soojusmahtuvus temperatuuril Θ .

§ 55. JOONE PUUTUJA TÕUS.

Teame, et

joone puutuja on joone lõikaja piirteis, kui üks lõikepunkt läheneb teisele.

Joonisel 148 on esitatud funktsiooni $y=f(x)$ graafik. Punktis P tõmmatud puutuja on piirteisiks kõõludele PP_1, PP_2, PP_3 jne. Punktide P, P_1, P_2, P_3 jne. koordinaadid olgu $P(x; y); P_1(x_1; y_1); P_2(x_2; y_2); P_3(x_3; y_3), \dots$

Avaldame joonisel esitatud kõõlude tõusud:

$$\tan \alpha_1 = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}$$

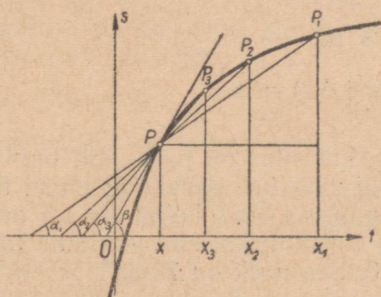
$$\tan \alpha_2 = \frac{y_2 - y}{x_2 - x}$$

$$\tan \alpha_3 = \frac{y_3 - y}{x_3 - x}$$

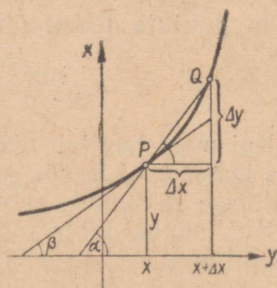
jne.

Puutuja tõus on $\tan \beta$.

Et kõõlu teise otspunkti P_i lähenemisel punktile P kõõlu tõusunurk α_i läheneb nurgale β , siis ka kõõlu tõus läheneb puutuja tõusule.



Joon. 148.



Joon. 149.

Joonisel 149 on kõõlu otspunktideks punktid $P(x; y)$ ja $Q(x + \Delta x; y + \Delta y)$. Selle kõõlu tõusuks on

$$\tan \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Paneme tähele, et kui $Q \rightarrow P$, siis $\Delta x \rightarrow 0$.

Eelnenud mõttekäigust teame, et

$$\lim_{Q \rightarrow P} \tan \alpha = \tan \beta$$

ehk

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan \beta.$$

Seega võime joone puutuja tõusu defineerida piirväärtuse kaudu järgmiselt.

joone puutuja tõusuks nimetatakse ordinaadi muudu ja abstsissi muudu suhte piirväärtust, kui abstsissi muut läheneb nullile.

Leiame parabooli $y = x^2$ puutuja tõusu üldavaldise.

Olgu argumendi muut Δx ja sellele vastav funktsiooni muut Δy .

Siis

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$$

ehk

$$y + \Delta y = x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2.$$

Siit

$$\Delta y = x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - y$$

ehk

$$\begin{aligned}\Delta y &= x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = \\ &= 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2.\end{aligned}$$

Leiame nüüd $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

Ja puutuja tõusu üldavaldiseks on

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Kui meid huvitab nüüd näiteks, kui suur on parabooli puutuja tõus kohal $x=1,5$, siis paneme selle väärtuse parabooli tõusu üldavaldisse ja saame, et parabooli puutuja tõus kohal $x=1,5$ on 3.

Kui tahame leida selle puutuja tõusunurka, siis vaatame tabelist, missuguse nurga tangens on 3. See nurk on $71^\circ 33'$.

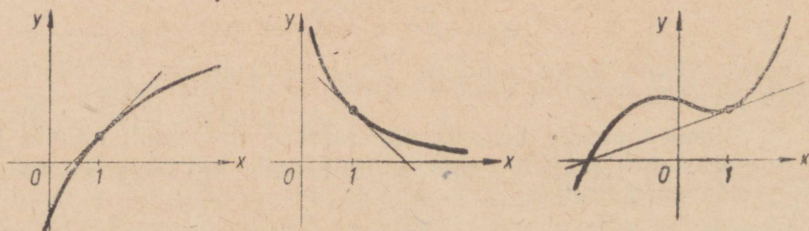
Ülesandeid.

303. Joonesta ruutfunktsiooni $y=x^2$ graafik. Leia jooniselt mõõtmise teel puutuja tõusunurk ja seejärel tabeleid kasutades puutuja tõus, kui $x=-1$; 1; 1,5; 2.

304. Joonisel 150 on esitatud mõnede funktsioonide graafikud. Leia mõõtmise teel puutuja tõusunurk ja seejärel tabeleid kasutades puutuja tõus kohal $x=1$.

305. Leia parabooli $y=x^2$ puutuja tõus ja tõusunurk

- 1) koordinaatide alguspunktis;
- 2) kohal $x=3$;
- 3) kohal $x=-2$.



Joon. 150.

306. Leia kuupparabooli $y=x^3$ puutuja tõusu üldavaldis.
 307. Leia kuupparabooli $y=x^3$ puutuja tõus ja tõusunurk
 1) kohal $x=-1$;
 2) kohal $x=2,2$;
 3) kohal $x=\frac{4}{3}$.
 308. Missugustes punktides on paraboolile $y=x^3$ tõmmatud puutuja tõusunurga tangens 3.
 309. Kui suur võib ülimalt olla sirge tõusunurk?

§ 56. FUNKTSIOONI TULETIS.

Hetkelise kiiruse leidmine viis piirväärtusele

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

ja joone puutuja tõusu avaldamine piirväärtusele

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Esimesel juhul s avaldus t funktsioonina $s=s(t)$ ja teisel juhul oli vaadeldav joon funktsiooni $y=f(x)$ graafikuks.

Mõlemal juhul on seega tegemist funktsiooni muudu ja argumendi muudu suhte piirväärtusega, kui argumendi muut läheneb nullile.

Sellel piirväärtusel on funktsioonide uurimisel väga suur tähtsus. Teda on hakatud nimetama **funktsiooni tuletiseks**.

Seega,

funktsiooni tuletis on funktsiooni muudu ja argumendi muudu suhte piirväärtus, kui argumendi muut läheneb nullile.

Olgu antud funktsioon $y=f(x)$. Tema tuletist tähistatakse sümboliga y' ehk $f'(x)$.

Seega

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Et $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, siis

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ehk

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

§ 55 nägime, et $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ esitab joone puutuja tõusu. Seega

funktsiooni tuletise geomeetriliseks tõlgenduseks on selle funktsiooni graafiku puutuja tõus.

§ 57. MÖNEDE FUNKTSIOONIDE TULETISED.

a) Funktsiooni $y=x^3$ tuletis.

Anna selgitused järgnevale tuletuskäigule!

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^3;$$

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - y;$$

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3;$$

$$\Delta y = x^3 + 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3;$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2;$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = x^2.$$

Seega

$$(x^3)' = 3x^2$$

b) Funktsiooni $y = \frac{1}{x}$ tuletis.

Anna selgitused järgnevale tuletuskäigule!

$$y + \Delta y = \frac{1}{x + \Delta x};$$

$$\Delta y = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x};$$

$$\Delta y = \frac{x - x - \Delta x}{x^2 + x \cdot \Delta x} = -\frac{\Delta x}{x^2 + x \cdot \Delta x};$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x^2}.$$

Seega

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

c) Funktsiooni $y = \sqrt{x}$ tuletis.

Anna selgitused seal, kus need puuduvad!

$$y + \Delta y = \sqrt{x + \Delta x};$$

$$\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x};$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}.$$

Et lähenemisel nullile nii lugeja kui ka nimetaja lähenevad nullile, siis tuleb saadud avaldist teisendada nii, et saaksime taandada lugejast ja nimetajast nullile läheneva teguri Δx . Selleks laiendame murdu avaldisega $\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}$.

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \\ &= \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}; \end{aligned}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Seega

$$\boxed{(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

d) Funktsiooni $y = x$ tuletis.

Siin $y + \Delta y = x + \Delta x$ ja seega $\Delta y = \Delta x$. Järelikult

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1.$$

Δx muutumine, sealjuures ka tema lähenemine nullile, seda tulemust ei muuda, s. t. et

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 1 = 1.$$

Seega

argumendi tuletis on 1.

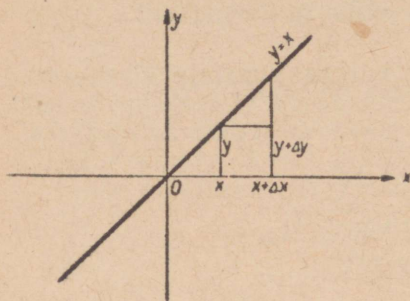
$$\boxed{x' = 1}$$

Kuidas asetseb sirgele mistahes tema punktis tõmmatud puutuja selle sirge suhtes?

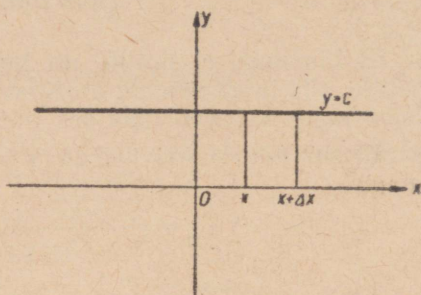
Selgita argumendi tuletise võrdumist ühega joonise 151 abil.

e) Funktsiooni $y=c$ tuletis

Funktsiooni $y=c$ graafik on paralleelne x -teljega (joon. 152). Sõltumata argumenti muudu Δx suurusest on siin funktsiooni muut Δy alati 0.



Joon. 151.



Joon. 152.

Järelikult

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0, \text{ sest } \Delta x \neq 0$$

ja

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Seega

konstandi tuletis on 0.

$$c' = 0$$

§ 58. FUNKTSIOONIDE SUMMA, KORRUTISE JA JAGATISE TULETISED.

a) Summa tuletis.

Olgu antud funktsioonid $f(x)$ ja $g(x)$. Ülesandeks on leida funktsiooni

$$y = f(x) + g(x)$$

tuletis.

Kui argument muutub Δx võrra, siis funktsioon muutub Δy võrra, s. t. et

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x).$$

Avaldame Δy :

$$\Delta y = f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x) - y$$

ehk

$$\Delta y = f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x) - f(x) - g(x).$$

Rühmitame ja jagame võrduse mõlemad pooled Δx -ga, saame

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}.$$

Tuletise leidmiseks võtame piirväärtuse, kui $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right].$$

Et summa piirväärtus on võrdne liidetavate piirväärtuste summaga, siis

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}.$$

Et

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

ja

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = g'(x),$$

siis

$$y' = f'(x) + g'(x)$$

ehk

$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$

Kui oletada, et kumbki liidetavatest funktsioonidest või vähemalt üks neist avaldub ise kahe funktsiooni summana, näiteks

$$f(x) = h(x) + k(x)$$

ja seega

$$y = h(x) + k(x) + g(x),$$

siis tõestatu põhjal

$$f'(x) = h'(x) + k'(x)$$

ja

$$y' = h'(x) + k'(x) + g'(x)$$

ehk

$[h(x) + g(x) + k(x)]' = h'(x) + g'(x) + k'(x)$

Niisiis,

summa tuletis on võrdne liidetavate tuletiste summaga.

Kuidas avaldub kahe funktsiooni vahe tuletis?

b) Korrutise tuletis.

Olgu antud funktsioonid $f(x)$ ja $g(x)$. Ülesandeks on leida funktsiooni

$$y = f(x) \cdot g(x)$$

tuletis.

Rakendame siingi juba tuntud skeemi.

Muutugu argument Δx võrra ja selle tagajärjel funktsioon Δy võrra, s. t.

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x).$$

Siit

$$\Delta y = f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x) \cdot g(x).$$

Valemi tuletamiseks lahutame võrduse paremalt poolelt $f(x) \cdot g(x + \Delta x)$ ja et võrdus jääks kehtima, siis ka liidame sama avaldise. Niisiis,

$$\Delta y = f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x) \cdot g(x + \Delta x) + f(x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x) \cdot g(x).$$

Rühmitame ja lahutame liidetavad tegureiks:

$$\Delta y = [f(x + \Delta x) - f(x)] \cdot g(x + \Delta x) + f(x) \cdot [g(x + \Delta x) - g(x)].$$

Jagame nüüd võrduse mõlemad pooled Δx -ga ja võtame piirväärtuse, kui $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot g(x + \Delta x) + f(x) \cdot \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}.$$

Et summa piirväärtus on võrdne liidetavate piirväärtuste summaga ja korrutise piirväärtus on võrdne tegurite piirväärtuste korrutisega, siis

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x + \Delta x) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}.$$

Siit saame, et

$$y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Kahe funktsiooni korrutise tuletis on võrdne esimese teguri tuletise ja teise teguri korrutise ning teise teguri tuletise ja esimese teguri korrutise summaga.

Näide.

$$\begin{aligned}(x \cdot \sqrt{x})' &= x' \cdot \sqrt{x} + x \cdot (\sqrt{x})' = 1 \cdot \sqrt{x} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \\ &= \sqrt{x} + \frac{1}{2} \sqrt{x} = \frac{3}{2} \sqrt{x}.\end{aligned}$$

e) Konstandi ja funktsiooni korrutise tuletis.
Olgu korrutises üks tegureist konstant, siis

$$[cf(x)]' = c' \cdot f(x) + c \cdot f'(x)$$

ja et $c' = 0$, siis

$$\boxed{[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)}$$

Konstandi ja funktsiooni korrutise tuletis on võrdne konstandi ja selle funktsiooni tuletise korrutisega.

f) Jagatise tuletis.

Olgu antud funktsioonid $f(x)$ ja $g(x)$. Ülesandeks on leida funktsiooni

$$y = \frac{f(x)}{g(x)}$$

tuletis.

Eeldame, et $g(x) \neq 0$. Miks?

Korrutame võrduse mõlemad pooled $g(x)$ -ga ja leiame funktsiooni

$$f(x) = y \cdot g(x)$$

tuletise.

Korrutise tuletise definitsiooni põhjal

$$f'(x) = y' \cdot g(x) + y \cdot g'(x).$$

Siit avaldame y' :

$$y' = \frac{f'(x) - y \cdot g'(x)}{g(x)}.$$

Asendame siin $y = \frac{f(x)}{g(x)}$, saame

$$y' = \frac{f'(x) - \frac{f(x)}{g(x)} \cdot g'(x)}{g(x)},$$

millest

$$\boxed{y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}}$$

Jagatise tuletis on võrdne murruga, mille lugejaks on jagatava tuletise ja jagaja korrutise ning jagaja tuletise ja jagatava korrutise vahe ning nimetajaks on jagaja ruut.

Näide.

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sqrt{x}}{x^2}\right)' &= \frac{(\sqrt{x})' \cdot x^2 - \sqrt{x} \cdot (x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot x^2 - 2x \cdot \sqrt{x}}{x^4} = \\ &= \frac{x^2 - 4x^2}{2x^4 \sqrt{x}} = -\frac{3}{2x^2 \sqrt{x}} = -\frac{3\sqrt{x}}{2x^3}.\end{aligned}$$

§ 59. FUNKTSIOONI $y = x^n$ TULETIS.

a) Funktsiooni x^n tuletis, kui n on naturaalarv. Eespool leidsime, et

$$x' = 1 = 1 \cdot x^0;$$

$$(x^2)' = 2x^1;$$

$$(x^3)' = 3x^2.$$

Leiame veel funktsioonide x^4 ja x^5 tuletise, kasutades korrutise tuletise leidmise eeskirja

$$(x^4)' = (x^3 \cdot x)' = 3x^2 \cdot x + x^3 \cdot 1 = 3x^3 + x^3 = 4x^3;$$

$$(x^5)' = (x^3 \cdot x^2)' = 3x^2 \cdot x^2 + x^3 \cdot 2x = 3x^4 + 2x^4 = 5x^4.$$

Vaadeldes neid tuletisi, paneme tähele huvitavat seaduspärasust, mille järgi võiks oletada, et

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, \text{ kus } n \text{ on mistahes naturaalarv.}$$

Tõestame, et see võrdus tõepoolest kehtib. Tõestamiseks kasutame nn. matemaatilise induktsiooni võtet.

Toodud näidete põhjal eeldame, et kehtib võrdus

$$(x^k)' = k \cdot x^{k-1}, \text{ kus } k \text{ on üks kindel naturaalarv.}$$

Väidame, et kehtib võrdus

$$(x^{k+1})' = (k+1)x^k.$$

Tõestuseks vaatleme astet x^{k+1} kui korrutist $x^k \cdot x$ ja leiame selle tuletise:

$$(x^{k+1})' = (x^k \cdot x)' = (x^k)' \cdot x + x^k \cdot x'.$$

Eelduse põhjal on $(x^k)' = k \cdot x^{k-1}$ ja seega

$$(x^{k+1})' = k \cdot x^{k-1} \cdot x + x^k = k \cdot x^k + x^k = (k+1)x^k.$$

Seega on väide tõestatud.

Teame, et eeldus kehtib, kui $k=5$. Tõestatu põhjal kehtib seos ka siis, kui $k=6$.

Nüüd teame, et eeldus kehtib, kui $k=6$. Tõestatu põhjal kehtib seos ka siis, kui $k=7$.

Nii võime seda ahelat jätkata mistahes naturaalarvuni. Seega

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, \text{ kus } n \text{ on mistahes naturaalarv.}$$

b) Funktsiooni x^n tuletis, kui n on negatiivne täisarv.

Tähistame $n = -m$, kus m on naturaalarv. Saame

$$x^{-m} = \frac{1}{x^m}.$$

Tuletise leidmiseks rakendame jagatise tuletise leidmise eeskirja:

$$\left(\frac{1}{x^m}\right)' = \frac{1' \cdot x^m - 1 \cdot (x^m)'}{(x^m)^2} = \frac{-m \cdot x^{m-1}}{x^{2m}} = -m \cdot x^{-m-1}.$$

Seega

$$(x^n)' = (x^{-m})' = -m \cdot x^{-m-1} = n \cdot x^{n-1}$$

ehk jättes vahepealsed kirjutused ära, saame

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, \text{ kus } n \text{ on negatiivne täisarv.}$$

Astme tuletise leidmise eeskiri on ühesugune nii positiivse kui ka negatiivse täisarvulise astendaja korral, s. t.

täisarvulise astendajaga astme tuletis on võrdne astendaja ja sama alusega, kuid ühe võrra vähendatud astendajaga astme korrutisega.

Saadud valem kehtib ka siis, kui $n=0$. Kontrolli seda! Seega

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \text{ kus } n \text{ on mistahes täisarv.}$$

§ 60. NÄITEID FUNKTSIOONI TULETISE ARVUTAMISEKS.

Näide 1. Leida funktsiooni $2x^3$ tuletis.

Et $c \cdot f(x) = c \cdot f'(x)$ ja $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, siis

$$(2x^3)' = 2 \cdot 3x^2 = 6x^2.$$

Näide 2. Leida funktsiooni $y = x^4 - x^2$ tuletis.

Et summa tuletis on võrdne liidetavate tuletiste summaga ja $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, siis

$$y' = 4x^3 - 2x.$$

Näide 3. Leida funktsiooni

$$f(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x - 5$$

tuletis kohal $x = 1$.

Rakendame summa, korrutise, astme ja konstandi tuletise leidmise eeskirju:

$$f'(x) = 4x^3 + 3 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x + 1 = 4x^3 + 9x^2 - 4x + 1;$$

$$f'(1) = 4 \cdot 1 + 9 \cdot 1 - 4 \cdot 1 + 1 = 10.$$

Ülesandeid.

310. Leia järgmiste funktsioonide tuletised.

a) $3x - 7$

e) $mx + n$

b) $x^2 - 3x + 5$

f) $c - \frac{p}{q}x$

c) $\frac{1}{2}x^3 - 5x^2 + x$

g) $ax^2 + bx + c$

d) $4x^4 + 3x^2 - 5x + 6$

h) $ax + \frac{b}{x}$

311. Leia järgmiste funktsioonide tuletised.

a) $x(x+1)$

d) $x^2(a^2 + x^2)$

b) $(x+2)(x-3)$

e) $\frac{1}{x}(1-x)$

c) $(x-5)(x+5)$

f) $x\left(2 - \frac{3}{x}\right)$

312. $f(x) = x^2$. Leia $f'(5)$; $f'(-2)$; $f'\left(-\frac{3}{2}\right)$.

313. $g(x) = x^3 - 6x^2 + 2$. Leia $g(0)$; $g(2)$; $g'(0)$; $g'(4)$; $g'(-3)$.

314. Leia järgmiste funktsioonide tuletised.

a) $\sqrt{x} + \sqrt{2}$

d) $\frac{x}{a^2 + 1}$

g) $\frac{v^5}{v^3 - 2}$

b) $\sqrt{x}(x^3 - \sqrt{x} + 1)$

e) $\frac{1-x^3}{\sqrt{\pi}}$

h) $\frac{2x^4}{b^2 - x^2}$

c) $0,8y - \frac{y^3}{0,3} + \frac{1}{5y^2}$

f) $\frac{1}{t^2 + t + 1}$

i) $\frac{3}{(1-x^2)(1-2x^3)}$

315. Keha massiga 3 kg liigub sirgjooneliselt seaduse järgi

$$s = 1 + t + t^2,$$

kus s on avaldatud sentimeetrites ja t sekundites. Leia keha kinetiline energia $\left(\frac{mv^2}{2}\right)$ 5 sekundit pärast liikumise algust.

316. Ratas pöörleb nii, et pöördenurk on võrdeline aja ruuduga. Leia nurkkiirus ω 32 sekundit pärast liikumise algust, kui on teada, et esimese pöörde tegi ratas 8 sekundiga.

§ 61. TRIGONOMEETRILISTE FUNKTSIOONIDE TULETISED.

$$a) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Jooniselt 153 näeme, et täisnurgast väiksema positiivse kesknurga puhul on kolmnurga ADC pindala väiksem kui sektori ADC pindala ja see omakorda väiksem kui kolmnurga ADE pindala, s. t.

$$S_{\Delta ADC} < S_{\text{sektor } ADC} < S_{\Delta ADE}.$$

Avaldame kolmnurkade pindalad aluse ja kõrguse kaudu. Sektori pindala avaldub aga kesknurga (radiaanides) ja raadiuse poole korrutisena. Kesknurga suurus radiaanides olgu x . Ringi raadius olgu 1, s. t.

$$AD = AC = 1.$$

Seega saame võrratused

$$\frac{AD \cdot BC}{2} < \frac{AD \cdot x}{2} < \frac{AD \cdot DE}{2}$$

ja siit

$$BC < x < DE.$$

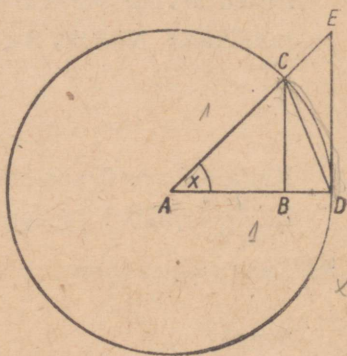
$$\text{Et } \frac{BC}{AC} = \sin x \text{ ja } AC = 1, \text{ siis } BC = \sin x.$$

$$\text{Et } \frac{DE}{AD} = \tan x \text{ ja } AD = 1, \text{ siis } DE = \tan x.$$

Seega

$$\sin x < x < \tan x.$$

Jagame saadud võrratused $\sin x$ -ga. Et meid huvitab juhtum, kus x positiivselt poolelt läheneb nullile, siis $\sin x > 0$ ja võrratuse märgid jäävad samapidisteks.



Joon. 153.

Saame

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{\tan x}{\sin x}.$$

$$\text{Et } \frac{\tan x}{\sin x} = \frac{\sin x}{\cos x \cdot \sin x} = \frac{1}{\cos x}, \text{ siis}$$

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Antud arvude pöördarvude võrdlemisel muutub võrratuse märk vastupidiseks. Näiteks $3 < 5$, aga $\frac{1}{3} > \frac{1}{5}$. Seega

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

Kui nüüd $x \rightarrow 0$, siis $\cos x \rightarrow 1$.

Et $\frac{\sin x}{x}$ jääb 1 ja $\cos x$ vahele, siis peab $x \rightarrow 0$ korral ka $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$.

Seega

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

b) $\sin x$ tuletis.

On antud funktsioon $y = \sin x$. Muutugu argument Δx võrra ja funktsioon selle tagajärjel Δy võrra. Saame

$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x).$$

Siit

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x.$$

Kasutame siinuste vahe korrutiseks teisendamise valemit:

$$\Delta y = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right).$$

Moodustame jagatise:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \cdot \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right).$$

Kui nüüd $\Delta x \rightarrow 0$, siis saamegi otsitava tuletise:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right).$$

Kui $\Delta x \rightarrow 0$, siis ka $\frac{\Delta x}{2} \rightarrow 0$ ja $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1$ ning

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) = \cos x.$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 \cdot \cos x.$$

Niisiis,

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x}$$

c) $\cos x$ tuletis.

On antud funktsioon $y = \cos x$. Kui argumendi muutumisel Δx võrra funktsioon muutub Δy võrra, siis

$$y + \Delta y = \cos(x + \Delta x).$$

Siit

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x.$$

Kasutades koosinuste vahe korrutiseks teisendamise valemit, saame

$$\Delta y = -2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \sin \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right).$$

Moodustame jagatise

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = - \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \sin \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)}{\Delta x},$$

mille kirjutame kujus

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = - \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \sin \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right).$$

Kui nüüd $\Delta x \rightarrow 0$, siis saamegi otsitava tuletise:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = - \sin x,$$

s. t.

$$\boxed{(\cos x)' = - \sin x}$$

d) $\tan x$ tuletis.

Olgu antud funktsioon $y = \tan x$. Et $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, siis kasutame otsitava tuletise leidmiseks jagatise tuletise leidmise eeskirja. Saame

$$\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Seega

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Ülesandeid.

317. Leia järgmiste funktsioonide tuletised.

a) $\sin^2 x$

e) $\sin 2x$

b) $\cos^2 x$

f) $\cos 2x$

c) $\sin x - \cos x$

g) $\tan 2x$

d) $\sin x \cdot \cos x$

h) $\tan^2 x$

318. Teades, et

$$\cot x = \frac{1}{\tan x}; \quad \sec x = \frac{1}{\cos x} \quad \text{ja} \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x},$$

lea funktsioonide $\cot x$, $\sec x$ ja $\operatorname{cosec} x$ tuletised.

319. Leia järgmiste funktsioonide muutumise hetkelised kiirused antud kohtades:

a) $\sin x$, kui $x = \frac{\pi}{3}$;

d) $\sin 3x$, kui $x = \frac{\pi}{8}$;

b) $\cos x$, kui $x = -\frac{\pi}{6}$;

e) $\frac{x^4}{4} + 2 \cos 2x$, kui $x = \frac{\pi}{6}$;

c) $2x^3 + 3 \sin 2x$, kui $x = \frac{\pi}{4}$;

f) $\frac{\cos x}{\sin 2x}$, kui $x = \frac{3}{4}\pi$.

320. Leia järgmiste funktsioonide tuletised.

a) $\sqrt{x} \sin^2 x$

c) $\frac{\tan x}{\sqrt{x} \cdot \cos x}$

b) $3x^2 \cdot \cos^2 x$

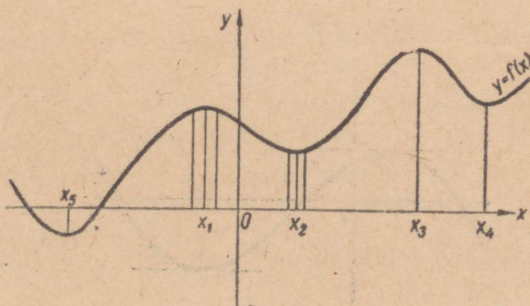
d) $\frac{x^2 \cdot \sin x}{\sqrt{x} \cdot \cos x}$

§ 62. TULETISTE TABEL.

Funktsioon	Tuletis
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
x^n , kus n on täisarv	$n \cdot x^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
c	0
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$f(x) + g(x)$	$f'(x) + g'(x)$
$f(x) \cdot g(x)$	$f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$
$\frac{f(x)}{g(x)}$, kus $g(x) \neq 0$	$\frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{[g(x)]^2}$

§ 63. FUNKTSIOONI EKSTREEMUMID.

Vaatleme funktsiooni $y=f(x)$ graafikut joonisel 154. Argumendi väärtusel x_1 on funktsiooni väärtus suurem kui tema naabruses asuvate argumendi väärtuste korral. Sel juhul ütleme, et



Joon. 154.

funktsioonil on kohal x_1 **maksimum**. Argumendi väärtust x_1 nimetatakse sel juhul ka funktsiooni **maksimumkohaks**.

Missugusel argumendi väärtusel on funktsioonil $f(x)$ joonisel 154 veel maksimum?

Argumendi väärtusel x_2 on funktsiooni väärtus väiksem kui tema naabruses asuvate argumendi väärtuste korral. Sel juhul ütleme, et funktsioonil on kohal x_2 **miinimum**. Argumendi väärtust x_2 nimetatakse sel juhul ka **miinimumkohaks**.

Missugusel argumendi väärtusel on funktsioonil $f(x)$ joonisel 154 veel miinimum?

Funktsiooni maksimumi ja miinimumi nimetatakse ühise nimega funktsiooni **ekstreemumiteks**. Vastavaid argumendi väärtusi nimetatakse **ekstreemumkohtadeks** ja vastavaid punkte funktsiooni graafikul — **ekstreemumpunktideks**.

Seega,

funktsioonil on maksimum siisugusel argumendi väärtusel, millele vastav funktsiooni väärtus on suurem naabruses asuvatele argumendi väärtustele vastavatest funktsiooni väärtustest

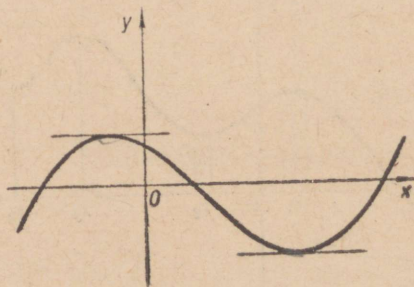
ja

funktsioonil on miinimum siisugusel argumendi väärtusel, millele vastav funktsiooni väärtus on väiksem naabruses asuvatele argumendi väärtustele vastavatest funktsiooni väärtustest.

Jälgime kõvera puutuja asendit ekstreemumpunktides.

Joonisel 155 näeme, et ekstreemumpunktides on puutuja x -teljega paralleelne, s. t. et ekstreemumpunktides on puutuja tõusunurk 0 ja seega ka puutuja tõus 0.

See tõsiasi võimaldab meil funktsiooni avaldisest määrata, millistel argumendi väärtustel on funktsioonil ekstreemum.



Joon. 155.

Teatavasti avaldub puutuja tõus tuletisena (vt. § 56).

Seega, kui on antud funktsioon $y=f(x)$, siis ekstreemumkohtade leidmiseks tuleb lahendada võrrand

$$f'(x)=0.$$

Näide 1. Olgu antud funktsioon $y=x^3-3x^2-9x+5$. Leida selle funktsiooni graafiku ekstreemumpunktid.

Ülesande lahendamiseks leiame antud funktsiooni tuletise

$$y'=3x^2-6x-9$$

ja lahendame võrrandi

$$3x^2-6x-9=0.$$

Lahenditeks on

$$x_1=-1 \text{ ja } x_2=3.$$

Seega, antud funktsiooni ekstreemumkohtadeks on argumendi väärtused -1 ja 3 .

Leitud arvud on ekstreemumpunktide abstsissideks. Ordinaadi väärtused leiame funktsiooni avaldisest:

$$y_1=3^3-3\cdot 3^2-9\cdot 3+5=-22;$$

$$y_2=(-1)^3-3\cdot (-1)^2-9\cdot (-1)+5=10.$$

Seega on ekstreemumpunktideks $E_1(-1; 10)$ ja $E_2(3; -22)$.

Näide 2. Leida funktsiooni $y=x^3$ ekstreemumkohad. Ülesande lahendamiseks leiame tuletise

$$y'=3x^2$$

ja lahendame võrrandi

$$3x^2=0.$$

Lahendiks on $x=0$.

Seega peaks funktsioonil $y=x^3$ olema kohal $x=0$ ekstreemum, kuid teame, et antud funktsiooni graafikul (joon. 105) pole üldse ekstreemumpunkte.

Jooniselt näeme, et puutujal on kohal $x=0$ eriline asend. Ta on küll paralleelne x -teljega, kuid lõikab funktsiooni graafikut.

Niisugust punkti, kus puutuja lõikab puutepunktis funktsiooni graafikut, nimetatakse käänupunktiks.

Seega võrrandi $f'(x)=0$ lahenditeks võivad peale ekstreemumkohtade olla ka käänupunktide abstsissid.

Edaspidi (§ 68) näitame, missugune tingimus peab veel olema täidetud, et võrrandi $f'(x)=0$ lahend oleks ekstreemumkohaks.

Küsimusi ja ülesandeid.

321. Missugune joon on ruutfunktsiooni graafikuks?

322. Kuidas asetseb parabool koordinaatteljestikus, kui ruutliikme kordaja on positiivne? negatiivne?

323. Missuguse ruutliikme kordaja puhul on parabooli haripunkt maksimumpunktiks? miinimumpunktiks?

324. Leia funktsiooni $y=3x^2-12$ ekstreemumkoht. Kas see on maksimum- või miinimumkoht?

325. Leia funktsiooni $y=-4x^2-16$ ekstreemumkoht. Kas see on maksimum- või miinimumkoht?

326. Leia järgmiste ruutfunktsioonide graafikute haripunktid.

a) x^2-3x+5

e) $(x+2)(x-3)$

b) $-2x^2+x-1$

f) $(3x+1)(2-x)$

c) $3-6x+5x^2$

g) $(2-t)^2-(2t+1)^2$

d) $8x-\frac{1}{2}x^2+1$

h) $(0,3t+2,1)^2-(2,7t-3,5)^2$

327. Leia järgmiste funktsioonide võimalikud ekstreemumkohad.

a) $2x^3-3x^2-36x+19$

e) $x^3-9x^2+15x+1$

b) x^3-3x^2+2

f) $x^3-12x^2+36x-15$

c) $\frac{1}{4}x^4-8x$

g) $x^4-4x^3+4x^2-13$

d) $\sin x + \frac{1}{2} \cos 2x$

h) $\tan x - 8 \sin x$

FUNKTSIOONIDE UURIMINE TULETISE ABIL.

§ 64. FUNKTSIOONI TEINE JA KOLMAS TULETIS.

Ülesandeid.

328. Leia järgmiste funktsioonide tuletised.

a) $y=3x^2+3x+3$

d) $y=\sin x + \cos x$

b) $y=5-6x^2+7x$

e) $y=\tan x - \frac{1}{\sin x}$

c) $y=3x^5-3x^2+\frac{3}{x^2}$

f) $y=4x+3x^{-5}$

329. Vaatle ülesandes 328 saadud tulemusi funktsioonina ja leia nende tuletised.

330. Vaatle ülesandes 329 saadud tulemusi jällegi funktsioonina ja leia nende tuletised.

Funktsiooni teiseks tuletiseks nimetatakse funktsiooni tuletise tuletist.

Teist tuletist tähistatakse y'' või $f''(x)$. Näiteks kui $y = \cos^2 x$, siis

$$\begin{aligned}y' &= -2 \cos x \cdot \sin x; \\y'' &= -2(-\sin^2 x + \cos^2 x).\end{aligned}$$

Kuidas saab leitud y' ja y'' avaldisi lühemalt üles kirjutada? Missuguste funktsioonide teisi tuletisi tuleb leida ülesandes 329?

Funktsiooni kolmandaks tuletiseks nimetatakse funktsiooni teise tuletise tuletist.

Kolmandat tuletist tähistatakse y''' või $f'''(x)$. Näiteks kui

siis

$$\begin{aligned}y &= 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x - 1, \\y' &= 16x^3 + 9x^2 + 4x + 1, \\y'' &= 48x^2 + 18x + 4, \\y''' &= 96x + 18.\end{aligned}$$

Missuguste funktsioonide kolmandaid tuletisi tuleb leida ülesandes 330?

Küsimusi ja ülesandeid.

331. Leia järgmiste funktsioonide tuletis, kui $x=1$.

a) $y = 4x^2 + 3x$	c) $y = 2\sqrt{x} - \frac{3}{x}$
b) $y = 5x^7 - 3x^5 + x^3$	d) $y = x^{-3} + x^{-2} + x^{-1}$

332. Leia järgmiste funktsioonide kolmandad tuletised.

a) $y = x^3 + 4x^2 + 3x - 10$	c) $y = \sin^2 x$
b) $y = 5x^3 - 6x^2 - 4x + 17$	d) $y = \cos x - \sin x$

333. Kuidas leida funktsiooni neljandat tuletist $y^{(4)}$?

334. Kuidas leida funktsiooni n -ndat tuletist $y^{(n)}$?

335. Leia funktsiooni $y = 2x^3 - 4x^2 + 3x + 5$ esimesed neli tuletist. Mida võib öelda kõigi järgmiste tuletiste kohta?

336. Leia funktsiooni $y = -4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 1$ esimesed neli tuletist. Mida võib öelda järgmiste tuletiste kohta?

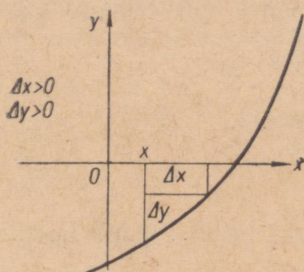
337. Leia funktsiooni $y = \sin x$ esimesed neli tuletist. Mida võib öelda järgmiste tuletiste kohta?

338. Leia funktsiooni $y = \cos x$ esimesed neli tuletist. Mida võib öelda järgmiste tuletiste kohta?

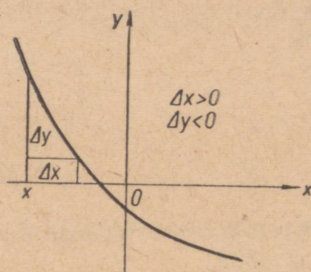
§ 65. FUNKTSIOONI KASVAMINE JA KAHANEMINE.

Teatavasti nimetatakse funktsiooni antud kohas kasvavaks, kui positiivsetele argumenti muutudele vastavad positiivsed funktsiooni muudud, ja kahanevaks, kui positiivsetele argumenti muutudele vastavad negatiivsed funktsiooni muudud.

Joonisel 156 on esitatud kasvava funktsiooni graafik ja joonisel 157 kahaneva funktsiooni graafik. Nendel graafikutel on nimetatud tingimused muutude kohta kehtivad iga punkti suhtes.

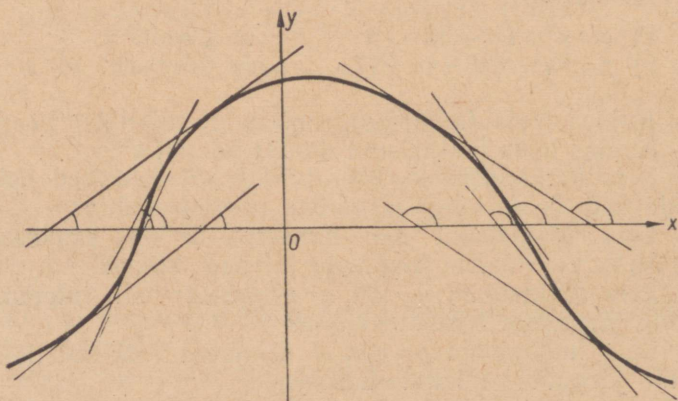


Joon. 156.



Joon. 157.

Jooniselt 158 paneme tähele, et piirkonnas, kus funktsioon on kasvav, on tema graafiku puutuja tõusunurk teravnurk ja seega puutuja tõus positiivne, ning piirkonnas, kus funktsioon on kahanev, on tema puutuja tõusunurk nürinurk ja seega puutuja tõus negatiivne.



Joon. 158.

Et puutuja tõusu on võimalik leida funktsiooni avaldisest tuletise leidmise teel, siis

funktsiooni kasvamise tunnuseks on $y' > 0$

ja
funktsiooni kahanemise tunnuseks on $y' < 0$.

Kui funktsioon on ühes piirkonnas kasvav ja teises kahanev, nagu näiteks ruutfunktsioon, siis on võrratus $y' > 0$ rahuldatud kasvamispiirkonnas ja $y' < 0$ kahanemiskiirkonnas.

Funktsiooni kasvamispiirkonna leidmiseks tuleb seega lahendada võrratus $y' > 0$ ja kahanemiskiirkonna leidmiseks võrratus $y' < 0$.

Näide 1. Leida funktsiooni $y = x^2 - 3x + 5$ kasvamis- ja kahanemiskiirkond.

Ülesande lahendamiseks leiame funktsiooni tuletise:

$$y' = 2x - 3.$$

Kasvamispiirkonnas on $y' > 0$, s. t. $2x - 3 > 0$. Siit $x > \frac{3}{2}$.

Kahanemiskiirkonnas on $y' < 0$, s. t. $2x - 3 < 0$. Siit $x < \frac{3}{2}$.

Seega on funktsioon $y = x^2 - 3x + 5$ piirkonnas $x > \frac{3}{2}$ kasvav ja piirkonnas $x < \frac{3}{2}$ kahanev.

Selles näites saadud tulemusi oskame leida ka tuletist kasutamata (vt. ruutfunktsiooni uurimine § 34).

Näide 2. Leida funktsiooni $y = x^3 - 2x^2 - 4x - 1$ kasvamis- ja kahanemiskiirkond.

Ülesande lahendamiseks leiame antud funktsiooni tuletise:

$$y' = 3x^2 - 4x - 4.$$

Kasvamispiirkonnas on $y' > 0$, s. t. $3x^2 - 4x - 4 > 0$, ja kahanemiskiirkonnas on $y' < 0$, s. t. $3x^2 - 4x - 4 < 0$.

Nende võrratuste lahendamiseks leiame funktsiooni $3x^2 - 4x - 4$ nullkohad, milleks on võrrandi $3x^2 - 4x - 4 = 0$ lahendid: $x_1 = -\frac{2}{3}$ ja $x_2 = 2$. Et siin x^2 kordaja on positiivne, siis

$$3x^2 - 4x - 4 > 0, \text{ kui } x < -\frac{2}{3} \text{ ja kui } x > 2,$$

$$3x^2 - 4x - 4 < 0, \text{ kui } -\frac{2}{3} < x < 2.$$

Seega on antud funktsioon kasvav, kui $x < -\frac{2}{3}$ ja kui $x > 2$, ning kahanev, kui $-\frac{2}{3} < x < 2$.

Jooniselt näeme, et

punktid, kus kasvamine läheb üle kahanemisele või kahanemine läheb üle kasvamisele, on ekstreemumpunktid.

Kummal nimetatud juhtudest on üleminekupunkt maksimumpunktiks ja kummal miinimumpunktiks?

Ülesandeid.

339. Näita, et funktsioon $y=x^3+x$ on kogu ulatuses kasvav.

340. Missugustel x väärtustel on funktsioon $y=x^3-3x^2+7$ kahanev?

341. Leia järgmiste funktsioonide kasvamis- ja kahanemispiirkonnad.

- a) $y=x^3-5x^2+3x-5$
- b) $y=2x^3-15x^2+36x-24$
- c) $y=2x^3-6x^2-18x+7$
- d) $y=x^4-2x^2-5$
- e) $y=x^5-5x^4+5x^3+1$

342. Selgita, kas funktsioon

$$y=\sin x+\cos x$$

on kohtadel $x_1=0$, $x_2=-\frac{\pi}{3}$ ja $x_3=\frac{\pi}{3}$ kasvav või kahanev.

343. Selgita, kas funktsioon

$$y=\sin 2x+\cos 2x$$

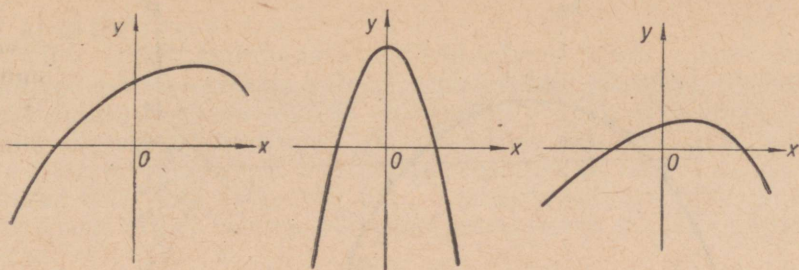
on kohtadel $x_1=0$, $x_2=\frac{\pi}{12}$, $x_3=-\frac{\pi}{12}$, $x_4=-\frac{\pi}{4}$, $x_5=\frac{\pi}{4}$ kasvav või kahanev.

344. Leia järgmiste funktsioonide kasvamis- ja kahanemispiirkonnad ning ekstreemumpunktid.

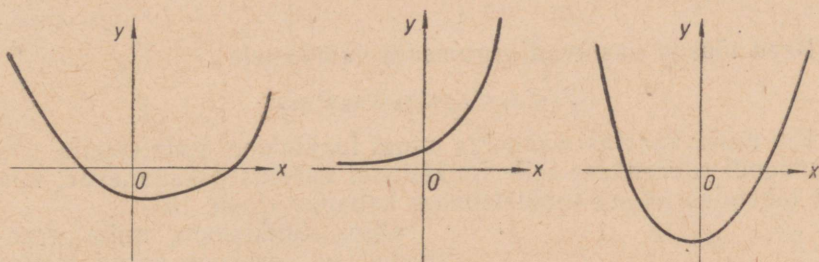
- a) x^2-x-2
- b) $-\frac{1}{3}x^2+2x-\frac{5}{3}$
- c) $\frac{1}{2}x^2+2x+\frac{5}{2}$
- d) x^3-3x
- e) $\frac{1}{4}x^4-8x$
- f) x^2-x^3
- g) x^3-3x^2+2
- h) $\frac{1}{3}x^3-x^2+\frac{1}{3}$
- i) $0,1x^4-1,3x^2+3,6$
- j) $-1\frac{1}{3}x^3+x-1$

§ 66. FUNKTSIOONI KUMERUS JA NÖGUSUS.

Joonisel 159 on esitatud mõnede funktsioonide graafikud, mis on kõik kumerad kõverad, ja joonisel 160 mõnede funktsioonide graafikud, mis on kõik nõgusad kõverad.



Joon. 159.



Joon. 160.

Paljude funktsioonide graafikud on aga ühes vahemikus kumerad, teises nõgusad (joon. 161).

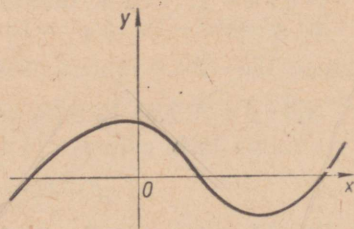
Millal on ruutfunktsiooni graafikuks kumer parabool, millal nõgus?

Seame nüüd ülesandeks leida tunnused, mille järgi võib funktsiooni graafikut nägemata, ainult tema analüütilisele esitusele tuginedes, leida piirkonnad, kus funktsiooni graafik on kumer ja kus nõgus. Vastavalt nimetatakse ka funktsiooni nendes piirkondades kumeraks ja nõgusaks.

