ПЛАНИМЕТРІЯ

по системѣ Лежандра

для употребленія въ гимназіяхъ и реальныхъ училищахъ.

Составилъ

К. ГЕХЕЛЬ,

Докторъ математики въ Дерптѣ.

2. изданіе.

Дерптъ и Рига.

Изданіе типографіи Шнакенбурга.

1880.

ПЛАНИМЕТРІЯ

по системѣ Лежандра

для употребленія въ гимназіяхъ и реальныхъ училищахъ.

Составилъ

К. Гехель,

Докторъ математики въ Дерптѣ.

2. изданіе.

Дерптъ и Рига.

Изданіе типографіи Шнакенбурга.

1880.

Дозволено цензурою Дерптъ, 12. Апрѣля 1880 г.
Цензоръ П. ф. Руммелъ.

Предисловіе.

Многіе нѣмецкіе педагоги старались приспособить основанія Геометріи Лежандра къ употребленію въ школахъ и изъ всѣхъ ихъ К. Гехель, по отзыву знатоковъ дѣла, удачнѣе прочихъ выполнилъ эту задачу. Отбросивъ многія теоремы, составляющія скорѣе роскошь, чѣмъ необходимость при томъ количествѣ времени, которое назначается для Геометріи въ школахъ, онъ выбралъ самое существенное, чтобы сосредоточить на немъ все вниманіе учащагося. Простота и изящность нѣкоторыхъ новыхъ, упрощенныхъ и не встрѣчающихся въ нашихъ русскихъ руководствахъ къ Геометріи рѣшеній, сжатость и въ тоже время ясность изложенія составляютъ главныя достоинства этого учебника. Краткость изложенія даетъ возможность ученику схватить самую сущность и ходъ доказательства, и не развлекаетъ его массою послѣдовательныхъ выводовъ и слишкомъ частымъ повтореніемъ пройденнаго, — недостатокъ, которымъ страдаютъ многіе учебники. Всѣ повторенія здѣсь замѣнены ссылками. Этотъ учебникъ распространенъ во многихъ училищахъ Германіи, а также введенъ въ употребленіе въ гимназіяхъ и другихъ учебныхъ заведеніяхъ Прибалтійскихъ Губерній.

Въ предлагаемый переводъ вошли нѣкоторыя измѣненія сравнительно съ послѣднимъ нѣмецкимъ изданіемъ. Вслѣдъ за выходомъ Планиметріи будетъ напечатана Стереометрія, а въ послѣдствіи будутъ переведены и остальныя сочиненія того же автора, а именно: Ариѳметика, Алгебра, плоская и сферическая Тригонометрія, Аналитическая Геометрія и Стереометрическія задачи, что составитъ полный курсъ математическихъ наукъ, преподаваемыхъ въ гимназіяхъ и соотвѣтствующихъ имъ другихъ учебныхъ заведеніяхъ.

РИГА, 7. Августа 1869.

В. Шиховъ.

Оглавленіе.

Объясненіе знаковъ.

$=$	означаетъ	равно.
$<$	„	менѣе.
$>$	„	бо́лѣе.
$\parallel$	„	параллельно.
$\#$	„	равно и параллельно.
$\sim$	„	подобно.
$\cong$	„	равно и подобно.
$\angle$	„	уголъ.
$\perp$	„	перпендикулярно.
$\triangle$	„	треугольникъ.
$\smile$	„	дуга.

Введеніе.

§ **1.** 1) Геометрическимъ тѣломъ называется пространство, ограниченное со всѣхъ сторонъ и имѣющее длину, ширину и высоту (или глубину). Предѣлъ тѣла называется поверхностью, которая имѣетъ два измѣренія: длину и глубину. Предѣлъ поверхности есть линія, имѣющая только одну длину, а предѣлъ линіи — точка, не имѣющая никакого измѣренія.

Изученіе свойствъ тѣлъ, поверхностей и линій составляетъ предметъ Геометріи.

2) Прямая линія есть кратчайшее разстояніе между двумя точками, а потому между двумя точками можно провести только одну прямую.

Линія, составленная изъ двухъ или нѣсколькихъ прямыхъ, не сливающихся въ одну прямую, называется ломаною. Линія, которая никакою своею частію не можетъ слиться съ прямою, называется кривою.

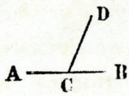
Двѣ ограниченныя прямыя называются равными, когда при наложеніи одной на другую сливаются оконечностями, а потому и всѣми промежуточными точками.

3) Поверхность называется плоскостью въ такомъ случаѣ, когда прямая, соединяющая двѣ произвольныя точки поверхности, совпадаетъ съ нею. Кривою поверхностю называется такая, которая никакою своею частію не совпадаетъ съ плоскостью.

4) Разсматриваніе свойствъ плоскости и различныхъ сочетаній линій и точекъ, находящихся въ одной плоскости, составляетъ первую часть Геометріи или Планиметрію.

§ **2.** 1) Если двѣ прямыя выходятъ изъ одной точки, то величина пространства, на которое онѣ отклоняются одна отъ другой, называется угломъ. Прямыя, образующія уголъ, называются его сторонами, а точка пересѣченія сторонъ — вершиною угла.

Величина угла не зависитъ отъ величины сторонъ, но отъ ихъ взаимнаго отклоненія. Два угла **равны**, если при наложеніи совпадаютъ своими вершинами и сторонами.



2) Если два угла ACD и BCD имѣютъ одну общую сторону CD, а двѣ другія стороны AC и BC составляютъ одну прямую, то такіе углы называются **смежными**.

Если смежные углы равны между собою, то каждый изъ нихъ называется **прямымъ**. Прямой уголъ будемъ означать буквою R.

Уголъ, который меньше прямаго, называется **острымъ**, а который больше прямаго, — **тупымъ**.

3) Если двѣ линіи образуютъ прямой уголъ, то онѣ называются **перпендикулярными** одна къ другой.

4) Двѣ прямыя при пересѣченія образуютъ 4 угла, изъ которыхъ каждые два противоположные называются **вертикальными**. Стороны одного изъ двухъ вертикальныхъ угловъ служатъ продолженіемъ сторонъ другаго. (На примѣръ въ § 5, 6 $\measuredangle$ AEC и $\measuredangle$ BED.)

5) Двѣ прямыя называются **параллельными**, если онѣ, находясь въ одной и той же плоскости, никогда не встрѣчаются, какъ бы ихъ ни продолжали.

§ **3.** Аксіомы.

1) Цѣлое болѣе своей части и равно всѣмъ своимъ частямъ.

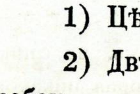
2) Двѣ величины, порознь равныя третьей, равны между собою.

3) Двѣ прямыя могутъ пересѣкаться въ одной только точкѣ; если же онѣ имѣютъ больше одной общей точки, то сливаются.

4) Чрезъ данную точку можно провести только одну прямую параллельно данной прямой.

I. Основныя предложенія.

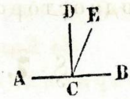
§ **4.** Всѣ прямые углы равны.



Если станемъ раздвигать стороны прямаго угла ABC до тѣхъ поръ, пока одна изъ нихъ (BC) сдѣлается продолженіемъ другой (BA), то получимъ уголъ ABD, котораго стороны BA и BD составятъ одну прямую. Изъ самаго опредѣленія прямаго угла (§ 2, 2) видно, что онъ равенъ половинѣ угла ABD, и такъ какъ всѣ углы, у которыхъ стороны составляютъ одну прямую, равны между собою, (§ 3, 4), то и всѣ прямые углы должны быть такъ же равны.

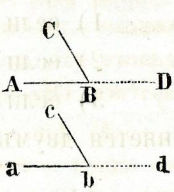
Прямой уголъ по причинѣ своей постоянной величины служитъ мѣрою всѣхъ остальныхъ угловъ. Онъ дѣлится на 90 равныхъ частей, называемыхъ градусами; каждый градусъ (1^0) дѣлится на 60 минутъ, а минута ($1'$) на 60 секундъ ($60''$).

§ 5. 1) Сумма двухъ смежныхъ угловъ ACE и ECB равна двумъ прямымъ.



Проведемъ изъ точки C линію $CD \perp AB$, тогда $ACE + ECB = ACD + DCE + ECB = ACD + DCB = 2R$.

2) Если два угла ABC и abc равны, то и ихъ смежные углы CBD и cbd равны.

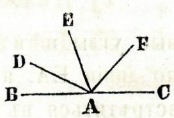


Такъ какъ $ABC + CBD = 2R = abc + cbd$, и $ABC = abc$, то и $CBD = cbd$.

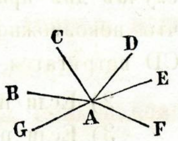
3) Изъ двухъ неравныхъ угловъ большій имѣетъ меньшій смежный уголъ и на оборотъ.

Если одинъ изъ смежныхъ угловъ острый, то другой тупой, и если одинъ прямой, то и другой прямой.

4) Сумма всѣхъ угловъ BAD, DAE..., лежащихъ по одну сторону прямой BC и имѣющихъ общую вершину въ точкѣ A, равна двумъ прямымъ, потому что сумма ихъ равна двумъ смежнымъ угламъ BAD и DAC.



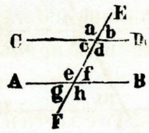
5) Сумма угловъ BAC, CAD, DAE ..., лежащихъ около точки A, равна четыремъ прямымъ. Стоитъ только провести чрезъ точку A произвольную прямую, тогда по каждую сторону прямой сумма угловъ равна 2R, слѣдовательно по обѣ стороны прямой, т. е. около точки A, эта сумма будетъ равняться 4R.



6) Вертикальные углы AEC и BED равны.

Такъ какъ $AEC + AED = 2R = BED + AED$ и $AED = AED$, то $AEC = BED$.

§ 6. Если двѣ прямыя линіи AB и CD (параллельныя или не параллельныя) пересѣкаются третьею EF, то при точкахъ пересѣченія образуется 8 угловъ, которые получаютъ особое названіе.



Четыре угла a, b, g, h называются внѣшними, а четыре угла c, d, e, f внутренними.

Два не смежные угла, лежащіе по одну сторону пересѣкающей прямой, изъ которыхъ одинъ внѣшній, а другой внутренній, называются соотвѣтствующими, напр. a, e; c, g; b, f; d, h.

Два внутренніе, не смежные угла, лежащіе по разнымъ сторонамъ сѣкущей, называются углами накрестъ лежащими. Таковы c, f; d, e.

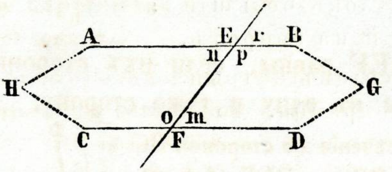
Два внутренніе по одну сторону сѣкущей лежащіе угла называются односторонними. Таковы c, e; d, f.

§ 7. Двѣ линіи AB и CD, пересѣченныя третьею EF, параллельны,

1) если два накрестъ лежащіе угла $(m = n)$ равны, или

2) если два соотвѣтствующіе угла $(m = r)$ равны, или

3) если сумма двухъ одностороннихъ угловъ $(n + o)$ равняется двумъ прямымъ.



1) Предположимъ, что AB и CD не параллельны, слѣд. по достаточномъ протяженіи пересѣкутся въ какой нибудь точкѣ G. Представимъ себѣ, что фигура EGF положена такъ по другую сторону линіи EF, что равные углы m и n, o и p покроютъ другъ друга, тогда линія FD пойдетъ по линіи EA, а линія EB по линіи FC, и потому линіи EA и FC должны встрѣтиться въ той точкѣ H, въ которую упадетъ точка G. Въ такомъ случаѣ двѣ прямыя AB и CD будутъ пересѣкаться въ двухъ точкахъ, что невозможно (§ 3, 3), и потому и предположеніе, что линіи AB и CD встрѣтятся, также невозможно, слѣд. эти линіи параллельны.

2) Если $m = r$, тогда и $m = n$ (§ 5, 6), слѣд. $AB \parallel CD$.

3) Если $n + o = 2R$, то найдемъ, такъ какъ и $m + o = 2R$, что $m = n$, слѣд. $AB \parallel CD$.

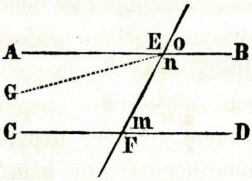
Слѣдствіе. Двѣ прямыя, перпендикулярныя къ одной и тойже прямой, параллельны между собою.

§ 8. Если двѣ параллельныя AB и CD пересѣкаются третьею линіею EF, то

1) накрестъ лажащіе углы равны,

2) соотвѣствующіе углы равны,

3) сумма двухъ одностороннихъ угловъ равняется двумъ прямымъ.



1) Положимъ, что $\measuredangle$ AEF не равенъ $\measuredangle$ m, но болѣе его, такъ что часть GEF = m. Тогда линія GE || CD (§ 7) и чрезъ точку E пройдутъ двѣ линіи AE и GE, параллельныя CD, что невозможно (§ 3,4). По той же причинѣ $\measuredangle$ AEF не можетъ быть меньше $\measuredangle$ m, а потому $\measuredangle$ AEF = m.

2) Такъ какъ $\measuredangle$ AEF = m и въ то же время $\measuredangle$ AEF = o, то и m = o.

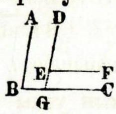
3) Такъ какъ o + n = 2 R и n = m, то и m + n = 2 R.

Слѣдствіе. Прямая линія, перпендикулярная къ одной изъ двухъ параллельныхъ, перпендикулярна и къ другой.

§ 9. Если двѣ линіи параллельны третьей, то онѣ параллельны между собою.

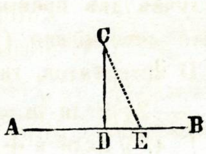
Если проведемъ перпендикуляръ къ третьей линіи, то онъ будетъ въ то же время перпендикуляромъ и къ каждой изъ остальныхъ линій (§ 8), слѣд. обѣ остальныя будетъ параллельны (§ 7).

§ 10. Два угла ABC и DEF равны, если ихъ стороны параллельны и отверстія обращены въ одну и туже сторону.

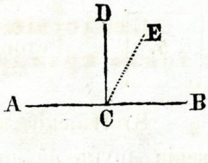


Продолжимъ сторону DE до пересѣченія со стороной BC въ точкѣ G тогда получимъ $\measuredangle$ ABC = DGC = DEF (§ 8, 2).

§ 11. Изъ данной точки C можно провести только одинъ перпендикуляръ къ линіи AB.



1) Точка C лежитъ внѣ прямой AB. Предположимъ, что кромѣ перпендикуляра CD изъ точки C опущенъ еще перпендикуляръ CE. Тогда CD и CE должны быть параллельны (§ 7); но онѣ пересѣкаются въ точкѣ C, слѣд. наше предположеніе невозможно.



2) Точка C лежитъ на прямой AB. Предположимъ, что чрезъ точку C проходятъ двѣ линіи CD и CE перпендикулярныя къ AB. Тогда $\measuredangle$ DCB=R =ECB, что невозможно (§ 3, 1).

§ 12.

1) **Плоскою фигурою** называется часть плоскости, ограниченная со всѣхъ сторонъ линіями. Если фигура ограничена только прямыми, то она называется **прямолинейною или многоугольникомъ**, а сумма всѣхъ сторонъ **периметромъ**.

2) Прямыя линіи, ограничивающія многоугольникъ, образуютъ стороны, а точки пересѣченія двухъ смежныхъ сторонъ-вершины мно—ка. Двѣ смежныя стороны пересѣкаясь составляютъ внутренніе углы мно—ка. Уголъ, образованный стороною мно—ка и продолженіемъ прилежащей къ ней другой стороны, называется внѣшнимъ; онъ служитъ дополненіемъ до 2 R прилежащаго къ нему внутренняго угла мно—ка.

3) Прямая, соединяющая двѣ вершины мно—ка и не совпадающая съ одною изъ его сторонъ, называется діагональю.

4) Мно—къ называютъ равностороннимъ, когда всѣ стороны равны, и правильнымъ, когда кромѣ того и всѣ углы равны.

По числу угловъ (или сторонъ) мно—ки раздѣляются на треугольники, четыреугольники и т. д.

5) Треугольникъ называется равностороннимъ, если всѣ стороны его равны; равнобедреннымъ, если двѣ только стороны равны; разностороннимъ, если всѣ стороны различной величины.

Въ равнобедренномъ тре—кѣ обыкновенно сторону, не имѣющую себѣ равной, называютъ основаніемъ, а точку пересѣченія прочихъ сторонъ — вершиною.

6) Тре—къ называется прямоугольнымъ, тупоугольнымъ или остроугольнымъ, смотря по тому, имѣетъ ли онъ прямой или тупой уголъ или всѣ острые углы.

Въ прямоугольномъ тре—кѣ сторону, противолежащую прямому углу, называютъ гипотенузою, а двѣ другія стороны катетами.

7) Четыреугольникъ, въ которомъ только двѣ стороны параллельны, называется трапеціею (фиг. 1), а въ которомъ каждыя двѣ противолежащія стороны параллельны, параллелограмомъ (фиг. 2—5).

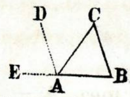
Параллелограмъ, имѣющій прямые углы, называется прямоугольникомъ (фиг. 3), имѣющій же равныя стороны, — ромбомъ (фиг. 4).

Параллелограмъ, въ которомъ всѣ углы прямые и всѣ стороны равны, называется квадратомъ (фиг. 5).

8) Плоскія фигуры называются равными (≅), если они при наложеніи другъ на друга совпадаютъ всѣми своими частями.

Изъ этого слѣдуетъ, что въ равныхъ мно—кахъ стороны и углы одного мно—ка по одиначкѣ равны сторонамъ и угламъ другаго. Вершины равныхъ угловъ, также и стороны и діагонали, соединяющія вершины равныхъ угловъ, называются соотвѣтствующими.

§ **13.** Сумма угловъ треугольника равна двумъ прямымъ.



Если продолжимъ одну сторону BA тре—ка и проведемъ изъ A прямую AD ∥ BC, то ∡ B = DAE и ∡ C = DAC (§ 8), слѣд. ∡ CAE = B + C. Но такъ какъ ∡ CAE + ∡ BAC = 2 R, то и ∡ B + C + BAC = 2 R.

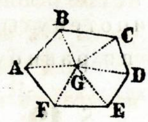
§ **14.** Слѣдствія. 1) Внѣшній уголъ (CAE) тре—ка равенъ суммѣ внутреннихъ съ нимъ не смежныхъ угловъ, слѣд. онъ болѣе каждаго изъ послѣднихъ угловъ.

2) Если два угла одного тре—ка равны двумъ угламъ другаго, то и третій уголъ равенъ третьему.

3) Если тре—къ имѣетъ одинъ прямой или тупой уголъ, то остальные углы должны быть острыми.

4) Въ прямоугольномъ тре—кѣ каждый острый уголъ дополняетъ другой острый до прямаго.

§ **15.** Сумма угловъ многоугольника равна двумъ прямымъ, умноженнымъ на число сторонъ, безъ четырехъ прямыхъ.



