

TARTU ÜLIKOOL

LOODUS- JA TÄPPISTEADUSTE VALDKOND

Füüsika instituut

Paul Martin Kull

Mustad augud, horisondid ja tetraadid uues üldrelatiivsusteoorias

Magistritöö (30 EAP)

Füüsika õppekava

Juhendaja:

Manuel Hohmann, PhD

Tartu 2025

Abstrakt

Black holes, horizons and tetrads in New General Relativity

Due to General Relativity's (GR) age as a theory, many coordinate systems have been developed for it, each of which is specialized for some particular application. However, extensions of GR often lack these coordinate systems, as the GR ones are not trivially generalizable. In this thesis, we seek to develop such coordinate systems for New General Relativity (NGR), specifically in the context of black hole analysis and taking inspiration from known systems in GR. By making use of such coordinate systems, one may gain better insights into the geometric properties of black holes, such as the properties of horizons. In addition, one may analyze the mathematical properties of the tetrad of the black hole spacetime, which, as the basic dynamical object of NGR, opens up more avenues of research into black holes in NGR. We develop three coordinate systems for 1-parameter NGR, based on the Kruskal-Szekeres (KS), Eddington-Finkelstein (EF) and Gullstrand-Painlevé (GP) coordinates from GR. We find that the 1PNGR version of the KS metric can be obtained both through a coordinate transformation of a known Schwarzschild-like solution and also from a completely new "KS-like" solution, the tetrad of which is non-singular at the horizon under a certain choice of parameters. However, this solution is asymptotically complex and therefore the corresponding spacetime cannot be defined on the entire coordinate space. For the EF and GP coordinates, we find that the same is possible, but the new tetrads do not satisfy the field equations, except for zero-mass cases. In addition, the tetrads in these coordinates are inevitably singular at the horizon. Due to the possibility of these coordinate transformations, all systems present a Killing, Cauchy, and apparent horizon at $r = 2M$.

CERCS: P190 - Mathematical and general theoretical physics, classical mechanics, quantum mechanics, relativity, gravitation, statistical physics, thermodynamics.

Keywords: Modified gravity, teleparallel gravity, black holes, coordinate transformations.

Mustad augud, horisondid ja tetraadid uues üldrelatiivsusteoorias

Üldrelatiivsusteooria (ÜRT) vanuse üks tagajärgedest on, et selle väljavõrrandite lahendamiseks ning lahendite kirjeldamiseks on loodud mitmeid erinevate otstarvetega koordinaatsüsteeme. Samas pole üldiselt võimalik sama väita ÜRT-järgsete teooriate kohta. Lisaks pole ÜRT raames loodud koordinaadid muutmata kujul sobilikud nendes teooriates kasutamiseks. Käesoleva töö eesmärk on luua uued koordinaatsüsteemid kasutamiseks uues üldrelatiivsusteoorias (UÜRT), täpsemalt mustade aukude analüüsi otstarbeks ning võttes aluseks mõned teadaolevad koordinaadid ÜRT-st. Selliste koordinaatide abil on võimalik saada terviklikum ülevaade mustade aukude geomeetristest omadustest, nt. horisontidest. Samuti saab analüüsida musta augu aegruumi tetraadi, mis on UÜRT dünaamiline alusobjekt ja seega võib valgustada uusi suundi mustade aukude analüüsimisel UÜRT-s. Selles töös konstrueerime kolm koordinaatsüsteemi nn. 1-parameetri UÜRT-s, mis põhinevad ÜRT-st tuntud Kruskal-Szekeres'i (KS), Eddington-Finkelstein'i (EF) ning Gullstrand-Painlevé (GP) koordinaatidel. Leiame, et KS meetrika analoogi 1PUÜRT-s võib tuletada nii teadaoleva Schwarzschildi-sarnase lahendi koordinaatteisendusest kui ka täiesti uuest „KS-sarnasest“ lahendist, mille tetraad on kindla lahendi parameetrite valikuga horisondil mittesingulaarne. Samas on see lahend asümptootiliselt kompleksne, mistõttu pole sellel põhinevat aegruumi võimalik kogu koordinaatruumis defineerida. EF ja GP koordinaatide puhul leiame, et ka nende meetrikaid saab kahel viisil leida, kuid uued tetraadid ei rahulda teooria väljavõrrandeid, v.a. massita juhul. Lisaks on nendes koordinaatides tetraadid horisondil alati singulaarsed. Kuna kõik lahendid on seotud koordinaatteisendustega, siis on kõigil Killingi, Cauchy ja näiline horisont kohal $r = 2M$.

CERCS: P190 - Matemaatiline ja üldine teoreetiline füüsika, klassikaline mehaanika, kvantmehaanika, relatiivsus, gravitatsioon, statistiline füüsika, termodünaamika.

Märksõnad: Modifitseeritud gravitatsioon, teleparalleelne gravitatsioon, mustad augud, koordinaatteisendused.

Sisukord

Sissejuhatus	5
Sõnavara	7
1 Teoreetiline ülevaade	11
1.1 Mustad augud ning horisonid	11
1.2 Uus üldrelatiivsusteooria (UÜRT)	12
1.2.1 Väljavõrrandid	13
1.3 Koordinaatsüsteemid	14
1.4 1PUÜRT Schwarzschildi lahend	16
2 Lahendid	17
2.1 KS koordinaadid	18
2.1.1 Esialgne tetraad	18
2.1.2 Väljavõrrandid	20
2.1.3 Koordinaatteisendus	23
2.2 EF koordinaadid	25
2.2.1 Esialgne tetraad	25
2.2.2 Väljavõrrandid	26
2.2.3 Koordinaatteisendus	27
2.3 GP koordinaadid	28
2.3.1 Esialgne tetraad	28
2.3.2 Väljavõrrandid	29
2.3.3 Koordinaatteisendus	30
3 Lahendite analüüs	32
3.1 Horisonid	32
3.2 Tetraad ja vääne	34
Kokkuvõte	36
Viited	36
A EF- ja GP-sarnased tetraadid	40
B Wolfram Mathematica kood	42
Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks	84

Sissejuhatus

Üks üldrelatiivsusteooria (ÜRT) kõige tuntumaid ning omapärasemaid ennustusi on mustade aukude olemasolu - objektid, mille gravitatsioon on nii tugev, et see võib ka valguse endasse tõmmata. Kuigi esimene neid kirjeldav ÜRT lahend töötati välja Karl Schwarzschildi poolt (mis sai ka tema nime), siis nende olemasolu kinnitati alles aastal 1972 [1]. Alates 1960ndatest on mustade aukude uurimine olnud pidevalt aktiivne. Nt. avastati, et mustadel aukudel võib olla elektrilaeng ning need võivad ka pöörelda [2]. Samuti ilmes, et Schwarzschildi lahend on sobilik ka muude kehade, nt. tähtede, kirjeldamiseks.

Musti auke iseloomustav omadus on horisont. Üldiselt kujutatakse seda kui piiri, millest sisse langenud keha või valgus kunagi välja ei saa, kuid nt. pöörlevate ning laenguga mustade aukude uurimine on näidanud, et mustal augul on mitu horisonti, mis ainult kindlatel juhtudel kokku langevad. Igal horisondil on erinevad omadused, mistõttu on mustast august tervikliku pildi saamiseks vaja neid kõiki eraldi uurida. Kõige tuntum, nn. sündmuste, horisont asub Schwarzschildi lahendis kaugusel $r_h = 2GM/c^2$ musta augu keskpunktist, kus M on musta augu mass. Samuti on selle puhul tegemist nn. koordinaatsingulaarsusega. Nagu nimetus viitab, on see seotud koordinaatidega ning ÜRT avaldamisest ei läinud kaua, et see fakt avastataks [3]. ÜRT jaoks on nüüdseks teada mitu koordinaatsüsteemi, mis eemaldavad Schwarzschildi lahendi koordinaatsingulaarsuse. Nende abil on Schwarzschildi lahendit äärmiselt põhjalikult uuritud, kuid ÜRT-st välja kasvanud teooriatele need ilma muutusteta ei laiene, mis motiveerib uute koordinaatsüsteemide välja töötamist.

Kuigi ÜRT on empiiriliste ennustuste suhtes äärmiselt edukas teooria, on sellel siiski nõrgad kohad, mistõttu on sajandi jooksul alates selle avaldamisest välja töötatud palju edasiarendusi ning alternatiivseid teooriaid, sealhulgas ka Einsteini enda poolt. Üks nendest on nn. teleparalleelne formalism, mille pakkus Einstein välja katsena ühendada gravitatsioon ning elektromagnetism. See katse luhtus, kuid mõned aastakümned hiljem taaslustati teleparalleelsuse idee alternatiivina ÜRT-le. Sellest alates on teleparalleelseid teooriaid laialdaselt uuritud. Nagu ka

teised ÜRT alternatiivid, on üks tähtis uurimissuund ÜRT empiiriliste ennustuste jäljendamine ning ületamine. Sellel eesmärgil on palju erinevaid teleparalleelseid teooriaid välja arendatud ning üheks potentsiaalseks ÜRT-i asendavaks teooriate klassiks on osutunud uus üldrelatiivsusteooria (UÜRT), mis töötati välja 1970ndate lõpus [4]. Kuna UÜRT on seega üpris vana, on mitmeid selle omadusi juba uuritud, näiteks gravitatsioonilaineid [5, 6], post-Newtoni piiri [7], potentsiaalseid ebastabiilsusi [8] ning väljateoreetilist lähenemist [9].

Selle töö eesmärk on kasutada tuntud koordinaatsüsteeme ÜRT-st, et töötada välja uusi lahendeid ühe UÜRT erijuhu, nimega 1-parameetri UÜRT (1PUÜRT), jaoks, mis jagavad oma aluseks olevate koordinaatsüsteemide peamisi omadusi, nt. horisondi koordinaatsingulaarsuse puudumine. Samuti saame neid võrrelda olemasoleva sama teooria lahendiga, mis on analoog Schwarzschildi lahendile. Töö esimeses osas tutvustame hiljem käsitletavate füüsikaliste ning matemaatiliste objektide olemusi ning nende käesoleva uurimisteema kontekstis tähtsamaid omadusi. Samuti toome sisse töös kasutatavate koordinaatsüsteemide ÜRT erijuhud. Teises osas arvutame nende koordinaatsüsteemide eeskujul välja mõned erinevad 1PUÜRT lahendid, mis saavad musti auke kirjeldada. Kolmandas osas uurime neid lahendeid lähemalt, fookusega vastavate aegruumide tetraadide ning horisontide omadustel.

Sõnavara

Järgnev sõnavara põhineb peamiselt allikatel [10] ja [11].

Koordinaadid ning ühikud selles töös lähtuvad esialgu sellest, et kõik käsitletavad aegruumid on sfääriliselt sümmeetrilised. Kasutame sama sümmeetriaga koordinaate, mistõttu saame kõikides koordinaatsüsteemides kasutada samu nurgakoordinaate: polaarnurk ϑ ning asimuutalnurk φ . Aja- ning radiaalkoordinaadid muutuvad vastavalt kasutatava koordinaatsüsteemi eripärale. Samuti kasutame geomeetrilisi ühikuid, kus valguse kiiruse vaakumis ning Newtoni gravitatsioonikonstandi väärtused on (ühikuta) 1, ehk $c = G = 1$. Selle valikuga on arvutused oluliselt lihtsamad ning tulemusi saab alati dimensionaalse analüüsi abil SI ühikutesse tagasi teisendada. Viimaks on gravitatsioonifüüsikas võimalik valida, kas ajasarnase vektori pikkus on negatiivne ja ruumisarnase oma positiivne või vastupidi, kusjuures valikud on füüsikaliselt ekvivalentsed. Edaspidi määrame ajasarnase vektori pikkuse negatiivseks, mis vastab meetrika signatuurile $(-, +, +, +)$.

Einsteini summeerimiskokkulepe on tensorvõrrandite kirjutamisviis, mille raames summeerimisindeksitele vastavad summeerimismärgid jäetakse kirjutamata. Selle asemel on „paaris,“ ehk kaks sama tähega indeksi, üks üleval e. kovariantne, teine all e. kontravariantne, loetud summeeritavaks, ning „paaritud,“ ehk kõik teised indeksid, on vabad. Nt. kirjutatakse Cartesiusse koordinaatides kahe vektori skalaarkorrutis järgmiselt:

$$a \cdot b = \sum_i a_i b^i \equiv a_i b^i, \quad (1)$$

kus a_i ja b^i on (kaas)vektorite komponendid. Selles näites on i summeerimisindeks ning vabasid indekseid ei ole. Selles töös eristame ka koordinaatindekseid, mis tähistavad aegruumi koordinaate ja milleks kasutame kreeka tähti, ning Lorentzi indekseid, milleks kasutame ladina tähti.

Tetraad on n -dimensioonilisel muutkonnal asuv n vektorvälja kogumik, mis igas muutkonna punktis määrab sealse puutujaruumi vektoritele baasi. Tetraadide abil on seega võimalik üldisel

viisil erinevaid puutujaruumi baase kujutada. Füüsikaliselt mängib tetraad teleparalleelsetes teooriates gravitatsioonivälja geomeetrilise kirjelduse rolli, nagu meetrika ÜRT-s. Selles töös kasutame kaasvektori kujul tetraade, mille üldine kuju on $\theta^a = \theta^a{}_{\mu} dx^{\mu}$.

Meetrika $g_{\mu\nu}$ on teist järku sümmeetriline tensor, mis kirjeldab aegruumi geomeetriat. Üldiselt on meetrika komponendid koordinaatide funktsioonid. Teleparalleelsetes teooriates moodustatakse suvaline meetrika Minkowski meetrika põhjal vastava tetraadi valikuga (kusjuures see valik ei pruugi olla unikaalne). Soovitav meetrika arvutatakse järgmiselt:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} \theta^a{}_{\mu} \theta^b{}_{\nu}, \quad (2)$$

kus Minkowski meetrika on selles töös kujuga $\eta_{ab} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Sageli on kasulik esitada meetrika ka joonelemendi kujul:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = \eta_{ab} \theta^a \theta^b, \quad (3)$$

Selles töös käsitleme meetrikat joonelemendina või maatrikskujul komponentidena ning jätame baasivektorid kirjutamata. Defineerime ka pöördmeetrika ning meetrika determinandi:

$$g^{\mu\nu} \equiv (g_{\mu\nu})^{-1}, \quad g \equiv \det(g_{\mu\nu}). \quad (4)$$

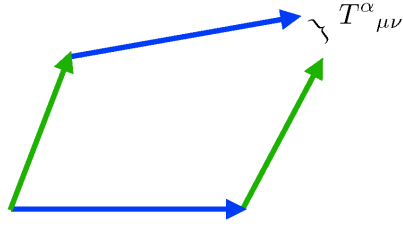
Viimaks on meetrika tähtis indekseid tõstmisel ja langetamisel teistes objektides:

$$A^{\mu} = g^{\mu\nu} A_{\nu}, \quad A_{\mu} = g_{\mu\nu} A^{\nu}. \quad (5)$$

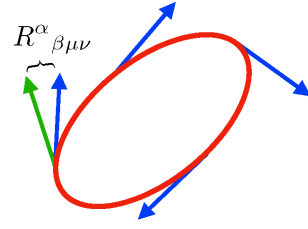
Vääne $T^a{}_{\mu\nu}$ on teleparalleelsetes teooriates, nagu UÜRT, gravitatsioonivälja tugevust kirjeldav matemaatiline objekt. Geomeetriselt mõõdab see, kui palju jääb kahe vektori üksteist mööda transportimisel tekkiv rööpkülik avatuks (vt. joonis 1). Üldiselt koosneb vääne kahest osast:

$$T^a{}_{\mu\nu} = \partial_{\mu} \theta^a{}_{\nu} - \partial_{\nu} \theta^a{}_{\mu} + \omega^a{}_{b\mu} \theta^b{}_{\nu} - \omega^a{}_{b\nu} \theta^b{}_{\mu}, \quad (6)$$

kus $\partial_{\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$ tähistab siin ja edaspidi osatuletist koordinaadi x^{μ} suhtes ning $\omega^a{}_{b\mu}$ on nn. spinn-seostus, mis hoiab väände Lorentzi teisenduste all invariantseks. Konkreetse spinn-seostuse valik on teleparalleelsete teooriate kalibratsiooni valik ning selles töös valime nn. Weitzenböcki kalibratsiooni, kus $\omega^a{}_{b\mu} = 0$.



The non-closure of parallelograms formed when two vectors are transported along each other is given by the torsion: Teleparallel Equivalent of General Relativity.



The rotation of a vector transported along a closed curve is given by the curvature: General Relativity.

Joonis 1: Väände ning kõveruse geomeetiline tähendus. Põhineb joonisel allikast [12].

Seostuse kordajad $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$ on funktsioonid, mis määravad, kuidas ortonormaalne baas muutub punktist punkti muutkonnal. Seostus määrab üldiselt aegruumi kõveruse, väände ning mittemeetrilisuse. Kus selles töös on seostuse kordajad otseselt välja toodud, siis peame silmas Levi-Civita seostuse kordajaid (nn. Christoffeli sümboleid), mis on üheselt defineeritud kui

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\rho\alpha} (\partial_{\nu}g_{\alpha\mu} + \partial_{\mu}g_{\alpha\nu} - \partial_{\alpha}g_{\mu\nu}). \quad (7)$$

Rõhutame, et sellel seostusel ei ole väänat ega mittemeetrilisust. Töös üldiselt käsitletaval seostusel on aga vääne, ehk see ei ole Levi-Civita seostus.

Kovariantne tuletis (lühidalt kov. tuletis) ∇_{μ} , kus indeks μ tähistab koordinaati x^{μ} , mille suhtes tuletis võetakse, on osatuletise üldistus, mis võtab arvesse aegruumi geometriat tensorite muutumisel. Üldise tensorvälja A , millel on p kontravariantset ja q kovariantset indeksit, on:

$$\nabla_{\mu} A \underbrace{\kappa\lambda\dots}_{p \text{ indeksit}} \underbrace{\alpha\beta\dots}_{q \text{ indeksit}} = \partial_{\mu} A^{\kappa\lambda\dots}_{\alpha\beta\dots} + \underbrace{\Gamma^{\kappa}_{\sigma\mu} A^{\sigma\lambda\dots}_{\alpha\beta\dots} + \Gamma^{\lambda}_{\sigma\mu} A^{\kappa\sigma\dots}_{\alpha\beta\dots} + \dots}_{p \text{ liiget}} - \underbrace{\Gamma^{\sigma}_{\alpha\mu} A^{\kappa\lambda\dots}_{\sigma\beta\dots} - \Gamma^{\sigma}_{\beta\mu} A^{\kappa\lambda\dots}_{\alpha\sigma\dots} - \dots}_{q \text{ liiget}} \quad (8)$$

Selles töös kasutame Levi-Civita seostusega konstrueeritud kov. tuletist, mistõttu on vastav operaator vaid meetrika komponentidest sõltuv. Paneme ka tähele, et skalaari puhul on kov. ja osatuletis võrdsed, e. $\nabla_{\mu}\lambda = \partial_{\mu}\lambda$.

Lie tuletis $\mathcal{L}_X A$ on operaator, mis mõõdab, kuidas tensorväli A muutub vektorvälja $X = X^\rho \partial_\rho$ suunas. Üldise tensorvälja Lie tuletise saab kirja panna kujul

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X A)^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_r} &= X^\rho \partial_\rho A^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_r} \\ &\quad - \partial_\rho X^{\mu_1} A^{\rho \mu_2 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_r} - \dots - \partial_\rho X^{\mu_1} A^{\mu_1 \dots \mu_{r-1} \rho}_{\nu_1 \dots \nu_r} \\ &\quad + \partial_{\nu_1} X^\rho A^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\rho \nu_2 \dots \nu_r} + \dots + \partial_{\nu_s} X^\rho A^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_{s-1} \rho}. \end{aligned} \quad (9)$$

Killingi vektor on vektorväli, mille suhtes on meetrika Lie tuletis 0, ehk kui

$$\mathcal{L}_X g_{\mu\nu} = \nabla_\mu X_\nu + \nabla_\nu X_\mu = 0, \quad (10)$$

siis X on Killingi vektor. Killingi vektorid määravad liikumiskonstante geodeetilistel trajektoridel, nt. ÜRT Schwarzschildi lahendis on aja vektorväli ∂_t Killingi vektor, millega seotud liikumiskonstant on energia.

Lamberti W funktsioon $\mathcal{W}(z)$, kus z on kompleksarv, on üldiselt kompleksväärtuseline funktsioon, mis on defineeritud kui $f(W) = We^W$ pöördfunktsioon [13]. *Wolfram Mathematica* süntaksis kirjutatakse seda funktsiooniga *ProductLog[z]*.

Levi-Civita sümbol $\varepsilon_{a_1 a_2 \dots a_n}$ on matemaatiline objekt, mille väärtuse n -dimensioonilises vektorruumis määrab naturaalarvude $1, 2, \dots, n$ permutatsiooni märk. See tähendab, et Levi-Civita sümboli võib defineerida järgmiselt:

$$\varepsilon_{a_1 a_2 a_3 \dots a_n} = \begin{cases} +1 & \text{kui } (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) \text{ on } (1, 2, 3, \dots, n) \text{ paarispermutatsioon,} \\ -1 & \text{kui } (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) \text{ on } (1, 2, 3, \dots, n) \text{ paaritu permutatsioon,} \\ 0 & \text{muudel juhtudel.} \end{cases} \quad (11)$$

Et saada sellest kovariantne tensor, tuleb Levi-Civita sümbol korrutada ruutjuurega meetrika determinandist. Toome välja näite neljas dimensioonis:

$$\mathcal{E}_{\mu\nu\sigma\rho} = \sqrt{|g|} \varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho}. \quad (12)$$

1 Teoreetiline ülevaade

Selles peatükis anname ülevaate töös käsitletavatest matemaatilistest ning füüsikalistest objektidest. Alapeatükis 1.1 kirjeldame musta auku ning nende peamisi füüsikalisi/matemaatilisi omadusi. Alapeatükis 1.2 tutvustame lähemalt 1PUÜRT-i ning alapeatükis 1.3 peatükis 2 kasutatavaid koordinaatsüsteeme: Kruskal-Szekeres, Eddington-Finkelstein ning Gullstrand-Painlevé koordinaadid. Viimaks tutvustame alapeatükis 1.4 allikas [14] leitud 1PUÜRT Schwarzschildi lahendi analoogi, mida kasutame peatükis 2 koordinaatteisenduste arvutamiseks.

1.1 Mustad augud ning horisondid

Mustad augud on taevakehad, mis koosnevad aegruumi singulaarsusest ning seda ümbritsevast horisondist, kusjuures horisondist sissepoole langenud keha või kiirgus, sealhulgas valgus, ei saa sealt enam väljuda. Seni avastatud mustad augud on äärmiselt suurte massidega, mis on koondatud singulaarsusesse. Mustade aukude suurtest massidest tuleneb ka neile iseloomulik tugev gravitatsiooniväli. Üldrelatiivsusteoorias kirjeldab kõige lihtsamat e. ilma elektrilaengu ega impulsimomendita musta auku Schwarzschildi meetrika, mis on tavalistes sfäärilistes (edaspidi Schwarzschildi) koordinaatides $(t, r, \vartheta, \varphi)$ kujul:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2. \quad (1.1)$$

Sellest meetrikast näeme, et ajakoordinaadi osa on singulaarne, kui $r = 0$, ning radiaalkoordinaadi osa on singulaarne, kui $r = 2M$. Esimene vastab musta augu keskel olevale „tõelisele“ singulaarsusele, kuid teine vastab horisondile. Horisondi puhul on tegemist koordinaatsingulaarsusega, mis tähendab, et selle saab sobiva koordinaatteisendusega eemaldada. Muuhulgas saab seetõttu musta auku sisse langev keha horisondi ilma probleemideta ületada, kuid väline vaatleja aja dilatatsiooni tõttu seda kunagi ei näe.

Gravitatsioonifüüsika kontekstis hõlmab sõna „horisont“ mitut erinevate definitsioonidega mõistet (täpsemalt hüperpinda), mis ei pruugi üldse samas aegruumi piirkonnas asuda. Keskendume vaid nendele, mis puudutavad musti auke, kuigi on olemas ka nt. kosmoloogilised horisondid, millel on eraldi definitsioonid [15]. Mustade aukude puhul on mõned sagedasemad horisontide tüübid, mida käsitleme selles töös:

- Killingi horisont, mis on defineeritud kui hüperpind, millel mingi Killingi vektori, defineeritud võrrandiga (10), pikkus on 0 [10].
- Cauchy horisont, mis eraldab suletud aja- ning ruumisarnaseid geodeetilisi jooni. See tähendab, et Cauchy horisondi „taga“ asuvaid sündmusi ei ole võimalik ennustada [16].
- Näiline horisont (*apparent horizon*), mis on defineeritud kui musta augu kõige välimine kinnine pind (*trapped surface*) ning on ühtlasi see piir, millest sissepoole langenud valgus enam mustast august välja ei pääse [10]. Kinnine pind on omakorda hüperpind, mille sees on geodeetide hajuvusskalaar (*expansion scalar*), mis kirjeldab geodeetiliste joonte hajumise ulatust ja on defineeritud kui $\Theta = \nabla_\mu k^\mu$, kus k^μ on valguskiirte puutujavektor, negatiivne. Seega on näiline horisont hüperpind, kus hajuvusskalaar on 0 ning mille sees on see negatiivne [10].
- Absoluutne horisont, mis on defineeritud kui tuleviku valgussarnase lõpmatuse mineviku valguskoonus, ehk teisisõnu see hüperpind, millest seespool asuvad valguskiired ei saa liikuda lõpmatult kaugemale (mujale Universumisse). Üldiselt mõeldakse „sündmuste horisondi“ all just seda horisonti. Samuti on tähtis, et aegruumi lõpmatust ja seega seda horisonti ennast on võimalik defineerida vaid asümptootiliselt tasases aegruumis [17].

Nt. on elektrilaenguga mustadel aukudel ÜRT-s (nn. Reissner-Nordströmi mustad augud) kaks erinevat horisonti: välimine sündmuste (absoluutne) horisont ja sisemine Cauchy horisont [18].

1.2 Uus üldrelatiivsusteooria (UÜRT)

Uus üldrelatiivsusteooria (UÜRT) töötati välja üldistusena üldrelatiivsusteooria (ÜRT) teleparalleelsele ekvivalendile [4], kus gravitatsiooni vahendajaks on aegruumi kõveruse asemel selle vääne, olles samas ÜRT-ga (ääreliikme täpsusega) ekvivalentne [11]. Teooria lagranžiaani tihedus on:

$$L_{TEGR} = -T = -\frac{3}{2}T_{axi} - \frac{2}{3}T_{ten} + \frac{2}{3}T_{vec}, \quad (1.2)$$

mis koosneb nn. vektor-, telgvektor, ja tensorväände skalaaridest T_{vec} , T_{axi} ning T_{ten} , mille definitsioonid toome välja järgmises lõigus. UÜRT on aga ÜRT teleparalleelse ekvivalendi üldistus, kus arvulised kordajad skalaaride ees on suvalised:

$$L_{NGR} = c_{axi}T_{axi} + c_{ten}T_{ten} + c_{vec}T_{vec}. \quad (1.3)$$

Nagu mainitud sissejuhatuses, on seda teooriat põhjalikult uuritud. Üks nende uuringute tulemustest on, et kummituste vältimiseks peab kehtima $c_{ten} = -c_{vec}$ [19]. Sellest saab järeldada, et UÜRT-i võib ümber parametrizeerida kujul

$$c_{ten} = -c_{vec} = \frac{2}{3}, \quad c_{axi} = \frac{3}{2} + \epsilon, \quad (1.4)$$

kus näeme, et teooriat iseloomustab parameeter ϵ ning ÜRT piirjuhu annab $\epsilon \rightarrow 0$. Sellest konstruktsioonist tuleb ka selles töös kasutatava teooria nimi „1-parameetri UÜRT“ (1PUÜRT).

1.2.1 Väljavõrrandid

Kuna 1PUÜRT-s on gravitatsiooni vahendajaks vääne, siis on vaja konstrueerida seda väljendav tensor. Kasutame Weitzenböcki kalibratsiooni ning ahendame välja Lorentzi indeksi:

$$T^\rho{}_{\mu\nu} = \theta_a{}^\rho (\partial_\mu \theta^a{}_\nu - \partial_\nu \theta^a{}_\mu). \quad (1.5)$$

Defineerime nüüd vektor-, telgvektor-, ja tensorväändeid:

$$v_\mu = T^\nu{}_{\nu\mu}, \quad a_\mu = \frac{1}{6} \mathcal{E}_{\mu\nu\sigma\rho} T^{\nu\sigma\rho}, \quad t_{\sigma\mu\nu} = \frac{1}{2} (T_{\sigma\mu\nu} + T_{\mu\sigma\nu}) + \frac{1}{6} (g_{\nu\sigma} v_\mu + g_{\nu\mu} v_\sigma) - \frac{1}{3} g_{\sigma\mu} v_\nu, \quad (1.6)$$

Kasutades äsja arvutatud väändeobjekte ning väändeskalaaride definitsioone:

$$T_{axi} = a_\mu a^\mu, \quad T_{vec} = v_\mu v^\mu, \quad T_{ten} = t_{\sigma\mu\nu} t^{\sigma\mu\nu}, \quad (1.7)$$

saame koostada 1PUÜRT lagranžiaani tiheduse:

$$L_{1PNGR} = - \left(\frac{3}{2} + \epsilon \right) T_{axi} + \frac{2}{3} (T_{vec} - T_{ten}) = - \left(\frac{3}{2} + \epsilon \right) a_\mu a^\mu + \frac{2}{3} (v_\mu v^\mu - t_{\sigma\mu\nu} t^{\sigma\mu\nu}), \quad (1.8)$$

ning teooria mõjuintegraali:

$$S_{1PNGR}[\theta^a{}_\mu] = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \det(\theta^a{}_\mu) \left[- \left(\frac{3}{2} + \epsilon \right) a_\mu a^\mu + \frac{2}{3} (v_\mu v^\mu - t_{\sigma\mu\nu} t^{\sigma\mu\nu}) + L_m \right], \quad (1.9)$$

kus $\kappa^2 = \frac{8\pi G}{c^4} = 8\pi$ ning L_m on aine lagranžiaani tihedus. Vastavad väljavõrrandid vaakumis ($L_m = 0$) on: [14]

$$E_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} + \epsilon \left(\frac{1}{2} a^\rho a_{(\rho} g_{\mu\nu)} - \frac{4}{9} \mathcal{E}_{\nu\alpha\beta\gamma} a^\alpha t_\mu{}^{\beta\gamma} - \frac{2}{9} \mathcal{E}_{\mu\nu\rho\sigma} a^\rho v^\sigma - \frac{1}{3} \mathcal{E}_{\mu\nu\rho\sigma} \nabla^\rho a^\sigma \right) = 0, \quad (1.10)$$

kus $R_{\mu\nu}$ ning R on vastavalt Ricci tensor ja skalaar, mis on defineeritud Riemanni tensori ahendustena, mis on omakorda defineeritud Levi-Civita seostuse kordajate (7) kaudu:

$$R_{\mu\nu} = R^\rho{}_{\mu\rho\nu}, \quad R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R^\mu{}_\mu, \quad R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho{}_{\sigma\nu} - \partial_\nu \Gamma^\rho{}_{\sigma\mu} + \Gamma^\rho{}_{\lambda\mu} \Gamma^\lambda{}_{\sigma\nu} - \Gamma^\rho{}_{\lambda\nu} \Gamma^\lambda{}_{\sigma\mu}. \quad (1.11)$$

1.3 Koordinaatsüsteemid

Selles töös käsitleme kolme koordinaatsüsteemi: Kruskal-Szekeres (KS), Eddington-Finkelstein (EF) ning Gullstrand-Painlevé (GS) koordinaadid. Need koordinaadid on loodud ÜRT Schwarzschildi lahendi jaoks ning seega ei ole võimalik neid muutmata kujul 1PUÜRT-s rakendada. Selle asemel töötame peatükis 2 välja neile „sarnased“, ehk samade omadustega, kuid 1PUÜRT-ga kokku sobivad, koordinaadid, kuid siin toome võrdluseks välja originaalsed ÜRT versioonid:

- KS koordinaadid [20] $(T, R, \vartheta, \varphi)$ on defineeritud erinevalt sõltuvalt vastavalt sellest, kas asume sündmuse horisondi sees ($0 < r < 2M$) või sellest väljas ($r > 2M$):

$$T = \sqrt{1 - \frac{r}{2M}} e^{r/4M} \cosh\left(\frac{t}{4M}\right), \quad R = \sqrt{1 - \frac{r}{2M}} e^{r/4M} \sinh\left(\frac{t}{4M}\right), \quad (1.12a)$$

$$T = \sqrt{\frac{r}{2M} - 1} e^{r/4M} \sinh\left(\frac{t}{4M}\right), \quad R = \sqrt{\frac{r}{2M} - 1} e^{r/4M} \cosh\left(\frac{t}{4M}\right), \quad (1.12b)$$

kus M on aegruumi keskel olev mass. Need võrrandid saame ka ümber pöörata:

$$r = r(R^2 - T^2) = 2M \left[1 + \mathcal{W}\left(\frac{R^2 - T^2}{e}\right) \right], \quad t = t(T, R) = 2M \ln\left(\frac{R + T}{R - T}\right), \quad (1.13)$$

kusjuures paneme tähele, et kombinatsioon

$$R^2 - T^2 = \left(\frac{r}{2M} - 1\right) e^{r/2M} \quad (1.14)$$

on (pööratav) r funktsioon, ehk sõltuvust r -st saab väljendada sõltuvusena $R^2 - T^2$ -st. Selles koordinaatsüsteemis on Schwarzschildi meetrika

$$ds^2 = \frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} (-dT^2 + dR^2) + r^2 d\Omega^2, \quad (1.15)$$

kus siin ja edaspidi on $d\Omega^2 = d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2$ 2-sfääri meetrika.