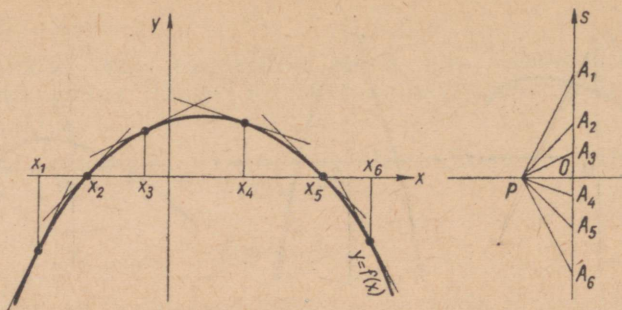
a) Kumerus.

Olgu antud koordinaatteljestikus kumer kõver (joon. 162). Ehitame sellele kõverale mitmes tema punktis puutujad. Kanname need puutujad paralleellükke abil punkti P , millest 1 ühiku kaugusel on vertikaalne sirge s . Paralleellükke abil ülekantud puutujad lõikavad seda sirget s vastavalt punktides $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$. Lõigud $OA_1, OA_2, OA_3, OA_4, OA_5, OA_6$ esitavad vastavate puutujate tõuse. Miks? Näeme, et nendel tõusudel on kindel suurusjärjestus:

$$OA_1 > OA_2 > OA_3 > OA_4 > OA_5 > OA_6.$$



Joon 161.

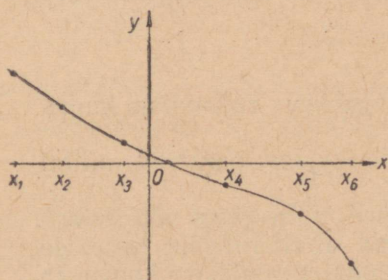


Joon. 162.

Need tõusud vastavad argumenti väärtustele

$$x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6.$$

Kui tõusu väärtusi vaadelda mingi funktsiooni väärtustena, siis argumenti suurenedes selle funktsiooni väärtused kahanevad, mis aga tähendab, et see funktsioon on kahanev (joon. 163).



Joon. 163.

Olgu funktsioon, mille graafikuks on eespool antud kumer kõver (joon. 162), $y=f(x)$. Sellele graafikule tõmmatud puutujate tõusude väärtused on aga funktsiooni $f'(x)$ väärtusteks. Arutluse tulemusena jõudsimme järeldusele, et funktsioon $f'(x)$ on kahanev. Kahanemise tunnuseks on tema tuletise negatiivsus, s. t. $f''(x) < 0$.

Niisiis,

funktsioon on kumer seal, kus $f''(x) < 0$.

Funktsiooni kumeruspiirkonna määramiseks tuleb seega lahendada võrratus $y'' < 0$.

Näide 1. Leida funktsiooni $y=3x^3-x^2+1$ kumeruspiirkond.

Et $y'=9x^2-2x$ ja $y''=18x-2$, siis ülesande lahendi saame võrratuse $18x-2 < 0$ lahendamise tulemusena, s. o. $x < \frac{1}{9}$.

Näide 2. Kas funktsioon $y=x^4-x^2$ on kohal $x=1$ kumer?

Leiame jälle esimese ja teise tuletise:

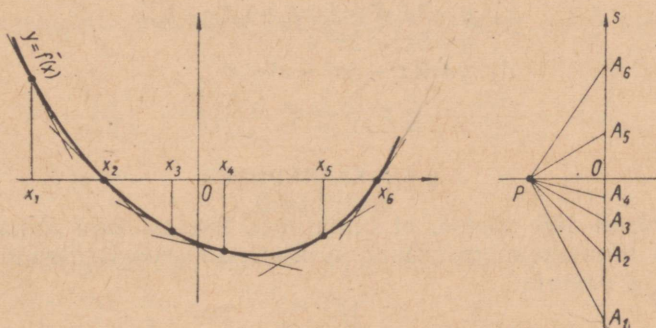
$$y'=4x^3-2x; \quad y''=12x^2-2.$$

Et $y''|_{x=1}=10 > 0$, siis funktsioon $y=x^4-x^2$ ei ole kohal $x=1$ kumer.

b) Nõgusus.

Olgu antud koordinaatteljestikus nõgus kõver (joon. 164). Ehitame sellele kõverale mitmes tema punktis puutujad. Kanname need puutujad paralleellükke abil punkti P , millest 1 ühiku kaugusel on vertikaalne sirge s . Paralleellükke abil ülekantud puutujad lõikavad seda sirget s vastavalt punktides $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$. Lõigud $OA_1, OA_2, OA_3, OA_4, OA_5, OA_6$ esitavad vastavate puutujate tõuse. Miks? Näeme, et nendel tõusudel on kindel suurusjärjestus:

$$OA_1 < OA_2 < OA_3 < OA_4 < OA_5 < OA_6.$$



Joon. 164.

Need tõusud vastavad argumenti väärtustele

$$x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6.$$

Kui tõusu väärtusi vaadelda jälle mingi funktsiooni väärtusena, siis on see funktsioon kasvav, sest argumenti suurenedes ka funktsiooni väärtused suurenevad (joon. 165).

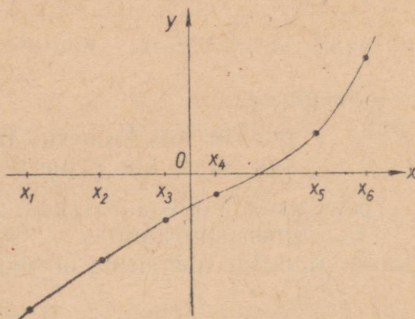
Kui antud nõgus kõver (joon. 164) on funktsiooni $f(x)$ graafikuks, siis on tõusude väärtused funktsiooni $f'(x)$ väärtusteks ja et see funktsioon on kasvav, siis peab $f''(x) > 0$.

Niisiis,

funktsioon on nõgus seal, kus $f''(x) > 0$.

Kuidas saab leida funktsiooni nõgususpiirkonda?

Kuidas saab kindlaks teha, kas funktsioon on etteantud kohas nõgus?



Joon. 165.

Ülesandeid.

345. Näita, et funktsioon x^4+x^2 on x iga väärtuse korral nõgus.

346. Missugustel x väärtustel on funktsioon x^3-2x^2+x-1 kumer?

347. Missugustel x väärtustel on funktsioon $3x^3+4x^2-5$ nõgus?

348. Leia järgmiste funktsioonide kumerus- ja nõgususpiirkonnad.

a) $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x - 1$

b) $y = 3,6x^3 - 2,4x^2 + 1,2x + 0,5$

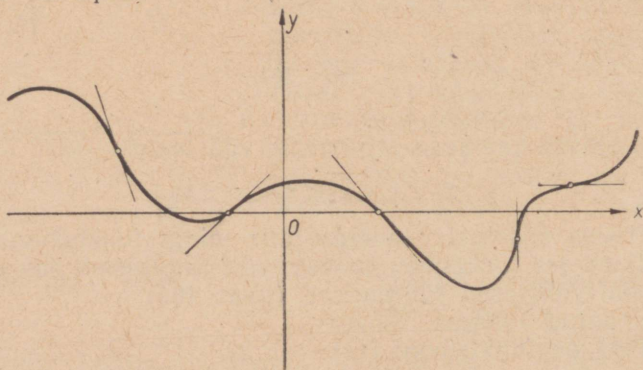
c) $y = 5x^4 - 3x^2 + 1$

d) $y = 2x^4 - 3x^3 + x^2 - x$

e) $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4$

§ 67. KÄÄNUPUNKT.

Jooniselt 166 näeme, et punktides, kus puutuja lõikab puutepunktis funktsiooni graafikut, toimub kumeruselt üleminek nõgususele ja vastupidi.



Joon. 166.

Seega,

punkte, kus kumerus läheb üle nõgususeks või kus nõgusus läheb üle kumeruseks, nimetatakse käänupunktideks.

Kus asub joonisel 161 käänupunkt?

Et kumeruspiirkonnas $y'' < 0$ ja nõgususpiirkonnas $y'' > 0$, siis käänupunktide abstsissid on võrrandi

$$y'' = 0$$

lahenditeks.

Näide. Leida kõvera $y=x^3-4x^2+3x-4$ käänupunktid.

Ülesande lahendamiseks leiame antud funktsiooni esimese ja teise tuletise:

$$\begin{aligned}y' &= 3x^2 - 8x + 3; \\ y'' &= 6x - 8.\end{aligned}$$

Käänupunkti abstsissi saame võrrandist

$$6x - 8 = 0,$$

kust

$$x = \frac{4}{3}.$$

Käänupunkti ordinaadi leidmiseks asetame $x = \frac{4}{3}$ funktsiooni avaldisse:

$$y = \left(\frac{4}{3}\right)^3 - 4 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 + 3 \cdot \frac{4}{3} - 4 = -\frac{128}{27} \approx -4,7.$$

Ülesandeid.

349. Leia järgmiste funktsioonide käänupunktid.

a) $10x^3 - 15x^2 - 11$

c) $(x-3)^2(x-10)$

b) $x^3 - x^2 + 2x + 1$

d) $(x-1)(x-7)(x+5)$

§ 68. MAKSIMUM- JA MIINIMUMPUNKTID.

Maksimum- ja miinimumpunktide tunnused.
Olgu antud funktsioon $y=f(x)$.

Teame, et tema ekstreemumkohad saadakse kätte võrrandi $f'(x)=0$ lahendamise teel. Jääb aga määramata, kas need on maksimum- või miinimumkohad või on need hoopis käänupunkti abstsissid. Seda saame kindlaks teha, kui kasutame tõsiasja, et maksimumkohal on funktsioon kumer ja miinimumkohal nõgus.

Olgu võrrandi $f'(x)=0$ lahenditeks näiteks x_i ja x_k , s. t. $f'(x_i)=0$ ja $f'(x_k)=0$.

Osutugu nüüd, et $f''(x_i)>0$ ja $f''(x_k)<0$, s. t. kohal x_i on funktsioon nõgus ja kohal x_k kumer. Seega on funktsioonil $f(x)$ kohal x_i miinimum ja kohal x_k maksimum.

Kui aga näiteks kohal x_k on käänupunkt, siis $f''(x_k)=0$.

Seega tingimuseks, et võrrandi $f'(x)=0$ lahend x_m oleks ekstreemumkohaks, on

$$f''(x_m) \neq 0.$$

Olgu märgitud, et selleks, et kohal x_k oleks funktsioonil $f(x)$ käänupunkt, peab olema täidetud tingimus $f'''(x_k) \neq 0$.

N ä i d e. Leida funktsiooni $y=x^3-2,5x^2-12x+5$ maksimum- ja miinimumkohad.

Ülesande lahendamiseks leiame kõigepealt ekstreemumkohad. Selleks tuleb lahendada võrrand

$$3x^2-5x-12=0.$$

Lahenditeks on $x_1=-\frac{4}{3}$ ja $x_2=3$.

Et kindlaks teha, kumb neist on maksimum-, kumb miinimumkohaks, selleks leiame teise tuletise

$$y''=6x-5$$

ja kontrollime selle märki, kui $x=-\frac{4}{3}$ ja $x=3$:

$$y'' \Big|_{x=-\frac{4}{3}} = 6 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) - 5 = -13 < 0;$$

$$y'' \Big|_{x=3} = 6 \cdot 3 - 5 = 13 > 0.$$

Seega on $x_1=-\frac{4}{3}$ maksimumkohaks ja $x_2=3$ miinimumkohaks.

Ülesandeid.

350. Leia järgmiste funktsioonide maksimum- ja miinimumkohad.

a) x^2-3x+2

d) x^3-4x^2+2x-1

b) $3x^2+4x-1$

e) x^3+x^2-x+1

c) $2x^3-3x^2+x$

f) $2x^4+3x^3-5$

351. Leia järgmiste funktsioonide nullkohad, ekstreemumkohad ja käänupunktid.

a) $2x^3-3x$

d) $(x-1)(x+2)$

b) $3x^2-4x-3$

e) $(x+1)(x-3)^2$

c) $3x^4+2x^3$

f) $(2x-1)(3x+2)(x+1)$

352. Leia järgmiste funktsioonide nullkohad, positiivsus- ja negatiivsuspiirkonnad, ekstreemumpunktid, kasvamis- ja kahane-mispiirkonnad, käänupunktid ning kumerus- ja nõgususpiirkonnad. Saadud andmete järgi skitseeri vastavad kõverad.

a) $(x+2)(2x-1)$

d) x^3-3x

b) $(x-1)(x-2)(x+3)$

e) x^4-4x^2

c) $3x^3-2x^2-x$

f) $2x^2-x^4-1$

b) Suurima ja vähima väärtuse leidmise ülesanded.

Funktsiooni väärtus, mis vastab ekstreemumkohale, on suurem või väiksem ekstreemumkoha naaberpunktile vastavatest funktsiooni väärtustest.

Et ekstreemumkohti saab kergesti tuletise abil leida, siis paljudes probleemides kasutatakse tuletist funktsiooni suurima või vähima väärtuse leidmiseks.

Toome mõned näited.

Näide 1. Jaotada arv 70 kaheks osaks nii, et nende korrutis oleks suurim.

Olgu üks arv x , siis teine on $70-x$. Funktsioon, mille maksimumkoht tuleb leida, on

$$y = x(70 - x)$$

ehk

$$y = 70x - x^2.$$

Leiame tuletise ja võrdsustame selle nulliga:

$$y' = 70 - 2x; \quad 70 - 2x = 0,$$

millest

$$x = 35.$$

Et antud funktsioon on ruutfunktsioon negatiivse ruutliikme kordajaga, siis haripunkt on maksimumpunktiks ja seega korrutis

$$35 \cdot 35 = 1225$$

on suurim.

Näide 2. Missuguste mõõtmete korral on silindrikujulise konservitoosi valmistamiseks kulutatud vähim hulk plekki, kui konservitoosi ruumala on V .

Tähistame silindri põhja raadiuse tähega r , kõrguse tähega h ja täispindala tähega S . Siis

$$S = 2\pi rh + 2\pi r^2,$$

millele lisandub ülesande andmete kohaselt tingimus $\pi r^2 h = V$, mis võimaldab meil S avaldada kas r või h funktsioonina.

Avaldame võrdusest $V = \pi r^2 h$ näiteks h :

$$h = \frac{V}{\pi r^2}$$

ja asetame selle S avaldisse:

$$S = 2\pi r \cdot \frac{V}{\pi r^2} + 2\pi r^2.$$

Pärast taandamist saame

$$S = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2.$$

Et leida, missuguse r väärtuse korral on S väärtus väikseim, selleks leiame tuletise r järgi ja võrdsustame selle 0-ga:

$$S' = -\frac{2V}{r^2} + 4\pi r;$$

$$-\frac{2V}{r^2} + 4\pi r = 0.$$

Lahendame selle võrrandi:

$$-V + 2\pi r^3 = 0;$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

$$\text{Et } h = \frac{V}{\pi r^2}, \text{ siis } h = \frac{V}{\pi \sqrt[3]{\left(\frac{V}{2\pi}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{\pi}{4V}}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}.$$

Parema ülevaate saamiseks konservitoosi kujust leiame suhte $\frac{r}{h}$:

$$\frac{r}{h} = \frac{\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}}{\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}} = \sqrt[3]{\frac{V \cdot \pi}{2\pi \cdot 4V}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2},$$

3. t. et konservitoosi kõrgus peab olema kaks korda suurem kui raadius ehk, teisiti, konservitoosi põhja läbimõõt ja kõrgus peavad olema võrdsed.

Tekib küsimus: kas leitud tulemuste korral kuulub konservitoosi valmistamiseks vähim või suurim hulk plekki.

Selleks leiame S'' :

$$S'' = -\frac{0 - 4Vr}{r^4} + 4\pi = \frac{4V}{r^3} + 4\pi.$$

Et $V > 0$ ja $r > 0$, siis ka $S'' > 0$ ja seega $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ on miinimumkohaks.

Ülesandeid.

353. 20 cm pikkune lõik on jaotatud kahte ossa. Üks osa võetakse risküliku aluseks, teine kõrguseks. Missuguse aluse puhul on risküliku pindala suurim?

354. Ristküliku pindala on 100 cm^2 . Missuguste mõõtmete korral on selle ristküliku übermõõt suurim?

355. Kolmnurga pindala on 18. Ehita see kolmnurk nii, et tema aluse ja kõrguse summa oleks väikseim. Mitu lahendit on sellel ülesandel?

356. Ruudukujulise plekitahvli külg on 60 cm. Plekitahvli nurkadest tuleb lõigata ära 4 ruutu nii, et järelejäänud osast saaks servi üles pöörates suurima ruumalaga karbi (joon. 167). Leia väljalõigatavate ruutude külje pikkus.

357. Ristkülikukujulisest papitükist, mille mõõtmed on 3 dm ja 5 dm, tuleb valmistada kaaneta karp. Selleks lõigatakse papitüki nurkadest ära võrdsed ruudud ja murtakse servad üles. Kui suur peab olema väljalõigatavate ruutude külg, et karbi ruumala oleks suurim?

358. Mõõda mõne konservitoosi kõrgus ja põhja läbimõõt ning leia, kui palju oleks saanud plekki kokku hoida:

a) ühe sama ruumalaga konservitoosi valmistamisel;

b) 100 000 sellise konservitoosi valmistamisel (vt. näide 2).

359. Mõõda tikutoosi mõõtmed. Kui suur on tema ruumala? Missugused peavad olema tikutoosi mõõtmed, et tema valmistamiseks kuluks vähim hulk materjali, eeldades, et toosi pikkus on tiku pikkusega määratud ja ühte toosi pandavate tikkude arv jääb samaks? (Arvutuste hõlbustamiseks loeme toosi kesta ja sahtli ristlõike mõõtmed võrdseteks.)

360. Kuidas tuleb valida silindrikujulise (pealt lahtise) liitri mõõtmed, et tema valmistamiseks kuluks vähim hulk plekki?

361. Soovitakse valmistada 1000-liitriline silindrikujuline boiler. Külje materjali ruutdetsimeeter maksab 50 kop., otste materjali ruutdetsimeeter 1 rbl. Missuguste mõõtmete korral on boileri materjalikulud väikseimad?

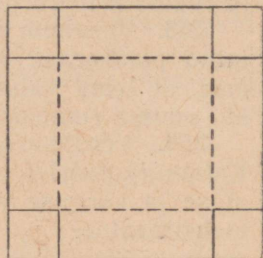
362. Risttahukakujulise paagi põhjaks on ruut. Paagi pindala ilma kaaneta on 108 dm^2 . Missugused peavad olema paagi mõõtmed, et paagi ruumala oleks suurim?

363. Tuleb valmistada pealt lahtine risttahukakujuline anum, mille põhjaks on ruut ja mille ruumala on 32 l. Millised peavad olema anuma mõõtmed, et selle valmistamiseks kuluks vähim hulk materjali?

364. Soovitakse valmistada 100-liitriline risttahukakujuline ruudukujulise põhjaga akvaarium. Kuidas tuleb valida akvaariumi mõõtmed, et

a) punasest vasest servad maksaksid võimalikult vähe?

b) põhi- ja külgpind tuleksid võimalikult odavad?



Joon. 167.

365. Aken koosneb ristkülikust ja sellele asetatud poolringist. Akna ümbermõõt on p . Kuidas tuleb valida akna laius ja kõrgus, et akent läbiv valgushulk oleks suurim?

366. Raamatu leheküljele soovitakse mahutada S cm² teksti ja jätta selle ümber l cm laiused ääred. Missugused mõõtmed peavad olema lehel, et raamatu valmistamiseks kuluks võimalikult vähe paberit?

367. Lahenda eelmine ülesanne juhul, kui $l=1,5$ ja $S=196$ cm². Kui palju on võimalik kokku hoida paberit, kui raamatu leheküljel on teksti $11 \times 17,8$ cm², raamatus on 400 lehekülge ja raamatu tiraaž on 30 000 eksemplari?

368. Veeanum koosneb lahtisest silindrist ja selle otsa kinnitatud poolkerast. Missugused peavad olema selle anuma mõõtmed, et tema valmistamiseks kuluks võimalikult vähe materjali, kui anuma ruumala on V m³?

369. Võrdhaarse kolmnurga aluse ja kõrguse summa on s . Kolmnurk pöörleb oma kõrguse ümber. Missugune seos peab olema aluse ja kõrguse vahel, et tekkinud pöördkeha ruumala oleks maksimaalne?

TULETISE MÕISTE KASUTAMINE VÖRRANDITE LIGIKAUDSEL LAHENDAMISEL.

§ 69. VÖRRANDI LIGIKAUDNE LAHENDAMINE.

Lineaarsete ja ruutvõrrandite lahendamine toimub kindlate eeskirjade kohaselt ja tulemuseks saadakse alati täpne lahend.

Näiteid.

$$1) \quad 3x - 1 = 7;$$

$$2) \quad 2x^2 - 3x + 1 = 0;$$

$$3x = 8;$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4};$$

$$x = \frac{8}{3}.$$

$$x_1 = \frac{4}{4} = 1;$$

$$x_2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Kui ruutvõrrandi lahend avaldub irratsionaalarvuna, siis leides ruutjuure kas algoritmi abil teatud täpsusega või kasutades tabeleid, saame ruutvõrrandi lahendid ligikaudselt kümnendmurdena.

Näide.

$$2x^2 + x - 2 = 0;$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+16}}{4};$$

$$x \approx \frac{-1 \pm 4,123}{4};$$

$$x_1 \approx \frac{3,123}{4} \approx 0,78;$$

$$x_2 \approx \frac{-5,123}{4} \approx -1,28.$$

Siin on lahendid antud sajandiku täpsusega.

Paljudel juhtumitel, eriti kõrgema astme võrrandite puhul, pole aga võimalik anda võrrandi lahendamiseks kindlaid eeskirju. Sel juhul kasutatakse võrrandi lahendamiseks nn. **ligikaudseid meetodeid**.

Nende meetodite abil täpsustatakse esialgseid proovimise teel või graafikult leitud lähendeid.

Olgu antud näiteks võrrand

$$x^3 - 3x - 5 = 0.$$

Tähistame võrrandi vasaku poole $f(x)$ -ga, s. t.

$$f(x) = x^3 - 3x - 5.$$

$$\text{Kui } x=1, \quad \text{siis } f(1) = -7;$$

$$,, \quad x=2, \quad ,, \quad f(2) = -3;$$

$$,, \quad x=3, \quad ,, \quad f(3) = 13.$$

Saadud tulemuste põhjal võib öelda, et antud võrrandil on üks lahend 2 ja 3 vahel. Miks? Seega võib arve 2 ja 3 vaadelda lahendi esimeste lähenditena.

Kui lahendit pole vaja leida suure täpsusega, siis võime öelda, et võrrandi $x^3 - 3x - 5 = 0$ lahendiks on $x \approx 2$.

Kui soovime lahendit saada kümnendiku täpsusega, siis tuleks proovida, missugune arvudest

$$2,1; 2,2; \dots; 2,9$$

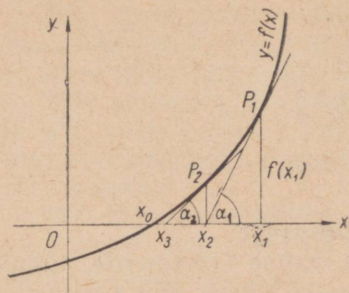
rahuldab kõige paremini antud võrrandit.

On mõeldav proovimise võtet kasutada ka sajandike, tuhandike jne. määramiseks, kuid arvutustehniliselt on see väga tülikas.

Seetõttu ongi tuletatud valemeid, mille abil saab võrrandi lahendeid kergemini täpsustada.

§ 70. NEWTONI VÕTE VÕRRANDI LAHENDI TÄPSUSTAMISEKS.

Olgu antud võrrand $f(x) = 0$, s. t. ülesandeks on määrata funktsiooni $y = f(x)$ nullkoht. Esitagu joonisel 168 kujutatud kõver funktsiooni $y = f(x)$ graafikut. Tähistame selle funktsiooni null-



Joon. 168.

koha tähega x_0 , mis aga tähendab, et x_0 on antud võrrandi täpne lahend.

Oletame, et proovimise teel on leitud antud võrrandi lahendi esimeseks lähendiks x_1 , s. t. $x_0 \approx x_1$ ehk

$$x_0 = x_1 + a,$$

kus a on nn. parandus, mis näitab ligikaudse lahendi erinevust täpsest lahendist.

Abstsissile x_1 vastab graafikul punkt P_1 . Läbi selle punkti kõverale tõmmatud puutuja moodustab x -teljega nurga α_1 . Selle puutuja tõus $k_1 = f'(x_1) = \tan \alpha_1$. Puutuja ja x -telje lõikepunkt määrab antud võrrandi lahendile märksa parema lähendi x_2 kui seda on x_1 .

Kasutades joonisel esitatud kolmnurka, võime kirjutada

$$\frac{f(x_1)}{x_1 - x_2} = \tan \alpha_1$$

ja siit

$$x_1 - x_2 = \frac{f(x_1)}{\tan \alpha_1}.$$

Et

$$\tan \alpha_1 = f'(x_1),$$

siis

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Kui tahame saada veel täpsemat lahendit, siis ehitame kõveral punkti $P_2(x_2; y_2)$ ja läbi selle punkti tõmbame puutuja, mis lõikumisega x -teljega määrabki antud võrrandi lahendile täpsema lähendi x_3 . Et siin on probleem täpselt samasugune nagu x_2 määramisel, siis võime kohe kirjutada, et

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}.$$

Kui ka sellest täpsusest ei piisa, siis tuleb analoogilise mõttekäigu abil leida järgmine lähend:

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} \text{ jne.}$$

Näide. Olgu tarvis leida võrrandi

$$x^3 - x - 5 = 0$$

lahendi õiged numbrid kuni tuhandikeni.

Antud ülesandes on $f(x) = x^3 - x - 5$. Proovimise teel leiame, et

$f(1) = -5$ ja $f(2) = 1$. Seega on lahend 1 ja 2 vahel. Olgu $x_1 = 2$. Newtoni võtte rakendamiseks on vaja teada $f(x)$ tuletist:

$$f'(x) = 3x^2 - 1.$$

Nüüd võime avaldada x_2 :

$$x_2 = 2 - \frac{f(2)}{f'(2)} = 2 - \frac{1}{11} \approx 1,909.$$

Analoogiliselt leiame x_3 ja x_4 :

$$x_3 = 1,909 - \frac{0,048}{9,935} \approx 1,909 - 0,005 = 1,904;$$

$$x_4 = 1,904 - \frac{0,002}{9,878} \approx 1,904 - 0,0002 \approx 1,904.$$

Et kõik kohad kuni tuhandikeni jäid püsima, siis võime öelda, et saadud lahend $x = 1,904$ esitab antud võrrandi lahendi õiged numbrid kuni tuhandikeni.

Ülesandeid.

370. Lahenda järgmised ruutvõrrandid, leides lahendid sajandiku täpsusega.

a) $x^2 = 30$

d) $x^2 - 3x - 3 = 0$

b) $3x^2 = 78$

e) $x^2 + x - 8 = 0$

c) $2,3x^2 - 46,1 = 0$

f) $2x^2 - 5x + 1 = 0$

371. Leia, missuguste täisarvude vahel on järgmistel võrranditel lahend.

a) $x^3 - 3x - 1 = 0$

d) $x^3 + x^2 - 1 = 0$

b) $x^3 - 5x - 10 = 0$

e) $x^3 - 3x^2 + 2x - 1 = 0$

c) $x^3 + 2,5x + 40 = 0$

f) $x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = 0$

372. Leia järgmiste võrrandite lahenditele täisarvulised lähendid ja täpsusta neid Newtoni võttega.

a) $x^3 - 4x + 7 = 0$

d) $x^3 + 6x^2 + 5 = 0$

b) $x^3 - 6x + 3,5 = 0$

e) $x^3 - 2x + 18 = 0$

c) $x^3 - 2x - 5 = 0$

f) $x^4 - x - 4 = 0$

373. Võrrandi $x^3 + px + q = 0$ lahendid on samad, mis võrrandil $x^3 = -px - q$. Seega on antud võrrandi lahenditeks funktsioonide

$$y = x^3 \text{ ja } y = -px - q$$

graafikute lõikepunktide abstsissid. Kasutades seda tõsiasja,

kontrolli ülesande 370 ja ülesande 371 kahe esimese võrrandi lahendeid graafiliselt.

374. Pane avaldises x^3+bx^2+cx+d tähe x asemele $(x+a)$. Missugune väärtus tuleb anda a -le, et pärast asendamist poleks avaldises enam x^2 -ga liiget?

375. On antud võrrand $x^3-3x^2+2x-1=0$. Teisenda selle võrrandi vasak pool niisuguseks, et sealt puuduks x^2 -ga liige (vt. eelmine ülesanne). Kas antud võrrandil ja saadud võrrandil on ühesugused lahendid? Mille võrra need lahendid erinevad?

376. Lahenda võrrandid järgmise skeemi kohaselt:

- 1) kasuta ruutliikmest vabastamise teisendust;
- 2) leia saadud võrrandile ligikaudsed lahendid, kasutades funktsiooni $y=x^3$ graafikut;
- 3) täpsusta saadud lahendeid Newtoni võttega sajandikeni.

a) $x^3+x^2-1=0$

d) $x^3+3x^2-x-3=0$

b) $x^3-6x^2-10=0$

e) $x^3-3,9x^2-3,9x+10,8=0$

c) $x^3+2x^2-3x+1=0$

f) $x^3-4,2x^2-12,6x+45,9=0$

NEWTONI BINOOMVALEM.

§ 71. BINOOMI $x+1$ ASTMETE ARENDID.

Summa ruudu ja summa kuubi valemite järgi võime kirjutada:

$$(x+1)^2=x^2+2x+1;$$

$$(x+1)^3=x^3+3x^2+3x+1.$$

Kasutades neid valemmeid võime jätkata $x+1$ astmete väljakirjutamist:

$$(x+1)^4=(x+1)^3(x+1)=x^4+4x^3+6x^2+4x+1;$$

$$(x+1)^5=(x+1)^4(x+1)=x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x+1$$

jne.

Nende võrduste paremaid pooli nimetatakse lühidalt **binoomi $x+1$ astmete arenditeks**.

Esitame binoomi $x+1$ astmete arendite kordajad tabelina:

			1		
		1		1	
	1		2		1
	1	3		3	1
	1	4	6	4	1
1	5	10	10	5	1

Seda tabelit nimetatakse **Pascal'i kolmnurgaks**.

Pascal'i kolmnurgast näeme, et binoomkordajate kohta kehivad järgmised seaduspärasused:

- a) binoomkordajad asetsevad arendis sümmeetriliselt, s. t. arendi algusest ja lõpust võrdsetel kaugustel asetsevate liikmete kordajad on võrdsed;
- b) esimese ja viimase liikme kordaja on 1;
- c) teise ja eelviimase liikme kordaja on võrdne binoomi astendajaga.

Edaspidi näitame, et need omadused kehtivad iga naturaalarvulise astendajaga binoomi arendi kohta.

Ülesandeid.

377. Esita binoomide $(x+1)^6$, $(x+1)^7$, $(x+1)^8$ arendid ja täienda nende kordajatega Pascal'i kolmnurka.

378. Leia Pascal'i kolmnurga abil, kuidas saab teise astme binoomi arendi kordajate kaudu välja kirjutada kolmanda astme binoomi arendi kordajaid, kolmanda astme binoomi arendi kordajate kaudu neljanda astme binoomi arendi kordajaid jne.

379. Sõnasta Pascal'i kolmnurga jätkamise reegel ja täienda selle abil Pascal'i kolmnurka binoomide $(x+1)^9$ ja $(x+1)^{10}$ kordajatega.

§ 72. FUNKTSIOONI $f^n(x)$ TULETIS.

a) $f^2(x)$ tuletis.

Et $f^2(x) = [f(x)]^2 = f(x) \cdot f(x)$, siis kasutame siin korrutise tule-tise leidmise eeskirja. Saame

$$[f^2(x)]' = f'(x) \cdot f(x) + f(x) \cdot f'(x) = 2f(x) \cdot f'(x).$$

b) $f^3(x)$ tuletis.

Kasutades eelmist tulemust ja jällegi korrutise tule-tise leidmise eeskirja, võime kirjutada:

$$\begin{aligned} [f^3(x)]' &= [f^2(x) \cdot f(x)]' = [f^2(x)]' \cdot f(x) + f^2(x) \cdot f'(x) = \\ &= 2f(x) \cdot f'(x) \cdot f(x) + f^2(x) \cdot f'(x) = 3f^2(x) \cdot f'(x). \end{aligned}$$

c) $f^n(x)$ tuletis.

Leitud tulemuste põhjal võib oletada, et

$$[f^n(x)]' = n f^{n-1}(x) \cdot f'(x).$$

Kasutame selle võrduse tõestamiseks matemaatilise indukt-siooni meetodit.

Oletame, et teatud naturaalarvu k korral kehtib seos

$$[f^k(x)]' = k f^{k-1}(x) \cdot f'(x).$$

Tõestame nüüd, et

$$[f^{k+1}(x)]' = (k+1) f^k(x) \cdot f'(x).$$

Et

$$f^{k+1}(x) = f^k(x) \cdot f(x),$$

siis

$$\begin{aligned} [f^{k+1}(x)]' &= [f^k(x) \cdot f(x)]' = [f^k(x)]' \cdot f(x) + f^k(x) \cdot f'(x) = \\ &= k f^{k-1}(x) \cdot f'(x) \cdot f(x) + f^k(x) \cdot f'(x) = \\ &= (k+1) f^k(x) \cdot f'(x). \end{aligned}$$

Et $k=3$ puhul see valem kehtib (vt. punkt b), siis tõestatu põhjal kehtib ta ka $k=4$ puhul. Kui valem kehtib aga $k=4$ puhul, siis tõestatu põhjal kehtib ta ka $k=5$ puhul jne.

Seega olemegi tõestanud, et

$$[f^n(x)]' = n f^{n-1}(x) \cdot f'(x).$$

Ülesandeid.

380. Leia järgmiste funktsioonide tuletised.

a) $(x+1)^5$

f) $(3x^2+2x-1)^6$

b) $(2x-3)^7$

g) $(\sin x + \tan x)^{10}$

c) $\left(2 - \frac{3}{2}x\right)^6$

h) $\left(x + \frac{1}{x} + x\right)^{12}$

d) $(-4+3,72x)^9$

i) $(3 \cos x - 2 \sin x)^7$

e) $(x+1)^n$

j) $\left(3x + \frac{4}{x}\right)^n$

§ 73. BINOOMI $(x+1)^n$ AREND.

a) Binoomkordajate määramine.

Tuginedes binoomi astmete leitud arenditele, võime analoogia põhjal kirjutada n astme binoomi arendi korrapärastatud hulkliikmena x astmete suhtes. Meil pole ainult teada, kuidas avalduvad arendi kordajad astendaja kaudu. Nii võime kirjutada, et

$$\begin{aligned} (x+1)^n &= C_0 x^n + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \\ &+ \dots + C_{n-2} x^2 + C_{n-1} x + C_n, \end{aligned} \quad (I)$$

kus nn. binoomkordajad $C_0, C_1, C_2, \dots, C_{n-2}, C_{n-1}, C_n$ tuleb määrata.

Binoomkordajate määramiseks kasutame tõsiasja, et esitatud võrdus peab kehtima x iga väärtuse korral.

Kui $x=0$, siis

$$\begin{aligned} (0+1)^n &= C_0 \cdot 0^n + C_1 \cdot 0^{n-1} + C_2 \cdot 0^{n-2} + \\ &+ \dots + C_{n-2} \cdot 0^2 + C_{n-1} \cdot 0 + C_n \end{aligned}$$

ja siit

$$1^n = C_n, \text{ s. t. et } C_n = 1.$$

See tulemus on täiesti kooskõlas varem vaadeldud juhtumitega, kus binoomi arendi viimaseks liikmeks oli alati 1.

Järgmised kordajad määrame tuletise kaasabil. Selleks võtame võrduse (I) mõlemast poolest tuletise. Teades, et $[(x+1)^n]' = n(x+1)^{n-1}$, saame uue võrduse

$$n(x+1)^{n-1} = nC_0x^{n-1} + (n-1)C_1x^{n-2} + (n-2)C_2x^{n-3} + \dots + 2C_{n-2}x + C_{n-1}. \quad (II)$$

Võttes nüüd selles võrduses $x=0$, saame, et

$$C_{n-1} = n.$$

Järgmise kordaja määramiseks võtame tuletise võrdusest (II), saame

$$n(n-1)(x+1)^{n-2} = n(n-1)C_0x^{n-2} + (n-1)(n-2)C_1x^{n-3} + (n-2)(n-3)C_2x^{n-4} + \dots + 2C_{n-2}.$$

Kui $x=0$, siis

$$C_{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Nii edasi talitades leiame, et

$$C_{n-3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3};$$

$$C_{n-4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4};$$

$$\dots \dots \dots$$

$$C_{n-k} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3) \dots (n-k+1)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \dots k};$$

$$\dots \dots \dots$$

$$C_{n-n} = C_0 = \frac{n(n-1)(n-2) \dots 1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \dots n} = 1.$$

b) Faktoriaali mõiste.

Järjestikuste naturaalarvude korrutist, milledest väikseim on 1, kirjutatakse üles eri sümboliga, nn. **faktoriaali** abil.

Nii tähistame

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n = n!,$$

kus sümbolit $n!$ loeme « n faktoriaal».

c) Binoomkordajate üldavaldis.

Laiendades binoomkordaja C_{n-k} avaldises lugejat ja nimetajat korrutisega

$$(n-k)(n-k-1)(n-k-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = (n-k)!,$$

saame

$$C_{n-k} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3) \cdot \dots \cdot (n-k+1)(n-k)(n-k-1)(n-k-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot k(n-k)(n-k-1)(n-k-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}.$$

Selle murru võime hoopis lühemalt üles kirjutada, kui kasutame faktoriaali sümbolit:

$$C_{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Seega oleme saanud binoomi $(x+1)^n$ arendi kordajate üldliikme, mis võimaldab leida kõiki teisi binoomkordajaid, kui $k=0, 1, 2, \dots, n$.

d) Binoomkordajate omadused.

Kasutades binoomkordajate üldavaldist, leiame binoomkordajad $C_1, C_2, C_3, \dots, C_k$:

$$C_1 = C_{n-(n-1)} = \frac{n!}{(n-1)!(n-n+1)!} = \frac{n!}{(n-1)!} = n;$$

$$C_2 = C_{n-(n-2)} = \frac{n!}{(n-2)!(n-n+2)!} = \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} = \frac{n(n-1)}{2!};$$

$$C_3 = C_{n-(n-3)} = \frac{n!}{(n-3)!(n-n+3)!} = \frac{n!}{(n-3)! 3!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!};$$

.....

$$C_k = C_{n-(n-k)} = \frac{n!}{(n-k)!(n-n+k)!} = \frac{n!}{(n-k)! k!}.$$

Võrreldes kordajat C_k kordajaga C_{n-k} , näeme, et

$$C_k = C_{n-k}.$$

Seega,

1° binoomi $(x+1)^n$ arendis on algusest ja lõpust võrdsetel kaugustel seisvate liikmete kordajad võrdsed.

Siis on $C_0 = C_n, C_1 = C_{n-1}, C_2 = C_{n-2}$ jne.

Eespool veendusime, et $C_n = 1$. Nüüd teame, et $C_n = C_0$. Sellest järeldub, et

2° binoomi $(x+1)^n$ arendis on esimese ja viimase liikme kordajad võrdsed ühega.

Nägime ka, et $C_{n-1} = n$. Et aga $C_{n-1} = C_1$, siis

3° binoomi $(x+1)^n$ arendis on teise ja eelviimase liikme kordajad võrdsed binoomi astendajaga.

e) Binoomi $(x+1)^n$ arend.

Esitame nüüd binoomi $(x+1)^n$ arendi, asendades määramata kordajad määratud kordajatega.

$$(x+1)^n = x^n + nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^{n-3} + \dots + \frac{n!}{k!(n-k)!} x^{n-k} + \dots + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + nx + 1. \quad (\text{III})$$

Ülesandeid.

381. 1) Esita binoomide $(x+1)^8$ ja $(x+1)^{15}$ arendid.
 2) Esita binoomi $(x+1)^6$ arend juhul, kui $x=2$.
 3) Esita binoomi $(x+1)^5$ arend juhul, kui $x=3$.

§ 74. BINOOMI $(a+b)^n$ AREND.

Tuginedes $(x+1)^n$ arendile leiame nüüd $(a+b)^n$ arendi. Lähtume samasusest

$$(a+b)^n = \left[b \left(\frac{a}{b} + 1 \right) \right]^n = b^n \left(\frac{a}{b} + 1 \right)^n.$$

Edasi rakendame valemit (III):

$$(a+b)^n = b^n \left[\left(\frac{a}{b} \right)^n + n \left(\frac{a}{b} \right)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \left(\frac{a}{b} \right)^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \left(\frac{a}{b} \right)^{n-3} + \dots + \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{a}{b} \right)^{n-k} + \dots + \frac{n(n-1)}{2!} \left(\frac{a}{b} \right)^2 + n \cdot \frac{a}{b} + 1 \right].$$

Avades sulud ja taandades, saame

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2}b^2 + \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} a^{n-3}b^3 + \dots + \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k}b^k + \\ &+ \dots + \frac{n(n-1)}{2!} a^2b^{n-2} + nab^{n-1} + b^n. \end{aligned}$$

Viimast valemit nimetatakse Newtoni binoomvalemiks.

§ 75. NEWTONI BINOOMVALEMI OMADUSI.

Et Newtoni binoomvalemi kohaselt on binoomi $(a+b)^n$ arendis kordajad samad mis binoomi $(x+1)^n$ arendis, siis kehtivad siin needsamad juba tähele pandud omadused kordajate kohta.

1° Binoomkordajad on esitatavad Pascal'i kolmnurgana.

2° Binoomi arendi algusest ja lõpust võrdsetel kaugustel asetsevad kordajad on võrdsed.

3° Binoomi arendi liikmete arv on binoomi astendajast ühe võrra suurem.

Võttes binoomvalemis $a=b=1$, saame, et

4° binoomkordajate summa on 2^n .

Kontrolli seda omadust!

Kasutades võrdust $(a-b)^n = [a + (-b)]^n$, saame binoomvalemi vahe jaoks. Tee seda!

Võttes nüüd $a=b=1$, jõuame omaduseni

5° paarituarvulistel kohtadel seisvate binoomkordajate summa võrdub paarisarvulistel kohtadel seisvate binoomkordajate summaga.

Kontrolli seda omadust!

Ülesandeid.

382. Esita järgmiste binoomide arendid.

a) $(1-s)^4$

d) $(2-a)^8$

b) $(p+q)^5$

e) $(3x+4y)^6$

c) $\left(u + \frac{1}{u}\right)^{10}$

f) $(x^2+2y^2)^4$

383. Leia järgmised astmed kuni neljanda kohani pärast koma, kasutades selleks binoomi arendist vajalikku arvu liikmeid.

a) $(1,1)^8$

d) $(0,95)^6$

b) $(1,05)^{12}$

e) $(0,99)^5$

c) $(1,002)^{10}$

f) $(0,998)^{20}$

384. Leia järgmised astmed, kasutades Newtoni binoomvalemit.

a) 29^5

c) $(4+3)^6$

e) $(a+b)^4$

b) 99^3

d) $(6-52)^5$

f) $(a-b)^4$

§ 76. LIGIKAUDNE VALEM $(1+x)^n \approx 1+nx$.

Seame ülesandeks esitada funktsioon $(1+x)^n$ ligikaudu lineaarse funktsioonina, eeldades, et n on naturaalarv ja x on absoluutväärtuselt väike arv.

Kasutades Newtoni binoomvalemit võime kirjutada:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \dots + x^n.$$

Et x on absoluutväärtuselt väike arv ja seega tema astmed veelgi väiksemad, siis võime kirjutada:

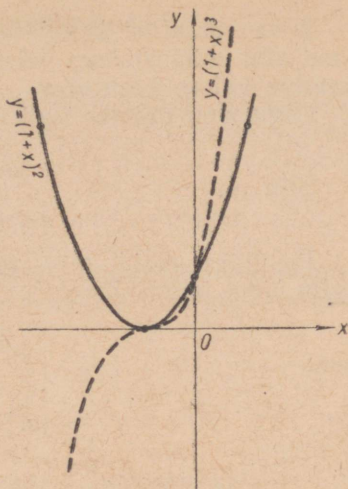
$$(1+x)^n \approx 1 + nx.$$

Funktsiooni $y = (1+x)^n$ graafikuks on parabool, mis läbib iga n korral punkte $(-1; 0)$ ja $(0; 1)$ (joon. 169).

Leiame selle parabooli puutuja tõusu punktis $(0; 1)$. Selleks avaldame funktsiooni tuletise ja leiame selle väärtuse, kui $x=0$:

$$y' = n(1+x)^{n-1};$$

$$y' \Big|_{x=0} = n.$$



Joon. 169.

Seega on parabooli $y = (1+x)^n$ puutuja tõus kohal 0 võrdne n -ga.

Sirge $y = 1 + nx$ tõus on samuti n ja ta läbib punkti $(0; 1)$. Seega on sirge $y = 1 + nx$ parabooli $y = (1+x)^n$ puutujaks kohal 0.

Kasutades valemit $(1+x)^n \approx 1 + nx$, asendame punkti $(0; 1)$ lähemas ümbruses parabooli kaare tema puutuja lõiguga.

§ 77. VALEMI $(1+x)^n \approx 1 + nx$ VIGA.

Newtoni binoomvalemi kohaselt

$$(1+x)^n = 1 + nx + \alpha,$$

$$\alpha = C_2 x^2 + C_3 x^3 + \dots + C_n x^n.$$

Asendame siin kõik x astmed x^2 -ga, siis

$$\alpha < (C_2 + C_3 + \dots + C_n) x^2.$$

Et binoomkordajate summa on 2^n , s. t.

$$C_0 + C_1 + \dots + C_n = 2^n,$$

siis

$$\alpha < (2^n - n - 1) x^2.$$

Suurendades x^2 kordajat 1 võrra, saame

$$\alpha < (2^n - n) x^2.$$

Seda võrratust kasutataksegi vea hindamiseks. Selle võrratuse abil määratakse, missuguste x väärtuste korral on ligikaudne valem kasutatav.

Olgu meil näiteks ligikaudne valem

$$(1+x)^6 \approx 1+6x.$$

Siin on

$$a < (2^6 - 6)x^2 = 58x^2.$$

Huvitagu meid, missuguste x väärtuste korral annab valem kolm õiget kümnendkohta. Selleks tuleb lahendada võrratus

$$58x^2 < 0,0005,$$

kust

$$|x| < \sqrt{\frac{0,0005}{58}} \approx 0,003.$$

Ülesandeid.