Означимъ число сторонъ мно—ка чрезъ n и проведемъ изъ точки G, внутри его произвольно взятой, прямыя къ вершинамъ всѣхъ угловъ. Тогда образуется n треугольниковъ, сумма угловъ коихъ равна 2 n R. Если мы отнимемъ 4 R около точки G, не принадлежащіе къ угламъ мно—ка, то останется (**2n—4**) R.

§ **16.** Слѣдствія. 1) Сумма угловъ въ четыреугольникѣ = 4 R, въ пятиугольникѣ = 6 R, въ шестиугольникѣ = 8 R и т. д.

2) Если въ мно—кѣ всѣ углы равны, что бываетъ въ правильномъ мно—кѣ, то каждый уголъ равняется суммѣ всѣхъ угловъ, раздѣленной на число угловъ. Слѣд. каждый уголъ

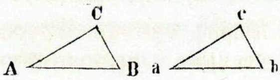
въ прав. **n** — угольникѣ $= \frac{2n-4}{n} = 2 - \frac{4}{n}$ R.

въ прямоугольникѣ $= \frac{4}{4} = 1$ R $= 90^0$

въ прав. 5 — угольникѣ $= \frac{6}{5}$ R $= 108^0$

въ прав. 6 — угольникѣ $= \frac{4}{3}$ R $= 120^0$ и т. д.

§ **17.** (I). Два треугольника равны, если уголъ и двѣ прилежащія къ нему стороны одного равны порознь тѣмъ-же частямъ другаго.



Пусть $\measuredangle A = a$, $AB = ab$, $AC = ac$. Наложимъ $\triangle abc$ на $\triangle ABC$ такъ, что бы точка a упала въ точку A, а линія ab на AB, тогда точка b упадетъ въ точку B, а по равенству угловъ $A = a$ и сторонъ $AC = ac$ точки c и C совпадутъ. Слѣд. стороны bc и BC совмѣстятся, а потому $\triangle abc \cong \triangle ABC$.

Слѣдствіе. Два прямоугольные тре—ка равны, если имѣютъ равные катеты.

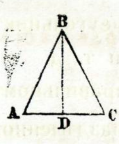
§ 18. (II.) Два треугольника равны, если сторона и два прилежащіе къ ней угла одного тре—ка равны порознь тѣмъ—же частямъ другаго. (Фиг. § 17).

Пусть $AB = ab$, $\measuredangle A = a$, $\measuredangle B = b$. Наложимъ сторону ab на AB такъ, чтобъ точка a упала въ A, и точка b въ B. Тогда по равенству угловъ стороны ac и bc примутъ направленія AC и BC. Но какъ двѣ прямыя могутъ пересѣкаться только въ одной точкѣ, то точка c упадетъ въ C и посему тре-ки совершенно совмѣстятся.

Слѣдствія. 1) Два тре--ка равны, если имѣютъ по равной сторонѣ и по два равные угла (§ 14, 2).

2) Прямоугольные тре—ки равны, если имѣютъ равныя гипотенузы и по равному острому углу, или по равному катету и по равному острому углу.

§ 19. 1) Если въ треугольникѣ двѣ стороны равны, то и противолежащіе имъ углы такъ же равны, и обратно, 2) если два угла равны, то и противолежащія имъ стороны равны.



1) Если $AB = BC$ и прямая BD дѣлитъ $\measuredangle ABC$ пополамъ, тогда $\triangle ADB \cong CDB$ (§ 17), слѣд. $\measuredangle A = C$.

2) Если $\measuredangle A = C$, и прямая BD дѣлитъ $\measuredangle ABC$ пополамъ, тогда $\triangle ABD \cong CBD$ (§ 18, 1), и потому $AB = BC$.

§ 20. Слѣдствія. 1) Въ равностороннемъ тре—кѣ всѣ углы равны, и потому каждый изъ нихъ $= \frac{2}{3} R = 60^0$.

2) Въ равнобедренномъ прямоугольномъ тре—кѣ каждый изъ острыхъ угловъ равенъ $\frac{1}{2} R = 45^0$.

3) Тре—къ, имѣющій равные углы, имѣетъ и равныя стороны.

§ 21. Если въ равнобедренномъ тре—кѣ проведенная изъ вершины линія выполняетъ одно изъ трехъ условій:

1) дѣлитъ уголъ при вершинѣ пополамъ, или

2) дѣлитъ основаніе пополамъ, или

3) перпендикулярна къ основанію, то она выполняетъ и оба остальныя условія (Фиг. § 19).

Пусть въ $\triangle$ ABC сторона AB $=$ CB, и потому $\sphericalangle$ A $=$ C,

1) Если $\sphericalangle$ ABD $=$ CBD, то $\triangle$ ABD $\cong$ CBD по § 17 или § 18;

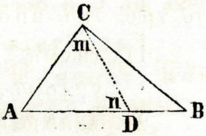
2) Если AD $=$ CD, то $\triangle$ ABD $\cong$ CBD по § 17;

3) Если BD $\perp$ AC, то $\triangle$ ABD $\cong$ CBD по § 18, 1.

Изъ этого слѣдуетъ, что при каждомъ изъ нашихъ условій $\triangle$ ABD $\cong$ CBD, и потому въ одно и тоже время $\sphericalangle$ ABD $=$ CBD, AD $=$ CD, BD $\perp$ AC.

§ **22.** Въ треугольникѣ ABC 1) бо́льшей сторонѣ противолежитъ бо́льшій уголъ, и обратно, 2) бо́льшему углу противолежитъ бо́льшая сторона.

1) Если AB $>$ AC, то и $\sphericalangle$ ACB долженъ быть $>$ B.



Отложимъ на сторонѣ AB линію AD $=$ AC, тогда въ равнобедренномъ $\triangle$ ACD будетъ $\sphericalangle$ m $=$ n (§ 19). Уголъ n, какъ внѣшній въ $\triangle$ CBD, болѣе угла B, потому и $\sphericalangle$ m $>$ B; слѣд. и $\sphericalangle$ ACB $>$ B.

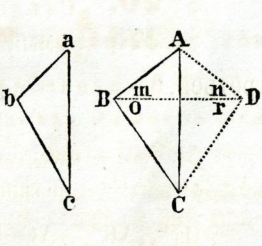
2) Если $\sphericalangle$ ACB $>$ B, то и AB $>$ AC. Если бы была сторона AB $\lesseqgtr$ AC, то былъ бы и $\sphericalangle$ ACB $\lesseqgtr$ B (§ 19 и § 22, 1). Но такъ какъ это противорѣчитъ нашему условію, то AB $>$ AC.

§ **23.** Слѣдствія. 1) Гипотенуза прямоугольнаго тре—ка есть самая большая изъ всѣхъ сторонъ.

2) Въ тупоугольномъ тре—кѣ сторона, противолежащая тупому углу, есть наибо́льшая.

§ **24.** (III.) Два треугольника равны, если всѣ стороны одного порознь равны сторонамъ другаго.

Пусть AB $=$ ab, AC $=$ ac, BC $=$ bc. Приложимъ тре—ки другъ къ другу бо́льшими ихъ сторонами такъ, чтобы точки a и c упали въ точки A и C, а уголъ abc принялъ положеніе ADC. Если проведемъ BD, то въ равностороннихъ тре—кахъ BAD и BCD уголъ m $=$ n и o $=$ r (§ 19), слѣд. m $+$ o $=$ n $+$ r, потому $\triangle$ ABC $\cong$ ADC $\cong$ abc (§17).



§ **25.** (IV.) Два треугольника равны, если двѣ стороны и уголъ противолежащій бо́льшей изъ этихъ сторонъ одного соотвѣтственно равны тѣмъ-же частямъ другаго. (Фиг. § 24).

Пусть $ab = AB$, $ac = AC$, $\measuredangle b = B$ и кромѣ того $ac > ab$ и $AC > AB$. Приложимъ оба тре—ка другъ къ другу такъ, чтобы бо́льшія изъ данныхъ сторонъ ac и AC совпали своими оконечностями, а уголъ abc принялъ положеніе ADC. Тогда $\measuredangle ABC = ADC$ и $AB = AD$. Если проведемъ BD, то въ равностороннемъ $\triangle BAD$ уголъ $m = n$, слѣд. и $\measuredangle ABC - m = \measuredangle ADC - n$ или $o = r$, по этому въ $\triangle BCD$ сторона $BC = DC$ (§ 19, 2), то (§24) $\triangle ABC \cong ADC \cong abc$.

Если углы A и a, заключающіеся между равными сторонами, будутъ тупые, то прямая BD упадетъ по другую сторону вершины A, и вмѣсто вычитанія равныхъ угловъ изъ равныхъ придется употребить сложеніе.

Слѣдствіе. Два прямоугольные тре—ка равны, если имѣютъ равныя гипотенузы и по равному катету.

§ **26.** Изъ доказанныхъ случаевъ равенства тре—ковъ слѣдуетъ, что тре—къ вполнѣ опредѣляется:

1) двумя сторонами и заключающимся между ними угломъ,
2) одною стороною и двумя углами,
3) тремя сторонами,
4) двумя сторонами и угломъ, противолежащимъ бо́льшей изъ этихъ сторонъ.

И такъ тре—къ опредѣляется тремя своими частями, въ числѣ которыхъ должна быть непремѣнно хотя одна сторона.

Такъ какъ въ прямоугольномъ тре—кѣ одинъ уголъ всегда извѣстенъ, то для опредѣленія прямоугольнаго тре—ка достаточно

1) двухъ катетовъ,
2) гипотенузы и остраго угла,
3) катета и остраго угла,
4) гипотенузы и катета.

§ **27.** Сумма двухъ сторонъ треугольника всегда болѣе третьей.

Такъ какъ прямая AB есть кратчайшее разстояніе между точками A и B, то ломаная $ABC = AC + CB$ должпа быть болѣе AB.

Изъ $AB < AC + CB$ слѣдуетъ, что $AB - AC < CB$, т. е. разность между двумя сторонами тре—ка меньше третьей его стороны.

§ **28.** Если изъ какой нибудь точки C, внѣ прямой EB, опустимъ на нее перпендикуляръ CD и проведемъ нѣсколько наклонныхъ CB, CA, CE . . ., то

1) перпендикуляръ короче всякой наклонной,

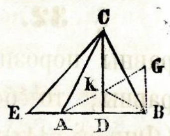
2) двѣ наклонныя CA и CB, равно удаленныя (DA = DB) отъ основанія (D) перпендикуляра, равны;

3) изъ двухъ наклонныхъ CA и CE болѣе удаленная отъ основанія (D) длиннѣе другой.

1) Въ тре—кахъ CAD и CED сторона CA > CD и CE > CD (§ 23, 1).

2) Если DA = DB, то △ CAD ≅ CBD (§ 17), слѣд. CA = CB,

3) Такъ какъ ∡ CAD острый, слѣд. ∡ CAE тупой, въ △ CEA сторона CE > CA (§ 23, 2).



§ **29.** Слѣдствія. 1) Изъ одной точки нельзя провести больше двухъ равныхъ линій къ данной прямой.

2) Кратчайшая изъ всѣхъ линій, проведенныхъ изъ точки C къ прямой EB, перпендикулярна къ этой послѣдней и служитъ мѣрою разстоянія точки C отъ прямой EB.

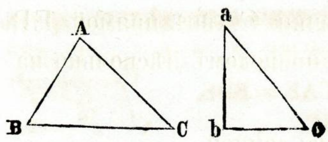
§ **30.** Если изъ средины прямой AB возставимъ къ ней перпендикуляръ DC, то 1) всякая точка C этого перпендикуляра будетъ равно удалена отъ концовъ прямой AB, напротивъ того 2) всякая точка G, взятая внѣ перпендикуляра, будетъ ближе къ тому концу его, съ которымъ она лежитъ по одну и ту-же сторону перпендикуляра. (Фиг. § 28.)

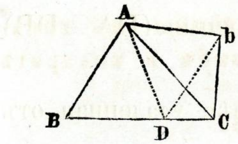
1) Такъ какъ AD = BD, то CA = CB (§ 28, 2).

2) Если проведутся AG, GB, KB, тогда KA = KB, и такъ какъ GK + KB > GB, то и GA > GB.

§ **31.** Если въ треугольникахъ ABC и abc двѣ стороны одного равны порознь двумъ сторонамъ другаго, а заключающіеся между ними углы не равны, то бо́льшему углу противолежитъ и бо́льшая сторона.

Если AB = ab, AC = ac, A > a, то BC > bc.



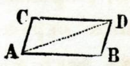


Приложимъ оба тре—ка другъ къ другу такъ, чтобъ стороны AC и ac совпали и $\triangle$ acb принялъ положеніе ACb. Если раздѣлимъ $\measuredangle$ BAb пополамъ прямою AD и проведемъ bD, тогда $\triangle BAD \cong bAD$ (§ 17), слѣдовательно $BD = bD$. Но такъ какъ въ $\triangle$ bCD $bD + DC > bC$, то и $BD + DC > bC$, т. е. $BC > bc$.

§ 32. Если въ двухъ треугольникахъ двѣ стороны одного равны порознь двумъ сторонамъ другаго, а третьи стороны не равны, то бо́льшей сторонѣ противолежитъ и бо́льшій уголъ. (Фиг. § 31.) Если $AB = ab$, $AC = ac$, $BC > bc$, то $A > a$.

Положимъ, что $\measuredangle A = a$, тогда $\triangle ABC \cong abc$ (§ 17), слѣд. $BC = bc$; а если положимъ, что $\measuredangle A < a$, тогда и сторона BC должна быть $< bc$. То и другое противорѣчитъ нашему условію, слѣд. $\measuredangle A > a$.

§ 33. Въ параллелограмѣ ABCD противолежащія стороны и углы равны.



Если проведемъ діагональ AD, тогда $\triangle ABD \cong DCA$ (§ 8 и § 18), слѣд. $AB = CD$, $BD = AC$, $\measuredangle B = C$ и $\measuredangle BAC = CDB$.

Слѣдствія. 1) Діагональ дѣлитъ параллелограмъ на два равные тре—ка.

2) Параллельныя линіи, заключающіяся между двумя параллельными, равны.

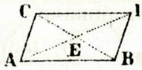
3) Параллельныя линіи во всѣхъ своихъ частяхъ одинаково удалены другъ отъ друга.

§ 34. Если въ четыреугольникѣ 1) каждыя двѣ противолежащія стороны равны, или 2) двѣ противолежащія стороны параллельны и равны, — тогда четыреугольникъ есть параллелограмъ. (Фиг. § 33.)

1) Если $AB = CD$ и $AC = BD$, то $\triangle ABD \cong DCA$ (§ 24), а потому $\measuredangle ADB = DAC$ и $\measuredangle BAD = CDA$, слѣд. $AC \parallel BD$ и $AB \parallel CD$.

2) Если $AB \# CD$, тогда $\triangle ABD \cong DCA$ (§ 17), а потому $\measuredangle ADB = DAC$, слѣд. $AC \parallel BD$.

§ **35.** Въ параллелограмѣ ABDC діагонали дѣлятъ другъ друга пополамъ.



Такъ какъ $AC = BD$, $\measuredangle ACE = DBE$, $\measuredangle CAE = BDE$, то $\triangle ACE \cong DBE$, слѣд. $AE = DE$ и $CE = BE$.

§ **36.** Діагонали въ прямоугольникѣ равны, въ косоугольномъ параллелограмѣ неравны, въ ромбѣ и квадратѣ перпендикулярны другъ къ другу.

Доказательства слѣдуютъ изъ § 17, § 19 и § 31.

II. О кругѣ.

§ **37.** 1) Кругомъ называется плоская фигура, ограниченная кривою линіею, всѣ точки которой равно удалены отъ внутренней точки, называемой центромъ.

Кривая, ограничивающая кругъ, называется окружностью или круговою линіею.

Если въ плоскости обращается прямая линія около одной изъ ея точекъ, то всякая другая точка этой линіи опишетъ круговую линію.

2) Прямая, проведенная отъ центра круга къ точкѣ, лежащей на окружности, называется радіусомъ или полупоперечникомъ, а прямая, проходящая чрезъ центръ и ограниченная съ обѣихъ сторонъ окружностью, называется діаметромъ или поперечникомъ. Такъ какъ въ одномъ и томъ же кругѣ всѣ радіусы равны, то и всѣ діаметры, какъ двойные радіусы, должны быть равны между собою.

3) Всякая часть окружности называется дугою, а прямая, соединяющая ея оконечности, хордою. Каждой дугѣ соотвѣтствуетъ одна хорда, но каждой хордѣ-двѣ дуги, а именно тѣ, которыя имѣютъ общія съ хордою оконечности и взаимно дополняютъ другъ друга до цѣлой окружности.

4) Неограниченная прямая, проходящая чрезъ кругъ такъ, что одна часть лежитъ внутри, а другая внѣ круга, называется сѣкущею.

5) Если прямая имѣетъ только одну общую точку съ окружностью, то она называется касательною, а общая точка-точкою прикосновенія.

Два круга касаются, если ихъ окружности имѣютъ только одну общую точку.

6) Если уголъ образуется двумя радіусами и слѣд. имѣетъ вершину въ центрѣ круга, то его называютъ центральнымъ угломъ; если же уголъ убразуется двумя хордами, и вершина его находится на окружности, то онъ называется вписаннымъ угломъ.

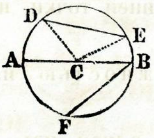
Центральные и вписанные углы опираются на соотвѣтствующую имъ дугу, т. е. на ту часть окружности, которая заключается между ихъ сторонами.

7) Часть круга, заключающаяся между дугою и двумя радіусами, проведенными къ оконечностямъ дуги, называется секторомъ или вырѣзкомъ, а часть круга, заключающаяся между дугою и ея хордою — сегментомъ или отрѣзкомъ.

8) Многоугольникъ вписанъ въ кругъ, если всѣ стороны его составляютъ хорды этого круга. Въ такомъ случаѣ говорятъ, что кругъ описанъ около мно—ка.

Многоугольникъ описанъ около круга, если всѣ стороны его касательныя къ окружности. Въ такомъ случаѣ кругъ вписанъ въ мно—къ.

§ 38. Всякій діаметръ AB дѣлитъ кругъ и окружность на двѣ равныя части.



Представимъ себѣ, что фигура будетъ перегнута по линіи AB, тогда кривыя ADEB и AFB совпадутъ, потому что всѣ точки ихъ равно удалены отъ центра.

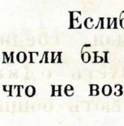
§ 39. Діаметръ AB болѣе всякой хорды DE (фиг. § 38.)

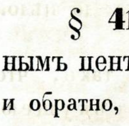
Если проведемъ радіусы CD и CE, тогда $DC + CE > DE$, слѣд. и $AB > DE$.

§ 40. Прямая линія можетъ пересѣкать окружность не болѣе какъ въ двухъ точкахъ.

Еслибы обѣ линіи имѣли болѣе двухъ общихъ точекъ, тогда мы могли бы отъ центра къ прямой провести болѣе двухъ равныхъ линій, что не возможно (§ 29.)