- EF koordinaadid [10] $(T, r, \vartheta, \varphi)$ on samuti kahe erineva definitsiooniga, sõltuvalt sellest, kas vaatleme musta auku sisenevaid või sellest eemalduvaid osakesi:

$$T = t \pm \left(r + 2M \ln \left| \frac{r}{2M} - 1 \right| \right), \quad (1.16)$$

kus $+$ tähistab sisenevaid ja $-$ eemalduvaid koordinaate. Schwarzschildi meetrika on nendes koordinaatides:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dT^2 \pm 2dTdr + r^2 d\Omega^2, \quad (1.17)$$

kus \pm tähendus on sama kui koordinaatide definitsioonis.

- GP koordinaadid [10] $(T, r, \vartheta, \varphi)$ on sarnased EF omadele, eristudes T kuju poolest:

$$T = t \pm 2M \left[2\sqrt{\frac{r}{2M}} + \ln \left(\pm \frac{1 - \sqrt{r/2M}}{1 + \sqrt{r/2M}} \right) \right], \quad (1.18)$$

kus esimese \pm tähendus on EF koordinaatidega võrreldes vastupidine, ehk $+$ tähistab väljuvat ja $-$ sisenevat lahendit. Logaritmi sees asuv \pm on positiivne, kui $r < 2M$ ja negatiivne, kui $r > 2M$. Schwarzschildi meetrika on nendes koordinaatides:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dT^2 \pm 2\sqrt{\frac{2M}{r}} dTdr + dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (1.19)$$

kus \pm tähendus on sama kui definitsiooni (1.18) esimesel \pm -l.

Näeme, et EF ja GP koordinaadid teisendavad vaid ajakoordinaati ning katavad kogu aegruumi

erinevalt KS koordinaatidest, mis teisendavad nii aja- kui radiaalkoordinaati ning vajavad kahte paari koordinaate, et kogu aegruumi katta. See-eest on meetrika KS koordinaatides diagonaalne, kuid EF ja GP koordinaatides mitte.

1.4 1PUÜRT Schwarzschildi lahend

Toome hilisema võrdluse eesmärgil välja ka 1PUÜRT analoogi ÜRT Schwarzschildi lahendile Schwarzschildi koordinaatides, mis leiti allikas [14]. Selles allikas uuriti kolme lahendit, mis erinesid ühe tetraadifunktsiooni poolest. Valime neist teise, mis selles töös vastab tetraadi-funktsiooni valikule $\beta(t, r) = b = \text{const.}$, $\sin b \neq 0$. Sellel juhul on tetraadil järgmine kuju:

$$\theta^0 = 2\sqrt{h} \cos b \left(1 + \frac{\gamma_0 M^2}{r}\right) dt + \sqrt{\frac{h}{r-2M} \left[\frac{4h \cos^2 b (\gamma_0 M^2 + r)^2}{r-2M} - r \right]} dr, \quad (1.20a)$$

$$\begin{aligned} \theta^1 = & \sqrt{4h \cos^2 b \left(1 + \frac{\gamma_0 M^2}{r}\right)^2 + \frac{2M}{r} - 1} \sin \vartheta \cos \varphi dt + \frac{2h \cos b (\gamma_0 M^2 + r)}{r-2M} \sin \vartheta \cos \varphi dr \\ & + r (\cos b \cos \vartheta \cos \varphi - \sin b \sin \varphi) d\vartheta - r \sin \vartheta (\cos b \sin \vartheta + \sin b \cos \vartheta \cos \varphi) d\varphi, \end{aligned} \quad (1.20b)$$

$$\begin{aligned} \theta^2 = & \sqrt{4h \cos^2 b \left(1 + \frac{\gamma_0 M^2}{r}\right)^2 + \frac{2M}{r} - 1} \sin \vartheta \sin \varphi dt + \frac{2h \cos b (\gamma_0 M^2 + r)}{r-2M} \sin \vartheta \sin \varphi dr \\ & + r (\cos b \cos \vartheta \sin \varphi + \sin b \cos \varphi) d\vartheta + r \sin \vartheta (\cos b \cos \varphi - \sin b \cos \vartheta \sin \varphi) d\varphi, \end{aligned} \quad (1.20c)$$

$$\begin{aligned} \theta^3 = & \sqrt{4h \cos^2 b \left(1 + \frac{\gamma_0 M^2}{r}\right)^2 + \frac{2M}{r} - 1} \cos \vartheta dT + \frac{2h \cos b (\gamma_0 M^2 + r)}{r-2M} \cos \vartheta dr \\ & - r \cos b \sin \vartheta d\vartheta + r \sin b \sin^2 \vartheta d\varphi, \end{aligned} \quad (1.20d)$$

kus $\gamma_0 = \text{const.}$ ja $h \equiv \left(1 + \frac{8}{9}\epsilon \sin^2 b\right)^{-1}$. Vastav meetrika on kujul:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + h \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (1.21)$$

Sellest avaldisest näeme, et nagu ÜRT juhul, on ka selles lahendis horisont kohal $r = 2M$.

2 Lahendid

Selles osas kirjeldame erinevatel koordinaatidel põhinevaid 1PUÜRT lahendeid, mis arvutati programmi *Wolfram Mathematica* [21] abil. Alustame KS koordinaatidel põhineva lahendiga, siis liigume edasi EF ning GP koordinaatidel põhinevate lahendite juurde. Esiteks käsitleme iga lahend-tetraadi esialgset kuju, siis rakendame sellele Lie tuletist ja lahendame tulemuse põhjal väljavõrrandid. Viimaks leiame lahend-tetraadide koordinaatteisendused Schwarzschildi koordinaatidesse. Igal juhul lähtume üldisest staatilisest sfääriliselt sümmeetrilisest tetraadist [22], mis on Schwarzschildi koordinaatides $(t, r, \vartheta, \varphi)$ kujuga

$$\theta^0 = C_1(r)dt + C_2(r)dr, \quad (2.1a)$$

$$\begin{aligned} \theta^1 = & [C_3(r)dt + C_4(r)dr] \sin \vartheta \cos \varphi \\ & + [C_5(r) \cos \vartheta \cos \varphi - C_6(r) \sin \varphi] d\vartheta \\ & - [C_5(r) \sin \varphi + C_6(r) \cos \vartheta \cos \varphi] \sin \vartheta d\varphi, \end{aligned} \quad (2.1b)$$

$$\begin{aligned} \theta^2 = & [C_3(r)dt + C_4(r)dr] \sin \vartheta \sin \varphi \\ & + [C_5(r) \cos \vartheta \sin \varphi + C_6(r) \cos \varphi] d\vartheta \\ & + [C_5(r) \cos \varphi - C_6(r) \cos \vartheta \sin \varphi] \sin \vartheta d\varphi, \end{aligned} \quad (2.1c)$$

$$\theta^3 = [C_3(r)dt + C_4(r)dr] \cos \vartheta - C_5(r) \sin \vartheta d\vartheta + C_6(r) \sin^2 \vartheta d\varphi, \quad (2.1d)$$

kus funktsioonid $C_i(r)$, $i = 1, \dots, 6$ on (hetkel) suvalised radiaalkoordinaadi funktsioonid. Sellele tetraadile vastav joonelement (ühtlasi meetrika) on kujuga

$$ds^2 = (C_3^2 - C_1^2)dt^2 + 2(C_3C_4 - C_1C_2)dtdr + (C_4^2 - C_2^2)dr^2 + (C_5^2 + C_6^2)d\Omega^2. \quad (2.2)$$

2.1 KS koordinaadid

Selles alapeatükis leiame KS koordinaatidel põhineva lahendi. Koostame sobiva tetraadi, siis lahendame väljavõrrandid ja arvutame koordinaatteisenduse Schwarzschildi koordinaatidesse.

2.1.1 Esialgne tetraad

Väljavõrrandite lahendamise esimese sammuna kirjutame tetraadi (2.1) ümber hüpoteetilistes „KS-sarnastes“ koordinaatides $(T, R, \vartheta, \varphi)$, kusjuures paneme tähele, et nurgakoordinaadid ei ole muutunud. Uus tetraad tuleb kujul

$$\theta^0 = K_1(T, R)dT + K_2(T, R)dR, \quad (2.3a)$$

$$\begin{aligned} \theta^1 = & [K_3(T, R)dT + K_4(T, R)dR] \sin \vartheta \cos \varphi \\ & + [K_5(T, R) \cos \vartheta \cos \varphi - K_6(T, R) \sin \varphi] d\vartheta \\ & - [K_5(T, R) \sin \varphi + K_6(T, R) \cos \vartheta \cos \varphi] \sin \vartheta d\varphi, \end{aligned} \quad (2.3b)$$

$$\begin{aligned} \theta^2 = & [K_3(T, R)dT + K_4(T, R)dR] \sin \vartheta \sin \varphi \\ & + [K_5(T, R) \cos \vartheta \sin \varphi + K_6(T, R) \cos \varphi] d\vartheta \\ & + [K_5(T, R) \cos \varphi - K_6(T, R) \cos \vartheta \sin \varphi] \sin \vartheta d\varphi, \end{aligned} \quad (2.3c)$$

$$\theta^3 = [K_3(T, R)dT + K_4(T, R)dR] \cos \vartheta - K_5(T, R) \sin \vartheta d\vartheta + K_6(T, R) \sin^2 \vartheta d\varphi, \quad (2.3d)$$

kus paneme tähele, et praktiliselt on tetraadi kuju sama kui enne, kuid oleme sisse toonud uued funktsioonid $K_i(T, R)$, $i = 1, \dots, 6$.¹ Seega on ka selle tetraadi meetrika analoogne meetrikale (2.2). Teise sammuna valime funktsioonid K_i niimoodi, et saadud meetrika oleks kujul

$$ds^2 = F^2(T, R)(-dT^2 + dR^2) + r^2(T, R)d\Omega^2, \quad (2.4)$$

milleks sobiv valik on:

$$K_1(T, R) = F(T, R) \cosh \Gamma(T, R), \quad K_2(T, R) = F(T, R) \sinh \Gamma(T, R), \quad (2.5a)$$

$$K_3(T, R) = -K_2(T, R), \quad K_4(T, R) = -K_1(T, R), \quad (2.5b)$$

$$K_5(T, R) = r(T, R) \cos \beta(T, R), \quad K_6(T, R) = r(T, R) \sin \beta(T, R). \quad (2.5c)$$

¹Sama kehtib ka EF ja GP koordinaatide juhul.

Et nende funktsioonide kuju veel kitsendada, peame rakendama staatilisuse nõuet. Matemaatiliselt tähendab see, et tetraadi Lie tuletis aja suunas peab olema 0, ehk

$$\mathcal{L}_{\partial_t}\theta^i = 0, \quad i = 0, \dots, 3. \quad (2.6)$$

Lie tuletise arvutamiseks peame teadma, kuidas kirjutada ∂_t uutest koordinaatides. Eeldame, et „KS-sarnased“ koordinaadid on kujuga

$$T = f(r) \cosh\left(\frac{t}{c}\right), \quad R = f(r) \sinh\left(\frac{t}{c}\right), \quad r < 2M, \quad (2.7a)$$

$$T = g(r) \sinh\left(\frac{t}{c}\right), \quad R = g(r) \cosh\left(\frac{t}{c}\right), \quad r > 2M, \quad c = \text{const.}, \quad (2.7b)$$

nagu tavalistes KS koordinaatides. Nüüd saame teisendada aja vektorvälja:

$$\partial_t = \frac{\partial T}{\partial t} \partial_T + \frac{\partial R}{\partial t} \partial_R = \frac{1}{c} (R\partial_T + T\partial_R), \quad (2.8)$$

sõltumata sellest, kas $r < 2M$ või $r > 2M$. Kuna Lie tuletis on vektorvälja suhtes lineaarne, siis võime kõrvale jätta üldkordaja $1/c$ ning võtta $\partial_t = R\partial_T + T\partial_R$. Tetraadi kui kaasvektori Lie tuletise saame nüüd võrrandiga (9) kirjutada (komponent)kujul:

$$\mathcal{L}_{\partial_t}\theta^i{}_{\mu} = R\partial_T\theta^i{}_{\mu} + T\partial_R\theta^i{}_{\mu} + \theta^i{}_T\partial_{\mu}T + \theta^i{}_R\partial_{\mu}R. \quad (2.9)$$

Kirjutades tetraadi võrrandite (2.3) ning (2.5) abil lahti, saame 16 erinevat võrrandit (lisa B rida 21). Nendest saame tuvastada 3, mille samaaegsel kehtimisel on Lie tuletis 0:

$$T\partial_R F + R\partial_T F = 0, \quad T\partial_R \beta + R\partial_T \beta = 0, \quad T\partial_R \Gamma + R\partial_T \Gamma = -1. \quad (2.10)$$

Esimesed 2 võrrandit saab lahendada, kui võtame vastavalt $F(T, R) = F(R^2 - T^2)$ ning $\beta(T, R) = \beta(R^2 - T^2)$. Viimase võrrandi lahendiks saame:

$$\Gamma(T, R) = \gamma(R^2 - T^2) - \operatorname{arctanh}\left(\frac{T}{R}\right). \quad (2.11)$$

Et vältida probleeme horisondil, kus $T = R$ ja seega $\Gamma(T, R)$ on singulaarne, siis kirjutame tetraadis olevad $\cosh \Gamma$ ja $\sinh \Gamma$ ümber mugavamal kujul:

$$\cosh \Gamma(T, R) = \frac{R \cosh \gamma(R^2 - T^2) - T \sinh \gamma(R^2 - T^2)}{\sqrt{R^2 - T^2}}, \quad (2.12a)$$

$$\sinh \Gamma(T, R) = \frac{R \sinh \gamma(R^2 - T^2) - T \cosh \gamma(R^2 - T^2)}{\sqrt{R^2 - T^2}}. \quad (2.12b)$$

Kokkuvõttes saame nüüd funktsioonid K_i kujul:

$$K_1(T, R) = F(R^2 - T^2) \frac{R \cosh \gamma(R^2 - T^2) - T \sinh \gamma(R^2 - T^2)}{\sqrt{R^2 - T^2}}, \quad (2.13a)$$

$$K_2(T, R) = F(R^2 - T^2) \frac{R \sinh \gamma(R^2 - T^2) - T \cosh \gamma(R^2 - T^2)}{\sqrt{R^2 - T^2}}, \quad (2.13b)$$

$$K_3(T, R) = -K_2(T, R), \quad (2.13c)$$

$$K_4(T, R) = -K_1(T, R), \quad (2.13d)$$

$$K_5(T, R) = r(R^2 - T^2) \cos \beta(R^2 - T^2), \quad (2.13e)$$

$$K_6(T, R) = r(R^2 - T^2) \sin \beta(R^2 - T^2). \quad (2.13f)$$

Paneme tähele avaldist $R^2 - T^2$ nendes funktsioonides. Tavaliste KS koordinaatide puhul on see puhtalt radiaalkoordinaadi r funktsioon, vastavalt võrrandile (1.14). Eeldame ka „KS-sarnaste“ koordinaatide puhul sama, kusjuures peale väljavõrrandite lahendamist näeme, et see eeldus vastab tõele. Kuna see avaldis ilmub hiljem veel, siis kasutame edasipidi lühendina $a \equiv R^2 - T^2$.

2.1.2 Väljavõrrandid

Kuna teooria mitte-vaakumjuhul oleks väljavõrrandites nullist erinev energia-impulsi tensor, mis peab olema sümmeetriline [23], siis peab ka vaakumjuhul väljavõrrandite antisümmeetriline osa kaduma. See pole samaselt tõene kahe komponendi puhul:

$$E_{[TR]} \propto \beta'(a) \sqrt{a} \sin \beta(a) \sinh \gamma(a) = 0, \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} E_{[\vartheta\varphi]} \propto & 2r(a) \left\{ \sqrt{a} F'(a) \sin \beta(a) \cosh \gamma(a) + 2r'(a) \beta'(a) + r(a) [\beta''(a) + \beta'(a)] \right\} \\ & - \frac{F(a) \sin \beta(a) \{ 2r'(a) \cosh \gamma(a) + r(a) [2\gamma'(a) \sinh \gamma(a) + \cosh \gamma(a)] \}}{\sqrt{a}} \\ & - \frac{4r^2(a) F'(a) \beta'(a)}{F(a)} + F^2(a) \sin [2\beta(a)] = 0, \end{aligned} \quad (2.15)$$

kus ülakoma tähistab tuletist funktsiooni argumendi suhtes ning eeldasime, et $\epsilon \neq 0$. Esimese võrrandi saab lahendada, võttes kas $\beta'(a) = 0$ või $\sin \beta(a) = 0 \Rightarrow \beta(a) = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Kuna teine valik hõlmab ka esimest ($n\pi = \text{const.}$), siis valime $\beta(a) = b = \text{const.}$ Hiljem ka näeme, et ϵ ilmub sümmeetrilistes väljavõrrandites vaid avaldise $\epsilon \sin^2 b$ osana, ehk valik $\sin b = 0$ on samaväärne valikuga $\epsilon = 0$. Kuna nõudsime, et $\epsilon \neq 0$, siis peame seega ka nõudma, et $\sin b \neq 0$. Sellega saame võrrandit (2.15) lihtsustada ning $F(a)$ suhtes lahendada. Tulemuseks on:

$$F(a) = \frac{\sqrt{ar(a)} \cosh \gamma(a)}{c_1 - a \cos b}, \quad c_1 = \text{const.} \quad (2.16)$$

Nüüd saame käsitleda väljavõrrandite sümmeetrilist osa. Esiteks arvutame TT ning RR väljavõrrandite lineaarkombinatsioonid:

$$E_{TT} + E_{RR} \Rightarrow F(a)r''(a) = 2F'(a)r'(a), \quad (2.17a)$$

$$E_{TT} - E_{RR} \Rightarrow F^2(a) = 4h\{a[r'(a)]^2 + r(a)[r'(a) + ar''(a)]\}. \quad (2.17b)$$

Paneme tähele, et teise võrrandi saab $F(a)$ suhtes lahendada. Sobitades sellest saadud avaldise $F(a)$ jaoks kokku võrrandiga (2.16), saame avaldise $\gamma(a)$ jaoks:

$$\gamma(a) = \pm \operatorname{arccosh} \left\{ \frac{2\sqrt{h}(c_1 - a \cos b)}{r(a)} \sqrt{[r'(a)]^2 + r(a) \left[\frac{r'(a)}{a} + r''(a) \right]} \right\}. \quad (2.18)$$

Ülejäänud väljavõrrandites esineb $\gamma(a)$ vaid avaldises $\cosh \gamma(a)$, seega pole nende lahendamisel $\gamma(a)$ märgivalik tähtis. Tetraad sisaldab aga ka $\sinh \gamma(a)$ -ga liikmeid, mis ilmuvad ka väändes. Seda tuleb arvestada nt. häiritusarvutustes. Asendades $F(a)$ ja $\gamma(a)$ võrrandisse (2.17a), saame:

$$2[r'(a)]^3 + ar''(a)\{2[r'(a)]^2 - r(a)r''(a)\} + r(a)r'(a)[r''(a) + ar'''(a)] = 0. \quad (2.19)$$

Wolfram Mathematica pole võimeline seda võrrandit üldisel kujul lahendama. Võtame seega inspiratsiooni KS koordinaatidest, et pakkuda välja kuju $r(a)$ jaoks: $r(a) = d_1 + d_2 \mathcal{W}(d_3 a)$. Sel juhul on võrrand (2.19) ning ka ülejäänud väljavõrrandid lahendatud, kui $d_1 = d_2$ (lisa B read 76-80). Et parameetrid täpsemalt määrata, vaatame $F^2(a)$ väärtust piirjuhul $\epsilon \rightarrow 0$:

$$F^2(a) = \frac{4hd_1^3 d_3 e^{1-r(a)/d_1}}{r(a)} = \frac{36d_1^3 d_3 e^{1-r(a)/d_1}}{(9 + 8\epsilon \sin^2 b)r(a)} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \frac{4d_1^3 d_3 e^{1-r(a)/d_1}}{r(a)}. \quad (2.20)$$

Teame, et see peaks vastama ÜRT piirjuhule, kus KS koordinaatides on $F^2(a) = \frac{32M^3 e^{-r(a)/2M}}{r(a)}$.
Võrdlusest saame, et peab kehtima $d_1 = 2M$ ja $d_3 = 1/e$. Sellega saame $r(a)$ lõpliku kuju:

$$r(a) = 2M \left[1 + \mathcal{W} \left(\frac{a}{e} \right) \right]. \quad (2.21)$$

„KS-sarnane“ tetraad on nüüd täielikult määratud järgmiste funktsioonide ja parameetritega:

$$F(a) = \sqrt{\frac{32M^3 h}{r(a)}} e^{-r(a)/4M}, \quad (2.22a)$$

$$\gamma(a) = \pm \operatorname{arccosh} \left[\frac{4M \sqrt{h} (c_1 - a \cos b) \sqrt{1 - \frac{2M}{r(a)}}}{ar(a)} \right], \quad (2.22b)$$

$$r(a) = 2M \left[1 + \mathcal{W} \left(\frac{a}{e} \right) \right], \quad \beta(a) = b = \text{const.}, \quad (2.22c)$$

$$a \equiv R^2 - T^2, \quad h \equiv \left(1 + \frac{8}{9} \epsilon \sin^2 b \right)^{-1}, \quad c_1 = \text{const.}, \quad (2.22d)$$

kusjuures meetrikas $\gamma(a)$ otseselt ei ilmu. See tähendab, et $\gamma(a)$ mängib rolli vaid teooria lahendamisel ning selle lahendi ÜRT-st erinevates osades. Nt. ilmub $\gamma(a)$ väändes, mida tuleb häiritusarvutustes arvestada. Kirjutame tetraadi ka täies mahus välja:

$$\theta^0 = - [Tf_1(r) + Rf_2(r)] dT + [Rf_1(r) + Tf_2(r)] dR, \quad (2.23a)$$

$$\begin{aligned} \theta^1 = & - [Rf_1(r) + Tf_2(r)] \sin \vartheta \cos \varphi dT + [Tf_1(r) + Rf_2(r)] \sin \vartheta \cos \varphi dR \\ & + r (\cos b \cos \vartheta \cos \varphi - \sin b \sin \varphi) d\vartheta - r \sin \vartheta (\cos b \sin \vartheta + \sin b \cos \vartheta \cos \varphi) d\varphi, \end{aligned} \quad (2.23b)$$

$$\begin{aligned} \theta^2 = & - [Rf_1(r) + Tf_2(r)] \sin \vartheta \sin \varphi dT + [Tf_1(r) + Rf_2(r)] \sin \vartheta \sin \varphi dR \\ & + r (\cos b \cos \vartheta \sin \varphi + \sin b \cos \varphi) d\vartheta + r \sin \vartheta (\cos b \cos \varphi - \sin b \cos \vartheta \sin \varphi) d\varphi, \end{aligned} \quad (2.23c)$$

$$\begin{aligned} \theta^3 = & - [Rf_1(r) + Tf_2(r)] \cos \vartheta dT + [Tf_1(r) + Rf_2(r)] \cos \vartheta dR \\ & - r \cos b \sin \vartheta d\vartheta + r \sin b \sin^2 \vartheta d\varphi, \end{aligned} \quad (2.23d)$$

kus $r = r(a)$ ning defineerisime abifunktsioonid, millest esimene sisaldab ka $\gamma(a)$ märgivalikut:

$$f_1(r) \equiv \pm \frac{8e^{-r/2M} M^2 \sqrt{h}}{r^2} \times \sqrt{\frac{64e^{-r/M} M^4 h c_1^2}{(r-2M)^2} + 16M^2 h \cos b \left(\cos b - \frac{4e^{-r/2M} M c_1}{r-2M} \right) - \frac{r^3}{r-2M}}, \quad (2.24a)$$

$$f_2(r) \equiv \frac{32e^{-r/2M} M^3 h}{r^2} \left(\cos b - \frac{2e^{-r/2M} M c_1}{r-2M} \right). \quad (2.24b)$$

2.1.3 Koordinaatteisendus

Arvutame nüüd selle lahendi koordinaatteisenduse Schwarzschildi koordinaatidesse. Selleks koostame meetrika teisenemiseeskirja põhjal võrrandisüsteemi:

$$g_{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} g_{\mu\nu}, \quad (2.25)$$

kus ülakomaga koordinaadid olgu „KS-sarnased.“ Kirjutades nüüd osatuletised ning meetrikad võrrandite (1.15), (2.4) ning (2.22) abil lahti, saame kaks võrrandit:

$$\frac{32M^3 h e^{-r/M}}{r} \left(e^{r/2M} + \frac{T^2}{r/2M - 1} \right) = \left(1 - \frac{2M}{r} \right) [\partial_T t(T, R)]^2, \quad (2.26a)$$

$$\frac{32M^3 h e^{-r/M}}{r} \left(-e^{r/2M} + \frac{R^2}{r/2M - 1} \right) = \left(1 - \frac{2M}{r} \right) [\partial_R t(T, R)]^2. \quad (2.26b)$$

Lahendi leidmiseks pakume jälle tavaliste KS koordinaatide põhjal välja kuju $t(T, R)$ jaoks, mis olgu $t(T, R) = t_0 \ln \left(\frac{R+T}{R-T} \right)$. Sellega saame võrrandid (2.26) lihtsustada ning leiame, et nende lahendamiseks piisab valikust $t_0 = \pm 2M\sqrt{h}$. Valime siin +-märgi, et ajakoordinaat oleks alati positiivne. Nüüd on „KS-sarnased“ koordinaadid seotud Schwarzschildi koordinaatidega seoste

$$r(T, R) = 2M \left[1 + \mathcal{W} \left(\frac{R^2 - T^2}{e} \right) \right], \quad t(T, R) = 2M\sqrt{h} \ln \left(\frac{R+T}{R-T} \right) \quad (2.27)$$

kaudu. Näeme samuti, et need koordinaadid erinevad tavalistest KS koordinaatidest vaid t ümber skaleerimise võrra. Pöörates seosed ümber, saame:

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{1 - \frac{r}{2M}} e^{r/4M} \cosh\left(\frac{t}{4M\sqrt{h}}\right), \\ R &= \sqrt{1 - \frac{r}{2M}} e^{r/4M} \sinh\left(\frac{t}{4M\sqrt{h}}\right), \quad 0 < r < 2M \end{aligned} \quad (2.28a)$$

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{\frac{r}{2M} - 1} e^{r/4M} \sinh\left(\frac{t}{4M\sqrt{h}}\right), \\ R &= \sqrt{\frac{r}{2M} - 1} e^{r/4M} \cosh\left(\frac{t}{4M\sqrt{h}}\right), \quad r > 2M. \end{aligned} \quad (2.28b)$$

Paneme tähele, et piirjuhul $h \rightarrow 1$, millele vastab $\epsilon \rightarrow 0$, saame ootuspäraselt tavalised KS koordinaadid (1.13). Peame aga meeles, et tetraadis on rohkem vabadusastmeid kui meetrikas. Nimelt ilmub $\gamma(a)$ vaid tetraadi tasemel, mistõttu peame eraldi kontrollima, kas see teisendus sobib ka tetraadi jaoks. Tetraadil on üks koordinaatindeks, seega teiseneb see järgmiselt:

$$e^i{}_{\mu} = \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\mu}} e^{i\nu'}. \quad (2.29)$$

Kasutame äsja leitud koordinaatteisendust ning tetraadi (2.23). See viib tetraadi kujule:

$$\theta^0 = -\frac{e^{r/2M}(r-2M)f_2(r)}{8\sqrt{h}M^2} dt + \frac{e^{r/2M}rf_1(r)}{8M^2} dr, \quad (2.30a)$$

$$\begin{aligned} \theta^1 &= -\frac{e^{r/2M}(r-2M)f_1(r)}{8\sqrt{h}M^2} \sin\vartheta \cos\varphi dt + \frac{e^{r/2M}rf_2(r)}{8M^2} \sin\vartheta \cos\varphi dr \\ &\quad + r(\cos b \cos\vartheta \cos\varphi - \sin b \sin\varphi) d\vartheta - r \sin\vartheta (\cos b \sin\vartheta + \sin b \cos\vartheta \cos\varphi) d\varphi, \end{aligned} \quad (2.30b)$$

$$\begin{aligned} \theta^2 &= -\frac{e^{r/2M}(r-2M)f_1(r)}{8\sqrt{h}M^2} \sin\vartheta \sin\varphi dt + \frac{e^{r/2M}rf_2(r)}{8M^2} \sin\vartheta \sin\varphi dr \\ &\quad + r(\cos b \cos\vartheta \sin\varphi + \sin b \cos\varphi) d\vartheta + r \sin\vartheta (\cos b \cos\varphi - \sin b \cos\vartheta \sin\varphi) d\varphi, \end{aligned} \quad (2.30c)$$

$$\theta^3 = -\frac{e^{r/2M}(r-2M)f_1(r)}{8\sqrt{h}M^2} \cos\vartheta dt + \frac{e^{r/2M}rf_2(r)}{8M^2} \cos\vartheta dr - r \cos b \sin\vartheta d\vartheta + r \sin b \sin^2\vartheta d\varphi, \quad (2.30d)$$

kus kasutasime samu abifunktsioone $f_1(r)$ ja $f_2(r)$. Paneme tähele, et seda tetraadi pole aga võimalik tetraadiga (1.20) kokku viia, st. ei eksisteeri sellist c_1 väärtust, mis sobiks kokku

tetraadiga (1.20), ning vastupidi; tetraadi (1.20) koordinaatteisendusel (kasutades võrrandeid (2.27)) saadud tetraad ei väljenda sama lahendit kui ülal esitatud tetraad. Samuti pole võimalik neid lahendeid globaalse Lorentzi teisendusega siduda, kuna lahendite vaheline erinevus ei väljendu konstandina. Seega tuleb järeldada, et selles peatükis leitud tetraad (2.23) on uus ja eraldiseisev staatiline ja sfääriliselt sümmeetriline lahend 1PUÜRT väljavõrranditele.