385. Leia, missuguste x väärtuste korral annab

- ligikaudne valem $(1+x)^4 \approx 1+4x$ kaks õiget kümnendkohta,
- ligikaudne valem $(1+x)^8 \approx 1+8x$ neli õiget kümnendkohta,
- ligikaudne valem $(1+x)^5 \approx 1+5x$ kolm õiget kümnendkohta.

FUNKTSIOONI DIFERENTSIAAL.

§ 78. FUNKTSIOONI DIFERENTSIAALI MÕISTE.

Joonisel on esitatud funktsiooni $y=f(x)$ graafik. Kohal x on sellele graafikule tõmmatud puutuja. Teame, et selle puutuja tõus on võrdne antud funktsiooni $f(x)$ tuletisega, s. o. $f'(x)$ -ga.

Olgu argumendi x muuduks Δx , mille tagajärjel funktsioon muutub Δy võrra. Joonisel on esitatud veel lõik BC , mis on tähistatud sümboliga dy . Kui Δx väheneb, siis väheneb ka erinevus Δy ja dy vahel. Küllalt väikeste Δx korral on

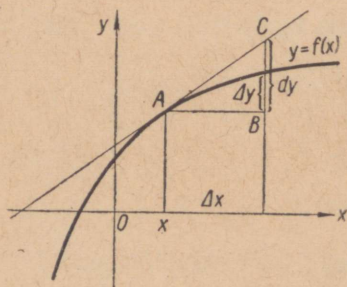
$$\Delta y \approx dy,$$

s. t. funktsiooni muut on ligikaudu võrdne muuduga kuni puutujani.

Suurust dy nimetatakse **funktsiooni diferentsiaaliks**.

Joonisel 170 esitatud kolmnurga ABC abil põhjenda, et kehtib seos

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x.$$



Joon. 170.

§ 79. FUNKTSIOONI $y=x$ DIFERENTSIAAL.

Kui $y=x$, siis $y'=1$. Järelikult

$$dy=1 \cdot \Delta x.$$

Et $y=x$, siis $dy=dx$, millest järeldub, et

$$dx=\Delta x.$$

Seega,

argumendi diferentsiaal on võrdne argumendi muuduga.

Saadud tulemuse põhjal võib funktsiooni diferentsiaali esitada kujus

$$dy=f'(x)dx.$$

§ 80. FUNKTSIOONI DIFERENTSIAALI KASUTAMINE LIGIKAUDSEL ARVUTAMISEL.

Nagu juba nimetatud, kasutatakse funktsiooni diferentsiaali funktsiooni muudu ligikaudse väärtusena. Seda põhjustab peamiselt funktsiooni muudu avaldise keerukus võrreldes diferentsiaali avaldisega. Toome mõned näited.

Funktsioon	Funktsiooni muut	Funktsiooni diferentsiaal
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{x^2(x+\Delta x)^2}$	$-\frac{2dx}{x^3}$
$\tan x$	$\frac{\sin \Delta x}{\cos x \cdot \cos (x+\Delta x)}$	$\frac{dx}{\cos^2 x}$

Kasutades seda tabelit, arvutame näiteks, kui suur on funktsiooni $\frac{1}{x^2}$ muut, kui argument muutub väärtuselt 1 kuni väärtuseni 1,01.

Arvutame funktsiooni muudu:

$$\left. \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{x^2(x+\Delta x)^2} \right|_{x=1}^{\Delta x=0,01} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 0,01 + (0,01)^2}{1^2 \cdot (1+0,01)^2} = \frac{0,0201}{1,0201} \approx 0,0197.$$

Arvutame funktsiooni diferentsiaali:

$$\left. -\frac{2dx}{x^3} \right|_{x=1}^{dx=0,01} = -\frac{2 \cdot 0,01}{1^3} = -0,02.$$

Nagu näeme, erineb funktsiooni diferentsiaal funktsiooni muudu väärtusest 0,0003 võrra, mis praktiliselt ei oma mingit tähtsust.

Ülesandeid.

386. Avalda järgmiste funktsioonide muut ja diferentsiaal.

a) x^2

d) $\frac{1}{\sqrt{x}}$

b) $4x^2 - 3x + 2$

e) x^{-3}

c) $\sin x$

f) $x^3 + x^{-2}$

387. $y = x^3 - x$. Leia Δy ja dy , kui $x = 2$ ja $\Delta x = 1; 0,1; 0,01$.

388. Leia funktsiooni $y = \sin x$ muudu ligikaudne väärtus, kui x muutub 30° kuni $30^\circ 1'$. Millega võrdub $\sin 30^\circ 1'$? Võrdle tulemust tabelist saadava tulemusega.

389. Leia funktsiooni $y = \tan x$ muudu ligikaudne väärtus, kui x muutub 45° kuni $45^\circ 10'$. Võrdle tulemust tabelist saadava väärtusega.

390. Leia ligikaudne väärtus: $\sin 60^\circ 3'$, $\sin 60^\circ 18'$, $\cos 45^\circ 2'$, $\cos 30^\circ 4'$. Võrdle tulemusi tabelist saadavate väärtustega.

391. Arvuta funktsiooni diferentsiaali abil:

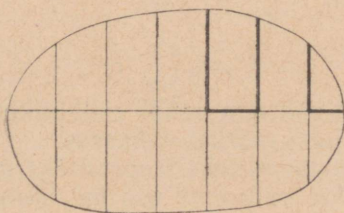
$$\sqrt{4,03}, \sqrt{25,1}, \sqrt{48,97}, \sqrt{0,98}.$$

VI. INTEGRAAL.

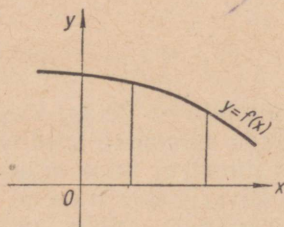
§ 81. KÕVERJOONSE TRAPETSI PINDALA (I).

Iga kinnise kõveraga piiratud pinnatükki (joon. 171) saab tükeldada nn. kõverjoonseteks trapetsiteks. Need on täisnurksed trapetsid, mille üks haar on kõverjoon, ja kolmnurgad, mille üks külg on kõverjoon. Et kolmnurka võib vaadelda trapetsi erijuhuna (üks alus on kõdunud nulliks), siis nimetatakse neid kujundeid ühise nimetusega **kõverjoonseteks trapetsiteks**.

Paigutame kõverjoonse trapetsi koordinaatteljestikku, nii nagu näidatud joonisel 172.



Joon. 171.

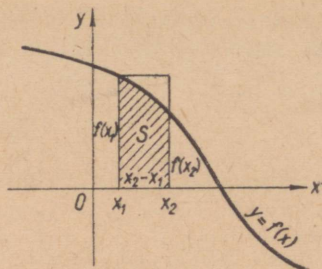
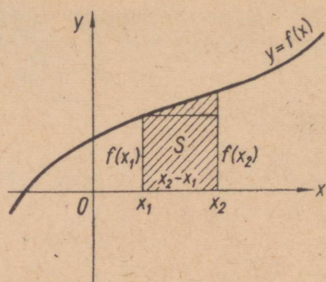


Joon. 172.

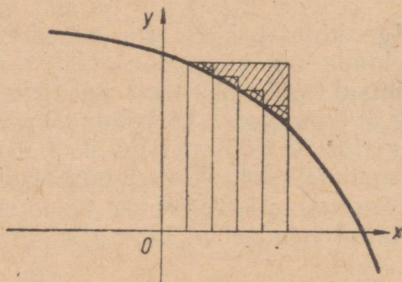
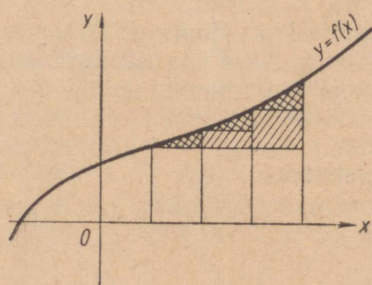
Et kõverjoonsel trapetsil on üks külg kõverjoon, siis tuleb trapetsi pindala defineerida piirväärtusena, nii nagu me seda ringi puhul tegime.

Kõverjoonse trapetsi kõverjoonne haar on osa mingi funktsiooni $y=f(x)$ graafikust. Trapetsi alused on seega $f(x_1)$ ja $f(x_2)$ (joon. 173). Kui võrdleme kõverjoonse trapetsi pindala S ristküliku pindalaga $f(x_1) \cdot (x_2 - x_1)$, siis $S > f(x_1) \cdot (x_2 - x_1)$, kui $f(x)$ on selles vahemikus kasvav, ja $S < f(x_1) \cdot (x_2 - x_1)$, kui $f(x)$ on selles vahemikus kahanev.

Joonisel 174 on antud kõverjoonne trapets tükeldatuna kitsamateks kõverjoonseteks trapetsiteks. Kui neid võrrelda ristkülikutega, nii nagu joonisel 174 näidatud, siis antud kõverjoonse tra-



Joon. 173.



Joon. 174.

petsi pindala on ikkagi kas suurem või väiksem nende ristkülikute pindalade summast, kuid erinevus on juba märksa väiksem.

On ilmne, et mida kitsamateks kõverjoonseteks trapetsiteks me antud kõverjoonse trapetsi jaotame, seda väiksema vea me teeme, kui lähendame antud kõverjoonse trapetsi pindala ristkülikute pindalade summaga.

Defineerimegi

kõverjoonse trapetsi pindala on võrdne temasse kujundatud ristkülikute pindalade summa piirväärtusega, kui $n \rightarrow \infty$:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x_1)(x_2 - x_1) + f(x_2)(x_3 - x_2) + \dots + f(x_{n-1})(x_n - x_{n-1})].$$

Kandilistes sulgudes on summa, mille liidetavad erinevad üksteisest ainult indeksite poolest. Sellist summat saab üles kirjutada lühemalt, kasutades selleks nn. summa märki $\sum$:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i).$$

Loeme: kõverjoonse trapetsi pindala on võrdne piirväärtusega summast, mille liidetavaiks on korrutised $f(x_i)(x_{i+1}-x_i)$, kus i omab järjest täisarvulisi väärtusi 1-st $(n-1)$ -ni, kui n kasvab tõkestamatult.

Ülesandeid.

392. Esita järgmised summad summa märgi abil.

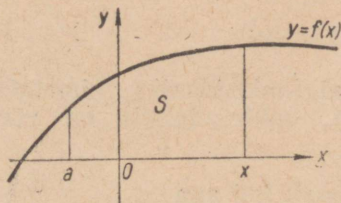
- a) $f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_5)$
- b) $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$
- c) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_s^2$
- d) $(x_1 + x_2) + (x_2 + x_3) + (x_3 + x_4) + \dots + (x_k + x_{k+1})$
- e) $\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_3 + a_4}{2} + \frac{a_5 + a_6}{2} + \dots + \frac{a_{n-1} + a_n}{2}$

393. Esita järgmised summad summa märgita.

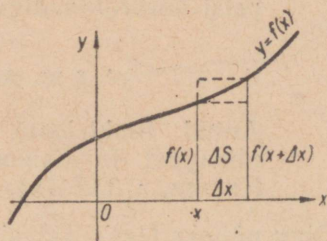
- a) $\sum_{i=1}^4 (a_i + b_i)^i$
- b) $\sum_{i=2}^5 \frac{i+2}{i}$
- c) $\sum_{i=3}^8 \frac{3-i^2}{i-2}$
- e) $\sum_{i=1}^n [f(x_i)]^2 (x_{i+1} - x_i)$
- d) $\sum_{i=1}^4 (i^2 + 2i + 1)$
- f) $\sum_{i=1}^n \left[\frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \right]^2$

§ 82. PINDALA TULETIS.

Joonisel 175 on koordinaatteljestikus esitatud funktsiooni $y=f(x)$ graafik ja sellel ordinaatlõik kohal a . Olgu see lõik kõverjoonse trapetsi üheks aluseks, tema üheks nn. äärordinaadiks. Võttes nüüd x ükskõik millise väärtuse, mis kuulub antud funktsiooni $f(x)$ määramispiirkonda, ja kujutades sellel



Joon. 175.



Joon. 176.

kohal ordinaatlõigu, esitab see kõverjoonse trapetsi teist alust, tema teist äärordinaati. Igale x väärtusele vastab nüüd kindel kõverjoonse trapetsi pindala (joon. 175). Seega võime öelda, et

kõverjoonse trapetsi pindala on argumendi funktsioon.

Tähistades kõverjoonse trapetsi pindala tähega S , võime kirjutada, et $S = S(x)$.

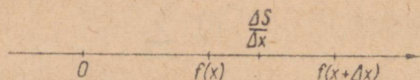
Muutugu argumendi väärtus x võrra, selle tagajärjel muutub kõverjoonse trapetsi pindala ΔS võrra. Jooniselt 176 näeme, et

$$f(x)\Delta x < \Delta S < f(x+\Delta x)\Delta x.$$

Jagame need väärtused Δx -ga. Et $\Delta x > 0$, siis jäävad võrratuse märgid samapidisteks:

$$f(x) < \frac{\Delta S}{\Delta x} < f(x+\Delta x).$$

Seega jääb suhe $\frac{\Delta S}{\Delta x}$ väärtuste $f(x)$ ja $f(x+\Delta x)$ vahele (joon. 177).



Joon. 177.

Kui $\Delta x \rightarrow 0$, siis $f(x+\Delta x) \rightarrow f(x)$. Et suhe $\frac{\Delta S}{\Delta x}$ jääb $f(x)$ ja $f(x+\Delta x)$ vahele, siis ka $\frac{\Delta S}{\Delta x} \rightarrow f(x)$, s. t.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = f(x).$$

Võrduse vasakul poolel on funktsiooni $S(x)$ tuletis. Seega,

$$S'(x) = f(x).$$

Kõverjoonse trapetsi pindala tuletis on võrdne selle trapetsi äärordinaadiga kohal x .

§ 83. ALGFUNKTSIOON.

Antud funktsiooni $f(x)$ algfunktsiooniks nimetatakse niisugust funktsiooni $F(x)$, mille tuletis on võrdne $f(x)$ -ga, s. t. $F'(x) = f(x)$.

Olgu näiteks $f(x) = 3x^2$, siis $F(x) = x^3$; kui aga

$$f(x) = \cos x, \text{ siis } F(x) = \sin x.$$

Funktsiooni x^3 nimetatakse funktsiooni $3x^2$ algfunktsiooniks ja funktsiooni $\sin x$ funktsiooni $\cos x$ algfunktsiooniks.

§ 84. MÄÄRAMATA INTEGRAAL.

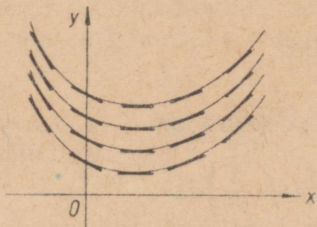
Funktsioonil $3x^2$ on aga veel teisi algfunktsioone peale x^3 . Näiteks ka funktsioonide x^3-3 , x^3+100 tuletised on võrdsed avaldisega $3x^2$. Üldiselt on kõigi kujus x^3+C avalduvate funktsioonide tuletis $3x^2$, kus C on konstant, millel võib olla mistahes reaalarvuline väärtus. Seda konstanti nimetatakse **määramata konstandiks**.

Kõigi niisuguste funktsioonide tuletised, mis on võrdsed $\cos x$ -ga, avalduvad kujus $\sin x+C$, kus C on määramata konstant.

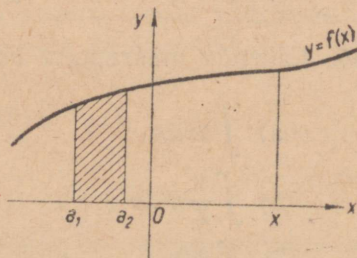
Avaldise x^3+C ja $\sin x+C$ nimetatakse vastavate **algfunktsioonide üldavaldiseks**.

Et antud funktsioonil on algfunktsioone lõpmata palju, seda saab näidata ka geomeetriliselt. Nagu teada, tähendab funktsiooni tuletis geomeetriliselt tema graafiku puutuja tõusu vastavas punktis. Samal argumendi väärtusel on aga kõigi niisuguste funktsioonide nagu x^3+C või $\sin x+C$ graafikute puutujate tõusud võrdsed, s. t. et algfunktsioonide graafikud on argumendi iga väärtuse korral n. ö. paralleelsed. Joonisel 178 on esitatud ühe funktsiooni algfunktsioonide graafikuid.

Võrduse $S'(x)=f(x)$ tuletamine ei ole seotud kõverjoonse trapetsi esimese aluse asukohaga. Seetõttu ei määragi seos $S'(x)=f(x)$ kõverjoonse trapetsi pindala funktsiooni $S(x)$ üheselt, sest ta sisaldab liidetavana ühe määramata konstandi. Kõverjoonsete trapetsite pindalad erineva esimese aluse asukohaga erinevad üksteisest konstantse pindala võrra, mis on võrdne nende esimese aluse asukohtade vahelise kõverjoonse trapetsi pindalaga. Joonisel 179 on esimene alus fikseeritud kohal a_1 ja a_2 . Need kaks trapetsit erinevad teineteisest joonisel viirutatud pindala võrra. Seni, kui esimese aluse asukoht pole fikseeritud, on see konstant määramata.



Joon. 178.



Joon. 179.

Tähistame funktsiooni $f(x)$ algfunktsiooni $F(x)$ -ga, siis on algfunktsioonideks ka funktsioonid $F(x) + C$, kus C on määramata konstant. Avaldist $F(x) + C$ nimetatakse funktsiooni $f(x)$ **algfunktsioonide üldavaldiseks** ehk **määramata integraaliks**. Sümbolites kirjutatakse see üles järgmiselt:

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

mida loetakse «määramata integraal funktsioonist $f(x)$ on $F(x) + C$ » või «määramata integraal diferentsiaalst $f(x) dx$ on $F(x) + C$ ».

Nii kirjutame

$$\int 3x^2 dx = x^3 + C$$

ja

$$\int \cos x dx = \sin x + C.$$

Ülesandeid.

394. Leia järgmistele funktsioonidele kolm algfunktsiooni.

a) $\sin x$

c) x

e) $\frac{1}{\cos^2 x}$

b) 3

d) $\frac{x^2}{2}$

f) $\frac{1}{\sin^2 x}$

395. Lahenda määramata integraalid.

a) $\int 3x^2 dx$

d) $\int \frac{dx}{x^2}$

g) $\int x^n dx$

b) $\int x^2 dx$

e) $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}}$

h) $\int \frac{dx}{x^3}$

c) $\int x^3 dx$

f) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$

i) $\int \sin x dx$

396. Lahenda määramata integraalid.

a) $\int 4x dx$

d) $\int (x + \sin x) dx$

b) $\int \frac{1}{2} x^2 dx$

e) $\int \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx$

c) $\int \frac{3dx}{\cos^2 x}$

f) $\int (\sin x + \cos x) dx$

397. Lahenda määramata integraalid, teisendades enne integreeritavat avaldist.

$$a) \int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)dx$$

$$d) \int \frac{\sqrt{u^3+1}}{\sqrt{u}+1} du$$

$$b) \int \left(\frac{1-z}{z}\right)^2 dx$$

$$e) \int \frac{x^2+7x+12}{x+4} dx$$

$$c) \int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}} dx$$

$$f) \int \frac{1+2x^2}{x^2} dx$$

§ 85. MÄÄRATUD INTEGRAAL.

Olgu kõverjoonse trapetsi esimene alus fikseeritud kohal $x=a$. Nüüd vastab igale argumenti väärtusele kindel kõverjoonse trapetsi pindala, s. t. et konstant, mis enne oli määramata, peab olema nüüd määratav. Leiame selle.

Konstandil on nüüd üks kindel väärtus sõltumata sellest, mis-sugusel argumenti väärtusel on võetud teine alus. Valime kõigist võimalikest x väärtustest selle, millele vastavat pindala suurust me teame. See on, kui teine alus ühtib esimesega, s. t. kui $x=a$. Siis on kõverjoonse trapetsi pindala 0, s. t. et

$$F(a) + C = 0$$

ja siit

$$C = -F(a).$$

Märgime integraali sümboli otste juurde need argumenti väärtused, millele vastavate ordinaatlõikude vahel asub vaadeldav kõverjoonne trapets. Neid väärtusi nimetatakse ka **integraali rajadeks**. Seega

$$\int_a^x f(x) dx = F(x) - F(a)$$

ehk

$$S(x) = F(x) - F(a).$$

Anname nüüd ka x -le kindla väärtuse. Siis peab vastava kõverjoonse trapetsi pindala avalduma samuti kindla väärtusena. Tõepoolest, asendades viimastes võrdustes $x=b$, saame

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

ehk

$$S(b) = F(b) - F(a).$$

Integraale, millel on fikseeritud rajad, nimetatakse **määratud integraalideks**.

Seost

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

kus $F'(x) = f(x)$, nimetatakse **Newton-Leibnizi valemiks**. See valem annab määratud integraalide arvutamise eeskirja. Algfunktsiooni järel kasutatakse rajade märkimiseks püstkriipsu. Näiteks

$$\int_1^3 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = 9 - \frac{1}{3} = 8\frac{2}{3},$$

mis tähendab, et parabooli $y = x^2$ alune pindala argumentide väärtustele 1 ja 3 vastavate ordinaatlõikude vahel on $8\frac{2}{3}$ ruutühikut.

Ülesandeid.

398. Arvuta järgmised integraalid.

a) $\int_0^{10} x dx$

d) $\int_0^a (3x^2 - x + 1) dx$

g) $\int_1^4 \frac{dx}{x^2}$

b) $\int_{\frac{a}{2}}^a x^2 dx$

e) $\int_1^{2.5} (2x+1)^2 dx$

h) $\int_4^9 \sqrt{x}(1 + \sqrt{x}) dx$

c) $\int_2^3 6x dx$

f) $\int_0^2 x^3 dx$

i) $\int_{0,8}^{1,2} \left(x^2 + 3x + \frac{1}{x^2} \right) dx$

§ 87. KÕVERJOONSE TRAPETSI PINDALA (II).

Eespool oleme kaht erinevat teed mööda jõudnud kõverjoonse trapetsi pindalani. Joonisel 180 esitatud kõverjoonse trapetsi pindala avaldub piirväärtusena

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) (x_{i+1} - x_i)$$

(vt. lk. 192) ehk tähistades vahesid $x_{i+1} - x_i$ lühemalt sümboliga Δx_i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \Delta x_i.$$

Sama pindala avaldus ka määratud integraalina

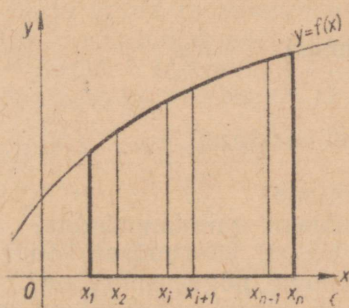
$$\int_a^b f(x) dx$$

Seega

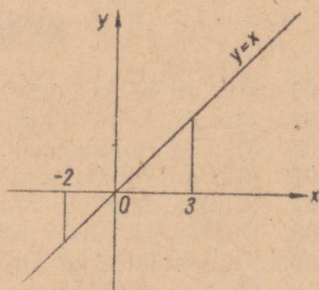
$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \Delta x_i.$$

Selle seose tundmine osutub edaspidi väga kasulikuks, sest mitmed küsimused, näiteks ruumala valemite tuletamisel, taanduvad niisugusele summa piirväärtusele. Teades, et see on võrdne määratud integraaliga, jõuamegi kiiresti vastuseni.

Viimasest võrdusest tuleneb ka üks omadus, mida määratud integraalide arvutamise juures tuleb arvestada siis, kui integreerimisrajade vahelises piirkonnas funktsiooni graafik lõikab x -telge. Nimelt, kui funktsiooni graafik on allpool x -telge, siis on funktsiooni



Joon. 180.



Joon. 181.

siooni väärtused negatiivsed; kui funktsiooni graafik on ülalpool x -telge, siis on funktsiooni väärtused positiivsed. Vastavalt sellele tulevad negatiivsed või positiivsed ka korrutised $f(x_i) \cdot \Delta x_i$. Nende korrutiste summaks ja selle summa piirväärtuseks saame siis mitte selle kõvera ja x -teljega määratud pindalade summa, vaid vahe

$$\int_{-2}^3 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{-2}^3 = \frac{9}{2} - \frac{4}{2} = 2\frac{1}{2}.$$

Jooniselt 181 näeme, et $\frac{9}{2}$ on positiivse osa pindala ja 2 negatiivse osa pindala. Nii et integreerimise tulemusena saame nende pindalade vahe.

Juhul, kui funktsiooni graafik lõikab x -telge, siis on otstarbekas määrata pindala eraldi allpool x -telge ja ülalpool x -telge ning siis tulemused liita.

Ülesanded.

399. a) Leia kujundi pindala, mida piiravad funktsiooni $y=x^2-4x+5$ graafik, x -telg ja sirged $x=3$ ja $x=5$.

b) Leia paraboliga $y=\frac{x^2}{2}$ sirgetega $x=3$ ja $x=6$ ning x -teliega piiratud kujundi pindala.

400. a) Leia segmenti pindala, mille sirge $y=2x+3$ lõikab paraboolist $y=x^2$.

b) Leia parabooli $y=x^2$ segmenti pindala, kui segmenti kõrgus on 8.

401. Leia kõveratega $y=\frac{1}{4}x^2$ ja $y=3-\frac{x^2}{2}$ piiratud pindala.

402. Leia kõveratega $y=x^2$ ja $y=\sqrt{x}$ piiratud pindala.

Kordamisküsimusi.

403. Mis on kõvera puutuja?

404. Mis on keha liikumise hetkeline kiirus?

405. Mis on funktsiooni tuletis?

406. Mis on funktsiooni ekstreemumid?

407. Kuidas leitakse antud funktsiooni miinimumkohta?

408. Kuidas leitakse antud funktsiooni kasvamispiirkond?

409. Kuidas leitakse antud funktsiooni nõgususpiirkond?

410. Kuidas saab kindlaks teha, et ekstreemumkoht on miinimumkohaks?

411. Missugust punkti nimetatakse käänupunktiks?

412. Missugusele valemile viib Newtoni võte võrrandi lahendi täpsustamiseks?

413. Esita Newtoni binoomvalem.

414. Mis tähendab sümbol $4!$?

415. Kuidas avaldub funktsiooni $f^n(x)$ tuletis?

416. Nimeta Newtoni binoomvalemi omadusi.

417. Mis on funktsiooni diferentsiaal?

418. Mis on algfunktsioon?

419. Mis on määramata integraal?

420. Mis on määratud integraal?

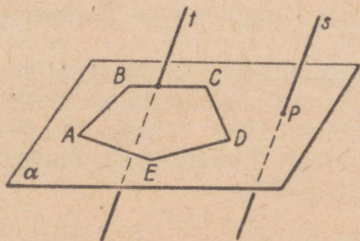
VII. HULKTAHUKAD JA PÖÖRDKEHAD.

PRISMA.

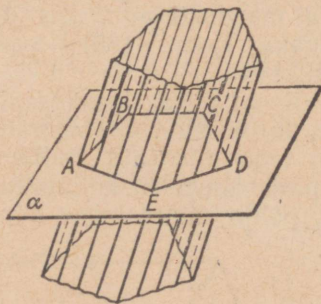
Käesoleva peatükiga alustame stereomeetriliste, s. o. ruumiliste kujundite ja nende omaduste käsitlemist. Tunneme küll juba prismat, püramiidi, silindrit, koonust ja kera, kuid nüüd seame eesmärgiks anda neile kehadele täpne definitsioon, tõestada nende kehade mitmesuguseid omadusi ja osalt juba tuttavate pindala ja ruumala valemite kehtivust.

§ 88. PRISMALINE PIND.

Olgu antud tasapinnal α kinnine murdjoon $ABCDEA$ ja veel sirge s , mis lõikab seda tasapinda (joon. 182). Vaatleme nüüd teist sirget t , mis lõikab antud murdjoont $ABCDEA$ ja on paralleelne sirgega s . Paneme sirge t liikuma nii, et ta kogu aeg lõi-



Joon. 182.



Joon. 183.

kab antud murdjoont $ABCDEA$ ja on paralleelne sirgega s . Olles läbinud kõik murdjoone lõigud on sirge t kujundanud ühe pinna. Seda pinda nimetame **prismaliseks pinnaks** (joon. 183).

Murdjoont $ABCDEA$ nimetame prismalise pinna **juhtjooneks** ja sirget t — **moodustajaks**.

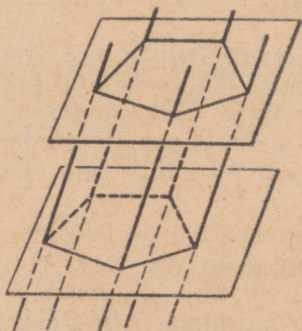
§ 89. PRISMA.

Lõikame prismalist pinda kahe paralleelse tasapinnaga, mis pole paralleelsed moodustajaga. Saame kinnise pinna, millega piiratud keha nimetatakse **prismaks** (joon. 184).

Seega,

prisma on keha, mis tekib prismalise pinna lõikamisel kahe paralleelse tasapinnaga, mis pole paralleelsed selle prismalise pinna moodustajaga.

Prismat piiravat prismalise pinna osa nimetatakse **prisma külgpinnaks** ja paralleelsete tasapindade osi **prisma põhjadeks**.



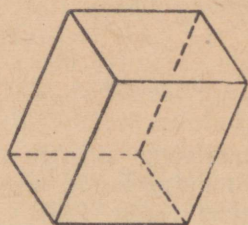
Joon. 184.



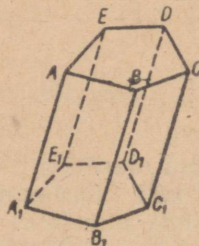
Joon. 185.

Kui prismalist pinda lõikavad tasapinnad on risti prismalise pinna moodustajaga, siis tekkinud prismat nimetatakse **püstprismaks** (joon. 185), vastupidisel juhul aga **kaldprismaks** (joon. 186).

Prismat piirav kinnine pind koosneb hulknurkadest. Niisugust keha, mille pind koosneb hulknurkadest, nimetatakse **hulktahukaks**; teda piiravaid hulknurki nimetatakse **tahkudeks**. Prisma külgpind koosneb nelinurkadest. Neid nimetatakse **külgtahkudeks**, põhju nimetatakse aga **põhitahkudeks**.

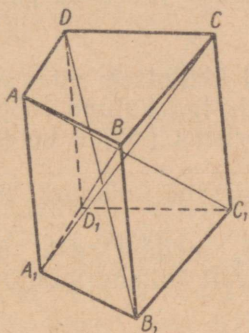


Joon. 186.

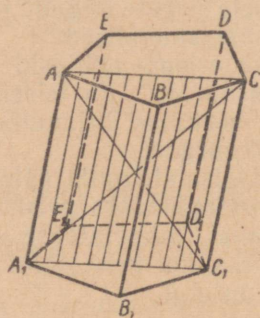


Joon. 187.

Sirglõike, mida mööda lõikuvad prisma külgtahud, nimetatakse prisma **külgservadeks** ja sirglõike, mida mööda lõikuvad külgtahud põhitahkudega, **põhiservadeks**. Servade lõikepunkte nimetatakse prisma **tippudeks**.



Joon. 188.



Joon. 189.

Prisma tippe tähistatakse suurte tähtedega. Nii nagu hulknurki kirjutasime üles nende tippude järgi (nelinurk $ABCD$), nii kirjutame ka prismsid üles nende tippude järgi. Joonisel 187 on esitatud prisma $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$. Lühemalt kirjutatakse ka nii: prisma AE_1 .

Prisma põhjade vahelist ristlõiku nimetatakse prisma **kõrguseks**.

Kaht mitte ühel tahul asetsevat tippu ühendavat sirglõiku nimetatakse prisma **diagonaaliks**. Näiteks on joonisel 188 prisma diagonaalideks lõigud AC_1 , BD_1 , CA_1 ja DB_1 .

Prisma kaks lõikuvat diagonaali määravad prisma **diagonaal-lõike** (joon. 189).

Mitu diagonaallõiget saab kujutada joonistel 188 ja 189 esitatud prismadesse?

Mitu diagonaali saab kujutada joonisel 185 esitatud prismasse?

§ 90. PRISMA OMADUSED.

1° Prisma külgtahud on rööpkülilikud.

Prisma külgtahkudeks on nelinurgad. Nendel nelinurkadel on vastasküljed paralleelsed: üks paar vastaskülgi (prisma külgservad) on paralleelsed prismalise pinna konstruksiooni põhjal, teine paar vastaskülgi (prisma põhiservad) on aga paralleelsed seetõttu, et nad on kahe paralleelse tasapinna lõikamisel kolmandaga tekkinud lõikesirgete lõigud. Seega on prisma külgtahud rööpkülilikud.

2° Prisma põhjad on võrdsed hulknurgad.

Et prisma põhjade vastavaid tippe ühendavad lõigud AA_1 , BB_1 , jne. on:

- a) paralleelsed (prismalise pinna konstruktsiooni põhjal),
- b) võrdsed (kui paralleelsete tasapindade vahelised paralleelsete sirgete lõigud) ja
- c) samasuunalised,

siis saab prisma põhjasid rööplükke abil ühtimisele viia, sest nii nagu tasapinnal, nii teisendub ka ruumis iga kujund rööplükkel temaga võrdseks kujundiks. Seega on prisma põhjad kongruentsed hulknurgad.

Püstprismat, mille põhjaks on korrapärane hulknurk, nimetatakse **korrapäraseks prismaks**.

Prismat nimetatakse kolmnurkseks, nelinurkseks, üldiselt n -nurkseks, kui tema põhitahud on vastavalt kolmnurgad, nelinurgad, n -nurgad.

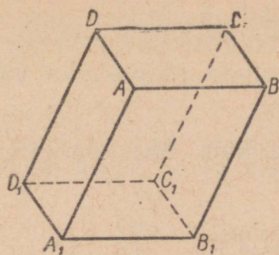
Küsimusi ja ülesandeid.

421. Missugust pinda nimetatakse prismaliseks?
422. Missugust keha nimetatakse prismaks?
423. Nimeta prisma omadusi.
424. Missugust prismat nimetatakse püstprismaks?
425. Mis on prisma diagonaal? diagonaallõige?
426. Missugust prismat nimetatakse korrapäraseks?
427. Missugust hulknurka nimetatakse korrapäraseks?
428. Näita, et püstprisma külgserv on võrdne tema kõrgusega.
429. Näita, et püstprisma külgtahud on ristkülikud.
430. Missuguse nurga moodustab püstprisma külgserv põhiservadega? Miks?
431. Joonesta kaldprojektsioonis kaldprisma, mille põhjaks on ristkülik külgedega 5 cm ja 6 cm ning mille kõrgus on 4 cm, kui ülemise põhja ühe tipu normaalprojektsioon alumisele põhjale langeb selle diagonaalide lõikepunkti $\left(\omega = 60^\circ; q = \frac{1}{2}\right)$.
432. Joonesta korrapärase kuuetaahulise prisma kaksvaade, kui prisma põhiserv on 2,5 cm ja külgserv on 4 cm: a) kui leidub esipinnaga paralleelseid põhiservi; b) kui ei leidu esipinnaga paralleelseid põhiservi.

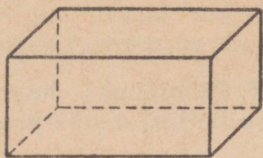
§ 91. RÖOPTAHUKAS.

Prismat, mille põhjaks on rööpkülik, nimetatakse **rööptahukaks** (joon. 190).

Püströöptahukat, mille põhjaks on ristkülik, nimetatakse **risttahukaks** (joon. 191).



Joon. 190.

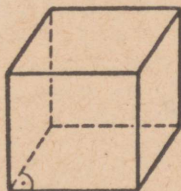


Joon. 191.

Risttahukat, mille ühest tipust väljuvad servad on võrdsed, nimetatakse **kuubiks** (joon. 192).

Rööptahuka kõik tahud on rööpkülilikud, risttahuka kõik tahud on ristkülilikud ja kuubi kõik tahud on ruudud.

Rööptahuka neid külgtahke, millel pole ühiseid servi, nimetatakse **vastastahkudeks**. Nii on näiteks joonisel 190 tahud AA_1D_1D ja BB_1C_1C vastastahkudeks.



Joon. 192.

§ 92. RÖÖPTAHUKA OMADUSED.

1° Rööptahuka vastastahud on paralleelsed.

Selle omaduse põhjendamine tugineb kahe tasapinna paralleelsuse tunnusele: kaks tasapinda on paralleelsed, kui ühe tasapinna kaks lõikuvat sirget on paralleelsed teise tasapinna kahe lõikuva sirgega. Tõesta see rööptahuka vastastahkude omadus!

2° Rööptahuka vastastahud on võrdsed.

Rööptahuka vastastahud on rööpkülilikud. Rööpküliliku diagonaal poolitab rööpküliliku kaheks võrdseks kolmnurgaks. Seega, kui tahame tõestada kahe rööpküliliku võrdsust, siis tükeldame kumagi rööpküliliku diagonaaliga kaheks võrdseks kolmnurgaks ja tõestame vastavate kolmnurkade võrdsuse.

Tuginedes kolmnurkade võrdsuse lausetele võime sealt järeldada rööpkülilike võrdsuse tunnused. Näiteks: kaks rööpkülilikut

on võrdsed, kui ühe rööpküliku lähisküljed on võrdsed teise rööpküliku lähiskülgedega ja nurgad nende külgede vahel on võrdsed.

Sellele lausele tuginedes saabki tõestada rööptahuka vastastahkude võrdsuse. Tee seda!

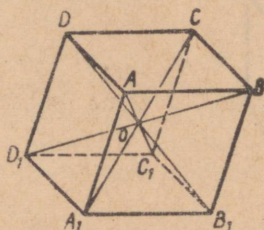
3° Rööptahuka diagonaalid lõikuvad kõik ühes punktis, mis on ühtlasi nende poolituspunktiks.

Tõestame selle omaduse, tuginedes joonisele 193.

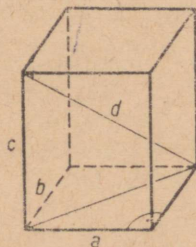
Vaatleme diagonaali B_1D ja tähistame tema poolituspunkti tähega O . Näitame, et ka rööptahuka teised diagonaalid BD_1 , A_1C ja AC_1 läbivad seda punkti O ja poolituvad selles punktis.

Rööptahuka servad BB_1 ja DD_1 on võrdsed (miks?) ja paralleelsed (miks?). Seega on nelinurk BDD_1B_1 rööpkülik. Selle rööpküliku diagonaalideks on rööptahuka diagonaalid BD_1 ja B_1D . Et rööpküliku diagonaalid lõikuvad ja lõikepunktis poolituvad, siis peavad diagonaalid BD_1 ja B_1D lõikuma punktis O , milles poolitub ka diagonaal BD_1 .

Nelinurgad A_1B_1CD ja B_1C_1DA on samuti rööpkülikud (miks?). Neil mõlemal on üheks diagonaaliks B_1D , mis poolitub punktis O .



Joon. 193.



Joon. 194.

Et rööpkülikute A_1B_1CD ja B_1C_1DA teisteks diagonaalideks on vastavalt AC ja AC_1 , siis peavad ka nemad läbima punkti O ja seal poolituma (miks?).

4° Nimetades risttahuka põhiservade ja külgservade pikkust tema mõõtmeteks, saab Pütagorase teoreemile tuginedes näidata, et

risttahuka diagonaali ruut võrdub tema kolme mõõtme ruutude summaga

ehk, tuginedes joonisel 194 toodud tähistustele,

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Et kuubi servad on kõik võrdsed, s. t. $a=b=c$, siis kuubi diagonaal

$$d=a\sqrt{3},$$

kus a on kuubi serva pikkus.

Küsimusi ja ülesandeid.

433. Missugust hulknurka nimetatakse rööpkülikuks?
434. Nimeta rööpküliku omadusi.
435. Missugust rööpkülikut nimetatakse ristkülikuks?
436. Nimeta ristküliku omadusi.
437. Mis on romb?
438. Nimeta rombi omadusi.
439. Mis on ruut?
440. Nimeta ruudu omadusi.
441. Tuginedes kolmnurkade võrdsuse lausetele, sõnasta rööpkülikute võrdsuse tunnused.
442. Mis on rööptahukas? risttahukas? kuup?
443. Nimeta rööptahuka omadusi.
444. Sõnasta risttahuka diagonaali omadus.
445. Sõnasta koosinusteoreem ja siinusteoreem.
446. Leia risttahuka diagonaali pikkus, kui tema mõõtmed on:
a) 1 cm, 2 cm ja 2 cm;
b) 6 m, 60 dm ja 700 cm;
c) 8 dm, 90 cm ja 1,2 m.
447. Risttahuka põhiservad on 7 dm ja 24 dm ning kõrgus on 8 dm. Arvuta diagonaallõike pindala.
448. Risttahuka külgserv on 5 cm, diagonaallõike pindala on 205 cm^2 ja põhja pindala on 360 cm^2 . Leia põhiservad.
449. Korrapärase nelinurkse prisma põhja pindala on 144 cm^2 ja kõrgus on 14 cm. Arvuta prisma diagonaal.
450. Arvuta korrapärase nelinurkse prisma diagonaal, kui põhja diagonaal on 8 cm ja külgtahu diagonaal on 7 cm.
451. Prisma põhjaks on korrapärane kuusnurk küljega a . Prisma külgtahud on ruudud. Leia prisma diagonaalide pikkused ja diagonaallõigete pindalad.
452. Korrapärase kuusnurkses prisma, mille külgtahud on ruudud, pannakse tasapind läbi alumise põhja ühe serva ja tema vastas asetseva ülemise põhja serva. Põhiserv on a . Leia saadud diagonaallõike pindala.
453. Leia kuubi diagonaalide vaheline nurk.
454. Risttahuka mõõtmed on 3, 4 ja 5. Leia diagonaalide vaheline nurk.

455. Leia püströöptahuka diagonaallõike pindala, kui rööptahuka kõrgus on võrdne põhja lühema diagonaaliga ja põhiservad on 3,4 ja 5,7 ning nendevaheline nurk $62^{\circ}10'$.

456. Leia risttahuka diagonaallõike pindala, kui põhiservad on 18,2 cm ja 31,6 cm ning selle diagonaallõike diagonaalide vaheline nurk on $32,1^{\circ}$.

457. Risttahuka diagonaal moodustab risttahuka servadega nurgad α , β ja γ . Tõesta, et $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$. Leia α , β ja γ , kui risttahuka mõõtmed on 8,5 cm, 7,2 cm ja 4,8 cm.

458. Risttahuka diagonaal moodustab ühe otspunkti juures tahkudega nurgad α , β ja γ . Tõesta, et $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 1$.

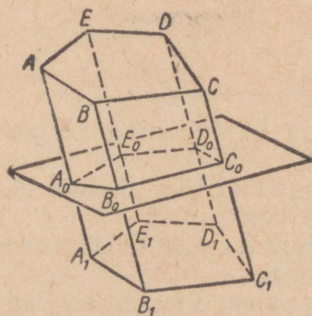
§ 93. PRISMA KÜLGPIINDALA.

Prisma külgpindalaks nimetatakse tema külgtahkude pindalade summat.

Püstprisma külgtahkudeks on riskülikud, mille üheks küljeks on põhiserv ja teiseks prisma kõrgus.

Näita, et

püstprisma külgpindala S_k on võrdne põhja ümbermõõdu $\ddot{u}_p$ ja kõrguse h korrutisega, s. t.



Joon. 195.

$$S_k = \ddot{u}_p \cdot h$$

Kaldprisma külgpindala leidmiseks lõikame prismat tasapinnaga, mis on risti külgservadega (joon. 195). Prismalise pinna poolt sellest tasapinnast eraldatud hulknurka nimetatakse prisma ristlõikeks.

Kaldprisma külgtahud on rööpkülikud. Vaadeldes külgservi rööpküliku alusena ja ristlõike serva rööpküliku kõrgusena, saab näidata, et

kaldprisma külgpindala S_k on võrdne ristlõike ümbermõõdu $\ddot{u}_r$ ja külgserva l korrutisega, s. t.

$$S_k = \ddot{u}_r \cdot l$$

Tee seda!

§ 94. PRISMA TÄISPINDALA.

Prisma täispindalaks nimetatakse tema külgpindala ja põhjade pindalade summat.

Tähistades täispindala sümboliga S_t ja põhja pindala sümboliga S_p , võime kirjutada

$$S_t = S_k + 2S_p$$

Küsimusi ja ülesandeid.

459. Kuidas avaldub korrapärase hulknurga pindala külgserva kaudu?

460. Kuidas avaldub kolmnurga pindala

a) kolme külje järgi?

b) kahe külje ja nende vahelise nurga järgi?

c) ühe külje ja selle lähisnurkade järgi?

461. Kuidas avaldub rombi pindala

a) külje ja sellele vastava kõrguse kaudu?

b) diagonaalide kaudu?

462. Kuidas avaldub korrapärase prisma külgpindala? täispindala?

463. Korrapärase kolmnurkse püstprisma kõrgus on 12 cm ja põhiserv 3 m. Leia prisma täispindala.

464. Risttahuka täispindala on 1714 m². Põhja lähisservade pikkused on 25 m ja 14 m. Arvuta külgpindala ja külgserv.

465. Kuubi diagonaal on 10 cm. Leia kuubi täispindala.

466. Kolmnurkse püstprisma põhiservad on 6 cm, 7 cm ja 8 cm ning kõrgus 5 cm. Leia täispindala.

467. Korrapärase viisnurkse prisma põhiserv on 3 cm ja kõrgus 4 cm. Leia täispindala.

468. Kolmnurkse kaldprisma kaks külgtahku on teineteisega risti; nende ühine serv on 24 cm ning asetseb teistest külgservadest 12 cm ja 35 cm kaugusel. Arvuta prisma külgpindala.

469. Risttahuka põhiservad on 36 cm ja 15 cm. Risttahuka diagonaal moodustab põhitahuga 38°-se nurga. Leia risttahuka külgpindala.

470. Püstprisma põhjaks on romb küljega 4 cm ja teravnurgaga 36°15'. Leia prisma täispindala, kui prisma kõrgus on võrdne rombi pikema diagonaaliga.

471. Püströöptahuka põhjaks on romb, mille külje pikkus on 58 cm ja teravnurk on 63°. Rööptahuka pikem diagonaal moodustab põhitahuga 52°-se nurga. Leia täispindala.

§ 95. RISTTAHUKA RUUMALA.