§ 41. Въ одномъ кругѣ или въ равныхъ кругахъ 1) равнымъ центральнымъ угламъ соотвѣтствуютъ равныя дуги и хорды, и обратно, 2) равнымъ дугамъ соотвѣтствуютъ равныя центральныя углы и хорды.





1) Если $\measuredangle C = c$, то по равенту радіусовъ одинъ кругъ можно такъ наложить на другой, что точки A, B, C, совпадутъ съ точками a, b, c, а отъ того хорды и дуги, соотвѣтствующія угламъ C и c, сольются.

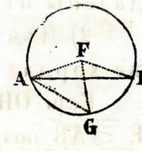
2) Если дуга $AB = ab$, то и хорды ихъ также равны и потому $\triangle ABC \cong abc$ (§ 24), слѣд. $\measuredangle C = c$.

§ **42.** Слѣдствія. 1) Равныя хорды стягиваютъ равныя дуги, если обѣ дуги больше или обѣ дуги меньше полуокружности.

2) Равнымъ центральнымъ угламъ или равнымъ дугамъ соотвѣтствуютъ равные секторы и сегменты.

3) Бо́льшему изъ двухъ центральныхъ угловъ соотвѣтствуетъ бо́льшая дуга и обратно, какъ видно изъ наложенія одной фигуры на другую.

§ **43.** Въ одномъ кругѣ или въ равныхъ кругахъ 1) бо́льшей дугѣ соотвѣтствуетъ бо́льшая хорда, и на оборотъ, 2) бо́льшей хордѣ соотвѣтствуетъ бо́льшая дуга, — если сравниваемыя дуги менѣе полуокружности.

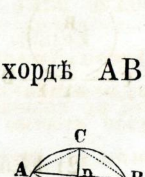


1) Пусть дуга $AGB > AG$. Если проведутся радіусы FA, FB, FG, тогда тре—ки AFB и AFG имѣютъ по двѣ равныя стороны, которыя образуютъ неравные углы, $\measuredangle AFB > AFG$; слѣд. $AB > AG$ (§ 31).

2) Если $AB > AG$, тогда изъ тѣхъ же тре—ковъ слѣдуетъ, что $\measuredangle AFB > AFG$ (§ 32), и потому дуга $AGB > AG$.

Если разсматриваемыя дуги болѣе полуокружности, то бо́льшей дугѣ соотвѣтствуетъ меньшая хорда.

§ **44.** Радіусъ EC, перпендикулярный къ хордѣ AB, дѣлитъ хорду и дугу ея ACB пополамъ.

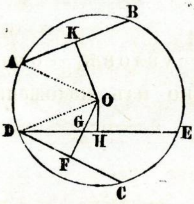


Такъ какъ $\triangle ADE \cong BDE$ (§ 25), то $AD = BD$, а потому $AC = BC$ (§ 28, 2), слѣдовательно и дуга $AC = BC$ (§ 42, 1).

§ **45.** Слѣдствія. 1) Центръ круга, средина хорды и средина ея дуги лежатъ на одной прямой, перпендикулярной къ хордѣ, такъ что прямая, проходящая чрезъ двѣ изъ этихъ точекъ, должна пройти и чрезъ третью.

2) Перпендикуляръ возставленный къ хордѣ въ срединѣ ея, пройдетъ чрезъ центръ круга и средину дуги, стягиваемой хордою.

§ **46.** 1) Равныя хорды AB и DC равно удалены отъ центра круга. 2) Изъ двухъ неравныхъ хордъ, AB и DE, бо́льшая DE ближе къ центру.



1) Возставимъ изъ срединъ хордъ AB и DC перпендикуляры KO и FO, и проведемъ радіусы OA и OD, тогда $\triangle AOK \cong DOF$ (§ 25), а потому $OK = OF$ (§ 29, 3).

2) Если AB, $<$ DE, то и дуга $AB < DCE$ (§ 43, 2). Отложимъ на дугѣ DCE часть $DC = AB$, проведемъ хорду DC и опустимъ $OF \perp DC$ и $OH \perp DE$, тогда $OF > OG > OH$ (§ 28, 1), и такъ какъ $DC = AB$ (§ 41, 2), то и $OF = OK$, слѣд. $OK > OH$.

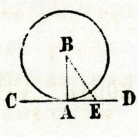
§ **47.** 1) Двѣ хорды AB и DC равны, если они равно удалены отъ центра круга. (§ 17 и § 44.)

2) Чѣмъ ме́нѣе разстояніе хорды отъ центра, тѣмъ болѣе хорда.

Если $OH < OK$, то должна быть $DE > AB$, потому что принимая $DE \overline{\overline{<}} AB$ получимъ (§ 46) $OH \overline{\overline{>}} OK$, что противно нашему условію.

§ **48.** 1) Прямая, перпендикулярная къ радіусу въ его конечной точкѣ, есть касательная къ окружности, и обратно;

2) Касательная перпендикулярна къ радіусу, проведенному чрезъ точку прикосновенія.



1) Если прямая $AD \perp AB$ въ точкѣ A, лежащей на окружности, то всякая другая точка, напр. E на прямой CD, отстоитъ далѣе отъ центра B, нежели A, потому что $BE > BA$ (§ 28, 1). Слѣд. CD, имѣя только одну точку, общую съ окружностью, будетъ касательною къ кругу.

2) Если CD касательная къ кругу въ точкѣ A, то всѣ другія точки ея находятся внѣ окружности; слѣд. разстояніе ихъ отъ центра болѣе нежели радіусъ BA, напр. $BE > BA$. Такъ какъ AB есть кратчайшее разстояніе центра B отъ CD, то $BA \perp CD$ (§ 29, 2).

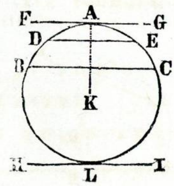
§ **49.** Слѣдствія. 1) Чрезъ данную точку окружности можно провести только одну касательную.

2) Перпендикуляръ, возставленный изъ точки прикосновенія къ касательной пройдетъ чрезъ центръ круга.

3) Перпендикуляръ, опущенный изъ центра на касательную, пройдетъ чрезъ точку прикосновенія.

Доказательства выводятся изъ § 11.

§ 50. Дуги круга, заключающіяся между параллельными линіями, равны между собою.

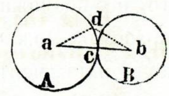


Если хорды BC и DE параллельны, то радіусъ KA, проведенный $\perp$ BC, также будетъ $\perp$ DE (§ 8 слѣд.), и потому $\smile AB = \smile AC$, $\smile AD = \smile AE$, слѣд. и $\smile BD = \smile CE$ (§ 44).

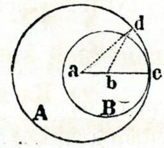
Если касательная FG $\parallel$ DE, то проведенный къ точкѣ прикосновенія радіусъ KA будетъ $\perp$ FG и $\perp$ DE, слѣд. $\smile DA = \smile EA$.

Если касательныя FG и HI параллельны, то проведя хорду BC $\parallel$ FG по предъидущему, будемъ имѣть: $\smile BA = \smile CA$ и $\smile BL = \smile CL$, слѣд. и $\smile ABL = \smile ACL$.

§ 51. Если разстояніе ab между центрами двухъ круговъ A и B равно суммѣ или разности ихъ радіусовъ, то окружности касаются соотвѣтственно извнѣ или внутри.



1) Если ab равна суммѣ радіусовъ ac и bc, то всякая точка d круга A, за исключеніемъ точки c, лежащей на прямой ab, находится внѣ круга B, потому что $ad + bd > ac + bc$, слѣд. $bd > bc$.



2) Если ab равна разности $ac - bc$, то всякая точка d круга A, за исключеніемъ точки c, находится внѣ круга B, потому что $ab + bd > ad$, но $ad = ab + bc$, слѣд. $ab + bd > ab + bc$ или $bd > bc$.

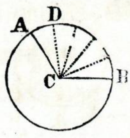
§ 52. Слѣдствія. 1) Если два круга соприкасаются, то ихъ центры и точка соприкосновенія лежатъ на одной прямой.

2) Два круга пересѣкутся, если разстояніе между центрами менѣе суммы, и болѣе разности ихъ радіусовъ.

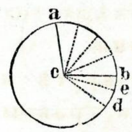
3) Всѣ круги, имѣющіе центры на одной прямой линіи и проходящіе чрезъ одну и туже точку этой прямой, соприкасаются въ этой точкѣ и имѣютъ въ ней общую касательную.

§ 53. Въ одномъ кругѣ или въ двухъ равныхъ кругахъ центральные углы ACB и acb относятся какъ дуги AB и ab, заключающіяся между ихъ сторонами.

Положимъ, что $\measuredangle$ ACD можно отложить 5 разъ въ $\measuredangle$ ACB и 4 раза въ $\measuredangle$ acb. Такъ какъ равнымъ угламъ соотвѣтствуютъ равныя



дуги (§ 41), то и $\smile AD$ отложится 5 разъ на $\smile AB$ и 4 раза на $\smile ab$. Отсюда видно, что если углы относятся между собою какъ два цѣлыя числа, то и соотвѣтствующія имъ дуги будутъ относиться, какъ тѣже числа.



Каково бы ни было отношеніе между углами, во всякомъ случаѣ они будутъ относиться какъ дуги. Положимъ, что пропорція $\measuredangle ACB : \measuredangle acb = AB : ab$ не существуетъ, а существуетъ пропорція

$$\measuredangle ACB : \measuredangle acb = AB : ad,$$

гдѣ $ad > ab$. Представимъ себѣ, что AB раздѣлена на столь малыя равныя части, что каждая изъ нихъ меньше дуги bd; тогда при наложеніи этихъ частей на дугу ad какая нибудь точка дѣленія e непремѣнно упадетъ между b и d. Такъ какъ AB и ae относятся какъ цѣлыя числа, то по предъидущему будемъ имѣть

$$\measuredangle ACB : \measuredangle ace = AB : ae.$$

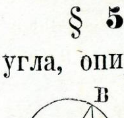
Изъ обѣихъ пропорцій получимъ

$$\measuredangle acb : \measuredangle ace = ad : ae,$$

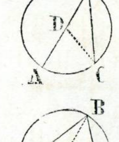
что не возможно, потому что $acb < ace$, а $ad > ae$. Точно такимъ же образомъ можно доказать, что четвертый членъ пропорціи не можетъ быть менѣе ab; слѣд. во всѣхъ случаяхъ существуетъ пропорція $\measuredangle ACB : \measuredangle acb = AB : ab$.

§ 54. Соотвѣтственно раздѣленію прямаго угла на 90 угловыхъ градусовъ и четверть окружности, лежащая между сторонами прямаго угла, дѣлится на 90 (слѣд. цѣлая окружность на 360) дуговыхъ градусовъ, каждый градусъ на 60 минутъ, а минута на 60 секундъ. Такъ какъ центральный уголъ заключаетъ въ себѣ столько угловыхъ градусовъ сколько его дуга дуговыхъ, то за мѣру угла принимается дуга, описанная произвольнымъ радіусомъ изъ вершины угла между его сторонами, что однакожъ всегда надобно принимать въ такомъ смыслѣ, что дуга, соотвѣтствующая углу, показываетъ, сколько угловыхъ градусовъ заключается въ углѣ.

§ 55. Вписанный уголъ ABC вдвое менѣе центральнаго угла, опирающагося на туже самую дугу.

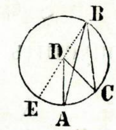


1) Если центръ D лежитъ на одной изъ сторонъ даннаго угла, то (§ 19) $\measuredangle B = C$ и $\measuredangle ADC = B + C = 2B$ (§ 14, 1), слѣд. $\measuredangle B = \frac{1}{2} ADC$.



2) Если D лежитъ внутри угла ABC, то проведя діаметръ BE имѣемъ $\measuredangle ABE = \frac{1}{2} ADE$ и $\measuredangle CBE = \frac{1}{2} CDE$, слѣд. $\measuredangle ABC = \frac{1}{2} ADC$.

3) Если D лежитъ внѣ угла ABC, то проведя діаметръ BE получимъ $\measuredangle$ CBE $= \frac{1}{2}$ CDE и $\measuredangle$ ABE $= \frac{1}{2}$ ADE, слѣд. CBE — ABE $= \frac{1}{2}$ (CDE — ADE) или $\measuredangle$ ABC $= \frac{1}{2}$ ACD.



§ 56. Слѣдствія. 1) Вписанный уголъ измѣряется половиною дуги, заключающейся между его сторонами.

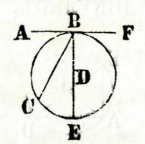
2) Всѣ углы, вписанные въ одномъ и томъ же кругѣ и опирающіеся на одну и туже или на равныя дуги, равны между собою.

3) Вписанный уголъ, опирающійся на полуокружность, есть прямой.

4) Во вписанномъ четыреугольникѣ сумма двухъ противолежащихъ угловъ равна двумъ прямымъ.

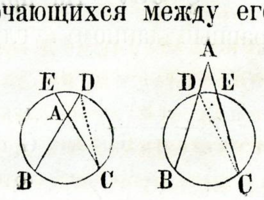
§ 57. Уголъ ABC, образованный касательною и хордою, измѣряется половиною дуги BC, заключающейся между его сторонами.

Если проведемъ изъ точки прикосновенія діаметръ BE, тогда $\measuredangle$ ABE измѣряется дугою $\frac{1}{2}$ BCE, а $\measuredangle$ CBE дугою $\frac{1}{2}$ CE, слѣд. $\measuredangle$ ABC $=$ ABE — CBE будетъ измѣряться дугою $\frac{1}{2}$ (BCE — CE) $= \frac{1}{2}$ BC. — Подобнымъ образомъ мѣрою для тупаго угла CBF будетъ дуга $\frac{1}{2}$ CEB.



§ 58. Уголъ BAC, образованный прямыми, пересѣкающимися внутри круга или внѣ его, измѣряется соотвѣтственно полусуммою или полуразностью дугъ, заключающихся между его сторонами, т. е. $\frac{1}{2}$ (BC $\pm$ ED).

Если провести изъ точки D хорду DC, тогда $\measuredangle$ BAC $= \measuredangle$ BDC $\pm \measuredangle$ ECD (§ 14, 1). Такъ какъ $\measuredangle$ BCD измѣряется дугою $\frac{1}{2}$ BC, а $\measuredangle$ ECD дугою $\frac{1}{2}$ ED, то $\measuredangle$ BAC измѣряется дугою $\frac{1}{2}$ (BC $\pm$ ED).

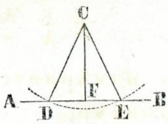


III. Задачи.

§ 59. Раздѣлить прямую AB пополамъ.

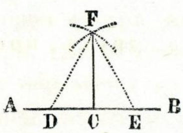
Изъ концовъ A и B данной прямой опишемъ дуги, которыя пересѣкутся въ точкахъ C и D. Прямая CD раздѣлитъ данную линію AB въ точкѣ E пополамъ, потому что $\triangle$ ACD $\cong$ BCD (§ 24), слѣд. $\measuredangle$ x $=$ y и $\triangle$ ACE $\cong$ BCE, а потому AE $=$ BE.

§ 60. Изъ данной точки C, лежащей внѣ прямой AB, опустить на эту прямую перпендикуляръ.



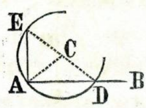
Изъ точки C опишемъ дугу, которая бы пересѣкла прямую AB въ точкахъ D и E. Раздѣлимъ DE пополамъ, тогда прямая CF, соединяющая данную точку съ точкою дѣленія, будетъ искомый перпендикуляръ; ибо $\triangle CDF \cong CEF$ (§ 24), слѣд. $\measuredangle CFD = CFE$.

§ 61. Изъ данной точки C, лежащей на прямой AB, возставить къ ней перпендикуляръ.



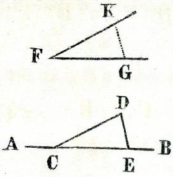
Возьмемъ двѣ точки D и E въ равномъ разстояніи отъ C, и опишемъ изъ нихъ дуги, пересѣкающіяся въ точкѣ F, тогда прямая CF будетъ искомый перпендикуляръ, потому что $\triangle CDF \cong CEF$ (§ 24), а посему $\measuredangle FCD = FCE$.

§ 62. Изъ конца прямой AB возставить къ ней перпендикуляръ, не продолжая прямой.



Изъ произвольной точки C, внѣ прямой AB, опишемъ радіусомъ CA окружность, которая пройдетъ чрезъ точки A и D прямой AB. Если теперь проведемъ чрезъ D и C прямую, и соединимъ точку E пересѣченія ея съ окружностью съ точкою A, тогда EA будетъ требуемый перпендикуляръ, по тому что уголъ EAD прямой (§ 56, 3).

§ 63. На прямой AB при данной точкѣ C отложить уголъ, равный данному углу F.



Изъ точки F опишемъ произвольнымъ радіусомъ дугу, которая пересѣчетъ стороны угла въ точкахъ G и K. Опишемъ изъ C тѣмъ же радіусомъ дугу, которая пересѣчетъ AB въ точкѣ E, и изъ E радіусомъ GK проведемъ вторую дугу, которая пересѣчетъ первую въ точкѣ D, тогда $\measuredangle ECD = \measuredangle F$, потому что $\triangle CDE \cong FKG$ (§ 24).

§ 64. Раздѣлить данную дугу или уголъ пополамъ (фиг. § 44).

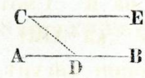
1) Чтобы раздѣлить дугу ACB пополамъ, должно изъ средины ея хорды AB возставить перпендикуляръ DC, тогда $\smile AC = \smile BC$ (§ 45, 2).

2) Чтобы раздѣлить уголъ AEB пополамъ, опишемъ изъ вершины E дугу ACB, отыщемъ ея средину C и проведемъ CE, тогда $\measuredangle AEC = BEC$ (§ 41).

Слѣдствіе. Повторивъ подобное строеніе надъ каждою половиною, можно раздѣлить уголъ на 4, 8, 16, .. равныхъ частей. Но способами элементарной геометріи, т. е. только съ помощію линейки и циркуля, нельзя дѣлить произвольный уголъ на 3, 5, 6, 7, 9 ... равныхъ частей.

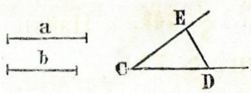
§ 65. Чрезъ данную точку C провести прямую, параллельную данной прямой AB.

Проведемъ чрезъ C прямую CD, пересѣкающую AB, и отложимъ на ней при точкѣ C уголъ ECD равный CDA, тогда сторона CE будетъ искомая параллельная линія (§ 7, 1).



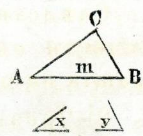
§ 66. Построить треугольникъ по даннымъ двумъ сторонамъ a и b, и углу C, лежащему между ними.

На сторонахъ угла C отложимъ CD = a, CE = b и проведемъ DE; CDE будетъ искомый тре—къ.