2.2 EF koordinaadid

Liigume edasi EF koordinaatidel põhinevale lahendile. Tegutseme samamoodi kui eelnevas lõigus, ehk alustame tetraadist, siis lahendame väljavõrrandid ja leiame koordinaatteisenduse.

2.2.1 Esialgne tetraad

Võrreldes meetrikaid (1.17) ning (2.2) saame, et sobiv funktsioonide valik EF koordinaatidele analoogselt meetrika saamiseks (peale tetraadi teisendamist „EF-sarnastesse“ koordinaatidesse $(T, r, \vartheta, \varphi)$ analoogselt „KS-sarnastele“ koordinaatidele) on:

$$K_1(T, r) = F(T, r) \cosh \gamma(T, r), \quad K_2(T, r) = \mp F(T, r) \sinh \alpha(T, r), \quad (2.31a)$$

$$K_3(T, r) = F(T, r) \sinh \gamma(T, r), \quad K_4(T, r) = K_2(T, r), \quad (2.31b)$$

$$K_5(T, r) = r \cos \beta(T, r), \quad K_6(T, r) = r \sin \beta(T, r), \quad (2.31c)$$

kus märgivalik määrab, kas tegemist on siseneva (–) või väljuva (+) lahendiga. Samuti paneme täheme, et selle valiku saab võtta $\alpha(T, r)$ definitsiooni sisse, kuid jätame selle siinkohal eraldi. Meetrika võtab nüüd kuju

$$ds^2 = -F^2 dT^2 \pm 2(F^2 e^{-\gamma} \sinh \alpha) dT dr + r^2 d\Omega^2, \quad (2.32)$$

kus märgivaliku tähendus on nüüd ümber pööratud. Lie tuletise arvutamine toimub samamoodi kui „KS-sarnaste“ koordinaatide puhul, kuid nüüd on (konstandi täpsusega) $\partial_t = \partial_T$, kuna eeldame, et „EF-sarnane“ ajakoordinaat on kujuga

$$T = Ct + f(r), \quad C = \text{const.}, \quad (2.33)$$

nagu tavalised EF koordinaadid. Seega $\mathcal{L}_{\partial_t} \theta^i{}_\mu = 0$, kui nõuame, et:

$$F(T, r) = F(r), \quad \alpha(T, r) = \alpha(r), \quad \gamma(T, r) = \gamma(r), \quad \beta(T, r) = \beta(r). \quad (2.34)$$

2.2.2 Väljavõrrandid

Alustame väljuvast lahendist. Esimene antisümm. väljavõrrand on:

$$E_{Tr} \propto F(r)\beta'(r) \sinh \gamma(r) \sin \beta(r) = 0. \quad (2.35)$$

Näeme, et selle lahendamiseks sobib jälle valik $\beta(r) = b = \text{const}$. Asendame selle teise antisümm. väljavõrrandisse:

$$E_{\partial\varphi} \propto e^{\gamma(r)} \text{csch } \alpha(r) \{ [F(r) - rF'(r)] \cosh \gamma(r) + rF(r)\alpha'(r) \coth \alpha(r) \sinh \gamma(r) \} \\ - 2 \cos(b) F^2(r) = 0. \quad (2.36)$$

Jätame hetkel selle võrrandi lahendamise kõrvale ja liigume edasi sümm. väljavõrrandite juurde. Neist esimene tuleb kujul:

$$F(r)^3 + h e^{2\gamma(r)} \text{csch}^2 \alpha(r) \{ 2rF'(r) + F(r) [2r\alpha'(r) \coth \alpha(r) - 2r\gamma'(r) - 1] \} = 0 \quad (2.37)$$

mille saame lahendada $F(r)$ jaoks, et saada:

$$F(r) = \pm e^{\gamma(r)} \text{csch } \alpha(r) \sqrt{\frac{h}{1 + hc_1/r}}, \quad c_1 = \text{const}. \quad (2.38)$$

Teise sümm. väljavõrrandi saame nüüd sõltumatult $F(r)$ märgivalikust viia kujule

$$\left(r + \frac{r^2}{hc_1} \right)^{-1} - \alpha'(r) \coth \alpha(r) + \gamma'(r) = 0, \quad (2.39)$$

mille lahendame $\alpha(r)$ jaoks², et saada:

$$\alpha(r) = \pm \text{arcsinh} \left[\frac{e^{c_2 + \gamma(r)}}{1 + hc_1/r} \right], \quad c_2 = \text{const.} \quad (2.40)$$

²Saaksime selle lahendada ka $\gamma(r)$ jaoks, kuid järgneva analüüsi tulemused sellest ei muutu.

ning kolmas süm. väljavõrrand on nende funktsioonidega automaatselt lahendatud. Tuletame meelde, et $\alpha(r)$ märgivalik määrab selle, kas lahend on sisenev või väljuv. Et kumbki sobib väljavõrrandite lahendiks, siis on nii sisenev kui väljuv juht lubatud. Jääb üle võrrand (2.36). Eelnevad funktsioonid sisestades saame selle viia kujule:

$$-2\sqrt{hr(r+hc_1)} \cos b + \left(r + \frac{3}{2}hc_1\right) \cosh \gamma(r) + hc_1 \sinh \gamma(r) + r(r+hc_1)\gamma'(r) \sinh \gamma(r) = 0. \quad (2.41)$$

Saadud võrrandit ei ole võimalik üldjuhul lahendada, kuid üks lahendatav erijuht on siis, kui $c_1 = 0$. Sellisel juhul saame:

$$\gamma(r) = \pm \operatorname{arccosh} \left(\frac{c_3}{r} + 2\sqrt{h} \cos b \right), \quad c_3 = \text{const.}, \quad (2.42)$$

kuid see lahend on problemaatiline. Et seda näha, kirjutame meetrika selles lahendis:

$$ds^2 = -\frac{h}{e^{2c_2}} dT^2 \pm \frac{2h}{e^{c_2}} dT dr + r^2 d\Omega^2. \quad (2.43)$$

Näeme, et dT^2 komponent on konstantne. Selles aegruumis ei ole horisonte ega singulaarsusi, mistõttu ei kirjelda see musta auku ning seega võime selle käesoleva töö raames kõrvale jätta.

2.2.3 Koordinaatteisendus

Kuigi väljavõrrandid on jäänud täies mahus lahendamata, on siiski võimalik leida meetrika põhjal koordinaatteisendus Schwarzschildi koordinaatidesse. Esiteks kirjutame meetrika „EF-sarnastes“ koordinaatides:

$$ds_{EF}^2 = -\frac{h}{e^{-2c_2}} \left(1 + \frac{hc_1}{r} \right) dT^2 \pm \frac{2h}{e^{c_2}} dT dr + r^2 d\Omega^2, \quad (2.44)$$

millest näeme, et konstant $-hc_1$ mängib siin horisondi raadiuse r_h rolli. Kuna teistes koordinaatides on $r_h = 2M$, siis nõuame, et $c_1 = -2M/h$. Samuti saame konstandi c_2 eemaldada ajakoordinaadi ümber skaleerimisega $T \rightarrow \frac{e^{c_2}}{\sqrt{h}} T$. Sobitades nüüd meetrikad (2.44) ning (1.21) kokku meetrika teisenemiseeskirja abil, saame järgmise võrrandisüsteemi:³

$$\partial_t T(t, r) = 1, \quad \partial_r T(t, r) = \pm \frac{\sqrt{h}}{1 - 2M/r}. \quad (2.45)$$

³Esimeses võrrandis ilmub ka \pm , kuid selle eemaldame eeldusega, et ajakoordinaat T võiks tavalise aja t liikumise suunas kasvada.

Neid võrrandeid integreerides saame koordinaatteisenduse, mille abil saame teisendada lahendi Schwarzschildi koordinaatides (1.20) „EF-sarnastesse“ koordinaatidesse:

$$T(t, r) = t \pm \sqrt{h} \left(r + 2M \ln \left| \frac{r}{2M} - 1 \right| \right), \quad (2.46)$$

kus märgivalik sõltub sellest, kas tegemist on siseneva (+) või väljuva (−) lahendiga. Viimaks paneme tetraadi kirja. Kuna tetraad (1.20) ei sõltu ajakoordinaadist t , siis peame leidma vaid, kuidas dt teiseneb. Selleks kasutame 1-vormi teisenemiseeskirja $dy^\mu = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu$:

$$dT = \frac{\partial T}{\partial t} dt + \frac{\partial T}{\partial r} dr = dt \pm \frac{\sqrt{h} dr}{1 - 2M/r} \Rightarrow dt = dT \mp \frac{\sqrt{h} dr}{1 - 2M/r}. \quad (2.47)$$

Tetraadi (1.20) teisendatud kuju toome täies mahus eraldi välja lisas A.

2.3 GP koordinaadid

Viimaks käsitleme GP koordinaatidel põhinevat lahendit. Tegutseme jälle samamoodi kui eelnevate lahendite puhul.

2.3.1 Esialgne tetraad

Tegutseme analoogselt EF koordinaatide juhule. Võrreldes meetrikaid (1.19) ning (2.2) saame, et sobiv funktsioonide valik peale tetraadi teisendamist on:

$$K_1(T, r) = F(T, r) \cosh \gamma(T, r), \quad K_2(T, r) = \mp \sinh \alpha(T, r), \quad (2.48a)$$

$$K_3(T, r) = \mp F(T, r) \sinh \gamma(T, r), \quad K_4(T, r) = \cosh \alpha(T, r), \quad (2.48b)$$

$$K_5(T, r) = r \cos \beta(T, r), \quad K_6(T, r) = r \sin \beta(T, r), \quad (2.48c)$$

kus \mp määrab, kas tegemist on siseneva (−) või väljuva (+) lahendiga. Meetrika kujuks saame

$$ds^2 = -F^2 dT^2 \pm 2[F \sinh(\alpha - \gamma)] dT dr + r^2 d\Omega^2. \quad (2.49)$$

Näeme, et lahendite vahe väljendub nüüd $\pm[\alpha(r) - \gamma(r)]$ märgivalikuna, kusjuures valiku tähendus on jälle ümber pööratud. Lie tuletise arvutamise protsess ei muutu, sest eeldame, et uus ajakoordinaat on samuti üldise kujuga (2.33). Seega $\partial_t = \partial_T$ ning $\mathcal{L}_{\partial_t} \theta^i{}_\mu = 0$, kui nõuame

tingimuste (2.34) analoogset kehtivust.

2.3.2 Väljavõrrandid

Väljavõrrandite lahendamisel alustame jälle antisümm. osaga, millest esimene on sama kui (2.35), e. lahendiks sobib $\beta(r) = b = \text{const.}$ Asendame selle teise antisümm. väljavõrrandisse:

$$E_{\partial\varphi} \propto F(r) \{2 \cos b - \text{sech}[\alpha(r) - \gamma(r)] [\cosh \gamma(r) + r\alpha'(r) \sinh \gamma(r)]\} \\ + F'(r)r \cosh \alpha(r) \text{sech}^2[\alpha(r) - \gamma(r)] = 0. \quad (2.50)$$

Jätame jälle selle võrrandi kõrvale ja vaatame sümm. väljavõrrandeid. Esimene neist on:

$$-h + \cosh^2 \delta(r) + 2hr\delta'(r) \tanh \delta(r) = 0, \quad \delta(r) \equiv \alpha(r) - \gamma(r). \quad (2.51)$$

Selle võrrandi saame lahendada $\delta(r)$ jaoks:

$$\delta(r) = \pm \text{arccosh} \sqrt{\frac{h}{1 + e^{-8hc_1/r}}} \Rightarrow \alpha(r) = \pm \text{arccosh} \sqrt{\frac{h}{1 + e^{-8hc_1/r}}} + \gamma(r), \quad c_1 = \text{const.}, \quad (2.52)$$

kus peame meeles, et $\delta(r)$ märk määrab siseneva ja väljuva lahendi valiku ning seega on kumbki väljavõrrandite poolt lubatud. Asendame tulemuse teise väljavõrrandisse, et (sõltumata märgivalikust) saada võrrand $F(r)$ jaoks:

$$\frac{F(r)}{F'(r)} = -2r(1 + e^{8hc_1/r}) \Rightarrow F(r) = c_2 \sqrt{\frac{1}{r} + e^{8hc_1}}, \quad c_2 = \text{const.} \quad (2.53)$$

Võrrandite (2.52) ja (2.53) sisestamisel on kolmas sümm. väljavõrrand automaatselt lahendatud.

Võrrand (2.50) omandab nüüd järgneva kuju:

$$0 = 4e^{8c_1h} hr (1 + re^{8c_1h}) [-1 + (h-1)re^{8c_1h}] \cos b \\ + (1 + re^{8c_1h}) [1 + (1-2h)re^{8c_1h}] \sqrt{-\frac{h}{1 + re^{8c_1h}} + h-1} \sinh \gamma(r) \\ - 2e^{4c_1h} \sqrt{h} [r(1 + re^{8c_1h})]^{3/2} [-1 + (h-1)re^{8c_1h}] \gamma'(r) \sinh \gamma(r) \\ - e^{4c_1h} \sqrt{hr(1 + re^{8c_1h})} (3 + 2re^{8c_1h}) [-1 + (h-1)re^{8c_1h}] \cosh \gamma(r). \quad (2.54)$$

Nagu (2.41), pole see võrrand üldjuhul lahendatav, kuid sarnaselt võrrandi (2.41) erilahendile saame nõuda, et $e^{-hc_1} = -(2M)^{-1}$ ning seejärel võtta $M = 0$, millisel juhul on lahend sama

kui (2.42).⁴ On selge, et sellel juhul on meetrika singulaarne, sest $F(r)$ on singulaarne. Võime aga valida $c_2 = c_3\sqrt{-2M}(=0)$, millega saame, et $F(r) = -c_3$. Meetrikal on siis järgnev kuju:

$$ds^2 = -c_3^2 dT^2 \pm \sqrt{h-1} dT dr + dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad c_3 = \text{const.}, \quad (2.55)$$

mis on ilma horisontideta ega singulaarsusteta aegruumi meetrika, nagu oli (2.43). Seega pole ka see lahend sobilik mustade aukude kirjeldamiseks.

2.3.3 Koordinaatteisendus

Kuna „GP-sarnastes“ koordinaatides meetrika funktsioonist $\gamma(r)$ ei sõltu (seal ilmuv kombinatsioon $\alpha(r) - \gamma(r)$ on võrrandist (2.52) teada), siis saame leida selle meetrika ning (1.21) vahel koordinaatteisenduse. Meetrika „GP-sarnastes“ koordinaatides on:

$$ds_{GP}^2 = -c_2^2 \left(\frac{1}{r} + e^{8hc_1} \right) dT^2 \pm 2c_2 \sqrt{\frac{1}{r} + e^{8hc_1}(h-1)} dT dr + dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (2.56)$$

Rakendame nüüd koordinaatteisendust Schwarzschildi koordinaatidesse. Võrreldes meetrikaid (2.56) ning (1.21), saame:

$$0 = (1 + e^{8hc_1} r) c_2^2 [\partial_t T(t, r)]^2 + 2M - r, \quad (2.57a)$$

$$0 = (1 + e^{8hc_1} r) c_2 \partial_r T(t, r) \mp \sqrt{r [e^{8hc_1}(h-1)r - 1]}. \quad (2.57b)$$

Lahendame esimese diferentsiaalvõrrandi $T = T(t, r)$ suhtes:

$$T(t, r) = \frac{t}{c_2} \sqrt{\frac{r-2M}{1+e^{8hc_1}r}} + C(r), \quad (2.58)$$

kus $C(r)$ on integreerimisfunktsioon. Ka siin eeldasime, et T võiks t suunas kasvada. Nüüd eeldame, et sarnaselt GP koordinaatidele ÜRT-s on $\partial_r \partial_t T = 0$. See fikseerib c_1 väärtuse:

$$\partial_r \sqrt{\frac{r-2M}{1+e^{8hc_1}r}} = \frac{1+2Me^{8hc_1}}{2\sqrt{r-2M}(1+e^{8hc_1}r)^{3/2}} = 0 \Rightarrow c_1 = -\frac{\ln(-2M)}{8h}. \quad (2.59)$$

Siit on näha, et c_1 on kompleksne (sest $M \geq 0$), kuid $e^{8hc_1} = -(2M)^{-1}$ on reaalne. Asendame selle teise koordinaatteisenduse võrrandisse ning integreerime, et leida $C(r)$:

⁴„EF-sarnastes“ koordinaatides oli sarnane valik samuti ekvivalentne nõudmisega, et $M = 0$. Siinkohal kirjutasime konstandi e^{-hc_1} enne $M = 0$ võtmist välja, et vältida singulaarsusi.

$$C(r) = \pm \frac{\sqrt{-2M}}{c_2} \left\{ r\sqrt{h-1+2M/r} + 2M\sqrt{h} \ln \left(\pm \frac{1 - \sqrt{\frac{h}{h-1+2M/r}}}{1 + \sqrt{\frac{h}{h-1+2M/r}}} \right) + \frac{2M(2h-1)}{\sqrt{h-1}} \ln \left[\sqrt{1 + \frac{(h-1)r}{2M}} + \sqrt{\frac{(h-1)r}{2M}} \right] \right\}. \quad (2.60)$$

Teises liikmes ilmneva \pm märgi peab valima nii, et $C(r)$ oleks reaalne. Sellest saame, et kui $r < 2M$, siis on märk positiivne ning kui $r > 2M$ ja $h \geq 1$, siis negatiivne. Kui aga $h < 1$ ning $r > \frac{2M}{1-h} > 2M$, siis on võrrandis (2.60) ruutjuurte all olevad avaldised negatiivsed. Seega lahend selles piirkonnas ei kehti ning peame „GP-sarnaste“ koordinaatide kogu aegruumi peal defineerimiseks nõudma, et $h \geq 1$. Samuti saame aja liikme võrrandiga (2.59) lihtsustada:

$$\frac{t}{c_2} \sqrt{\frac{r-2M}{1+e^{8hc_1r}}} = \frac{\sqrt{-2M}}{c_2} t. \quad (2.61)$$

Näeme, et koordinaadil T on nüüd üldkordaja $\sqrt{-2M}/c_2$. Soovime, et T oleks reaalne, mille tagamiseks valime $c_2 = \sqrt{-2M}$. Nüüd on koordinaatteisendus täielikult määratud:

$$T(t, r) = t \pm \left\{ r\sqrt{h-1+2M/r} + 2M\sqrt{h} \ln \left(\pm \frac{1 - \sqrt{\frac{h}{h-1+2M/r}}}{1 + \sqrt{\frac{h}{h-1+2M/r}}} \right) + \frac{2M(2h-1)}{\sqrt{h-1}} \ln \left[\sqrt{\frac{(h-1)r}{2M}} + \sqrt{1 + \frac{(h-1)r}{2M}} \right] \right\}, \quad (2.62)$$

kus esimene märgivalik sõltub jälle sellest, kas tegemist on siseneva ($-$) või väljuva ($+$) lahendiga. Näeme, et erinevalt teistest koordinaatidest on see ÜRT juhuga võrreldes palju keerulisem. Kui aga arvestada, et:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arcsinh} x}{x} = 1, \quad (2.63)$$

siis näeme peale veidi lihtsustamist, et ÜRT piirjuhul $h \rightarrow 1$ saame tavalised GP koordinaadid. Viimaks leiame tetraadi. Tegutseme analoogselt „EF-sarnaste“ koordinaatide juhule:

$$dT = \frac{\partial T}{\partial t} dt + \frac{\partial T}{\partial r} dr = dt \pm \frac{\sqrt{h-1+2M/r}}{1-2M/r} dr \Rightarrow dt = dT \mp \frac{\sqrt{h-1+2M/r}}{1-2M/r} dr. \quad (2.64)$$

Kas selle tetraadi toome täies mahus välja lisa A.

3 Lahendite analüüs

Paneme tähele, et kuigi kõik kolm eelnevas peatükis esitatud lahendit on tetraadi tasemel erinevad, siis meetrika tasemel on need lahendi (1.21) koordinaatteisendused. See tähendab, et kõik ainult meetrikast sõltuvad omadused on lahenditel samad, mis arvatati meetrika (1.21) jaoks allikas [14]. Nt. on kõik lahendid asümptootiliselt mittetasased, sest nende Ricci tensoritel on piirjuhul $r \rightarrow \infty$ kaks nullist erinevat komponenti:

$$R_{\varphi\varphi} = R_{\vartheta\vartheta} \sin^2 \vartheta = (1 - h^{-1}) \sin^2 \vartheta. \quad (3.1)$$

Lahendite meetrikate korrektse signatuuri ning \sqrt{h} -i sisaldavate avaldiste reaalsuse kogu aegruumi ulatuses säilitamiseks peame ka nõudma, et:

$$h \equiv \left(1 + \frac{8}{9}\epsilon \sin^2 b\right)^{-1} > 0 \Rightarrow \epsilon > -\frac{9}{8} \csc^2 b. \quad (3.2)$$

Osakeste trajektoorid aegruumis on määratud geodeetiliste joontega. Kuna nende kuju määrab nn. geodeetilise joone võrrand, mis ise sõltub Levi-Civita seostusest (ja seega meetrikast) [10], siis on kõik selles töös leitud lahendite geodeetilised jooned seotud allikas [14] esitatud lahendiga vastavate koordinaatteisenduste kaudu, mis eelnevas peatükis välja arutati.

3.1 Horisondid

Urime, mis tüüpi horisondid esinevad selles töös esitatud lahendites. Kuna kõik lahendid on meetrika tasemel koordinaatteisenduse täpsusega samad ning horisontide olemasolu on koordinaatidest sõltumatu, siis peame välja selgitama kõik horisondid vaid ühe lahendi jaoks, et need oleks ka ülejäänud kahe jaoks teada. Et „KS-sarnaste“ koordinaatide lahend oli ainus, kus oli võimalik väljavõrrandid ilma koordinaatteisenduseta arvutada, siis kasutame seda lahendit. Alustame Killingi horisondiga, milleks peame leidma Killingi vektori. Definitsiooni (10) kasu-

tades saame 10-st¹ võrrandist koosneva süsteemi (lisa B rida 315), mille üheks lahendiks on:

$$X = R\partial_T + T\partial_R. \quad (3.3)$$

Seda vektorvälja oleme juba näinud, nimelt esines see lõigus 2.1.1 koordinaatija vektorvälja esitusena „KS-sarnastes“ koordinaatides. Seda on ka oodata, sest vastav meetrika on staatiline, järelkult eksisteerib koordinaatsüsteem, kus meetrika ei sõltu ajast (Schwarzschildi koordinaatid). See omakorda tähendab, et ∂_t on Killingi vektor [17]. Leiame selle vektori pikkuse:

$$|X| = g_{\mu\nu}X^\mu X^\nu = \frac{32M^3h}{r}e^{-r/2M}(T^2 - R^2) = \frac{16M^2h}{r}(2M - r). \quad (3.4)$$

Näeme, et $|X| = 0$, kui $r = 2M$. Järelkult on hüperpind kohal $r = 2M$ Killingi horisont. Kuna „KS-sarnastes“ koordinaatides vastab $r = r(R^2 - T^2)$ Schwarzschildi radiaalkoordinaadile, siis saame öelda, et ka teistes lahendites on samal kohal Killingi horisont. Lisaks, kuna kõik siin käsitletud aegruumid on staatilised, siis saame öelda, et nende Killingi ja Cauchy horisondid asuvad samas kohas. Edasi uurime näilist horisonti, milleks peame leidma hajuvusskalaari. Meetrikast (2.4) on näha, et radiaalsed valguskiired (mille jaoks $d\Omega^2 = ds^2 = 0$) peavad liikuma trajektooridel, kus $T \pm R = \text{const}$. Sobiv puutujavektor (täpsemalt selle kaasvektor) on seega $k_\mu = -\partial_\mu(T \pm R)$. Arvutame nüüd hajuvusskalaari:

$$\Theta = \nabla_\mu k^\mu = -\frac{T \pm R}{2Mhr}. \quad (3.5)$$

Näeme, et $\Theta = 0$ siis, kui $T = \pm R$, mis vastab hüperpinnale $r = 2M$. Et see vastaks kinnisele pinnale, peab hajuvusskalaar olema selle sees alati negatiivne, mille tagame nõudega $T \pm R > 0$. Teisendame seda võrratust:

$$T \pm R > 0 \Rightarrow T > \pm R \Rightarrow T^2 > R^2 \Rightarrow R^2 - T^2 < 0. \quad (3.6)$$

Tuletame meelde seost (1.14), mis kehtib ka „KS-sarnastes“ koordinaatides. Sellest näeme, et $R^2 - T^2 < 0$ siis, kui $r < 2M$. Järelkult on $r = 2M$ sees hajuvusskalaar alati negatiivne ning kuna $r = 2M$ pinnal on $T = R = 0$ ja seega $\Theta = 0$, siis asub seal lisaks Killingi horisondile ka näiline horisont. Viimaks märgime, et kuna käsitletud aegruumid on asümptootiliselt mitte-tasased, nagu arutlesime selle peatüki alguses, siis ei saa neis defineerida absoluutset horisonti.

¹Võrrandeid on rangelt võttes 16, kuid meetrika sümmeetria tõttu on vaid 10 sõltumatut võrrandit.

3.2 Tetraad ja vääne

Teame, et ÜRT-s on KS, EF ning GP koordinaatide üks tähtis omadus, et meetrika on horisondil mittesingulaarne. Eelnevas peatükis nägime, et 1PUÜRT-s on nende sarnastes koordinaatides meetrikal sama omadus. Uurime nüüd, kas see kehtib ka tetraadi jaoks, alustades „KS-sarnasest“ tetraadist. Vaadates funktsioone (2.24) näeme, et kui nõuame $c_1 = 0$, siis on võimalik mõnest horisondil singulaarsest liikmest lahti saada ning tagada, et $f_2(r)$ ei ole singulaarne. Jääb aga liige $\frac{r^3}{r-2M}$ funktsioonis $f_1(r)$. Sellest lahti saamiseks paneme tähele, et koordinaadid T ja R , defineeritud võrranditega (2.28), sisaldavad tegurit $\sqrt{\text{sgn}(r-2M)(r-2M)}$. Kirjutades nüüd T ja R lahti funktsioonides $f_1(r)$ ja $f_2(r)$ näeme, et viimane singulaarne liige funktsioonis $f_1(r)$ taandub välja, kuid singulaarne liige funktsioonis $f_2(r)$ ei taandu, mistõttu on siiski ka vaja nõuda, et $c_1 = 0$. Seega saame, et „KS-sarnane“ tetraad on horisondil mittesingulaarne vaid siis, kui $c_1 = 0$. Sama ei saa aga öelda väände kohta, mis jääb horisondil alati singulaarseks.

Uurime ka, kas tetraad on reaalne või kompleksne. Näeme funktsiooni $f_1(r)$ definitsioonist, et tetraad on kompleksne, kui $f_1(r)$ -s ruutjuure all olev avaldis, nimetame selle $f_0(r)$ -ks, on negatiivne. Kui $r \gg 2M$, e. asume kaugel mustast august, siis selles avaldiseks domineerib viimane liige, mis on negatiivse märgiga. See tähendab, et mustast august piisavalt kaugel on $f_1(r)$, ning seega ka tetraad, alati kompleksne. Võrrandit $f_0(r) = 0$ ei ole võimalik üldjuhul analüütiliselt lahendada, kuid toome välja erijuhtu, kus $c_1 = 0$. Sellel juhul saame kuupvõrrandi

$$f_0(r) = -\frac{r^3}{r-2M} + 16M^2h \cos^2 b = 0 \Rightarrow -r^3 + 16M^2h \cos^2 b(r-2M) = 0, \quad (3.7)$$

millel on vähemalt 1 reaalne juur, millest suurema r puhul on tetraad kompleksne. Et võrrandis (3.7) esinev konstant $16h \cos^2 b$ on alati positiivne², siis on selle väikseim reaalne juur alati negatiivne. See tähendab, et tetraad on alati mingis osas aegruumist kompleksne. Täpsemalt öeldes on tetraad kogu aegruumis kompleksne, kui $16h \cos^2 b \leq 27$, ning muudel juhtudel on järgmise kahe (nüüd positiivse väärtusega) juure vahel „reaalsuse saar,“ kus tetraad on samuti reaalne. Nt. kui $16h \cos^2 b = 32$, siis asub see saar vahemikus $2(\sqrt{5} - 1)M < r < 4M$. Kokkuvõttes on „KS-sarnane“ tetraad mittesingulaarne horisondil, kui valime $c_1 = 0$, kuid sel juhul on tetraad ka mingis koordinaatruumi ulatuses kompleksne. Kuna väljavõrrandid on aga tuletatud reaalse tetraadi eeldusel, siis ei ole kompleksse tetraadi puhul lahend füüsikaline.

Väände puhul on olukord natuke erinev. Seal esineb kuupvõrrand (3.7) (või selle analoog

²Me ei arvesta massikonstanti M , sest selle saab radiaalkoordinaadi ümber defineerimisega alati ära kaotada.

muu c_1 väärtuse korral) koos lisakordajaga $\text{sgn}(r - 2M)$, mis pärineb jälle „KS-sarnastest“ koordinaatidest. See tagab, et kui $r < 2M$, ehk kui asume horisondi sees, siis on vääne alati reaalne. Nagu ka tetraad, on vääne juhul $r \gg 2M$ alati kompleksne. Nagu enne mainisime, ei ole võimalik kompleksse tetraadiga aegruumi defineerida. Üks võimalus seda siiski teha oleks aegruum enne kompleksseks muutumist „ära lõigata“ ning sobitada kokku teise reaalse aegruumiga, nt. õhukese kihi (*thin-shell*) formalismi abil. Selleks on eelnevalt vaja leida 1PUÜRT pidevustingimused (*junction conditions*), mida on tehtud nt. $f(T)$ teooriate klassi puhul, kus T on ÜRT teleparalleelse ekvivalendi väändeskalaar, mida nägime võrrandis (1.2) [24].