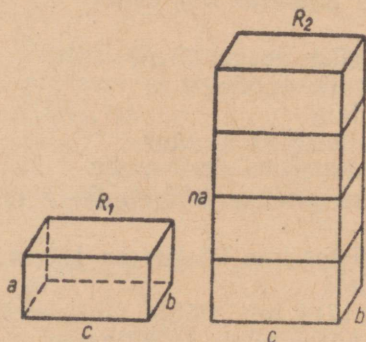
a) Olgu antud risttahukas R_1 mõõtmetega a , b ja c ning risttahukas R_2 mõõtmetega na , b , c , kus n on naturaalarv. Nagu joonisel 196 näeme, on risttahukas R_2 saadav n risttahukast R_1 . Tähistades esimese risttahuka ruumala V_1 ja teise oma V_2 , võime kirjutada

$$V_2 = n \cdot V_1.$$

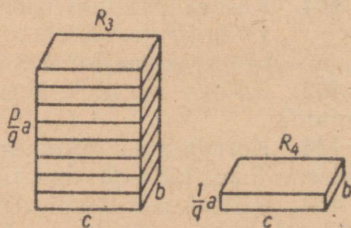
Seega,

kui risttahuka mõõde suureneb naturaalarv n korda, siis suureneb ka tema ruumala n korda.

b) Vaatleme nüüd kõrvuti risttahukaga R_1 risttahukat R_3 , mille mõõtmed on $\frac{p}{q} \cdot a$, b ja c , kus $\frac{p}{q}$ on positiivne murdarv (joon. 197). Jaotame esimese risttahuka paralleelsete tasapindadega q võrd-



Joon. 196.



Joon. 197.

seks risttahukaks R_4 , mille mõõtmed on $\frac{1}{q} \cdot a$, b ja c . Risttahukaid R_4 mahub risttahukasse R_3 täpselt p tükki. Tähistades risttahuka R_3 ruumala sümboliga V_3 ja risttahuka R_4 ruumala sümboliga V_4 , saame

$$V_3 = p \cdot V_4.$$

Et risttahukaid R_4 mahub risttahukasse R_1 parajasti q tükki, siis

$$V_1 = q \cdot V_4.$$

Avaldades sellest võrdusest V_4 :

$$V_4 = \frac{1}{q} \cdot V_1$$

Tõepoolest, kui b ja c ei muutu, siis

$$kbc = k_1 \text{ ja } V = k_1 a;$$

kui a ja c ei muutu, siis

$$kac = k_2 \text{ ja } V = k_2 b;$$

kui a ja b ei muutu, siis

$$kab = k_3 \text{ ja } V = k_3 c.$$

Seega tuleb risttahuka ruumala valemi saamiseks määrata võrduses $V = kabc$ võrdetegur k .

Et see konstant peab olema sama iga a , b ja c väärtuse korral, siis määrame k väärtuse niisuguse risttahuka abil, mille ruumala me teame. Ruumala mõõtmise ühikuks on ühikkuup, s. o. niisugune risttahukas, milles kõik mõõtmed on võrdsed ühikuga, seega

$$1 = k \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$$

ja siit $k = 1$.

Seega risttahuka ruumala

$V = abc$

Risttahuka ruumala on võrdne tema kolme mõõtme korrutisega

ehk, vaadates näiteks tahku mõõtmetega a ja b põhjana,

risttahuka ruumala on võrdne põhja pindala ja kõrguse korrutisega.

Ülesandeid.

472. Leia risttahuka ruumala, kui tema mõõtmed on

a) 1,03 m, 2,45 m, 0,67 m;

b) $3\frac{3}{4}$ cm, $5\frac{1}{2}$ cm, $7\frac{1}{4}$ cm;

c) a , $2a$, $\frac{a}{2}$.

473. Risttahuka mõõtmed suhtuvad nagu 4 : 5 : 6. Risttahuka täispindala on 592 cm². Kui suured on risttahuka mõõtmed? Kui suur on risttahuka ruumala?

474. Kahe risttahuka vastavad mõõtmed suhtuvad nagu $m : n$. Kuidas suhtuvad nende risttahukate täispindalad? Kuidas suhtuvad nende risttahukate ruumalad?

475. Risttahuka mõõtmed suhtuvad nagu 1 : 2 : 3. Kui suured peavad olema need mõõtmed, kui risttahuka ruumala on 1 m³.

476. Risttahuka diagonaallõikeks on ruut pindalaga 100 m².

Leia selle risttahuka täispindala ja ruumala, kui põhiservad suhtuvad nagu 3 : 4.

477. Risttahuka mõõtmed suhtuvad nagu 12 : 16 : 21. Risttahuka diagonaal on 87 cm. Kui suur on selle risttahuka ruumala?

478. 1,5 cm paksustest laudadest tehti kast, mille välimised mõõtmed on 1,6 m, 95 cm ja 50 cm. Kui palju kulus kasti valmistamiseks puitu ja kui suur on kasti sisemine ruumala?

479. Hõbepaber (stannioolpaber) pikkusega 24 cm ja laiusga 15 cm kaalub 6,561 grammi. Kui paks on see paber, kui stanniooli erikaal $e = 7,29$.

480. Risttahukakujulisest paagist pikkusega $4\frac{1}{2}$ m, laiusga 2,4 m ja kõrgusega $1\frac{1}{2}$ m, mis on täidetud veega, lastakse ära joosta 96 hl vett. Kui kõrgel on nüüd paagis veesammas?

481. Väikese risttahukakujulise klaasvanni välised mõõtmed on: pikkus 8 cm, laius 5 cm ja kõrgus 4 cm. Klaasi paksus on 6 mm. Leia klaasvanni raskus ja sellesse vanni mahtuva elavhõbeda kaal, kui klaasi erikaal $e_1 = 2,4$ ja elavhõbeda erikaal $e_2 = 13,6$.

482. Risttahuka mõõtmed on 3 cm, 4 cm ja 5 cm. Kui iga tema serva suurendada x cm võrra, siis suureneb täispindala 54 cm² võrra. Mitu korda suureneb ruumala?

483. Risttahuka kolme tahu pindalad on 2 m², 3 m² ja 6 m². Leia ruumala.

484. Leia risttahuka ruumala, kui tema diagonaal moodustab põhitahuga nurga α , suurema külgtahuga aga nurga β . Risttahuka diagonaali pikkus on d . Uuri saadud valemit.

485. Risttahuka põhja diagonaal on d , põhja diagonaalide vaheline nurk on α ning risttahuka suuremat põhiserva läbiva diagonaaltasapinna ja põhitahu vaheline nurk on β . Leia risttahuka ruumala. Arvuta ruumala, kui $d = 7,5$; $\alpha = 43^\circ$ ja $\beta = 57^\circ$.

§ 96. PÜSTPRISMA RUUMALA.

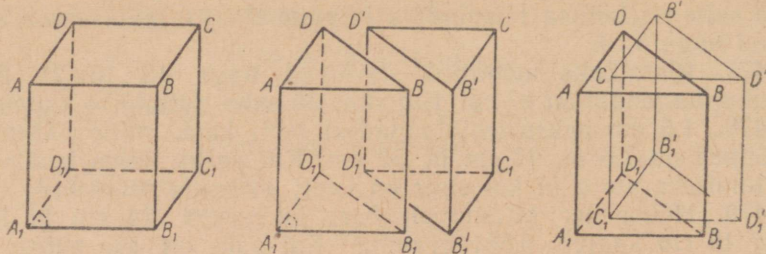
a) Kolmnurkse püstprisma ruumala.

Joonisel 199 on risttahukas lõigatud mööda diagonaallõike tasapinda kaheks osaks. Saadud kolmnurksetel püstprismadel on põhjadeks võrdsed täisnurksed kolmnurgad ning samuti on neil kolmnurksetel püstprismadel võrdsed kõrgused. Pöörates üht pooltest, näiteks prismat DC_1 ümber serva CC_1 180° võrra, on võimalik neid prismasid paralleellükke abil üksteise sisse asetades viia ühtimisele, s. t. need kolmnurksed püstprismad on ruumvõrdsed. Tähistame ühe kolmnurkse püstprisma ruumala V -ga, siis

$$2V = abc$$

ja

$$V = \frac{1}{2} abc.$$



Joon. 199.

Et $\frac{1}{2} ab$ on vaadeldava kolmnurkse püstprisma põhja pindala ja c kõrgus, siis tähistades põhja pindala S_p -ga ja kõrguse h -ga, saame

$$V = S_p \cdot h.$$

Olgu nüüd kolmnurkse püstprisma põhjaks mistahes kolmnurk (joon. 200). Lõikame seda prisma niisuguse põhjadega ristuva tasapinnaga, mis läbib üht külgserva ja on risti selle serva vastastahuga. Saame kaks kolmnurkset püstprisma, mille põhjadeks on täisnurksed kolmnurgad. Tähistame antud prisma põhja pindala S_p -ga ja ruumala V -ga. Lõikamise tulemusena saadud kolmnurksete prismade põhja pindalad tähistame S_1 -ga ja S_2 -ga ning ruumalad V_1 -ga ja V_2 -ga. Siis

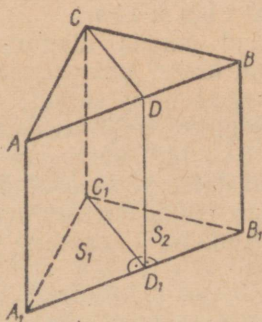
$$S_p = S_1 + S_2 \text{ ja } V = V_1 + V_2.$$

Et

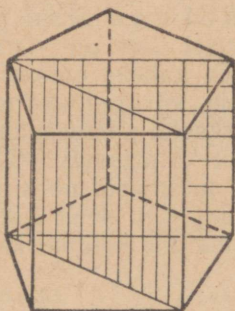
$$V_1 = S_1 \cdot h \text{ ja } V_2 = S_2 \cdot h,$$

siis

$$V = S_1 \cdot h + S_2 \cdot h = (S_1 + S_2)h = S_p \cdot h.$$



Joon. 200.



Joon. 201.

$$V = S_p \cdot h$$

Kolmnurkse püstprisma ruumala on võrdne põhja pindala ja kõrguse korrutisega.

b) Püstprisma ruumala.

Olgu nüüd püstprisma põhjaks mingi hulknurk. Lõikame seda prismat niisuguste põhjadega ristuvate tasapindadega, mis on määratud kahe mitte ühel tahul asetseva külgservaga. Selle tagajärjel antud prisma tükeldub kolmnurkseteks prismadeks (joon. 201). Kolmnurkse prisma ruumala valemi tuletamisel kasutatud mõttekäiku järgides saab siingi näidata, et

iga püstprisma ruumala on võrdne põhja pindala ja kõrguse korrutisega.

Näita seda!

Kaldprisma ruumala valemi tuletame hiljem, kasutades selleks püramiidi ruumala valemit.

Ülesandeid.

486. Arvuta korrapärase kuusnurkse prisma ruumala, kui prisma kõik servad on võrdsed a -ga.

487. Arvuta korrapärase kuusnurkse prisma ruumala, kui prisma kõrgus on 12 m ja põhiserv 35 cm.

488. Püstprisma kõrgus on 1,8 m ja ruumala $0,54 \text{ m}^3$. Leia prisma põhiservad, kui prisma põhjaks on täisnurkne kolmnurk, mille kaatetite pikkused erinevad 70 cm võrra.

489. Leia nelinurkse püstprisma ruumala ja täispindala, kui prisma põhjaks on romb, mille diagonaalid on 8 cm ja 6 cm ja kui prisma kõrgus on 10 cm.

490. Püstprisma põhjaks on võrdkülgne kolmnurk küljepikkusega 0,8 m. Prisma kõrgus on 1,5 m. Leia ruumala.

491. Majale pikkusega 18 m ja laiusel 12 m on ehitatud 60° -se nurga all katus. Kui suur on pööning?

492. Püstprisma põhjaks on kolmnurk külgedega 6,5 cm, 7,2 cm ja 4,8 cm. Leia prisma ruumala, kui kõrgus on 60 cm?

493. Maantee rajamiseks tuleb ehitada teetamm, mille ristlõikeks on võrdhaarne trapets ülemise alusega 8 m, haardega 2,6 m ja kõrgusega 2,4 m. Mitu m^3 pinnast tuleb vedada kohale niisuguse teetammi iga 10 m pikkuse lõigu ehitamiseks?

494. Kanal on alt 20 m ja vee pinnalt 25 m lai. Vee sügavus on 3,5 m. Mitu kuupmeetrit vett voolab 1 tunni jooksul läbi kanali, kui veevoolu kiirus on 40 cm sekundis?

495. Risttahuka diagonaal d moodustab põhjaga nurga α . Põhja diagonaali ja põhiserva vaheline nurk on β . Leia risttahuka külgpindala, täispindala ja ruumala, kui $\beta=21^\circ 30'$, $\alpha=54^\circ 20'$ ja $d=17,9$ m.

496. Püströöptahuka põhjaks on romb, mille väiksem diagonaal on d ja teravnurk on α . Rööptahuka kõrgus on $\frac{d}{2}$. Leia rööptahuka täispindala ja ruumala, kui $d=25,8$ ja $\alpha=75^\circ 20'$.

497. Püstprisma põhjaks on kolmnurk ABC , mille kül $AC=38,1$ dm, kül $BC=34,8$ dm ja nurk $ABC=58^\circ 20'$. Prisma külgserv võrdub kolmnurga ABC küljele AB tõmmatud kõrgusega. Arvutada prisma ruumala.

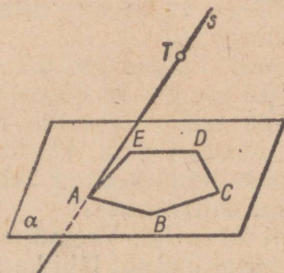
498. Püstprisma kõrgus $h=20$ dm. Prisma põhjaks on ringi ümber kujundatud täisnurkne trapets, mille teravnurk $\alpha=45^\circ 30'$; ringi raadius $r=6$ dm. Arvuta prisma ruumala.

499. Püstprisma põhjaks on võrdhaarne kolmnurk, mille haar on a ja tipunurk α . Ülemise põhja tipust on tõmmatud võrdsete külgtahkude diagonaalid, millede vaheline nurk on β . Leia prisma täispindala ja ruumala, kui $a=97,84$ cm; $\alpha=63^\circ 30'$ ja $\beta=39^\circ 40'$.

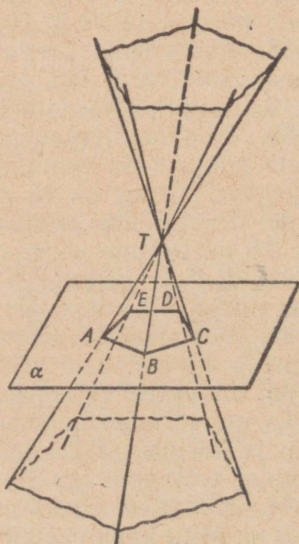
PÜRAMIID JA TÜVIPÜRAMIID.

§ 97. PÜRAMIIDILINE PIND.

Olgu tasapinnal α antud kinnine murdjoon $ABCDEA$ (joon. 202) ja väljaspool seda punkt T .



Joon. 202.



Joon. 203.

Vaatleme sirget s , mis läbib punkti T ja antud murdjoone üht punkti, näiteks punkti A . Paneme sirge s liikuma nii, et ta kogu aeg lõikaks murdjoont $ABCDEA$, kusjuures punkt T jääks paigale. Kui sirge s on läbinud kõik murdjoone lõigud, siis on ta kirjeldanud pinna, mida nimetatakse **püramiidiliseks pinnaks** (joon. 203).

Murdjoont $ABCDEA$ nimetatakse vaadeldava püramiidilise pinna **juhtjooneks** ja sirget s **moodustajaks**.

Punkti T nimetatakse püramiidilise pinna **tipuks**. Tipp jaotab püramiidilise pinna kaheks võrdseks ruuminurgaks.

§ 98. PÜRAMIID.

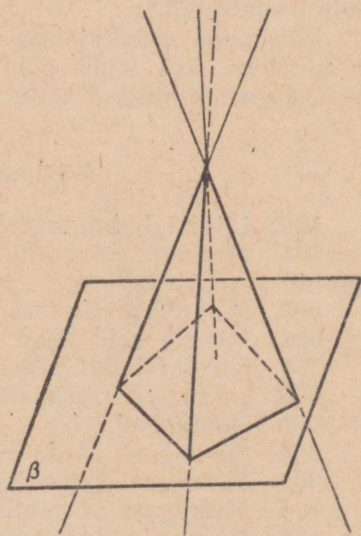
Lõikame püramiidilist pinda tasapinnaga β , mis ei läbi tippu ja mis pole paralleelne püramiidilise pinna moodustaja ühegi asendiga. Püramiidiline pind moodustab koos selle tasapinnaga β kinnise pinna. Saadud kinnise pinnaga piiratud keha nimetatakse **püramiidiks** (joon. 204). Seega,

püramiid on keha, mis tekib püramiidilise pinna lõikamisel niisuguse tasapinnaga, mis ei läbi tippu ja mis pole paralleelne püramiidilise pinna moodustaja ühegi asendiga.

Püramiidi piiravat püramiidilise pinna osa nimetatakse püramiidi **külgpinnaks**. Külgpind koosneb ühise tipuga kolmnurkadest, milliseid nimetatakse püramiidi **külgtahkudeks**. Külgtahkude ühist tippu nimetatakse püramiidi **tipuks**. Peale kolmnurkade on püramiidi piiravas kinnises pinnas veel üks hulknurk, mida nimetatakse püramiidi **põhitahuks** ehk **põhjaks**. Sirglõike, mida mööda lõikuvad külgtahud, nimetatakse püramiidi **külgservadeks** ning sirglõike, mida mööda lõikuvad külgtahud ja põhi, püramiidi **põhiservadeks**.

Püramiidi tipust põhitahule tõmmatud ristlõiku nimetatakse püramiidi **kõrguseks**. Kõrguse ja põhja ühist punkti nimetatakse **kõrguse aluspunktiks**.

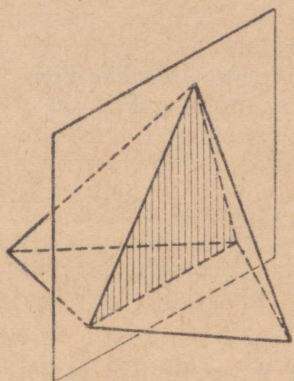
Püramiidi tipu ja põhja diagonaali poolt määratud tasapinda nimetatakse püramiidi **diagonaaltasapinnaks**. Diagonaaltasapin-



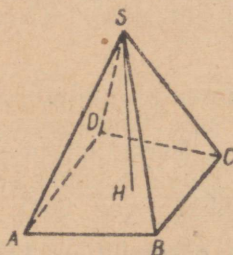
Joon. 204.

nast püramiidi piirava pinnaga eraldatud osa nimetatakse püramiidi **diagonaallõikeks** (ioon. 205).

Püramiidi tähistatakse püramiidi tipu tähise ja põhjaks oleva hulknurga tippude tähiste abil. Joonisel 206 esitatud püramiidi tähistame $SABCD$, tema kõrguseks on SH .



Joon. 205.



Joon. 206.

Püramiidi, mille põhjaks on korrapärane hulknurk ja mille kõrguse aluspunktiks on põhja keskpunkt, nimetatakse **korrapäraseks püramiidiks**.

Korrapärase püramiidi külgtahu kõrgust nimetatakse püramiidi **apoteemiks**.

Püramiidi nimetatakse kolmnurkseks, nelinurkseks, üldiselt n -nurkseks, kui tema põhitahkudeks on vastavalt kolmnurgad, nelinurgad, n -nurgad.

Küsimusi ja ülesandeid.

500. Liigita kolmnurgad külgede (nurkade) järgi!
501. Missuguseid kolmnurki nimetatakse võrdseteks, missuguseid sarnasteks?
502. Millal kaks hulknurka on sarnased?
503. Missuguseid lõike nimetatakse võrdelisteks?
504. Nimeta kolmnurkade sarnasuse tunnused!
505. Näita, et korrapärase püramiidi külgtahud on kongruentsed kolmnurgad.
506. Missugust pinda nimetatakse püramiidiliseks pinnaks?
507. Missugust keha nimetatakse püramiidiks?
508. Missugust püramiidi nimetatakse korrapäraseks?
509. Kujuta kaldprojektsioonis korrapärane kuusnurkne püramiid, mille põhiserv on 2 cm ja kõrgus 4 cm.

510. Esita kaldprojektsioonis korrapärane nelinurkne püramiid, mille põhja diagonaal pikkusega 6 cm on risti esiekraaniga ja mille külgserv on 5 cm.

511. Kui pikk on korrapärase nelinurkse püramiidi apoteem, kui püramiidi kõrgus on 15 cm ja põhiserv 16 cm?

512. Korrapärase kuusnurkse püramiidi kõrgus on 1,5 m ja põhiserv 1,2 m. Leia apoteemi ja külgserva pikkus.

513. Korrapärase nelinurkse püramiidi põhiserv on 25 cm ja kõrgus 20 cm. Kui suur on külgserva kaldenurk põhja suhtes? külgtahu kaldenurk põhja suhtes?

514. Korrapärase viisnurkse püramiidi põhiserv on 10 cm ja külgtahu ning põhja vaheline nurk on 50° . Kui pikk on püramiidi apoteem?

515. Püramiidi põhjaks on korrapärane kolmnurk. Üks külgtahk on risti põhitahuga, teised aga moodustavad põhitahuga kumbki nurga $\varphi = 30^\circ$. Kui suured on nurgad külgservade ja põhitahu vahel?

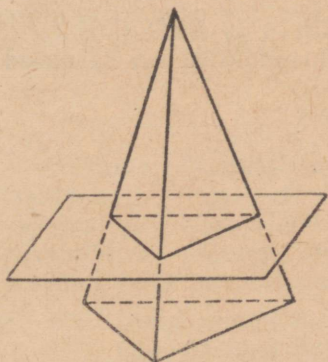
516. Korrapärase nelinurkse püramiidi külgtahu tipunurk on $\alpha = 60^\circ$. Leia püramiidi külgtahkude ja põhitahu vahelised nurgad.

§ 99. PÜRAMIIDI PÕHJAGA PARALLEELNE LÕIGE.

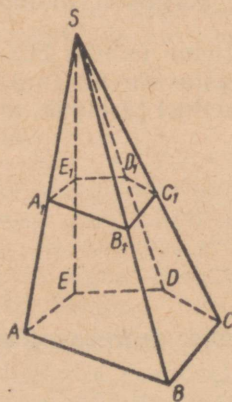
Lõikame püramiidi tema põhjaga paralleelse tasapinnaga. Püramiidi külgtahud eraldavad sellest tasapinnast hulknurga, mida nimetatakse **püramiidi põhjaga paralleelseks lõikeks** (joon. 207).

Tõestame teoreemi:

püramiidi põhjaga paralleelne lõige on põhjaga sarnane hulknurk.



Joon. 207.



Joon. 208.

Et püramiidi põhi ja temaga paralleelne lõige on samanimelised hulknurgad, siis tuleb tõestada, et nende hulknurkade vastavad nurgad on võrdsed ja nende võrdsete nurkade lähisküljed on võrdelised. Nurgad, mille tipud asetsevad ühel ja samal külgserval, on võrdsed kui vastavalt paralleelsete ja samasuunaliste haaradega nurgad. Võrdsete nurkade lähiskülgede võrdelisuse tõestamine tugineb kolmnurkade sarnasusel. Kasutades joonist 208, tõestame näiteks võrdsete nurkade $\angle ABC$ ja $\angle A_1B_1C_1$ lähiskülgede võrdelisuse:

$$\triangle A_1SB_1 \sim \triangle ASB \\ \text{ja } \triangle B_1SC_1 \sim \triangle BSC \text{ (miks?)}$$

Siit

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{SB_1}{SB} \text{ ja } \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{SB_1}{SB},$$

millest

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC}.$$

Nii saame tõestada kõigi võrdsete nurkade lähiskülgede võrdelisust, s. t. et

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1D_1}{CD} = \frac{D_1E_1}{DE} = \frac{E_1A_1}{EA}.$$

Seega olemegi tõestanud, et püramiidi põhjaga paralleelne lõige on põhjaga sarnane hulknurk.

Tõestame ka veel teise omaduse:

püramiidi põhja pindala ja põhjaga paralleelse lõike pindala suhtuvad nii, nagu neile vastavate püramiidide kõrguste ruudud.

Vaatleme joonist 208. Kolmnurgad SB_1O_1 ja SBO (kus O_1 ja O on vastavate püramiidide kõrguste aluspunktid) on sarnased. Miks? Sellest järeldub, et

$$\frac{SB_1}{SB} = \frac{SO_1}{SO}.$$

Et ka

$$\frac{SB_1}{SB} = \frac{A_1B_1}{AB}$$

(vt. eelmise teoreemi tõestust),
siis

$$\frac{SO_1}{SO} = \frac{A_1B_1}{BA}.$$

Teame, et sarnaste hulknurkade pindalad suhtuvad nii, nagu vastavate külgede ruudud. Tähistades põhja pindala sümboliga S_p ja lõike pindala sümboliga S_l , võime kirjutada

$$\frac{S_l}{S_p} = \frac{A_1 B_1^2}{AB^2}.$$

Siit saame eelmist võrdust kasutades, et

$$\frac{S_l}{S_p} = \frac{SO_1^2}{SO^2},$$

mida oligi tarvis tõestada.

Ülesandeid.

517. Püramiidi põhja pindala on 36 cm^2 ja kõrgus 8 cm . Leia püramiidi põhjaga paralleelse lõike pindala, kui lõige asub tipust 4 cm kaugusel.

518. Püramiidi põhja pindala on 30 cm^2 ja kõrgus 10 cm . Leia lõike kaugus põhjast, kui lõike pindala on $7\frac{1}{4} \text{ cm}^2$.

519. Püramiidi põhjaks on ruut küljega 6 cm . Kui pikk on põhjast 2 cm kõrgusel asuva paralleelse lõike külj, kui püramiidi kõrgus on 10 cm ?

520. Püramiidi põhjaks on võrdkülgne kolmnurk, mille külj on 5 cm . Kui suur on põhjast 2 cm kaugusel asuva paralleelse lõike pindala, kui püramiidi kõrgus on 8 cm ?

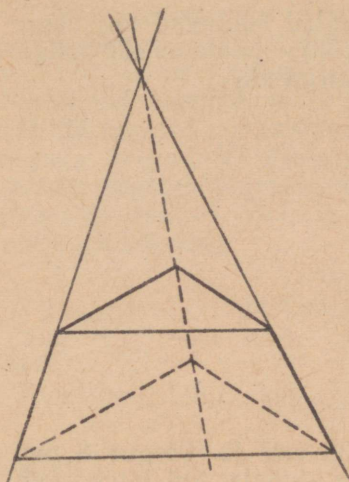
521. Püramiidi põhja pindala ja põhjaga paralleelse lõike pindala suhtuvad nagu $3:2$. Leia püramiidi kõrgus, kui lõige asub tipust 7 ühiku kaugusel.

522. Püramiidi põhjaks on korrapärane kuusnurk küljega 3 cm . Põhjaga paralleelse lõike külj on 1 cm . Leia püramiidi põhja pindala ja põhjaga paralleelse lõike pindala, kui lõige asub tipust 5 cm kaugusel.

§ 100. TÜVIPÜRAMIID.

Lõikame püramiidilist pinda ühel pool tippu kahe paralleelse tasapinnaga, mis pole paralleelsed selle püramiidilise pinna moodustaja ühegi asendiga (joon. 209). Need tasapinnad koos püramiidilise pinnaga moodustavad kinnise pinna. Selle pinnaga piiratud keha nimetatakse **tüvipüramiidiks**. Seega,

tüvipüramiid on keha, mis tekib püramiidilise pinna lõikamisel ühel pool tippu kahe niisuguse paralleelse tasapinnaga, mis pole paralleelsed püramiidilise pinna moodustaja ühegi asendiga.



Joon. 209.

Tüvipüramiidi määrav kinnine pind koosneb püramiidilise pinna osast, nn. **külgpinnast**, mis koosneb trapetsikujulistest tahkudest, ja paralleelsete tasapindade osadest — **põhjadest** ehk **põhitahkudest**, milleks on hulknurgad.

Külgservad, põhiservad ja tipud defineerime siin samuti nagu prisma ja püramiidi juureski. Tee seda!

Tüvipüramiidi põhjade vahelist ristlõiku nimetatakse tüvipüramiidi **kõrguseks**.

Sirglõiku, mis ühendab püramiidi kaht mitte ühel tahul asetsevat tippu, nimetatakse tüvipüramiidi **diagonaalliks**. Kaks lõikuvat diagonaali määravad **diagonaallõike**.

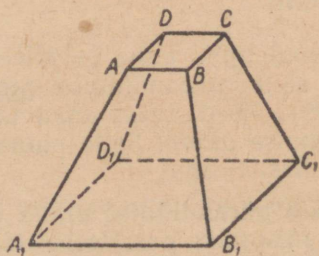
Tüvipüramiidi tähistatakse tema tippude tähistega abil. Nii on joonisel

210 esitatud tüvipüramiid $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ehk lühemalt tüvipüramiid AD_1 .

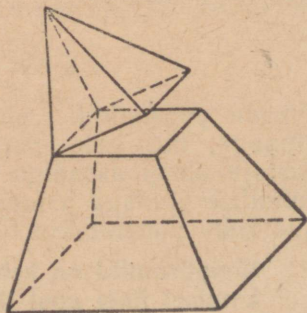
Tüvipüramiidi nimetatakse **korrapäraseks**, kui tema põhjadeks on korrapärased hulknurgad ja ülemise põhja keskpunktist tõmmatud kõrgus langeb alumise põhja keskpunkti.

Korrapärase tüvipüramiidi külgtahkudeks on võrdsed võrdhaarsed trapetsid. Tõesta see väide! Nende trapetsite kõrgust nimetatakse korrapärase tüvipüramiidi **apoteemiks**.

Et püramiidi saime püramiidilise pinna lõikamisel ühe tasapinnaga, tüvipüramiidi aga kahe paralleelse tasapinnaga, siis tüvipüramiidi võime saada, kui püramiidi lõikame põhjaga paralleelse tasapinnaga ja eraldame tipupoolse osa (joon. 211).



Joon. 210.



Joon. 211.

Samuti on alati võimalik antud tüvipüramiidi täiendada püramiidiks. Püramiidi, millega täiendame antud tüvipüramiidi, nimetatakse **täienduspüramiidiks**.

Seega võib tüvipüramiidi ülemist põhja vaadelda kui üht püramiidi põhjaga paralleelset lõiget. Et aga püramiidi põhjaga paralleelne lõige on põhjaga sarnane hulknurk, siis

tüvipüramiidi põhjad on sarnased hulknurgad.

Küsimusi ja ülesandeid.

523. Missugust prismat, püramiidi, tüvipüramiidi nimetatakse korrapäraseks?

524. Missugused kujundid on prisma, püramiidi, tüvipüramiidi külgtahkudeks?

525. Defineeri prismat, püramiidi ja tüvipüramiidi kui hulktahukat!

526. Kuidas on võimalik püramiidist saada tüvipüramiidi?

527. Joonesta kaldprojektsioonis korrapärane kuusnurkne tüvipüramiid, mille põhiservade pikkused on 4 cm ja 2,5 cm ning kõrgus on 3,5 cm, võttes $\omega = 60^\circ$ ja $q = \frac{1}{2}$.

528. Korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi kõrgus on 7 cm. Põhiservad on 10 cm ja 2 cm. Arvuta püramiidi külgserv.

529. Korrapärase kolmnurkse tüvipüramiidi põhiservad on 4 dm ja 1 dm. Külgserv on 2 dm. Leia kõrgus.

530. Korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi suurema põhja serv on a ja väiksema oma b . Külgserv moodustab põhjaga 45° -se nurga. Avalda tüvipüramiidi külgserv.

531. Korrapärase kolmnurkse tüvipüramiidi põhiservad on 2 cm ja 6 cm. Külgtahk moodustab suurema põhjaga 60° -se nurga. Leia tüvipüramiidi kõrgus.

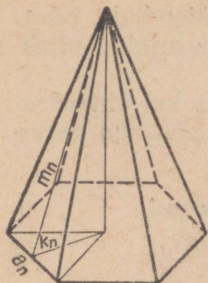
532. Kolmnurkse tüvipüramiidi ühe põhja küljed on 6 cm, 8 cm ja 10 cm ning teise põhja übermõõt on 72 cm. Kui pikad on teise põhja küljed?

§ 101. PÜRAMIIDI KÜLGPIINDALA JA TÄISPIINDALA.

Püramiidi külgpindalaks nimetatakse tema üksikute külgtahkude pindalade summat.

Tuletame valemi korrapärase püramiidi külgpindala arvutamiseks.

Olgu n -nurkse korrapärase püramiidi põhiserv a_n ja apoteem m_n (joon. 212). Ühe külgtahu pindala on siis $\frac{1}{2} a_n \cdot m_n$ ja kogu külgpindala



Joon. 212.

$$S_k = \frac{1}{2} n \cdot a_n \cdot m_n$$

Et $n \cdot a_n$ on püramiidi põhja übermõõt, siis korrapärase püramiidi külgpindala on võrdne põhja übermõõdu ja püramiidi apoteemi poole korrutisega.

Täispindala saamiseks tuleb külgpindalaga liita põhja pindala, s. t.

$$S_t = S_k + S_p.$$

Kui tähistada põhja apoteemi k_n -ga, siis korrapärase püramiidi puhul

$$S_t = \frac{1}{2} n \cdot a_n (m_n + k_n)$$

Tõesta seda!

Mittekorrapärase püramiidi külgpindala leidmiseks arvutatakse kõigi tema külgtahkude pindalad ja tulemused liidetakse. Juhul, kui kõigi külgtahkude kõrgused on võrdsed, avaldub püramiidi külgpindala põhja übermõõdu ja külgtahu kõrguse poole korrutisena.

Ülesandeid.

533. Korrapärase nelinurkse püramiidi põhiserv on 2 cm ja apoteem 3 cm. Leia täispindala.

534. Korrapärase nelinurkse püramiidi põhiserv on 6 cm ja kõrgus 4 cm. Leia täispindala.

535. Avalda korrapärase nelinurkse püramiidi külgpindala, kui tema kõik servad on a cm.

536. Leia kolmnurkse püramiidi täispindala, kui selle püramiidi iga serv on a cm.

537. Tornipõhi on ruut küljega 5 m. Tuleb ehitada 8 m kõrgune püramiidikujuline katus. Leia sarikapalkide pikkus (püramiidi tipu ja põhja tipu vaheline kaugus). Kui palju plekki kulub torni katuse katmiseks, kui ühendustele kulub 5% katust katva pleki pindalast?

538. Tornikatusel on korrapärase kuusnurkse püramiidi külpinna kuju. Katuse põhja übermõõt on 10,2 m ja iga tema tahu kõrgus on 6 m. Leia katuse pindala. Kui palju vajatakse katuse katmiseks 4 m pikkusi ja 0,3 m laiusi laudu, kui katuse kujust tingituna arvestatakse laudade vajadus 15% suuremana katuse pindalast?

539. Paviljoni katus on kujult korrapärane kaheksanurkne püramiid põhiservaga 4,6 m ja külgservaga 7 m. Mitu tahvlit katuseplekki kulub selle katuse katmiseks, kui iga ruutmeetri kohta kulub 1,2 tahvlit plekki?

540. Korrapärase kuusnurkse püramiidi kõrgus on 12 cm ja põhiserv on 6 cm. Leia püramiidi täispindala.

541. Korrapärase kuusnurkse püramiidi külgserv on 10 cm ja apoteem 9 cm. Arvuta püramiidi täispindala.

542. Korrapärase kuusnurkse püramiidi põhiserv on 2,4 dm ja külgserv 7,6 dm. Arvuta püramiidi täispindala.

543. Korrapärase nelinurkse püramiidi põhiserv on a ja külgtahu tipunurk α . Avalda püramiidi täispindala.

544. Korrapärase nelinurkse püramiidi kõrgus on h ja külgtahu tipunurk 2α . Leia püramiidi külgpindala.

545. Püramiidi põhjaks on ruut, mille külg on a . Kaks külgtahu on risti põhitahuga, teised kaks moodustavad aga põhitahuga nurga φ . Avalda püramiidi kül- ja täispindala.

546. Püramiidi põhjaks on romb, mille külg on a ja teravnurk α . Kaks külgtahu, mille vahele jääb rombi teravnurk, on risti põhitahuga, ülejäänud kaks moodustavad aga põhitahuga nurga φ . Leia püramiidi külgpindala.

§ 102. TÜVIPÜRAMIIDI KÜLGPINDALA JA TÄISPINDALA.

Tüvipüramiidi külgpindalaks nimetatakse tema üksikute külgtahkude pindalade summat.

Tuletame valemi korrapärase tüvipüramiidi külgpindala arvutamiseks.

Olgu korrapärase n -nurkse tüvipüramiidi ühe põhja serv a_n , teise põhja serv b_n ning apoteem m_n (joon. 213), siis ühe külgtahu pindala on $\frac{a_n + b_n}{2} \cdot m_n$. Tähistades külgpindala S_k -ga, saame

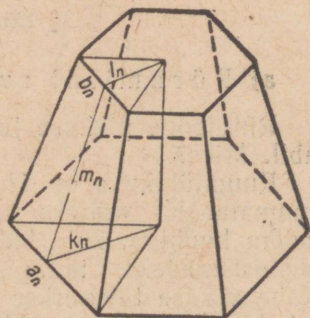
$$S_k = \frac{a_n + b_n}{2} \cdot m_n \cdot n$$

ehk

$$S_k = \frac{n \cdot a_n + n \cdot b_n}{2} \cdot m_n.$$

Seega,

korrapärase tüvipüramiidi külgpindala on võrdne põhjade ümbermõõtude poolsumma ja apoteemi korrutisega.



Joon. 213.

Täispindala saamiseks tuleb külgpindalaga S_k liita kahe põhja pindalad S_{p_1} ja S_{p_2} . Tähistades nagu varemgi täispindala S_t -ga, saab näidata, et korrapärase tüvipüramiidi puhul

$$S_t = \frac{n}{2} [a_n(m_n + k_n) + b_n(m_n + l_n)]$$

kus k_n on selle põhja apoteem, mille külge on a_n , ja l_n on selle põhja apoteem, mille külge on b_n .

Näita seda!

Küsimusi ja ülesandeid.

547. Kuidas avaldub trapetsi pindala?

548. Missugust trapetsit nimetatakse võrdhaarseks?

549. Missugust tüvipüramiidi nimetatakse korrapäraseks?

550. Korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi põhiservad on 12 cm ja 5 cm ning tüvipüramiidi kõrgus on 30 cm. Leia täispindala.

551. Korrapärase kolmnurkse tüvipüramiidi põhiservad on 8 cm ja 6 cm ning kõrgus on 14 cm. Leia külgserva pikkus ja täispindala.

552. Korrapärase tüvipüramiidi põhjadeks on korrapärased kuusnurgad küljepikkusega vastavalt 20 cm ja 9 cm. Külgserva pikkus on 61 cm. Leia tüvipüramiidi kõrgus ja täispindala.

553. Korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi põhiservad on 17,8 cm ja 1,8 cm ning külgserv on 12,8 cm. Leia täispindala.

554. Korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi kõrgus on h ning külgserv ja diagonaal moodustavad suurema põhitahuga vastavalt nurgad α ja β . Leia tüvipüramiidi külgpindala.

§ 103. PÜRAMIIDI RUUMALA.

a) Püramiidi ruumala mõiste.

Ringjoone pikkuse ja ringi pindala defineerisime piirväärtuse abil. Miks?

Ruumiühikuks on ühikkuup, millega ei saa mõõta püramiidi ruumala. Ka näiteks kolmnurkset püstprismat ei saa otseselt mõõta kuubiga, kuid teda on võimalik tükeldada kolmnurkseteks püstprismadeks, mille põhjadeks on täisnurksed kolmnurgad. Kahe võrdse täisnurkse püstprisma ühendamine annab aga risttahuka, mida saab kuubiga mõõta. Püramiidi ei saa nii tükeldada, et nendest osadest saaks kokku panna püstprisma. Samuti ei saa

me mitme võrdse püramiidi ühendamisel püstprismat. Seetõttu kasutame siingi ruumala defineerimiseks piirväärtust.

Tükeldame püramiidi tema põhjaga paralleelsete tasapindadega võrdse kõrgusega tüvipüramiidideks. Olgu neid tüvipüramiidide koos tipu juurde jäänud püramiidiga n . Täiendame nüüd joonist püstprismadega nii, nagu näidatud joonisel 214.

Liites meie poolt konstrueeritud püstprismade ruumalad, saame tulemuse, mida võib ligikaudu lugeda püramiidi ruumala suurusks. Seetõttu ütlemegi, et lähendasime saadud tüvipüramiidi prismadega.

Tähistades püramiidi ruumala V -ga ja püstprismade ruumalade summa W -ga, võime kirjutada, et

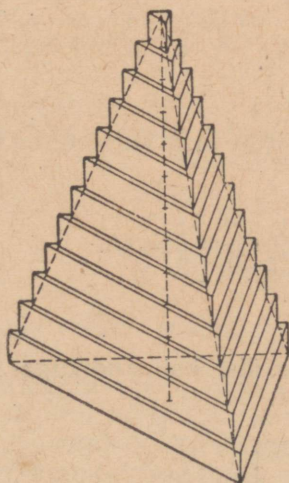
$$V = W - \alpha,$$

kus α on püramiidi ruumala ja püstprismade ruumalade summa vahe.

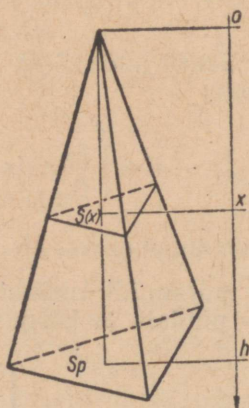
On ilmne, et mida tihedamalt lõikame püramiidi tema põhjaga paralleelsete tasapindadega, seda väiksem on ruumala α , s. t. et kui $n \rightarrow \infty$, siis $\alpha \rightarrow 0$.

Püramiidi ruumalaks on tema ümber kujundatud püstprismade ruumalade summa piirväärtus, kui prismade arv tõkestamatult kasvab, s. t.

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} W.$$



Joon. 214.



Joon. 215.

b) Püramiidi ruumala valemi tuletamine.

Olgu püramiidi kõrgus h ja põhja pindala S_p .

Paneme tähele (joon. 215), et püramiidi põhjaga paralleelse lõike pindala on tipu kauguse funktsioon. Olgu lõike kaugus tipust x , siis lõike pindala on x funktsioon, mida tähistame $S(x)$ -ga.

Tuginedes püramiidi põhjaga paralleelsete lõigete omadusele, võime kirjutada, et

$$\frac{S(x)}{S_p} = \frac{x^2}{h^2},$$

kust

$$S(x) = \frac{S_p}{h^2} x^2.$$

Seega, püramiidi põhjaga paralleelse lõike pindala on tipu kauguse suhtes ruutfunktsioon.

Kui tähistada lõigetevahelisi kaugusi Δx -ga, siis tüvipüramiidi, mille alumiseks põhjaks on $S(x_i)$, lähendame prismaga, mille ruumala on $S(x_i) \cdot \Delta x$. Et püramiidi ruumala defineerisime kõigi selliste prismade ruumalade summa piirväärtusena, kui lõigete arv tõkestamatult kasvab, siis

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n S(x_i) \cdot \Delta x.$$

Selline summa piirväärtus on aga võrdne määratud integraaliga. Nii saame, et

$$V = \int_0^h S(x) dx.$$

Asendame nüüd $S(x)$ tema avaldisega ja arvutame määratud integraali:

$$V = \int_0^h \frac{S_p}{h^2} x^2 dx = \frac{S_p}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^h = \frac{S_p}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3} S_p \cdot h.$$

Saime tulemuseks, et

püramiidi ruumala on võrdne ühe kolmandikuga põhja pindala ja kõrguse korrutisest.

$$V = \frac{1}{3} S_p \cdot h$$

Küsimusi ja ülesandeid.

555. Millal on kaks muutuvat suurust funktsionaalses sõltuvuses?

556. Missuguse funktsioonina avaldub kuubi täispindala serva pikkuse suhtes?

557. Nimeta püramiidi põhjaga paralleelse lõike omadused.

558. Kuidas defineeritakse ringjoone pikkust? ringi pindala?

559. Kuidas avaldub püstprisma ruumala?

560. Korrapärase kolmnurkse püramiidi iga serv on 10 cm. Arvuta püramiidi ruumala.

561. Püramiidi põhjaks on romb, mille diagonaalid on 12 cm ja 15 cm. Arvuta püramiidi ruumala, kui püramiidi kõrgus on 21 cm.

562. Leia korrapärase kuusnurkse püramiidi ruumala, kui põhiserv on 2,1 m ja külgserv 2,9 m.

563. Korrapärase kolmnurkse püramiidi põhiserv on a . Külgserv moodustab põhitahuga 45° -se nurga. Avalda püramiidi ruumala.

564. Korrapärase kolmnurkse püramiidi kõrgus on h . Püramiidi külgtahk moodustab põhitahuga 60° -se nurga. Avalda püramiidi ruumala.

565. Püramiidi põhjaks on võrdhaarne kolmnurk, mille haardad on 6 cm ja alus on 8 cm. Püramiidi kõik külgservad on 9 cm. Arvuta püramiidi ruumala.

566. Püramiidi põhjaks on kolmnurk külgedega 39 cm, 17 cm ja 28 cm. Kõik külgservad on 22,9 cm. Arvuta püramiidi ruumala.

567. Püramiidi põhi on ristkülik, mille pindala on 1 m^2 . Kaks külgtahku on risti põhitahuga ning teised kaks moodustavad temaga nurgad 30° ja 60° . Arvuta püramiidi ruumala.

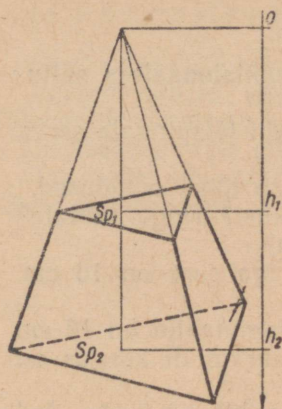
568. Korrapärase nelinurkse püramiidi külgserv on b ja külgtahu tipunurk α . Avalda püramiidi ruumala.

569. Korrapärase kaheksanurkse püramiidi külgserv $b=3,5$ moodustab põhja tasapinnaga nurga $\alpha=78^\circ 40'$. Leia püramiidi ruumala.

§ 104. TÜVIPÜRAMIIDI RUUMALA.

Tüvipüramiidi ruumala valemi tuletamiseks täiendame antud tüvipüramiidi püramiidiks. Olgu tüvipüramiidi ülemise põhja kaugus püramiidi tipust h_1 ja alumise põhja kaugus h_2 (joon. 216). Tüvipüramiidi kõrgus $h=h_2-h_1$. Tüvipüramiidi põhjade pindalad tähistame sümbolitega S_{p_1} ja S_{p_2} .