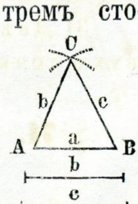
§ 67. Построить треугольникъ по данной сторонѣ m и прилежащимъ къ ней угламъ x и y.

Отложимъ на сторонѣ m при ея оконечностяхъ углы A = x и B = y. Если продолжимъ стороны этихъ угловъ, сумма которыхъ должна быть < 2 R, то онѣ пересѣкутся въ точкѣ C и дадутъ требуемый тре—къ ABC.



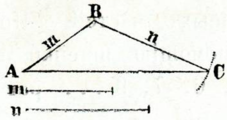
§ 68. Построить треугольникъ по даннымъ тремъ сторонамъ a, b, c.

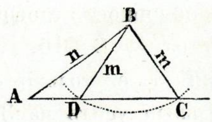
Изъ оконечностей прямой a опишемъ радіусами b и c дуги, пересѣкающіяся въ точкѣ C, и проведемъ AC и BC, тогда ABC будетъ искомый тре—къ.



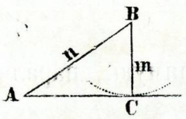
§ 69. Построить треугольникъ по даннымъ двумъ сторонамъ m и n, неравнымъ между собою, и углу A, противолежащему одной изъ этихъ сторонъ.

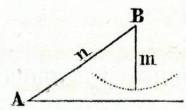
1) Если уголъ A противолежитъ бо́льшей сторонѣ n, то сдѣлаемъ, какъ видно въ первой фигурѣ, одну сторону AB даннаго угла A рав-





ною m, и изъ точки B радіусомъ равнымъ n опишемъ дугу, которая пересѣчетъ другую сторону въ точкѣ C. Тре-къ ABC будетъ требуемый.





2) Если уголъ A противолежитъ меньшей сторонѣ m, то при построеніи тре—ка стоитъ только перемѣнить m на n. Смотря по величинѣ линіи m могутъ образоваться или два тре—ка ABD и ABC, удовлетворяющіе требованіямъ задачи, какъ во второй фигурѣ, или одинъ прямоугольный тре—къ, какъ въ третьей фигурѣ, гдѣ m равно перпендикуляру BC изъ B на линію AC, или наконецъ не образуется ни одного тре—ка, какъ въ четвертой фигурѣ, гдѣ m менѣе перпендикуляра BC.

§ 70. Найти центръ даннаго круга или данной дуги (фиг. § 71).

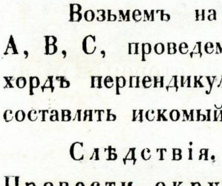
Возьмемъ на окружности или на дугѣ три произвольныя точки A, B, C, проведемъ хорды AB и BC и возставимъ изъ срединъ этихъ хордъ перпендикуляры DO и FO, тогда точка ихъ пересѣченія будетъ составлять искомый центръ (§ 45, 2).

Слѣдствія. 1) То же самое построеніе служитъ рѣшеніемъ задачи: Провести окружность чрезъ три данныя точки A, B, C, не лежащія на одной прямой.

2) Чрезъ три точки, не лежащія на одной прямой, можно провести только одну окружность, потому что предъидущимъ рѣшеніемъ опредѣляется только одинъ центръ и одинъ радіусъ.

3) Двѣ окружности могутъ пересѣкаться только въ двухъ точкахъ.

§ 71. Описать окружность около даннаго треугольника ABC.



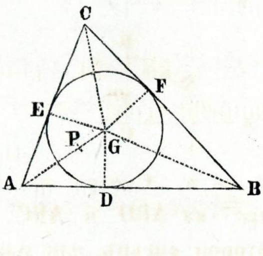
Возставленные изъ срединъ двухъ сторонъ тре—ка перпендикуляры DO и EO опредѣляютъ центръ O искомаго круга, потому что BO = AO = CO (§ 28, 2).

Слѣдствіе. Три перпендикуляра, возставленные изъ срединъ сторонъ тре—ка, пересѣкаются въ одной точкѣ, равно удаленной отъ трехъ вершинъ тре—ка.

Въ остроугольномъ тре—кѣ эта точка лежитъ внутри его, въ тупоугольномъ тре—кѣ внѣ его, а въ прямоугольномъ на гипотенузѣ (§ 56).

§ 72. Вписать кругъ въ данный треугольникъ ABC.

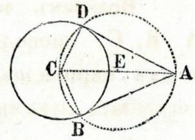
Если два угла A и B тре—ка раздѣлятся пополамъ прямыми AG и BG, то точка G пересѣченія ихъ будетъ центромъ, а разстояніе этой точки отъ какой-нибудь стороны тре—ка радіусомъ требуемаго тре—ка. — Если проведемъ $GD \perp AB$, $GE \perp AC$, $GF \perp BC$, тогда $\triangle ADG \cong AEG$ и $\triangle BDG \cong BFG$ (§ 18 2), слѣд. $GE = GD = GF$, а потому описанная изъ точки G радіусомъ GD окружность должна касаться сторонъ тре—ка.



Слѣдствіе. Три линіи, раздѣляющія углы тре—ка пополамъ, пересѣкаются въ одной точкѣ, равно удаленной отъ трехъ сторонъ тре—ка.

§ 73. Изъ точки A, лежащей внѣ круга, провести къ нему касательную.

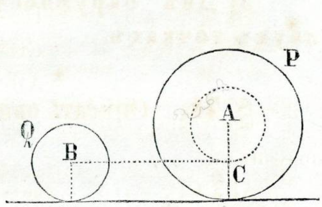
Соединимъ точку A съ центромъ C даннаго круга, и изъ средины E линіи AC опишемъ окружность, пересѣкающую данный кругъ въ точкахъ B и D, тогда прямыя AB и AD будутъ искомыми касательными. — Если проведемъ линіи CB и CD, то $\measuredangle ABC = R = ADC$ (§ 56, 3) слѣд. AB и AD касательныя.

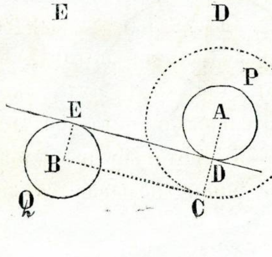


Если двѣ касательныя круга пересѣкаются, то ихъ отрѣзки лежащіе между точкою пересѣченія и точками прикосновенія, равны между собою.

§ 74. Провести касательную къ двумъ даннымъ кругамъ P и Q.

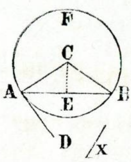
Если центры обоихъ круговъ должны лежать по одну сторону касательной, какъ въ первой фигурѣ, то изъ центра A бóльшаго круга радіусомъ, равнымъ разности радіусовъ данныхъ круговъ, описывается воспомогательный кругъ. Если же центры должны лежать по разнымъ сторонамъ касательной, какъ во второй фигурѣ, то воспомогательный кругъ описывается изъ центра котораго нибудь круга радіусомъ, равнымъ суммѣ радіусовъ данныхъ круговъ. Далѣе въ обоихъ случаяхъ проведемъ изъ центра B касательную BC къ





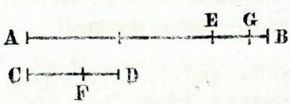
воспомогательному кругу, потомъ изъ центра A чрезъ точку касанія C прямую AD и наконецъ радіусъ BE || CD. Соединивъ точки E и D, получимъ требуемую касательную. Такъ какъ BE # CD и ∠ BCD = R (§ 48, 2), то BCDE есть прямоугольникъ, слѣд. DE должна быть касательною обоихъ круговъ (§ 48, 1).

§ 75. На данной линіи AB описать сегментъ, вмѣщающій данный уголъ x.



При точкѣ A на прямой AB отложимъ уголъ BAD = x, и проведемъ изъ A линію AC ⊥ AD, и изъ средины E прямой AB линію EC ⊥ AB. Точка пересѣченія C обоихъ перпендикуляровъ будетъ центромъ, а CA радіусомъ круга, въ которомъ сегментъ AFB есть искомый, потому что AD касательная и всѣ въ AFB вписанные углы, опирающіеся на концы линіи AB, равны углу BAD = x (§ 57).

§ 76. Найти отношеніе между двумя данными прямыми AB и CD.



Будемъ накладывать мéньшую линію CD на бóльшую AB столько разъ, сколько она умѣстится; положимъ что она отложилась 2 раза, и за тѣмъ получился еще остатокъ EB. Этотъ остатокъ будемъ накладывать на мéньшую линію CD столько разъ, сколко это будетъ возможно, напр. одинъ разъ съ остаткомъ FD. Наложимъ потомъ второй остатокъ FD на первый EB, напр. одинъ разъ съ остаткомъ GB. Если наконецъ положимъ, что GB умѣстится на FD ровно 2 раза, тогда GB будетъ общею мѣрою между данными линіями AB и CD, отношеніе коихъ теперь легко можно опредѣлить.

$$\begin{aligned} FD &= 2\,GB \\ EB &= FD + GB = 3\ GB \\ CD &= EB + FD = 5\ GB \\ AB &= 2CD + EB = 13\ GB. \end{aligned}$$

Такъ какъ GB содержится въ AB 13 разъ, а въ CD 5 разъ, то получимъ:

$$AB : CD = 13 : 5 \text{ или } AB = \tfrac{13}{5}\,CD \text{ и } CD = \tfrac{5}{13}\,AB.$$

Здѣсь мы разсматривали случай, когда двѣ данныя линіи имѣютъ общую мѣру и потому называются соизмѣримыми. Но могутъ быть линіи, при которыхъ, сколько бы мы ни продолжали наложеніе послѣдовательныхъ остатковъ другъ на друга, никогда не получимъ такого остатка, который бы уложился въ предшествующемъ цѣлое число разъ. Такія линіи называются несоизмѣримыми, и отношеніе между ними не можетъ быть выражено ни цѣлымъ числомъ, ни дробою, а есть величина ирраціональная. Но такъ какъ остатки будутъ становиться все менѣе и менѣе, то при достаточномъ продолженіи вышеизложеннаго пріема мы можемъ съ незначительною погрѣшностію отбросить послѣдній остатокъ и предшествующій ему принять за общую мѣру. Такимъ образомъ получимъ приближенное отношеніе, и оно тѣмъ точнѣе, чѣмъ далѣе будетъ продолженъ описанный пріемъ.

§ 77. Задачи безъ рѣшенія.

1) Чрезъ точку C, данную внѣ прямой AB, провести прямую, которая бы составила съ линіею AB уголъ, равный данному углу m.

2) Раздѣлить прямой уголъ на три равныя части.

3) Построить параллелограмъ, если даны двѣ смежныя стороны a и b, и уголъ m, заключающійся между ними.

4) Построить тре—къ по данной сторонѣ a, прилежащему ей углу x и противолежащему углу y.

5) Провести къ данному кругу двѣ касательныя, которыя бы пересѣклись подъ даннымъ угломъ m.

6) Построить равнобедренный тре—къ по данной высотѣ c и одной изъ равныхъ сторонъ b.

7) Построить ромбъ по даннымъ діагоналямъ.

8) На данной прямой AB найти точку, равно удаленную отъ данныхъ точекъ C и D, лежащихъ внѣ прямой.

9) Чрезъ точку A провести сѣкущую къ двумъ параллельнымъ BC и DE, такъ, чтобы часть сѣкущей, заключающаяся между этими параллельными, равнялась прямой m.

10) Построить прямоугольный тре—къ 1) по данной гипотенузѣ a, и одному катету b, 2) по данной гипотенузѣ a, и одному острому углу m.

11) Чрезъ точку A внутри угла BCD провести прямую такъ, чтобы она пересѣкла стороны угла въ равныхъ разстояніяхъ отъ его вершины.

12) Даны двѣ непараллельныя линіи, которыя не могутъ быть продолжены до пересѣченія по недостатку мѣста. Провести линію такъ, чтобы она по достаточномъ продолженіи дѣлила пополамъ образуемый этими прямыми уголъ.

13) Построить тре—къ по данному основанію a, высотѣ b, и углу m при вершинѣ.

14) Построить тре—къ по даннымъ отрѣзкамъ a и b основанія, и углу m при вершинѣ.

15) Въ прямоугольномъ тре—кѣ ABC вписать квадратъ, такъ чтобъ онъ имѣлъ съ тре—комъ одинъ общій уголъ, а вершина противолежащаго угла упала на гипотенузу AC.

16) Построить тре—къ по данной сторонѣ a, прилежащему къ ней углу m и суммѣ (или разности) прочихъ сторонъ.

17) Найти отношеніе между двумя данными углами.

18) Раздѣлить уголъ, равный двумъ прямымъ, въ три равныя части.

19) Между сторонами даннаго угла A провести прямую такъ, чтобы она была равна прямой m, а параллельна прямой n.

20) Построить равнобедренный тре—къ по данному периметру a и высотѣ b.

21) Построить тре—къ, котораго периметръ p и всѣ углы a, b, c даны.

22) Провести кругъ, который бы касался даннаго другаго круга A и данной прямой B въ точкѣ C.

23) Между сторонами даннаго угла A описать даннымъ радіусомъ r окружность, касающуюся сторонъ угла.

24) Описать окружность, которая бы прошла чрезъ данную точку d, и касалась данной прямой DF (или дуги B) въ данной точкѣ e.

25) Построить тре—къ по данной сторонѣ a, прилежащему углу m, и радіусу r вписаннаго круга.

26) Чрезъ точку A внѣ даннаго круга B провести сѣкущую такъ, чтобы внутренній ея отрѣзокъ равнялся прямой m.

27) Изъ точки A, лежащей на данной окружности, провести хорду такъ, чтобы она находилась отъ центра на разстояніи, равномъ прямой m.

28) Въ данномъ кругѣ провести хорду, равную линіи m, и параллельную къ линіи AB.

29) На прямой AB найти такую точку, чтобы прямыя, проведенныя изъ ней къ даннымъ двумъ точкамъ C и D, составили уголъ m.

30) Построить прямоугольный тре—къ 1) по данной гипотенузѣ a и суммѣ s катетовъ, 2) по данному периметру p и одному острому углу m.

31) Построить тре—къ по данному углу m, противолежащей ему сторонѣ a и суммѣ s прочихъ сторонъ.

32) Внутри даннаго тре—ка найти такую точку, чтобы три прямыя, проведенныя изъ ней къ вершинамъ тре—ка, образовали три равные угла около этой точки.

IV. Объ отношеніяхъ прямолинейныхъ фигуръ.

§ 78. 1) Подъ площадью какой нибудь фигуры разумѣется часть плоскости, ограниченная сторонами фигуры.

2) Фигуры равновелики или равномѣрны, если онѣ имѣютъ равныя площади, независимо отъ ихъ вида, такъ что напр. тре—къ можетъ быть равновеликъ четыре-угольнику.

3) Двѣ прямолинейныя фигуры подобны, если ихъ углы порознь равны и одинаковымъ образомъ расположены, а соотвѣтствующія стороны пропорціональны. — Двѣ равныя фигуры всегда и равновелики и подобны, но двѣ подобныя фигуры могутъ быть и не равновелики.

Въ разныхъ кругахъ дуги, секторы и сегменты подобны, если они соотвѣтствуютъ равнымъ центральнымъ угламъ.

4) Въ тре—кѣ каждую сторону можно принять за его основаніе. Перпендикуляръ, опущенный изъ противолежащей вершины на основаніе или его продолженіе, называется высотою тре—ка.

Въ параллелограмѣ перпендикуляръ, опущенный изъ какой нибудь его стороны на противолежащую, называютъ высотою, а обѣ стороны, перпендикулярныя къ высотѣ, принимаютъ за основанія.

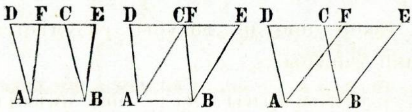
Въ трапеціахъ параллельныя стороны называются основаніями, а перпендикуляръ, опущенный отъ одного основанія на другое—высотою трапеціи.

5) Если изъ концовъ прямой линіи опустимъ перпендикуляры на другую линію, то часть второй линіи заключающаяся между перпендикулярами, называется проэкціею первой линіи на вторую. Въ томъ случаѣ, когда конецъ первой линіи лежитъ на второй, проэкціею будетъ разстояніе этого конца отъ основанія перпендикуляра, опущеннаго изъ другаго конца.

6) Измѣрить какую нибудь фигуру значитъ опредѣлить, сколько разъ въ площади ея заключается другая извѣстная площадь, принятая за единицу мѣры. За эту единицу принимаютъ квадратъ, котораго сторона есть какая нибудь линейная мѣра, напр. футъ; въ такомъ случаѣ квадратъ называется квадратнымъ футомъ. Измѣреніе площади производится не чрезъ непосредственное наложеніе квадрата, а съ по-

мощію измѣренія линіи, отъ которыхъ зависитъ величина площадей. Въ вычисленіе площади вмѣсто линіи входятъ числа, такъ что подъ произведеніемъ двухъ линій нужно подразумѣвать произведеніе чиселъ, которыя показываютъ величину этихъ линій, выраженныхъ въ однѣхъ и тѣхъ же единицахъ длины.

§ 79. Параллелограмы ABCD и ABEF, имѣющіе равныя основанія и равныя высоты, равновелики.

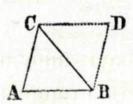


Оба параллелограма могутъ быть наложены другъ на друга такъ, что нижнія основанія совпадутъ, а верхнія составятъ одну прямую, при чемъ они могутъ принять три различныя положенія. Во всякомъ случаѣ $AD = BC$, и $AF = BE$ (§ 33) и $\measuredangle DAF = CBE$ (§ 10), а потому $\triangle ADF \cong BCE$, слѣд.

$ABCD = ABED - \triangle BCE = ABED - \triangle ADF = ABEF$.

Слѣдствіе. Параллелограмъ равновеликъ прямоугольнику, имѣющему съ нимъ тоже основаніе и туже высоту.

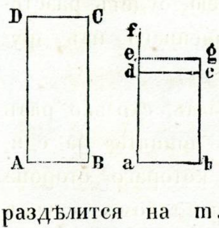
§ 80. Всякій треугольникъ ABC есть половина параллелограма, имѣющаго съ нимъ тоже основаніе и туже высоту.



Проведемъ изъ B и C прямыя $BD \parallel AC$ и $CD \parallel AB$, тогда получимъ парал—мъ AD, имѣющій одинаковыя съ тре—комъ основаніе и высоту. Такъ какъ $\triangle ABC \cong DCB$ (§ 18), то $\triangle ABC = \frac{1}{2} AD$.

Слѣдствіе. Треугольники, имѣющіе равныя основанія и высоты, равновелики.

§ 81. Два прямоугольника ABCD и abcd, имѣющіе равныя основанія AB и ab, относятся между собою какъ ихъ высоты AD и ad.



Если высоты AD и ad соизмѣримы, и ихъ общая мѣра содержится m разъ въ AD, и n разъ въ ad, тогда получимъ $AD : ad = m : n$. Представимъ себѣ, что чрезъ всѣ точки дѣленія, образовавшіяся отъ наложенія общей мѣры на высотахъ AD и ad, будутъ проведены линіи, параллелныя основанію, тогда ABCD раздѣлится на m, а abcd на n равныхъ прямо—ковъ (§ 79), такъ что $ABCD : abcd = m : n$. Изъ обѣихъ пропорцій слѣдуетъ, что $ABCD : abcd = AD : ad$.