EF- ja GP-sarnaste koordinaatide puhul on teisendused tetraadist (1.20) üpris sarnased (lisa A), ehk saame neid koos käsitleda. Esiteks näeme, et osa singulaarsetest liikmetest saab eemaldada valikuga $\gamma_0 = -2/M$, kuid jälle jääb alles singulaarne liige tetraadi dr -ga liikmetes. Seda liiget ei ole võimalik eemaldada, ehk EF- ja GP-sarnased tetraadid ja väänded on horisondil alati singulaarsed. Samas on need ka alati reaalsed, kui on täidetud allikas [14] kirjeldatud lahendi jaoks välja toodud reaalsuse tingimused. GP-sarnase tetraadi reaalsuse tagamiseks tuleb ka täiendavalt nõuda, et $h \geq 1$.

Kokkuvõte

Käesoleva töö eesmärk oli leida üldistused ÜRT-st tuntud KS-, EF- ja GP-koordinaatidele, mis oleks sobivad kasutamiseks 1-parameetri UÜRT-s mustade aukude omaduste uurimiseks. Neid koordinaatsüsteeme oli võimalik meetrika tasemel üldistada, kusjuures leidsime üldistatud „GP-sarnaste“ koordinaatide näol, et uued koordinaadid võivad oma ÜRT erijuhtudest üsna palju erineda. Kõikides koordinaatsüsteemides on meetrikast horisondi koordinaatsingulaarsus eemaldatud, nagu nende ÜRT erijuhtudel. Samuti on need vastavate koordinaatteisenduste kaudu seotud 1PUÜRT Schwarzschildi lahendi analoogiga, ehk kõik meetrikast tulenevad omadused on käesolevas töös leitud lahenditel samad, kui sellel lahendil.

Konstrueerisime nende koordinaatide põhjal uued tetraadid, millest vaid „KS-sarnane“ tetraad osutus võimaliseks väljavõrrandeid rahuldama nii, et uuritava aegruumi keskmass ei oleks 0. Samuti leidsime, et „KS-sarnast“ tetraadi ei saa koordinaatteisendada teadaoleva 1PUÜRT Schwarzschildi lahendi analoogi kujule, mis tähendab, et see on täiesti uus selle teooria lahend. Kindla lahendi parameetrite valikuga oli ka võimalik tagada, et tetraadist on horisondi koordinaatsingulaarsus kõrvaldatud, kuid sama ei olnud võimalik teiste selles töös leitud lahenditega. „KS-sarnase“ lahendi nõrkuseks osutus see, et selle tetraad ja vääne on asümptootiliselt kompleksed, mistõttu ei ole võimalik lahendit kogu koordinaatruumis defineerida. Üks võimalik uurimissuund oleks seega leida koordinaatsüsteem ja/või kalibratsioon, milles tetraad on kogu koordinaatruumis reaalne ning mittesingulaarne. Samuti võib olla võimalik leida erinev tetraad, millel on need omadused, kuid mis määrab sama meetrika kui „KS-sarnane“ tetraad.

Uurisime ka leitud lahendites esinevaid horisonte ja leidsime, et igas lahendis esinevad Cauchy, Killingi ja näilised horisondid samal kohal kui ÜRT Schwarzschildi lahendis, ehk radiaalkoordinaadi $r = 2M$ juures. Võrreldes ÜRT-ga on puudu aga absoluutne horisont, mida pole võimalik aegruumide asümptootilise mittetasasuse tõttu defineerida. Kuna kõik seni avastatud mustad augud on pöörlevad [25], siis oleks kasulik ka leida 1PUÜRT Kerri lahendi analoog ning uurida selle omadusi, mida saaks omakorda võrrelda vaatlusandmetega.

Viited

- [1] B. Louise Webster ja Paul Murdin. „Cygnus X-1—a Spectroscopic Binary with a Heavy Companion?“ en. *Nature* 235.5332 (jaanuar 1972). Publisher: Nature Publishing Group, lk. 37–38. ISSN: 1476-4687. DOI: 10.1038/235037a0.
- [2] E. T. Newman *et al.* „Metric of a Rotating, Charged Mass“. *Journal of Mathematical Physics* 6.6 (juuni 1965), lk. 918–919. ISSN: 0022-2488. DOI: 10.1063/1.1704351.
- [3] Hubert Goenner *et al.* *The Expanding Worlds of General Relativity*. en. Google-Books-ID: 5mGZno8CvnQC. Springer Science & Business Media, detsember 1998. ISBN: 978-0-8176-4060-6.
- [4] Kenji Hayashi ja Takeshi Shirafuji. „New general relativity“. *Physical Review D* 19.12 (juuni 1979). Publisher: American Physical Society, lk. 3524–3553. DOI: 10.1103/PhysRevD.19.3524.
- [5] Manuel Hohmann *et al.* „Propagation of gravitational waves in teleparallel gravity theories“. *Physical Review D* 98.12 (detsember 2018). arXiv:1807.04580 [gr-qc], lk. 124004. ISSN: 2470-0010, 2470-0029. DOI: 10.1103/PhysRevD.98.124004.
- [6] Manuel Hohmann. „Polarization of gravitational waves in general teleparallel theories of gravity“. *Astronomy Reports* 62.12 (detsember 2018). arXiv:1806.10429 [gr-qc], lk. 890–897. ISSN: 1063-7729, 1562-6881. DOI: 10.1134/S1063772918120235.
- [7] Ulbossyn Ualikhanova ja Manuel Hohmann. „Parameterized post-Newtonian limit of general teleparallel gravity theories“. *Physical Review D* 100.10 (november 2019). arXiv: 1907.08178 [gr-qc]. ISSN: 2470-0010, 2470-0029. DOI: 10.1103/PhysRevD.100.104011.
- [8] Jose Beltrán Jiménez ja Konstantinos F. Dialektopoulos. „Non-Linear Obstructions for Consistent New General Relativity“. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*

- 2020.01 (jaanuar 2020). arXiv:1907.10038 [gr-qc], lk. 018–018. ISSN: 1475-7516. DOI: 10.1088/1475-7516/2020/01/018.
- [9] Maria Mylova, Jackson Levi Said ja Emmanuel N. Saridakis. „General Effective Field Theory of Teleparallel Gravity“. *Classical and Quantum Gravity* 40.12 (juuni 2023). arXiv:2211.11420 [gr-qc], lk. 125002. ISSN: 0264-9381, 1361-6382. DOI: 10.1088/1361-6382/accccc.
- [10] E. Poisson. *A Relativist's Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2004. ISBN: 978-0-521-83091-1. DOI: 10.1017/CBO9780511606601.
- [11] Ruben Aldrovandi ja José Geraldo Pereira. *Teleparallel Gravity: An Introduction*. en. Dordrecht: Springer Netherlands, 2013. ISBN: 978-94-007-5143-9. DOI: 10.1007/978-94-007-5143-9.
- [12] Jose Beltrán Jiménez, Lavinia Heisenberg ja Tomi S. Koivisto. „The Geometrical Trinity of Gravity“. *Universe* 5.7 (2019). ISSN: 2218-1997. DOI: 10.3390/universe5070173.
- [13] Eric W. Weisstein. *Lambert W-Function*. en. Text. Publisher: Wolfram Research, Inc. URL: <https://mathworld.wolfram.com/LambertW-Function.html> (vaadatud 17.03.2025).
- [14] Helen Asuküla *et al.* „Spherically symmetric vacuum solutions in 1-Parameter New General Relativity and their phenomenology“. *Physical Review D* 109.6 (märts 2024). arXiv:2311.17999 [gr-qc], lk. 064027. ISSN: 2470-0010, 2470-0029. DOI: 10.1103/PhysRevD.109.064027.
- [15] Berta Margalef-Bentabol, Juan Margalef-Bentabol ja Jordi Cepa. „Evolution of the Cosmological Horizons in a Universe with Countably Infinitely Many State Equations“. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2013.02 (veebbruar 2013). arXiv:1302.2186 [astro-ph], lk. 015–015. ISSN: 1475-7516. DOI: 10.1088/1475-7516/2013/02/015.
- [16] Stephen W. Hawking ja George F. R. Ellis. *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, veebruar 2023. ISBN: 978-1-009-25316-1. DOI: 10.1017/9781009253161.
- [17] Charles W. Misner, Kip S. Thorne ja John Archibald Wheeler. *Gravitation*. en. Google-Books-ID: w4Gigq3tY1kC. W. H. Freeman, september 1973. ISBN: 978-0-7167-0344-0.

- [18] Subrahmanyan Chandrasekhar. *The Mathematical Theory of Black Holes*. en. Google-Books-ID: LBOVcrzFfhsC. Clarendon Press, 1998. ISBN: 978-0-19-850370-5.
- [19] P. van Nieuwenhuizen. „On ghost-free tensor Lagrangians and linearized gravitation“. *Nuclear Physics B* 60 (jaanuar 1973), lk. 478–492. ISSN: 0550-3213. DOI: 10.1016/0550-3213(73)90194-6.
- [20] M. P. Hobson, G. P. Efstathiou ja A. N. Lasenby. *General Relativity: An Introduction for Physicists*. en. Google-Books-ID: 5dryXCWR7EIC. Cambridge University Press, veebruar 2006. ISBN: 978-0-521-82951-9.
- [21] *Wolfram Mathematica: Modern Technical Computing*. en. URL: <https://www.wolfram.com/mathematica/> (vaadatud 16.03.2025).
- [22] Manuel Hohmann *et al.* „Modified teleparallel theories of gravity in symmetric spacetimes“. *Physical Review D* 100.8 (oktoober 2019). arXiv:1901.05472 [gr-qc], lk. 084002. ISSN: 2470-0010, 2470-0029. DOI: 10.1103/PhysRevD.100.084002.
- [23] Sebastian Bahamonde *et al.* „Teleparallel Gravity: From Theory to Cosmology“. *Reports on Progress in Physics* 86.2 (veebuar 2023). arXiv:2106.13793 [gr-qc], lk. 026901. ISSN: 0034-4885, 1361-6633. DOI: 10.1088/1361-6633/ac9cef.
- [24] Alvaro de la Cruz-Dombriz, Peter K. S. Dunsby ja Diego Saez-Gomez. „Junction conditions in extended Teleparallel gravities“. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2014.12 (detsember 2014). arXiv:1406.2334 [gr-qc], lk. 048–048. ISSN: 1475-7516. DOI: 10.1088/1475-7516/2014/12/048.
- [25] Pedro R. Capelo. „Astrophysical black holes“. Teoses: arXiv:1807.06014 [astro-ph]. Mai 2019, lk. 1–22. DOI: 10.1142/9789813227958_0001.

A EF- ja GP-sarnased tetraadid

Esiteks defineerime paar abifunktsiooni:

$$f_3(r) = 2\sqrt{h} \cos b \left(1 + \frac{\gamma_0 M^2}{r} \right), \quad f_4(r) = \frac{2h \cos b (\gamma_0 M^2 + r)}{r - 2M}. \quad (\text{A.1})$$

Nüüd paneme nende abil kirja tetraadi (1.20) koordinaatteisendused, alustades „EF-sarnastest“ koordinaatidest:

$$\theta^0 = f_3(r)dT + \left[\sqrt{f_4(r)^2 - \frac{h}{1 - 2M/r}} \mp \frac{f_3(r)\sqrt{h}}{1 - 2M/r} \right] dr, \quad (\text{A.2a})$$

$$\begin{aligned} \theta^1 = & \sqrt{f_3(r)^2 + \frac{2M}{r} - 1} \sin \vartheta \cos \varphi dT \\ & + \left[f_4(r) \mp \frac{\sqrt{h}}{1 - 2M/r} \sqrt{f_3(r)^2 + \frac{2M}{r} - 1} \right] \sin \vartheta \cos \varphi dr \\ & + r (\cos b \cos \vartheta \cos \varphi - \sin b \sin \varphi) d\vartheta - r \sin \vartheta (\cos b \sin \vartheta + \sin b \cos \vartheta \cos \varphi) d\varphi, \end{aligned} \quad (\text{A.2b})$$

$$\begin{aligned} \theta^2 = & \sqrt{f_3(r)^2 + \frac{2M}{r} - 1} \sin \vartheta \sin \varphi dT \\ & + \left[f_4(r) \mp \frac{\sqrt{h}}{1 - 2M/r} \sqrt{f_3(r)^2 + \frac{2M}{r} - 1} \right] \sin \vartheta \sin \varphi dr \\ & + r (\cos b \cos \vartheta \sin \varphi + \sin b \cos \varphi) d\vartheta + r \sin \vartheta (\cos b \cos \varphi - \sin b \cos \vartheta \sin \varphi) d\varphi, \end{aligned} \quad (\text{A.2c})$$

$$\begin{aligned} \theta^3 = & \sqrt{f_3(r)^2 + \frac{2M}{r} - 1} \cos \vartheta dT \\ & + \left[f_4(r) \mp \frac{\sqrt{h}}{1 - 2M/r} \sqrt{f_3(r)^2 + \frac{2M}{r} - 1} \right] \cos \vartheta dr \\ & - r \cos b \sin \vartheta d\vartheta + r \sin b \sin^2 \vartheta d\varphi. \end{aligned} \quad (\text{A.2d})$$

Nüüd paneme kirja koordinaatteisenduse „GP-sarnastesse“ koordinaatidesse:

$$\theta^0 = f_3(r)dT + \left[\sqrt{f_4(r)^2 - \frac{h}{1-2M/r}} \mp \frac{f_3(r)\sqrt{h-1+2M/r}}{1-2M/r} \right] dr, \quad (\text{A.3a})$$

$$\begin{aligned} \theta^1 = & \sqrt{f_3(r)^2 + \frac{2M}{r} - 1} \sin \vartheta \cos \varphi dT \\ & + \left[f_4(r) \mp \frac{\sqrt{h-1+2M/r}}{1-2M/r} \sqrt{f_3(r)^2 + \frac{2M}{r} - 1} \right] \sin \vartheta \cos \varphi dr \\ & + r (\cos b \cos \vartheta \cos \varphi - \sin b \sin \varphi) d\vartheta - r \sin \vartheta (\cos b \sin \vartheta + \sin b \cos \vartheta \cos \varphi) d\varphi, \end{aligned} \quad (\text{A.3b})$$

$$\begin{aligned} \theta^2 = & \sqrt{f_3(r)^2 + \frac{2M}{r} - 1} \sin \vartheta \sin \varphi dT \\ & + \left[f_4(r) \mp \frac{\sqrt{h-1+2M/r}}{1-2M/r} \sqrt{f_3(r)^2 + \frac{2M}{r} - 1} \right] \sin \vartheta \sin \varphi dr \\ & + r (\cos b \cos \vartheta \sin \varphi + \sin b \cos \varphi) d\vartheta + r \sin \vartheta (\cos b \cos \varphi - \sin b \cos \vartheta \sin \varphi) d\varphi, \end{aligned} \quad (\text{A.3c})$$

$$\begin{aligned} \theta^3 = & \sqrt{f_3(r)^2 + \frac{2M}{r} - 1} \cos \vartheta dT \\ & + \left[f_4(r) \mp \frac{\sqrt{h-1+2M/r}}{1-2M/r} \sqrt{f_3(r)^2 + \frac{2M}{r} - 1} \right] \cos \vartheta dr \\ & - r \cos b \sin \vartheta d\vartheta + r \sin b \sin^2 \vartheta d\varphi. \end{aligned} \quad (\text{A.3d})$$

B *Wolfram Mathematica* kood

Selles töös käsitletud arvutuste läbi viimiseks koostasime järgneva *Wolfram Mathematica* 14.0 koodi. Koodi sees asuvad märkide „(**)“ vahel täiendavad kommentaarid. Lisaks märgime, et *Wolfram Mathematica* süntaksis koosneb kood plokkidest (*cells*), mis võivad hoida nii sisendit kui ka väljundit. Töös viitame kõikidele plokkidele kui „ridadele,“ kusjuures rea arvu arvestame ploki järjekorranumbri järgi koodi vasakus ääres.

```
In[5]:= (*Funktsioon kov. tuletise arvutamiseks*)
Cov[A_, i_ : {"0"}] :=
  D[A, {{T, R, θ, φ}}] + Sum[If[i[[k]] == "d", -Transpose[Ct, 1 ↔ 3].A, If[i[[k]] == "u",
    Transpose[Ct, 2 ↔ 3].A, 0]], {k, ArrayDepth[A, AllowedHeads → List]}]
GeneralRound[x_, i_ : 7] := If[x ≠ "", Round[10^i * x] * 10^(-i), ""];
```

```
In[7]:= (*Schwarzschildi koordinaatide lahendi tetraad ja vääne*)
ArticleTet =
  { { 2 Sqrt[h] Cos[b] (β M^2 + r) / r, Sqrt[ h / (r - 2 M) ] Sqrt[ (4 h Cos[b]^2 (β M^2 + r)^2 - r) / (r - 2 M) ],
    θ, 0 }, { Sin[θ] Cos[φ] Sqrt[4 h Cos[b]^2 (β M^2 + r)^2 + r (2 M - r)] / r,
    2 h Cos[b] Sin[θ] Cos[φ] (β M^2 + r) / (2 M - r), r (Cos[b] Cos[θ] Cos[φ] - Sin[b] Sin[φ]),
    -r Sin[θ] (Cos[θ] Cos[φ] Sin[b] + Cos[b] Sin[φ]) },
  { Sin[θ] Sin[φ] Sqrt[4 h Cos[b]^2 (β M^2 + r)^2 + r (2 M - r)] / r,
    2 h Cos[b] Sin[θ] Sin[φ] (β M^2 + r) / (2 M - r), r (Cos[φ] Sin[b] + Cos[b] Cos[θ] Sin[φ]),
    r Sin[θ] (Cos[b] Cos[φ] - Cos[θ] Sin[b] Sin[φ]) },
  { Cos[θ] Sqrt[4 h Cos[b]^2 (β M^2 + r)^2 + r (2 M - r)] / r,
    2 h Cos[b] Cos[θ] (β M^2 + r) / (2 M - r), -r Cos[b] Sin[θ],
    r Sin[b] Sin[θ]^2 } // PowerExpand // FullSimplify;
GToruddArt =
  Table[Sum[Inverse[ArticleTet][[a, as]] * (D[ArticleTet[[as, c]], {{T, R, θ, φ}[[b]]}) -
    D[ArticleTet[[as, b]], {{T, R, θ, φ}[[c]]}],
    {as, 4}], {a, 4}, {b, 4}, {c, 4} // Simplify;
```

KS koordinaadid

```
In[9]:= (*Tetraadi kuju määravad funktsioonid*)
```

```
K1[T, R] = F[T, R] Cosh[γ[T, R]];
K2[T, R] = F[T, R] Sinh[γ[T, R]];
K3[T, R] = -K2[T, R];
K4[T, R] = -K1[T, R];
K5[T, R] = r[R^2 - T^2] Cos[β[T, R]];
K6[T, R] = r[R^2 - T^2] Sin[β[T, R]];
```

```

In[15]:= (*Tetraadid*)
Tet0 = K1[T, R] dT + K2[T, R] dR // Simplify;
Tet1 =
  (K3[T, R] dT + K4[T, R] dR) Sin[θ] Cos[φ] + (K5[T, R] Cos[θ] Cos[φ] - K6[T, R] Sin[φ]) dθ -
  (K5[T, R] Sin[φ] + K6[T, R] Cos[θ] Cos[φ]) Sin[θ] dφ // Simplify;
Tet2 =
  (K3[T, R] dT + K4[T, R] dR) Sin[θ] Sin[φ] + (K5[T, R] Cos[θ] Sin[φ] + K6[T, R] Cos[φ]) dθ +
  (K5[T, R] Cos[φ] - K6[T, R] Cos[θ] Sin[φ]) Sin[θ] dφ // Simplify;
Tet3 = (K3[T, R] dT + K4[T, R] dR) Cos[θ] -
  K5[T, R] Sin[θ] dθ + K6[T, R] Sin[θ]^2 dφ // Simplify;

In[19]:= (*Tetraadi maatriks ja pöördmaatriks*)
GTet = Table[Coefficient[{Tet0, Tet1, Tet2, Tet3}[[i]], {dT, dR, dθ, dφ}[[j]], 1],
  {i, 4}, {j, 4}] // Simplify;
GTetI = Inverse[GTet] // FullSimplify;

In[21]:= (*Lie tuletis*)
Simplify[R * D[GTet, T] + T * D[GTet, R] +
  Table[-(D[GTet[[a, 1]], {T, R, θ, φ}[[b]] * R + D[GTet[[a, 2]], {T, R, θ, φ}[[b]] * T) +
    D[R, {T, R, θ, φ}[[b]] * GTet[[a, 1]] +
    D[T, {T, R, θ, φ}[[b]] * GTet[[a, 2]] + D[GTet[[a, 1]], {T, R, θ, φ}[[b]] * R +
    D[GTet[[a, 2]], {T, R, θ, φ}[[b]] * T, {a, 4}, {b, 4}]];
LDEq = Simplify[Table[%[[a, b]] == 0, {a, 4}, {b, 4}]];
Do[Print[%[[n]]], {n, 4}]
(*Vajadusel prindime ülaloleva käsuga väljundi ridade kaupa,
et see hiljem lehele mahuks*)

```

$$\begin{aligned}
& \{ \text{Cosh}[\gamma[T, R]] (T F^{(\theta,1)}[T, R] + R F^{(1,\theta)}[T, R]) + \\
& \quad F[T, R] \text{Sinh}[\gamma[T, R]] (1 + T \gamma^{(\theta,1)}[T, R] + R \gamma^{(1,\theta)}[T, R]) = 0, \\
& \quad \text{Sinh}[\gamma[T, R]] (T F^{(\theta,1)}[T, R] + R F^{(1,\theta)}[T, R]) + \\
& \quad \quad \text{Cosh}[\gamma[T, R]] F[T, R] (1 + T \gamma^{(\theta,1)}[T, R] + R \gamma^{(1,\theta)}[T, R]) = 0, \text{True, True} \} \\
& \{ \text{Cos}[\phi] \text{Sin}[\theta] (\text{Sinh}[\gamma[T, R]] (T F^{(\theta,1)}[T, R] + R F^{(1,\theta)}[T, R]) + \\
& \quad \quad \text{Cosh}[\gamma[T, R]] F[T, R] (1 + T \gamma^{(\theta,1)}[T, R] + R \gamma^{(1,\theta)}[T, R])) = 0, \\
& \quad \text{Cos}[\phi] \text{Sin}[\theta] (\text{Cosh}[\gamma[T, R]] (T F^{(\theta,1)}[T, R] + R F^{(1,\theta)}[T, R]) + \\
& \quad \quad F[T, R] \text{Sinh}[\gamma[T, R]] (1 + T \gamma^{(\theta,1)}[T, R] + R \gamma^{(1,\theta)}[T, R])) = 0, \\
& \quad r[R^2 - T^2] (\text{Cos}[\beta[T, R]] \text{Sin}[\phi] + \text{Cos}[\theta] \text{Cos}[\phi] \text{Sin}[\beta[T, R]]) (T \beta^{(\theta,1)}[T, R] + R \beta^{(1,\theta)}[T, R]) = 0, \\
& \quad r[R^2 - T^2] \text{Sin}[\theta] (\text{Cos}[\theta] \text{Cos}[\phi] \text{Cos}[\beta[T, R]] - \text{Sin}[\phi] \text{Sin}[\beta[T, R]]) \\
& \quad \quad (T \beta^{(\theta,1)}[T, R] + R \beta^{(1,\theta)}[T, R]) = 0 \} \\
& \{ \text{Sin}[\theta] \text{Sin}[\phi] (\text{Sinh}[\gamma[T, R]] (T F^{(\theta,1)}[T, R] + R F^{(1,\theta)}[T, R]) + \\
& \quad \quad \text{Cosh}[\gamma[T, R]] F[T, R] (1 + T \gamma^{(\theta,1)}[T, R] + R \gamma^{(1,\theta)}[T, R])) = 0, \\
& \quad \text{Sin}[\theta] \text{Sin}[\phi] (\text{Cosh}[\gamma[T, R]] (T F^{(\theta,1)}[T, R] + R F^{(1,\theta)}[T, R]) + \\
& \quad \quad F[T, R] \text{Sinh}[\gamma[T, R]] (1 + T \gamma^{(\theta,1)}[T, R] + R \gamma^{(1,\theta)}[T, R])) = 0, \\
& \quad r[R^2 - T^2] (\text{Cos}[\phi] \text{Cos}[\beta[T, R]] - \text{Cos}[\theta] \text{Sin}[\phi] \text{Sin}[\beta[T, R]]) (T \beta^{(\theta,1)}[T, R] + R \beta^{(1,\theta)}[T, R]) = 0, \\
& \quad r[R^2 - T^2] \text{Sin}[\theta] (\text{Cos}[\theta] \text{Cos}[\beta[T, R]] \text{Sin}[\phi] + \text{Cos}[\phi] \text{Sin}[\beta[T, R]]) \\
& \quad \quad (T \beta^{(\theta,1)}[T, R] + R \beta^{(1,\theta)}[T, R]) = 0 \} \\
& \{ \text{Cos}[\theta] (\text{Sinh}[\gamma[T, R]] (T F^{(\theta,1)}[T, R] + R F^{(1,\theta)}[T, R]) + \\
& \quad \quad \text{Cosh}[\gamma[T, R]] F[T, R] (1 + T \gamma^{(\theta,1)}[T, R] + R \gamma^{(1,\theta)}[T, R])) = 0, \\
& \quad \text{Cos}[\theta] (\text{Cosh}[\gamma[T, R]] (T F^{(\theta,1)}[T, R] + R F^{(1,\theta)}[T, R]) + \\
& \quad \quad F[T, R] \text{Sinh}[\gamma[T, R]] (1 + T \gamma^{(\theta,1)}[T, R] + R \gamma^{(1,\theta)}[T, R])) = 0, \\
& \quad r[R^2 - T^2] \text{Sin}[\theta] \text{Sin}[\beta[T, R]] (T \beta^{(\theta,1)}[T, R] + R \beta^{(1,\theta)}[T, R]) = 0, \\
& \quad \text{Cos}[\beta[T, R]] r[R^2 - T^2] \text{Sin}[\theta] (T \beta^{(\theta,1)}[T, R] + R \beta^{(1,\theta)}[T, R]) = 0 \}
\end{aligned}$$

In[24]:= (*Lie tuletise võrrandisüsteemi lahend*)

```

F[T_, R_] := F[R^2 - T^2];
β[T_, R_] := β[R^2 - T^2];
LDEq2 = Simplify[LDEq, Assumptions → F[R^2 - T^2] ≠ 0];
Do[Print[%[[n]], {n, 4}]
FullSimplify[DSolve[LDEq2[[1, 1]], γ[T, R], {T, R}], ExcludedForms → (R^2 - T^2)]
Clear[F, β]

```

$$\begin{aligned} & \{ \text{Sinh}[\gamma[T, R]] (1 + T \gamma^{(0,1)}[T, R] + R \gamma^{(1,0)}[T, R]) = 0, \\ & \quad \text{Cosh}[\gamma[T, R]] (1 + T \gamma^{(0,1)}[T, R] + R \gamma^{(1,0)}[T, R]) = 0, \text{True}, \text{True} \} \\ & \{ \text{Cos}[\phi] \text{Cosh}[\gamma[T, R]] \text{Sin}[\theta] (1 + T \gamma^{(0,1)}[T, R] + R \gamma^{(1,0)}[T, R]) = 0, \\ & \quad \text{Cos}[\phi] \text{Sin}[\theta] \text{Sinh}[\gamma[T, R]] (1 + T \gamma^{(0,1)}[T, R] + R \gamma^{(1,0)}[T, R]) = 0, \text{True}, \text{True} \} \\ & \{ \text{Cosh}[\gamma[T, R]] \text{Sin}[\theta] \text{Sin}[\phi] (1 + T \gamma^{(0,1)}[T, R] + R \gamma^{(1,0)}[T, R]) = 0, \\ & \quad \text{Sin}[\theta] \text{Sin}[\phi] \text{Sinh}[\gamma[T, R]] (1 + T \gamma^{(0,1)}[T, R] + R \gamma^{(1,0)}[T, R]) = 0, \text{True}, \text{True} \} \\ & \{ \text{Cos}[\theta] \text{Cosh}[\gamma[T, R]] (1 + T \gamma^{(0,1)}[T, R] + R \gamma^{(1,0)}[T, R]) = 0, \\ & \quad \text{Cos}[\theta] \text{Sinh}[\gamma[T, R]] (1 + T \gamma^{(0,1)}[T, R] + R \gamma^{(1,0)}[T, R]) = 0, \text{True}, \text{True} \} \end{aligned}$$

⋯ Solve: Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may not be found; use Reduce for complete solution information. ⓘ

Out[28]=

$$\left\{ \left\{ \gamma[T, R] \rightarrow 0 \right\}, \left\{ \gamma[T, R] \rightarrow -\text{ArcTanh}\left[\frac{T}{R}\right] + c_1 \left[\frac{1}{2} (R^2 - T^2)\right] \text{ if } R < 0 \right\}, \right. \\ \left. \left\{ \gamma[T, R] \rightarrow -\text{ArcTanh}\left[\frac{T}{R}\right] + c_1 \left[\frac{1}{2} (R^2 - T^2)\right] \text{ if } R > 0 \right\} \right\}$$

In[30]:= (*Uued tetraadi funktsioonid peale Lie tuletise lahendamist*)

```
K1[T, R] =
  F[R^2 - T^2] (R * Cosh[γ[R^2 - T^2]] - T * Sinh[γ[R^2 - T^2]]) / Sqrt[R^2 - T^2];
K2[T, R] =
  F[R^2 - T^2] (R * Sinh[γ[R^2 - T^2]] - T * Cosh[γ[R^2 - T^2]]) / Sqrt[R^2 - T^2];
K3[T, R] = -K2[T, R];
K4[T, R] = -K1[T, R];
K5[T, R] = r[R^2 - T^2] Cos[β[T, R]];
K6[T, R] = r[R^2 - T^2] Sin[β[T, R]];
```