Tüvipüramiidi ruumala valemi tuletamiseks tuleb algul korrata täpselt sedasama mõttekäiku, mis on esitatud püramiidi ruumala valemi tuletamisel. Korda seda osa!



Joon. 216.

Erinevuseni jõuame integraali rajade määramisel, sest nüüd summeerime prismade ruumalad vahemikus h_1 -st kuni h_2 -ni. Seega saame nüüd:

$$\begin{aligned} V &= \int_{h_1}^{h_2} \frac{S_{p_2}}{h_2^2} x^2 dx = \frac{S_{p_2}}{h_2^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_{h_1}^{h_2} = \frac{S_{p_2}}{h_2^2} \cdot \frac{h_2^3 - h_1^3}{3} = \\ &= \frac{S_{p_2}}{h_2^2} \cdot \frac{(h_2 - h_1)(h_2^2 + h_1 h_2 + h_1^2)}{3} = \\ &= \frac{S_{p_2} \cdot h}{3} \cdot \frac{h_2^2 + h_1 h_2 + h_1^2}{h_2^2} = \\ &= \frac{S_{p_2} \cdot h}{3} \cdot \left(1 + \frac{h_1}{h_2} + \frac{h_1^2}{h_2^2} \right). \end{aligned}$$

Teades, et $\frac{S_{p_1}}{S_{p_2}} = \frac{h_1^2}{h_2^2}$, võime kirjutada:

$$\begin{aligned} V &= \frac{S_{p_2} \cdot h}{3} \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{S_{p_1}}}{\sqrt{S_{p_2}}} + \frac{S_{p_1}}{S_{p_2}} \right) = \frac{S_{p_2} \cdot h}{3} \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{S_{p_1} \cdot S_{p_2}}}{S_{p_2}} + \frac{S_{p_1}}{S_{p_2}} \right) = \\ &= \frac{h}{3} \cdot (S_{p_1} + \sqrt{S_{p_1} \cdot S_{p_2}} + S_{p_2}). \end{aligned}$$

Seega,

tüvipüramiidi ruumala on võrdne niisuguse püramiidi ruumalaga, mille kõrgus on võrdne tüvipüramiidi kõrgusega ja mille põhja pindala on võrdne tüvipüramiidi põhjade pindalade ja nende geomeetrilise keskmise summaga.

$$V = \frac{h}{3} \cdot (S_{p_1} + \sqrt{S_{p_1} \cdot S_{p_2}} + S_{p_2})$$

Küsimusi ja ülesandeid.

570. Kuidas avaldub püstprisma ruumala?

571. Kuidas avaldub püramiidi ruumala? tüvipüramiidi ruumala?

572. Tüvipüramiidi põhjade pindalad on 50 cm^2 ja 32 cm^2 ning kõrgus on 30 cm . Leia tüvipüramiidi ruumala.

573. Tüvipüramiidi ruumala on $7,4 \text{ dm}^3$. Põhjade pindalad on 1000 cm^2 ja 10 cm^2 . Leia tüvipüramiidi kõrgus.

574. Korrapärase kolmnurkse tüvipüramiidi põhiservad on alumisel põhjal $12,5 \text{ cm}$ ja ülemisel põhjal $7,5 \text{ cm}$. Kõrgus on 10 cm . Arvuta ruumala.

575. Korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi kujuline anum, mille põhjaks on tüvipüramiidi väiksem põhi, on poole kõrguseni täidetud veega. Kui palju vett on anumas, kui anuma põhjade küljed on 20 cm ja 10 cm ning anuma kõrgus on 30 cm ?

576. Kui suur on nelinurkse tüvipüramiidi kujulise keha erikaal, kui ta vette asetatult (väiksema põhjaga allapoole) vajub vette kuni poole kõrguseni? Põhjade küljed on 14 cm ja 8 cm ning kõrgus on 9 cm .

577. Kolmnurkse tüvipüramiidi kõrgus on 10 m . Püramiidi ühe põhja küljed on 27 m , 29 m ja 52 m ning teise põhja ümbermõõt on 72 m . Arvuta tüvipüramiidi ruumala.

578. Tüvipüramiidi ruumala on 1720 m^3 , kõrgus on 20 m ja põhjade vastavate külgede suhe on $5:8$. Arvuta põhjade pindalad.

579. Ristkülikukujulise tiigi pikkus on 80 m ja laius 60 m . Tiigi sügavus on 3 m ja kallaste kaldenurk on 60° . Mitu kuupmeetrit pinnast kaevati välja tiigi ehitamisel, kui väljakaevamisel suurenes pinnase maht 9% .

580. Korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi põhiservad on $10,5 \text{ ja } 4,5 \text{ cm}$ ning kõrgus on 4 cm . Leia

- a) külgtahkude ja põhitahu vaheline nurk α ;
- b) külgservade ja põhitahu vaheline nurk β ;
- c) külgtahkudeks olevate trapetsite nurgad γ ja δ .

581. Korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi põhiservad on 25 m ja 15 m ning külgtahu teravnurk on 65° . Leia tüvipüramiidi ruumala.

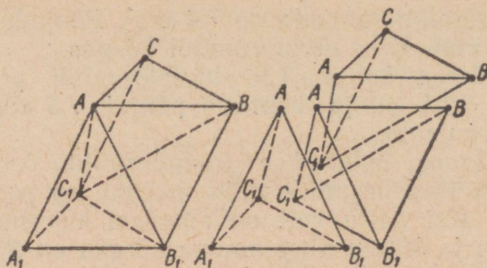
§ 105. KALDPRISMA RUUMALA.

Vaatleme kolmnurkset kaldprismat AC_1 (joon. 217). Tõestame teoreemi:

iga kolmnurkne prisma on tükeldatav kolmeks ruumvõrdsesks püramiidiks.

Lõikame antud prismat kahe tasapinnaga. Üks neist läbib tippe A , B_1 ja C_1 ning teine A , B ja C_1 . Selle tagajärjel tükeldub prisma kolmeks püramiidiks. Nimeta need!

Püramiidid $AA_1B_1C_1$ ja C_1ABC on ruumvõrdsed, sest neil mõlemal on põhjaks prisma põhi ning kõrguseks prisma põhjade vaheline ristlõik, s. o. prisma kõrgus. Seega on nende püramiidide ruumalad võrdsed prisma põhja pindala ja kõrguse ühe kolman-



Joon. 217.

diku korrutisega. Tähistades püramiidi $AA_1B_1C_1$ ruumala V_1 -ga ja püramiidi C_1ABC ruumala V_2 -ga, võime kirjutada

$$V_1 = V_2 = \frac{S_p \cdot h}{3}.$$

Vaatame nüüd püramiide ABB_1C_1 ja $ABCC_1$. Need on samuti ruumvõrdsed, sest nende põhjad BB_1C ja BC_1C on võrdsed (miks?) ja nende kõrgused on võrdsed (miks?). Tähistame ABB_1C_1 ruumala V_3 -ga. Kuna $ABCC_1$ ruumala oli tähistatud V_2 -ga, siis

$$V_2 = V_3.$$

Enne leidsime, et $V_1 = V_2$. Seega $V_1 = V_2 = V_3$ ja teoreem on sellega tõestatud.

Et prisma ruumala $V = V_1 + V_2 + V_3$, siis arvestades eelmist tulemust, võime kirjutada:

$$V = 3V_1.$$

Kuna $V_1 = \frac{S_p \cdot h}{3}$, siis

$$V = 3 \cdot \frac{S_p \cdot h}{3} = S_p \cdot h,$$

s. t.

kolmnurkse kaldprisma ruumala on võrdne põhja pindala ja kõrguse korrutisega.

$$V = S_p \cdot h$$

Et iga neli-, viis-, ..., n -nurkset kaldprismat saab diagonaaltasapindade abil tükeldada kolmnurkseteks prismadeks, siis saame

nii nagu püstprismade puhulgi näidata, et iga kaldprisma ruumala on võrdne põhja pindala ja kõrguse korrutisega.

Tee seda!

Küsimusi ja ülesandeid.

582. Missugust keha nimetatakse prismaks?

583. Missugust prismat nimetatakse püstprismaks, kaldprismaks?

584. Prisma põhjaks on kolmnurk, mille üks külg on 2 cm ja teised küljed on 3 cm. Külgserv on 4 cm ja ta moodustab põhjaga 45° -se nurga. Arvuta prismaga ruumvõrdse kuubi serv.

585. Prisma põhjaks on kolmnurk külgedega 3 cm, 5 cm ja 7 cm. Külgserva pikkus on 8 cm ja ta moodustab põhjaga nurga 60° . Arvuta prisma ruumala.

586. Kaldprisma põhiserv on 17,4 cm, külgserv on 64,5 cm ja külgserv moodustab põhjaga nurga $82^\circ 40'$. Leia ruumala.

KORRAPÄRASED TAHKKEHAD.

§ 106. KUUP EHK KORRAPÄRANE HEKSAEEDER.

Eespool tutvusime prismadega, sealhulgas ka kuubiga (joon. 218). Vaadeldes kuupi paneme tähele järgmist:

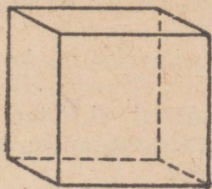
1) kuubi kõik 6 tahku on võrdsed ruudud ehk korrapärased nelinurgad,

2) kuubil on 8 tippu; s. t. et kuubis on 8 ruuminurka, mille kõik tasanurgad on võrdsed,

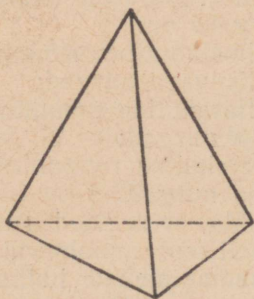
3) iga tipu juurde koondub 3 serva; kokku on servi 12, sest iga serv ühendab kaht tippu.

Kuup kuulub korrapäraste prismade hulka.

Kuupi nimetatakse ka **korrapäraseks heksaeedriks**. See nimetus pärineb kreekakeelsetest sõnadest *hex* — kuus ja *hedra* — pind.



Joon. 218.



Joon. 219.

§ 107. KORRAPÄRANE TETRAEEDER.

Vaatleme korrapärast kolmnurkset püramiidi, mille külgtahud on korrapärased kolmnurgad (joon. 219). Need külgtahud on võrdsed põhitahuga. Miks? Sellel püramiidil on:

- 1) 4 tahku, mis on kõik võrdsed korrapärased kolmnurgad;
- 2) 4 tippu, s. t. et vaadeldavas püramiidis on 4 ruuminurka, mille kõik tasanurgad on võrdsed;
- 3) 6 serva.

Et vaadeldaval püramiidil on 4 tahku ja kreeka keeles on neli *tettara*, siis kannab niisugune püramiid **korrapärase tetraeedri** nimetust.

§ 108. KORRAPÄRASED TAHKKEHAD.

Vaadeldud heksaeedril ja tetraeedril on järgmised ühised omadused:

- 1) kõik tahud on võrdsed korrapärased samanimelised hulknurgad;
- 2) iga tipu juurde koondub võrdne arv servi.

Niisugust tahkkeha, mille kõik tahud on võrdsed korrapärased samanimelised hulknurgad ja mille iga tipu juurde koondub võrdne arv servi, nimetatakse korrapäraseks ehk regulaarseks tahkkehaks.

Tekib küsimus, kas korrapäraseid tahkkehi on ainult kaks või leidub veel teisigi, ja kui leidub, siis kas neid on lõpmata palju või lõplik arv.

Nii korrapärasel heksaeedril kui ka korrapärasel tetraeedril on iga tipu juures kolmetahuline ruuminurk. Et korrapärase nelinurga iga nurk on 90° ja korrapärase kolmnurga iga nurk on 60° , siis heksaeedri ruuminurga tasanurkade summa on 270° ja tetraeedril 180° .

Teame, et ruuminurga tasanurkade summa peab olema väiksem kui 360° . Seda arvestades võib oletada, et eksisteerivad veel niisugused korrapärased tahkkehad, mille iga tipu juures olevaks ruuminurgaks on:

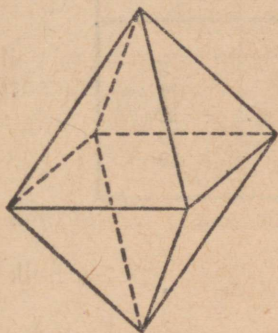
- 1) kolmetahuline ruuminurk, kus tasanurkadeks on korrapärase viisnurga nurgad;
- 2) neljatahuline ruuminurk, kus tasanurkadeks on korrapärase kolmnurga nurgad;
- 3) viietahuline ruuminurk, kus tasanurkadeks on korrapärase kolmnurga nurgad.

Põhjenda, et sellised ruuminurgad võivad eksisteerida ja et rohkem selliseid ruuminurki pole, mille tasanurkadeks on korrapäraste samanimeliste hulknurkade nurgad!

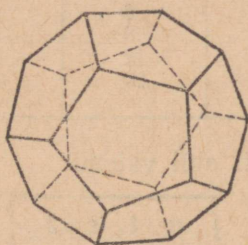
Seega saab peale meie juba tuntud kuubi ja tetraeedri olla veel kolm korrapärast tahkkeha.

§ 109. KORRAPÄRANE OKTAEEDER.

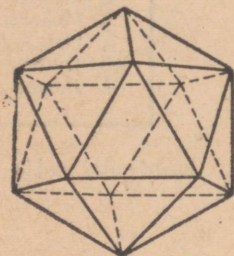
Joonisel 220 on esitatud tahkkeha, millel on 8 tahku, mis kõik on võrdsed korrapärased kolmnurgad, ja mille iga tipu juurde koondub neli serva. See on korrapärane tahkkeha, mida nimetatakse **korrapäraseks oktaeedriks** (kr. k. *okto* — kaheksa).



Joon. 220.



Joon. 221.



Joon. 222.

Mitu serva on korrapärasel oktaeedril? Kui suur on iga ruuminurga tasanurkade summa?

§ 110. KORRAPÄRANE DODEKAEEDER.

Joonisel 221 on esitatud tahkkeha, millel on 12 tahku, mis kõik on võrdsed korrapärased viisnurgad, ja mille iga tipu juurde koondub kolm serva. See on korrapärane tahkkeha, mida nimetatakse **korrapäraseks dodekaeedriks** (kr. k. *dōdeka* — kaksteist).

Mitu serva on korrapärasel dodekaeedril? Kui suur on iga ruuminurga tasanurkade summa?

§ 111. KORRAPÄRANE IKOSAEEDER.

Joonisel 222 on esitatud tahkkeha, millel on 20 tahku, mis kõik on võrdsed korrapärased kolmnurgad, ja mille iga tipu juurde koondub 5 serva. Seda korrapärasest tahkkeha nimetatakse **korrapäraseks ikosaeedriks** (kr. k. *eikosi* — kakskümmend).

Mitu serva on korrapärasel ikosaeedril? Kui suur on iga ruuminurga tasanurkade summa.

§ 112. EULERI VALEM.

Koostame järgmise tabeli:

Korrapärase hulktahuka nimetus	Tahkude arv (n)	Tippude arv (t)	Servade arv (s)
1. Tetraeeder	4	4	6
2. Heksaeder	6	8	12
3. Oktaeder	8	6	12
4. Dodekaeder	12	20	30
5. Ikosaeder	20	12	30

Kontrolli selle tabeli abil valemi

$$n + t - s = 2$$

kehtivust.

Et selle valemini jõudis esimesena kuulus šveitsi päritoluga ja pikemat aega Peterburi Teaduste Akadeemias töötanud matemaatik *Leonhard Euler* (1707—1783), siis nimetatakse seda Euleri valemiks.

Küsimusi ja ülesandeid.

587. Missugust hulknurka, prismat, püramiidi nimetatakse korrapäraseks?

588. Missuguseid hulktahukaid nimetatakse korrapäraseks?

589. Sõnasta ruuminurga täsanurkade summa omadus.

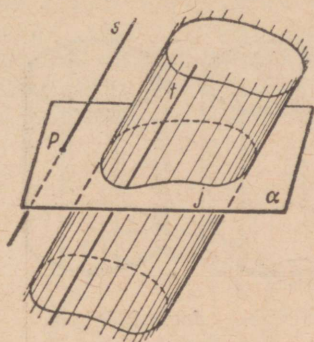
590. Avalda korrapärase kehade pindalad külgserva a kaudu.

SILINDER.

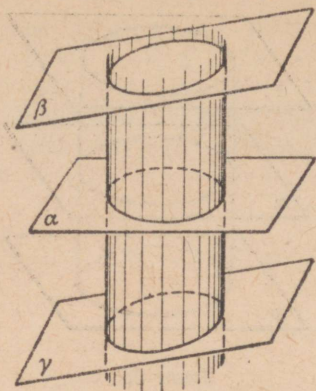
§ 113. SILINDRILINE PIND.

Olgu tasapinnal α antud kinnine kõverjoon j (joon. 223). Samuti olgu antud tasapinda α mingis tema punktis, näiteks punktis P lõikav sirge s . Vaatleme veel teist sirget t , mis lõikab antud kinnist kõverjoont j ja on paralleelne sirgega s . Paneme sirge t liikuma nii, et ta lõikab kogu aeg kõverjoont j ja on paralleelne sirgega s . Olles läbinud kogu kinnise kõverjoone j , on sirge t kujundanud pinna, mida nimetame **silindriliseks pinnaks**.

Kinnist kõverjoont j nimetatakse silindrilise pinna **juhtjooneks** ja sirget t — silindrilise pinna **moodustajaks**.



Joon. 223.



Joon. 224.

§ 114. SILINDER.

a) Lõikame silindrilist pinda kahe paralleelse tasapinnaga β ja γ , mis pole paralleelsed moodustajaga. Saame kinnise pinna, millega piiratud keha nimetatakse **silindriks** (joon. 224). Seega,

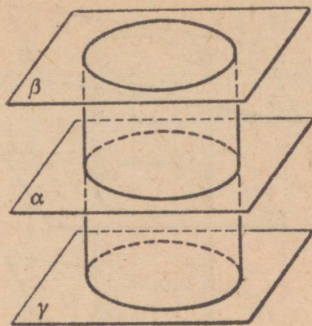
silinder on keha, mis tekib silindrilise pinna lõikamisel kahe paralleelse, kuid sealjuures silindrilise pinna moodustajaga mitteparalleelse tasapinnaga.

Olgu silindrilise pinna juhtjooneks ringjoon j tasapinnal α ja olgu moodustaja t risti selle tasapinnaga. Lõikame seda silindrilist pinda tasapindadega β ja γ , mis on paralleelsed juhtjoone tasapinnaga α (joon. 225). Saadud silindrit nimetatakse **püstringsilindriks**. Et keskkooli matemaatika kursuses käsitletakse ainult püstringsilindreid, siis nimetame neid edaspidi lihtsalt silindriteks.

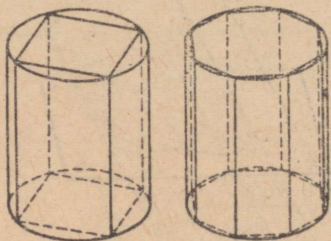
Silindri **külgpinnaks** on osa silindrilisest pinnast. Silindri **põhjadeks** on ringid. Põhjadevahelist ristlõiku nimetatakse, nii nagu prisma ja tüvipüramiidi juureski, **kõrguseks**.

Silindri põhjade vahele jäävat silindrilise pinna moodustaja lõiku nimetatakse silindri **moodustajaks**. Silindri moodustaja on võrdne silindri kõrgusega.

b) Silindrit saab defineerida ka korrapärase prisma kaudu. Joonisel 226 on esitatud korrapärane nelinurkne ja kaheksanurkne prisma. Nagu näeme, läheneb korrapärane prisma tema nurkade arvu kahekordistamisel silindrile. Kui jätkame prisma nurkade arvu kahekordistamist, saame prismad, mis oma kujult järjest enam lähenevad silindrile. Seega,



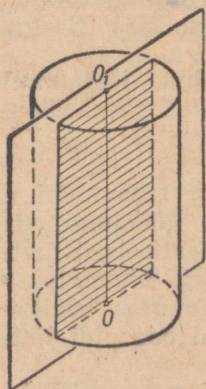
Joon. 225.



Joon. 226.

silinder on korrapärase prisma piirkujund, kui prisma nurkade arv tõkestamatult suureneb.

Et korrapärase prisma põhjadeks on võrdsed korrapärsed hulknurgad ja et nad jäävad võrdseteks ka nurkade arvu kahekordistamisel, siis järeldub sellest definitsioonist, et



Joon. 227.

silindri põhjad on võrdsed ringid.

c) Silindrit tunneme juba kui pöördekha. Missuguse kujundi pöörlemisel tekib silinder? Mis on pöörlemisteljeks?

Lõikame silindrit tasapinnaga, mis läbib tema põhjade keskpunkte. See tasapind läbib siis ka nende punktide ühenduslõigu, s. o. silindri telje. Silindri pind eraldab sellest lõike-tasapinnast ühe osa, mida nimetatakse silindri telglõikeks (joon. 227).

Tõesta, et

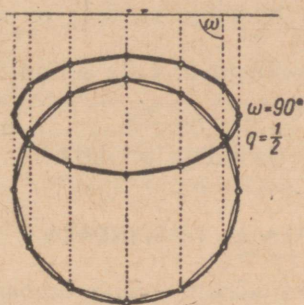
silindri telglõige on ristkülik.

§ 115. SILINDRI JOONESTAMINE.

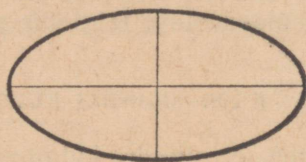
a) Ringjoone kaldprojektsioon.

Ringjoone kaldprojektsiooni joonestamiseks kujundame ringisse korrapärase hulknurga (joon. 228). Selle hulknurga tipud on ühtlasi ringjoone punktid. Kui nüüd joonestame juba tuntud viisil

hulknurga kaldprojektsiooni, siis oleme leidnud ka ringjoone mitme punkti kaldprojektsiooni. Ühendades need punktid sileda kõveraga, saame joone, mida nimetatakse ellipsiks. Ringi keskpunkti projektsiooniks on ellipsi keskpunkt. Joonisel 229 on esitatud ellips. Näeme, et ellipsil on kaks ristuvat sümmeetriatelge, mis lõikuvad ellipsi keskpunktis.



Joon. 228.



Joon. 229.

b) Silindri kaldprojektsioon.

Silindri kaldprojektsiooni joonestame nii, nagu prisma kaldprojektsioonigi. Silindri moodustajad on risti põhiekraaniga ja seetõttu kujutuvad nad esiekraanil loomulikus suurus (joon. 230).

Küsimusi ja ülesandeid.

591. Mis on ringjoon?

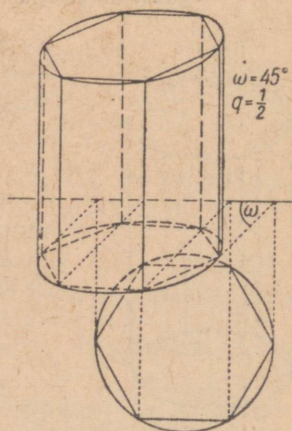
592. Defineeri silindrit kui pöördekeha!

593. Missugust silindrit nimetatakse püstringsilindriks?

594. Missugust nelinurka nimetatakse ristkülikuks?

595. Defineeri ringjoon korrapärase hulknurga piirkujuna!

596. Missuguse kujundi me saame, kui lõikame silindri külpinna lahti mööda tema moodustajat ja laotame siis selle külpinna tasapinnale? Kuidas avalduvad saadud kujundi mõõtmised silindri põhja raadiuse r ja kõrguse h kaudu?



Joon. 230.

597. Mis on prisma?

598. Missugust prisma nimetatakse korrapäraseks?

599. Esita kaldprojektsioonis silinder, mille põhja raadius on 3 cm ja kõrgus on 5 cm, võttes $\omega = 90^\circ$ ja $q = \frac{1}{2}$.

600. Esita kaldprojektsioonis silinder, mille põhja diameeter on 8 cm ja kõrgus on samuti 8 cm, võttes $\omega = 90^\circ$ ja $q = \frac{1}{2}$.

601. Silindri kõrgus on 16,8 cm ja põhja raadius on 8,4 cm. Kui suur on telglõike pindala?

602. Silindri telglõige on ruut küljega a . Leia silindri põhja pindala.

603. Silindri telglõige on ruut, mille diagonaal on a . Leia silindri moodustaja telglõike pindala ja põhja pindala.

§ 116. SILINDRI KÜLGPIINDALA JA TÄISPINDALA.

Teame, et silindri külgpindala on võrdne põhja ümbermõõdu ja kõrguse korrutisega. Sellele tulemusele jõudsimme VII klassis, kasutades silindri pinnalaotust.

Silindrilise pinna laotamine tasapinnale on aga seotud painutamisega, millega kaasnevad deformatsioonid, mistõttu teadaolev tulemus vajab kontrollimist. Kasutame selleks piirväärtuse mõistet.

Silindri külgpind ei ole tasapinnaline, mistõttu pole otseselt võimalik tema suurust võrrelda pindalaühikuga, milleks on ühikruudu pindala.

Silindri külgpindalaks nimetatakse silindri sisse kujundatud korrapärase prisma külgpindala piirväärtust, kui prisma põhja nurkade arv tõkestamatult kasvab.

Kui tähistada n -nurkse korrapärase prisma külgpindala S_n -ga ja silindri külgpindala S_k -ga, siis

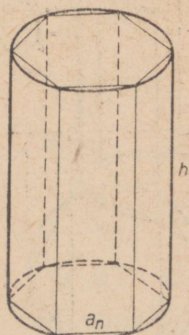
$$S_k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

Et $S_n = n \cdot a_n \cdot h$, kus n on korrapärase prisma külgservade arv, a_n — tema põhiserva pikkus ja h — nii prisma kui ka silindri kõrgus (joon. 231), siis

$$S_k = \lim_{n \rightarrow \infty} (n \cdot a_n \cdot h).$$

Et h ei sõltu n -st, siis

$$S_k = h \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (n \cdot a_n).$$



Joon. 231.

Nagu juba teame, on $\lim_{n \rightarrow \infty} (n \cdot a_n)$, s. o. prisma põhjaks oleva korrapärase hulknurga ümbermõõdu piirväärtuseks nurkade arvu tõkestamatul kasvamisel selle hulknurga ümber joonestatud ringjoone pikkus. Seega, kui silindri põhjaks oleva ringi raadius on r , siis $\lim_{n \rightarrow \infty} (n \cdot a_n) = 2\pi r$ ja

$$S_k = 2\pi r h$$

Et $2\pi r$ on silindri põhja ümbermõõt ja h on silindri kõrgus, siis silindri külgpindala on võrdne põhja ümbermõõdu ja kõrguse korrutisega.

Silindri täispindala

$$S_t = 2\pi r(r + h)$$

Näita selle valemi kehtivust!

Seega ühtivad tulemused varem teadaolevatega.

Küsimusi ja ülesandeid.

604. Kuidas tuletati ringjoone pikkuse valem?

605. Defineeri silinder prisma kaudul!

606. Sõnasta silindri täispindala valem!

607. Arvuta silindri täispindala, kui

a) $r = 1,25$ m ja $h = 53$ cm,

b) $r = 2,5$ mm ja $h = 45,3$ cm.

608. Ristkülik, mõõtmetega m ja n cm, pöörleb kord lühema, kord pikema külje ümber. Kummal juhul on silindri täispindala suurem, kui $m > n$? Arvuta need täispindalad, kui $n = 15,3$ cm ja $m = 23,8$ cm.

609. Silindrikujulise aurukatla läbimõõt on 0,7 m ja pikkus 3,8 m. Kui suur on auru rõhumine kogu katla pinnale, kui auru rõhk ruutsentimeetrile on 10 kG?

610. Silindrikujulise korstna kõrgus on 18 m ja läbimõõt 65 cm. Mitu ruutmeetrit plekki kulub korstna valmistamiseks, kui neetekohtadele kulub 10% kogu vajatavast plekist?

611. Leia ruudukujulise telglõikega silindri täispindala, kui silindri külgpindala on 100 cm².

612. Avalda silindri täispindala põhja pindala S_p ja telglõike pindala Q kaudu. Arvuta täispindala, kui $S_p = 30$ cm² ja $Q = 42,4$ cm².

613. Korrapärase nelinurkse prisma ümber on kujundatud silinder. Leia silindri täispindala, kui prisma põhiserv on a ja kõrgus h . Arvuta täispindala, kui $a=4,8$ dm ja $h=1,3$ m.

§ 117. SILINDRI RUUMALA.

VII klassis võtsime silindri ruumala valemi saamiseks silindri ja risttahuka, mille põhja pindalad ja kõrgused olid võrdsed. Liiva valamise ühest nõust teise veendusime, et mõlemad kehad mahutasid ühepalju liiva.

Sellist proovimise võtet olime sunnitud kasutama seetõttu, et silindri ruumala võrdlemine ruumalaühikuga, milleks on ühikuubi ruumala, pole võimalik. Niisugune proovimise võte, mis praktika seisukohalt küll rahuldab, ei veena meid aga valemi täielikus täpsuses.

Võtame siingi appi piirväärtuse mõiste.

Silindri ruumalaks nimetatakse silindri sisse kujundatud korrapärase prisma ruumala piirväärtust, kui prisma põhja nurkade arv tõkestamatult kasvab.

Tähistades silindri sisse kujundatud n -nurkse korrapärase prisma ruumala V_n -ga ja silindri ruumala V -ga, võime kirjutada

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n.$$

Et $V_n = n \cdot a_n \cdot \frac{k_n}{2} \cdot h$, kus n on korrapärase prisma külgservade arv, a_n — põhiserva pikkus, k_n — põhja apoteem ja h — nii prisma kui ka silindri kõrgus, siis

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \cdot a_n \cdot \frac{k_n}{2} \cdot h \right).$$

Et korrutise piirväärtus võrdub tegurite piirväärtuste korrutisega ja et $\lim_{n \rightarrow \infty} (n \cdot a_n) = 2\pi r$ ning $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = r$, siis

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} (n \cdot a_n) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{2} \cdot h = 2\pi r \cdot \frac{r}{2} \cdot h = \pi r^2 \cdot h.$$

$$V = \pi r^2 \cdot h$$

Et πr^2 on silindri põhja pindala, siis

silindri ruumala on võrdne põhja pindala ja kõrguse korrutisega.

Tulemus kinnitab varem katseliselt leitud ruumala valemi õigsust.

Küsimusi ja ülesandeid.

614. Kuidas tuletati ringi pindala valem?

615. Mis on π ?

616. Missugust prismat nimetatakse korrapäraseks?

617. Arvuta ümarterase jooksva meetri kaal, kui tema läbimõõt on 4,5 cm ja erikaal $7,8 \frac{\text{G}}{\text{cm}^3}$.

618. Põhjenda praktikas ümarterase massi m arvutamiseks läbimõõdu d kaudu kasutatava valemi $m=612 d^2$ õigsust, kui m on grammides ja d sentimeetrites. Erikaal on 7,78.

619. Kui palju kaalub ülalt lahtine silindrikujuline anum, kui anuma sisemine kõrgus on 20 cm, sisemine läbimõõt 6 cm, seina paksus 2 mm ja anuma materjali erikaal 7,6?

620. Kui palju vett voolab 45 minuti jooksul läbi toru, mille sisemine läbimõõt on 6 cm? Voolu kiirus on $5 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$.

621. Mitu veinipudeli korki kaalub 1 kG, kui silindrikujulised korgid on 3,9 cm pikad, 2,3 cm paksud ja korgi erikaal on 0,24?

622. Ristkülik, mõõtmetega m cm ja n cm, pöörleb kord lühema, kord pikema külje ümber. Kummal juhul on silindri ruumala suurem, kui $m > n$? Arvuta ruumalad, kui $m=18,2$ cm ja $n=132$ mm.

623. Silindri külgpindala on S_k ja põhja übermõõt on c . Avalda silindri ruumala. Arvuta, kui $S_k=396,4$ ja $c=14,2$.

624. Ruudukujulise telglõikega silindri põhja sisse on kujundatud korrapärane n -nurk, mille külg on a_n . Avalda silindri ruumala. Arvuta, kui $a_5=8,3$.

KOONUS JA TÜVIKOONUS.

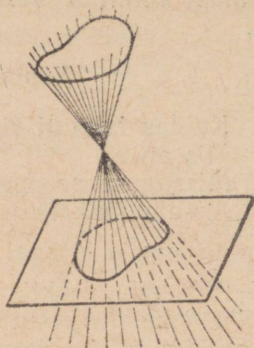
§ 118. KOONILINE PIND.

Olgu tasapinnal α antud kinnine kõverjoon j (joon. 232) ja väljaspool seda tasapinda liikumatu punkt T . Vaatleme sirget s , mis läbib punkti T ja kõverjoone j üht punkti, näiteks punkti A . Kujutleme nüüd sirget s liikuvana nii, et ta lõikaks kogu aeg joont j ja läbiks punkti T , kuni ta jõuab uuesti tagasi lähteasendisse, s. t. kuni läbib jälle punkti A . Sellel liikumisel kujundab sirge s pinna, mida nimetatakse **kooniliseks pinnaks** (joon. 233).

Kinnist kõverjoont j nimetatakse koonilise pinna juhtjooneks ja sirget s — koonilise pinna **moodustajaks**. Punkti T nimetatakse koonilise pinna **tipuks**. Nagu näeme jooniselt, jaotab tipp koonilise pinna kaheks võrdseks osaks.



Joon. 232.



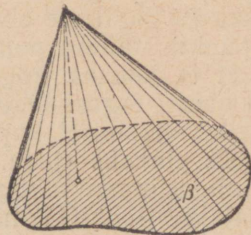
Joon. 233.

§ 119. KOONUS.

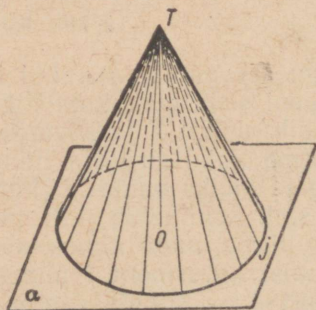
a) Lõikame koonilist pinda tasapinnaga β , mis ei läbi tippu ega ole paralleelne koonilise pinna moodustaja ühegi asendiga. Kooniline pind koos tasapinnaga β moodustavad kinnise pinna. Selle kinnise pinnaga piiratud ruumi osa nimetatakse **koonuseks** (joon. 234). Seega,

koonus on keha, mis tekib koonilise pinna lõikamisel tasapinnaga, mis ei läbi koonilise pinna tippu ega ole paralleelne moodustaja ühegi asendiga.

Olgu koonilise pinna juhtjooneks tasapinnal α asetsev ringjoon j . Koonilise pinna tipp asetsegu sirgel, mis on risti ringjoone tasapinnaga α ja mis läbib ringi keskpunkti O (joon. 235). Loomulikult ei saa tipp T asetseda punktis O . Miks? Lõigates seda koonilist pinda kas tasapinnaga α või mõne teise tasapinnaga,



Joon. 234.



Joon. 235.

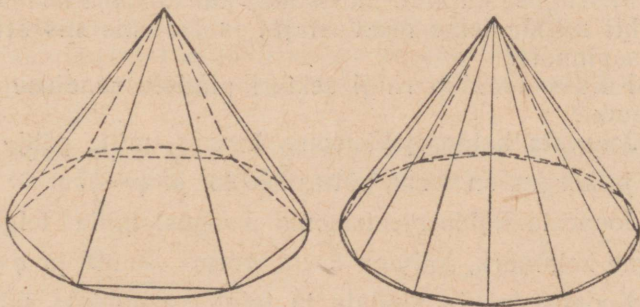
mis on α -ga paralleelne ja ei läbi tippu T , saame koonuse, mida nimetatakse **püstringkoonuseks**. Et keskkooli matemaatika kursosuses käsitletakse ainult püstringkoonuseid, siis nimetame neid edaspidi lihtsalt koonusteks.

Koonuse **külgpinnaks** on osa koonilisest pinnast. Koonuse **põhjaks** on ring. Tipust põhjale tõmmatud ristlõiku nimetatakse, nii nagu püramiidi juureski, **kõrguseks**.

Koonuse tipu ja juhtjoone vahelist koonilise pinna moodustaja lõiku nimetatakse **moodustajaks**.

b) Koonust saab defineerida ka korrapärase püramiidi kaudu. Joonisel 236 on esitatud korrapärane kuusnurkne ja kaksteistnurkne püramiid. Nagu näeme, läheneb korrapärane püramiid tema nurkade arvu kahekordistamisel koonusele. Kui jätkame püramiidi nurkade arvu kahekordistamist, saame püramiide, mis oma kujult järjest enam lähenevad koonusele. Seega,

koonus on korrapärase püramiidi piirkujund, kui püramiidi põhja nurkade arv tõkestamatult suureneb.



Joon. 236.

Et korrapärase püramiidi põhjaks on korrapärane hulknurk ja viimase piirkujundiks nurkade arvu tõkestamatul suurenemisel on ringjoon, siis selgub siit, et

koonuse põhjaks on ring.

Et püramiidi põhjaga paralleelne lõige säilitab oma omadused, kui tema nurkade arvu kahekordistada, siis kehtivad ka koonuse juures püramiidi käsitlemisel tundma õpitud põhjaga paralleelse lõike omadused. Sõnasta need! Mis järeldub siit ringide sarnasuse kohta?

c) Koonust tunneme juba kui pöördkeha. Missuguse kujundi pöörlemisel tekib koonus? Mis on pöörlemisteljeks?

Lõikame koonust tasapinnaga, mis läbib tema pöörlemistelge. Koonuse pind eraldab sellest tasapinnast ühe osa, mida nimetame koonuse **telglõikeks**.

Tõesta, et

koonuse telglõige on võrdhaarne kolmnurk.

Küsimusi ja ülesandeid.

625. Kuidas liigitatakse kolmnurki
a) nurkade järgi?
b) külgede järgi?
626. Nimeta võrdhaarse kolmnurga omadusi!
627. Nimeta täisnurkse kolmnurga
a) joonelementide vahelisi seoseid,
b) külgede ja nurkade vahelisi seoseid!
628. Defineeri koonust kui pöördkeha!
629. Missugust koonust nimetatakse püstringkoonuseks?
630. Mis on püramiid?
631. Missugust püramiidi nimetatakse korrapäraseks?
632. Missuguse kujundi me saame, kui lõikame koonuse külgepinna lahti mööda tema moodustajat ja laotame siis selle külgepinna tasapinnale?
633. Kuidas avaldub ringi sektori pindala raadiuse ja kesknurga kaudu?
634. Joonesta kaldprojektsioonis koonus, mille põhja raadius on 3 cm ja kõrgus on 4 cm, võttes $\omega = 90^\circ$ ja $q = \frac{1}{2}$.
635. Joonesta kaldprojektsioonis koonus, mille telglõige on võrdkülgne kolmnurk, küljega 5 cm, võttes $\omega = 90^\circ$ ja $q = \frac{1}{2}$.
636. Koonuse põhja pindala ja telglõike pindala suhe on π . Leia moodustaja kaldenurk põhja suhtes.
637. Koonuse kõrgus on h . Kui kaugel koonuse tipust peab lõikama koonust põhjaga paralleelse tasapinnaga, et lõike pindala oleks pool põhja pindalast?
638. Koonuse põhja raadius on r . Läbi kõrguse keskpunkti on võetud põhjaga paralleelne tasapind. Leia lõike pindala.
639. Avalda koonuse põhja pindala, kui moodustaja ja põhja vaheline nurk on α ning telglõike pindala on Q . Arvuta see pindala, kui $\alpha = 34,2^\circ$ ja $Q = 18 \text{ dm}^2$.
640. Koonuse moodustaja m ja põhja vaheline nurk on α . Avalda koonuse põhja pindala. Arvuta see, kui $m = 0,32 \text{ m}$ ja $\alpha = 63,8^\circ$.

§ 120. TÜVIKOONUS.

a) Lõikame koonilist pinda ühel pool tippu kahe paralleelse tasapinnaga, mis pole paralleelsed selle koonilise pinna moodustaja ühegi asendiga (joon. 237): Need tasapinnad koos koonilise

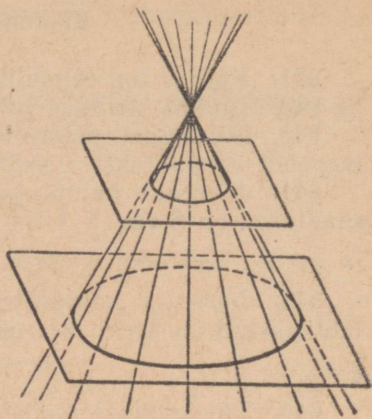
pinnaga moodustavad kinnise pinna. Selle pinnaga piiratud keha nimetatakse **tüvikoonuseks**. Seega, **tüvikoonus** on keha, mis tekib koonilise pinna lõikamisel ühel pool tippu kahe paralleelse tasapinnaga, mis pole paralleelsed koonilise pinna moodustaja ühegi asendiga.

Vaatleme järgnevas kursuses ainult neid tüvikoonuseid, mis on saadud püstringkoonuse lõikamisel põhjaga paralleelse tasapinnaga.

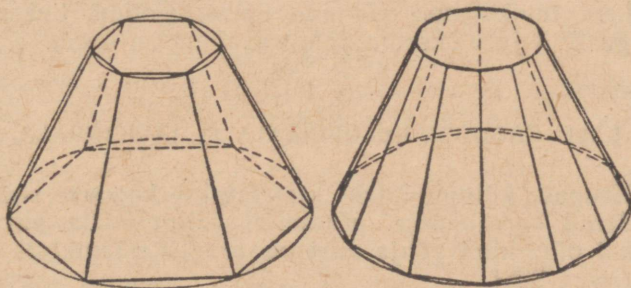
Tüvikoonuse külgpinnaks on osa koonilisest pinnast. Tüvikoonuse **põhjadeks** on ringid. Põhjadevahelist ristlõiku nimetatakse **kõrguseks**. Koonilise pinna moodustaja lõiku tüvikoonuse külgpinnal nimetatakse tüvikoonuse **moodustajaks**.

b) Tüvikoonust saab defineerida ka tüvipüramiidi piirkujundina (joon. 238).

Tüvikoonus on korrapärase tüvipüramiidi piirkujund, kui tüvipüramiidi nurkade arv tõkestamatult suureneb.



Joon. 237.



Joon. 238.

c) Nagu silindrit ja koonust, nii saab ka tüvikoonust defineerida pöördkehana. Missuguse kujundi pöörlemisel tekib tüvikoonus? Mis on pöörlemisteljeks?

Lõikame tüvikoonust tasapinnaga, mis läbib tema telge. Tüvikoonust piirava pinnaga on eraldatud sellest tasapinnast osa, mida nimetatakse tüvikoonuse telglõikeks.

Tõesta, et

tüvikoonuse telglõige on võrdhaarne trapets.

Küsimusi ja ülesandeid.

641. Kuidas on võimalik koonusest saada tüvikoonust?
642. Kuidas defineeritakse tüvipüramiidi? koonust?
643. Missugust nelinurka nimetatakse trapetsiks? Missugust trapetsit nimetatakse võrdhaarseks?
644. Joonesta kaldprojektsioonis tüvikoonus, mille põhjade raadiused on 6 cm ja 3 cm ning moodustaja on 5 cm, kui $\omega = 90^\circ$ ja $q = \frac{1}{2}$. Kui pikk on selle tüvikoonuse kõrgus?
645. Joonesta kaldprojektsioonis tüvikoonus, mille põhjade läbimõõdud on 4 cm ja 7 cm ning kõrgus on 5 cm, kui $\omega = 60^\circ$ ja $q = \frac{1}{2}$.
646. Tüvikoonuse moodustaja on $2a$ ja moodustaja kaldenurk põhja suhtes on 60° . Ühe põhja raadius on kaks korda suurem teise põhja raadiusest. Avalda põhjade raadiused.
647. Tüvikoonuse moodustaja on 5 dm ning põhjade raadiused on 3 dm ja 7 dm. Arvuta telglõike pindala.
648. Tüvikoonuse põhjade pindalad on 4 m^2 ja 16 m^2 . Tüvikoonus on lõigatud põhjadega paralleelse tasapinnaga, mis läbib kõrguse keskpunkti. Arvuta lõike pindala.
649. Tüvikoonuse põhjade pindalad on 1 m^2 ja 49 m^2 . Põhjaga paralleelse lõike pindala võrdub nende poolsummaga. Missugusteks osadeks jaotab see lõike kõrguse?
650. Leia tüvikoonuse põhjade übermõõdud, kui nad suhtuvad nagu 2 : 3 ja väiksema põhja raadius on 4 cm.

§ 121. KOONUSE KÜLGPINDALA JA TÄISPINDALA.

Koonuse külgpindalaks nimetatakse koonuse sisse kujundatud korrapärase püramiidi külgpindala piirväärtust, kui püramiidi põhja nurkade arv tõkestamatult suureneb (joon. 236).

Tähistame korrapärase n -nurkse püramiidi külgpindala S_n -ga ja teda piirava koonuse külgpindala S_k -ga. Nüüd võime kirjutada, et

$$S_k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

Et $S_n = \frac{1}{2} n \cdot a_n \cdot m_n$, kus a_n on korrapärase n -nurkse püramiidi põhiserv ja m_n selle püramiidi apoteem, siis

$$S_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} n \cdot a_n \cdot m_n \right) = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot m = \pi r m,$$

sest $\lim_{n \rightarrow \infty} (n \cdot a_n) = 2\pi r$ ja $\lim_{n \rightarrow \infty} m_n = m$, kus m on koonuse moodustaja. Seega,

koonuse külgpindala on võrdne põhja ümbermõõdu ja moodustaja poole korrutisega.

$$S_k = \pi r m$$

Koonuse täispindala

$$S_t = \pi r (r + m)$$

Näita selle valemi kehtivust!

Küsimusi ja ülesandeid.

651. Kuidas leiti koonuse külgpindala VII klassis?
652. Defineeri koonus püramiidi kaudu!
653. Sõnasta koonuse täispindala valem!
654. Kuidas avalduvad korrapärase püramiidi, korrapärase tüvipüramiidi ja silindri külgpindala ja täispindala?
655. Koonuse telglõige on võrdkülgne kolmnurk küljega 75 cm. Leia täispindala.
656. Koonuse telglõike üks haar on 20 cm ja telglõike tipunurk on 72° . Leia külgpindala ja täispindala.
657. Koonuse põhja pindala on 36π cm². Koonuse põhjast kahe ühiku kaugusel asuv põhjaga paralleelne lõige on 25π cm². Leia koonuse külgpindala.
658. Silotorni katus on koonusekujuline. Katuse kõrgus on 2 m ja torni läbimõõt on 6 m. Mitu tahvlit katuseplekki kulus katuse katmiseks, kui tahvli mõõtmed on 0,7 m $\times$ 1,4 m ja katuse kokkuvaltsimiseks kulus 12% kogu vajatavast plekist?
659. Ringi diameetri otspunktist tõmmatud kõõl pöörleb selle diameetri ümber. Arvuta pöörlemisel tekkiva pinna suurus, kui ringi diameeter on 25 cm ja kõõl 20 cm.
660. Kui suur on koonuse telglõike tipunurk juhul, kui koonus ja silinder on võrdsete kõrguste, võrdsete põhjapindalade ja võrdsete külgpindaladega.
661. Täisnurkne kolmnurk, mille kaatetid on 15 cm ja 20 cm, pöörleb kord ühe ja kord teise kaateti ümber. Leia nende koonuste külgpindalade suhe.
662. Kolmnurk külgedega $a=13$ cm, $b=14$ cm ja $c=15$ cm pöörleb kord külje a , siis külje b ja lõpuks külje c ümber. Mis suugusel juhul on tekkiva kaksikkoonuse pindala suurim?