Если высоты AD и ad несоизмѣримы, то все таки эта пропорцiя будетъ справедлива. Предположимъ, что

$$ABCD : abcd = AD : af,$$

гдѣ $af > ad$, и раздѣлимъ высоту AD на столько равныхъ частей, чтобы каждая изъ нихъ была меньше df. Если части эти станемъ откладывать по af, начиная отъ точки a, то одна точка дѣленiя должна упасть между d и f. Проведя чрезъ e прямую $eg \parallel ab$, получимъ

$$ABCD : abge = AD : ae,$$

потому что высоты AD и ae соизмѣримы. Изъ обѣихъ пропорцiй слѣдуетъ, что

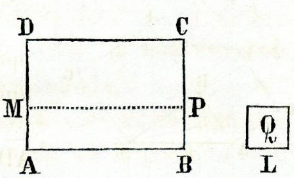
$$abcd : abge = af : ae.$$

Но это невозможно, потому что $abcd < abge$, а $af > ae$. Равнымъ образомъ четвертый членъ пропорцiи не можетъ быть меньше ad, а потому пропорцiя $ABCD : abcd = AD : ad$ всегда должна быть справедлива.

Слѣдствiе. Два прямоугольника, имѣющiе равныя высоты, относятся между собою какъ ихъ основанiя, такъ какъ каждая изъ сторонъ прямо—ка можетъ быть принята за основанiе и за высоту.

§ 82. Площадь прямоугольника AC равняется произведенiю его основанiя на высоту, т. е. если какая нибудь линейная мѣра заключается въ основанiи m разъ, а въ высотѣ n разъ, то соотвѣтствующая квадратная мѣра будетъ заключаться въ прямоугольникѣ mn разъ.

Пусть линiя L будетъ единицею линейной мѣры, а Q построенный на ней квадратъ. Положимъ, что L заключается m разъ въ AB, и n разъ въ AD, гдѣ m и n могутъ быть цѣлыя, дробныя или ирращiональныя числа. Если сдѣлаемъ $AM = L$ и проведемъ $MP \parallel AB$, то будемъ имѣть (§ 81).



$$AP : Q = AB : L = m : 1,$$

или $AP = mQ$. Точно также

$$AC : AP = AD : AM = n : 1,$$

слѣд. $AC = nAP = mn.\,Q$ или $\dfrac{AC}{Q} = mn.$

Если напр. основанiе будетъ составлять 5, а высота 3 фута, то прямо—къ равенъ 15 квадратнымъ футамъ.

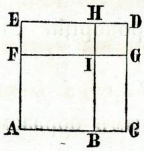
§ 83. Слѣдствiя. 1) Площади прямо—ковъ относятся какъ произведенiя ихъ основанiй на высоты.

2) Площадь квадрата равна второй степени числа, выражающаго длину его стороны.

3) Площадь параллелограма равна произведенію его основанія на высоту (§ 79, слѣд.)

4) Площадь треугольника равна половинѣ нроизведенія основанія на высоту (§ 80).

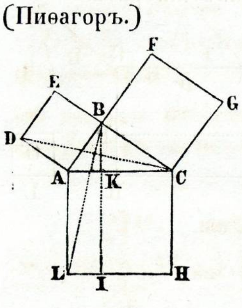
5) Треугольники, имѣющіе равныя основанія, относятся какъ высоты, а имѣющіе равныя высоты, какъ ихъ основанія.



6) Квадратъ ACDE, построенный на суммѣ двухъ линій $AB = a$ и $BC = b$, равенъ суммѣ квадратовъ AI и DI, построенныхъ на каждой изъ данныхъ линій, сложенной съ двойнымъ прямоугольникомъ BG, составленнымъ изъ тѣхъ же линій, соотвѣтственно алгебраическому выраженію $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

7) Квадратъ ABIF, построенный на разности двухъ линій $AC = a$ и $BC = b$, равенъ суммѣ квадратовъ AD и DI, построенныхъ на каждой изъ данныхъ линій, безъ двойнаго прямоугольника BD, составленнаго изъ тѣхъ же линій, соотвѣтственно выраженію $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

§ 84. **Въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC квадратъ гипотенузы равенъ суммѣ квадратовъ катетовъ,** т. е. $AH = AE + CF$. (Пиѳагоръ.)



Если проведемъ изъ вершины прямаго угла B прямую $BK \perp AC$ и продолжимъ до точки I, потомъ проведемъ DC и BL, тогда $\triangle DAC = \frac{1}{2} AE$ и $\triangle BAL = \frac{1}{2} AI$ (§ 80). Такъ какъ $\measuredangle DAC = BAL$, $AD = AB$, $AC = AL$, то $\triangle DAC \cong BAL$, т. е. $\frac{1}{2} AE = \frac{1}{2} AI$, слѣд. $AE = AI$. Такимъ же образомъ можно доказать, что $CF = KH$, слѣд. $AI + KH = AH = AE + CF$ или $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

§ 85. Слѣдствія. 1) Квадратъ одного катета равенъ квадрату гипотенузы безъ квадрата другаго катета.

Означая гипотенузу чрезъ a, и катеты чрезъ b и c, имѣемъ

$$a^2 = b^2 + c^2,\quad b^2 = a^2 - c^2,\quad c^2 = a^2 - b^2.$$

2) Квадратъ гипотенузы относится къ квадрату одного катета, какъ гипотенуза къ своему отрѣзку, прилежащему къ этому катету.

Такъ какъ $AE = AI$ и $AH : AI = AC : AK$ (§ 81), то и $AH : AE = AC : AK$.

3) Квадраты катетовъ относятся какъ прилежащіе къ нимъ отрѣзки гипотенузы.

Такъ какъ $AE = AI$, $CF = HK$ и $AI : HK = AK : CK$, то и $AE : CF = AK : CK$.

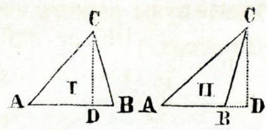
4) Квадратъ, построенный на діагонали другаго квадрата, вдое болѣе послѣдняго.

5) Діагональ квадрата несоизмѣрима съ стороною его.

Пустъ a будетъ стороною, a d діагональю квадрата, то мы будемъ имѣть $d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$, и потому $\frac{d^2}{a^2} = 2$ или $\frac{d}{a} = \sqrt{2}$, слѣд. отношеніе между d и a ирраціональное.

§ 86. Въ треугольникѣ ABC квадратъ какой либо стороны ($BC = a$), смотря по тому, противолежитъ ли она острому или тупому углу (A), равенъ суммѣ квадратовъ прочихъ сторонъ ($AB = c$, $AC = b$), уменьшенной или увеличенной удвоеннымъ произведеніемъ одной изъ этихъ сторонъ (AB) и проэкціи ($AD = m$) на нее другой стороны (AC), т. е.

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 \mp 2AB.AD \text{ или } a^2 = b^2 + c^2 \mp 2cm.$$

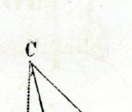


1) Если уголъ A острый, то перпендикуляръ CD можетъ упасть внутри или внѣ тре—ка, такъ что на первой фигурѣ $BD = c - m$, а на второй $BD = m - c$, слѣд. въ обоихъ случаяхъ $BD^2 = c^2 - 2cm + m^2$. Такъ какъ

$a^2 = BD^2 + CD^2 = c^2 - 2cm + m^2 + CD^2$,

но $CD^2 = b^2 - m^2$, то имѣемъ

$a^2 = c^2 - 2cm + m^2 + b^2 - m^2 = b^2 + c^2 - 2cm$.



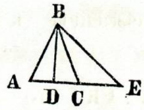
2) Если A тупой, то CD упадетъ внѣ тре—ка, такъ что $BD = c + m$, слѣд.

$a^2 = CD^2 + (c + m)^2 = CD^2 + c^2 + 2cm + m^2$,

но такъ какъ $CD^2 = b^2 - m^2$, то

$a^2 = b^2 - m^2 + c^2 + 2cm + m^2 = b^2 + c^2 + 2cm$.

§ 87. Если въ тре-кѣ ABE соединимъ вершину B съ срединою C противолежащей стороны линіею BC, то сумма квадратовъ двухъ другихъ сторонъ будетъ равна удвоенному квадрату проведенной линіи и удвоенному квадрату половины раздѣленной стороны.



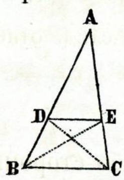
Проведя $BD \perp AE$ получимъ изъ тре—ковъ ABC и BEC

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2\,AC.\,DC$$
$$BE^2 = CE^2 + BC^2 + 2\,CE.\,DC.$$

Сложивъ эти уравненія и замѣтивъ, что $AC = CE$, получимъ

$$AB^2 + BE^2 = 2\,BC^2 + 2\,AC^2.$$

§ 88. Линія DE, проведенная въ тре—кѣ ABC параллельно одной сторонѣ BC, дѣлитъ другія стороны на части пропорціональныя.



Если проведемъ CD и BE, то получимъ (§ 83, 5)

$$\triangle ADE : \triangle BED = AD : BD$$
$$\triangle ADE : \triangle CDE = AE : CE.$$

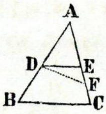
Такъ какъ $\triangle BED = \triangle CDE$ (§ 80, слѣд.), то

$$AD : BD = AE : CE.$$

Слѣдствіе. Выведенную пропорцію можно измѣнить такъ:

$$AD + BD : BD = AE + CE : CE, \text{ т. е. } AB : BD = AC : CE.$$
$$AD + BD : AD = AE + CE : AE, \text{ т. е. } AB : AD = AC : AE.$$

§ 89. Линія DE, дѣляющая двѣ стороны тре—ка ABC на пропорціональныя части, параллельна третьей сторонѣ BC.

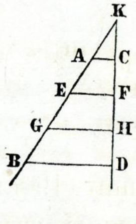


По нашему условію $AB : DB = AC : EC$. Положимъ, что DE не $\parallel$ BC, тогда изъ точки D можно провести $DF \parallel BC$, такъ что (§ 88) будетъ

$$AB : DB = AC : FC.$$

По причинѣ равенства первыхъ трехъ членовъ обѣихъ пропорціи, должно бы быть $EC = FC$, что не возможно, слѣд. $DE \parallel BC$.

§ 90. Двѣ прямыя AB и CD дѣлятся нѣсколькими параллельными AC, EF, GH . . . на пропорціональныя части.

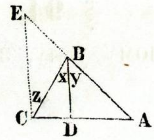


Если AB и CD пересѣкутся въ K, то (§ 88)

$$KE : KF = AE : CF, \text{ и}$$
$$KE : KF = EG : FH, \text{ слѣд.}$$
$$AE : CF = EG : FH.$$

Подобнымъ образомъ $EG : FH = GB : HD$.

§ 91. Прямая BD, дѣлящая въ тре—кѣ ABC уголъ B пополамъ, дѣлитъ противолежащую сторону AC на части, пропорціональныя прилежащимъ сторонамъ тре—ка.



Если проведемъ $CE \parallel BD$ и продолжимъ AB до пересѣченія съ CE въ точкѣ E, то (§ 88) будетъ

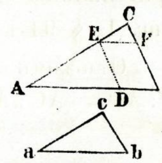
$$AD : DC = AB : BE.$$

Но такъ какъ $\measuredangle\, z = x = y = E$ (§ 8), а потому (§ 19, 2),

$$BE = BC, \text{ то и}$$

$$AD : DC = AB : BC.$$

§ 92. (I.) Два треугольника подобны, если они имѣютъ по два равные угла. Если $\measuredangle\, A = a$, $\measuredangle\, B = b$, то $\triangle\, ABC \sim abc$.



Уголъ $C = c$ (§ 14, 2). Отложимъ $AD = ab$ и проведемъ $DE \parallel BC$, тогда будетъ $AD : AB = AE : AC$ (§ 88), или такъ какъ $\triangle\, ADE \cong abc$ (§ 18),

$$ab : AB = ac : AC.$$

Проведя изъ E прямую $EF \parallel AB$, получимъ $AE : AC = BF : BC$, и такъ какъ (§ 33) $BF = DE = c$, то и

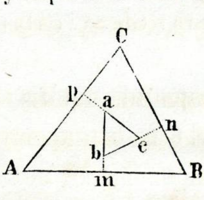
$$ac : AC = bc : BC,$$

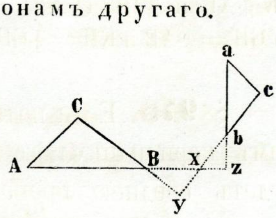
$$\text{слѣд. } ab : AB = ac : AC = bc : BC.$$

Данные тре—ки подобны, потому что углы ихъ равны и стороны пропорціональны.

§ 93. Слѣдствія. 1) Два тре—ка подобны, если ихъ стороны попарно параллельны, потому что въ такомъ случаѣ ихъ углы равны (§ 10.)

2) Два тре—ка ABC и abc подобны, если стороны одного попарно перпендикулярны къ сторонамъ другаго.

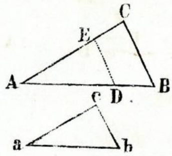




Пусть $ab \perp AB$, $ac \perp AC$, $bc \perp BC$. Если въ первой фигурѣ продолжимъ стороны тре—ка abc, тогда въ четыреугольникѣ $Aamp$ сумма угловъ равна $4\,R$ (§ 16), и такъ какъ $\measuredangle\, p + m = 2R$, то и $\measuredangle\, A + pam = 2R$, но такъ какъ и $\measuredangle\, bac + pam = 2R$, то $\measuredangle\, A = bac$. Точно также можно доказать, что $\measuredangle\, B = abc$, слѣд. $\triangle\, ABC \sim abc$. — Продолженіемъ сторонъ одного тре—ка, можно также получать треугольники, какъ во второй фигурѣ. Такъ какъ $\triangle\, Bxy \sim bxz$, слѣд. $\measuredangle\, yBx = zbx$, то и $\measuredangle\, ABC = abc$. Подобнымъ образомъ можно доказать, что $\measuredangle\, A = a$, откуда слѣдуетъ, что $\triangle\, ABC \sim abc$.

3) Параллельныя или взаимно перпендикулярныя стороны двухъ подобныхъ тре—ковъ — соотвѣтствующія.

§ 94. (II.) Два тре—ка подобны, когда имѣютъ по равному углу, заключающемуся между пропорціональными сторонамъ.



Если $\measuredangle$ A = a, и AB : ab = AC : ac, то $\triangle$ ABC $\sim$ abc.

Отложимъ AD = ab и AE = ac, тогда $\triangle$ ADE $\cong$ abc (§ 17). Такъ какъ по условію AB : ab = AC : ac, то и AB : AD = AC : AE, слѣд. DE $\parallel$ BC (§ 89) и $\measuredangle$ B = ADE, а потому (§ 92) $\triangle$ ABC $\sim$ ADE или $\triangle$ ABC $\sim$ abc.

§ 95. (III.) Два тре—ка подобны, если ихъ стороны пропорціональны. Если AB : ab = AC : ac = BC : bc, то $\triangle$ ABC $\sim$ abc. (Фиг. 1, § 94.)

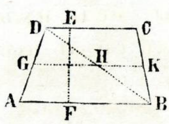
Отложимъ AD = ab и AE = ac, тогда по условію будемъ имѣть AB : AD = AC : AE, слѣд. $\triangle$ ABC $\sim$ ADE (§ 94), а потому

AB : AD = BC : DE. Но такъ какъ

AB : ab = BC : bc, и AD = ab,

то и DE = bc, слѣд. $\triangle$ ADE $\cong$ abc (§ 24), а посему и $\triangle$ ABC $\sim$ abc.

§ 96. Площадь трапеціи ABCD равняется произведенію высоты EF на полусумму параллельныхъ сторонъ AB и CD или на линію GK, соединяющую средины непараллельныхъ сторонъ.

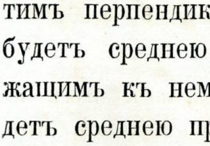


Проведемъ діагональ BD, тогда $\triangle$ ABD = $\frac{1}{2}$ AB. EF и $\triangle$ BCD = $\frac{1}{2}$ CD. EF, слѣд.

ABCD = $\frac{1}{2}$ (AB + CD).

Если точки G и K средины сторонъ AD и BC, то GK $\parallel$ AB и $\parallel$ DC (§ 89). Такъ какъ $\triangle$ ABD $\sim$ GHD, и $\triangle$ CBD $\sim$ KBH (§ 92), то GH = $\frac{1}{2}$ AB и KH = $\frac{1}{2}$ CD, слѣд. GK = $\frac{1}{2}$ (AB + CD) а посему и ABCD = EF.GK.

§ 97. Если изъ вершины прямаго угла тре—ка ABC опустимъ перпендикуляръ AD на гипотенузу, то 1) каждый катетъ будетъ среднею пропорціональною между гипотенузою и прилежащимъ къ нему отрѣзкомъ гипотенузы, 2) перпендикуляръ будетъ среднею пропорціональною между отрѣзками гипотенузы.



Тре—къ ABC $\sim$ DBA, потому что $\measuredangle$ B общій, а $\measuredangle$ BAC = R = ADB; точно также $\triangle$ ABC $\sim$ DAC, слѣд. и $\triangle$ DBA $\sim$ DAC.

1) Такъ какъ $\triangle$ ABC $\sim$ DBA и $\triangle$ ABC $\sim$ DAC, то будетъ

BC : AB = AB : BD и BC : AC = AC : CD.

2) Такъ какъ $\triangle$ DBA $\sim$ DAC, то BD : AD = AD : CD.

§ 98. Слѣдствіе. Если посредствомъ измѣренія какою нибудь единицею линейной мѣры найдено будетъ, что $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $BD = m$, $CD = n$, то получимъ

$$a : b = b : n, \text{ слѣд. } b^2 = an$$
$$a : c = c : m, \text{ слѣд. } c^2 = am,$$

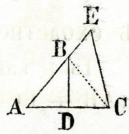
а посему $b^2 + c^2 = a\,(m + n) = a^2$, слѣд.

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}, \quad b = \sqrt{a^2 - c^2}, \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Такимъ образомъ зная двѣ стороны прямоугольнаго тре—ка можно опредѣлить третью сторону.

Прямоугольные тре—ки, которыхъ стороны измѣряются цѣлыми числами линейной мѣры, равно какъ и самыя числа, называются Пиѳагоровыми. Таковы числа 3, 4, 5 или 5, 12, 13 или 8, 15, 17 и т. д.

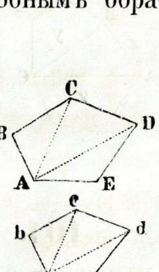
§ 99. Площади двухъ тре—ковъ ABD и AEC, имѣющія по равному углу A, относятся какъ произведенія ихъ сторонъ, заключающихъ этотъ уголъ.