In[36]:= (*Defineerime tetraadi uuesti, et Lie tuletis arvesse võtta*)

```
Tet0 = K1[T, R] dT + K2[T, R] dR // Simplify;
Tet1 =
  (K3[T, R] dT + K4[T, R] dR) Sin[θ] Cos[φ] + (K5[T, R] Cos[θ] Cos[φ] - K6[T, R] Sin[φ]) dθ -
  (K5[T, R] Sin[φ] + K6[T, R] Cos[θ] Cos[φ]) Sin[θ] dφ // Simplify;
Tet2 =
  (K3[T, R] dT + K4[T, R] dR) Sin[θ] Sin[φ] + (K5[T, R] Cos[θ] Sin[φ] + K6[T, R] Cos[φ]) dθ +
  (K5[T, R] Cos[φ] - K6[T, R] Cos[θ] Sin[φ]) Sin[θ] dφ // Simplify;
Tet3 = (K3[T, R] dT + K4[T, R] dR) Cos[θ] -
  K5[T, R] Sin[θ] dθ + K6[T, R] Sin[θ]^2 dφ // Simplify;
GTet = Table[Coefficient[{Tet0, Tet1, Tet2, Tet3}][[i]], {dT, dR, dθ, dφ}][[j]], 1],
  {i, 4}, {j, 4} // Simplify;
GTetI = Inverse[GTet] // FullSimplify;
```

In[42]:= (*Tetraadi determinant*)

```
DetTet = Det[GTet] // Simplify
```

Out[42]=

$$-F[R^2 - T^2]^2 r[R^2 - T^2]^2 \text{Sin}[\theta]$$

Väljavõrrandid

```

In[43]:= (*Meetrika ja sellest tuletatud suurused*)
g = Table[Sum[DiagonalMatrix[{-1, 1, 1, 1}][[as, bs]] * GTet[[as, a]] * GTet[[bs, b]],
  {as, 4}, {bs, 4}], {a, 4}, {b, 4}] // Simplify
gI = Inverse[g];
gD = D[g, {{T, R,  $\theta$ ,  $\phi$ }}];
Ct = Table[1 / 2 Sum[gI[[k][i]] * (gD[[1][i][m]] + gD[[m][i][1]] - gD[[1][m][i]]), {i, 4}],
  {k, 4}, {l, 4}, {m, 4}];
DCt = D[Ct, {{T, R,  $\theta$ ,  $\phi$ }}];
RieT = Table[-DCt[[k][l][m][n]] + DCt[[k][l][n][m]] +
  Sum[-Ct[[i][l][m]] * Ct[[k][i][n]] + Ct[[i][l][n]] * Ct[[k][i][m]], {i, 4}],
  {k, 4}, {l, 4}, {m, 4}, {n, 4}];
RicT = TensorContract[RieT, {{1, 3}}];
RicS = Simplify[Sum[Sum[gI[[k][l]] * RicT[[k][l]], {k, 4}], {l, 4}]];

Out[43]=
{{-F[R2 - T2]2, 0, 0, 0}, {0, F[R2 - T2]2, 0, 0},
  {0, 0, r[R2 - T2]2, 0}, {0, 0, 0, r[R2 - T2]2 Sin[ $\theta$ ]2}}

In[51]:= (*Väändetensor ja sellest tuletatud suurused*)
GTorudd = Table[Sum[GTetI[[a, as]] *
  (D[GTet[[as, c]], {{T, R,  $\theta$ ,  $\phi$ }}[[b]]) - D[GTet[[as, b]], {{T, R,  $\theta$ ,  $\phi$ }}[[c]])],
  {as, 4}], {a, 4}, {b, 4}, {c, 4}] // Simplify;
GTorV = TensorContract[GTorudd, {{1, 2}}];
GToruuu = Table[Sum[GTorudd[[a, bs, cs]] * gI[[bs, b]] * gI[[cs, c]], {bs, 4}, {cs, 4}],
  {a, 4}, {b, 4}, {c, 4}];
GTorA =
  1
  ---
  6 Table[Sum[Sqrt[-Det[g]] LeviCivitaTensor[4][[a, bs, cs, ds]] * GToruuu[[bs, cs, ds]],
  {bs, 4}, {cs, 4}, {ds, 4}], {a, 4}];
GTorddd = Table[Sum[GTorudd[[as, b, c]] * g[[as, a]], {as, 4}], {a, 4}, {b, 4}, {c, 4}];
GTorT = Table[
  1
  ---
  2 (GTorddd[[a, b, c]] + GTorddd[[b, a, c]]) + 1
  ---
  6 (g[[c, a]] * GTorV[[b]] + g[[c, b]] * GTorV[[a]]) -
  1
  ---
  3 g[[a, b]] * GTorV[[c]], {a, 4}, {b, 4}, {c, 4}];
GTorAu = Table[Sum[GTorA[[as]] * gI[[as, a]], {as, 4}], {a, 4}];
GTorVu = Table[Sum[GTorV[[as]] * gI[[as, a]], {as, 4}], {a, 4}];
GTorTduu = Table[Sum[GTorT[[a, bs, cs]] * gI[[bs, b]] * gI[[cs, c]], {bs, 4}, {cs, 4}],
  {a, 4}, {b, 4}, {c, 4}];
GTorScalar = 3
  ---
  2 Sum[GTorAu[[a]] * GTorA[[a]], {a, 4}] - 2
  ---
  3 Sum[GTorVu[[a]] * GTorV[[a]], {a, 4}] +
  2
  ---
  3 Sum[GTorT[[a, b, c]] * GTorTduu[[d, b, c]] * gI[[a, d]],
  {a, 4}, {b, 4}, {c, 4}, {d, 4}] // Simplify;

```

In[61]:= (*Väljavõrrandid*)

```
FEq = Table[RicT[[a, b]] -  $\frac{\text{RicS}}{2}$  g[[a, b]] +  $\epsilon$  *  $\left(\frac{1}{2}$  Sum[GTorAu[[as]] *  $\frac{1}{3}$ 
  (GTorA[[as]] * g[[a, b]] + GTorA[[a]] * g[[b, as]] + GTorA[[b]] * g[[as, a]]), {as, 4}] -
   $\frac{4}{9}$  Sum[Sqrt[-Det[g]] LeviCivitaTensor[4] [[b, as, bs, cs]] * GTorAu[[as]] *
  GTorTduu[[a, bs, cs]], {as, 4}, {bs, 4}, {cs, 4}] -
   $\frac{2}{9}$  Sum[Sqrt[-Det[g]] LeviCivitaTensor[4] [[a, b, as, bs]] * GTorAu[[as]] *
  GTorVu[[bs]], {as, 4}, {bs, 4}] -  $\frac{1}{3}$  Sum[Sqrt[-Det[g]]
  LeviCivitaTensor[4] [[a, b, as, bs]] * gI[[as, cs]] * Cov[GTorAu[[bs]], {"u"}] [[cs],
  {as, 4}, {bs, 4}, {cs, 4}]], {a, 4}, {b, 4}] // Simplify;
```

In[62]:= (*Antisümm. võrrandid, kasutame esimese lahendamiseks $\beta=b=\text{const.}$ *)

```
FEqDiag1 = Simplify[FEq[[1, 2]] - FEq[[2, 1]] == 0 /.  $\beta \rightarrow (b \&)$ ,
  Assumptions  $\rightarrow \{\epsilon * F[R^2 - T^2] \neq 0, r[R^2 - T^2] \neq 0\}$ 
FEqDiag2 = Simplify[FEq[[3, 4]] - FEq[[4, 3]] == 0 /.  $\beta \rightarrow (b \&)$ ,
  Assumptions  $\rightarrow \{\epsilon * \text{Sin}[\theta] \neq 0, \text{Sin}[b] \neq 0\}$ 
```

Out[62]=

True

Out[63]=

$$2 \cos[b] F[R^2 - T^2] + \frac{1}{\sqrt{R^2 - T^2}} (2 (R^2 - T^2) \cosh[\gamma[R^2 - T^2]] r'[R^2 - T^2] +$$

$$r[R^2 - T^2] (\cosh[\gamma[R^2 - T^2]] + 2 (R^2 - T^2) \sinh[\gamma[R^2 - T^2]] \gamma'[R^2 - T^2])) =$$

$$\frac{2 \sqrt{R^2 - T^2} \cosh[\gamma[R^2 - T^2]] r[R^2 - T^2] F'[R^2 - T^2]}{F[R^2 - T^2]}$$

In[64]:= (*Arvutame teise võrrandi põhjal F*)

```
FSol = DSolve[FEqDiag2 /.  $R^2 \rightarrow a + T^2$  /.

```

$$\left\{ R \sqrt{1 - \frac{T^2}{R^2}} \rightarrow \text{Sqrt}[a], 1 / \left(R \sqrt{1 - \frac{T^2}{R^2}} \right) \rightarrow 1 / \text{Sqrt}[a] \right\}, F[a], a] // \text{Simplify}$$

```
FEqDiag2Sol = % /.  $a \rightarrow R^2 - T^2$ ;
```

```
FEqDiag2SolD = D[% /.  $R^2 - T^2 \rightarrow a, a$ ] /.  $a \rightarrow R^2 - T^2$  // Simplify;
```

```
FEqDiag2SolDD = D[% /.  $R^2 - T^2 \rightarrow a, a$ ] /.  $a \rightarrow R^2 - T^2$  // Simplify;
```

Out[64]=

$$\left\{ \left\{ F[a] \rightarrow \frac{\sqrt{a} \cosh[\gamma[a]] r[a]}{c_1 - a \cos[b]} \right\} \right\}$$

```
In[68]:= (*Asendame saadud tulemuse ülejäänud väljavõrranditesse*)
FEq2 = Simplify[{FEq[[1, 1]], FEq[[2, 2]], FEq[[3, 3]]} /.
  Flatten[{β → (b &), FEqDiag2Sol, FEqDiag2SolD, FEqDiag2SolDD}] /. R^2 → a + T^2];
FEq2 =
  Simplify[{FEq[[1, 1]], FEq[[2, 2]], FEq[[3, 3]]} /. Flatten[{β → (b &)}] /. R^2 → a + T^2];
% // Simplify // MatrixForm
```

Out[70]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{(9+4\epsilon-4\epsilon\cos[2b])F[a]^2 + \frac{72(a+2T^2)r[a]F'[a]r'[a]}{F[a]} - 36(a r'[a]^2 + r[a](r'[a] + 2(a+T^2)r''[a]))}{9r[a]^2} \\ \frac{(-9-4\epsilon+4\epsilon\cos[2b])F[a]^2 + \frac{72(a+2T^2)r[a]F'[a]r'[a]}{F[a]} + 36(a r'[a]^2 + r[a](r'[a] - 2T^2r''[a]))}{9r[a]^2} \\ \frac{4r[a](-ar[a]F'[a]^2 + F[a]r[a]r'[a](F'[a] + aF''[a]) + F[a]^2(r'[a] + ar''[a]))}{F[a]^4} \end{pmatrix}$$

```
In[71]:= (*Arvutame esimese kahe väljavõrrandi lineaarkombinatsioonid*)
FEq3 = Simplify[Table[FEq2[[1]] + {1, -1}[[i]] * FEq2[[2]], {i, 2}], Assumptions → r[a] ≠ 0];
FEq3[[1]] = FEq3[[1]] * F[a] × r[a] / (-8(a + 2T^2));
FEq3[[2]] = FEq3[[2]] * (-9r[a]^2) / 2 /. (-9 - 4ε + 4ε Cos[2b]) → -(9 + 8ε Sin[b]^2);
FEq3 // MatrixForm
```

Out[74]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -2F'[a]r'[a] + F[a]r''[a] \\ F[a]^2(-9 - 8\epsilon\sin[b]^2) + 36(a r'[a]^2 + r[a](r'[a] + ar''[a])) \end{pmatrix}$$

```
In[75]:= (*Leiame väljavõrrandite omavahelisest võrdlusest γ*)
FSol2 = SolveValues[FEq3[[2]] == 0, F[a]] // Simplify;
Solve[FSol2^2 == F[a]^2 /. FSol, γ[a]] /. C[2] → 0 // Simplify // Flatten;
γSol0 = {%%[[3]], %%[[4]]}
```

Out[77]=

$$\left\{ \begin{aligned} \gamma[a] &\rightarrow -\text{ArcCosh}\left[\frac{6(c_1 - a\cos[b])\sqrt{ar'[a]^2 + r[a](r'[a] + ar''[a])}}{\sqrt{a}r[a]\sqrt{9 + 8\epsilon\sin[b]^2}}\right], \\ \gamma[a] &\rightarrow \text{ArcCosh}\left[\frac{6(c_1 - a\cos[b])\sqrt{ar'[a]^2 + r[a](r'[a] + ar''[a])}}{\sqrt{a}r[a]\sqrt{9 + 8\epsilon\sin[b]^2}}\right] \end{aligned} \right\}$$

```
In[78]:= (*Võrdlusest KS koordinaatteisendusega leidsime γ,
asendame selle väljavõrranditesse*)
(*γ leidmisel tekkis 2 võimalust, peame ühe valima*)
γSol = γSol0[[2, 2]];
γ[a_] := γSol
FEq4 = FEq3 * r[a]^2 / 2 // FullSimplify;
FEq4 = FEq3 /. Flatten[{FSol, D[FSol, a]}] // FullSimplify;
% // MatrixForm
```

Out[82]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -\frac{6(2r'[a]^3 + 2ar'[a]^2r''[a] - ar[a]r''[a]^2 + r[a]r'[a](r'[a] + ar^{(3)}[a]))}{\sqrt{9 + 8\epsilon\sin[b]^2}\sqrt{ar'[a]^2 + r[a](r'[a] + ar''[a])}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

```

In[83]:= (*Mathematica ise ülejäänud võrrandeid lahendada ei suuda,
kuid võime KS koordinaatide põhjal r jaoks kuju välja pakkuda*)
r[a_] := (d1 + d2 ProductLog[a / E])
FEq2[[3]] /. Flatten[{FSol, D[FSol, a], D[FSol, a, a]}] // Simplify
% /. d1 -> d2
FEq4[[1]] // Simplify
% /. d1 -> d2
(*Näeme, et väljavõrrandite lahendamiseks on vaja nõuda, et d1=d2*)

Out[84]:=
- ( ( (d1 - d2) (-9 - 4 ε + 4 ε Cos[2 b]) (d1 + d2 ProductLog[a / E])
      (-2 d1^2 + d1 (d1 - 5 d2) ProductLog[a / E] + 4 (d1 - d2) d2 ProductLog[a / E]^2 +
      d2 (3 d1 + d2) ProductLog[a / E]^3 + 2 d2^2 ProductLog[a / E]^4) ) /
      (9 d2 (1 + ProductLog[a / E]) (d1 + 2 d2 ProductLog[a / E] + d2 ProductLog[a / E]^2)^3) )

Out[85]:=
0

Out[86]:=

$$\frac{12 (d1 - d2) d2^2 \text{ProductLog}\left[\frac{a}{e}\right]^3}{a^3 \left(1 + \text{ProductLog}\left[\frac{a}{e}\right]\right)^6 \sqrt{\frac{d2 \text{ProductLog}\left[\frac{a}{e}\right] (d1 + 2 d2 \text{ProductLog}\left[\frac{a}{e}\right] + d2 \text{ProductLog}\left[\frac{a}{e}\right]^2)}{a \left(1 + \text{ProductLog}\left[\frac{a}{e}\right]\right)^3}} \sqrt{9 + 8 \epsilon \sin[b]^2}}$$


Out[87]:=
0

In[88]:= (*Vaatame meetrikat*)
r[a_] := d (1 + ProductLog[a / E])
(F[a] /. FSol)^2 // Simplify // Together;
% /. (1 + ProductLog[a / E]) -> r_sol[a] / d /. ProductLog[a / E] ->
      a / E
      Exp[ProductLog[a / E]] /. ProductLog[a / E] -> r_sol[a] / d - 1 // Simplify;
% // Flatten // DeleteDuplicates
(*Et saada piirjuhul GR, peab kehtima d=2M*)
% /. {d -> 2 M, ε -> 0}

Out[91]:=

$$\left\{ \frac{36 d^3 e^{-\frac{r_{sol}[a]}{d}}}{(9 + 8 \epsilon \sin[b]^2) r_{sol}[a]} \right\}$$


Out[92]:=

$$\left\{ \frac{32 e^{-\frac{r_{sol}[a]}{2M}} M^3}{r_{sol}[a]} \right\}$$


```

Koordinaatteisendus

In[93]:= (*Koordinaatteisenduse võrrandid*)

$$r[a_] := 2M \left(1 + \text{ProductLog}\left[\frac{a}{e}\right] \right)$$

$$F[a_] := \frac{12 \sqrt{2} e^{-\frac{r[a]}{4M}} M^{3/2}}{\sqrt{9/h} \sqrt{r[a]}}$$

$$gEq1 = - \left(1 - \frac{2M}{r[R^2 - T^2]} \right) * D[t[R, T], T]^2 +$$

$$h \left(1 - \frac{2M}{r[R^2 - T^2]} \right)^{-1} * D[r[R^2 - T^2], T]^2 + F[R^2 - T^2]^2 /.$$

$$\left\{ \text{ProductLog}\left[\frac{R^2 - T^2}{e}\right] \rightarrow \frac{r}{2M} - 1, (R^2 - T^2) \rightarrow \left(\frac{r}{2M} - 1\right) \text{Exp}[r / (2M)] \right\} // \text{FullSimplify}$$

$$gEq2 = - \left(1 - \frac{2M}{r[R^2 - T^2]} \right) * D[t[R, T], R]^2 +$$

$$h \left(1 - \frac{2M}{r[R^2 - T^2]} \right)^{-1} * D[r[R^2 - T^2], R]^2 - F[R^2 - T^2]^2 /.$$

$$\left\{ \text{ProductLog}\left[\frac{R^2 - T^2}{e}\right] \rightarrow \frac{r}{2M} - 1, (R^2 - T^2) \rightarrow \left(\frac{r}{2M} - 1\right) \text{Exp}[r / (2M)] \right\} // \text{FullSimplify}$$

Clear[r, F]

Out[95]=

$$32 e^{-\frac{r}{M}} h M^3 \left(\frac{e^{\frac{r}{2M}}}{r} - \frac{2MT^2}{2Mr - r^2} \right) + \left(-1 + \frac{2M}{r} \right) t^{(\theta, 1)}[R, T]^2$$

Out[96]=

$$32 e^{-\frac{r}{M}} h M^3 \left(-\frac{e^{\frac{r}{2M}}}{r} - \frac{2MR^2}{2Mr - r^2} \right) + \left(-1 + \frac{2M}{r} \right) t^{(1, \theta)}[R, T]^2$$

```

In[98]:= (*Pakume t jaoks kuju välja*)
t[R_, T_] := t0 * Log[ $\frac{R+T}{R-T}$ ]
Simplify[gEq1 - gEq2] //.
{ (R - T) → (R^2 - T^2) / (R + T), (R^2 - T^2) →  $\left(\frac{r}{2M} - 1\right) \text{Exp}[r / (2M)]$  } // FullSimplify
Simplify[gEq1 + gEq2] //.
{ (R - T) → (R^2 - T^2) / (R + T), (R^2 - T^2) →  $\left(\frac{r}{2M} - 1\right) \text{Exp}[r / (2M)]$  } // FullSimplify
(*Kummalgi võrrandil on sama lahend. Jätame negatiivse d väärtuse kõrvale,
et r jääks positiivseks*)
Solve[% == 0, t0]
Clear[t]

Out[99]=

$$\frac{8 e^{-\frac{r}{2M}} M (4 h M^2 - t0^2)}{r}$$


Out[100]=

$$-\frac{16 e^{-\frac{r}{M}} M^2 (R^2 + T^2) (4 h M^2 - t0^2)}{(2M - r) r}$$


Out[101]=
{{t0 → -2  $\sqrt{h} M$ }, {t0 → 2  $\sqrt{h} M$ }}

```

In[103]:=

```

(*Tetraadi mugavamaks teisendamine*)
r[a_] := 2 M (1 + ProductLog[ $\frac{a}{e}$ ])
F[a_] :=  $\frac{12 \sqrt{2} e^{-\frac{r[a]}{4M}} M^{3/2}}{\sqrt{9/h} \sqrt{r[a]}}$ 
 $\chi[a_] := \text{ArcCosh}\left[\frac{12 M (c_1 - a \text{Cos}[b]) \sqrt{-2 M + r[a]}}{a \sqrt{9/h} r[a]^{3/2}}\right]$ 
GTet /.  $\beta \rightarrow (b \ \&) /. \text{ProductLog}\left[\frac{R^2 - T^2}{e}\right] \rightarrow \frac{r}{2 M} - 1 /.
(R^2 - T^2) \rightarrow \text{Exp}[r / (2 M)] \left(\frac{r}{2 M} - 1\right);
GTet2 = FullSimplify[% // PowerExpand, Assumptions  $\rightarrow \{r \geq 0, M \geq 0\}$ ] /.
 $\sqrt{-r^{3/2} + \frac{8 e^{-\frac{r}{2M}} \sqrt{h} M^2 c_1}{\sqrt{-2 M + r}} - 4 \sqrt{h} M \sqrt{-2 M + r} \text{Cos}[b]}$ 
 $\sqrt{r^{3/2} + \frac{8 e^{-\frac{r}{2M}} \sqrt{h} M^2 c_1}{\sqrt{-2 M + r}} - 4 \sqrt{h} M \sqrt{-2 M + r} \text{Cos}[b]} \rightarrow$ 
 $\sqrt{-r^3 + \frac{64 e^{-\frac{r}{M}} h M^4 c_1^2}{-2 M + r} + 16 h M^2 \text{Cos}[b] \left(-4 e^{-\frac{r}{2M}} M c_1 + (-2 M + r) \text{Cos}[b]\right)}$ ;
% /.  $\sqrt{-r^{3/2} - 4 \sqrt{h} M \sqrt{-2 M + r} \text{Cos}[b]} \sqrt{r^{3/2} - 4 \sqrt{h} M \sqrt{-2 M + r} \text{Cos}[b]} \rightarrow$ 
 $\sqrt{-r^3 + 16 h M^2 (-2 M + r) \text{Cos}[b]^2} // \text{Expand};$ 
% /.  $\{T \rightarrow T * \text{Sqrt}[\text{Sign}[r - 2 M] (r - 2 M)], R \rightarrow R * \text{Sqrt}[\text{Sign}[r - 2 M] (r - 2 M)]\} //$ 
PowerExpand;
Collect[GTet2, {T, R}] /.
 $\sqrt{-r^3 + \frac{64 e^{-\frac{r}{M}} h M^4 c_1^2}{-2 M + r} + 16 h M^2 \text{Cos}[b] \left(-4 e^{-\frac{r}{2M}} M c_1 + (-2 M + r) \text{Cos}[b]\right)}$   $\rightarrow$ 
 $f1[r] \frac{r^2 \sqrt{-2 + \frac{r}{M}}}{8 e^{-\frac{r}{2M}} \sqrt{h} M^{3/2}} // \text{FullSimplify};$ 
GTetShort = % /.  $\left(2 M c_1 + e^{\frac{r}{2M}} (2 M - r) \text{Cos}[b]\right) \rightarrow f2[r] \frac{-r^2 (-2 M + r)^{3/2}}{32 e^{-\frac{r}{M}} h M^{7/2} \sqrt{-2 + \frac{r}{M}}} // \text{Simplify};$ 
Do[Print[%[n]], {n, 4}]
{-T f1[r] - R f2[r], R f1[r] + T f2[r],  $\theta, \theta$ }
{-Cos[ $\phi$ ] (R f1[r] + T f2[r]) Sin[ $\theta$ ], Cos[ $\phi$ ] (T f1[r] + R f2[r]) Sin[ $\theta$ ],
r (Cos[b] Cos[ $\theta$ ] Cos[ $\phi$ ] - Sin[b] Sin[ $\phi$ ]), -r Sin[ $\theta$ ] (Cos[ $\theta$ ] Cos[ $\phi$ ] Sin[b] + Cos[b] Sin[ $\phi$ ])}
{-((R f1[r] + T f2[r]) Sin[ $\theta$ ] Sin[ $\phi$ ]), (T f1[r] + R f2[r]) Sin[ $\theta$ ] Sin[ $\phi$ ],
r (Cos[ $\phi$ ] Sin[b] + Cos[b] Cos[ $\theta$ ] Sin[ $\phi$ ]), r Sin[ $\theta$ ] (Cos[b] Cos[ $\phi$ ] - Cos[ $\theta$ ] Sin[b] Sin[ $\phi$ ])}
{-Cos[ $\theta$ ] (R f1[r] + T f2[r]), Cos[ $\theta$ ] (T f1[r] + R f2[r]), -r Cos[b] Sin[ $\theta$ ], r Sin[b] Sin[ $\theta$ ]^2}$ 
```

In[113]:=

```

(*Tetraadi koordinaatteesendus Schwarzschildi koordinaatidesse*)
ConvTet = Table[GTetShort[[i]].{dT, dR, dθ, dφ}, {i, 4}];
R[t_, r_] := Sqrt[-(1 - r/2M)] Exp[r/(4M)] Cosh[t Sqrt[9/h]/12M]
T[t_, r_] := Sqrt[-(1 - r/2M)] Exp[r/(4M)] Sinh[t Sqrt[9/h]/12M]
D[T[t, r], t] // PowerExpand;
DTt = % /. Cosh[t/(4 Sqrt[h] M)] -> R / (Sqrt[-(1 - r/2M)] Exp[r/(4M)]);
D[T[t, r], r] // PowerExpand;
DTr = % /. Sinh[t/(4 Sqrt[h] M)] -> T / (Sqrt[-(1 - r/2M)] Exp[r/(4M)]);
D[R[t, r], r] // PowerExpand;
DRr = % /. Cosh[t/(4 Sqrt[h] M)] -> R / (Sqrt[-(1 - r/2M)] Exp[r/(4M)]);
D[R[t, r], t] // PowerExpand;
DRt = % /. Sinh[t/(4 Sqrt[h] M)] -> T / (Sqrt[-(1 - r/2M)] Exp[r/(4M)]);

Clear[T, R]
dT = DTt dt + DTr dr // Simplify;
dR = DRt dt + DRr dr // Simplify;
Table[Coefficient[ConvTet[[i]] // Simplify, {dt, dr, dθ, dφ}[[j]], {i, 4}, {j, 4}] /.
  R^2 -> T^2 + Exp[r/(2M)] (r/2M - 1) // FullSimplify;

Do[Print[%[[n]]], {n, 4}]
Clear[dT, dR]
{
  e^(r/2M) (2M - r) f2[r] / (8 Sqrt[h] M^2), e^(r/2M) r f1[r] / (8 M^2), 0, 0
},
{
  e^(r/2M) (2M - r) Cos[φ] f1[r] Sin[θ] / (8 Sqrt[h] M^2), e^(r/2M) r Cos[φ] f2[r] Sin[θ] / (8 M^2),
  r (Cos[b] Cos[θ] Cos[φ] - Sin[b] Sin[φ]), -r Sin[θ] (Cos[θ] Cos[φ] Sin[b] + Cos[b] Sin[φ])
},
{
  e^(r/2M) (2M - r) f1[r] Sin[θ] Sin[φ] / (8 Sqrt[h] M^2), e^(r/2M) r f2[r] Sin[θ] Sin[φ] / (8 M^2),
  r (Cos[φ] Sin[b] + Cos[b] Cos[θ] Sin[φ]), r Sin[θ] (Cos[b] Cos[φ] - Cos[θ] Sin[b] Sin[φ])
},
{
  e^(r/2M) (2M - r) Cos[θ] f1[r] / (8 Sqrt[h] M^2), e^(r/2M) r Cos[θ] f2[r] / (8 M^2), -r Cos[b] Sin[θ], r Sin[b] Sin[θ]^2
}

```

Vääne

In[130]:=

```

(*KS-sarnaste koordinaatide lahendi Ricci tensor ja vääne*)
(*r[a_]:=2M(1+ProductLog[ $\frac{a}{e}$ ])
F[a_]:= $\frac{12 \sqrt{2} e^{-\frac{r[a]}{4M}} M^{3/2}}{\sqrt{9/h} \sqrt{r[a]}}$ 
 $\gamma[a_]:=ArcCosh\left[\frac{12 M (c_1-a \text{Cos}[b]) \sqrt{-2 M+r[a]}}{a \sqrt{9/h} r[a]^{3/2}}\right]$ *)
 $\beta[T_, R_] := b$ 
RicT /. ProductLog[ $\frac{R^2 - T^2}{e}$ ]  $\rightarrow \frac{r}{2M} - 1$  // PowerExpand // FullSimplify;
% /. (R^2 - T^2)  $\rightarrow \text{Exp}[r / (2M)] \left(\frac{r}{2M} - 1\right)$  // FullSimplify
GTorudd /. ProductLog[ $\frac{R^2 - T^2}{e}$ ]  $\rightarrow \frac{r}{2M} - 1$  // PowerExpand // FullSimplify;
% /. (R^2 - T^2)  $\rightarrow \text{Exp}[r / (2M)] \left(\frac{r}{2M} - 1\right)$  // FullSimplify;
FullSimplify[% /. C[1]  $\rightarrow \theta$  /. (R - T) (R + T)  $\rightarrow (R^2 - T^2)$  /. (R^2 - T^2)  $\rightarrow a$  /. (-R^2 + T^2)  $\rightarrow -a$ ,
Assumptions  $\rightarrow \{M > \theta, r > \theta, b \in \text{Reals}, h > \theta\}$ ];
FullSimplify[
% /.  $\sqrt{-1 - \frac{8 a e^{-\frac{r}{2M}} M^2 \text{Cos}[b]}{\sqrt{\frac{r^3 (-2M+r)}{h}}}} \sqrt{1 - \frac{8 a e^{-\frac{r}{2M}} M^2 \text{Cos}[b]}{\sqrt{\frac{r^3 (-2M+r)}{h}}}} \rightarrow \sqrt{-1 - \frac{64 a^2 e^{-\frac{r}{M}} h M^4 \text{Cos}[b]^2}{(2M - r) r^3}}$  /.
 $\left(\sqrt{-1 - \frac{8 a e^{-\frac{r}{2M}} M^2 \text{Cos}[b]}{\sqrt{\frac{r^3 (-2M+r)}{h}}}} \sqrt{1 - \frac{8 a e^{-\frac{r}{2M}} M^2 \text{Cos}[b]}{\sqrt{\frac{r^3 (-2M+r)}{h}}}}\right)^{-1} \rightarrow$ 
 $1 / \sqrt{-1 - \frac{64 a^2 e^{-\frac{r}{M}} h M^4 \text{Cos}[b]^2}{(2M - r) r^3}}$  /.  $\sqrt{-1 - \frac{4 M \sqrt{h (-2M+r)} \text{Cos}[b]}{r^{3/2}}}$ 
 $\sqrt{1 - \frac{4 M \sqrt{h (-2M+r)} \text{Cos}[b]}{r^{3/2}}} \rightarrow \sqrt{-1 + \frac{16 h M^2 (-2M+r) \text{Cos}[b]^2}{r^3}}$  /.
a  $\rightarrow \text{Exp}[r / (2M)] \left(\frac{r}{2M} - 1\right)$ , Assumptions  $\rightarrow \{M > \theta, r > \theta, b \in \text{Reals}, h > \theta\}$ ];
Do[Print[%[[n]]], {n, 4}]