663. Võrdhaarne trapets alustega 10 cm ja 4 cm ning kõrgusega 8 cm pöörleb pikema aluse ümber. Leia tekkiva pöördkeha pindala.

§ 122. TÜVIKOONUSE KÜLGPIINDALA JA TÄISPINDALA.

Tähistame tüvikoonuse sisse kujundatud korrapärase n -nurkse tüvipüramiidi külgpindala S_n -ga ja tüvikoonuse külgpindala S_k -ga. Defineerides tüvikoonuse külgpindala tema sisse kujundatud korrapärase tüvipüramiidi külgpindala piirväärtusena (joon. 238), võime kirjutada

$$S_k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

Olgu korrapärase n -nurkse tüvipüramiidi alumise põhja külge a_n ja apoteem k_n ning ülemise põhja külge b_n ja apoteem l_n . Tüvipüramiidi apoteem olgu m_n . Siis

$$S_n = \frac{n(a_n + b_n)}{2} \cdot m_n$$

ehk

$$S_n = \frac{n \cdot a_n + n \cdot b_n}{2} \cdot m_n.$$

Kui $n \rightarrow \infty$, siis $n \cdot a_n \rightarrow 2\pi r_1$, $n \cdot b_n \rightarrow 2\pi r_2$, kus r_1 on tüvikoonuse alumise põhja raadius ja r_2 tema ülemise põhja raadius. m_n läheneb tüvikoonuse moodustajale m . Seega

$$S_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n \cdot a_n + n \cdot b_n}{2} \cdot m_n \right) = \frac{2\pi r_1 + 2\pi r_2}{2} \cdot m.$$

$$S_k = \pi m(r_1 + r_2)$$

Et

$$\pi m(r_1 + r_2) = 2\pi m \cdot \frac{r_1 + r_2}{2},$$

siis tulemust saab sõnastada järgmiselt:

tüvikoonuse külgpindala on võrdne niisuguse silindri külgpindalaga, mille moodustajaks on tüvikoonuse moodustaja ja mille põhja raadiuseks on tüvikoonuse põhjade raadiuste aritmeetiline keskmine.

Tüvikoonuse täispindala saamiseks tuleb külgpindalaga liita põhjade pindalad πr_1^2 ja πr_2^2 . Seega

$$S_t = \pi[r_1^2 + r_2^2 + m(r_1 + r_2)]$$

Küsimusi ja ülesandeid.

664. Kuidas avaldub tüvipüramiidi külgpindala ja täispindala?

665. Tuleta tüvikoonuse täispindala valem, lähtudes tüvipüramiidi täispindala valemist!

666. Missugune kujund on koonuse telglõikeks? tüvikoonuse telglõikeks?

667. Missuguse kujundi me saame, kui lõikame tüvikoonuse külgpinna mööda tema moodustajat lahti ja laotame tasapinnale?

668. Tüvikoonuse põhjade raadiused on 3 m ja 1,5 m ning kõrgus 4 m. Arvuta täispindala.

669. Leia tüvikoonuse külgpindala, kui väiksema põhja läbimõõt $d=10,8$ dm, moodustaja $m=3,7$ dm ja kõrgus $h=1,2$ dm.

670. Tüvikoonuse kõrgus $h=63$ dm, moodustaja $m=65$ dm ja külgpindala $S=26\pi m^2$. Arvuta põhjade raadiused.

671. Avalda tüvikoonuse külgpindala, kui tüvikoonuse moodustaja kaldenurk põhja suhtes on 30° ja telglõike pindala on Q .

672. Avalda tüvikoonuse külgpindala, kui tüvikoonuse moodustaja kaldenurk põhja suhtes on 45° ning põhjade raadiused on r_1 ja r_2 .

673. Leia niisuguse silindri põhja raadius, mille külgpindala on võrdne antud tüvikoonuse külgpindalaga ja mille kõrgus on võrdne tüvikoonuse moodustajaga, kui tüvikoonuse põhjade pindalad on $2,56\pi m^2$ ja $21,16\pi m^2$.

§ 123. KOONUSE RUUMALA.

Koonuse ruumalaks nimetatakse koonuse sisse kujundatud korrapärase püramiidi ruumala piirväärtust, kui püramiidi põhja nurkade arv tõkestamatult kasvab.

Tähistades korrapärase n -nurkse püramiidi ruumala V_n -ga ja koonuse ruumala V -ga, võime kirjutada, et

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n.$$

Et püramiidi ruumala on võrdne põhja pindala ja kõrguse kor-
rutise kolmandikuga, siis korrapärase n -nurkse püramiidi ruumala

$$V_n = \frac{1}{3} \frac{n \cdot a_n \cdot k_n}{2} \cdot h,$$

kus a_n on põhiserv, k_n — põhja apoteem ja h — püramiidi kõrgus.
Seega,

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{6} n \cdot a_n \cdot k_n \cdot h \right) = \frac{1}{6} \cdot 2\pi r \cdot r \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

Põhjenda seda võrduste rida!

Seega,

**koonuse ruumala on võrdne ühe kolmandikuga põhja
pindala ja kõrguse korrutisest.**

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

Küsimusi ja ülesandeid.

674. Kuidas avalduvad prisma, püramiidi, tüvipüramiidi ja silindri ruumalad?

675. Sõnasta püramiidi põhjaga paralleelsete lõigete omadused!

676. Sõnasta rööptahuka vastastahkude omadus ja diagonaalide omadus!

677. Kui palju kaalub koonusekujuline liivahunnik, mille kõrgus on 1,3 m ja põhja ümbermõõt on 15 m, kui 1 m³ liiva kaalub 1,8 t?

678. Koonuse kõrgus on 8 cm, telje ja moodustaja vaheline nurk on 42°. Arvuta koonuse ruumala.

679. Koonuse põhja raadius on 20 cm, moodustaja ja põhja vaheline nurk on 65°. Leia ruumala.

680. Koonusekujuline telk ehitatakse niisugune, et sellesse mahuvad 4 meest arvestusega igale 3,5 m² pinda. Telgi kõrgus on 3,5 m. Kui palju kulub telgi valmistamiseks riidet ja kui palju tuleb telgis õhku ühe mehe kohta?

681. Kaevati välja vundamendisüvend mõõtmetega 14,50 m, 9,25 m ja 6,50 m. Väljakaevatud mullast kerkis koonusekujuline hunnik, mille moodustaja ja põhja vaheline nurk oli 45°. Arvestades, et igast 25 m³ kinnisest pinnasest saab 40 m³ lahtist pinnast, leia selle koonuse kõrgus.

682. Marmorkoonusest, mille kõrgus oli 21 cm ja põhja läbimõõt 40 cm, puuriti välja teine koonus, mille telg ühtis antud

koonuse teljega ja mille moodustaja oli paralleelne antud koonuse moodustajaga. See tühimik valati seisu stabiilsuse saavutamiseks täis seatina. Leia nii saadud koonuse erikaal, kui välja-puuritud koonuse kõrgus oli 14 cm ning kui marmori erikaal on $2,84 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ ja seatina erikaal $11,35 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$.

683. Ruut, mille diagonaal on d cm, pöörleb ümber diagonaali. Leia tekkinud pöördkeha pindala ja ruumala. Arvuta, kui $d=3,5$.

684. Leia ülesande 661 andmete järgi koonuste ruumalade suhe.

685. Leia ülesande 662 andmete järgi, missugusel juhul on tekkiva kaksik-koonuse ruumala suurim.

686. Koonuse kõrgus on h ning moodustaja ja põhja vaheline nurk on α . Avalda koonuse ruumala. Arvuta, kui $\alpha=25^\circ$ ja $h=14,6$.

687. Koonuse põhja raadius on r ning moodustaja ja põhja vaheline nurk on α . Avalda koonuse külgpindala ja ruumala. Arvuta, kui $\alpha=48,4^\circ$ ja $r=3,42$.

688. Kolmnurgas on antud külge α ja selle lähisnurgad β ja γ . Avalda selle kolmnurga pöörlemisel ümber antud külje tekkiva keha pindala ja ruumala. Arvuta, kui $\alpha=14,6$, $\beta=78^\circ$ ja $\gamma=56^\circ$.

689. Võrdhaarne kolmnurk, mille pindala $Q=50 \text{ dm}^2$ ja tipunurk $\beta=100^\circ$, pöörleb ümber sirge, mis läbib kolmnurga aluse üht otspunkti ja on risti alusega. Avalda ja arvuta tekkiva pöördkeha pindala ja ruumala.

§ 124. TÜVIKOOVUSE RUUMALA.

Tüvikoonuse ruumala valemi tuletamiseks kasutame meile juba teada olevat korrapärase tüvipüramiidi ruumala valemit, defineerides tüvikoonuse ruumala tema sisse kujundatud korrapärase püramiidi ruumala piirväärtusena.

Olgu tüvikoonusesse kujundatud korrapärane n -nurkne tüvipüramiid (joon. 238). Tähistame selle tüvipüramiidi ruumala V_n -ga ja tüvikoonuse ruumala V -ga. Siis

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n.$$

Et $V_n = \frac{h}{3} (S_{p_1} + \sqrt{S_{p_1} S_{p_2}} + S_{p_2})$, kus h on tüvipüramiidi kõrgus ja S_{p_1} ning S_{p_2} tüvipüramiidi põhjade pindalad.

Kui $n \rightarrow \infty$, siis tüvipüramiidi põhjad lähenevad tüvikoonuse põhjadele, s. t. et $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{p_1} = S_1$ ja $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{p_2} = S_2$.

Seega

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h}{3} (S_{p_1} + \sqrt{S_{p_1} \cdot S_{p_2}} + S_{p_2}) = \frac{h}{3} (S_1 + \sqrt{S_1 \cdot S_2} + S_2).$$

Sõnasta see valem!

Olgu tüvikoonuse põhjade raadiused r_1 ja r_2 , siis saame ruumala valemi esitada kujus

$$V = \frac{\pi h}{3} (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$$

Küsimusi ja ülesandeid.

690. Missugust keha nimetatakse tüvipüramiidiks? tüvikoonuseks?

691. Kuidas avaldub tüvipüramiidi ruumala? koonuse ruumala?

692. Tüvikoonuse põhjade raadiused on 4 m ja 2,5 m; kõrgus on 3 m. Leia ruumala.

693. Tüvikoonuse kujulise veeanuma ülemise põhja sisemine läbimõõt on 1,20 m ja alumise põhja sisemine läbimõõt 80 cm. Sisemine sügavus on 1,00 m. Mitu ämbrit vett mahub anumasse, kui ämbrisse mahub 11 l vett?

694. Tehase korsten on 140 m kõrge. Korstna sisemine läbimõõt alt on 5,25 m ja korstnamüüri paksus 1,50 m. Ülevalt on korstna sisemine läbimõõt 2,50 m ja korstnamüüri paksus 0,25 m. Arvuta:

a) korstnamüüri ruumala, kui müüri paksus väheneb ühtlaselt alt ülespoole,

b) korstna kogurõhk vundamendile, kui korstnamüüri erikaal on $1,75 \frac{\text{T}}{\text{m}^3}$.

695. Tüvipüramiidi põhjade raadiused on $r_1 = 25$ cm ja $r_2 = 12$ cm. Moodustaja kaldenurk põhja suhtes on 75° . Leia selle tüvipüramiidi pindala ja ruumala.

696. Koonusest, mille põhja raadius on 11 cm ja mille moodustaja on 61 cm, lõigatakse tipust 20 cm kaugusel põhjaga paralleelse tasapinnaga ära tema koonuseline osa. Kui suur on järelejäänud tüvikoonuse ruumala?

697. Puust koonus, kõrgusega 45 cm, ujub vees nii, et tema tipp on vee pinnast 27 cm kõrgemal. Leia koonuse erikaal.

698. Puust koonus, kõrgusega 24 cm, ujub vees tipuga allapoole. Leia:

a) kui sügavalt ujub koonus vees, kui puu erikaal on 0,48,

b) kui suur on vee pinnale jääva koonuseosa ruumala ja pindala, kui koonuse põhja raadius on 7 cm.

699. Tehnikas kasutatakse tüvikoonuse ruumala arvutamiseks järgmist ligikaudset valemit:

$$V \approx G_m \cdot h, \text{ kus } G_m = \frac{\pi}{2} (r_1^2 + r_2^2).$$

Selgita selle valemi kasutamise õigsust. Kas valem annab täpsema tulemuse siis, kui tüvikoonus oma kujult läheneb silindrile, või siis, kui ta oma kujult läheneb koonusele?

700. Tehnikas kasutatakse tüvikoonuse ruumala arvutamiseks ka valemit

$$V \approx M \cdot h,$$

kus M on tüvikoonuse kesklõike pindala, s. o. selle põhjaga paralleelse lõike pindala, mille läbimõõt on $r_1 + r_2$.

Selgita esitatud valemi kasutamise õigsust. Kas valem annab täpsema tulemuse siis, kui tüvikoonus oma kujult läheneb silindrile, või siis, kui ta oma kujult läheneb koonusele?

701. Kasutades eelmises kahes ülesandes antud ligikaudseid valemeid, arvuta niisuguse tüvikoonuse ruumala, mille põhjade läbimõõdud on 18 cm ja 20 cm ning kõrgus on 6 cm. Kumb valem annab täpsema tulemuse?

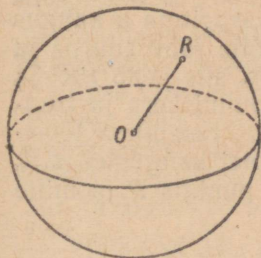
KERA.

§ 125. SFÄÄR JA KERA.

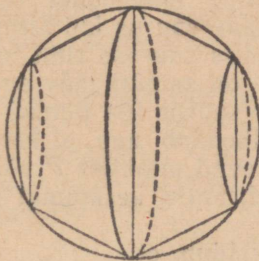
a) Olgu ruumis antud punkt O . Vaatleme sirglõiku OR , mis saab vabalt igas suunas pöörelda nii, et punkt O jääb kogu aeg paigale. Punkt R kujundab siis pinna, mida nimetatakse **sfääriks** ehk **kerapinnaks** (joon. 239).

Seega,

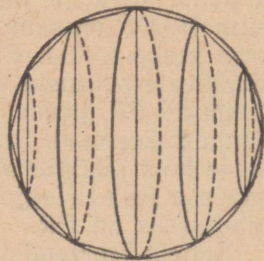
sfäär on kinnine pind, mille kujundab ühest otspunktist kinnitatud, muidu aga vabalt igas suunas pöörlev sirglõik oma teise otspunktiga. Sfääriga piiratud ruumi osa nimetatakse keraks.



Joon. 239.



Joon. 240.

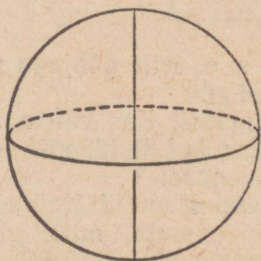


Punkti O nimetatakse kera **keskpunktiks** ja sirglõigu OR pik-
kust — kera **raadiuseks**.

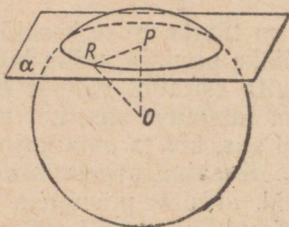
b) Joonisel 240 on esitatud pöördkeha, mis tekib korrapärase hulknurga pöörlemisel tema sümmeetriatelje ümber. On ilmne, et hulknurga nurkade arvu suurendades läheneb pöördkeha oma kujult keralale. Seega,

kera on korrapärase hulknurga pöörlemisel ümber tema sümmeetriatelje tekkiva pöördkeha piirasend, kui hulknurga nurkade arv tõkestamatult suureneb.

c) Kera tekib ka ringi pöörlemisel ümber diameetri (joon. 241).



Joon. 241.



Joon. 242.

§ 126. KERA LÕIGE TASAPINNAGA.

Lõikame kera tasapinnaga α (joon. 242). Tõestame, et
sfääri ja tasapinna lõikejooneks on ringjoon.

Tõmbame kera keskpunktist ristlõigu OP tasapinnale α , ühendame kera ja tasapinna lõikejoone mingi punkti R punktiga P . Nüüd on $OP \perp PR$ (miks?) ja seega kolmnurk OPR on täisnurkne. Sellest järeldub, et

$$OR^2 - OP^2 = PR^2$$

(põhjenda!).

OR on kera raadius ja seetõttu tema pikkus on jääv iga punkti R puhul kera ja tasapinna lõikejoonel (lõikejoon asetseb kera pinnal). OP on samuti jääv suurus kui antud tasapinna α kaugus kera keskpunktist. Et jääva suuruse ruut on jälle jääv suurus ja et jäävate suuruste vahe on samuti jääv suurus, siis peab PR^2 ja seega ka PR olema jääv suurus iga punkti R puhul kera ja tasapinna lõikejoonel. See tähendab aga, et kera ja tasapinna lõikejoone kõik punktid asetsevad punktist P võrdsetel kaugustel, s. t. nad asetsevad ringjoonel, mille keskpunkt on punktis P ja mille raadiuseks on PR .

Sellest teoreemist järeldub, et

kera lõige tasapinnaga on ring.

Kasutades seost $PR = \sqrt{OR^2 - OP^2}$, järeldame veel, et

1) mida ligemal kera keskpunktile asetseb lõikav tasapind, seda suurem on lõikering;

2) lõikering on suurim, kui lõikav tasapind läbib kera keskpunkti;

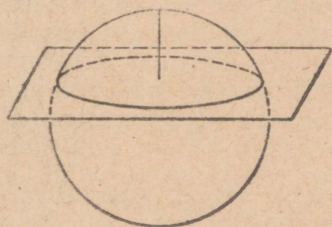
3) kui $OP \rightarrow r$, siis $PR \rightarrow 0$, s. t. et lõikering läheneb punktile ja seega lõiketaspind läheneb oma piirkujundile — puutujatasapinnale. Siit järeldub, et

kera puutujatasapind on puutepunktis raadiusega risti.

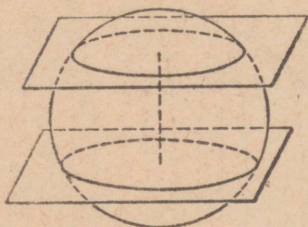
§ 127. KERA OSAD.

a) Segment.

Lõigates kera tasapinnaga, jaotub kera kaheks osaks (joon. 243). Neid osi nimetatakse kera **segmentideks**. Kera segmenti piiravat kera pinna osa nimetatakse sfääri segmendiks ja



Joon. 243.



Joon. 244.

ringi — segmenti **põhjaks**. Põhja keskpunkti kera pinnani tõmmatud ristlõiku nimetatakse segmenti **kõrguseks**.

b) Kiht ja vöö.

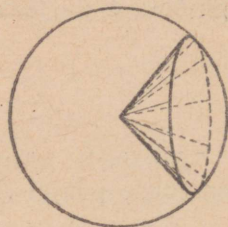
Lõigates kera kahe paralleelse tasapinnaga (joon. 244), jaotub kera kaheks segmendiks ja paralleelsete tasapindade vaheliseks osaks, mida nimetatakse kera **kihiks**.

Kihi külgpinda, s. o. pinda, mis eraldub sfäärilist tema lõikamisel kahe paralleelse tasapinnaga ja mis jääb nende vahele, nimetatakse kera **vööks**.

Kera kihti piiravad peale vöö veel paralleelsete tasapindade osad — ringid, milliseid nimetatakse kihi **põhjadeks**. Põhjadevahelist ristlõiku nimetatakse nii kera kihi kui ka kera vöö **kõrguseks**.

c) Sektor.

Lõikame kera niisuguse ühepoolse koo-



Joon. 245.

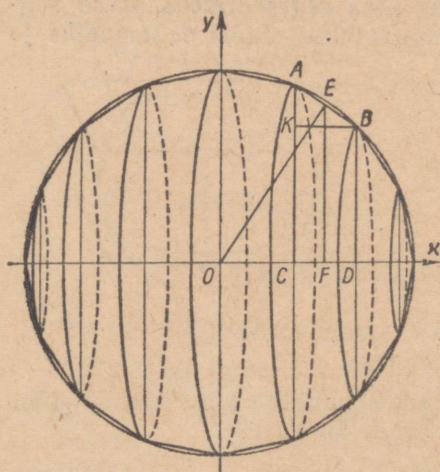
nilise pinnaga, mille tipp asetseb kera keskpunktis (joon. 245). See pind eraldab kerast osa, mida nimetatakse kera **sektoriks**.

Kera sektor on liitkeha, mis koosneb kera segmendist ja koonusest. Sellel segmendil ja koonusel on ühine põhi. Koonuse tipp asetseb kera keskpunktis.

§ 128. SFÄÄRI JA TEMA OSADE PINDALA.

a) Sfääri pindala.

Sfääri pindalaks nimetatakse korrapärase hulknurga pöörlemisel tekkinud pöördkeha pindala piirväärtust, kui hulknurga nurkade arv tõkestamatult kasvab.



Joon. 246.

Olgu antud korrapärane $2n$ -nurk koos tema ümber-ringjoonega (joon. 246). Pöörrelgu see hulknurk ümber x -telje, milleks on üks keskpunkti läbivaist diagonaalidest. Saame pöördkeha, mis koosneb tüvikoonustest. Äärmised osad on küll koonused, kuid neid võib vaadelda tüvikoonustena, mille ühe põhja pindala on null. Sfääri pindalaks on nende tüvikoonuste külgpindalade summa piirväärtus. Olgu hulknurga tippudeks punktid $A(x_{i-1}; y_{i-1})$ ja $B(x_i; y_i)$. Tähistame hulknurga külje a_{2n} -ga ja apoteemi k_{2n} -ga. Edasi tähistame

$$KB = CD = x_i - x_{i-1} = \Delta x_i,$$

AB pöörlemisel tekkiva tüvikoonuse külgpindala S_i -ga ning sfääri pindala S -ga. Siis

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n S_i.$$

Jooniselt näeme, et $S_i = \pi(AC + BD) \cdot AB$. Trapetsi kesklõigu omaduse põhjal $AC + BD = 2EF$ ja seega

$$S_i = 2\pi \cdot EF \cdot AB.$$

Vaatleme kolmnurki AKB ja OFE . Need on sarnased. Miks?

Siit

$$\frac{AB}{OE} = \frac{KB}{EF},$$

millest

$$AB \cdot EF = OE \cdot KB = k_{2n} \cdot \Delta x_i.$$

Seega

$$S_i = 2\pi \cdot k_{2n} \cdot \Delta x_i$$

ja

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n S_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 2\pi \cdot k_{2n} \cdot \Delta x_i =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (2\pi \cdot k_{2n} \sum_{i=1}^n \Delta x_i) = 2\pi \lim_{n \rightarrow \infty} (k_{2n} \cdot \sum_{i=1}^n \Delta x_i) = 2\pi r \cdot 2r = 4\pi r^2,$$

sest $\lim_{n \rightarrow \infty} k_{2n} = r$, s. t. et hulknurga apoteem n tõkestamatul kasvamisel läheneb hulknurga ümber joonestatud ringi raadiusele ja $\sum_{i=1}^n \Delta x_i = 2r$.

Saadud summa piirväärtust saab avaldada ka määratud integraali kaudu rajades $(-r)$ -st r -ni, sest

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \int_{-r}^r dx.$$

Seega

$$S = 2\pi r \int_{-r}^r dx = 2\pi r x \Big|_{-r}^r = 4\pi r^2.$$

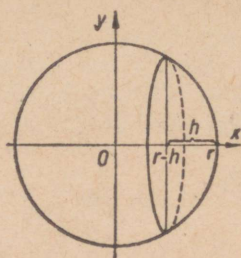
Et hulknurga ümberringjoone raadius r on ka pöörlemisel tekkinud kera raadiuseks, siis

sfääri pindala on võrdne neljakordse suurringi pindalaga.

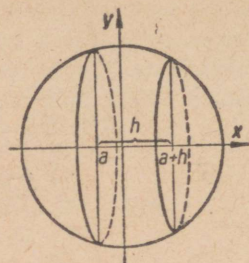
$$S = 4\pi r^2$$

b) Sfääri segmendi pindala.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta x_i$ avaldamine määratud integraalina võimaldab ker-



Joon. 247.



Joon. 248.

gesti leida sfääri segmendi pindala. Selleks tuleb nüüd integreerida rajades $(r-h)$ -st r -ni, kus h on segmendi kõrgus (joon. 247)

$$S_{seg} = 2\pi r \int_{r-h}^r dx = 2\pi r x \Big|_{r-h}^r = 2\pi r^2 - 2\pi r(r-h) = 2\pi rh.$$

$$S_{seg} = 2\pi rh$$

c) Vöö pindala.

Vöö pindala saamiseks tuleb integreerida rajades a -st $(a+h)$ -ni, kus h on vöö kõrgus ja a on x -telje selle punkti abstsiss, mida läbib kera kihi üks põhi (joon. 248).

$$S_{vöö} = 2\pi r \int_a^{a+h} dx = 2\pi r x \Big|_a^{a+h} = 2\pi r(a+h) - 2\pi ra = 2\pi rh.$$

$$S_{vöö} = 2\pi rh$$

Näeme, et sfääri segmendi ja vöö pindala avalduvad ühesuguse valemiga, mida võib sõnastada järgmiselt:

sfääri segmendi (kera vöö) pindala on võrdne segmendi (vöö) kõrguse ja kera ümbermõõdu korrutisega.

Küsimusi ja ülesandeid.

702. Näita, et tüvikoonuse ruumala valemist tuleneb koonuse ruumala valem, kui ühe põhja raadius võtta võrdseks nulliga.

703. Missugust joont nimetatakse ringjooneks?

704. Kuidas nimetatakse ringi osi?

705. Kuidas leitakse ringi sektori pindala? ringi segmendi pindala?

706. Otsitava sfääri pindala on 3 korda suurem antud sfääri pindalast. Kui suur on otsitava kera raadius, kui antud kera raadius on 5 cm?

707. On antud kaks kera, mille raadiused on 8,8 cm ja 10,5 cm. Kui suur on selle kera raadius, mille pindala on võrdne antud kerade pindalade summaga?

708. Kera, mille raadius on 41 dm, on lõigatud tasapinnaga 9 dm kaugusel keskpunktist. Arvuta lõike pindala.

709. Kera raadius on 63 cm. Punkt asetseb kera puutujatasapinnal 16 cm kaugusel puutepunktist. Leia punkti lühim kaugus kera pinnast.

710. Kera raadius on r . Läbi raadiuse otspunkti on pandud tasapind, mille suhtes raadiuse kaldenurk on 60° . Avalda tekkinud lõike pindala.

711. Vöö põhjade raadiused on 16 cm ja 33 cm; kera raadius on 65 cm. Leia vöö kõrgus juhul, kui kera keskpunkt

a) on vöö põhjade vahel,

b) ei ole vöö põhjade vahel.

712. Arvuta sfääri pindala, kui kera raadius on 15 cm ja segmendi kõrgus on 4 cm.

713. Arvuta sfääri segmendi pindala, kui segmendi kõrgus on 16 cm ja põhja raadius on 30 cm.

714. Tõesta, et kera segmenti kujundatud koonuse külgpindala on selle segmendi põhja pindala ja sfääri segmendi pindala keskmine võrdeline.

715. Kera, mille raadius on 10 cm, on silindriliselt läbi puuritud mööda telge. Puuraugu läbimõõt on 12 cm. Arvuta keha täispindala.

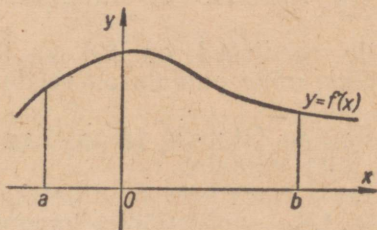
716. Observatooriumi katus on kujult sfääri segment, mille kõrgus on 4,6 m. See segment on osa kerast, mille raadius on 9,2 m. Leia katuse pindala.

717. Kuubi ümber, mille raadius on a , on kujundatud kera. Üht kuubi tahkudest on laiendatud kuni lõikumiseni kera pinnaga. Leia tekkinud segmentide pindalad.

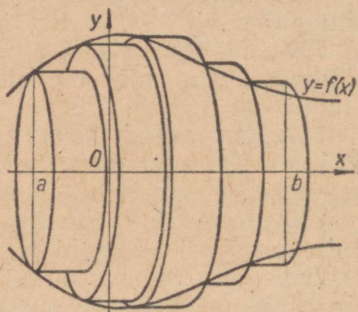
718. Kui suur osa maakera pinnast kuulub polaarvöötmesse, parasvöötmesse ja troopikavöötmesse ($r \approx 6000$ km)?

§ 129. PÖÖRDKEHA RUUMALA.

Olgu koordinaatteljestikus antud funktsiooni $y=f(x)$ graafik ja olgu selle graafikuga määratud kõverjooneline trapets vahemikus a -st b -ni (joon. 249). Paneme selle trapetsi pöörlema ümber x -telje. Tekkinud pöördkeha ruumala valemi tuletamiseks jaotame



Joon. 249.



Joon. 250.

trapetsi x -teljega ristuvate tasapindade abil n -osaks. Need osad lähendame silindritega, nagu näidatud joonisel 250. Nende silindrite ruumalade summa

$$\sum_{i=1}^n \pi f^2(x_i) \Delta x_i$$

on pöördkeha ruumala ligikaudseks väärtuseks. Pöördkeha ruumala all mõistame nende silindrite ruumalade summa piirväärtust, kui silindrite arv tõkestamatult suureneb nii, et iga $\Delta x_i \rightarrow 0$ a -st b -ni.

Tähistades pöördkeha ruumala tähega V , võime kirjutada

$$V = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta x_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \pi f^2(x_i) \Delta x_i.$$

Niisugune summa piirväärtus on aga võrdne määratud integraaliga.

Seega avaldub pöördkeha ruumala määratud integraalina

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

a) Kera ruumala.

Kasutades leitud pöördekera ruumala valemit, leiame kera ruumala valemi.

Kera tekib ringjoone pöörlemisel ümber diameetri.

Olgu ringjoone keskpunktiks koordinaatide alguspunkt. Nagu teame, on niisuguse ringjoone võrrand $x^2 + y^2 = r^2$. Avaldades siit y^2 , saame avaldise, mida tuleb kera ruumala valemi saamiseks integreerida rajades $(-r)$ -st r -ni:

$$V_{\text{kera}} = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^r = \pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} + r^3 - \frac{r^3}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

$$V_{\text{kera}} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

Et $\frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{1}{3} \cdot 4\pi r^2 \cdot r$, siis võib tulemuse sõnastada järgmiselt:

**kera ruumala on võrdne kera pindala ja raadiuse kor-
rutise kolmandikuga.**

b) Kera segmendi ruumala.

Jooniselt 247 näeme, et kera segmendi ruumala valemi saame sama integraali kaudu, kui integreerime rajades $(r-h)$ -st r -ni, kus h on segmendi kõrgus.

$$V_{\text{seg}} = \pi \int_{r-h}^r (r^2 - x^2) dx = \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{r-h}^r = \pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} - r^3 + r^2 h + \right. \\ \left. + \frac{r^3 - 3r^2 h + 3rh^2 - h^3}{3} \right) = \pi \left(rh^2 - \frac{h^3}{3} \right) = \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3} \right).$$

$$V_{\text{seg}} = \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3} \right)$$

c) Kera sektori ruumala.

Kera sektori ruumala avaldub koonuse ja kera segmendi ruumalade summamana (joon. 248):

$$V_{\text{sek}} = \frac{1}{3} \pi r_1^2 (r-h) + \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3} \right).$$

Et

$$r_1^2 = r^2 - (r-h)^2 = 2rh - h^2,$$

siis

$$\begin{aligned} V_{sek} &= \frac{1}{3} \pi (2rh - h^2) (r-h) + \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3} \right) = \\ &= \frac{1}{3} \pi h (2r^2 - 2rh - rh + h^2 + 3rh - h^2) = \frac{2}{3} \pi r^2 h. \end{aligned}$$

$$V_{sek} = \frac{2}{3} \pi r^2 h$$

d) Kera kihi ruumala.

Kera kihi ruumala saame leida kahe segmendi ruumala vahena (joon. 248).

Kera kihi ruumala valemi saame ka integreerimise teel, kasutades kera ruumala valemi tuletamisel saadud integraali. Nüüd toimub aga integreerimine rajades a -st $(a+h)$ -ni, kus a on kihi vasakpoolse põhja kaugus koordinaatide alguspunktist ja h on kihi kõrgus.

$$\begin{aligned} V_{kiht} &= \pi \int_a^{a+h} (r^2 - x^2) dx = \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_a^{a+h} = \pi \left[r^2 (a+h) - \frac{(a+h)^3}{3} - \right. \\ &\quad \left. - r^2 a + \frac{a^3}{3} \right] = \pi \left(r^2 h - a^2 h - ah^2 - \frac{h^3}{3} \right) = \frac{\pi h}{2} \left(2r^2 - 2a^2 - 2ah - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2h^2}{3} \right) = \frac{\pi h}{2} \left\{ (r^2 - a^2) + \left[r^2 - (a^2 + 2ah + h^2) \right] + \frac{h^2}{3} \right\} = \\ &= \frac{\pi h}{2} \left(r_1^2 + r_2^2 + \frac{h^2}{3} \right) = \frac{\pi h}{6} (3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2). \end{aligned}$$

$$V_{kiht} = \frac{\pi h}{6} (3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2)$$

Küsimusi ja ülesandeid.

719. Sõnasta kera segmendi ruumala valem.

720. Sõnasta kera sektori ruumala valem.

721. Missuguse kuju omandab kera segment, kui tema kõrgus saab võrdseks kera raadiusega? Lähimõõduga? Kontrolli segmendi ruumala valemi kehtivust neil juhtudel!

722. Missuguse kuju omandab kera kiht, kui $h=r-a$. Kontrolli kera kihi ruumala valemi kehtivust sel juhul!

723. Leia sirge $y=2x$ pöörlemisel ümber x -telje tekkiva pöördkeha ruumala vahemikus 0-st 3-ni.

724. Tuleta koonuse ruumala valem, kasutades pöördkeha ruumala valemit!

725. Leia parabooli $y=x^2$ pöörlemisel ümber x -telje tekkiva pöördkeha ruumala vahemikus 0-st 2-ni.

726. Leia funktsiooni $y=\sqrt{x}$ pöörlemisel ümber x -telje tekkiva pöördkeha ruumala vahemikus 0-st 2-ni.

727. Leia funktsiooni $y=x^3$ pöörlemisel ümber x -telje tekkiva keha ruumala vahemikus 0-st 2-ni.

728. Praktikas kasutatakse kera ruumala arvutamiseks valemiga $V \approx \frac{1}{2}d^3$. Põhjenda selle valemi õigsust. Kui suur on viga, kui kasutada seda valemist niisuguse kera ruumala arvutamiseks, mille raadius on 1 m?

729. Kuubil ja keral on võrdne ruumala 1000 cm^3 . Mitu protsenti on kera pindala väiksem kuubi pindalast?

730. Kuubil ja keral on võrdne pindala 600 cm^2 . Mitu protsenti on kera ruumala suurem kuubi ruumalast?

731. Kerakujuline õõnes boi, välise läbimõõduga 1,4 m, peab vees vajuma poolest saadik vette. Kui paks peab sel juhul olema terasplekk, millest boi tuleb valmistada, kui vee erikaal on 1 ja teraspleki erikaal 7,8?

732. Puust kera, läbimõõduga 11,1 cm, vajub 6,9 cm sügavusele vette. Kui suur on märgamata pinna osa? Kui suur on kera erikaal?

733. Tinakuulist, mille raadius on 8,6 cm, valatakse seest tühi kuul välise läbimõõduga 23,5 cm. Kui paks on uue kuuli sein?

734. Kera raadius on r ja tema sektori telglõike nurk on 120° . Leia sektori ruumala.

735. Kaksikkumera läätse sfääriliste pindade raadiused on 10 cm ja 17 cm. Keskpunktidevaheline kaugus on 21 cm. Arvuta läätse ruumala.

736. Kera, mille raadius on 65 cm, on ühel ja samal pool keskpunkti lõigatud kahe paralleelse tasapinnaga, mille kaugused keskpunktist on 16 cm ja 25 cm. Leia nende vahel oleva kera kihi ruumala.

737. Ringi segment pöörleb segmendi aluseks oleva kõõluga paralleelse diameetri ümber. Tõesta, et seejuures tekkiv keha on ruumvõrdne keraga, mille läbimõõduks on segmendi kõõl.

VIII. ARVU MÕISTE ÜLDISTAMINE.

§ 131. NATURAALARVUD.

Arvud 1, 2, 3, 4, 5, ... on naturaalarvud ja nad moodustavad naturaalarvude hulga.

Tutvume naturaalarvude hulga omadustega.

1° a) Kahe naturaalarvu liitmise tulemuseks on jälle naturaalarv, näiteks:

$$3 + 16 = 19, \quad 5639 + 872 = 6511.$$

Kuna iga kahe naturaalarvu summa on ka naturaalarv, siis ütleme, et

naturaalarvude hulgas on teostatav liitmise tehe.

Naturaalarvude liitmine on kommutatiivne ja assotsiatiivne, s. t. et

$$a + b = b + a$$

ja

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

b) Korrutades kaht naturaalarvu, saame tulemuseks jälle naturaalarvu, näiteks:

$$15 \cdot 63 = 945, \quad 413 \cdot 2675 = 1\,104\,775.$$

Et iga kahe naturaalarvu korrutis on naturaalarv, siis

naturaalarvude hulgas on teostatav korrutamise tehe.

Naturaalarvude korrutamine on kommutatiivne ja assotsiatiivne, s. t. et

$$ab = ba$$

ja

$$(ab)c = a(bc).$$

Naturaalarvude hulgas on kehtiv ka distributiivsuse seadus, s. t. et

$$(a + b)c = ac + bc.$$

Sõnasta kommutatiivsuse, assotsiatiivsuse ja distributiivsuse seadused!

c) Kahe naturaalarvu vahe ei pruugi olla naturaalarv. Kui näiteks lahutamisel

$$36 - 24 = 12$$

on vahe naturaalarv, siis lahutamisel

$$92 - 100 = -8$$

vahe pole naturaalarv.

Seetõttu me ütleme, et

naturaalarvude hulgas pole lahutamise tehe alati teostatav.

d) Teostades jagamisi

$$100 : 4 = 25, \quad 846 : 9 = 94,$$

saame jagatiseks naturaalarvu, kuid jagades näiteks

$$39 : 6 = 6\frac{1}{2} \text{ või } 8 : 9 = 0,(8)$$

ei saa me jagatiseks naturaalarvu.

Seega,

naturaalarvude hulgas pole jagamise tehe alati teostatav.

2° Naturaalarvude hulgas on olemas kõige väiksem arv 1, kuid suurimat arvu pole. Tõepoolest, ükskõik kui suure naturaalarvu me ka võtaksime, ikkagi pole see suurim, sest liites selle arvuga näiteks ühe, saame temast suurema naturaalarvu. Seega,

naturaalarvude hulk sisaldab lõpmata palju arve.

3° Olgu antud mõned naturaalarvud:

5; 6722; 382; 163 480; 16; 999 888 777; 59; 451.

Järjestame need arvud suuruse järgi:

5; 16; 59; 382; 451; 6722; 163 480; 999 888 777.

Kui oleks antud kuitahes palju naturaalarve, ikka saab neid järjestada suuruse järgi. Lühidalt,

naturaalarvud on järjestatavad suuruse järgi.

4° Olgu antud mingi naturaalarv, näiteks 495. Sel juhul on meil teada ka naturaalarvude jadas temale eelnev naturaalarv

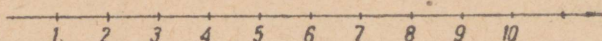
(494) ja temale järgnev naturaalarv (496). Kui antud naturaalarvuks on n , siis temale eelneb naturaalarvude jadas arv $n-1$ ja järgneb $n+1$.

Arvu a nimetatakse antud arvuhulgas arvu b naaberarvuks, kui arvude a ja b vahel ei ole ühtegi sellesse arvuhulka kuuluvat arvu.

Nii on arvud $n-1$ ja $n+1$ naturaalarvude hulgas arvu n naaberarvudeks.

Seega,

igal naturaalarvul (välja arvatud arv 1) on kaks kindlat naaberarvu; arvul 1 on üks naaberarv (2).



Joon. 251.

5° Igale naturaalarvule vastab arvteljel kindel punkt (joon. 251). Need punktid ei asetse tihedalt üksteise kõrval, vaid iga kahe punkti vahel on teatud vahe. Seetõttu öeldaksegi, et

naturaalarvude hulk on diskreetne¹.

§ 132. TÄISARVUD.

Arvuhulga laiendamist teostame eesmärgiga saada niisugune uus arvuhulk, milles on teostatav tehe, mis esialgses hulgas pole teostatav. Sealjuures peavad laiendamisel jääma kehtima laiendatavas arvuhulgas kehtinud arvutamise põhiseadused: kommutatiivsus, assotsiatiivsus ja distributiivsus. Nii näiteks, kui tahame laiendada naturaalarvude hulka sellise arvuhulgani, milles lahutamise tehe oleks alati teostatav, siis tuleb juurde võtta arv 0, et oleks võimalik arvutada kahe võrdse arvu vahet, ja veel naturaalarvude vastandarvud -1 , -2 , -3 , ..., et väiksemast arvust saaks lahutada suuremat.

Naturaalarvude hulga laiendamine täisarvude hulgaks

$$\dots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots$$

toimubki eesmärgiga saada arvuhulk, milles peale liitmise ja korutamise ka lahutamise tehe on alati teostatav.

Tutvume täisarvude hulga omadustega.

1° a) Osutub, et uues arvuhulgas ei ole mitte ainult võimalik

¹ diskreetne (lad. k. *discretus*) tähendab eraldatud, hõre.

iga kahe naturaalarvu lahutamine, vaid ka uusi juurdevõetud arve liites, lahutades ja korrutades saame alati täisarvu, näiteks

$$(-2) + (-4) = -6;$$

$$(-2) + 4 = 2;$$

$$(-10) - (-3) = -7;$$

$$(-10) - 3 = -13;$$

$$(-4) \cdot (-3) = 12;$$

$$(-4) \cdot 3 = -12.$$

Seega,

täisarvude hulgas on teostatav liitmise, lahutamise ja korrutamise tehe.

Tõsiasi, et täisarvude hulgas on liitmine ja lahutamine alati teostatavad, võib sõnastada järgmiselt:

täisarvude hulgas on võrrand $a+x=b$ alati lahenduv.

b) Jagades täisarvu täisarvuga võib jagatiseks olla täisarv või mitte.

Näiteks:

$$(-16) : (-8) = 2;$$

$$(-5) : (-6) = \frac{5}{6}.$$

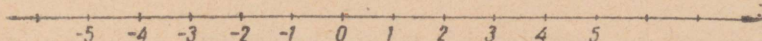
Seega,

täisarvude hulgas pole jagamise tehe alati teostatav.

2° Et juba naturaalarvude hulk sisaldab lõpmata palju arve, nüüd aga lisandub neile veel lõpmata palju negatiivseid arve, siis

täisarvude hulk sisaldab lõpmata palju arve.

Kas täisarvude hulgas on olemas kõige väiksem arv?



Joon. 252.

Selgita näidete ja joonise 252 abil, et ka täisarvude hulgas kehtivad järgmised omadused:

3° täisarvud on järjestatavad suuruse järgi,

4° igal täisarvul on täisarvude hulgas kaks kindlat naaberarvu,

5° täisarvude hulk on diskreetne.

Küsimusi ja ülesandeid.

738. Nimeta 10 naturaalarvu. Kirjuta need suuruse järgi.

739. Missugustele naturaalarvudele on arv n naaberarvuks?

740. Missugustele täisarvudele on arv 0 naaberarvuks?

741. Kirjuta üles naturaalarvude

10 400; 1 001 000; 3 040 500; 1 000 100

naaberarvud ja järjestaja need suuruse järgi.

742. Leia ülesandes 741 antud arvude summa ja kirjuta üles selle naaberarvud.

743. Nimeta 10 täisarvu. Järjestaja need suuruse järgi.

744. Kirjuta üles täisarvude

30 401; —41 000; 1 800 100; —190 001

naaberarvud ning järjestaja antud ja üleskirjutatud arvud suuruse järgi.

745. Leia ülesandes 744 antud arvude summa ja kirjuta üles selle arvu naaberarvud.

746. Leia ülesandes 741 ja ülesandes 744 antud vastavate arvude vahed ning kirjuta üles nende arvude naaberarvud. Järjestaja need arvud suuruse järgi.

§ 133. RATSIONAALARVUD.

Et saada arvuhulk, milles täisarvude jagamine on alati teostatav (välja arvatud jagamine nulliga), laiendatakse täisarvude hulka murdarvudega; saadakse ratsionaalarvude hulk.

Vastavalt arvuvalla laiendamise nõuetele kehtivad ratsionaalarvude hulgas liitmise ja korrutamise kommutatiivsuse ja assotsiatiivsuse seadus ning samuti distributiivsuse seadus.

Iga ratsionaalarvu saab kirjutada taandatud murruna $\frac{a}{b}$, kus a ja b on täisarvud ja $b \neq 0$. Kui ratsionaalarv on täisarv, siis $b=1$.

Tutvume ratsionaalarvude hulga omadustega.

1° Kahe ratsionaalarvu summa, vahe, korrutis ja jagatis on ratsionaalarv (jagatis muidugi sel juhul, kui jagamisel on mõte, s. t. kui jagaja ei ole null).

Näiteks,

$$\frac{3}{4} + \frac{15}{8} = \frac{21}{8};$$

$$\frac{4}{3} - \frac{11}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$8 \cdot \frac{6}{11} = \frac{48}{11};$$

$$\left(-\frac{5}{6}\right) : 4 = -\frac{5}{24}.$$

Seega,

ratsionaalarvude hulgas on teostatav liitmise, lahutamise, korrutamise ja jagamise tehe.

Tõsiasi, et ratsionaalarvude hulgas on korrutamine ja jagamine alati teostatavad, võib sõnastada ka järgmiselt:

ratsionaalarvude hulgas on võrrand $ax=b$ (kus $a \neq 0$) alati lahenduv.