Если проведемъ BC, то (§ 83, 5) будетъ

$$\triangle ABC : \triangle ABD = AC : AD$$
$$\triangle AEC : \triangle ABC = AE : AB, \text{ слѣд.}$$
$$\triangle AEC : \triangle ABD = AC.AE : AD.AB$$

§ 100. 1) Два многоугольника подобны, если они состоятъ изъ равнаго числа подобныхъ и подобнымъ образомъ расположенныхъ треугольниковъ. 2) Если два много—ка подобны, то ихъ можно раздѣлить на равное число подобныхъ и подобнымъ образомъ расположенныхъ тре—ковъ.



1) Пусть $\triangle ABC \backsim abc$, $\triangle ACD \backsim acd$, $\triangle ADE \backsim ade$. Изъ этого условія слѣдуетъ, что углы обоихъ много—ковъ попарно равны, и такъ какъ $AB : ab = BC : bc$ $(= CA : ca)$ $= CD : cd$ $(= DA : da)$ $= DE : de \ldots$, то $ABCDE \backsim abcde$.

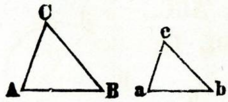
2) Если $ABCDE \backsim abcde$, то проведя изъ угловъ A и a діагонали, мы раздѣлимъ оба мно—ка на равное число тре—ковъ. Изъ подобія мно—ковъ слѣдуетъ, что $\measuredangle B = b$ и $AB : ab = BC : bc$, слѣд. $\triangle ABC \backsim abc$. Изъ подобія этихъ тре—ковъ слѣдуетъ

$$\measuredangle BCA = bca \text{ и } BC : bc = CA : ca, \text{ и такъ какъ}$$
$$\measuredangle BCD = bcd \text{ и } BC : bc = CD : cd, \text{ то и}$$
$$\measuredangle ACD = acd \text{ и } CA : ca = CD : cd,$$

слѣд. $\triangle ACD \backsim acd$. Подобнымъ образомъ $\triangle ADE \backsim ade$.

§ 101. Площади подобныхъ тре—ковъ, а также и подобныхъ мно—ковъ, относятся какъ квадраты сходственныхъ сторонъ.

1) Если $\measuredangle A = a$, то (§ 99)



$$\frac{\triangle ABC}{\triangle abc} = \frac{AB.AC.}{ab.ac}$$ Такъ какъ

$$\frac{AC}{ac} = \frac{AB,}{ab,}$$ то оказывается, что

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle abc} = \frac{AB.AB}{ab.ab} = \frac{AB^2}{ab^2}.$$

2) Если (фиг. § 100) ABCDE $\sim$ abcde, то изъ подобія отдѣльныхъ тре—ковъ выходитъ, что

$$ABC : abc = AB^2 : ab^2$$
$$ACD : acd = AC^2 : ac^2 = AB^2 : ab^2$$
$$ADE : ade = AE^2 : ae^2 = AB^2 : ab^2.$$

Сложивъ всѣ эти тре—ки, получимъ

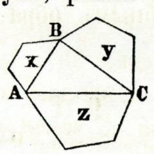
$$ABCDE : abcde = AB^2 : ab^2.$$

§ 102. Периметры подобныхъ много—ковъ относятся какъ двѣ сходственныя стороны (Фиг. § 100).

Такъ какъ $AB : ab = BC : bc = CD : cd \ldots$, то и

$$(AB + BC + CD \ldots) : (ab + bc + cd \ldots) = AB : ab.$$

§ 103. Если сходственныя стороны трехъ подобныхъ многоугольниковъ x, y, z, совмѣщаются со сторонами прямоугольнаго тре—ка ABC, то площадь мно—ка z, построеннаго на гипотенузѣ, равна суммѣ площадей двухъ прочихъ мно—ковъ x, y.



По § 101 $\frac{x}{z} = \frac{AB^2}{AC^2}$ и $\frac{y}{z} = \frac{BC^2}{AC^2}$.

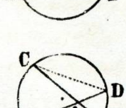
Сложивъ эти два равенства, получимъ

$$\frac{x+y}{z} = \frac{AB^2 + BC^2}{AC^2}.$$

Но $AB^2 + BC^2 = AC^2$, слѣд. $x + y = z$.

§ 104. Если двѣ прямыя, пересѣкающіеся въ точкѣ A, будутъ пересѣкаться кругомъ въ четырехъ точкахъ B, C, D, E, то

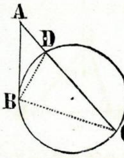
разстоянія точки A отъ этихъ точекъ пересѣченія обратно пропорціональны, т. е. $AB : AD = AE : AC$.



Точка A можетъ быть внѣ или внутри круга. Проведемъ BE и CD, тогда $\triangle ABE \sim ADC$, потому что $\measuredangle A = A$ и $\measuredangle E = C$ (§ 56, 2); слѣдовательно

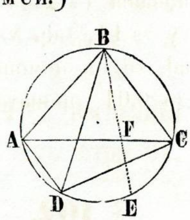
$$AB : AD = AE : AC.$$

§ 105. Касательная AB есть средняя пропорціональная между всею сѣкущею AC, проведенною изъ той же точки A, и внѣшнею ея частію AD.



Если проведемъ BC и BD, тогда $\triangle ABD \sim ABC$, потому что $\measuredangle A = A$ и $\measuredangle ABD = C$ (§ 57 и § 56, 1); слѣд. $AC : AB = AB : AD$.

§ 106. Въ вписанномъ четыреугольникѣ ABCD произведеніе діагоналей равно суммѣ произведеній противолежащихъ сторонъ, т. е. $AC \,.\, BD = AD \,.\, BC + AB \,.\, CD$. (Птоломей.)



Отложимъ дугу $CE = AD$ и проведемъ BE, тогда $\measuredangle ABD = CBE$ и $\measuredangle ADB = BCA$ (§ 56, 2), слѣд. $\triangle ABD \sim BCF$, откуда

$AD : CF = BD : BC$ или $AD.\ BC = CF.\ BD$.

Далѣе $\measuredangle ABE = DBC$ (ибо $\smile AE = \smile CD$), $\measuredangle BAC = BDC$, слѣд. $\triangle ABF \sim DBC$, откуда

$AB : BD = AF : CD$ или $AB.\ CD = AF.\ BD$.

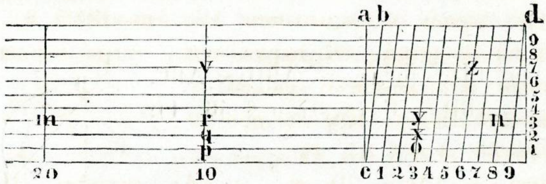
Сложивъ оба равенства, получимъ

$AD.\ BC + AB.\ CD = (CF + AF)BD = AC \,.\, BD$.

Пиѳагорова теорема (§ 84) составляетъ только частный случай выведенной нами теоремы. Положимъ что ABCD прямоугольникъ, тогда $AB = CD$, $AD = BC$, $AC = BD$ и тре—къ ABD прямоуголенъ при A, слѣд. полученное нами выше уравненіе приметъ видъ: $AD^2 + AB^2 = BD^2$.

§ 107. Для точнѣйшаго измѣренія прямой какого нибудь единицею длины употребляется масштабъ. Употребленіе масштаба будетъ понятно изъ слѣдующаго. Возмемъ принятую за единицу линію ab и изъ ея конца возставимъ неопредѣленную прямую ac, на которой, начиная отъ точки a, отложимъ 10 равныхъ прямыхъ одна возлѣ другой до какой нибудь точки c, проведемъ прямую bc и изъ точекъ дѣленія прямой ac проведемъ параллельныя къ ab: dm en....., тогда видно, что $\triangle cdm \sim cab$, а посему $cd : ca = dm : ab$, то есть $1 : 10 = dm : ab$, слѣд. $dm = \frac{1}{10}\, ab$. Подобнымъ же образомъ будетъ $en = \frac{2}{10}\, ab$, $fo = \frac{3}{10}\, ab$ и т. д., такъ что эти параллельныя прямыя представляютъ десятыя части данной прямой ab. Чтобы найти сотыя части принятой единицы ab, нужно только съ линіей dm сдѣлать тоже, что мы сдѣлали съ ab. Построеніе масштаба производится такимъ образомъ. Берутъ прямоугольную линейку и откладываютъ на ея верхнемъ и нижнемъ основаніяхъ, начиная съ праваго конца, 10 разъ принятую единицу ab; положимъ, что она отложится на верху до

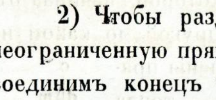
точки a и на низу до точки c; потомъ, начиная отъ точки a влѣво откладываютъ нѣсколько разъ линію ad и при каждимъ отложеніи изъ конца этой линіи опускаютъ перпендикуляръ на нижнее основаніе; потомъ вдоль линейки на равномъ разстояніи другъ отъ друга и отъ основаній линейки,



проводятся девять параллельныхъ основаніямъ линій 1, 2, 3 . . . . и наконецъ точки дѣленія верхняго основанія, заключающіяся между a и d, соединаются, какъ показано на чертежѣ, съ точками дѣленія нижняго основанія 1, 2, 3 . . . . Тогда ясно, что $po = 13\frac{1}{10}$ ab, $qx = 13\frac{2}{10}$ ab; $ry = 13\frac{3}{10}$ ab, $vz = 16\frac{7}{10}$ ab. Если за единицу мѣры мы примемъ линію ad, то съ помощію этого масштаба можно измѣрять прямыя съ точностію до 0,01 принятой единицы. Тогда $mn = 2{,}83$ ad, $vz = 1{,}67$ ad и. т. д.

V. Задачи.

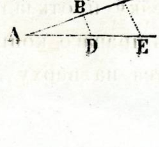
§ 108. Раздѣлить прямую AE на части, которыя относились бы какъ данныя линіи.



1) Проведемъ чрезъ конецъ A линіи AE неограниченную прямую FG, отложимъ на ней данныя линіи F, HI, IK, KG, соединимъ точки G и E, потомъ изъ точекъ K, I, H проведемъ линіи, параллельныя прямой GE, тогда части прямой AE будутъ относиться, какъ данныя линіи (§ 90).

2) Чтобы раздѣлить AE напр. на 4 равныя части, отложимъ на неограниченную прямую FG четыре равныя, произвольной величины, прямыя, соединимъ конецъ четвертой прямой съ E, и будемъ поступать какъ въ первомъ случаѣ.

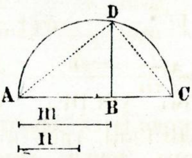
§ 109. Къ тремъ даннымъ линіямъ a, b, c найти четвертую пропорціональную.



На сторонахъ произвольнаго угла A отложимъ AB = a, BC = b, AD = c, проведемъ BD и изъ C линію CE ∥ BD, тогда DE будетъ искомая 4ая пропорціональная, потому что (§ 88) AB : BC = AD : DE или a : b = c : DE.

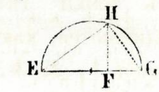
§ **110.** Найти среднюю пропорціональную между данными линіями m и n.

1) На неограниченной прямой откладываемъ AB = m, BC = n, и описываемъ на AC, какъ на діаметрѣ, полуокружность; тогда перпендикуляръ BD, возставленный изъ точки B къ AC и продолженный до окружности, будетъ искомая пропорціональная, потому что (§ 56, 3 и § 97, 2)



AB : BD = BD : BC или m : BD = BD : n.

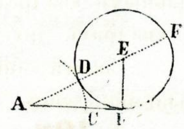
2) Можно также отложить на бо́льшей линіи EG=m меньшую EF = n, потомъ на EG описать полуокружность и провести изъ F линію FH ⊥ EG, тогда хорда EH будетъ искомая пропорціональная, потому что (§ 97, 1)



EG : EH = EH : EF или m : EH = EH : n.

§ **111.** Раздѣлить данную линію AB въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, т. е. на такія двѣ части, что бы бо́льшая была среднею пропорціональною между всею линіею и ея меньшею частію.

Возставимъ на AB въ B перпендикуляръ BE = $\frac{1}{2}$ AB, опишемъ изъ E окружность радіусомъ EB, проведемъ чрезъ точки A и E прямую AF и отсѣчемъ отъ AB часть AC = AD, тогда C будетъ искомая точка дѣленія. Такъ какъ AB есть касательная къ кругу, то (§ 105)



AF : AB = AB : AD, а потому

AF — AB : AB = AB — AD : AD или

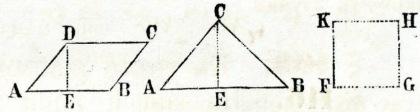
AF — DF : AB = AB — AC : AC, т. е.

AC : AB = BC : AC или AB : AC = AC : BC.

Слѣдствіе. Сѣкущая AF въ точкѣ D дѣлится въ крайнемъ и среднемъ отношеніи. Такъ какъ AB = DF, то AF : DF = DF : BD.

§ **112.** Данный параллелограмъ AC или тре—къ ABC обратить въ квадратъ.

1) Найдемъ среднюю пропорціональную FG между основаніемъ AB и высотою DE параллелограма, тогда квадратъ, построенный на FG будетъ равновеликъ параллелограму AC, потому что



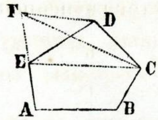
AB : FG = FG : DE или AB. DE = FG^2.

2) Если возьмемъ среднюю пропорціональную FG между основаніемъ AB тре—ка ABC и половиною высоты CE, то она будетъ сторона искомаго квадрата, потому что

AB : FG = FG : $\frac{1}{2}$ CE или $\frac{1}{2}$ CE. AB = FG^2.

§ **113.** Данный много—къ ABCDE обратить въ треугольникъ.

Отрѣжемъ отъ много—ка діагональю CE тре—къ CDE и проведемъ



изъ точки D прямую DF || CE до пересѣченія съ продолженіемъ стороны AE въ точкѣ F. Если проведемъ CF, то △ CDE = CFE (§ 80 слѣд.), и прикладывая къ каждому изъ этихъ тре—ковъ фигуру ABCE, получимъ ABCDE = ABCF. Точно также можно обратить четыреугольникъ ABCF въ тре—къ.

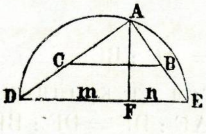
Такъ какъ всякій мно—къ можно обратить въ тре—къ, а всякій тре—къ въ квадратъ, то и **в с я к і й м н о — к ъ м о ж н о о б р а т и т ь в ъ к в а д р а т ъ.**

§ **114.** Построить квадратъ, равный суммѣ или разности двухъ данныхъ квадратовъ.

Построимъ прямоугольный тре—къ, у котораго въ 1омъ случаѣ оба катета, въ 2омъ гипотенуза и одинъ катетъ равнялись бы сторонамъ данныхъ квадратовъ, тогда квадратъ гипотенузы будетъ равенъ суммѣ, а квадратъ другого катета равенъ разности данныхъ квадратовъ (§ 85, 1).

Такимъ образомъ можно найти сумму произвольнаго числа квадратовъ или мно—ковъ.

§ **115.** Построить квадратъ, который бы относился къ данному квадрату P^2, какъ линія m къ линіи n.



На прямой линіи возьмемъ DF = m и FE = n, опишемъ на DE полуокружность, возставимъ изъ точки F перпендикуляръ FA, проведемъ хорды AD и AE, отложимъ на AE или на ея продолженіи линію AB = P, сторонѣ даннаго квадрата, и проведемъ BC || ED, тогда AC, будетъ сторона искомаго квадрата. — Такъ какъ

$AD : AE = AC : AB$ или $AD^2 : AE^2 = AC^2 : AB^2$,
и (§ 85, 3) $AD^2 : AE^2 = m : n$, то и
$AC^2 : AB^2 = m : n$ или $AC^2 : P^2 = m : n$.

§ **116.** На данной линіи ab построить много—къ, подобный данному много—ку ABCDE (Фиг, § 100).

Проведемъ діагонали AC и AD, отложимъ при точкѣ a уголъ bac = BAC, и при точкѣ b уголъ abc = ABC, тогда △ abc ∾ ABC. Точно также построимъ на ac тре—къ acd ∾ ACD и т. д., тогда abcde ∾ ABCDE (§ 100, 1).

§ 117. Построить много—къ, который бы былъ подобенъ данному много—ку P и равновеликъ данному квадрату N^2.

Обратимъ (§ 113) мно—къ P въ квадратъ M^2, и отъищемъ четвертую пропорціональную AB къ линіямъ M, N и одной изъ сторонъ ab мно—ка P. Если мы построимъ на AB мно—къ x, подобный данному P и при томъ такъ, чтобы ab и AB были сходственныя стороны, то мно—къ x будетъ требуемымъ. — Такъ какъ (§ 100)

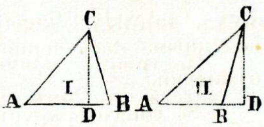
$P : x = ab^2 : AB^2$, и

$M : N = ab : AB$ или $M^2 : N^2 = ab^2 : AB^2$ то

$P : x = M^2 : N^2$. Но такъ какъ

$P = M^2$, то и $x = N^2$.

§ 118. По даннымъ тремъ сторонамъ $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, тре—ка ABC найти высоту CD и площадь F тре—ка.



Перпендикуляръ CD можетъ упасть внутри или внѣ тре—ка. Назовемъ въ обоихъ случаяхъ AD чрезъ m, тогда на первой фигурѣ $BD = c - m$, а на второй $BD = m - c$, слѣд. въ обоихъ случаяхъ $BD^2 = c^2 - 2cm + m^2$. Въ тре—кахъ ACD и BCD имѣемъ

$CD^2 = b^2 - m^2$, $CD^2 = a^2 - c^2 + 2cm - m^2$, слѣд.

$b^2 - m^2 = a^2 - c^2 + 2cm - m^2$, и потому

$m = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$. Теперь найдемъ

$$CD^2 = b^2 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right)^2 = \frac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4c^2}$$

$$CD = \frac{1}{2c}\sqrt{(2bc + b^2 + c^2 - a^2)\ (2bc - b^2 - c^2 + a^2)}$$

$$CD = \frac{1}{2c}\sqrt{[(b + c)^2 - a^2]\ [a^2 - (b - c)^2]}$$

$$CD = \frac{1}{2c}\sqrt{(a + b + c)\ (b + c - a)\ (a + c - b)\ (a + b - c)}.$$

Такъ какъ $F = \dfrac{c}{2} CD$, то

$$\mathbf{F = \frac{1}{4}\sqrt{(a + b + c)\ (b + c - a)\ (a + c - b)\ (a + b - c)}.}$$

Если обозначимъ чрезъ s полусумму сторонъ тре—ка, то $a + b + c = 2s$, $b + c - a = 2\,(s - a)$, $a + c - b = 2\,(s - b)$, $a + b - c = 2\,(s - c)$, слѣд.

$$CD = \frac{2}{c}\sqrt{s\ (s - a)\ (s - b)\ (s - c)}$$

$$F = \sqrt{s\ (s - a)\ (s - b)\ (s - c)}.$$

Если $a = 36$, $b = 29$, $c = 25$ футъ, то найдемъ $CD = 28\frac{4}{5}$ футъ и $F = 360$ □ футъ.