```

Out[132]=

$$\left\{ \{0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0\}, \left\{0, 0, \frac{-1+h}{h}, 0\right\}, \left\{0, 0, 0, \frac{(-1+h) \text{Sin}[\theta]^2}{h}\right\} \right\}$$

$$\left\{ \left\{ \theta, \frac{8 e^{-\frac{r}{2M}} M^3 \left(\frac{r^{3/2} R}{2M-r} + \frac{4 h (3M-r) T \cos [b]}{\sqrt{h (-2M+r)} \sqrt{-1 + \frac{16 h M^2 (-2M+r) \cos [b]^2}{r^3}}} \right)}{r^{7/2}}, \theta, \theta \right\}, \right.$$

$$\left. \frac{8 e^{-\frac{r}{2M}} M^3 \left(\frac{r^{3/2} R}{-2M+r} + \frac{4 h (-3M+r) T \cos [b]}{\sqrt{h (-2M+r)} \sqrt{-1 + \frac{16 h M^2 (-2M+r) \cos [b]^2}{r^3}}} \right)}{r^{7/2}}, \theta, \theta, \theta \right\},$$

$$\left\{ \theta, \theta, \theta, \frac{(4 M \sqrt{h (-2M+r)} T \cos [b] + R \sqrt{-r^3 + 16 h M^2 (-2M+r) \cos [b]^2}) \sin [b] \sin [\theta]}{2 M \sqrt{h (-2M+r)}} \right\},$$

$$\left\{ \theta, \theta, -\frac{(4 M \sqrt{h (-2M+r)} T \cos [b] + R \sqrt{-r^3 + 16 h M^2 (-2M+r) \cos [b]^2}) \sin [b] \sin [\theta]}{2 M \sqrt{h (-2M+r)}}, \theta \right\}$$

$$\left\{ \left\{ \theta, \frac{8 e^{-\frac{r}{2M}} M^3 \left(\frac{r^{3/2} T}{2M-r} + \frac{4 h (3M-r) R \cos [b]}{\sqrt{h (-2M+r)} \sqrt{-1 + \frac{16 h M^2 (-2M+r) \cos [b]^2}{r^3}}} \right)}{r^{7/2}}, \theta, \theta \right\}, \right.$$

$$\left. \frac{8 e^{-\frac{r}{2M}} M^3 \left(\frac{r^{3/2} T}{-2M+r} + \frac{4 h (-3M+r) R \cos [b]}{\sqrt{h (-2M+r)} \sqrt{-1 + \frac{16 h M^2 (-2M+r) \cos [b]^2}{r^3}}} \right)}{r^{7/2}}, \theta, \theta, \theta \right\},$$

$$\left\{ \theta, \theta, \theta, \frac{(4 M \sqrt{h (-2M+r)} R \cos [b] + T \sqrt{-r^3 + 16 h M^2 (-2M+r) \cos [b]^2}) \sin [b] \sin [\theta]}{2 M \sqrt{h (-2M+r)}} \right\},$$

$$\left\{ \theta, \theta, -\frac{(4 M \sqrt{h (-2M+r)} R \cos [b] + T \sqrt{-r^3 + 16 h M^2 (-2M+r) \cos [b]^2}) \sin [b] \sin [\theta]}{2 M \sqrt{h (-2M+r)}}, \theta \right\}$$

$$\left\{ \left\{ \theta, \theta, \frac{1}{(2M-r)r^3} 8 e^{-\frac{r}{2M}} M^2 \right. \right.$$

$$\left. \left(r(-2M+r)T + 4hM(2M-r)T \cos[b]^2 - \sqrt{h(-2M+r)} R \cos[b] \sqrt{-r^3 + 16hM^2(-2M+r) \cos[b]^2} \right), \right.$$

$$\left. \frac{8 e^{-\frac{r}{2M}} M^2 \left(4\sqrt{h(-2M+r)} T \cos[b] + R \sqrt{-r^3 + 16hM^2(-2M+r) \cos[b]^2} \right) \sin[b] \sin[\theta]}{r^3 \sqrt{\frac{-2M+r}{h}}} \right\},$$

$$\left\{ \theta, \theta, -\frac{1}{r^3 \sqrt{-2 + \frac{r}{M}}} 8 e^{-\frac{r}{2M}} M^{3/2} \right.$$

$$\left. \left(-r \sqrt{-2M+r} R + 4hM \sqrt{-2M+r} R \cos[b]^2 + T \cos[b] \sqrt{h(-r^3 + 16hM^2(-2M+r) \cos[b]^2)} \right), \right.$$

$$\left. \frac{1}{(2M-r)r^3} 8 e^{-\frac{r}{2M}} \sqrt{h} M^2 \left(4\sqrt{h} M(-2M+r) R \cos[b] + \sqrt{-2M+r} T \sqrt{-r^3 + 16hM^2(-2M+r) \cos[b]^2} \right) \right.$$

$$\left. \sin[b] \sin[\theta] \right\}, \left\{ -\frac{1}{r^3 \sqrt{-2 + \frac{r}{M}}} 8 e^{-\frac{r}{2M}} M^{3/2} \right.$$

$$\left. \left(-r \sqrt{-2M+r} T + 4hM \sqrt{-2M+r} T \cos[b]^2 + R \cos[b] \sqrt{h(-r^3 + 16hM^2(-2M+r) \cos[b]^2)} \right), \right.$$

$$\left. \frac{1}{(2M-r)r^3} 8 e^{-\frac{r}{2M}} M^2 \left(r(-2M+r)R + 4hM(2M-r)R \cos[b]^2 - \right. \right.$$

$$\left. \left. \sqrt{h(-2M+r)} T \cos[b] \sqrt{-r^3 + 16hM^2(-2M+r) \cos[b]^2} \right), \theta, \theta \right\}, \left\{ \frac{1}{(2M-r)r^3} 8 e^{-\frac{r}{2M}} \sqrt{h} M^2 \right.$$

$$\left. \left(4\sqrt{h} M(-2M+r) T \cos[b] + \sqrt{-2M+r} R \sqrt{-r^3 + 16hM^2(-2M+r) \cos[b]^2} \right) \sin[b] \sin[\theta], \right.$$

$$\left. \frac{8 e^{-\frac{r}{2M}} \sqrt{h} M^2 \left(4\sqrt{h} M(2M-r) R \cos[b] - \sqrt{-2M+r} T \sqrt{-r^3 + 16hM^2(-2M+r) \cos[b]^2} \right) \sin[b] \sin[\theta]}{(2M-r)r^3} \right.$$

$$\left. \left. , \theta, \theta \right\} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \left\{ \theta, \theta, \frac{1}{(2M-r)r^3} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 8e^{-\frac{r}{2M}} \sqrt{h} M^2 \left(4\sqrt{h} M (-2M+r) T \cos[b] + \sqrt{-2M+r} R \sqrt{-r^3 + 16hM^2 (-2M+r) \cos[b]^2} \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \operatorname{Csc}[\theta] \sin[b], \frac{1}{(2M-r)r^3} 8e^{-\frac{r}{2M}} M^2 \left(r(-2M+r) T + 4hM(2M-r) T \cos[b]^2 - \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. \sqrt{h(-2M+r)} R \cos[b] \sqrt{-r^3 + 16hM^2 (-2M+r) \cos[b]^2} \right) \right\}, \left\{ \theta, \theta, \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \frac{8e^{-\frac{r}{2M}} \sqrt{h} M^2 \left(4\sqrt{h} M(2M-r) R \cos[b] - \sqrt{-2M+r} T \sqrt{-r^3 + 16hM^2 (-2M+r) \cos[b]^2} \right) \operatorname{Csc}[\theta] \sin[b]}{(2M-r)r^3} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. , -\frac{1}{r^3 \sqrt{-2 + \frac{r}{M}}} 8e^{-\frac{r}{2M}} M^{3/2} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left(-r \sqrt{-2M+r} R + 4hM \sqrt{-2M+r} R \cos[b]^2 + T \cos[b] \sqrt{h(-r^3 + 16hM^2 (-2M+r) \cos[b]^2)} \right) \right\}, \right. \\
& \quad \left. \left\{ \frac{8e^{-\frac{r}{2M}} M^2 \left(4M \sqrt{h(-2M+r)} T \cos[b] + R \sqrt{-r^3 + 16hM^2 (-2M+r) \cos[b]^2} \right) \operatorname{Csc}[\theta] \sin[b]}{r^3 \sqrt{\frac{-2M+r}{h}}}, \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \frac{1}{(2M-r)r^3} 8e^{-\frac{r}{2M}} \sqrt{h} M^2 \left(4\sqrt{h} M (-2M+r) R \cos[b] + \sqrt{-2M+r} T \sqrt{-r^3 + 16hM^2 (-2M+r) \cos[b]^2} \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \operatorname{Csc}[\theta] \sin[b], \theta, \theta \right\}, \left\{ -\frac{1}{r^3 \sqrt{-2 + \frac{r}{M}}} 8e^{-\frac{r}{2M}} M^{3/2} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left(-r \sqrt{-2M+r} T + 4hM \sqrt{-2M+r} T \cos[b]^2 + R \cos[b] \sqrt{h(-r^3 + 16hM^2 (-2M+r) \cos[b]^2)} \right) \right\}, \right. \\
& \quad \left. \left\{ \frac{1}{(2M-r)r^3} 8e^{-\frac{r}{2M}} M^2 \left(r(-2M+r) R + 4hM(2M-r) R \cos[b]^2 - \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. \sqrt{h(-2M+r)} T \cos[b] \sqrt{-r^3 + 16hM^2 (-2M+r) \cos[b]^2} \right) \right\}, \theta, \theta \right\}
\end{aligned}$$

In[138]:=

(*Väände skalaarid*)

$$\text{Sum}[\text{GTorVu}[\mathbf{a}] * \text{GTorV}[\mathbf{a}], \{a, 4\}] /. \text{ProductLog}\left[\frac{R^2 - T^2}{e}\right] \rightarrow \frac{r}{2M} - 1 /. T^2 \rightarrow -a + R^2 /.$$

$$a \rightarrow \text{Exp}[r / (2M)] \left(\frac{r}{2M} - 1\right) // \text{PowerExpand} // \text{Simplify};$$

$$\text{FullSimplify}\left[\% /. T^2 \rightarrow -a + R^2 /. a \rightarrow \text{Exp}[r / (2M)] \left(\frac{r}{2M} - 1\right), \right.$$

$$\left. \text{Assumptions} \rightarrow \{r \geq 0, M \geq 0\}\right]$$

$$\text{Sum}[\text{GTorAu}[\mathbf{a}] * \text{GTorA}[\mathbf{a}], \{a, 4\}] /. \text{ProductLog}\left[\frac{R^2 - T^2}{e}\right] \rightarrow \frac{r}{2M} - 1 /. T^2 \rightarrow -a + R^2 /.$$

$$a \rightarrow \text{Exp}[r / (2M)] \left(\frac{r}{2M} - 1\right) // \text{PowerExpand} // \text{Simplify};$$

$$\text{FullSimplify}\left[\% /. T^2 \rightarrow -a + R^2 /. a \rightarrow \text{Exp}[r / (2M)] \left(\frac{r}{2M} - 1\right), \right.$$

$$\left. \text{Assumptions} \rightarrow \{r \geq 0, M \geq 0\}\right]$$

$$\text{GTorScalar} /. \text{ProductLog}\left[\frac{R^2 - T^2}{e}\right] \rightarrow \frac{r}{2M} - 1 /. T^2 \rightarrow -a + R^2 /.$$

$$a \rightarrow \text{Exp}[r / (2M)] \left(\frac{r}{2M} - 1\right) // \text{PowerExpand} // \text{Simplify};$$

$$\text{FullSimplify}\left[\% /. T^2 \rightarrow -a + R^2 /. a \rightarrow \text{Exp}[r / (2M)] \left(\frac{r}{2M} - 1\right), \right.$$

$$\left. \text{Assumptions} \rightarrow \{r \geq 0, M \geq 0\}\right]$$

Out[139]=

$$\frac{1}{r^3} \left(-8M + \left(2 + \frac{3}{h}\right)r - 16 e^{-\frac{r}{2M}} M c_1 \cos[b] + 2(-4M + r) \cos[2b] + \right. \\ \left. \left(r^2 \left(-e^{\frac{r}{M}} r (-3M + r)^2 - 16 h M^2 (6M + r) c_1^2 + 32 e^{\frac{r}{2M}} h M^2 (-3M + r) c_1 \cos[b] \right) \right) / \right. \\ \left. \left(h \left(64 h M^4 c_1^2 + 64 e^{\frac{r}{2M}} h M^3 (2M - r) c_1 \cos[b] + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. e^{\frac{r}{M}} (2M - r) (8 h M^2 (2M - r) + r^3 + 8 h M^2 (2M - r) \cos[2b]) \right) \right) \right)$$

Out[141]=

$$-\frac{16 \sin[b]^2}{9 r^2}$$

Out[143]=

$$\frac{2 \left(-\frac{(1+h) r^2}{h} + 8 M \cos[b] \left(e^{-\frac{r}{2M}} (2M + r) c_1 + 2 M \cos[b] \right) \right)}{r^4}$$

In[144]:=

(*Kontrollime, et tetraadi determinant on reaalne*)

$$\text{DetTet} /. \text{ProductLog}\left[\frac{R^2 - T^2}{e}\right] \rightarrow \frac{r}{2M} - 1 // \text{Simplify}$$

Out[144]=

$$-32 e^{-\frac{r}{2M}} h M^3 r \sin[\theta]$$

In[145]:=

Clear[F, β, γ, r]

EF koordinaadid

In[146]:=

```
(*Tetraadi kuju määravad funktsioonid*)
K1[T, R] = F[T, R] Cosh[γ[T, R]];
K2[T, R] = F[T, R] Sinh[α[T, R]];
K3[T, R] = F[T, R] Sinh[γ[T, R]];
K4[T, R] = K2[T, R];
K5[T, R] = R Cos[β[T, R]];
K6[T, R] = R Sin[β[T, R]];
```

In[152]:=

```
(*Tetraadid*)
Tet0 = K1[T, R] dT + K2[T, R] dR // Simplify;
Tet1 =
  (K3[T, R] dT + K4[T, R] dR) Sin[θ] Cos[φ] + (K5[T, R] Cos[θ] Cos[φ] - K6[T, R] Sin[φ]) dθ -
  (K5[T, R] Sin[φ] + K6[T, R] Cos[θ] Cos[φ]) Sin[θ] dφ // Simplify;
Tet2 =
  (K3[T, R] dT + K4[T, R] dR) Sin[θ] Sin[φ] + (K5[T, R] Cos[θ] Sin[φ] + K6[T, R] Cos[φ]) dθ +
  (K5[T, R] Cos[φ] - K6[T, R] Cos[θ] Sin[φ]) Sin[θ] dφ // Simplify;
Tet3 = (K3[T, R] dT + K4[T, R] dR) Cos[θ] -
  K5[T, R] Sin[θ] dθ + K6[T, R] Sin[θ]^2 dφ // Simplify;
```

In[156]:=

```
(*Tetraadi maatriks ja pöördmaatriks*)
GTet = Table[Coefficient[{Tet0, Tet1, Tet2, Tet3}[[i]], {dT, dR, dθ, dφ}[[j]], 1],
  {i, 4}, {j, 4} // Simplify;
GTetI = Inverse[GTet] // FullSimplify;
```

In[158]:=

```
(*Lie tuletis*)
Simplify[1 * D[GTet, T] + 0 * D[GTet, R] +
  Table[- (D[GTet[[a, 1]], {T, R, θ, φ}[[b]] * 1 + D[GTet[[a, 2]], {T, R, θ, φ}[[b]] * 0) +
    D[1, {T, R, θ, φ}[[b]] * GTet[[a, 1]] +
    D[0, {T, R, θ, φ}[[b]] * GTet[[a, 2]] + D[GTet[[a, 1]], {T, R, θ, φ}[[b]] * 1 +
    D[GTet[[a, 2]], {T, R, θ, φ}[[b]] * 0, {a, 4}, {b, 4}]];
LDEq = Simplify[Table[%[[a, b]] == 0, {a, 4}, {b, 4}]];
Do[Print[%[[n]], {n, 4}]
(*Lie tuletise lahend*)
LDEq /. {α → (a[R] &), β → (b[R] &), γ → (c[R] &), F → (f[R] &)} // FullSimplify //
  MatrixForm
```

$$\begin{aligned}
& \{ \text{Cosh}[\gamma[T, R]] F^{(1,0)}[T, R] + F[T, R] \text{Sinh}[\gamma[T, R]] \gamma^{(1,0)}[T, R] = 0, \\
& \quad \text{Sinh}[\alpha[T, R]] F^{(1,0)}[T, R] + \text{Cosh}[\alpha[T, R]] F[T, R] \alpha^{(1,0)}[T, R] = 0, \text{True}, \text{True} \} \\
& \{ \text{Cos}[\phi] \text{Sin}[\theta] (\text{Sinh}[\gamma[T, R]] F^{(1,0)}[T, R] + \text{Cosh}[\gamma[T, R]] F[T, R] \gamma^{(1,0)}[T, R]) = 0, \\
& \quad \text{Cos}[\phi] \text{Sin}[\theta] (\text{Sinh}[\alpha[T, R]] F^{(1,0)}[T, R] + \text{Cosh}[\alpha[T, R]] F[T, R] \alpha^{(1,0)}[T, R]) = 0, \\
& \quad R (\text{Cos}[\beta[T, R]] \text{Sin}[\phi] + \text{Cos}[\theta] \text{Cos}[\phi] \text{Sin}[\beta[T, R]]) \beta^{(1,0)}[T, R] = 0, \\
& \quad R \text{Sin}[\theta] (\text{Cos}[\theta] \text{Cos}[\phi] \text{Cos}[\beta[T, R]] - \text{Sin}[\phi] \text{Sin}[\beta[T, R]]) \beta^{(1,0)}[T, R] = 0 \} \\
& \{ \text{Sin}[\theta] \text{Sin}[\phi] (\text{Sinh}[\gamma[T, R]] F^{(1,0)}[T, R] + \text{Cosh}[\gamma[T, R]] F[T, R] \gamma^{(1,0)}[T, R]) = 0, \\
& \quad \text{Sin}[\theta] \text{Sin}[\phi] (\text{Sinh}[\alpha[T, R]] F^{(1,0)}[T, R] + \text{Cosh}[\alpha[T, R]] F[T, R] \alpha^{(1,0)}[T, R]) = 0, \\
& \quad R (\text{Cos}[\phi] \text{Cos}[\beta[T, R]] - \text{Cos}[\theta] \text{Sin}[\phi] \text{Sin}[\beta[T, R]]) \beta^{(1,0)}[T, R] = 0, \\
& \quad R \text{Sin}[\theta] (\text{Cos}[\theta] \text{Cos}[\beta[T, R]] \text{Sin}[\phi] + \text{Cos}[\phi] \text{Sin}[\beta[T, R]]) \beta^{(1,0)}[T, R] = 0 \} \\
& \{ \text{Cos}[\theta] (\text{Sinh}[\gamma[T, R]] F^{(1,0)}[T, R] + \text{Cosh}[\gamma[T, R]] F[T, R] \gamma^{(1,0)}[T, R]) = 0, \\
& \quad \text{Cos}[\theta] (\text{Sinh}[\alpha[T, R]] F^{(1,0)}[T, R] + \text{Cosh}[\alpha[T, R]] F[T, R] \alpha^{(1,0)}[T, R]) = 0, \\
& \quad R \text{Sin}[\theta] \text{Sin}[\beta[T, R]] \beta^{(1,0)}[T, R] = 0, R \text{Cos}[\beta[T, R]] \text{Sin}[\theta] \beta^{(1,0)}[T, R] = 0 \}
\end{aligned}$$

Out[161]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix}
\text{True} & \text{True} & \text{True} & \text{True} \\
\text{True} & \text{True} & \text{True} & \text{True} \\
\text{True} & \text{True} & \text{True} & \text{True} \\
\text{True} & \text{True} & \text{True} & \text{True}
\end{pmatrix}$$

In[162]:=

```

(*Tetraadi funktsioonid peale Lie tuletise lahendamist*)
K1[T, R] = F[R] Cosh[γ[R]];
K2[T, R] = F[R] Sinh[α[R]];
K3[T, R] = F[R] Sinh[γ[R]];
K4[T, R] = K2[T, R];
K5[T, R] = R Cos[β[R]];
K6[T, R] = R Sin[β[R]];

```

In[168]:=

```

(*Defineerime tetraadi uuesti, et Lie tuletis arvesse võtta*)
Tet0 = K1[T, R] dT + K2[T, R] dR // Simplify;
Tet1 =
  (K3[T, R] dT + K4[T, R] dR) Sin[θ] Cos[φ] + (K5[T, R] Cos[θ] Cos[φ] - K6[T, R] Sin[φ]) dθ -
  (K5[T, R] Sin[φ] + K6[T, R] Cos[θ] Cos[φ]) Sin[θ] dφ // Simplify;
Tet2 =
  (K3[T, R] dT + K4[T, R] dR) Sin[θ] Sin[φ] + (K5[T, R] Cos[θ] Sin[φ] + K6[T, R] Cos[φ]) dθ +
  (K5[T, R] Cos[φ] - K6[T, R] Cos[θ] Sin[φ]) Sin[θ] dφ // Simplify;
Tet3 = (K3[T, R] dT + K4[T, R] dR) Cos[θ] -
  K5[T, R] Sin[θ] dθ + K6[T, R] Sin[θ]^2 dφ // Simplify;
GTet = Table[Coefficient[{Tet0, Tet1, Tet2, Tet3}][[i]], {dT, dR, dθ, dφ}][[j]], 1],
  {i, 4}, {j, 4} // Simplify;
GTetI = Inverse[GTet] // FullSimplify;

```

Väljavõrrandid

In[174]:=

```
(*Meetrika ja sellest tuletatud suurused*)
g = Table[Sum[DiagonalMatrix[{-1, 1, 1, 1}][[as, bs]] * GTet[[as, a]] * GTet[[bs, b]],
  {as, 4}, {bs, 4}], {a, 4}, {b, 4}] // Simplify
gI = Inverse[g];
gD = D[g, {{T, R, θ, φ}}];
Ct = Table[1/2 Sum[gI[[k][i]] * (gD[[l][i][m]] + gD[[m][i][l]] - gD[[l][m][i]]), {i, 4}],
  {k, 4}, {l, 4}, {m, 4}];
DCt = D[Ct, {{T, R, θ, φ}}];
RieT = Table[-DCt[[k][l][m][n]] + DCt[[k][l][n][m]] +
  Sum[-Ct[[i][l][m]] * Ct[[k][i][n]] + Ct[[i][l][n]] * Ct[[k][i][m]], {i, 4}],
  {k, 4}, {l, 4}, {m, 4}, {n, 4}];
RicT = TensorContract[RieT, {{1, 3}}];
RicS = Simplify[Sum[Sum[gI[[k][l]] * RicT[[k][l]], {k, 4}], {l, 4}]];
```

Out[174]=

```
{{-F[R]^2, F[R]^2 Sinh[α[R]] (-Cosh[γ[R]] + Sinh[γ[R]]), 0, 0},
  {F[R]^2 Sinh[α[R]] (-Cosh[γ[R]] + Sinh[γ[R]]), 0, 0, 0},
  {0, 0, R^2, 0}, {0, 0, 0, R^2 Sin[θ]^2}}
```

In[182]:=

```
(*Väändetensor ja sellest tuletatud suurused*)
GTorudd = Table[Sum[GTetI[[a, as]] *
  (D[GTet[[as, c]], {{T, R, θ, φ}[b]]] - D[GTet[[as, b]], {{T, R, θ, φ}[c]]]),
  {as, 4}], {a, 4}, {b, 4}, {c, 4}] // Simplify;
GTorV = TensorContract[GTorudd, {{1, 2}}];
GToruuu = Table[Sum[GTorudd[[a, bs, cs]] * gI[[bs, b]] * gI[[cs, c]], {bs, 4}, {cs, 4}],
  {a, 4}, {b, 4}, {c, 4}];
GTorA =
  1
  --- Table[Sum[Sqrt[-Det[g]] LeviCivitaTensor[4][[a, bs, cs, ds]] * GToruuu[[bs, cs, ds]],
  6
  {bs, 4}, {cs, 4}, {ds, 4}], {a, 4}];
GTorddd = Table[Sum[GTorudd[[as, b, c]] * g[[as, a]], {as, 4}], {a, 4}, {b, 4}, {c, 4}];
GTorT = Table[
  1
  --- (GTorddd[[a, b, c]] + GTorddd[[b, a, c]]) + 1
  --- (g[[c, a]] * GTorV[[b]] + g[[c, b]] * GTorV[[a]]) -
  1
  --- g[[a, b]] * GTorV[[c]], {a, 4}, {b, 4}, {c, 4}];
GTorAu = Table[Sum[GTorA[[as]] * gI[[as, a]], {as, 4}], {a, 4}];
GTorVu = Table[Sum[GTorV[[as]] * gI[[as, a]], {as, 4}], {a, 4}];
GTorTduu = Table[Sum[GTorT[[a, bs, cs]] * gI[[bs, b]] * gI[[cs, c]], {bs, 4}, {cs, 4}],
  {a, 4}, {b, 4}, {c, 4}];
GTorScalar = 3
  --- Sum[GTorAu[[a]] * GTorA[[a]], {a, 4}] - 2
  --- Sum[GTorVu[[a]] * GTorV[[a]], {a, 4}] +
  2
  --- Sum[GTorT[[a, b, c]] * GTorTduu[[d, b, c]] * gI[[a, d]],
  3
  {a, 4}, {b, 4}, {c, 4}, {d, 4}] // Simplify;
```

In[192]:=

```
(*Väljavõrrandid*)
FEq = Table[RicT[[a, b]] -  $\frac{\text{RicS}}{2}$  g[[a, b]] +  $\epsilon * \left( \frac{1}{2} \text{Sum}[\text{GTorAu}[[as]] * \frac{1}{3}$ 
      (GTorA[[as]] * g[[a, b]] + GTorA[[a]] * g[[b, as]] + GTorA[[b]] * g[[as, a]]), {as, 4}] -
       $\frac{4}{9}$  Sum[Sqrt[-Det[g]] LeviCivitaTensor[4] [[b, as, bs, cs]] * GTorAu[[as]] *
      GTorTduu[[a, bs, cs]], {as, 4}, {bs, 4}, {cs, 4}] -
       $\frac{2}{9}$  Sum[Sqrt[-Det[g]] LeviCivitaTensor[4] [[a, b, as, bs]] * GTorAu[[as]] *
      GTorVu[[bs]], {as, 4}, {bs, 4}] -  $\frac{1}{3}$  Sum[Sqrt[-Det[g]]
      LeviCivitaTensor[4] [[a, b, as, bs]] * gI[[as, cs]] * Cov[GTorAu[[bs]], {"u"}] [[cs],
      {as, 4}, {bs, 4}, {cs, 4}]]), {a, 4}, {b, 4}] // Simplify;
```

In[193]:=

```
(*Antisümm. väljavõrrandid. Jälle valime  $\beta = \text{const} = b$ *)
FEqDiag1 = FullSimplify[FEq[[1, 2]] - FEq[[2, 1]] == 0 /.  $\beta \rightarrow (b \&)$ , Assumptions  $\rightarrow \{\epsilon \neq 0\}$ ]
FEqDiag2 = FullSimplify[FEq[[3, 4]] - FEq[[4, 3]] == 0 /.  $\beta \rightarrow (b \&)$ ,
  Assumptions  $\rightarrow \{\epsilon * \text{Sin}[\theta] \neq 0, \text{Sin}[b] \neq 0\}$ ]
```

Out[193]=

True

Out[194]=

```
2 Cos[b] F[R] ==

$$\frac{e^{\gamma[R]} \text{Csch}[\alpha[R]] (\text{Cosh}[\gamma[R]] (F[R] - R F'[R]) + R \text{Coth}[\alpha[R]] F[R] \text{Sinh}[\gamma[R]] \alpha'[R])}{F[R]}$$

```

In[195]:=

```
(*Sümm. väljavõrrandid*)
FEq[[1, 1]] /. β → (b &) /. ε → - $\frac{9(-1+h) \text{Csc}[b]^2}{8h}$  // FullSimplify
DSolve[% == 0, F[R], R] // Simplify
F[R_] :=  $\frac{e^{\gamma[R]} \sqrt{h} \sqrt{R}}{\sqrt{(R+h c_1) \text{Sinh}[\alpha[R]]^2}}$ 
Simplify[FEq[[2, 2]] /. β → (b &)]
DSolve[% == 0, α[R], R]
α[R_] := ArcSinh $\left[\frac{e^{c_2+\gamma[R]} R}{R+h c_1}\right]$ 
Simplify[FEq[[3, 3]] /. β → (b &)]
```

Out[195]=

$$\frac{F[R]^3 + e^{2\gamma[R]} h \text{Csch}[\alpha[R]]^2 (2R F'[R] + F[R] (-1 + 2R \text{Coth}[\alpha[R]] \alpha'[R] - 2R \gamma'[R]))}{h R^2 F[R]}$$

Out[196]=

$$\left\{ \left\{ F[R] \rightarrow -\frac{e^{\gamma[R]} \sqrt{h} \sqrt{R}}{\sqrt{(R+h c_1) \text{Sinh}[\alpha[R]]^2}} \right\}, \left\{ F[R] \rightarrow \frac{e^{\gamma[R]} \sqrt{h} \sqrt{R}}{\sqrt{(R+h c_1) \text{Sinh}[\alpha[R]]^2}} \right\} \right\}$$

Out[198]=

$$\frac{2 \left(\frac{h c_1}{R+h c_1} - R \text{Coth}[\alpha[R]] \alpha'[R] + R \gamma'[R] \right)}{R^2}$$

Solve: Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may not be found; use Reduce for complete solution information. [?](#)

Out[199]=

$$\left\{ \left\{ \alpha[R] \rightarrow \text{ArcSinh}\left[\frac{e^{c_2+\gamma[R]} R}{R+h c_1}\right] \right\} \right\}$$

Out[201]=

0

In[202]:=

```
(*Viimane antisümm. väljavõrrand ei ole üldiselt lahendatav*)
FEqDiag2 // PowerExpand // FullSimplify
DSolve[% /. C[1] → 0, γ[R], R]
Clear[F, α]
```

Out[202]=

$$\frac{1}{\sqrt{R}} e^{-c_2} \left(-4 \sqrt{h} \sqrt{R} \sqrt{R+h c_1} \text{Cos}[b] + (2R+3h c_1) \text{Cosh}[\gamma[R]] + 2h c_1 \text{Sinh}[\gamma[R]] + 2R(R+h c_1) \text{Sinh}[\gamma[R]] \gamma'[R] \right) = 0$$

Solve: Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may not be found; use Reduce for complete solution information. [?](#)

Out[203]=

$$\left\{ \left\{ \gamma[R] \rightarrow -\text{ArcCosh}\left[-\frac{e^{-c_3}}{R} + 2\sqrt{h} \text{Cos}[b]\right] \right\}, \left\{ \gamma[R] \rightarrow \text{ArcCosh}\left[-\frac{e^{-c_3}}{R} + 2\sqrt{h} \text{Cos}[b]\right] \right\} \right\}$$