Seega võib viimase omaduse sõnastada ka nii:

ratsionaalarvude hulgas on võrrandid $a+x=b$ ja $ax=b$ (kui $a \neq 0$) alati lahenduvad.

2° Et nüüd on täisarvude hulgale, mis sisaldab lõpmata palju arve, juurde lisatud lõpmata palju uusi arve — murde, siis ka

ratsionaalarvude hulk sisaldab lõpmata palju arve.

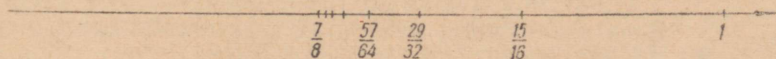
3° Selgita näidete abil, et ka ratsionaalarvude hulgas kehtib omadus:

ratsionaalarvud on järjestatavad suuruse järgi.

4° Seame nüüd ülesandeks leida antud ratsionaalarvu naaberarve.

Olgu näiteks antud arv $\frac{7}{8}$, siis temale järgnevak ratsionaalarvuks ei ole $\frac{8}{8}=1$, sest $\frac{7}{8}$ ja 1 vahel asetseb näiteks arv $\frac{15}{16}$ (joon. 253):

$$\frac{7}{8} < \frac{15}{16} < 1.$$



Joon. 253.

Kuid ka $\frac{15}{16}$ ei ole $\frac{7}{8}$ -le järgnev ratsionaalarv, sest nende vahel asetseb näiteks arv $\frac{29}{32}$:

$$\frac{7}{8} < \frac{29}{32} < \frac{15}{16}.$$

Samuti jätkates võime kirjutada:

$$\begin{aligned} \frac{7}{8} &< \frac{57}{64} < \frac{29}{32}, \\ \frac{7}{8} &< \frac{113}{128} < \frac{57}{64} \quad \text{jne.} \end{aligned}$$

Nii võime lõputult jätkata arvule $\frac{7}{8}$ järgneva ratsionaalarvu otsimist, kuid me ei leia seda, sest ikka võib üles kirjutada ratsionaalarvu, mis on küll suurem kui $\frac{7}{8}$, kuid samal ajal ka väiksem üskõik kui vähe $\frac{7}{8}$ -st erinevast suuremast arvust.

Täpselt samuti on tulemuseta antud ratsionaalarvule eelneva arvu otsimine.

Seega paisutas täisarvude hulga le murdarvude juurdelisamine arvuhulga nii suureks, et

ratsionaalarvude hulgas pole võimalik kindlaks määrata naaberarve

ehk teisiti,

iga kahe ratsionaalarvu vahel on lõpmata palju ratsionaalarve.

5° Kui esitada arvteljel ratsionaalarvudele vastavad punktid, siis asetsevad need seal tihedalt üksteise kõrval. Seetõttu öeldakse, et

ratsionaalarvude hulk on tihe.

Olesandeid.

747. a) Kirjuta 3 kümnendmurruna avalduvat ratsionaalarvu,
3 hariliku murruna avalduvat ratsionaalarvu,
3 täisarvuna avalduvat ratsionaalarvu,
3 naturaalarvuna avalduvat ratsionaalarvu.
b) Järjesta need arvud suuruse järgi.
c) Leia nende arvude summa.

§ 134. RATSIONAALARVUDE HULGA LAIENDAMISE VAJADUS.

Osutub, et ratsionaalarvudele vastavad punktid ei kata arvtelge täielikult. Arvteljel leidub punkte, millele ei vasta ühtki ratsionaalarvu. Tõestame seda.

Olgu antud koordinaatteljestikus ruut, mille tipud asetsevad punktides $A(0; 0)$, $B(1; 0)$, $C(1; 1)$, $D(0; 1)$ (joon. 254). Asetame sirkli teraviku punkti A ja kanname kauguse AC x -teljele, saame punkti C' . Väidame, et punktile C' ei vasta ühtki ratsionaalarvu.

Tõestame vastuväiteliselt.

Oletame, et leidub niisugune ratsionaalarv, s. o. taandatud murd $\frac{a}{b}$, mis esitab ühikruudu diagonaali pikkust.

Pütagorase teoreemi kohaselt on siis $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 1 + 1$ ja siit

$$a^2 = 2b^2.$$

Et ainult paarisarvu ruut on paarisarv, siis peab a olema paarisarv. Olgu $a = 2m$. Asendades saame

$$4m^2 = 2b^2$$

ja siit

$$2m^2 = b^2.$$

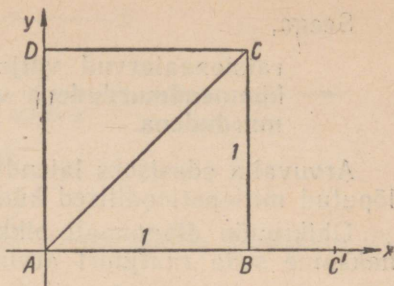
Sellest võrdusest järeldub omakorda, et b peab olema paarisarv. Olgu $b = 2n$. Siis on aga murd

$$\frac{a}{b} = \frac{2m}{2n}$$

taanduv, mis on vastuolus eeldusega.

Seega oletus, et leidub ratsionaalarve, millele vastab x -teljel punkt C' , viib vastuolule.

Järelikult ei leidu niisugust ratsionaalarvu, mille abil saaks avaldada ühikruudu diagonaali pikkust.



Joon. 254.

§ 135. IRRATSIONAALARVUD.

Olles laiendanud täisarvude valla ratsionaalarvude vallaks, jõudsimme arvuhulgani, milles on teostatav nii liitmise, lahutamise, korrutamise kui ka jagamise tehe. Samas aga ilmnes, et sellest arvuvallast veel ei piisa kõigi pikkuste avaldamiseks ja seetõttu kerkibki vajadus arvuvalla edasiseks laiendamiseks niisuguste arvudega, et igale arvtelje punktile vastaks kindel arv.

Nagu juba nimetatud, saab ratsionaalarve esitada kujul $\frac{a}{b}$, kus a ja b on täisarvud ja $b \neq 0$. Iga harilikku murdu on aga võimalik esitada kümnendmurruna, kusjuures see kümnendmurd on kas lõplik või lõputu perioodiline. Näiteks väljenduvad murrud $\frac{1}{2}$ ja $\frac{14}{5}$ lõplike kümnendmurdudena.

$$\frac{1}{2} = 0,5 \text{ ja } \frac{14}{5} = 2,8,$$

murrud $\frac{4}{9}$ ja $\frac{16}{7}$ aga lõputute perioodiliste kümnendmurdudena

$$\frac{4}{9} = 0,(4) \text{ ja } \frac{16}{7} = 2,(285714).$$

Seega,

ratsionaalarvud väljenduvad kas täisarvudena, lõplike kümnendmurdudena või lõputute perioodiliste kümnendmurdudena.

Arvuvalla edasiseks laiendamiseks on niisiis reserv olemas — lõputud mitteperioodilised kümnendmurrud.

Ühikruudu diagonaali pikkuseks saame $\sqrt{2}$ (joon. 254). Kui hakkame seda ruutjuurt arvutama, saame

$$\sqrt{2} = 1,414213562373 \dots$$

Seda juurimisprotsessi saab aga jätkata. Tekib küsimus: kas see juurimisprotsess võib lõppeda, s. t. kas $\sqrt{2}$ võib võrduda lõpliku kümnendmurruga või kas saabub koht, millest alates numbriid hakkavad korduma, s. t. kas $\sqrt{2}$ võib võrduda lõputu perioodilise kümnendmurruga?

Vastus on eitav. Kui $\sqrt{2}$ võrduks lõpliku kümnendmurruga või lõputu perioodilise kümnendmurruga, siis peaks ta olema ratsionaalarv. Eespool tõestasime aga, et ühikruudu diagonaali pikkus ei avaldu ratsionaalarvuna.

Et aga $\sqrt{2}$ avaldub koma abil kirjutatud arvuna, siis saab see olla ainult lõputu mitteperioodiline kümnendmurd.

Lõputute mitteperioodiliste kümnendmurdudena avalduvad näiteks $\sqrt{3}$; $\sqrt[3]{7}$; $\sin 16^\circ$; $\tan 382^\circ$; $\log 4,32$; π jne.

Kõiki neid arve, mis avalduvad lõputute mitteperioodiliste kümnendmurdudena, nimetatakse irratsionaalarvudeks.

Nägime, et irratsionaalarvule $\sqrt{2}$ vastas arvteljel kindel punkt. Saab näidata, et

igale irratsionaalarvule vastab arvteljel kindel punkt ning et

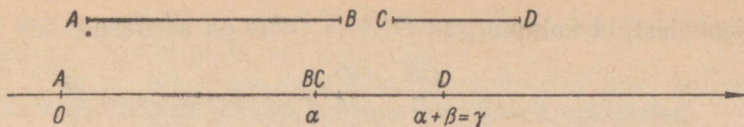
arvtelje igale punktile vastab kas kindel ratsionaalarv või kindel irratsionaalarv.

§ 136. REAALARVUD.

Ratsionaalarvud koos irratsionaalarvudega moodustavad reaalarvude hulga.

Tutvume reaalarvude hulga omadustega.

1° a) Et igale reaalarvule vastab arvteljel kindla pikkusega suunatud lõik, siis kahe reaalarvu summa all mõistame niisuguse



Joon. 255.

lõigu pikkust, mis on saadud antud reaalarvudele vastavate lõikude liitmisel.

Asetame reaalarvule α vastava lõigu AB arvteljele nii, et AB alguspunkt A ühtib arvtelje nullpunktiga (joon. 225). Teisele reaalarvule β vastava lõigu CD asetame arvteljele nii, et selle alguspunkt C ühtiks esimese lõigu lõpp-punktiga B . Teise lõigu lõpp-punktile D vastav reaalarv γ on siis antud lõikudele vastavate reaalarvude summaks, s. t.

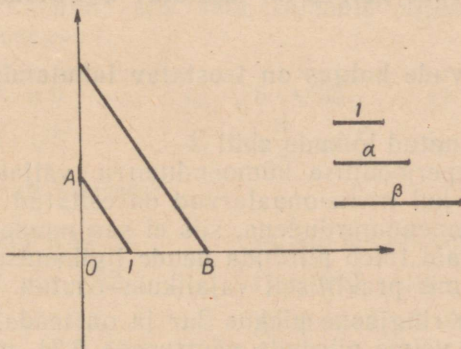
$$\alpha + \beta = \gamma.$$

Näita suunatud lõikude abil, et reaalarvudel α ja β on summa olemas ka siis, kui üks liidetavaist või mõlemad on negatiivsed. Niisiis,

reaalarvude hulgas on teostatav liitmise tehe.

b) Kahe reaalarvu korrutise all mõistame niisuguse lõigu pikkust, mis on saadud antud reaalarvudele vastavate lõikude korrutamisel.

Lõikugu kaks arvtelge nii, et lõikepunktis on nende mõlema alguspunktid (joon. 256). Ühele teljele kanname ühikuga võrdse lõigu $O1$ ja reaalarvule β vastava lõigu OB . Teisele teljele kanname reaalarvule α vastava lõigu OA . Ühendame punktid 1 ja A ning tõmbame punktist B lõiguga $1A$ paralleelse lõigu BD . Lõik OD ongi reaalarvule $\alpha\beta$ vastav lõik.



Joon. 256.

Tõepoolest, et kolmnurgad $O1A$ ja OBD on sarnased, siis

$$\frac{OB}{O1} = \frac{OD}{OA}.$$

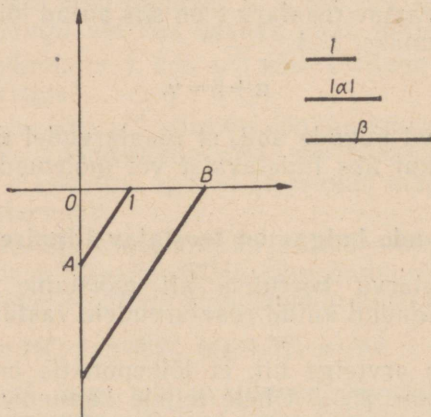
Asendades siin $OB = \beta$, $O1 = 1$ ja $OA = \alpha$, saame

$$\frac{\beta}{1} = \frac{OD}{\alpha},$$

kust

$$OD = \alpha\beta.$$

Kasutades joonist 257 näita, et reaalarvudel on korrutis olemas ka siis, kui üks tegureist või mõlemad on negatiivsed.



Joon. 257.

Seega,

reaalarvude hulgas on teostatav korrutamise tehe.

c) Näita, et

reaalarvude hulgas on teostatav lahutamise ja jagamise tehe.

Tee seda suunatud lõikude abil!

Lõputu mitteperioodilise kümnendmurru väljakirjutamine on võimatu. Seega, kui irratsionaalarvud on esitatud lõputute mitteperioodiliste kümnendmurdudena, siis ei saa nendega tehteid sooritada täpselt, vaid tuleb piirduda nende ligikaudsete väärtustega selles ulatuses, mis praktiliselt vajalikuks osutub. Näiteks kui on ülesandeks leida ringjoone pikkus $2\pi r$ ja on teada, et $r = \sqrt{5}$ dm, siis arvutamisel võime piirduda väärtusega 2,24, mis on raadiuse pikkuseks millimeetri täpsusega, samuti piirdume siis π avaldises

kahe kohaga pärast koma — 3,14. Vastuseks saame 14,1 (dm), s. t. et vastuse viga ei ületa viit sajandikku.

d) Selgita, nii nagu seda tehti ratsionaalarvude hulgas, et reaalarvude hulgas jäävad kehtima järgmised omadused:

2° reaalarvude hulk sisaldab lõpmata palju arve;

3° reaalarvud on järjestatavad suuruse järgi;

4° reaalarvude hulgas pole võimalik kindlaks määrata ühegi arvu naaberarve.

5° Et igale arvtelje punktile vastab kindel reaalarv, siis ütleme, et

reaalarvude hulk on pidev.

Ülesandeid.

748. Leia graafiliselt reaalarvudele $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{8}$ ja $\sqrt{13}$ vastavad lõigud.

749. Leia graafiliselt reaalarvude $\sqrt{5}$ ja $\sqrt{13}$ summa, vahe, korrutis ja jagatis.

750. Leia reaalarvude $\sqrt{5}$ ja 3,14 summa ja korrutis, võttes ka $\sqrt{5}$ ligikaudse väärtuse kahe kohaga pärast koma, juhul kui

a) 3,14 on täpne arv;

b) 3,14 on ligikaudne arv.

751. Teosta järgmised tehted, võttes tabelist irratsionaalarvud kolme kohaga pärast koma.

a) 4π

b) $3 \sin 18^\circ 16'$

c) $\frac{1}{2} \log 36,25$

d) $\sqrt{3} \cdot \tan 73^\circ 12'$

e) $\pi \cdot \log 0,346$

f) $\sqrt[3]{18} + \sqrt{5} \cdot \log \pi - \cos \frac{\pi}{4}$

752. Kui võimalik, siis leia tulemus täpselt, kui ei, siis sajandiku täpsusega.

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$

b) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{9}$

c) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{25}$

d) $\cos \frac{\pi}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{4}$

e) $\sqrt{6} \cdot \sqrt[3]{12}$

f) π^2

753. Kumb on suurem?

a) π või 3,14

b) $\sqrt{2}$ või 1,42

c) $\sqrt{3}$ või 1,8

d) $\log 31$ või 1,5

e) $\sin 50^\circ 30'$ või 0,77

f) π või $\sqrt{10}$

g) 3,4842 või $6\sqrt{2}$

h) $\sqrt{3}$ või $\frac{97}{56}$ või $\frac{71}{41}$

KOMPLEKSARVUD.

§ 137. RUUTVÖRRANDI LAHENDAMINE.

Ruutvõrrandi

$$x^2 + px + q = 0$$

lahendid on

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Ruutvõrrandil on kaks erinevat reaalarvulist lahendit, kui $\frac{p^2}{4} - q > 0$, ja kaks võrdset reaalarvulist lahendit, kui $\frac{p^2}{4} - q = 0$.

Juhul, kui $\frac{p^2}{4} - q < 0$, ütleme, et ruutvõrrandil lahendid puuduvad.

Arvuvalla edasine laiendamine toimubki eesmärgiga saada niisugune arvuvald, milles ka juhul, kui $\frac{p^2}{4} - q < 0$, oleks ruutvõrrandil lahendid.

§ 138. IMAGINAARARVUD.

Arvuvalla laiendamiseks nii, et ruutvõrrandil oleks lahendid ka juhul, kui $\frac{p^2}{4} - q < 0$, defineeritakse uus ühik, nn. **imaginaarühik** (ld. *imaginarius* — näilik, kujutletud) i arvuna, mille ruut on -1 , s. o.

$$i^2 = -1, \text{ kus } i = \sqrt{-1}.$$

Selle ühiku abil saame avaldada ruutjuurt negatiivsest arvust, näiteks

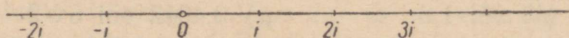
$$\sqrt{-4} = \sqrt{4 \cdot (-1)} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = 2i.$$

Arve bi , kus b on reaalarv ja i — imaginaarühik, nimetatakse **puhtimaginaararvudeks**.

Juhul, kui $b = 0$, taandub puhtimaginaararv reaalarvuks 0.

Võtame nüüd uue arvtelje, millel ühikuks on i (joon. 258). Sellele saame kanda kõik puhtimaginaararvud. Seda arvtelge nimetame **imaginaarteljeks**.

Et puhtimaginaararvu kordajaks on reaalarv, siis igale puhtimaginaararvule vastab kindel imaginaartelje punkt ja vastupidi, igale imaginaartelje punktile vastab kindel puhtimaginaararv.



Joon. 258.

Ülesandeid.

754. Lahenda võrrandid.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \ x^2+4=0 & \text{c)} \ x^2-5x+8=0 & \text{e)} \ 2x^2-4x+7=0 \\ \text{b)} \ 2x^2+32=0 & \text{d)} \ 3x^2+2x+1=0 & \text{f)} \ 3x^2-2x+1=0 \end{array}$$

§ 139. KOMPLEKSARVUD.

Puhtimaginaararvud üksi ei laienda reaalarvude hulka nii, et igal ruutvõrrandil oleksid lahendid. Ruutvõrrandi $x^2+px+q=0$ lahendid juhul, kui $\frac{p^2}{4}-q<0$, väljenduvad kujus $u \pm vi$, kus $u = -\frac{p}{2}$ ja $v = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$. Näiteks on ruutvõrrandi $x^2+2x+5=0$ lahenditeks $x = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2i$.

Arve kujus $a+bi$, kus a ja b on reaalarvud ($b \neq 0$) ja i on imaginaarühik, nimetatakse imaginaararvudeks.

Kui imaginaararvus $a+bi$ $a=0$, siis saame puhtimaginaararvu bi .

Seega kuuluvad puhtimaginaararvud imaginaararvude hulka.

Reaalarvud ja imaginaararvud koos moodustavad kompleksarvude hulga.

Ruutvõrrandil on ikka kas kaks reaalist või kaks imaginaarset lahendit.

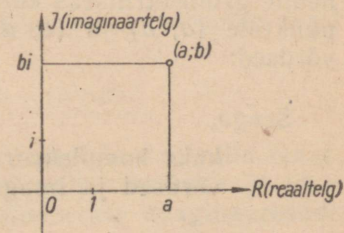
Seega võime öelda, et ruutvõrrand $x^2+px+q=0$ on kompleksarvude hulgas alati lahenduv.

§ 140. KOMPLEKSARVUDE GEOMEETRILINE KUJUTAMINE.

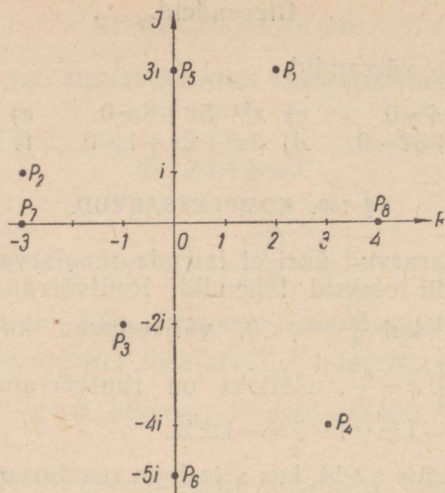
Joonisel 259 on esitatud koordinaatteljestik, mille abstsissiteljel kujutame reaalarve ja ordinaatteljel puhtimaginaararve. Imaginaararvule $a+bi$ loeme selles koordinaatteljestikus vastavaks punkti $(a; b)$, mis ei asetse abstsissiteljel, s. o. kus $b \neq 0$.

Joonisel 260 on kujutatud punktid P_1, P_2, P_3 ja P_4 , mis vastavad imaginaararvudele $2+3i, -3+i, -1-2i$ ja $3-4i$. Punktidele P_5 ja P_6 vastavad puhtimaginaararvud $3i$ ja $-5i$ ning punktidele P_7 ja P_8 reaalarvud -3 ja 4 .

Lühidalt võime öelda, et igale kompleksarvule vastab kindel punkt tasapinnal.



Joon. 259.



Joon. 260.

Ülesandeid.

755. Esita tasapinnal punktid, mis vastavad kompleksarvudele: $2,5i$; $-\frac{4}{3}i$; 2 ; -5 ; $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$; $3 - \frac{3}{4}i$; $-1,5 - 2,5i$; $-3,5 + 2,5i$.

756. Missugused kompleksarvud vastavad ruudu tippudele, kui ruudu diagonaalide lõikepunkt asetseb koordinaatide alguspunktis ja ruudu küljed pikkusega 2 on paralleelsed telgedega?

757. Leia korrapärase kuusnurga tippudele vastavad kompleksarvud, kui kuusnurga diagonaalid lõikuvad koordinaatide alguspunktis ja tema üheks tipuks on $A(3; 0)$.

§ 141. KOMPLEKSARVUDE VÕRDSUS.

Kaht kompleksarvu $a+bi$ ja $c+di$ nimetatakse võrdseteks, kui nende geomeetriliseks kujutiseks on üks ja seesama punkt, s. t. et punktide $(a; b)$ ja $(c; d)$ vastavad koordinaadid peavad olema võrdsed:

$$a=c, \quad b=d.$$

Seega,

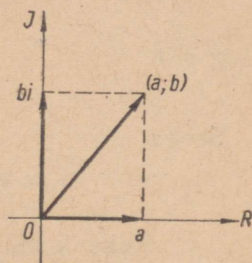
kaks kompleksarvu on võrdsed, kui nende reaalosad on võrdsed ja imaginaarosade kordajad on võrdsed.

§ 142. REAALARVU JA PUHTIMAGINAARVU SUMMA.

Nägime, et imaginaararv $a+bi$ esitub reaalarvu a ja puhtimaginaararvu bi summana. Üks liidetavaist on avaldatud reaalse, teine imaginaarse ühiku kaudu. Leiame niisugusele summale geomeetrilise tõlgenduse.

Igale kompleksarvule vastab tasapinnal kindel punkt. Igale tasapinna punktile (välja arvatud alguspunkt) vastab oma **kohavektor**, s. o. vektor, mille alguspunkt on koordinaatide alguspunktis ja lõpp-punkt vaadeldavas punktis. Joonisel 261 on esitatud arvudele a , bi ja $a+bi$ vastavad kohavektorid. Ühtlasi ilmneb jooniselt 261, et imaginaararvule $a+bi$ vastav kohavektor on reaalarvule a ja puhtimaginaararvule bi vastavate kohavektorite summaks. Seega on reaalarvu ja puhtimaginaararvu summa tõlgendatav vastavate kohavektorite summamana.

Näita, et tõlgendus kohavektorite abil kehtib ka kahe reaalarvu liitmisel ja kahe puhtimaginaararvu liitmisel!



Joon. 261.

§ 143. KOMPLEKSARVUDE LIITMINE JA LAHUTAMINE.

1. Tehted kompleksarvude hulgas defineeritakse nii, et jääksid kehtima reaalarvude vallas kehtivad arvutamise põhiseadused: liitmise ja korrutamise kommutatiivsus, assotsiatiivsus ja distributiivsus.

Rakendame neid seadusi kompleksarvude liitmise eeskirja leidmiseks.

$$\begin{aligned}(a+bi) + (c+di) &= [(a+bi) + c] + di = \\ &= [a + (bi+c)] + di = [a + (c+bi)] + di = \\ &= [(a+c) + bi] + di = (a+c) + (bi+di) = \\ &= (a+c) + (b+d)i.\end{aligned}$$

Selgita, missuguseid seadusi on kasutatud selles võrduste reas! Niisiis,

$$\underline{(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i.}$$

Kahe kompleksarvu summa on kompleksarv, mille reaalosa on võrdne liidetavate reaalosade summaga ja imaginaarosa kordaja on võrdne liidetavate imaginaarosade kordajate summaga.

2. Lahutamist mõistame ka kompleksarvude vallas liitmise pöördtehtena.

Olgu ülesandeks teostada lahutamine

$$(a+bi) - (c+di),$$

s. t. tuleb leida niisugune kompleksarv $x+yi$, et

$$(x+yi) + (c+di) = a+bi.$$

Liitmise eeskirja järgi

$$x+c=a \text{ ja } y+d=b$$

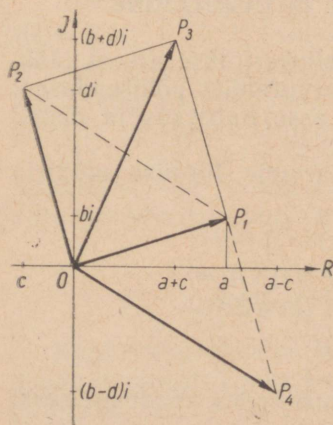
ning siit

$$x=a-c \text{ ja } y=b-d.$$

Seega,

$$(a+bi) - (c+di) = (a-c) + (b-d)i.$$

Kahe kompleksarvu vahe on kompleksarv, mille reaalso on võrdne antud kompleksarvude reaalsoade vahega ja imaginaarosa kordaja on võrdne antud kompleksarvude imaginaarosade kordajate vahega.



Joon. 262.

Joonisel 262 on esitatud kompleksarvudele $a+bi$ ja $c+di$ vastavad punktid P_1 ja P_2 ; samuti kompleksarvudele $(a+c) + (b+d)i$ ja $(a-c) + (b-d)i$ vastavad punktid P_3 ja P_4 . Jooniselt näeme, et

$$\vec{OP}_1 + \vec{OP}_2 = \vec{OP}_3$$

ja

$$\vec{OP}_1 - \vec{OP}_2 = \vec{OP}_4,$$

$$\text{s. t. } \vec{OP}_2 + \vec{OP}_4 = \vec{OP}_1.$$

Seega,

iga kahe kompleksarvu liitmine on tõlgendatav vastavate kohavektorite liitmisena ja vahe — vastavate kohavektorite lahutamisenä.

Ülesandeid.

758. Liida järgmised kompleksarvud.

- a) $(2+3i) + 4i$
- b) $5i + 2i$
- c) $(5+4i) + (3-7i)$
- d) $(2+5i) + (-2-2i)$
- e) $(1+i) + (2+i) + (3+i)$
- f) $(0,3-3,2i) + (1,5-0,8i) + (-4-i)$
- g) $\left(1\frac{3}{4} + \frac{2}{3}i\right) + \left(1\frac{1}{2} - \frac{5}{6}i\right) \left(-\frac{3}{4} - 2i\right)$
- h) $(0,8-0,2i) + (0,1-1,3i) + (1,5+0,7i) + (2,3-0,6i)$

759. Arvuta järgmised vahed.

- a) $(5+3i) - (2+i)$
- b) $(5+4i) - (2-3i)$
- c) $(2-3i) - (2+3i)$
- d) $(-2+4i) - (2+i)$

760. Leia graafiliselt järgmised summad.

- a) $(4-i) + (3+2i)$
- b) $(-2+3i) + (1+2i)$
- c) $(-3-4i) + (-2-i)$
- d) $(2+i) + (3+3i)$

761. Leia graafiliselt järgmised vahed.

- a) $(3-2i) - (2+i)$
- b) $(2+3i) - (4-2i)$
- c) $(-3+2i) - (2-3i)$
- d) $(-2-2i) - (2+2i)$

762. Liida ja lahuta.

- a) $(5x-3yi) + (-2+8yi) - (2x-yi) - (7x-2yi)$
- b) $(2c-8di) - (5c-2di) + (c-di) - (-4c+3di)$

763. Leia x ja y väärtused nii, et kehtiks võrdus:

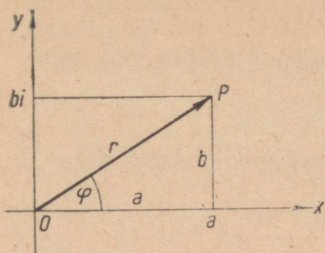
- a) $2+5ix-3iy=14i+3x-5y;$
- b) $\frac{8}{x} + iy - 2 = 7i - \frac{10}{x} + y.$

§ 144. KOMPLEKSARVU TRIGONOMEETRILINE KUJU.

Esitame tasapinnal asetsevad punktid uute koordinaatide kaudu. Nendeks koordinaatideks võtame punkti kohavektori pikkuse r ja nurga φ , mille see kohavektor moodustab x -teljega (joonis 263). r kui vektori pikkus on alati positiivne, φ on aga nurk 0-st kuni 2π -ni.

Jooniselt näeme, et täisnurksest kolmnurgast saame välja kirjutada seosed:

$$\begin{aligned} a &= r \cos \varphi; \\ b &= r \sin \varphi. \end{aligned}$$



Joon, 263.

Seega

$$a+bi=r \cos \varphi+i r \sin \varphi.$$

Võttes r sulgude ette, saame

$$a+bi=r(\cos \varphi+i \sin \varphi).$$

Avaldist $r(\cos \varphi+i \sin \varphi)$ nimetatakse kompleksarvu trigonomeetriliseks kujuks.

Koordinaati r nimetatakse kompleksarvu mooduliks ja nurka φ kompleksarvu argumendiks.

Avaldist $a+bi$ nimetatakse kompleksarvu algebraliseks kujuks.

Kui kompleksarv on antud kujul $a+bi$ ja me tahame saada tema trigonomeetrilist kuju, siis r ja φ leiame seostest:

$$r=\sqrt{a^2+b^2};$$

$$\tan \varphi=\frac{b}{a}.$$

Nurga φ määramise juures arvestame veel kas a või b märki. Miks?

Näide 1. Olgu antud kompleksarv $2+5i$. Leida tema trigonomeetriline kuju.

Antud kompleksarvu trigonomeetrilise kuju saamiseks leiame r ja φ :

$$r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2^2+5^2}=\sqrt{29};$$

$$\tan \varphi=\frac{5}{2}=2,5, \varphi=68^{\circ} 12' \text{ või } \varphi=248^{\circ} 12'.$$

Et φ omab väärtusi 0° -st kuni 360° -ni ja tangensi väärtused on positiivsed I ja III veerandi nurkade puhul, siis tuleb selgitada, mitmendas veerandis asub komplekstasandil vastav punkt. Et $a>0$, siis on punkt I veerandis ja seega $\varphi=68^{\circ} 12'$.

Niisiis,

$$2+5i=\sqrt{29}(\cos 68^{\circ} 12'+i \sin 68^{\circ} 12').$$

Näide 2. Teisendada trigonomeetrilisele kujule arv $-4-2i$.

$$r=\sqrt{(-4)^2+(-2)^2}=\sqrt{20}$$

$$\tan \varphi=\frac{-2}{-4}=\frac{1}{2}.$$

Et $b < 0$, siis asub punkt kolmandas veerandis ja

$$\varphi = 180^\circ + 26^\circ 34' = 206^\circ 34'.$$

Niisiis,

$$-4 - 2i = \sqrt{20} (\cos 206^\circ 34' + i \sin 206^\circ 34').$$

Ülesandeid.

764. Mitmendas veerandis asetsevad järgmistele kompleksarvudele vastavad punktid?

- | | | |
|--------------|-------------|--------------|
| a) $4 - 3i$ | c) $5 + 3i$ | e) $-3 + 8i$ |
| b) $-2 + 3i$ | d) $-2 - i$ | f) $2 - i$ |

765. Leia eelmises ülesandes antud kompleksarvude trigonomeetiline kuju.

766. Teisenda antud kompleksarvud trigonomeetrilisele kujule.

- | | | |
|----------|---------|---------|
| a) i | c) 5 | e) $3i$ |
| b) $-4i$ | d) -2 | f) 1 |

767. Teisenda antud kompleksarvud algebralisele kujule.

- | | |
|--|--|
| a) $2(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$ | e) $5(\cos 18^\circ 35' + i \sin 18^\circ 35')$ |
| b) $3(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$ | f) $2,6(\cos 104^\circ 20' + i \sin 104^\circ 20')$ |
| c) $8(\cos 225^\circ + i \sin 225^\circ)$ | g) $\frac{7}{12}(\cos 222^\circ 22' + i \sin 222^\circ 22')$ |
| d) $12(\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ)$ | h) $\frac{13}{5}(\cos 314^\circ 48' + i \sin 314^\circ 48')$ |

768. Teisenda antud kompleksarvud algebralisele kujule.

- | | |
|--|--|
| a) $\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ$ | e) $\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi$ |
| b) $\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ$ | f) $\pi(\cos \pi + i \sin \pi)$ |
| c) $\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ$ | g) $\frac{5}{6}\left(\cos \frac{5}{6}\pi + i \sin \frac{5}{6}\pi\right)$ |
| d) $\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ$ | h) $\frac{\pi}{2}\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$ |

§ 145. KOMPLEKSARVUDE KORRUTAMINE.

Olgu antud kaks kompleksarvu $a + bi$ ja $c + di$. Leiame nende korrutise tuginedes arvutamise põhiseadustele, mis kehtivad ka kompleksarvude hulgas.

$$\begin{aligned}
 (a+bi)(c+di) &= (a+bi)c + (a+bi)di = \\
 &= (ac+bi c) + (adi+bid i) = (ac+bc i) + (adi+bd i^2) = \\
 &= [(ac+bc i) + adi] + bd(-1) = [ac + (bc i + adi)] + (-bd) = \\
 &= ac + [(bc + ad)i + (-bd)] = ac + [(-bd) + (ad + bc)i] = \\
 &= (ac - bd) + (ad + bc)i.
 \end{aligned}$$

Seega

$$(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i.$$

Näide. Olgu antud kompleksarvud

$$4-3i \text{ ja } -2-5i.$$

Leiame nende korrutise:

$$(4-3i) \cdot (-2-5i) = (-8-15) + (-20+6)i = -23-14i.$$

2. Leiame kompleksarvude korrutamise reegli ka juhul, kui tegurid on antud trigonomeetrilises kujus.

Olgu antud kompleksarvud

$$r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \text{ ja } r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2).$$

Nende korrutis on siis

$$\begin{aligned}
 [r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)][r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)] &= \\
 &= r_1 r_2 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\
 &= r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + i \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + i \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \\
 &+ i^2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) = r_1 r_2 [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + \\
 &+ i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)] = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)].
 \end{aligned}$$

Seega,

kahe trigonomeetrilisel kujul antud kompleksarvu korrutis on kompleksarv, mille mooduliks on antud kompleksarvude moodulite korrutis ja argumendiks antud kompleksarvude argumentide summa.

Näide. Olgu antud kompleksarvud

$$2(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ) \text{ ja } 3(\cos 110^\circ + i \sin 110^\circ).$$

Nende korrutiseks on siis

$$6(\cos 125^\circ + i \sin 125^\circ).$$

Trigonomeetrilises kujus antud kompleksarvude korrutamise reegli võime saada ka nii, et algebralises kujus leitud kompleksarvude korrutises teeme vastavad asendused:

$$a = r_1 \cos \varphi_1, \quad b = r_1 \sin \varphi_1 \quad \text{ja} \quad c = r_2 \cos \varphi_2, \quad d = r_2 \sin \varphi_2,$$

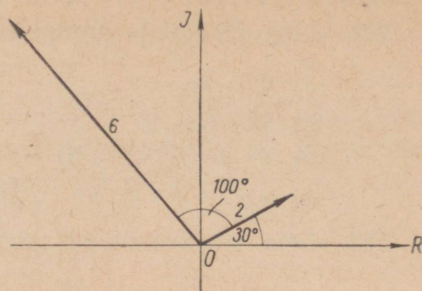
siis

$$(ac - bd) + (ad + bc)i = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Kontrolli selle võrduse keh-
tivust!

Tuginedes trigonomeetrili-
ses kujus antud kompleksarvu-
de korrutamise eeskirjale, saa-
me kompleksarvude korruta-
mist tõlgendada geomeetriliselt
järgmiselt.

Kujutame koordinaatteljesti-
kus ühele tegurile vastava
kohavektori. Korrutisele vasta-
va kohavektori saamiseks tuleb
antud vektorit pöörata teise
teguri argumendi võrra ja muu-
ta siis vektori pikkust teise teguri
mooduli kordseks. Joonisel 264
on esitatud geomeetriliselt kompleksarvude



Joon. 264.

$2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$ ja $3(\cos 100^\circ + i \sin 100^\circ)$
korrutamine.

§ 146. KAASKOMPLEKSARVUD.

**Kompleksarve $a+bi$ ja $a-bi$ nimetatakse kaaskomp-
leksarvudeks.**

Nii on näiteks arvu $-3+2i$ kaaskompleksarvuks $-3-2i$.
Korrutame kompleksarvu oma kaaskompleksarvuga:

$$(a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2.$$

Tulemuseks on reaalarv. (Näita seda ka geomeetriliselt!) Saa-
dud võrdus näitab, et kompleksarvude vallas on võimalik ruutude
summat lahutada tegureiks.

Näide. $9+x^2 = (3+xi)(3-xi).$

Ülesandeid.

769. Leia järgmiste kompleksarvude korrutised.

- $3(\cos 72^\circ + i \sin 72^\circ) \cdot 5(\cos 68^\circ + i \sin 68^\circ)$
- $4(\cos 113^\circ + i \sin 113^\circ) \cdot 2,3(\cos 118^\circ + i \sin 118^\circ)$
- $2 \left(\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi \right) \cdot \frac{1}{2} \left(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi \right)$
- $19(\cos 36^\circ + i \sin 36^\circ) \cdot 16 \left(\cos \frac{6}{5}\pi + i \sin \frac{6}{5}\pi \right).$

770. Leia järgmiste kompleksarvude korrutised.

a) $2,5i \cdot 4i$

e) $(5+i\sqrt{3})(5-i\sqrt{3})$

b) $(3+5i) \cdot 2$

f) $(\sqrt{k}+i\sqrt{n})(\sqrt{k}-i\sqrt{n})$

c) $(-8-7i) \cdot (-3i)$

g) $(0,5+0,2i)(2+3i)$

d) $(\sqrt{2}-i) \cdot (\sqrt{3}+i\sqrt{2})$

h) $(1-2i)(5-i)$

771. Leia geomeetriliselt järgmiste kompleksarvude korrutis.

a) $2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \cdot 3 \left(\cos \frac{2}{3} \pi + i \sin \frac{2}{3} \pi \right)$

b) $4(\cos 160^\circ + i \sin 160^\circ) \cdot \frac{1}{2}(\cos 80^\circ + i \sin 80^\circ)$

772. Lahuta tegureiks.

a) a^2+4

c) a^2+4b^2

e) $a+b$

b) $1+c^2$

d) $4m^2+9n^2$

f) $a+2$

§ 147. KOMPLEKSARVUDE JAGAMINE.

1. Ka kompleksarvude vallas mõistame jagamise all korrutamise pöördtehet.

Olgu ülesandeks teostada jagamine

$$(a+bi) : (c+di),$$

s. t. tuleb leida niisugune kompleksarv $x+yi$, mille korrutamisel jagajaga saame jagatava, s. t. et

$$(x+yi) \cdot (c+di) = a+bi.$$

Kompleksarvude korrutamise eeskirja kohaselt peavad kehtima võrdsused:

$$\begin{cases} xc-yd=a; \\ xd+yc=b. \end{cases}$$

Lahendades selle võrrandisüsteemi, saame

$$x = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} \quad \text{ja} \quad y = \frac{bc-ad}{c^2+d^2}.$$

Seega

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2} i.$$

Saadud tulemuseni võib jõuda ka teisiti. Selleks laiendame murdu $\frac{a+bi}{c+di}$ nimetaja kaaskompleksarvuga:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd) + (bc-ad)i}{c^2+d^2}.$$

Näide.

$$\frac{4-3i}{-2-i} = \frac{-8+3}{5} + \frac{6-(-4)}{5}i = -1+2i.$$

2. Leiame kompleksarvude jagamise eeskirja ka juhul, kui kompleksarvud on antud trigonomeetrilises kujus.

Olgu ülesandeks teostada jagamine

$$\frac{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)}{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)},$$

s. t. tuleb leida niisugune kompleksarv $r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$, mille korrutamisel nimetajaga saame lugeja, s. t. et

$$r_2 r_1 = r \text{ ja siit } r_2 = \frac{r}{r_1},$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi \text{ ja siit } \varphi_2 = \varphi - \varphi_1.$$

Niisiis,

$$\frac{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)}{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)} = \frac{r}{r_1} [\cos(\varphi - \varphi_1) + i \sin(\varphi - \varphi_1)].$$

Kui osutub, et $\varphi - \varphi_1 < 0$, siis tuleb see nurk asendada vastava positiivse nurgaga $360^\circ + (\varphi - \varphi_1)$, mis kuulub argumendi võimalike väärtuste piirkonda.

On ju

$$\cos(\varphi - \varphi_1) = \cos[360^\circ + (\varphi - \varphi_1)]$$

ja

$$\sin(\varphi - \varphi_1) = \sin[360^\circ + (\varphi - \varphi_1)].$$

Näide.

$$\frac{2(\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ)}{5(\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ)} = 0,4(\cos 80^\circ + i \sin 80^\circ).$$

Et $20^\circ - 300^\circ = -280^\circ$, siis tuleb argumendiks $360^\circ - 280^\circ = 80^\circ$.

Trigonomeetrilises kujus antud kompleksarvude jagamise reegli võime saada ka nii, et algebralises kujus leitud kompleksarvude jagatistes teeme vastavad asendused.

$$\text{Kui } a = r \cos \varphi, \quad b = r \sin \varphi$$

$$\text{ja } c = r_1 \cos \varphi_1, \quad d = r_1 \sin \varphi_1,$$

siis

$$\frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2} i = \frac{r}{r_1} [\cos(\varphi - \varphi_1) + i \sin(\varphi - \varphi_1)].$$

Kontrolli selle võrduse kehtivust!

Ülesandeid.

773. Leia jagatis.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \frac{3(\cos 80^\circ + i \sin 80^\circ)}{2(\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ)} & \text{c)} \frac{\frac{5}{6} \left(\cos \frac{17}{36} \pi + i \sin \frac{17}{36} \pi \right)}{\frac{2}{3} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)} \\ \text{b)} \frac{10(\cos 292^\circ + i \sin 292^\circ)}{4(\cos 186^\circ + i \sin 186^\circ)} & \text{d)} \frac{5,16(\cos 1,8\pi + i \sin 1,8\pi)}{1,11 \left(\cos \frac{2}{3} \pi + i \sin \frac{2}{3} \pi \right)} \end{array}$$

774. Leia jagatis.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} & \text{d)} \frac{-2\sqrt{3}i+1}{1+2i\sqrt{3}} & \text{g)} \frac{a}{a+2i\sqrt{a}} \\ \text{b)} \frac{5+2i}{5-2i} & \text{e)} \frac{6-i}{6-2i} & \text{h)} \frac{a-bi}{b+ai} \\ \text{c)} \frac{3}{2+4i} & \text{f)} \frac{5-2i}{3i} & \text{i)} \frac{bi}{a+bi} \end{array}$$

775. Leia geomeetriliselt järgmiste kompleksarvude jagatis.

$$\begin{array}{l} \text{a)} 4 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) : 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \\ \text{b)} 0,5(\cos 320^\circ + i \sin 320^\circ) : 0,2(\cos 35^\circ + i \sin 35^\circ) \end{array}$$

§ 148. KOMPLEKSARVUDE OMADUSI.

1° Nagu nägime, on kahe kompleksarvu summa, vahe, korrutis ja jagatis kompleksarv, s. t. et

kompleksarvude hulgas on teostatav liitmise, lahutamise, korrutamise ja jagamise tehe.

Seega on nii reaalarvude kui ka kompleksarvude hulgas võrrandid $a+x=b$ ja $ax=b$ (kui $a \neq 0$) alati lahenduvad.

2° Juba reaalarvude hulk sisaldas lõpmata palju arve, nüüd lisandusid neile puhtimaginaararvud ja imaginaararvud. Seega,

kompleksarvude hulk sisaldab lõpmata palju arve.

3° Reaalarvudele vastavad punktid asetsesid arvteljel. See võimaldas järjestada neid arve suuruse järgi ja otsida antud arvu naaberarve. Kompleksarvudele vastavad punktid asetsevad tasapinnal. Siin ei ole võimalik öelda, kummale kahest punktist vastab suurem kompleksarv. Seetõttu

kompleksarve ei saa järjestada suuruse järgi.

4° Samal põhjusel

antud kompleksarvul pole naaberarve.

5° Et igale tasapinna punktile vastab kindel kompleksarv, siis kompleksarvude hulk on pidev.

KOMPLEKSARVUDE KASUTAMINE KOLMANDA JA NELJANDA ASTME KAKSLIIKMELISTE VÖRRANDITE LAHENDAMISEKS.

§ 149. KAKSLIIKMELISE VÖRRANDI MÕISTE.

Võrrandit nimetatakse **kaksliikmeliseks**, kui temale saab anda kuju

$$x^n + m = 0,$$

kus n on naturaalarv ja m — reaalarv.

Näiteks võrrandid

$$\begin{aligned}x + b &= 0, \\x^2 + d &= 0, \\x^3 + f &= 0, \\x^4 + k &= 0\end{aligned}$$

on vastavalt esimese, teise, kolmanda ja neljanda astme kaksliikmelised võrrandid.

Võrrandi $x + b = 0$ lahendiks on $x = -b$.

Võrrandi $x^2 + d = 0$ lahenditeks on $x_1 = \sqrt{-d}$ ja $x_2 = -\sqrt{-d}$.

Kui d on negatiivne, siis on juurealune avaldis positiivne ja me saame lahendeiks kaks märgilt erinevat reaalarvu.

Kui aga d on positiivne, siis saame lahendeiks imaginaararvud $i\sqrt{d}$ ja $-i\sqrt{d}$.

§ 150. VÖRRANDI $x^3 + a^3 = 0$ LAHENDAMINE.

Kolmanda astme kaksliikmelise võrrandi $x^3 + f = 0$ lahendite leidmiseks tähistame vabaliikme a^3 -ga, kus $a > 0$, s. t. $f = a^3$, ja vaatleme võrrandi

$$x^3 + a^3 = 0$$

lahendamist.