§ **119.** Задачи безъ рѣшенія.

1) Построить квадратъ, который былъ бы равновеликъ половинѣ даннаго квадрата.

2) Обратить данный квадратъ или данный треугольникъ въ равнобедренный треугольникъ.

3) Данный тре—къ ACD обратить въ другой тре—къ, который бы имѣлъ стороною линію m.

4) Чрезъ точку D внутри даннаго угла ABC провести между его сторонами прямую такъ, чтобы она раздѣлилась этою точкою пополамъ или въ отношеніи m : n.

5) Трапецію обратить въ параллелограмъ той же высоты.

6) Данный параллелограмъ ABCD обратить въ такой, который бы имѣлъ стороною данную линію a.

7) Раздѣлить треугольникъ на три равныя части, a) линіями, проведенными изъ вершины какого нибудь угла, b) линіями, параллельными основанію.

8) Описать кругъ, который бы проходилъ чрезъ двѣ данныя точки C и D, и касался данной прямой AB.

9) Даны два подобные много—ка; построить много—къ подобный имъ и равный ихъ суммѣ или разности.

10) Въ данную полуокружность вписать квадратъ, такъ чтобы одна сторона его совпала съ діаметромъ.

11) Построить прямоугольникъ, равновеликій данному квадрату Q, такъ чтобы сумма или разность смежныхъ сторонъ прямоугольника была равна данной линіи AB.

12) Выразить отношеніе a) между двумя квадратами, построенными на линіяхъ m и n, b) между двумя прямоугольниками, стороны которыхъ m, n и p, q, — посредствомъ отношенія двухъ прямыхъ.

13) Построить два квадрата, которые бы относились одинъ къ другому какъ m : n.

14) Данный квадратъ обратить въ два равные квадрата.

15) Построить тре—къ, который бы былъ подобенъ данному тре—ку ABC и имѣлъ высоту a.

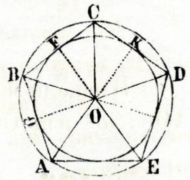
16) Найти площадь треугольника по данному периметру p и радіусу r круга вписаннаго.

17) Раздѣлить треугольникъ ABC на двѣ равновеликія части линіею, проходящею чрезъ данную точку D, лежащую на одной изъ его сторонъ.

18) Описать кругъ, который бы касался сторонъ даннаго угла ABC и проходилъ бы чрезъ точку D, лежащую внутри этого угла.

VI. О правильныхъ многоугольникахъ и измѣренiи круга.

§ **120.** 1) Около всякаго правильнаго мно—ка ABCDE можно описать кругъ. 2) Во всякiй правильный мно—къ можно вписать кругъ.



1) Чрезъ три точки A, B, C, опишемъ кругъ, коего центръ будетъ O, проведемъ прямыя AO, BO, CO . . ., и опустимъ изъ O на стороны мно—ка перпендикуляры OF, OK . . . Такъ какъ AB = CD, BF = CF (§ 44), ∡ ABF = DCF, ∡ BFO = CFO, то четыреугольникъ ODCF ≅ OABF, слѣд. OD = OA и точка D будетъ лежать на окружности, проходящей чрезъ точки A, B, C. Точно также можно доказать, что и точка E лежитъ на той же окружности.

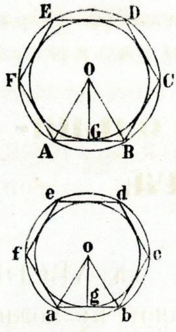
2) Всѣ стороны AB, BC, CD . . . какъ равныя хорды, равно удалены отъ центра O (§ 46), потому и кругъ, описанный изъ точки O радiусомъ OF коснется каждой стороны мно—ка.

Примѣчанiе. Точка o, общiй центръ описаннаго и вписаннаго круга, можетъ быть разсматриваема какъ центръ мно—ка. Всѣ центральные углы AOB, BOC . . . мно—ка равны между собою. Въ правильномъ n—угольникѣ каждый изъ нихъ $= \frac{4}{n}$ R.

§ **121.** Площадь правильнаго мно—ка ABCDE рявняется половинѣ произведенiя изъ его периметра на радiусъ круга вписаннаго (фиг. § 120).

Площадь каждаго изъ тре—ковъ AOB, BOC . . . равна половинѣ произведенiя основанiя на апоѳему правильнаго мно—ка, т. е. на радiусъ круга вписаннаго, на прим. $\triangle AOB = \frac{1}{2} AB.GO$, слѣд. сумма всѣхъ тре—ковъ или площадь мно—ка $ABCDE = \frac{1}{2}(AB + BC + CD + DE + EA)\, GO$.

§ **122.** 1) Правильные мно—ки ABCDEF и abcdef одинаковаго числа сторонъ подобны. 2) Въ двухъ такихъ мно—кахъ периметры относятся какъ радiусы круговъ вписанныхъ или описанныхъ, а площади какъ квадраты этихъ радiусовъ.



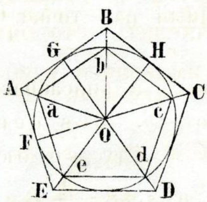
1) Углы такихъ мно—ковъ равны, потому что во всякомъ правильномъ n — угольникѣ каждый уголъ $= 2 - \frac{4}{n}$ R (§ 16, 2). т. е. зависитъ только отъ числа сторонъ; пропорціональность же сторонъ слѣдуетъ изъ того, что въ каждомъ мно—кѣ всѣ стороны равны, слѣд. мно—ки подобны (§ 78, 3).

2) Обозначимъ периметры мно—ковъ чрезъ U и u, тогда (§ 102) $U : u = AB : ab$. Пусть AO и ao будутъ радіусы описанныхъ, GO и go радіусы вписанныхъ круговъ, то по равенству угловъ $\triangle AOB \backsim aob$ и $\triangle AOG \backsim aog$, слѣд.

$$AB : ab = AO : ao = GO : go \text{ или}$$
$$U : u = AO : ao = GO : go.$$

Площади мно—ковъ относятся (§ 101) какъ $AB^2 : ab^2$, слѣд. и какъ $AO^2 : ao^2$ или $GO^2 : go^2$.

§ **123.** 1) По данному правильному мно—ку вписанному описать около круга подобный ему мно—къ, и обратно, 2) по данному описанному мно—ку найти подобный ему вписанный мно—къ.



1) Пусть abcde будетъ данный вписанный мно—къ. Если чрезъ средины F, G, H . . дугъ ae ab, ac . . . проведемъ касательныя AE, AB . . ., то онѣ образуютъ требуемый мно—къ ABCDE. — Прямая OG перпендикулярна къ AB и къ ab (§ 45, 1), слѣдовательно AB || ab. Точно также и BC || bc, CD || cd и т. д. По этому въ много—какъ ABCDE и abcde всѣ углы равны. Изъ равенства тре—ковъ теперь легко доказать, что $AB = BC = CD \ldots$ Слѣдовательно мно—къ ABCDE правильный и имѣетъ одиннаковое съ abcde число сторонъ, откуда ясно, что $ABCDE \backsim abcde$ (§ 122, 1).

2) Если ABCDE будетъ правильный описанный мно—къ, то для полученія подобнаго ему вписаннаго мно—ка стоитъ только провести прямыя OA, OB, OC . . ., и соединить точки пересѣченія этихъ линій съ кругомъ. Полученный такимъ образомъ мно—къ abcde будетъ требуемый Всѣ углы мно—ка abcde равны, потому что они измѣряются полусуммою равнаго числа равныхъ дугъ, а равенство сторонъ видно изъ равенства тре—ковъ aob, cob, и т. д.

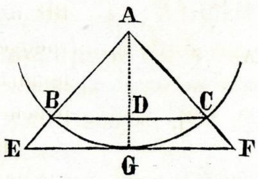
Можно также получить вписанный мно—къ abcde, соединя точки касанія F, G, H и т. д.

Слѣдствіе. Около даннаго круга можно описать всѣ правильные мно—ки, которые могутъ быть вписаны въ кругъ, и на оборотъ.

§ **124.** По данному радіусу ($AB = r$) круга и сторонѣ ($BC = a$) правильнаго вписаннаго мно—ка вычислить сторону ($EF = A$) подобнаго ему мно—ка описаннаго.

Проведемъ $AG \perp EF$, тогда $BD = \frac{1}{2}a$, $EG = \frac{1}{2}A$, и

$$AD = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - a^2}.$$



Изъ подобія тре—ковъ EAG и BAD слѣдуетъ

$$AD : BD = AG : EG \quad \text{или}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - a^2} : \frac{1}{2}a = r : \frac{1}{2}A, \quad \text{слѣд.}$$

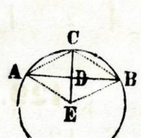
$$A = \frac{2ar}{\sqrt{4r^2 - a^2}}.$$

При $r = 1$ будемъ имѣть

$$A = \frac{2a}{\sqrt{4 - a^2}}.$$

§ **125.** По данному радіусу ($AE = r$) круга и сторонѣ ($AB = a$) вписаннаго правильнаго мно—ка вычислить сторону ($AC = b$) вписаннаго правильнаго же мно—ка, имѣющаго вдвое болѣе сторонъ.

Положимъ, что дуга AB раздѣлена въ точкѣ C пополамъ, тогда $AD = \frac{1}{2}a$ и линія AC ($= BC$) будетъ сторона b искомаго мно—ка. Изъ тре—ка ACD имѣемъ



$$b^2 = \frac{1}{4}a^2 + CD^2 \quad \text{или}$$

$$b^2 = \frac{1}{4}a^2 + (r - DE)^2,$$

$$b^2 = \frac{1}{4}a^2 + r^2 - 2r \,.\, DE + DE^2.$$

Но $DE^2 = r^2 - \frac{1}{4}a^2$, слѣд. $DE = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - a^2}$.

Вставивъ эту величину въ выраженіе b^2, получимъ

$$b^2 = \frac{1}{4}a^2 + r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2} + r^2 - \frac{1}{4}a^2, \text{ или}$$

$$b^2 = 2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2}, \text{ слѣдовательно}$$

$$b = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2}}.$$

§ **126.** Слѣдствія. 1) Если $r = 1$, то

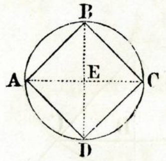
$$b = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a^2}}.$$

2) Эта формула, рѣшенная относительно a, даетъ

$$a = b\sqrt{4 - b^2}.$$

Посредствомъ этого выраженія по данной сторонѣ вписаннаго мно—ка можно найти сторону вписаннаго же мно—ка, имѣющаго вдвое менѣе сторонъ.

§ 127. Въ кругѣ вписать правильные мно—ки, имѣющіе 4, 8, 16, . . . сторонъ.



Проведемъ два перпендикулярные діаметра AC и BD и соединимъ ихъ оконечности, тогда ABCD и будетъ требуемый квадратъ, потому что углы ABC, BCD . . . прямые (§ 56, 3), а стороны AB, BC . . . равны по ра равенству тре—ковъ ABE, CBE . . .

Раздѣлимъ пополамъ дуги AB, BC . . . и соединимъ точки дѣленія, тогда получимъ правильный 8—угольникъ. Если будемъ продолжать далѣе дѣленіе, то получимъ мно—ки, имѣющіе 16, 32 . . . сторонъ.

§ 128. Для выраженія стороны квадрата въ единицахъ радіуса круга описаннаго имѣемъ уравненіе $AB^2 = AE^2 + BE^2 = 2AE^2$, слѣд. $AB = AE\sqrt{2}$, и если радіусъ $AE = 1$, то $AB = \sqrt{2}$.

Если мы вставимъ въ формулу § 126, 1 вмѣсто a величину $\sqrt{2}$, то получимъ сторону 8—угольника вписаннаго, выраженную въ единицахъ радіуса, $= \sqrt{2 - \sqrt{2}}$.

Вставивъ эту послѣднюю величину вмѣсто a въ туже самую формулу, получимъ сторону 16—угольника $= \sqrt{2 - \sqrt{4 - (2 - \sqrt{2})}}$ $= \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$.

§ 129. Въ кругѣ вписать правильные мно—ки, имѣющіе 3, 6, 12, ... сторонъ.

Засѣчемъ на окружности 6 разъ хорду, равную радіусу AO, и соединимъ точки дѣленія A, B, C . . ., тогда получимъ правильный шестиугольникъ ABCDEF. Потому что въ равностороннемъ тре—кѣ AOB каждый уголъ равенъ $\frac{2}{3}R$ или $\frac{4}{6}R$, т. е. уголъ AOB измѣряется шестою частью цѣлой окружности, потому и радіусъ $AO = AB$ составляетъ хорду шестой части цѣлой окружности, слѣд. отложится на этой послѣдней 6 разъ. Всѣ углы ABC, BCD . . . . равны, какъ измѣряемые полусуммою равнаго числа равныхъ дугъ.

Если проведемъ линіи AC, CE, то получимъ правильный тре—къ. Хорда, соотвѣтствующая половинѣ дуги AB, будетъ сторона правильнаго 12—угольника и т. д.

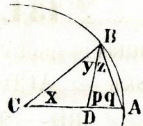
§ 130. Если принять радіусъ за единицу, то сторона 6—угольника вписаннаго $= 1$.

Положивъ $b = 1$ въ формулѣ § 126, 2, получимъ сторону прав. тре—ка вписаннаго $= \sqrt{3}$.

Положивъ $a = 1$ въ формулѣ § 126, 1, получимъ сторону прав. 12—угольника $= \sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

Если это послѣднее выраженіе вставимъ опять въ туже формулу вмѣсто a, то получимъ сторону прав. 24—угольника $= \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$.

§ 131. Въ кругѣ вписать правильные мно—ки, имѣющіе 5, 10, 20 ... сторонъ.



Если раздѣлимъ радіусъ CA въ среднемъ и крайнемъ отношеніи въ точкѣ D и возмемъ хорду AB, равную бо́льшему отрѣзку CD, то AB будетъ сторона десятиугольника. Проведемъ CB и BD, тогда имѣемъ (§ 109)

$$AC : CD = CD : AD \text{ или}$$
$$AC : AB = AB : AD,$$

и такъ какъ тре—ки ABD и ACB кромѣ того имѣютъ уголъ q общій, то они подобны (§ 93), слѣд. $\measuredangle z = x$. Но какъ $\triangle ACB$ есть равнобедренный, то и въ $\triangle ABD$ должно быть $BD = AB = CD$, а посему $\measuredangle p = q$, $y = x = z$. Внѣшній уголъ $p = x + y = 2x$, слѣд. и $\measuredangle q = 2x$. Въ $\triangle ACB$ имѣемъ (§ 13)

$$x + y + z + q = 2R \text{ или}$$
$$x + x + x + 2x = 2R, \text{ т. е. } 5x = 2R,$$

слѣд. $x = \frac{2}{5}R = \frac{4}{10}R$. Изъ этого слѣдуетъ, что соотвѣтствующая углу x дуга AB есть $\frac{1}{10}$ цѣлой окружности и потому и AB будетъ хорда десятой части окружности.

Если въ правильномъ 10—угольникѣ соединимъ вершины чрезъ одну, то получимъ прав. 5—угольникъ. Чрезъ послѣдовательное же дѣленіе дугъ, стягиваемыхъ сторонами 10—угольника, получимъ мно—ки о 20, 40, 80 . . . сторонахъ.

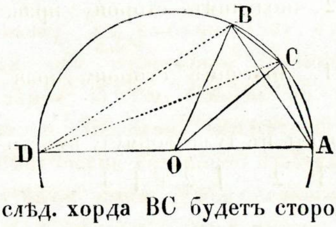
§ 132. Чтобы выразить сторону прав. 10—угольника въ единицахъ радіуса, стоитъ найти бо́льшій отрѣзокъ радіуса, раздѣленнаго въ среднемъ и крайнемъ отношеніи. Положивъ, что бо́льшій отрѣзокъ $= x$ и радіусъ $= 1$, получимъ пропорцію

$$1 - x : x = x : 1, \text{ откуда } x = \tfrac{1}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

Если мы вставимъ это выраженіе вмѣсто b въ формулу § 126, 2, то получимъ сторону прав. 5—угольника $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)\sqrt{4 - \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)^2}$, или

$$\tfrac{1}{2}(\sqrt{5}-1)\sqrt{\tfrac{1}{2}(5+\sqrt{5})} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}.$$

§ 133. Въ кругѣ вписать правильные мно—ки, имѣющіе 15, 30, 60 . . . сторонъ.



Засѣчемъ на кругѣ отъ точки A по одному и тому же направленію хорду AB, равную сторонѣ прав. 6—угольника, и хорду AC, равную сторонѣ прав. 10—угольника; тогда разность CD соотвѣтствующихъ дугъ равняется $\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{1}{15}$ цѣлой окружности, слѣд. хорда BC будетъ сторона прав. 15—угольника.

Дѣля дугу BC послѣдовательно пополамъ мы найдемъ стороны мно—ковъ, имѣющихъ 30, 60 . . . . сторонъ.

§ 134. Для выраженія стороны BC прав. 15—угольника въ единицахъ радіуса имѣемъ $AB=1$ и $AC=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ (§ 132); и такъ какъ $\measuredangle ACD = ABD = R$, то (§ 84) получимъ

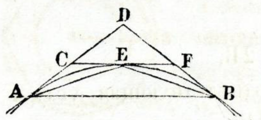
$$BD=\sqrt{3} \text{ и } CD=\sqrt{4-\tfrac{1}{4}(\sqrt{5}-1)^2}=\tfrac{1}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}};$$

по § 105 $AD.BC+AC.BD=AB.CD$, т. е.

$$2.BC+\tfrac{1}{2}(\sqrt{5}-1)\sqrt{3}=\tfrac{1}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}, \text{ слѣд.}$$

$$BC=\tfrac{1}{4}(\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{15}+\sqrt{3})=0,4158234.$$

§ 135. С ъ у м н о ж е н і е м ъ ч и с л а с т о р о н ъ п е р и м е т р ъ в п и с а н н а г о п р а в. м н о — к а у в е л и ч и в а е т с я, а о п и с а н н а г о у м е н ь ш а е т с я.

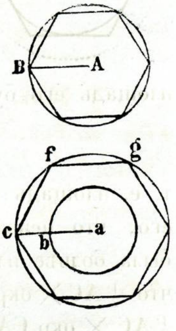


Пусть будетъ AB сторона какого—нибудь вписаннаго прав. мно—ка, а AE и BE стороны вписаннаго мно—ка двойнаго числа сторонъ, тогда $AE+BE>AB$, изъ чего слѣдуетъ, что периметръ втораго вписан. мн—ка болѣе периметра перваго. Далѣе, если AD и BD будетъ половины двухъ сторонъ описан. мн—ка, а CF сторона описан. мн—ка двойнаго числа сторонъ, то $CD+DF>CF$, слѣд. периметръ втораго описаннаго мн—ка менѣе периметра перваго

Такъ какъ съ умноженіемъ числа сторонъ вписанныхъ и описанныхъ мн—ковъ ихъ периметры все болѣе и болѣе приближаются къ окружности, то можно получить такіе два мн—ка, одинъ вписанный, а другой описанный, что разность ихъ периметровъ будетъ менѣе всякой данной величины, какъ бы мала она ни была. Слѣдовательно величина окружности, заключащейся между периметрами соотвѣтствующихъ вписанныхъ и описанныхъ мн—ковъ, еще менѣе будетъ различаться отъ периметра одного изъ этихъ мн—ковъ, нежели периметры самыхъ мн—ковъ между собою. Посему всегда возможно будетъ найти такой вписанный или описанный мн—къ, что разность между его периметромъ и окружностью будетъ менѣе всякой данной по произволу величины.