Koordinaatteisendus

In[205]:=

```
(*Meetrika koordinaatteisendus*)
gEq = Table[Sum[D[{T[t, r], R[t, r],  $\theta$ ,  $\phi$ ][[as]], {t, r,  $\theta$ ,  $\phi$ ][[a]] *
  D[{T[t, r], R[t, r],  $\theta$ ,  $\phi$ ][[bs]], {t, r,  $\theta$ ,  $\phi$ ][[b]] * (g[[as, bs]] /. R  $\rightarrow$  R[t, r]),
  {as, 4}, {bs, 4}], {a, 4}, {b, 4}] // Simplify;

F[R_] := 
$$\frac{e^{\gamma[R]} \sqrt{h} \sqrt{R}}{\sqrt{(R+h c_1) \text{Sinh}[\alpha[R]]^2}}$$



$$\alpha[R_] := \text{ArcSinh}\left[\frac{e^{c_2+\gamma[R]} R}{R+h c_1}\right]$$


R[t_, r_] := r
gEq // PowerExpand // FullSimplify // Together // MatrixForm;
% // Simplify
```

Out[210]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -\frac{e^{-2 c_2} h (r+h c_1) T^{(1,0)}[t,r]^2}{r} & -\frac{e^{-2 c_2} h (e^{c_2} r+(r+h c_1) T^{(0,1)}[t,r]) T^{(1,0)}[t,r]}{r} & 0 & 0 \\ -\frac{e^{-2 c_2} h (e^{c_2} r+(r+h c_1) T^{(0,1)}[t,r]) T^{(1,0)}[t,r]}{r} & -\frac{e^{-2 c_2} h T^{(0,1)}[t,r] (2 e^{c_2} r+(r+h c_1) T^{(0,1)}[t,r])}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \text{Sin}[\theta]^2 \end{pmatrix}$$

In[211]:=

```
(*Koordinaatteisenduse võrrandid koos parameetri valiku ja T ümber skaleerimisega*)
DSolve[e^{c_2} r + (r+h c_1) T^{(0,1)}[t, r] == 0 /. C[1]  $\rightarrow$  -2 M / h /.
  T^{(0,1)}[t, r]  $\rightarrow$   $\frac{e^{c_2}}{\text{Sqrt}[h]} T^{(0,1)}[t, r], T[t, r], \{t, r\}] // Simplify
DSolve[\frac{e^{-2 c_2} h (r+h c_1) T^{(1,0)}[t, r]^2}{r} == 1 + \frac{h c_1}{r} /. C[1]  $\rightarrow$  -2 M / h /.
  T^{(1,0)}[t, r]  $\rightarrow$   $\frac{e^{c_2}}{\text{Sqrt}[h]} T^{(1,0)}[t, r], T[t, r], \{t, r\}] // Simplify$$ 
```

Out[211]=

$$\left\{ \left\{ T[t, r] \rightarrow -\sqrt{h} (r+2 M \text{Log}[-2 M+r]) + c_3[t] \right\} \right\}$$

Out[212]=

$$\left\{ \left\{ T[t, r] \rightarrow -t + c_1[r] \right\}, \left\{ T[t, r] \rightarrow t + c_1[r] \right\} \right\}$$

Vääne

In[213]:=

```

(*Tetraad ja vääne Schwarzschildi koordinaatides*)
T[t_, r_] := t + Sqrt[h] (r + 2 M Log[r - 2 M])
ArticleTetEF =
  Table[Sum[ArticleTet[[a, as]] * D[{T[t, r], r, \theta, \phi}[[as]], {t, r, \theta, \phi}[[c]], {as, 4}],
    {a, 4}, {c, 4}] // PowerExpand // FullSimplify;
Do[Print[%[[n]]], {n, 4}]
Table[Sum[Inverse[ArticleTetEF][[a, as]] * (D[ArticleTetEF[[as, c]], {{T, r, \theta, \phi}[[d]]} -
  D[ArticleTetEF[[as, d]], {{T, r, \theta, \phi}[[c]]}),
  {as, 4}], {a, 4}, {d, 4}, {c, 4}] // FullSimplify;
% /. (-2 M + r) \sqrt{(2 M - r) r + 4 h (r + M^2 \beta)^2 \cos[b]^2} \sqrt{-r + \frac{4 h (r + M^2 \beta)^2 \cos[b]^2}{-2 M + r}} \rightarrow
  \sqrt{-2 M + r} ((2 M - r) r + 4 h (r + M^2 \beta)^2 \cos[b]^2) // FullSimplify;
Do[Print[%[[n]]], {n, 4}]
Clear[T, R, F, \alpha]
{
  \frac{2 \sqrt{h} (r + M^2 \beta) \cos[b]}{r}, \frac{2 h (r + M^2 \beta) \cos[b]}{-2 M + r} + \frac{\sqrt{h} \sqrt{-r + \frac{4 h (r + M^2 \beta)^2 \cos[b]^2}{-2 M + r}}}{\sqrt{-2 M + r}}, \theta, \theta
},
{
  \frac{\sqrt{(2 M - r) r + 4 h (r + M^2 \beta)^2 \cos[b]^2} \cos[\phi] \sin[\theta]}{r},
  \frac{(2 h (r + M^2 \beta) \cos[b] - \sqrt{h} \sqrt{(2 M - r) r + 4 h (r + M^2 \beta)^2 \cos[b]^2}) \cos[\phi] \sin[\theta]}{2 M - r},
  r (\cos[b] \cos[\theta] \cos[\phi] - \sin[b] \sin[\phi]), -r \sin[\theta] (\cos[\theta] \cos[\phi] \sin[b] + \cos[b] \sin[\phi])
},
{
  \frac{\sqrt{(2 M - r) r + 4 h (r + M^2 \beta)^2 \cos[b]^2} \sin[\theta] \sin[\phi]}{r},
  \frac{(2 h (r + M^2 \beta) \cos[b] - \sqrt{h} \sqrt{(2 M - r) r + 4 h (r + M^2 \beta)^2 \cos[b]^2}) \sin[\theta] \sin[\phi]}{2 M - r},
  r (\cos[\phi] \sin[b] + \cos[b] \cos[\theta] \sin[\phi]), r \sin[\theta] (\cos[b] \cos[\phi] - \cos[\theta] \sin[b] \sin[\phi])
},
{
  \frac{\sqrt{(2 M - r) r + 4 h (r + M^2 \beta)^2 \cos[b]^2} \cos[\theta]}{r},
  \frac{(2 h (r + M^2 \beta) \cos[b] - \sqrt{h} \sqrt{(2 M - r) r + 4 h (r + M^2 \beta)^2 \cos[b]^2}) \cos[\theta]}{2 M - r},
  -r \cos[b] \sin[\theta], r \sin[b] \sin[\theta]^2
}

```

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \left\{ \theta, \left(M \left(2 \sqrt{h} r \sqrt{-2M+r} (r+M(-M+r)\beta) \cos[b] + r(-2M+r) \sqrt{-r + \frac{4h(r+M^2\beta)^2 \cos[b]^2}{-2M+r}} + \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. 4hM\beta(r+M^2\beta) \cos[b]^2 \left(\sqrt{-2M+r} \sqrt{(2M-r)r + 4h(r+M^2\beta)^2 \cos[b]^2} + \right. \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. (-2M+r) \sqrt{-r + \frac{4h(r+M^2\beta)^2 \cos[b]^2}{-2M+r}} \right) \right) \right) \right\} / \\
 & \left(4hr\sqrt{-2M+r} (r+M^2\beta)^2 \cos[b]^2 \sqrt{(2M-r)r + 4h(r+M^2\beta)^2 \cos[b]^2} + \right. \\
 & \quad \left. r(-2M+r) ((2M-r)r + 4h(r+M^2\beta)^2 \cos[b]^2) \sqrt{-r + \frac{4h(r+M^2\beta)^2 \cos[b]^2}{-2M+r}} \right), \theta, \theta \}, \\
 & \left\{ \left(M \left(-2 \sqrt{h} r \sqrt{-2M+r} (r+M(-M+r)\beta) \cos[b] + (2M-r)r \sqrt{-r + \frac{4h(r+M^2\beta)^2 \cos[b]^2}{-2M+r}} - \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. 4hM\beta(r+M^2\beta) \cos[b]^2 \left(\sqrt{-2M+r} \sqrt{(2M-r)r + 4h(r+M^2\beta)^2 \cos[b]^2} + \right. \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. (-2M+r) \sqrt{-r + \frac{4h(r+M^2\beta)^2 \cos[b]^2}{-2M+r}} \right) \right) \right) \right\} / \\
 & \left(4hr\sqrt{-2M+r} (r+M^2\beta)^2 \cos[b]^2 \sqrt{(2M-r)r + 4h(r+M^2\beta)^2 \cos[b]^2} + \right. \\
 & \quad \left. r(-2M+r) ((2M-r)r + 4h(r+M^2\beta)^2 \cos[b]^2) \sqrt{-r + \frac{4h(r+M^2\beta)^2 \cos[b]^2}{-2M+r}} \right), \theta, \theta, \theta \}, \\
 & \left. \left. \left. \left. \frac{2r^2 \left(2 \sqrt{h} \sqrt{-2M+r} (r+M^2\beta) \cos[b] + (-2M+r) \sqrt{-r + \frac{4h(r+M^2\beta)^2 \cos[b]^2}{-2M+r}} \right) \sin[b] \sin[\theta]}{\sqrt{-2M+r} ((2M-r)r + 8h(r+M^2\beta)^2 \cos[b]^2)} \right) \right\} \right\}, \\
 & \left\{ \theta, \right. \\
 & \left. \theta, \right. \\
 & \left. \frac{2r^2 \left(2 \sqrt{h} \sqrt{-2M+r} (r+M^2\beta) \cos[b] + (-2M+r) \sqrt{-r + \frac{4h(r+M^2\beta)^2 \cos[b]^2}{-2M+r}} \right) \sin[b] \sin[\theta]}{\sqrt{-2M+r} ((2M-r)r + 8h(r+M^2\beta)^2 \cos[b]^2)} \right\}, \\
 & \left. \theta \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \left\{ \theta, \left(2M(-2M+r)^{3/2}(-r+M(M-r)\beta)\cos[b] \right) / \right. \right. \\
& \quad \left(4hr\sqrt{-2M+r}(r+M^2\beta)^2\cos[b]^2\sqrt{(2M-r)r+4h(r+M^2\beta)^2\cos[b]^2} + \right. \\
& \quad \left. \left. r(-2M+r)\left((2M-r)r+4h(r+M^2\beta)^2\cos[b]^2\right)\sqrt{-r+\frac{4h(r+M^2\beta)^2\cos[b]^2}{-2M+r}} \right), \right. \\
& \quad \left. \theta, \theta \right\}, \left\{ \left(2M(-2M+r)^{3/2}(r+M(-M+r)\beta)\cos[b] \right) / \right. \\
& \quad \left(4hr\sqrt{-2M+r}(r+M^2\beta)^2\cos[b]^2\sqrt{(2M-r)r+4h(r+M^2\beta)^2\cos[b]^2} + \right. \\
& \quad \left. \left. r(-2M+r)\left((2M-r)r+4h(r+M^2\beta)^2\cos[b]^2\right)\sqrt{-r+\frac{4h(r+M^2\beta)^2\cos[b]^2}{-2M+r}} \right), \theta, \theta, \theta \right\}, \\
& \left\{ \theta, \theta, \theta, -\frac{2r(-2M+r)(r+M^2\beta)\sin[2b]\sin[\theta]}{(2M-r)r+8h(r+M^2\beta)^2\cos[b]^2} \right\}, \\
& \left\{ \theta, \theta, \frac{2r(-2M+r)(r+M^2\beta)\sin[2b]\sin[\theta]}{(2M-r)r+8h(r+M^2\beta)^2\cos[b]^2}, \theta \right\} \\
& \left\{ \left\{ \theta, \theta, -\frac{\cos[b]\sqrt{(2M-r)r+4h(r+M^2\beta)^2\cos[b]^2}}{r^2}, \right. \right. \\
& \quad \left. \left. -\frac{\sqrt{(2M-r)r+4h(r+M^2\beta)^2\cos[b]^2}\sin[b]\sin[\theta]}{r^2} \right\}, \right. \\
& \left\{ \theta, \theta, \frac{2M-2hM^2\beta\cos[b]^2+\sqrt{h}\cos[b]\sqrt{(2M-r)r+4h(r+M^2\beta)^2\cos[b]^2}-r(1+h+h\cos[2b])}{(2M-r)r}, \right. \\
& \quad \left. \frac{-\sqrt{h}\sqrt{(2M-r)r+4h(r+M^2\beta)^2\cos[b]^2}\sin[b]\sin[\theta]+h(r+M^2\beta)\sin[2b]\sin[\theta]}{r(-2M+r)} \right\}, \\
& \left\{ \frac{\cos[b]\sqrt{(2M-r)r+4h(r+M^2\beta)^2\cos[b]^2}}{r^2}, \right. \\
& \quad \left. \frac{-2M+r+hr+2hM^2\beta\cos[b]^2-\sqrt{h}\cos[b]\sqrt{(2M-r)r+4h(r+M^2\beta)^2\cos[b]^2}+hr\cos[2b]}{(2M-r)r}, \right. \\
& \quad \left. \theta, \theta \right\}, \left\{ \frac{\sqrt{(2M-r)r+4h(r+M^2\beta)^2\cos[b]^2}\sin[b]\sin[\theta]}{r^2}, \right. \\
& \quad \left. -\frac{\sin[\theta]}{2(r+M^2\beta)\cot[b]+\frac{\sqrt{(2M-r)r+4h(r+M^2\beta)^2\cos[b]^2}\csc[b]}{\sqrt{h}}}, \theta, \theta \right\}
\end{aligned}$$

$$\left\{ \left\{ \theta, \theta, \frac{\sqrt{(2M-r)r+4h(r+M^2\beta)^2\cos[b]^2}\csc[\theta]\sin[b]}{r^2}, \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\cos[b]\sqrt{(2M-r)r+4h(r+M^2\beta)^2\cos[b]^2}}{r^2} \right\}, \right. \\ \left. \left\{ \theta, \theta, \frac{-\sqrt{h}\sqrt{(2M-r)r+4h(r+M^2\beta)^2\cos[b]^2}\csc[\theta]\sin[b]+h(r+M^2\beta)\csc[\theta]\sin[2b]}{(2M-r)r}, \right. \right. \\ \left. \left. \frac{-2M+r+hr+2hM^2\beta\cos[b]^2-\sqrt{h}\cos[b]\sqrt{(2M-r)r+4h(r+M^2\beta)^2\cos[b]^2}+hr\cos[2b]}{r(-2M+r)} \right\}, \right. \\ \left. \left\{ -\frac{\sqrt{(2M-r)r+4h(r+M^2\beta)^2\cos[b]^2}\csc[\theta]\sin[b]}{r^2}, \right. \right. \\ \left. \left. \frac{\csc[\theta]}{2(r+M^2\beta)\cot[b]+\frac{\sqrt{(2M-r)r+4h(r+M^2\beta)^2\cos[b]^2}\csc[b]}}{\sqrt{h}}, \theta, \theta \right\}, \right. \\ \left. \left\{ \frac{\cos[b]\sqrt{(2M-r)r+4h(r+M^2\beta)^2\cos[b]^2}}{r^2}, \right. \right. \\ \left. \left. \frac{-2M+r+hr+2hM^2\beta\cos[b]^2-\sqrt{h}\cos[b]\sqrt{(2M-r)r+4h(r+M^2\beta)^2\cos[b]^2}+hr\cos[2b]}{(2M-r)r}, \right. \right. \\ \left. \left. \theta, \theta \right\} \right\}$$

GP koordinaadid

In[220]:=

(*Tetraadi kuju määravad funktsioonid*)

K1[T, R] = F[T, R] Cosh[γ[T, R]];

K2[T, R] = Sinh[α[T, R]];

K3[T, R] = F[T, R] Sinh[γ[T, R]];

K4[T, R] = Cosh[α[T, R]];

K5[T, R] = R Cos[β[T, R]];

K6[T, R] = R Sin[β[T, R]];

In[226]:=

(*Tetraadid*)

Tet0 = K1[T, R] dT + K2[T, R] dR // Simplify;

Tet1 =

(K3[T, R] dT + K4[T, R] dR) Sin[θ] Cos[φ] + (K5[T, R] Cos[θ] Cos[φ] - K6[T, R] Sin[φ]) dθ -
(K5[T, R] Sin[φ] + K6[T, R] Cos[θ] Cos[φ]) Sin[θ] dφ // Simplify;

Tet2 =

(K3[T, R] dT + K4[T, R] dR) Sin[θ] Sin[φ] + (K5[T, R] Cos[θ] Sin[φ] + K6[T, R] Cos[φ]) dθ +
(K5[T, R] Cos[φ] - K6[T, R] Cos[θ] Sin[φ]) Sin[θ] dφ // Simplify;

Tet3 = (K3[T, R] dT + K4[T, R] dR) Cos[θ] -

K5[T, R] Sin[θ] dθ + K6[T, R] Sin[θ]^2 dφ // Simplify;

In[230]:=

```
(*Tetraadi maatriks ja pöördmaatriks*)
GTet = Table[Coefficient[{Tet0, Tet1, Tet2, Tet3}][[i]], {dT, dR, dθ, dφ}][[j]], 1],
  {i, 4}, {j, 4}] // Simplify;
GTetI = Inverse[GTet] // FullSimplify;
```

In[232]:=

```
Simplify[1 * D[GTet, T] + 0 * D[GTet, R] +
  Table[- (D[GTet[[a, 1]], {T, R, θ, φ}][[b]]) * 1 + D[GTet[[a, 2]], {T, R, θ, φ}][[b]] * 0) +
  D[1, {T, R, θ, φ}][[b]] * GTet[[a, 1]] +
  D[0, {T, R, θ, φ}][[b]] * GTet[[a, 2]] + D[GTet[[a, 1]], {T, R, θ, φ}][[b]] * 1 +
  D[GTet[[a, 2]], {T, R, θ, φ}][[b]] * 0, {a, 4}, {b, 4}]];
LDEq = Simplify[Table[%[[a, b]] == 0, {a, 4}, {b, 4}]];
Do[Print[%[[n]]], {n, 4}]
LDEq /. {α → (a[R] &), β → (b[R] &), γ → (c[R] &), F → (f[R] &)} // FullSimplify //
  MatrixForm
{Cosh[γ[T, R]] F(1,0)[T, R] + F[T, R] Sinh[γ[T, R]] γ(1,0)[T, R] == 0,
 Cosh[α[T, R]] α(1,0)[T, R] == 0, True, True}
{Cos[φ] Sin[θ] (Sinh[γ[T, R]] F(1,0)[T, R] + Cosh[γ[T, R]] F[T, R] γ(1,0)[T, R]) == 0,
 Cos[φ] Sin[θ] Sinh[α[T, R]] α(1,0)[T, R] == 0,
 R (Cos[β[T, R]] Sin[φ] + Cos[θ] Cos[φ] Sin[β[T, R]]) β(1,0)[T, R] == 0,
 R Sin[θ] (Cos[θ] Cos[φ] Cos[β[T, R]] - Sin[φ] Sin[β[T, R]]) β(1,0)[T, R] == 0}
{Sin[θ] Sin[φ] (Sinh[γ[T, R]] F(1,0)[T, R] + Cosh[γ[T, R]] F[T, R] γ(1,0)[T, R]) == 0,
 Sin[θ] Sin[φ] Sinh[α[T, R]] α(1,0)[T, R] == 0,
 R (Cos[φ] Cos[β[T, R]] - Cos[θ] Sin[φ] Sin[β[T, R]]) β(1,0)[T, R] == 0,
 R Sin[θ] (Cos[θ] Cos[β[T, R]] Sin[φ] + Cos[φ] Sin[β[T, R]]) β(1,0)[T, R] == 0}
{Cos[θ] (Sinh[γ[T, R]] F(1,0)[T, R] + Cosh[γ[T, R]] F[T, R] γ(1,0)[T, R]) == 0,
 Cos[θ] Sinh[α[T, R]] α(1,0)[T, R] == 0, R Sin[θ] Sin[β[T, R]] β(1,0)[T, R] == 0,
 R Cos[β[T, R]] Sin[θ] β(1,0)[T, R] == 0}
```

Out[235]//MatrixForm=

```
( True True True True
  True True True True
  True True True True
  True True True True )
```

In[236]:=

```
(*Tetraadi funktsioonid peale Lie tuletise lahendamist*)
K1[T, R] = F[R] Cosh[γ[R]];
K2[T, R] = Sinh[α[R]];
K3[T, R] = F[R] Sinh[γ[R]];
K4[T, R] = Cosh[α[R]];
K5[T, R] = R Cos[β[R]];
K6[T, R] = R Sin[β[R]];
```

```
In[242]:=
(*Defineerime tetraadi uuesti, et Lie tuletis arvesse võtta*)
Tet0 = K1[T, R] dT + K2[T, R] dR // Simplify;
Tet1 =
  (K3[T, R] dT + K4[T, R] dR) Sin[θ] Cos[φ] + (K5[T, R] Cos[θ] Cos[φ] - K6[T, R] Sin[φ]) dθ -
  (K5[T, R] Sin[φ] + K6[T, R] Cos[θ] Cos[φ]) Sin[θ] dφ // Simplify;
Tet2 =
  (K3[T, R] dT + K4[T, R] dR) Sin[θ] Sin[φ] + (K5[T, R] Cos[θ] Sin[φ] + K6[T, R] Cos[φ]) dθ +
  (K5[T, R] Cos[φ] - K6[T, R] Cos[θ] Sin[φ]) Sin[θ] dφ // Simplify;
Tet3 = (K3[T, R] dT + K4[T, R] dR) Cos[θ] -
  K5[T, R] Sin[θ] dθ + K6[T, R] Sin[θ]^2 dφ // Simplify;
GTet = Table[Coefficient[{Tet0, Tet1, Tet2, Tet3}[[i]], {dT, dR, dθ, dφ}[[j]], 1],
  {i, 4}, {j, 4}] // Simplify;
GTetI = Inverse[GTet] // FullSimplify;
```

Väljavõrrandid

```
In[248]:=
(*Meetrika ja sellest tuletatud suurused*)
g = Table[Sum[DiagonalMatrix[{-1, 1, 1, 1}]][as, bs] * GTet[[as, a]] * GTet[[bs, b]],
  {as, 4}, {bs, 4}], {a, 4}, {b, 4}] // Simplify
gI = Inverse[g];
gD = D[g, {{T, R, θ, φ}}];
Ct = Table[1/2 Sum[gI[[k]][i] * (gD[[1]][i][m] + gD[[m]][i][1] - gD[[1]][m][i]), {i, 4}],
  {k, 4}, {l, 4}, {m, 4}];
DCt = D[Ct, {{T, R, θ, φ}}];
RieT = Table[-DCt[[k]][l][m][n] + DCt[[k]][l][n][m] +
  Sum[-Ct[[i]][l][m] * Ct[[k]][i][n] + Ct[[i]][l][n] * Ct[[k]][i][m], {i, 4}],
  {k, 4}, {l, 4}, {m, 4}, {n, 4}];
RicT = TensorContract[RieT, {{1, 3}}];
RicS = Simplify[Sum[Sum[gI[[k]][l] * RicT[[k]][l]], {k, 4}], {l, 4}];
```

```
Out[248]=
{{-F[R]^2, -F[R] Sinh[α[R] - γ[R]], 0, 0},
{-F[R] Sinh[α[R] - γ[R]], 1, 0, 0}, {0, 0, R^2, 0}, {0, 0, 0, R^2 Sin[θ]^2}}
```

In[256]:=

```

(*Väändetensor ja sellest tuletatud suurused*)
GTorudd = Table[Sum[GTetI[[a, as]] *
  (D[GTet[[as, c]], {{T, R, Θ, φ}[[b]]}] - D[GTet[[as, b]], {{T, R, Θ, φ}[[c]]}],
  {as, 4}], {a, 4}, {b, 4}, {c, 4}] // Simplify;
GTorV = TensorContract[GTorudd, {{1, 2}}];
GToruuu = Table[Sum[GTorudd[[a, bs, cs]] * gI[[bs, b]] * gI[[cs, c]], {bs, 4}, {cs, 4}],
  {a, 4}, {b, 4}, {c, 4}];
GTorA =
  1
  - Table[Sum[Sqrt[-Det[g]] LeviCivitaTensor[4] [[a, bs, cs, ds]] * GToruuu[[bs, cs, ds]],
  6
    {bs, 4}, {cs, 4}, {ds, 4}], {a, 4}];
GTorddd = Table[Sum[GTorudd[[as, b, c]] * g[[as, a]], {as, 4}], {a, 4}, {b, 4}, {c, 4}];
GTorT = Table[
  1
  - (GTorddd[[a, b, c]] + GTorddd[[b, a, c]]) + 1/6 (g[[c, a]] * GTorV[[b]] + g[[c, b]] * GTorV[[a]]) -
  1
  - g[[a, b]] * GTorV[[c]], {a, 4}, {b, 4}, {c, 4}];
GTorAu = Table[Sum[GTorA[[as]] * gI[[as, a]], {as, 4}], {a, 4}];
GTorVu = Table[Sum[GTorV[[as]] * gI[[as, a]], {as, 4}], {a, 4}];
GTorTduu = Table[Sum[GTorT[[a, bs, cs]] * gI[[bs, b]] * gI[[cs, c]], {bs, 4}, {cs, 4}],
  {a, 4}, {b, 4}, {c, 4}];
GTorScalar = 3/2 Sum[GTorAu[[a]] * GTorA[[a]], {a, 4}] - 2/3 Sum[GTorVu[[a]] * GTorV[[a]], {a, 4}] +
  2
  - Sum[GTorT[[a, b, c]] * GTorTduu[[d, b, c]] * gI[[a, d]],
  3
    {a, 4}, {b, 4}, {c, 4}, {d, 4}] // Simplify;

```

In[266]:=

```

(*Väljavõrandid*)
FEq = Table[RicT[[a, b]] - RicS/2 g[[a, b]] + ε * (1/2 Sum[GTorAu[[as]] * 1/3
  (GTorA[[as]] * g[[a, b]] + GTorA[[a]] * g[[b, as]] + GTorA[[b]] * g[[as, a]]), {as, 4}] -
  4
  - Sum[Sqrt[-Det[g]] LeviCivitaTensor[4] [[b, as, bs, cs]] * GTorAu[[as]] *
  9
    GTorTduu[[a, bs, cs]], {as, 4}, {bs, 4}, {cs, 4}] -
  2
  - Sum[Sqrt[-Det[g]] LeviCivitaTensor[4] [[a, b, as, bs]] * GTorAu[[as]] *
  9
    GTorVu[[bs]], {as, 4}, {bs, 4}] - 1/3 Sum[Sqrt[-Det[g]]
    LeviCivitaTensor[4] [[a, b, as, bs]] * gI[[as, cs]] * Cov[GTorAu[[bs]], {"u"}] [[cs],
    {as, 4}, {bs, 4}, {cs, 4}]], {a, 4}, {b, 4}] // Simplify;

```

In[267]:=

```
(*Antisümm. väljavõrrandid, valime  $\beta = \text{const} = b$ *)
FEqDiag1 = Simplify[FEq[[1, 2]] - FEq[[2, 1]] == 0 /.  $\beta \rightarrow (b \&)$ , Assumptions  $\rightarrow \{\epsilon \neq 0\}$ ]
FEqDiag2 = FullSimplify[FEq[[3, 4]] - FEq[[4, 3]] == 0 /.  $\beta \rightarrow (b \&)$  // TrigExpand,
  Assumptions  $\rightarrow \{\epsilon * \text{Sin}[\theta] \neq 0, \text{Sin}[b] \neq 0\}$ ]
```

Out[267]=

True

Out[268]=



$$2 \cos[b] + \frac{R \cosh[\alpha[R]] \operatorname{sech}[\alpha[R] - \gamma[R]]^2 F'[R]}{F[R]} = \frac{\operatorname{sech}[\alpha[R] - \gamma[R]] (\cosh[\gamma[R]] + R \sinh[\gamma[R]] \alpha'[R])}{F[R]}$$

In[269]:=

```
(*Esimene sümm. väljavõrrand*)
 $\alpha[R_] := \delta[R] + \gamma[R]$ 
FullSimplify[FEq[[1, 1]] /.  $\beta \rightarrow (b \&)$  /.  $\epsilon \rightarrow -\frac{9(-1+h) \operatorname{Csc}[b]^2}{8h}$ ] // TrigExpand //
  Together;
% // FullSimplify
DSolve[% == 0,  $\delta[R]$ , R]
Clear[ $\alpha$ ]
```

Out[271]=

$$1 - 2h + \cosh[2\delta[R]] + 4hR \tanh[\delta[R]] \delta'[R]$$

 **Solve:** Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may not be found; use Reduce for complete solution information. 