Võrrandi vasaku poole kui kuupide summa saame lahutada tegureiks:

$$(x + a)(x^2 - ax + a^2) = 0.$$

Seega taandub antud võrrandi lahendamine kahe uue võrrandi lahendamisele:

$$x + a = 0,$$

mille lahendeiks on

$$x_1 = -a$$

ja

$$x^2 - ax + a^2 = 0,$$

mille lahendeiks on

$$x_{2,3} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - a^2} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}a^2} = \frac{a}{2} \pm \frac{a}{2} \sqrt{-3} = \frac{a}{2} (1 \pm i\sqrt{3}).$$

Seega on võrrandi $x^3 + a^3 = 0$ lahendeiks (kui $a > 0$):

$$x_1 = -a;$$

$$x_2 = \frac{a}{2} (1 + i\sqrt{3});$$

$$x_3 = \frac{a}{2} (1 - i\sqrt{3}).$$

N ä i d e. Lahendada võrrand $3x^3 + 4 = 0$.

Selle võrrandi teisendame kujule $x^3 + \frac{4}{3} = 0$.

Siin on $a^3 = \frac{4}{3}$ ja seega $a = \sqrt[3]{\frac{4}{3}}$.

Antud võrrandi lahendeiks on:

$$x_1 = -\sqrt[3]{\frac{4}{3}};$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{4}{3}} (1 + i\sqrt{3});$$

$$x_3 = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{4}{3}} (1 - i\sqrt{3}).$$

§ 151. VÖRRANDI $x^3 - a^3 = 0$ LAHENDAMINE.

Tähistame nüüd võrrandis $x^3 + f = 0$ vabaliikme $-a^3$ -ga, kus $a > 0$, s. t. $f = -a^3$.

Lahendada tuleb seega võrrand

$$x^3 - a^3 = 0.$$

Selle võrrandi lahendame nii nagu eelmisegi võrrandi. Lahendeiks saame:

$$x_1 = a;$$

$$x_2 = \frac{a}{2} (-1 + i\sqrt{3});$$

$$x_3 = \frac{a}{2} (-1 - i\sqrt{3}).$$

§ 152. VÖRRANDI $x^4 + a^4 = 0$ LAHENDAMINE.

Neljanda astme kaksliikmelised võrrandid on esitatavad kujus $x^4 + a^4 = 0$ ja $x^4 - a^4 = 0$.

Ka siin lahutame kõigepealt võrrandi vasaku poole tegureiks.

Selleks liidame kaksliikmele $x^4 + a^4$ juurde ja seejärel ka lahutame avaldise $2a^2x^2$. Siis rakendame tegureiks lahutamisel ruutude vahe valemit:

$$\begin{aligned} x^4 + a^4 &= x^4 + a^4 + 2a^2x^2 - 2a^2x^2 = (x^2 + a^2)^2 - (\sqrt{2}ax)^2 = \\ &= (x^2 + a^2 - \sqrt{2}ax)(x^2 + a^2 + \sqrt{2}ax). \end{aligned}$$

Seega taandub antud võrrandi lahendamine võrrandi

$$(x^2 - \sqrt{2}ax + a^2)(x^2 + \sqrt{2}ax + a^2) = 0$$

lahendamisele.

Kui siin $x^2 - \sqrt{2}ax + a^2 = 0$, siis saame lahendeiks

$$x_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{2} a \pm \sqrt{\frac{1}{2} a^2 - a^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} a \pm \sqrt{-\frac{1}{2} a^2} = \frac{a}{\sqrt{2}} (1 \pm i).$$

Kui aga $x^2 + \sqrt{2}ax + a^2 = 0$, siis on lahendeiks

$$x_{3,4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} a \pm \sqrt{\frac{1}{2} a^2 - a^2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} a \pm \sqrt{-\frac{1}{2} a^2} = -\frac{a}{\sqrt{2}} (1 \pm i).$$

§ 153. VÖRRANDI $x^4 - a^4 = 0$ LAHENDAMINE.

Lahutades $x^4 - a^4$ tegureiks, saame

$$x^4 - a^4 = (x^2 - a^2)(x^2 + a^2) = (x - a)(x + a)(x^2 + a^2).$$

Võrrandi

$$(x - a)(x + a)(x^2 + a^2) = 0$$

lahendeiks on

$$\begin{aligned} x_1 &= a; \\ x_2 &= -a; \\ x_3 &= ai; \\ x_4 &= -ai. \end{aligned}$$

Ülesandeid.

776. Lahenda võrrandid.

a) $x^3 - 27 = 0$

c) $x^4 - 625 = 0$

b) $x^3 + 729 = 0$

d) $x^4 + 256 = 0$

$$e) 4x^3 + 15 = 0$$

$$g) -\frac{3}{4}x^4 + \frac{5}{8} = 0$$

$$f) -2x^3 + 7 = 0$$

$$h) 3,2x^4 + 10,1 = 0$$

§ 154. ALGEBRA PÕHILAUSE.

Lineaarvõrrandite lahendamisel saame alati ühe lahendi. Pärast arvuvalla laiendamist kompleksarvudega saame igale ruutvõrrandile kaks lahendit.

Eespool nägime, et igal vaadeldud kaksliikmelisel võrrandil on kompleksarvude vallas just niipalju lahendeid, kui suur on võrrandi aste.

See omadus on üldine, s. t. kehtib kolmanda, neljanda, viienda jne. astme võrrandite puhul ka siis, kui see võrrand sisaldab liikmeid, kus tundmatu esineb madalamas astmes kui on võrrandi aste. See tõsiasi, mida me siinkohal ei tõesta, ongi tuntud algebra põhilause nime all.

Nii on näiteks võrrandil

$$x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$$

kolm lahendit, 2 , i ja $-i$, ja võrrandil

$$x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4x + 12 = 0$$

viis lahendit: ± 1 , ± 2 ja -3 .

Kontrolli neid lahendeid!

§ 155. ARVUVALLA LAIENDAMISEST.

Seni tundma õpitud matemaatika kursuses on mitmel korral laiendatud arvuvalda. Algklassides arvutati ainult naturaalarvudega. Hiljem õpiti tundma positiivseid murdarve ja negatiivseid täis- ja murdarve.

Positiivsed ja negatiivsed täis- ning murdarvud moodustavad nn. ratsionaalarvude valla.

$\sqrt{2}$, $\log 5$, $\sin 10^\circ$ jne. on arvud, mis ei kuulu ratsionaalarvude hulka. Seega õppides tundma juurimist, logaritmimist ja trigonomeetrilisi funktsioone, täienes arvuvald irratsionaalarvudega.

Irratsionaalarvud koos ratsionaalarvudega moodustavad reaalarvude valla.

Analoogiliselt on kulgenud arvuvalla laiendamine ka ajaloolisest seisukohast vaadatuna. Vana-Kreeka matemaatikud kasutasid naturaalarve ja positiivseid murdarve. Positiivse ja negatiivse arvu mõistet kasutasid esimestena hindud 6. ja 7. sajandil. Mõõdus aga veel palju sajandeid, enne kui need arvud leidsid täit tunnust.

Mitteratsionaalarvu olemasolu oli selge juba Vana-Kreeka matemaatikuile ja Eukleides oma suure tähtsusega töös «Elementid» püüdis anda nende arvude kohta teatud teooria, tuginedes geomeetrilisele kujutusele ühismõõdututest lõikudest. Uue matemaatikaharu — matemaatilise analüüsi — tekkimise ja arenemisega 17. ja 18. sajandil kerkis väga teravalt päevakorrale vajadus anda range reaalarvude teooria. Selle ülesande lahendasid 19. sajandil üksteisest sõltumatult saksa matemaatikud Richard Dedekind, Georg Cantor ja Karl Weierstrass.

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

295

pärast saksa matemaatiku Carl Friedrich Gaussi poolt antud kompleksarvude teooria põhjendust 1831. aastal. Kompleksarvude baasil, mis esialgu näisid olevat mingid «valed arvud», arenes hiljem välja kompleksmuutuja funktsioonide teooria, mille rakendused on eriti hinnatavad aerodünaamikas. Selles on suuri teeneid tuntud vene teadlasel Nikolai Žukovskil.

Kompleksmuutuja funktsioonide teooriat rakendatakse suure eduga ka elektrotehnikas, tuumafüüsikas ja elastsusteoorias. Viimasel alal on silmapaistvaid tulemusi saavutanud ka endine Tartu Ülikooli rakendusmatemaatika professor Guri Kolossov (1867—1931).

Matemaatikas kui teaduses toimub loogilise arutluse lihtsustamise huvides arvuvalla laiendamine naturaalarvudelt ratsionaalarvudeni teisiti kui siin kirjeldatud. See kulgeb nii, nagu seda on tehtud eespool, naturaalarvudelt esmalt täisarvudele ja siis sealt ratsionaalarvudele. Edasi laieneb arvuvald reaalarvudele, kompleksarvudele jne.

Joonis 265 iseloomustabki just seda fakti, et iga uus arvuvald hõlmab endas temale eelnenud arvuvalla.

Arvuvalla edasist laiendamist nii, et igale ruumipunktile vastaks kindel arv, põhjendas iiri matemaatik ja astronoom William Rowan Hamilton 1843. aastal. Uusi arve nimetatakse kvaternionideks.

ÜLESANDEID KORDAMISEKS.

777. Poiss ehitas ruudukujulise põhjaga kinnist risttahukat. Ta vahetas kogemata ära põhiserva ja kõrguse mõõtmed, seetõttu kulus risttahuka ehitamiseks 9600 cm^2 materjali enam ja ruumala suurenes kahekordseks. Missugused pidid olema risttahuka mõõtmed?

778. Joonesta kuusnurkse prisma kaksvaade, kui prisma kõrgus on 5 cm, põhiserv 3 cm ja kui

- a) prisma üks põhi on põhipinnal,
- b) prisma üks põhi on esipinnal.

Joonesta need prismad kaldprojektsioonis, kui $q = \frac{1}{2}$ ja $\omega = 45^\circ$.

779. Korrapärase nelinurkse püramiidi apoteem on 15 cm ja külgservad moodustavad põhjaga nurga 70° . Leia püramiidi ruumala.

780. 918,4 grammist tinast valatakse ühesuguse serva pikkusega tetraeedrid ja oktaeedrid. Kui pikk on see serv, kui tina erikaal on $11,41 \frac{\text{G}}{\text{cm}^3}$?

781. Korrapärane kuusnurkne marmorsammas ($\rho = 2,84 \frac{\text{G}}{\text{cm}^3}$) pikkusega 1,85 m lihvitakse silindrikujuliseks. Leia marmorsamba põhiserva pikkus, kui samba kaal pärast lihvimist on 215 kG.

782. Puurauk läbimõõduga 16 cm on vett täis jooksnud. Pump võimsusega 4500 liitrit tunnis peab 20 minutit töötama, et seda vett välja pumbata. Kui sügav on puurauk?

783. Kolmnurga külge $c=25$ cm ja tema lähisnurgad $\alpha=60^\circ 20'$ ja $\beta=42^\circ 10'$. Kolmnurk pöörleb ümber külje c . Arvuta pöördkeha pindala ja ruumala.

784. Tüvikoonuse külgpindala on 100 m^2 ja põhjade raadiuste summa 5 m. Leia tüvikoonuse moodustaja ja ruumala, kui tüvikoonuse kõrgus on 4 m.

785. Ringi sektor, mille raadius on r ja kesknurk 60° , pöörleb ümber sümmeetriatelje. Kui suur on pöördkeha ruumala? Leia pöördkeha ja kera, mille osaks on see pöördkeha, ruumalade suhe.

786. Võrdle järgmiste taevakehade pindala, ruumala ja massi, kui vaatleme neid taevakehasid keradena, mille raadiused ja tihedused on antud:

Maa $r=6370$ km, tihedus $5,6 \frac{\text{G}}{\text{cm}^3}$,

Kuu $r=1738$ km, tihedus $3,3 \frac{\text{G}}{\text{cm}^3}$,

Päike $r=695\,300$ km, tihedus $1,4 \frac{\text{G}}{\text{cm}^3}$.

787. Lahenda kolmnurk, kui on antud:

- | | | |
|----------------|-------------|-----------------------------|
| a) $a=15$ cm | $h_a=11$ cm | ja $\alpha=67^\circ 24'$, |
| b) $b=38,5$ cm | $c=33,7$ cm | ja $h_c=35,2$ cm, |
| c) $a=25$ cm | $b=17$ cm | ja $\alpha=118^\circ 43'$. |

788. Tõesta samasused.

$$\text{a) } \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\tan \alpha - \tan \beta} = \cos \alpha \cdot \cos \beta$$

$$\text{b) } \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{c) } \cos^2 \alpha + \cos^2 (60^\circ + \alpha) + \cos^2 (60^\circ - \alpha) = \frac{3}{2}$$

$$\text{d) } \tan \alpha \cdot \tan \beta + \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{\tan(\alpha + \beta)} = 1$$

789. Määra tähtede väärtused, mille puhul on kehtivad võrratused:

- | | |
|---------------------|----------------------------|
| 1) a) $2^x > x^2$, | 2) $a^2 + b^2 > (a+b)^2$, |
| b) $2^x < x^2$, | $a^2 + b^2 < (a+b)^2$, |
| c) $2^x = x^2$, | $a^2 + b^2 = (a+b)^2$. |

790. Koonda.

a) $\frac{1}{2}u^2 - \frac{2}{3}v^2 + \frac{5}{6}u^2 - \frac{3}{4}v^2$

b) $0,85a^{2n} - 1,73b^{2n} + 3,52c^{2n} + 7,88a^{2n} - b^{2n} + 0,12c^{2n}$

c) $5(a+b)^{m+n} - 6(a+b)^{m-n} - 3(a+b)^{m+n} + 7(a+b)^{m-n}$

791. Lihtsusta.

a) $\left(\frac{9x^2-6x+1}{4x^2+4x+1}\right)^{\frac{1}{2}}$

d) $a^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{a} : a^{\frac{3}{4}}$

b) $\frac{(x^4-y^4)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}$

e) $\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^{-\frac{1}{4}}$

c) $\left(\frac{x^3y+x^3z}{24y^3}\right)^{\frac{1}{3}}$

f) $(-12)^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{144}$

792. Arvuta logaritmid tabelite abil ja kontrolli tulemust arvutuslükatil.

a) $\frac{3,87 \cdot 554,2 \cdot 0,8741}{0,07529 \cdot 230000}$

d) $\sqrt[3]{58,06 - \sqrt{0,009898}}$

b) $\frac{54,18^2 \cdot 6,874 \cdot 0,942^3}{31,09 \cdot 3,876^3}$

e) $\left(\frac{2578}{568300}\right)^{-1,5} - \left(\frac{0,9487}{0,0095}\right)^{1,5}$

c) $\sqrt[4]{28,75 \sqrt[3]{\frac{765,9}{8645}}}$

f) $\left(\frac{0,2389}{4,597}\right) + \sqrt{\left(\frac{0,0197}{0,385}\right)^{\frac{3}{2}}}$

793. Kolm arvu, mille summa on 39, moodustavad geomeetrilise progressiooni. Kui suurimat arvu vähendada 9 võrra, saame aritmeetilise progressiooni. Leia need kolm arvu.

794. Esita harilikult murruna.

a) 0,28157157... b) 0,8174242... c) 0,142857142857...

795. Aritmeetilise progressiooni 2, 14, 26 jne. iga kahe järjestikuse liikme vahele tuleb paigutada kaheksa arvu nii, et saaksime jälle aritmeetilise progressiooni. Esita selle progressiooni esimesed 10 liiget. Missugune lineaarne funktsioon vastab antud ja missugune leitud aritmeetilisele progressioonile?

796. Mitu meetrit läbib vabalt langev keha õhutühjas ruumis 12 sekundiga? Mitme sekundiga langeb keha 490 m?

797. Lahenda võrratused.

a) $\frac{x-4}{x+3} > 1$

c) $\frac{-x-2}{3-2x} + 1 < 0$

b) $\frac{2x}{3-4x} < 2$

d) $\frac{2+x}{x-1} + x > 0$

798. Leia.

a) $\sqrt[3]{-125}$

c) $\sqrt{-81}$

e) $\sqrt[5]{-32}$

g) $\sqrt[7]{-128}$

b) $\sqrt[4]{-625}$

d) $\sqrt[4]{-\frac{3}{4}}$

f) $\sqrt{i^4}$

h) $\sqrt[3]{i^2}$

799. Leia järgmised piirväärtused.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4x - 3}{7x + 2}$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 3x + 2}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 7}{x + 1}$

e) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{2x^2 - x - 15}$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

f) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 + x - 1}{4x^2 - 1}$

800. Leia järgmiste kõverate ekstreemumpunktid ja käänupunktid.

a) $y = 2x^4 + 32x^2$

c) $y = x^4 + 2x^3 - 4x^2$

b) $y = \frac{x^2}{2} - 10x^3$

d) $y = x^4 + 6\frac{2}{3}x^3 - 4x^2$

801. Leia järgmiste funktsioonide tuletised.

a) $y = (x^5 + x^3 + x)^2$

c) $y = (x^3 - 3x^2 + 2x)^3$

b) $y = (3 - 2x)^5$

d) $y = (2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 5x - 6)^4$

802. Uuri funktsioone.

a) $y = 4x - 3$

c) $y = 3x^2 - 2x - 1$

b) $y = 2 - 3x$

d) $y = 3 - 2x - x^2$

803. Kasutades kuupparabooli $y = x^3$ graafikut, lahenda järgmised võrrandid graafiliselt.

a) $x^3 = 10 - x$

d) $x^3 - x - 1 = 0$

b) $x^3 + x = 2$

e) $x^3 - 5x + 3 = 0$

c) $x^3 - 2x = 0$

f) $x^3 - 3x - 2 = 0$

804. Parabool $y = 0,4x^2$ pöörleb ümber x -telje. Leia pöördkeha ruumala, mille eraldab pöördparaboolist tasapind, mis on risti x -teljega ja lõikab teda kohal $x = 3$.

805. Arvuta järgmised integraalid.

a) $\int \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) dx$

b) $\int (x^n + x^{n-1} + \dots + x^2 + x + 1) dx$

$$c) \int \frac{\sin x}{2} dx$$

$$d) \int (x - \sin x) dx$$

$$e) \int \left(x - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx$$

$$f) \int \frac{\cos^2 x - 1}{\cos^2 x} dx$$

806. Avalda kuubi ruumala

a) kuubi serva funktsioonina,

b) kuubi täispindala funktsioonina.

Esita need funktsioonid graafiliselt.

807. Vaatle poolavatud tikutoosi, lauda, tindipotti ja ukse-
raami paakil uksega kui tuntud geomeetriliste kehade kombinat-
sioone ja joonest nende kaldprojektsioonid.

808. Trapetsikujulise ristlõikega kanali laius on ülalt 4,5 m,
alt 1,5 m ja sügavus 1,5 m. Vee tase kanalis on 1 m ja voolu
kiirus $30 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$. Arvuta vee mass, mis voolab läbi kanali ristlõike
1 tunni jooksul.

809. 9 cm pikkuse servaga kuupi lõigatakse iga tema tipu
juurest tasapinnaga nii, et see lõikab külgservi 3 cm kaugusel
tipust. Joonesta saadud keha ja arvuta tema ruumala.

Missuguse keha me saame, kui tasapinnad lõikavad servi
4,5 cm kaugusel tipust? Kui suur on nüüd saadud keha ruumala?

810. Joonesta tetraeedri kaksvaade, kui tetraeedri serv on
6 cm ja kui

a) üks põhiserv on paralleelne esitahuga,

b) üks põhiserv on risti esitahuga.

Joonesta nende tetraeedrite kaldprojektsioonid, kui $q = \frac{1}{2}$ ja
 $\omega = 60^\circ$.

811. Kuidas suhtub tetraeedri täispindala kuubi täispindalasse,
kui nende külgservad on võrdsed?

Kuidas suhtub tetraeedri ruumala kuubi ruumalasse, kui nende
külgservad on võrdsed?

812. Esita silindri kõrgus, külgpindala ja ruumala põhja
läbimõõdu funktsioonina ja joonest nende funktsioonide graa-
fikud.

813. Kolmnurga küljed on: $a=48$ cm, $b=36$ cm ja $c=28$ cm.
Kolmnurk pöörleb ümber külje a . Leia pöördkeha pindala ja
ruumala.

814. 20 cm pikkuse raadiusega ringist on välja lõigatud sek-
torid kesknurgaga

a) 45° ; b) 60° ; c) 120° ja d) 240° .

Need sektorid on koonuste külgpindadeks. Leia koonuste ruum-
ala.

815. Koonuse telglõikeks on võrdkülgne kolmnurk.

Avalda moodustaja m ja kõrgus h põhja raadiuse r funktsioonina.

Avalda külgpindala S_k ja ruumala V põhja läbimõõdu d funktsioonina.

Joonesta vastavad graafikud.

816. Planetaarium koosneb silindrikujulisest ruumist ja selle peale ehitatud poolkerast, mille pinnale kujutatakse tähistaevas. Leia planetaariumi ruumala, kui silindrikujulise ruumi läbimõõt on 12 m ja kõrgus 5 m.

817. Leia

- a) 1 m pikkuse raadiusega kera pindala ja ruumala,
- b) 1 m² suuruse pindalaga kera raadius ja ruumala,
- c) 1 m³ suuruse ruumalaga kera raadius ja pindala.

818. Võrdhaarse täisnurkse kolmnurga hüpotenuus on 6 cm. Kolmnurga ümber on joonestatud poolringjoon, mis läbib kolmnurga kõiki tippe. Selle poolringjoone vastu on joonestatud kaar, mille keskpunkt asetseb täisnurga tipus ja mille raadius on võrdne kaatetiga. Ringjoone kaarte poolt piiratud kujund pöörleb täisnurga tippu läbiva hüpotenuusi ristsirge ümber. Leia pöördkeha pindala ja ruumala.

819. Kumb on suurem:

- a) $\sqrt{4 \cdot 9}$ või $\sqrt{4+9}$?
- b) $\sqrt{a^2-b^2}$ või $\sqrt{(a-b)^2}$?
- c) $\sqrt[3]{a^3+b^3}$ või $\sqrt[3]{(a+b)^3}$?
- d) $\sqrt{4x^2-12xy+9y^2}$ või $\sqrt{4x^2-9y^2}$?

Põhjenda!

820. Lihtsusta.

- a) $\sqrt{9x+9} - \sqrt{x+1} + \sqrt{25x+25}$
- b) $(3\sqrt{2}+5\sqrt{8}+9\sqrt{50}) \cdot \sqrt{2}$
- c) $(\sqrt{3}+2\sqrt{5})(3\sqrt{2}-\sqrt{5})$
- d) $(2+\sqrt{6})(2-\sqrt{6})$
- e) $(\sqrt{6}+2\sqrt{2})^2$

821. Lihtsusta.

a)
$$\frac{m^{-\frac{3}{2}} n^4}{p^3 q^{-2}} \cdot \frac{m^{-1} n^{-1,5}}{p^{-\frac{2}{3}} q^{-0,25}}$$

$$b) \left(\frac{3x^{-2}}{4y^{-3}} - \frac{4y^{-3}}{3x^{-2}} \right)^{-2}$$

$$c) \left(\frac{5a^{-0,5}}{3b^{-1,3}} + \frac{3b^{-1,3}}{5a^{-0,5}} \right) \cdot \left(\frac{5a^{-0,5}}{3b^{-1,3}} - \frac{3b^{-1,3}}{5a^{-0,5}} \right)$$

822. Lahenda järgmised võrrandid arvutuslükatil.

$$a) 3^x = 87,5$$

$$d) 237^{x-1} = 4,89$$

$$b) 4,62^x = 0,595$$

$$e) \sqrt[x]{578} = 5,5$$

$$c) 0,125^x = 0,0103$$

$$f) \sqrt[x-1]{67,5} = 1,75$$

823. Lahenda võrratused.

$$a) x^2 - 36 > 0$$

$$c) x^2 + 6x - 7 < 0$$

$$b) x^2 - 5x < 0$$

$$d) -5x^2 - 18x - 35 > 0$$

824. Ringi, mille raadius on r , on joonestatud ruut, sellesse ruutu on joonestatud ring, millesse jälle ruut jne. Kui suur on kõikide ringide pindalade summa? Kui suur on kõikide ruutude pindalade summa?

825. Arvude 1 ja 7 vahele tuleb paigutada 6 arvu nii, et moodustuks kaheksaliikmeline geomeetriline progressioon. Leia need arvud. Leia sellele progressioonile vastav eksponentfunktsioon.

826.

$$1 = 1 = 1^2$$

$$1 + 3 = 4 = 2^2$$

$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2 \text{ jne.}$$

Näita, et toodud näidetest ilmnev seaduspärasus (sõnasta see!) on kehtiv iga naturaalarvu n puhul.

827. Lihtsusta.

$$a) \tan \alpha + \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha}$$

$$c) \cos^4 \beta + \sin^2 \beta \cdot \cos^2 \beta + \sin^2 \beta$$

$$b) \frac{1 - \sin^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} + \tan \alpha \cdot \cot \alpha$$

$$d) \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

828. Leia järgmiste funktsioonide pöördfunktsioonid.

$$a) y = \frac{3 - 4x}{2}$$

$$c) y = \log(x + 1)$$

$$b) y = \frac{4x^2 - 1}{2}$$

$$d) y = \log(x^2 - 3)$$

829. Uuri funktsioone.

a) $y = \sin \frac{x}{2}$

c) $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

b) $y = \cos 2x$

d) $y = 0,6^{-x}$

830. Missuguse nurga moodustavad kõverate $y = \sin x$ ja $y = \cos x$ puutujad x -teljega kohtadel

a) $x=0$, b) $x = \frac{\pi}{4}$, c) $x = \frac{\pi}{2}$, d) $x = \pi$?

831. Leia järgmiste kõverate käänupunktid.

a) $y = 2x^3 - 3x + 25$

c) $y = (x-3)^2(x-10)$

b) $y = \frac{x^3}{6} - x^2 + 4x + 16$

d) $y = (x+1)^3 + (x-1)^3$

832. Parabool $y = 0,4x^2$ pöörleb ümber y -telje. Leia pöördkeha ruumala, mille eraldab pöördparaboolist tasapind, mis on risti y -teljega ja lõikab teda kohal $y=3$. Võrdle saadud tulemust ülesande 804 vastusega.

833. Leia $f(x)$, kui

a) $\int f(x) dx = x + c$,

d) $\int f(x) dx = -\frac{1}{x} + c$,

b) $\int f(x) dx = 4x^3 + c$,

e) $\int f(x) dx = x^2 + c$,

c) $\int f(x) dx = 9x^2 + c$,

f) $\int f(x) dx = x^{-5} + c$.

834. Leia kuubi täispindala, ruumala, diagonaal ja diagonaallõike pindala, kui kuubi serv on

a) 12 cm, b) 1,5 m, c) 14 dm.

835. Vaadeldes tähti koosnevana nelinurksetest korrapärastest prismadest esita sõna HELI kaldprojektsioonis ($q = \frac{1}{2}$; $\omega = 60^\circ$),

a) kui tähed on paralleelsed projektsioonipinnaga,

b) kui tähed moodustavad projektsioonipinnaga 45° nurga.

836. Korrapärase üheksanurkse püramiidi põhiserv on 2 cm. Külgtahud moodustavad põhitahuga 65° nurga. Arvuta

a) püramiidi kõrguse ja külgserva pikkus,

- b) püramiidi täispindala ja ruumala,
c) külgservade ja põhja vaheline nurk.

837. Oktaeedri serv on 5,3 cm. Arvuta oktaeedri pindala ja ruumala. Missugune kuju on oktaeedri diagonaallõikel ja kui suur on selle pindala?

838. Ehitati ristkülikukujuline tiik mõõtmetega 60 m × 80 m. Kalda kaldenurk on 45° ja tiigi sügavus 3 m. Leia tiigi ehitamisel väljakaevatud pinnase hulk, kui väljakaevamisel pinnase hulk suureneb 9% võrra.

839. Tüvipüramiidi ruumala on 74 cm³, kõrgus 6 cm ja ühe põhja pindala 16 cm². Leia teise põhja pindala.

840. Kas on võimalik saata 1000 pudelikorki läbimõõduga 2,2 cm ja pikkusega 3,4 cm pakina, mis kaalub vähem kui 5 kG, kui korgi erikaal on 0,25?

841. Liivakell koosneb kahest ühesugusest ühise tipuga koonusest. Tipus on ava, millest liiv läbi voolab. Koonuste põhjade raadiused on 3 cm.

a) Leia koonuste kõrgus, kui 1 minuti jooksul voolab ühest koonusest teise 7,5 cm³ liiva ja liivakell mõõdab 10-minutist ajavahemikku.

b) Leia liiva seis viienda minuti kohal.

842. Tüvikoonusekujulise korstna kõrgus on 25 m. Korstna alumine sisemine läbimõõt on 1 m ja übermõõt 7,54 m, ülemine läbimõõt on 0,6 m, übermõõt 3,14 m. Leia korstna rõhumine alusmüürile, kui korstna erikaal on 2,2.

843. Nõguspeegel on segmendi pinnaks kerale raadiusega 10 cm. Segmendi kõrgus on 2 cm. Peegel kaetakse 0,1 mm paksuse hõbedakihihiga. Leia hõbedakihi mass, kui hõbeda tihedus on 10,4 $\frac{\text{G}}{\text{cm}^3}$.

844. Leia kera ruumala, kui kera pindala on 1296 cm².

845. Leia kera pindala, kui kera ruumala on 4500 cm³.

846. Lihtsusta.

$$a) (49x^2 + 84xy + 36y^2)^n : (7x + 6y)^n$$

$$b) \frac{u^{2+n}v^x}{10y^3} : \frac{u^n v^{2+x}}{5y} \cdot 2v^{2+2y}$$

$$c) \frac{95x^6y^7z}{38x^2yz} + (2x^2y^3)^2 - \frac{2x^5x^8}{4z^2} : \frac{3xy^2}{4z^2}$$

847. Võrdle avaldisi.

$$a) (4a + 2a)^{-3}, 4a + 2a^{-3} \text{ ja } 4a + (2a)^{-3},$$

$$b) (5x \cdot 2x)^{-2}, 5x \cdot 2x^{-2} \text{ ja } 5x \cdot (2x)^{-2},$$

$$c) (25 - 16)^{\frac{1}{2}}, 25^{\frac{1}{2}} - 16^{\frac{1}{2}} \text{ ja } 25 - 16^{\frac{1}{2}}.$$

848. Võrdkülgse kolmnurga kõrgusele on ehitatud uus võrdkülgne kolmnurk, selle kõrgusele jällegi uus võrdkülgne kolmnurk jne. Leia kõikide nii konstrueeritud kolmnurkade pindalade summa, kui esimese kolmnurga külge on a .

849. Lahenda võrrandid.

a) $\sin 2x = \sin x$

c) $2 \sin x = \sin(45^\circ - x)$

b) $\cos 2x = \cos x$

d) $\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

850. Leia järgmiste funktsioonide määramispiirkonnad.

a) $y = \sqrt{3x^2 - x + 1}$

b) $y = \log(3 - 4x)$

c) $y = \frac{2 - x}{5 - 4x - x^2}$

d) $y = \frac{\log(3x - 6)}{x - 3}$

851. Leia järgmiste funktsioonide ekstreemumkohad.

a) $y = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$

d) $y = x^3 + 3x^2 + 3x - 7$

b) $y = x(x^2 + x + 1)$

e) $y = (x - a)^3 + (x - b)^3$

c) $y = (x - 1)(x^2 - 1)$

f) $y = (x - a)(x - b)^2$

852. Missuguseid tingimusi peavad rahuldama kordajad a , b ja c , et funktsioonil $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ oleks kohal a) $x = 1$, b) $x = -\frac{2}{3}$, c) $x = 1\frac{1}{3}$ käänupunkt?

853. Leia järgmiste võrrandite lahendid, kasutades Newtoni võtet lahendite täpsustamiseks.

a) $x^3 - x = 33$

b) $x^3 - x^2 = 10$

c) $x^3 - x^2 + x = 44$

854. Nelinurkne korrapärane püramiid on lõigatud põhjaga paralleelse tasapinnaga nii, et eraldub püramiid, mille ruumala on pool esialgse püramiidi ruumalast. Kui kõrgel põhjast on tehtud lõige?

855. Koonuse külgsinna laotuseks on ringi sektor. Avalda selle sektori kesknurk koonuse põhja raadiuse r ja moodustaja s suhte funktsioonina. Mis tähendus on suhtel $\frac{r}{s}$ koonuse telglõike puhul?

856. Kumb on suurem 9^{9^9} või $(9^9)^9$?

857. Teravnurga ühel haaral on võetud punkt P , mille kaugus tipust on a . Punktist P on tõmmatud ristlõik teisele haarale. Saadud punktist Q , mis on tipust kaugusel b , on tõmmatud ristlõik esimesele haarale. Nii jätkates saame ühele haarale punktid P, P_1, P_2 jne. ja teisele haarale punktid Q, Q_1, Q_2 jne. Leia kõikide nende ristlõikude summa, s. t. $PQ + QP_1 + P_1Q_1 + \dots$

858. Leia järgmiste kõverate käänupunktid.

a) $y = \sin x$ b) $y = \cos x$ c) $y = \tan x$ d) $y = a \sin x$

859. Arvuta järgmised integraalid.

a) $\int_0^{10} dx$

d) $\int_1^2 \left(\frac{x^2}{2} - 1 \right) dx$

g) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$

b) $\int_2^4 5x^2 dx$

e) $\int_0^{10} (x+1)(x-1) dx$

h) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$

c) $\int_{100}^{101} 5x^3 dx$

f) $\int_{-1}^1 (3x^2 + 10) dx$

i) $\int_0^{2\pi} (\sin x + 1) dx$

860. Koonuse kõrgus on 12 cm ja põhja raadius on 6 cm. Mis-sugused on suurima ruumalaga silindri mõõtmed, mida saab kujundada koonusesse nii, et silindri põhi asetseks koonuse põhjal?

861. Koonuse kõrgus on 21 cm ja põhja raadius 7 cm. Mis-sugused on koonusesse kujundatud suurima täispindalaga silindri mõõtmed?

862. Kolme 6 m pikkuse kepi abil ehitatakse korrapärase kolmnurkse püramiidi kujuline telk. Kui suur peab olema püramiidi kõrgus, et telgis oleks võimalikult rohkem õhku?

863. On antud kaks sama orientatsiooniga võrdset kolmnurka. Leia peegeldused, mille abil saab viia ühe kolmnurga teisega ühtivusse.

864. On antud kaks võrdset, kuid erinevate orientatsioonidega kolmnurka. Leia peegeldused, mille abil saab viia ühe kolmnurga teisega ühtivusse.

865. Võrdhaarse täisnurkse kolmnurga üks kaatet asetseb tasapinnal ja teine moodustab tasapinnaga nurga 45° . Kui suure nurga moodustab hüpotenuus selle tasapinnaga?

866. Võrdkülgse kolmnurga üks külg asetseb tasapinnal, mis moodustab kolmnurga tasapinnaga nurga 60° . Kui suure nurga moodustavad teised küljed selle tasapinnaga?

867. Kolmetahulise ruuminurga iga tasanurk on 60° . Kui suured on selle ruuminurga kahetahulised nurgad?

868. Püramiidi $SABC$ serval AB on antud punkt M , tahul SAB punkt N ja tahul SAC punkt P . Esita joonisel püramiidi lõige tasapinnaga MNP .

869. Kuubi serv on 10 cm. Kui kaugel asetseb kuubi mingi tipp selle vastastahu keskpunktist?

870. Võrdkülgse kolmnurga ristprojektsioon tasapinnal, mis läbib kolmnurga üht külge, on täisnurkne kolmnurk. Leia nurk võrdkülgse kolmnurga ja projektsioonipinna vahel.

871. Ruudu projektsioon tasapinnal, mis läbib ruudu üht tippu, on romb, mille üks nurk on 140° . Leia ruudu ja projektsioonipinna vaheline nurk.

872. Mitu protsenti kuubi ruumalast täidab kuubisse kujundatud kera?

873. Mitu protsenti kera ruumalast täidab kerasse kujundatud kuup?

SISUKORD

I. Geomeetrilised teisendused tasapinnal. (E. Etverk)

§	1. Geomeetrilise teisenduse mõiste	3
§	2. Teljeline sümmeetria	6
§	3. Rööplüke	12
§	4. Tsentraalsümmeetria	17
§	5. Pööre	21
§	6. Liikumine tasapinnal	27
§	7. Liikumisteisenduste kasutamine konstruktsioonülesannete lahendamisel	29
§	8. Homoteetsus tasapinnal	31
§	9. Homoteetsuse kasutamine konstruktsioonülesannete lahendamisel	34

II. Sirged ja tasapinnad. (E. Etverk)

§	10. Tasapind ja selle kujutamine	37
§	11. Tasapinna määramine punktide ja sirgete abil	39
§	12. Kahe sirgjoone vastastikused asendid. Kiivsirged	41
§	13. Kahe tasapinna vastastikused asendid	42
§	14. Sirge ja tasapind	43
§	15. Kahe tasapinna paralleelsus	46
§	16. Kolme tasapinna vastastikused asendid	48
§	17. Kolm paralleelset sirget	49
§	18. Vastavalt paralleelsete haaradega nurgad	50
§	19. Kahetahuline nurk	53
§	20. Ruuminurk	54
§	21. Tasapinna normaal	58
§	22. Tasapinna normaali omadusi	60
§	23. Punkti ja sirge ristprojektsioon	63

III. Funktsioonide uurimine. (O. Prints)

§	24. Funktsiooni üldtähis	68
§	25. Paarisfunktsioon ja paaritu funktsioon	69
§	26. Funktsiooni määramispiirkond	71
§	27. Tõkestamatult kasvavad ja tõkestamatult kahanevad suurused	74
§	28. Lõplikule väärtusele lähenevad suurused	78
§	29. Funktsiooni piirväärtus	80
§	30. Funktsiooni piirväärtuse rakendusi	85
§	31. Funktsiooni pidevus	90
§	32. Funktsiooni uurimise skeem	92
§	33. Lineaarse funktsiooni uurimine	92
§	34. Ruutfunktsiooni uurimine	94
§	35. Astmefunktsiooni uurimine	99

§ 36.	Trigonomeetriliste funktsioonide uurimine	101
§ 37.	Pöördfunktsiooni mõiste. Pöördfunktsiooni graafik	103
§ 38.	Ruutfunktsiooni pöördfunktsioon.	105
§ 39.	Trigonomeetriliste funktsioonide pöördfunktsioonid	105

IV. Eksponentfunktsioon ja logaritmfunktsioon. (O. Prints)

§ 40.	Eksponentfunktsiooni mõiste	109
§ 41.	Eksponentfunktsiooni uurimine	111
§ 42.	Logaritmfunktsioon	113
§ 43.	Lihtsamaid eksponentvõrrandeid	116
§ 44.	Lihtsamaid logaritmivõrrandeid	118

Geomeetriline progressioon.

§ 45.	Geomeetrilise progressiooni mõiste	120
§ 46.	Geomeetrilise progressiooni üldliikme valem	121
§ 47.	Geomeetrilise progressiooni summa valem	124
§ 48.	Tökestamatult kahaneva geomeetrilise progressiooni mõiste	128
§ 49.	Tökestamatult kahaneva geomeetrilise progressiooni summa	128
§ 50.	Hariliku murru teisendamine kümnendmurruks	131
§ 51.	Lõputu perioodilise kümnendmurru esitamine hariliku murruna	133
§ 52.	Liitintress	134
§ 53.	Suuruste liitprotsendiline muutumine	136

V. Funktsiooni tuletis ja selle rakendusi. (O. Prints)

§ 54.	Keha liikumise hetkeline kiirus	140
§ 55.	Joone puutuja tõus.	142
§ 56.	Funktsiooni tuletis	145
§ 57.	Mõnede funktsioonide tuletised	146
§ 58.	Funktsioonide summa, korrutise ja jagatise tuletised	148
§ 59.	Funktsiooni $y = x^n$ tuletis	152
§ 60.	Näiteid funktsiooni tuletise arvutamiseks	153
§ 61.	Trigonomeetriliste funktsioonide tuletised	155
§ 62.	Tuletiste tabel	159
§ 63.	Funktsiooni ekstreemumid	159

Funktsioonide uurimine tuletise abil

§ 64.	Funktsiooni teine ja kolmas tuletis	162
§ 65.	Funktsiooni kasvamine ja kahanemine	164
§ 66.	Funktsiooni kumerus ja nõgusus	166
§ 67.	Käänupunkt	170
§ 68.	Maksimum- ja miinimumpunktid	171

Tuletise mõiste kasutamine võrrandite ligikaudsel lahendamisel

§ 69.	Võrrandi ligikaudne lahendamine	176
§ 70.	Newtoni võte võrrandi lahendi täpsustamiseks	177

Newtoni binoomvalem.

§ 71.	Binoomi $x+1$ astmete arendid	180
§ 72.	Funktsiooni $f^n(x)$ tuletis	181
§ 73.	Binoomi $(x+1)^n$ arend	182
§ 74.	Binoomi $(a+b)^n$ arend	185
§ 75.	Newtoni binoomvalemi omadusi	186
§ 76.	Ligikaudne valem $(1+x)^n \approx 1+nx$	186
§ 77.	Valemi $(1+x)^n \approx 1+nx$ viga	187

Funktsiooni diferentsiaal.

§ 78.	Funktsiooni diferentsiaali mõiste	188
§ 79.	Funktsiooni $y=x$ diferentsiaal	189
§ 80.	Funktsiooni diferentsiaali kasutamine ligikaudsel arvutamisel	189

VI. Integraal. (O. Prints)

§ 81.	Kõverjoonse trapetsi pindala (I)	191
§ 82.	Pindala tuletis	193
§ 83.	Algfunktsioon	194
§ 84.	Määramata integraal	195
§ 85.	Määratud integraal	197
§ 86.	Newton-Leibnizi valem	198
§ 87.	Kõverjoonse trapetsi valem (II)	198

VII. Hulktahukad ja pöördkehad. (O. Prints)

Prisma.

§ 88.	Prismaline pind	201
§ 89.	Prisma	202
§ 90.	Prisma omadused	203
§ 91.	Rööptahukas	204
§ 92.	Rööptahuka omadused	205
§ 93.	Prisma külgpindala	208
§ 94.	Prisma täispindala	209
§ 95.	Risttahuka ruumala	210
§ 96.	Püstprisma ruumala	213

Püramiid ja tüvipüramiid.

§ 97.	Püramiidiline pind	216
§ 98.	Püramiid	217
§ 99.	Püramiidi põhjaga paralleelne lõige	219
§ 100.	Tüvipüramiid	221
§ 101.	Püramiidi külgpindala ja täispindala	223
§ 102.	Tüvipüramiidi külgpindala ja täispindala	225
§ 103.	Püramiidi ruumala	226
§ 104.	Tüvipüramiidi ruumala	229
§ 105.	Kaldprisma ruumala	231

Korrapärased tahkkehad.

§ 106.	Kuup ehk korrapärane heksaeeder	233
§ 107.	Korrapärane tetraeeder	234
§ 108.	Korrapärased tahkkehad	234
§ 109.	Korrapärane oktaeeder	235
§ 110.	Korrapärane dodekaeeder	235
§ 111.	Korrapärane ikosaeder	235
§ 112.	Euleri valem	236

Silinder.

§ 113.	Silindriline pind	236
§ 114.	Silinder	237
§ 115.	Silindri joonestamine	238
§ 116.	Silindri külgpindala ja täispindala	240
§ 117.	Silindri ruumala	242

Koonus ja tüvikoonus.

§ 118.	Kooniline pind	243
§ 119.	Koonus	244
§ 120.	Tüvikoonus	246
§ 121.	Koonuse külgpindala ja täispindala	248
§ 122.	Tüvikoonuse külgpindala ja täispindala	250
§ 123.	Koonuse ruumala	251
§ 124.	Tüvikoonuse ruumala	253

Kera.

§ 125.	Sfäär ja kera	255
§ 126.	Kera lõige tasapinnaga	256
§ 127.	Kera osad	257
§ 128.	Sfääri ja tema osade pindala	258
§ 129.	Pöördkeha ruumala	262
§ 130.	Kera ja tema osade ruumala	263

VIII. Arvu mõiste üldistamine. (*O. Prints*)

§ 131.	Naturaalarvud	266
§ 132.	Täisarvud	268
§ 133.	Ratsionaalarvud	270
§ 134.	Ratsionaalarvude hulga laiendamise vajadus	272
§ 135.	Irratsionaalarvud	273
§ 136.	Reaalarvud	274

Kompleksarvud.

§ 137.	Ruutvõrrandi lahendamine	278
§ 138.	Imaginaararvud	278
§ 139.	Kompleksarvud	279
§ 140.	Kompleksarvude geomeetiline kujutamine	279
§ 141.	Kompleksarvude võrdsus	280
§ 142.	Reaalarvu ja puhtimaginaararvu summa	281
§ 143.	Kompleksarvude liitmine ja lahutamine	281
§ 144.	Kompleksarvu trigonomeetiline kuju	283
§ 145.	Kompleksarvude korrutamine	285
§ 146.	Kaaskompleksarvud	287
§ 147.	Kompleksarvude jagamine	288
§ 148.	Kompleksarvude omadusi	290

Kompleksarvude kasutamine kolmanda ja neljanda
astme kaksliikmeliste võrrandite lahendamiseks.

§ 149.	Kaksliikmelise võrrandi mõiste	291
§ 150.	Võrrandi $x^3 + a^3 = 0$ lahendamine	291
§ 151.	Võrrandi $x^3 - a^3 = 0$ lahendamine	292
§ 152.	Võrrandi $x^4 + a^4 = 0$ lahendamine	293
§ 153.	Võrrandi $x^4 - a^4 = 0$ lahendamine	293
§ 154.	Algebra põhilause	294
§ 155.	Arvuvalla laiendamisest	294

Ülesandeid kordamiseks	296
----------------------------------	-----

Этverk Элмар Германович
Прините Олаф Иоханнесович
МАТЕМАТИКА ДЛЯ X и XI КЛАССОВ
На эстонском языке
Обложка Л. Круусмаа
Издательство «Ээсти Раамат»
Таллин, Пярнуское шоссе, 10

*

Toimetaja K. Kallaste
Kunstiline toimetaja H. Keigo
Tehniline toimetaja L. Krikmann
Korrektor Ü. Rattur

Ladumisele antud 31. III 1965. Trükkimisele antud
7. VI 1965. Paber 60×90, 1/16. Trükipoognaid 19,5.
Arvestuspoognaid 16,77. Trükiarv 16 000. Tellimise
nr. 2786. Hans Heidemanni nimeline trükikoda,
Tartu, Ülikooli 17/19. I

Hind 29 kop.



29 kop.

A-26789

TÜ RAAMATUKOGU



1 0300 00360311 7