§ **136.** Окружности круговъ относятся какъ ихъ радіусы или діаметры.

Периметръ вписаннаго мно—ка будетъ увеличиваться съ увеличеніемъ его сторонъ, между тѣмъ какъ периметръ описаннаго мно—ка въ томъ же случаѣ будетъ уменьшаться, но первый всегда менѣе, а второй болѣе окружности. Чрезъ послѣдовательное увеличеніе числа сторонъ одного изъ этихъ мно—ковъ величину его периметра можно такъ приблизить къ величинѣ окружности, что разность между ними можетъ быть сдѣлана менѣе всякой данной величины; потому кругъ можно разсматривать какъ правильный мно—къ съ безконечно большимъ числомъ безконечно малыхъ сторонъ. Если мы представимъ два круга какъ два правильные мно—ка одинаковаго числа сторонъ, то къ нимъ можно приложить теорему § 122, 2, а именно, что периметры правильныхъ мно—ковъ одинаковаго числа сторонъ относятся какъ радіусы круговъ вписанныхъ или описанныхъ, слѣд. и круги будутъ относиться какъ ихъ радіусы, или тоже самое, какъ ихъ діаметры.



Другое доказательство. Положимъ, что пропорція окр. AB : окр. ab = AB : ab не справедлива, а будетъ существовать пропорція

$$\text{окр. } AB : \text{окр. } ab = AB : ac,$$

гдѣ $ac > ab$. Впишемъ въ кругъ радіуса ac прав. мно—къ по какому нибудь вышеописанному способу. Чрезъ послѣдовательное дѣленіе дугъ, стягиваемыхъ сторонами, можно наконецъ получить мно—къ съ такими малыми сторонами, что онъ не будетъ достигать круга ab. Обозначимъ периметръ этого мно—ка чрезъ p и впишемъ въ кругъ AB подобный ему мно—къ, котораго периметръ назовемъ чрезъ P, тогда по § 122, 2 будемъ имѣть

$$P : p = AB : ac.$$

Изъ этихъ двухъ пропорцій слѣдуетъ, что

$$\text{окр. } AB : P = \text{окр. } ab : p,$$

что невозможно, потому что окр. $AB > P$, а окр. $ab < p$, слѣд. и наше предположеніе, что четвертый членъ пропорціи окр. AB : окр. ab = AB : ab болѣе ab, не возможно. Точно также можно доказать, что этотъ членъ не можетъ быть менѣе ab.

§ **137.** Слѣдствіе. Дуги AB и ab разныхъ круговъ, соотвѣтствующія равнымъ центральнымъ угламъ, относятся какъ ихъ радіусы AO и ao (фиг. § 122).

$$\text{По § 53 } \measuredangle ACB : 4R = \text{дуга } AB : \text{окр. } AO$$
$$\text{и } \measuredangle acb : 4R = \text{дуга } ab : \text{окр. } ao,$$

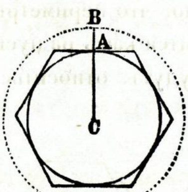
но такъ какъ $\measuredangle$ AOB $=$ aob, то

$$\text{дуга } AB : \text{дуга } ab = \text{окр. } AO : \text{окр. } ao = AO : ao.$$

§ 138. Площадь круга равна половинѣ произведенія окружности на радіусъ.

Если будемъ разсматривать кругъ какъ прав. мно—къ безчисленнаго множества безконечно малыхъ сторонъ, то предложеніе § 121, по которому площадь прав. мно—ка равняется половинѣ произведенія его периметра на радіусъ вписан. круга, можетъ быть примѣнено и къ самому кругу, коего площадь слѣд. будетъ равняться половинѣ произведенія окружности на радіусъ.

Другое доказательство.



Пусть $\frac{1}{2}$ AC $\times$ окр. CA не будетъ выраженіемъ площади круга CA, а мѣрою бо́льшаго круга CB, такъ что

$$\tfrac{1}{2} AC \times \text{окр. } CA = \text{площ. кр. } CB.$$

Опишемъ около круга CA прав. мно—къ съ такимъ числомъ сторонъ, чтобы онѣ не касались круга BC, и обозначимъ периметръ этого мно—ка чрезъ P, тогда площадь его будетъ равна $\frac{1}{2}$ AC $\times$ P. Такъ какъ окр. CA $<$ P, то

$$\tfrac{1}{2} CA \times \text{окр. } CA < \tfrac{1}{2} CA . P \text{ слѣд. и}$$

$$\text{площ. кр. } CB < \tfrac{1}{2} CA \times P,$$

т. е. площадь круга CB менѣе площади мно—ка, заключающагося внутри его, что невозможно, а потому не можетъ быть чтобы $\frac{1}{2}$ AC $\times$ окр. CA была больѣе площади круга CA. Подобнымъ образомъ можно доказать, что $\frac{1}{2}$ AC $\times$ окр. CA не можетъ быть меньше площади круга CA, а потому $\frac{1}{2}$ AC $\times$ окр. CA $=$ площ. кр. CA.

§ 139. Площадь сектора AOB равняется половинѣ произведенія его дуги AB на радіусъ AO. (Фиг. § 129).

Такъ какъ секторъ относится къ площади круга, какъ его дуга къ цѣлой окружности, то мы имѣемъ

$$\text{сект. } AOB : \tfrac{1}{2} AO \times \text{окр. } OA = \text{дуга } AB : \text{окр. } OA,$$

$$\text{слѣд. сект. } AOB = \tfrac{1}{2} AO \times \text{дуга } AB.$$

§ 140. 1) Во всѣхъ кругахъ отношеніе окружности къ діаметру есть величина постоянная.

Означивъ окружности двухъ круговъ чрезъ P и p, и ихъ радіусы чрезъ R и r, будемъ имѣть (§ 136)

$$P : p = 2R : 2r, \text{ слѣд. и } P : 2R = p : 2r.$$

2) Постоянное отношеніе окружности къ діаметру обозначается чрезъ π, такъ что, если p будетъ окружность какого нибудь круга, а r его радіусъ, то

$$\boldsymbol{\Pi} = \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{2r}}.$$

3) Изъ сего слѣдуетъ формула

$$\mathbf{p} = \mathbf{2r}\,\boldsymbol{\Pi},$$

т. е. окружность круга равна удвоенному радіусу, умноженному на постоянную величину π.

4) Если діаметръ круга будетъ $= 1$, то окружность равна величинѣ π, потому что, вставивъ въ предъидущей формулѣ $2r = 1$, получимъ $p = \pi$.

5) Если обозначимъ чрезъ F площадь круга, чрезъ p его окружность, а чрезъ r радіусъ, то (§ 138) $F = \frac{1}{2} pr$. Но такъ какъ $p = 2r\pi$, то

$$\mathbf{F} = \mathbf{r}^2\,\boldsymbol{\Pi},$$

т. е. площадь круга равняется квадрату радіуса, умноженному на постоянную величину π.

6) Если обозначимъ чрезъ d діаметръ круга и вставимъ въ предъидущую формулу вмѣсто r величину $\frac{1}{2}d$, то получимъ $F = \frac{1}{4} d^2 \pi$.

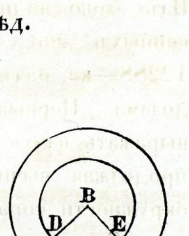
§ 141. Площади круговъ относятся какъ квадраты ихъ радіусовъ или діаметровъ.

Если F и f будутъ площади двухъ круговъ, R и r ихъ радіусы, D и d діаметры, то

$$F = R^2 \pi = \tfrac{1}{4} D^2 \pi, \quad f = r^2 \pi = \tfrac{1}{4} d^2 \pi, \text{ слѣд.}$$

$$F : f = R^2 : r^2 = D^2 : d^2.$$

§ 142. Секторы ABC и DBE разныхъ круговъ, имѣющіе равные центральные углы, относятся какъ квадраты радіусовъ круговъ.



Такъ какъ $ABC : DBE = \frac{1}{4} AB \times AC : \frac{1}{4} DB \times DE$,

но $\smile AC : \smile DE = AB : DB$, то

$ABC : DBE = AB^2 : DB^2$.

§ 143. Найти приближенное отношеніе Π окружности къ діаметру.

Вычисляя послѣдовательно периметры вписанныхъ и описанныхъ прав. мно—ковъ все съ бóльшимъ и бóльшимъ числомъ сторонъ въ единицахъ радіуса, мы получимъ два ряда чиселъ, изъ которыхъ одни будутъ менѣе, а другія болѣе окружности. Съ увеличеніемъ числа сторонъ мно—ковъ эти ряды сближаются все болѣе и болѣе. Если начнемъ съ прав. 6—угольника вписаннаго, то получимъ сторону его $a = 1$, а сторону описаннаго 6—угольника по § 124 $A = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Слѣдовательно периметръ вписан. 6—угольника $= 6$, а периметръ описан. 6—угольника $= \frac{12}{\sqrt{3}} = 6,9282\ldots$ Между этими двумя числами содержится величина окружности. Чтобы получить болѣе тѣсные предѣлы, перейдемъ къ мно—камъ о 12, 24 ... сторонахъ. Пусть будутъ $a', a'', a'''\ldots$ стороны вписанныхъ 12, 24, 48 ... угольниковъ, и $A', A'', A'''\ldots$ стороны соотвѣтствующихъ мно—ковъ описанныхъ. Если въ формулу § 125 вставимъ $a = 1$, тогда $a' = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$, и когда эта величина будетъ вставлена въ формулу § 124, то получимъ $A' = \frac{2a'}{\sqrt{4 - a'^2}}$. Продолжая такимъ образомъ будемъ имѣть слѣдующую таблицу:

Стороны.		Периметры.
$a' = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$	$= 0,517638090205$	$12\,a' = 6,2116571$
$A' = \frac{2a'}{\sqrt{4 - a'^2}}$	$= 0,535898384826$	$12\,A' = 6,4307806$
$a'' = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a'^2}}$	$= 0,261052384440$	$24\,a'' = 6,2652572$
$A'' = \frac{2a''}{\sqrt{4 - a''^2}}$	$= 0,263304995174$	$24\,A'' = 6,3193199$

Продолжая вычисленіе такимъ образомъ напр. до 12288—угольника, найдемъ, что периметръ вписан. 12288—ка $= 6,2831852$
периметръ описан. 12288—ка $= 6,2831854$.

Изъ этого видно, что разность между периметрами вписанныхъ и описанныхъ мно—ковъ становится менѣе и менѣе, такъ что периметры 12288—ка различаются между собою только двумя десяти—милліонными долями. Первыя семь цифръ 6.283185, общія обѣимъ числамъ, будутъ выражать самую окружность въ единицахъ радіуса. При этомъ ясно, что продолжая вычисленіе еще далѣе, мы могли бы опредѣлить величину окружности гораздо точнѣе.

Взявъ за окружность среднее ариѳметическое между периметрами 12228—угольниковъ вписанныхъ и описанныхъ, мы получимъ для ней 6,2831853. Такъ какъ мы приняли сторону вписаннаго 6—угольника или радіусъ круга $= 1$, то діаметръ круга $= 2$; слѣд. приблизительно $\pi = 6,2831853 : 2$, т. е.

$$\pi = 3,1415926,$$

Архимедъ вычисливъ периметръ 96—угольника, нашелъ $\pi = \frac{22}{7}$. Болѣе точно отношеніе $\pi = \frac{355}{113}$. Въ новѣйшее время отношеніе π вычислено Клаусеномъ (въ Дерптѣ) съ точностію болѣе 500 десятичныхъ знаковъ.

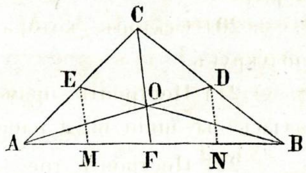
§ 144. Задачи безъ рѣшенія.

1) Построить тре—къ по двумъ даннымъ сторонамъ a, b и перпендикуляру p, опущенному изъ конца первой изъ этихъ сторонъ на другую.

2) Построить тре—къ по данному основанію AB, противолежащему ему углу a, и отношенію m : n между другими сторонами.

3) Построить кругъ, площадь котораго равнялась бы площади, заключающейся между двумя данными концентрическими кругами.

4) Доказать, что три прямыя AD, BE, CF, соединяющія вершины тре—ка ABC съ срединами противолежащихъ сторонъ, пересѣкаются въ одной и той же точкѣ O, удаленной отъ каждой вершины на $\frac{2}{3}$ линіи, соотвѣтствующей вершинѣ.



5) Раздѣлить данный треугольникъ на четыре равныя (≅) треугольника.

6) Данъ кругъ, радіусъ котораго R, и внутри круга дана точка A. Описать радіусомъ r окружность, которая проходила бы чрезъ точку A и касалась даннаго круга изнутри.

7) Найти отношеніе между гипотенузою прямоугольнаго тре—ка и прямою, соединяющею ея средину съ вершиною прямаго угла.

8) Въ данный секторъ вписать кругъ.

9) Описать кругъ радіусомъ r такъ, чтобы онъ отсѣкалъ отъ сторонъ даннаго угла a хорды, равныя линіи m.

10) На окружности даны двѣ точки A, B. Найти на ней третью точку x, которой разстоянія отъ двухъ первыхъ относились бы какъ m : n.

11) Радіусомъ R описать окружность такъ, чтобы она отстояла отъ точки A на разстояніе m, и отъ точки B на разстояніе n.

12) Внутри тре—ка найти точку, чтобы прямыя, проведенныя отъ ней къ вершинамъ угловъ раздѣлили тре—къ на три равновеликіе тре—ка.

13) Найти на данной прямой AB точку, чтобы проведенная изъ ней касательная къ данному кругу равнялась линіи m.

14) На данной линіи AB построить четыреугольникъ, равновеликій данному.

15) Превратить прямоугольникъ, имѣющій стороны a, b, въ другой прямоугольникъ, котораго стороны относились бы между собою какъ m : n.

16) Раздѣлить тре—къ пополамъ линіею, перпендикулярною къ одной изъ его сторонъ.

17) Построить тре—къ по данному углу a, прилежащей къ нему сторонѣ AB и перпендикуляру p, опущенному изъ вершины даннаго угла на противолежащую сторону.

18) Построить тре—къ по данному углу a и перпендикулярамъ m и n, опущеннымъ изъ концовъ прилежащихъ къ нему сторонъ другъ на друга.

19) Радiусомъ r описать окружность такъ, чтобы она отстояла отъ данной точки P на разстоянiе p, и отсѣкала отъ данной линiи AB хорду m.

20) Секторъ, котораго центральный уголъ прямой, превратить въ полукругъ.

21) Построить прямоугольный тре—къ, котораго гипотенуза равнялась бы линiи m, а площадь — квадрату p^2.

22) Построить тре—къ по данной сторонѣ a, и перпендикулярамъ m и n, опущеннымъ изъ ея концовъ на противолежащiя стороны.

23) Чрезъ точку A привести прямую, которая бы отрѣзала въ данномъ кругѣ дугу, b вмѣщающую уголъ m.

24) Изъ точки A данной окружности провести такую хорду, чтобы соотвѣтствующiй ей центральный уголъ былъ равенъ углу a.

25) Построить прямоугольный тре—къ по данной гипотенузѣ m и условiю, чтобы одинъ изъ острыхъ угловъ былъ вдвое болѣе другаго.

26) По данной суммѣ S двухъ смежныхъ сторонъ построить прямоугольникъ, равновеликiй данному квадрату m^2.

27) Разносторонній треугольникъ превратить въ равносторонній.

28) Въ данный тре—къ вписать квадратъ

29) Построить тре—къ по тремъ перпендикулярамъ a, b, c, опущеннымъ изъ вершинъ тре—ка на противолежащiя стороны.

30) Изъ точки A провести къ данной окружности сѣкущую такъ, чтобы она раздѣлилась окружностью пополамъ.

31) Изъ точки A (фиг. § 111) провести къ данной окружности сѣкущую (AF) такъ, чтобы она раздѣлилась окружностью въ крайнемъ и среднемъ отношенiи, и именно хорда (DF) была бо́льшая часть раздѣленной линiи AF.

32) Данъ уголъ ABC и внутри его точка M. На сторонѣ AC найти точку, равно отстоящую отъ стороны AB и данной точки M.

33) Провести линiю, которая бы отсѣкала отъ двухъ данныхъ окружностей дуги, вмѣщающiя первая уголъ m, а вторая уголъ n.

2

54

Въ изданіи **Шнакенбурга** въ Дерптѣ кромѣ того вышли слѣдующія книги:

Обозрѣніе русской исторіи отъ начала Руси до нашихъ временъ. Въ переплетѣ 1 руб. 20 коп.

Предлежащая книга одобрепа утвержденнымъ Г. Товарищемъ Министра Пароднаго Просвѣщенія отъ 5го Іюня 1878 г. за No. 11 въ качествѣ руководства или учебнаго пособія по русской исторіи, а учвержденнымъ Г. Попечителемъ Дерптскаго Учебнаго Округа постановленіемъ Попечительскаго Совѣта отъ 19го Октяб. 1878 г. **рекомендована** къ упоmребленію въ качествѣ руководства по русской исторіи для учебныхъ заведеній округа.

Гехель, Дръ. Карлъ, **Планиметрія** по системѣ Лежандра для употребленія въ гимназіяхъ и реальныхъ училищахъ 2-ое изданіе Въ переплетѣ 60 коп.

— **Стереометрія** по Лежандру для употребленія въ гимназіяхъ и реальныхъ училищахъ. 2-ое изданіе Въ переплетѣ 60 коп.

— **Плоская Тригонометрія** для употребленія въ гимназіяхъ и реальныхъ училищахъ. 2-ое изданіе. Въ переплетѣ 60 коп.

Шрекникъ, Евг., **Этимологія нѣмецкаго языка** для русскаго юношества. Въ переплетѣ 90 коп.

Разговоры русско-нѣмецко-эстскіе. Бъ переплетѣ 60 коп.

Благовѣщенскій, В., Русская азбука и книга для чтенія для нѣмецкаго юношества. 8-ое изданіе. Въ переплетѣ 50 коп.

Генертъ, К., Таблица отношеній Русскихъ и иностранныхъ зодотыхъ монетъ на уплату таможенныхъ пошдинъ. 25 коп.

Печатано въ типографіи Шнакенбурга въ Дерптѣ.