Out[272]=

$$\left\{ \left\{ \delta[R] \rightarrow -\operatorname{ArcCosh}\left[-\frac{e^{4h c_1} \sqrt{h} \sqrt{R}}{\sqrt{1 + e^{8h c_1} R}}\right] \right\}, \left\{ \delta[R] \rightarrow \operatorname{ArcCosh}\left[-\frac{e^{4h c_1} \sqrt{h} \sqrt{R}}{\sqrt{1 + e^{8h c_1} R}}\right] \right\}, \right. \\ \left. \left\{ \delta[R] \rightarrow -\operatorname{ArcCosh}\left[\frac{e^{4h c_1} \sqrt{h} \sqrt{R}}{\sqrt{1 + e^{8h c_1} R}}\right] \right\}, \left\{ \delta[R] \rightarrow \operatorname{ArcCosh}\left[\frac{e^{4h c_1} \sqrt{h} \sqrt{R}}{\sqrt{1 + e^{8h c_1} R}}\right] \right\} \right\}$$

In[274]:=

```
(*Teine sümm. väljavõrrand*)
 $\alpha[R_] := \operatorname{ArcCosh}\left[\frac{e^{4h c_1} \sqrt{h} \sqrt{R}}{\sqrt{1 + e^{8h c_1} R}}\right] + \gamma[R]$ 
FEq[[2, 2]] /.  $\beta \rightarrow (b \&)$  /.  $\epsilon \rightarrow -\frac{9(-1+h) \operatorname{Csc}[b]^2}{8h}$  // PowerExpand // FullSimplify
DSolve[% == 0, F[R], R] // Simplify
```

Out[275]=

$$\frac{1}{1 + e^{8h c_1} R} + \frac{2RF'[R]}{F[R]} = 0$$

Out[276]=

$$\left\{ \left\{ F[R] \rightarrow \frac{\sqrt{1 + e^{8h c_1} R} c_2}{\sqrt{R}} \right\} \right\}$$

In[277]:=

(*Kolmas sümm. väljavõrrand*)

$$F[R_] := \frac{\sqrt{1 + e^{8 h c_1} R} c_2}{\sqrt{R}}$$

$$\text{FEq}[3, 3] /. \beta \rightarrow (b \&) /. \epsilon \rightarrow -\frac{9(-1+h) \text{Csc}[b]^2}{8 h} // \text{PowerExpand} // \text{FullSimplify}$$

Out[278]=

0

In[279]:=

(*Ülejäänud antisümm. võrrandit jälle üldiselt lahendada ei saa*)

FEqDiag2 =

```
FullSimplify[SubtractSides[FEqDiag2, FEqDiag2[[2]]][[1]] // PowerExpand // TrigExpand,
  Assumptions -> Sin[b] != 0];
```

```
FullSimplify[FEqDiag22 // PowerExpand, Assumptions -> {r >= 0, M >= 0}];
```

```
FEqDiag23 = Collect[%, {Sinh[γ[R]], Cosh[γ[R]]}]
```

```
FullSimplify[Together[FEqDiag23][[7]] /. R -> r /. c1 -> \frac{\text{Log}[-\frac{1}{2M}]}{8 h} // PowerExpand,
```

```
  Assumptions -> {r >= 0, M >= 0}];
```

```
Simplify[% // Expand, Assumptions -> {r >= 0, M >= 0}] // Together;
```

```
%[[4]] /. M -> 0 // PowerExpand // Simplify
```

```
DSolve[% == 0, γ[r], r]
```

```
Clear[α, F]
```

Out[281]=

$$2 \cos[b] - \frac{e^{-4 h c_1} (3 + 2 e^{8 h c_1} R) \cosh[\gamma[R]]}{2 \sqrt{h} \sqrt{R} \sqrt{1 + e^{8 h c_1} R}} +$$



$$\frac{1}{2} \sinh[\gamma[R]] \left(-\frac{\sqrt{-1 + \frac{e^{4 h c_1} \sqrt{h} \sqrt{R}}{\sqrt{1 + e^{8 h c_1} R}}} \sqrt{1 + \frac{e^{4 h c_1} \sqrt{h} \sqrt{R}}{\sqrt{1 + e^{8 h c_1} R}}}}{-1 + e^{8 h c_1} (-1 + h) R} - \right.$$

$$\left. \frac{e^{-8 h c_1} \sqrt{e^{4 h c_1} \sqrt{h} \sqrt{R} - \sqrt{1 + e^{8 h c_1} R}} \sqrt{e^{4 h c_1} \sqrt{h} \sqrt{R} + \sqrt{1 + e^{8 h c_1} R}}}{h R \sqrt{1 + e^{8 h c_1} R}} - \right.$$

$$\left. \frac{2 e^{-4 h c_1} \sqrt{R} \sqrt{1 + e^{8 h c_1} R} \gamma'[R]}{\sqrt{h}} \right)$$

Out[284]=

$$-i (-1+h) \sqrt{h} r^{5/2} (-2 \sqrt{h} \cos[b] + \cosh[\gamma[r]] + r \sinh[\gamma[r]] \gamma'[r])$$

 **Solve:** Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may not be found; use Reduce for complete solution information. 

Out[285]=

$$\left\{ \left\{ \gamma[r] \rightarrow -\text{ArcCosh}\left[-\frac{e^{-c_1}}{r} + 2 \sqrt{h} \cos[b]\right] \right\}, \left\{ \gamma[r] \rightarrow \text{ArcCosh}\left[-\frac{e^{-c_1}}{r} + 2 \sqrt{h} \cos[b]\right] \right\} \right\}$$

Koordinaatteisendus

In[287]:=

(*Meetrika koordinaatteisendus*)

$$\alpha[R_] := \text{ArcCosh}\left[\frac{e^{4 h c_1} \sqrt{h} \sqrt{R}}{\sqrt{1 + e^{8 h c_1} R}}\right] + \gamma[R]$$

$$F[R_] := \frac{\sqrt{1 + e^{8 h c_1} R} c_2}{\sqrt{R}}$$

```
gEq = Table[Sum[D[{T[t, r], R[t, r], \theta, \phi}][[as]], {t, r, \theta, \phi}][[a]] *
  D[{T[t, r], R[t, r], \theta, \phi}][[bs]], {t, r, \theta, \phi}][[b]]] * (g[[as, bs]] /. R -> R[t, r]),
  {as, 4}, {bs, 4}], {a, 4}, {b, 4}] // Simplify;
```

```
R[t_, r_] := r
```

```
gEq // PowerExpand // FullSimplify // Together;
```

```
Do[Print[%[[n]], {n, 4}]
```

```
Clear[\alpha, F, R]
```

$$\left\{ -\frac{(1 + e^{8 h c_1} r) c_2^2 T^{(1,0)}[t, r]^2}{r}, \right.$$

$$-\frac{1}{r} c_2 \left(\sqrt{r} \sqrt{e^{4 h c_1} \sqrt{h} \sqrt{r} - \sqrt{1 + e^{8 h c_1} r}} \sqrt{e^{4 h c_1} \sqrt{h} \sqrt{r} + \sqrt{1 + e^{8 h c_1} r}} + \right.$$

$$\left. c_2 T^{(0,1)}[t, r] + e^{8 h c_1} r c_2 T^{(0,1)}[t, r] \right) T^{(1,0)}[t, r], \theta, \theta \}$$

$$\left\{ -\frac{1}{r} c_2 \left(\sqrt{r} \sqrt{e^{4 h c_1} \sqrt{h} \sqrt{r} - \sqrt{1 + e^{8 h c_1} r}} \sqrt{e^{4 h c_1} \sqrt{h} \sqrt{r} + \sqrt{1 + e^{8 h c_1} r}} + \right.$$

$$\left. c_2 T^{(0,1)}[t, r] + e^{8 h c_1} r c_2 T^{(0,1)}[t, r] \right) T^{(1,0)}[t, r], \right.$$

$$-\frac{1}{r} \left(-r + 2 \sqrt{r} \sqrt{e^{4 h c_1} \sqrt{h} \sqrt{r} - \sqrt{1 + e^{8 h c_1} r}} \sqrt{e^{4 h c_1} \sqrt{h} \sqrt{r} + \sqrt{1 + e^{8 h c_1} r}} c_2 T^{(0,1)}[t, r] + \right.$$

$$\left. c_2^2 T^{(0,1)}[t, r]^2 + e^{8 h c_1} r c_2^2 T^{(0,1)}[t, r]^2 \right), \theta, \theta \}$$

$$\{0, 0, r^2, \theta\}$$



$$\{0, 0, 0, r^2 \sin[\theta]^2\}$$

In[294]=

```
(*Koordinaatteisenduse võrrandid*)
DSolve[ $\frac{(1 + e^{8 h c_1 r}) c_2^2 T^{(1,0)}[t, r]^2}{r} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right), T[t, r], \{t, r\}$ ] // Simplify //
PowerExpand
Solve[D[- $\frac{\sqrt{-2M + r t}}{\sqrt{1 + e^{8 h c_1 r} r} c_2} + c_3[r], t, r] = 0, C[1]]$ 
 $\sqrt{r} \sqrt{e^{4 h c_1} \sqrt{h} \sqrt{r} - \sqrt{1 + e^{8 h c_1 r}}}$   $\sqrt{e^{4 h c_1} \sqrt{h} \sqrt{r} + \sqrt{1 + e^{8 h c_1 r}}}$  +
 $c_2 T^{(0,1)}[t, r] + e^{8 h c_1 r} c_2 T^{(0,1)}[t, r] = 0$  // PowerExpand // FullSimplify;
% /.  $\sqrt{r} \sqrt{e^{4 h c_1} \sqrt{h} \sqrt{r} - \sqrt{1 + e^{8 h c_1 r}}}$   $\sqrt{e^{4 h c_1} \sqrt{h} \sqrt{r} + \sqrt{1 + e^{8 h c_1 r}}}$  →
 $\sqrt{r (-1 + e^{8 h c_1} (-1 + h) r)}$ ;
DSolve[% /.  $c_1 \rightarrow \frac{\text{Log}[-\frac{1}{2M}]}{8 h}$ , T[t, r], {t, r}] // PowerExpand // FullSimplify;
% // PowerExpand // FullSimplify // PowerExpand;
FullSimplify[% // Expand, Assumptions → {M ≥ 0, r ≥ 0}] // PowerExpand // TrigToExp
```

Out[294]=

$$\left\{ \left\{ T[t, r] \rightarrow -\frac{\sqrt{-2M + r t}}{\sqrt{1 + e^{8 h c_1 r} r} c_2} + c_3[r] \right\}, \left\{ T[t, r] \rightarrow \frac{\sqrt{-2M + r t}}{\sqrt{1 + e^{8 h c_1 r} r} c_2} + c_3[r] \right\} \right\}$$

 **Solve:** Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may not be found; use Reduce for complete solution information. 

Out[295]=

$$\left\{ \left\{ c_1 \rightarrow \frac{\text{Log}[-\frac{1}{2M}]}{8 h} \right\} \right\}$$

Out[300]=

$$\left\{ \left\{ T[t, r] \rightarrow \frac{1}{c_2} \sqrt{2} \sqrt{M} \left(\sqrt{r} \sqrt{2M + (-1 + h) r} - \right. \right. \right.$$

$$2 \sqrt{h} M \left(-\text{Log} \left[1 - \frac{\sqrt{h} \sqrt{r}}{\sqrt{2M + (-1 + h) r}} \right] + \text{Log} \left[1 + \frac{\sqrt{h} \sqrt{r}}{\sqrt{2M + (-1 + h) r}} \right] \right) +$$

$$\left. \left. \frac{2 (-1 + 2 h) M \text{Log} \left[\frac{\sqrt{-1+h} \sqrt{r}}{\sqrt{2} \sqrt{M}} + \sqrt{1 + \frac{(-1+h) r}{2M}} \right] \right)}{\sqrt{-1 + h}} \right) + c_3[t] \right\}$$

Vääne

In[301]:=

T[t_, r_] := t +

$$\left(\sqrt{r} \sqrt{2M + (-1+h)r} + 2\sqrt{h}M \left(\text{Log}\left[1 - \frac{\sqrt{h}\sqrt{r}}{\sqrt{2M + (-1+h)r}}\right] - \text{Log}\left[1 + \frac{\sqrt{h}\sqrt{r}}{\sqrt{2M + (-1+h)r}}\right] \right) + \frac{2(2h-1)M \text{Log}\left[\frac{\sqrt{-1+h}\sqrt{r}}{\sqrt{2}\sqrt{M}} + \sqrt{1 + \frac{(-1+h)r}{2M}}\right]}{\sqrt{-1+h}} \right)$$

ArticleTetGP =

```
Table[Sum[ArticleTet[[a, as]] * D[{T[t, r], r, \theta, \phi}][[as]], {t, r, \theta, \phi}][[c]], {as, 4}],
{a, 4}, {c, 4}] // PowerExpand //
```

```
FullSimplify // Together // PowerExpand // FullSimplify;
```

```
% /. \sqrt{2M + (-1+h)r} \sqrt{(2M-r)r + 4h(r+M^2\beta)^2 \text{Cos}[b]^2} \rightarrow
```

```
\sqrt{(2M + (-1+h)r) ((2M-r)r + 4h(r+M^2\beta)^2 \text{Cos}[b]^2)} ;
```

```
Do[Print[%[[n]], {n, 4}]
```

```
Table[Sum[Inverse[ArticleTetGP][[a, as]] * (D[ArticleTetGP[[as, c]], {{T, r, \theta, \phi}][[d]]} -
D[ArticleTetGP[[as, d]], {{T, r, \theta, \phi}][[c]]]), {as, 4}],
```

```
{a, 4}, {d, 4}, {c, 4}] // PowerExpand // FullSimplify;
```

```
% /. (-2M+r) \sqrt{(2M-r)r + 4h(r+M^2\beta)^2 \text{Cos}[b]^2} \sqrt{-r + \frac{4h(r+M^2\beta)^2 \text{Cos}[b]^2}{-2M+r}} \rightarrow
```

```
\sqrt{-2M+r} ((2M-r)r + 4h(r+M^2\beta)^2 \text{Cos}[b]^2) // FullSimplify;
```

```
Do[Print[%[[n]], {n, 4}]
```

```
Clear[T, R, F, \alpha]
```

$$\left\{ \frac{2\sqrt{h}(r+M^2\beta)\text{Cos}[b]}{r}, \sqrt{h} \left(\frac{2\sqrt{2M+(-1+h)r}(r+M^2\beta)\text{Cos}[b]}{\sqrt{r}(-2M+r)} + \frac{\sqrt{-r + \frac{4h(r+M^2\beta)^2 \text{Cos}[b]^2}{-2M+r}}}{\sqrt{-2M+r}} \right), \theta, \theta \right\}$$

$$\left\{ \frac{\sqrt{(2M-r)r + 4h(r+M^2\beta)^2 \text{Cos}[b]^2} \text{Cos}[\phi] \text{Sin}[\theta]}{r}, \right.$$

$$\left. \frac{(-2h\sqrt{r}(r+M^2\beta)\text{Cos}[b] + \sqrt{(2M+(-1+h)r)((2M-r)r + 4h(r+M^2\beta)^2 \text{Cos}[b]^2)}) \text{Cos}[\phi] \text{Sin}[\theta]}{\sqrt{r}(-2M+r)}, \right.$$

$$\left. r(\text{Cos}[b]\text{Cos}[\theta]\text{Cos}[\phi] - \text{Sin}[b]\text{Sin}[\phi]), -r\text{Sin}[\theta](\text{Cos}[\theta]\text{Cos}[\phi]\text{Sin}[b] + \text{Cos}[b]\text{Sin}[\phi]) \right\}$$

$$\left\{ \frac{\sqrt{(2M-r)r + 4h(r+M^2\beta)^2 \text{Cos}[b]^2} \text{Sin}[\theta] \text{Sin}[\phi]}{r}, \right.$$

$$\left. \frac{(-2h\sqrt{r}(r+M^2\beta)\text{Cos}[b] + \sqrt{(2M+(-1+h)r)((2M-r)r + 4h(r+M^2\beta)^2 \text{Cos}[b]^2)}) \text{Sin}[\theta] \text{Sin}[\phi]}{\sqrt{r}(-2M+r)}, \right.$$

$$\left. r(\text{Cos}[\phi]\text{Sin}[b] + \text{Cos}[b]\text{Cos}[\theta]\text{Sin}[\phi]), r\text{Sin}[\theta](\text{Cos}[b]\text{Cos}[\phi] - \text{Cos}[\theta]\text{Sin}[b]\text{Sin}[\phi]) \right\}$$

$$\left\{ \frac{\sqrt{(2M-r)r + 4h(r+M^2\beta)^2 \cos[b]^2} \cos[\theta]}{r}, \right. \\
\left. \frac{\left(-2h\sqrt{r}(r+M^2\beta)\cos[b] + \sqrt{(2M+(-1+h)r)\left((2M-r)r + 4h(r+M^2\beta)^2 \cos[b]^2\right)} \right) \cos[\theta]}{\sqrt{r}(-2M+r)}, \right. \\
\left. -r\cos[b]\sin[\theta], r\sin[b]\sin[\theta]^2 \right\}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \left\{ \theta, \left(M \left(2 \sqrt{r} \sqrt{-2M+r} \sqrt{2M+(-1+h)r} (r+M(-M+r)\beta) \cos[b] + \right. \right. \right. \\
& \quad r(-2M+r) \sqrt{-r + \frac{4h(r+M^2\beta)^2 \cos[b]^2}{-2M+r}} + 4hM\beta(r+M^2\beta) \cos[b]^2 \left(\sqrt{-2M+r} \right. \\
& \quad \left. \left. \left. \sqrt{(2M-r)r + 4h(r+M^2\beta)^2 \cos[b]^2} + (-2M+r) \sqrt{-r + \frac{4h(r+M^2\beta)^2 \cos[b]^2}{-2M+r}} \right) \right) \right) \right\} / \\
& \left(4hr\sqrt{-2M+r} (r+M^2\beta)^2 \cos[b]^2 \sqrt{(2M-r)r + 4h(r+M^2\beta)^2 \cos[b]^2} + \right. \\
& \quad \left. r(-2M+r) ((2M-r)r + 4h(r+M^2\beta)^2 \cos[b]^2) \sqrt{-r + \frac{4h(r+M^2\beta)^2 \cos[b]^2}{-2M+r}} \right), \theta, \theta \}, \\
& \left\{ M \left(-2 \sqrt{r} \sqrt{-2M+r} \sqrt{2M+(-1+h)r} (r+M(-M+r)\beta) \cos[b] + \right. \right. \\
& \quad (2M-r)r \sqrt{-r + \frac{4h(r+M^2\beta)^2 \cos[b]^2}{-2M+r}} - 4hM\beta(r+M^2\beta) \cos[b]^2 \left(\sqrt{-2M+r} \right. \\
& \quad \left. \left. \left. \sqrt{(2M-r)r + 4h(r+M^2\beta)^2 \cos[b]^2} + (-2M+r) \sqrt{-r + \frac{4h(r+M^2\beta)^2 \cos[b]^2}{-2M+r}} \right) \right) \right) \right\} / \\
& \left(4hr\sqrt{-2M+r} (r+M^2\beta)^2 \cos[b]^2 \sqrt{(2M-r)r + 4h(r+M^2\beta)^2 \cos[b]^2} + r(-2M+r) \right. \\
& \quad \left. ((2M-r)r + 4h(r+M^2\beta)^2 \cos[b]^2) \sqrt{-r + \frac{4h(r+M^2\beta)^2 \cos[b]^2}{-2M+r}} \right), \theta, \theta, \theta \}, \{ \theta, \theta, \theta, \\
& \left(2r^{3/2} \left(2 \sqrt{-2M+r} \sqrt{2M+(-1+h)r} (r+M^2\beta) \cos[b] + \sqrt{r} (-2M+r) \sqrt{-r + \frac{4h(r+M^2\beta)^2 \cos[b]^2}{-2M+r}} \right) \right. \\
& \quad \left. \sin[b] \sin[\theta] \right) / \left(\sqrt{-2M+r} ((2M-r)r + 8h(r+M^2\beta)^2 \cos[b]^2) \right) \}, \\
& \left\{ \theta, \theta, - \left(\left(2r^{3/2} \left(2 \sqrt{-2M+r} \sqrt{2M+(-1+h)r} (r+M^2\beta) \cos[b] + \right. \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. \sqrt{r} (-2M+r) \sqrt{-r + \frac{4h(r+M^2\beta)^2 \cos[b]^2}{-2M+r}} \right) \sin[b] \sin[\theta] \right) \right) / \\
& \quad \left. \left(\sqrt{-2M+r} ((2M-r)r + 8h(r+M^2\beta)^2 \cos[b]^2) \right) \right), \theta \} \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \left\{ \theta, \left(2M(-2M+r)^{3/2}(-r+M(M-r)\beta)\cos[b] \right) / \right. \right. \\
& \quad \left(4hr\sqrt{-2M+r}(r+M^2\beta)^2\cos[b]^2\sqrt{(2M-r)r+4h(r+M^2\beta)^2\cos[b]^2} + \right. \\
& \quad \left. \left. r(-2M+r)\left((2M-r)r+4h(r+M^2\beta)^2\cos[b]^2\right)\sqrt{-r+\frac{4h(r+M^2\beta)^2\cos[b]^2}{-2M+r}} \right), \right. \\
& \quad \left. \theta, \theta \right\}, \left\{ \left(2M(-2M+r)^{3/2}(r+M(-M+r)\beta)\cos[b] \right) / \right. \\
& \quad \left(4hr\sqrt{-2M+r}(r+M^2\beta)^2\cos[b]^2\sqrt{(2M-r)r+4h(r+M^2\beta)^2\cos[b]^2} + \right. \\
& \quad \left. \left. r(-2M+r)\left((2M-r)r+4h(r+M^2\beta)^2\cos[b]^2\right)\sqrt{-r+\frac{4h(r+M^2\beta)^2\cos[b]^2}{-2M+r}} \right), \theta, \theta, \theta \right\}, \\
& \quad \left\{ \theta, \theta, \theta, -\frac{2r(-2M+r)(r+M^2\beta)\sin[2b]\sin[\theta]}{(2M-r)r+8h(r+M^2\beta)^2\cos[b]^2} \right\}, \\
& \quad \left\{ \theta, \theta, \frac{2r(-2M+r)(r+M^2\beta)\sin[2b]\sin[\theta]}{(2M-r)r+8h(r+M^2\beta)^2\cos[b]^2}, \theta \right\} \\
& \quad \left\{ \left\{ \theta, \theta, -\frac{\cos[b]\sqrt{(2M-r)r+4h(r+M^2\beta)^2\cos[b]^2}}{r^2}, \right. \right. \\
& \quad \left. \left. -\frac{\sqrt{(2M-r)r+4h(r+M^2\beta)^2\cos[b]^2}\sin[b]\sin[\theta]}{r^2} \right\}, \right. \\
& \quad \left\{ \theta, \theta, \frac{1}{r^{3/2}(-2M+r)} \left(-\sqrt{2M+(-1+h)r}\cos[b]\sqrt{(2M-r)r+4h(r+M^2\beta)^2\cos[b]^2} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \sqrt{r}(-2M+r+hr+hM^2\beta+h(r+M^2\beta)\cos[2b]) \right), \right. \\
& \quad \left. \left. \frac{\left(2h\sqrt{r}(r+M^2\beta)\cos[b] - \sqrt{2M+(-1+h)r}\sqrt{(2M-r)r+4h(r+M^2\beta)^2\cos[b]^2} \right)\sin[b]\sin[\theta]}{r^{3/2}(-2M+r)} \right\}, \right. \\
& \quad \left\{ \frac{\cos[b]\sqrt{(2M-r)r+4h(r+M^2\beta)^2\cos[b]^2}}{r^2}, \frac{1}{r^{3/2}(-2M+r)} \right. \\
& \quad \left. \left(\sqrt{2M+(-1+h)r}\cos[b]\sqrt{(2M-r)r+4h(r+M^2\beta)^2\cos[b]^2} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \sqrt{r}(-2M+r+hr+hM^2\beta+h(r+M^2\beta)\cos[2b]) \right), \theta, \theta \right\}, \\
& \quad \left\{ \frac{\sqrt{(2M-r)r+4h(r+M^2\beta)^2\cos[b]^2}\sin[b]\sin[\theta]}{r^2}, \right. \\
& \quad \left. \frac{\left(-2h\sqrt{r}(r+M^2\beta)\cos[b] + \sqrt{2M+(-1+h)r}\sqrt{(2M-r)r+4h(r+M^2\beta)^2\cos[b]^2} \right)\sin[b]\sin[\theta]}{r^{3/2}(-2M+r)} \right\}, \\
& \quad \theta, \theta \} \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \left\{ \theta, \theta, \frac{\sqrt{(2M-r)r+4h(r+M^2\beta)^2\cos[b]^2}\operatorname{Csc}[\theta]\sin[b]}{r^2}, \right. \right. \\
& \quad \left. \left. -\frac{\cos[b]\sqrt{(2M-r)r+4h(r+M^2\beta)^2\cos[b]^2}}{r^2} \right\}, \left\{ \theta, \theta, \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \frac{\left(-2h\sqrt{r}(r+M^2\beta)\cos[b]+\sqrt{2M+(-1+h)r}\sqrt{(2M-r)r+4h(r+M^2\beta)^2\cos[b]^2}\right)\operatorname{Csc}[\theta]\sin[b]}{r^{3/2}(-2M+r)}, \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \frac{1}{r^{3/2}(-2M+r)}\left(-\sqrt{2M+(-1+h)r}\cos[b]\sqrt{(2M-r)r+4h(r+M^2\beta)^2\cos[b]^2}+\right. \right. \\
& \quad \left. \left. \sqrt{r}(-2M+r+h r+h M^2\beta+h(r+M^2\beta)\cos[2b])\right)\right\}, \\
& \quad \left\{ -\frac{\sqrt{(2M-r)r+4h(r+M^2\beta)^2\cos[b]^2}\operatorname{Csc}[\theta]\sin[b]}{r^2}, \right. \\
& \quad \left. \frac{\left(2h\sqrt{r}(r+M^2\beta)\cos[b]-\sqrt{2M+(-1+h)r}\sqrt{(2M-r)r+4h(r+M^2\beta)^2\cos[b]^2}\right)\operatorname{Csc}[\theta]\sin[b]}{r^{3/2}(-2M+r)}, \right. \\
& \quad \left. \theta, \theta, \left\{ \frac{\cos[b]\sqrt{(2M-r)r+4h(r+M^2\beta)^2\cos[b]^2}}{r^2}, \frac{1}{r^{3/2}(-2M+r)} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left(\sqrt{2M+(-1+h)r}\cos[b]\sqrt{(2M-r)r+4h(r+M^2\beta)^2\cos[b]^2}-\right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. \sqrt{r}(-2M+r+h r+h M^2\beta+h(r+M^2\beta)\cos[2b])\right)\right\}, \theta, \theta \right\}
\end{aligned}$$

Killingi vektorid

In[309]:=

```

(*Arvutame KS-sarnase lahendi Killingi vektorid*)
r[a_] := 2 M (1 + ProductLog[a/e])
F[a_] := (12 Sqrt[2] e^(-r[a]/(4 h)) M^(3/2)) / (Sqrt[9/h] Sqrt[r[a]])
g = {{-F[R^2 - T^2]^2, 0, 0, 0}, {0, F[R^2 - T^2]^2, 0, 0},
      {0, 0, r[R^2 - T^2]^2, 0}, {0, 0, 0, r[R^2 - T^2]^2 Sin[theta]^2}};
gI = Inverse[g];
gD = D[g, {{T, R, theta, phi}}];
Ct = Table[1/2 Sum[gI[[k]][i] * (gD[[1]][i][m] + gD[[m]][i][1] - gD[[1]][m][i]), {i, 4}],
           {k, 4}, {1, 4}, {m, 4}];

```

In[315]:=

```

(*Killingi vektori võrrand*)
KV = {KV0[T, R,  $\theta$ ,  $\phi$ ], KV1[T, R,  $\theta$ ,  $\phi$ ], KV2[T, R,  $\theta$ ,  $\phi$ ], KV3[T, R,  $\theta$ ,  $\phi$ ]} .g;
KV = {KV0[T, R], KV1[T, R], KV2[T, R], KV3[T, R]} .g;
Table[Cov[KV, {"d"}][[a, b]] + Cov[KV, {"d"}][[b, a]], {a, 4}, {b, 4}] // PowerExpand //
Simplify;
KVEq =
% /. ProductLog[ $\frac{R^2 - T^2}{e}$ ] ->  $\frac{r}{2M} - 1$  /. (R^2 - T^2) -> ( $\frac{r}{2M} - 1$ ) Exp[r / (2M)] // FullSimplify;
Do[Print[%[n]], {n, 4}]

```

$$\left\{ \frac{64 e^{-\frac{r}{2M}} h M^3 \left(-2M(2M+r) (TKV0[T, R] - R KV1[T, R]) - e^{\frac{r}{2M}} r^2 KV0^{(1,\theta)}[T, R] \right)}{r^3}, \right.$$

$$\left. \frac{32 e^{-\frac{r}{2M}} h M^3 \left(-KV0^{(\theta,1)}[T, R] + KV1^{(1,\theta)}[T, R] \right)}{r}, r^2 KV2^{(1,\theta)}[T, R], r^2 \sin[\theta]^2 KV3^{(1,\theta)}[T, R] \right\}$$

$$\left\{ \frac{32 e^{-\frac{r}{2M}} h M^3 \left(-KV0^{(\theta,1)}[T, R] + KV1^{(1,\theta)}[T, R] \right)}{r}, \right.$$

$$\left. \frac{64 e^{-\frac{r}{2M}} h M^3 \left(2M(2M+r) (TKV0[T, R] - R KV1[T, R]) + e^{\frac{r}{2M}} r^2 KV1^{(\theta,1)}[T, R] \right)}{r^3}, \right.$$

$$\left. r^2 KV2^{(\theta,1)}[T, R], r^2 \sin[\theta]^2 KV3^{(\theta,1)}[T, R] \right\}$$

$$\left\{ r^2 KV2^{(1,\theta)}[T, R], r^2 KV2^{(\theta,1)}[T, R], 16 e^{-\frac{r}{2M}} M^2 (-TKV0[T, R] + R KV1[T, R]), \theta \right\}$$

$$\left\{ r^2 \sin[\theta]^2 KV3^{(1,\theta)}[T, R], r^2 \sin[\theta]^2 KV3^{(\theta,1)}[T, R], \theta, \right.$$

$$\left. 2 \sin[\theta] \left(r^2 \cos[\theta] KV2[T, R] + 8 e^{-\frac{r}{2M}} M^2 (-TKV0[T, R] + R KV1[T, R]) \sin[\theta] \right) \right\}$$

In[320]:=

```

(*Lahendame saadud võrrandisüsteemi, kõik liikmed peaks  $\theta$ -d olema*)
KV3[T_, R_] := c1
KV2[T_, R_] := c2
Solve[-TKV0[T, R] + R KV1[T, R] == 0, KV1[T, R]]

```

Out[322]=

$$\left\{ \left\{ KV1[T, R] \rightarrow \frac{TKV0[T, R]}{R} \right\} \right\}$$

In[323]:=

```

KV1[T_, R_] :=  $\frac{TKV0[T, R]}{R}$ 
KV0[T_, R_] := c[R]
KVEq // FullSimplify // MatrixForm

```

Out[325]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{32 e^{-\frac{r}{2M}} h M^3 \left(\frac{c[R]}{R} - c'[R] \right)}{r} & 0 & 0 \\ \frac{32 e^{-\frac{r}{2M}} h M^3 \left(\frac{c[R]}{R} - c'[R] \right)}{r} & \frac{64 e^{-\frac{r}{2M}} h M^3 T (-c[R] + R c'[R])}{r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c2 r^2 \sin[2\theta] \end{pmatrix}$$

In[326]:=

```

DSolve[-c[R] + R c'[R] == 0, c[R], R] /. C[1] -> C[3]
c[R_] := R c3
c2 = 0;
(*Normeeritud Killingi vektor*)
gI.KV /. C[3] -> 1
(*Killingi vektori pikkus*)
KVLen =
gI.KV.KV /. ProductLog[ $\frac{R^2 - T^2}{e}$ ] ->  $\frac{r}{2M} - 1$  /. R^2 -> T^2 +  $\left(\frac{r}{2M} - 1\right) \text{Exp}[r / (2M)]$  /. C[3] -> 1 //
FullSimplify
(*Nõuame c1=0, vastasel juhul on lahendi sfääriline sümmeetria rikutud*)
KVLen /. c1 -> 0
(*Kontrollime, et tegemist on ikka Killingi vektoriga*)
KVEq // FullSimplify // MatrixForm
Clear[c, c2, r, F]

```

Out[326]=

```
{ {c[R] -> R c3} }
```

Out[329]=

```
{R, T, 0, c1}
```

Out[330]=

$$\frac{16 h M^2 (2 M - r)}{r} + c1^2 r^2 \text{Sin}[\theta]^2$$

Out[331]=

$$\frac{16 h M^2 (2 M - r)}{r}$$

Out[332]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Paul Martin Kull,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose

Mustad augud, horisondid ja tetraadid uues üldrelatiivsusteoorias,

mille juhendaja on Manuel Hohmann, PhD., reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada Tartu Ülikooli digitaalarhiivi kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni;

2. annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi kaudu Creative Commons'i litsentsiga CC BY NC ND 4.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni;
3. olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile;
4. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Paul Martin Kull

01/06/2025